UNIVERSITÉ ABDOU MOUMOUNI
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques et Informatique

-

N° de Thèse	

THÈSE

POUR L'OBTENTION DU DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ ABDOU MOUMOUNI

École Doctorale Sciences Exactes et Techniques

Domaine : Sciences Exactes et Technologies
Option : Mathématiques
Spécialité : Géométrie Différentielle

présentée par

OUSMANE TOUDOU Issa

Contribution à l'étude des Variétés d'Osserman et des Variétés de Finsler d'Osserman

Soutenue publiquement le 24 Juin 2019
devant le jury composé de :

WADE Aissa,	Pr, Université de Pennsylvanie	Présidente
TODJIHOUNDE Léonard,	Pr, Université d'Abomey Calavi	Rapporteur
MASSAMBA Fortuné,	Pr, Université de Kwazulu-Natal	Rapporteur
MAHAMAN Bazanfaré,	MC, UAM, (Niamey)	Rapporteur
SALEY Bisso,	Pr, UAM, (Niamey)	Examinateur
HASSIROU Mouhamadou,	MC, UAM, (Niamey)	Directeur de thèse

T
H
E
S
E

Remerciements

C'est un grand plaisir pour moi d'exprimer ma gratitude a tous ceux qui m'ont aidé tout au long de ma formation.

Je suis reconnaissant à mon encadreur HASSIROU Mouhamadou d'avoir été un directeur de thèse extremement patient. Je tiens ici à le remercier pour ces différentes contributions graces auxquelles la réalisation de ce travail a été possible. Merci aussi pour la liberté qu'il m'a donné, dans l'emploi du temps et surtout dans le choix du calendrier de travail.

Les Professeurs TODJIHOUNDE Léonard, MASSAMBA Fortuné et MAHAMAN Bazanfaré ont accepté de lire avec attention cette thèse. Je suis très content qu'ils aient accepté d'être rapporteurs.

Merci à Professeure WADE Aissa de l'Université de Pennsyvanie (Etats Unis), pour avoir accepté de présider le Jury de cette thèse et au Professeur SALEY Bisso qui contribue à mon Jury en tant qu'examinateur.

J'aimerai également remercier Dr DIALLO Abdoul-Salam de l'Université Alioune Diop de Bambey, pour sa disponibilité et son immense gentillesse.

Ma pensée va également aux Professeurs, Camarades, Amis de l'Université Abdou Moumouni de Niamey et de l'Université Bâ Boubakar de Tillaberi. J'ai eu la chance d'y croiser des gens exceptionels qui m'ont permis de progresser, par leurs conseils et leur encouragements.

Je ne saurai terminer sans adresser une pensée très affectueuse à ma famille notamment mes parents dont le soutien est généreux et sans conditions depuis toujours. Que vous soyez tous rassurés de ma profonde et sincère affection.

A la mémoire de : Feu mon père, Ousmane Toudou parti pour ne plus revenir et à ma mère, Maikano Alou, cette thèse est un fruit de leur conseilles et le témoignage des sacrifices et du courage dont ils ont fait preuve pour mon éducation

A toute ma famille ...

Résumé

Cette thèse traite de deux généralistions de la notion de variété d'Osserman.
La notion de variété affine d'Osserman à été introduite, afin de construire des métriques pseudo-riemanniennes d'Osserman sur le fibré cotangent d'une variété affine via l'extension riemannienne. Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à la construction des métriques pseudo-riemanniennes Walker-Osserman. Deux familles de connextions sur une $3-$variété et une $4-$variété ont été étudiées. Le résultat principal de ce travail est la construction de deux familles de métriques pseudo-riemanniennes Walker-Osserman de signature $(3, 3)$ et de signature $(4, 4)$.

Un autre travail est la définition d'une variété de Finsler-Osserman. En effet, la géométrie de Finsler est souvent décrite comme une généralisation de la géométrie riemannienne au sens où au lieu d'avoir une collection de produit scalaire pour chaque espace tangent d'une variété lisse, nous avons une famille de norme de Minskowski sur chacun de ces espaces. Cette géométrie est désormais bien connue, mais bon nombre de questions résolues en géométrie riemannienne attendent d'être traitées en géométrie de Finsler. Dans la perspective d'établir des résultats analogues généralisant la théorie classique, nous nous intéréssons dans cette thèse à l'étude des conditions pour qu'une variété de Finsler soit d'Osserman. L' opérateur de Jacobi en riemannien assez bien connu s'est révélé un outil fécond. Ainsi tout en utilisant la formulation intrinsèque de la connexion de Chern, l'opérateur de Jacobi en Finsler est défini. C'est ainsi qu'une description d'une famille de connexion de Chern d'Osserman en dimenssion 2 est donnée dans ce travail.

Abstract

In this thesis, we study two generalizations of the consept of Osserman manifold.

The concept of affine Osserman connection originated from the effort to build up examples of pseudo-Riemanniann Osserman manifolds via the construction called the Riemann extension. In this thesis, we study the Osserman condition on two families of affine connection. We constructs an example of pseudo-Riemannian Walker Osserman metric of signature $(3, 3)$ and of signature $(4, 4)$ using the Riemann extensions.
On the other hand, a Finsler manifold is a generalization of a riemannian manifold admitting its tangent spaces being Banach spaces or, more generaly Minkowski spaces. We construct, as in Riemannian case,the Osserman structure in Finsler geometry. We introduce the notion of Osserman Finsler manifold structures on pull-back bundle π^*TM, and obtain some caracterizations.Finaly, we study a particular Chern connection on a $2-$ dimensional Finsler manifold.

 Ousmane Toudou Issa ©UAM/NIAMEY 2019

Table des matières

Introduction

Contexte

Dans sa leçon inaugurale [40] "*Habilitationsvortrag*" (Sur l'hypothèse servant de fondement à la géométrie) de juin 1854, Riemann introduit la notion de structure métrique basée sur un élément de longueur

$$ds = F(x^1, \cdots, x^n, dx^1, \cdots, dx^n),$$

où $F(x, y)$ est une fonction positivement homogène sur le fibré tangent TM et de degré 1 en y. Riemann s'intéresse de près au cas quadratique qui est à l'origine de la géométrie riemannienne. Le cas général sans la restriction quadratique apparait dans la thèse de P. Finsler [23] en 1918 intitulée "über Kurven und Flächen in Allemeinein Räumen" sous la direction de C. Corathéodory. Le sujet, motivé par l'étude du calcul des variations des courbes, attire beaucoup de mathématiciens tels que : J. Wegner, L. Berwald, G. Landsberg, E. Cartan, H. Bersmann et H. Rund,.... C'est E. Cartan qui popularise le nom de "géométrie finslerienne" en 1934.

La géométrie finslerienne est souvent décrite comme une généralisation de la géométrie riemannienne au sens où au lieu d'avoir une collection de produit scalaire pour chaque espace tangent d'une variété lisse, nous avons une famille de norme de Minkowski sur chacun de ces espaces. La géométrie finslérienne est désormais assez bien connue, mais bon nombre de questions résolues en géométrie riemannienne attendent d'être traitées en géométrie finslérienne dans la perspective d'établir des résultats analogues géneralisant la théorie classique.

L'étude des variétés pseudo-riemanniennes est un aspect des mathématiques qui a suscité beaucoup d'intérêt. L'invariant principal et le plus naturel qui possède beaucoup d'informations sur la variété est le tenseur de courbure. Mais cet objet est assez difficile à manipuler et à interpréter. Raison pour laquelle, il est fait des essais pour chercher à en extraire des objets plus simples, quitte à perdre un peu d'informations sur la variété. Parmi ces objets on peut citer : la courbure de Ricci, la courbure sectionnelle, la courbure scalaire, l'opérateur de Szabo et l'opérateur de Jacobi [13]. Dans cette thèse, nous nous focaliserons plus à ce dernier.
L'opérateur de Jacobi est un invariant dont les valeurs propres donnent des informations sur les variétés riemanniennes. Il intervient dans l'étude des champs de vecteurs de Jacobi, de la varia-

tion des géodésiques et des points conjugués. L'étude de l'opérateur de Jacobi a permis d'avancer dans la connaissance des espaces localement symétriques. En effet, plusieurs de caractérisations des espaces localement symétriques s'appuient sur l'opérateur de Jacobi [13]. Soit (M, g) est une variété riemannienne localement symétrique de rang 1 ou une variété riemannienne plate, alors le groupe des isométries locales agit transitivement sur la sphère unité du fibré tangent, et ainsi les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi sont constantes. R. Osserman [38] conjectura que l'inverse est vraie : *si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi d'une variété riemannienne* (M, g) *sont indépendantes du point* p *de* M *et d'un vecteur unitaire* X *tangent en* p *à* M*, alors* M *est un espace localement symétrique de rang* 1 *ou un espace plat*. Plusieurs mathématiciens ont travaillé sur la conjecture, on peut citer : Q-S. Chi [8, 9, 10], P. Gilker [27, 28], Z. Rakíc [39], Y. Nikolayevsky [33, 34, 35, 36].

Le concept de variété d'Osserman fut introduit par Gilkey, Swann et Vanhecke [28] en 1995. Plusieurs résultats de classification sur les variétés d'Osserman ont été obtenues. Mais cette théorie a conduit à d'autres concepts d'Osserman comme celui des variétés pseudo-riemanniennes d'Osserman et des variétés affines d'Osserman. Si l'opérateur de Jacobi des variétés riemanniennes est assez bien connu et s'est révélé être un outil fécond, celui des variétés pseudo-riemanniennes représente encore un vaste champ de recherche ouvert. Cet état de fait, ainsi que l'attrait du monde pseudo-riemannien, si semblable en apparence au cas riemannien et au comportement pourtant parfois très différent, son intérêt en relativité générale, incitent à s'intéresser au cas pseudo-riemannien. Une réponse positive à la conjecture a été obtenue en géométrie lorentzienne. Il existe des métriques pseudo-riemanniennes d'Osserman non symétriques et ainsi que des métriques d'Osserman symétriques qui ne sont pas de rang 1 [25]. Ce qui diversifie la recherche sur les variétés pseudo-riemanniennes d'Osserman.

La notion de variété affine d'Osserman a été introduite par García-Río, Kupeli, Vázquez-Abal et Vázquez-Lorenzo [24], afin de construire des métriques pseudo-riemanniennes d'Osserman sur le fibré cotangent d'une variété affine via l'extension riemannienne. Elle se place à un point de confluence de deux théories : la géométrie affine et la géométrie pseudo-riemannienne. La description des surfaces affines d'Osserman est complète. En dimension 3, la description n'est pas complète, mais des résultats importants ont été établis. Nous rappelons les résultats suivants :

- Dans, [12], A. S. Diallo étudie les surfaces affines d'Osserman. Il prouve qu'une surface affine est d'Osserman si et seulement si son tenseur de Ricci est anti-symétrique. Il prouve aussi que toute surface affine d'Osserman localement symétrique est à courbure de Ricci nulle et des exemples sont construits.
- Dans [15], A. S. Diallo et M. Hassirou étudient la condition d'Osserman sur une famille de connexion sans torsion sur une variété affine de dimension 3. Comme application, ils construisent un exemple de métrique pseudo-riemannienne d'Osserman de signature $(3, 3)$ sur le fibré cotangent à partir de l'extension riemannienne. Ils prouvent aussi que le concept

affine d'Osserman est preservé par le produit de variété.
- Dans [16], A. S. Diallo et M. Hassirou étudient la condition d'Osserman sur deux familles différentes de connexions affines sans torsion sur une variété de dimension 3. Avec la première famille, ils exhibent des exemples de variété affine d'Osserman à courbure de Ricci nulle dont la courbure de Riemann n'est pas nulle, tandis qu'avec la seconde famille, ils construisent des exemples de variété affine d'Osserman à courbure de Ricci non nulle.
- A. S. Diallo [14], étudie une nouvelle famille de connexion affine d'Osserman sur une variété affine de dimension 3.
- Dans [19], les auteurs étudient l'extension riemannienne twistée d'une variété affine d'Osserman de dimension 2. L'extension riemannienne twistée est une généralisation de l'extension riemannienne classique. Comme application, ils construisent des exemples de métriques pseudo-riemannienne d'Osserman de signature $(2, 2)$, qui ne sont pas localement symétrique.
- Dans [20], les auteurs ont construit des exemples de variétés affines d'Osserman de dimension 3 qui sont localement symétrique mais dont la courbure de Riemann n'est pas nulle. Rappelons qu'en dimension 2 toute variété affine d'Osserman localement symétrique est à courbure nulle.
- Dans [21], les auteurs exhibent une nouvelle famille de connexions affines d'Osserman qui sont à courbure de Ricci nulle et dont la courbure de Riemann n'est pas nulle sur une variété affine de dimension 3.
- Dans [22], Les auteurs étudient deux nouvelles familles de connexions affines d'Osserman. La premère est à courbure de Ricci nulle et la deuxième est à courbure de Ricci non nulle sur une variété de dimension 3.

L'étude des variétés d'Osserman en géométrie pseudo-riemannienne et en géométrie affine est d'actualité. Le sujet a fait l'objet de plusieurs articles et monographes.

La géométrie finslerienne est souvent décrite comme une généralisation de la géométrie riemannienne au sens où au lieu d'avoir une collection de produits scalaires pour chaque espace tangent d'une variété lisse M, nous avons une famille de normes de Minkowski H_x avec $x \in M$, sur chacun de ces espaces. La géométrie finslerienne, motivée initialement par les calculs variationnels semble bien décrire le comportement des géodésiques. Cependant, il est plus difficile de dégager une notion de transport parallèle, et plusieurs connexions apparaissent en géométrie finslerienne. Nous citons entre autres la connexion de Berwald, introduite en 1926, qui est sans torsion mais non compatible avec la métrique et la connexion de Cartan, introduite en 1934, qui est compatible avec la métrique mais possède une torsion. Il faut attendre 1948 pour qu'apparaisse dans les travaux de Chern une connexion qui puisse être considérée comme un outil remplaçant la connexion de Levi-Civita.

La géométrie de Finsler est bien connue de nos jours, mais beaucoup de questions résolues dans le cas riemannienn attendent d'être traitées en géométrie de Finsler dans la logigue d'établir des résultats analogues. C'est ainsi, contrairement aux variétés riemanniennes, l'opérateur de Jacobi des variétés finslériennes reste encore un vaste champ de recherche ouvert.

Objectif et présentation des résultats de la thèse

L'idée dans ce travail est d'étudier deux differentes généralisations de la notion de variété d'Osserman. La première consiste à étudier les variétés affines d'Osserman. On s'intéresse ensuite à la construction des métriques pseudo-riemannienne Walker-Osserman. La seconde est celle qui consiste à étudier les conditions pour qu'une variété de Finsler soit d'Osserman.

Ce document comporte trois (3) chapitres. Dans le chapitre 1 ; nous rappellerons quelques concepts de base de la géométrie affine, pseudo-riemannienne et de la geométrie de Finsler. Ce chapitre sert à fixer le cadre général et les notations dans ce document.

Dans le chapitre 2, nous introduirons les variétés affines d'Osserman, l'extension riemannienne et les structures de Walker. La première section est consacrée à des rappels sur les variétés affines d'Osserman. La deuxième section est consacrée à l'étude d'une famille de connexion affine d'Osserman sur une 3-variété. La troisième section porte sur l'étude d'une famille de connexion affine d'Osserman sur une 4-variété. Le résultat principal de ce chapitre est la construction de deux familles de métrique pseudo-riemannienne de Walker-Osserman de signature $(3, 3)$ et de signature $(4, 4)$. C'est l'objet de la dernière section.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de la condition d'Osserman sur une variété de Finsler. Ce chapitre est divisé en 3 parties. Dans la premère partie, on rappelle la fomulation intrinsèque de connexion de Chern. Dans la deuxième, on définit l'opérateur de Jacobi associé à la courbure de Chern et des proprétés sont établies. Dans la troisième parties une description d'une famille de connexions de Chern d'Osserman en dimension 2 est donnée.

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous rappellerons quelques notions de la géométrie qui serviront de base des concepts étudiés dans les chapitres suivants. Ce chapitre est structuré comme suit :
Dans la première section [1.1], nous allons parler de la géométrie du fibré cotangent. Ensuite nous donnons à la section [1.2] la notion de connexion sur les variétés et les objets géométriques qui lui sont associés ainsi que leur propriétés. La notion de strutures de Walker est introduite à la section [1.3]. Sont données dans la section [1.4], les notions de métriques sur le fibré cotangent. Nous terminons par un rappel sur les notions de base sur les variétés finsleriennes ; en effet nous présentons juste des outils classiques de la géométrie finslerienne.

1.1 Géométrie du fibré cotangent

Considerons M une variété différentiable de dimension m, ω est une $1-$forme différentielle sur T_p^*M. Soient $u = (u^1, \ldots, u^m)$ un système de coordonnées locales sur un voisinage U de M, $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ une base du fibré tangent TM, où $\partial_i := \frac{\partial}{\partial u_i}$ et $\{du^1, \ldots, du^m\}$ une base du fibré cotangent T^*M. Si h est une fonction lisse sur M, on pose :

$$h_{12\ldots r} = \frac{\partial^r h}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots, \partial u_r}. \tag{1.1}$$

Les coordonnées du dual sont écrites avec l'indice vers le bas, car ils se transforment de manière covariante plutôt que contravariante, ce qui nous permet de conserver le formalisme de la sommation sur les indices répétés. Posons

$$\omega = u_{i'} du^i \tag{1.2}$$

où $i' = i + m, i = 1, \ldots, m$. La 1-forme ω définie par (1.2) est parfois appelée la 1-forme de Poincaré ou la 1-forme de Liouville [26]. On définit un système de coordonnées locales sur $\tilde{U} := \pi^{-1}(U) \subset T^*M$ de la forme

$$(u^1, \ldots, u^m; u_{1'}, \ldots, u_{m'}). \tag{1.3}$$

Pour tout champs de vecteur X sur M, on définit une fonction lisse sur le fibré cotangent $\iota X : T^*M \to M$ appelée application d'évaluation par

$$\iota X(p,\omega) = \omega(X_p) \quad \text{où} \quad X = X^i\partial_i. \tag{1.4}$$

Dans un système de coordonnées locales, l'application d'évaluation s'écrit :

$$\iota X(u^i, u_{i'}) = u_{i'}X^i \tag{1.5}$$

Les champs de vecteur sur T^*M sont caractérisés par leur action sur la fonction ιX. Plus précisement on a :

Lemme 1.1.1. *Soient $\tilde{Y}$ et $\tilde{Z}$ deux champs de vecteurs lisses sur le fibré cotangent T^*M. Supposons $\tilde{Y}(\iota X) = \tilde{Z}(\iota X)$ pour tout champs de vecteurs lisses X sur M. Alors $\tilde{Y} = \tilde{Z}$.*

Démonstration. Soit $\tilde{Y} = a^i(u,u')\partial_i + b_{i'}(u,u')\partial_{i'}$ un champs de vecteur lisse sur T^*M tel que $\tilde{Y}(\iota X) = 0$ pour tout champs de vecteur lisse sur M. Nous allons montrer que $\tilde{Y} = 0$. Soit $X = X^j(u)\partial_j$. Comme $\iota X = u_{i'}X^i$, nous avons :

$$0 = \tilde{Y}(\iota X) = u_{j'}a^i(u,u')(\partial_i X^j)(u) + b_{i'}(u,u')X^i(u).$$

Fixons j. Pour $X = \partial_j$, alors on a : $X^i = \delta^i_j$ ainsi $\iota X = u_{j'}$ et

$$0 = \tilde{Y}(\iota X) = b_{j'}(u,u') \quad \text{ainsi} \quad b_{j'} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{Y} = a^i(u,u')\partial_i.$$

Si nous prenons $X = u^j\partial_j$, alors nous obtenons :

$$0 = \tilde{Y}(\iota X) = u_{j'}a^j(u,u').$$

Ainsi $a^j(u,u') = 0$ quand $u_{j'} \neq 0$. Comme les fonctions $a^j(u,u')$ sont lisses, ceci implique que a^j s'annule identiquement et par suite $\tilde{Y} = 0$. $\square$

Soit X un champs de vecteur lisse sur M. Le relevément complet de X noté X^C est le champs de vecteurs sur le fibré cotangent T^*M caractérisé à partir du Lemme 1.1.1 par l'identité :

$$X^C(\iota Z) = \iota[X,Z] \quad \text{pour tout champs de vecteur} Z \text{ sur } M. \tag{1.6}$$

Lemme 1.1.2. *Soit (p,ω) dans $T^*M\setminus\{0\}$, c'est-à-dire $\omega \neq 0$. Alors l'espace tangent $T_{(p,\omega)}T^*M$ est engendré par les relevéments complets de tout les champs de vecteurs lisses sur M.*

Démonstration. Nous allons d'abord calculé le relevément complet dans un système de coordonnées locales. Soit

$$X = X^j(u)\partial_j \quad \text{et} \quad X^C = a^j(u,u')\partial_j + b_{j'}(u,u')\partial_{j'}.$$

Soit $Z = Z^i(u)\partial_i$. Alors

$$\begin{aligned} X^C(\iota Z) &= X^C(u_{i'}Z^i) = u_{i'}a^j(u,u')(\partial_j Z^i)(u) + b_{j'}(u,u')Z^j(u) \\ &= \iota\{(X^j\partial_j Z^i - Z^j\partial_j X^i)\partial_i\} \\ &= x_{i'}(X^j(u)(\partial_j Z^i)(u) - Z^j(u)(\partial_j X^i)(u)). \end{aligned}$$

Comme Z est quelconque, nous pouvons conclure que $a^j(u,u') = X^j(u)$ et $b_{j'}(u,u') = -u_{i'}\partial_j X^i$ tel que

$$X^C = X^j(u)\partial_j - u_{i'}(\partial_j X^i)(u)\partial_{j'}.$$

En prenant $X = \partial_j$, alors $X^C = \partial_j$. Comme $\omega \neq 0$, on a : $u_{i'} \neq 0$ pour quelques valeurs de i. En prenant $X = x^j\partial_i$ alors $X^C = u^j\partial_i - u_{i'}\partial_{j'}$ ce qui complète la preuve. Nous notons que ceci n'est pas vrai sur la section nulle ; si $\omega = 0$, alors

$$\mathrm{vect}\{X^C\} = \mathrm{vect}\{\partial_j\}.$$

□

Lemme 1.1.3. *[26] Deux champs de vecteurs lisses Ψ_1, Ψ_2 de type $(0,s)$ sur T^*M coincide si et seulement si nous avons l'identité suivante pour tous champs de vecteurs X_i sur M :*

$$\Psi_1(X^C_{i_1}, \ldots, X^C_{i_s}) = \Psi_2(X^C_{i_1}, \ldots, X^C_{i_s}).$$

Soit $T \in C^\infty(\mathrm{End}\{TM\})$un champ de tenseur de type $(1,1)$ sur M. Le relévement correspondant est la 1-forme $\iota T \in C^\infty(T^*(T^*M))$ sur le fibré cotangent défini par :

$$(\iota T)(X^C) = \iota(TX). \tag{1.7}$$

Localement pour $\iota T = a_i(u,u')du^i + b^j(u,u')du'_i$, $T\partial_i = T^j_i\partial_j$ et $X = X^i\partial_i$, on a :

$$(\iota T)(X^C) = a_i(u,u')X^i(u) - b^j(u,u')u_{i'}(\partial_j X^i)$$

et

$$\iota(TX) = \iota(X^iT^j_i\partial_j) = u_{j'}X^iT^j_i.$$

Ceci montre que $b^j = 0$ et que $a_i = u_{j'}X^iT^j_i du^i$ avec $T = T^j_i\partial_j \otimes du^j$.
Pour plus de détails et d'informations sur la géométrie du fibré cotangent voir le livre de K. Yano et K. Ishihara [44]

