IMHOTEP, VOL. 7, $N^O 1$ (2007), 15-100

SOLUTIONS SEMI-GLOBALES DE PROBLÈMES DE GOURSAT SEMI-LINÉAIRES HYPERBOLIQUES
PARTIE I: SOLUTIONS SEMI-GLOBALES DU SYSTÈME INTÉGRAL DES FORMULES DE KIRCHHOFF ASSOCIÉES

D. E. HOUPA DANGA AND MARCEL DOSSA

Abstract. Le but ultime de ce travail est d'établir pour des systèmes semi-linéaires hyperboliques du second ordre, astreints à des hypothèses de structure assez générales sur les termes non linéaires, et à données initiales portées par la réunion de deux hypersurfaces caractéristiques sécantes, l'existence et l'unicité de la solution définie non seulement dans un voisinage assez petit de la sécante (solution locale, Cf. résultats antérieurs [26], [27], [29], [30]), mais aussi dans un voisinage de la réunion toute entière des hypersurfaces initiales (solution semi-globale). Pour ce faire, on est amené tout d'abord à montrer que le système intégral des formules de Kirchhoff associées au problème considéré admet une unique solution, dans un espace de fonctions continues et bornées, par la méthode du point fixe. Cette solution est définie dans un voisinage de la réunion toute entière des hypersurfaces qui portent les données initiales.

Dans un second article (Partie II), on se propose de combiner le résultat d'existence semi-globale ainsi obtenu pour le système des formules de Kirchhoff aux techniques classiques d'existence locale de [26], [27], [29], [30], [35], [36] dans le but d'établir, dans un cadre d'espaces de Sobolev à poids, des estimations *a priori* pour les solutions locales du problème de Cauchy caractéristique considéré. On peut ainsi déduire le résultat d'existence semi-globale annoncé pour ce problème.

Semiglobal solutions of Goursat problems for some semilinear hyperbolic systems
Part I: Semiglobal solutions of the integral system of associated Kirchhoff's formulae

Our final aim is to prove that for some semilinear hyperbolic systems of the second order with initial data on two characteristic hypersurfaces, and under general hypothesis on the structure of the nonlinear terms, there is a unique solution which is not only defined on a small neighbourhood of the intersection of these hypersurfaces (local solution, Cf. [26] , [27] , [29] , [30]) but is also defined on a neighbourhood of the entire union of those hypersurfaces (semiglobal solution). In order to achieve that goal, we start by proving that the integral system of Kirchhoff's formulae which are associated to the problem we have considered has a unique solution which belongs to a space of continuous and bounded functions by the fixed point

[1]Received by the editors: December 3, 2007.

Mathematics subject Classification 2000: Primary 35L70; Secondary 45G15, 35C15

Key words and phrases: problème de Goursat semi-linéaire, système intégral des formules de Kirchhoff, solution semi-globale.

method. This solution is defined on a neighbourhood of the whole union of the characteristic hypersurfaces on which initial data are given.

In a second paper (Part II), we will combine the so-called semiglobal existence result therefore obtained for the system of Kirchhoff's formulae to classical local existence techniques of [26], [27], [29], [30], [35], [36] in order to establish, in some weighed Sobolev spaces, *a priori* estimates for local solutions of the characteristic Cauchy problem considered. We can thus deduce the semiglobal existence result announced for this problem.

INTRODUCTION GENERALE

Le but final de ce travail est la *résolution semi-globale*, dans un cadre d'espaces de type Sobolev à poids, sous des hypothèses de différentiabilité finie sur les données et des hypothèses de structure assez générales sur les termes non linéaires, de systèmes semi-linéaires hyperboliques du second ordre à données initiales portées par la réunion de deux hypersurfaces caractéristiques sécantes. Le problème ainsi considéré s'appelle un problème de Cauchy caractéristique ou plus précisément un problème de Goursat semi-linéaire.

L'objet d'un problème de Cauchy caractéristique est de résoudre un système d'équations hyperboliques dans un domaine Y délimité par une ou plusieurs hypersurfaces caractéristiques sécantes (comportant éventuellement des singularités) portant les données initiales. Les trois cas de domaines Y souvent considérés sont:

(1) Y est l'intérieur d'un demi-conoïde caractéristique C ([6], [16], [17], [35], [36], [37], [38]);
(2) Y est le domaine délimité par deux hypersurfaces caractéristiques régulières sécantes ([26], [27], [29], [3], [4], [8]);
(3) Y est le domaine de $\mathbb{R}^{n+1}$ délimité par deux demi-conoïdes, caractéristiques C_1 et C_2, tronqués en leur sommet, dont l'un est dirigé vers le futur et l'autre est rétrograde et qui sont sécants suivant une $(n-1)$-surface difféomorphe à la sphère S_{n-1} (Cf. [39], [40]).

Le problème de Cauchy considéré est dit *local* si:

- dans le cas 1., sa solution est recherchée dans un voisinage assez petit du sommet du demi-conoïde C dans Y.
- dans les cas 2. et 3., sa solution est recherchée dans un voisinage assez petit de la sécante des hypersurfaces caractéristiques dans Y.

Le problème est dit *semi-global* si:

- dans le cas 1., sa solution est recherchée dans un voisinage de la totalité du demi-conoïde C dans Y.
- dans les cas 2. et 3., sa solution est recherchée dans un voisinage de la totalité des hypersurfaces caractéristiques dans Y.

Le problème est dit *global* si sa solution est recherchée dans tout le domaine Y.

Les motivations physiques du problème de Cauchy caractéristique proviennent essentiellement de la théorie de la Relativité Générale où ce problème intervient naturellement dans une grande variété de questions relativistes (R. PENROSE [28], Henning MÜLLER zum HAGEN et Hans-Jürgen SEIFERT [26], Alan RENDALL [30]). Il intervient en Relativité Numérique (Jeffrey WINICOUR [34], R. A. ISAACSON et al. [24]), en Cosmologie, dans l'étude de la radiation gravitationnelle émise par les systèmes isolés, dans l'étude des espaces-temps relativistes de type trous noirs, dans l'étude de conjectures célèbres de la Relativité Générale (hypothèse de la censure cosmique, etc...), dans l'étude des propriétés asymptotiques et des propriétés de scattering d'équations physiques.

Les problèmes de Cauchy caractéristiques sont étudiés depuis environ un siècle avec les travaux de pionniers tels D'ADHÉMAR [13], J. HADAMARD [21], M. RIESZ [31], G.F.D. DUFF [18], F. CAGNAC [8]. Dans le cas 1. où l'hypersurface initiale est un demi-conoïde caractéristique C, les résultats récents, les plus significatifs, portant aussi bien sur les problèmes locaux, semi-globaux ou globaux sont dus à F. CAGNAC [7], M. DOSSA [35] , [36] , [37], M. DOSSA et F. TOUADERA [38], M. DOSSA et S. BAH [17]. Dans le cas 3. où l'hypersurface initiale est la réunion de deux demi-conoïdes, tronqués, sécants, G. CACIOTTA et F. NICOLO [39] , [40] ont réussi à démontrer un résultat d'existence globale pour les équations d'Einstein (problème de contraintes initiales + problème de l'Evolution) avec des données initiales petites en norme, en utilisant un double feuilletage isotrope du domaine Y et les techniques géométrico-analytiques de solutions développées dans [41] et [42]. Le cas 2. où l'hypersurface initiale est la réunion de deux hypersurfaces régulières caractéristiques sécantes est celui auquel on s'intéresse dans ce travail. Voici les grandes étapes des travaux effectués dans ce cas. En 1977, H. MÜLLER zum HAGEN et H.-J. SEIFERT [26] ont entrepris une vaste étude de problèmes de Cauchy caractéristiques à données initiales sur la réunion de deux hypersurfaces sécantes dont l'une est caractéristique et l'autre est ou caractéristique (problème de Goursat), ou spatiale (problème mixte spatio-caractéristique) ou temporelle. Leur méthode reposait essentiellement sur l'établissement des inégalités énergétiques pour le problème linéaire associé suivant une méthode de point fixe employée pour les problèmes de Cauchy à données initiales sur une hypersurface spatiale (problème de Cauchy ordinaire) par S. HAWKING et G.F.R. ELLIS [20]. Les insuffisances constatées dans ce travail (voir [15]) ont été résolues par D. CHRISTODOULOU et H. MÜLLER zum HAGEN [10] en 1981, puis H. MÜLLER zum HAGEN [27] en 1990. En 1990, à la suite du travail de F. G. FRIEDLANDER [11] datant de 1973, A. RENDALL [29] publie un résultat d'existence C^∞ sous des hypothèses C^∞ sur les données pour des systèmes hyperquasilinéaires hyperboliques du second ordre; sa méthode est basée sur une réduction du problème de Goursat à un problème de Cauchy ordinaire à données initiales nulles et des arguments de domaine de dépendance; le résultat obtenu est appliqué avec succès aux équations d'Einstein du vide en jauge harmonique en résolvant par la même occasion le problème des contraintes initiales sur les deux hypersurfaces régulières caractéristiques sécantes.

Dans tous les travaux sus-mentionnés, dans le cas 2., la solution obtenue pour le problème de Goursat non linéaire est seulement *locale,* c'est-à-dire qu'elle est définie dans un voisinage assez petit de l'intersection des deux hypersurfaces caractéristiques qui portent les données initiales. On se propose ici de montrer que sous certaines hypothèses de structure assez générales sur les termes non linéaires des équations et *sans hypothèse* *de petitesse sur les normes des données initiales*, la solution du problème de Goursat semi-linéaire existe et est définie dans un voisinage de la réunion toute entière des deux hypersurfaces caractéristiques sécantes qui portent les données initiales. Ce problème de Goursat semi-linéaire, semi-global a été étudié par A. CABET [3] , [4], pour des équations des ondes semi-linéaires, moyennant des hypothèses de structure assez fortes sur les termes non linéaires. Ainsi, pour des termes non linéaires ne comportant aucune dérivée première de la fonction inconnue, l'auteur utilise une méthode de Galerkin avec une décomposition spectrale suivant l'une des directions isotropes; lorsque les termes non linéaires des équations considérées sont essentiellement *linéaires* par rapport à certaines dérivées premières de la fonction inconnue, une méthode itérative basée sur des inégalités énergétiques, des estimations *a priori* et le résultat d'existence C^∞ de RENDALL [29] est utilisé.

Dans le présent travail, pour améliorer les résultats de A. CABET, on adapte une méthode introduite par M. DOSSA et S. BAH [17], pour le problème de Cauchy semi-linéaire, semi-global à données initiales sur un demi-conoïde caractéristique. Sous des hypothèses de structure assez générales sur les termes non linéaires, il s'agissait d'une méthode basée sur des estimations *a priori* établies dans un cadre convenable d'espaces de Sobolev à poids, grâce à une adéquate combinaison du théorème du point fixe de Banach, des résultats d'existence locale établis par M. DOSSA [16] , [35] , [36] et d'un résultat d'existence et d'unicité pour le système intégral des formules de Kirchhoff associées aux équations considérées, établi par S. BAH [1] , [2] .

Pour pouvoir décrire de façon plus précise les résultats obtenus dans les parties I et II de ce travail, ainsi que les méthodes de solution utilisées, il convient d'introduire d'abord quelques notations géométriques.

Notations géométriques

$\mathcal{Y} = \{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 / \ x^0 \geq |x^1| \, ; (x^2, x^3) \in B\}$, où B est un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{S}^w = \left\{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 / \ x^0 = (-1)^{w-1} x^1, (x^2, x^3) \in B\right\}$, $w = 1, 2$.

$\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2$; $\mathcal{T} = \mathcal{S}^1 \cap \mathcal{S}^2$.

Pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{Y}_T = \mathcal{Y} \cap \{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 / \ x^0 \leq T\}$, $\mathcal{S}_T^w = \mathcal{S}^w \cap \{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 / \ x^0 \leq T\}$, $\Sigma_T^w = \mathcal{S}^w \cap \{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 / \ x^0 = T\}$.

Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{P}_{(\sigma)}$ est l'hyperboloïde cylindrique défini par:

$\left\{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 / \ \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 = \sigma^2; (x^2, x^3) \in B\right\}$,

$\mathcal{Y}_{(\sigma)} = \left\{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 / \ |x^1| \leq x^0 \leq \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \sigma^2}; (x^2, x^3) \in B\right\}$,

$G_{T,\sigma} = \mathcal{Y}_{(\sigma)} \cap \{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^4 / \ x^0 = T\}$,

$\mathcal{Y}_{T,\sigma} = \mathcal{Y}_T \cap \mathcal{Y}_{(\sigma)}$, $\mathcal{Y}^{(g)} = \bigcup\limits_{T \in \mathbb{R}_+^*} \mathcal{Y}_{T,g(T)}$, où $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est une application.

Position du problème

On considère le problème de Goursat:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} (E_r) : \ A^{\lambda\mu} (x^\alpha) \, \partial_{\lambda\mu}^2 u_r + f_r (x^\alpha, u_s, \partial_\nu u_s) = 0 \text{ dans } \mathcal{Y}, \\ (C - I) : \ u_r = \varphi_r^w \text{ sur } \mathcal{S}^w, \\ \alpha, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3; \ r, s = 1, 2, ..., N. \end{array} \right.$$

Hypothèse (α)

$A^{\lambda\mu} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times B)$ et l'opérateur différentiel $L \equiv A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\,\partial^2_{\lambda\mu}$ est x^0-hyperbolique avec $A^{00} > 0$ et $A^{ij}X_iX_j$ est définie négative, $i, j = 1, 2, 3$.

Hypothèse (β)

Les f_r sont de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 \times B \times V \times \mathbb{R}^{4N}$, avec V ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Hypothèse $(\mathcal{G})$

$\forall \sigma \in \mathbb{R}^*_+$, $\mathcal{P}_\sigma$ est spatiale pour L.

Hypothèse de structure $(\mathcal{G}_1)$

Les f_r sont des fonctions de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 \times B \times V \times \mathbb{R}^{4N}$ (V ouvert de $\mathbb{R}^N$) et telles que $\forall\ (\omega_s)$ fonctions régulières dans $\mathbb{R}^2 \times B$, la restriction de $f_r(x^\alpha; \omega_s(x^\alpha); \partial_\nu\omega_s(x^\alpha))$ à $\mathcal{S}^w$ est, après simplifications, linéaire par rapport aux dérivées $[\partial_0\omega_s]^w \equiv \partial_0\omega_s\,|_{\mathcal{S}^w}$.

Hypothèse $(\mathcal{C})$

$\forall\ w = 1, 2$, $\mathcal{S}^w$ est une hypersurface caractéristique pour l'opérateur $L \equiv A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\,\partial^2_{\lambda\mu}$.

Les travaux de H. MÜLLER zum HAGEN [27] et A. RENDALL [29] entraînent que, dans un cadre convenable d'espaces de Sobolev non isotropes et sous les hypothèses $(\alpha), (\beta), (\mathcal{C})$, le problème (P) possède une solution unique (u_r) définie dans un domaine $\mathcal{Y}_T$ (T assez petit); $\mathcal{Y}_T$ est un voisinage assez petit de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{Y}$, mais non un voisinage de $\mathcal{S}$ tout entier.

Sous les hypothèses supplémentaires $(\mathcal{G}_1)$ et $(\mathcal{G})$, on se propose de montrer dans ce travail que la solution est en fait définie dans un voisinage de la totalité de l'hypersurface initiale $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{Y}$ (plus précisément dans un domaine $\mathcal{Y}^{(g)}$) et cela sans hypothèses de petitesse sur la norme des données initiales (φ^w).

Les formules de Kirchhoff

Pour obtenir l'existence semi-globale annoncée, l'ingrédient nouveau qu'on a utilisé est le système intégral des formules de Kirchhoff associées au problème (P) et aux équations dérivées des équations (E_r) jusqu'à l'ordre 3. Grâce à une synthèse rigoureuse des thèses de Mmes Y. CHOQUET-BRUHAT [11], J. TOLEN [33] et MM. F. CAGNAC [5], S. BAH [1], on montre que:

1). *Toute solution $u = (u_r)$ suffisamment régulière de (P) vérifie ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 3, le système intégral des formules de Kirchhoff qu'on notera, pour le moment, sommairement sous la forme:*

$$(\mathcal{F}_S)\begin{cases} \forall M_0\,(x_0^\alpha) \in \mathcal{Y}, \\ 4\pi U_S\,(x_0^\alpha) = \displaystyle\iiint_{\left(C^-_{M_0}\right)} \mathcal{H}_S\,(U_R)\,d\mu\left(\left(C^-_{M_0}\right)\right) + \iint_{S_0(M_0)} \mathcal{J}_S\,([U_T])\,d\mu\,(S_0\,(M_0)) \end{cases}$$

où:

$U_S = \left(u_s, \partial_\alpha u_s, \partial^2_{\alpha\beta}u_s, \partial^3_{\alpha\beta\gamma}u_s\right)$; $C^-_{M_0}$ est le demi-conoïde caractéristique pour L issu de M_0 et dirigé vers le passé, $\left(C^-_{M_0}\right)$ est la partie de $C^-_{M_0}$ qui se trouve au dessus de $\mathcal{S}$, $S_0\,(M_0) = C^-_{M_0} \cap \mathcal{S}$.

Les fonctions $\mathcal{H}_S$ et $\mathcal{J}_S$ sont des fonctions de U_R et de certaines fonctions auxiliaires Ω qu'on ne précisera pas ici pour des raisons de simplicité.

2). *Le système intégral $(\mathcal{F}_S)$ admet, dans l'espace de fonctions continues et bornées, une solution unique (U_S) définie dans un domaine causal $\widetilde{\mathcal{Y}}$, voisinage dans $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{S}$* **tout entier.**

En effet, d'après l'hypothèse de structure $(\mathcal{G}_1)$, les restrictions à $\mathcal{S}$ des dérivées jusqu'à l'ordre 3 de la solution éventuelle (u_r) du problème (P), notées (Φ_S) sont déterminées de façon unique sur $\mathcal{S}$ tout entier. La preuve de 1). est alors similaire à celle donnée par Y. CHOQUET-BRUHAT dans sa thèse, dans le cas du problème de Cauchy ordinaire, en intégrant sur $\left(C^-_{M_0}\right)$ des combinaisons linéaires convenables des équations (E_r) et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre 3. La solution du système intégral des formules de Kirchhoff $(\mathcal{F}_S)$ est construite comme point fixe d'une application contractante Θ envoyant une boule centrée en (Φ_S) dans elle-même; pour ce faire on a besoin d'une étude complète de la 2−surface $S_0(M_0)$ pour l'intégrale double qui apparaît dans $(\mathcal{F}_S)$ ainsi que de l'étude du comportement de $\iiint_{\left(C^-_{M_0}\right)} d\mu\left(\left(C^-_{M_0}\right)\right)$ lorsque $M_0(x_0^\alpha)$ tend vers un point de $\mathcal{S}$.

Estimations *a priori*

Sans nuire à la généralité, on peut supposer les données C^∞.

Pour obtenir, l'*existence semi-globale* pour le problème (P), il suffit de montrer que $\forall T \in \mathbb{R}^*_+$, il existe $g(T) \in \mathbb{R}^*_+$ tel que le problème admet, dans le même cadre fonctionnel que les travaux de H. MÜLLER zum HAGEN [27], une unique solution définie dans $\mathcal{Y}_{T,g(T)}$.

Or d'après *2).*, $\forall T \in \mathbb{R}^*_+$, il existe $g(T) \in \mathbb{R}^*_+$ tel que le système intégral des formules de Kirchhoff $(\mathcal{F}_S)$ admet une unique solution $(\overline{v}_r, \overline{v}_{r\alpha}, \overline{v}_{r\alpha\beta}, \overline{v}_{r\alpha\beta\gamma})$ dans l'espace des fonctions continues et bornées dans $\mathcal{Y}_{T,g(T)}$.

D'après H. MÜLLER zum HAGEN [27] et A. RENDALL [29], il existe alors $T_0 \in \,]0,T]$, tel que dans le domaine $\mathcal{Y}_{T_0,g(T)}$, le problème (P) admet une unique solution $u = (u_r) \in C^\infty\left(\mathcal{Y}_{T_0,g(T)}\right)$. D'après *1).*, les fonctions (u_r) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 3 vérifient le système intégral $(\mathcal{F}_S)$. Par unicité de la solution de ce système, on a donc:

$u_r = \overline{v}_r$, $\partial_\alpha u_r = \overline{v}_{r\alpha}$, $\partial^2_{\alpha\beta} u_r = \overline{v}_{r\alpha\beta}$, $\partial^3_{\alpha\beta\gamma} u_r = \overline{v}_{r\alpha\beta\gamma}$.

On en déduit, via l'hypothèse de structure $(\mathcal{G}_1)$, que $\forall T_1 \in \,]0,T]$, toute solution $u = (u_r)$ du problème (P) définie dans $\mathcal{Y}_{T_1,g(T)}$ vérifie l'estimation *a priori*:

$$\|u\| \leq K$$

où la constante K ne dépend que des bornes des $(\overline{v}_r, \overline{v}_{r\alpha}, \overline{v}_{r\alpha\beta}, \overline{v}_{r\alpha\beta\gamma})$.

On en déduit par un raisonnement classique, l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (P) dans $\mathcal{Y}_{T,g(T)}$, donc dans $\mathcal{Y}^{(g)} = \bigcup_{T \in \mathbb{R}^*_+} \mathcal{Y}_{T,g(T)}$.

L'objet du présent article (Partie I du travail) est donc de résoudre le système intégral des formules de Kirchhoff $(\mathcal{F}_S)$.

Plus précisément, pour des systèmes semi-linéaires hyperboliques du second ordre, on considère le problème de Goursat (c'est-à-dire que les données initiales sont portées par la réunion de deux hypersurfaces caractéristiques sécantes) suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_r) : A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\,\partial^2_{\lambda\mu} u_r + f_r(x^\alpha, u_s, \partial_\nu u_s) = 0 \text{ dans } \mathcal{Y} \\ (C-I) : \; u_r = \varphi^w_r \text{ sur } \mathcal{S}^w \end{array} \right. \tag{0.1}$$

où:

- $\alpha, \lambda, \mu, \nu = 0,1,2,3$; $r, s = 1, ..., n$; $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$; $\partial^2_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}$.
- $\mathcal{S}^w$ est une hypersurface caractéristique pour l'opérateur différentiel hyperbolique $L = A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\,\partial^2_{\lambda\mu}$ et d'équation: $x^0 = \phi^w(x^i)$, $i = 1,2,3$; $w = 1,2$.
- $\mathcal{S}^1 \cap \mathcal{S}^2 = \mathcal{T}$ d'équations: $x^0 = 0 = x^1$, $(x^2, x^3) \in B$, où B est un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{Y}$ est un domaine de $\mathbb{R}^4$ délimité par les hypersurfaces $\mathcal{S}^1$ et $\mathcal{S}^2$ dirigé vers les $x^0 \geq 0$.
- $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2$ est d'équation $x^0 = \phi(x^i)$ avec $\phi(x^i) = \phi^w(x^i)$ sur $\mathcal{S}^w$.
- φ_r^w est une fonction donnée définie sur $\mathcal{D}^w \equiv$ projection de $\mathcal{S}^w$ dans l'espace des (x^i) telle que $\varphi_r^1 = \varphi_r^2$ sur $\mathcal{T}$.
- Pour toute fonction v définie dans un domaine de $\mathcal{Y}$, on note $[v]^w$ la restriction de v à $\mathcal{S}^w$.

On se propose d'établir des résultats d'existence *semi-globale* et d'unicité, dans un espace de fonctions continues et bornées, pour le système intégral des formules de Kirchhoff $(\mathcal{F}_S)$ généralisées associées aux équations (E_r).

Cette méthode de résolution de problèmes de Cauchy à travers la résolution préalable d'équations intégrales a été inaugurée par M. RIESZ [31] et S. SOBOLEV [32]. Elle a été par la suite approfondie par Y. CHOQUET-BRUHAT [11], [12] . Dans ses travaux Y. CHOQUET-BRUHAT s'intéresse à des systèmes non linéaires hyperboliques du second ordre à données initiales sur une hypersurface spatiale de $\mathbb{R}^4$. L'auteur s'est d'abord intéressé aux systèmes linéaires pour lesquels on a le résultat suivant:

Pour toute solution de classe C^2 du problème de Cauchy linéaire suivant:

$$(0.2)\begin{cases} (F_r): A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\,\partial^2_{\lambda\mu}u_r + B_r^{\lambda s}(x^\alpha)\,\partial_\lambda u_s + f_r(x^\alpha) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u_r = \varphi_r \text{ sur } \Im \\ \partial_0 u_r = \chi_r \text{ sur } \Im \end{cases}$$

où:

- $\Im$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x^0 = 0$;
- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^4$ voisinage de $\Im$;
- $A^{\lambda\mu}$, $B_r^{\lambda s}$, f_r, φ_r, χ_r sont des fonctions données satisfaisant à des hypothèses de différentiabilité finie;
- $L = A^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}$ est un opérateur différentiel x^0-hyperbolique.

Alors il existe un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$, voisinage de $\Im$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que:

Pour tout $M_0(x_0^\alpha) \in \Omega_1$ on a les formules de Kirchhoff suivantes,

$$(\mathcal{E}_s):\ 4\pi u_s(x_0^\alpha) = \iiint_{\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)} \left([u_r]\,L_s^r + \sigma_s^r\,[f_r]\right) dV + \iint_{\mathcal{S}_0(M_0)} E_s^i \cos\left(n_0, x^i\right) dS$$

avec:

- $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right) \equiv$ partie du demi-conoïde caractéristique $\mathcal{C}^-_{M_0}$ de sommet M_0 dirigé vers le passé et située au dessus de $\Im$;
- $[v] \equiv$ trace sur $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$ d'une fonction v définie dans $\mathbb{R}^4$;
- $\mathcal{S}_0(M_0) \equiv$ 2-surface $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right) \cap \Im$;
- Les σ_s^r, L_s^r sont des fonctions définies sur $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$ qui ne dépendent que des coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B_r^{\lambda s}$ et de leurs dérivées jusqu'aux ordres respectifs trois et deux;
- Les E_s^i sont des fonctions dépendant des données initiales φ_r et χ_r, des fonctions σ_s^r et de leurs dérivées premières.
- Un domaine D de $\mathbb{R}^4$ dont la frontière contient $\Im$ est dit causal si: $\forall M_0 \in D$, $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$ est contenu dans D et M_0 est l'unique point singulier de $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$.

L'auteur prouve ensuite que ces résultats peuvent être généralisés au cas des systèmes hyperboliques non linéaires en adjoignant aux équations (E_r), les équations dérivées jusqu'à un certain ordre fini (suivant la non linéarité du système). Il faudrait ensuite adjoindre aux formules de Kirchhoff déduites, des équations déterminant les fonctions σ_s^r (qui sont alors des inconnues) ainsi que certaines de leurs dérivées.

L'utilisation de cette méthode pour la résolution de problèmes à données initiales caractéristiques a été inaugurée par F. CAGNAC [5], [6]. Ce dernier montre qu'en substituant à $\Im$ un demi-conoïde caractéristique, les équations intégrales $(\mathcal{E}_s)$ restent valables pour des systèmes hyperboliques linéaires du second ordre moyennant des hypothèses supplémentaires sur les données initiales. J. TOLEN [33] a par la suite montré que pour des systèmes hyperboliques linéaires du second ordre à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes, les résultats établis par Y. CHOQUET-BRUHAT [11] et F. CAGNAC [5], [6] restaient valables, en suivant de près les méthodes de [5] dans l'étude des 2-surfaces $S_0\,(M_0)$ qui est nécessaire pour l'étude des intégrales doubles dans les problèmes caractéristiques.

L'utilisation de ces méthodes pour la résolution de problèmes non linéaires à données initiales caractéristiques a été entreprise par S. BAH [1], [2] . Ce dernier montre que pour des équations semi-linéaires à données initiales sur un demi-conoïde caractéristique, les résultats établis par les précédents auteurs restent valables, moyennant des hypothèses de différentiabilité plus fortes sur les données. Dans ses travaux, S. BAH combine les méthodes et résultats de Y. CHOQUET-BRUHAT [11] et F. CAGNAC [5] , [6].

On se propose dans la présente partie du travail d'utiliser les résultats de Y. CHOQUET-BRUHAT [11], F. CAGNAC [5], [6] et J. TOLEN [33] pour étendre aux systèmes semi-linéaires hyperboliques à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes, le système intégral les formules de Kirchhoff généralisées, en suivant les méthodes proposées par S. BAH [1], [2] . Ensuite on va établir pour ce système intégral des formules de Kirchhoff généralisées un résultat d'existence et d'unicité dans un espace de fonctions continues et bornées définies dans un voisinage de la réunion toute entière des deux hypersurfaces portant les données initiales.

On est amené à dériver trois fois les équations (E_r) et à appliquer au nouveau système obtenu, en adjoignant aux équations (E_r) celles obtenues après trois dérivations, les résultats obtenus par J. TOLEN [33] pour des systèmes hyperboliques linéaires. Il faudra alors pour obtenir un système intégral, adjoindre aux formules de Kirchhoff obtenues pour le système d'équations (E_r) et ses dérivées jusqu'à l'ordre trois, les équations déterminant les fonctions auxiliaires σ_s^r ainsi que celles déterminant leurs dérivées jusqu'à l'ordre deux.

Cette partie du travail a été divisée en quatre chapitres:

Chapitre 1: Formules de Kirchhoff et problème de Cauchy ordinaire pour des systèmes linéaires hyperboliques

Il est divisé en six paragraphes: dans les trois premiers paragraphes, on rappelle essentiellement les résultats obtenus par Y. CHOQUET-BRUHAT [11], F. CAGNAC [5], [6]. Dans les trois derniers paragraphes, on complète les résultats obtenus par Y. CHOQUET-BRUHAT [11], F. CAGNAC [5], [6] et S. BAH [1], [2].

Chapitre 2: Problème de Goursat pour des systèmes linéaires hyperboliques

Il est divisé en quatre paragraphes dans lesquels on rappelle et complète les résultats obtenus par J. TOLEN [33] pour des systèmes linéaires à données initiales sur la réunion de deux hypersurfaces caractétistiques sécantes.

Chapitre 3: Formules de Kirchhoff $(\mathcal{F}_S)$ pour le problème de Goursat semi-linéaire

Il est divisé en deux paragraphes: dans le premier paragraphe, on établit le système intégral des formules de Kirchhoff généralisées associées à un système semi-linéaire hyperbolique du second ordre à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes. Dans le second, on détermine les restrictions aux hypersurfaces caractéristiques sécantes des dérivées de toute éventuelle solution du problème de Goursat pour des systèmes non linéaires.

Chapitre 4: Théorème d'existence et d'unicité pour le système intégral ($\mathcal{F}_S$) des formules de Kirchhoff

Il est divisé en trois paragraphes: dans le premier paragraphe, on donne une expression adaptée au problème de Goursat des intégrandes des intégrales doubles des formules de Kirchhoff. Dans le second paragraphe, on énonce des résultats d'existence semi-globale et d'unicité pour le système intégral établi au précédent chapitre. Plus précisément, on énonce le résultat suivant: (voir *théorème* 4.2.2.2 ou *théorème* 2 de [22]):

Sous les hypothèses (α), (γ) *et* $(\mathcal{G}_1)$ *on a:*

(1) *Toute solution* $u = (u_r)$ *de* (0.1) *cinq fois différentiable et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre quatre bornées dans* $\mathcal{Y}$, *vérifie ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre trois le système intégral des formules de Kirchhoff généralisées suivant: pour tout point* $M_0(x_0^\alpha)$ *de* $\mathcal{Y}$,

$$(\mathcal{F}_S)\begin{cases} 4\pi U_S(x_0^\alpha) = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} \sin\lambda_2 d\lambda_2 \int_0^{\psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)} \mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right) d\lambda_1 + \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} \mathcal{J}_S\left([U_T], \Omega_T^R\right) d\lambda_2 \\ \Omega_S^R(x_0^\alpha;\lambda_h) = \Omega_{0S}^R + \displaystyle\int_0^{\lambda_1} H_T^R(U_Q)\,\Omega_S^T d\lambda_1, \end{cases}$$

où:

$$\begin{cases} U_R = \left(u_r, \partial_\alpha u_r, \partial^2_{\alpha\beta} u_r, \partial^3_{\alpha\beta\gamma} u_r\right), \\ \mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right) = \square\left([U_R]\, L_S^R\left(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right) + \sigma\omega_S^R\left[f_R(U_T)\right]\right), \\ \mathcal{J}_S\left([U_T], \Omega_T^R\right) = E_S^i\left([U_T], \Omega_T^R\right)\left(\Delta_i^1 - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right), \\ \Omega_S^R = \left(\omega_S^R; \omega_{S,i}^R; \omega_{S,ij}^R\right), \ \widehat{\Omega}_S^R = \left(\frac{\omega_S^R - \delta_S^R}{\lambda_1}; \frac{\omega_{S,i}^R}{\lambda_1}; \frac{\omega_{S,ij}^R}{\lambda_1}\right), \\ \Omega_{0S}^R = \left(\delta_S^R; 0; 0\right), \quad \omega_{S,i}^R = \frac{\partial\omega_S^R}{\partial p_i^0}, \quad \omega_{S,ij}^R = \frac{\partial^2\omega_S^R}{\partial p_i^0 \partial p_j^0}, \\ \Delta = \left|\frac{D(x^i)}{D(\lambda_j)}\right|, \ \ \square = \frac{\Delta}{\sin\lambda_2}, \ \ \Delta_i^j \equiv \textit{ mineur associé à } \Delta, \ \ \sigma = -\left|\square\right|^{-\frac{1}{2}}, \\ p_1^0 = \sin\lambda_2\cos\lambda_3, \ p_2^0 = \sin\lambda_2\sin\lambda_3, p_3^0 = \cos\lambda_3, \\ \textit{sur } S_0(M_0) \textit{ on a } \lambda_1 = \psi(x_0^\alpha;\lambda_h); \ i,j = 1,2,3; \ h = 2,3; \ \alpha,\beta,\gamma = 0,...,3, \\ H_T^R \textit{ est une matrice triangulaire dépendant des fonctions } A^{\lambda\mu}, f_r \textit{ et de leurs} \\ \ \textit{dérivées jusqu'à l'ordre trois et deux respectivement,} \\ \textit{Les } L_S^R, \omega_S^R, E_S^i \textit{ sont les fonctions auxiliaires introduites dans } [3], [7]; \textit{ les } p_i^0 \textit{ sont} \\ \textit{des paramètres permettant de repérer les bicaractéristiques issues de } M_0, \textit{qui} \\ \textit{engendrent } \mathcal{C}^-_{M_0}; \ \lambda_1 \textit{ est un paramètre réel permettant de repérer les points d'une} \\ \textit{bicaractéritique donnée de } \mathcal{C}^-_{M_0}. \end{cases}$$

(2) *Il existe une constante positive h et des constantes positives $C(h)$, $M(h)$, $B(h)$ telles que pour tout domaine causal $\mathcal{Y}_0$ dont la frontière contient $\mathcal{S}$ et qui est contenu dans la domaine $D(C(h), M(h), B(h))$ défini par:*

$$(x^\alpha) \in \mathcal{Y}/ \ \left(0 < a < M(h) \text{ et } a \leq C(h)\left|x^1\right|\right)$$

ou

$$\left(0 < a < M(h), \, a > C(h)\left|x^1\right| \text{ et } x^0 < B(h)\right)$$

avec $a = x^0 - \phi(x^i)$, le système intégral $(\mathcal{F}_S)$ admet une unique solution $((U_S), (\Omega_S^R))$ dans l'espace des fonctions continues et bornées et on a:

(i) *sur $\mathcal{S}^w$ les fonctions U_R prennent les valeurs $\Phi_R^w = \left([u_r]^w, [\partial_\alpha u_r]^w, \left[\partial^2_{\alpha\beta} u_r\right]^w, \left[\partial^3_{\alpha\beta\gamma} u_r\right]^w\right)$;*

(ii) $\forall (x^\alpha) \in \mathcal{Y}_0$, $\left|U_R(x^0, x^i) - \Phi_R(x^i)\right| \leq h$.

