UNIVERSITÉ DE OUAGADOUGOU

UNITÉ DE FORMATION ET DE RECHERCHE
SCIENCES EXACTES ET APPLIQUÉES

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat de 3e cycle

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Algèbre Génétique

ALGÈBRES DE BERNSTEIN ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par

André CONSEIBO

Soutenue le 11 octobre 2001 devant le jury composé de :

Président :	Pr Artibano MICALI	Université Montpellier II
Membres :	Pr Akry KOULIBALY	Université de Ouagadougou
	Pr Moussa OUATTARA	Université de Bobo-Dioulasso
	Pr Théodore M. Y. TAPSOBA	Université de Bobo-Dioulasso
	Pr Gérard KIENTEGA	Université de Ouagadougou

Je remercie Monsieur le Professeur Artibano MICALI de l'université Montpellier II pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur et président du jury. Ses nombreux conseils m'ont été fort utiles.

Je remercie Monsieur le Professeur Yves SUREAU de l'université Blaise Pascal qui a accepté rapporter sur ce mémoire.

Messieurs les Professeurs Akry KOULIBALY, Théodore M. Y. TAPSOBA et Gérard KIENTEGA ont accepté faire partie du jury. Qu'ils reçoivent mes remerciements.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur Moussa OUATTARA qui a dirigé ce travail. Ses nombreux encouragements, ses divers soutiens et sa grande disponibilité, ce malgré ses charges administratives et académiques, ont été déterminants pour la conduite de ce travail.

Ma reconnaissance va enfin à tous mes collègues, amis, parents, frères et sœurs en Christ qui m'ont apporté leur soutien dans la préparation de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie des algèbres génétiques est une branche des algèbres non associatives sans élément unité. Elle a pris naissance grâce notamment aux écrits de I. M. H. Etherington en 1939 et de R. D. Schafer en 1947. Le premier a introduit les notions d'algèbre pondérée, d'algèbre train et d'algèbre train spéciale. Le second a été à l'origine des objets connus actuellement sous l'appellation *algèbres génétiques au sens de Schafer*.

La théorie a par la suite connu un essort particulier avec les travaux de H. Gonshor (1960), auteur de la notion *d'algèbres génétiques au sens de Gonshor*, et ceux de P. Holgate (1975) qui a défini algébriquement *les algèbres de Bernstein*. Ces algèbres découlent d'une traduction en termes algébriques du problème posé par S. Bernstein en 1923, portant sur la classification des opérateurs d'évolution satisfaisant au principe de stationnarité.

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres. Dans le premier, nous rappelons quelques résultats de base utilisés dans les trois autres chapitres. Le second est consacré principalement à l'étude des δ-algèbres de Bernstein monogènes. Dans le troisième, nous étudions le lien entre l'algèbre des multiplications d'une algèbre et l'algèbre des multiplications de sa dupliquée. Enfin le dernier chapitre porte sur la résolution d'une équation de Riccati dans les δ-algèbres de Bernstein. D'après Andreoli et Heuch, les solutions de cette équation admettent une interprétation biologique .

1

ALGÈBRES GÉNÉTIQUES

1.1. Généralités

Dans tout le paragraphe, K sera un corps commutatif et toute K-algèbre sera commutative.

Soit A une K-algèbre. Pour tout élément x de A et pour tout entier $k \geq 1$, on définit les puissances principales et les puissances pleines de x, respectivement par

$x^1 = x$, $x^{k+1} = xx^k$ et $x^{[1]} = x$, $x^{[k+1]} = x^{[k]}x^{[k]}$.

Un élément x de A est dit *nilpotent d'indice* $k \geq 1$, si k est le plus petit entier tel que $x^k = 0$. L'algèbre A est dite une *nil-algèbre de nil-index* k, si k est le plus petit entier tel que $x^k = 0$ pour tout x dans A.

On définit inductivement la puissance principale A^k et la puissance pleine $A^{[k]}$ de A par $A^1 = A$, $A^{k+1} = AA^k$ et $A^{[1]} = A$, $A^{[k+1]} = A^{[k]}A^{[k]}$.

On dira que l'algèbre A est *nilpotente* (resp. *résoluble*) *d'index* k, si $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (resp. $A^{[k]} = 0$ et $A^{[k-1]} \neq 0$).

Le couple (A, ω) est une K-*algèbre pondérée* si $\omega : A \to K$ est un morphisme non nul de K-algèbres.

Si A est une K-algèbre de dimension finie, on dira que A est une *algèbre génétique (au sens de Gonshor)* s'il existe une base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ de A sur K telle que la table de multiplication de A relativement à cette base soit donnée par :

$e_0^2 = e_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{00k}e_k$; $e_0e_j = \sum_{k=j}^{n} \gamma_{0jk}e_k$ et $e_ie_j = \sum_{k=max(i,j)+1}^{n} \gamma_{ijk}e_k$ pour tous $i, j \geq 1$.

Les constantes de structure γ_{0ii}, $i = 0, 1, \dots, n$ sont appelées les *racines train* de A. Les algèbres génétiques (au sens de Gonshor) sont des algèbres pondérées. Il suffit pour cela de poser $\omega(e_0) = 1$ et $\omega(e_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

Une K-algèbre A est une *algèbre de Jordan* si $x^2(yx) = (x^2y)x$ quels que soient x, y dans A.

Une K-algèbre pondérée (A, ω) est une *algèbre train* s'il existe un entier positif r et des scalaires $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}$ tels que $x^r + \gamma_1\omega(x)x^{r-1} + \ldots + \gamma_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$ pour tout x dans A. Le plus petit entier r ayant cette propriété est le *rang* de A.

Une K-algèbre pondérée (A, ω) est une *algèbre train spéciale* si l'idéal $N = ker\omega$ est nilpotent et ses puissances principales sont des idéaux de A.

Les résultats suivants sont bien connus :

- Toute algèbre train spéciale est génétique mais la réciproque est fausse ([26]).

- Toute algèbre génétique est une algèbre train mais il existe des algèbres train qui ne sont ni train spéciales ni même génétiques ([26]).

- Si (A, ω) est une algèbre train (resp. génétique) alors $N = ker\omega$ est nil (resp. nilpotent) ([26]).

1.2. Les algèbres de Bernstein

Soit K un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2

On dira qu'une K-algèbre pondérée (A, ω) est une *algèbre de Bernstein* si pour tout x dans A, on a $x^{[3]} = \omega(x)^2x^2$.

Toute algèbre de Bernstein admet une pondération unique. Si A est une algèbre de Bernstein, l'ensemble des idempotents non nuls de A est donné par $I_p(A) = \{x^2 \mid x \in A, \omega(x) = 1\}$.

Soient A une K-algèbre de Bernstein et e un idempotent non nul de A. On a la décomposition de Peirce suivante : $A = Ke \dotplus U_e \dotplus V_e$ avec $U_e = \{x \mid x \in A, ex = \frac{1}{2}x\}$ et $V_e = \{x \mid x \in A, ex = 0\}$.

On montre que $I_p(A) = \{e + u + u^2, u \in U_e\}$.

Proposition 1.2.1 [17]. — *Soit $A = Ke \dotplus U_e \dotplus V_e$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein A, relativement à l'idempotent e. On a :*

(*i*) $U_e^2 \subset V_e$, $U_eV_e \subset U_e$, $V_e^2 \subset U_e$, $U_eV_e^2 = 0$.

(*ii*) $u^3 = 0$ *et* $u_1(u_2u_3) + u_2(u_3u_1) + u_3(u_1u_2) = 0$.

$u(uv) = 0$ *et* $u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0$.

$(uv)^2 = 0$, $(u_1v)(u_2v) = 0$ *et* $(uv_1)(uv_2) = 0$

quels que soient les éléments u, u_i *dans* U_e, v, v_i *dans* V_e, *pour* $i = 1, 2$.

Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein A. On dira que A est *exceptionnelle* (ou *exclusive*) si $U_e^2 = 0$ et *normale* si $U_eV_e + V_e^2 = 0$.

En dimension finie, on appelle *type de* A, le couple $(1 + r, s)$ où $r = dimU_e$ et $s = dimV_e$. Le type de A est indépendant de l'idempotent e choisi.

On a le résultat suivant.

PROPOSITION 1.2.2. — *Soit* A *une algèbre de Bernstein. L'algèbre* A *est exceptionnelle si et seulement si* $(xy)^2 = \omega(xy)xy$ *pour tous* x *et* y *dans* A.

THÉORÈME 1.2.3 [20]. — *Soit* A *une algèbre de Bernstein. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est une algèbre train ;*

(ii) $N = ker\omega$ *est nil ;*

(iii) A *vérifie une équation du type* $(x^3 - \omega(x)x^2)(x - \frac{1}{2})^{r-3} = 0$ *pour un certain* r.

THÉORÈME 1.2.4. — *Soit* A *une algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est une algèbre train spéciale ;*

(ii) A *est une algèbre génétique ;*

(iii) N *est nilpotent.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont toujours vraies même si l'algèbre n'est pas de Bernstein ([26]). Pour (iii) $\Rightarrow$ (i), cf.[20].

THÉORÈME 1.2.5 [22]. — *Soit* $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ *une algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est une algèbre à puissances associatives ;*

(ii) A *est une algèbre de Jordan ;*

(iii) *Pour tout* x *dans* A, *on a* $x^3 = \omega(x)x^2$;

(iv) $V_f^2 = 0$, $\forall f \in I_p(A)$;

(*v*) $V_e^2 = 0$ *et* $v(vu) = 0$, $\forall u \in U_e$, $\forall v \in V_e$.

1.3. Structure des δ-algèbres de Bernstein

Soient K un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2, (A, ω) une K-algèbre pondérée et $\delta \in K$ tel que $\delta \neq \frac{1}{2}$. On définit l'opérateur $V : A \to A, x \mapsto (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta\omega(x)x)$. Sur A, on définit une nouvelle multiplication par $x \circ y = \frac{1}{4}(V(x+y) - V(x-y))$ pour tous x et y dans A. La nouvelle algèbre obtenue est notée A° ([2]).

On dira que A est une *δ-algèbre de Bernstein* si $V^2(x) = \omega(x)^2 V(x)$ pour tout x dans A.

PROPOSITION 1.3.1 [2]. — *Soient (A, ω) une K-algèbre pondérée et $\delta \in K$ tel que $\delta \neq \frac{1}{2}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *A est une δ-algèbre de Bernstein ;*

(*ii*) *A° est une algèbre de Bernstein ;*

(*iii*) *Pour tout x dans A, on a*

$$(x^2)^2 = 4\delta\omega(x)x^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2 x^2 + 2\delta(2\delta - 1)\omega(x)^3 x.$$

Les 0-algèbres de Bernstein ne sont autres que celles communément appelées algèbres de Bernstein.

Toute δ-algèbre de Bernstein admet une pondération unique. Si A est une δ-algèbre de Bernstein alors $I_p(A) = \{(1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x), \omega(x) = 1\}$.

Soient (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein et e un idempotent non nul de A. On a la décomposition de Peirce suivante $A = Ke \dotplus U_e \dotplus V_{\delta,e}$ où $U_e = \{x \mid x \in A, ex = \frac{1}{2}x\}$ et $V_{\delta,e} = \{x \mid x \in A, ex = \delta x\}$. De plus, les relations de la proposition 1.2.1 sont vérifiées.

Puisque $N \simeq N^\circ$ en tant qu'algèbres, les structures algébriques des noyaux des algèbres A et A° sont les mêmes. Ainsi les théorèmes 1.2.4 et 1.2.5 et les définitions du type d'une algèbre, d'algèbre exceptionnelle, normale s'étendent aisément aux cas des δ-algèbres de Bernstein.

La proposition 1.2.2 peut être reécrite en remplaçant la multiplication de A par celle de A°.

Dans [2], les auteurs donnent la définition suivante : Une δ-algèbre de Bernstein A est dite *nucléaire* s'il existe un idempotent e de A tel que $U_e^2 = V_{\delta,e}$. De plus, ils montrent que si A est une δ-algèbre de Bernstein, A est nucléaire si et seulement si A° l'est.

2

ALGÈBRES MONOGÈNES

Les algèbres monogènes jouent un rôle non négligeable dans la théorie des algèbres non associatives. Dans de nombreuses situations, ces algèbres servent d'exemples ou de contre-exemples. La connaissance des sous-algèbres monogènes d'une algèbre est souvent utile pour la détermination d'idempotents non nuls.

Dans ce chapitre, K désignera toujours un corps commutatif.

2.1. Les algèbres train monogènes

THÉORÈME 2.1.1 [14]. — *Toute algèbre train monogène de rang ≤ 4 est train spéciale.*

Remarque. Dans [1], l'auteur montre par l'exemple 1.2.10 que le rang 4 est le meilleur possible. Néammoins, Holgate ([13]) établit le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1.2. — *Toute algèbre train monogène de dimension finie est génétique.*

2.2. Les algèbres de Bernstein monogènes

Dans la suite, K sera infini de caractéristique différente de 2.

LEMME 2.2.1 [20]. — *Soient A une K-algèbre de Bernstein et x un élément de A. Pour tous entiers i et $j \geq 2$ on a $2x^i x^j = \omega(x)^i x^j + \omega(x)^j x^i$.*

Soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein de dimension finie et soit $x \in A$. On note A_x la sous-algèbre monogène de A engendrée par x. D'après le lemme 2.2.1, A_x est engendré, en tant qu'espace vectoriel, par $\{x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\}$. On montre que $A_x^k = \{x^k, x^{k+1}, \ldots\}$.

PROPOSITION 2.2.2. — *Soient (A, ω) une K-algèbre de Bernstein et x un élément de A. Si $\omega(x) = 0$ alors A_x n'est pas pondérée. De plus A_x est résoluble d'index 2 et nilpotente si et seulement si x est nilpotent.*

En effet, soit $\varphi : A_x \to K$ un morphisme de K-algèbres. Puisque $\omega(x) = 0$ alors $(x^2)^2 = 0$ et $\varphi(x) = 0$. Par suite $\varphi(y) = 0$, $\forall y \in A_x$. D'où $\varphi = 0$ et A_x n'est pas pondérée. D'après le lemme 2.2.1, $x^i x^j = 0$ pour tous i et $j \geq 2$ car $\omega(x) = 0$. Il vient donc que $(A_x^2)^2 = 0$ et A_x est résoluble d'index 2. Si x est nilpotent d'indice k, il est clair que $A_x^k = 0$ et A_x est nilpotente d'index k. La réciproque est évidente. $\square$

On suppose dans la suite que $\omega(x) \neq 0$. On peut, sans perdre la généralité, supposer que $\omega(x) = 1$. Alors $\omega_{|A_x}$ est une pondération de A_x. Soit $n = \dim A_x < \infty$. Alors $\{x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une base de A_x. Si $n = 1$, x est un idempotent et $A_x \simeq K$.

PROPOSITION 2.2.3. — *L'unique algèbre de Bernstein monogène de dimension 2 est l'algèbre de Bernstein constante de type* $(1, 1)$.

Pour la preuve, voir celle de la proposition 2.3.3 en y faisant $\delta = 0$.

LEMME 2.2.4. — *Soit A_x une K-algèbre de Bernstein monogène de dimension $n \geq 3$. Alors A_x est une algèbre de Bernstein exceptionnelle de type* $(n-1, 1)$.

Posons $e = x^2$, $u_k = x^{k+2} - x^2$ $(k = 1, \ldots, n-2)$ et $v_1 = x + x^2 - 2x^3$. On a alors $e^2 = e$, $eu_k = \frac{1}{2}u_k$, $u_k u_l = 0$ $(k, l = 1, \ldots, n-2)$ et $ev_1 = 0$; d'où le lemme. $\square$

Cas des algèbres de Bernstein conservatives

Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ et $A_x = Ke \oplus Kv_1 \oplus U_x$ avec $e = x^2$, les décompositions de Peirce respectives d'une algèbre de Bernstein A et de la sous-algèbre monogène A_x, relativement à l'idempotent e. On a $U_x \subset U$ et $V_x \subset V$. Si A n'est pas de Jordan, $U_x \neq 0$ pour un certain x. Il existe alors un élément u non nul de U tel que $u^2 = 0$.

Supposons maintenant que, pour tout $u \in U$, $u^2 = 0$ entraîne que $u = 0$. Puisque $V^2 \subset U$ et que $V^2V^2 = 0$ alors $V^2 = 0$. De plus, pour tout $u \in U$ et $v \in V$, on sait que $(uv)^2 = 0$. Donc $uv = 0$, *i.e.* $UV = 0$. D'où la proposition suivante :

Proposition 2.2.5. — *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein A telle que $U \neq 0$. Si pour tout $u \in U$, $u^2 = 0$ entraîne que $u = 0$, alors A est une algèbre conservative non exceptionnelle.*

2.3. Les δ-algèbres de Bernstein monogènes

Lemme 2.3.1. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein. Si A° est exceptionnelle alors A l'est aussi.*

En effet, si A° est exceptionnelle alors $(x \circ y) \circ (x \circ y) = 0$ pour tout x dans A° et y dans $ker\omega$, soit $(x \circ y)^2 = 0$ ou encore $(xy)^2 - 2\delta\omega(x)(xy)y + \delta^2\omega(x)^2y^2 = 0$. Pour $x = e$ et $y \in U_e$, on a $\frac{1}{4}y^2 - \delta y^2 + \delta^2 y^2 = 0$, soit $(4\delta^2 - 4\delta + 1)y^2 = 0$ ou encore $(2\delta - 1)^2y^2 = 0$, d'où $y^2 = 0$ et A est exceptionnelle. $\square$

La linéarisation partielle de

$(x^2)^2 = 4\delta\omega(x)x^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2x^2 + 2\delta(2\delta - 1)\omega(x)^3x$, donne

$$x^2(xy) = \delta\omega(y)x^3 + \delta\omega(x)(x^2y + 2x(xy)) - \frac{1}{2}(4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(xy)x^2$$
$$- \frac{1}{2}(4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2xy + \frac{1}{2}\delta(2\delta - 1)\omega(x)^3y + \frac{3}{2}\delta(2\delta - 1)\omega(x^2y)x\,.$$

En y faisant $y = x^2$ (avec $\omega(x) = 1$), on a

$$x^2x^3 = 2\delta x^4 + \frac{1}{2}(4\delta^2 + 1)x^3 - \frac{1}{2}(8\delta^3 + 6\delta^2 + \delta - 1)x^2 + \frac{1}{2}\delta(2\delta - 1)(4\delta + 3)x\,.$$

En posant $x^2x^k = \sum_{j=1}^{k+1} a_{k,j}x^j$, on obtient par récurrence sur $k \geq 4$, $a_{k,k-1} = 2\delta$, $a_{k,k} = \frac{1}{2}(1 - 2\delta)$, $a_{k,j} = 0 \quad (j = 4,\dots,k-1)$, $a_{k,3} = 2\delta^{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2}\delta^j$, $a_{k,2} = -\frac{1}{2}(8\delta^k + 6\delta^{k-1} + 5\sum_{j=2}^{k-2}\delta^j + \delta - 1)$ et $a_{k,1} = \frac{1}{2}\delta(2\delta - 1)(4\delta^{k-2} + 3\sum_{j=0}^{k-3}\delta^j)$.

Ainsi, on a

$$x^2x^k = 2\delta\omega(x)x^{k+1} + \frac{1}{2}(1 - 2\delta)\omega(x)^2x^k + a_{k,3}\omega(x)^{k-1}x^3 + a_{k,2}\omega(x)^kx^2$$
$$+ a_{k,1}\omega(x)^{k+1}x$$

pour tout x dans A et pour tout entier $k \geq 4$.

On note $A_{\delta,x}$, la sous-algèbre monogène de la δ-algèbre de Bernstein A, engendrée par x. Comme dans le cas des algèbres de Bernstein, $A_{\delta,x}$ est engendré, en tant qu'espace vectoriel, par $\{x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\}$.

On a la proposition suivante dont la preuve est similaire à celle de la proposition 2.2.2.

PROPOSITION 2.3.2. — *Si $\omega(x) = 0$ alors $A_{\delta,x}$ n'est pas pondérée. De plus $A_{\delta,x}$ est résoluble d'index 2 et nilpotente si et seulement si x est nilpotent.*

On suppose dans la suite que $\omega(x) \neq 0$. On peut, sans perdre la généralité, supposer que $\omega(x) = 1$. Alors $\omega_{|A_{\delta,x}}$ est une pondération de $A_{\delta,x}$. Soit $n = dim A_{\delta,x} < \infty$. Alors $\{x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une base de $A_{\delta,x}$. Si $n = 1$, x est un idempotent et $A_{\delta,x} \simeq K$.

PROPOSITION 2.3.3. — *L'unique δ-algèbre de Bernstein monogène de dimension 2 est la δ-algèbre de Bernstein constante de type* $(1,1)$ *dont la table de multiplication dans une base $\{e, v_1\}$ est donnée par $e^2 = e$, $ev_1 = \delta v_1$ et $v_1^2 = 0$.*

Soit x un générateur de poids 1. Comme $A_{\delta,x}$ est de dimension 2, il existe des scalaires α_1 et α_2 tels que $x^3 = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. En fait on peut poser $\alpha_1 = -\alpha$ et $\alpha_2 = 1 + \alpha$ car $\omega(x) = 1$. Donc $x^3 = (1+\alpha)x^2 - \alpha x$. On a $x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x = (\alpha - \delta)(x^2 - x)$. Soit $e = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x)$ un idempotent non nul de $A_{\delta,x}$. Alors $e(x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x) = (\alpha - \delta)e(x^2 - x)$, soit

$$(1-2\delta)^{-1}(x^2x^3 - 2\delta x^4 - (1+\delta)(x^2)^2 + 2\delta(1+\delta)x^3 + \delta x^3 - 2\delta^2 x^2) =$$
$$= (1-2\delta)^{-1}(\alpha - \delta)((x^2)^2 - (1+2\delta)x^3 + 2\delta x^2)$$

ou encore, après réduction, $\frac{1}{2}(\alpha - \delta)(x^2 - x) = (\alpha - \delta)(2\delta - \alpha)(x^2 - x)$. On a donc $\frac{1}{2}(\alpha - \delta) = (\alpha - \delta)(2\delta - \alpha)$, soit $(\alpha - \delta)(4\delta - 1 - 2\alpha) = 0$ et ainsi $\alpha = \delta$ ou $\alpha = \frac{1}{2}(4\delta - 1)$.