1.2 Connexions

Soient $\mathbb{V}$ un fibré vectoriel sur M et $C^\infty(\mathbb{V})$ l'espace des sections lisses de $\mathbb{V}$. Une connexion ∇ sur $\mathbb{V}$ est un opétateur différentiel de premier ordre de $C^\infty(\mathbb{V})$ à $C^\infty(T^*M \otimes \mathbb{V})$ qui satisfait la formule de Leibnitz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \quad \text{avec} \quad s \in C^\infty(\mathbb{V}). \tag{1.8}$$

La dérivée covariante directionnelle associée est définie par

$$\nabla_X s = X(s) \quad \text{avec} \quad s \in C^\infty(\mathbb{V}) \quad \text{et} \quad X \in C^\infty(TM).$$

Si $\{e_i\}$ est une base de TM et $\{e^j\}$ la base duale associée de T^*M, la dérivée covariante totale est alors donnée en terme des dérivées covariantes directionnelles par

$$\nabla s = e^j \otimes \nabla_{e_i} s.$$

Soient $s = (s_1, \ldots, s_k)$ un repère local de $\mathbb{V}$ et $u = (u^1, \ldots, u^m)$ un système de coordonnées locales sur M. On pose

$$\nabla_{\partial_i} s_a = \Gamma_{ia}^b s_b$$

où $i = 1, \ldots, m, ; a, b = 1, \ldots, k$. Les Γ_{ia}^b sont appelés les symboles de Christoffel de première espèce. Si V est muni d'un produit scalaire g, alors on dit que ∇ est une connexion riemannienne si :

$$dg(s_1, s_2) = g(\nabla s_1, s_2) + g(s_1, \nabla s_2) \quad \text{pour} \quad s_i \in C^\infty(M).$$

Ainsi, on définit les symboles de Christoffel de seconde espèce par

$$\Gamma_{iab} := g(\nabla_{\partial_i} s_a, s_b).$$

L'opérateur de coubure de la connexion ∇ est défini par :

$$R(X,Y)s := \{\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\}s. \tag{1.9}$$

R est un tenseur, c'est-à-dire, si $X, Y \in \mathcal{C}^\infty(TM)$, $s \in C^\infty(\mathbb{V})$, et $f \in C^\infty(M)$, alors :

$$R(fX,Y)s = R(X,fY)s = R(X,Y)fs = fR(X,Y)s. \tag{1.10}$$

Soit $R(\partial_i, \partial_j)s_a = R_{ija}^b s_b$ les composantes de l'opérateur de courbure dans le système de coordonnées locales $u = (u^1, \ldots, u^m)$ et relativement au repère local $s = (s_1, \ldots, s_k)$ sur $\mathbb{V}$. On a :

$$R_{ija}^b = \partial_i \Gamma_{ja}^b - \partial_j \Gamma_{ia}^b + \Gamma_{ic}^b \Gamma_{ja}^c - \Gamma_{jc}^b \Gamma_{ia}^c. \tag{1.11}$$

Si g est un produit scalaire non-dégénéré sur $\mathbb{V}$, alors on a :

$$R(X,Y,s,\tilde{s}) := g(R(X,Y)s,\tilde{s}) \quad \text{et localement on à} \quad R_{ijab} := g(R(\partial_i,\partial_j)s_a,s_b). \tag{1.12}$$

Si la connexion ∇ est riemannienne et si $\vec{s}$ est un repère orthogonal local sur $\mathbb{V}$, alors

$$R_{ijab} + R_{ijba} = 0.$$

Supposons que $\mathbb{V}$ est le fibré tangent sur la variété M et soit ∇ une connexion sur TM. On note $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M et $\mathcal{C}^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M .

Définition 1.2.1. *On appelle connexion affine sur M, l'application*

$$\begin{aligned} \nabla \quad : \quad & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) && (1.13)\\ & (X,Y) \mapsto \nabla_X Y && (1.14) \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla_{(fX+gY)}Z &= f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M) \textit{ et } \forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(M), && (1.15)\\ \nabla_X(fY) &= f\nabla_X Y + (Xf)Y, \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M) \textit{ et } \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) && (1.16) \end{aligned}$$

En coordonnés locales, la connexion affine est donnée par :

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \partial_k \tag{1.17}$$

où $\{\partial_1,\partial_2,\ldots,\partial_m\}$, est une base de T_pM et les Γ_{ij}^k sont appelés les coefficients de la connexion affine.

Définition 1.2.2. *Soit M une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ munie d'une connexion affine ∇. La paire (M,∇) est appelé variété affine .*

Définition 1.2.3. *Soit (M,∇) une variété affine. La torsion associée à la connexion affine ∇ est l'application*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \tag{1.18}$$

définie par

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{1.19}$$

pour tout champs de vecteurs X et Y sur M ; où $[,]$ est le crochet de Lie défini par $[X,Y] = XY - YX$.

La torsion est un tenseur, c'est-à-dire :

$$T(fX,Y) = T(X,fY) = fT(X,Y) \quad \text{pour} \quad X,Y \in C^\infty(TM) \quad \text{et} \quad f \in C^\infty(M).$$

Les composantes en coordonnées locales du tenseur torsion T sont :

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \tag{1.20}$$

Remarque 1.2.1. *Si, pour tous $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a $T(X,Y) = 0$, on dit que la connexion affine ∇ est libre ou sans torsion ou symétrique et on a :*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.21}$$

Définition 1.2.4. *Soit (M,∇) une variété affine . L'opérateur de courbure de la connexion affine ∇ est l'application définie par*

$$\begin{array}{rcl} R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ Z & \mapsto & R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{array}$$

pour tous $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

L'opérateur de courbure est un tenseur. Plus précisement, pour tous champs de vecteurs $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2, Z, W$ et toutes fonctions f, g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M, on a :

$$\begin{array}{rcl} R(fX_1 + gX_2, Y) & = & fR(X_1,Y) + gR(X_2,Y) \\ R(X, fY_1 + gY_2) & = & fR(X,Y_1) + gR(X,Y_2) \\ R(X,Y)fZ & = & fR(X,Y)Z \end{array}$$

De plus, il vérifie les symétries suivantes :

$$\begin{array}{rcl} R(X,Y)Z & + & R(Y,X)Z = 0 \\ R(X,Y)Z & + & R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \end{array}$$

pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur M. La deuxième symétrie est connue sous le nom de la première identité de Bianchi. La dérivée covariante première de l'opérateur de courbure est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \nabla R(X_1,X_2,X_4)X_3 & := & \nabla_{X_4}R(X_1,X_2)X_3 - R(\nabla_{X_4}X_1,X_2)X_3 \\ & - & R(X_1,\nabla_{X_4}X_2)X_3 - R(X_1,X_2)\nabla_{X_4}X_3. \end{array} \tag{1.22}$$

∇R est un tenseur de $\otimes^3 T^*M \otimes \mathrm{End}\{TM\}$ et vérifie les symétries suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \nabla R(X_1,X_2;X_4)X_3 & + & \nabla R(X_2,X_1;X_4)X_3 = 0 \\ \nabla R(X_1,X_2;X_4)X_3 & + & \nabla R(X_2,X_3;X_4)X_1 + \nabla R(X_3,X_1;X_4)X_2 = 0 \\ \nabla R(X_1,X_2;X_4)X_3 & + & \nabla R(X_2,X_4;X_1)X_3 + \nabla R(X_4,X_1;X_2)X_3 = 0. \end{array}$$

La deuxième symétrie est connue sous le nom de la dérivée covariante de la première identité de Bianchi et la troisième symétrie sous le nom de la seconde identité de Bianchi.

Définition 1.2.5. *Soient (M, ∇) une variété affine, R l'opérateur de courbure et T le tenseur de torsion de la connexion affine ∇. Si $R = 0$, on dit que la variété affine (M, ∇) est plate. Si $T = 0$ et $\nabla R = 0$, on dit que la variété affine (M, ∇) est localement symétrique .*

En coordonnées locales les composantes de l'opérateur de courbure sont :

$$R(\partial_k, \partial_l)\partial_j = \sum_i R^i_{jkl}\partial_i \tag{1.23}$$

Définition 1.2.6. *La courbure de Ricci de la connexion affine ∇ est la fonction définie par*

$$\mathrm{Ric}(Y, Z) := \mathrm{Trace}\{X \mapsto R(X, Y)Z\} \tag{1.24}$$

En coordonnées locales les composantes de la courbure de Ricci sont données par :

$$\mathrm{Ric}(\partial_j, \partial_k) = \sum_i R^i_{kij}.$$

Sur une variété pseudo-riemannienne, le tenseur de Ricci est symétrique. Cette propriété n'est pas vraie pour une variété affine. Cette obstruction est liée au concept d'élément de volume parallèle.

Théorème 1.2.1. *[26] Soit ∇ une connexion affine sur TM. Les assertions suivantes sont équivalentes. Si une est satisfaite, alors ∇ est dite équiaffine ou Ricci symétrique.*

(i). *Soit $\omega := \Gamma^j_{ij}du^i$. Alors $d\omega_u = 0$ pour toutes coordonnées locales u sur M.*

(ii). $\mathrm{Trace}\{R\} = 0$.

(iii). *La connexion ∇ est Ricci symétrique.*

(iv). *La connexion ∇ admet localement une forme parallèle.*

En géométrie pseudo-riemannienne, le tenseur de courbure d'une variété M induit sur l'espace tangent T_pM en un point $p \in M$ des opérateurs de courbure dont le spectre détermine la géométrie de la variété. Les plus importants sont : l'opérateur de Jacobi, l'opérateur de Szabó et l'opérateur de courbure antisymétrique.

Définition 1.2.7. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne munie d'une connexion de Levi-Civita ∇, R l'opérateur de courbure associé à ∇ et p un point de M. On appelle opérateur de Jacobi en p relatif au vecteur unitaire X de T_pM l'endomorphisme $\mathcal{J}_R(X)$ de T_pM défini par*

$$\mathcal{J}_R(X)Y = R(Y, X)X \tag{1.25}$$

Par définition de l'opérateur courbure R, on remarque que :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(X)X = 0$$

c'est-à-dire le vecteur X est un vecteur propre de $\mathcal{J}_R(X)$ trivialement associé à la valeur propre 0. Par suite les vecteurs propres de $\mathcal{J}_R(X)$ dont il sera question dans la suite seront toujours distincts du vecteur X

Proposition 1.2.1. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. L'opérateur de Jacobi $\mathcal{J}_R(X)$ est un opérateur auto-adjoint.*

Démonstration. Soient $Y, Z \in T_pM$. On a :

$$g(\mathcal{J}_R(X)Y, Z) \;=\; g(R(Y, X)X, Z) = g(\mathcal{J}_R(X)Z, Y).$$

Ainsi $g(\mathcal{J}_R(X)Y, Z) = g(Y, \mathcal{J}_R(X)Z)$ □

Proposition 1.2.2. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne, R l'opérateur de courbure et $\mathcal{R}$ le tenseur de courbure. Si $\mathcal{J}_R = 0$ alors $\mathcal{R} = 0$.*

Démonstration. Si $\mathcal{J}_R = 0$ alors pour tous $X, Y, Z \in T_pM$ on a :

$$\mathcal{R}(Y, X, X, Z) = g(\mathcal{J}_R(X)Y, Z) = 0.$$

Pour tout $W \in T_pM$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(Y, X + W, X + W, Z) &= \mathcal{R}(Y, X, X + W, Z) + \mathcal{R}(Y, W, X + W, Z) \\
&= \mathcal{R}(Y, X, X, Z) + \mathcal{R}(Y, X, W, Z) + \mathcal{R}(Y, W, X, Z) + \mathcal{R}(Y, W, W, Z) \\
&= g(\mathcal{J}_R(X)Y, Z) + \mathcal{R}(Y, X, W, Z) + \mathcal{R}(Y, W, X, Z) + g(\mathcal{J}_R(W)Y, Z) \\
&= \mathcal{R}(Y, X, W, Z) + \mathcal{R}(Y, W, X, Z) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On déduit : $\mathcal{R}(Y, X, W, Z) = -\mathcal{R}(Y, W, X, Z)$.

En utilisant les symétries du tenseur de courbure de Riemann, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X, W, Y, Z) &= \mathcal{R}(Y, Z, X, W) \\
\mathcal{R}(W, Y, X, Z) &= \mathcal{R}(Y, W, Z, X)
\end{aligned}$$

l'identité algébrique de Bianchi s'écrit successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(Y, X, W, Z) + \mathcal{R}(X, W, Y, Z) + \mathcal{R}(W, Y, X, Z) &= 0 \\
\mathcal{R}(Y, X, W, Z) + \mathcal{R}(Y, Z, X, W) + \mathcal{R}(Y, W, Z, X) &= 0 \\
\mathcal{R}(Y, X, W, Z) + \mathcal{R}(Y, Z, X, W) - \mathcal{R}(Y, W, X, Z) &= 0 \\
\mathcal{R}(Y, X, W, Z) + \mathcal{R}(Y, X, W, Z) - \mathcal{R}(Y, X, Z, W) &= 0
\end{aligned}$$

En sommant les trois dernières équations, on obtient

$$3\mathcal{R}(Y, X, W, Z) = 0$$

d 'où $\mathcal{R} = 0$ □

Proposition 1.2.3. *Soit $\mathcal{J}_R(X)$ l'opérateur de Jacobi d'une variété pseudo-riemannienne (M, g). Alors :*

$$\mathrm{Trace}\mathcal{J}_R(X) = \mathrm{Ric}(X, X). \tag{1.26}$$

Proposition 1.2.4. *Soient $\mathcal{J}_R(X)$ l'opérateur de Jacobi d'une variété pseudo-riemannienne (M, g) et X un vecteur unitaire. Considérons le plan $\sigma = \mathrm{vect}\{Y, X\} \in TpM$ avec $Y \in X^{\perp}$ et unitaire. Alors la courbure sectionnelle de σ notée $K(\sigma)$ est donnée par :*

$$K(\sigma) = g(\mathcal{J}_R(X)Y, Y). \tag{1.27}$$

L'opérateur de Jacobi est un invariant dont les valeurs propres donnent des informations sur les variétés pseudo-riemanniennes. Il intervient dans l'étude des champs de vecteurs de Jacobi, de la variation des géodésiques et des points conjugués. L'étude de l'opérateur de Jacobi a permis d'avancer dans la connaissance des espaces localement symétriques. En effet, beaucoup de caractérisations des espaces localement symétriques s'appuient sur l'opérateur de Jacobi. En géométrie riemannienne, les valeurs propres de $\mathcal{J}_R(X)$ représentent les valeurs extrémales des courbures sectionnelles, et en géométrie lorentzienne les valeurs propres jouent un rôle fondamental dans la formulation des modèles mathématiques en rélativité générale.

Soit R l'opérateur de courbure de la variété riemannienne (M, g) de dimension m. A la suite des travaux fondateurs d'Osserman [38], on dit que (M, g) est *Osserman* si les valeurs propres de $\mathcal{J}_R$ sont constantes sur la sphère unité.

$$S(M, g) := \{X \in TM : g(X, X) = 1\}.$$

Les travaux de Chi [10], of Gilkey et al. [28] et Nikolayevsky [33, 34] ont montré que toute variété d'Osserman complète et simplement connexe de dimension $m \neq 16$ est un espace symétrique de rang 1 ; le cas de dimension 16 est exceptionnel et la situation n'est toujours pas claire dans ce contexte, bien qu'il y ait des résultat dû, encore une fois, à Nikolayevsky [35]. Supposons que (M, g) est une variété pseudo-Riemannienne de signature (p, q) pour $p > 0$ et $q > 0$. Les fibrés unités sont définis en posant :

$$S^{\pm}(M, g) := \{X \in TM : g(X, X) = \pm 1\}.$$

On dit que la variété (M, g) est Osserman de type espace (resp. de type temps) si les valeurs propres de $\mathcal{J}$ sont constantes sur $S^{+}(M, g)$ (resp. $S^{-}(M, g)$). La situation est assez différente ici car l'opérateur de jacobi n'est plus diagonalisable et peut avoir une forme normale de Jordan non triviale. Nous nous référons à [24] pour plus d'informations sur les variétés pseudo-riemanniennes d'Osserman.

1.3 Structures de Walker

Considerons une variété pseudo-riemannienne (M, g) de signature (p, q). On suppose que le fibré tangent se décompose sous la forme $TM := V_1 \otimes V_2$, où V_1 et V_2 sont deux sous fibrés lisses appelés distributions. Ceci entraine deux projections complémentaires π_1 et π_2 de TM sur V_1 et V_2. On dit que la distribution V_1 est parallèle si $\nabla V_1 = 0$, c'est-à-dire si X_1 est un champ de vecteur lisse à valeurs dans V_1 alors ∇X_1 est aussi à valeurs dans V_1. Si (M, g) est une variété riemannienne le complémentaire orthogonal de V_1 défini par $V_2 = V_1^{\perp}$ est une distribution parallèle. Dans le cas pseudo-riemannienne $V_2 \cap V_1$ n'est pas toujours trivial. Il existe des exemples où V_1 est parallèle et sans aucune distribution complémentaire parallèle [4]. La distribution complémentaire d'une distribution parallèle non-dégénérée est toujours intégrable. Ceci n'est pas toujours le cas si la distribution parallèle $\mathcal{D}$ est dégénérée. Si (M, g) est une variété pseudo-riemannienne de signature (m, m) admettant deux distributions parallèles complémentaires et dégénérées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (ceci implique $dim\mathrm{D} = dim\mathrm{D}' = m$). Ainsi $R(X, Y)Z \in \mathcal{D}$ (respectivement $R(X, Y)Z' \in \mathcal{D}'$) pour tous champs X, Y sur M et tout champ de vecteur $Z \in \mathcal{D}$ (respectivement $Z' \in \mathcal{D}'$). Voir [4] pour plus de détails.

Soit $\alpha : [a, b] \to M$ une courbe lisse dans une variété affine connexe (M, ∇). Pour tout vecteur tangent v de l'espace tangent à M au point initial de la courbe $\alpha(a) = p$, soit $v(t)$ défini par le transport parallèle le long de α ; $v(t)$ est le champs de vecteur le long de α donné par la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)} v(t) = 0 \quad \text{avec la condition intiale} \quad v(a) = v.$$

Si α est une courbe fermée, alors l'application $v(a) \to v(b)$ donnée par le transport parallèle autour de α définit un isomorphisme

$$L_\alpha : T_pM \to T_pM;$$

appelé holonomie. L'ensemble de toutes ces applications linéaires forme un groupe appelé groupe d'holonomie de la connexion. Comme la variété M est connexe, les groupes d'holonomie correspondants aux différents points de M sont tous isomorphes ; si β est une courbe quelconque de p à q, alors L_β fournit un isomorphisme entre le groupe d'holonomie en p et le groupe d'holonomie en q. Par conséquent le rôle de point de base p est couramment supprimé.

Le groupe d'holonomie est un groupe de lie, car c'est un sous-groupe fermé du groupe linéaire $GL(T_pM)$. En utilisant la connexion de Levi-Civita d'une métrique pseudo-riemannienne, le groupe d'holonomie est un sous-groupe du groupe orthogonal $\mathcal{O}(T_pM, g_p)$, puisque le transport parallèle est réalisé par les isométries, nous nous referons à lui comme le groupe d'holonomie de la variété pseudo-riemannienne.

Dans le cas riemannien, le groupe d'holonomie agit de manière complétement réductible ; c'est-à-dire, il existe une décomposition orthogonale en somme directe

$$T_pM = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l;$$

où chaque V_i est invariant sous le groupe d'holonomie et où V_i ne contient aucun sous-espace non trivial. Dans le cas pseudo-riemannien, la situation est plus compliquée. Si V_i est un sous-espace invariant, il n'existe pas de sous-espace invariant complémentaire. On dit que le groupe d'holonomie agit de manière indécomposable et que la variété est indécomposable si la métrique est dégénérée sur tout sous-espace propre invariant. Dans le cas riemannien, l'indécomposabilité est équivallente à l'irréductibilité.
Le groupe d'holonomie du produit des variétés pseudo-riemanniennes est le produit des groupes d'holonomie de ces variétés. La réciproque est vraie dans le cas suivant : supposons que (M, g) est une variété pseudo-riemannienne connexe telle que l'espace tangent en un seul point (et donc à chaque point) admet une décomposition en somme directe orthogonale en des sous-espaces non dégénérés qui sont invariants sous la répresentation holonomie ; alors (M, g) est localement isométrique à un produit de variétés pseudo-riemanniennes correspondant aux sous-espaces invariants. De plus, le groupe d'holonomie est le produit des groupes agissant sur le sous-espaces invariants correspondants. Une version globale de cette affirmation, en supposant que la variété est simplement connexe et complète, a été donnée par de De Rham pour les variétés riemanniennes et par Wu dans le cas de signature arbitraire :

Théorème 1.3.1. *[4] Toute variété pseudo-riemannienne complète et simplement connexe (M, g) est isométrique à un produit de variétés pseudo-riemenniennes complètes et simplement connexes, dont l'une est plate et les autres ont un groupe d'holonomie indécomposable. De plus, le groupe d'holonomie de (M, g) est le produit de ces groupes d'holonomie indécomposables.*

Pour les métriques indéfinies, il existe la possibilité que certains des facteurs du Théorème 1.3.1 soient indécomposables, mais pas irréductibles. Célà signifie que l'un des facteurs pourrait contenir un sous-espace invariant propre nul. Les métriques lorentziennes indécomposables ont été initialement étudiées par Brinkmann [3], tandis que le cas des métriques pseudo-riemanniennes a été examiné pour la première fois par Walker [43]. Dans tout les cas, l'incompatibilité est décrite de manière équivalente par l'existence d'un plan parallèle nul.

Une variété pseudo-riemannienne (M, g) qui admet un champs de plan parallèle nul non trivial $\mathcal{D}$ est appelée variété de Walker. Ces types de métriques n'existent que dans le cas pseudo-riemannien sans contrepartie riemannien. Voir l'excellent livre [4] pour plus de détails.

L'existence de coordonnées adaptées $(u, v, u^1, \ldots, u^{m-2})$ sur une variété lorentzienne (M, g) admettant un champ de ligne parallèle nul a été établi par Brinkmann [3]. Dans ces coordonnées la métrique g est de la forme :

$$g = 2du \circ dv + f du \circ du + a_i du \circ du^i + g_{ij} du^i \circ du^j \quad \text{où} \quad \partial_v g_{ij} = \partial_v a_i = 0 \tag{1.28}$$

De plus, $\partial_v f = 0$ si et seulement si le champ de ligne parallèle nul $\mathcal{D} = \mathrm{Span}\{\partial_v\}$ est engendré par un champ de vecteur parallèle, dans lequel les coordonnées peuvent être choisies telle que $a_i = 0$ et $f = 0$. Walker [43] a généralisé ce résultat dans le cas des variétés pseudo riemanniennes quelconques (M, g) qui admettent un champs de plan parallèle nul $\mathcal{D}$ de dimension r comme suit :

Théorème 1.3.2. *[43] Si (M,g) est une variété pseudo-riemannienne de dimension m qui admet un champ de plan parallèle nul $\mathcal{D}$ de dimension r, alors il existe des coordonnées locales $(x^1,\dots,x^{m-r},x^{m-r+1},\dots x^m)$ sur la variété M tel que le tenseur métrique g soit de la forme :*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} B & H & \mathrm{Id}_r \\ {}^tH & A & 0 \\ \mathrm{Id}_r & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où Id_r est la matrice identité d'ordre r et A, B et H sont des matrices dont les coefficients sont des fonctions de $(u^1,\dots,u^{m-r},u^{m-r+1},\dots u^m)$ tel que :
A et B sont des matrices symétriques d'ordre $m-2r$ et r respectivement, H est une matrice $r\times(m-2r)$ et ${}^tH$ sa transposée et telles que A et H soient indépendantes des coordonnées $(u^{m-r+1},\cdots,u^m)$. Enfin, le champ de plan parallèle nul $\mathcal{D}$ est localement engendré par le champ de vecteurs de coordonnées $(\partial_{u_{m-r+1}},\dots,\partial_{u_m})$.