Dans le dernier paragraphe on établit les résultats énoncés au paragraphe précédent, et en particulier le résultat ci-dessus, par une méthode basée sur le théorème du point fixe de Banach.

1. FORMULES DE KIRCHHOFF ET PROBLEME DE CAUCHY ORDINAIRE POUR DES SYSTEMES LINEAIRES HYPERBOLIQUES

On rappelle et complète dans ce chapitre les résultats obtenus par Y. CHOQUET-BRUHAT [11], F. CAGNAC [5] et S. BAH [1] dans leurs thèses.

On considère le problème de Cauchy ordinaire suivant :

$$(1.0.1)\quad \begin{cases} (E_r):\ A^{\lambda\mu}\left(x^\alpha\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_r^{\lambda s}\left(x^\alpha\right)\frac{\partial u_s}{\partial x^\lambda} + C_r^s\left(x^\alpha\right)u_s + f_r\left(x^\alpha\right) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u_{r|\Im} = \varphi_r\left(x^i\right) \\ \frac{\partial u_r}{\partial x^0}\,|_\Im = \chi_r\left(x^j\right) \end{cases}$$

où $\alpha,\ \lambda,\ \mu = 0,1,2,3;\qquad i,\ j = 1,2,3;\qquad r,\ s = 1,2,...,n.$

$\Im$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^4$ *spatiale* pour $L = A^{\lambda\mu}\left(x^\alpha\right)\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}$ et d'équation: $x^0 = \phi\left(x^i\right)$;

φ_r, χ_r sont des fonctions connues;

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^4$ dont la frontière contient $\Im$.

On fait les hypothèses suivantes:

Hypothèse $\mathbf{H_0}$

$1 - L = A^{\lambda\mu}\left(x^\alpha\right)\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}$ *est un opérateur différentiel de type x^0-hyperbolique;*

$2 - i)$ *Les $A^{\lambda\mu}$ ont des dérivées quatrièmes continues et bornées dans Ω;*

$ii)$ *Les $B_r^{\lambda s}$ ont des dérivées secondes continues et bornées dans Ω;*

$iii)$ *Les C_r^s sont continues et bornées dans Ω;*

$iv)$ *Les f_r sont continues et bornées dans Ω.*

Le plan de ce chapitre, qui est divisé en six paragraphes (§), se présente comme suit:

- dans le §1.1, après avoir défini les demi-conoïdes caractéristiques, on énonce une hypothèse $\mathbf{H_{M_0}}$ qui permettra d'introduire un nouveau système de coordonnées adapté à l'établissement des formules de Kirchhoff;

- dans le §1.2, on donne l'expression des équations (E_r) sur les demi-conoïdes caractéristiques $\mathcal{C}_{M_0}^-$ et ensuite on introduit des fonctions auxiliaires σ_s^r;

- dans le §1.3, on établit les formules de Kirchhoff généralisées pour les équations (E_r) ;

- dans le §1.4, après avoir montré qu'il est possible d'établir des formules de Kirchhoff pour le système linéaire (1.0.1), on donne une forme des fonctions $\mathcal{I}_s$, intégrande des intégrales doubles des formules de Kirchhoff, adaptée aux problèmes à données initiales sur des hypersurfaces caractéristiques;

- dans le §1.5, on fait une étude particulière du comportement au voisinage de M_0 de certaines fonctions figurant dans les intégrales doubles et triples des formules de Kirchhoff;

- dans le §1.6, on fait l'étude, indispensable pour les problèmes non linéaires, des fonctions ω_s^r et L_s^r.

1.1. - CONOIDES CARACTERISTIQUES.

1.1.1. ***Définition des conoïdes caractéristiques***. Les hypersurfaces d'équation $x^0 = F(x^i)$ $(i = 1,2,3)$ caractéristiques pour l'opérateur $L = A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \equiv A^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}$ sont celles qui satisfont:

$$(1.1.1.1)\quad \Re(x^\alpha;p_i) \equiv A^{00}(x^\alpha) + 2A^{0i}(x^\alpha)p_i + A^{ij}(x^\alpha)p_ip_j = 0,$$

$$\text{où: } p_i = -\frac{\partial F}{\partial x^i} \equiv -\partial_i F, x^0 = F\left(x^i\right), i,j = 1,2,3;\ \alpha = 0,1,2,3.$$

Définition 1.1.1.1. *On appelle demi-conoïde caractéristique $\mathcal{C}^-_{M_0}$ (respectivement $\mathcal{C}_{M_0}$) pour l'opérateur $L = A^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}$, l'hypersurface caractéristique engendrée par les bicaractéristiques issues de $M_0(x_0^\alpha)$ orientées vers le passé (respectivement futur) c'est-à-dire vers les x^0 négatifs (respectivement positifs).*

L'équation aux dérivées partielles (1.1.1.1) admet pour système différentiel caractéristique:

$$(1.1.1.2)\quad \frac{dx^\alpha}{T^\alpha} = \frac{dp_i}{R_i} = d\lambda_1,\ i = 1,2,3;\ \alpha = 0,1,2,3$$

$$\text{où } T^\alpha = A^{\alpha 0} + A^{\alpha i}p_i, \qquad R_i = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Re}{\partial x^i} - p_i\frac{\partial\Re}{\partial x^0}\right),$$

λ_1 est un paramètre réel.

Les bicaractéristiques issues d'un point étant les solutions de (1.1.1.2) vérifiant (1.1.1.1) au point considéré, celles issues de $M_0(x_0^\alpha)$ admettent donc une représentation paramétrique de la forme $x^\lambda\left(x_0^\alpha;\lambda_1,p_j^0\right)$, $p_i\left(x_0^\alpha;\lambda_1,p_j^0\right)$ solution du système intégral:

$$(1.1.1.3)\quad \begin{cases} x^\lambda\left(x_0^\alpha;\lambda_1,p_j^0\right) = x_0^\lambda + \int_0^{\lambda_1} T^\lambda(x^\nu,p_j)\,d\lambda_1 \\ p_i\left(x_0^\alpha;\lambda_1,p_j^0\right) = p_i^0 + \int_0^{\lambda_1} R_i(x^\nu,p_j)\,d\lambda_1 \end{cases}$$

avec:

$$(1.1.1.4)\quad \Re\left(x_0^\alpha;p_i^0\right) \equiv A^{00}(x_0^\alpha) + 2A^{0i}(x_0^\alpha)p_i^0 + A^{ij}(x_0^\alpha)p_i^0p_j^0 = 0.$$

1.1.2. ***Hypothèse $\mathbf{H}_{M_0}$ et conséquences***. On aura besoin dans l'étude des formules de Kirchhoff de l'hypothèse suivante:

Hypothèse $\mathbf{H}_{M_0}$

Au point $M_0(x_0^\alpha)$ on a: $A^{00}(x_0^\alpha) = 1$, $A^{0i}(x_0^\alpha) = 0$, $A^{ij}(x_0^\alpha) = -\delta^{ij}$.

On verra que cette hypothèse est toujours vérifiée, moyennant un changement de variables approprié.

Conséquences

Sous l'hypothèse $H_{\mathbf{M}_0}$, (1.1.1.4) *devient:*

$$\sum_{i=1}^{3}\left(p_i^0\right)^2 = 1.$$

Ce qui permet d'introduire les coordonnées sphériques λ_2 et λ_3 qui permettront de repérer les bicaractéristiques issues de M_0 :

$$(1.1.2.1)\quad \begin{cases} p_1^0 = \sin\lambda_2 \cos\lambda_3 \\ p_2^0 = \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 \\ p_3^0 = \cos\lambda_2 \end{cases} \qquad (\lambda_2, \lambda_3) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi]\,.$$

On a alors une nouvelle représentation paramétrique de $\mathcal{C}^-_{M_0}$ de la forme:

$$(1.1.2.2)\quad \begin{cases} x^\mu = x^\mu\left(x_0^\alpha; \lambda_j\right) \\ p_i = p_i\left(x_0^\alpha; \lambda_j\right) \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3;\ \alpha, \mu = 0, ..., 3.$$

Des hypothèses faites sur les fonctions $A^{\lambda\mu}$ (voir *hypothèse* H_0), de (1.1.1.3), de (1.1.2.1) et du théorème de dérivation sous le signe intégral, on déduit que les fonctions x^μ et p_i sont à dérivées troisièmes continues par rapport à toutes leurs variables, sauf au point (x_0^α) pour ce qui est des fonctions p_i.

Dans tout domaine de $\mathcal{C}^-_{M_0}$ où on a $\Delta = \frac{D\left(x^i\right)}{D(\lambda_j)} \neq 0$, l'équation de $\mathcal{C}^-_{M_0}$, qui correspond à $\lambda_1 \leq 0$, s'écrit sous la forme $x^0 = F\left(x^i\right)$, $i = 1,2,3$. On note Δ^i_j les mineurs de Δ.

1.2. - FONCTIONS AUXILIAIRES.

1.2.1. - *Ecriture des équations* (E_r) *sur* $\mathcal{C}^-_{M_0}$.

Pour toute fonction X définie sur Ω, on notera $[X] = X_{|_{\mathcal{C}^-_{M_0}}} = X\left(x^0 = F\left(x^i\right), x^i\right)$

En dérivant $[u_r]$, on a:

$$(1.2.1.1)\quad \begin{cases} \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^i}\right] = \frac{\partial [u_r]}{\partial x^i} + p_i \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right], \\ \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^0 \partial x^i}\right] = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] + p_i \left[\frac{\partial^2 u_r}{(\partial x^0)^2}\right], \\ \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^i \partial x^j}\right] = \frac{\partial^2 [u_r]}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial p_i}{\partial x^j}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] + p_i \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] + p_j \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] + p_i p_j \left[\frac{\partial^2 u_r}{(\partial x^0)^2}\right]. \end{cases}$$

En utilisant le fait que $\mathcal{C}^-_{M_0}$ est caractéristique et (1.2.1.1), on montre facilement que sur $\mathcal{C}^-_{M_0}$ le système d'équations (E_r) se réduit au système d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre par rapport aux $\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]$ défini par:

$$(1.2.1.2)\quad \begin{cases} [E_r]:\ 2\left(\left[A^{ij}\right] p_j + \left[A^{0i}\right]\right) \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] + \left[A^{ij}\right] \frac{\partial p_i}{\partial x^j}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] + \left[A^{ij}\right] \frac{\partial^2 [u_r]}{\partial x^i \partial x^j} \\ \quad + \left(\left[B_r^{it}\right] p_i + \left[B_r^{0t}\right]\right)\left[\frac{\partial u_t}{\partial x^0}\right] + \left[B_r^{it}\right] \frac{\partial [u_t]}{\partial x^i} + \left[C_r^s\right][u_s] + [f_r] = 0. \end{cases}$$

Lien entre les dérivations par rapport aux (λ_j) et celles par rapport aux (x^i). De (1.1.1.3) on a:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda_1} = T^\alpha = \left[A^{\alpha 0}\right] + \left[A^{\alpha i}\right] p_i,$$

d'où:

$$\frac{\partial [u]}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial [u]}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_1} = T^i \frac{\partial [u]}{\partial x^i},$$
$$\frac{\partial [u]}{\partial x^i} = \frac{\partial [u]}{\partial \lambda_j}\frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i},$$

Δ^i_j étant le mineur de Δ relatif à $\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_j}$, on a $\Delta^j_i = \Delta \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i}$; d'où $\frac{\partial [u]}{\partial x^i} = \frac{\Delta^j_i}{\Delta}\frac{\partial [u]}{\partial \lambda_j}$.

Par suite on a les relations suivantes:

$$(1.2.1.3)\quad \begin{cases} \frac{\partial[u]}{\partial\lambda_1} = \left([A^{ij}]\,p_j + [A^{0i}]\right)\frac{\partial[u]}{\partial x^i} \\ \frac{\partial[u]}{\partial x^i} = \frac{\Delta_i^j}{\Delta}\frac{\partial[u]}{\partial\lambda_j}. \end{cases}$$

De (1.2.1.3) on déduit que sur chaque bicaractéristique de $\mathcal{C}^-_{M_0}$, (λ_1 étant un paramètre négatif permettant de repérer les points le long de cette bicaractéristique), le système d'équations aux dérivées partielles défini par (1.2.1.2) s'écrit:

$$(1.2.1.4)\quad \begin{cases} \left[E_r'\right]:\ 2\frac{d}{d\lambda_1}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] + [A^{ij}]\frac{\partial p_i}{\partial x^j}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] + \left([B_r^{it}]\,p_i + [B_r^{0t}]\right)\left[\frac{\partial u_t}{\partial x^0}\right] \\ \qquad + [B_r^{it}]\frac{\partial[u_t]}{\partial x^i} + [A^{ij}]\frac{\partial^2[u_r]}{\partial x^i\partial x^j} + [C_r^t]\,[u_t] + [f_r] = 0. \end{cases}$$

1.2.2. - ***Fonctions auxiliaires*** σ_s^r.

Introduisant, comme Y. CHOQUET-BRUHAT [11], n^2 fonctions auxiliaires σ_s^r que l'on multiplie par $[E_r]$, on a:

$$\sigma_s^r\,[E_r] \equiv \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^i}\left\{2\left([A^{ij}]\,p_j + [A^{0i}]\right)\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]\sigma_s^r + [A^{ij}]\frac{\partial[u_r]}{\partial x^j}\sigma_s^r - \frac{\partial\left(\left[A^{ij}\right]\sigma_s^r\right)}{\partial x^j}[u_r] + [B_r^{it}]\,[u_t]\,\sigma_s^r\right\} \\ \qquad + \sigma_s^r\,[f_r] + [u_r]\left\{\frac{\partial^2\left(\left[A^{ij}\right]\sigma_s^r\right)}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\left(\left[B_t^{ir}\right]\sigma_s^t\right)}{\partial x^i} + [C_t^r]\,\sigma_s^t\right\} \\ -\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]\left\{2\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\left([A^{ij}]\,p_j + [A^{0i}]\right)\sigma_s^r\right] - \left(p_i\,[B_t^{ir}] + [B_t^{0r}]\right)\sigma_s^t - [A^{ij}]\frac{\partial p_i}{\partial x^j}\sigma_s^r\right\} = 0. \end{cases}$$

Imposant la nullité du coefficient de $\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]$ on a:

$$(1.2.2.1)\quad \frac{\partial}{\partial x^i}E_s^i + [u_r]\,L_s^r + \sigma_s^r\,[f_r] = 0,$$

avec:

$$(1.2.2.2)\quad \begin{cases} E_s^i = [A^{ij}]\,\sigma_s^r\frac{\partial[u_r]}{\partial x^j} - \frac{\partial\left(\left[A^{ij}\right]\sigma_s^r\right)}{\partial x^j}[u_r] + [B_r^{it}]\,[u_t]\,\sigma_s^r + 2\left([A^{ij}]\,p_j + [A^{oi}]\right)\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]\sigma_s^r \\ L_s^r = \frac{\partial^2\left(\left[A^{ij}\right]\sigma_s^r\right)}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial\left(\left[B_t^{ir}\right]\sigma_s^t\right)}{\partial x^i} + [C_t^r]\,\sigma_s^t \end{cases}$$

et où les σ_s^r verifient:

$$(1.2.2.3)\quad 2\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\left(\left[A^{ij}\right]p_j + \left[A^{0i}\right]\right)\sigma_s^r\right] - \left(p_i\left[B_t^{ir}\right] + \left[B_t^{0r}\right]\right)\sigma_s^t - \left[A^{ij}\right]\frac{\partial p_i}{\partial x^j}\sigma_s^r = 0.$$

En posant $\sigma_s^r = \sigma\omega_s^r$, on a (1.2.2.3) est vérifié si σ et ω_s^r vérifient le système d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre défini par:

$$(1.2.2.4)\quad \begin{cases} 2\left([A^{ij}]\,p_j + [A^{0i}]\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x^i} + \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left([A^{ij}]\,p_j + [A^{0i}]\right)\right]\sigma = 0 \\ 2\left([A^{ij}]\,p_j + [A^{0i}]\right)\frac{\partial\omega_s^r}{\partial x^i} + \left(p_j\frac{\partial\left[A^{ij}\right]}{\partial x^i} + \frac{\partial\left[A^{0i}\right]}{\partial x^i}\right)\omega_s^r - \left(p_i\,[B_t^{ir}] + [B_t^{0r}]\right)\omega_s^t = 0. \end{cases}$$

Sous l'hypothèse $\mathbf{H_{M_0}}$, Y. CHOQUET-BRUHAT [11] montre que:

• la première équation de (1.2.2.4) admet, avec la condition asymptotique $\lim\limits_{\lambda_1\to 0}\lambda_1\sigma = 1$, la solution:

$$(1.2.2.5)\quad \sigma = -\left|\frac{\sin\lambda_2}{\Delta}\right|^{1/2}.$$

• la deuxième équation de (1.2.2.4) se réduit, sous la condition $\omega^r_{s|\lambda_1=0} = \delta^r_s$, à:

$$(1.2.2.6)\quad \begin{cases} \omega^r_s = \delta^r_s + \displaystyle\int_0^{\lambda_1} \left(Q\omega^r_s + Q^r_t\omega^t_s\right) d\lambda_1 \qquad \text{où} \\ Q = -\frac{1}{2}\left(p_j \frac{\partial[A^{ij}]}{\partial x^i} + \frac{\partial[A^{0i}]}{\partial x^i}\right), Q^r_t = \frac{1}{2}\left(p_i\left[B^{ir}_t\right] + \left[B^{0r}_t\right]\right). \end{cases}$$

1.3. FORMULES DE KIRCHHOFF GENERALISEES.

1.3.1. ***Formules de KIRCHHOFF sous l'hypothèse*** $\mathbf{H_{M_0}}$. En intégrant (1.2.2.1) dans le domaine V_η de $\mathcal{C}^-_{M_0}$ défini par

$$V_\eta : \{0 > \eta \geq \lambda_1 \geq \Psi\left(x^\alpha_0, \lambda_h\right)\}, (h = 2,3; \Psi \text{ fonction continue}, \eta = \text{constante}),$$

c'est-à-dire le domaine de $\mathcal{C}^-_{M_0}$ délimité par les hypersurfaces de $\mathbb{R}^3$, $S_\eta : \{\lambda_1 = \eta\}$ et $S_0\left(M_0\right) = \mathcal{C}^-_{M_0} \cap \Im : \{\lambda_1 = \Psi\left(x^\alpha_0, \lambda_h\right)\}$, et en utilisant ensuite la formule de Stokes-Green, on a:

$$\iiint_{V_\eta} \left([u_r]\, L^r_s + \sigma^r_s\,[f_r] + \frac{\partial E^i_s}{\partial x^i}\right) dV = \iiint_{V_\eta} \left([u_r]\, L^r_s + \sigma^r_s\,[f_r]\right) dV + \iint_{S_\eta} E^i_s \cos\left(n, x^i\right) dS$$
$$+ \iint_{S_0(M_0)} E^i_s \cos\left(n_0, x^i\right) dS$$

où: $\cos\left(n, x^i\right)$ est le cosinus directeur de la normale unitaire extérieure à S_η;
$\cos\left(n_0, x^i\right)$ est le cosinus directeur de la normale unitaire extérieure à $S_0\left(M_0\right)$.

En supposant que l'hypothèse $\mathbf{H}_{M_0}$ est vérifiée et en passant aux coordonnées sphériques, on a:

$$dV = dx^1dx^2dx^3 = \mid \Delta \mid d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 = -\Delta\ d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3,$$
$$\cos\left(n, x^i\right) dS = -\Delta^1_i d\lambda_2 d\lambda_3,$$
$$\cos\left(n_0, x^i\right) dS = \left(\Delta^1_i - \tfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_h}\Delta^h_i\right) d\lambda_2 d\lambda_3,\ \ i = 1,2,3;\ \ h = 2,3.$$

On en déduit que:

$$\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \Delta^1_i E^i_s = \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \int_\eta^{\Psi\left(x^\alpha_0, \lambda_h\right)} \Delta\left([u_r]\, L^r_s + \sigma^r_s\,[f_r]\right) d\lambda_1$$
$$+ \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 E^i_s \left(\Delta^1_i - \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_h}\Delta^h_i\right).$$

En faisant tendre η vers 0, Y. CHOQUET-BRUHAT [11] et F. CAGNAC [5] ont montré que:

• l'intégrale triple converge,
• l'intégrale double du premier membre tend vers $4\pi u_s\left(x^\alpha_0\right)$.

D'où on a la formule suivante:

$$(\wp_s):\ 4\pi u_s\left(x^\alpha_0\right) = \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \int_0^{\Psi\left(x^\alpha_0, \lambda_h\right)} \Delta\left([u_r]\, L^r_s + \sigma^r_s\,[f_r]\right) d\lambda_1$$
$$+ \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 E^i_s \left(\Delta^1_i - \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_h}\Delta^h_i\right).$$

1.3.2. ***- Changement de variables***. On a eu besoin, pour établir les formules $(\wp_s)$, de l'hypothèse $\mathbf{H}_{M_0}$. Si au point $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ de Ω l'hypothèse $\mathbf{H}_{M_0}$ n'est pas vérifiée, Y.CHOQUET-BRUHAT [11] et F. CAGNAC [5] introduisent un nouveau système de variables de la manière suivante:

<< A tout point $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ on associe un nouveau système de variables $\left(y^\beta\right)$ défini par:

$$(1.3.2.1) \quad y^\beta = {}^0a_\alpha^\beta\left(x_0^\nu\right).x^\alpha >>$$

de telle sorte que les équations (E_r) s'écrivent:

$$(1.3.2.2) \quad (E_r^*): \overset{*}{A}{}^{\lambda\mu}\left(x_0^\alpha, y^\lambda\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^\lambda \partial y^\mu} + \overset{*}{B}{}_r^{\mu s}\left(x_0^\alpha; y^\lambda\right)\frac{\partial u_s}{\partial y^\mu} + \overset{*}{C}{}_r^{s}\left(x_0^\alpha; y^\lambda\right)u_s + f_r = 0,$$

avec:

$$\overset{*}{A}{}^{\lambda\mu}\left(x_0^\alpha, y^\lambda\right) = {}^0a_\alpha^\lambda\, {}^0a_\beta^\mu A^{\alpha\beta}\left(x^\mu\right) \qquad \overset{*}{B}{}_r^{\mu s}\left(x_0^\alpha, y^\lambda\right) = {}^0a_\alpha^\mu\left(x_0^\alpha\right)B_r^{\alpha s}\left(x^\lambda\right),$$

$$\overset{*}{C}{}_r^{s}\left(x_0^\alpha; y^\lambda\right) = C_r^s\left(x^\lambda\right),$$

et

i) $\overset{*}{A}{}^{00}\left(x_0^\alpha; x_0^\alpha\right) = 1; \quad \overset{*}{A}{}^{0i}\left(x_0^\alpha; x_0^\alpha\right) = 0; \quad \overset{*}{A}{}^{ij}\left(x_0^\alpha; x_0^\alpha\right) = -\delta^{ij};$

ii) les ${}^0a^\beta{}_\alpha$ sont des fonctions analytiques des $A^{\lambda\mu}\left(x_0^\nu\right);$

iii) ${}^0a_i^0 = 0; \quad {}^0a_2^1 = {}^0a_3^1 = 0; \quad {}^0a_0^0 = \left(A^{00}\right)^{-1/2} > 0.$

D'où on a: $x^0 > 0 \iff y^0 > 0$

et

$$\left\{\begin{array}{l} x^0 = 0 \\ x^1 = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} y^0 = 0 \\ y^1 = 0 \end{array}\right\}$$

On note $\left({}_0a_\beta^\alpha\right)$ la matrice inverse de $\left({}^0a_\alpha^\beta\right)$.

D'après (iii), on a $\overset{*}{A}{}^{00} > 0$. Pour que $\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta}\,\partial^2_{\alpha\beta}$ soit hyperbolique il suffit que l'on ait pour tout $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $\overset{*}{A}{}^{ij}\,Y_iY_j < 0$.

Proposition 1.3.2.1. *Si l'hypothèse* $\mathbf{H_0}$ *est vérifiée pour le système d'équations* (E_r).

Pour toute solution (u_r) *des équations* (E_r) *dans un domaine* Ω *admettant des dérivées premières bornées, pour toute hypersurface* $\Im$ *qui coupe tous les demi-conoïdes* $\mathcal{C}_{M_0}^-$ *issus de* $M_0\left(x_0^\alpha\right) \in \Omega$ *suivant des* $2-$*surfaces* $S_0\left(M_0\right)$ *définies sur les* $\mathcal{C}_{M_0}^-$ *par des équations:* $\lambda_1 = \Psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)$, $h = 2, 3$; Ψ *fonction continue.*

$\forall M_0 \in \Omega$, *si* $\left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right) \subset \Omega$ *avec* $\left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right) \equiv$ *partie de* $\mathcal{C}_{M_0,}^-$ *située entre* M_0 *et* $\Im$, *et si* M_0 *est l'unique point singulier de* $\left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right)$, *c'est-à-dire si* Ω *est causal.*

Alors on a:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_s): 4\pi u_s\left(x_0^\alpha\right) = & \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \int_0^{\Psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)} \Delta\left(\left[u_r\right]L_s^r + \sigma_s^r\left[f_r\right]\right)d\lambda_1 \\ & + \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 E_s^i\left(\Delta_i^1 - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_h}\Delta_i^h\right),\end{aligned}$$

où en coordonnées $\left(y^\beta\right)$ *associées au point* $M_0\left(x_0^\alpha\right)$, $\mathcal{C}_{M_0}^-$ *a pour équation:* $y^0 = F\left(x_0^\alpha; y^i\right)$;

$$p_i = -\frac{\partial F}{\partial y^i}, \qquad \Delta = \frac{D\left(y^i\right)}{D\left(\lambda_j\right)}, \qquad \Delta_j^i = \Delta\frac{\partial \lambda_i}{\partial y^j}, \qquad \Box = \frac{\Delta}{\sin\lambda_2},$$

$$\sigma_s^r = \sigma\omega_s^r \text{ avec } \sigma = -\left|\Box\right|^{-1/2}, \omega_s^r = \delta_s^r + \int_0^{\lambda_1}\left(Q\omega_s^r + Q_t^r\omega_s^t\right)d\lambda_1,$$

où

$$(1.3.2.3)\begin{cases} Q = -\frac{1}{2}\left(p_j\frac{\partial\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]}{\partial y^i} + \frac{\partial\left[\overset{*}{A}{}^{0i}\right]}{\partial y^i}\right), Q_t^r = \frac{1}{2}\left(p_i\left[\overset{*}{B}{}_t^{ir}\right] + \left[\overset{*}{B}{}_t^{0r}\right]\right), \\ E_s^i = \left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma_s^r\frac{\partial[u_r]}{\partial y^j} - \frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma_s^r\right)}{\partial y^j}\left[u_r\right] + \left[\overset{*}{B}{}_r^{it}\right]\left[u_t\right]\sigma_s^r \\ \qquad + 2\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]p_j + \left[\overset{*}{A}{}^{oi}\right]\right)\left[\frac{\partial u_r}{\partial y^0}\right]\sigma_s^r, \\ L_s^r = \frac{\partial^2\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma_s^r\right)}{\partial y^i\partial y^j} - \frac{\partial\left(\left[\overset{*}{B}{}_t^{ir}\right]\sigma_s^t\right)}{\partial y^i} + \left[C_t^r\right]\sigma_s^t. \end{cases}$$

1.4. PROBLEME DE CAUCHY SUR UNE HYPERSURFACE SPATIALE.

On va dans ce paragraphe établir les formules de Kirchhoff pour le problème de Cauchy ordinaire (1.0.1). On donnera dans la suite une forme des fonctions $\mathcal{J}_s = E_s^i\left(\Delta_i^1 - \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right)$ $(h = 2, 3)$ adaptée à l'étude des problèmes caractéristiques auxquels on s'intéressera.

Pour le problème de Cauchy ordinaire (1.0.1), outre l'hypothèse $\mathbf{H_0}$, on fait des hypothèses supplémentaires sur les données initiales.

1.4.1. *Hypothèse* $\mathbf{H_1}$.

1− *Les données* $A^{\lambda\mu}$, $B_r^{\lambda s}$, C_r^s *et* f_r *ainsi que l'opérateur* $L = A^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}^2$ *vérifient l'hypothèse* H_0.

2− *Soit* D *un domaine fermé et borné de* $\Im$ *tel que* Ω *soit un voisinage de* D *dans* $\{(x^\alpha) / x^0 \geq 0\}$ *et tel que:*

i) ϕ *est deux fois différentiable sur* D

ii) Les φ_r *(resp.* χ_r*) sont* n *fonctions deux (resp. une) fois différentiables sur* D

En coordonnées $\left(y^\beta\right)$ associées à $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ on a:

$$(1.4.1.1)\begin{cases} y^0 = \overset{*}{\phi}\left(x_0^\alpha; y^i\right) \text{ équation de } \Im \\ \overset{*}{q}_i = -\frac{\partial\overset{*}{\phi}}{\partial y^i}, \text{ où } q_i = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \\ \overset{*}{\varphi}_r\left(x_0^\alpha; y^i\right) = u_r\left(\overset{*}{\phi}\left(x_0^\alpha; y^i\right), y^i\right) = \varphi_r\left(x^i\right) \\ \overset{*}{\chi}_r\left(x_0^\alpha; y^i\right) = \frac{\partial u_r}{\partial y^0}\left(\overset{*}{\phi}\left(x_0^\alpha; y^i\right), y^i\right) = \frac{\partial u_r}{\partial x^\lambda}\left(x^j\right)\ {}_0a_0^\lambda \\ \left[\frac{\partial u_r}{\partial y^i}\right]\left(x_0^\alpha; y^j\right) = \frac{\partial\overset{*}{\varphi}_r}{\partial y^i} + \overset{*}{q}_i\overset{*}{\chi}_r \\ \text{où } x^j = {}_0a_i^j y^i + {}_0a_0^j\overset{*}{\phi}\left(y^i\right). \end{cases}$$

a) Détermination des $\Psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)$. L'équation de $S_0\left(M_0\right)=\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\Im$ est de la forme $\lambda_1=\Psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)$, qui est la solution de l'équation d'inconnue λ_1 suivante:

$$(1.4.1.2)\quad \mathcal{F}\left(x_0^\alpha;\lambda_i\right)\equiv y^0\left(x_0^\alpha,\lambda_i\right)-\overset{*}{\phi}\left(y^j\left(x_0^\alpha;\lambda_i\right)\right)=0;\quad i=1,2,3.$$

Sous l'hypothèse $\mathbf{H}_1$, F. CAGNAC [5] a établi l'existence d'un ouvert $\Omega_0\subset\Omega$ voisinage de D défini par:

$$\Omega_0:\begin{cases}\phi\left(x^i\right)\leq x^0\leq\phi\left(x^i\right)+a\left(x^i\right)\ \text{ où } a\left(x^i\right)>0,\\ \left(x^i\right)\in D_x\equiv\ \text{projection de } D \text{ sur l'espace des } \left(x^i\right);\end{cases}$$

tel que :

$$(1.4.1.3)\quad\begin{cases}\bullet\ \Omega_0 \text{ est } \textit{causal} \text{ c'est-à-dire: } \forall M_0\in\Omega_0,\left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right)\subset\Omega_0\\ \text{avec } \left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right)\equiv\text{partie de } \mathcal{C}_{M_0}^- \text{ située entre } M_0 \text{ et } \Im;\\ \bullet\ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_1}\geq k>0,\qquad \text{avec } k=\text{constante};\\ \bullet\ \left|\Psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)\right|\ <K\left(x_0^0-\phi\left(x_0^i\right)\right),\qquad\text{avec } K=\text{constante}.\end{cases}$$

Vu (1.4.1.3), on déduit de la *proposition* 1.3.2.1 que sous l'hypothèse $\mathbf{H}_1$, les formules de Kirchhoff associées au problème de Cauchy ordinaire (1.0.1) sont établies.