Si $\alpha = \delta$, en posant $v_1 = x - x^2$, $\{e, v_1\}$ devient une base de $A_{\delta,x}$ avec $e^2 = e$, $ev_1 = \delta v_1$, $v_1^2 = (x^2)^2 - 2x^3 + x^2 = 2(2\delta - 1)(x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x) = 0$.

Si $\alpha = \frac{1}{2}(4\delta - 1)$ alors $x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x = \frac{1}{2}(2\delta - 1)(x^2 - x)$. Par suite $0 = (x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x)^2 = \frac{1}{4}(2\delta - 1)^2(x^2 - x)^2$ (car $x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x = \frac{1}{2}(2\delta - 1)^{-1}(x^2 - x)^2$, soit $(x^2)^2 - 2x^3 + x^2 = 0$ ce qui entraîne que $x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x = 0$, soit enfin $x^2 - x = 0$. Ceci contredit l'indépendance de x et x^2, d'où le résultat. $\square$

THÉORÈME 2.3.4. — *Toute δ-algèbre de Bernstein monogène de dimension finie $n \geq 3$ est exceptionnelle de type $(n-1,1)$.*

Soit $A_{\delta,x}$ une δ-algèbre de Bernstein monogène de dimension finie $n \geq 3$. Soit $B = \{e, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1\}$ où $e = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x)$, $v_1 = (1-2\delta)^{-2}[(1-4\delta)x + (1+4\delta)x^2 - 2x^3]$ et $u_k = x^{k+2} - (1+b_k)x^2 + b_k x$ avec $b_k = \sum_{j=1}^{k} \delta^j \quad (k = 1, \ldots, n-2)$. Il est facile de montrer que B est une base de $A_{\delta,x}$. De plus, on a les produits suivants :

$$\begin{aligned}
e^2 &= e;\\
ev_1 &= (1-2\delta)^{-3}[(1-4\delta)x^3 - 2\delta(1-4\delta)x^2 + (1+4\delta)x^2x^2 - 2\delta(1+4\delta)x^3\\
&\quad - 2x^2x^3 + 4\delta x^4]\\
&= (1-2\delta)^{-3}[-2\delta(1-2\delta)x^3 + \delta(1-2\delta)(1+4\delta)x^2 + \delta(1-2\delta)(1-4\delta)x] = \delta v_1;\\
eu_k &= (1-2\delta)^{-1}[x^2x^{k+2} - 2\delta x^{k+3} - (1+b_k)x^2x^2 + 2\delta(1+b_k)x^3 + b_k x^3 - 2\delta b_k x^2]\\
&= (1-2\delta)^{-1}[\frac{1}{2}(1-2\delta)x^{k+2} + (a_{k+2,3} + b_k - 2\delta - 2\delta b_k)x^3 + (a_{k+2,2} - 2\delta b_k\\
&\quad + (4\delta^2 + 2\delta - 1)(1+b_k))x^2 + (a_{k+2,1} - 2\delta(2\delta-1)(1+b_k))x].
\end{aligned}$$

Pour $k \geq 2$, on montre que

$$a_{k+2,2} - 2\delta b_k + (4\delta^2 + 2\delta - 1)(1+b_k) = -\frac{1}{2}(1-2\delta)(1+b_k),$$
$$a_{k+2,1} - 2\delta(2\delta-1)(1+b_k) = \frac{1}{2}(1-2\delta)b_k \text{ et}$$
$$a_{k+2,3} + b_k - 2\delta - 2\delta b_k = 0.$$

d'où $eu_k = \frac{1}{2}u_k$ $(k = 2, \ldots, n-2)$.

Calculons enfin le produit eu_1. On a

$$\begin{aligned}
eu_1 &= (1-2\delta)^{-1}(x^2x^3 - 2\delta x^4 - (1+\delta)x^2x^2 + 2\delta(1+\delta)x^3 + \delta x^3 - 2\delta^2 x^2)\\
&= (1-2\delta)^{-1}(\frac{1}{2}(1-2\delta)x^3 + \frac{1}{2}(2\delta^2 + \delta - 1)x^2 + \frac{1}{2}\delta(1-2\delta)x)\\
&= \frac{1}{2}(x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x) = \frac{1}{2}u_1 .
\end{aligned}$$

Ainsi, $A_{\delta,x}$ est de type $(n-1,1)$ et puisque A_x^c et $A_{\delta,x}$ ont le même type, alors compte tenu du lemme 2.3.1 et du lemme 2.2.4, $A_{\delta,x}$ est exceptionnelle. $\square$

THÉORÈME 2.3.5. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein et soit x dans A. Pour tous $i, j \geq 2$ on a :*

$$\begin{aligned} x^i x^j &= \gamma_i \omega(x)^{i-1} x^{j+1} + \gamma_j \omega(x)^{j-1} x^{i+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma_i)\omega(x)^i x^j \\ &+ \frac{1}{2}(1-\gamma_j)\omega(x)^j x^i - \gamma_i \gamma_j \omega(x)^{i+j-2} x^2 \\ &+ \frac{1}{2}(2\gamma_i\gamma_j - \gamma_i - \gamma_j)\omega(x)^{i+j-1} x. \end{aligned}$$

où $\quad \gamma_i = \delta^{i-1} + \sum_{k=1}^{i-1} \delta^k.$

On vérifie que la formule est valable pour $i = 2$, $j \geq 2$ puis par un calcul analogue à celui de $x^2 x^i$, on établit la formule dans le cas $i = 3$, $j \geq 3$.

Supposons maintenant $i, j \geq 4$. D'après le théorème 2.3.4, on a $u_i u_j = 0$, i.e., $(x^i - (1+b_{i-2})x^2 + b_{i-2}x)(x^j - (1+b_{j-2})x^2 + b_{j-2}x) = 0$ pour tout x de poids 1, soit

$$\begin{aligned} x^i x^j &= -b_{j-2} x^{i+1} - b_{i-2} x^{j+1} + (1+b_{j-2}) x^2 x^i + (1+b_{i-2}) x^2 x^j \\ &+ (1+b_{j-2}) b_{i-2} x^3 + (1+b_{i-2}) b_{j-2} x^3 - (1+b_{i-2})(1+b_{j-2}) x^2 x^2 \\ &- b_{i-2} b_{j-2} x^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} x^i x^j &= (2\delta + 2\delta b_{j-2} - b_{j-2}) x^{i+1} + (2\delta + 2\delta b_{i-2} - b_{i-2}) x^{j-1} \\ &+ \frac{1}{2}(1-2\delta)(1+b_{j-2}) x^i + \frac{1}{2}(1-2\delta)(1+b_{i-2}) x^j \\ &+ \big((1+b_{i-2}) a_{j,3} + (1+b_{j-2}) a_{i,3} - 4\delta(1+b_{i-2})(1+b_{j-2}) \\ &+ (1+b_{i-2}) b_{j-2} + (1+b_{j-2}) b_{i-2}\big) x^3 + \big((1+b_{i-2}) a_{j,2} + (1+b_{j-2}) a_{i,2} \\ &- b_{i-2} b_{j-2} + (4\delta^2 + 2\delta - 1)(1+b_{i-2})(1+b_{j-2})\big) x^2 + \big((1+b_{i-2}) a_{j,1} \\ &+ (1+b_{j-2}) a_{i,1} - 2\delta(2\delta - 1)(1+b_{i-2})(1+b_{j-2})\big) x \,. \end{aligned}$$

où $b_j = \sum_{k=1}^{j} \delta^k$.

On a :

$2\delta + 2\delta b_{j-2} - b_{j-2} = 2\delta + 2\sum_{k=2}^{j-1} \delta^k - \sum_{k=1}^{j-2} \delta^k = \delta^{j-1} + \sum_{k=1}^{j-1} \delta^k = \gamma_j.$

$\frac{1}{2}(1-2\delta)(1+b_{j-2}) = \frac{1}{2}(1 - 2\delta - 2\delta b_{j-2} + b_{j-2}) = \frac{1}{2}(1-\gamma_i)$ et

$(1+b_{i-2})a_{j,3}+(1+b_{j-2})a_{i,3}-4\delta(1+b_{i-2})(1+b_{j-2})+(1+b_{i-2})b_{j-2}+(1+b_{j-2})b_{i-2}$
$= (1+b_{i-2})(a_{j,3}+b_{j-2}-2\delta(1+b_{j-2}))+(1+b_{j-2})(a_{i,3}+b_{i-2}-2\delta(1+b_{i-2}))$
$= (1+b_{i-2})(b_{j-1}+\delta^{j-1}+b_{j-2}-2b_{j-1})+(1+b_{j-2})(b_{i-1}+\delta^{i-1}+b_{i-2}-2b_{i-1})$
$= (1+b_{i-2})(2b_{j-1}-2b_{j-1})+(1+b_{j-2})(2b_{i-1}-2b_{i-1})=0.$

On montre de même que

$(1+b_{i-2})a_{j,2}+(1+b_{j-2})a_{i,2}-b_{i-2}b_{j-2}+(4\delta^2+2\delta-1)(1+b_{i-2})(1+b_{j-2})$
$= -\gamma_i\gamma_j$

et $(1+b_{j-2})a_{i,1}-\delta(2\delta-1)(1+b_{i-2})(1+b_{j-2})=\frac{1}{2}\gamma_i(\gamma_j-1)$.

donc

$(1+b_{i-2})a_{j,1}+(1+b_{j-2})a_{i,1}-2\delta(2\delta-1)(1+b_{i-2})(1+b_{j-2})=\frac{1}{2}(2\gamma_i\gamma_j-\gamma_i-\gamma_j)$

et le résultat s'ensuit. □

Proposition 2.3.6. — *Soit $A_{\delta,x}$ une δ-algèbre de Bernstein monogène de dimension 3. Il existe une base $\{e, u_1, v_1\}$ et un scalaire α tels que la table de multiplication est donnée par : $e^2=e$, $eu_1=\frac{1}{2}u_1$, $u_1^2=0$, $ev_1=\delta v_1$, $v_1^2=4(1-2\delta)^{-2}(2\delta+1-\alpha)u_1$ et $v_1u_1=(\alpha-\frac{3}{2}-\delta)u_1$.*

La démonstration est un cas particulier de celle du lemme suivant où l'on remplacera x^4 par son expression en fonction de x, x^2 et x^3.

Lemme 2.3.7. — *Soit $A_{\delta,x}$ une δ-algèbre de Bernstein monogène de dimension $n\geq 4$. Il existe une base $\{e, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1\}$ et des scalaires $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ tels que la table de multiplication est donnée par : $e^2=e$, $eu_k=\frac{1}{2}u_k$, $u_ku_l=0$ $(k,l=1,\ldots,n-2)$, $ev_1=\delta v_1$, $v_1^2=4(1-2\delta)^{-2}((2\delta+1)u_1-u_2)$, $v_1u_k=u_{k+1}-\frac{1}{2}u_k-(1+b_k)u_1$ $(k=1,2,\ldots,n-3)$ et $v_1u_{n-2}=(\alpha_3-1-b_{n-2})u_1+\sum_{k=2}^{n-3}\alpha_{k+2}u_k+\frac{1}{2}(2\alpha_n-1)u_{n-2}$*

où $\quad b_k=\sum_{j=1}^{k}\delta^j \quad (k=1,\ldots,n-2)$.

En effet, il existe des scalaires $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tels que $x^{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x^i$. On a $(x^2-2\delta x)x^{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x^2x^i-2\delta x^{i+1})$, or

$x^2x^i - 2\delta x^{i+1} = \frac{1}{2}(1-2\delta)x^i + a_{i,3}x^3 + a_{i,2}x^2 + a_{i,1}x$ $(i \geq 4)$. $x^2x^3 - 2\delta x^4 = a_{3,3}x^3 + a_{3,2}x^2 + a_{3,1}x$ et $x^2x^2 - 2\delta x^3 = 2\delta x^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)x^2 + 2\delta(2\delta - 1)x$. donc

$$\begin{aligned}
&a_{n+1,1} + \tfrac{1}{2}(1-2\delta)\alpha_1)x + (a_{n+1,2} + \tfrac{1}{2}(1-2\delta)\alpha_2)x^2 + (a_{n+1,3} + \tfrac{1}{2}(1-2\delta)\alpha_3)x^3 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(1-2\delta)\sum_{i=4}^{n} \alpha_i x^i \\
&= (2\delta(2\delta-1)\alpha_2 + a_{3,1}\alpha_3 + \sum_{i=4}^{n} \alpha_i a_{i,1})x + (-2\delta\alpha_1 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\alpha_2 + a_{3,2}\alpha_3 \\
&\quad + \sum_{i=4}^{n} \alpha_i a_{i,2})x^2 + (\alpha_1 + 2\delta\alpha_2 + a_{3,3}\alpha_3 + \sum_{i=4}^{n} \alpha_i a_{i,3})x^3 + \frac{1}{2}(1-2\delta)\sum_{i=4}^{n} \alpha_i x^i.
\end{aligned}$$

Par identification on obtient

$$\begin{cases}
a_{n+1,1} + \frac{1}{2}(1-2\delta)\alpha_1 = 2\delta(2\delta - 1)\alpha_2 + a_{3,1}\alpha_3 + \sum_{i=4}^{n} \alpha_i a_{i,1} \\
a_{n+1,2} + \frac{1}{2}(1-2\delta)\alpha_2 = -2\delta\alpha_1 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\alpha_2 + a_{3,2}\alpha_3 + \sum_{i=4}^{n} \alpha_i a_{i,2} \\
a_{n+1,3} + \frac{1}{2}(1-2\delta)\alpha_3 = \alpha_1 + 2\delta\alpha_2 + a_{3,3}\alpha_3 + \sum_{i=4}^{n} \alpha_i a_{i,3}
\end{cases}$$

En multipliant la première équation par $(1-2\delta)^{-1}$ puis en faisant la somme avec la troisième, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\alpha_1 = &a_{n+1,3} + (1-2\delta)^{-1}a_{n+1,1} - \sum_{i=4}^{n} \alpha_i(a_{i,3} + (1-2\delta)^{-1}a_{i,1}) \\
&+ (\frac{1}{2} - \delta - (1-2\delta)^{-1}a_{3,1} - a_{3,3})\alpha_3
\end{aligned}$$

et par suite

$$\alpha_1 = \sum_{i=3}^{n} \alpha_i b_{i-2} - b_{n-1} \text{ et } \alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \sum_{i=3}^{n} \alpha_i = -\sum_{i=3}^{n} \alpha_i(1 + b_{i-2}) + 1 + b_{n-1}$$

(car $\omega(x) = 1$) avec $\quad b_k = \sum_{j=1}^{k} \delta^j \quad (k = 1, \ldots, n-1)$. Ainsi, on a

$$(2.3.8) \qquad x^{n+1} = (\sum_{i=3}^{n} \alpha_i b_{i-2} - b_{n-1})x - (\sum_{i=3}^{n} \alpha_i(1 + b_{i-2}) - 1 - b_{n-1})x^2 + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i x^i$$

Posons $e = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x)$, $u_k = x^{k+2} - (1 + b_k)x^2 + b_k x$ $(k = 1, \ldots, n-2)$ et $v_1 = (1-2\delta)^{-2}((1-4\delta)x + (1+4\delta)x^2 - 2x^3)$. D'après la démonstration du théorème 2.3.4, il reste à calculer les produits v_1^2 et $v_1 u_k$ $(k = 1, \ldots, n-2)$.

On a $v_1 = -2(1-2\delta)^{-2}u_1 - e + x$, donc

$$
\begin{aligned}
v_1^2 &= 2(1-2\delta)^{-2}u_1 + (e - 2ex) + x^2 - 4(1-2\delta)^{-2}(x^4 - (1+\delta)x^3 + \delta x^2)\\
&= 2(1-2\delta)^{-2}u_1 - 2(1-2\delta)^{-1}u_1 + 4(1-2\delta)^{-2}(1+\delta)u_1 - 4(1-2\delta)^{-2}u_2\\
&= 4(1-2\delta)^{-2}((2\delta+1)u_1 - u_2).\\
v_1u_k &= -\frac{1}{2}u_k + xu_k = -\frac{1}{2}u_k + x^{k+3} - (1+b_k)x^3 + b_kx^2\\
&= -\frac{1}{2}u_k + u_{k+1} - (1+b_k)u_1
\end{aligned}
$$

pour $k = 1, \dots, n-3$ et compte tenu de (2.3.8), il vient que

$$
\begin{aligned}
v_1u_{n-2} &= -\frac{1}{2}u_{n-2} - (1+b_{n-2})u_1 + \sum_{k=3}^{n} \alpha_k(x^k - (1+b_{k-2})x^2 + b_{k-2}x)\\
&= (\alpha_3 - 1 - b_{n-2})u_1 + \sum_{k=2}^{n-3} \alpha_{k+2}u_k + \frac{1}{2}(2\alpha_n - 1)u_{n-2}.
\end{aligned}
$$

□

THÉORÈME 2.3.9. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein de dimension $n \geq 4$. L'algèbre A est monogène si, et seulement si, il existe une base $\{e, u_1, \dots, u_{n-2}, v_1\}$ et des scalaires $a_0, \dots, a_{n-3}$ tels que $e^2 = e$, $eu_k = \frac{1}{2}u_k$ $(k = 1, \dots, n-2)$, $ev_1 = \delta v_1$, $v_1^2 = -2(1-2\delta)^{-2}((1-2\delta)u_1 + 2u_2)$, $v_1u_k = u_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots, n-3)$ et $v_1u_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-3} a_ku_{k+1}$, les autres produits étant nuls.*

En effet, supposons que A soit une algèbre monogène engendrée par un élément x de poids 1, *i.e.* $A = A_{\delta,x}$. Considérons alors la table de multiplication donnée par le lemme 2.3.7. De $v_1 = -2(1-2\delta)^{-2}u_1 - e + x$, il vient que $x = e + 2(1-2\delta)^{-2}u_1 + v_1$ et si $L_x : A_{\delta,x} \longrightarrow A_{\delta,x}$, $y \longmapsto xy$, on a $L_x(e) = e + (1-2\delta)^{-2}u_1 + \delta v_1$ et $L_x(v) = \delta v + 2(1-2\delta)^{-2}u_1v + v_1v$ et $L_x(u) = \frac{1}{2}u + v_1u$.

Dans la décomposition de Peirce $A_{\delta,x} = Ke \oplus Kv_1 \oplus U$, la matrice de L_x s'écrit

$$
L_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & \delta & 0 \\ * & * & \frac{1}{2}I_u + \ell_{v_1} \end{pmatrix}
$$

où ℓ_{v_1} est la matrice de la restriction de L_{v_1} à U et I_u celle de l'identité dans U. Le polynôme caractéristique de L_x vaut $P_x(\lambda) = (\lambda - \delta)(\lambda - 1)Q_{v_1}(\lambda - \frac{1}{2})$ où

Q_{v_1} est le polynôme caractéristique de ℓ_{v_1}. Comme $P_x(\lambda)$ est aussi le polynôme minimal de L_x, $Q_{v_1}(\lambda)$ de degré $n-2$ est le polynôme minimal de ℓ_{v_1}. L'espace vectoriel U est donc ℓ_{v_1}-irréductible. Il existe alors une base $\{u'_1, \ldots, u'_{n-2}\}$ avec $u'_{i+1} = \ell_{v_1}(u'_i)$ $(i = 1, \ldots, n-3)$. En fait, d'après la table de multiplication du lemme 2.3.7, on peut prendre $u'_1 = u_1$. En effet, puisque $u'_2 = -(\frac{3}{2} + \delta)u_1 + u_2$, si l'on pose $u'_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j}u_j + u_i$ alors $\lambda_{i+1,1} = -(1+b_i) - \frac{1}{2}\lambda_{i,1} - \sum_{j=1}^{i-1}(1+b_j)\lambda_{i,j}$, $\lambda_{i+1,j} = -\frac{1}{2}\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1}$ et $\lambda_{i+1,i} = \lambda_{i,i-1} - \frac{1}{2}$ pour $i = 2, \ldots, n-3$ et $j = 2, \ldots, i-1$. On a $v_1^2 = -2(1-2\delta)^{-2}((1-2\delta)u'_1 + 2u'_2)$ et enfin il existe des scalaires $a_0, \ldots, a_{n-3}$ tels que $v_1u'_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-3} a_k u'_{k+1}$. En effet, en posant $Q_{v_1}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-3} a_j\lambda^j + \lambda^{n-2} = \sum_{j=0}^{n-2} a_j\lambda^j$ avec $a_{n-2} = 1$, les calculs montrent que

$$Q_{v_1}(\lambda - \frac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k(-\frac{1}{2})^k + \sum_{k=1}^{n-2}(\sum_{j=k}^{n-2} a_j \binom{j}{k}(-\frac{1}{2})^{j-k})\lambda^k$$

et

$$\begin{aligned} P_x(\lambda) = {} & \delta\sum_{j=0}^{n-2} a_j(-\frac{1}{2})^j - \{(1+\delta)\sum_{j=0}^{n-2} a_j(-\frac{1}{2})^j - \delta\sum_{j=1}^{n-2}\binom{j}{1}a_j(-\frac{1}{2})^{j-1}\}\lambda \\ & +\{\sum_{j=0}^{n-2} a_j(-\frac{1}{2})^j - (1+\delta)\sum_{j=1}^{n-2}\binom{j}{1}a_j(-\frac{1}{2})^{j-1} \\ & +\delta\sum_{j=2}^{n-2}\binom{j}{2}a_j(-\frac{1}{2})^{j-2}\}\lambda^2 + \sum_{k=3}^{n-2}\{a_{k-2} - \delta a_{k-1} \\ & -\sum_{j=k-1}^{n-2} a_j(-\frac{1}{2})^{j-k+1}[\frac{1}{2}\binom{j}{k-2} + \binom{j}{k-1}] \\ & +\delta\sum_{j=k}^{n-2} a_j[\frac{1}{2}\binom{j}{k-1} + \binom{j}{k}](-\frac{1}{2})^{j-k}\}\lambda^k \\ & +(a_{n-3} - \frac{n}{2}a_{n-2} - \delta a_{n-2})\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^n. \end{aligned}$$

$P_x(\lambda)$ étant le polynôme caractéristique de L_x, d'après le théorème de Hamilton-Cayley $P_x(L_x)(x) = 0$, donc

$$
\begin{aligned}
x^{n+1} = & -(\delta \sum_{j=0}^{n-2} a_j (-\frac{1}{2})^j) x + \Big\{ (1+\delta) \sum_{j=0}^{n-2} a_j (-\frac{1}{2})^j \\
& - \delta \sum_{j=1}^{n-2} \binom{j}{1} a_j (-\frac{1}{2})^{j-1} \Big\} x^2 + \Big\{ (1+\delta) \sum_{j=1}^{n-2} \binom{j}{1} a_j (-\frac{1}{2})^{j-1} \\
& - \delta \sum_{j=2}^{n-2} \binom{j}{2} a_j (-\frac{1}{2})^{j-2} - \sum_{j=0}^{n-2} a_j (-\frac{1}{2})^j \Big\} x^3 \\
& + \sum_{k=3}^{n-2} \Big\{ \delta a_{k-1} - a_{k-2} + \sum_{j=k-1}^{n-2} a_j \Big[\frac{1}{2} \binom{j}{k-2} + \binom{j}{k-1} \Big] (-\frac{1}{2})^{j-k-1} \\
& - \delta \sum_{j=k}^{n-2} a_j \Big[\frac{1}{2} \binom{j}{k-1} + \binom{j}{k} \Big] (-\frac{1}{2})^{j-k} \Big\} x^{k+1} \\
& + \Big((\frac{n}{2} + \delta) a_{n-2} - a_{n-3} \Big) x^n .
\end{aligned}
$$

Par identification avec (2.3.8) on a

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k+1} = {} & \delta a_{k-1} - a_{k-2} + \sum_{j=k-1}^{n-2} a_j \Big[\frac{1}{2} \binom{j}{k-2} + \binom{j}{k-1} \Big] (-\frac{1}{2})^{j-k-1} \\
& - \delta \sum_{j=k}^{n-2} a_j \Big[\frac{1}{2} \binom{j}{k-1} + \binom{j}{k} \Big] (-\frac{1}{2})^{j-k} \quad (k = 2, \dots, n-1).
\end{aligned}
\tag{2.3.10}
$$

équations donnant les coefficients a_i.