Remarque 1.3.1. *Dans le cas particulier, $\dim(M) = 2\overline{m}$ et $\dim(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\dim(M) = \overline{m}$ est maximale, il existe des coordonnées de Walker $(u^1,\dots,u^{\overline{m}},u_{1'},\dots,u_{\overline{m}'})$ et une matrice $\overline{m}\times\overline{m}$ symétrique $B = B(u,u')$ telle que :*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} B & \mathrm{Id}_{\overline{m}} \\ \mathrm{Id}_{\overline{m}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Les symboles de christoffel de la métrique donnée dans la remarque précédente sont donnés comme suit :

Lemme 1.3.1. *[5] Soit (M,g) une variété de Walker de dimension $2\overline{m}$ avec $\mathcal{D}$ un champs de plan parallèle nul de dimension $\overline{m}$ et soit $(u^1,\dots,u^{\overline{m}},u_{1'},\dots,u_{\overline{m}'})$ les coordonnées adaptées où la métrique prend la forme donnée dans la remarque précédente. Les composantes non nulles des symboles de Christoffel de connexion de Levi-Civita ∇ sont données par :*

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{ij} &= \frac{-1}{2}\partial_{k'}g_{ij},\\
\Gamma^{k'}_{i'j} &= \frac{1}{2}\partial_{l'}g_{jk},\\
\Gamma^{k'}_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_j g_{ik} - \partial_k g_{jk} + \partial_l g_{jk} + \sum_{1\le s\le\overline{m}} g_{ks}\partial_{s'}g_{ij}).
\end{aligned}$$

Lemme 1.3.2. *Les composantes non nulles de l'opérateur de courbure sont données par :*

$$\begin{aligned}
R^h_{jik} &= \frac{1}{2}(\partial_i\partial_{h'}g_{js} - \partial_j\partial_{h'}g_{ik})\\
&+ \frac{1}{4}\sum_{1\le s\le \overline{m}}\{\partial_{s'}g_{ik}\partial_{h'}g_{js} - \partial_{s'}g_{jk}\partial_{h'}g_{is}\},\\
R^{h'}_{jik} &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_k g_{ih} - \partial_j\partial_h g_{ik} + \partial_i\partial_k g_{jh})\\
&+ \frac{1}{4}\sum_{1\le s,t\le \overline{m}}\{\partial_{s'}g_{ik}(\partial_h g_{js} - \partial_s g_{jh} - \partial_j g_{sh} - g_{ht}\partial_{t'}g_{js})\\
&- \partial_{s'}g_{jk}(\partial_h g_{is} - \partial_s g_{ih} - \partial_i g_{sh} - g_{ht}\partial_{t'}g_{is})\\
&- \partial_{s'}g_{ih}(\partial_s g_{jk} - \partial_k g_{is} - \partial_i g_{ks} - g_{st}\partial_{t'}g_{ik})\\
&+ \partial_{s'}g_{ih}(\partial_s g_{jk} - \partial_k g_{js} - \partial_j g_{ks} - g_{st}\partial_{t'}g_{jk})\\
&+ 2\partial_j(g_{hs}\partial_{s'}g_{ik}) - 2\partial_i(g_{hs}\partial_{s'}g_{jk})\}\\
R^h_{ji'k} &= \frac{1}{2}\partial_{i'}\partial_{h'}g_{jk},\\
R^{h'}_{ji'k} &= \frac{1}{2}(\partial_h\partial_{i'}g_{jk} - \partial_k\partial_{i'}g_{jh})\\
&+ \frac{1}{4}\sum_s\{\partial_{s'}g_{jk}\partial_{i'}g_{sh} + \partial_{s'}g_{jh}(\partial_{i'}g_{sk} - 2\partial_{i'}(g_{hs}\partial_{s'}g_{jk})\}\\
R^{h'}_{jik'} &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_{k'}g_{ih} - \partial_i\partial_{k'}g_{jh}) + \frac{1}{4}\sum_s\{\partial_{k'}g_{is}\partial_{s'}g_{jh} - \partial_{k'}g_{js}\partial_{s'}g_{ih}\},\\
R^{h'}_{ji'k'} &= -\frac{1}{2}\partial_{i'}\partial_{k'}g_{jh}.
\end{aligned}$$

1.4 Métriques sur le fibré cotangent

Définition 1.4.1. *[26] Soit (M,∇) une variété affine de dimension m. L'extension riemannienne (ou extension de Riemann) notée g_∇ de (M,∇) est la métrique pseudo-riemannienne de signature (m,m) sur le fibré cotangent T^*M qui est définie par l'identité*

$$\begin{aligned}
g_\nabla(\omega^V, X^C) &= \omega(X)^V\\
g_\nabla(\omega^V, \theta^V) &= 0\\
g_\nabla(X^C, Y^C) &= -\iota(\nabla_X Y + \nabla_Y X)
\end{aligned}$$

où

(i). ω^V *et* θ^V *sont les relèvements verticaux sur* T^*M *des* $1-$*formes différentielles* ω *et* θ *sur* T_pM,

(ii). X^C *et* Y^C *sont les relèvements complets sur* T^*M *des champs de vecteurs* X *et* Y *sur* M,

(iii). ιZ *est une fonction sur* T^*M *définie, pour tout champ de vecteurs* $Z = \sum_{i=1}^{m} Z^i \partial_i$ *sur* M*, par* $\iota Z = \sum_{i=1}^{m} u_{i+m} Z^i$*.*

Dans un système de coordonnées locales $(u^i, u_{i'})$ sur T^*M, l'extension riemannienne à la forme suivante :

$$g_\nabla = \begin{pmatrix} -2u_{k'}\Gamma_{ij}^k(u) & \mathrm{Id}_m \\ \mathrm{Id}_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

par rapport à $\{\partial_1 \ldots, \partial_m, \partial_{1'} \ldots \partial_{m'}\}$ où $i, j = 1 \ldots m$, $i' = i + m$ et Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion affine sur M. Plus précisement on a :

$$g_\nabla(\partial_i, \partial_i) = -2uk'\Gamma_{ij}^k(u), \quad g_\nabla(\partial_i, \partial_{j'}) = \delta_i^j, \quad g_\nabla(\partial_{i'}, \partial_{j'}) = 0.$$

Soit π la projection naturelle de T^*M sur M. La distribution de Walker est le champ de plan parallèle nul de dimension maximale m donnée par $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}\{\pi_*\}$. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. L'extension riemannienne de la connexion de Levi-Civita hérite beaucoup de propriétés de la variété de base. Par exemple, la variété (M, g) a une courbure sectionnelle constante si et seulement si (T^*M, g_∇) est localement conformément plat. Cependant, les applications intéressantes de l'extension riemannienne apparaissent quand nous considérons une connexion affine qui n'est pas de Levi-Civita.

Lemme 1.4.1. *[44] Soit* (M, ∇) *une variété affine. Soient* $\tilde{R}$ *l'opérateur de courbure de l'extension riemannienne* (T^*M, g_∇) *et* R *l'opérateur de courbure de la variété affine* (M, ∇)*. Alors les coefficients de* $\tilde{R}$ *et* R *sont reliés par les relations suivantes :*

$$\begin{cases} \tilde{R}_{kji}^h & = R_{kji}^h \\ \tilde{R}_{kji}^{h\prime} & = \sum_{a=1}^n x_{a+n}(\nabla_{\partial_h} R_{kji}^a - \nabla_{\partial_i} R_{kjh}^a + \Gamma_{ht}^a R_{kji}^t + \Gamma_{kt}^a R_{ihj}^t + \Gamma_{it}^a R_{kjh}^t) \\ \tilde{R}_{kji\prime}^{h\prime} & = -R_{kjh}^i \\ \tilde{R}_{kj\prime i}^{h\prime} & = -R_{hij}^j \\ \tilde{R}_{k\prime ji}^{h\prime} & = -R_{hij}^k \end{cases} \tag{1.31}$$

Par le Lemme précédent, l'extension riemannienne (T^*M, g_∇) est localement symétrique si et seulement si la variété affine (M, ∇) est localement symétrique. Par ailleurs, l'extension riemannienne (T^*M, g_∇) est localement confomément plat si et seulement si la variété affine (M, ∇) est projectivement plat. Cependant ils existent beaucoup de connexions affines projectivement plates.

Théorème 1.4.1. *[5] Soit* R *l'opérateur de courbure de la variété affine* (M, ∇) *et* $\tilde{R}$ *l'opérateur de courbure de l'extension riemannienne* $(T^*M, \bar{g})$*. Pour tout point* $p \in M$ *et pour tout vecteur*

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \partial_i + \alpha_{i+m'} \partial_{i+m'}) \in T_p^* M,$$

la matrice de l'opérateur de Jacobi $\mathcal{J}_{\tilde{R}}(\tilde{X})$ dans la base locale $\{\partial_1, \cdots, \partial_m, \partial_{i+m'}, \cdots, \partial_{2m'}\}$ est de la forme

$$(\mathcal{J}_{\tilde{R}}(\tilde{X})) = \begin{pmatrix} (\mathcal{J}_R(X)) & 0 \\ * & {}^t(\mathcal{J}_R(X)) \end{pmatrix}$$

où $(\mathcal{J}_R(X))$ est la matrice de l'opérateur de Jacobi relatif au vecteur $X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \partial_i$ de T_pM dans la base locale $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$

L'extension riemannienne se généralise de la façon suivante :

Définition 1.4.2. *Soit Φ $(0,2)-$champ de tenseur symétrique sur une variété affine (M, ∇) et soit π la projection naturelle de T^*M à M. L'extension riemannienne déformée (ou encore twistée) $g_{\nabla,\Phi}$ est la métrique, de signature neutre (m, m) sur le fibré cotangent donnée par :*

$$g_{\nabla,\Phi} = g_{\nabla} + \pi^*\Phi. \tag{1.32}$$

Soient Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel de la connexion affine ∇ et Φ_{ij} les composantes locales du $(0,2)-$champ de tenseur symétrique Φ. Alors dans un système de coordonnées locales l'extension riemannienne déformée est donnée par :

$$g_{\nabla,\phi} = \begin{pmatrix} -2u_{k'}\Gamma_{ij}^k(u) + \phi_{ij}(u) & \mathrm{Id}_m \\ \mathrm{Id}_m & 0 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

où de manière équivalente :

$$g_{\nabla,\Phi}(\partial_i, \partial_j) = -2u_{k'}\Gamma_{ij}^k(u) + \Phi_{ij}(u), \quad g_{\nabla,\Phi}(\partial_i, \partial_{j'}) = \delta_i^j, \quad g_{\nabla,\Phi}(\partial_{i'}, \partial_{j'}) = 0.$$

Notons que la distribution de Walker est aussi le noyau de la projection de T^*M sur M :

$$\mathcal{D} = \mathrm{Ker}\{\pi_*\} = \mathrm{vect}\{\partial_{i'}\}.$$

Le tenseur Φ joue un rôle important. Même si la connexion sous-jacente est plate, l'extension riemannienne déformée peut ne pas être plate. Les extensions riemanniennes se caractérisent par leurs courbures. On a les résultats suivants :

Lemme 1.4.2. *[1] La métrique de Walker (1.29) est localement une extension riemannienne déformée si et seulement si le tenseur de courbure satisfait la condition $R(\cdot, \mathcal{D})\mathcal{D} = 0$.*

Lemme 1.4.3. *[5] Une extension riemannienne déformée $(T^*M, g_{\nabla,\phi})$ est Einstein si et seulement si le tenseur de Ricci est nul. Cela se produit si seulement si le tenseur de Ricci de la connexion affine ∇ est anti-symétrique.*

Définition 1.4.3. *Soit ∇ une connexion sans torsion et soit Φ un $(0,2)-$ champs de tenseur symétrique sur la variété M. Soit T, S des $(1,1)-$ champs de tenseur sur M. L'extension riemannienne modifiée est la métrique sur T^*M donnée par*

$$g_{\nabla,\Phi,T,S} = \iota T \circ \iota S + g_{\nabla,\Phi}.$$

Soit $(T \circ S)_{ij}^{rs} := \frac{1}{2}(T_i^r S_j^s + T_j^r S_i^s)$. En coordonnées locales, l'extension riemannienne modifiée est donnée par :

$$g_{\nabla,\Phi,T,S} = \begin{pmatrix} u_{r'}u_{s'}(T \circ S)(u)_{ij}^{rs} - 2u_{k'}\Gamma_{ij}^k(u) + \Phi_{ij}(u) & Id_{\overline{m}} \\ Id_{\overline{m}} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

En d'autres termes

$$\begin{array}{rcl} g(\partial_i, \partial_j) & = & u_{r'}u_{s'}(T \circ S)(u)_{ij}^{rs} - 2u_{k'}\Gamma_{ij}^k(u) + \phi_{ij}(u), \\ g(\partial_i, \partial_{j'}) & = & \delta_i^j, \quad \text{et} \quad g(\partial_{i'}, \partial_{j'}) = 0. \end{array}$$

En particulier quand $T = c\mathrm{Id}$ et $S = \mathrm{Id}$, on notera l'extension riemannienne modifiée par $g_{\nabla,\Phi,c}$. Comme dans les cas précédents, les extensions riemanniennes modifiées sont des métriques de Walker où la distribution de Walker est donnée par $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(\pi_*)$. Les extensions riemanniennes modifiées sont aussi caractérisées par leur courbure. On a :

Lemme 1.4.4. *[5] La métrique de Walker (1.29) est localement une extension rimannienne modifiée si et seulement si la dérivée covariante de l'opérateur de courbure satisfait* $(\nabla_{\mathcal{D}}R)(\cdot, \mathcal{D},)\mathcal{D} = 0$.

Le résultat suivant donne une méthode de construction de métrique d'Einstein de signature neutre dont le tenseur de Ricci n'est pas nul. Plus précisement :

Lemme 1.4.5. *[5] Soit* (M, ∇) *une variété affine de dimension* m *et* $c \neq 0$. *L'extension riemannienne modifiée* $(T^*M, g_{\nabla,\Phi,c})$ *est Einstein si et seulement si*

$$\Phi = \frac{4}{c(m - *1)}\rho_s,$$

où ρ_s *est la partie symétrique du tenseur de Ricci.*

1.5 Variétés de Finsler

Dans cette section nous rappelerons les notions de base sur les variétés finsleriennes. Tout le contenu de la section est tiré de [32] et [2].

Définition 1.5.1. *Soit* M *une variété de classe* C^∞ *de dimension* m. *Une fonction* $F = F(x, y)$ *sur* TM *est appelée structure de Finsler sur* M, *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

(i). Homogénéité : F *est positivement homogène de degré 1 en* y : $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, *pour tout* $\lambda > 0$;

(ii). Régularité : F *est de classe* C^∞ *sur le fibré tangent privé de la section nulle* $TM_0 = TM \setminus \{0\}$;

(iii). Forte convexité : F est fortement convexe, c'est-à-dire que la $m \times m$ matrice hessienne

$$g_{ij}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} = \left[\frac{1}{2}F^2\right]_{y^i y^j} \tag{1.35}$$

est définie positive pour tout point $(x, y) \in TM_0$.
F est souvent appelée le lagrangien. Les (g_{ij}) sont les fonctions de classe C^∞ sur TM_0 positivement homogène de degré zéro en y, qui servent à construire un tenseur appelé tenseur fondamental. C'est un analogue finslerien de la métrique riemannienne, qui est un tenseur symétrique d'ordre 2. Notons que ce tenseur n'est pas défini sur le fibré tangent TM, mais sur un autre fibré appelé fibré pull-back. Le couple (M, F) d'une variété différentielle et d'une structure de Finsler est appelée variété de Finsler ou variété finslerienne.

Remarque 1.5.1. *Le tenseur fondamental g_{ij} est une "métrique riemannienne non holonome", c'est-à-dire une métrique riemannienne qui dépend non seulement d'un point x, mais aussi d'une direction $y \in T_xM_0$*

Remarque 1.5.2. *La forte convexité implique que $\{y \in T_xM; F(x, y) \leq 1\}$ est un ensemble strictement convexe ; mais la reciproque est fausse.*

Définition 1.5.2. *Une métrique de Finsler $F = F(x, y)$ sur une variété M est dite reversible si $F(x, -y) = F(x, y)$ pour tout $y \in T_xM$.*

L'Homogénéité de la structure de Finsler, induit une simplification des calculs à travers le théorême d'Euler suivant :

Théorème 1.5.1. *[2](Théorème d'Euler) Soit V un espace vectoriel et $H : V \to \mathbb{R}$ une fonction positivement homogène de degré r, c'est-à-dire : pour tout $\lambda \geq 0$ tel que :*

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y).$$

Alors :

$$y^i H_{y^i}(y) = rH(y) \tag{1.36}$$

où $(y^1, \cdots, y^n)$ sont les coordonnées de $y \in V$ et $H_{y^i} = \frac{\partial H}{\partial y^i}$.

Le lagrangien F vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 1.5.1. *[2] Soit (M, F) une variété de Finsler. Alors on a :*

$$y^i F_{y^i} = F;$$

$$y^i F_{y^i y^j} = 0;$$

$$y^i F_{y^i y^j y^k} = -F_{y^j y^k}.$$

Proposition 1.5.2. *[2] Le lagrangien F peut être retrouvé à partir du tenseur fondamental par la formule suivante :*

$$F(x,y) = \sqrt{g_{ij}(x,y)y^i y^j}.$$

Soit M une variété différentielle de dimension m et de classe C^∞. Nous noterons par T_xM l'espace tangent en un point x de M et $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ le fibré tangent de M. Le dual de l'espace tangent T_xM sera noté T_x^*M, et est appelé espace cotangent en x et $T^*M = \bigcup_{x\in M} T_xM$ est le fibré cotangent de M. Soit $\pi : TM \to M$ la projection canonique, alors TM a une structure de variété induite par celle de M. Un point z du fibré tangent est representé par la paire (x,y), où $x = \pi(z)$ est un point de M et y est un vecteur de T_xM. Un élément de TM_0 sera noté (x,y) avec $x \in M$ et $y \neq 0$.

Définition 1.5.3. *On appelle fibré pull-back noté π^*TM, un fibré vectoriel dont la base est le fibré tangent privé de section nulle TM_o et dont la fibre au dessus de chaque point (x,y) est une copie de T_xM.*

En effet, la collection de tous les points (x,y) avec $y \neq 0$, constituant le fibré tangent privé de la section nulle TM_0 est considérée comme une variété où en chaque point (x,y) est dressée une copie de T_xM sur laquelle un produit scalaire

$$g(x,y) = g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j$$

induit par le tenseur fondamental dont les composantes sont des fonctions sur TM_0 peut être défini. Cette appelation de fibré pull-back pour π^*TM vient du fait qu'il est construit à partir du fibré tangent comme suit :

$$\pi^*TM = \{(x,y,v) \in TM_0 \times TM/\pi(x,y) = \pi(v) = x\}.$$

Ils existent deux sections globalement définies sur TM_0 : il s'agit de la *section distinguée l* de π^*TM et de sa duale, la *forme de Hilbert ω* de π^*T^*M.

Définition 1.5.4. *Soit (π^*TM, TM_0, π) un fibré pull-back. La section distinguée est la section $l : TM_0 \to \pi^*TM$ définie par :*

$$l = l_{(x,y)} := \frac{y^i}{F(y)}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{y^i}{F}\frac{\partial}{\partial x^i} =: l^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Définition 1.5.5. *Soit (π^*T^*M, TM_0, π) le fibré pull-back dual de (π^*TM, TM_0, π). La forme de Hilbert est la section $\omega : TM_0 \to \pi^*T^*M$ définie par :*

$$\omega = \omega_{(x,y)} := F_{y^i}(x,y)dx^i = F_{y^i}dx^i.$$

La section distinguée et la forme de Hilbert sont globalement définies sur la variété fibré privée de la section nulle, c'est-à-dire :

$$\omega(l) = \frac{y^i F_{y^i}}{F} = 1.$$

Proposition 1.5.3. *La section distinguée l est de norme 1 par rapport à g.*

La proposition suivante donne une relation entre la section distinguée et la forme de Hilbert.

Proposition 1.5.4. *Soit $l^i = \frac{y^i}{F}$, les composantes de la section distinguée l, alors la forme de Hilbert ω s'exprime sous la forme :*

$$\omega = l_i dx^i$$

avec $l_i = g_{ij} l^i = F_{y^i}$.

Soit (φ, x^i) un système de coordonnées locales sur un ouvert $U \subset M$; c'est-à-dire pour tout $x \in U$

$$\varphi(x) = (x^1, \cdots, x^m).$$

Une base de l'espace tangent T_xM sera notée par $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ et une base de l'espace cotangent T_x^*M est $(dx^1, \cdots, dx^m)$. Nous noterons aussi par $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{dx^i\}$, les bases des sections de TM et T^*M respectivement. Lorsque les fibrés pull-back π^*TM et π^*T^*M sont définis, alors pour tout point (x, y) de la variété TM_0 est dressée deux fibres. La fibre de π^*TM est l'espace vectoriel T_xM (c'est-à-dire $(\pi^*TM)_{(x,y)} = T_xM$) tandis que la fibre de π^*T^*M est l'espace cotangent T_x^*M (c'est-à-dire $(\pi^*T^*M)_{(x,y)} = T_x^*M$). Les bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{dx^i\}$ de TM et T^*M respectivement induisent des bases correspondentes aux fibrés pull-back π^*TM et π^*T^*M respectivement qui sont aussi notées par $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{dx^i\}$. Ces nouvelles bases sont appelées *sections transplantées* du fait qu'elles ont été transplantées de M vers la variété TM_0. Ces sections sont définies localement en x et globalement en y car une fois x fixé, des sections transplantées ne changent pas lorsque y varie.

Remarque 1.5.3. *Le tenseur de Cartan peut être vu dans ces bases transplantées comme une section symétrique de $\otimes^3 \pi^*T^*M$, c'est-à-dire :*

$$A = A_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k.$$

De même, le tenseur fondamental est une section symétrique de $\otimes^2 \pi^*T^*M$, c'est-à-dire

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Nous savons que la dérivation en direction des coordonnées vectoriels du tenseur fondamental définit le tenseur de Cartan. Par contre à la dérivée dans la direction horizontale du tenseur fondamental, elle est reliée aux symboles de Christoffel formels de seconde espèce.