1.4.2. *Expression des fonctions* $\mathcal{J}_s=E_s^i\left(\Delta_i^1-\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right)$.

α) **Expression des E_s^i en fonction des données de Cauchy**

. Vues les expressions définissant $\left[\frac{\partial u_r}{\partial y^i}\right]$ sur $\mathcal{C}_{M_0}^-$ dans les relations (1.2.1.1) et (1.4.1.1), sur $S_0\left(M_0\right)$ on a:

$$(1.4.2.1)\quad \frac{\partial\left[u_r\right]}{\partial y^j}=\frac{\partial\overset{*}{\varphi}_r}{\partial y^j}+\left(\overset{*}{q}_j-p_j\right)\overset{*}{\chi}_r.$$

En utilisant la relation (1.4.2.1) dans l'expression définissant E_s^i donnée par (1.3.2.3) on a:

$$(1.4.2.2)\quad\begin{cases}E_s^i=\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma_s^r\left\{\frac{\partial\overset{*}{\varphi}_r}{\partial y^j}+\left(\overset{*}{q}_j-p_j\right)\overset{*}{\chi}_r\right\}-\overset{*}{\varphi}_r\frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma_s^r\right)}{\partial y^j}+\left[\overset{*}{B}{}_t^{ir}\right]\sigma_s^t\overset{*}{\varphi}_r\\ \qquad+2\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]p_j+\left[\overset{*}{A}{}^{0i}\right]\right)\sigma_s^r\overset{*}{\chi}_r.\end{cases}$$

β) **Expression des** $\mathbf{G}_i=\Delta_i^1-\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h$

. D'après le théorème des fonctions implicites on a:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_h}=-\frac{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_h}}{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_1}}.$$

Par suite on a:

$$\begin{cases}G_i=\Delta_i^1-\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h=\Delta_i^1+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_h}\frac{1}{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_1}}\Delta_i^h,h=2,3;\ i=1,2,3;\\ \quad=\frac{1}{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_1}}\left(\Delta_i^1\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_1}+\Delta_i^h\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_h}\right)\\ \quad=\frac{1}{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_1}}\Delta_i^j\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_j}=\frac{1}{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_1}}\Delta\frac{\partial\lambda_j}{\partial y^i}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_j}\\ \quad=\Delta\frac{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y^i}}{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda_1}}.\end{cases}$$

D'où:

$$(1.4.2.3)\ \ G_i = \Delta \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y^i}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1}}.$$

De la relation (1.4.1.2) on déduit que:

$$(1.4.2.4)\ \ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y^i} = \overset{*}{q}_i - p_i.$$

En combinant les relations (1.4.2.3) et (1.4.2.4) on a:

$$(1.4.2.4)'\quad G_i = \Delta \frac{\left(\overset{*}{q}_i - p_i\right)}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1}}.$$

γ) **Expression de $G_i E_s^i = \mathcal{J}_s$**

. On se propose ici de donner une expression des fonctions $\mathcal{J}_s$ qui sera adaptée à l'étude des problèmes à données initiales caractéristiques.

On déduit des relations (1.4.2.2) et $(1.4.2.4)'$ que:

$$(1.4.2.5)\ \ \mathcal{J}_s = \frac{\Delta}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1}} \left\{ \begin{array}{c} \left(\overset{*}{q}_i - p_i\right) \left(\left[\overset{*}{A}^{ij}\right] \sigma_s^r \frac{\partial \overset{*}{\varphi}_r}{\partial y^j} - \overset{*}{\varphi}_r \frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}^{ij}\right]\sigma_s^r\right)}{\partial y^j} + \sigma_s^t \left[\overset{*}{B}_t^{ir}\right] \overset{*}{\varphi}_r \right) \\ + \left(\overset{*}{\Re}\left(y^\lambda; \overset{*}{q}_i\right) - \overset{*}{\Re}\left(y^\lambda; p_i\right) \right) \overset{*}{\chi}_r \sigma_s^r \end{array} \right\}.$$

Puisque $S_0(M_0) \subset \mathcal{C}_{M_0}^-$ et que sur $\mathcal{C}_{M_0}^-$ on a $\overset{*}{\Re}\left(y^\lambda; p_i\right) = 0$, on déduit de la relation (1.4.2.5) que :

$$(1.4.2.6)\ \ \mathcal{J}_s = \frac{\Delta}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1}} \left\{ \begin{array}{c} \left(\overset{*}{q}_i - p_i\right) \left(\left[\overset{*}{A}^{ij}\right] \sigma_s^r \frac{\partial \overset{*}{\varphi}_r}{\partial y^j} - \overset{*}{\varphi}_r \frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}^{ij}\right]\sigma_s^r\right)}{\partial y^j} + \sigma_s^t \left[\overset{*}{B}_t^{ir}\right] \overset{*}{\varphi}_r \right) + \\ + \overset{*}{\Re}\left(y^\lambda, \overset{*}{q}_i\right) \overset{*}{\chi}_r \sigma_s^r \end{array} \right\}.$$

1.4.3. ***Remarques sur les problèmes caractéristiques:***

1− Vue la relation (1.4.2.6), il apparaît que si l'hypersurface $\Im$ est caractéristique alors $\mathcal{J}_s$ ne dépend pas des fonctions $\overset{*}{\chi}_r$. Dans ce cas on peut, pour simplifier, supposer que les fonctions $\overset{*}{\chi}_r$ sont nulles sans pour autant nuire à la généralité des résultats.

2− D'après (1.4.1.3), pour les problèmes à données initiales sur une hypersurface spatiale la présence au dénominateur des $\mathcal{J}_s$ de $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1}$ est sans inconvénient. Par contre si le problème est à données initiales caractéristiques, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1}$ tend vers zéro lorsque l'on se rapproche de l'hypersurface caractéristique qui porte les données initiales.

En effet

$$(1.4.3.1)\ \ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1} = \overset{*}{A}^{00} + \overset{*}{A}^{0i}\left(p_i + \overset{*}{q}_i\right) + \overset{*}{A}^{ij} p_i \overset{*}{q}_j.$$

Si $\mathcal{C}_{M_0}^-$ se rapproche de $\Im$, alors p_i tend vers $\overset{*}{q}_i$; d'où $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1}$ tend vers

$$\overset{*}{A}^{00} + 2\overset{*}{A}^{0i}\overset{*}{q}_i + \overset{*}{A}^{ij}\overset{*}{q}_i\overset{*}{q}_j \equiv \Re\left(y^\lambda; \overset{*}{q}_i\right).$$

Or cette dernière expression est nulle si l'hypersurface $\Im$ portant les données initiales est caractéristique.

1.5. DEVELOPPEMENTS LIMITES DES FONCTIONS: $y^\lambda\left(x_0^\alpha;\lambda_1,p_j^0\left(\lambda_h\right)\right)$, $p_i\left(x_0^\alpha;\lambda_1,p_j^0\left(\lambda_h\right)\right)$, Δ, Δ_i^j, σ ET LEURS DERIVEES AU VOISINAGE DE $\mathbf{M_0}$.

En vue de l'étude des intégrales doubles et triples dans les formules de Kirchhoff $(\wp_s)$, il est nécessaire de faire une étude particulière du comportement au voisinage de M_0 des fonctions suivantes:

- $y^\lambda\left(x_0^\alpha;\lambda_1,p_j^0\left(\lambda_h\right)\right)$, $p_i\left(x_0^\alpha;\lambda_1,p_j^0\left(\lambda_h\right)\right)$,
- Δ, Δ_j^i, σ et leurs dérivées.

On note $\Gamma\left(x_0^\alpha,\lambda_i\right)$ le domaine défini par: $\begin{cases}\left(x_0^\alpha\right)\in\Omega\\ \Psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)<\lambda_1<0, h=2,3\\ \left(\lambda_2,\lambda_3\right)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]\end{cases}$

On désignera par K, K' des fonctions bornées dans les égalités et par k des constantes dans les inégalités.

Il découle des résultats obtenus par Y. CHOQUET-BRUHAT [11] et F. CAGNAC [5] dans leurs thèses que tous les développements limités que l'on utilisera peuvent être dérivés terme à terme.

1.5.1. *Développements limités des fonctions y^λ et p_i.*

Le système intégral (1.1.1.3) définissant les conoïdes $\mathcal{C}_{M_0}^-$ en coordonnées $\left(y^\lambda\right)$ et l'hypothèse $\mathbf{H}_{M_0}$ montrent que l'on a les développements limités suivants au voisinage de M_0 :

a) **En** λ_1 :

$$(1.5.1.1)\quad\begin{cases}y^i=y_0^i-p_i^0\lambda_1+K\lambda_1^2\\ y^0=y_0^0+\lambda_1+K\lambda_1^2\\ p_i=p_i^0+P_i\left(x_0^\alpha;p_j^0\right)\lambda_1+K\lambda_1^2\end{cases}$$

où $P_i\left(x_0^\alpha;p_j^0\right)$ est un polynôme par rapport aux p_j^0 et à coefficients continus et bornés comme fonctions des x_0^α.

D'où on a:

$$(1.5.1.2)\quad\begin{cases}\frac{\partial y^0}{\partial\lambda_1}=1+K\lambda_1,\frac{\partial y^0}{\partial p_h^0}=K\lambda_1^2,\\ \frac{\partial y^i}{\partial\lambda_1}=-p_i^0+K\lambda_1,\frac{\partial y^i}{\partial p_h^0}=-\delta_h^i\lambda_1+K\lambda_1^2,\frac{\partial^2y^\lambda}{\partial p_h^0\partial p_k^0}=K\lambda_1^2.\end{cases}$$

b) **En** y^i

Les fonctions définies sur $\mathcal{C}_{M_0}^-$ s'exprimant à l'aide des variables y^i admettent des développements limités en fractions rationnelles homogènes $(f.r.h)$ en y^i,s, ayant pour dénominateur une puissance de s, où $s=\left[\sum_{i=1}^3\left(\eta^i\right)^2\right]^{1/2}$ et $\eta^i=y^i-y_0^i$.

De (1.5.1.1) on a:

$$(1.5.1.3)\quad\begin{cases}\lambda_1=-s+K's^2,\\ p_i^0=\frac{\eta^i}{s}+K's,\\ F\left(x_0^\alpha,y^i\right)=y_0^0-s+K's^2.\end{cases}$$

On a aussi:

$$\left|\frac{\partial^r F}{(\partial x_0^\alpha)^{r_1}(\partial y^i)^{r_2}\ldots}\right| < \frac{k}{s^{r-1}} \quad \text{avec } r \leq 3.$$

1.5.2. ***Développements limités et propriétés de:*** Δ, Δ_i^j ***et leurs dérivées***.
Il a été établi par Y. CHOQUET-BRUHAT [11, p. $159-162$] et F. CAGNAC [5, p. $152-153$] que les fonctions Δ et $\frac{\partial p_k^0}{\partial \lambda_h}\Delta_i^h$ $(h=2,3)$ sont des produits de $\sin\lambda_2$ par des fonctions dérivables et bornées.

Ainsi donc on pose:

$$(1.5.2.1) \quad \Box = \frac{\Delta}{\sin\lambda_2} \qquad \Box_i^k = \frac{1}{\sin\lambda_2}\frac{\partial p_k^0}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h \quad i,k=1,2,3; \quad h=2,3.$$

En appliquant (1.5.1.2) à $\Delta = \frac{D(y^i)}{D(\lambda_j)}$ et en utilisant (1.1.2.1) on a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -p_1^0 + K\lambda_1 & -\lambda_1\cos\lambda_2\cos\lambda_3 + K\lambda_1^2 & \lambda_1\sin\lambda_2\sin\lambda_3 + K\lambda_1^2 \\ -p_2^0 + K\lambda_1 & -\lambda_1\cos\lambda_2\sin\lambda_3 + K\lambda_1^2 & -\lambda_1\sin\lambda_2\cos\lambda_3 + K\lambda_1^2 \\ -p_3^0 + K\lambda_1 & \lambda_1\sin\lambda_2 + K\lambda_1^2 & K\lambda_1^2 \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda_1^2\sin\lambda_2\,(1+K\lambda_1)\,.$$

D'après la remarque faite au début de ce sous-paragraphe à propos des travaux de F. CAGNAC [5] on a:

$$(1.5.2.1)' \quad \frac{\partial p_k^0}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h = \sin\lambda_2\Box_i^k, \text{avec } \Box_i^k \text{ fonctions dérivables et bornées.}$$

En utilisant (1.1.2.1) on déduit de ce qui précède que:

$$(1.5.2.2) \quad \Delta_i^2 = -\Box_i^3 \text{ et } \Delta_i^3 = -\Box_i^1\sin\lambda_3 + \Box_i^2\cos\lambda_3$$

On a aussi:

$$(1.5.2.3) \quad \begin{cases} \Box = -\lambda_1^2\,(1+K\lambda_1) = -s^2\,(1+K's)\,, \\ \Box_i^k = (\delta_{ik} - p_i^0 p_k^0)\,\lambda_1 + K\lambda_1^2 = -\,(\delta_{ik} - p_i^0 p_k^0)\,s + K's^2. \end{cases}$$

On en déduit que:

$$(1.5.2.4) \quad \begin{cases} \frac{\Delta_i^1}{\Delta} = -p_i^0 + K\lambda_1 = -\frac{\eta_i}{s} + K's, \\ \frac{\Box_i^k}{\Box} = -\frac{\delta_{ik} - p_i^0 p_k^0}{\lambda_1} + K = \frac{\delta_{ik} - p_i^0 p_k^0}{s} + K'. \end{cases}$$

En dérivant terme à terme on a:

$$(1.5.2.5) \begin{cases} \frac{\partial\Box}{\partial y^i} = -2\eta_i + K's^2 = 2p_i^0\lambda_1 + K\lambda_1^2, \\ \frac{\partial^2\Box}{\partial y^i\partial y^j} = -2\delta_{ij} + K's = -2\delta_{ij} + K\lambda_1, \\ \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\Delta_i^1}{\Delta}\right) = -\frac{\delta_{ij}}{s} + \frac{\eta_i\eta_j}{s^3} + K' = \frac{\delta_{ij}}{\lambda_1} - \frac{p_i^0 p_j^0}{\lambda_1} + K, \\ \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\Box_i^k}{\Box}\right) = -\frac{\delta_{ik}\eta_j}{s^3} + \frac{\eta_i\eta_j\eta_k}{s^5} + K' = -\frac{\delta_{ik}p_j^0}{\lambda_1^2} + \frac{p_i^0 p_j^0 p_k^0}{\lambda_1^2} + K. \end{cases}$$

Des relations $(1.5.2.3 - 1.5.2.5)$ on a le résultat suivant:

Lemme 1.5.2.1. *Au voisinage de $\lambda_1 = 0$, les fonctions suivantes sont continues et bornées:*

$$\frac{\Box}{\lambda_1^2}, \frac{\Delta_i^1}{\Delta}, \lambda_1 \frac{\Box_i^k}{\Box}, \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \Box}{\partial y^i}, \frac{\partial^2 \Box}{\partial y^i \partial y^j}, \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\Delta_i^1}{\Delta}\right), \lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\Box_i^k}{\Box}\right).$$

1.5.3. ***Remarque sur les travaux de S. BAH***. Par rapport aux travaux de S. BAH [1], [2], on a été amené à modifier la définition des fonctions $\overline{\Delta}_i^1$ (analogues des fonctions $\Box_i^1$) qu'il a considérées. Ceci se justifie par le fait que les fonctions $\lambda_1 \frac{\Delta_i^h}{\Delta}$, contrairement à ce qui est affirmé au *lemme* 1.5.1 de [1], ne sont pas bornées au voisinage de $\lambda_1 = 0$:

• En effet:

$$\lambda_1 \frac{\Delta_i^2}{\Delta} = -\lambda_1 \frac{\Box_i^3}{\Delta} = -\frac{1}{\sin \lambda_2} \lambda_1 \frac{\Box_i^3}{\Box} = \frac{1}{\sin \lambda_2}\left(\delta_{3i} - p_i^0 p_3^0 + K\lambda_1\right).$$

Bien que les fonctions $\delta_{3i} - p_i^0 p_3^0$ soient des produits de $\sin \lambda_2$ par des fonctions bornées pour $i = 1, 2, 3$, on ne peut pas affirmer que les fonctions $\lambda_1 \frac{\Delta_i^2}{\Delta}$ sont bornées; au fait, elles ne le sont pas car, les fonctions $\frac{\Delta_i^h}{\lambda_1}$ étant bornées, si ces fonctions étaient bornées, les fonctions $\frac{\left(\Delta_i^2\right)^2}{\Delta}$ seraient bornées!

• On a aussi:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\Delta_i^3}{\Delta} &= \frac{1}{\sin \lambda_2}\left(-\lambda_1 \frac{\Box_i^1}{\Box} \sin \lambda_3 + \lambda_1 \frac{\Box_i^3}{\Box} \cos \lambda_3\right) \\ &= \frac{1}{\sin \lambda_2}\left(\delta_{1i} \sin \lambda_3 - \delta_{2i} \cos \lambda_3 - p_i^0 p_1^0 \sin \lambda_3 + p_i^0 p_2^0 \cos \lambda_3 + K\lambda_1\right). \end{aligned}$$

Ces fonctions ne sont pas bornées au voisinage de $\lambda_1 = 0$ pour les mêmes raisons que ci-dessus.

1.5.4. ***Développements limités de σ et de ses dérivées***. On déduit des relations:

$$(1.5.4.1) \quad \begin{cases} \sigma = -\left|\Box\right|^{-1/2} = \frac{1}{\lambda_1} + K = -\frac{1}{s} + K', \\ \left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right] = -\delta^{ij} + K\lambda_1 = -\delta^{ij} + K's, \end{cases}$$

que:

$$(1.5.4.2) \quad \left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right] \sigma = -\frac{\delta^{ij}}{\lambda_1} + K = \frac{\delta^{ij}}{s} + K'.$$

En dérivant terme à terme on a:

$$(1.5.4.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial y^i} = \frac{p_i^0}{\lambda_1^2} + \frac{K}{\lambda_1} = \frac{\eta^i}{s^3} + \frac{K'}{s}, \\ \frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma\right)}{\partial y^i} = -\frac{p_j^0}{\lambda_1^2} + \frac{K}{\lambda_1} = -\frac{\eta^j}{s^3} + \frac{K'}{s}, \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^i \partial y^j} = -\frac{1}{\lambda_1^3}\left(\delta_{ij} - 3p_i^0 p_j^0\right) + \frac{K}{\lambda_1^2} = \frac{\delta^{ij}}{s^3} - \frac{3\eta^i \eta^j}{s^5} + \frac{K'}{s^2}, \\ \frac{\partial^2\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma\right)}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{K}{\lambda_1^2} = \frac{K'}{s^2}. \end{cases}$$

Des relations $(1.5.4.1 - 1.5.4.3)$ on a le résultat suivant:

Lemme 1.5.4.1.
Au voisinage de $\lambda_1 = 0$, les fonctions suivantes sont continues et bornées:

$$\lambda_1\sigma, \lambda_1\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma\right), \lambda_1^2\frac{\partial\sigma}{\partial y^i}, \lambda_1^2\frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma\right)}{\partial y^i}, \lambda_1^3\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^i\partial y^j}, \lambda_1^2\frac{\partial^2\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma\right)}{\partial y^i\partial y^j}.$$

1.6. ETUDE DES FONCTIONS ω_s^r ET L_s^r.

Comme l'a noté S. BAH [1], l'étude des fonctions ω_s^r et L_s^r, qui dans le cadre des problèmes non linéaires dépendent des fonctions inconnues, est nécessaire. Par rapport à l'étude qui a été faite dans [1], on y apportera des modifications; c'est une conséquence de la remarque faite au sous-paragraphe 1.5.3.

1.6.1. *Etude des fonctions* ω_s^r.

Les fonctions ω_s^r sont définies par:

$$(1.6.1.1) \quad \omega_s^r\left(x_0^\alpha;\lambda_1,\lambda_h\right) = \delta_s^r + \int_0^{\lambda_1} p_t^r\omega_s^t d\lambda_1,$$

où:

$$(1.6.1.2) \quad \begin{cases} p_t^r = -\frac{1}{2}\left(p_j\frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\right)}{\partial y^i} + \frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{0i}\right]\right)}{\partial y^i}\right)\delta_t^r \\ \qquad +\frac{1}{2}\left(\left[\overset{*}{B}{}_t^{ir}\right]p_i + \left[\overset{*}{B}{}_t^{0r}\right]\right). \end{cases}$$

En utilisant l'hypothèse $\mathbf{H_0}$, on déduit que les fonctions p_t^r sont deux fois dérivables par rapport à toutes leurs variables.

Plutôt que de considérer les fonctions ω_s^r suivant les variables $(x_0^\alpha;\lambda_1,\lambda_h)$ comme l'a fait S. BAH [1] et [2], on les prendra suivant les variables $(x_0^\alpha;\lambda_1,p_i^0)$ comme l'a fait Y. CHOQUET-BRUHAT [11] de manière à prendre en considération les conséquences de la remarque faite au sous-paragraphe 1.5.3.

On pose alors:

$$(1.6.1.3) \quad \begin{cases} \omega_{s,i}^r = \frac{\partial\omega_s^r}{\partial p_i^0},\ \omega_{s,ij}^r = \frac{\partial^2\omega_s^r}{\partial p_i^0\partial p_j^0}, \\ p_{s,i}^r = \frac{\partial p_s^r}{\partial p_i^0},\ p_{s,ij}^r = \frac{\partial^2 p_s^r}{\partial p_i^0\partial p_j^0}. \end{cases}$$

On déduit de (1.6.1.1), de l'hypothèse $\mathbf{H_0}$ et du théorème de dérivation sous le signe intégral que:

$$(1.6.1.4) \quad \begin{cases} \omega_{s,i}^r = \int_0^{\lambda_1}\left(p_{t,i}^r\omega_s^t + p_t^r\omega_{s,i}^t\right)d\lambda_1, \\ \omega_{s,ij}^r = \int_0^{\lambda_1}\left(p_{t,ij}^r\omega_s^t + p_{t,i}^r\omega_{s,j}^t + p_{t,j}^r\omega_{s,i}^t + p_t^r\omega_{s,ij}^t\right)d\lambda_1. \end{cases}$$

En utilisant l'hypothèse $\mathbf{H_0}$ et le théorème de dérivation sous le signe intégral, on déduit de (1.6.1.4) le résultat suivant:

Proposition 1.6.1.1. *Sous l'hypothèse* $\mathbf{H_0}$

$$\omega^r_s;\ \omega^r_{s,i};\ \ \omega^r_{s,ij};\quad \frac{\omega^r_s-\delta^r_s}{\lambda_1};\quad \frac{\omega^r_{s,i}}{\lambda_1};\ \ \frac{\omega^r_{s,ij}}{\lambda_1}$$

sont des fonctions continues et bornées dans Γ.

Dans toute la suite, on appellera:
ω l'une quelconque des fonctions $\left\{\omega^r_s,\omega^r_{s,i};\ \omega^r_{s,ij}\right\}$,
ϖ l'une quelconque des fonctions $\left\{\frac{\omega^r_{s,i}}{\lambda_1};\ \frac{\omega^r_{s,ij}}{\lambda_1}\right\}$,
$\widehat{\omega}$ l'une quelconque des fonctions $\left\{\frac{\omega^r_s-\delta^r_s}{\lambda_1}\right\}$.

Il découle de la *proposition* 1.6.1.1 que ω, ϖ et $\widehat{\omega}$ sont des fonctions continues et bornées de (x^α_0,λ_i) dans Γ.

En utilisant les relations (1.6.1.1), (1.6.1.4) et le *lemme* 1.5.2.1 on a le résultat suivant:

Proposition 1.6.1.2. *Sous les hypothèses* $\mathbf{H_0}$ *et* $\mathbf{H_{M_0}}$, *les fonctions* $\frac{\partial\omega^r_s}{\partial y^i}$, $\lambda_1\frac{\partial^2\omega^r_s}{\partial y^i\partial y^j}$ *sont des combinaisons linéaires à coefficients continus et bornés de* ω *et* ϖ. *Plus précisément on a:*

$$(1.6.1.5)\qquad \frac{\partial\omega^r_s}{\partial y^i}=a^r_{ti}\omega^t_s+b^k_i\frac{\omega^r_{s,k}}{\lambda_1},$$

$$(1.6.1.6)\quad \lambda_1\frac{\partial^2\omega^r_s}{\partial y^i\partial y^j}=a^r_{mij}\omega^m_s+b^{rk}_{mij}\frac{\omega^m_{s,k}}{\lambda_1}+c^{kl}_{ij}\frac{\omega^r_{s,kl}}{\lambda_1},$$

où les $a^r_{ti},b^k_i,a^r_{mij},b^{rk}_{mij},c^{kl}_{ij}$ *sont des fonctions continues et bornées.*

Preuve. **Voir appendice A.1 de** [23]**.** □

Remarque 1.6.1.1. *Dans* [1, *p. 30*], *S. BAH énonce un résultat similaire à celui de la proposition précédente, à ceci près qu'il considère les fonctions* ω^r_s *suivant les variables* $(x^\alpha_0;\lambda_1,\lambda_h)$. *Il découle de la remarque du sous-paragraphe* 1.5.3, *que le lemme* 1.6.1 *énoncé dans* [1] *possède des incorrections.*

Dans le cas des dérivées premières des ω^r_s *par rapport aux* y^i, *les fonctions* $\lambda_1\frac{\Delta^h_i}{\Delta}$ *sont utilisées comme des fonctions bornées à tort.*

Dans le cas des fonctions $\lambda_1\frac{\partial^2\omega^r_s}{\partial y^i\partial y^j}$, *en plus des fonctions non bornées* $\lambda_1\frac{\Delta^h_i}{\Delta}$, *sont aussi utilisées comme fonctions bornées à tort les fonctions* $\lambda_1^2\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\Delta^h_i}{\Delta}\right)$.

1.6.2. ***Etude des fonctions*** L^r_s.

En utilisant (1.5.2.1), le *lemme* 1.5.4.1 et la *proposition* 1.6.1.2, on a le résultat suivant:

Proposition 1.6.2.1. *Si les hypohèses* $\mathbf{H}_0$ *et* $\mathbf{H}_{M_0}$ *sont vérifiées alors les fonctions* $\Box L^r_s$ *sont des combinaisons linéaires, à coefficients continus et bornés, de* ω *et* ϖ.

Preuve. D'après la relation (1.3.2.3), on a:

$$L^r_s=\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma^r_s\right)-\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\left[\overset{*}{B}{}^{ir}_t\right]\sigma^t_s\right)+\left[C^r_t\right]\sigma^t_s;$$

où :

$$\sigma^r_s=\sigma\omega^r_s.$$

En développant cette expression et ensuite en utilisant les relations (1.6.1.6) et la formule $(A.1.1)$ de l' Appendice A1 de [23], on a:

$$(1.6.2.1) \quad \Box L_s^r = a_m^r \omega_s^m + b_m^{rk} \frac{\omega_{s,k}^m}{\lambda_1} + c^{kl} \frac{\omega_{s,kl}^r}{\lambda_1},$$

avec:

$$(1.6.2.1) \begin{cases} a_m^r = \dfrac{\Box \left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right] \sigma}{\lambda_1} a_{mij}^r + \Box \left(2 \dfrac{\partial \left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right] \sigma \right)}{\partial y^j} \delta_t^r - \left[\overset{*}{B}{}_t^{ir} \right] \sigma \right) a_{mi}^t \\ \qquad + \Box \left(\dfrac{\partial^2 \left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right] \sigma \right)}{\partial y^i \partial y^j} \delta_m^r - \dfrac{\partial \left(\left[\overset{*}{B}{}_m^{ir} \right] \sigma \right)}{\partial y^i} \right) + \left[C_m^r \right] \Box \sigma, \\ b_m^{rk} = \dfrac{\Box \left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right] \sigma}{\lambda_1} b_{mij}^{rk} + \Box \left(2 \dfrac{\partial \left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right] \sigma \right)}{\partial y^j} \delta_m^r - \left[\overset{*}{B}{}_m^{ir} \right] \sigma \right) b_i^k, \\ c^{kl} = \dfrac{\Box \left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right] \sigma}{\lambda_1} c_{ij}^{kl}. \end{cases}$$

Les fonctions $a_{mij}^r, a_{mi}^t, b_{mij}^{rk}, b_i^k, c_{ij}^{kl}$ étant celles apparaissant dans la *proposition* 1.6.1.2 et qui sont définies par les formules $(A.1.2)$ et $(A.1.4)$ de l'Appendice A1 de [23].

D'après le *lemme* 1.5.4.1 et la *proposition* 1.6.1.2, les fonctions a_m^r, b_m^{rk}, c^{kl} sont continues et bornées. On déduit de (1.6.2.1) que les fonctions $\Box L_s^r$ sont des combinaisons linéaires à coefficients continus et bornés de ω et ϖ. $\Box$

1.6.3. ***Conséquences des développements limités.*** Dans le cadre des problèmes de Cauchy à données initiales sur une hypersurface spatiale, il résulte des développements limités effectués au voisinage de $\lambda_1 = 0$ du paragraphe 5 qu'on a les résultats suivants:

$$(1.6.3.1) \begin{cases} L_s^r = \frac{K}{\lambda_1^2} = \frac{K'}{s^2} \qquad E_s^i = \frac{p_i^0}{\lambda_1^2} \overset{*}{\varphi}_s + \frac{K}{\lambda_1}, \\ \Delta_i^1 - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_h} \Delta_i^h = -(\sin \lambda_2) \lambda_1^2 \left(\frac{\overset{*}{q}_i - p_i^0}{1 - \sum\limits_{j=1}^{3} p_j^0 \overset{*}{q}_j} + K \lambda_1 \right), \\ \mathcal{J}_s = E_s^i \left(\Delta_i^1 - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_h} \Delta_i^h \right) = (\sin \lambda_2) \overset{*}{\varphi}_s + K \lambda_1. \end{cases}$$

On établira des résultats semblables lorsque les données initiales sont portées par deux hypersurfaces caractéristiques sécantes. On verra aussi que dans le cas des problèmes non linéaires, les fonctions K qui apparaissent dans (1.6.3.1) dépendent des fonctions inconnues, à travers les fonctions auxiliaires ω, ϖ ou $\widehat{\omega}$.

2. PROBLEME DE GOURSAT POUR DES SYSTEMES LINEAIRES HYPERBOLIQUES

On rappelle et complète dans ce chapitre les résultats obtenus par J. TOLEN [33] pour des systèmes linéaires hyperboliques du second ordre à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques, sécantes suivant la 2−surface $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^4$ d'équations:

$$\begin{cases} x^1 = 0 \\ x^0 = 0 \end{cases}, \quad (x^2, x^3) \in B \text{ avec } B \text{ domaine fermé borné de } \mathbb{R}^2 .$$

On considère le système formé des équations (E_r) et on suppose que l'hypothèse $\mathbf{H}_0$ est vérifiée.

Pour une hypersurface caractéristique d'équation $x^0 = F(x^i)$ et un point $M(0,0,X^2,X^3)$ de $\mathcal{T}$, le plan tangent en M est d'équation:

$$(2.0.1) \quad X^0 + q_i^0 X^i = 0, \text{avec } q_i = -\frac{\partial F}{\partial x^i} \text{ et } q_i^0 = q_i(M).$$

Puisque le plan tangent en M contient $\mathcal{T}$, on a:

$$(2.0.2) \quad q_2^0 X^2 + q_3^0 X^3 = 0; \text{ quels que soient } X^2, X^3.$$

D'où:

$$(2.0.3) \quad q_2^0 = 0; \quad q_3^0 = 0.$$

On a d'autre part,

$$(2.0.4) \quad 0 = \Re\left(M, q_i^0\right) \equiv A^{00}(M) + 2A^{0i}(M)\, q_i^0 + A^{ij}(M)\, q_i^0 q_j^0$$

On déduit des relations (2.0.3) et (2.0.4) que:

$$(2.0.5) \quad A^{00}(M) + 2A^{01}(M)\, q_1^0 + A^{11}(M)\left(q_1^0\right)^2 = 0$$

Les hypothèses d'hyperbolicité faites sur les fonctions $A^{\alpha\beta}$ dans l'*hypothèse* $\mathbf{H}_0$ entraînent que:

$$(2.0.6) \quad A^{00} > 0 \text{ et } A^{11} < 0;$$

Donc (2.0.5) admet deux racines réelles distinctes de signes contraires:

$$(2.0.7) \quad q_1^{01} = \frac{-A^{01} + \sqrt{\Delta'}}{A^{11}} < 0, \quad q_1^{02} = -\frac{A^{01} + \sqrt{\Delta'}}{A^{11}} > 0;$$
$$\text{avec } \Delta' = \left(A^{01}\right)^2 - A^{00}A^{11}.$$

On en déduit qu'il existe deux hypersurfaces caractéristiques $\Im^1$ et $\Im^2$ sécantes suivant $\mathcal{T}$ et définies par:

$$\Im^w : \begin{cases} x^{uw}\left(X^1, X^2, X^3, q_1^{0w}\right) = \int_0^{X^1} T^u dX^1, T^\alpha = A^{0\alpha} + A^{\alpha i} q_i \\ x^{vw}\left(X^1, X^2, X^3, q_1^{0w}\right) = X^v + \int_0^{X^1} T^v dX^1, w = 1,2 \\ q_1^w = q_1^{0w} + \int_0^{X^1} R_1 dX^1, R_i = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Re}{\partial x^i} - q_i \frac{\partial \Re}{\partial x^0}\right) \\ q_v^w = \int_0^{X^1} R_v dX^1, u = 0,1; v = 2,3;\ i = 1,2,3;\ \alpha = 0,...,3. \end{cases}$$

Par rapport aux problèmes à données initiales sur une hypersurface spatiale, des circonstances nouvelles apparaissent lorsque l'on aborde des problèmes à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes:

1- La manière de poser le problème à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes est différente de la position d'un problème de Cauchy à données initiales sur une hypersurface spatiale;

2- Vues les formules de Kirchhoff, pour obtenir des solutions dans des espaces de fonctions continues, il est nécessaire de faire une étude des intégrales doubles et triples.