Réciproquement, étant donnée une telle base, en posant $x = e + 2(1-2\delta)^{-2} u_1 + v_1$, les calculs montrent que $e = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x)$, $v_1 = (1-2\delta)^{-2}((1-4\delta)x + (1+4\delta)x^2 - 2x^3)$, $u_1 = x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x$ et par suite $u_{k+1} = v_1 u_k \in A_{\delta,x}$ pour $k = 1, \dots, n-3$. D'où $A \subset A_{\delta,x}$ et $A = A_{\delta,x}$. $\square$

Remarque. Soient P la matrice de passage de la base $\{u_1, \dots, u_{n-2}\}$ à la base $\{u'_1, \dots, u'_{n-2}\}$, M et M' les matrices de ℓ_{v_1} relativement aux bases $\{u_1, \dots, u_{n-2}\}$ et $\{u'_1, \dots, u'_{n-2}\}$. Alors $M' = P^{-1}MP$ et les relations entre $(\alpha_3, \dots, \alpha_n)$ et $(a_0, \dots, a_{n-3})$ s'obtiennent à travers l'égalité $M'^t(0, \dots, 0, 1) = P^{-1}MP^t(0, \dots, 0, 1)$. En particulier, l'invariance de $tr\ell_{v_1}$ conduit à $a_{n-3} = \frac{n}{2} + \delta - \alpha_n$.

THÉORÈME 2.3.11. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein monogène de dimension $n \geq 4$, α_{k+3} et a_k $(k = 0, \ldots, n-3)$ les coefficients associés à A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *A est une algèbre train;*

(*ii*) *A est une algèbre train spéciale;*

(*iii*) *$a_k = 0$ pour $k = 0, \ldots, n-3$;*

(*iv*) *$\alpha_{k+3} = (-\frac{1}{2})^{n-k-3}[(1+\delta)\binom{n-2}{k+1} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{k} + 2\delta\binom{n-2}{k+2}]$ pour $k = 0, \ldots, n-3$;*

(*v*) *Il existe une base $\{e, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1\}$ de A telle que $e^2 = e$, $eu_k = \frac{1}{2}u_k$ $(k = 1, \ldots, n-2)$, $ev_1 = \delta v_1$, $v_1^2 = -2(1-2\delta)^{-2}((1-2\delta)u_1 + 2u_2)$, $v_1 u_k = u_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-3)$, les autres produits étant nuls.*

En effet, supposons l'assertion (*iv*) vérifiée. Alors (2.3.10) devient

$$a_k - \sum_{j=k+1}^{n-3} a_j(-\frac{1}{2})^{j-k-1}[\frac{1}{2}\binom{j}{k} + (1+\delta)\binom{j}{k+1} + 2\delta\binom{j}{k+2}] = 0$$

pour $k = 0, \ldots, n-3$. On obtient ainsi un système homogène de $n-2$ équations à $n-2$ inconnues dont le déterminant vaut 1 : d'où $a_k = 0$ pour $k = 0, \ldots, n-3$ et (iii) s'ensuit.

L'implication (*iii*) entraîne (*v*) découle du théorème 2.3.9.

(*v*) $\Rightarrow$ (*ii*) : Supposons (*v*). On voit que $N^2 = \langle u_1, \ldots, u_{n-2}\rangle$, $N^{k+1} = \langle u_k, \ldots, u_{n-2}\rangle$ et $N^n = 0$, i.e. N est nilpotent et par suite A est une algèbre train spéciale.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) est évidente.

(*i*) $\Rightarrow$ (*iv*) : En supposant (*i*), alors, pour tout $v \in V_\delta$, l'endomorphisme $\ell_v : U \to U, u \mapsto vu$ est nilpotent [17, théorème 4.7]. Ainsi la nilpotence de ℓ_v entraîne que $a_k = 0$ pour $k = 0, \ldots, n-3$ et la formule (2.3.10) donne

$$\alpha_{k+1} = (-\frac{1}{2})^{n-1-k}\left[\frac{1}{2}\binom{n-2}{k-2} + (1+\delta)\binom{n-2}{k-1} + 2\delta\binom{n-2}{k}\right]$$

pour $k = 2, \ldots, n-1$. $\square$

Soit A une δ-algèbre de Bernstein train de rang $n \geq 2$, il existe dans A un élément

x de poids 1 tel que $A_{\delta,x}$ soit une algèbre train de rang n. Le théorème 2.3.11 donne les coefficients de l'équation train de $A_{\delta,x}$. Ces coefficients sont les mêmes que ceux de l'équation train de A (du fait de l'indépendance des éléments $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$).

THÉORÈME 2.3.12. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein train de rang $n \geq 3$ et d'équation train $x^n + \lambda_1\omega(x)x^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1}\omega(x)^{n-1}x = 0$. Alors*

$$\lambda_k = (-\frac{1}{2})^k\Big[\binom{n-3}{k} + 2(1+\delta)\binom{n-3}{k-1} + 4\delta\binom{n-3}{k-2}\Big]$$

pour $k = 1, \ldots, n-1$.

Ces coefficients s'obtiennent à partir des α_{k+3} du théorème 2.3.11, en remplaçant n par $n-1$, puis k par $k-3$ et en posant $\lambda_k = -\alpha_{n-k}$. □

Nous donnons maintenant un contre-exemple à la réciproque du théorème 2.3.12. Dans [12] les auteurs ont donné un contre-exemple dans le cas où $\delta = 0$.

Exemple. Soit $A =< x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 >$ la K-algèbre commutative de dimension 5 dont la table de multipication est donnée par : $x_0^2 = x_0 + x_1$, $x_0x_1 = \frac{1}{2}x_1 + x_2$, $x_0x_2 = \delta x_2$, $x_0x_3 = \delta x_3 - x_4$, $x_0x_4 = \frac{1}{2}x_4$, $x_1^2 = x_3$, $x_1x_2 = x_4$, $x_2^2 = \frac{1}{2}(2\delta - 1)x_4$ ($\delta \in K$ et $\delta \neq \frac{1}{2}$), les autres produits étant nuls. Il est clair que l'application linéaire $\omega : A \to K$ telle que $\omega(x_0) = 1$ et $\omega(x_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ est une pondération de A. De plus A est engendrée en tant qu'algèbre par x_0. Les calculs montrent que A vérifie l'équation

$x^4 - (\frac{3}{2}+\delta)\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}(3\delta+1)\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{2}\delta\omega(x)^3x = 0$ pour tout x dans A. Comme les racines train sont δ et $\frac{1}{2}$ avec $\delta \neq \frac{1}{2}$ alors, d'après [11, Proposition 3.2], A est une algèbre train de rang 4. Les coefficients de l'équation train sont $\lambda_1 = -(\frac{3}{2}+\delta)$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3\delta+1)$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}\delta$ et vérifient bien la formule indiquée dans le théorème 2.3.12. D'autre part, on a $(x_0^2)^2 - 4\delta x_0^3 + (4\delta^2 + 2\delta - 1)x_0^2 - 2\delta(2\delta-1)x_0 = (2\delta-1)^2x_1 - 2(2\delta-1)x_2 + x_4 \neq 0$, donc A n'est pas une δ-algèbre de Bernstein.

Remarque. Toute δ-algèbre de Bernstein train de rang $n+1$ admet à isomorphisme près une unique sous-δ-algèbre de Bernstein monogène de dimension n.

En effet, si A est une δ-algèbre de Bernstein train de rang $n+1$, il existe un élément x dans A de poids 1 tel que la famille $\{x, x^2, \ldots, x^n\}$ soit libre. Il est clair que

$dimA_{\delta,x} = n$. De plus, la démonstration du théorème 2.3.11 nous dit que cette algèbre est unique à isomorphisme près. On a ainsi les conséquences suivantes :

COROLLAIRE 2.3.13. — *Toute δ-algèbre de Bernstein train de rang $n+1$ et de dimension n est monogène, donc génétique.*

COROLLAIRE 2.3.14. — *Si A est une δ-algèbre de Bernstein train de rang $n+1$ alors $dimA \geq n$.*

Cas des δ-algèbres de Bernstein train monogènes

Soient A une δ-algèbre de Bernstein et $A_{\delta,x} = Ke \dotplus Kv_1 \dotplus U_x$ la décomposition de Peirce de la sous-δ-algèbre de Bernstein monogène engendrée par un élément x de poids 1 avec $e = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x)$.

Supposons que $A_{\delta,x}$ est une algèbre train de dimension n. D'après le théorème 2.3.11, $A_{\delta,x} = Ke \dotplus < v_1 > \dotplus < u_1, \dots, u_{n-2} >$ avec $e^2 = e$, $eu_k = \frac{1}{2}u_k \quad (k = 1, \dots, n-2)$, $ev_1 = \delta v_1$, $v_1^2 = -2(1-2\delta)^{-2}((1-2\delta)u_1 + 2u_2)$, $v_1 u_k = u_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-3)$, les autres produits étant nuls. Il est clair que $v_1^k = -2(1-2\delta)^{-2}((1-2\delta)u_{k-1} + 2u_k)$ pour $k = 2, \dots, n-2$ et $v_1^{n-1} = -2(1-2\delta)^{-1}u_{n-2}$. On montre facilement que $A_{\delta,x} = Ke \dotplus < v_1, v_1^2, \dots, v_1^{n-1} >$.

D'autre part, soient e est un idempotent non nul de A et v un élément nilpotent d'indice $n \geq 2$, appartenant à $V_{\delta,e}$. Alors $C = Ke \dotplus < v, v^2, \dots, v^{n-1} >$ est la δ-algèbre de Bernstein monogène train engendrée par $x = e + v - \sum_{k=0}^{n-3} (-2)^k (1-2\delta)^{-k-1} v^{k-2}$. En effet, posons $u_1 = \sum_{k=0}^{n-3} (-2)^{k-1}(1-2\delta)^{-k+1} v^{k+2}$ et $u_{k-1} = v_1 u_k$ pour $k = 1, \dots, n-3$. On montre alors que $C = Ke \dotplus < v_1 > \dotplus < u_1, \dots, u_{n-2} >$ et que la condition (v) du théorème 2.3.11 est satisfaite. D'où la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3.15. — *Soient A une δ-algèbre de Bernstein de dimension finie et x un élément de A de poids 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*1*) *$A_{\delta,x}$ est une algèbre train de rang $n+1$;*

(*2*) *il existe $v_1 \in V_{\delta,e}$, nilpotent d'indice n tel que $A_{\delta,x} = Ke \dotplus < v_1, v_1^2, \dots, v_1^{n-1} >$ avec $e = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x)$.*

PROPOSITION 2.3.16. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est une algèbre train;

(2) Toute sous-δ-algèbre de Bernstein monogène de A est génétique.

En effet, soient $x \in A$ un élément de poids 1 et $A = Ke \dotplus U_e \dotplus V_{\delta,e}$ la décomposition de Peirce de A relative à l'idempotent $e = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x)$. Si A est une algèbre train, d'après ce qui précède, il existe $v_1 \in V_{\delta,e}$ tel que $A_{\delta,x} = Ke \dotplus < v_1, v_1^2, \dots, v_1^{n-1} >$ où $n = dim A_{\delta,x}$. Puisque A est une algèbre train, v_1 est nilpotent et par suite $N =< v_1, v_1^2, \dots, v_1^{n-1} >$ est nilpotent, donc $A_{\delta,x}$ est génétique.

Réciproquement, supposons que toute sous-δ-algèbre de Bernstein monogène de A soit génétique. Posons $f_r(x) = (x^3 - (1+\delta)x^2 + \delta x)(x - \frac{1}{2})^{r-3}$ pour tout x de poids 1 dans A. Si $f_r(x) = 0$ alors $f_k(x) = 0$ pour tout $k \geq r$. Soient $n = dimA$ et $N = \{rang A_{\delta,x} \mid x \in A, \omega(x) = 1\}$. L'ensemble N est borné car $rang A_{\delta,x} \leq n+1 \quad \forall x \in A \mid \omega(x) = 1$, donc N admet un plus grand élément que nous notons m. On a $f_m(x) = 0$ pour tout x de poids 1. Du fait de la topologie de Zariski, on en déduit que $f_m(x) = 0$ pour tout $x \in A$, *i.e* que A est une algèbre train de rang m. $\square$

2.4. Algèbres de Bernstein indécomposables

Soit (A, ω) une algèbre pondérée ayant un idempotent de poids 1. On dira que (A, ω) *est décomposable*, s'il existe deux idéaux non triviaux I et J de A contenus dans $N = ker\omega$ tels que $N = I \dotplus J$. Dans le cas contraire, A est dite *indécomposable*.

LEMME 2.4.1. — *Soient (A, ω) une K-algèbre de Bernstein monogène de dimension finie et I un idéal de A contenu dans $N = ker\omega$. Alors $I = N$ ou $I \subset U$.*

En effet, soit A une K-algèbre de Bernstein monogène de dimension finie n. Le cas où $n = 3$ étant évident, nous supposerons que $n \geq 4$. Il existe alors une base $\{e, u_1, \cdots, u_{n-2}, v_1\}$ de A telle que $v_1^2 = -2u_1 - 4u_2$ et $v_1 u_k = u_{k+1}$ $(k = 1, \cdots, n-3)$. Soient I un idéal de A contenu dans N et x un élément de I. On a $x = \sum_{i=1}^{n-2} \gamma_i u_i + \lambda v_1$

où $\gamma_i \in K$, $\lambda \in K$. Puisque $2ex = \sum_{i=1}^{n-2} \gamma_i u_i \in I$, alors $\lambda v_1 = x - 2ex \in I$. Si $\lambda \neq 0$ pour un certain x, alors $v_1 \in I$, $v_1 u_k = u_{k+1} \in I$ $(k = 1, \cdots, n-3)$ et $u_1 = -\frac{1}{2}(v_1^2 + 4u_2) \in I$, donc $I = N$. Sinon, on a $x = \sum_{i=1}^{n-2} \gamma_i u_i$ et $I \subset U$. $\square$

PROPOSITION 2.4.2. — *Toute K-algèbre de Bernstein monogène de dimension finie est indécomposable.*

En effet, soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein monogène de dimension finie. Supposons que I et J soient des idéaux non triviaux de A contenus dans N tels que $N = I \oplus J$. D'après le lemme précédant, si I ou J est égal à N alors l'autre est nul, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi $I \subset U$, $J \subset U$ et $I \oplus J \subset U$, ce qui est impossible car A est de type $(n-1, 1)$. $\square$

Soient (A_1, ω_1) et (A_2, ω_2) deux K-algèbres pondérées, d'idempotents respectifs e_1 et e_2 de poids 1. On a $A_1 = Ke_1 \oplus N_1$ et $A_2 = Ke_2 \oplus N_2$ avec $N_1 = ker\omega_1$ et $N_2 = ker\omega_2$.

On appelle *joint de* (A_1, ω_1) *et* (A_2, ω_2), l'algèbre notée $(A_1 \vee A_2, \omega_1 \vee \omega_2)$ et dont la multiplication est définie par $(\alpha, n_1, n_2)(\alpha', n_1', n_2') = (\alpha\alpha', n_1 n_1' + \alpha e_1 n_1' + \alpha' n_1 e_1, n_2 n_2' + \alpha e_2 n_2' + \alpha' n_2 e_2)$ pour tous α, α' dans K, n_1, n_1' dans N_1 et n_2, n_2' dans N_2. La pondération $\omega_1 \vee \omega_2$ est définie par $\omega_1 \vee \omega_2(\alpha, n_1, n_2) = \alpha$, pour tout $(\alpha, n_1, n_2) \in A_1 \vee A_2$.

PROPOSITION 2.4.3 [5]. — *Le joint de deux algèbres de Bernstein est une algèbre de Bernstein.*

Remarque. Le joint de deux algèbres $A_1 = Ke_1 \oplus N_1$ et $A_2 = Ke_2 \oplus N_2$ peut être identifié à $A_1 \oplus A_2 = K(e_1 + e_2) \oplus N$ où $N = N_1 \oplus N_2$ est la somme directe de N_1 et N_2, en tant qu'algèbres.

Soient $A_1 = Ke_1 \oplus U_1 \oplus V_1$ et $A_2 = Ke_2 \oplus U_2 \oplus V_2$ les décompositions de Peirce de deux algèbres de Bernstein. Soient $\{v_1, \cdots, v_{s_1}\}$, $\{u_1, \cdots, u_{r_1}\}$, $\{v_1', \cdots, v_{s_2}'\}$ et $\{u_1', \cdots, u_{r_2}'\}$ des bases respectives de V_1, U_1, V_2 et U_2, on a $A_1 \vee A_2 = Ke \oplus U \oplus V$ avec $e = (1, 0, 0)$, $U = \langle (0, u_i, 0), (0, 0, u_j') \rangle_{i=1,\cdots,r_1; j=1,\cdots,r_2}$ et

$V = \langle (0, v_i, 0), (0, 0, v'_j) \rangle_{i=1,\cdots,s_1; j=1,\cdots,s_2}$. On a :
$e^2 = e$, $e(0, u_i, 0) = \frac{1}{2}(0, u_i, 0)$, $e(0, 0, u'_j) = \frac{1}{2}(0, 0, u'_j)$ $(i = 1, \cdots, r_1; j = 1, \cdots, r_2)$, $(0, u_i, 0)(0, u_j, 0) = (0, u_i u_j, 0)$ $(i, j = 1, \cdots, r_1)$, $(0, v_i, 0)(0, v_j, 0) = (0, v_i v_j, 0)$, $(0, 0, u'_k)(0, 0, u'_l) = (0, 0, u'_k u'_l)$ $(i, j = 1, \cdots, s_1; k, l = 1, \cdots, r_2)$, $(0, 0, v'_i)(0, 0, v'_j) = (0, 0, v'_i v'_j)(i, j = 1, \cdots, s_2)$, *les autres produits étant nuls.*

Remarque. Soient $A_1 = Ke_1 \oplus U_1 \oplus V_1$ et $A_2 = Ke_2 \oplus U_2 \oplus V_2$ deux algèbres de Bernstein et $A_1 \vee A_2 = Ke \oplus U \oplus V$ leur joint.

- Si $U_1^2 = 0$ et $U_2^2 = 0$ alors $U^2 = 0$.
- Si $V_1^2 = 0$ et $V_2^2 = 0$ alors $V^2 = 0$.

Ainsi, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.4.4. — *Le joint de deux algèbres de Bernstein exceptionnelles (resp. de Bernstein-Jordan) est une algèbre de Bernstein exceptionnelle (resp. de Bernstein-Jordan).*

Remarque. La proposition 2.4.4 nous dit que le joint de deux algèbres de Bernstein exceptionnelles est exceptionnelle.

Alors la question suivante se pose :

Toute algèbre de Bernstein exceptionnelle est-elle un joint d'algèbres de Bernstein monogènes ?

La réponse est négative comme le montrent les deux exemples suivants :

Exemple 1. Soit $A = \langle e, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \rangle$ la K-algèbre commutative de dimension 6 dont la table de multiplication est donnée par :

$e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $v_1 u_1 = u_2$, $v_1 u_2 = v_2 u_2 = -v_1 u_3 = u_1$, $v_2 u_1 = u_3$, les autres produits étant nuls.

On montre que A est une algèbre de Berntein exceptionnelle et indécomposable (voir[4]).

Exemple 2. Soit $A = \langle e, u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle$ la K-algèbre commutative de dimension 5 dont la table de multiplication est donnée par : $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $(i = 1, 2)$, les autres produits étant nuls. Puisque A est une algèbre de Berntein exceptionnelle, supposons que A soit le joint de deux algèbres de Bernstein monogènes. Il existe alors une base $\{e, u_1', u_2', v_1', v_2'\}$ de A et un scalaire α tels que ${v_1'}^2 = 4(1-\alpha)u_1'$ et $v_1'u_1' = (\alpha - \frac{3}{2})u_1'$ (cf. Proposition 2.3.6). En posant $v_1' = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ et $u_1' = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, on a ${v_1'}^2 = v_1'u_1' = 0$, ce qui entraîne que $1-\alpha = 0$ et $\alpha - \frac{3}{2} = 0$. Ceci étant absurde, une telle base ne peut donc exister.

Nous examinons maintenant l'indécomposabilité de certaines classes d'algèbres de Bernstein.

Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein de type $(1+r, s)$. Supposons que A soit décomposable. Il existe alors deux idéaux non triviaux I et J de A contenus dans N tels que $N = I \oplus J$. On sait que $I = I \cap U \oplus I \cap V$ et $J = J \cap U \oplus J \cap V$ ([22])

Considérons les différents cas suivants :

(i) $V \subset J$. Alors $I \subset U$ car $V \cap I = 0$. On a $VI = 0$ et comme $U^2 \subset V \subset J$ alors $UI \subset J$, donc $UI = 0$ et $I \subset L$ où $L = U \cap AnnU$.