Définition 1.5.6. *On appelle symboles de Christoffel formels de seconde espèce les quantités données par :*

$$\gamma^i_{jk} := g^{is}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j}\Big).$$

Ces symboles sont dit formels car ils ne correspondent pas à des coefficients d'une connection. Ces symboles sont utilisés pour définir une connexion non linéaire donnée par la formule suivante :

$$\frac{1}{F}N^i_j := \gamma^i_{jk}l^k - A^i_{jk}\gamma^k_{rs}l^r l^s.$$

où l^k est la section distinguée avec $l^k = \frac{y^k}{F}$ et A^i_{jk} est le tenseur de Cartan.

A partir des objets N^i_j, on peut définir une 1-forme à valeurs dans π^*TM que nous noterons θ_c, comme suit :

$$\theta_c = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{1}{F}(dy^i + N^i_j dx^j).$$

Grâce à θ_c et la différentielle $\pi_* = d\pi$, on a la définition suivante :

Définition 1.5.7. *Les distributions horizontale $\mathcal{H} \equiv H(TM_0) \subset T(TM_0)$ et verticale $\mathcal{V} = V(TM_0) \subset T(TM_0)$, associées à la variété finslerienne (M, F), sont définies par :*

$$\begin{cases} \mathcal{H} = ker\theta_c \\ \mathcal{V} = ker\pi_*. \end{cases}$$

Le fibré tangent de la variété TM_0 possède la base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, F\frac{\partial}{\partial y^i}\}$. Lors d'une transformation induite sur TM_0 par un changement de coordonnées dans M, les $\frac{\partial}{\partial x^i}$ se transforment de façon compliquée alors que les $\frac{\partial}{\partial y^i}$ n'ont pas ce problème.

Le fibré cotangent de TM_0, possède les bases $\{dx^i, dy^i\}$, et lors d'une transformation sur TM induite par un changement de coordonnées dans M, les dx^i se transforment simplement alors que dy^i non. En passant de la base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, F\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ vers la base $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, F\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ pour $T(TM_0)$ et de la base $\{dx^i, dy^i\}$ vers $\{dx^i, \frac{\delta y^i}{F}\}$ pour $T^*(TM_0)$ avec :

$$\frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - N^i_j\frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\frac{\delta y^i}{F} = \frac{1}{F}\Big(dy^l + N^l_j dx^j\Big),$$

nous obtenons des bases qui possèdent un comportement simple lors d'un changement de coordonnées au sein de M. Ces bases obeïssent aux règles de dualité suivantes :

$$\frac{\delta}{\delta x^j} \rightarrow^{dual}_{naturel} dx^j;$$

$$F\frac{\partial}{\partial y^i} \rightarrow^{dual}_{naturel} \frac{\delta y^i}{F}.$$

Remarque 1.5.4. *Ces objets ont de sens seulement sur TM_0. En dehors des dx^i, les restes sont non holonomes, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas des coordonnées des champs de vecteurs, ni de coordonnées de 1-forme.*

La variété TM_0 est munie d'une métrique riemannienne naturelle dite de *type de Sasaki* définie par :

$$G = g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g_{ij}\frac{\delta y^i}{F} \otimes \frac{\delta y^j}{F}.$$

Par rapport à cette métrique, le sous espace horizontal engendré par $\frac{\delta}{\delta x^j}$ est orthogonal au sous espace vertical engendré par les $F\frac{\partial}{\partial y^i}$, d'où la décomposition suivante :

$$T(TM_0) = vect\Big(\frac{\delta}{\delta x^i}\Big) \oplus vect\Big(F\frac{\partial}{\partial y^i}\Big) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}.$$

Par conséquent la variété TM_0 possède une connexion à travers cette décomposition directement liée aux objets N^i_j d'où l'appelation de *connexion non linéaire* sur TM_0.

Dans le cas riemannien, la connexion de Levi-Civita possède deux propriétés remarquables, à savoir, la compatibilité avec la métrique et l'absence de torsion. En géométrie finslerienne proprement parlé , il n'y a pas connexion "idéal" comme celle de Levi-Civita en géométrie riemannienne, car les deux propriétés de compatibilité avec la métrique et l'absence de torsion ne peuvent pas être réunies dans une même connexion dans le contexte finslerien. C'est pour cela que plusieurs connexions apparaissent en géomérie finslerienne, nous citons entre autre celle de Berwald, introduite en 1926, qui est sans torsion mais non compatible avec la métrique ; a connexion de Cartan, introduite en 1934, qui est compatible avec la métrique mais possède une torsion et celle de Chern, introduite en 1948 qui est sans torsion et presque $g-$ compatibilité avec la métrique.

1.5.1 Dérivées covariantes des champs tensoriels sur TM_0

Dans cette sous section, nous rappelons quelques règles d'écriture de la dérivée covariante des sections de bases $\frac{\partial}{\partial x^j}$ de π^*TM et dx^j de π^*T^*M dans la direction $v \in T(TM_0)$.

Définition 1.5.8. *([2]) Les dérivées covariantes des sections de bases $\frac{\partial}{\partial x^j}$ de π^*TM et dx^i de π^*T^*M dans une direction $v \in T(TM_0)$ sont définies à travers les 1-formes de connexion par :*

$$\nabla_v\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \omega_j^i(v)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

et

$$\nabla_v(dx^i) = -\omega_j^i(v)dx^j \tag{1.37}$$

Proposition 1.5.5. *[2] La dérivée covariante du tenseur fondamental g dans une direction v est donnée par :*

$$\nabla_v g = (dg_{ij})(v)dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(\nabla_v dx^i) \otimes dx^j + g_{ij}dx^i \otimes (\nabla_v dx^j). \tag{1.38}$$

En utilisant (1.37) et en suppriment v dans (1.38), on obtient la relation suivante :

$$\nabla g = (dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k) \otimes dx^l \otimes dx^j$$

Proposition 1.5.6. *[2] La dérivée covariante de la section distinguée ℓ dans une direction v est donnée par :*

$$\nabla_v \ell = \nabla_v\Big(\ell^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = d\ell^j(v)\frac{\partial}{\partial x^j} + \ell^j\nabla_v\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

En utilisant (1.37) et en supprimant v dans (1.38) on obtient la relation suivante :

$$\nabla \ell = (d\ell^i + \ell^j\omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Proposition 1.5.7. *[2] La dérivée covariante du tenseur de Cartan A est donnée par :*

$$(\nabla A)_{ijk} = (dA_{ijk} - A_{ljk}\omega_j^l - A_{ilk}\omega_j^l - A_{ijl}\omega_k^l)dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k.$$

Proposition 1.5.8. *[2] La dérivée extérieure de $\frac{\delta y^i}{F}$ est donnée par :*

$$d\Big(\frac{\delta y^i}{F}\Big) = \ell^j\Omega_j^i + \frac{\delta y^j}{F} \wedge \Big(\omega_j^i - \ell_j\frac{\delta y^i}{F}\Big).$$

L'opérateur ∇ définit une connection linéaire sur π^*TM et sur les fibrés vectoriels associés. On a le résurtat suivant :

Proposition 1.5.9. *([2]) Toute connexion linéaire sur π^*TM satisfait les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned}
\nabla_v(fE) &= df(v)E + f\nabla_v E;\\
\nabla_v(E_1 + E_2) &= \nabla_v E_1 + \nabla_v E_2;\\
\nabla_{\lambda v}E &= \lambda\nabla_v E;\\
\nabla_{v_1+v_2}E &= \nabla_{v_1}E + \nabla_{v_2}E.
\end{aligned}$$

où f est une fonction lisse sur M, E, E_1, E_2 des champs de vecteurs sur π^*TM et λ est une constante.

1.5.2 Formulation classique de la connexion de Chern

La formulation classique de la connexion de Chern qui est définie sur le fibré pull-back π^*TM repose sur les 1-formes de la connexion ω^i_j, tirée des équations de structures via le théorème de Chern ci dessous :

Théorème 1.5.2. *(Théorème de Chern)([2]) Soit (M, F) une variété de finsler. Le fibré rappelé π^*TM admet une unique connexion linéaire appelée connexion de Chern, dont les 1-formes sont caractérisées par les équations de structure de Cartan :*

(i). Absence de torsion :

$$d(dx^i) - dx^j \wedge \omega^i_j = -dx^j \wedge \omega^i_j = 0. \tag{1.39}$$

(ii). Une presque g-compatibilité :

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega^k_i - g_{ik}\omega^k_j = 2A_{ijs}\frac{\delta y^s}{F}. \tag{1.40}$$

Remarque 1.5.5. *Les conditions d'absence de torsion et de presque g- compatibilité correspondent, en terme de coefficients de connexion, aux conditions ci-dessous :*

(i). la condition d'absence de torsion est équivalente à deux conditions sous-jacentes :

– *la première est l'absence de termes dy^k dans l'expression de ω^i_j, c'est-à-dire :*

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}dx^k;$$

– *la deuxième est la symétrie des symboles de Christoffel, c'est-à-dire :*

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

(ii). La presque g-compatibilité implique que :

$$\Gamma^l_{jk} = \gamma^l_{jk} - g^{li}\Big(A_{ijs}\frac{N^s_k}{F} - A_{jks}\frac{N^s_i}{F} + A_{kis}\frac{N^s_j}{F}\Big)$$

ce qui est aussi équivalent à :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{is}}{2}\Big(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j}\Big)$$

où γ^l_{jk} sont les coefficients de Christoffel formels, A_{ijs} sont les composantes du tenseur de Cartan et les N^s_j sont les coefficients d'une connexion non linéaire.

Remarque 1.5.6. *([2]) Il existe trois connexions intéressantes qui sont associées à la connextion de Chern :*

- *La connexion de Cartan définie par :* $\omega^i_j + A^i_{jk}\frac{\delta y^k}{F}$ *; elle est compatible avec la métrique mais avec torsion.*
- *La connexion de Hashiguchi définie par :* $\omega^i_j + A^i_{jk}\frac{\delta y^k}{F} + \dot{A}^i_{jk}dx^k$ *; où* $\dot{A} = \nabla_{\hat{l}}A$ *est la dérivée covariante horizontale de tenseur de Cartan* A *le long de la direction distinguée (horizontale)* $\hat{\ell} = \ell^i\frac{\delta}{\delta x^i}$*.*
- *La connexion de Berwald définie par :* $\omega^i_j + \dot{A}^i_{jk}dx^k$ *; elle est sans torsion dont les coefficients sont les coefficients de la connexion de Chern sans dépendance directionnelle, c'est-à-dire :*

$$\Gamma^i_{jk}(x, y) = \Gamma^i_{jk}(x).$$

Soit la 2-forme de courbure de la connexion de Chern définie par :

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j. \tag{1.41}$$

La 2-forme de courbure de la connexion de Chern admet la décomposition suivante :

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2}Q^i_{jkl}\frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} \tag{1.42}$$

où les $R_{jkl}, P_{jkl}, Q_{jkl}$ sont les composantes de R, P, Q respectivement appelées hh-, hv- et vv-tenseurs de courbure de la connexion de Chern. Certains auteurs utilisent la terminologie courbure riemannienne pour désigner la $hh-$courbure R et courbure de Minkowski pour désigner la hv-courbure P. La hv-courbure Q n'a pas d'équivalent en géométrie riemannienne. La $vv-$courbure Q est identiquement nulle pour la connexion de Chern. Voir ([2]) pour plus de détails.

La connexion de Chern étant sans torsion, alors on a :

$$dx^j \wedge \omega^i_j = 0. \tag{1.43}$$

La différentielle extérieure de l'égalité (1.43) donne :

$$d(dx^j \wedge \omega^i_j) = d^2x^j \wedge \omega^i_j + dx^j \wedge d\omega^i_j = 0, \tag{1.44}$$

ce qui entraîne :

$$dx^j \wedge d\omega^i_j = 0. \tag{1.45}$$

D'autre part, à partir de l'égalité (1.41) on a :

$$d\omega^i_j = \Omega^i_j - \omega^i_k \wedge \omega^k_j. \tag{1.46}$$

En injectant l'égalité (1.46) dans (1.45), on obtient :

$$dx^j \wedge (\Omega^i_j - \omega^i_k \wedge \omega^k_j) = dx^j \wedge \Omega^i_j - dx^j \wedge \omega^i_k \wedge \omega^k_j = 0.$$

Puisque le terme $dx^j \wedge \omega_j^k \wedge \omega_k^i$ s'annule en l'absence de torsion, alors on obtient que :

$$dx^j \wedge \Omega_j^i = 0. \tag{1.47}$$

En substituant (1.45) dans (1.47), on obtient :

$$\frac{1}{2}R^i_{jkl}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl}dx^j \wedge dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2}Q^i_{jkl}dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} = 0. \tag{1.48}$$

Les trois termes de (1.48) étant complètement indépendants, alors on a que :

$$\begin{cases} R^i_{jkl}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l = 0 \\ P^i_{jkl}dx^j \wedge dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} = 0 \\ Q^i_{jkl}dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} = 0. \end{cases}$$

Comme conséquence du système précédant, nous avons les propositions suivantes :

Proposition 1.5.10. *La hh-courbure R satisfait la première identité de Bianchi, c'est-à-dire :*

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0 \tag{1.49}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} R^i_{jkl}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l &= 0 \\ R^i_{klj}dx^k \wedge dx^l \wedge dx^j &= 0 \\ R^i_{ljk}dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k &= 0. \end{aligned}$$

En sommant membre à membre les égalités précédantes on obtient :

$$(R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk})dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l = 0.$$

Puisque $dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l \neq 0$, alors on a :

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0.$$

D'où la première identité de Bianchi. □

Proposition 1.5.11. *La hv-courbure P est symétrique par rapport à j, k c'est-à-dire :*

$$P^i_{jkl} = P^i_{kjl}. \tag{1.50}$$

Démonstration. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} P^i_{jkl}dx^j \wedge dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} &= 0 \\ P^i_{kjl}dx^k \wedge dx^j \wedge \frac{\delta y^l}{F} &= 0. \end{aligned}$$

En sommant les égalités précédantes, on obtient la relation suivante :

$$(P^i_{jkl} - P^i_{kjl})dx^j \wedge dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} = 0.$$

Puisque $dx^j \wedge dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \neq 0$, alors on a : $P^i_{jkl} - P^i_{kjl} = 0$. D'où le résultat. $\square$

Proposition 1.5.12. *La vv-courbure Q est symétrique par rapport aux indices k, l, c'est-à-dire :*

$$Q^i_{jkl} = Q^i_{jlk}. \tag{1.51}$$

Démonstration. Par définition

$$\begin{aligned} Q^i_{jkl}dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} &= 0 \\ Q^i_{jlk}dx^j \wedge \frac{\delta y^l}{F} \wedge \frac{\delta y^k}{F} &= 0. \end{aligned}$$

En sommant les égalités précédantes, on obtient :

$$(Q^i_{jkl} - Q^i_{jlk})dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} = 0.$$

Puisque $dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} \neq 0$, alors $Q^i_{jkl} - Q^i_{jlk} = 0$. D'où le résultat. $\square$

Corollaire 1.5.1. *Pour la connexion de Chern la vv-courbure Q est nulle c'est-à-dire*

$$Q^i_{jkl} = 0.$$

Ainsi l'expression de la 2-forme de la courbure (1.42) se reduit à :

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}. \tag{1.52}$$

La proposition suivante définie la hh- et hv-courbures en coordonnées naturelles.

Proposition 1.5.13. *([2]) La hh-courbure R et la hv-courbure P s'expriment en coordonnées naturelles comme suit :*

$$\begin{aligned} R^i_{jkl} &= \frac{\delta \Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta \Gamma^i_{jk}}{\delta x^l} + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl} - \Gamma^i_{hl}\Gamma^h_{jk} \\ P^i_{jkl} &= -F\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^l}. \end{aligned}$$

Démonstration. Par définition la 2-forme de courbure est donnée par :

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j.$$

D'autre part, on a d'après (1.52) :

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}.$$

On obtient :

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}. \tag{1.53}$$

Puisque ω^i_j sont des 1-formes, alors :

$$d\omega^i_j = d\Gamma^i_{jl} \wedge dx^l \tag{1.54}$$

avec $d\Gamma^i_{jl}$ une 1-forme locale sur TM_0 qui s'exprime en terme de dx^k et $\frac{\delta y^k}{F}$ comme suit :

$$d\Gamma^i_{jl} = \frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k}dx^k + F\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial y^k}\frac{\delta y^k}{F}. \tag{1.55}$$

En injectant (1.55) dans la partie gauche de (1.54), on obtient :

$$d\omega^i_j = \frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k}dx^k \wedge dx^l + F\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial y^k}\frac{\delta y^k}{F} \wedge dx^l. \tag{1.56}$$

D'autre part on a : $\omega^i_j = \Gamma^i_{kl}dx^l$, alors on déduit que :

$$\omega^i_h \wedge \omega^h_j = (\Gamma^i_{hk}dx^k) \wedge (\Gamma^h_{jl}dx^l) = \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl}(dx^k \wedge dx^l). \tag{1.57}$$

En remplaçant (1.56) et (1.57) dans (1.53), on obtient :

$$\frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k}dx^k \wedge dx^l + F\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial y^l}\frac{\delta y^l}{F} \wedge dx^k + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl}dx^k \wedge dx^l = \frac{1}{2}R^i_{jkl}dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F},$$

équivalent à,

$$\left(\frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl}\right)dx^k \wedge dx^l - F\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial y^l}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} = \frac{1}{2}R^i_{jkl}dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}. \tag{1.58}$$

Par identification on déduit :

$$\frac{1}{2}R^i_{jkl} = \frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}R^i_{jlk} = \frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^l} + \Gamma^i_{hl}\Gamma^h_{jk}.$$

L'équation (1.58), peut se réecrire sous la forme suivante :

$$\Big[\Big(\frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl}\Big) + \Big(-\frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^l} - \Gamma^i_{hl}\Gamma^h_{jk}\Big)\Big] dx^k \wedge dx^l - F\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial y^l}$$
$$= \Big(\frac{1}{2}R^i_{jlk} - \frac{1}{2}R^i_{jlk}\Big) dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl} dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}$$
$$= R^i_{jkl} dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl} dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}, \quad \text{car} \quad R^i_{jlk} = -R^i_{jlk}.$$

D'où le résultat. □

La presque $g-$compatibilité de la connexion de Chern entraîne :

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega^k_i - g_{ik}\omega^k_j = 2A_{ijs}\frac{\delta y^s}{F}.$$

En prenant la dérivée extérieure de cette égalité, on obtient :

$$2d(A_{ijs})\frac{\delta y^s}{F} + 2A_{ijs} d\Big(\frac{\delta y^s}{F}\Big) + dg_{kj}\omega^k_i + g_{kj} d\omega^k_i + dg_{ik}\omega^k_j + g_{ik} d\omega^k_j = 0.$$

et on déduit l'expression suivante :

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = -2(\nabla A)_{ijk} \wedge \frac{\delta y^k}{F} - 2A_{ijk}\Big[d\Big(\frac{\delta y^k}{F}\Big) + \omega^k_l \wedge \frac{\delta y^l}{F}\Big].$$

Proposition 1.5.14. *([2]) La* 2*-forme de courbure vérifie l'égalité appelée l'identité fondamentale suivante :*

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} + \Omega_{ji} &= -(A_{iju}R^u_{kl}) dx^k \wedge dx^l \\ &- 2(A_{iju}P^u_{kl} + A_{ijl|k}) dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \\ &+ 2(A_{ijk;l} - A_{ijk}\ell_l)\frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}. \end{aligned} \tag{1.59}$$

où les notations suivantes ont été introduites :

$$\begin{aligned} R^i_{kl} &:= \ell^j R^i_{jkl} \\ P^i_{kl} &:= P^i_{jkl} \end{aligned}$$

Remarque 1.5.7. *A partir de l'identité fondamentale on obtient une multitude d'information sur la* hh*- et* hv*-courbures.*

Corollaire 1.5.2. *Les coefficients de* $dx^k \wedge dx^l$ *dans l'identité fondamentale* (1.59) *implique :*

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 2(-A_{iju}R^u_{kl}) =: 2B_{ijkl} \tag{1.60}$$

avec $B_{ijkl} := -A_{iju}R^u_{kl}$.

A partir de la formule (1.60) et de la première identité de Bianchi, on peut déduire la relation suivante :

$$R_{klji} - R_{jikl} = (B_{klji} - B_{jikl}) + (B_{kilj} - B_{ljki}) + (B_{iljk} - B_{jkil}) \tag{1.61}$$

Posons :$R_{ik} := \ell^j R_{jikl} \ell^l$. En utilisant (1.60) et (1.61), on obtient :

$$R_{ki} = R_{ik}. \tag{1.62}$$

Corollaire 1.5.3. *([2]) Les coefficients de $dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}$ dans l'identité fondamentale (1.59) implique :*

$$P_{ijkl} + P_{jikl} = -2A_{iju} P^u_{kl} - 2A_{ijl|k}. \tag{1.63}$$

Bao et al. [2] ont utilisé la relation précédente pour obtenir la formule suivante appelée relation constitutive :

$$P_{jikl} = -(A_{ijl|k} - A_{jkl|i} + A_{kil|j}) + A^u_{ij} \dot{A}_{ukl} - A^u_{jk} \dot{A}_{uil} + A^u_{ki} \dot{A}_{ujl} \tag{1.64}$$

où $\dot{A}_{ijk} = A_{ijk|s} \ell^s$. La relation constitutive implique que le second tenseur de courbure de Chern P est un fonctionnel du tenseur de Cartan A_{ijk} et de sa dérivée covariante horizontale $A_{ijk|s}$ plus précisement :

Corollaire 1.5.4. *([2]) Les coefficients de $\frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}$ dans l'expression de l'identité fondamentale (1.59) entraîne :*

$$A_{ijk;l} - A_{ijl;k} = A_{ijk} l_l - A_{ijl} l_k. \tag{1.65}$$

La dérivée extérieure de la 2-forme de courbure (1.41) de la connexion de Chern donne l'égalité suivante :

$$d\Omega^i_j - \omega^k_j \wedge \Omega^i_k + \omega^i_k \wedge \Omega^k_j = 0. \tag{1.66}$$

En substituant Ω^i_j par son expression (1.52) dans l'égalité (1.66), on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\Big(R^i_{jkl|t} - P^i_{jku} R^u_{lt}\Big) dx^k \wedge dx^l \wedge dx^t \\ &+ \frac{1}{2}\Big(R^i_{jkl;t} - 2P^i_{jkt|l} + 2P^i_{jku} \dot{A}^u_{lt}\Big) dx^k \wedge dx^l \wedge \frac{\delta y^t}{F} \\ &+ \Big(P^i_{jkl;t} - P^i_{jkl} l_t\Big) dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \wedge \frac{\delta y^t}{F}. \end{aligned}$$

Ce résultat est une réformulation de la deuxième identité de Bianchi et est équivalent aux trois identités suivantes :

$$R^i_{jkl|t} + R^i_{jlt|k} + R^i_{jtk|l} = P^i_{jku} R^u_{lt} + P^i_{jlu} R^u_{tk} + P^i_{jtu} R^u_{kl} \tag{1.67}$$

$$R^i_{jkl;t} = P^i_{jkl|l} + P^i_{jlt|k} - (P^i_{jku}\dot{A}^u_{lt} - P^i_{jlu}\dot{A}^u_{kt}) \tag{1.68}$$

$$P^i_{jkl;t} - P^i_{jkt;l} = P^i_{jkl}l_t - P^i_{jkt}l_l \tag{1.69}$$

La relation (1.68) est appelée relation constitutive pour le premier tenseur de courbure de Chern R, c'est-à-dire R^i_{jkl} est un fonctionnel du tenseur R^i_k et ses première et seconde dérivées covariantes verticales, de $\dot{A}$ et ses premières dérivées covariantes horizontales. Explicitement la relation constitutive de R s'écrit :

$$\begin{aligned} R^i_{jkl} &= \frac{1}{3}\Big(R^i_{k;l;j} - R^i_{l;k;j} + \ell_j R^i_{k;l} - \ell_j R^i_{l;k}\Big) \\ &+ \frac{2}{3}_B ig(R^i_{k;j}\ell_l - R^i_{l;j}\ell_k + R^i_k g_{jl} - R^i_l g_{jk}\Big) \\ &- (\dot{A}^i_{jl|k} - \dot{A}^i_{jk|l} + \dot{A}^i_{uk}\dot{A}^u_{jl} - \dot{A}^i_{ul}\dot{A}^u_{jk}). \end{aligned}$$

Soient $X, Y \in TM_0$ deux vecteurs locaux et pour toute 1-forme ω, on a la formule de Cartan suivante :

$$(d\omega)(X,Y) = d[\omega(Y)](X) - d[\omega(X)](Y) - \omega([X,Y]). \tag{1.70}$$

Soit $\xi = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ une section locale de π^*TM. En utilisant la formule de Cartan, on montre que :

$$\xi^j \Omega^i_j(X,Y)\frac{\partial}{\partial x^i} = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\xi. \tag{1.71}$$

Notons que la distribution horizontale est engendrée par les $\frac{\delta}{\delta x}$ et la distribution verticale est engendrée par $F\frac{\partial}{\partial y}$. En utilisant la formule de Cartan, on montre que :

$$\Big[\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l}\Big] = -\ell^j R^i_{jkl} F\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

c'est-à-dire que le crochet de Lie des champs de vecteurs horizontaux est strictement vertical et la distribution horizontale n'est pas involutive, donc pas intégrable. De même on montre que :

$$\Big[\frac{\delta}{\delta x^k}, F\frac{\partial}{\partial y^l}\Big] = \Big\{\dot{A}^i_{kl} + \frac{\ell^i}{F}\Big(F\ell_k\Big)_{x^\ell} - \ell^i\frac{N_{kl}}{F}\Big\}F\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

c'est-à-dire que le crochet de Lie d'un champ de vecteur horizontal et d'un champ de vecteur vertical est strictement vertical. Enfin, on montre que :

$$\Big[F\frac{\partial}{\partial y^k}, F\frac{\partial}{\partial y^\ell}\Big] = (\ell_k\delta^i_\ell - \ell_\ell\delta^i_k)F\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

c'est-à-dire que le crochet de Lie des champs de vecteurs verticaux est strictement vertical et la distribution verticale est involutive donc intégrable.