Les difficultés se présentent lorsque l'on se rapproche du point M_0 ou lorsque l'on se rapproche de la réunion des hypersurfaces caractéristiques:

i) dans le premier cas de difficultés, on utilise des développements limités au voisinage de M_0 pour obtenir des résultats semblables à ceux obtenus dans le dernier sous-paragraphe du chapitre précédent.

ii) dans le second cas de difficultés, on est amené dans un premier temps à étudier le comportement de la 2-surface $S_0\left(M_0\right)$ lorsque M_0 se rapproche de $\mathcal{S}$; cela conduit à l'introduction de nouveaux paramètres $(\lambda_{h'})$ pour repérer les bicaractéristiques de $\mathcal{C}^-_{M_0}$. Par la suite, face à de nouvelles difficultés lorsque l'on se rapproche d'une certaine manière que l'on précisera de $\mathcal{S}$, une étude complète des $2-$surfaces $S_0\left(M_0\right)$ est nécessaire. Au cours de cette étude de nouveaux systèmes de coordonnées adaptés à l'étude seront introduits.

On a subdivisé ce chapitre en quatre paragraphes (§) :

- Dans le premier paragraphe (§2.1), après avoir énoncé de nouvelles hypothèses liées au problème caractéristique, l'on donne une position du problème à données initiales sur la réunion de deux hypersurfaces caractéristiques sécantes (problème de Goursat); ensuite on établit les formules de Kirchhoff pour ce problème de Goursat; enfin on étudie le comportement de la $2-$surface $S_0\left(M_0\right)$ au voisinage des hypersurfaces caractéristiques sécantes;
- Dans le §2.2, on rappelle l'étude faite par J. TOLEN [33] des $2-$surfaces $S_0\left(M_0\right)$;
- Dans le §2.3, on utilise les résultats du §2.2 pour étudier les intégrales doubles qui apparaissent dans les formules de Kirchhoff;
- Dans le §2.4, on étudie les intégrales triples qui apparaissent dans les formules de Kirchhoff.

2.1. **POSITION DU PROBLEME DE GOURSAT ET FORMULES DE KIRCHHOFF.** D'après l'étude préliminaire faite ci-dessus, on a:

$$x^{0w}\left(X^1,X^2,X^3,q_1^{0w}\right)=\int_0^{X^1}T^0dX^1, T^0=A^{00}+A^{0i}q_i.$$

Puisque $\Im^w$ est une hypersurface caractéristique et que la forme quadratique $A^{ij}X_iX_j$ est définie négative, on a sur $\Im^w$:

$$A^{00}+2A^{0i}q_i\geq 0.$$

On en déduit que sur $\Im^w$:

$$T^0=A^{00}+A^{0i}q_i=\frac{1}{2}\left(2A^{00}+2A^{0i}q_i\right)\geq\frac{1}{2}A^{00}>0.$$

Ainsi donc x^{0w} et X^1 sont de même signe sur $\Im^w$.

On a aussi

$$x^{1w}\left(X^1,X^2,X^3,q_1^{0w}\right)=\int_0^{X^1}T^1dX^1, T^1=A^{01}+A^{1i}q_i.$$

Par conséquent sur $\mathcal{T}\cap\Im^1$ on a:

$$T^1\left(0,0,X^2,X^3\right)=A^{01}\left(0,0,X^2,X^3\right)+A^{11}\left(0,0,X^2,X^3\right)q_1^{01}=\sqrt{\Delta'}>0.$$

D'où il existe un voisinage de $\mathcal{T}$ dans $\Im^1$ dans lequel x^{1w} et X^1 sont de même signe.

De même il existe un voisinage de $\mathcal{T}$ dans $\Im^2$ dans lequel x^{1w} et X^1 sont de signes contraires.

En vue de l'utilisation de ces résultats pour obtenir des résultats d'existence semi-globale, les équations des hypersurfaces caractéristiques seront définies telles que $(-1)^{w-1} x^{1w}$ et X^1 soient de même signe. C'est ainsi que l'on est amené à faire des hypothèses supplémentaires.

2.1.1. *Hypothèse* $\mathbf{H}_2$ *et conséquences*.

Hypothèse $H_{\mathbf{2}}$:. • *$\Im^1$ et $\Im^2$ sont les hypersurfaces caractéristiques pour $L = A^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}$, sécantes suivant $\mathcal{T}$: $\begin{cases} x^0 = x^1 = 0 \\ (x^2, x^3) \in B \end{cases}$, B domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$;*

• *$\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2$, où $\mathcal{S}^w$ $(w = 1, 2)$ est une réunion de segments de bicaractéristiques de $\Im^w$ issues de $\mathcal{T}$;*

• *$\mathcal{S}^w$ est défini par:*

$$0 \leq X^1 \leq f^w \left(X^2, X^3\right).$$

f^w fonctions continues;

• *Pour tout point $P \in \mathcal{S}^w$ on a:*

$$(-1)^w \, x^1_w \,(P) \leq 0;$$

• *Il existe un ouvert U^w de $\Im^w$ contenant $\mathcal{S}^w$ et admettant une représentation $x^0 = \phi^w \left(x^i\right)$.*

$$\text{On pose } \phi\left(x^i\right) = \begin{cases} \phi^1 \left(x^i\right) \text{ si } x^1 \geq 0 \\ \phi^2 \left(x^i\right) \text{ si } x^1 \leq 0 \end{cases}$$

• *$\mathcal{D}$ désignant la projection de $\mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2$ dans l'espace des $\left(x^i\right)$.*

• *Il existe un domaine Γ_0 défini par:* $\begin{cases} \phi\left(x^i\right) \leq x^0 \leq \phi\left(x^i\right) + a_0 \\ \left(x^i\right) \in \mathcal{D} \end{cases}$, ($a_0$ constante positive)

tel que pour tout $M_0\left(x^\alpha_0\right)$ appartenant à Γ_0, $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$ admet une représentation définie par: $x^0 = F\left(x^\alpha_0, x^i\right)$.

Conséquences des hypothèses:

Il découle des hypothèses faites sur les fonctions $A^{\lambda\mu}$ que les fonctions ϕ^w sont trois fois dérivables. On pose $q^w_i = -\frac{\partial\phi^w}{\partial x^i}$; en coordonnées $\left(y^\beta\right)$ associées à un point $M_0\left(x^\alpha_0\right)$, U^w admet pour équation: $y^0 = \overset{*w}{\phi}\left(x^\alpha_0, y^i\right)$. On pose $\overset{*w}{q_i} = -\frac{\partial\overset{*w}{\phi}}{\partial y^i}$.

On posera aussi:

$$a^w = x^0_0 - \phi^w\left(x^i_0\right), \ \overset{*w}{a} = y^0_0 - \overset{*w}{\phi}\left(y^i_0\right), a = x^0_0 - \phi\left(x^i_0\right), \overset{*}{a} = y^0_0 - \overset{*}{\phi}\left(y^i_0\right).$$

On a les inégalités suivantes:

$$\text{(2.1.1.1)} \quad \overset{*w}{a} \leq K_1 a^w, a^w \leq K'_1 \overset{*w}{a}; \ K_1, K'_1 \text{ constantes.}$$

2.1.2. *Position du problème de Goursat*.

On va montrer ici que dans le cas des problèmes caractéristiques, la position du problème de Goursat est différente de celle des problèmes à données initiales sur une hypersurface spatiale.

Données de Cauchy sur $\mathcal{S}$. On va montrer que la connaissance de $\varphi_r^w = u_{r|\mathcal{S}^w}$ permet de déterminer, pour toute solution $u = (u_r)$ du problème de Goursat associé aux équations (E_r), les fonctions $\chi_r^w = \frac{\partial u_r}{\partial x^0} |_{\mathcal{S}^w} \equiv \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]^w$ de manière unique; et par conséquent de déterminer les restrictions à $\mathcal{S}^w$ de toutes les dérivées premières.

Puisque $\mathcal{S}^w$ est caractéristique, si $u = (u_r)$ est solution du système formé des équations (E_r), d'après (1.2.1.2) sa restriction à $\mathcal{S}^w$ vérifie le système d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre par rapport aux $\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]^w$ suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} [E_r^w] : 2\left([A^{ij}]\, q_j^w + [A^{0i}]\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]^w + [A^{ij}]\, \frac{\partial q_i^w}{\partial x^j} \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]^w + \left([B_r^{it}]\, q_i^w + [B_r^{0t}]\right) \left[\frac{\partial u_t}{\partial x^0}\right]^w \\ \qquad\qquad + [A^{ij}]\, \frac{\partial^2 [u_r]^w}{\partial x^i \partial x^j} + [B_r^{it}]\, \frac{\partial [u_t]^w}{\partial x^i} + [C_r^s]\, [u_s]^w + [f_r]^w = 0. \end{array}\right.$$

Par conséquent les fonctions φ_r^w et χ_r^w vérifient:

$$[E_r^w]_1 : \left\{\begin{array}{l} 2\left([A^{ij}]\, q_j^w + [A^{0i}]\right) \frac{\partial \chi_r^w}{\partial x^i} + [A^{ij}]\, \frac{\partial q_i^w}{\partial x^j} \chi_r^w + \left([B_r^{it}]\, q_i^w + [B_r^{0t}]\right) \chi_t^w \\ \qquad + [A^{ij}]\, \frac{\partial^2 \varphi_r^w}{\partial x^i \partial x^j} + [B_r^{it}]\, \frac{\partial \varphi_t^w}{\partial x^i} + [C_r^s]\, \varphi_s^w + [f_r]^w = 0. \end{array}\right.$$

Sur chaque bicaractéristique définie par:

$$\frac{dx^i}{dX^1} = \left(\left[A^{ij}\right] q_j^w + \left[A^{0i}\right]\right),$$

l'on a:

$$[E_r^w]_2 : \left\{\begin{array}{l} 2\frac{d\chi_r^w}{dX^1} + [A^{ij}]\, \frac{\partial q_i^w}{\partial x^j} \chi_r^w + \left([B_r^{it}]\, q_i^w + [B_r^{0t}]\right) \chi_t^w + [A^{ij}]\, \frac{\partial^2 \varphi_r^w}{\partial x^i \partial x^j} \\ \qquad + [B_r^{it}]\, \frac{\partial \varphi_t^w}{\partial x^i} + [C_r^s]\, \varphi_s^w + [f_r]^w = 0. \end{array}\right.$$

C'est un système différentiel linéaire du premier ordre d'inconnue χ_r^w; il admet une unique solution si la condition initiale est déterminée, c'est-à-dire si χ_r^w est connue sur $\mathcal{T}$.

On suppose que $\varphi_r^1 |_{\mathcal{T}} = \varphi_r^2 |_{\mathcal{T}}$.

Si l'on cherche des solutions qui sont telles que les fonctions $\frac{\partial u_r^w}{\partial x^i} |_{\mathcal{T}}$ soient continues sur $\mathcal{T}$, alors:

en dérivant par rapport à x^1 l'identité:

$$u_r\left(\phi^w\left(x^i\right), x^i\right) = \varphi_r^w\left(x^i\right),$$

on a:

$$\frac{\partial \varphi_r^w}{\partial x^1}\left(x^i\right) = \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^1}\right] + \frac{\partial \phi^w}{\partial x^1}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] = \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^i}\right] - q_1^w \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right].$$

Puisque sur $\mathcal{T}$ on a:

$$q_1^{02} - q_1^{01} = -\frac{\sqrt{\Delta'}}{A^{11}} > 0,$$

on a alors:

$$\text{(2.1.2.1)} \qquad \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right] |_{\mathcal{T}} = \frac{1}{q_1^{02} - q_1^{01}} \left[\frac{\partial \varphi_r^1}{\partial x^1}\left(0, X^2, X^3\right) - \frac{\partial \varphi_r^2}{\partial x^1}\left(0, X^2, X^3\right)\right].$$

(2.1.2.1) définit la donnée de Cauchy sur $X^1 = 0$.

Ainsi donc, la donnée de φ_r^w tel que $\varphi_r^1\,(0, X^2, X^3) = \varphi_r^2\,(0, X^2, X^3)$ détermine de manière unique $\frac{\partial u_r}{\partial x^0}$ sur $\mathcal{S}^w$, pour toute solution $u = (u_r)$ dont les dérivées partielles premières sont continues jusque sur $\mathcal{T}$.

Puisque l'on a:

$$\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^i}\right]^w = \frac{\partial \varphi_r^w}{\partial x^i} + q_i^w \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]^w,$$

toutes les dérivées premières de la solution éventuelle sont déterminées de manière unique sur $\mathcal{S}^w$ et donc sur $\mathcal{S}$.

• **Position du problème de Cauchy**. Soit $\mathcal{D}^w$ la projection de $\mathcal{S}^w$ sur l'espace des (x^i) et $\varphi_r^w(x^i)$ des fonctions définies sur $\mathcal{D}^w$ deux fois différentiables et vérifiant $\varphi_r^1(0, x^2, x^3) = \varphi_r^2(0, x^2, x^3)$.

Sous l'hypothèse $\mathbf{H_2}$, le problème de Cauchy à données initiales sur $\mathcal{S}$ (problème de Goursat) consiste à trouver des fonctions $u_r(x^\alpha)$ deux fois différentiables définies dans un domaine:

$$\Gamma : \begin{cases} \phi(x^i) \le x^0 \le \phi(x^i) + a(x^i) \\ (x^i) \in \mathcal{D}, a(x^i) > 0 \text{ pour } (x^i) \in \overset{o}{\mathcal{D}} \end{cases}, \text{où } \mathcal{D} = \mathcal{D}^1 \cup \mathcal{D}^2$$

telles que $u = (u_r)$ est solution du système formé des équations (E_r) dans Γ en prenant sur $\mathcal{S}^w$ la valeur $\varphi^w = (\varphi_r^w)$.

Il consiste donc à déterminer des fonctions deux fois différentiables vérifiant:

$$(2.1.2.2) \quad \begin{cases} (E_r): \ A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_r^{\lambda s}\frac{\partial u_s}{\partial x^\lambda} + C_r^s u_s + f_r = 0 \text{ dans } \Gamma \\ \qquad u_{r|\mathcal{S}_w} = \varphi_r^w(x^i) \end{cases}$$

2.1.3. ***Représentation paramétrique de*** $\mathcal{S}^w \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$.

En un point d'intersection d'une bicaractéristique $\mathcal{B}$ passant par $M_0(x_0^\alpha)$ avec $\mathcal{S}^w$, le paramètre λ_1 est solution de l'équation suivante:

$$(2.1.3.1) \quad \mathcal{F}^w(x_0^\alpha; \lambda_1, \lambda_h) \equiv y^0(x_0^\alpha; \lambda_1, \lambda_h) - \overset{*}{\phi}{}^w\left(x_0^\alpha; y^i(x_0^\alpha; \lambda_1, \lambda_h)\right) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}^w}{\partial \lambda_1} &= \overset{*}{A}{}^{00} + \overset{*}{A}{}^{0i}\left(p_i + \overset{*}{q}{}_i^w\right) + \overset{*}{A}{}^{ij} p_i \overset{*}{q}{}_j^w \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\overset{*}{A}{}^{00} + 2\overset{*}{A}{}^{0i} p_i\right) + \left(\overset{*}{A}{}^{00} + 2\overset{*}{A}{}^{0i}\overset{*}{q}{}_i^w\right) + 2\overset{*}{A}{}^{ij} p_i \overset{*}{q}{}_j^w\right\}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{C}_{M_0}^-$ et $\mathcal{S}^w$ sont caractéristiques par rapport au même opérateur L on a:

$$\overset{*}{A}{}^{00} + 2\overset{*}{A}{}^{0i} p_i = -\overset{*}{A}{}^{ij} p_i p_j \text{ et } \overset{*}{A}{}^{00} + 2\overset{*}{A}{}^{0i}\overset{*}{q}{}_i^w = -\overset{*}{A}{}^{ij}\overset{*}{q}{}_i^w \overset{*}{q}{}_j^w.$$

D'où:

$$(2.1.3.2) \quad \frac{\partial \mathcal{F}^w}{\partial \lambda_1} = -\frac{1}{2}\overset{*}{A}{}^{ij}\left(p_i - \overset{*}{q}{}_i^w\right)\left(p_j - \overset{*}{q}{}_j^w\right).$$

La forme quadratique $\overset{*}{A}{}^{ij} X_i X_j$ étant définie négative, en un point d'intersection d'une bicaractéristique issue de $M_0 \notin \mathcal{S}^w$ avec $\mathcal{S}^w$ on a : $\frac{\partial \mathcal{F}^w}{\partial \lambda_1} > 0$.

D'où le résultat suivant établi par J. TOLEN [33] :

Lemme 2.1.3.1. *Sous les hypothèses* $\mathbf{H_0}$ *et* $\mathbf{H_2}$*, il existe un domaine* $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$ *défini par:*

$$\begin{cases} \phi\left(x^i\right) \leq x^0 \leq \phi\left(x^i\right) + a_1\left(x^i\right) \\ \left(x^i\right) \in \mathcal{D} \end{cases}$$

avec a_1 *fonction continue, positive dans* $\overset{o}{\mathcal{D}}$ *telle que: pour tout* $M_0 \in \Gamma_1$*, la projection sur l'espace des* (x^i) *de* $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$*, notée* $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)_x$*, est contenue dans* $\mathcal{D}$*;* $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$ *étant la partie de* $\mathcal{C}^-_{M_0}$ *située entre* M_0 *et* $\mathcal{S}$*.*

Toute bicaractéristique issue de M_0 *coupe* $\mathcal{S}$ *en un point et un seul correspondant à un paramètre* $\lambda_1 = \psi\left(x_0^\alpha; \lambda_h\right)$ *solution de l'une ou l'autre des équations* $\mathcal{F}^w\left(x_0^\alpha; \lambda_1, \lambda_h\right) = 0$*,* $w = 1, 2$*.*

On a en outre l'existence de constantes positives K_0 *et* K_1 *telles que:*

$$(2.1.3.3) \qquad K_1 a < \left|\psi\left(x_0^\alpha; \lambda_h\right)\right| < K_0 x_0^0, \text{ où } a = x^0 - \phi\left(x^i\right).$$

En vue de l'établissement des formules de Kirchhoff, on se doit de déterminer à l'intérieur du domaine Γ_1 un domaine vérifiant l'hypothèse de *causalité* c'est à dire un domaine Γ_2 contenu dans Γ_1 et tel que pour tout point M_0 de Γ_2, $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$ est contenu dans Γ_2 et M_0 est l'unique point singulier de $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$. C'est ainsi que J. TOLEN [33] a établi le résultat suivant qui affine le résultat précédent:

Lemme 2.1.3.2. *Etant donnée une constante A, il existe un domaine* $\Gamma_2(A) \subset \Gamma_1$ *défini par:*

$$\begin{cases} \phi\left(x^i\right) \leq x^0 \leq \phi\left(x^i\right) + a_2\left(x^i, A\right) \\ \left(x^i\right) \in \mathcal{D} \end{cases}$$

où a_2 *est une fonction continue de* x^i *et de* A*,* $0 < a_2\left(x^i, A\right) \leq A$ *pour* $\left(x^i\right) \in \overset{o}{\mathcal{D}}$*;*

tel que:

- *Pour tout* $M_0 \in \Gamma_2(A)$*,* $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right) \subset \Gamma_2(A)$*;*
- M_0 *est l'unique point singulier de* $\left(\mathcal{C}^-_{M_0}\right)$*;*
- *Pour tout* $M_0 \in \Gamma_2(A)$*,* $M_0 \notin \mathcal{S}$*,* $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}^-_{M_0}$ *est une* $2-$*surface représentée par:*

$\lambda_1 = \psi\left(x_0^\alpha; \lambda_h\right)$*; où* ψ *est continue et vérifie:*

$$(2.1.3.4) \quad K_1 a < \left|\psi\left(x_0^\alpha; \lambda_h\right)\right| < K_0 x_0^0; \quad K_0, K_1 \text{ constantes positives.}$$

2.1.4. ***Formules de KIRCHHOFF***.

Le domaine $\Gamma_2(A)$ vérifiant les conditions de *causalité*, d'après l'étude faite par Y. CHOQUET-BRUHAT [11] pour le problème de Cauchy à données initales sur une hypersurface spatiale et rappelée au chapitre précédent, en utilisant le *lemme* 2.1.3.2 et la *proposition* 1.3.2.1 on a le résultat suivant:

Proposition 2.1.4.1. *Si les hypothèses* $\mathbf{H_0}$ *et* $\mathbf{H_2}$ *sont satisfaites pour le problème de Cauchy caractéristique* (2.1.2.2) *dans* $\Gamma_2(A)$,

si les données de Cauchy vérifient: les φ_r^w *sont des fonctions deux fois continûment différentiables sur* $\mathcal{D}^w$ *telles que* $\varphi_r^1\left(0, x^2, x^3\right) = \varphi_r^2\left(0, x^2, x^3\right)$,

si les fonctions u_r *forment une solution du problème de Cauchy caractéristique* (2.1.2.2) *dans* $\Gamma_2(A)$.

Alors, pour tout $M_0(x_0^\alpha) \in \Gamma_2(A)$ *on a:*

$$(\mathcal{E}_s) : 4\pi u_s(x_0^\alpha) = \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} \sin\lambda_2 d\lambda_2 \int_0^{\psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)} d\lambda_1 \Box \left([u_r] L_s^r + \sigma_s^r [f_r]\right) + \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \mathcal{J}_s$$

où, sur $\mathcal{S}_w \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$:

$$(2.1.4.1)\ \mathcal{J}_s(x_0^\alpha;\lambda_h) = \frac{\Delta}{\frac{\partial \mathcal{F}^w}{\partial\lambda_1}}\left(\overset{*}{q}{}_i^w - p_i\right)\left\{\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma_s^r \frac{\partial \overset{*}{\varphi}{}_r^w}{\partial y^j} - \overset{*}{\varphi}{}_r^w \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma_s^r\right) + \sigma_s^r\left[\overset{*}{B}{}_r^{it}\right]\overset{*}{\varphi}{}_t^w\right\}.$$

Cette formule découle de (1.4.2.6) et de la première remarque de 1.4.3

Remarque 2.1.4.1. *Compte tenu de la première remarque de* 1.4.3 *du premier chapitre, de* (2.1.4.1) *et de* $(1.4.2.4)'$ *on a:*

$$(2.1.4.2)\ \ E_s^i = -\overset{*}{\varphi}{}_r^w \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma_s^r\right) + \left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\sigma_s^r \frac{\partial \overset{*}{\varphi}{}_r^w}{\partial y^j} + \sigma_s^r\left[\overset{*}{B}{}_r^{it}\right]\overset{*}{\varphi}{}_t^w.$$

2.1.5. ***Comportement de*** $\psi(x_0^\alpha;\lambda_h)$ ***lorsque*** $M_0(x_0^\alpha)$ ***tend vers*** $P(x_P^\alpha) \in \mathcal{S}^w$.

La relation (2.1.3.2) montre que lorsque $M_0(x_0^\alpha)$ tend vers $P(x_P^\alpha) \in \mathcal{S}^w$, $\frac{\partial \mathcal{F}^w}{\partial \lambda_1}$ tend vers zéro. Par conséquent d'après (2.1.4.1), les fonctions $\mathcal{J}_s(x_0^\alpha;\lambda_h)$ ne sont pas bornées; ce qui complique l'étude des intégrales doubles qui figurent dans les équations intégrales $(\mathcal{E}_s)$ lorsque l'on se rapproche des hypersurfaces caractéristiques $\mathcal{S}^w$.

Dans sa thèse, F. CAGNAC [5] a montré que dans le cas des problèmes à données initiales sur un conoïde caractéristique $\mathcal{C}_O$, ce n'est que sur les bicaractéristiques "parallèles" à $\mathcal{C}_O \cap \mathcal{C}_P^-$ qu'il y a de véritables difficultés. Pour ce qui est des problèmes à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes $\mathcal{S}^1$ et $\mathcal{S}^2$, le problème ne se pose que sur les bicaractéristiques "voisines" de la bicaractéristique $\mathcal{B}_P = \mathcal{S}^w \cap \mathcal{C}_P^-$. C'est ce qui justifie l'introduction de nouvelles variables $(\lambda_{h'})$ qui sont telles que $\lambda_{2'} = 0$ détermine la bicaractéristique de contact $\mathcal{B}_P$.

Pour résoudre le problème ainsi posé J. TOLEN [33] a établi le résultat suivant:

Lemme 2.1.5.1. *Etant donnés deux réels strictement positifs* λ' *et* ε, *il existe un réel positif* $\eta\left(\varepsilon,\lambda'\right)$ *tel que:*

$$\forall M_0(x_0^\alpha) \in \mathit{\Gamma}_1, \left(a < \eta\left(\varepsilon,\lambda'\right), \lambda_{2'} > \lambda'\right) \Rightarrow |\psi(x_0^\alpha;\lambda_{h'})| < \varepsilon, \text{ avec } a = x_0^0 - \phi\left(x_i^0\right).$$

En vue d'une utilisation optimale de ce résultat, son affinement s'avère nécessaire. C'est ainsi que J. TOLEN [33] énonce, sans preuve, le résultat ci-après dont on donne une preuve dans [23]:

Lemme 2.1.5.2. *Il existe des constantes positives* K *et* k *telles que:*

$$\forall \alpha \in]0,1[, \forall M_0 \in \mathit{\Gamma}_1, \begin{pmatrix} a < K\alpha^2 \\ \cos\lambda_{2'} < 1-\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi(x_0^\alpha;\lambda_h)| < \frac{k}{\alpha} a.$$

Preuve. **Voir Appendice A2** [23]. □

Remarque 2.1.5.1. *Dans la démonstration du lemme 2.1.5.2 , on constate qu'il est possible de minorer* $\frac{\partial \mathcal{F}^w}{\partial \lambda_1}$*, donc de majorer* $\mathcal{J}_s(x_0^\alpha; \lambda_h)$ *dans un voisinage du point* $M_0(x_0^\alpha)$ *qui tend vers un point* P *de* $\mathcal{S}$*.*

Les deux lemmes précédents serviront aussi dans l'étude des intégrales triples qui apparaissent dans les formules de Kirchhoff.

Pour pouvoir majorer $\mathcal{J}_s(x_0^\alpha; \lambda_h)$ *dans tout un voisinage de la bicaractéristique de contact* $\mathcal{B}_P$*, les deux lemmes précédents sont insuffisants dans la mesure où ils ne concernent que la partie des* $2-$*surfaces* $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$ *qui est voisine de* M_0*. Il est nécessaire de faire l'étude complète des* $2-$*surfaces* $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$*. Dans le paragraphe suivant, on rappelle les résultats obtenus à cet effet par J. TOLEN* [33] *pour des systèmes linéaires. La méthode utilisée pour l'étude de ces* $2-$*surfaces consiste à adapter, au cas des problèmes à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes, les méthodes employées par F. CAGNAC* [5] *dans le cadre des problèmes à données initiales sur un demi-conoïde caractéristique.*

2.2. ETUDE DES 2-SURFACES $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$.

J. TOLEN [33] procède à cette étude en deux étapes, suivant en cela la voie tracée par F. CAGNAC [5] dans sa thèse pour des problèmes à données initiales sur un conoïde caractéristique. Se reférant à ce qui se passe dans le cas des systèmes linéaires à coefficients constants, F. CAGNAC [5] dans sa thèse a présumé l'allure que devraient avoir les $2-$surfaces $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$ lorsque M_0 tend vers un point P de $\mathcal{S}$. C'est ce qui justifie l'introduction d'un nouveau système de coordonnées (ζ^α) qui facilitera l'étude des $2-$surfaces $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$. Malheureusement on verra dans la suite que ce nouveau système de coordonnées ne sera bénéfique que sur une partie des $2-$surfaces $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$. Et ainsi on sera amené à introduire encore d'autres systèmes de coordonnées.

2.2.1. ***Etude de*** $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$ ***pour*** $M_0(x_0^\alpha)$ ***au dessus de*** $\mathcal{S}^w$ ***et situé dans un domaine*** $a < C|x_0^1|$***, où*** $a = x_0^0 - \phi(x_0^i)$.

A/- Système de coordonnées (ζ^α) **associés à** $P \in S^w$.

Pour étudier $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap \mathcal{S}^w$ quand M_0 est dans le voisinage d'un point $P \in \mathcal{S}^w$, on introduit un système de coordonnées (ζ^α) dans lequel la bicaractéristique $\mathcal{B}_P$ tracée sur $\mathcal{S}^w$ et passant par P aura pour équations: $\zeta^2 = \zeta^3 = 0$. On montrera que avec ce nouveau système de coordonnées, pour M_0 qui est dans le voisinage d'un point $P \in \mathcal{S}^w$, la $2-$surface $\mathcal{S}^w \cap \mathcal{C}_{M_0}^-$ admet une représentation paramétrique qui vérifie de bonnes inégalités qui permettent en particulier de faire l'étude des intégrales doubles, sauf au voisinage de M_0 et sur $\mathcal{T}$.

Pour $P(\xi^\alpha) \in \mathcal{S}^w$, soit (z^λ) le système de coordonnées associé à P (suivant les définitions du paragraphe 1.3.2) :

$$z^\lambda = \overset{0}{a}{}_\mu^\lambda(\xi^\alpha) . x^\mu.$$

Alors, la bicaractéristique $\mathcal{B}_P = \mathcal{C}_P^- \cap \mathcal{S}^w$ admet une représentation paramétrique:

$$(2.2.1.1) \quad Y^\lambda(\mu, \xi^i) = y^\lambda(\lambda_1 = \mu, \xi^i, \pi^i(\xi^j)),$$

où:

$$\pi^i = -\frac{\partial \overset{*}{\phi}{}^{w}}{\partial y^i}\left(z_P^j;\xi^j\right) \text{ fonctions trois fois différentiables de ses variables.}$$

A tout point de $\mathcal{B}_P$, de paramètre $\lambda_1 = \mu$, on fait correspondre une matrice $\left(\gamma_i^j\left(\mu,\xi^k\right)\right)$ telle que:

$$(2.2.1.2)\left\{\begin{array}{l} i)\ \gamma_1^i = \frac{\partial Y^i}{\partial \mu};\\ ii)\ \text{Dét}\left(\gamma_j^i\right) > k > 0, k \text{ constant dans tout le domaine de variation des } \xi^k\\ \ \text{ et de } \mu;\\ iii)\ \text{Les } \gamma_h^i\left(\mu,\xi^j\right)\ \ (h=2,3)\ \text{ sont trois fois différentiables et bornées;}\\ iv)\ \left(\gamma_j^i\left(0,\xi^k\right)\right) = \left(\underset{0\,j}{\gamma^i}\right)\ \text{ est une matrice orthogonale.}\end{array}\right.$$

Alors, à $\left(\zeta^\lambda\right)$ correspond un point de coordonnées $\left(z^\lambda\right)$ dans le système de coordonnées associé à P par les relations:

$$(2.2.1.3)\left\{\begin{array}{l} z^i = Y^i\left(\zeta^1,\xi^j\right) + \gamma_h^i\left(\zeta^1,\xi^j\right)\zeta^h\ ,\ h=2,3\\ z^0 = \zeta^0.\end{array}\right.$$

Et pour tout point $M\left(z^\alpha\right)$ appartenant à $\mathcal{B}_P$ on a: $\zeta^2 = 0 = \zeta^3$.

En utilisant (2.2.1.2) et le *lemme* 2.1.5.1 on a le résultat suivant établi par J. TOLEN [33]:

Lemme 2.2.1.1.

Il existe un voisinage $\mathcal{V}\ (\mathcal{B}_P)$ *de la bicaractéristique* $\mathcal{B}_P = \mathcal{C}_P^- \cap \mathcal{S}$ *tel que:*

- (2.2.1.3) *y définit un changement de coordonnées;*

- *Les fonctions* $z^i\left(\xi^j,\zeta^j\right)$ *et* $\zeta^i\left(\xi^j,z^j\right)$ *qui définissent ce changement de coordonnées sont trois fois différentiables et à dérivées bornées;*

-

$$\forall M_0 \in \mathcal{V}\left(\mathcal{B}_P\right),\quad \left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right) \subset \mathcal{V}\left(\mathcal{B}_P\right);\ \left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right)\ \textit{étant la partie de } \mathcal{C}_{M_0}^- \textit{ située entre } M_0 \textit{ et } \mathcal{S}.$$

B/ Système de coordonnées $(\overline{a},\zeta^i)$. Le système de coordonnées précédemment défini sera utilisé uniquement dans une portion de $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap \mathcal{S}^w$. Etant donné un point P de $\mathcal{S}$, on se limitera aux points M_0 situés dans un voisinage de $\mathcal{B}_P$ et qui dans le système de coordonnées $\left(z^\lambda\right)$ associé à P, ont pour coordonnées:

$$(2.2.1.4)\left\{\begin{array}{l} z_0^i = z_P^i\\ z_0^0 = z_P^0 + \overline{a}.\end{array}\right.$$

En vue de l'obtention de ce nouveau système de coordonnées, J. TOLEN [33] a établi le résultat suivant:

Lemme 2.2.1.2.

Il existe une constante positive C_1 *telle que, à tout* $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ *appartenant à*

$$W_1 : \left\{\begin{array}{ll} a < C_1\left|x_0^1\right| & \qquad a = x_0^0 - \phi\left(x_0^i\right)\\ \left(x_0^i\right) \in \mathcal{D}^w & \end{array}\right.$$

correspond un point $P\left(\xi^{\alpha}\left(x_0^{\nu}\right)\right)$ de $\mathcal{S}^w$ et un seul de telle sorte que, dans le système de coordonnées associé à P, les coordonnées $\left(z_0^{\alpha}\right)$ de M_0 et $\left(z_P^{\alpha}\right)$ de P vérifient:

$$\left\{\begin{array}{l} z_0^i = z_P^i \\ z_0^0 = z_P^0 + \overline{a} \end{array}\right.$$

$\overline{a}\left(x_0^{\alpha}\right)$ étant une fonction trois fois différentiable et à dérivées bornées.