(ii) $U \subset J$. Alors $I \subset V$ car $U \cap I = 0$. On a $VI = 0$ et $UI = 0$, donc $I \subset V \cap AnnN$. De plus $U \oplus U^2 \subset J$.

(iii) U et V ne sont pas contenus dans J. Alors $I \cap U \neq 0$ et $I \cap V \neq 0$. Posons $U_I = I \cap U$, $V_I = I \cap V$, $U_J = J \cap U$ et $V_J = J \cap V$. Il est clair que $U_IU_J = V_IV_J = U_JV_I = U_IV_J = 0$, $U_I^2 \subset V_J$, $U_J^2 \subset V_J$, $V_IU_I \subset U_I$, $V_JU_J \subset U_J$, $V_I^2 \subset U_I$ et $V_J^2 \subset U_J$

Proposition 2.4.5. — *Soit A une K-algèbre de Bernstein non exceptionnelle de type $(2, n-2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est indécomposable;*

(ii) *A est isomorphe à $Z(2,2)$.*

$(ii) \Rightarrow (i)$ d'après [4].

$(i) \Rightarrow (ii)$: En effet, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une telle algèbre. On sait que $V^2 = VU = 0$. Il existe donc une base $\{e, u_1, v_1, \cdots, v_{n-2}\}$ de A telle que $e^2 = e$, $eu_1 = \frac{1}{2}u_1$, $u_1^2 = v_1$, les autres produits étant nuls. Comme $0 \neq U^2 \subset V$ alors $dimV \geq 1$ et $n \geq 3$. Pour $n \geq 4$, $\langle u_1, v_1\rangle$ et $\langle v_2, \cdots, v_{n-2}\rangle$ sont des idéaux non triviaux de A tels que $N = \langle u_1, v_1\rangle \oplus \langle v_2, \cdots, v_{n-2}\rangle$. L'algèbre A sera donc indécomposable si et seulement si $n = 3$ *i.e* $A \simeq Z(2,2)$. □

Proposition 2.4.6. — *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein exceptionnelle de type $(2, n-2)$. A est indécomposable si et seulement si l'une des assertions suivantes est satisfaite :*

(i) A est isomorphe à $G(2,2)$;

(ii) Il existe une base $\{u_1, v_1, \cdots, v_{n-2}\}$ de N telle que $v_i^2 = d_i u_1$, avec $d_i \in K^*$ $(i = 1, \cdots, n-2)$ vérifiant $d_1\alpha_1^2 + \cdots + d_{n-2}\alpha_{n-2}^2 = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0\ \forall i = 1, \cdots, n-2$, les autres produits étant nuls.

En effet, soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ une algèbre de Bernstein exceptionnelle de type $(2, n-2)$.

a) Supposons que $V_e^2 = 0$, $\forall e \in I_P(A)$. Alors A est une algèbre de Jordan, donc $v(vu) = 0$, $\forall v \in V_e$, $\forall u \in U_e$. Soit $\{e, u_1, v_1, \cdots, v_{n-2}\}$ une base de A. Pour tout entier $i = 1, \cdots, n-2$, il existe un scalaire α_i tel que $v_i u_1 = \alpha_i u_1$, donc $0 = v_i(v_i u_1) = \alpha_i^2 u_1$, ce qui entraîne que $\alpha_i^2 = 0$ et $\alpha_i = 0$. Par conséquent, $V_e U_e = 0$ et par suite, U_e et V_e sont des idéaux. L'algèbre A sera donc indécomposable si et seulement si $V_e = 0$, *i.e* A est de type $(2, 0)$ ou encore $A \simeq G(2,2)$.

b) Supposons maintenant que $V_e^2 = U_e$ pour un certain $e \in I_P(A)$, on a $N^2 = U_e$, donc $dim N^2 = 1$. D'après la classification donnée dans [3], A sera donc indécomposable si et seulemenent si, il existe une base $\{u_1, v_1, \cdots, v_{n-2}\}$ de N telle que $v_i^2 = d_i u_1$, avec $d_i \in K^*$ $(i = 1, \cdots, n-2)$ vérifiant $d_1\alpha_1^2 + \cdots + d_{n-2}\alpha_{n-2}^2 = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$ $\forall i = 1, \cdots, n-2$. □

Proposition 2.4.7. — *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein non exceptionnelle de type $(n-1, 1)$. Alors A est indécomposable si et seulement si il existe une base $\{u_1, \cdots, u_{n-2}, v_1\}$ de N telle que $u_i^2 = d_i v_1$, avec $d_i \in K^*$ $(i = 1, \cdots, n-2)$ vérifiant $d_1\alpha_1^2 + \cdots + d_{n-2}\alpha_{n-2}^2 = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0\ \forall i = 1, \cdots, n-2$.*

En effet, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une telle algèbre. On sait que $V^2 = VU = 0$. De plus $U^2 = V$, donc $dim N^2 = 1$. Le résultat devient immédiat d'après la classification donnée dans [3]. □

PROPOSITION 2.4.8. — *Soit A une K-algèbre de Bernstein exceptionnelle de type $(n-1,1)$. Alors A est indécomposable si et seulement si l'une des assertions suivantes est satisfaite :*

(*i*) *A est de type $(1+2m,1)$ et il existe une base $\{u_1,\cdots,u_{n-2},v_1\}$ de N telle que $v_1u_{2k-1}=u_{2k}$ $(k=1,\cdots,m)$ et $v_1^2=0$;*

(*ii*) *Il existe une base $\{u_{i,j},v_1\}_{(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n_i)}$ de N telle que $v_1^2=-2(u_{1,1}+2u_{1,2})$ et $v_1u_{i,j}=u_{i,j+1}$ $(j=1,\cdots,n_i-1)$, $v_1u_{i,n_i}=-\sum_{\ell=1}^{n_i}a_{i,\ell}u_{i,\ell}$ avec $n_1+\cdots+n_m=n-2$ et $a_{i,\ell}\in K$.*

En effet, soit $A=Ke\oplus U_e\oplus V_e$ une telle algèbre de Bernstein.

a) Supposons que $V_e^2=0$ $\forall e\in I_P(A)$. Alors A est une algèbre de Bernstein-Jordan et $v(vu)=0$ $\forall v\in V_e$, $\forall u\in U_e$. Considérons l'endomorphisme $\ell_{v_1}:U_e\to U_e,u\mapsto v_1u$. Puisque $\ell_{v_1}^2=0$, il existe une base $\{u_1,\cdots,u_{n-2}\}$ de U_e telle que la matrice de ℓ_{v_1} soit donnée par

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

avec m blocs de la forme $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ où $m=dim\ell_{v_1}(U_e)$.

On a donc $v_1u_{2k-1}=u_{2k}$ et $v_1u_{2k}=0$ $(k=1,\cdots,m)$. Il est clair que si $2m<n-2$ alors A est décomposable. Supposons que $n-2=2m$ et que A soit décomposable. Il existe alors I et J, deux idéaux non triviaux de A contenus dans N tels que $N=I\oplus J$. Comme $dimV_e=1$, alors $V_e\subset J$ ou $V_e\subset I$. Supposons $V_e\subset J$, alors $u_{2k}=v_1u_{2k-1}\in J$ $\forall k=1,\cdots,m$. D'autre part, $V_e\subset J$ entraîne $I\subset L$ et $V_eI=0$, donc $I\subset\langle u_{2k}\rangle_{k=1,\cdots,m}$ et $I\subset J$, ce qui est impossible. D'où A est indécomposable.

b) Supposons maintenant $V_e^2\neq 0$ pour un certain $e\in I_P(A)$. Soit v_1 un élément non nul de V_e. Considérons l'endomorphisme $\ell_{v_1}:U_e\to U_e,u\mapsto v_1u$. Il existe une base $\{u_1,\cdots,u_{n-2}\}$ de U_e telle que la matrice de ℓ_{v_1} relativement à cette base soit donnée par :

$$\begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & M_{m-1} & \\ 0 & & & M_m \end{pmatrix} \text{ou} \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & M_m & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

où chaque bloc de matrice M_k $(k = 1, \cdots, m)$ est de la forme

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{k,1} \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{k,n_k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{k,n_k} \end{pmatrix}$$

Si la matrice de ℓ_{v_1} est du deuxième type, on voit que A est décomposable. Sinon, on a $v_1^2 = -2(u_{1,1} + 2u_{1,2})$ et $v_1 u_{i,j} = u_{i,j+1}$ $(j = 1, \cdots, n_i - 1)$, $v_1 u_{i,n_i} = -\sum_{\ell=1}^{n_i} a_{i,\ell} u_{i,\ell}$ $(i = 1, \cdots, m)$ avec $n_1 + \cdots + n_m = n-2$ et $a_{i,\ell} \in K$. Supposons qu'il existe deux idéaux non triviaux I et J de A contenus dans N tels que $N = I \oplus J$. Puisque $dim V = 1$, on peut supposer que $V \subset J$. On aura donc $u_{i,j-1} = v_1 u_{i,j} \in J$ $\forall i = 1, \cdots, m$; $\forall j = 1, \cdots, n_i - 1$ et $u_{1,1} = -\frac{1}{2}(v_1^2 + 4u_{1,2}) \in J$. Par conséquent, $U \subset J$ et $J = N$, ce qui entaîne que $I = 0$. D'où A est indécomposable. $\square$

Remarque : La démonstration de la proposition 2.4.8 nous dit que toute algèbre de Bernstein exceptionnelle de type $(n-1, 1)$ est soit indécomposable, soit joint d'une algèbre de Bernstein indécomposable de type $(1 + r, 1)$ et d'une algèbre de Bernstein élémentaire de type $(1 + s, 0)$ avec $r + s = n - 2$.

PROPOSITION 2.4.9. — *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein exceptionnelle non élémentaire et vérifiant $V^2 \neq U$. Si A est indécomposable alors $VU \neq 0$.*

En effet, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein exceptionnelle. Supposons $VU = 0$ et posons $I = V^2 \oplus V$ et $J = U'$ où U' est un supplémentaire de V^2 dans U. On a $UI = 0$, $VI = V^2$, $UJ = VJ = 0$, donc I et J sont des idéaux de A tels que $N = I \oplus J$, d'où A est décomposable. $\square$

LEMME 2.4.10 [10]. — *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein non exceptionnelle et non nucléaire de type $(n-2,2)$. Alors*

(*i*) $U^3 = 0$.

(*ii*) $VU \subset L$.

PROPOSITION 2.4.11. — *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein non exceptionnelle et non nucléaire de type $(n-2,2)$. Si A est indécomposable alors $L \neq 0$.*

En effet, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une telle algèbre. Comme A est non exceptionnelle et non nucléaire de type $(n-2,2)$ alors $dim U^2 = 1$. Supposons $L = 0$ et posons $I = U \oplus U^2$ et $J = V^{'}$ où $V^{'}$ est un supplémentaire de U^2 dans V. On sait que I est un idéal de A. Comme $V^2 \subset L = 0$ alors $VJ = 0$. D'après le lemme précédant, on a $UJ = 0$, donc J est un idéal de A. De plus $A = I \oplus J$, et A est décomposable. $\square$

3

ALGÈBRE DES MULTIPLICATIONS ET DUPLIQUÉE D'UNE ALGÈBRE

L'algèbre des multiplications d'une algèbre de Bernstein a fait l'objet d'une étude approfondie dans [6] et [7]. Ici, nous nous proposons d'étendre cette étude aux δ-algèbres de Bernstein ($\delta \neq 0$). Nous montrons que les résultas obtenus dans [7], à l'exception de quelques uns, s'étendent à l'ensemble des δ-algèbres de Bernstein, pour $\delta \neq 1$. Les 1-algèbres de Bernstein font l'objet d'une étude séparée.

Puisque les 0-algèbres de Bernstein ne sont autres que les algèbres de Bernstein, on supposera dans tout le chapitre que $\delta \neq 0$.

3.1. L'algèbre des multiplications d'une δ-algèbre de Bernstein

Soient K un corps commutatif, A une K-algèbre commutative, non nécessairement associative et $End_K(A)$ l'algèbre associative des endomorphismes de l'espace vectoriel A. Pour tout x dans A, les applications linéaires $R_x : A \to A, y \mapsto y.x$ et $L_x : A \to A, y \mapsto xy$ sont appelées respectivement, multiplications à droite et à gauche. Elles engendrent une sous-K-algèbre de $End_K(A)$ notée $\mathcal{M}_K(A)$ ou plus simplement $\mathcal{M}(A)$. En dimension finie, on a $dim\mathcal{M}(A) \leq (dimA)^2$. L'algèbre A est munie d'une structure de $\mathcal{M}(A)$-module à gauche dont l'action est définie par $\sigma.x = \sigma(x)\ \forall x \in A$ et $\forall \sigma \in \mathcal{M}(A)$. Ainsi, les idéaux à gauche de A ne sont autres que les $\mathcal{M}(A)$-modules à gauche de A. Si I est un idéal de A alors $(I : A) = \{\sigma \in \mathcal{M}(A) \mid \sigma(A) \subset I\}$ est un idéal de $\mathcal{M}(A)$. Inversenent, si J est un idéal de $\mathcal{M}(A)$, $J(A) = \{\sigma(x) \mid \sigma \in J, x \in A\}$ est un idéal de A ([7]).

Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. Dans [7], les auteurs ont montré que

(3.1.1) $$\mathcal{M}(A) = KL_e \oplus (N : A)$$

Les trois résultats suivants se démontrent comme dans [7].

PROPOSITION 3.1.2. — *Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. Alors l'application $\bar{\omega} : \mathcal{M}(A) \to K$ définie par $\bar{\omega}(\alpha L_e + \theta) = \alpha$ est une pondération de $\mathcal{M}(A)$ appelée extension canonique de ω à $\mathcal{M}(A)$.*

Notation et remarque. Soit $\widetilde{N}$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}(A)$ engendrée par les éléments de la forme $L_{x_1} \dots L_{x_n}$ tels que l'un au moins des x_i est dans N. La sous-algèbre $\widetilde{N}$ est un idéal de $(N : A) = ker\bar{\omega}$.

Soient A une δ-algèbre de Bernstein ($\delta \neq 1$), $x = \alpha e + u + v \in A$ avec $u \in U_e$ et $v \in V_{\delta,e}$. Alors $8(1-2\delta)^{-1}((1+\delta)L_e^2 - \delta L_e - L_e^3)(x) = u$ et $(1-\delta)^{-1}(\delta L_e - (1+2\delta)L_e^2 + 2L_e^3)(x) = \omega(x)e$. Posons $\tilde{e}_1 = (1-\delta)^{-1}(\delta L_e - (1+2\delta)L_e^2 + 2L_e^3)$ et $\tilde{e}_2 = 8(1-2\delta)^{-1}((1+\delta)L_e^2 - \delta L_e - L_e^3)$. Les projections $\tilde{e}_1$ et $\tilde{e}_2$ sont des idempotents orthogonaux qui commutent entre eux. De plus, on a $L_e = \tilde{e}_1 + \frac{1}{4}(1-2\delta)(1-\delta)^{-1}\tilde{e}_2 + (1-\delta)^{-1}(L_e - L_e^2)$ et, pour tout $k \geq 2$, $L_e^k = \tilde{e}_1 + \frac{1}{2^k}(1-2\delta)(1-\delta)^{-1}(1 + \sum_{i=0}^{k-3} 2^i\delta^{i+1})\tilde{e}_2 + \delta^{k-1}(1-\delta)^{-1}(L_e - L_e^2)$. On a $(L_e - L_e^2)(x) = \frac{1}{4}\tilde{e}_2(x) + \delta(1-\delta)v$. Posons $\eta(x) = v$, donc $L_e - L_e^2 = \frac{1}{4}\tilde{e}_2 + \delta(1-\delta)\eta$. Pour tout σ dans $\mathcal{M}(A)$, d'après (3.1.1) on a $\sigma = \alpha\tilde{e}_1 + \beta\tilde{e}_2 + \gamma\eta + \theta$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \in K$ et $\theta \in \widetilde{N}$. Comme $\tilde{e}_2 \in (N : A)$, $\eta \in (N : A)$ et $\tilde{e}_1 \notin (N : A)$, on a donc $\mathcal{M}(A) = K\tilde{e}_1 \oplus (N : A)$.

PROPOSITION 3.1.3. — *Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein et $e \in I_p(A)$. Alors $\bar{\omega}$ est l'unique pondération de $\mathcal{M}(A)$ telle que $\bar{\omega}(L_e) = 1$.*

THÉORÈME 3.1.4. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{\delta,e}$ la décomposition de Peirce d'une δ-algèbre de Bernstein. Alors :*

(i) $\mathcal{M}(A) = K\tilde{e}_1 \oplus \widetilde{U} \oplus \widetilde{V}$ *où*
$\widetilde{U} = \{\sigma \in (N : A) \mid \sigma \circ \tilde{e}_1 = \sigma\}$
et $\widetilde{V} = \{\sigma \in (N : A) \mid \sigma \circ \tilde{e}_1 = 0\}$;

(ii) Pour tout σ dans $(N : A)$, $\sigma \in \widetilde{U}$ si et seulement si $\sigma(N) = 0$ et $\sigma \in \widetilde{V}$ si et seulement si $\sigma(e) = 0$;

(iii) On a les relations suivantes : $\widetilde{U}^2 = 0$, $\widetilde{U}\widetilde{V} = 0$, $\widetilde{V}\widetilde{U} \subset \widetilde{U}$ et $\widetilde{V}^2 \subset \widetilde{V}$, en particulier $\widetilde{U}$ est un idéal de $\mathcal{M}(A)$ et $\widetilde{V}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{M}(A)$.

Dans le reste du paragraphe, δ sera un scalaire différent de 1.

PROPOSITION 3.1.5. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{\delta,e}$ une δ-algèbre de Bernstein. On a :*

(i) $\widetilde{U} = \{\psi_x, x \in N\}$ où $\psi_x : A \longrightarrow A$ est définie par $\psi_x(e) = x$ et $\psi_x(N) = 0$;

(ii) L'application $\psi : N \longrightarrow \widetilde{U}$, $x \longmapsto \psi_x$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et de $\mathcal{M}(A)$-modules à gauche ;

(iii) Si I est un idéal de A contenu dans N alors $\psi(I)$ est un idéal de $\mathcal{M}(A)$ et inversement pour tout idéal J de $\mathcal{M}(A)$ contenu dans $\widetilde{U}$, $\psi^{-1}(J)$ est un idéal de A.

En effet, considérons les applications linéaires

$\sigma_u = (1-\delta)^{-1}(2L_eL_u + 2L_uL_e - (1+2\delta)L_u)$ et $\varphi_v = (1-2\delta)^{-1}\delta^{-1}(L_v - 2L_eL_v)$ avec $u \in U_e$ et $v \in V_{\delta,e}$. On a $\sigma_u(e) = u$, $\varphi_v(e) = v$ et $\sigma_u(x) = \varphi_v(x) = 0\ \forall x \in N$, donc σ_u et φ_v appartiennent à $\widetilde{U}$.

Soit $\sigma \in \widetilde{U}$. Puisque $\sigma(e) \in N$, en posant $y = \sigma(e)$, il existe $u \in U_e$ et $v \in V_{\delta,e}$ tel que $y = u + v$. Posons $\psi_y = \sigma_u + \varphi_v$. On a $\psi_y(e) = y = \sigma(e)$ et $\psi_y(x) = 0\ \forall x \in N$, donc $\psi_y = \sigma$, d'où l'assertion (i).

Les assertions (ii) et (iii) se démontrent comme dans [7, théorème 1]. □

COROLLAIRE 3.1.6. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{\delta,e}$ une δ-algèbre de Bernstein de dimension finie. Alors*

(i) Les dimensions des espaces $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ sont indépendantes de l'idempotent e choisi ;

(ii) $dim\widetilde{U} = dimN$.

Remarque. Puisque A nucléaire équivaut à A° nucléaire pour toute δ-algèbre de Bernstein, les résultats de [7] concernant les algèbres Bernstein nucléaires restent vrais pour les δ-algèbres de Bernstein nucléaires.

PROPOSITION 3.1.7. — *Soient A une δ-algèbre de Bernstein et J un idéal maximal de $\mathcal{M}(A)$ tel que $J(A) \neq A$. Alors $J(A)$ est un idéal maximal de A.*

PROPOSITION 3.1.8. — *Soient A une δ-algèbre de Bernstein, $\mathcal{I} = \{I \mid I$ idéal maximal de $\mathcal{M}(A), I(A) \neq A\}$ et $J = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$. Alors $J(A)$ est le radical de A et $\mathcal{M}(A)/J \simeq \mathcal{M}(A/J(A))$.*

Les deux propositions ci-dessus découlent du théorème 2.8 et du corollaire 3.4 de [23]. Notons que ces deux propositions restent valables pour $\delta = 1$.