En coordonnées locales, les hh-courbure et hv-courbure sont données par les relations suivantes :

$$R\Big(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l}\Big)\frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}}\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^l}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^l}}\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\big[\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l}\big]}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.72}$$

et

$$P\Big(\frac{\delta}{\delta x^k}, F\frac{\partial}{\partial y^l}\Big)\frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}}\nabla_{F\frac{\partial}{\partial y^l}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{F\frac{\partial}{\partial y^l}}\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\big[\frac{\delta}{\delta x^k}, F\frac{\partial}{\partial y^l}\big]}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.73}$$

CHAPITRE DEUX

MÉTRIQUES DE WALKER OSSERMAN

Dans ce chapitre nous allons construire des exemples de métriques pseudo-riemanniennes de Walker-Osserman en utilisant l'extension riemannienne. L'extension riemannienne est une technique qui établit un lien entre la géométrie affine et la géométrie pseudo-riemannienne. Elle jout un rôle important dans divers questions concernant la géométrie spectrale de l'opérateur de courbure.

Dans la première section de ce chapitre, nous rappelons les notions de base et quelques résultats de description sur les variétés affines d'Osserman. La deuxième section est consacrée à la description de deux familles de connexion affine d'Osserman sur une 3-variété affine. A la troisième section, une description d'une famille de connexion affine d'Osserman sur une 4-variété affine est donnée. Comme application des variétés affines d'Osserman, des métriques de Walker-Osserman de signature $(3, 3)$ et de signature $(4, 4)$ sont construites sur le fibré cotangent de la variété affine, c'est l'object de la quatrième section. Ces travaux ont conduit à la publication de deux papiers [17],[29].

2.1 Notions préliminaires sur les variétés affines d'Osserman

Dans cette section, nous présentons quelques résultats consernant l'étude de la conjecture d'Osserman en géométrie affine. Notons que cette étude est confrontée à une difficuté due au fait que la sphère en fibré unité ne peut être définie. Par conséquent l'opérateur de Jacobi de toute variété affine d'Osserman a pour valeurs propres zéro. Cependant de telles variétés ne sont pas nécessairement plates.

2.1.1 Variétés affines d'Osserman

Définition 2.1.1. *Soient (M, ∇) une variété de dimension m munie d'une connexion affine ∇, p un point de M et X un vecteur de l'espace tangent T_pM en un point p de la variété M. On appelle opérateur de Jacobi affine en p, l'endomorphisme $J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)$ de T_pM défini par :*

$$J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)Y = \mathcal{R}^\nabla(Y, X)X,$$

pour tout $Y \in T_pM$ et $\mathcal{R}^\nabla$ est l'opérateur de courbure induit par la connexion affine ∇.

Définition 2.1.2. *Soit (M, ∇) une variété affine de dimension m. Alors (M, ∇) est dite affine d'Osserman en un point p de M si le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine en p est indépendant du choix de X dans T_pM. La variété (M, ∇) est dite affine d'Osserman (ou globalement affine d'Osserman) si elle est affine d'Osserman en chaque point p de M.*

Théorème 2.1.1. *Soit M une variété de dimension m munie d'une connexion affine ∇. Alors (M, ∇) est une variété affine d'Osserman en un point $p \in M$ si le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine $J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)$ est donné par :*

$$P_\lambda(J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)) = \lambda^m$$

pour tout $X \in T_pM$.

Corollaire 2.1.1. *Si (M, ∇) est une variété affine d'Osserman, alors le spectre de l'opérateur de Jacobi affine noté* $\mathrm{spec}\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\}$ *,est réduit au singleton zéro, c'est-à-dire que*

$$\mathrm{spec}\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\} = \{0\}$$

Corollaire 2.1.2. *Si (M, ∇) est une variété affine d'Osserman, alors son tenseur de Ricci est antisymétrique.*

Remarque 2.1.1. *Contrairement aux variétés riemanniennes d'Osserman, les notions de variétés affines d'Osserman en un point, affines d'Osserman point par point et globalement affine d'Osserman sont équivalentes.*

Remarque 2.1.2. *Les variétés affines d'Osserman se placent à un point de confluence de deux théories : la géométrie affine et la géométrie pseudo-riemannienne. Ce qui, en soit, les confère un certain intérêt.*

2.1.2 Classification des connexions affines d'Osserman

Théorème 2.1.2. *[12] Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la connexion affine sans torsion donnée par :*

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_1}\partial_1 &= f_{11}^1(u_1,u_2)\partial_1 + f_{11}^2(u_1,u_2)\partial_2; \\ \nabla_{\partial_1}\partial_2 &= f_{12}^1(u_1,u_2)\partial_1 + f_{12}^2(u_1,u_2)\partial_2; \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 &= f_{22}^1(u_1,u_2)\partial_1 + f_{22}^2(u_1,u_2)\partial_2. \end{cases}$$

Alors la connexion affine ∇ est Osserman si et seulement si les coefficients de la connexion affine sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_2 f_{11}^2 - \partial_1 f_{12}^2 + f_{12}^2(f_{11}^1 - f_{12}^2) + f_{11}^2(f_{22}^2 - f_{12}^1) &= 0; \\ \partial_1 f_{22}^1 - \partial_2 f_{12}^1 + f_{22}^1(f_{11}^1 - f_{12}^2) + f_{12}^1(f_{22}^2 - f_{12}^1) &= 0; \\ \partial_1 f_{12}^1 - \partial_2 f_{11}^1 - \partial_1 f_{22}^2 + \partial_2 f_{12}^2 + 2(f_{12}^1 f_{12}^2 - f_{11}^2 f_{22}^1) &= 0. \end{cases}$$

La description des surfaces affine d'Osserman est complète. Toute surface affine est Osserman si et seulement si le tenseur de Ricci de la connexion affine associée est antisymétrique. En grande dimension, l'antisymétrie du tenseur de Ricci est une condition nécessaire mais pas suffisante pour une connexion affine d'être Osserman. Ce qui rend la classification des variétés affine d'Osserman de dimension grande un sujet d'actualité. Pour plus de détails voir [12], [24]. En dimension 3 la description des connexions affine d'Osserman est incomplète, mais des résultats partiels existent dans la littérature.

Proposition 2.1.1. *[15] Soit M une variété de dimension 3 munie de connexion affine sans torsion ∇ définie par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \nabla_{\partial_1}\partial_1 & = & f_1(u_1,u_2,u_3)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 & = & f_2(u_1,u_2,u_3)\partial_2; \\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 & = & f_3(u_1,u_2,u_3)\partial_2. \end{array}\right.$$

Alors (M,∇) est affine d'Osserman si et seulement si les coefficients de la connexion satisfont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1(u_1,u_2,u_3) & = & A(u_1,u_2); \\ f_2(u_1,u_2,u_3) & = & B(u_1,u_2); \\ f_3(u_1,u_2,u_3) & = & k(u_3)e^{C(u_1,u_2)}. \end{array}\right.$$

où k est une fonction et A, B et C vérifient :

$$\partial_2 A + \partial_1 B = 0, \quad \textit{où} \quad \partial_2 C = -B \quad \textit{et} \quad \partial_1 C = A.$$

Proposition 2.1.2. *[16] Soit M une 3-variété affine munie de la connexion donnée par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \nabla_{\partial_1}\partial_1 & = & f_1(u_1,u_2,u_3)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 & = & f_2(u_1,u_2,u_3)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 & = & f_3(u_1,u_2,u_3)\partial_1. \end{array}\right.$$

Alors (M,∇) est affine d'Osserman si et seulement si les coefficients de la connexion satisfont :

$$f_1(u_1,u_2,u_3) = f_1(u_1), \quad \partial_1 f_2 + f_1(u_1) f_2 = 0, \quad \textit{et} \quad \partial_1 f_3 + f_1(u_1) f_3 = 0.$$

Proposition 2.1.3. *[16] Soit M une 3-variété affine munie de la connexion donnée par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \nabla_{\partial_1}\partial_1 & = & f_1(u_1,u_2,u_3)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 & = & f_2(u_1,u_2,u_3)\partial_2; \\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 & = & f_3(u_1,u_2,u_3)\partial_3. \end{array}\right.$$

Alors (M,∇) est affine d'Osserman, si et seulement si les coefficients de la connexion satisfont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 = 0; \quad \partial_3 f_1 + \partial_1 f_3 = 0; \quad \partial_3 f_2 + \partial_2 f_3 & = & 0; \\ (\partial_1 f_2)(\partial_3 f_1) = 0; \quad (\partial_2 f_1)(\partial_3 f_2) = 0; \quad (\partial_3 f_2)(\partial_1 f_3) & = & 0. \end{array}\right.$$

Proposition 2.1.4. *[14] Soit M une 3-variété affine munie de la connexion donnée par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl}\nabla_{\partial_1}\partial_1 & = & f_1(u_1,u_2,u_3)\partial_2;\\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 & = & f_2(u_1,u_2,u_3)\partial_2;\\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 & = & f_3(u_1,u_2,u_3)\partial_2.\end{array}\right.$$

Alors (M,∇) est affine d'Osserman si et seulement si les coefficients de la connexion affine satisfont

$$f_2(u_1,u_1,u_3)=f_2(u_2),\quad \partial_2 f_1+f_1f_2(u_2)=0 \quad \textit{et} \quad \partial_2 f_3+f_2(u_2)f_3=0.$$

Théorème 2.1.3. *[20] Soit M une 3-variété affine munie de la connexion donnée par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl}\nabla_{\partial_1}\partial_1 & = & f_1(u_1,u_2,u_3)\partial_3;\\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 & = & f_2(u_1,u_2,u_3)\partial_3;\\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 & = & f_3(u_1,u_2,u_3)\partial_3.\end{array}\right.$$

Alors (M,∇) est affine d'Osserman si et seulement si les coefficients de la connexion affine satisfont :

$$f_3(u_1,u_1,u_3)=f_3(u_3),\quad \partial_3 f_1+f_1f_3(u_3)=0 \quad \textit{et} \quad \partial_3 f_2+f_2f_3(u_3)=0.$$

De plus la connexion affine d'Osserman est locolement symétrique si les coefficients de la connexion affine sont solutions du système suivant :

$$\begin{array}{r}\partial_1\partial_2 f_1=0,\ \partial_2\partial_1 f_2=0,\ \partial_1^2 f_2=0,\ \partial_2^2 f_1=0,\\ \partial_3\partial_2 f_1+f_3\partial_2 f_1=0,\ \partial_3\partial_1 f_2+f_3\partial_1 f_2=0,\\ \partial_3^2 f_1+2f_3\partial_3 f_1+f_1f_3^2=0,\ \partial_3^2 f_2+2f_3\partial_3 f_2+f_2f_3^2=0.\end{array}$$

Proposition 2.1.5. *[22] Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la connexion donnée par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl}\nabla_{\partial_1}\partial_1 & = & f_1(u_1,u_2,u_3)\partial_2;\\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 & = & f_2(u_1,u_2,u_3)\partial_3;\\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 & = & f_3(u_1,u_2,u_3)\partial_1.\end{array}\right.$$

Alors $(\mathbb{R}^3,\nabla)$ est affine d'Osserman si et seulement si l'une au moins des conditions suivantes est vraie :

(i). $f_1=p(u_1),\quad f_2=q(u_1,u_2)$ *et* $f_3=0.$

(ii). $f_1=p(u_1,u_3),\quad f_2=0$ *et* $f_3=r(u_3).$

(iii). $f_1=0,\quad f_2=q(u_2)$ *et* $f_3=r(u_2,u_3).$

Cette famille de connexions affines d'Osserman est à courbure de Ricci nulle mais la connexion n'est pas plate.

Proposition 2.1.6. *[22] Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la connexion donnée par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\nabla_{\partial_1}\partial_1 & = & f_1(u_1,u_2,u_3)\partial_3;\\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 & = & f_2(u_1,u_2,u_3)\partial_1;\\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 & = & f_3(u_1,u_2,u_3)\partial_2.\end{array}\right.$$

Alors $(\mathbb{R}^3,\nabla)$ est affine d'Osserman si et seulement si l'une au moins des conditions suivantes est vraie :

(i). $f_1 = p(u_1,u_2), \quad f_2 = q(u_2)$ *et* $f_3 = 0$.

(ii). $f_1 = p(u_1), \quad f_2 = 0$ *et* $f_3 = r(u_1,u_3)$.

(iii). $f_1 = 0, \quad f_2 = q(u_2,u_3)$ *et* $f_3 = r(u_3)$.

Proposition 2.1.7. *[22] Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la connexion donnée par :*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = f_1(u_3)\partial_1 \quad et \quad \nabla_{\partial_1}\partial_3 = f_1(u_3)\partial_3.$$

Alors $(\mathbb{R}^3,\nabla)$ est une variété affine d'Osserman à courbure de Ricci non nulle. Cependant, si $f_1(u_3)$ est constante, alors (M,∇) une variété affine d'Osserman à courbure de Ricci nulle.

Proposition 2.1.8. *[22] Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la connexion donnée par :*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = f_1(u_2)\partial_1; \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = f_1(u_2)\partial_2.$$

Alors (M,∇) est une variété affine d'Osserman à courbure de Ricci non nulle.

2.2 Exemple de famille de connexion affine d'Osserman sur une 3-variété

Dans cette section, nous décrivons deux familles de connexions affine où l'antisymétrie du tenseur de Ricci est une condition suffisante d'être Osserman.

2.2.1 Famille 1

Dans cette section M est une variété de dimension 3 et ∇ une connexion affine lisse sans torsion. Soit (u_1,u_2,u_3) un système de coordonnées locales dans un domaine $\mathcal{U} \subset M$ telle que la connexion affine ∇ soit définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\nabla_{\partial_1}\partial_1 & = & f_1(u_1,u_2,u_3)\partial_2;\\ \nabla_{\partial_1}\partial_2 & = & f_2(u_1,u_2,u_3)\partial_2;\\ \nabla_{\partial_1}\partial_3 & = & f_3(u_1,u_2,u_3)\partial_2;\\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 & = & f_4(u_1,u_2,u_3)\partial_2;\\ \nabla_{\partial_2}\partial_3 & = & f_5(u_1,u_2,u_3)\partial_2;\\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 & = & f_6(u_1,u_2,u_3)\partial_2.\end{array}\right. \tag{2.1}$$

Cette famille généralise la famille étudiée dans le papier [14].
À partir de la formule $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$, on montre que les composantes non nulles de l'opérateur de courbure de la connexion affine (2.1) sont données par

$$\begin{array}{rcl}
R(\partial_1,\partial_2)\partial_1 &=& (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 + f_2^2 - f_1 f_4)\partial_2 \\
R(\partial_1,\partial_2)\partial_2 &=& (\partial_1 f_4 - \partial_2 f_2)\partial_2 \\
R(\partial_1,\partial_2)\partial_3 &=& (\partial_1 f_5 - \partial_2 f_3 + f_2 f_5 - f_3 f_4)\partial_2 \\
R(\partial_1,\partial_3)\partial_1 &=& (\partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 + f_2 f_3 - f_1 f_5)\partial_2 \\
R(\partial_1,\partial_3)\partial_2 &=& (\partial_1 f_5 - \partial_3 f_2)\partial_2 \\
R(\partial_1,\partial_3)\partial_3 &=& (\partial_1 f_6 - \partial_3 f_3 + f_2 f_6 - f_3 f_5)\partial_2 \\
R(\partial_2,\partial_3)\partial_1 &=& (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 + f_3 f_4 - f_2 f_5)\partial_2 \\
R(\partial_2,\partial_3)\partial_2 &=& (\partial_2 f_5 - \partial_3 f_4)\partial_2 \\
R(\partial_2,\partial_3)\partial_3 &=& (\partial_2 f_6 - \partial_3 f_5 + f_4 f_6 - f_5^2)\partial_2.
\end{array}$$

On montre facilement que les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont données par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
Ric(\partial_1,\partial_1) &=& \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 + f_1 f_4 - f_2^2 \\
Ric(\partial_1,\partial_2) &=& \partial_2 f_2 - \partial_1 f_4 \\
Ric(\partial_1,\partial_3) &=& \partial_2 f_3 - \partial_1 f_5 + f_3 f_4 - f_2 f_5 \\
Ric(\partial_3,\partial_1) &=& \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 + f_3 f_4 - f_2 f_5 \\
Ric(\partial_3,\partial_2) &=& \partial_2 f_5 - \partial_3 f_4 \\
Ric(\partial_3,\partial_3) &=& \partial_2 f_6 - \partial_3 f_5 + f_4 f_6 - f_5^2.
\end{array}\right. \tag{2.2}$$

L'antisymétrie du tenseur de Ricci est équivalente à :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
Ric(\partial_1,\partial_1) = Ric(\partial_3,\partial_3) &=& 0 \\
Ric(\partial_1,\partial_2) &=& 0 \\
Ric(\partial_1,\partial_3) + Ric(\partial_3,\partial_1) &=& 0 \\
Ric(\partial_3,\partial_2) &=& 0.
\end{array}\right. \tag{2.3}$$

À partir de (2.1) et (2.3), nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2.1. *[17] La connexion affine ∇ définie en (2.1) est anti-symétrique si les coefficients de la connexion $f_i, i = 1, \dots, 6$ sont solutions du système d'équations suivant :*

$$\begin{array}{rcl}
\partial_2 f_2 - \partial_1 f_4 = 0; \quad \partial_2 f_5 - \partial_3 f_4 &=& 0 \\
\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 + f_1 f_4 - f_2^2 &=& 0 \\
\partial_2 f_6 - \partial_3 f_5 + f_4 f_6 - f_5^2 &=& 0 \\
2\partial_2 f_3 - \partial_1 f_5 - \partial_3 f_2 + 2 f_3 f_4 - 2 f_2 f_5 &=& 0.
\end{array} \tag{2.4}$$

Corollaire 2.2.1. *[14] Soit ∇ la connexion affine définie comme en (2.1) avec $f_2 = f_3 = f_5 = 0$. Alors la connexion affine est anti-symétrique si seulement si les coefficients f_1, f_4, f_6 sont solutions du système d'équations suivant :*

$$f_4(u_1, u_2, u_3) = f_1(u_2), \quad \partial_2 f_1 + f_1 f_4 = 0, \quad \textit{et} \quad \partial_2 f_6 + f_4 f_6 = 0. \tag{2.5}$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2.2. *[17] Soit (M, ∇) une variété affine de dimension 3 munie de la connexion donnée par (2.1). Alors (M, ∇) est affine Osserman si et seulement si le tenseur de Ricci est anti-symétrique.*

Démonstration. Comme le tenseur de Ricci de toute connexion affine d'Osserman est anti-symétrique, il vient que la condition nécéssaire pour que la connexion affine (2.1) soit Osserman est :

$$\begin{array}{rcl}
\partial_2 f_2 - \partial_1 f_4 = 0; \quad \partial_2 f_5 - \partial_3 f_4 & = & 0 \\
\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 + f_1 f_4 - f_2^2 & = & 0 \\
\partial_2 f_6 - \partial_3 f_5 + f_4 f_6 - f_5^2 & = & 0
\end{array}$$

et

$$2\partial_2 f_3 - \partial_1 f_5 - \partial_3 f_2 + 2 f_3 f_4 - 2 f_2 f_5 \;=\; 0.$$

Alors, l'opérateur de Jacobi affine associé s'exprime, en coordonnées locales comme suit :

$$(J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{array}{rcl}
a & = & \alpha_1 \alpha_3 \Big(\partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 + f_2 f_3 - f_1 f_4 \Big) \\
& & + \alpha_2 \alpha_3 \Big(2\partial_1 f_5 - \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 + f_2 f_5 - f_3 f_4 \Big) \\
& & + \alpha_3^2 \Big(\partial_1 f_6 - \partial_3 f_3 + f_2 f_6 - f_3 f_5 \Big); \\
c & = & -\alpha_1^2 \Big(\partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 + f_2 f_3 - f_1 f_5 \Big) \\
& & - \alpha_1 \alpha_2 \Big(\partial_1 f_5 - \partial_2 f_3 - 2\partial_3 f_2 + f_3 f_4 - f_2 f_5 \Big) \\
& & - \alpha_1 \alpha_3 \Big(\partial_1 f_6 - \partial_3 f_3 + f_2 f_6 - f_3 f_5 \Big).
\end{array}$$

Le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine est :

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)] = -\lambda^3$$

qui a zéro comme valeurs propres $\square$

Exemple 2.2.1. *[17] Suivant le Corollaire 2.2.1, on peut construire des exemples de connexions affines d'Osserman. La connexion suivante sur $\mathbb{R}^3$ dont les coefficients non nuls sont donnés par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = u_1u_3\partial_2 \quad et \quad \nabla_{\partial_3}\partial_3 = (u_1+u_3)\partial_2 \tag{2.6}$$

est affine d'Osserman non plate.