L'objectif final de ces résultats étant de pouvoir les utiliser pour étudier les intégrales doubles dans les formules de Kirchhoff, il est nécessaire de combiner les deux résultats précédents. J. TOLEN [33] a à cet effet établi le résultat suivant:

Lemme 2.2.1.3. *Il existe une constante positive $C_2 \leq C_1$ telle que, à tout point $M_0\left(x_0^{\alpha}\right)$ appartenant à $W_2 : \left\{a < C_2\left|x_0^1\right|\right\}$ correspond un point $P\left(\xi^{\alpha}\left(x_0^{\nu}\right)\right)$ de $\mathcal{S}$ de sorte que:*

i) dans le système de coordonnées $\left(z^{\lambda}\right)$ associé à P, les coordonnées de M_0 et P vérifient:

$$\left\{\begin{array}{l} z_0^i = z_P^i \\ z_0^0 = z_P^0 + \overline{a} \end{array}\right. ;$$

ii) $\left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right) \subset \mathcal{V}\ \left(\mathcal{B}_P\right) \equiv$ domaine de validité du système de coordonnées $\left(\zeta^{\lambda}\right)$ associé à P;

iii) les fonctions $\xi^i\left(x_0^{\alpha}\right)$, $\overline{a}\left(x_0^{\alpha}\right)$, $x_0^{\alpha}\left(\xi^i,\overline{a}\right)$ sont trois fois différentiables et à dérivées bornées;

iv) Si $\left(x_0^i\right) \in \mathcal{D}^w$ alors $P \in \mathcal{S}^w$.

C/ Equations de $\left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right)$ et $\mathcal{S}^w$ en coordonnées $\left(\zeta^{\lambda}\right)$.

i) **Equation de $\left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right)$.**

En utilisant le *lemme* 2.1.3.2 et le *lemme* 2.2.1.3, J. TOLEN [33, p. 59] a établi qu'en coordonnées $\left(z^{\lambda}\right)$ associées à $P\left(\xi^{\alpha}\right)$, $\left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right)$ admet une équation: $z^0 = F_P\left(\overline{a},\xi^i;z^i\right)$,

où F_P est une fonction trois fois différentiable par rapport à toutes ses variables sauf pour $z^i = z_0^i$, et ses dérivées premières sont bornées.

En passant en coordonnées $\left(\zeta^{\lambda}\right)$ on a:

$$(2.2.1.5)\quad \zeta^0 = F_P\left(\overline{a},\xi^i;z^i\left(\xi^j,\zeta^j\right)\right) = \widetilde{F}\left(\overline{a},\xi^i;\zeta^i\right),$$

avec:

- $\widetilde{F}$ trois fois différentiable sauf en $\zeta^i = 0$ et ses dérivées premières sont bornées;
- $\widetilde{F}$ et $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \overline{a}}$ admettent les développements limités suivants au voisinage de $\left(\overline{a} = 0, \xi^i; \zeta^i = 0\right)$:

$$(2.2.1.6)\left\{\begin{array}{l} \widetilde{F}\left(\overline{a},\xi^i;\zeta^i\right) = z_P^0\left(\xi^i\right) + \overline{a} - \widetilde{s} + K\left(\widetilde{s}+\overline{a}\right)^2, \\ \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \overline{a}} = 1 + K\left(\widetilde{s}+\overline{a}\right), \end{array}\right.$$

où:

$$K \text{ est une fonction bornée et } \widetilde{s} = \left[\sum_{i=1}^{3}\left(\zeta^i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

- Au voisinage de $(\overline{a}=0,\xi^i;\zeta^i=0)$, les dérivées d'ordre supérieur ou égal à deux de $\widetilde{F}$ admettent les développements limités suivants:

$$(2.2.1.7)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2\widetilde{F}}{(\partial\overline{a})^2}=K, \frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\overline{a}\partial\zeta^i}=K, \frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\overline{a}\partial\xi^i}=K, \\ \frac{\partial^3\widetilde{F}}{\partial\overline{a}\partial\zeta^i\partial\zeta^j}=\frac{K}{\widetilde{s}}\ , K \text{ fonction bornée.} \end{cases}$$

On a en outre:

$$(2.2.1.8)\quad \left|\frac{\partial^r\widetilde{F}}{\partial\xi^{i_1}...\left(\partial\overline{a}\right)^k\partial\zeta^{j_1}...}\right|<\frac{k}{\widetilde{s}^{r-1}}, \text{où } r\leq 3, k \text{ constante } >0.$$

ii) Equation de $\mathcal{S}^w$.

La partie de $\mathcal{S}^w$ contenue dans $\mathcal{V}$ $(\mathcal{B}_P)$ admet en coordonnées $\left(z^\lambda\right)$ associé à P une équation de la forme $z^0=\overset{*}{\phi}{}^w\left(\xi^i,z^i\right)$. Par suite en coordonnées $\left(\zeta^\lambda\right)$ elle admet une équation de la forme:

$$(2.2.1.9)\quad \begin{cases} \zeta^0=\widetilde{\phi}^w\left(\xi^i;\zeta^i\right) \text{ où} \\ \widetilde{\phi}^w\left(\xi^i;\zeta^i\right)=\overset{*}{\phi}{}^w\left(\xi^i;z^i\left(\xi^j,\zeta^j\right)\right) \end{cases}$$

avec $\widetilde{\phi}^w$ trois fois différentiable par rapport à l'ensemble de ses variables et à dérivées premières bornées.

D) Equation de $\mathcal{C}^-_{M_0}\cap\mathcal{S}^w$ dans un domaine $\zeta^1\leq -$ma. Pour tout $M_0\left(x_0^\alpha\right)\in W_2$, $\left(x_0^i\right)\in\mathcal{D}^w$, $\mathcal{C}^-_{M_0}\cap\mathcal{S}^w$ a pour équation:

$$(2.2.1.10)\quad \mathcal{G}\left(\overline{a},\xi^i;\zeta^i\right)\equiv\widetilde{F}\left(\overline{a},\xi^i;\zeta^i\right)-\widetilde{\phi}\left(\xi^i;\zeta^i\right)=0.$$

On introduit les variables ρ et α définies par:

$$(2.2.1.11)\quad \zeta^h=\rho\alpha^h, \text{où } \alpha^2=\sin\alpha,\alpha^3=\cos\alpha,\alpha\in[0,2\pi]$$

Il a été établi par F. CAGNAC [6, p. $378-379$] le résultat suivant:

Lemme 2.2.1.4.

Si les hypothèses $\mathbf{H}_2$ *et* $\mathbf{H}_0$ *sont vérifiées.*
Il existe deux constantes positives k_A *et* k_B *telles que:*
i) Pour $\zeta^1<0$ *et* $\alpha\in[0,2\pi]$,

$$A\left(\xi^i,\zeta^1,\alpha\right)\equiv-\alpha^h\alpha^k\frac{\partial^2 G}{\partial\zeta^h\partial\zeta^k}\left(\xi^i,\zeta^1,0,0\right)>\frac{k_A}{|\zeta^1|}$$

ii)

$$B\left(\xi^i,\zeta^1\right)\equiv\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\overline{a}}\left(\xi^i,0,\zeta^1,0,0\right)>k_B$$

où

$$G\left(\xi^i,\zeta^i\right)=\widetilde{F}\left(0,\xi^i;\zeta^i\right)-\widetilde{\phi}\left(\xi^i;\zeta^i\right)=\mathcal{G}\left(0,\xi^i;\zeta^i\right)$$

Moyennant les inégalités $(2.2.1.7 - 8)$ et le *lemme* 2.2.1.4, il a été établi par J. TOLEN [33] le résultat suivant qui, non seulement donne une représentation paramétrique de $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ mais aussi, donne de la fonction qui représente cette 2−surface de bons développements limités et d'intéressantes majorations.

Lemme 2.2.1.5.

Il existe des constantes m, k_1 et K_1 telles que:
- pour tout $M_0\left(x_0^\alpha\right) \in W_2$, $\left(x_0^i\right) \in \mathcal{D}^w$,
- dans le domaine $\zeta^1 \leq -ma$,
$\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ *admet une représentation paramétrique de la forme $\rho = \overline{\omega}\left(\overline{a}, \xi^i; \zeta^1, \alpha\right)$ telle que:*
i) $\overline{\omega}$ est une fonction trois fois différentiable,
ii) $\overline{\omega}$ vérifie:

$$(2.2.1.12)\; k_1\sqrt{a}\sqrt{|\zeta^1|} < \overline{\omega} < K_1\sqrt{a}\sqrt{|\zeta^1|},$$

iii) $\overline{\omega}$ et $\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{a}}$ admettant les développements limités suivants au voisinage de $(0, \xi^i; \zeta^1, \alpha)$:

$$(2.2.1.13)\begin{cases} \overline{\omega} = \sqrt{\overline{a}}\sqrt{\frac{2B(\xi^i,\zeta^1)}{A(\xi^i,\zeta^1,\alpha)}}\left[1 + \frac{K\sqrt{a}}{\sqrt{|\zeta^1|}}\right], \\ \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{a}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{a}}}\sqrt{\frac{B(\xi^i,\zeta^1)}{2A(\xi^i,\zeta^1,\alpha)}}\left[1 + \frac{K\sqrt{a}}{\sqrt{|\zeta^1|}}\right]. \end{cases}$$

On a en outre les majorations suivantes:

$$(2.2.1.14)\begin{cases} \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\alpha}\right| < K, \left|\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\zeta^1}\right| < K, \left|\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\xi^i}\right| < K, \\ \left|\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{a}}\right| < K\sqrt{\frac{|\zeta^1|}{a}}, K \text{ constante positive.} \end{cases}$$

E) Etude de $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ dans un domaine $-\mathbf{b} < \zeta^1 \leq \mathbf{0}$. J. TOLEN [33] montre qu'il est possible de choisir m tel que dans le domaine $-ma < \zeta^1 \leq 0$, la représentation paramétrique $\rho = \varpi\left(\overline{a}, \xi^i; \zeta^1, \alpha\right)$ soit encore valable. En outre pour cette représentation, on a des majorations intéressantes des dérivées premières de ω. C'est ainsi qu'est établi le résultat suivant dans $[33, \text{p. } 62 - 68]$:

Lemme 2.2.1.6.

Il existe une constante $C_3 \leq C_2$ et des constantes b, k_2 et K_2 telles que:
i) $a < C_3\left|x_0^1\right| \Rightarrow -ma > -b$
ii) Pour tout $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ appartenant à W_3 : $\begin{cases} a < C_3\left|x_0^1\right| \\ \left(x_0^i\right) \in \mathcal{D}^w \end{cases}$
- dans le domaine $-b < \zeta^1 < 0$,
$\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ *admet une représentation paramétrique $\rho = \varpi\left(\overline{a}, \xi^i; \zeta^1, \alpha\right)$ telle que::*

$$(2.2.1.15) \quad k_2\sqrt{a\left(a + |\zeta^1|\right)} < \varpi < K_2\sqrt{a\left(a + |\zeta^1|\right)}$$

• *ϖ est une fonction trois fois différentiable par rapport à l'ensemble de ses variables.*

- *On a les développements limités suivants au voisinage de:* $\overline{a}=0$, $\zeta^1=0$

$$(2.2.1.16)\left\{\begin{array}{l} \varpi=\sqrt{\overline{a}\left(\overline{a}-2\zeta^1\right)}\left[1+K\left(a+\left|\zeta^1\right|\right)\right] \\ \frac{\partial\varpi}{\partial\zeta^1}=-\frac{\sqrt{\overline{a}}}{\sqrt{\overline{a}-2\zeta^1}}+K\left(a+\left|\zeta^1\right|\right),\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha}=K\left(a+\left|\zeta^1\right|\right) \\ \frac{\partial\varpi}{\partial\overline{a}}=\frac{\overline{a}-\zeta^1}{\sqrt{\overline{a}\left(\overline{a}-2\zeta^1\right)}}\left[1+K\left(a+\left|\zeta^1\right|\right)\right],\ \frac{\partial\varpi}{\partial\xi^i}=K\left(a+\left|\zeta^1\right|\right) \end{array}\right.$$

De plus on a les majorations suivantes:

$$(2.2.1.17)\left\{\begin{array}{l} \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varpi}{\partial\overline{a}}\right|<K,\left|\frac{\partial\varpi}{\partial\zeta^1}\right|<K,\left|\frac{\partial\varpi}{\partial\xi^i}\right|<K \\ \left|\frac{\partial\varpi}{\partial\overline{a}}\right|<K\frac{\sqrt{a+\left|\zeta^1\right|}}{\sqrt{a}}. \end{array}\right.$$

F) Etude de $\mathcal{C}^-_{M_0}\cap\mathcal{T}$. Il s'agit ici d'étudier le comportement de ζ^1 pour les points de $\mathcal{C}^-_{M_0}\cap\mathcal{T}$.
.

Définition 2.2.1.1. *: **Définition de la fonction μ_0***
Etant donné le point $P\left(\phi^w\left(\xi^j\right),\xi^i\right)$ de $\mathcal{S}^w$, la bicaractéristique $\mathcal{B}_P$ tracée sur $\mathcal{S}^w$ et passant par P rencontre $\mathcal{T}$ en un point O de coordonnées $\zeta^1=\mu_0\left(\xi^i\right)$, $\zeta^2=\zeta^3=0$, où $\mu_0\left(\xi^i\right)$ est la solution en λ_1 de l'équation: $z^0\left(\xi^i;\lambda_1,\pi^i\left(\xi^j\right)\right)=0$.

C'est une conséquence de la définition du système de coordonnées (ζ^α) et de $(2.2.1.1)$.
Il a été établi par J. TOLEN [33] le résultat suivant:

Lemme 2.2.1.7. *Il existe une constante $C_4\leq C_3$ et une constante K_3 telles que pour tout point $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ appartenant à W_4 : $\left\{\begin{array}{l} a\leq C_4\left|x_0^1\right| \\ \left(x_0^i\right)\in\mathcal{D}^w \end{array}\right.$, $P\left(\xi^\alpha\left(x_0^\alpha\right)\right)$ étant le point associé à $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ (cf. lemme 2.2.1.2, $\mu_0\left(\xi^i\right)$ étant la fonction définie ci-dessus;*

$$(2.2.1.18)\left\{\begin{array}{l} i)\textit{Pour tout point de } \mathcal{C}^-_{M_0}\cap\mathcal{T} \\ \quad .\ \left|\zeta^1-\mu_0\right|<K_3\sqrt{a}\sqrt{a+\left|\zeta^1\right|} \\ \quad .\ \zeta^1<\frac{\mu_0\left(\xi^i\right)}{2} \\ ii)\ ma<\left|\frac{\mu_0\left(\xi^i\right)}{2}\right|. \end{array}\right.$$

G) Etude de $\mathcal{C}^-_{M_0}\cap\mathcal{S}^w$ dans le domaine $\zeta^1\geq 0$. On utilise dans ce domaine la représentation de $\mathcal{C}^-_{M_0}\cap\mathcal{S}^w$ définie par: $\lambda_1=\psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)$. C'est ainsi que dans [33] est établi le résultat suivant:

Lemme 2.2.1.8.
Pour toute constante donnée m', il existe $C\left(m'\right)$ telle que pour tout

$$M_0\left(x_0^\alpha\right)\in\left\{\begin{array}{l} a\leq C\left(m'\right)\left|x_0^1\right| \\ \left(x_0^i\right)\in\mathcal{D}^w \end{array}\right.$$

Sur la partie de $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ *telle que* $\zeta^1 > -m'a$:
i) $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ *admet la représentation paramétrique* $\lambda_1 = \psi\left(x_0^\alpha, \lambda_{h'}\right)$;
ii) On a les inégalités suivantes:

$$(2.2.1.19) \left\{ \begin{array}{l} \left|\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_{h'}\right)\right| < k_1\left(m'\right) a \\ \lambda_{2'} > \lambda_0'\left(m'\right) \\ \frac{\partial \mathcal{F}^w}{\partial \lambda_1} > k_2\left(m'\right) \end{array} \right. , k_1\left(m'\right), \lambda_0'\left(m'\right), k_2\left(m'\right) \textit{ constantes.}$$

En prenant pour m' le réel m du *lemme* 2.2.1.4, on a le résultat suivant établi par J. TOLEN [33]:

Lemme 2.2.1.9. *Il existe une constante* $C_5 \leq \min\left(C_4, C(m)\right)$ *telle que pour tout* $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ *appartenant à*

$$\left\{ \begin{array}{l} a < C_5\left|x_0^1\right| \\ \left(x_0^i\right) \in \mathcal{D}^w \end{array} \right. ,$$

sur la partie de $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ *située dans le domaine* $\zeta^1 > -ma$ *on ait:*

$$(2.2.1.19)' \left\{ \begin{array}{l} i) \;\; (2.2.1.19) \quad \textit{est vérifié} \\ ii) \;\; \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_0^\alpha}\right| < K, \left|\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_{h'}}\right| < Ka \end{array} \right.$$

• *En outre la courbe* $(\mathcal{C})$ *de* $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ *d'équation* $\zeta^1 = 0$ *peut être représentée par une équation* $\lambda_{2'} = \gamma\left(x_0^\alpha, \lambda_{3'}\right)$ *avec:*

$$(2.2.1.17) \left\{ \begin{array}{l} .\; \gamma \textit{ est dérivable par rapport à ses variables} \\ .\; \left|\gamma\left(\lambda_{3'}\right) - \frac{\pi}{2}\right| < Ka. \end{array} \right.$$

H) Etude de $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^{w'}$. On suppose toujours que $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ est au dessus de $\mathcal{S}^w$ et on appelle $\mathcal{S}^{w'}$ l'autre partie de $\mathcal{S}$. J. TOLEN [33] a établi le résultat suivant:

Lemme 2.2.1.10. *Etant donnés* $R\left(\phi^w\left(x_R^i\right), x_R^i\right)$ *appartenant à* $\mathcal{S}^w \setminus \mathcal{T}$, λ_0' *un réel strictement positif; il existe* $\eta_0\left(R, \lambda_0'\right)$ *réel strictement positif tel que: pour tout* $M_0\left(x_0^\alpha\right)$,

$$\left|x_0^\alpha - x_R^\alpha\right| < \eta_0 \Rightarrow \sup\left\{\lambda_{2'}, \left(\lambda_{2'}, \lambda_{3'}\right) \in \Diamond_2'\right\} < \lambda_0'$$

où $\Diamond_2'$ *est le domaine décrit par les couples* $\left(\lambda_{2'}, \lambda_{3'}\right)$ *pour lesquels la bicaractéristique issue de* M_0 *rencontre* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathcal{S}^{w'}$. $\lambda_{2'}$ *et* $\lambda_{3'}$ *étant les paramètres associés à* $P\left(\phi^w\left(x_0^i\right), x_0^i\right)$.

En vue de l'étude complète des intégrales doubles, il est question de pouvoir obtenir une représentation paramétrique de $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^{w'}$ à partir de laquelle on puisse obtenir des inégalités appropriées. C'est ainsi que J. TOLEN [33] a établi le résultat suivant:

Lemme 2.2.1.11. *Il existe une constante positive* $C_6 \leq C_5$ *telle que pour tout* $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ *appartenant à* $W_6 : \left\{ \begin{array}{l} a \leq C_6\left|x_0^1\right| \\ \left(x_0^i\right) \in \mathcal{D}^w \end{array} \right.$

- *i)* $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^{w'}$ *admet une représentation paramétrique* $\lambda_1 = \psi\left(x_0^\alpha; \lambda_{h'}\right)$,

- ii) On a les inégalités suivantes:

$$(2.2.1.21) \quad \begin{cases} * \ \left|\psi\left(x_0^\alpha;\lambda_{h'}\right)\right| > \left|\frac{\mu_0\left(x_0^i\right)}{2}\right|, \\ * \ \frac{\partial\mathcal{F}^{w'}}{\partial\lambda_1} > k > 0, \\ * \ \left|\frac{\partial\mathcal{F}^{w'}}{\partial x_0^\alpha}\right| < K; \ \left|\frac{\partial\mathcal{F}^{w'}}{\partial\lambda_{h'}}\right| < K, \end{cases}$$

où Q est le point d'intersection de la bicaractéristique issue de $P\left(\phi^w\left(x_0^i\right),x_0^i\right)$ tracée sur $\mathcal{S}^w$ avec $\mathcal{T}$ et $\mu_0\left(x_0^i\right)$ est la valeur du paramètre λ_1 au point Q sur $\mathcal{C}_P^-$.

2.2.2. ***Etude de $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap \mathcal{S}$ pour $\mathbf{M}_0$ situé dans le domaine $\mathbf{a} > \mathbf{C}\left|x_0^1\right|$.*** On a le domaine $\left\{M\left(x_0^\alpha\right): \ a < C\left|x_0^1\right|\right\}$ qui est un voisinage de tout point $R \in \mathcal{S}\setminus\mathcal{T}$. Par contre tout voisinage de $R \in \mathcal{T}$ contient des points de $\left\{M\left(x_0^\alpha\right): \ a < C\left|x_0^1\right|\right\}$ et des points de $\left\{M\left(x_0^\alpha\right): \ a > C\left|x_0^1\right|\right\}$. D'où pour l'étude de $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap\mathcal{S}$ dans un domaine $\left\{M\left(x_0^\alpha\right): \ a > C\left|x_0^1\right|\right\}$, on peut se limiter aux points M_0 qui tendent vers un point $R \in \mathcal{T}$.

Le résultat suivant a à cet effet été établi par J. TOLEN [33]:

Lemme 2.2.2.1. *Quelle que soit la constante positive μ, il existe deux constantes $B(\mu)$ et $\alpha(\mu)$ telles que si $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ appartient au domaine $x_0^0 < B(\mu)$, $a > \mu x_0^0$:*
** $\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\mathcal{S}^w$ admet la représentation paramétrique $\lambda_1 = \psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)$*
** $\frac{\partial\mathcal{F}^w}{\partial\lambda_h} > \alpha$; $\left|\psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)\right| < Ka$.*

Puisque $a > C\left|x_0^1\right| \Rightarrow a > \mu x_0^0$, où $\mu = \mu(C)$, l'on déduit que le lemme ci-dessus achève l'étude de $\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\mathcal{S}$.

2.2.3. ***Récapitulatif de l'étude de la 2-surface $\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\mathcal{S}$.*** On récapitule dans le théorème suivant les résultats obtenus dans le cadre de l'étude de $\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\mathcal{S}$.

Théorème 2.2.3.1. *A/ Il existe trois constantes positives C, m, b telles que pour M_0 dans le domaine W défini par $\left\{M\left(x_0^\alpha\right): 0 < \ a < C\left|x_0^1\right|\right\}$ et situé au dessus de $\mathcal{S}^w$,*

i) dans le domaine $\zeta^1 \geq 0$, $\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\mathcal{S}^w$ est représentable en coordonnées $\left(\lambda_{2'},\lambda_{3'}\right)$ par l'équation $\lambda_1 = \psi\left(x_0^\alpha;\lambda_{h'}\right)$ tel que le lemme 2.2.1.9 soit vérifié.

ii) dans le domaine $0 > \zeta^1 > -b$, $\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\mathcal{S}^w$ est représentable en coordonnées $\left(\zeta^1,\alpha\right)$ par l'équation $\rho = \overline{\omega}\left(\overline{a},\xi^i;\zeta^1,\alpha\right)$ tel que le lemme 2.2.1.6 soit vérifié.

iii) dans le domaine $\zeta^1 \leq -ma$, $\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\mathcal{S}^w$ est représentable en coordonnées $\left(\zeta^1,\alpha\right)$ par l'équation $\rho = \overline{\omega}\left(\overline{a},\xi^i;\zeta^1,\alpha\right)$ tel que le lemme 2.2.1.5 soit vérifié.

iv) si M_0 appartient à $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap \mathcal{T}$, le lemme 2.2.1.7 est vérifié.

v) $\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\mathcal{S}^{w'}$ est représentable en coordonnées $\left(\lambda_{2'},\lambda_{3'}\right)$ par l'équation $\lambda_1 = \psi\left(x_0^\alpha;\lambda_{h'}\right)$ tel que le lemme 2.2.1.11 soit vérifié.

B/ Pour toute constante positive μ, il existe $B(\mu)$ telle que pour tout M_0 dans le domaine W' : $\left\{a > \mu x_0^0; \ x_0^0 < B(\mu)\right\}$, $\mathcal{C}_{M_0}^-\cap\mathcal{S}^w$ est représentée paramétiquement par $\left(\lambda_2,\lambda_3\right)$ à travers l'équation $\lambda_1 = \psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)$ de telle sorte que le lemme 2.2.2.1 *soit vérifié.*

2.3. ETUDE DES INTEGRALES DOUBLES.

On applique dans ce paragraphe, les résultats du *théorème* 2.2.3.1 à l'étude des intégrales doubles:

$$(2.3.0.1) \quad \mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right) = \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \mathcal{J}_s\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right),$$

où:

$$(2.3.0.2) \quad \mathcal{J}_s\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right) = E_s^i \left(\Delta_i^1 - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_h} \Delta_i^h\right).$$

D'après (1.4.2.2), (2.1.4.2) et (2.3.0.2) on a:

$$(2.3.0.3) \quad E_s^{iw} = -\frac{\partial \sigma_s^r}{\partial y^j} \left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right] \overset{*}{\varphi}{}_r^w + \sigma_s^r g_r^{iw},$$

où:

$$(2.3.0.4) \quad g_r^{iw} = \left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right] \frac{\partial \overset{*}{\varphi}{}_r^w}{\partial y^j} - \overset{*}{\varphi}{}_r^w \frac{\partial \left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]}{\partial y^j} + \left[\overset{*}{B}{}_r^{it}\right] \overset{*}{\varphi}{}_t^w.$$

Il découle des hypothèses faites sur les fonctions $A^{\lambda\mu}$, $B_s^{\lambda r}$, φ_r^w (*Hypothèse* $\mathbf{H}_2$) que les fonctions g_r^{iw} sont continues et bornées.

Il découle d'autre part de (1.5.4.1), (1.5.4.3), (1.6.1.1) et de la *proposition* 1.6.1.2 que:

$$(2.3.0.5) \quad \begin{cases} \sigma_s^r = \frac{\delta_s^r}{\lambda_1} + K, \frac{\partial \sigma_s^r}{\partial y^j} = \frac{\delta_s^r p_j^0}{\lambda_1^2} + \frac{K}{\lambda_1} \\ \left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right] = -\delta^{ij} + K\lambda_1 \end{cases}$$

On en déduit alors, comme dans le cas du problème à données initiales sur une hypersurface spatiale (*cf.* 1.6.3.1), que l'on a:

$$(2.3.0.6) \quad E_s^{iw} = \frac{p_i^0}{\lambda_1^2} \overset{*}{\varphi}{}_s^w + \frac{K}{\lambda_1},$$

Et donc:

$$(2.3.0.6)' \quad E_s^i = \frac{p_i^0}{\lambda_1^2} \overset{*}{\varphi}_s + \frac{K}{\lambda_1},$$

où K est une fonction bornée.

2.3.1. *Etude de* $\mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right)$ *lorsque* $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ *tend vers* $R\left(\phi^w\left(x_R^i\right), x_R^i\right) \in \mathcal{S}^w \backslash \mathcal{T}$.

On peut considérer ici que le point $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ est dans le domaine

$$\left\{a < C\left|x_0^1\right|, \left(x_0^i\right) \in \mathcal{D}^w\right\} \equiv W.$$

On appelle $\diamondsuit$ (resp. $\diamondsuit'$) l'ensemble des couples (λ_2, λ_3) tels que la bicaractéristique issue de M_0, de paramètres λ_2, λ_3 rencontre $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}^w$ $\left(\text{resp. } \mathcal{S}^{w'}\right)$.

On a donc:

$$\mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right) = \iint_\diamondsuit \mathcal{J}_s\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right) d\lambda_2 d\lambda_3 + \iint_{\diamondsuit'} \mathcal{J}_s\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right) d\lambda_2 d\lambda_3.$$

Si l'on prend à présent en compte la manière dont l'étude de $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap \mathcal{S}$ a été menée au paragraphe précédent, on pose pour M_0 appartenant à W :

$B\left(M_0\right) \equiv$ partie de $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap \mathcal{S}^w$ correspond à $\zeta^1 \geq 0$,

$C(M_0) \equiv$ partie de $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ correspond à $\zeta^1 \leq 0$,
$D(M_0) \equiv \mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^{w'}$.
On a alors:

$$\mathcal{I}_s(x_0^\alpha) = \mathcal{I}_B(x_0^\alpha) + \mathcal{I}_C(x_0^\alpha) + \mathcal{I}_D(x_0^\alpha)$$

avec:

$$\mathcal{I}_B = \textstyle\iint_{B(M_0)} d\lambda_2 d\lambda_3 \mathcal{J}_s(x_0^\alpha, \lambda_h), \quad \mathcal{I}_C = \iint_{C(M_0)} d\lambda_2 d\lambda_3 \mathcal{J}_s(x_0^\alpha, \lambda_h),$$
$$\mathcal{I}_D = \textstyle\iint_{D(M_0)} d\lambda_2 d\lambda_3 \mathcal{J}_s(x_0^\alpha, \lambda_h).$$

On revient à présent sur les résultats obtenus à cet effet par J. TOLEN [33] .

a) Etude de $\mathcal{I}_B$.

D'après le *lemme* 2.2.1.9, $\mathcal{C}^-_{M_0} \cap \mathcal{S}^w$ admet comme représentation paramétrique définie par l'équation $\lambda_1 = \psi(x_0^\alpha; \lambda_{h'})$. On utilise alors les variables $\lambda_{2'}$, $\lambda_{3'}$ et on a:

$$\mathcal{I}_B = \int_0^{2\pi} d\lambda_{3'} \int_{\gamma(\lambda_{3'})}^{\pi} d\lambda_{2'} E_s^{iw} \left(\Delta_i^{1'} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_{h'}} \Delta_i^{h'} \right).$$

On pose:

$$\mathcal{J}_s^{\prime w} = E_s^{iw} \left(\Delta_i^{1'} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_{h'}} \Delta_i^{h'} \right).$$

D'après le *lemme* 2.2.1.8, $\frac{\partial\mathcal{F}^w}{\partial\lambda_1}$ est minoré; on obtient donc comme dans le cas de problèmes à données initiales sur une hypersurface spatiale:

$$(2.3.1.1) \quad G_i' \equiv \Delta_i^{1'} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_{h'}} \Delta_i^{h'} = -(\sin\lambda_{2'})(\lambda_1)^2 \left[\frac{\overset{*}{q}{}_i^w - p_i^0}{1 - \sum_j \overset{*}{q}{}_j^w p_j^0} + K\lambda_1 \right].$$

De (2.3.0.6) et (2.3.1.1) on a:

$$\begin{aligned} (2.3.1.2) \quad \mathcal{J}_s^{\prime w} &= \sin\lambda_{2'} \overset{*}{\varphi}{}_s^w \left(x_0^\alpha, y^i\right) + K_1\lambda_1 \\ &= \sin\lambda_{2'} \varphi_s^w \left(\xi^i\right) + K'\lambda_1 + K''a \\ &= \sin\lambda_{2'} \varphi_s^w \left(\xi^i\right) + K''a, \end{aligned}$$

car dans ce cas on a $\lambda_1 = ka,$ d'après le *lemme* 2.2.1.8

En intégrant et en utilisant $\left|\gamma(\lambda_{3'}) - \frac{\pi}{2}\right| < Ka$, qui découle du *lemme* 2.2.1.9, on a:

$$(2.3.1.3) \quad \mathcal{I}_B(x_0^\alpha) = 2\pi\varphi_s^w\left(\xi^i\right) + Ka, \ K \text{ fonction bornée.}$$

b) Etude de $\mathcal{I}_C$.

D'après le *lemme* 2.2.1.5 et le *lemme* 2.2.1.6, on passe aux variables ζ^1, α et on a:

$$\mathcal{I}_C = \iint_{\Diamond_C} d\alpha d\zeta^1 \left| \frac{D(\lambda_{2'}, \lambda_{3'})}{D(\zeta^1, \alpha)} \right| \left(\Delta_i^{1'} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_{h'}} \Delta_i^{h'} \right) E_s^{iw}$$

où $\Diamond_C$ désigne le domaine de variation de (ζ^1, α) sur $C(M_0)$
On pose:

$$D_i = \left| \frac{D(\lambda_{2'}, \lambda_{3'})}{D(\zeta^1, \alpha)} \right| \left(\Delta_i^{1'} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_{h'}} \Delta_i^{h'} \right),$$
$$\mathcal{J}_{sC}^w = D_i E_s^{iw}.$$

En utilisant les deux systèmes de variables $(\lambda_1, \lambda_{2'}, \lambda_{3'})$ et (ρ, ζ^1, α) et les différentes équations de $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap \mathcal{S}^w$ définies par $\lambda_1 = \psi(x_0^\alpha; \lambda_{h'})$ et $\rho = \overline{\omega}(\overline{a}, \xi^i; \zeta^1, \alpha)$ on a:

$$(2.3.1.4) \quad D_i = \frac{D(y^i)}{D(\rho, \zeta^1, \alpha)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y^i} - \frac{\partial \varpi}{\partial \zeta^1} \frac{\partial \zeta^1}{\partial y^i} - \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y^i} \right).$$

i) Dans le domaine $\zeta^1 \leq -ma$.

En utilisant le *lemme* 2.2.1.5, on déduit de (2.3.1.4) que:

$$(2.3.1.5) \quad D_i = K' \sqrt{a} \sqrt{|\zeta^1|}, K' \text{ fonction bornée.}$$

On a en outre dans ce domaine

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{k'}{|\zeta^1|}, k' \text{ fonction bornée.}$$

On déduit alors de (2.3.0.6) que:

$$(2.3.1.6) \quad E_s^{iw} = k'' \left(\frac{1}{|\zeta^1|^2} + \frac{1}{|\zeta^1|} \right).$$

Par suite on déduit des relations $(2.3.1.5-6)$ que:

$$(2.3.1.7) \quad \mathcal{J}_{sC_1}^w = k\sqrt{a} \left(\frac{1}{|\zeta^1|^{3/2}} + \frac{1}{|\zeta^1|^{1/2}} \right).$$

ii) Dans le domaine $-b < \zeta^1 < 0$.