Pour toute δ-algèbre de Bernstein (A, ω) (y compris le cas $\delta = 1$), on a $N \simeq N^{\circ}$. Ainsi on a (cf[7]) :

PROPOSITION 3.1.9. — *Soit $A = Ke \dotplus N$ une δ-algèbre de Bernstein. L'idéal N est nilpotent si et seulement si $\widetilde{N}$ est nilpotent.*

COROLLAIRE 3.1.10. — *Soit $A = Ke \dotplus N$ une δ-algèbre de Bernstein telle que $U_e \neq 0$ et $V_{\delta,e} \neq 0$. Si N est nilpotent alors $\mathcal{M}(A) = K\tilde{e}_1 \dotplus K\tilde{e}_2 \dotplus K\eta \dotplus \widetilde{N}$.*

D'après la proposition 3.1.9, la nilpotence de N entraîne celle de $\widetilde{N}$. Puisque $\eta(x) = v$ pour tout $x = \alpha e + u + v$ dans A, alors η n'est pas nilpotent et n'appartient donc pas à $\widetilde{N}$, d'où le résultat. $\square$

THÉORÈME 3.1.11. — *Soit $A = Ke \dotplus U_e \dotplus V_{\delta,e}$ une δ-algèbre de Bernstein avec $U_e \neq 0$ et $V_{\delta,e} \neq 0$ telle que N soit nilpotent. Les seuls idéaux maximaux de $\mathcal{M}(A)$ sont $(N : A) = K\tilde{e}_2 \dotplus K\eta \dotplus \widetilde{N}$, $K\tilde{e}_1 \dotplus K\eta \dotplus \widetilde{N}$ et $K\tilde{e}_1 \dotplus K\tilde{e}_2 \dotplus \widetilde{N}$.*

Il est clair que $(N : A)$, $K\tilde{e}_1 \dotplus K\eta \dotplus \widetilde{N}$ et $K\tilde{e}_1 \dotplus K\tilde{e}_2 \dotplus \widetilde{N}$ sont des idéaux maximaux de $\mathcal{M}(A)$. Soit I un idéal maximal de $\mathcal{M}(A)$. Si $I \subset (N : A)$ alors $I = (N : A)$ du fait de la maximalité de I. Supposons que I ne soit pas contenu dans $(N : A)$. Il existe alors $\sigma = \alpha\tilde{e}_1 + \varphi$ dans I, où $\alpha \in K$ $(\alpha \neq 0)$ et $\varphi \in (N : A)$. Comme $\tilde{e}_1 \circ \varphi = 0$, on a donc $\alpha\tilde{e}_1 = \tilde{e}_1 \circ \sigma \in I$ et $\tilde{e}_1 \in I$ car $\alpha \neq 0$. Puisque $I \subset I + \widetilde{N}$ et I est maximal alors $I = I + \widetilde{N}$ et $\widetilde{N} \subset I$. Supposons $\tilde{e}_2 \in I$. Alors $\eta \notin I$ car sinon on aurait $I = \mathcal{M}(A)$, ce qui contredirait la maximalité de I. Ainsi, $I \subset K\tilde{e}_1 \dotplus K\tilde{e}_2 \dotplus \widetilde{N}$ et $I = K\tilde{e}_1 \dotplus \tilde{e}_2 \dotplus \widetilde{N}$ car I est maximal. Si $\tilde{e}_2 \notin I$, par un raisonnement analogue au précédant, on montre que $I = K\tilde{e}_1 \dotplus K\eta \dotplus \widetilde{N}$. $\square$

Remarquons qu'aucun idéal maximal de $\mathcal{M}(A)$ ne contient $K\tilde{e}_1 \dotplus K\tilde{e}_2 \dotplus K\eta$, par conséquent ne contient $\mathcal{M}(A)^2$. De plus, tous ses idéaux maximaux sont de codimension 1. Puisqu'il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des pondérations de $\mathcal{M}(A)$ et celui de ses idéaux maximaux de codimension 1 ne contenant pas $\mathcal{M}(A)^2$ ([26, lemme 1.11]), alors le résultat suivant est immédiat.

COROLLAIRE 3.1.12. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{\delta,e}$ une δ-algèbre de Bernstein avec $U_e \neq 0$ et $V_{\delta,e} \neq 0$ telle que N soit nilpotent. Alors $\mathcal{M}(A)$ possède exactement trois pondérations.*

Remarque. Soit $A = Ke \oplus N$ une δ-algèbre de Bernstein et $\omega' : \mathcal{M}(A) \to K$ un morphisme de K-algèbres. Comme L_e vérifie l'équation

$2L_e^4 - (3+2\delta)L_e^3 + (1+3\delta)L_e^2 - \delta L_e = 0$, alors $\omega'(L_e)$ est une racine du polynôme $2x^4 - (3+2\delta)x^3 + (1+3\delta)x^2 - \delta x$ de $K[X]$. Ainsi, $\omega'(L_e) \in \{0, \delta, 1, \frac{1}{2}\}$. Si $\omega'(L_e) = 0$ alors $\omega' = 0$. Le cas $\omega'(L_e) = 1$ correspond à $\bar{\omega}$. Si $\omega'(L_e) = \delta$ alors ω' est une pondération de l'algèbre $K\eta \oplus K\tilde{e}_1 \oplus \widetilde{N}$. Enfin, si $\omega'(L_e) = \frac{1}{2}$, ω' est une pondération de $K\tilde{e}_2 \oplus K\tilde{e}_1 \oplus \widetilde{N}$.

PROPOSITION 3.1.13. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein de type $(1+r, 0)$ ou $(1, s)$ avec $r \geq 1$ ou $s \geq 1$. Alors $dim\mathcal{M}(A) = 1 + dimA$.*

Pour le cas où A est de type $(1+r, 0)$, cf.[7]. Si A est de type $(1, s)$, $N = V$ est nilpotent et $\mathcal{M}(A) = K\tilde{e}_1 \oplus K\tilde{e}_2 \oplus K\eta \oplus \widetilde{N}$. De plus, $\widetilde{N}$ est engendré par les éléments de la forme $L_e^k L_v L_e^i$, $\forall v \in V$, $\forall i, k \geq 0$. En remarquant que $L_e^k L_v L_e^i = \delta^{k-1} \varepsilon_v \in \widetilde{U}$, on en déduit que $\widetilde{N} = \widetilde{U}$ et par suite $\widetilde{V} = K\eta$. D'autre part, $\tilde{e}_2 = 0$ car $U = 0$, donc $dim\mathcal{M}(A) = 1 + dim\widetilde{U} + dim\widetilde{V} = 2 + s$ et $dim\mathcal{M}(A) = 1 + dimA$. $\square$

PROPOSITION 3.1.14. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein de type $(1+r, s)$ avec $r + s \geq 1$. Alors*

(i) $dim\mathcal{M}(A) = 1 + dimA$ si et seulement si $r = 0$ ou $s = 0$;

(ii) $dim\mathcal{M}(A) \geq 2 + dimA$ si $r \neq 0$ et $s \neq 0$.

En effet, on a $dim\mathcal{M}(A) = 1 + dim\widetilde{U} + dim\widetilde{V}$ et puisque $dim\widetilde{U} = dimN$ alors $dim\mathcal{M}(A) = 1 + dimN + dim\widetilde{V}$. Si $dim\mathcal{M}(A) = 1 + dimA$ alors $dim\widetilde{V} = 1$. Or $\tilde{e}_2$ et η appartiennent à $\widetilde{V}$, donc $\tilde{e}_2 = 0$ ou $\eta = 0$. Si $\tilde{e}_2 = 0$ alors $U = 0$, *i.e* $r = 0$ et si $\eta = 0$ alors $V = 0$, *i.e* $s = 0$. La proposition 3.1.13 nous dit que $r = 0$ ou $s = 0$ entraine que $dim\mathcal{M}(A) = 1 + dimA$, d'où l'assertion (i).

L'assertion (ii) découle du fait que $r \neq 0$ et $s \neq 0$ entaîne $\tilde{e}_2 \neq 0$ et $\eta \neq 0$ et par conséquent $dim\widetilde{V} \geq 2$. $\square$

Soient (A, ω) une 1-algèbre de Bernstein et $x = \alpha e + u + v \in A$ avec

$u \in U_e$ et $v \in V_{1,e}$. On a $(2L_e^2 - L_e)(x) = \omega(x)e + v$ et $(4L_e - 4L_e^2)(x) = u$. donc $2L_e^2 - L_e$ et $4L_e - 4L_e^2$ sont des idempotents orthogonaux de $\mathcal{M}(A)$ qui commutent entre eux. On a $L_e = (2L_e^2 - L_e) + \frac{1}{2}(4L_e - 4L_e^2)$ et pour tout entier $k \geq 1$. $L_e^k = (2L_e^2 - L_e) + \frac{1}{2^k}(4L_e - 4L_e^2)$. On peut donc écrire que $\mathcal{M}(A) = K(2L_e^2 - L_e) \oplus K(4L_e - 4L_e^2) \oplus \widetilde{N}$. Puisque $2L_e^2 - L_e \notin (N : A)$ et $4L_e - 4L_e^2 \in (N : A)$ alors, d' après (3.1.1), on a $\mathcal{M}(A) = K(2L_e^2 - L_e) \oplus (N : A)$.

THÉORÈME 3.1.15. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{1,e}$ la décomposition de Peirce d'une 1-algèbre de Bernstein. Alors :*

(*i*) $\mathcal{M}(A) = K(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{V}_{11} \oplus \widetilde{V}_{10} \oplus \widetilde{V}_{01} \oplus \widetilde{V}_{00}$ *où*

$\widetilde{V}_{ij} = \{\varphi \in (N : A) \mid (2L_e^2 - L_e) \circ \varphi = i\varphi, \varphi \circ (2L_e^2 - L_e) = j\varphi\}$ $(i, j = 0, 1)$;

(*ii*) $\widetilde{V}_{11} = \{\varphi \in (N : A) \mid \varphi(u) = 0, \varphi(e), \varphi(v) \in V_{1,e}\}$,

$\widetilde{V}_{10} = \{\varphi \in (N : A) \mid \varphi(u) \in V_{1,e}, \varphi(e) = \varphi(v) = 0\}$,

$\widetilde{V}_{01} = \{\varphi \in (N : A) \mid \varphi(u) = 0, \varphi(e), \varphi(v) \in U_e\}$,

$\widetilde{V}_{00} = \{\varphi \in (N : A) \mid \varphi(u) \in U_e, \varphi(e) = \varphi(v) = 0\}$,

quels que soient $u \in U_e$ et $v \in V_{1,e}$;

(*iii*) $\widetilde{V}_{ij}\widetilde{V}_{kl} \subset \delta_{jk}\widetilde{V}_{il}$ $(i, j, k, l = 0, 1)$.

En effet, $2L_e^2 - L_e$ et $4L_e - 4L_e^2$ étant des idempotents orthogonaux non nuls de $\mathcal{M}(A)$ qui commutent entre eux, alors $\mathcal{M}(A)$ admet la décomposition de Peirce suivante : $\mathcal{M}(A) = V_{11} \oplus V_{10} \oplus V_{01} \oplus V_{00}$ où $V_{ij} = \{\varphi \in (N : A) \mid (2L_e^2 - L_e) \circ \varphi = i\varphi, \varphi \circ (2L_e^2 - L_e) = j\varphi\}$ $(i, j = 0, 1)$. Soit $\varphi \in \mathcal{M}(A)$, $\varphi = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \theta$ avec $\alpha \in K$ et $\theta \in (N : A)$. On a $\varphi \circ (2L_e^2 - L_e) = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \theta \circ (2L_e^2 - L_e)$ et $(2L_e^2 - L_e) \circ \varphi = \alpha(2L_e^2 - L_e) + (2L_e^2 - L_e) \circ \theta$. Si $\varphi \in V_{ij}$, les égalités $(2L_e^2 - L_e) \circ \varphi = i\varphi$ et $\varphi \circ (2L_e^2 - L_e) = j\varphi$ entraînent que $\alpha = i\alpha = j\alpha$, soit $\alpha = 0$ ou $i, j = 1$. Ainsi $V_{ij} = \widetilde{V}_{ij} = \{\varphi \in (N : A) \mid (2L_e^2 - L_e) \circ \varphi = i\varphi, \varphi \circ (2L_e^2 - L_e) = j\varphi\}$ $\forall i, j \neq 1$ et $V_{11} = K(2L_e^2 - L_e) + \oplus\widetilde{V}_{11}$ où $\widetilde{V}_{11} = V_{11} \cap (N : A)$.

L'assertion (*ii*) s'obtient par calcul direct et l'assertion (*iii*) est bien connue (cf.[8]). □

PROPOSITION 3.1.16. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{1,e}$ une 1-algèbre de Bernstein avec $U_e \neq 0$ telle que N soit nilpotent. On a $\mathcal{M}(A) = K(2L_e^2 - L_e) \oplus K(4L_e - 4L_e^2) \oplus \widetilde{N}$.*

D'après la proposition 3.1.9. si N est nilpotent alors $\widetilde{N}$ est nilpotent. Puisque $4L_e^2 - 4L_e$ est non nil, il ne peut appartenir à $\widetilde{N}$, d'où la proposition. $\square$

THÉORÈME 3.1.17. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{1,e}$ une 1-algèbre de Bernstein avec $U_e \neq 0$ telle que N soit nilpotent. Alors les seuls idéaux maximaux de $\mathcal{M}(A)$ sont $(N : A) = K(4L_e - 4L_e^2) \oplus \widetilde{N}$ et $K(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{N}$.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 3.1.11.

COROLLAIRE 3.1.18. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{1,e}$ une 1-algèbre de Bernstein avec $U_e \neq 0$ telle que N soit nilpotent. Alors, les seules pondérations de $\mathcal{M}(A)$ sont $\bar{\omega}$ et $\omega' : A \longrightarrow K$ telle que $\omega'(L_e) = \frac{1}{2}$ et $\omega'(\widetilde{N}) = 0$.*

Soient $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{1,e}$ une 1-algèbre de Bernstein et $v \in V_{1,e}$. Posons $\sigma_v = 2L_eL_v - L_v$. On a $\sigma_v(e) = v$, $\sigma_v(u') = \sigma_v(v') = 0$ $\forall u' \in U_e$ et $\forall v' \in V_{1,e}$. On montre que l'application $\sigma : V_{1,e} \longrightarrow \{\sigma_v \mid v \in V_{1,e}\}$, $v \longmapsto \sigma_v$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. La proposition suivante est donc immédiate.

PROPOSITION 3.1.19. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{1,e}$ une 1-algèbre de Bernstein. Les espaces vectoriels $V_{1,e}$ et $\{\sigma_v \mid v \in V_{1,e}\}$ sont isomorphes.*

COROLLAIRE 3.1.20. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{1,e}$ une 1-algèbre de Bernstein de dimension finie. On a $dim\widetilde{V}_{11} \geq dimV_{1,e}$*

En effet, il suffit de remarquer que $\{\sigma_v \mid v \in V_{1,e}\} \subset \widetilde{V}_{11}$. $\square$

PROPOSITION 3.1.21. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{1,e}$ une 1-algèbre de Bernstein de type $(1 + r, s)$ avec $r + s \geq 1$. Alors*

(i) $dim\mathcal{M}(A) = dimA$ si $r = 0$;

(ii) $dim\mathcal{M}(A) \geq 2 + s$ si $r \neq 0$.

En effet, si A est de type $(1, s)$ avec $s \geq 1$, on a $\widetilde{V}_{11} = (V_1 : A)$, $\widetilde{V}_{10} = \widetilde{V}_{01} = \widetilde{V}_{00} = 0$. On voit que $\widetilde{V}_{11}$ est l'espace vectoriel engendré par tous les opérateurs L_v, $v \in V_{1,e}$, *i.e* $dim\widetilde{V}_{11} = s$, d'où $dim\mathcal{M}(A) = 1 + s = dimA$.

Supposons maintenant que $r \neq 0$. On a $dim\mathcal{M}(A) = 1 + dim\widetilde{V}_{11} + dim\widetilde{V}_{10} + dim\widetilde{V}_{01} + dim\widetilde{V}_{00}$. D'après le corollaire 3.1.20, $dim\widetilde{V}_{11} \geq s$. D'autre part, $dim\widetilde{V}_{00} \geq 1$ car $\tilde{e}_2$ est un élément non nul de $\widetilde{V}_{00}$. D'où $dim\mathcal{M}(A) \geq 2 + s$. $\square$

3.2. Algèbre des multiplications de la dupliquée d'une algèbre

Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K-algèbre commutative non nécessairement associative ni ayant un élément unité et $S_K^2(A)$ la seconde puissance symétrique du K-module A. Sur $S_K^2(A)$, on définit une multiplication par $(x.y)(x'.y') = xy.x'y'$ pour tous x, y, x' et y' dans A. On obtient ainsi une K-algèbre commutative appelée *la dupliquée commutative de l'algèbre* A, notée $D(A)$. L'application K-linéaire $\mu : D(A) \to A^2, x.y \mapsto xy$ est un morphisme surjectif de K-algèbres appelé *morphisme d'Etherington*. Soit $N(A) = ker\mu$. Si A est une K-algèbre telle que A^2 soit pondérée, alors $D(A)$ est pondérée. En fait, une pondération de $D(A)$ est donnée par $\omega_d = \omega \circ \mu$ où $\omega : A^2 \to K$ est une pondération de A^2.

Soit A une K-algèbre commutative. Pour tous x, y, x' et y' dans A, on a $L_{x.y}(x'.y') = xy.x'y'$ et $(\mu \circ L_{x.y})(x'.y') = (xy)(x'y') = (\ell_{xy} \circ \mu)(x'.y')$ où $L_{x.y}$ désigne la multiplication à gauche par $x.y$ dans $D(A)$ et ℓ_{xy} celle par xy dans A^2. Le diagramme ci-dessous est donc commutatif.

$$\begin{tikzcd} D(A) \arrow[r, "L_{x.y}"] \arrow[d, "\mu"'] & D(A) \arrow[d, "\mu"] \\ A^2 \arrow[r, "\ell_{xy}"'] & A^2 \end{tikzcd}$$

Le morphisme d'Etherington $\mu : D(A) \to A^2$ se prolonge naturellement en un morphisme d'algèbres des multiplications

$\mu_m : \mathcal{M}(D(A)) \to \mathcal{M}(A^2), L_{x.y} \mapsto \ell_{xy}$.

En effet, $(L_{x_1.y_1} \circ L_{x_2.y_2})(x'.y') = x_1y_1.((x_2y_2)(x'y'))$ et $(\mu \circ L_{x_1.y_1} \circ L_{x_2.y_2})(x'.y') = (x_1y_1)((x_2y_2)(x'y')) = (\ell_{x_1y_1} \circ \ell_{x_2y_2} \circ \mu)(x'.y')$ pour tous $x_1.y_1$, $x_2.y_2$ et $x'.y'$ dans $D(A)$. D'où $\mu_m(L_{x_1.y_1} \circ L_{x_2.y_2}) = \ell_{x_1y_1} \circ \ell_{x_2y_2} = \mu_m(L_{x_1.y_1}) \circ \mu_m(L_{x_2.y_2})$ et μ_m est un morphisme d'algèbres. Puisque μ est surjectif, alors μ_m l'est aussi et on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.2.1. — *Soient A une K-algèbre et $D(A)$ sa dupliquée commutative. Le morphisme de K-algèbres $\mu_m : \mathcal{M}(D(A)) \to \mathcal{M}(A^2), L_{x.y} \mapsto \ell_{xy}$ est surjectif.*

Ainsi. on a $\mathcal{M}(D(A))/ker\mu_m \simeq \mathcal{M}(A^2)$.

LEMME 3.2.2. — *Soient $\sigma_d \in \mathcal{M}(D(A))$ et $\sigma = \mu_m(\sigma_d)$. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} D(A) \arrow[r, "\sigma_d"] \arrow[d, "\mu"'] & D(A) \arrow[d, "\mu"] \\ A^2 \arrow[r, "\sigma"'] & A^2 \end{tikzcd}$$

En effet. soit $\sigma_d = \sum\limits_{finie} L_{x_1.y_1} \circ L_{x_2.y_2} \circ \cdots \circ L_{x_k.y_k}$. On a
$\mu_m(\sigma_d) = \sum\limits_{finie} \ell_{x_1y_1} \circ \ell_{x_2y_2} \circ \cdots \circ \ell_{x_ky_k}$ et pour tout $x.y$ dans $D(A)$.

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_d(x.y)) &= \mu(\sum_{finie} x_1y_1.(x_2y_2)\big((x_3y_3)(\cdots((x_ky_k)(xy)))\cdots)\big) \\ &= \sum_{finie} (x_1y_1)\big((x_2y_2)\big((x_3y_3)(\cdots((x_ky_k)(xy)))\cdots)\big) \\ &= \sum_{finie} (\ell_{x_1y_1} \circ \ell_{x_2y_2} \circ \cdots \circ \ell_{x_ky_k})(xy) \\ &= \sum_{finie} (\ell_{x_1y_1} \circ \ell_{x_2y_2} \circ \cdots \circ \ell_{x_ky_k} \circ \mu)(x.y) \\ &= \sigma(\mu(x.y)). \end{aligned}$$

d'où $\mu \circ \sigma_d = \sigma \circ \mu$ et le diagramme est commutatif. $\square$

Pour tout $x.y$ dans $D(A)$. $\mu_m(\sigma_d)(xy) = \mu(\sigma_d(x.y))$. donc $\sigma_d \in ker\mu_m$ équivaut à $\sigma_d(x.y) \in N(A)$. *i.e* $\sigma_d \in (N(A) : D(A))$. d'où $ker\mu_m = (N(A) : D(A))$.

COROLLAIRE 3.2.3. — *Soit A une K-algèbre et $D(A)$ sa dupliquée commutative. Si A^2 est un K-module projectif. $\mathcal{M}(D(A)) \simeq \mathcal{M}(A^2) \underset{s.d}{\times} (N(A) : D(A))$.*

En effet. la suite

$$0 \longrightarrow (N(A) : D(A)) \xrightarrow{i_m} \mathcal{M}(D(A)) \xrightarrow{\mu_m} \mathcal{M}(A^2) \longrightarrow 0$$

étant exacte, montrons qu'elle est scindée. Comme A^2 est un K-module projectif, il existe $\eta : A^2 \longrightarrow D(A)$ tel que $\mu \circ \eta = 1_{A^2}$. Soit $\eta_m : \mathcal{M}(A^2) \longrightarrow \mathcal{M}(D(A))$ l'application K-linéaire d'éfinie par $\eta_m(\sigma)(x.y) = \eta(\sigma(xy))$ pour tout σ dans $\mathcal{M}(A^2)$ et pour tout $x.y$ dans $D(A)$. On a $\big((\mu_m \circ \eta_m)(\sigma)\big)(xy) = \mu\big(\eta_m(\sigma)(x.y)\big) = \mu\big(\eta(\sigma(xy))\big) = \sigma(xy)$, donc $\mu_m\big(\eta_m(\sigma)\big) = \sigma$, *i.e* $\mu_m \circ \eta_m = 1_{\mathcal{M}((A^2)}$ et la suite est scindée. Par conséquent on a $\mathcal{M}(D(A)) \simeq \mathcal{M}(A^2) \underset{s.d}{\times} (N(A) : D(A))$. □

Remarque. Soit A une δ-algèbre de Bernstein. D'après le corollaire 3.2.3, on a $\mathcal{M}(D(A)) \simeq \mathcal{M}(A) \underset{s.d}{\times} (N(A) : D(A))$ car $A^2 = A$.

PROPOSITION 3.2.4. — *Soit A une K-algèbre telle que A^2 soit un K-module projectif. Alors $(N(A) : D(A))$ est l'annulateur à droite de $\mathcal{M}(D(A))$ et pour toute dérivation d de $\mathcal{M}(D(A))$, $d\big((N(A) : D(A))\big)$ est contenu dans $(N(A) : D(A))$.*

Soient $\sigma_d \in \mathcal{M}(D(A))$ et $\sigma' \in (N(A) : D(A))$. Pour tout $x.y \in D(A)$, $\sigma'(x.y) \in N(A)$ et en posant $\sigma = \sum_{finie} L_{z_1} \circ L_{z_2} \circ \cdots \circ L_{z_k}$, $z_i \in D(A)$, on a $\sigma(\sigma'(x.y)) = 0$ car $D(A)N(A) = 0$, *i.e* $\sigma \circ \sigma' = 0$ et σ' est dans l'annulateur à droite de $\mathcal{M}(D(A))$.