2.2.2 Famille 2.

Dans cette section M est une variété de dimension 3 et ∇ une connextion affine lisse sans torsion. Soit (u_1, u_2, u_3) un système de coordonnées locales dans un domaine $\mathcal{U} \subset M$ tel que la connexion affine ∇ soit définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \nabla_{\partial_1}\partial_1 &=& f_1(u_1,u_2,u_3)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_1}\partial_2 &=& f_2(u_1,u_2,u_3)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_1}\partial_3 &=& f_3(u_1,u_2,u_3)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 &=& f_4(u_1,u_2,u_3)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_2}\partial_3 &=& f_5(u_1,u_2,u_3)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 &=& f_6(u_1,u_2,u_3)\partial_1. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Cette famille de connextions affine généralise la famille étudiée dans le papier [16].
A partir de la formule $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z\nabla_{[X,Y]}Z$, on montre que les composantes non nulles de l'opérateur de courbure de la connexion affine (2.7) sont données par :

$$\begin{array}{lcl} R(\partial_1,\partial_2)\partial_1 &=& (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\partial_1 \\ R(\partial_1,\partial_2)\partial_2 &=& (f_1f_4 + \partial_1 f_4 - f_2^2 - \partial_2 f_2)\partial_1 \\ R(\partial_1,\partial_2)\partial_3 &=& (f_1f_5 + \partial_1 f_5 - f_2f_3 - \partial_2 f_3)\partial_1 \\ R(\partial_1,\partial_3)\partial_1 &=& (\partial_1 f_3 - \partial_3 f_1)\partial_1 \\ R(\partial_1,\partial_3)\partial_2 &=& (f_1f_5 + \partial_1 f_5 - f_2f_3 - \partial_3 f_2)\partial_1 \\ R(\partial_1,\partial_3)\partial_3 &=& (f_1f_6 + \partial_1 f_6 - f_3^2 - \partial_3 f_3)\partial_1 \\ R(\partial_2,\partial_3)\partial_1 &=& (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)\partial_1 \\ R(\partial_2,\partial_3)\partial_2 &=& (f_2f_5 + \partial_2 f_5 - f_3f_4 - \partial_3 f_4)\partial_1 \\ R(\partial_2,\partial_3)\partial_3 &=& (f_2f_6 + \partial_2 f_6 - f_3f_5 - \partial_3 f_5)\partial_1. \end{array}$$

On montre facilement que les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} Ric(\partial_2,\partial_1) & = & \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \\ Ric(\partial_2,\partial_2) & = & f_1 f_4 + \partial_1 f_4 - f_2^2 - \partial_2 f_1 \\ Ric(\partial_2,\partial_3) & = & f_1 f_5 + \partial_1 f_5 - f_2 f_3 - \partial_2 f_3 \\ Ric(\partial_3,\partial_1) & = & \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 \\ Ric(\partial_3,\partial_2) & = & f_1 f_5 + \partial_1 f_5 - f_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ Ric(\partial_3,\partial_3) & = & f_1 f_6 + \partial_1 f_6 - f_3^2 - \partial_3 f_3 \end{array}\right. \tag{2.8}$$

L'anti-symétrie du tenseur de Ricci est équivalente à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} Ric(\partial_2,\partial_2) = Ric(\partial_3,\partial_3) & = & 0 \\ Ric(\partial_2,\partial_1) & = & 0 \\ Ric(\partial_3,\partial_1) & = & 0 \\ Ric(\partial_2,\partial_3) + Ric(\partial_3,\partial_2) & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.9}$$

A partir de (2.7) et (2.9), nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2.3. *La connexion affine ∇ définie en (2.7) est anti-symétrique si les coéficients de la connexion $f_i, i = 1, \ldots, 6$ sont solutions du système d'équations suivant :*

$$\begin{aligned} \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0 \quad \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 &= 0 \\ \partial_1 f_4 - \partial_2 f_2 + f_1 f_4 - f_2^2 &= 0 \\ \partial_1 f_6 - \partial_3 f_3 + f_1 f_6 - f_3^2 &= 0 \\ 2\partial_1 f_5 - \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 + 2 f_1 f_5 - 2 f_2 f_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Corollaire 2.2.2. *[16] Soit ∇ la connexion affine définie comme en (2.7). supposons que $f_2 = f_3 = f_5 = 0$, Alors la connexion affine donnée en (2.7) est anti-symétrique si et seulement si les coefficients de la connexion (2.7) vérifient :*

$$f_1(u_1,u_2,u_3) = f_1(u_1), \quad \partial_1 f_4 + f_1 f_4 = 0, \quad \textit{et} \quad \partial_1 f_6 + f_1 f_6 = 0. \tag{2.11}$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2.4. *Soit (M,∇) une variété affine de dimension 3 munie de la connexion donnée par (2.7). Alors (M,∇) est affine Osserman si et seulement si le tenseur de Ricci est anti-symétrique.*

Démonstration. Comme le tenseur de Ricci de toute connexion affine d'Osserman est anti-symétrique,il vient que la condition nécéssaire pour que la connexion affine (2.7) Soit Osserman est :

$$\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0 \quad \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 = 0 \tag{2.12}$$

$$\partial_1 f_4 - \partial_2 f_2 + f_1 f_4 - f_2^2 = 0 \quad \partial_1 f_6 - \partial_3 f_3 + f_1 f_6 - f_3^2 = 0 \tag{2.13}$$

et

$$2\partial_1 f_5 - \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 + 2f_1 f_5 - 2f_2 f_3 = 0. \tag{2.14}$$

Alors, l'opérateur de Jacobi affine associé s'exprime, en coordonnées locales comme suit :

$$(J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)) = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{array}{rcl} b & = & \alpha_1\alpha_3\Big(2\partial_2 f_3 - \partial_3 f_1 - \partial_1 f_5 - f_1 f_5 + f_2 f_3\Big) \\ & & +\alpha_2\alpha_3\Big(\partial_2 f_5 - \partial_3 f_4 + f_2 f_5 - f_3 f_4\Big) \\ & & +\alpha_3^2\Big(\partial_2 f_6 - \partial_3 f_5 + f_2 f_6 - f_3 f_5\Big); \\ c & = & -\alpha_1\alpha_2\Big(\partial_2 f_3 - 2\partial_3 f_2 + \partial_1 f_5 + f_1 f_5 - f_2 f_3\Big) \\ & & -\alpha_2^2\Big(\partial_2 f_5 - \partial_3 f_4 + f_2 f_5 - f_3 f_4\Big) \\ & & -\alpha_2\alpha_3\Big(\partial_2 f_6 - \partial_3 f_5 + f_2 f_6 - f_3 f_5\Big). \end{array}$$

Le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine est :

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)] = -\lambda^3$$

qui a zéro comme valeurs propres. □

Exemple 2.2.2. *La connextion suivante sur* $\mathbb{R}^3$ *dont les coéfficients non nuls sont donnés par :*

$$\nabla_{\partial_2}\partial_2 = u_2 u_3 \partial_1 \quad et \quad \nabla_{\partial_3}\partial_3 = (u_2 + u_3)\partial_1 \tag{2.15}$$

est affine d'Osserman non plate.

2.3 Exemple d'une famille de connexion affine d'Osserman sur une 4-variété

Soit M une variété affine de dimension 4 munie de la connexion affine sans torsion ∇ définie dans un système de coordonnées locales $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ par :

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_1}\partial_1 = f_1\partial_4 \\ \nabla_{\partial_1}\partial_4 = f_2\partial_4 \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 = f_3\partial_4 \\ \nabla_{\partial_2}\partial_3 = f_4\partial_4 \\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 = f_5\partial_4 \\ \nabla_{\partial_4}\partial_4 = f_6\partial_4 \end{cases} \tag{2.16}$$

où f_i sont fonctions de u_1, u_2, u_3, u_4. Les composantes non nulles de l'opérateur de courbure sont déterminées par :

$$\begin{array}{rcl} R(\partial_1,\partial_2)\partial_1 &=& -\partial_2 f_1\partial_4, \quad R(\partial_1,\partial_2)\partial_2 = (\partial_1 f_3 + f_2 f_3)\partial_4; \\ R(\partial_1,\partial_2)\partial_3 &=& (\partial_1 f_4 + f_2 f_4)\partial_4, \quad R(\partial_1,\partial_2)\partial_4 = -\partial_2 f_2\partial_4; \\ R(\partial_1,\partial_3)\partial_1 &=& -\partial_3 f_1\partial_4, \quad R(\partial_1,\partial_3)\partial_2 = (\partial_1 f_4 + f_2 f_4)\partial_4; \\ R(\partial_1,\partial_3)\partial_3 &=& (\partial_1 f_5 + f_2 f_5)\partial_4, \quad R(\partial_1,\partial_3)\partial_4 = -\partial_3 f_2\partial_4; \\ R(\partial_1,\partial_4)\partial_1 &=& (\partial_1 f_2 - \partial_4 f_1 + f_2^2 - f_1 f_6)\partial_4, \quad R(\partial_1,\partial_4)\partial_4 = (\partial_1 f_6 - \partial_4 f_2)\partial_4 \\ R(\partial_2,\partial_3)\partial_2 &=& (\partial_2 f_4 - \partial_3 f_3)\partial_4, \quad R(\partial_2,\partial_3)\partial_3 = (\partial_2 f_5 - \partial_3 f_4)\partial_4 \\ R(\partial_2,\partial_4)\partial_1 &=& \partial_2 f_2\partial_4, \quad R(\partial_2,\partial_4)\partial_2 = (-\partial_4 f_3 - f_3 f_6)\partial_4 \\ R(\partial_2,\partial_4)\partial_3 &=& (-\partial_4 f_4 - f_4 f_6)\partial_4, \quad R(\partial_2,\partial_4)\partial_4 = \partial_2 f_6\partial_4 \\ R(\partial_3,\partial_4)\partial_1 &=& \partial_3 f_2\partial_4, \quad R(\partial_3,\partial_4)\partial_2 = (-\partial_4 f_4 - f_4 f_6)\partial_4 \\ R(\partial_3,\partial_4)\partial_3 &=& (-\partial_4 f_5 - f_5 f_6)\partial_4, \quad R(\partial_3,\partial_4)\partial_4 = \partial_3 f_6\partial_4. \end{array}$$

On montre par des calculs simples que les composantes non nulls du tenseur de Ricci sont données par :

$$\begin{array}{rcl} Ric(\partial_1,\partial_1) &=& \partial_1 f_2 - \partial_4 f_1 + f_2^2 - f_1 f_6, \quad Ric(\partial_1,\partial_2) = \partial_2 f_2, \\ Ric(\partial_1,\partial_3) &=& \partial_3 f_2, \quad Ric(\partial_2,\partial_2) = -\partial_4 f_3 - f_3 f_6, \\ Ric(\partial_2,\partial_3) &=& -\partial_4 f_4 - f_4 f_6, \quad Ric(\partial_3,\partial_2) = -\partial_4 f_4 - f_4 f_6, \\ Ric(\partial_3,\partial_3) &=& -\partial_4 f_5 - f_5 f_6, Ric(\partial_4,\partial_1) = \partial_1 f_6 - \partial_4 f_2, \\ Ric(\partial_4,\partial_2) &=& \partial_2 f_6, \quad Ric(\partial_4,\partial_3) = \partial_3 f_6, \end{array}$$

Proposition 2.3.1. *[29] La connection affine ∇ définie en (2.16) est anti-symétrique si les fonctions f_2 et f_6 ont la forme suivante :*

$$f_2 = P(u_1, u_4) \quad et \quad f_6 = Q(u_1, u_4)$$

et $f_i, i = 1, \ldots, 6$ sont solution des équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \partial_1 f_2 - \partial_4 f_1 + f_2^2 - f_1 f_6 = 0 \quad \partial_4 f_3 + f_3 f_6 & = & 0 \\ \partial_4 f_5 + f_5 f_6 = 0 \quad \partial_1 f_6 - \partial_4 f_2 = 0 \quad \partial_4 f_4 + f_4 f_6 & = & 0. \end{array}$$

Soit $X = \sum_{i=1}^4 \alpha_i X^i$ un champ de vecteurs sur (M, ∇) ; l'opérateur de Jacobi affine est donné par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}_{\mathcal{R}}(X)\partial_i & = & \alpha_1^2 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_1)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_2)\partial_1 + \alpha_1\alpha_3 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_3)\partial_1 \\ & + & \alpha_1\alpha_4 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_4)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_1)\partial_2 + \alpha_2^2 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_2)\partial_2 \\ & + & \alpha_2\alpha_3 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_3)\partial_2 + \alpha_2\alpha_4 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_4)\partial_2 + \alpha_1\alpha_3 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_1)\partial_3 \\ & + & \alpha_2\alpha_3 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_2)\partial_3 + \alpha_3^2 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_3)\partial_3 + \alpha_3\alpha_4 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_4)\partial_3 \\ & + & \alpha_1\alpha_4 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_1)\partial_4 + \alpha_2\alpha_4 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_2)\partial_4 + \alpha_3\alpha_4 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_3)\partial_4 \\ & + & \alpha_4^2 \mathcal{R}(\partial_i, \partial_4)\partial_4 \end{array}$$

l'expression matricielle de l'opérateur de Jacobi associé au vecteur X est

$$\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

où

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & -\alpha_1\alpha_2\partial_2 f_1 - \alpha_1\alpha_3\partial_3 f_1 + \alpha_2^2(\partial_1 f_3 + f_2 f_3) \\ & & +2\alpha_2\alpha_3(\partial_1 f_4 + f_2 f_4) + \alpha_3^2(\partial_1 f_5 + f_2 f_5) \\ a_2 & = & \alpha_1^2\partial_2 f_1 - \alpha_1\alpha_2(\partial_1 f_3 + f_2 f_3) + \alpha_2\alpha_3(\partial_2 f_4 - \partial_3 f_3) \\ & & -\alpha_1\alpha_3(\partial_1 f_4 + f_2 f_4) + \alpha_3^2(\partial_2 f_5 - \partial_3 f_4) \\ a_3 & = & \alpha_1^2\partial_3 f_1 - \alpha_1\alpha_2(\partial_1 f_4 + f_2 f_4) - \alpha_2^2(\partial_2 f_4 - \partial_3 f_3) \\ & & -\alpha_1\alpha_3(\partial_1 f_5 + f_2 f_5) - \alpha_2\alpha_3(\partial_2 f_5 - \partial_3 f_4) \end{array}$$

Le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine est :

$$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{J}_{\mathcal{R}}(X) = \lambda^4. \tag{2.18}$$

On a le résultat suivant :

Proposition 2.3.2. *[29] soit (M, ∇) une variété affine de dimension 4 munie de la connexion sans torsion donnée en (2.16). Alors (M, ∇) est affine Osserman si et seulement si le tenseur de Ricci est anti-symétrique.*

Exemple 2.3.1. *La connextion suivante sur* $\mathbb{R}^4$ *dont les coefficients non nuls sont donnés par :*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_4 = (u_1 + u_4)\partial_4 \quad et \quad \nabla_{\partial_4}\partial_4 = (u_1 u_4)\partial_4 \tag{2.19}$$

est affine d'Osserman.

2.4 Exemple de métriques de Walker-Osserman de signature $(3,3)$ et de signature $(4,4)$

Dans cette section, nous utilisons le résultat suivant pour construire des exemples de métriques pseudo-riemanniennes de Walker-Osserman.

Théorème 2.4.1. *([25]) Soit* (T^*M, g_∇) *le fibré cotangent d'une variété affine* (M,∇) *muni de l'extension riemannienne* g_∇ *de la connexion affine* ∇*. Alors* (T^*M, g_∇) *est une variété pseudo-riemannienne d'Osserman si et seulement si* (M,∇) *est un espace affine d'Osserman.*

2.4.1 Exemple de métriques de Walker-Osserman de signature $(3,3)$

Soit (u_1,u_2,u_3), un système de coordonnées locales sur une 3-variété affine (M,∇). L'extension riemannienne est la métrique pseudo-riemannienne notée $\bar{g}$ sur le fibré cotangent T^*M de signature $(3,3)$ définie par :

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\partial_1,\partial_4) &= \bar{g}(\partial_2,\partial_5) = \bar{g}(\partial_3,\partial_6) = 1,\\
\bar{g}(\partial_1,\partial_1) &= -2u_4 f^1_{11} - 2u_5 f^2_{11} - 2u_6 f^3_{11},\\
\bar{g}(\partial_1,\partial_2) &= -2u_4 f^1_{12} - 2u_5 f^2_{12} - 2u_6 f^3_{12},\\
\bar{g}(\partial_1,\partial_3) &= -2u_4 f^1_{13} - 2u_5 f^2_{13} - 2u_6 f^3_{13},\\
\bar{g}(\partial_2,\partial_2) &= -2u_4 f^1_{22} - 2u_5 f^2_{22} - 2u_6 f^3_{22},\\
\bar{g}(\partial_2,\partial_3) &= -2u_4 f^1_{23} - 2u_5 f^2_{23} - 2u_6 f^3_{23},\\
\bar{g}(\partial_3,\partial_3) &= -2u_4 f^1_{33} - 2u_5 f^2_{33} - 2u_6 f^3_{33}.
\end{aligned}$$

Considérons la connexion affine d'Osserman (2.6). L'extension riemannienne $\bar{g}$ sur $\mathbb{R}^6$ de la connexion (2.6) est de la forme :

$$\bar{g} = \begin{pmatrix}
-2u_5u_1u_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & -2u_5(u_1+u_3) & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Les composantes non nulles de la dérivée covariante de $\bar{g}$ sont données par

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\partial_1}\partial_1 &= u_1u_3\partial_2 - u_3u_5\partial_4 + u_1u_5\partial_6, \quad \bar{\nabla}_{\partial_1}\partial_3 = -u_1u_5\partial_4 - u_5\partial_6,\\
\bar{\nabla}_{\partial_1}\partial_5 &= -u_1u_3\partial_4, \bar{\nabla}_{\partial_3}\partial_3 = (u_1+u_3)\partial_2 + u_5\partial_4 - u_5\partial_6,\\
\bar{\nabla}_{\partial_3}\partial_5 &= -(u_1+u_3)\partial_6.
\end{aligned}$$

On obtient de même, les composantes non nulles de l'opérateur de courbure de $(\mathbb{R}^6, \bar{g})$ par :

$$\begin{aligned}
R(\partial_1,\partial_3)\partial_1 &= -u_1\partial_2; \quad R(\partial_1,\partial_3)\partial_3 = \partial_2; \quad R(\partial_1,\partial_3)\partial_5 = u_1\partial_4 - \partial_6;\\
R(\partial_1,\partial_5)\partial_1 &= -u_1\partial_6; \quad R(\partial_1,\partial_5)\partial_3 = u_1\partial_4; \quad R(\partial_3,\partial_5)\partial_1 = \partial_6;\\
R(\partial_3,\partial_5)\partial_3 &= -\partial_4.
\end{aligned}$$

Si $X = \sum_{i=1}^{6}\alpha_i\partial_i$ est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^6$, alors la matrice de l'opérateur de Jacobi $J_{\mathcal{R}}(X) = \mathcal{R}(\cdot, X)X$ est donnée par

$$(J_{\mathcal{R}}(X)) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A^t \end{pmatrix},$$

où A est la matrice de taille 3×3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-u_1 & 0 & u_1-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

et B est la matrice de taille 3×3 définie par

$$B = \begin{pmatrix} 2u_1 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1-u_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors on a :

Proposition 2.4.1. *[17] L'extension riemannienne $\bar{g}$ définie par (2.20) est une métrique Walker Osserman de signature* $(3,3)$.

Considérons la connexion affine donnée dans l'exemple (2.15). Son extension riemannienne $\bar{g}$ sur $\mathbb{R}^6$ est définie par :

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u_4u_2u_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2u_4(u_2+u_3) & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Proposition 2.4.2. *L'extension riemannienne $\bar{g}$ définie par (2.21) est une métrique de Walker-Osserman de signature* $(3,3)$.

2.4.2 Exemple de métrique de Walker-Osserman de signature $(4,4)$

Soit (u_1,u_2,u_3,u_4), un système de coordonnées locales sur la variété affine (M,∇) de dimension 4. On note $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k f_{ij}^k \partial_k$ pour $i,j,k = 1,2,3,4$ pour définir les coefficient de la connexion affine ∇. Soit $\omega = u_5 du_1 + u_6 du_2 + u_7 du_3 + u_8 du_4 \in T^*M$: (u_5,u_6,u_7,u_8) sont les coordonnées du fibré dual. L'extension riemannienne est la métrique pseudo-riemannienne $\bar{g}$ sur le fibré cotangent T^*M de signature $(4,4)$ définie en posant :

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(\partial_1,\partial_5) &= \bar{g}(\partial_2,\partial_6) = \bar{g}(\partial_3,\partial_7) = \bar{g}(\partial_4,\partial_8) = 1,\\
\bar{g}(\partial_1,\partial_1) &= -2u_5 f_{11}^1 - 2u_6 f_{11}^2 - 2u_7 f_{11}^3 - 2u_8 f_{11}^4,\\
\bar{g}(\partial_1,\partial_2) &= -2u_5 f_{12}^1 - 2u_6 f_{12}^2 - 2u_7 f_{12}^3 - 2u_8 f_{12}^4,\\
\bar{g}(\partial_1,\partial_2) &= -2u_5 f_{12}^1 - 2u_6 f_{12}^2 - 2u_7 f_{12}^3 - 2u_8 f_{12}^4,\\
\bar{g}(\partial_1,\partial_3) &= -2u_5 f_{13}^1 - 2u_6 f_{13}^2 - 2u_7 f_{13}^3 - 2u_8 f_{13}^4,\\
\bar{g}(\partial_1,\partial_4) &= -2u_5 f_{14}^1 - 2u_6 f_{14}^2 - 2u_7 f_{14}^3 - 2u_8 f_{14}^4,\\
\bar{g}(\partial_2,\partial_2) &= -2u_5 f_{22}^1 - 2u_6 f_{22}^2 - 2u_7 f_{22}^3 - 2u_8 f_{22}^8,\\
\bar{g}(\partial_2,\partial_3) &= -2u_5 f_{23}^1 - 2u_6 f_{23}^2 - 2u_7 f_{23}^3 - 2u_8 f_{23}^4,\\
\bar{g}(\partial_2,\partial_4) &= -2u_5 f_{24}^1 - 2u_6 f_{24}^2 - 2u_7 f_{24}^3 - 2u_8 f_{24}^4,\\
\bar{g}(\partial_3,\partial_3) &= -2u_5 f_{33}^1 - 2u_6 f_{33}^2 - 2u_7 f_{33}^3 - 2u_8 f_{33}^4,\\
\bar{g}(\partial_3,\partial_4) &= -2u_5 f_{34}^1 - 2u_6 f_{34}^2 - 2u_7 f_{34}^3 - 2u_8 f_{34}^4,\\
\bar{g}(\partial_4,\partial_4) &= -2u_5 f_{44}^1 - 2u_6 f_{44}^2 - 2u_7 f_{44}^3 - 2u_8 f_{44}^4.
\end{aligned}
$$

Considerons la connexion affine donnée en (2.19). Son extension Riemannienne $\bar{g}$ sur $\mathbb{R}^8$ est definie par :

$$
\bar{g} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & -2u_8(u_1+u_4) & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-2u_8(u_1+u_4) & 0 & 0 & -2u_8u_1u_4 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{2.22}
$$

Proposition 2.4.3. *L'extension riemannienne $\bar{g}$ définie par (2.22) est une métrique Walker-Osserman de signature* $(4,4)$.