. Dans ce cas, en utilisant les relations $(2.2.1.2-3)$ on a:

$$(2.3.1.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial y^i} = \sum_h \alpha^h \underset{0}{\gamma}{}_i^h + K\left(a + |\zeta^1|\right), \\ \rho \frac{\partial \alpha}{\partial y^i} = \sum_h \alpha^{\tilde{h}} \underset{0}{\gamma}{}_i^h + K'\left(a + |\zeta^1|\right), \left(\alpha^{\tilde{h}} = -\alpha^{3-h}\right) \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial y^i} = \underset{0}{\gamma}{}_i^1 + K''\left(a + |\zeta^1|\right), \\ \frac{D\left(y^i\right)}{D(\rho, \zeta^1, \alpha)} = \rho\left(1 + K'''\left(a + |\zeta^1|\right)\right). \end{cases}$$

En utilisant (2.3.1.8) et le *lemme* 2.2.1.6, on a:

$$(2.3.1.9) \quad D_i = \sum_h \alpha^h \underset{0}{\gamma}{}_i^h \sqrt{\overline{a}\left(\overline{a} - 2\zeta^1\right)} + \underset{0}{\gamma}{}_i^1 \overline{a} + K\sqrt{a}\left(a + \left|\zeta^1\right|\right)^{3/2}.$$

Dans ce domaine on a en outre:

$$(2.3.1.10) \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{\overline{a} + |\zeta^1|}\left[1 + K\left(a + |\zeta^1|\right)\right], \\ p_i^0 = \frac{\underset{0}{\gamma}{}^i_1 \zeta^1 + \alpha^h \underset{0}{\gamma}{}^i_h \sqrt{\overline{a}(\overline{a} - 2\zeta^1)}}{\overline{a} + |\zeta^1|} + K\left(a + |\zeta^1|\right), \\ \overset{*}{\varphi}{}_r^w\left(x_0^\alpha; y^i\left(x_0^\alpha; \lambda_i\right)\right) = \varphi_r^w\left(\xi^i\right) + K\left(a + |\zeta^1|\right). \end{cases}$$

On déduit alors des relations (2.3.0.6) et (2.3.1.10) que:

$$(2.3.1.11) \quad E_s^{iw} = \varphi_s^w\left(\xi^i\right) \frac{\underset{0}{\gamma}{}^i_1 \zeta^1 + \alpha^h \underset{0}{\gamma}{}^i_h \sqrt{\overline{a}\left(\overline{a} - 2\zeta^1\right)}}{\left(\overline{a} + |\zeta^1|\right)^3} + \frac{K}{\overline{a} + |\zeta^1|}.$$

D'où:

$$\text{(2.3.1.12)}\quad \mathcal{J}^{w}_{sC_2} = \varphi^{w}_{s}\left(\xi^{i}\right)\frac{\overline{a}}{\left(\overline{a}+|\zeta^{1}|\right)^{2}} + \frac{K\sqrt{a}}{\left(\overline{a}+|\zeta^{1}|\right)^{1/2}}.$$

On va à présent évaluer $\mathcal{I}_C$. Pour ce faire on distingue deux cas selon que $-b$ soit plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}\mu_0\left(\xi^i\right)$ cf. *définition* 2.2.1.1 pour ce qui est de la définition de $\mu_0(\xi^i)$.

On va partager $\Diamond_C$, le domaine de variation de $(,\zeta^1,\alpha)$ sur $C\left(M_0\right)$, en deux parties.

On appelle $\Diamond_{C_1}$ la partie de $\Diamond_C$ où $\max\left(-b,\frac{\mu_0\left(\xi^i\right)}{2}\right) < \zeta^1 \le 0$ et $\Diamond_{C_2}$ l'autre partie de $\Diamond_C$.

1^{er} **cas:** $\max\left(-b,\frac{\mu_0\left(\xi^i\right)}{2}\right) = -b$

En utilisant (2.3.1.7) et (2.3.1.12) on a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_C &= \int_{\Diamond_{C_1}} \mathcal{J}_{sC_2} d\zeta^1 d\alpha + \int_{\Diamond_{C2}} \mathcal{J}_{sC_2} d\zeta^1 d\alpha \\
&= \int_{-b}^{0} d\zeta^1 \int_0^{2\pi} d\alpha \mathcal{J}_{sC_2} + \int_{\Diamond_{C2}} \mathcal{J}_{sC_2} d\zeta^1 d\alpha \\
&= 2\pi\varphi^{w}_{s}\left(\xi^i\right) + K_1\sqrt{a} + K_2\sqrt{a}
\end{aligned}$$

$$\text{(2.3.1.13)}\quad \mathcal{I}_C = 2\pi\varphi^{w}_{s}\left(\xi^i\right) + K\sqrt{a}.$$

$2^{\grave{e}me}$ **cas:** $\max\left(-b,\frac{\mu_0\left(\xi^i\right)}{2}\right) = \frac{\mu_0\left(\xi^i\right)}{2}$

En utilisant (2.3.1.7) et (2.3.1.12) on a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_C &= \int_{\Diamond_{C_1}} \mathcal{J}_{sC_2} d\zeta^1 d\alpha + \int_{\Diamond_{C2}} \mathcal{J}_{sC_2} d\zeta^1 d\alpha \\
&= \int_{\frac{\mu_0}{2}}^{0} d\zeta^1 \int_0^{2\pi} d\alpha \mathcal{J}^1_{sC_2} + \int_{\Diamond_{C2}} \mathcal{J}_{sC_2} d\zeta^1 d\alpha \\
&= 2\pi\varphi^{w}_{s}\left(\xi^i\right) + K_1\frac{a}{|x^1_0|} + K_2\sqrt{a} + K_3\sqrt{\frac{a}{|x^1_0|}}
\end{aligned}$$

$$\text{(2.3.1.14)}\quad \mathcal{I}_C = 2\pi\varphi^{w}_{s}\left(\xi^i\right) + K\sqrt{\frac{a}{|x^1_0|}}.$$

On déduit des relations $(2.3.1.13-14)$ que dans ce cas on a:

$$\text{(2.3.1.15)}\quad \mathcal{I}_C = 2\pi\varphi^{w}_{s}\left(\xi^i\right) + K\sqrt{\frac{a}{|x^1_0|}}.$$

c) Etude de $\mathcal{I}_D$.

On utilise les variables $\lambda_{2'},\lambda_{3'}$, associées au point P de $\mathcal{S}^w$ et on a:

$$\mathcal{I}_D = \int_{\Diamond'_2} d\lambda_{2'} d\lambda_{3'} \mathcal{J}'^{w'}_{s}.$$

En utilisant le *lemme* 2.2.1.11, le fait que $R \in \mathcal{S}^{w} \backslash \mathcal{T}$ et la relation (2.3.0.6) on a $\mathcal{J}_s^{'w'}$ est bornée.

Par suite on a:

$$(2.3.1.16) \quad \mathcal{I}_D = K \sup \left\{ \lambda_{2'}, (\lambda_{2'}, \lambda_{3'}) \in \lozenge_2^{'} \right\}.$$

Des relations (2.3.1.3), (2.1.3.15) et (2.3.1.16) on déduit que:

$$(2.3.1.17) \quad \mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right) = 4\pi\varphi_s^w\left(\xi^i\right) + K\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}} + K^{'} \sup\left\{\lambda_{2'}, (\lambda_{2'}, \lambda_{3'}) \in \lozenge_2^{'}\right\}.$$

On déduit alors du *lemme* 2.2.1.10 et de la relation (2.3.1.17) que: $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ étant situé dans le domaine $a \leq C\,|x_0^1|$, on a:

$$\lim_{\substack{M_0\left(x_0^\alpha\right) \to R \\ R \in \mathcal{S}_w \backslash \mathcal{T}}} \mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right) = 4\pi\varphi_s^w\left(x_R^i\right).$$

2.3.2. ***Etude de** $\mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right)$ **lorsque** $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ **tend vers*** $R\left(0,0,x_R^2,x_R^3\right) \in \mathcal{T}$.

A/ Dans le domaine $a < C\,|x_0^1|$.

Dans le sous-paragraphe précédent, on n'a utilisé le fait que $R \in \mathcal{S}^w \backslash \mathcal{T}$ que dans l'étude de $\mathcal{I}_D$; on admettra donc les résultats obtenus précédemment en ce qui concerne $\mathcal{I}_B$ et $\mathcal{I}_C$.

Il ne sera question ici que de l'étude de $\mathcal{I}_D$.

Il a été établi par J. TOLEN [33] que si l'on suppose en outre $x_0^0 < B_1$, alors :

$$(2.3.2.1) \quad \mathcal{J}_s = \sin\lambda_2 \overset{*}{\varphi}{}_s^{w'}\left(x_0^\alpha, y^i\right) + K\lambda_1.$$

Sur $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap \mathcal{S}^{w'}$, on a:

$$(2.3.2.2) \quad |\lambda_{2''}| = K_1^{'}\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|} + |x_0^1|},$$

où les $(\lambda_{h''})$ sont des paramètres tels que $\lambda_{2''} = 0$ corresponde à la bicaractéristique $\mathcal{B}_P$ de $\mathcal{C}_P^-$ tracée sur $\mathcal{S}^w$ où $P\left(\phi^w\left(x_0^i\right), x_0^i\right)$ est le point de $\mathcal{S}^w$ associé à $M_0\left(x_0^\alpha\right)$.

On déduit alors de $(2.3.2.1-2)$ que:

$$(2.3.2.3) \quad \mathcal{I}_D = K\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|} + |x_0^1|}.$$

Ainsi donc en utilisant (2.3.1.3), (2.3.1.15) et (2.3.2.3) on a dans ce domaine en supposant $x_0^0 < B_1$,

$$(2.3.2.4) \quad \mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right) = 4\pi\varphi_s\left(\xi^i\right) + K\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}} + K^{'}\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|} + |x_0^1|}.$$

B/ **Dans le domaine** $a > C\,|x_0^1|$.

En utilisant le *lemme* 2.2.2.1, on a comme dans le cas de problèmes à données initiales sur une hypersurface spatiale:

$$(2.3.2.5) \quad \Delta_i^1 - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h = -\sin\lambda_2\lambda_1^2\left[\frac{\overset{*}{q}{}_i^{w'} - p_i^0}{1 - \sum_j \overset{*}{q}{}_j^{w'} p_j^0} + K\lambda_1\right].$$

En utilisant $(2.3.0.6)'$ on a:

$$(2.3.2.6) \qquad \mathcal{J}_s = \sin\lambda_2 \overset{*}{\varphi}{}_s^{w'} \left(x_0^\alpha, y^i\right) + K\lambda_1.$$

En intégrant on a alors:

$$(2.3.2.7) \qquad \mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right) = 4\pi\varphi_s\left(x_R^i\right) + K\eta, \text{où } \eta = \max\left|x_0^\alpha - x_R^\alpha\right|.$$

On déduit alors de (2.3.2.4) et (2.3.2.7) que:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta_0 > 0 \text{ tel que } \left|x_0^\alpha - x_R^\alpha\right| < \eta_0 \Rightarrow \left|\mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right) - 4\pi\varphi_s\left(x_R^i\right)\right| < \varepsilon.$$

Donc on a:

$$\lim_{\substack{M_0\left(x_0^\alpha\right)\to R\\ R\in\mathcal{T}}} \mathcal{I}_s\left(x_0^\alpha\right) = 4\pi\varphi_s\left(0, x_R^2, x_R^3\right).$$

Remarque 2.3.2.1. *Dans les sous-paragraphes* $2.3.1-2$*, les fonctions* K *qui apparaissent, suivant le domaine, dans les expressions des fonctions* $\mathcal{I}_s$ *sont continues et bornées dans* $\Gamma_2(A)$. *En outre d'après les conclusions obtenues à la fin de chacun de ces sous-paragraphes, les fonctions* $\mathcal{I}_s$ *prennent sur* $\mathcal{S}$ *les valeurs* $4\pi\varphi_s$. *On peut donc conclure que les fonctions* $\mathcal{I}_s$ *sont continues et bornées dans* $\Gamma_2(A)$ *ainsi que sur* $\mathcal{S}$.

Les fonctions K *dépendent des fonctions* ω_s^r*; dans le cas des problèmes non linéaires les fonctions* ω_s^r *dépendront des fonctions inconnues, et par conséquent les fonctions* K *seront elles aussi dépendantes des fonctions inconnues.*

2.4. ETUDE DE LA FONCTION $V\left(x_0^\alpha\right) = \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \sin\lambda_2 \int_{\psi\left(x_0^\alpha,\lambda_h\right)}^{0} d\lambda_1$.

En vue de résoudre, par une méthode de point fixe, les équations intégrales $(\mathcal{E}_s)$, dans un espace de fonctions continues, il est nécessaire d'établir un résultat selon lequel la fonction $V\left(x_0^\alpha\right)$ converge vers zéro lorsque $M_0\left(x_0^\alpha\right) \in \Gamma_2(A)$ tend vers un point de $\mathcal{S}$. Dans cette optique, J. TOLEN [33, p. 42] affirme que l'on peut trouver deux constantes positives K_0 et δ telles que:

$$(2.4.0.1) \qquad V\left(x_0^\alpha\right) \leq K_0 a^\delta$$

On va établir l'effectivité d'une telle inégalité dans le domaine $\left\{M_0\left(x_0^\alpha\right);\ a < C\left|x_0^1\right|\right\}$ en utilisant le *lemme* 2.1.5.2; dans le domaine $\left\{M_0\left(x_0^\alpha\right);\ a > C\left|x_0^1\right|\right\}$ on établira une inégalité qui permettra d'aborder la résolution des équations intégrales par une méthode basée sur le théorème du point fixe de Banach.

2.4.1. *Dans le domaine* $a < C\left|x_0^1\right|$.

On va montrer que dans ce domaine on a:

$$(2.4.1.1) \qquad V\left(x_0^\alpha\right) \leq K' a^{\frac{1}{2}}, K' \text{constante.}$$

D'après le *lemme* 2.1.5.2, il existe deux constantes K_1 et k telles que:

$$\text{Pour tout } M_0\left(x_0^\alpha\right) \in \Gamma_1, \text{ si } \left.\begin{array}{c} a < K_1\alpha^2 \\ \cos\lambda_{2'} > 1-\alpha \end{array}\right\} \text{ alors } \left|\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)\right| < \frac{k}{\alpha}a$$

On pose

$$K_2 = C\sup\left\{\left|x_0^1\right|, \left(x_0^i\right) \in \mathcal{D}\right\},\ K = \min\left\{\frac{1}{2}K_1, K_2\right\}.$$

On prend en particulier:

$$\alpha = \left(\frac{a}{K}\right)^{1/2} < 1,$$

et on pose:

$$\lambda_2^0 = \arccos\left(1 - \alpha\right),$$

On a:

$$\begin{aligned} V\left(x_0^\alpha\right) &= \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\lambda_2^0} d\lambda_2 \sin\lambda_2 \int_{\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)}^0 d\lambda_1 + \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_{\lambda_2^0}^{\pi} d\lambda_2 \sin\lambda_2 \int_{\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)}^0 d\lambda_1 \\ &= 2\pi\left(1 - \cos\lambda_2^0\right)\left|\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)\right| + 2\pi\left(1 + \cos\lambda_2^0\right)\left|\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)\right| \\ &\leq 2\pi\left(\frac{a}{K}\right)^{\frac{1}{2}} M + 4\pi k\left(\frac{K}{a}\right)^{\frac{1}{2}} aM \quad \text{avec} \quad M = \sup\left\{\left|\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)\right|, \left(x_0^\alpha\right) \in W, \left(\lambda_h\right) \in \Diamond\right\} \\ &\leq K'\sqrt{a}, \quad \text{avec } K' = \frac{2\pi M}{\sqrt{K}} + 4\pi k M\sqrt{K}. \end{aligned}$$

D'où

$$V\left(x_0^\alpha\right) \leq K^{'} a^{\frac{1}{2}}.$$

2.4.2. ***Dans le domaine*** $a > C\left|x_0^1\right|$, $x_0^0 < B_2$.

On va montrer que dans ce domaine on a:

$$(2.4.2.1) \qquad V\left(x_0^\alpha\right) \leq K x_0^0,, \;\; K \;\; \text{constante}.$$

D'après le *lemme* 2.1.3.2 on a:

$$\left|\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)\right| \leq K_0 x_0^0.$$

D'où:

$$\begin{aligned} V\left(x_0^\alpha\right) &= \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \sin\lambda_2 \int_{\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)}^0 d\lambda_1 \\ &\leq \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\lambda_2^0} d\lambda_2 \sin\lambda_2 \int_{-K_0 x_0^0}^0 d\lambda_1 \\ &\leq 4\pi K_0 x_0^0 = K x_0^0. \end{aligned}$$

3. FORMULES DE KIRCHHOFF ($\mathcal{F}_S$) POUR LE PROBLEME DE GOURSAT SEMI-LINEAIRE

Dans ce chapitre on établit les formules de Kirchhoff pour des systèmes semi-linéaires hyperboliques du second ordre à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes. La méthode suivie est celle employée par Y. CHOQUET-BRUHAT [11] et S. BAH [1] dans leurs thèses. Elle consiste à transformer les systèmes semi-linéaires, à travers des dérivations, à des formes auxquelles on puisse appliquer les résultats obtenus pour les systèmes linéaires aux chapitres précédents. Lorsque ces dérivations sont faites, de nouvelles inconnues apparaissent et il est nécessaire de connaître leurs valeurs sur les hypersurfaces caractéristiques.

Ce chapitre est divisé en deux paragraphes:

- dans le premier paragraphe, après avoir montré qu'il est nécessaire de dériver trois fois le système semi-linéaire pour pouvoir appliquer les méthodes du chapitre précédent, on établit les formules de Kirchhoff pour un nouveau système dont les inconnues sont les solutions éventuelles du problème de Goursat ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre trois;

- dans le second paragraphe, on détermine les restrictions à la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques des dérivées de toute éventuelle solution du problème de Goursat hyper-quasilinéaire. On y introduit aussi des hypothèses de structure sur les termes non linéaires qui permettent que soient déterminées de manière globale les restrictions aux hypersurfaces caractéristiques des solutions éventuelles de problèmes de Goursat semi-linéaires.

3.1. HYPOTHESES ET FORMULES DE KIRCHHOFF.

3.1.1. ***Hypothèses.*** On considère le problème de Cauchy semi-linéaire à données initiales sur la réunion $\mathcal{S}$ des deux hypersurfaces caractéristiques $\mathcal{S}^w$, sécantes suivant la $2-$surface $\mathcal{T}$ d'équations: $x^0 = 0 = x^1$, suivant:

$$(3.1.1.1) \quad \begin{cases} (F_r): \quad A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_r\left(x^\alpha, u_l, \frac{\partial u_l}{\partial x^\nu}\right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Y} \\ u_{r|\mathcal{S}^w} = \varphi_r^w\left(x^i\right). \end{cases}$$

En écrivant formellement, pour le problème de Goursat semi-linéaire (3.1.1.1) les formules de Kirchhoff comme dans le chapitre 2, la présence des fonctions f_r qui dépendent de façon non nécessairement linéaire des dérivées premières des u_s, montrerait que ces formules ne définissent pas des équations intégrales.

Il est à noter que si les fonctions f_r sont linéaires par rapport aux dérivées premières des fonctions u_s et que les fonctions auxiliaires qui apparaissent dans les formules de Kirchhoff ne dépendent pas des dérivées premières des fonctions u_s, alors les formules de Kirchhoff écrites formellement définissent des équations intégrales non linéaires.

On pourra donc appliquer les résultats du chapitre précédent, à condition que les fonctions auxiliaires ne dépendent pas des dérivées des fonctions u_r, au problème semi-linéaire à données initiales sur la réunion de deux hypersurfaces caractéristiques sécantes suivant:

$$(3.1.1.2) \quad \begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^\alpha)\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_r^{\lambda s}(x^\alpha, u_t)\frac{\partial u_s}{\partial x^\lambda} + f_r(x^\alpha, u_s) = 0 \quad \text{dans } Y \\ u_{r/\mathcal{S}_w} = \varphi_r^w\left(x^i\right) \end{cases}$$

On va ramener l'étude du problème semi-linéaire (3.1.1.1) à celle du problème (3.1.1.2) auquel on peut appliquer les résultats du chapitre 2. Pour ce faire, on a besoin que la condition sur la non dépendance des fonctions auxiliaires par rapport aux dérivées premières des fonctions u_s soit vérifiée; c'est ce qui justifie l'option prise de dériver trois fois les équations (F_r) par rapport aux variables (x^α). Suite à ces dérivations des équations (F_r), pour pouvoir appliquer les résultats des chapitres précédents de nouvelles hypothèses s'imposent.

Hypothèse $\mathbf{H_3}$

$1-$ *L'hypothèse* $\mathbf{H_2}$ *est satisfaite;*

$2 - L = A^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}$ *est* x^0-*régulièrement hyperbolique tel que*

i) $A^{00} > \varepsilon > 0$, $A^{ij}X_iX_j$ *est définie négative,* *ii)* $\exists \alpha > 0, \forall (x^\alpha) \in \Gamma_2, \forall\ (X_i) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\},\ \ -A^{ij}(x^\alpha) X_i X_j > \alpha \sum_{i=1}^{3} (X_i)^2 .$

$3 - A^{\lambda\mu} \in \mathcal{B}^7(\Gamma_2)$.

$4 - f_r \in C^5\left(\Gamma_2 \times \Omega' \times \Omega''\right)$, *où* Ω' *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, Ω'' *est un ouvert de* R^{4n}.

$5 - \varphi_r^w \in C^7(\mathcal{D}^w)$ *et* φ_r *est continue sur* $\mathcal{S}$.

Remarque 3.1.1.1. *Il est à noter que dans l'hypothèse* $\mathbf{H_3}$*, on peut remplacer la condition 3 par la condition suivante:*
$3'-\ A^{\lambda\mu} \in B^4(\Gamma_2)$ *et* $\left[A^{\lambda\mu}\right]^w \in C^7(\mathcal{D}^w)$.

3.1.2. ***Formule de Kirchhoff*** . Il découle des commentaires préliminaires et en suivant une méthode employée par Y. CHOQUET-BRUHAT [11], F. CAGNAC [7], S. BAH [1] , [2], qu'il est adéquat de dériver trois fois les équations (F_r) par rapport aux variables (x^α) ; on pose alors:

$$(3.1.2.1) \quad U_R = (u_r, u_{r\alpha}, u_{r\alpha\beta}, u_{r\alpha\beta\gamma}), \text{avec}$$
$$u_{r\alpha} = \frac{\partial u_r}{\partial x^\alpha}, \quad u_{r\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad u_{r\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 u_r}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}$$

On obtient:

$$(3.1.2.2) \begin{cases} (F_r): \ A^{\lambda\mu}(x^\alpha) \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_r(x^\alpha, u_s, u_{s\nu}) = 0, \\ (F_{r\alpha}): \ A^{\lambda\mu}(x^\alpha) \frac{\partial^2 u_{r\alpha}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_{r\alpha}^{\lambda\nu s} \frac{\partial u_{s\nu}}{\partial x^\lambda} + f_{r\alpha}(x^\alpha, u_s, u_{s\nu}) = 0, \\ (F_{r\alpha\beta}): A^{\lambda\mu}(x^\alpha) \frac{\partial^2 u_{r\alpha\beta}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_{r\alpha\beta}^{\lambda\nu\delta s} \frac{\partial u_{s\nu\delta}}{\partial x^\lambda} + f_{r\alpha\beta}(x^\alpha, u_s, u_{s\nu}, u_{s\nu\delta}) = 0, \\ (F_{r\alpha\beta\gamma}): \ A^{\lambda\mu}(x^\alpha) \frac{\partial^2 u_{r\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_{r\alpha\beta\gamma}^{\lambda\nu\delta\varepsilon s} \frac{\partial u_{s\nu\delta\varepsilon}}{\partial x^\lambda} + f_{r\alpha\beta\gamma}(x^\alpha, u_s, u_{s\nu}, u_{s\nu\delta}, u_{s\nu\delta\varepsilon}) = 0. \end{cases}$$

où: • $B_{r\alpha}^{\lambda\nu s}$, $B_{r\alpha\beta}^{\lambda\nu\delta s}$, $B_{r\alpha\beta\gamma}^{\lambda\nu\delta\varepsilon s}$ sont des polynômes des fonctions suivantes:
- les dérivées partielles premières des $A^{\lambda\mu}$,
- les dérivées partielles premières des f_r par rapport aux $u_{s\nu}$.

•$f_{r\alpha}$ est un polynôme des fonctions:
- f_r et ses dérivées partielles premières par rapport à tous ses arguments,
- les u_s et leurs dérivées partielles premières.

•$f_{r\alpha\beta}$ (resp. $f_{r\alpha\beta\gamma}$) est un polynôme des fonctions suivantes:
- les $A^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux (resp. trois) ,
- f_r et ses dérivées partielles par rapport à tous ses arguments jusqu'à l'ordre deux (resp. trois),
- les u_{sr} et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux (resp. trois).

Ce qui conduit au nouveau système suivant:

$$(E_R): A^{\lambda\mu}(x^\alpha) \frac{\partial^2 U_R}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_R^{\lambda S}(x^\alpha, U_T) \frac{\partial U_R}{\partial x^\lambda} + f_R(x^\alpha, U_S) = 0$$

où:

$$B_R^{\lambda S}(x^\alpha, U_T) = B_R^{\lambda S}(x^\alpha, u_r, u_{r\alpha}).$$

En supposant que l'on puisse déterminer sur $\mathcal{S}$ les fonctions U_R, on a alors un problème de Goursat du même type que (3.1.1.2) .

En utilisant les remarques faites ci-dessus on a alors le résultat suivant qui est une conséquence immédiate de la *proposition* 2.1.4.1

Proposition 3.1.2.1. *Sous l'hypothèse* $(\mathbf{H_3})$ *pour le problème* (3.1.1.1) *on a:*

- *Toute solution* (u_r) *de* (3.1.1.1) *cinq fois différentiable admettant des dérivées quatrièmes continues et bornées, est telle que ses dérivées jusqu'à l'ordre trois vérifie les formules de Kirchhoff généralisées suivantes: pour tout* $M_0\left(x_0^\alpha\right) \in \Gamma_2(A)$,

$$\left(\widetilde{\mathcal{E}}_s\right)\left\{\begin{array}{l} 4\pi U_S\left(x_0^\alpha\right) = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \sin\lambda_2 \int_0^{\psi\left(x_0^\alpha,\lambda_h\right)} d\lambda_1 \square\left(\left[U_R\right] L_S^R + \sigma_S^R\left[f_R\right]\right) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 E_S^i\left(\Delta_i^1 - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right) \end{array}\right.$$

où:

$$(3.1.2.3)\left\{\begin{array}{c} E_S^{iw} = -\frac{\partial\sigma_S^R}{\partial y^j}\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w \overset{*}{\Phi}{}^w_R + \sigma_S^R\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w \frac{\partial\overset{*}{\Phi}{}^w_R}{\partial y^j} - \overset{*}{\Phi}{}^w_R \frac{\partial\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w}{\partial y^j} + \left[\overset{*}{B}{}^{iT}_R\right]^w \overset{*}{\Phi}{}^w_T\right), \\ E_S^i = \left\{\begin{array}{l} E_S^{i1} \text{ sur } \lozenge^1 \\ E_S^{i2} \text{ sur } \lozenge^2 \end{array}\right., \\ \text{où: } \lozenge^w \text{ est l'ensemble des couples } (\lambda_2,\lambda_3) \text{ tels que la bicaractéristique} \\ \text{issue de } M_0 \text{ rencontre } \mathcal{S} \text{ sur } \mathcal{S}^w; \\ L_S^R = \frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w \sigma_S^R\right) - \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\left[\overset{*}{B}{}^{iR}_T\right]^w \sigma_S^T\right), \\ \sigma_S^R = \sigma\omega_S^R \qquad \left[f_R\right] = f_R\left(\phi_S\left(x^i\right), x^i; \Phi_S\left(x^i\right)\right), \\ \omega_S^R = \delta_S^R + \displaystyle\int_0^{\lambda_1}\left(Q\omega_S^R + Q_T^R\omega_S^T\right) d\lambda_1, \\ Q = -\frac{1}{2}\left(p_j\frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w\right)}{\partial y^i} + \frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{0i}\right]^w\right)}{\partial y^i}\right), \\ Q_T^R = \frac{1}{2}\left(p_i\left[\overset{*}{B}{}^{iR}_T\right]^w + \left[\overset{*}{B}{}^{0R}_T\right]^w\right), \\ \Phi_R = \left(\left[u_r\right], \left[u_{r\alpha}\right], \left[u_{r\alpha\beta}\right], \left[u_{r\alpha\beta\gamma}\right]\right),\ r = 1,...,n; \quad \alpha,\beta,\gamma = 0,...,3. \end{array}\right.$$

On a noté que pour que les formules de Kirchhoff généralisées ci-dessus définissent des équations intégrales il est nécessaire que les fonctions figurant à droite ne dépendent pas des dérivées des fonctions U_S. Cette condition nécessaire est vérifiée dans la mesure où les fonctions de droite font intervenir les dérivées jusqu'à l'ordre trois au maximum des fonctions u_r. Cette condition est néanmoins insuffisante pour avoir des équations intégrales. En effet on constate que les fonctions Q_T^R font intervenir les $B_T^{\lambda R}$, or ces dernières fonctions dépendent des dérivées premières des u_t; par conséquent les fonctions ω_S^R, qui s'expriment en fonction des Q_T^R, sont aussi des inconnues. En outre leurs dérivées partielles secondes qui apparaissent dans les L_S^R sont aussi des inconnues. Pour obtenir des équations intégrales, on doit adjoindre aux formules de Kirchhoff généralisées $\left(\widetilde{\mathcal{E}}_S\right)$ les équations vérifiées par les fonctions ω_S^R ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre deux. Néanmoins d'après la *proposition* 1.6.1.2, pour connaître les dérivées partielles secondes des fonctions ω_S^R, il suffit de connaître les fonctions ω_S^R, $\omega_{S,i}^R$ et $\omega_{S,ij}^R$.

On pose $\left(\omega_S^R, \omega_{S,i}^R, \omega_{S,ij}^R\right) = \Omega_S^R$ et $\Omega = \left(\Omega_S^R\right)$.

D'après les relations $(1.6.1.1-4)$ on a:

$$(3.1.2.4)\quad \begin{cases} \omega_S^R = \delta_S^R + \displaystyle\int_0^{\lambda_1} P_T^R \omega_S^T d\lambda_1, \\ \omega_{S,i}^R = \displaystyle\int_0^{\lambda_1} \left(P_T^R \omega_{S,i}^T + P_{T,i}^R \omega_S^T\right) d\lambda_1, \\ \omega_{S,ij}^R = \displaystyle\int_0^{\lambda_1} \left(P_T^R \omega_{S,ij}^T + P_{T,i}^R \omega_{S,j}^T + P_{T,j}^R \omega_{S,i}^T + P_{T,ij}^R \omega_S^T\right) d\lambda_1, \end{cases}$$

où:

$$(3.1.2.4)' \quad \begin{cases} P_T^R = -\frac{1}{2}\left(p_j \dfrac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\right)}{\partial y^i} + \dfrac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{0i}\right]\right)}{\partial y^i}\right)\delta_T^R + \\ \qquad +\frac{1}{2}\left(\left[\overset{*}{B}{}_T^{iR}\right] p_i + \left[\overset{*}{B}{}_T^{0R}\right]\right), \\ P_{T,i}^R = \frac{\partial P_T^R}{\partial p_i^0}; \quad P_{T,ij}^R = \frac{\partial^2 P_T^R}{\partial p_i^0 \partial p_j^0}. \end{cases}$$

On en déduit que:

$$(3.2.1.5) \quad \Omega = \Omega_0 + \int_0^{\lambda_1} F\left(U_S, \Omega\right) d\lambda_1,$$

où:

$\Omega_0 = \left(\Omega_{0S}^R\right)$ et $\Omega_{0S}^R = \left(\delta_S^R, 0, 0\right)$,

avec $F\left(U_S, \Omega\right)$ combinaison linéaire des fonctions Ω dont les coefficients sont des polynômes des dérivées jusqu'à l'ordre trois des $A^{\lambda\mu}$ et f_s et des fonctions U_S.

On peut à présent énoncer le résultat suivant:

Proposition 3.1.2.2. *Sous l' hypothèse* $\mathbf{H}_3$ *pour le problème de Goursat* $(3.1.1.1)$:

- Toute solution $u = (u_r)$ *de* $(3.1.1.1)$ *cinq fois différentiable et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre quatre continues et bornées est telle que les fonctions:*

$$U_S = \left(u_s, u_{s\alpha}, u_{s\alpha\beta}, u_{s\alpha\beta\gamma}\right) \ \text{ et } \Omega = \left(\Omega_S^R\right)$$
$$\text{avec } \ \Omega_S^R = \left(\omega_S^R, \omega_{S,k}^R, \omega_{S,kl}^R\right),$$

vérifient le système intégral suivant: $\forall M_0\left(x_0^\alpha\right) \in \Gamma_2\left(A\right)$,

$$(\mathcal{F}_s): \begin{cases} 4\pi U_S\left(x_0^\alpha\right) = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \sin\lambda_2 \int_0^{\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)} d\lambda_1 \Box\left(\left[U_R\right] L_S^R + \sigma_S^R\left[f_R\right]\right) \\ \qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 E_S^i\left(\Delta_i^1 - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right), \\ \Omega = \Omega_0 + \displaystyle\int_0^{\lambda_1} F\left(U_S, \Omega\right) d\lambda_1, \end{cases}$$

où les fonctions de droite de la première équation sont définies par $(3.1.2.3)$ *et* $F\left(U_S, \Omega\right)$ *est une combinaison linéaire des fonctions* Ω *dont les coefficients sont des polynômes des fonctions* U_S *et des dérivées jusqu'à l'ordre trois des fonctions* $A^{\lambda\mu}$ *et* f_r.