Réciproquement, si σ'' est dans l'annulateur à droite de $\mathcal{M}(D(A))$, pour tout $x.y \in D(A)$, on a $0 = L_{e.e}(\sigma''(x.y)) = e.\mu(\sigma''(x.y))$, ce qui entraîne que $\mu(\sigma''(x.y)) = 0$ car A^2 est un K-module projectif ([19], théorème 3.4). D'où $\sigma''(x.y) \in N(A)$ et $\sigma'' \in (N(A) : D(A))$.

Soient maintenant d une dérivation de $\mathcal{M}(D(A))$. Pour tout σ dans $\mathcal{M}(D(A))$ et tout σ' dans $(N(A) : D(A))$, on a $0 = d(\sigma \circ \sigma') = d\sigma \circ \sigma' + \sigma \circ d\sigma' = \sigma \circ d\sigma'$, donc $d\sigma'$ est dans l'annulateur à droite de $\mathcal{M}(D(A))$, *i.e.* $d\big((N(A) : D(A))\big)$ est contenu dans l'annulateur à droite de $\mathcal{M}(D(A))$. □

PROPOSITION 3.2.5. — *Soit A une K-algèbre telle que A^2 soit un K-module projectif. Soient les applications $\varphi : D(A) \to \mathcal{M}(D(A))$, $z \mapsto L_z$ et $\theta : A^2 \to \mathcal{M}(A^2)$, $x \mapsto \ell_x$. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & N(A) & \xrightarrow{i} & D(A) & \xrightarrow{\mu} & A^2 & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \theta & \\
0 \longrightarrow & (N(A):D(A)) & \xrightarrow{i_m} & \mathcal{M}(D(A)) & \xrightarrow{\mu_m} & \mathcal{M}(A^2) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

En effet, pour tout $x.y \in N(A)$, $\varphi(i(x.y)) = \varphi(x.y)$ et $i_m(\varphi(x.y)) = \varphi(x.y)$, donc $\varphi \circ i = i_m \circ \varphi$. On a également, pour tout $x.y \in D(A)$, $\theta(\mu(x.y)) = \theta(xy) = \ell_{xy}$ et $\mu_m(\varphi(x.y)) = \mu_m(L_{x.y}) = \ell_{xy}$, donc $\theta \circ \mu = \mu_m \circ \varphi$. On en déduit que le diagramme est commutatif. $\square$

Note sur le foncteur $\mathcal{M}$.

Soient $\mathcal{C}$ la catégorie des algèbres sur K et $\mathcal{D}$ celle des algèbres de multiplications sur K. Soit $\mathcal{M} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $u \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longmapsto \mathcal{M}(u)$ défini par $\mathcal{M}(u)(\sum_{finie} L_{x_1} \circ L_{x_2} \circ \cdots \circ L_{x_k}) = \sum_{finie} L_{u(x_1)} \circ L_{u(x_2)} \circ \cdots \circ L_{u(x_k)}$ pour tout $x_i \in A$. Alors $\mathcal{M}$ est un foncteur covariant.

En effet, $\forall u \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\mathcal{M}(u) \in Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}(A), \mathcal{M}(B))$ et $\forall A \in \mathcal{C}$, $\mathcal{M}(1_A) = 1_{\mathcal{M}(A)}$. De plus, si $u \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ et $v \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(v \circ u)(\sum_{finie} L_{x_1} \circ L_{x_2} \circ \cdots \circ L_{x_k}) &= \sum_{finie} L_{v(u(x_1))} \circ L_{v(u(x_2))} \circ \cdots \circ L_{v(u(x_k))} \\
&= \mathcal{M}(v)(\sum_{finie} L_{u(x_1)} \circ L_{u(x_2)} \circ \cdots \circ L_{u(x_k)}) \\
&= \mathcal{M}(v)\big(\mathcal{M}(u)(\sum_{finie} L_{x_1} \circ L_{x_2} \circ \cdots \circ L_{x_k})\big) \\
&= \big(\mathcal{M}(v) \circ \mathcal{M}(u)\big)(\sum_{finie} L_{x_1} \circ L_{x_2} \circ \cdots \circ L_{x_k}).
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{M}(v \circ u) = \mathcal{M}(v) \circ \mathcal{M}(u)$ et $\mathcal{M}$ est un foncteur covariant. En particulier, si $\mu : D(A) \to A^2$ est le morphisme d'Etherington, on a $\mathcal{M}(\mu) = \mu_m$.

Soient maintenant K un corps commutatif et e un élément de A^2 de poids 1. Alors $e.e$ est un élément de $D(A)$ de poids 1. On a $\mathcal{M}(D(A)) = KL_{e.e} \dotplus (N_d : D(A))$ avec

$(N_d : D(A)) = \{\sigma_d \in \mathcal{M}(D(A)) \mid \omega_d \circ \sigma_d = 0\} = \{\sigma_d \in \mathcal{M}(D(A)) \mid \mu \circ \sigma_d(D(A)) \subset N\}$, où ω est une pondération de A^2 et $N = ker\omega$.

Remarques.

(i) Si e est un idempotent de A alors $e.e$ est un idempotent de $D(A)$ car l'application $I_P(A) \longrightarrow I_P(D(A))$, $e \mapsto e.e$ est bijective.

(ii) l'application $\bar{\omega}_d : \mathcal{M}(D(A)) \longrightarrow K$ définie par $\bar{\omega}_d(\alpha L_{e.e} + \theta) = \alpha$, $\forall \alpha \in K$ et $\theta \in (N_d : D(A))$, est une pondération de $\mathcal{M}(D(A))$. On a $\bar{\omega}_d(L_{x.y}) = \omega_d(x.y) = \bar{\omega}(\ell_{xy})$, *i.e* $\bar{\omega}_d(\sigma_d) = \bar{\omega}(\mu_m(\sigma_d))$ où ω est une pondération de A^2. De plus $(N_d : D(A)) = ker\bar{\omega}_d$.

Soit $\widetilde{N}_d$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}(D(A))$ engendrée par les éléments de la forme $L_{z_1} \circ L_{z_2} \circ \cdots \circ L_{z_k}$ tels que l'un au moins des $z_i \in N_d$. Il est clair que $\widetilde{N}_d$ est un idéal de $\mathcal{M}(D(A))$ contenu dans $(N_d : D(A))$.

Dans le reste du paragraphe, K sera un corps commutatif.

PROPOSITION 3.2.6. — *Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. On a $\mu_m((N_d : D(A))) = (N : A^2)$ et $\mu_m(\widetilde{N}_d) = \widetilde{N}$ où $N = ker\omega_{|A^2}$.*

En effet, soit $\sigma_d \in (N_d : D(A))$, *i.e* $\omega_d \circ \sigma_d = 0$ ou encore $\omega \circ (\mu \circ \sigma_d) = 0$, donc $\mu \circ \sigma_d(D(A)) \subset N$ et $\mu_m(\sigma_d)(A^2) \subset N$ car $\mu \circ \sigma_d = \mu_m(\sigma_d) \circ \mu$. D'où $\mu_m(\sigma_d) \in (N : A^2)$. Soit $\sigma \in (N : A^2)$. Puisque $\mu_m : \mathcal{M}(D(A)) \longrightarrow \mathcal{M}(A^2)$ est surjectif, il existe $\sigma_d = \alpha L_{e.e} + \theta$ dans $\mathcal{M}(D(A))$, $\alpha \in K$, $\theta \in (N_d : D(A))$, tel que $\mu_m(\sigma_d) = \sigma$, *i.e* $\alpha \ell_{e^2} + \mu_m(\theta) = \sigma$, donc $\mu_m(\theta) = \sigma$ et $\sigma \in \mu_m((N_d : D(A)))$. D'où $(N : A^2) \subset \mu_m((N_d : D(A)))$ et $\mu_m((N_d : D(A))) = (N : A^2)$. Soit $L_{z_1} \circ L_{z_2} \cdots \circ L_{z_k}$ un générateur de $\widetilde{N}_d$. On a $\mu_m(L_{z_1} \circ L_{z_2} \cdots \circ L_{z_k}) = \ell_{\mu(z_1)} \circ \ell_{\mu(z_2)} \cdots \circ \ell_{\mu(z_k)} \in \widetilde{N}$, donc $\mu_m(\widetilde{N}_d) \subset \widetilde{N}$. L'inclusion réciproque découle de la surjectivité de μ_m et de μ. $\square$

COROLLAIRE 3.2.7. — *Soient (A, ω) une K-algèbre pondérée et $N = ker\omega_{|A^2}$. L'idéal $\widetilde{N}_d$ est nilpotent si et seulement si $\widetilde{N}$ l'est.*

Soit I_d un idéal de $D(A)$. Alors $\mu(I_d)$ est un idéal de A^2. $(I_d : D(A))$ et $(\mu(I_d) : A^2)$ sont respectivement des idéaux de $\mathcal{M}(D(A))$ et de $\mathcal{M}(A^2)$. La commutativité du diagramme ci-dessous nous dit que $\mu_m(\sigma_d) \in (\mu(I_d) : A^2)$ pour tout $\sigma_d \in (I_d : D(A))$.

$$\begin{array}{ccc} D(A) & \xrightarrow{\sigma_d} & I_d \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A^2 & \xrightarrow[\mu_m(\sigma_d)]{} & \mu(I_d) \end{array}$$

Ainsi, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.2.8. — *Soit* (A, ω) *une* K*-algèbre pondérée et* I_d *un idéal de* $D(A)$. *Alors* $\mu_m((I_d : D(A))) \subset (\mu(I_d) : A^2)$.

3.3. Note sur la dupliquée d'une δ-algèbre de Bernstein

Dans ce paragraphe, K sera un corps commutatif.

Soient (A, ω) une K-algèbre pondérée et $\delta \in K - \{\frac{1}{2}\}$. On dira que A est une *δ-algèbre de Bernstein d'ordre 2*, si pour tout x dans A, $V^3(x) = \omega(x)^4 V^2(x)$ où $V : A \to A$ est l'opérateur défini par $V(x) = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta\omega(x)x)$ $\forall x \in A$. Notons $x^{\circ^2} = x \circ x$ et $x^{\circ^{k+1}} = x \circ x^{\circ^k}$ pour $k \geq 2$. On peut remarquer que $x^{\circ^2} = V(x)$, $x^{\circ^{[3]}} = V^2(x)$ et $x^{\circ^{[4]}} = V^3(x)$.

On a donc $x^{\circ^{[4]}} - \omega(x)^4 x^{\circ^{[3]}} = V^3(x) - \omega(x)^4 V^2(x)$ pour tout x dans A. Ainsi on a le résultat suivant.

PROPOSITION 3.3.1. — *Soit* (A, ω) *une* K*-algèbre pondérée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est une* δ*-algèbre de Bernstein d'ordre 2 ;*

(ii) A° *est une algèbre de Bernstein d'ordre 2.*

LEMME 3.3.2. — *Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. Alors A est une δ-algèbre de Bernstein d'ordre 2 si et seulement si, pour tout x dans A, on a :*

$$\begin{aligned} x^{[4]} = & (-64\delta^4 + 24\delta^3 + 8\delta^2 - 6\delta + 1)\omega(x)^4 x^{[3]} + 8\delta\omega(x)x^3 x^{[3]} \\ & - 4\delta(4\delta - 1)\omega(x)^3 x^2 x^{[3]} - 8\delta^2(1 - 2\delta)\omega(x)^3 x x^{[3]} - 16\delta^2\omega(x)^2(x^3)^2 \\ & + 16\delta^2(4\delta - 1)\omega(x)^3 x^2 x^3 + 32\delta^3(1 - 2\delta)\omega(x)^4 x^4 \\ & - 4\delta(1 - 2\delta)(16\delta^3 - 4\delta + 1)\omega(x)^5 x^3 - 2\delta(1 - 2\delta)^2(8\delta^3 \\ & + 8\delta^2 - 6\delta + 1)\omega(x)^6 x^2 + 4\delta^2(1 - 2\delta)^4\omega(x)^7 x. \end{aligned}$$

Cette équation est obtenue en développant l'identité $V^3(x) = \omega(x)^4 V^2(x)$. □

On sait que si A est une algèbre de Bernstein, $D(A)$ est une algèbre de Bernstein d'ordre 2 ([21]). Ce résultat ne peut s'étendre à l'ensemble des δ-algèbres de Bernstein.

Exemple. Soient $\delta \in K^* - \{\frac{1}{2}\}$ et $A =< e, u, v >$ la δ-algèbre de Bernstein dont la table de multiplication est donnée par : $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $ev = \delta v$, $u^2 = v$, $uv = v^2 = 0$. On a $D(A) =< e.e, e.u, e.v, u.u - \delta^{-1}e.v, u.v, v.v >$ avec $(e.e)^2 = e.e$, $(e.e)(e.u) = \frac{1}{2}e.u$, $(e.e)(e.v) = \delta e.v$, $(e.u)^2 = \frac{1}{4}u.u$, $(e.u)(e.v) = \frac{1}{2}\delta u.v$, $(e.v)^2 = \delta^2 v.v$, les autres produits étant nuls ($N(A) =< u.u - \delta^{-1}e.v, u.v, v.v >$). Soit $D(A)^\circ$ la K-algèbre obtenue en définissant une nouvelle multiplication sur $D(A)$ par : $z \circ z' = \frac{1}{2}(V(z + z') - V(z - z'))$ pour tous z et z' dans $D(A)$. On a : $(e.e)^{\circ^2} = e.e$, $(e.e) \circ (e.u) = \frac{1}{2}e.u$, $(e.u)^{\circ^2} = \frac{1}{4}(1 - 2\delta)^{-1}u.u$, $(e.u) \circ (e.v) = \frac{1}{2}\delta(1 - 2\delta)^{-1}u.v$, $(e.v)^{\circ^2} = (1 - 2\delta)^{-1}\delta^2 v.v$, $(e.e) \circ (u.u - \delta^{-1}e.v) = -\delta(1 - 2\delta)^{-1}(u.u - \delta^{-1}e.v)$, $(e.e) \circ (u.v) = -\delta(1 - 2\delta)^{-1}u.v$, $(e.e)(v.v) = -\delta(1 - 2\delta)^{-1}v.v$, les autres produits étant nuls. Soit $z = e.e + u.u - \delta^{-1}e.v$. On a $z^{\circ^2} = e.e - 2\delta(1 - 2\delta)^{-1}(u.u - \delta^{-1}e.v)$, $z^{\circ[3]} = e.e + 4\delta^2(1 - 2\delta)^{-2}(u.u - \delta^{-1}e.v)$ et $z^{\circ[4]} = e.e - 8\delta^3(1 - 2\delta)^{-3}(u.u - \delta^{-1}e.v)$. Puisque $z^{\circ[4]} \neq z^{\circ[3]}$, $D(A)^\circ$ n'est pas une algèbre de Bernstein d'ordre 2 et $D(A)$ n'est donc pas une δ-algèbre de Bernstein d'ordre 2 d'après la proposition 3.3.1.

Cependant on a le résultat suivant.

PROPOSITION 3.3.3. — *Soient (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein et $D(A)$ sa dupliquée commutative. Pour tout z dans $D(A)$, on a*

$$z^{[4]} = (4\delta\omega_d(z)z^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega_d(z)^2 z^2 + 2\delta(2\delta - 1)\omega_d(z)^3 z)^2 .$$

En effet, pour tout z dans $D(A)$, on a $z^2 = \mu(z).\mu(z)$, $z^{[3]} = \mu(z)^2.\mu(z)^2$ et $z^{[4]} = \mu(z)^{[3]}.\mu(z)^{[3]}$. Comme A^2 est une δ-algèbre de Bernstein,

$$\begin{aligned}\mu(z)^{[3]} &= 4\delta\omega_d(\mu(z))\mu(z)^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega_d(\mu(z))^2\mu(z)^2 \\ &\quad + 2\delta(2\delta - 1)\omega_d(\mu(z))^3\mu(z) \\ &= \mu(4\delta\omega_d(z)z^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega_d(z)^2 z^2 + 2\delta(2\delta - 1)\omega_d(z)^3 z) .\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}z^{[4]} &= \mu(z)^{[3]}.\mu(z)^{[3]} \\ &= (4\delta\omega_d(z)z^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega_d(z)^2 z^2 + 2\delta(2\delta - 1)\omega_d(z)^3 z)^2.\end{aligned}$$

D'où la proposition. $\square$

Soit $A = Ke \oplus U \oplus V_{\delta,e}$ une δ-algèbre de Bernstein. D'après le théorème 1.1 de [16], on a $D(A) \simeq A \underset{s.d}{\times} N(A)$. Ainsi on a la décomposition suivante : $D(A) = Ke.e \oplus Ke.U \oplus Ke.V_{\delta,e} \oplus N(A)$ car $Ke.e \oplus Ke.U \oplus Ke.V_{\delta,e}$ est un supplémentaire de $N(A)$ dans $D(A)$ et $A \simeq Ke.e \oplus Ke.U \oplus Ke.V_{\delta,e} \subset D(A)$, en tant qu'espaces vectoriels.

THÉORÈME 3.3.4. — *Soient A une δ-algèbre de Bernstein et $D(A)$ sa dupliquée commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) $N(A) = 0$;

(*ii*) *$D(A)$ est une δ-algèbre de Bernstein* ;

(*iii*) *$D(A)$ est une δ-algèbre de Bernstein d'ordre 2.*

En effet, supposons que $D(A)$ soit une δ-algèbre de Bernstein d'ordre 2. Soit $z = e.e + y$ dans $D(A)$ avec $y \in N(A)$. Les calculs donnent que $z^{\circ^2} = e.e - 2\delta(1-2\delta)^{-1}y$, $z^{\circ^{[3]}} = e.e + 4\delta^2(1-2\delta)^{-2}y$ et $z^{\circ^{[4]}} = e.e - 8\delta^3(1-2\delta)^{-3}y$. Puisque $D(A)^2$ est une algèbre de Bernstein d'ordre 2, $z^{\circ[4]} = z^{\circ[3]}$ soit, $-8\delta^3(1-2\delta)^{-3}y = 4\delta^2(1-2\delta)^{-2}y$ et $y = 0$ car $\delta \neq 0$. D'où $N(A) = 0$ et $(iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Pour tout $z \in D(A)$, on a :

$\mu(z)^{[3]} = 4\delta\omega_d(\mu(z))\mu(z)^3 - (4\delta^2+2\delta-1)\omega_d(\mu(z))^2\mu(z)^2 \quad +2\delta(2\delta-1)\omega_d(\mu(z))^3\mu(z)$, soit $\mu(z^{[3]} - 4\delta\omega_d(z)z^3 + (4\delta^2+2\delta-1)\omega_d(z)^2z^2 - 2\delta(2\delta-1)\omega_d(z)^3z) = 0$ et enfin $z^{[3]} = 4\delta\omega_d(z)z^3 - (4\delta^2+2\delta-1)\omega_d(z)^2z^2 + 2\delta(2\delta-1)\omega_d(z)^3z$ si $N(A) = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ de manière triviale. $\square$

THÉORÈME 3.3.5 [16]. — *Soient A une K-algèbre et $D(A)$ sa dupliquée commutative. Si A^2 est génétique alors $D(A)$ est génétique.*

THÉORÈME 3.3.6 [17]. — *Soient A une K-algèbre de Bernstein et $D(A)$ sa dupliquée commutative. Si A^2 est de type fini alors N_d est nilpotent.*

Remarque. Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein. Soit $A_\delta = Ke \oplus U \oplus V_{\delta,e}$ où $V_{\delta,e} = V$ ($\delta \neq \frac{1}{2}$) avec $ev = \delta v\ \forall v \in V_{\delta,e}$, les autres produits restant inchangés. On montre que A_δ est une δ-algèbre de Bernstein.

Soient $A = Ke \oplus N$ une δ-algèbre de Bernstein et $D(A)$ sa dupliquée commutative. Puisque $A^2 = A$, d'après [16, théorème 1.1], $D(A)/N(A) \simeq A$ et par suite $N_d/N(A) \simeq N \simeq N^\circ$.

Le théorème 3.3.6 ne peut s'étendre aux δ-algèbres de Bernstein avec $\delta \neq 0$.

Exemple. Soit $N =< c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 >$ la nil-algèbre commutative à puissances associatives, de nil-index 4, du contre-exemple de Suttles. Alors $A = Ke \oplus U \oplus V_{\delta,e}$ où $U =< c_3, c_4, c_5 >$ et $V_{\delta,e} =< c_1, c_2 >$ ($\delta \in K^* - \{\frac{1}{2}\}$) avec $e^2 = e$, $ec_i = \frac{1}{2}c_i$ pour $i = 3, 4, 5$ et $ec_i = \delta c_i$ pour $i = 1, 2$, les autres produits restant inchangés, est une δ-algèbre de Bernstein non génétique telle que $A^2 = A$. En effet, puisque $N_d/N(A) \simeq N$ alors N_d ne peut être nilpotent sinon N le serait.

THÉORÈME 3.3.7. — *Soit $A = Ke \oplus N$ une δ-algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$D(A)$ est génétique ;*

(ii) *N est nilpotent.*

En effet, puisque la nilpotence de N entraîne que $A^2 = A$ est génétique, $(ii) \Rightarrow (i)$ d'après le théorème 3.3.5.

L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ découle de l'isomorphisme $N_d/N(A) \simeq N$ et du fait que N_d est nilpotent. $\square$

Comme dans [18], on montre que :

THÉORÈME 3.3.8. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein avec $\delta \neq 0$. On a $Der_K(D(A)) \simeq Der_K(A)$ et $Aut_K(D(A)) \simeq Aut_K(A)$.*

Ce résultat nous incite à examiner le lien entre les algèbres $\mathcal{M}(A)$ et $\mathcal{M}(D(A))$.

3.4. Algèbre des multiplications de la dupliquée d'une δ-algèbre de Bernstein

Dans ce paragraphe, K sera toujours un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2.

Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein. Posons $\tilde{e}_d = (1-\delta)^{-1}(\delta L^2_{e.e} - (1+2\delta)L^3_{e.e} - 2L^4_{e.e})$ pour $\delta \neq 1$ et $\tilde{e}_d = 2L^3_{e.e} - L^2_{e.e}$ pour $\delta = 1$. On montre que $\tilde{e}_d(e.e) = e.e$ et $\tilde{e}_d(x.y) = 0 \ \forall x, y \in N_d$. Ainsi, $\tilde{e}_d$ est un idempotent non nul de $\mathcal{M}(D(A))$ n'appartenant pas à $(N_d : D(A))$.

Dans la suite du paragraphe, sauf mention expresse du contraire, δ sera différent de 1.

THÉORÈME 3.4.1. — *Soit $A = Ke \dotplus U_e \dotplus V_{\delta,e}$ la décomposition de Peirce d'une δ-algèbre de Bernstein. Alors :*

(i) $\mathcal{M}(D(A)) = K\tilde{e}_d \dotplus \widetilde{U}_d \dotplus \widetilde{V}_d$ *où* $\widetilde{U}_d = \{\sigma_d \in (N_d : D(A)) \mid \sigma_d \circ \tilde{e}_d = \sigma_d\}$ *et* $\widetilde{V}_d = \{\sigma_d \in (N_d : D(A)) \mid \sigma_d \circ \tilde{e}_d = 0\}$;

(ii) $\widetilde{U}_d = \{\sigma_d \in (N_d : D(A)) \mid \sigma_d(N_d) = 0\}$ *et* $\widetilde{V}_d = \{\sigma_d \in (N_d : D(A)) \mid \sigma_d(e.e) = 0\}$;

(iii) On a les relations suivantes :
$\widetilde{U}_d^2 = 0$, $\widetilde{U}_d\widetilde{V}_d = 0$, $\widetilde{V}_d\widetilde{U}_d \subset \widetilde{U}_d$ *et* $\widetilde{V}_d^2 \subset \widetilde{V}_d$, *en particulier* $\widetilde{U}_d$ *est un idéal de* $\mathcal{M}(D(A))$ *et* $\widetilde{V}_d$ *est un idéal à gauche de* $\mathcal{M}(D(A))$.

La preuve est analogue à celle de [7, théorème 1].

PROPOSITION 3.4.2. — *Soit $\mathcal{M}(D(A)) = K\tilde{e}_d \dotplus \widetilde{U}_d \dotplus \widetilde{V}_d$ l'algèbre des multiplications de la dupliquée commutative d'une δ-algèbre de Bernstein A. On a $\mu_m(\widetilde{U}_d) = \widetilde{U}$ et $\mu_m(\widetilde{V}_d) = \widetilde{V}$ avec $\mathcal{M}(A^2) = K\tilde{e}_1 \dotplus \widetilde{U} \dotplus \widetilde{V}$.*

En effet, soient $\sigma_d \in \widetilde{U}_d$ et $x \in N = ker\omega_{|A^2}$. On a $\mu_m(\sigma_d)(x) = \mu(\sigma_d(z))$ où $z \in N_d$ tel que $\mu(z) = x$, donc $\mu_m(\sigma_d)(x) = 0$ et $\mu_m(\sigma_d) \in \widetilde{U}$. Soit $\sigma_d \in \widetilde{V}_d$, on a $\mu_m(\sigma_d)(e) = \mu(\sigma_d(e.e)) = \mu(0) = 0$, *i.e* $\mu_m(\sigma_d) \in \widetilde{V}$. Ainsi, $\mu_m(\widetilde{U}_d) \subset \widetilde{U}$ et $\mu_m(\widetilde{V}_d) \subset \widetilde{V}$.

Soit $\sigma \in \widetilde{U}$. Il existe $\sigma_d = \theta + \varphi$ dans $\mathcal{M}(D(A))$ tel que $\mu_m(\sigma_d) = \sigma$ où $\theta \in \widetilde{U}_d$ et $\varphi \in \widetilde{V}_d$. L'égalité $\mu_m(\sigma_d) = \sigma$ équivaut à $\mu_m(\theta) + \mu_m(\varphi) = \sigma$, soit $\mu_m(\theta) = \sigma$ car $\mu_m(\varphi) = 0$ du fait de la somme directe $\mathcal{M}(A^2) = K\tilde{e}_1 \dotplus \widetilde{U} \dotplus \widetilde{V}$. On a donc $\mu_m(\theta) = \sigma$ avec $\theta \in \widetilde{U}_d$, *i.e* $\widetilde{U} \subset \mu_m(\widetilde{U}_d)$. On montre de façon analogue que $\widetilde{V} \subset \mu_m(\widetilde{V}_d)$. □

COROLLAIRE 3.4.3. — *Soit $\mathcal{M}(D(A)) = K\tilde{e}_d \dotplus \widetilde{U}_d \dotplus \widetilde{V}_d$ l'algèbre des multiplications de la dupliquée commutative d'une δ-algèbre de Bernstein A. On a $\widetilde{U}_d/\widetilde{U}_d \cap (N(A) : D(A)) \simeq \widetilde{U}$ et $\widetilde{V}_d/\widetilde{V}_d \cap (N(A) : D(A)) \simeq \widetilde{V}$ avec $\mathcal{M}(A^2) = K\tilde{e}_1 \dotplus \widetilde{U} \dotplus \widetilde{V}$.*

En effet, $\widetilde{U}_d/ker(\mu_{m|\widetilde{U}_d}) \simeq \widetilde{U}$ et $\widetilde{V}_d/ker(\mu_{m|\widetilde{V}_d}) \simeq \widetilde{V}$ d'après la proposition 3.4.2. De plus, on a $ker(\mu_{m|\widetilde{U}_d}) = \widetilde{U}_d \cap (N(A) : D(A))$ et $ker(\mu_{m|\widetilde{V}_d}) = \widetilde{V}_d \cap (N(A) : D(A))$ et le corollaire s'ensuit. □

THEOREM 3.4.4. — *Soit $A = Ke \dotplus U_e \dotplus V_{1.e}$ la décomposition de Peirce d'une 1-algèbre de Bernstein. On a :*

(*i*) $\mathcal{M}(D(A)) = K\tilde{e}_d \dotplus \widetilde{V}_{d.11} \dotplus \widetilde{V}_{d.10} \dotplus \widetilde{V}_{d.01} \dotplus \widetilde{V}_{d.00}$ *où*

$\widetilde{V}_{d.ij} = \{\sigma_d \in (N(A) : D(A)) \mid \tilde{e}_d \circ \sigma_d = i\sigma_d, \sigma_d \circ \tilde{e}_d = j\sigma_d\}$ $(i, j = 0, 1)$;

(*ii*) $\widetilde{V}_{d.ij}\widetilde{V}_{d.kl} \subset \delta_{jk}\widetilde{V}_{d.il}$ *pour* $(i, j, k, l = 0, 1)$.

La démonstration se fait comme celle du théorème 3.1.15.

Exemple 1. Soit $A = Ke \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein constante. On a $A^2 = Ke$ et $D(A) = Ke.e \dotplus N(A)$. On a également $\mathcal{M}(A) = KL_e$, $\mathcal{M}(A^2) = K1_{A^2}$ et $\mathcal{M}(D(A)) = KL_{e.e}$, donc $(N(A) : D(A)) = ker\mu_m = 0$ et $\mathcal{M}(A) \simeq \mathcal{M}(A^2) \simeq \mathcal{M}(D(A))$.

Exemple 2. Soit $A = Ke \oplus U$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein élémentaire. On a $A^2 = A$ et $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A^2) = K\tilde{e}_1 \oplus \{v_u, u \in U\} \oplus K\tilde{e}_2$. On a aussi $D(A) = Ke.e \oplus Ke.U \oplus N(A)$ $(N(A) = U.U)$ ([21]). On montre que $\mathcal{M}(D(A)) = K\tilde{e}_{d1} \oplus \widetilde{U}_d \oplus \widetilde{V}_d$ avec $\widetilde{V}_d = K\tilde{e}_{d2} \oplus \{L_{e.u} - 2L_{e.e}L_{e.u}, u \in U\}$ où $\tilde{e}_{d1} = 2Le.e^2 - Le.e$ et $\tilde{e}_{d2} = 4Le.e - 4Le.e^2$ ([4]). On montre également que $(N(A) : D(A)) = \{\psi_v, v \in N(A)\} \oplus \{L_{e.u} - 2L_{e.e}L_{e.u}, u \in U\}$, $\widetilde{U}_d \cap (N(A) : D(A)) = \{\psi_v, v \in N(A)\}$ et $\widetilde{V}_d \cap (N(A) : D(A)) = \{L_{e.u} - 2L_{e.e}L_{e.u}, u \in U\}$, donc $\widetilde{U}_d/\{\psi_v, v \in N(A)\} \simeq \{\psi_u, u \in U\}$ et $\widetilde{V}_d/\{L_{e.u} - 2L_{e.e}L_{e.u}, u \in U\} \simeq K\tilde{e}_2$.

Exemple 3. Soit $\mathbb{C} = \langle 1, i\rangle$ le corps des nombres complexes. Sa dupliquée commutative est $D(\mathbb{C}) = \langle 1.1, 1.i, i.i\rangle = \langle 1.1, 1.i, 1.1 + i.i\rangle$, soit $D(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \underset{s.d}{\times} N(\mathbb{C})$ où $N(\mathbb{C}) = \langle 1.1 + i.i\rangle$. On a $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \langle \ell_1, \ell_i\rangle \simeq \mathbb{C}$ où ℓ_1 et ℓ_i sont les multiplications à gauche par 1 et i dans $\mathbb{C}$. Soit $x = \alpha 1.1 + \beta 1.i + \gamma(1.1 + i.i)$ dans $D(\mathbb{C})$. Les calculs montrent que $L_{1.1}(x) = \alpha 1.1 + \beta 1.i$, $L^2_{1.1}(x) = L_{1.1}(x)$, $L_{1.i}(x) = \alpha 1.i + \beta i.i$, $L^2_{1.i}(x) = \alpha i.i - \beta 1.i$, $L^3_{1.i}(x) = -L_{1.i}(x)$, $L_{1.1}L_{1.i}(x) = \alpha 1.i - \beta 1.1$, $L_{1.i}L_{1.1}(x) = L_{1.i}(x)$ et $L_{1.1}L^2_{1.i}(x) = -L_{1.1}(x)$, donc $\mathcal{M}(D(\mathbb{C})) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{C}) \underset{s.d}{\times} (N(\mathbb{C}) : D(\mathbb{C}))$ avec $(N(\mathbb{C}) : D(\mathbb{C})) = \langle L_{1.1} + L^2_{1.i}, L_{1.i} - L_{1.1}L_{1.i}\rangle$.

4

ALGÈBRES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

4.1. Généralités

Dans tout le chapitre, K désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme, $U \subset V$ un ouvert non vide de V, I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \times U \to V$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction continue. Considérons l'équation différentielle

$$(*) \quad \dot{x}(t) = f(t, x) \quad \text{avec} \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}\cdot$$

Une solution x de cette équation est telle que la fonction $\varphi : I \to V$, $t \mapsto \varphi(t) = x$ soit de classe C^1 et vérifie les conditions $(t, \varphi(t)) \in I \times U$ et $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ pour tout $t \in I$.

On dira qu'une fonction $f : I \times U \to V$ est *k-lipschitzienne* (k étant une constante positive) *en* $x \in U$ si pour tous (t, x_1) et (t, x_2) dans $I \times U$, $||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq k||x_1 - x_2||$.

Théorème de Cauchy-Kovalevsky [15]. — *Si f est une fonction k-lipschitzienne, l'équation différentielle $(*)$ admet une solution unique. De plus, si f est un polynôme en x ou une fonction analytique alors $(t, x) \mapsto s(x, t)$, où $s(x, t)$ est la solution de $(*)$, est analytique dans un ouvert convenable de $\mathbb{R} \times U$.*

Soient A une K-algèbre et $f : A \to A$ une fonction polynôme. On définit la dérivée de f en x dans la direction de y par $Df(x)y = \frac{1}{t}(f(x+t) - f(x))|_{t=0}$, $\forall x, y \in A$, $t \in \mathbb{R}$

Soient $x \in A$ et k un entier tel que $k \geq 1$, notons $P_k(x) = x^k$. On a $x^k = L_x^{k-1}(x)$ où $L_x : A \to A$, $y \mapsto xy$. Si A est commutative, la différentiation de l'identité $P_k(x) = x^k$ donne pour $k \geq 2$,

$$DP_k(x)y = 2L_x^{k-1}(y) + \sum_{j=0}^{k-3} L_x^j(x^{k-j-1}y) \ \forall y \in A.$$

Si l'algèbre A admet une pondération ω, pour toute application polynôme $\tilde{f}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \lambda^i$, nous définissons l'application $f : A \to A$, $x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \omega(x)^{n-i} x^i$.

Considérons les applications g_k de A dans A, définies de manière récurrente par :

$$g_0(x) = x \text{ et } g_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} g_j(x) g_{k-j}(x) \ \forall k \geq 0, \ \forall x \in A.$$

Lemme 4.1.1. — *$Dg_k(x)x^2 = (k+1)g_{k+1}(x)$ $\forall x \in A$, $\forall k \geq 0$.*

On vérifie que la relation est vraie pour $k = 0$. Supposons la relation vraie pour $j \leq k$, k un entier donné. On a :

$$\begin{aligned}
Dg_{k+1}(x)x^2 &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} [(Dg_j(x)x^2) g_{k-j}(x) + g_j(x)(Dg_{k-j}(x)x^2)] \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} [(j+1) g_{j+1}(x) g_{k-j}(x) + (k-j+1) g_j(x) g_{k-j+1}(x)] \\
&= \frac{1}{k+1} [2(k+1) g_0(x) g_{k+1}(x) + \sum_{j=1}^{k} j g_j(x) g_{k-j+1}(x) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{k} (k-j+1) g_j(x) g_{k-j+1}(x)] \\
&= \frac{1}{k+1} [2(k+1) g_0(x) g_{k+1}(x) + \sum_{j=1}^{k} (k+1) g_j(x) g_{k-j+1}(x)] \\
&= \frac{1}{k+1} [(k+1) \sum_{j=0}^{k+1} g_j(x) g_{k-j+1}(x)] \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} g_j(x) g_{k-j+1}(x) = (k+2) g_{k+2}(x).
\end{aligned}$$

d' où le lemme. $\square$

Remarque. Si A est une algèbre à puissances associatives alors $g_k(x) = x^{k+1}$, $\forall k \geq 0$.

D'après Andreoli et Heuch (voir [25]), le caractère d'une population dont l'hérédité est décrite par l'application $A \to A$, $x \mapsto x^2$, est gouverné par l'équation différentielle de Riccati

$$\text{(4.1.2)} \qquad \dot{y} = y^2 - y \quad \text{sur l'hyperplan} \quad H = \{x \in A \mid \omega(x) = 1\}.$$

Considérons l'équation homogène

$$\text{(4.1.3)} \qquad \dot{y} = y^2 \quad y \in A.$$

Notons $G(x,t)$ et $S(x,t)$ les solutions de (4.1.3) et (4.1.2) avec comme conditions initiales $G(x,0) = x$ et $S(x,0) = x$. Le calcul de la limite de $S(x,t)$ quand t tend vers l'infini permet l'étude de la stabilité du caractère de la population à long terme.

LEMME 4.1.4 [25]. — *Soit A une K-algèbre pondérée. On a $G(x,t) = \sum_{k \geq 0} t^k g_k(x)$, $\forall x \in A$ et $S(x,t) = e^{-t}G(x, 1 - e^{-t})$, $\forall x \in H$.*

Ce lemme est principalement dû au théorème de Cauchy-Kovalevsky qui garantit la convergence de la série $\sum t^k g_k(x)$.

LEMME 4.1.5 [9]. — *Soit A une K-algèbre pondérée. Si $\lim_{k \to +\infty} g_k(x) \in A$ alors $\lim_{t \to +\infty} S(x,t) = \lim_{k \to +\infty} g_k(x)$.*

THÉORÈME 4.1.6. — *Soit A une K-algèbre à puissances associatives non nil. Alors $G(x,t) = (1 - tL_x)^{-1}x \ \forall x \in A$.*

En effet, si A est à puissances associatives,

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \sum_{k \geq 0} t^k x^{k+1} \\ &= (\sum_{k \geq 0} (tL_x)^k)x \\ &= (1 - tL_x)^{-1}x. \quad \square \end{aligned}$$

4.2. Équation de Riccati dans les algèbres de Bernstein

Soit $\tilde{f}_\ell$ l'application polynôme définie par $\tilde{f}_\ell(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})^{\ell-3}$ $\forall \ell \geq 3$.

THÉORÈME 4.2.1 [20.25]. — *Soit A une K-algèbre de Bernstein train de rang $\ell \geq 3$. Son équation train est donnée par $f_\ell(x) = 0$.*

THÉORÈME 4.2.2 [25]. — *Soit A une K-algèbre de Bernstein. On a :*

(i) $g_\ell(x) - \omega(x)g_{\ell-1}(x) = \dfrac{2^{\ell-1}}{\ell!} f_{\ell+1}(x)$ $\forall x \in A$. $\forall \ell \geq 2$.

(ii) si $f_{\ell+1}(x) = 0$ *alors* $g_k(x) - \omega(x)g_{k-1}(x) = 0$ $\forall k \geq \ell$.

Le résultat suivant est prouvé dans [25].

THÉORÈME 4.2.3. — *Soit A une K-algèbre de Bernstein telle que $f_{\ell-1}(x) = 0$ $\forall x \in A$. On a :*

(i) $G(x.t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-2} t^k g_k(x) + \frac{t^{\ell-1}}{1-t\omega(x)} g_{\ell-1}(x)$ $\forall x \in A$;

(ii) $S(x.t) = e^{-t}\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-2} t^k g_k(x)(1-e^{-t})^k\Big) + (1-e^{-t})^{\ell-1} g_{\ell-1}(x)$ $\forall x \in H$;

(iii) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} S(x.t) = g_{\ell-1}(x)$ $\forall x \in H$;

(iv) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} S(x.t) = x^3$ $\forall x \in H$. *si A est nucléaire.*

4.3. Équation de Riccati dans les δ-algèbres de Bernstein

Rappelons qu'une K-algèbre pondérée $(A.\omega)$ est une δ-algèbre de Bernstein si pour tout x dans A. $x^{[3]} = 4\delta\omega(x)x^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2x^2 + 2\delta(2\delta-1)\omega(x)^3x$.

Soit le polynôme $\tilde{f}_{\delta.\ell}(\lambda) = \lambda(\lambda-\delta)(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})^{\ell-3}$ $\forall \ell \geq 3$. En posant $\tilde{f}_{\delta.\ell}(\lambda) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i\lambda^i$. d'après le théorème 2.3.12.

$\gamma_i = (-\frac{1}{2})^{\ell-i}[\binom{\ell-3}{i-3} + 2(1+\delta)\binom{\ell-3}{i-2} + 4\delta\binom{\ell-3}{i-1}]$ $(i = 1.\ldots.\ell)$. On a donc $f_{\delta.3}(x) = x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x$ et

$$f_{\delta.\ell+1}(x) = xf_{\delta.\ell}(x) - \frac{1}{2}\omega(x)f_{\delta.\ell}(x) \quad \forall \ell \geq 3. \tag{4.3.1}$$

L'analogue du théorème 4.2.1 est donné par :

THÉORÈME 4.3.2. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein train de rang $\ell \geq 3$. Son équation train est donnée par $f_{\delta,\ell}(x) = 0$.*

Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein. Pour tous x et y dans A, on a :
$Df_{\delta,3}(x)y = 2x(xy) + x^2y - (1+\delta)(2\omega(x)xy + \omega(y)x^2) + \delta(2\omega(xy)x + \omega(x)^2y)$,
donc

$$\begin{aligned} Df_{\delta,3}(x)x^2 &= 2x^4 + 4\delta\omega(x)x^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2x^2 + 2\delta(2\delta - 1)\omega(x)^3x \\ &\quad - (1+\delta)(2\omega(x)x^3 + \omega(x)^2x^2) + \delta(2\omega(x)^3x + \omega(x)^2x^2) \\ &= 2x^4 + 2(\delta - 1)\omega(x)x^3 - 2\delta(2\delta + 1)\omega(x)^2x^2 + 4\delta^2\omega(x)^3x \\ &= 2x(x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x) + 4\delta\omega(x)(x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 \\ &\quad + \delta\omega(x)^2x) \\ &= 2xf_{\delta,3}(x) + 4\delta\omega(x)f_{\delta,3}(x). \end{aligned}$$

LEMME 4.3.3. — $Df_{\delta,\ell}(x)x^2 = 2xf_{\delta,\ell}(x) + 2\delta(\ell - 1)\omega(x)f_{\delta,\ell}(x)\ \forall \ell \geq 3$.