La géométrie de Walker est intimement liée à de nombreuses questions en physique mathématique. Notons que l'extension riemannienne est nécessairement une métrique de Walker. C'est un remarquable fait que les métriques de Walker satisfaisant à certaines conditions de courbure naturelles sont localement des extentions riemanniennes,conduisant ainsi le problème de classification correspondant à une tâche en géométrie affine comme montré dans [5]. Chaichi et al. [6] ont étudié les conditions pour qu'une métrique de Walker soit Einstein, Osserman, ou conforment plate localement et ont obtenu ainsi des solutions exates aux équations d'Einstein pour une variété de Walker restreinte.

CHAPITRE TROIS

VARIETES DE FINSLER OSSERMAN

Dans ce chapitre, nous formulons un problème de type d'Osserman sur une variété de Finsler, ce qui nous amène à étudier l'opérateur de Jacobi associé en Finsler. La première section de ce chapitre rappelle l'approche intrinsèque du théorème d'existence et d'unicité de la connexion de Chern developpée dans [32]. Les objects géométriques associés à la connexion de Chern sont aussi présentés. A la deuxième section de ce chapitre, nous introduisons la notion de l'opérateur de Jacobi en géométrie de Finsler et la notion de variété de Finsler presque Osserman. Nous établissons quelques propriétés sur les variétés de Finsler presque Osserman. A la dernière section de ce chapitre, un exemple d'une connexion de Chern qui est Finsler presque Osserman est donné. Les resultats contenus dans ce chapitre ont fait l'object d'une publication [30].

3.1 Formulation intrinsèque de la connexion de Chern

Soit (M, F) une variété finslérienne. Soit la submersion π définie par :

$$\begin{array}{rcl} \pi : TM_0 & \to & M \\ (x,y) & \mapsto & \pi(x,y) = x. \end{array}$$

On note par $\mathcal{V}$ le noyau de la différentielle de π ($\mathcal{V} = \ker \pi_*$) et $\mathcal{V}$ son complémentaire appelé sous-fibré horizontal, Ainsi nous avons la décomposition suivante :

$$T(TM_0) = TTM_0 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}.$$

Le sous-fibré vectoriel $\mathcal{V}$ appelé sous-fibré vertical est canoniquement déterminé, tandis que le sous-fibré horizontal ne l'est pas. Le choix d'un sous-fibré horizontal complémentaire à $\mathcal{V}$ conduit à la définition suivante :

Définition 3.1.1. *Une connexion de Finsler-Ehresmann relativement à la submersion $\pi : TM_0 \to M$ est le noyau de la 1-forme θ_c à valeurs dans π^*TM définie par :*

$$\theta_c := \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{1}{F}\Big(dy^i + N^i_j dx^j\Big).$$

De façon équivalente, on écrit :

$$\mathcal{H} = \{X \in \Gamma(TTM_0); \theta_c(X) = 0\}.$$

Soient E un fibré vectoriel au dessus de TM_0 et E^* son dual. On note par $\Gamma^p(E)$ avec $p \in \mathbb{N}$, l'espace des sections du fibré $E^p := \otimes^p E$ au dessus de TM_0, avec la convention que $\Gamma^0(E) = C^\infty(TM_0)$.

Définition 3.1.2. *Soit (M, F) une variété finslerienne. Un tenseur finslerien de type $(p, q; r)$ sur M est l'application*

$$T : \Gamma^p(\pi^*TM) \times \Gamma^q(TTM_0) \to \Gamma^r(\pi^*TM)$$

qui est $C^\infty(TM_0)$-linéaire en chaque variable, selon la variété de base considérée de π^*TM.

Remarque 3.1.1. *Les tenseurs finsleriens peuvent être décomposés en composantes horizontales et verticales grace à la décomposition suivante : $TTM_0 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$.*
Ainsi on a :

(i). Si T est un tenseur de type $(p; 1; r)$ alors on a la décomposition suivante :

$$T = T^H + T^V$$

avec

$$\begin{aligned} T^H(w_1, \ldots, w_p, X) &= T(w_1, \ldots, w_p, X^H) \\ T^V(w_1, \ldots, w_p, X) &= T(w_1, \ldots, w_p, X^V) \end{aligned}$$

(ii). Si T est un tenseur de type $(p, 2; q)$ alors il admet la décomposition suivante :

$$T = T^{HH} + T^{HV} + T^{VH} + T^{VV}$$

où

$$\begin{aligned} T^{HH}(w_1, \ldots, w_p, X, Y) &= T(w_1, \ldots, w_p, X^H, Y^H) \\ T^{HV}(w_1, \ldots, w_p, X, Y) &= T(w_1, \ldots, w_p, X^H, Y^V) \\ T^{VH}(w_1, \ldots, w_p, X, Y) &= T(w_1, \ldots, w_p, X^V, Y^H) \\ T^{VV}(w_1, \ldots, w_p, X, Y) &= T(w_1, \ldots, w_p, X^V, Y^V) \end{aligned}$$

avec $w_1 \ldots w_p \in \Gamma(\pi^*TM)$ et $X, Y \in \Gamma(TTM_0)$.

Il faut noter qu'on peut faire la décomposition suivant une variable, même si on est en présence d'un tenseur de type $(p,2;r)$, c'est-à-dire que pour tout tenseur T de type $(p,2;r)$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} T(w_1,\ldots,w_p,X,Y) &= T^H(w_1,\ldots,w_p,X,Y)+T^V(w_1,\ldots,w_p,X,Y) \\ &= T(w_1,\ldots,w_p,X^H,Y)+T(w_1,\ldots,w_p,X^V,Y) \end{aligned}$$

Remarque 3.1.2. *Nous pouvons aussi associer à tout tenseur T de $(1,q;r)$ deux types de tenseurs T_1 et T_2 de types $(0,q+1;r)$ qui sont soit horizontal ou vertical suivant la $(q+1)$-ième variable rajoutée ; c'est-à-dire, si*

$$T(w,X_1,\ldots,X_q)\in\Gamma^r(\pi^*TM),\quad w\in\Gamma(\pi^*TM),\quad X_i\in\Gamma(TTM_0)$$

alors, comme toute section $w\in\Gamma(\pi^*TM)$ possède des antécédants par π_* et par θ, on peut donc définir deux $(0,q+1;r)$-tenseurs T_1 et T_2 donnés par :

$$\begin{aligned} T_1(X,X_1,\ldots,X_q) &= T(\pi_*X,X_1,\ldots,X_q) \\ T_2(X,X_1,\ldots,X_q) &= T(\theta(X),X_1,\ldots,X_q) \end{aligned}$$

On peut constater alors que T_1 traduit la composante horizontale de T et que T_2 traduit sa composante verticale.

Définition 3.1.3. *[32] Soit T un $(p,q;0)$-tenseur Finslerien (resp. un $(p,q;1)$-tenseur Finslerien) et $X\in\Gamma(TTM_0)$. Alors, la dérivée covariante de T dans la direction de X est donnée par :*

$$\begin{aligned} \nabla_X T(w_1,\ldots,w_p,X_1,\ldots,X_p) &:= X.T(w_1,\ldots,w_p,X_1,\ldots,X_p) \\ &- \sum_{i=1}^{n} T(w_1,\ldots,\nabla_X w_p,X_1,\ldots,X_p) \\ &- \sum_{i=1}^{n} T(w_1,\ldots,w_p,X_1,\ldots,(\nabla_X\pi_*X_i)^H\ldots,X_p) \\ &- \sum_{i=1}^{n} T(w_1,\ldots,w_p,X_1,\ldots,(\nabla_X\pi_*X_i)^V,\ldots,X_p) \end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla_X T$ est aussi un $(p,q;0)$-tenseur Finslerien (resp.$(p,q;1)$-tenseur Finslerien) et ∇T un $(p,q+1;0)$-tenseur Finslerien (resp.un $(p,q+1,1)$-tenseur Finslerien), par le moyen de la formule suivante :

$$\nabla T(w_1,\ldots,w_p,X,X_1,\ldots,X_q) := \nabla_X T(w_1,\ldots,w_p,X_1,\ldots,X_q) \tag{3.1}$$

Il serait important d'introduire une notion de contraction qui prend en compte le caractère mixte des tenseurs que nous manipulons en géométrie de Finsler. Par des contractions du $(2,2;0)$-tenseur de courbure R, nous pouvons définir certains avatars de la courbure de Ricci et la courbure scalaire usuelle.

Définition 3.1.4. *[32] On appelle contraction naturelle du tenseur T de type $(p,q;r)$ d'ordre (k,m), $1 \leq k \leq p$; $1 \leq m \leq r$, le tenseur $C_N^{(k,m)}T$ défini par :*

(i). $C_N^{(k,m)}T$ est de type $(p-1,q;r-1)$;

(ii). Dans une base, les composantes de $C_N^{(k,m)}T$ sont les composantes de T où le k-ieme indice cavariant relativement au fibré pull-back et le m-ieme indice contravariant sont égalisés puis sommés.

Définition 3.1.5. *[32] On appelle contraction directionnelle du tenseur T de type $(p,q;r)$ d'ordre (h,m), $1 \leq h \leq p$; $1 \leq m \leq r$, le tenseur $C_D^{(h,m)}T$ défini par :*

(i). $C_D^{(h,m)}T$ est de type $(p,q-1;r-1)$;

(ii). Dans une base ; les composantes de $C_D^{(h,m)}T$ sont les composantes de T où le h-ieme indice covariant relativement au fibré TTM_0 et le m-ieme indice contravariant sont égalisés puis sommés.

Remarque 3.1.3. *La contraction directionnelle, prend en compte la décomposition de TTM_0 en sous-fibrés horizontal et vertical, de sorte que la construction directionnelle se traduit par la somme des contractions dans la direction horisontale $C_H^{(k,m)}T$ et verticale $C_V^{(k,m)}T$.*

Définition 3.1.6. *Soient T_1 et T_2 deux tenseurs finsleriens de types $(p,q;r)$ et $(s,t;u)$ respectivement. Le produit tensoriel de T_1 et T_2 est le tenseur finslerien $T_1 \otimes T_2$ de type $(p+s,q+t;r+u)$, défini par :*

$$\begin{aligned}(T_1 \otimes T_2)(w^1,\dots,w^r,\eta^1,\dots,\eta^u,\mu_1,\dots,\mu_p,\nu_1\dots,\nu_s,X_1,\dots,X_q,Y_1,\dots,Y_t) = \\ T_1(w^1,\dots,w^r,\mu_1,\dots,\mu_p,X_1,\dots,X_q)T_2(\eta^1,\dots,\eta^u,\nu_1\dots,\nu_s,Y_1,\dots,Y_t)\end{aligned}$$

où $w,\eta \in \Gamma(\pi^*TM)$, $\mu,\nu, \in \Gamma(\pi^*T^*M)$ et $X,Y \in \Gamma(TTM_0)$.

Remarque 3.1.4. *Grace à l'existence d'une identification naturelle du fibré π^*TM avec les fibrés $\mathcal{H}TM_0$ et $\mathcal{V}TM_0$, on peut donner une écriture du tenseur de Ricci horizontal comme une certaine trace d'endomorphisme de fibré vectoriel suivant le tenseur fondamental :*

$$Ric^H(w,X) = trace_g(\eta \to R(X,\eta^H)w)$$

où $w,\eta \in \Gamma(\pi^*TM)$ et $X \in \mathcal{H}TM_0$

Nous rappelons ici la formulation koszulienne de l'existence de la connexion de Chern proposée dans [32].

Théorème 3.1.1. *[32] Soient (M,F) une variété finslerienne et g le tenseur fondamental de F. Il existe une unique connexion linéaire ∇ sur π^*TM telle que pour tout $X,Y \in \Gamma(TTM_0)$ et $\xi,\eta \in \Gamma(\pi^*TM)$, on a :*

(i). symétrie :

$$\nabla_X \pi_* Y - \nabla_Y \pi_* X = \pi_*[X, Y];$$

(ii). la presque g-compatibité

$$(\nabla_X g)(\xi, \eta) = 2A(\theta(X), \xi, \eta).$$

où A est le tenseur de cartan. Elle est appelée connexion de Chern.

La connexion de Chern est une connexion linéaire définie sur un fibré pull-back dont la base est TM_0 . Elle n'est pas une connexion sur le fibré tangent TM de la variété M, mais elle joue en géométrie finslerienne le même rôle que la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne. A l'instart de la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne, la connexion de Chern ne possède pas de torsion, mais elle obeït à des conditions de presque g-compatibilité. Le formalisme koszulien de la connexion de Chern, facilite la compéhension des objets géométriques qui lui sont associés.

Définition 3.1.7. *[32] Le tenseur de coubure complète, $\Omega : \Gamma(TTM_0) \times \Gamma(TTM_0) \to \Gamma(\pi^* TM)$ associé à la connexion de Chern ∇, est défini par :*

$$\Omega(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]} \xi \tag{3.2}$$

où $X, Y \in \Gamma(TTM_0)$ et $\xi \in \Gamma(\pi^* TM)$. Pour $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a :

$$\Omega(X, Y)\xi = \xi^i \Omega(X, Y) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.3}$$

Par la décomposition de $TTM_0 \cong \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ et la propriété d'additivité de la connexion de Chern relativement à l'argument directionnel, on a :

$$\nabla_X = \nabla_{X^H + X^V} = \nabla_{X^H} + \nabla_{X^V} \tag{3.4}$$

où X^H et X^V désignent respectivement les composantes horiontale et verticale de X. Ce qui permet de décomposer la courbure complète Ω en trois termes :

$$\Omega(X, Y)\xi = \Omega(X^H, Y^H)\xi + \Omega(X^H, Y^V)\xi + \Omega(X^V, Y^H)\xi + \Omega(X^V, Y^V)\xi \tag{3.5}$$

où $\Omega(X^H, Y^H)$ est le terme purement horizontal, $\Omega(X^V, Y^V)$ est le terme purement vertical et les termes mixtes $\Omega(X^H, Y^V)$ et $\Omega(X^V, Y^H)$. Nous utiliserons les notations usuelles R, P et Q pour désigner respectivement le $hh-$ tenseur, le $hv-$tenseur et le $vv-$tenseur de courbure de la connexion de Chern. Ainsi pour tous $X, Y \in \Gamma(TTM_0)$ on a :

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \Omega(X^H, Y^H)\xi \\ P(X, Y)\xi &= \Omega(X^H, Y^V)\xi + \Omega(X^V, Y^H)\xi \\ Q(X, Y)\xi &= \Omega(X^V, Y^V)\xi. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Remarque 3.1.5. *Par la symétrie de la connexion de Chern, la distribution verticale $\mathcal{V}TM_0$ est intégrable, donc Q est identiquement nul. Ainsi le tenseur de courbure complète Ω s'exprime uniquement en fonction de R et P par la relation :*

$$\Omega(X,Y)\xi = R(X,Y)\xi + P(X,Y)\xi \tag{3.7}$$

où $X, Y \in \Gamma(TTM_0)$ et $\xi \in \Gamma(\pi^*TM)$.

Par Le tenseur fondamental de la structure finslérienne, nous avons comme en géométrie riemannienne un équivalent du tenseur de courbure complète de type $(2,2,0)$, défini pour tout $\xi, \eta \in \Gamma(\pi^*TM)$ et $X, Y \in \Gamma(TTM_0)$ par :

$$\Omega(\xi,\eta,X,Y) = R(\xi,\eta,X,Y) + P(\xi,\eta,X,Y). \tag{3.8}$$

On déduit les équivalents R et P de la $hh-$ courbure et de la courbure mixte respectivement, de types $(2,2,0)$ donnés par :

$$\begin{aligned} R(\xi,\eta,X,Y) &= g(R(X,Y)\xi,\eta) \\ P(\xi,\eta,X,Y) &= g(P(X,Y)\xi,\eta) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Proposition 3.1.1. *Soit (M,g) une variété de Finsler. Pour tous $\xi, \eta \in \Gamma(\pi^*TM)$ et $X, Y, Z \in \Gamma(TM_0)$, on a les relations suivantes :*

(i). $\Omega(X,Y)\pi_*Z + \Omega(Y,Z)\pi_*X + \Omega(Z,X)\pi_*Y = 0$

(ii). $\Omega(\xi,\eta,X,Y) + \Omega(\xi,\eta,Y,X) = 0$

(iii). $\Omega(\xi,\eta,X,Y) + \Omega(\eta,\xi,X,Y) = 2(\mathcal{A}(Y,X) - \mathcal{A}(X,Y)) - 2A(\theta([X,Y]),\xi,\eta)$ *où* $\mathcal{A}(Y,X) = A(\theta(Y),\xi,\nabla_X\eta) + A(\theta(Y),\nabla_X\xi,\eta)$.

Définition 3.1.8. *[32] Soit (M,F) une variété de Finsler et R la composante purement horizontale du $(2,2;0)$-tenseur de courbure associée à la connexion de Chern. Alors :*

(i). La courbure de Ricci horizontale, relativement au tenseur fondamental g de F, est le $(1,1,0)$-tenseur noté Ric^H et défini par la relation :

$$Ric^H = C_H^{(2,2)}R = C_N^{(2,1)}C_H^{(2,2)}(R \otimes g^{-1}).$$

(ii). La coubure scalaire horizontale relativement au tenseur fondamental g de F, est la fonction numérique de classe C^∞ sur TM_0 définie par la relation :

$$Scal^H = C_N^{(1,1)}C_V^{(1,2)}(Ric^H \otimes g^{-1}).$$

Remarque 3.1.6. *Il existe une identification naturelle du fibré pull-back π^*TM avec chacun des sous-fibrés* H *et* $\mathcal{V}$. *Ainsi la composante horizontale du tenseur de Ricci est vu comme la trace d'un endomorphisme du fibré vectoriel à partir du tenseur fondamental, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Ric}^H(\xi, X) = \mathrm{Trace}\{\eta \mapsto R(X, \eta^H)\xi\} \tag{3.10}$$

où $\eta, \xi \in \Gamma(\pi^*TM)$ *et* $X \in \Gamma(\mathcal{H})$. *Cette composante horizontale du tenseur de Ricci encore appelée tenseur de Ricci horizonal,est la version du tenseur de Ricci classique de la géométrie riemannienne.*

Il est à noter qu'en géométrie de Finsler, plusieurs connexions standard intervienent : la connexion de Chern , la connexion de Cartan, la connexion Berwald, la connexion de Hashiguchi. Nous allons donné dans ce qui suit, une formulation koszuliènne de ces connexions et nous allons établir une relation globale entre ces connexions et la connexion de Chern.

Connexion de Cartan

Théorème 3.1.2. *[32] Considérons* (M, F) *une variété de Finsler et* g *le tenseur fondamental de F. Il existe une unique connexion linéaire* $\bar{\nabla}$ *sur* π^*TM *telle que pour tous* $X, Y \in \Gamma(TTM_0)$ *et* $\xi, \eta \in \Gamma(\pi^*TM)$ *on a :*

(i). Symétrie

$$\bar{\nabla}_X \pi_* Y - \bar{\nabla}_Y \pi_* X - \pi_*[X, Y] + (A^\sharp(\theta(X), \pi_* Y, \cdot) - A^\sharp(\theta(Y), \pi_* X, \cdot)),$$

(ii). g- compatibilité

$$\bar{\nabla} g = 0,$$

où $A^\sharp(\xi, \eta, \cdot)$ *est une section de* π^*T^*M *définie par :*

$$g(A^\sharp(\xi, \eta, \cdot), \mu) = A(\xi, \eta, \mu), \quad \textit{pour tout} \quad \mu \in \Gamma(\pi^*TM)$$

Corollaire 3.1.1. *[32] La connexion de Cartan* $\bar{\nabla}$ *s'exprime explicitement en fonction de la connexion de Chern* ∇ *par la relation suivante :*

$$\bar{\nabla}_X \pi_* Y = \nabla_X \pi_* Y + A^\sharp(\theta(X), \pi_* Y, \cdot))$$

Connexion de Berwald

Théorème 3.1.3. *[32] Soit* (M, F) *une variété de finsler et* g *le tenseur fondamental de* F, *il existe une unique connexion linéaire* $\bar{\nabla}$ *sur* π^*TM *telle que pour tous* $X, Y \in \Gamma(TTM_0)$ *et* $\xi, \eta \in \Gamma(\pi^*TM)$ *on a :*

(i). Symétrie

$$\bar{\nabla}_X \pi_* Y - \bar{\nabla}_Y \pi_* X = \pi_*[X, Y],$$

(ii). presque g- compatibilité

$$(\bar{\nabla}_X g)(\xi, \eta) = 2A(\theta(X), \xi, \eta) - 2L(\pi_* X, \xi, \eta)$$

où L est le tenseur de Landsberg.

Corollaire 3.1.2. *[32] Les connexions $\bar{\nabla}$ de Berwald et ∇ de Chern sont liées par la relation suivante :*

$$\bar{\nabla}_X \pi_* Y = \nabla_X \pi_* Y + L(\pi_* X, \pi_* Y, \cdot)^\sharp,$$

où $L(\pi_* X, \pi_* Y, \cdot)^\sharp$ est défini par : $g(L(\pi_* X, \pi_* Y, \cdot)^\sharp, \xi) = L(\pi_* X, \pi_* Y, \xi) \quad \forall \xi \in \Gamma(\pi^* TM)$.

Connextion de Hashiguchi.

Théorème 3.1.4. *[32] Soit (M, F) une variété de finsler et g le tenseur fondamental de F, il existe une unique connexion linéaire $\bar{\nabla}$ sur $\pi^* TM$ telle que pour tous $X, Y \in \Gamma(TTM_0)$ et $\xi, \eta \in \Gamma(\pi^* TM)$ on a :*

(i). Symétrie

$$\bar{\nabla}_X \pi_* Y - \bar{\nabla}_Y \pi_* X = \pi_*[X, Y] + A(\theta(X), \pi_* Y, \cdot)^\sharp - A(\theta(Y), \pi_* X, \cdot)^\sharp,$$

(ii). presque g- compatibilité

$$(\bar{\nabla}_X g)(\xi, \eta) = -2L(\pi_* X, \xi, \eta)$$

où $A(\xi, \eta, \cdot)^\sharp$ est la section de $\pi^* TM$ définie par :

$$g(A(\xi, \eta, \cdot)^\sharp, \mu) = A(\xi, \eta, \mu) \quad \forall \quad \mu \in \Gamma(\pi^* TM)$$

Corollaire 3.1.3. *[32] Les connexions $\bar{\nabla}$ de Hashiguchi et ∇ de Chern sont liées par la relation suivante :*

$$\bar{\nabla}_X \pi_* Y = \nabla_X \pi_* Y + A^\sharp(\theta(X), \pi_* Y \cdot) + L^s harp(\pi_* X, \pi_* Y, \cdot),$$

où $L^\sharp$ est définie par : $g(L^\sharp(\pi_* X, \pi_* Y, \cdot), \xi) = L(\pi_* X, \pi_* Y, \xi) \quad \forall \xi \in \Gamma(\pi^* TM)$.

3.2 Variétés de Finsler presque Osserman

Définition 3.2.1. *[30] Soient (M, F) une variété de Finsler munie de la connexion de Chern ∇ et Ω le tenseur de courbure associé à la connexion ∇. L'opérateur de Jacobi-Finsler $J_\Omega(X)$: $\Gamma(TTM_0) \to \Gamma(\pi^*TM)$ associé au vecteur $X \in \Gamma(\pi^*TM)$ est défini par :*

$$J_\Omega(X)Y = \Omega(Y, X)X \tag{3.11}$$

où $Y \in \Gamma(TTM_0)$.