Utilisant le fait que $F(U_S, \Omega)$ est une combianison linéaire des fonctions Ω, la deuxième équation de $(\mathcal{F}_s)$ peut se reécrire sous la forme suivante:

$$\Omega_S^R = \Omega_{0S}^R + \int_0^{\lambda_1} H_T^R(U_Q)\,\Omega_S^T d\lambda_1,$$

avec:

$$(3.1.2.7)\quad \begin{cases} H_T^R(U_Q) = \begin{pmatrix} P_T^R & 0 & 0 \\ P_{T,i}^R & P_T^R\delta_i^k & 0 \\ P_{T,ij}^R & P_{T,j}^R\delta_i^k + P_{T,i}^R\delta_j^l & P_T^R\delta_i^k\delta_j^l \end{pmatrix} \\ \Omega_S^R = \left(\omega_S^R, \omega_{S,k}^R, \omega_{S,kl}^R\right) \\ P_T^R = -\frac{1}{2}\left(p_j \dfrac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\right)}{\partial y^i} + \dfrac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{0i}\right]\right)}{\partial y^i}\right)\delta_T^R + \\ +\frac{1}{2}\left(\left[\overset{*}{B}{}_T^{iR}\right]p_i + \left[\overset{*}{B}{}_T^{0R}\right]\right), \\ P_{T,i}^R = \frac{\partial P_T^R}{\partial p_i^0}; \quad P_{T,ij}^R = \frac{\partial^2 P_T^R}{\partial p_i^0 \partial p_j^0}. \end{cases}$$

Pour pouvoir aborder la résolution des équations intégrales $(\mathcal{F}_s)$, il reste à déterminer les restrictions à $\mathcal{S}$ des dérivées jusqu'à l'ordre trois de toute éventuelle solution assez régulière du problème de Goursat $(3.1.1.1)$.

3.2. DETERMINATION DES RESTRICTIONS AUX HYPERSURFACES CARACTERISTIQUES DES DERIVEES DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE GOURSAT.

On a vu au paragraphe précédent que la détermination des restrictions à $\mathcal{S}$ des dérivées jusqu'à l'ordre trois de toute éventuelle solution suffisamment régulière du problème de Goursat semi-linéaire est nécessaire pour s'attaquer à la résolution du système intégral $(\mathcal{F}_s)$.

On va dans ce paragraphe déterminer, de manière générale, la restriction aux hypersurfaces caractéristiques sécantes des dérivées de toute éventuelle solution régulière du problème de Goursat hyper-quasilinéaire.

3.2.1. ***Problème de Goursat hyper-quasilinéaire***.

On considère un système de n équations (G_r) à n fonctions inconnues u_r définies dans un domaine de $\mathbb{R}^{N+1}$ de la forme suivante:

$$(G_r): \quad A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u_s)\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_r(x^\alpha;\ u_s;\ u_{s\nu}) = 0$$

$$r, s = 1, 2, ..., n \qquad \alpha, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, ..., N.$$

- Les $A^{\lambda\mu}$ sont définies dans $V \times W$; où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{N+1}$ contenant la $(N-1)$ −surface $\mathcal{T} : x^0 = 0 = x^1; W$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $\forall (x^\alpha, u_s) \in V \times W$, $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u_s) Y_\lambda Y_\mu$ définit une forme quadratique définie de signature $+ -...-$, avec $A^{00} > 0$ et $A^{ij}Y_iY_j$ définie négative.
- Les f_r sont définies dans $V \times W \times X$, où X est un ouvert de $\mathbb{R}^{(N+1)n}$.
- $\mathcal{S}$ est la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques pour l'opérateur $\overline{L}$ et sécantes suivant $\mathcal{T}$ avec: $\overline{L} = \overline{A}^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}$ et $\overline{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha) = A^{\lambda\mu}(x^\alpha, \overline{u}_s)$; les $\overline{u}_s$ étant des fonctions définies dans V.

On pose $\overline{u}_{r|\mathcal{S}} = \varphi_r$.

On suppose que les hypersurfaces caractéristiques $\mathcal{S}^w$ dont la réunion est égale à $\mathcal{S}$ sont définies par: $x^0 = \phi^w(x^i)$, $w = 1,2$. ϕ^w étant une fonction suffisamment régulière sur $\mathcal{D}^w \equiv$ projection de $\mathcal{S}^w$ dans l'espace des (x^i).

Résoudre le problème de Goursat hyper-quasilinéaire consiste alors à déterminer les fonctions u_r qui vérifient:

$$(3.2.1.1)\left\{\begin{array}{c} (G_r) : A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u_s)\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_r(x^\alpha;\ u_s;\ u_{s\nu}) = 0\ , \\ u_{r|\mathcal{S}} = \overline{u}_{r|\mathcal{S}} = \varphi_r. \end{array}\right.$$

On se propose pour une fonction $u = (u_r)$ suffisamment régulière telle que les u_r vérifient (3.2.1.1) de déterminer les restrictions à $\mathcal{S}$ des dérivées de u.

Pour déterminer les restrictions à $\mathcal{S}$ des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à l d'une fonction u, il suffit de connaître:

- les $\frac{\partial^p u}{(\partial x^0)^p}|_{\mathcal{S}}$, $p \leq l$;
- les dérivées des fonctions ϕ^w définissant l'hypersurface caractéristique $\mathcal{S}^w$;
- les dérivées de $u_{|\mathcal{S}}$ jusqu'à l'ordre l.

3.2.2. ***Hypothèses pour le problème de Goursat hyper-quasilinéaire.*** En vue de la détermination des restrictions à $\mathcal{S}$ des dérivées de toute solution suffisamment régulière du problème de Goursat hyper-quasilinéaire, on fait les hypothèses suivantes:

soit $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Hypothèse α_p :

• Les $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u_s)$ sont définies et de classe C^p dans un domaine $V \times W$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{N+1}$ contenant $\mathcal{T} : x^0 = 0 = x^1$; W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

• Dans $V \times W$, les $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u_s)$ définissent une forme quadratique de signature $+-...-$: $A^{00} > 0$, $A^{ij}X_iX_j$ définie négative.

Hypothèse β_p

• Les fonctions $f_r(x^\alpha, u_s, u_{s,\nu})$ sont définies et de classe C^p dans un domaine $V \times W \times Z$, où Z est un ouvert de $\mathbb{R}^{(N+1)n}$;

• Si $p = 0$, les f_r sont lipschitziennes par rapport aux $u_{s,\nu}$.

Hypothèse γ_p

• Les fonctions φ_r^w sont de classe C^p sur $\mathcal{D}^w$ et les fonctions φ_r sont continues sur $\mathcal{S}$ avec $\varphi_r = \left\{\begin{array}{l} \varphi_r^1 \text{ sur } \mathcal{D}^1 \\ \varphi_r^2 \text{ sur } \mathcal{D}^2 \end{array}\right.$ et $\varphi_r(\mathcal{D}) \subset W$.

3.2.3. ***Détermination des dérivées premières.*** On considère des fonctions u_r régulières qui vérifient le problème de Goursat hyper-quasilinéaire (3.2.1.1).

On pose:

$$\chi_r^w = \frac{\partial u_r}{\partial x^0}|_{\mathcal{S}^w} \quad , \chi_r = \left\{\begin{array}{l} \chi_r^1 \text{ sur } \mathcal{D}^1 \\ \chi_r^2 \text{ sur } \mathcal{D}^2 \end{array}\right. , \ q_i^w = -\frac{\partial \phi^w}{\partial x^i}\ .$$

En considérant la restriction à $\mathcal{S}^w$ des équations (G_r) on a:

$$(3.2.3.1)\quad \left\{\begin{array}{l} 2\left(\left[\overline{A}^{ij}\right]^w q_j^w + \left[\overline{A}^{0i}\right]^w\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]^w + \left[\overline{A}^{ij}\right]^w \frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right]^w \\ \qquad\qquad + \left[\overline{A}^{ij}\right]^w \frac{\partial^2 [u_r]}{\partial x^i \partial x^j} + \left[\widetilde{f}_r\right]^w = 0. \end{array}\right.$$

Sur chaque bicaractéristique définie par:

$$(3.2.3.2)\quad \frac{dx^i}{dX^1} = \left[\overline{A}^{ij}\right]^w q_j^w + \left[\overline{A}^{0i}\right]^w,$$

on a:

$$(3.2.3.3)\quad 2\frac{d\chi_r^w}{dX^1} + \left[\overline{A}^{ij}\right]^w \frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}\chi_r^w + \left[\overline{A}^{ij}\right]^w \frac{\partial^2 \varphi_r^w}{\partial x^i \partial x^j} + \left[\widetilde{f}_r\right]^w = 0,$$

où

$$\left[\overline{A}^{ij}\right]^w = A^{ij}\left(\phi^w\left(x^i\right), x^i; \varphi_s^w\left(x^i\right)\right),$$

$$\left[\widetilde{f}_r\right]^w = f_r\left(\phi^w\left(x^i\right), x^i; \varphi_s^w\left(x^i\right); \chi_s^w\left(x^i\right), \frac{\partial \varphi_s^w}{\partial x^i} + q_i^w \chi_s^w\right).$$

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Sous les hypothèses α_{2p+1}, β_{2p-1}, γ_{2p+1} les fonctions $\left[\overline{A}^{ij}\right]^w \frac{\partial^2 \varphi_r^w}{\partial x^i \partial x^j}$ et $\left[\widetilde{f}_r\right]^w$ sont de classe C^{2p-1} dans $\mathcal{D}^w$, où $\mathcal{D}^w$ est la projection de $\mathcal{S}^w$ sur l'espace des (x^i).

(3.2.3.3) est un système différentiel *non linéaire* du premier ordre en χ_r^w. Pour le résoudre (localement), il suffit de connaître les χ_r^w pour $X^1 = 0$, c'est-à-dire sur $\mathcal{T}$.

Puisque les hypersurfaces caractéristiques $\mathcal{S}^w$ sont sécantes suivant la $(N-1)$-surface $\mathcal{T}$: $x^0 = 0 = x^1$, on a:

$$(3.2.3.4)\quad \begin{cases} \frac{\partial \phi^w}{\partial x^1}\left(x^i\right) \neq 0 \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}} \neq \frac{\partial \phi^2}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}} \end{cases}.$$

On cherche une solution de (3.2.3.3) qui soit au moins de classe C^1 jusque sur la $(N-1)$ −surface $\mathcal{T}$. Puisque l'on a:

$$u_r\left(\phi^w\left(x^i\right), x^i\right) = \varphi_r^w\left(x^i\right).$$

En différentiant les deux membres de cette égalité par rapport à x^1 et en prenant la restriction à $\mathcal{T}$, on a:

$$(3.2.3.5)\quad \chi_r^1\mid_{\mathcal{T}} = \frac{1}{\frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}} - \frac{\partial \phi^2}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}}\left[\frac{\partial \varphi_r^1}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}} - \frac{\partial \varphi_r^2}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}\right] = \chi_r^2\mid_{\mathcal{T}}.$$

Par conséquent le système différentiel (3.2.3.3) muni de la condition initiale définie par (3.2.3.5) admet une unique solution définie dans un voisinage $(\mathcal{S}_0^w)$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{S}^w$.

On pose: $(\mathcal{S}_0) = (\mathcal{S}_0^1) \cup (\mathcal{S}_0^2)$.

On a pour toute solution de classe C^{p+1} sur V du problème hyper-quasilinéaire de Goursat (3.2.1.1), il existe un voisinage $(\mathcal{S}_0)$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{S}$ sur lequel sont déterminées de façon unique ses dérivées partielles premières par rapport à x^0.

Il découle de (3.2.3.5) que sous les hypothèses α_{2p+1}, β_{2p-1}, γ_{2p+1}, les fonctions $\chi_r^w\mid_{\mathcal{T}}$ sont de classe C^{2p}; on déduit alors du théorème de différentiabilité et de dépendance continue des conditions initiales pour des systèmes différentiels que, sous les hypothèses α_{2p+1}, β_{2p-1}, γ_{2p+1}, les fonctions χ_r^w sont de classe C^{2p-1} sur $(\mathcal{D}_0^w)$ ($(\mathcal{D}_0^w)$ est la projection de $(\mathcal{S}_0^w)$ sur l'espace des (x^i)) et les fonctions χ_r sont continues sur $(\mathcal{S}_0)$.

Remarque 3.2.3.1. *Si les fonctions* $\left[\widetilde{f_r}\right]^w = f_r\left(\phi^w\left(x^i\right), x^i; \varphi_s^w\left(x^i\right); \chi_s^w\left(x^i\right), \frac{\partial \varphi_s^w}{\partial x^i} + q_i^w \chi_s^w\right)$ *sont linéaires par rapport aux* χ_s^w *alors le système différentiel* (3.2.3.3) *est linéaire en* χ_s^w.

Par conséquent les restrictions des dérivées premières par rapport à x^0 *de la solution du problème de Goursat hyper-quasilinéaire sont déterminées sur* $\mathcal{S}$ *tout entier, c'est-à-dire que dans ce cas* $(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}$.

3.2.4. ***Détermination des dérivées secondes.*** On pose:

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{(2)}\chi_r^w = \frac{\partial^2 u_r}{(\partial x^0)^2} \left.\right|_{(\mathcal{S}_0^w)}, \\ {}^{(2)}\chi_r = \left\{\begin{array}{l} {}^{(2)}\chi_r^1 \text{ sur } (\mathcal{D}_0^1) \\ {}^{(2)}\chi_r^2 \text{ sur } (\mathcal{D}_0^2) \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

On suppose toujours que les fonctions u_r définissent une solution régulière du problème de Goursat (3.2.1.1).

En différentiant par rapport à x^0 les équations (G_r) on a:

$$(3.2.4.1) \quad \left\{\begin{array}{r} A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\right) + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^0} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial x^0} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial f_r}{\partial x^0} \\ + \frac{\partial f_r}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial x^0} + \frac{\partial f_r}{\partial (u_{s\nu})} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^0 \partial x^\nu} = 0. \end{array}\right.$$

En posant $v_r = \frac{\partial u_r}{\partial x^0}$, on a alors:

$$(3.2.4.2) \left\{\begin{array}{r} A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial A^{00}}{\partial x^0} \frac{\partial v_r}{\partial x^0} + 2 \frac{\partial A^{0i}}{\partial x^0} \frac{\partial v_r}{\partial x^i} + \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^0} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^i \partial x^j} \\ + \frac{\partial A^{00}}{\partial u_s} v_s \frac{\partial v_r}{\partial x^0} + 2 \frac{\partial A^{0i}}{\partial u_s} v_s \frac{\partial v_r}{\partial x^i} + \frac{\partial A^{ij}}{\partial u_s} v_s \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^i \partial x^j} \\ + \frac{\partial f_r}{\partial x^0} + \frac{\partial f_r}{\partial u_s} v_s + \frac{\partial f_r}{\partial v_s} \frac{\partial v_s}{\partial x^0} + \frac{\partial f_r}{\partial (v_{s,i})} \frac{\partial v_s}{\partial x^i} = 0 . \end{array}\right.$$

En prenant la restriction de (3.2.4.2) à l'hypersurface caractéristique $(\mathcal{S}_0^w)$ et en tenant compte des relations:

$$(3.2.4.3) \left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\partial u}{\partial x^i}\right]^w = \frac{\partial [u]^w}{\partial x^i} + q_i^w \left[\frac{\partial u}{\partial x^0}\right]^w \\ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^0 \partial x^i}\right]^w = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial u}{\partial x^0}\right]^w + q_i^w \left[\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2}\right]^w \\ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}\right]^w = \frac{\partial^2 [u]^w}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}\left[\frac{\partial u}{\partial x^0}\right]^w + q_i^w \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial u}{\partial x^0}\right]^w + q_j^w \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial u}{\partial x^0}\right]^w + q_i^w q_j^w \left[\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2}\right]^w, \end{array}\right.$$

on déduit que l'on a:

$$(3.2.4.4) \left\{\begin{array}{c} 2\left(\left[\overline{A}^{ij}\right]^w q_j^w + \left[\overline{A}^{0i}\right]^w\right) \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial v_r}{\partial x^0}\right]^w + \left[\overline{A}^{ij}\right]^w \frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}\left[\frac{\partial v_r}{\partial x^0}\right]^w + \left[\overline{A}^{ij}\right]^w \frac{\partial^2 [v_r]}{\partial x^i \partial x^j} \\ + \left(\left(\left[\frac{\partial A^{00}}{\partial x^0}\right]^w + \left[\frac{\partial A^{00}}{\partial u_t}\right]^w [v_t]^w\right)\delta_r^s + \left[\frac{\partial f_r}{\partial v_s}\right]^w\right)\left[\frac{\partial v_s}{\partial x^0}\right]^w \\ + \left(2\left(\left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial x^0}\right]^w + \left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial u_t}\right]^w [v_t]^w\right)\delta_r^s + \left[\frac{\partial f_r}{\partial (u_{s,i})}\right]^w\right)\frac{\partial [v_s]^w}{\partial x^i} \\ + \left(\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^0}\right]^w + \left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial u_s}\right]^w [v_s]^w\right) q_i^w q_j^w \left[\frac{\partial v_r}{\partial x^0}\right]^w \\ + \left(\frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}[v_s]^w + q_i^w \frac{\partial [v_s]^w}{\partial x^j} + q_j^w \frac{\partial [v_s]^w}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 [v_s]^w}{\partial x^i \partial x^j}\right) \times \\ \times \left(\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^0}\right]^w + \left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial u_s}\right]^w [v_s]^w\right) = 0. \end{array}\right.$$

Sur chaque bicaractéristique issue de $\mathcal{T}$, on a:

$$(3.2.4.5)\quad \begin{cases} 2\frac{d^{(2)}\chi_r^w}{dX^1}+\left[\overline{A}^{ij}\right]^w\frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}\,{}^{(2)}\chi_r^w+\left[\overline{A}^{ij}\right]^w\frac{\partial^2\,{}^{(1)}\chi_r^w}{\partial x^i\partial x^j}+\left[\frac{\partial f_r}{\partial u_s}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_s^w \\ \quad +\left[\frac{\partial f_r}{\partial x^0}\right]^w+\left(\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^0}\right]^w+\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial u_s}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_s^w\right)\left(q_i^w q_j^w\,{}^{(2)}\chi_r^w\right) \\ +\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{\partial A^{00}}{\partial x^0}\right]^w\delta_r^s+\left[\frac{\partial f_r}{\partial u_{s,0}}\right]^w+\delta_r^s\left[\frac{\partial A^{00}}{\partial u_t}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_t^w+ \\ 2\left(\left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial x^0}\right]^w\delta_r^s+\left[\frac{\partial f_r}{\partial u_{s,i}}\right]^w+\delta_r^s\left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial u_t}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_t^w\right)q_i^w\end{array}\right\}{}^{(2)}\chi_s^w \\ \quad +\left(\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^0}\right]^w+\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial u_s}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_s^w\right)\times \\ \quad \times\left(\frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}\,{}^{(1)}\chi_s^w+q_i^w\frac{\partial\,{}^{(1)}\chi_s^w}{\partial x^j}+q_j^w\frac{\partial\,{}^{(1)}\chi_s^w}{\partial x^i}+\frac{\partial^2\,{}^{(1)}\chi_s^w}{\partial x^i\partial x^j}\right) \\ +\left(2\left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial x^0}\right]^w\delta_r^s+2\delta_r^s\left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial u_t}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_t^w+\left[\frac{\partial f_r}{\partial u_{s,i}}\right]^w\right)\frac{\partial\,{}^{(1)}\chi_s^w}{\partial x^i}=0\,. \end{cases}$$

L'équation (3.2.4.5) peut être reécrite sous la forme:

$$(3.2.4.5)'\quad 2\frac{d\,{}^{(2)}\chi_r^w}{dX^1}+\left[\overline{A}^{ij}\right]^w\frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}\,{}^{(2)}\chi_r^w+\left[\overline{A}^{ij}\right]^w\frac{\partial^2\,{}^{(1)}\chi_r^w}{\partial x^i\partial x^j}+h_{r,2}^w=0,$$

où:

$$h_{r,2}^w=h_{r,2}^{sw}\,{}^{(2)}\chi_s^w+h_{r,2}^{0w}$$

avec:

$$(3.2.4.6)\quad \begin{cases} h_{r,2}^{sw}=\left(\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^0}\right]^w+\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial u_t}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_t^w\right)q_i^w q_j^w\delta_r^s \\ +\left\{\begin{array}{c}\left(\left[\frac{\partial A^{00}}{\partial x^0}\right]^w+\left[\frac{\partial A^{00}}{\partial u_t}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_t^w\right)\delta_r^s+\left[\frac{\partial f_r}{\partial u_{s,0}}\right]^w+ \\ +\left[\frac{\partial f_r}{\partial u_{s,i}}\right]^w q_i^w+2\delta_r^s\left(\left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial x^0}\right]^w+\left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial u_t}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_t^w\right)q_i^w\end{array}\right\}, \\ h_{r,2}^{0w}=\left[\frac{\partial f_r}{\partial x^0}\right]^w+\left[\frac{\partial f_r}{\partial u_s}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_s^w \\ +\left(2\left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial x^0}\right]^w\delta_r^s+2\delta_r^s\left[\frac{\partial A^{0i}}{\partial u_t}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_t^w+\left[\frac{\partial f_r}{\partial u_{s,i}}\right]^w\right)\frac{\partial\,{}^{(1)}\chi_s^w}{\partial x^i} \\ \quad +\left(\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^0}\right]^w+\left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial u_s}\right]^w\,{}^{(1)}\chi_s^w\right)\times \\ \quad \times\left(\frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}\,{}^{(1)}\chi_s^w+q_i^w\frac{\partial\,{}^{(1)}\chi_s^w}{\partial x^j}+q_j^w\frac{\partial\,{}^{(1)}\chi_s^w}{\partial x^i}+\frac{\partial^2\,{}^{(1)}\chi_s^w}{\partial x^i\partial x^j}\right). \end{cases}$$

Sous les hypothèses α_{2p+1}, β_{2p-1}, γ_{2p+1}, $(p\geq 2)$, il découle du sous-paragraphe précédent que les fonctions χ_s^w sont de classe C^{2p-1} sur $(\mathcal{D}_0^w)$ et $\chi_s^w\mid_{\mathcal{T}}$ est de classe C^{2p}; on en déduit que les fonctions $h_{r,2}^{sw}$, $h_{r,2}^{0w}$, $\left[\overline{A}^{ij}\right]^w\frac{\partial^2\,{}^{(1)}\chi_r^w}{\partial x^i\partial x^j}$ sont de classe C^{2p-3} sur $(\mathcal{D}_0^w)$.

$(3.2.4.5)'$ est donc un système différentiel du premier ordre *linéaire* en ${}^{(2)}\chi_s^w$.

Puisque $\frac{\partial u_r}{\partial x^0}\left(\phi^w\left(x^i\right),x^i\right)=\chi_r^w\left(x^i\right)$, en dérivant par rapport à x^1, puis en prenant la restriction à $\mathcal{T}$, et en tenant compte du fait que les fonctions $\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^1\partial x^0}\mid_{\mathcal{T}}$ sont continues, on a une condition initiale pour le système différentiel linéaire $(3.2.4.5)'$ définie par:

$$(3.2.4.7):\ {}^{(2)}\chi_r^1\mid_{\mathcal{T}}=\frac{1}{\frac{\partial\phi^1}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}-\frac{\partial\phi^2}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}}\left[\frac{\partial\chi_r^1}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}-\frac{\partial\chi_r^2}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}\right]=\ {}^{(2)}\chi_r^2\mid_{\mathcal{T}}\,.$$

Par conséquent le système différentiel linéaire $(3.2.4.5)'$ munit de la condition initiale définie par (3.2.4.7) admet une unique solution ${}^{(2)}\chi_r^w$ définie dans le voisinage $(\mathcal{S}_0^w)$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{S}$.

Ainsi donc pour toute solution du problème hyper-quasilinéaire de Goursat de classe C^{p+1} sur V, les dérivées partielles secondes sont entièrement déterminées sur $(\mathcal{S}_0)$.

Il découle de (3.2.4.7) que sous les hypothèses α_{2p+1}, β_{2p-1}, γ_{2p+1} $(p \geq 2)$, les fonctions ${}^{(2)}\chi_r^w \mid_{\mathcal{T}}$ sont de classe C^{2p-2}; on déduit alors du théorème de différentiabilité et de dépendance continue des conditions initiales pour les systèmes différentiels que sous les hypothèses α_{2p+1}, $\beta_{2p-1}, \gamma_{2p+1}$, les fonctions ${}^{(2)}\chi_r^w$ sont de classe C^{2p-3} sur $(\mathcal{D}_0^w)$ et en outre les fonctions ${}^{(2)}\chi_r$ sont continues sur $(\mathcal{S}_0)$.

3.2.5. ***Détermination des dérivées d'ordre supérieur ou égal à trois.*** On suppose toujours que les fonctions u_r définissent une solution du problème de Goursat hyper-quasilinéaire et sont de classe C^{p+1} sur V.

On se propose de montrer que pour tout $l \in [1,p] \cap \mathbb{N}$, les fonctions $\partial_0^l u_r$ restreintes à $(\mathcal{S}_0)$ sont entièrement déterminées et de façon unique.

Soit $l \in [1,p] \cap \mathbb{N}$, on pose:

$$ {}^{(l)}\chi_r^w = \frac{\partial^l u_r}{(\partial x^0)^l} \mid_{(\mathcal{S}_0^w)} \text{ et } {}^{(l)}\chi_r = \begin{cases} {}^{(l)}\chi_r^1 \text{ sur } (\mathcal{D}_0^1) \\ {}^{(l)}\chi_r^2 \text{ sur } (\mathcal{D}_0^2) \end{cases}. $$

D'après les deux sous-paragraphes précédents, le résultat est établi pour $l \in \{1,2\}$.

Plus précisément on a montré que: ${}^{(1)}\chi_r^w \equiv \chi_r^w$ est de classe C^{2p-1} sur $(\mathcal{D}_0^w)$ et ${}^{(2)}\chi_r^w$ est de classe C^{2p-3} sur $(\mathcal{D}_0^w)$. En outre on a établi que les fonctions ${}^{(2)}\chi_r$ et χ_r sont continues sur $(\mathcal{S}_0)$.

Sous les hypothèses α_{2p+1}, β_{2p-1}, γ_{2p+1} on suppose que pour tout $m \in [1, l-1] \cap \mathbb{N}$, $(l \geq 2)$:

- ${}^{(m)}\chi_r^w$ est déterminée de façon unique sur $(\mathcal{S}_0^w)$;
- ${}^{(m)}\chi_r^w$ est de classe $C^{2(p-m)+1}$ sur $(\mathcal{D}_0^w)$;
- ${}^{(m)}\chi_r$ est continue sur $(\mathcal{S}_0)$.

On va montrer que les fonctions ${}^{(l)}\chi_r^w$ sont déterminées de façon unique sur $(\mathcal{S}_0^w)$, sont de classe $C^{2(p-l)+1}$ sur $(\mathcal{D}_0^w)$ et que les fonctions ${}^{(l)}\chi_r$ sont continues sur $(\mathcal{S}_0)$.

En dérivant les équations (G_r) $(l-1)$ fois par rapport à x^0, on a:

$$ (3.2.5.1) \quad A^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}\left(\partial_0^{l-1}u_r\right) + h_r^l = 0, $$

où: • h_r^l est un polynôme des fonctions suivantes:
- les dérivées des $A^{\lambda\mu}$ jusqu'à l'ordre $l-1$,
- les dérivées de f_r jusqu'à l'ordre $l-1$,
- les dérivées des u_s jusqu'à l'ordre l.

En considérant la restriction de (3.2.5.1) à l'hypersurface caractéristique $(\mathcal{S}_0^w)$ et en tenant compte du fait que l'on a:

pour tout multi-indice $\theta = (\theta_0, ..., \theta_N) \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\theta| = m \leq l$,

$$ (3.2.5.1)' \quad \begin{cases} \left[D^\theta u_r\right]^w = {}^{(m)}\chi_r^w \prod_{i=1}^{N} (q_i^w)^{\theta_i} + \sum_\pi D^{t_0} \, {}^{(\theta_0+\pi)}\chi_r^w \prod_{i=1}^{\pi} \partial^{t_i}\phi^w \\ \text{où } t_0 + ... + t_\pi = \theta' \equiv (\theta_1, ..., \theta_N), \theta_0 + \pi \leq m-1; \\ {}^{(0)}\chi_r^w = \varphi_r^w. \end{cases} $$

On a sur chaque bicaractéristique issue de $\mathcal{T}$:

$$(3.2.5.2)\quad 2\frac{d\ {}^{(l)}\chi_r^w}{dX^1}+\left[\overline{A}^{ij}\right]^w\frac{\partial q_i^w}{\partial x^j}\ {}^{(l)}\chi_r^w+\left[\overline{A}^{ij}\right]^w\frac{\partial^2\ {}^{(l-1)}\chi_r^w}{\partial x^i\partial x^j}+h_r^{w,l}=0.$$

Avec comme dans le cas des dérivées secondes:

$$h_r^{w,l}=\sum_{s=1}^{N}h_r^{sw,l}\ {}^{(l)}\chi_s^w+h_r^{0w,l}$$

où:

- les $h_r^{sw,l}$ sont des polynômes des fonctions suivantes:

- les dérivées des $A^{\lambda\mu}$ jusqu'à l'ordre $l-1$,
- les dérivées de f_r jusqu'à l'ordre $l-1$,
- les dérivées premières de ϕ^w,
- les χ_s^w.

- les $h_r^{0w,l}$ sont des polynômes des fonctions suivantes:

- les dérivées des $A^{\lambda\mu}$ jusqu'à l'ordre $l-1$,
- les dérivées de f_r jusqu'à l'ordre $l-1$,
- les dérivées de ϕ^w jusqu'à l'ordre $l-1$,
- les ${}^{(m)}\chi_s^w$ $(0\leq m\leq l-1)$ ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $l-m$.

Sous les hypothèses α_{2p+1}, β_{2p-1}, γ_{2p+1}, il découle de l'hypothèse de récurrence que les fonctions $h_r^{sw,l}$, $h_r^{0w,l}$ et $\left[\overline{A}^{ij}\right]^w\frac{\partial^2\ {}^{(l-1)}\chi_r^w}{\partial x^i\partial x^j}$ sont de classe $C^{2(p-l)+1}$ dans $(\mathcal{D}_0^w)$.

(3.2.5.2) est un système différentiel *linéaire* en ${}^{(l)}\chi_s^w$.

Puisque les fonctions u_r sont de classe C^{p+1} sur V et que $l\leq p$, on a les fonctions $\frac{\partial^l u_r}{(\partial x^1)(\partial x^0)^{l-1}}\mid_{\mathcal{T}}$ sont continues; on déduit alors comme dans le cas des dérivées premières que l'on a:

$$(3.2.5.3)\quad {}^{(l)}\chi_r^1\mid_{\mathcal{T}}=\frac{1}{\frac{\partial\phi^1}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}-\frac{\partial\phi^2}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}}\left[\frac{\partial\ {}^{(l-1)}\chi_r^1}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}-\frac{\partial\ {}^{(l-1)}\chi_r^2}{\partial x^1}\mid_{\mathcal{T}}\right]=\ {}^{(l)}\chi_r^2\mid_{\mathcal{T}}\ .$$

Par suite le système différentiel linéaire (3.2.5.2) munit de la condition initiale définie par (3.2.5.3) admet une unique solution ${}^{(l)}\chi_r^w$ définie dans le voisinage $(\mathcal{S}_0^w)$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{S}^w$.

Ainsi donc pour toute solution du problème hyper-quasilinéaire de Goursat de classe C^{p+1} sur V, les fonctions ${}^{(l)}\chi_r^w$ sont déterminées de façon unique.

Sous les hypothèses α_{2p+1}, β_{2p-1}, γ_{2p+1}, il découle de (3.2.5.3) et de l'hypothèse de récurrence que les fonctions ${}^{(l)}\chi_r^w\mid_{\mathcal{T}}$ sont de classe $C^{2(p-l)+2}$; on déduit alors du théorème de différentiabilité et de dépendance continue des conditions initiales pour les systèmes différentiels que les fonctions ${}^{(l)}\chi_r^w$ sont de classe $C^{2(p-l)+1}$ sur $(\mathcal{D}_0^w)$; en outre les fonctions ${}^{(l)}\chi_r$ sont continues sur $(\mathcal{S}_0)$.

3.2.6. ***Récapitulatif des résultats sur les restrictions des dérivées aux hypersurfaces caractéristiques***. Dans ce sous-paragraphe, on récapitule les résultats obtenus dans le cadre de la détermination des restrictions à $\mathcal{S}$ des dérivées de la solution suffisamment régulière du problème hyper-quasilinéaire de Goursat.

Proposition 3.2.6.1. *1)- Etant données des fonctions u_r qui vérifient le problème hyper-quasilinéaire de Goursat* (3.2.1.1) *et qui sont de classe C^{p+1} sur V, sous les hypothèses α_{2p+1}, β_{2p-1}, γ_{2p+1}.*

Alors il existe un voisinage $(\mathcal{S}_0^w)$ *de* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathcal{S}^w$ *tel que pour tout* $l \in [1,p] \cap \mathbb{N}$*, on a:*

• *les fonctions* ${}^{(l)}\chi_r^w = \partial_0^l u_r \mid_{(\mathcal{S}_0^w)}$ *sont déterminées de façon unique et sont de classe* $C^{2(p-l)+1}$ *sur* $(\mathcal{D}_0^w)$;

• *les fonctions* ${}^{(l)}\chi_r$ *sont continues sur* $(\mathcal{S}^0)$;

avec: $(\mathcal{D}_0^w)$ *qui est le projeté de* $(\mathcal{S}_0^w)$ *dans l'espace des* (x^i);

$${}^{(l)}\chi_r = \begin{cases} {}^{(l)}\chi_r^1 \text{ sur } \mathcal{D}_0^1 \\ {}^{(l)}\chi_r^2 \text{ sur } \mathcal{D}_0^2 \end{cases}.$$

2)- Etant données des fonctions u_r *qui vérifient le problème hyper-quasilinéaire de Goursat* (3.2.1.1) *et qui sont de classe* C^∞ *sur* V*, sous les hypothèses* α_∞, $\beta_\infty, \gamma_\infty$.