En effet, d'après le calcul précédent, l'égalité est vraie pour $\ell = 3$. Supposons la vraie à un rang donné ℓ et montrons qu'elle reste vraie au rang $\ell + 1$. La différentiation de (4.3.1) donne :

$$\begin{aligned} Df_{\delta,\ell+1}(x)x^2 &= x^2f_{\delta,\ell}(x) - \frac{1}{2}\omega(x)^2f_{\delta,\ell}(x) - x(Df_{\delta,\ell}(x)x^2) - \frac{1}{2}\omega(x)(Df_{\delta,\ell}(x)x^2) \\ &= x^2f_{\delta,\ell}(x) - \frac{1}{2}\omega(x)^2f_{\delta,\ell}(x) + 2x(xf_{\delta,\ell}(x)) + 2\delta(\ell - 1)\omega(x)xf_{\delta,\ell}(x) \\ &\quad - \omega(x)xf_{\delta,\ell}(x) - \delta(\ell - 1)\omega(x)^2f_{\delta,\ell}(x) \\ &= 2x(xf_{\delta,\ell}(x)) - \frac{1}{2}\omega(x)^2f_{\delta,\ell}(x) + 2\delta\ell\omega(x)(xf_{\delta,\ell}(x) - \frac{1}{2}\omega(x)f_{\delta,\ell}(x)) \\ &\quad + (x^2 - 2\delta\omega(x)x)f_{\delta,\ell}(x) - \omega(x)xf_{\delta,\ell}(x) + \delta\omega(x)^2f_{\delta,\ell}(x). \end{aligned}$$

D'après l'identité (4.3.1), on a

$$\begin{aligned} 2xf_{\delta,\ell+1}(x) &= 2x(xf_{\delta,\ell}(x)) - \omega(x)xf_{\delta,\ell}(x) \\ &= 2x(xf_{\delta,\ell}(x)) - \omega(x)\big(f_{\delta,\ell+1}(x) + \frac{1}{2}\omega(x)f_{\delta,\ell}(x)\big) \\ &= 2x(xf_{\delta,\ell}(x)) - \frac{1}{2}\omega(x)^2f_{\delta,\ell}(x) - \omega(x)f_{\delta,\ell+1}(x). \end{aligned}$$

donc

$2x(xf_{\delta,\ell}(x)) - \frac{1}{2}\omega(x)^2 f_{\delta,\ell}(x) = 2xf_{\delta,\ell+1}(x) + \omega(x)f_{\delta,\ell+1}(x)$ et

$$\begin{aligned}
Df_{\delta,\ell+1}(x)x^2 &= 2xf_{\delta,\ell+1}(x) + \omega(x)f_{\delta,\ell+1}(x) + 2\delta\ell\omega(x)(xf_{\delta,\ell}(x) - \frac{1}{2}\omega(x)f_{\delta,\ell}(x)) \\
&\quad + (x^2 - 2\delta\omega(x)x)f_{\delta,\ell}(x) - \omega(x)xf_{\delta,\ell}(x) + \delta\omega(x)^2 f_{\delta,\ell}(x) \\
&= 2xf_{\delta,\ell+1} + 2\delta\ell\omega(x)f_{\delta,\ell+1}(x) + (x^2 - 2\delta\omega(x)x)f_{\delta,\ell}(x) \\
&\quad + \omega(x)(f_{\delta,\ell+1}(x) - xf_{\delta,\ell}(x)) + \delta\omega(x)^2 f_{\delta,\ell}(x)) \\
&= 2xf_{\delta,\ell+1}(x) + 2\delta\ell\omega(x)f_{\delta,\ell-1}(x) + (x^2 - 2\delta\omega(x)x)f_{\delta,\ell}(x) \\
&\quad - \frac{1}{2}\omega(x)^2 f_{\delta,\ell}(x) + \delta\omega(x)^2 f_{\delta,\ell}(x) \\
&= 2xf_{\delta,\ell+1}(x) + 2\delta\ell\omega(x)f_{\delta,\ell-1}(x) + (x^2 - 2\delta\omega(x)x)f_{\delta,\ell}(x) \\
&\quad - \frac{1}{2}\omega(x)^2(1-2\delta)f_{\delta,\ell}(x)\,.
\end{aligned}$$

Comme $f_{\delta,\ell}(x) \in L_\delta = U_e \cap Ann N$, $\forall \ell \geq 3$ et $x^2 - 2\delta\omega(x)x = (1-2\delta)\omega(x)^2 e$ avec $e \in I_p(A)$, on a $(x^2 - 2\delta\omega(x)x)f_{\delta,\ell}(x) = \frac{1}{2}(1-2\delta)\omega(x)^2 f_{\delta,\ell}(x)$ et le lemme s'ensuit. $\square$

Considérons les applications h_k définies de manière récurrente par $h_0(x) = x$,
$h_{k+1}(x) = \dfrac{1}{k+1}(1-2\delta)^{-1}\sum_{j=0}^{k}(h_j(x)h_{k-j}(x) - 2\delta\omega(x)^{k-j-1}h_j(x))$ $\forall x \in A$ et $\forall k \geq 0$.

En particulier, $h_1(x) = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta\omega(x)x)$ et

$h_2(x) = (1-2\delta)^{-2}(x^3 - 3\delta\omega(x)x^2 - \delta(1-4\delta)\omega(x)^2 x)$.

On remarque que si $\delta = 0$, $h_k = g_k$.

Notons $p(x) = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta\omega(x)x)$. La démonstration du lemme suivant est analogue à celle du lemme 4.1.1.

LEMME 4.3.4. — *$Dh_k(x)p(x) = (k+1)h_{k-1}(x)$ $\forall x \in A$, $\forall k \geq 0$.*

D'après le lemme 4.3.4, $Dh_k(x)\big((1-2\delta)^{-1}\omega(x)(x^2 - 2\delta\omega(x)x)\big) = (k+1)h_{k-1}(x)$, soit $(1-2\delta)^{-1}Dh_k(x)x^2 - 2\delta(1-2\delta)^{-1}Dh_k(x)x = (k+1)h_{k+1}(x)$. On voit alors que $Dh_k(x)x = (k+1)h_k(x)$ et donc,

$Dh_k(x)x^2 = (1-2\delta)(k+1)h_{k+1}(x) + 2\delta(k+1)h_k(x)$.

THÉORÈME 4.3.5. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein. Pour tout x dans A, on a :*

(i) $h_\ell(x) - \omega(x)h_{\ell-1}(x) = (1-2\delta)^{-\ell}\dfrac{2^{\ell-1}}{\ell!}f_{\delta,\ell+1}(x)$ $\forall x \in A$, $\forall \ell \geq 2$.

(ii) si $f_{\ell+1}(x) = 0$ alors $h_k(x) - \omega(x)h_{k-1}(x) = 0$ $\forall k \geq \ell$.

Notons que l'assertion (ii) se déduit de (i) que nous montrons par récurrence.

On a $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} h_2(x) - \omega(x)h_1(x) &= (1-2\delta)^{-2}\big(x^3 - 3\delta\omega(x)x^2 - \delta(1-4\delta)\omega(x)^2 x \\ &\quad - (1-2\delta)\omega(x)x^2 + 2\delta(1-2\delta)\omega(x)^2 x\big) \\ &= (1-2\delta)^{-2}\big(x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2 x\big) \\ &= (1-2\delta)^{-2} f_{\delta,3}(x) \end{aligned}$$

et l'assertion (i) est vraie pour $\ell = 2$. Suposons que, pour un ℓ donné, on ait $h_\ell(x) - \omega(x)h_{\ell-1}(x) = (1-2\delta)^{-\ell}\dfrac{2^{\ell-1}}{\ell!} f_{\delta,\ell+1}(x)$. En différentiant le membre de gauche de cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} &(\ell+1)\big((1-2\delta)h_{\ell+1}(x) + 2\delta\omega(x)h_\ell(x)\big) - \omega(x)\ell\big((1-2\delta)h_\ell(x) + 2\delta\omega(x)h_{\ell-1}(x)\big) \\ &\quad - \omega(x)^2 h_{\ell-1}(x) \\ &= (\ell+1)(1-2\delta)h_{\ell+1}(x) + (4\delta\ell + 2\delta - \ell)\omega(x)h_\ell(x) - (1+2\delta\ell)\omega(x)^2 h_{\ell-1}(x) \\ &= (\ell+1)(1-2\delta)\big(h_{\ell+1}(x) - \omega(x)h_\ell(x)\big) + (1+2\delta\ell)\omega(x)\big(h_\ell(x) - \omega(x)h_{\ell-1}(x)\big) \\ &= (\ell+1)(1-2\delta)\big(h_{\ell+1}(x) - \omega(x)h_\ell(x)\big) + (1+2\delta\ell)(1-2\delta)^{-\ell}\frac{2^{\ell-1}}{\ell!}\omega(x)f_{\delta,\ell-1}(x)\,. \end{aligned}$$

Pour le membre de droite, d'après le lemme 4.3.3, on a
$(1-2\delta)^{-\ell}\dfrac{2^{\ell-1}}{\ell!} Df_{\delta,\ell+1}(x)x^2 = (1-2\delta)^{-\ell}\dfrac{2^{\ell-1}}{\ell!}\big(2xf_{\delta,\ell-1}(x) + 2\delta\ell\omega(x)f_{\delta,\ell-1}(x)\big)$.

L'identité (4.3.1) donne $2xf_{\delta,\ell+1}(x) = 2f_{\delta,\ell+2}(x) + \omega(x)f_{\delta,\ell-1}(x)$, donc

$$\begin{aligned} (1-2\delta)^{-\ell}\frac{2^{\ell-1}}{\ell!} Df_{\delta,\ell+1}(x)x^2 &= (1-2\delta)^{-\ell}\frac{2^{\ell}}{\ell!} f_{\delta,\ell+2}(x) \\ &\quad + (1+2\delta\ell)(1-2\delta)^{-\ell}\frac{2^{\ell-1}}{\ell!}\omega(x)f_{\delta,\ell-1}(x) \end{aligned}$$

En comparant les deux résultats, il vient après réduction, que
$h_{\ell+1}(x) - \omega(x)h_\ell(x) = (1-2\delta)^{-\ell-1}\dfrac{2^\ell}{(\ell+1)!} f_{\delta,\ell+2}(x)$, d'où l'assertion (i). □

Remarque. Soient l'équation différentielle homogène

$$(4.3.6) \qquad \dot{x} = p(x) \quad \text{avec} \quad p(x) = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta\omega(x)x)$$

et l'équation de Riccati

$$(4.3.7) \qquad \dot{x} = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - x) \quad x \in H\,.$$

Soient $G(x,t)$ la solution de (4.3.6) et $S(x,t)$ celle de (4.3.7) avec pour conditions initiales $G(x,0) = x$ et $S(x,0) = x$. Alors, les assertions du théorème 4.2.3 sont vérifées si on remplace h_k par g_k.

Remarque. Dans le cas $\delta \neq 0$, la résolution des équations (4.1.2) et (4.1.3) présente de nombreuses difficultées. De ce fait, notre étude se portera sur le cas des δ-algèbres de Bernstein-Jordan.

4.4. Équation de Riccati dans les δ-algèbres de Bernstein-Jordan

Soit A une δ-algèbre de Bernstein. On dira que A est une δ-algèbre de Bernstein-Jordan si $x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2 x = 0 \; \forall x \in A$.

On a $g_0(x) = x$, $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = (1+\delta)\omega(x)g_1(x) - \delta\omega(x)^2 g_0(x)$. Pour $k \geq 0$, posons $g_k(x) = c_k\omega(x)^k g_0(x) + d_k\omega(x)^{k-1}g_1(x)$ avec $d_k = 1 - c_k$ car $\omega(g_k(x)) = \omega(x)^{k+1}$.

La différentiation de l'identité ci-dessus donne :

$$\begin{aligned}
(k+1)g_{k+1}(x) &= kc_k\omega(x)^{k+1}g_0(x) + c_k\omega(x)^k g_1(x) + (1-c_k)(k-1)\omega(x)^k g_1(x) \\
&\quad + 2(1-c_k)\omega(x)^{k-1}g_2(x) \\
&= \big(kc_k - 2\delta(1-c_k)\big)\omega(x)^{k-1}g_0(x) + \big(c_k + (k-1)(1-c_k) \\
&\quad + 2(1+\delta)(1-c_k)\big)\omega(x)^k g_1(x) \\
&= \big((2\delta+k)c_k - 2\delta\big)\omega(x)^{k-1}g_0(x) + \big(1 + 2\delta + k \\
&\quad - (2\delta+k)c_k\big)\omega(x)^k g_1(x)\,.
\end{aligned}$$

Si la δ-algèbre de Bernstein-Jordan A n'est pas élémentaire, on a

$$(k+1)c_{k+1} = (2\delta+k)c_k - 2\delta \quad \forall k \geq 0\,. \tag{4.4.1}$$

Les calculs montrent que

$$c_k = -\frac{2\delta}{k}\Big(1 + \sum_{\ell=1}^{k-2}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{k-j+2\delta}{k-j}\Big) \quad \forall k \geq 2\,. \tag{4.4.2}$$

La proposition suivante nous laisse peu d'espoir quant à l'existence de $\lim\limits_{t\to+\infty} S(x,t)$ pour δ quelconque.

PROPOSITION 4.4.3. — *Si $2\delta > 1$ alors $(g_k(x))_k$ diverge.*

Il nous suffit de montrer que $(c_k)_{k\geq 0}$ diverge.
Si $2\delta > 1$ alors $\dfrac{k-j+2\delta}{k-j} > \dfrac{k-j+1}{k-j}$ pour $j = 1, \ldots, k-2$. On a donc
$\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k-2}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{k-j+2\delta}{k-j} > \sum_{j=2}^{k}\frac{k}{j}$ et $\displaystyle\frac{2\delta}{k}\Big(1+\sum_{\ell=1}^{k-2}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{k-j+2\delta}{k-j}\Big) > \sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j}$.
donc $c_k < -\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j}$. Comme $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j} = +\infty$ alors $(c_k)_{k\geq 0}$ diverge.

Exemple. Soit A une 1-algèbre de Bernstein-Jordan. Les calculs montrent que $c_k = 1-k$ et $g_k(x) = (1-k)\omega(x)^k g_0(x) + k\omega(x)^{k-1}g_1(x)$ $\forall x \in A$, $\forall k \geq 0$. Posons $\displaystyle S_n = \sum_{k=2}^{n} t^k\omega(x)^k$ et $\displaystyle T_n = \sum_{k=2}^{n} kt^k\omega(x)^k$.
On a $T_n = t\dfrac{dS_n}{dt}$. Or $S_n = t^2\omega(x)^2\dfrac{1-(t\omega(x))^{n-1}}{1-t\omega(x)}$ et

$$\begin{aligned}\frac{dS_n}{dt} &= \frac{(2t\omega(x)^2-(n+1)t^n\omega(x)^{n+1})(1-t\omega(x))+t^2\omega(x)^3-t^{n+1}\omega(x)^{n-2}}{(1-t\omega(x))^2}\\ &= \frac{2t\omega(x)^2-t^2\omega(x)^3+nt^{n+1}\omega(x)^{n-2}-(n+1)t^n\omega(x)^{n-1}}{(1-t\omega(x))^2}\\ &= \frac{(2-t\omega(x))t\omega(x)^2}{(1-t\omega(x))^2}+\frac{nt^n\omega(x)^{n+1}(t\omega(x)-1)-t^n\omega(x)^{n-1}}{(1-t\omega(x))^2}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} t^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} nt^n = 0$ pour $-1 < t < 1$, alors
$\displaystyle\sum_{k\geq 2} kt^k\omega(x)^k = \frac{(2-t\omega(x))t^2\omega(x)^2}{(1-t\omega(x))^2}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}G(x,t) &= g_0(x)+t\omega(x)g_1(x)+g_0(x)\Big(\frac{t^2\omega(x)^2}{1-t\omega(x)}-\frac{(2-t\omega(x))t^2\omega(x)^2}{(1-t\omega(x))^2}\Big)\\ &\quad+g_1(x)\frac{(2-t\omega(x))t^2\omega(x)^2}{(1-t\omega(x))^2}\\ &= g_0(x)\frac{1-2t\omega(x)}{(1-t\omega(x))^2}+g_1(x)\frac{t\omega(x)}{(1-t\omega(x))^2}.\end{aligned}$$

Soit $x \in H$ et $t \in]0, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned}S(x,t) &= g_0(x)\frac{e^{-t}(1-2(1-e^{-t}))}{e^{-2t}}+g_1(x)\frac{e^{-t}(1-e^{-t})}{e^{-2t}}\\ &= g_0(x)(2-e^t)+g_1(x)(e^t-1).\end{aligned}$$

On voit clairement que $S(x,t)$ diverge.

Il existe des δ-algèbres de Bernstein pour lesquelles $S(x,t)$ converge vers un idempotent.

PROPOSITION 4.4.4. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein-Jordan avec $-2\delta \in \mathbb{N}$. $S(x,t)$ converge vers un idempotent.*

En effet, supposons $-2\delta = \ell$ pour un certain entier naturel ℓ. L'identité (4.4.1) devient $(k+1)c_{k+1} = (k-\ell)c_k + \ell$. On a donc $c_{\ell+1} = \dfrac{\ell}{\ell+1}$ et on montre par récurrence que $c_k = \dfrac{\ell}{\ell+1}$ pour tout $k \geq \ell+1$. Ainsi, pour $k \geq \ell+1$, $g_k(x) = \dfrac{\ell\omega(x)^k}{\ell+1}g_0(x) + \dfrac{\omega(x)^{k-1}}{\ell+1}g_1(x) = \dfrac{1}{1-2\delta}\omega(x)^{k-1}(g_1(x) - 2\delta\omega(x)g_0(x))$ car $\ell = -2\delta$. Il vient que

$$
\begin{aligned}
G(x,t) &= \sum_{k=0}^{\ell} t^k g_k(x) + \frac{1}{1-2\delta}(g_1(x) - 2\delta\omega(x)g_0(x)) \sum_{k\geq \ell+1} t^k\omega(x)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} t^k g_k(x) + \frac{t^{\ell+1}\omega(x)^{\ell}}{(1-t\omega(x))(1-2\delta)}(g_1(x) - 2\delta\omega(x)g_0(x))
\end{aligned}
$$

et $S(x,t) = e^{-t}(\sum_{k=0}^{\ell}(1-e^{-t})^k g_k(x)) + \dfrac{(1-e^{-t})^{\ell+1}}{(1-2\delta)}(g_1(x) - 2\delta g_0(x))$, d'où

$\lim_{t\to+\infty} S(x,t) = \dfrac{1}{(1-2\delta)}(g_1(x) - 2\delta g_0(x)) \in I_p(A)$.

Bibliographie

[1] J. Bayara. — *Sur les algèbres d'évolution*. Thèse de 3e cycle. Université de Ouagadougou. 1999.

[2] J. Bayara. M. Ouattara et A. Micali. — *Sur les algèbres de Bernstein et d'Etherington*. Soumis à publication. 1999.

[3] R. Costa. — *A note on Bernstein Algebras*. Linear Algebra. Appl. **112**. 1989. p. 195—205.

[4] R. Costa and H. Guzzo Jr. — *Indecomposable basic algebras*. Linear Algebra Appl. **183**. 1993. p. 223—236.

[5] R. Costa and H. Guzzo Jr. — *Indecomposable basic algebras II*. Linear Algebra Appl. **196**. 1994. p. 233—242.

[6] R. Costa. L. S. Ikemoto and A. Suazo. — *On the multiplication algebra of a Bernstein algebra*. Comm. Algebra. **26** (11). 1998. p. 3727—3736.

[7] R. Costa and A. Suazo. — *The multiplication algebra of a Bernstein algebra : basic results*. Comm. Algebra. **24** (5). 1996. p. 1809—1821.

[8] J. C. Da Motta Ferreira et A. Micali. — *Sur la décomposition de Peirce*. Non-associative Alg. Appl. **303**. 1994. p. 106—113.

[9] H. Gradl and S. Walcher. — *On continous time models in genetic and Bernstein algebras*. J. Math. Biology. **31**. 1992. p. 107—113.

[10] J. C. Guitiérrez Fernández. — *The Bernstein problem for the type* $(n-2,2)$. J. Algebra. **181**. 1996. p. 613—627.

[11] H. Guzzo Jr. — *The Peirce decomposition for commutative train algebras*. Comm. Algebra. **22** (12). 1994. p. 5745—5757.

[**12**] H. Guzzo Jr and P. Vicente. — *Train algebras of rang n which are Bernstein or Power-associative algebras*. Nova J. Math. Game Theory Algebra. vol. 6. N°2/3. 1997. p. 103—112.

[**13**] P. Holgate. — *Free non associative principal train algebras*. Proc. Roy. Soc. Edimburgh Math. Soc. **27** (2), 1984, p. 313—319.

[**14**] J. Lopez Sanchez. E. Rodriguez S. Maria. — *On train algebras of rank 4*. Comm. Algebra. **24** (14), 1996. p. 4439—4445.

[**15**] A. Micali. — *Note sur le théorème de Cauchy-Kovalevsky*. communication orale. 2000.

[**16**] A. Micali et M. Ouattara. — *Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington*. Linear Algebra. Appl. **153**. 1991. p. 193—207.

[**17**] A. Micali et M. Ouattara. — *Structure des algèbres de Bernstein*. Linear Algebra. Appl. **218**. 1995. p. 77—88.

[**18**] A. Micali et M. Ouattara. — *Sur la dupliquée d'une algèbre II*. Bull. Soc. Math. Belg. Série A **43**. 1991. p. 113—125.

[**19**] A. Micali et M. Ouattara. — *Sur la dupliquée d'une algèbre*. Bull. Soc. Math. Belg. Série B. **45**. 1993. p. 5—24.

[**20**] M. Ouattara. — *Sur les algèbres de Bernstein qui sont des T-algèbres*. Linear Algebra. Appl. **148**. 1991. p. 171—178.

[**21**] M. Ouattara. — *Sur les algèbres de Bernstein d'ordre 2*. Linear Algebra Appl. **144**. 1991. p. 29—38.

[**22**] M. Ouattara. — *Algèbres de la Génétique des Populations*. Thèse d'Etat. Université de Ouagadougou. 1991.

[**23**] F. L. Pritchard. — *Ideals in the multiplication algebra of a non-associative algebra*. Comm. Algebra. **21** (12). 1993. p. 4541—4559.

[**24**] S. Walcher. — *Algebras and differential equations*. Hadronic Press. Palm Harbor. 1991.

[**25**] S. Walcher. — *On Bernstein algebras which are train algebras*. Proc. Edinburgh Math. Soc. **35**. 1992. p. 159—166.

[**26**] A. Wörz-Busekros. — *Algebras in genetics*. Lecture Notes in Biomathematics. **36**. Berlin-Heidelberg-New York. 1980.

2001
André CONSEIBO
UNIVERSITÉ DE OUAGADOUGOU (UFR/SEA)

RÉSUMÉ

Cette thèse est largement consacrée à l'étude de la structure des **δ-algèbres de Bernstein monogènes**. Dans la première partie, nous rappelons quelques résultats généraux sur les **algèbres de Bernstein**. La seconde partie porte sur l'étude des δ-algèbres de Bernstein monogènes dont une caractérisation est donnée à travers leur table de multiplication. Nous montrons que pour ces algèbres, être **train** équivaut à être **train spéciales**. Grâce à cette étude, nous exhibons, pour toute δ-algèbre de Bernstein train de **rang** donné, les coefficients de son **équation train**. Dans cette partie, nous donnons également les conditions nécessaires pour que certains types d'algèbres soient **indécomposables**. Dans la troisième partie, nous nous intéressons à l'**algèbre des multiplications** d'une δ-algèbre de Bernstein. Nous y examinons le lien entre l'algèbre des multiplications d'une δ-algèbre de Bernstein et l'algèbre des multiplications de sa **dupliquée**. À cet effet, nous montrons que **le morphisme d'Etherington** se prolonge en un morphisme d'algèbres des multiplications. Enfin, la dernière partie du mémoire traite de l'**équation de Riccati** dans une δ-algèbre de Bernstein. Dans le cas particulier des **δ-algèbres de Bernstein Jordan**, nous procédons à sa résolution.