Proposition 3.2.1. *Soit $J_\Omega(X)$ l'opérateur de Jacobi- Finsler d'une variété de Finsler (M, F). Alors :*

$$\mathrm{Trace}_g\{J_\Omega(X)\} = \mathrm{Ric}^H(X, X). \tag{3.12}$$

De la relation (3.7), on a :

$$J_\Omega(X)Y = J_R(X)Y + J_P(X)Y \tag{3.13}$$

où

$$J_R(X)Y = R(Y, X)X, \quad J_P(X)Y = P(Y, X)X \quad \text{et} \quad Y \in \Gamma(TTM_0).$$

L'opérateur $J_R(X)$ (respectivement $J_P(X)$) est appelé R-opérateur de Jacobi- Finsler (P- opérateur de Jacobi-Finsler). De la décomposition $Y = Y^H + Y^V$, on a :

$$J_\Omega(X)Y = R(Y^H, X)X + P(Y^V, X)X \tag{3.14}$$

Définition 3.2.2. *Une variété de Finsler (M, F) est dite R-Finsler presque Osserman en $p \in M$ si le polynôme caractéristique du R-opérateur de Jacobi Finsler $J_R(X)$ est indépendent de $X \in \Gamma(\pi^*TM)$. Le couple (M, F) est dite R-Finsler presque Osserman si (M, F) est R-Finsler presque Osserman en tout point $p \in M$.*

Définition 3.2.3. *Une variété de Finsler (M, F) est dite P-Finsler presque Osserman en $p \in M$ si le polynôme caractéristique du P-opérateur de Jacobi Finsler $J_P(X)$ est indépendent de $X \in \Gamma(\pi^*TM)$. Le couple (M, F) est dite P-Finsler presque Osserman si (M, F) est P-Finsler presque Osserman en tout point $p \in M$.*

Définition 3.2.4. *Une variété de Finsler (M, F) est dite presque Osserman en $p \in M$ si le polynôme caractéristique de $J_\Omega(X)$ est indépendent de $X \in \Gamma(\pi^*TM)$. Le couple (M, F) est dite presque Osserman si (M, F) est presque Osserman en tout point $p \in M$.*

Proposition 3.2.2. *Une variété de Finsler (M, F) est dite presque Osserman en $p \in M$ si et seulement si elle est R-Finsler presque Osserman et P-Finsler presque Osserman en $p \in M$.*

3.3 Connexions de Finsler presque Osserman

3.3.1 Connexions R-Finsler presque Osserman

Considérons la connexion de Chern ∇ suivante sur une variété de Finsler de dimension 2 donnée par :

$$\begin{cases} \nabla_{\delta_1}\partial_1 = f_1\partial_1 \\ \nabla_{\delta_2}\partial_2 = f_2\partial_2 \\ \nabla_{\partial_1}\partial_1 = h_1\partial_1 \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 = h_2\partial_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

Les composantes de l'opérateur de courbure R sont données par :

$$\begin{aligned} R(\delta_1, \partial_1)\partial_1 &= (\delta_1 h_1 - \partial_1 f_1)\partial_1; \quad R(\delta_1, \partial_2)\partial_2 = \delta_1 h_2 \partial_2; \\ R(\delta_1, \partial_1)\partial_2 &= 0; \quad R(\delta_2, \partial_1)\partial_1 = \delta_2 h_1 \partial_1; \\ R(\delta_2, \partial_1)\partial_2 &= -\partial_1 f_2 \partial_2; \quad R(\delta_2, \partial_2)\partial_1 = 0; \\ R(\delta_2, \partial_2)\partial_2 &= (\delta_2 h_2 - \partial_2 f_2)\partial_2; \quad R(\delta_1, \partial_2)\partial_1 = -\partial_2 f_1 \partial_1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Soit $X = \alpha_1\partial_1 + \alpha_2\partial_2$ un vecteur non nul du fibré pull-back, où $\{\partial_i\}$ sont les coordonnées basiques et $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$. Soit $Y = \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2$;

Le R-opérateur de Finsler-Jacobi est défini par

$$J_R(X)Y = R(Y, X)X \quad \text{avec} \quad Y = Y^H \in \mathcal{H}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} J_R(X)\delta_1 &= R(\delta_1, X)X \\ &= \alpha_1 R(\delta_1, X)\partial_1 + \alpha_2 R(\delta_1, X)\partial_2 \\ &= \alpha_1^2 R(\delta_1, \partial_1)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 R(\delta_1, \partial_2)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 R(\delta_1, \partial_1)\partial_2 + \alpha_2^2 R(\delta_1, \partial_2)\partial_2 \\ &= (\alpha_1^2\delta_1 h_1 - \alpha_1^2\partial_1 f_1 - \alpha_1\alpha_2\partial_2 f_1)\partial_1 + (\alpha_2^2\delta_1 h_2)\partial_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_R(X)\delta_2 &= R(\delta_2, X)X \\ &= \alpha_1 R(\delta_2, X)\partial_1 + \alpha_2 R(\delta_2, X)\partial_2 \\ &= \alpha_1^2 R(\delta_2, \partial_1)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 R(\delta_2, \partial_2)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 R(\delta_2, \partial_1)\partial_2 + \alpha_2^2 R(\delta_2, \partial_2)\partial_2 \\ &= (\alpha_1^2\delta_2 h_1)\partial_1 + (-\alpha_1\alpha_2\partial_1 f_2 + \alpha_2^2\delta_2 h_2 - \alpha_2^2\partial_2 f_2)\partial_2 \end{aligned}$$

La matrice du R-opérateur de Jacobi-Finsler dans la base $\{\delta_1, \delta_2\}$ est donnée par :

$$J_R(X) = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & \alpha_1^2\delta_1 h_1 - \alpha_1^2\partial_1 f_1 - \alpha_1\alpha_2\partial_2 f_1 \\ b_1 & = & \alpha_2^2\delta_1 h_2 \\ c_1 & = & \alpha_1^2\delta_2 h_1 \\ d_1 & = & -\alpha_1\alpha_2\partial_1 f_2 + \alpha_2^2\delta_2 h_2 - \alpha_2^2\partial_2 f_2. \end{array}$$

Le polynôme charactéristique $J_R(X)$ est :

$$P(J_R(X)) = \lambda^2 - (a_1 + d_1)\lambda + a_1 d_1 - b_1 c_1 \tag{3.18}$$

Il s'ensuit que la connexion donnée par (3.15) est R-Osserman si et seulement si :

$$\begin{cases} a_1 + d_1 = 0 \\ a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Des calculs simples nous donnent :

$$\begin{cases} \delta_1 h_1 - \partial_1 f_1 = 0 \\ \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 = 0 \\ \delta_2 h_2 - \partial_2 f_2 = 0 \\ \delta_1 h_1 \delta_2 h_2 - \delta_1 h_1 \partial_2 f_2 - \partial_1 f_1 \delta_2 h_2 + \partial_1 h_1 \partial_2 f_2 + \partial_2 f_1 \partial_1 f_2 - \delta_2 h_1 \delta_1 h_2 = 0 \\ (\delta_1 h_1 - \partial_1 f_1)\partial_1 f_2 = 0 \\ (\delta_2 h_2 - \partial_2 f_2)\partial_2 f_1 = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.3.1. *La connexion de Chern (3.15) est R-Finsler presque Osserman si les fonctions f_1, f_2, h_1, h_2 vérifient les relations suivantes :*

$$\begin{cases} \partial_2 f_1 = 0 \\ \partial_1 f_2 = 0 \\ \delta_1 h_1 - \partial_1 f_1 = 0 \\ \delta_2 h_2 - \partial_2 f_2 = 0 \\ -\partial_1 f_1 \delta_2 h_2 + \partial_1 h_1 \partial_2 h_2 - \delta_2 h_1 \delta_1 h_2 = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

3.3.2 Connexions P-Finsler presque Osserman

Considérons la connexion de Chern ∇ suivante sur une variété de Finsler de dimension 2 donnée par :

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\partial_1}\partial_1 = 0 \\ \nabla_{\dot\partial_2}\partial_2 = 0 \\ \nabla_{\partial_1}\partial_1 = h_1\partial_1 \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 = h_2\partial_2; \end{cases} \tag{3.22}$$

Les composantes de l'opérateur de courbure P sont données par :

$$\begin{aligned} P(\dot{\partial}_1, \partial_1)\partial_1 &= \dot{\partial}_1 h_1 \partial_1; \quad P(\dot{\partial}_1, \partial_1)\partial_2 = 0; \\ P(\dot{\partial}_1, \partial_2)\partial_1 &= 0; \quad P(\dot{\partial}_1, \partial_2)\partial_2 = \dot{\partial}_1 h_2 \partial_2; \\ P(\dot{\partial}_2, \partial_1)\partial_1 &= \dot{\partial}_2 h_1 \partial_1; \quad P(\dot{\partial}_2, \partial_1)\partial_2 = 0; \\ P(\dot{\partial}_2, \partial_1)\partial_1 &= 0; \quad P(\dot{\partial}_2, \partial_2)\partial_2 = \dot{\partial}_2 h_2 \partial_2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Le P-opérateur de Finsler Jacobi est défini par

$$J_P(X)Y = P(Y, X)X \quad \text{avec} \quad Y = Y^V \in \mathcal{V} \tag{3.24}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} J_P(X)\dot{\partial}_1 &= P(\dot{\partial}_1, X)X \\ &= \alpha_1 P(\dot{\partial}_1, X)\partial_1 + \alpha_2 P(\dot{\partial}_1, X)\partial_2 \\ &= \alpha_1^2 P(\dot{\partial}_1, \partial_1)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 P(\dot{\partial}_1, \partial_2)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 P(\dot{\partial}_1, \partial_1)\partial_2 + \alpha_2^2 P(\dot{\partial}_1, \partial_2)\partial_2 \\ &= \alpha_1^2 \dot{\partial}_1 h_1 \partial_1 + \alpha_2^2 \dot{\partial}_1 h_2 \partial_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_P(X)\dot{\partial}_2 &= P(\dot{\partial}_2, X)X \\ &= \alpha_1 P(\dot{\partial}_2, X)\partial_1 + \alpha_2 P(\dot{\partial}_2, X)\partial_2 \\ &= \alpha_1^2 P(\dot{\partial}_2, \partial_1)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 P(\dot{\partial}_2, \partial_2)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2 P(\dot{\partial}_2, \partial_1)\partial_2 + \alpha_2^2 P(\dot{\partial}_2, \partial_2)\partial_2 \\ &= \alpha_1^2 \dot{\partial}_2 h_1 \partial_1 + \alpha_2^2 \dot{\partial}_2 h_2 \partial_2 \end{aligned}$$

La matrice du P-opérateur de Jacobi dans la base $\{\dot{\partial}_1, \dot{\partial}_2\}$ est donnée par :

$$J_P(X) = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

avec

$$a_2 = \alpha_1^2 \dot{\partial}_1 h_1 \tag{3.26}$$
$$b_2 = \alpha_2^2 \dot{\partial}_1 h_2 \tag{3.27}$$
$$c_2 = \alpha_1^2 \dot{\partial}_2 h_1 \tag{3.28}$$
$$d_2 = \alpha_2^2 \dot{\partial}_2 h_2 \tag{3.29}$$

Le polynome charactéristique $J_P(X)$ est :

$$P(J_P(X)) = \lambda^2 - (a_2 + d_2)\lambda + a_2 d_2 - b_2 c_2 \tag{3.30}$$

Il s'ensuit alors que la connexion donnée en (3.22) est P-Osserman si et seulement si :

$$\begin{cases} a_2 + d_2 = 0 \\ a_2 d_2 - b_2 c_2 = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

Par des calculs simples on a :

$$\begin{cases} \dot{\partial}_1 h_1 = 0 \\ \dot{\partial}_2 h_2 = 0 \\ \dot{\partial}_1 h_2 = 0 \\ \dot{\partial}_2 h_1 = 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.3.2. *La connexion de Chern (3.22) est P-Finsler presque Osserman si la condition suivante est vérifiée :*

$$\begin{cases} \dot{\partial}_1 h_1 = 0 \\ \dot{\partial}_2 h_2 = 0 \\ \dot{\partial}_1 h_2 = 0 \\ \dot{\partial}_2 h_1 = 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

Démonstration. De (3.20) et (3.32) nous avons le résultat. □

Proposition 3.3.3. *Soit la connexion de Chern ∇ sur une variété de finsler de dimension 2 donnée par :*

$$\begin{cases} \nabla_{\delta_1}\partial_1 = f_1 \partial_1 \\ \nabla_{\delta_2}\partial_2 = f_2 \partial_2 \\ \nabla_{\partial_1}\partial_1 = h_1 \partial_1 \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 = h_2 \partial_2. \end{cases} \tag{3.34}$$

Alors ∇ est Finsler presque Osserman si et seulement si les coefficients de la connexion ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} h_1 &= \phi_1(x_1) + \phi_2(x_2); \quad h_2 = \psi_1(x_1) + \psi_2(x_2); \\ f_1 &= \phi_1(x_1) + p(y_1, y_2); \quad f_2 = \psi_2(x_2) + l(y_1, y_2) \end{aligned}$$

et les fonctions $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ sont solution de l'équation suivante :

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}\frac{\delta \psi_2}{\delta x_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - \frac{\delta \phi_2}{\delta x_2}\frac{\delta \psi_1}{\delta x_1} = 0.$$

Démonstration. Nous notons les fonctions $f_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $f_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $h_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $h_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ par f_1,f_2, h_1, h_2, respectivement.

De la relation (3.33), on a : $h_1 = \phi(x_1, x_2)$ et $h_2 = \psi(x_1, x_2)$. Aussi de (3.21), on a :

$$\partial_2 f_1 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_1 f_1 = \delta_1 h_1 \Rightarrow h_1 = \phi_1(x_1) + \phi_2(x_2) \quad \text{et} \quad f_1 = \phi_1(x_1) + p(y_1, y_2);$$

et

$$\partial_1 f_2 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2 f_2 = \delta_2 h_2 \Rightarrow h_2 = \psi_1(x_1) + \psi_2(x_2) \quad \text{et} \quad f_2 = \psi_2(x_2) + l(y_1, y_2)$$

□

Conclusion et Perspectives

En guise de conclusion, rappelons que cette thèse porte sur deux thématiques de recherche d'actualité. La première thématique est l'étude des variétés affines d'Osserman et la seconde traite des variétés de Finsler d'Osserman. Le point commun est la conjecture d'Osserman. L'objectif est la description et la classification des variétés affines et de finsler qui satisfont la condition d'Osserman.

Dans le Chapitre 2, nous avons commencé par illustrer, l'intérêt de l'étude des variétés affines d'Osserman en rappelant les résultats connus en dimension 2 et les résultats partiels en dimension 3. Ensuite, nous nous sommes focalisés en dimension 3, où nous avons décrit deux familles de connexions affines d'Osserman. Enfin, nous avons étudié une famille de connexions affines d'Osserman sur une variété de dimension 4. Comme application, nous avons exhibé via l'extension riemannienne des exemples de métriques pseudo-riemanniennes Walker-Osserman de signature $(3, 3)$ et de signature $(4, 4)$.

L'autre thème abordé dans cette thèse est l'étude des variétés de Finsler qui satisfont la condition d'Osserman. C'est l'object du chapitre 3. Nous avons commencé par introduire la notion de l'opérateur de Jacobi Finsler et établir quelques unes de ces propriétés. Ensuite nous avons introduit la notion de variété de Finsler presque d'Osserman et donner un exemple d'une famille de connexion de Chern -Osserman en dimension deux.
Il est clair que plusieurs questions restent encore ouvertes autour de cette thèse. Ainsi nous envisageons d'étendre les résultats contenus dans celle-ci en cherchant à :

- Apporter notre contribution à la classification des connexions affines d'Osserman en dimension supérieure.
- Étudier et établir les propriétés de l'operateur de Jacobi Finsler afin d'obtenir des résultats de classification des variéés de Finsler qui satisfont la condition d'Osserman.
- Étudier et établir des exemples de famille de connexions de Chern Osserman en dimension 3 sera aussi l'un de nos objectifs.
- Étudier et établir des exemples de connexion de Berwald- Osserman, Cartan- Osserman et Hachiguchi-Osserman en utilisant la relation intrinsèque qui lie ces connexions à la connexion de Chern.

Ousmane Toudou Issa ©UAM/NIAMEY 2019

Bibliographie

[1] Z. Afini, *Riemann extensions of affine connected spaces*, Quart. J. Math., Oxford Ser., (2), (1954), 5, 312-320.

[2] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, An Introduction to Riemannian-Finsler Geometry. Springer-Verlag, 2000.

[3] H.W.Brinkmann, *Einstein spaces which are mapped conformally on each other*, Math. Ann. 94 (1925), 119-145.

[4] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikcevíc and R. Vázquez-Lorenzo, The geometry of Walker manifolds. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, Morgan and Claypool Publ., Williston, VT 2009.

[5] E. Calvino-Louzao, E. García-Río, P. Gilkey and R. Vázquez-Lorenzo, *The geometry of modified Riemannian extensions*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 465 (2009), 2023-2040

[6] M. Chaichi, E. Garcia-Rio E and Y. Matsushita, *Cuvature properties of four-dimensional Walker metrics*, Class. Quantum Grav., 22 (2005), 559-577.

[7] S. S. Chern and Z. Shen, Riemann-Finsler Geometry. Nankai Tracts in Mathematics. Vol.6, 2005.

[8] Q-S. Chi, *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*, J. Differ. Geom., 28 (1988), 187-202.

[9] Q-S. Chi, *Quaternionic Kähler manifolds and a characterization of two-point homogenous spaces*, Illinois J. Math., 35 (1991), 408-418.

[10] Q-S. Chi *Curvature characterization and classification of rank-one symmetric spaces*, Pacific J. Math., 150 (1991), 31-42.

[11] A. Derdzinski and W. Roter, *Walker's theorem without coordinates*, J. Math. Phys., 47 (2006), 062504, 8pp.

[12] , A. S. Diallo, *Affine Osserman connections on* 2*-dimensional manifolds*, Afr. Dispora J. Math., 11 (2011), (1), 103-109.

[13] A. S. Diallo, Contribution à l'étude des variétés d'Osserman, conformément d'Osserman et affnes d'Osserman, Thèse, IMSP-UAC, 2011.

[14] A. S. Diallo, *The Riemann extension of an affine Osserman connection on* 3*-dimensional manifolds*, Glob. J. Adv. Res. Class. Mod. Geom., 2 (2013), (2), 69-75.

[15] A. S. Diallo and M. Hassirou, *Examples of Osserman metrics of* $(3,3)$*-signature*, J. Math. Sci. Adv. Appl., 7 (2011), (2), 95-103.

[16] A. S. Diallo and M. Hassirou, *Two families of affine Osserman connections on* 3*-dimensional manifolds*, Afr. Diaspora J. Math., 14 (2012), (2), 178-186.

[17] A. S. Diallo, M. Hassirou and O. T. Issa, *Walker Osserman metric of signature* $(3,3)$ Bull. Math. Anal. Appl., 9 (2017), (4), 21-30.

[18] A. S. Diallo, M. Hassirou and O. T. Issa, *Walker Osserman metric of signature* $(3,3)$, Mathematical Structures and Applications : In Honor of Mahouton Norbert Hounkonnou. Springer Nature Switzerland AG 2018. STEAM-H : Science, Technology, Engineering, Agriculture, Mathematics and Health. Editors T. Diagana and B. Toni, (2018), 199-210.

[19] A. S. Diallo, M. Hassirou and I. Katambé, *The twisted Riemannian extension of an affine Osserman connection on* 2*-dimensional manifolds*, Math. Sci. Res. J., 17 (2013),(8), 201-207.

[20] A. S. Diallo, P. G. Kenmogne and M. Hassirou, *Affine Osserman connections which are locally symmetrics*, Glob. J. Adv. Res. Class. Mod. Geom., 3 (2014), (1), 1-6 .

[21] A. S. Diallo, M. Hassirou and I. Katambé, *Affine Osserman connections which are Ricci flat but not flat*, Int. J. Pure Appl. Math., 91, (2014), (3), 305- 312.

[22] A. S. Diallo, M. Hassirou and I. Katambé, *Examples of affine Osserman* 3*-manifolds*, Far East J. Math. Sci. (FJMS), 91, (2014), (3), 1-11.

[23] P. Finsler, *Uber Kurven und Flachen in algeimeinen Raumen*, PhD thesis, Gottingen, Zurich : O Fussli, 120, S. 1918.

[24] E. García-Río, D. N. Kupeli, M. E. Vázquez-Abal and R. Vázquez-Lorenzo, *Affine Osserman connections and their Riemann extensions*, Differential Geom. Appl. 11 (1999), 145-153.

[25] E. Garcia-Rio, D. Kupelli and R. Vazquez-Lorenzo, Osserman Manifold in Semi-Riemannian. Lecture Notes in Mathematics 1777, Springer Verlag, Berlin (2002).

[26] E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikcević and R. Vázquez-Lorenzo, Applications of Affine and Weyl Geometry. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, Morgan and Claypool Publ. 2013

[27] Peter Gilkey, *Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint*, J. Geom. Anal., 4 (1994), 155-158.

[28] P. B. Gilkey, A. Swann and L. Vanhecke, *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator*, Quart. J. Math. Oxford., 46 (1995), 299-320

[29] M. Hassirou, B. Moundio and I. O. Toudou, *On affine Osserman connections*, submitted

[30] M. Hassirou and I. O. Toudou, *Finsler almost Osserman manifolds*,Miskolc Mathematical Notes (MMN), Accepted

[31] S. Helgason, Differential Geometric and Symmetric Spaces. Academic Press, New York, 1962.

[32] , J. S. Mbatakou and L. Todjihoundé, *Conformal change of Finsler-Ehresmann connection*, Appl. Sci., 16 (2014).

[33] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds and Cliffords structures*, Houston J. Math., 29 (2003), 59-75.

[34] Y. Nikolayevski, *Two theorems on Osserman manifolds* Diff. Geom. Appl., 18 (2003), 239-253.

[35] Y. Nikolayevski, *Osserman manifolds of dimension* 8 ; Manuscripta Math., 115 (2004), 31-53.

[36] Y. Nikolayevski, *Osserman conjecture in dimension* $n \neq 8, 16$; Math. Ann., 331 (2005), 505-522.

[37] K. Nomizu and T. Sasaki, Affine Differential Geometry. Cambridge University Press 111, 2008.

[38] R. Osserman *Curvature in the eigthies*, Amer. Math. Monthly., 97 (1990), 731-756

[39] Z. Rakic *On duality principle in Osserman manifold*, Linear Alg. App., 296 (1999), 183-189

[40] B. Riemann, On the hypothesis on which geometry is based. In abhandlungen der koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften in Gottingen 1854.

[41] J. A. Wolf, Spaces of Constant Curvature. MGraw-Hill, New York, 1977

[42] Z. Shen, Lectures on Finsler Geometry. World Scientific Publishing Co. 2001.

[43] A. G. Walker, *Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes*, Quart. J. Math., Oxford Ser., 2 (1950), 69-79.

[44] K. Yano and S. Ishihara, Tangent and cotangent bundle. Pure and Applied Mathematics 16, Marcel Dekker Inc. New York, 1973.