Il existe un voisinage $(\mathcal{S}_0^w)$ *de* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathcal{S}^w$ *tel que pour tout* $l \in \mathbb{N}^*$*, on a:*

• *les fonctions* ${}^{(l)}\chi_r^w = \partial_0^l u_r \mid_{(\mathcal{S}_0^w)}$ *sont déterminées de façon unique et sont de classe* C^∞ *sur* $(\mathcal{D}_0^w)$;

• *les fonctions* ${}^{(l)}\chi_r$ *sont continues sur* $(\mathcal{S}^0)$

On a eu à constater que seul le système différentiel définissant les dérivées partielles premières par rapport à x^0 restreintes à $\mathcal{S}^w$ est *non linéaire;* cette non linéarité étant dûe à celle des fonctions $[f_r]^w$ par rapport aux $[\partial_0 u_s]^w$. Si les fonctions $[f_r]^w$ sont linéaires par rapport aux $[\partial_0 u_s]^w$, où dans l'expression des $[f_r]^w$ les fonctions $[\partial_i u_s]^w$ sont remplacées par les fonctions $\partial_i\varphi_s^w + q_i^w [\partial_0 u_s]^w$, alors les dérivées partielles premières des solutions u_r restreintes *à* $\mathcal{S}^w$ **tout entier** seront déterminées. Et pour les dérivées d'ordre supérieur ou égal à deux on a le résultat suivant:

Proposition 3.2.6.2. *1)- Etant données des fonctions* u_r *qui vérifient le problème hyper quasi-linéaire de Goursat* (3.2.1.1) *et qui sont de classe* C^{p+1} *sur* V; *si les hypothèses* α_{2p+1}, $\beta_{2p-1}, \gamma_{2p+1}$ *sont vérifiées et les fonctions*

$$[f_r]^w = f_r\left(\phi^w\left(x^i\right), x^i; \varphi_s^w\left(x^i\right); \chi_s^w\left(x^i\right), \partial_i\varphi_s^w + q_i^w\chi_s^w\right)$$

sont linéaires par rapport aux χ_s^w *alors on a les mêmes conclusions que dans le résultat précédent et* $(\mathcal{S}_0)$ *est remplacé par* $\mathcal{S}$ *tout entier.*

2)- Etant données des fonctions u_r *qui vérifient le problème hyper quasi-linéaire de Goursat* (3.2.1.1) *et qui sont de classe* C^∞ *sur* V; *si les hypothèses* α_∞, $\beta_\infty, \gamma_\infty$ *sont vérifiées et les fonctions* $[f_r]^w = f_r\left(\phi^w\left(x^i\right), x^i; \varphi_s^w\left(x^i\right); \chi_s^w\left(x^i\right), \partial_i\varphi_s^w + q_i^w\chi_s^w\right)$ *sont linéaires par rapport aux* χ_s^w *alors on a les mêmes conclusions que dans le résultat précédent et* $(\mathcal{S}_0)$ *est remplacé par* $\mathcal{S}$ *tout entier.*

En utilisant la remarque qui a été faite à la fin du sous-paragraphe 3.2.1 ou encore les relations (3.2.4.3) et $(3.2.5.1)'$ on a le résultat suivant:

Proposition 3.2.6.3. *Etant données des fonctions* u_r *qui vérifient le problème hyper quasi-linéaire de Goursat* (3.2.1.1) *et qui sont de classe* C^{p+1} *sur* V; *sous les hypothèses* α_{2p+1}, $\beta_{2p-1}, \gamma_{2p+1}$:

Il existe un voisinage $(\mathcal{S}_0^w)$ *de* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathcal{S}^w$ *tel que pour tout multi-indice* θ *de* $\mathbb{R}^{N+1}$ *avec* $|\theta| = l \in [1,p] \cap \boldsymbol{N}$*, on a:*

• *les fonctions* $D^\theta u_r \mid_{(\mathcal{S}_0^w)}$ *sont déterminées de façon unique et sont de classe* $C^{2(p-l)+1}$ *sur* $\mathcal{D}_0^w$;

• *les fonctions* $D^\theta u_r \mid_{(\mathcal{S}_0)}$ *sont continues.*

Remarque 3.2.6.1. *Les hypothèses de régularité* $\alpha_{2p+1}, \beta_{2p-1}, \gamma_{2p+1}$ *sont assez fortes; il découle des preuves faites ci-dessus que l'on peut leurs substituer les hypothèses suivantes:*

· *Les fonctions* $A^{\lambda\mu}$ *sont de classe* C^{p+1} *sur* V *et pour tout multi-indice* θ, $|\theta| \leq p$, *les fonctions* $D^\theta A^{\lambda\mu} \mid_{\mathcal{S}^w}$ *sont de classe* $C^{2(p-|\theta|)+1}$ *sur* $\mathcal{D}^w$.

· *Les fonctions* f_r *sont de classe* C^p *sur* V *et pour tout multi-indice* θ, $|\theta| \leq p$, *les fonctions* $D^\theta f_r \mid_{\mathcal{S}^w}$ *sont de classe* $C^{2(p-|\theta|)-1}$ *sur* $\mathcal{D}^w$.

Dans le cas particulier des problèmes de Goursat associés aux systèmes semi-linéaires on a le résultat suivant:

Proposition 3.2.6.4. *Etant données des fonctions* u_r *qui vérifient le problème semi-linéaire de Goursat* (3.1.1.1) *et qui sont cinq fois différentiables et admettent des dérivées continues et bornées jusqu'à l'ordre quatre sur* V; *sous les hypothèses* $\mathbf{H}_3$.

Il existe un voisinage $(\mathcal{S}_0^w)$ *de* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathcal{S}^w$ *tel que pour tout multi-indice* θ *de* $\mathbb{R}^4$ *tel que* $|\theta| \leq 3$, *on a:*

• *les fonctions* $D^\theta u_r \mid_{(\mathcal{S}_0^w)}$ *sont déterminées de façon unique et sont de classe* $C^{7-2|\theta|}$ *sur* $(\mathcal{D}_0^w)$;

• *les fonctions* $D^\theta u_r \mid_{(\mathcal{S}_0)}$ *sont continues sur* $(\mathcal{S}_0)$.

Du résultat précédent, on déduit le résultat suivant qui est très utile pour la suite:

Corollaire 3.2.6.1. *Sous les hypothèses* $\mathbf{H}_3$, *les fonctions* Φ_R *qui interviennent dans les intégrandes du système intégral* $(\mathcal{F}_S)$ *sont déterminées de façon unique sur* $(\mathcal{S}_0)$ *et sont telles que sur* $(\mathcal{D}_0^w)$ *les fonctions* Φ_R *sont de classe* C^1. *En outre les fonctions* Φ_R *sont continues sur* $(\mathcal{S}_0)$.

On a résolu le seul problème resté en suspens après l'établissement du système intégral des formules de Kirchhoff généralisées $(\mathcal{F}_\mathbf{s})$. Dans le chapitre qui va suivre, on va procéder à la résolution dans un espace de fonctions continues et bornées définies dans un voisinage de $(\mathcal{S}_0)$ du système intégral $(\mathcal{F}_\mathbf{s})$.

4. THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE POUR LE SYSTEME INTEGRAL $(\mathcal{F}_\mathbf{s})$ DES FORMULES DE KIRCHHOFF

Ce chapitre est consacré à la résolution du système intégral des formules de Kirchhoff généralisées $(\mathcal{F}_s)$ défini à la *proposition* 3.1.2.2. La méthode utilisée est basée sur le théorème du point fixe de Banach. Des méthodes elles aussi basées sur le théorème du point fixe ont été employées par Y. CHOQUET-BRUHAT [11] (pour des systèmes hyper-quasilinéaires à données initiales sur une hypersurface spatiale), S. BAH [1] (pour des équations semi-linéaires à données initiales sur un conoïde caractéristique). On a adopté, pour des raisons techniques qui seront précisées dans la suite, une méthode qui pourrait se situer entre celles des deux auteurs sus-cités.

Le plan de ce chapitre qui est divisé en trois paragraphes est le suivant:

• dans le premier paragraphe, on donne une expression des fonctions $\mathcal{J}_s(x_0^\alpha, \lambda_h)$ qui interviennent dans les intégrales doubles du système intégral $(\mathcal{F}_s)$, adaptée aux problèmes semi-linéaires de Goursat;

• dans le second paragraphe, on définit le cadre fonctionnel et ensuite on énonce *le résultat d'existence semi-globale et d'unicité* pour le système intégral $(\mathcal{F}_s)$;

• dans le dernier paragraphe, on procède à la résolution du système intégral $(\mathcal{F}_s)$.

4.1. **Expression adaptée des fonctions:** $\mathcal{J}_s\left(x_0^{\alpha},\lambda_h\right)=\mathbf{E}_s^i\left(\Delta_i^1-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right)$.

4.1.1. ***Préliminaires***. On a constaté que pour les problèmes linéaires à données initiales sur une hypersurface spatiale (ou sur deux hypersurfaces caractétistiques sécantes), on a une expression de E_S^i donnée par la formule (1.6.3.1) (ou la formule $(2.3.0.6)'$) qui est adaptée à la résolution des équations intégrales que l'on a obtenues par les formules de Kirchhoff. Une telle formule a été obtenue au *lemme* 5.1.1 de [1] pour des équations semi-linéaires à données initiales sur un conoïde caractéristique. On va énoncer ici un résultat similaire au *lemme* 5.1.1 de [1] .

On conserve pour les fonctions ω,ϖ et $\widehat{\omega}$ les définitions données au sous-paragraphe 1.6.1

Lemme 4.1.1.1. *Les fonctions E_S^{iw}, définies en* (3.1.2.3) *peuvent se mettre sous la forme:*

$$(4.1.1.1)\quad E_S^{iw}=\frac{p_i^0}{\lambda_1^2}\overset{*}{\Phi}{}_S^{w}+\frac{1}{\lambda_1}K_S^i\left(\omega,\varpi,\widehat{\omega}\right)$$

où K_S^i est une fonction affine de ses arguments, à coefficients continus et bornés.

Preuve. D'après (3.1.2.3) on a:

$$E_S^{iw}=-\frac{\partial\sigma_S^R}{\partial y^j}\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w\overset{*}{\Phi}{}_R^{w}+\sigma_S^R\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w\frac{\partial\overset{*}{\Phi}{}_R^{w}}{\partial y^j}-\overset{*}{\Phi}{}_R^{w}\frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w\right)}{\partial y^j}+\left[\overset{*}{B}{}_R^{iT}\right]^w\overset{*}{\Phi}{}_T^{w}\right)$$

avec $\sigma_S^R=\sigma\omega_S^R$.

En développant, on peut reécrire E_S^{iw} sous la forme:

$$(4.1.1.2)\quad E_S^{iw}=\mathcal{A}_S^{iw}+\mathcal{B}_S^{iw},$$

avec:

$$(4.1.1.3)\quad\left\{\begin{array}{c}\mathcal{A}_S^{iw}=-\frac{\partial\sigma}{\partial y^j}\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w\omega_S^R\overset{*}{\Phi}{}_R^{w}\\ \mathcal{B}_S^{iw}=-\frac{\partial\omega_S^R}{\partial y^i}\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w\sigma\overset{*}{\Phi}{}_R^{w}+\\ +\sigma\omega_S^R\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w\frac{\partial\overset{*}{\Phi}{}_R^{w}}{\partial y^j}-\overset{*}{\Phi}{}_R^{w}\frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]^w\right)}{\partial y^j}+\left[\overset{*}{B}{}_R^{iT}\right]^w\overset{*}{\Phi}{}_T^{w}\right)\end{array}\right.$$

- *Calcul des $\mathcal{A}_S^{iw}$*

En utilisant (1.5.4.1), (1.5.4.3), le *lemme* 1.5.4.1 et la relation $\omega_S^R=\delta_S^R+\lambda_1\widehat{\omega}_S^R$, on établit de la même manière que dans $[1,p.70]$ le résultat suivant:

$$(4.1.1.4)\quad\mathcal{A}_S^{iw}=\frac{p_i^0}{\lambda_1^2}\overset{*}{\Phi}{}_S^{w}+\frac{1}{\lambda_1}\left(E_{0S}^{iw}+E_{1R}^{iw}\widehat{\omega}_S^R\right),$$

où les fonctions E_{0S}^{iw}, E_{1S}^{iw} sont continues et bornées.

- *Calcul des $\mathcal{B}_S^{iw}$*

D'après la relation $(A.1.1)$ de l' Appendice $A1$ de [23] on a:

$$\frac{\partial \omega_S^R}{\partial y^i} = \frac{\Delta_i^1}{\Delta} P_T^R \omega_S^T + \omega_{S,k}^R \frac{\square_i^k}{\square}.$$

Par suite on a:

$$(4.1.1.5) \quad \mathcal{B}_S^{iw} = -\sigma \left(\frac{\Delta_j^1}{\Delta} P_T^R \omega_S^T + \omega_{S,k}^R \frac{\square_j^k}{\square} \right) \left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right]^w \overset{*}{\Phi}{}_R^w + \sigma \omega_S^R g_R^{iw}$$

avec les fonctions g_R^{iw} définies par:

$$(4.1.1.6) \quad g_R^{iw} = \left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right]^w \frac{\partial \overset{*}{\Phi}{}_R^w}{\partial y^j} - \overset{*}{\Phi}{}_R^w \frac{\partial \left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right]^w \right)}{\partial y^j} + \left[\overset{*}{B}{}_R^{iT} \right]^w \overset{*}{\Phi}{}_T^w$$

D'après l'*hypothèse* $\mathbf{H}_3$ $\big($sur les fonctions $A^{\lambda\mu}$ et $f_r\big)$et le *corollaire* 3.2.6.1, les fonctions g_R^{iw} sont continues et bornées sur $(\mathcal{D}_0^w)$. On déduit alors de (4.1.1.5) que l'on a:

$$(4.1.1.7) \ \mathcal{B}_S^{iw} = \lambda_1 \sigma \left(g_T^{iw} - \frac{\Delta_j^1}{\Delta} P_T^R \left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right]^w \overset{*}{\Phi}{}_R^w \right) \frac{\omega_S^T}{\lambda_1} - \lambda_1 \sigma \left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right]^w \overset{*}{\Phi}{}_R^w \lambda_1 \frac{\square_j^k}{\square} \right) \frac{\omega_{S,k}^R}{\lambda_1^2}$$

D'après le *lemme* 1.5.4.1, $\lambda_1 \sigma$ est continue et bornée; d'après le *lemme* 1.5.2.1, les fonctions $\frac{\Delta_j^1}{\Delta}$, $\lambda_1 \frac{\square_j^k}{\square}$ sont continues et bornées; d'après les hypothèses $\mathbf{H}_3$, les fonctions P_T^R, $\left[\overset{*}{A}{}^{ij} \right]^w$ sont continues et bornées. Les fonctions P_T^R étant définies par $(3.1.2.4)')$. On déduit de ce qui précède que l'on a:

$$(4.1.1.8) \ \mathcal{B}_S^{iw} = \frac{1}{\lambda_1} \left(E_{2T}^{iw} \omega_S^T + E_{3R}^{ikw} \frac{\omega_{S,k}^R}{\lambda_1} \right)$$

où les fonctions E_{2T}^{iw} , E_{3R}^{ikw} sont continues et bornées. Il découle alors de (4.1.1.2), (4.1.1.4) et (4.1.1.8) que l'on a:

$$(4.1.1.9) \ E_S^{iw} = \frac{p_i^0}{\lambda_1^2} \overset{*}{\Phi}{}_S^w + \frac{1}{\lambda_1} \left(E_{0S}^i + E_{1R}^{iw} \widehat{\omega}_S^R + E_{2R}^{iw} \omega_S^R + E_{3R}^{ikw} \frac{\omega_{S,k}^R}{\lambda_1} \right)$$

En utilisant les définitions de ω, ϖ et $\widehat{\omega}$ on a alors:

$$(4.1.1.10) \quad E_S^{iw} = \frac{p_i^0}{\lambda_1^2} \overset{*}{\Phi}{}_S^w + \frac{1}{\lambda_1} K_S^{iw} (\omega, \varpi, \widehat{\omega})$$

avec:

$$(4.1.1.11) \quad K_S^{iw} (\omega, \widehat{\omega}, \varpi) = E_{0S}^{iw} + E_{1R}^{iw} \widehat{\omega}_S^R + E_{2R}^{iw} \omega_S^R + E_{3R}^{ikw} \frac{\omega_{S,k}^R}{\lambda_1}.$$

On a ainsi établi le lemme. □

Convention:

Dans la suite $K_S^i (\omega, \widehat{\omega}, \varpi)$ designera une fonction affine de ses arguments à coefficients continus et bornés qui pourra être différente à chacun de ses emplois.

4.1.2. ***Expression des fonctions*** $\mathcal{J}_s(\Omega)$. D'après l'étude des fonctions E_S^{iw} faite au sous-paragraphe 4.1.1 ci-dessus, on a:

$$(4.1.2.1)\begin{cases} \mathcal{J}_S^w(\omega) = \mathcal{J}_S^{0w} + \mathcal{J}_S^{1w}(\omega) \\ \text{avec } \mathcal{J}_S^0 = \left(\Delta_i^1 - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right)\frac{p_i^0}{\lambda_1^2}\overset{*}{\Phi}{}_S^w \\ \qquad \mathcal{J}_S^1(\omega) = \left(\Delta_i^1 - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right)\frac{K_S^i(\omega,\varpi,\widehat{\omega})}{\lambda_1} \end{cases}$$

Dans le cas des systèmes linéaires, en utilisant (2.3.0.6) on a obtenu un résultat semblable à (4.1.2.1) ; la différence étant que pour les systèmes linéaires les fonctions K_S^i sont indépendantes des ω, ϖ et $\widehat{\omega}$.

On pourra donc exploiter l'étude qui a été faite au troisième paragraphe du chapitre 2 sur les intégrales doubles.

A/- Dans le domaine $a \leq C\,|x_0^1|$, $(x_0^i) \in (\mathcal{D}_0^w)$.

. *i) Dans le domaine* $\zeta^1 \geq 0$

D'après le *lemme* 2.2.1.8, dans ce domaine $\mathcal{C}_{M_0}^- \cap (\mathcal{S}_0^w)$ admet une représentation paramétrique $\lambda_1 = \psi\left(x_0^\alpha; \lambda_{h'}\right)$.

On passe alors aux variables $\lambda_{2'}$, $\lambda_{3'}$ et on pose:

$$\mathcal{J}_{SB}^{'w} = E_S^{iw}\left(\Delta_i^{1'} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^{h'}\right).$$

En utilisant le *lemme* 4.1.1.1 et en procédant de la même manière que pour les systèmes linéaires (voir le premier sous-paragraphe du troisième paragraphe du chapitre 2) on a l'analogue de la relation (2.3.1.2) donné par:

$$(4.1.2.2)\ \ \mathcal{J}_{SB}^{'w} = \sin\lambda_{2'}\overset{*}{\Phi}{}_S^w\left(\xi^i\right) + K\left(\omega, \varpi, \widehat{\omega}\right)a$$

ii) Dans le domaine $\zeta^1 < 0$

D'après le *lemme* 2.2.1.5 et le *lemme* 2.2.1.6, on passe aux variables ζ^1, α et on pose:

$$D_i = \left|\frac{D\left(\lambda_{2'}, \lambda_{3'}\right)}{D\left(\zeta^1, \alpha\right)}\right|\left(\Delta_i^{1'} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^{h'}\right) \text{ et } \mathcal{J}_{SC}^w(\omega) = D_i E_S^{iw}(\omega)$$

Suivant l'étude de la 2−surface $S_0(M_0)$ faite au sous-paragraphe 2.2.1, on subdivise le domaine en deux parties comme dans le cas des systèmes linéaires.

α) Dans le domaine $\zeta^1 \leq -ma$

On déduit du *lemme* 2.2.1.5 que dans ce domaine on a:

$$D_i = K'\sqrt{a\,|\zeta^1|}, \frac{1}{\lambda_1} = \frac{K''}{|\zeta^1|};\ K', K'' \text{ fonctions bornées.}$$

D'après le *lemme* 4.1.1.1, on a alors la relation suivante qui est l'analogue de la formule (2.3.1.6):

$$E_S^{iw} = \frac{K}{|\zeta^1|^2} + \frac{K\left(\omega, \varpi, \widehat{\omega}\right)}{|\zeta^1|} = \frac{K\left(\omega, \widehat{\omega}, \varpi\right)}{|\zeta^1|^2}.$$

En utilisant la définition $\mathcal{J}^w_{SC}$ on a:

$$(4.1.2.3) \quad \mathcal{J}^w_{SC_1}(\omega) = D_i E^i_S = \frac{\sqrt{a}}{|\zeta^1|^{\frac{3}{2}}} K(\omega, \varpi, \widehat{\omega}).$$

β) Dans le domaine $0 > \zeta^1 > -b$

En procédant comme dans le cas des systèmes linéaires et en utilisant les relations (2.3.1.9) et (2.3.1.11) ; où dans cette dernière on prend K comme fonction de $(\omega, \varpi, \widehat{\omega})$, on a:

$$(4.1.2.4) \quad \mathcal{J}^w_{SC_2}(\omega) = \Phi^w_S\left(\xi^i\right) \frac{\overline{a}}{\left(\overline{a} + |\zeta^1|\right)^2} + \frac{\sqrt{a}}{\left(a + |\zeta^1|\right)^{\frac{1}{2}}} K(\omega, \varpi, \widehat{\omega}).$$

iii) Dans le domaine $D(M_0)$

Dans le cas linéaire on a distingué le cas où $M_0(x^\alpha_0)$ est voisin de $(\mathcal{S}^w_0) \backslash \mathcal{T}$ et le cas où $M_0(x^\alpha_0)$ est voisin de $\mathcal{T}$. Dans les deux cas on a constaté que les fonctions $\mathcal{J}^w_S$ sont bornées. On en déduit que dans le cas des systèmes semi-linéaires on a:

$$(4.1.2.5) \quad \mathcal{J}^w_{SD}(\omega) = K(\omega, \varpi, \widehat{\omega}).$$

B/ Dans le domaine $a > C|x^1_0|$, $x^0_0 < B_2$.

On peut supposer que $M_0(x^\alpha_0)$ est voisin de $\mathcal{T}$ et en procédant comme dans le cas linéaire (voir 2.3.2 *B/*), et en utilisant le *lemme* 4.1.1.1 on a la relation suivante qui est l'analogue de la relation (2.3.2.6):

$$(4.1.2.6) \quad \mathcal{J}^w_S(\omega) = \sin \lambda_2 \overset{*}{\Phi}{}^w_S\left(x^\alpha_0; y^i\right) + K(\omega, \varpi, \widehat{\omega}) \lambda_1.$$

4.2. ESPACES FONCTIONNELS ET THEOREME D'EXISTENCE .

4.2.1. ***Espaces fonctionnels:*** Le théorème d'existence que l'on énoncera dans le paragraphe suivant donne une solution du système intégral des formules de Kirchhoff dans un espace de fonctions continues et bornées.

On considère l'espace fonctionnel $\mathcal{E}_1$ dont un élément $U = (U_S)$ est une famille de fonctions telles que:

P_1 : Les fonctions U_S sont continues et bornées dans un domaine causal $\mathcal{Y}_0$ dont la frontière contient $(\mathcal{S}_0)$;

P_2 : Les fonctions U_S prennent les valeurs Φ^w_S sur $(\mathcal{S}^w_0)$;

P_3 : Pour tout $(x^0, x^i) \in \mathcal{Y}_0$, les fonctions U_S satisfont à l'inégalité:

$$\left|U_S\left(x^0, x^i\right) - \Phi_S\left(x^i\right)\right| < h,$$

h étant une constante à préciser ultérieurement.

Considérons la fonction $U_0 = (U_{0S})$ définie dans $\mathcal{Y}_0$ par:

$$U_{0S}\left(x^0, x^i\right) = \Phi_S\left(x^i\right)$$

D'après le *corollaire* 3.2.6.1, la fonction $U_0 \in \mathcal{E}_1$.

Donc $\mathcal{E}_1$ est une partie non vide de l'espace des fonctions continues sur $\Gamma_2(A)$.

On munit $\mathcal{E}_1$de la distance de la convergence uniforme: pour tout $U, U' \in \mathcal{E}_1$,

$$d_1\left(U, U'\right) = \left\|U - U'\right\|_1 = \sup_{\left(x_\alpha^0\right) \in \mathcal{Y}_0, S} \left|U_S\left(x_\alpha^0\right) - U'_S\left(x_\alpha^0\right)\right|.$$

$(\mathcal{E}_1, d_1)$ est un espace métrique complet.

On considère aussi l'espace fonctionnel $\mathcal{E}_2$ dont un élément $\Omega = \left(\Omega_S^R\right)$ est une famille de fonctions telles que:

P_4 : Les fonctions $\Omega_S^R \equiv \left(\omega_S^R; \omega_{S,i}^R; \omega_{S,ij}^R\right)$ sont continues et bornées dans un domaine Λ_0 défini par:

$$\Lambda_0 : \left\{ \begin{array}{c} \left(x_0^\alpha\right) \in \mathcal{Y}_0 \\ 0 > \lambda_1 > \psi\left(x_0^\alpha; \lambda_h\right) \\ \left(\lambda_2, \lambda_3\right) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

P_5 : Les fonctions Ω_S^R prennent les valeurs Ω_{0S}^R en M_0;

P_6 : Les fonctions $\widehat{\Omega}_S^R \equiv \frac{\Omega_S^R - \delta_S^R}{\lambda_1}$ sont continues et bornées dans Λ_0.

Les fonctions Ω_{0S}^R définissent un élément Ω_0 de $\mathcal{E}_2$.

On munit $\mathcal{E}_2$ de la distance de la convergence uniforme: pour tout Ω, $\Omega' \in \mathcal{E}_2$,

$$\begin{aligned} d_2\left(\Omega, \Omega'\right) = \left\|\Omega - \Omega'\right\|_2 &= \sup_{\substack{\left(x_0^\alpha, \lambda_i\right) \in \Lambda_0 \\ R, S}} \left|\Omega_S^R\left(x_0^\alpha, \lambda_i\right) - \Omega_S'^R\left(x_0^\alpha, \lambda_i\right)\right| \\ &= \sup_{\substack{\left(x_0^\alpha, \lambda_i\right) \in \Lambda_0 \\ R, S, k, l}} \left\{\left|\omega_S^R - \omega_S'^R\right|, \left|\omega_{S,k}^R - \omega_{S,k}'^R\right|, \left|\omega_{S,kl}^R - \omega_{S,kl}'^R\right|\right\}. \end{aligned}$$

On considère l'espace $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ et la distance d définie sur $\mathcal{E}$ par:

$$d\left[\left(U, \Omega\right), \left(U', \Omega'\right)\right] = d_1\left(U, U'\right) + d_2\left(\Omega, \Omega'\right)$$

$(\mathcal{E}, d)$ est un espace métrique complet.

Grâce à la propriété P_3, on choisira h de telle sorte que si $\left(\left(U_S\right), \left(\Omega_S^R\right)\right)$ est une solution de $(\mathcal{F}_S)$ alors la famille de fonctions $U = (U_S)$ est dans une boule de $\mathcal{E}_1$ centrée en U_0 et de rayon h.

4.2.2. ***Enoncé du résultat d'existence et d'unicité***. Soit $L = A^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}^2$ un opérateur x^0-hyperbolique.

On considère le problème de Cauchy semi-linéaire à données initiales sur la réunion $\mathcal{S}$ des deux hypersurfaces $\mathcal{S}^w$, caractéristiques pour L, sécantes suivant la $2-$surface $\mathcal{T}$:$\left\{ \begin{array}{l} x^0 = 0 \\ x^1 = 0 \end{array} \right.$ défini par:

$$(4.2.2.1) \left\{ \begin{array}{r} A^{\lambda\mu}\left(x^\alpha\right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_r\left(x^\alpha, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x^\nu}\right) = 0 \text{ dans } \mathcal{Y} \\ u_{r|\mathcal{S}^w} = \varphi_r^w\left(x^i\right) \end{array} \right.$$

où $\mathcal{Y}$ est un ouvert causal de $\mathbb{R}^4$ dont la frontière contient $\mathcal{S}$ et qui est contenu dans l'ensemble des (x^α) tels que $\phi\left(x^i\right) \leq x^0 < +\infty$.

Le résultat d'existence semi-globale et d'unicité pour le système intégral des formules de Kirchhoff généralisées associé au problème de Goursat pour les systèmes semi-linéaires est le suivant:

Théorème 4.2.2.1. *Hypothèses* $\mathbf{H}_4$*:*

1− $L = A^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}$ *est un opérateur* x^0-*hyperbolique dans* $\mathcal{Y}$ *tel que:*

i) $A^{00} > \varepsilon > 0$, $A^{ij}X_iX_j$ *est définie négative;*

ii) $\exists\ \alpha > 0$, $\forall (x^\alpha) \in \mathcal{Y}$, $\forall (X_i) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$, $-A^{ij}X_iX_j > \alpha \sum\limits_{i=1}^{3} (X_i)^2$;

2− *Les fonctions* $A^{\lambda\mu}$ *sont des éléménts de* $C^4(\mathcal{Y})$ *et pour tout multi-indice* θ *de* $\mathbb{R}^4$, $\left[D^\theta A^{\lambda\mu}\right]^w \in \mathcal{B}^{7-2|\theta|}(\mathcal{D}^w)$; *avec* $\mathcal{B}^p(\mathcal{D}^w) \equiv$ *l'espace des fonctions de classes* C^p *dans* $\mathcal{D}^w$ *dont les dérivées jusqu'à l'ordre* p *sont bornées;*

3− *Les fonctions* f_r *sont des éléments de* $\mathcal{B}^5(\mathcal{Y} \times W \times X)$, *où* W *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* X *est un ouvert de* $\mathbb{R}^{4n}$ *et* $\mathcal{B}^p(\mathcal{Y} \times W \times X) \equiv$ *l'espace des fonctions de classes* C^p *dans* $\mathcal{Y} \times W \times X$ *dont les dérivées jusqu'à l'ordre* p *sont bornées;*

4− *Les fonctions* φ_r^w *sont des éléments de* $\mathcal{B}^7(\mathcal{D}^w)$ *tels que les* φ_r *soient continues sur* $\mathcal{S}$.

Résultats

Sous les hypothèses $\mathbf{H}_4$*, on a:*

1− *Pour toute solution* $u = (u_r)$ *du problème de Cauchy* (4.2.2.1) *cinq fois différentiable et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre quatre continues et bornées, les fonctions* u_r *ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre trois vérifient le système intégral suivant: pour tout point* $M_0(x_0^\alpha) \in \mathcal{Y}$,

$$(\mathcal{F}_S)\left\{\begin{array}{l} 4\pi U_S(x_0^\alpha) = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} \sin\lambda_2 d\lambda_2 \int_0^{\psi\left(x_0^\alpha,\lambda_h\right)} \mathcal{H}_S(U_T,\omega)\, d\lambda_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} \mathcal{J}_S(\omega)\, d\lambda_2, \\ \Omega_S^R(x_0^\alpha,\lambda_i) = \Omega_0 + \displaystyle\int_0^{\lambda_1} H_T^R(U_S)\,\Omega_S^T d\lambda_1, \end{array}\right.$$

où:

$$(4.2.2.2)\quad \left\{\begin{array}{c} U_S = \left(u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \frac{\partial^3 u_s}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}\right), \\ \mathcal{H}_S(U_T,\omega) = \square\left([U_R]\, L_S^R(U_T,\omega,\varpi) + \sigma\omega_S^R\left[f_R(U_T)\right]\right), \\ \mathcal{J}_S(\omega) = E_S^i(\omega)\left(\Delta_i^1 - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right), \\ \Omega_S^R = \left(\omega_S^R, \omega_S^{R,i}, \omega_S^{R,ij}\right);\quad \Omega_{0S}^R = \left(\delta_S^R, 0, 0\right), \\ \textit{Les } H_T^R(U_S) \textit{ sont des matrices définies par } (3.1.2.7). \end{array}\right.$$

2− *Il existe un ouvert causal* $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$ *dont la frontière contient* $(\mathcal{S}_0)$ *tout entier et tel que:*

i)− *Le système intégral* $(\mathcal{F}_S)$ *admet une unique solution* $\left(U_S, \Omega_S^R\right)$ *dans l'espace des fonctions continues et bornées;*

ii)− *les fonctions* (U_S) *prennent les valeurs* (Φ_S) *sur* $(\mathcal{S}_0)$.

On établira le résultat plus général suivant:

Théorème 4.2.2.2. *Sous les hypothèses* $\mathbf{H}_4$*, on a:*

Pour toute solution $u = (u_r)$ *du problème de Cauchy* (4.2.2.1) *cinq fois différentiable et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre quatre continues et bornées;*

1− *Les fonctions* u_r *ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre trois sont telles que le système intégral* $(\mathcal{F}_S)$ *soit vérifié, pour tout point* $M_0(x_0^\alpha) \in \mathcal{Y}$.

2– *Il existe une constante positive* h *et des constantes positives* $C(h)$, $M(h)$, $B(h)$ *telles que pour tout domaine causal* $\mathcal{Y}_1$ *dont la frontière contient* $(\mathcal{S}_0)$ *et qui est contenu dans le domaine* $\mathcal{D}(C(h), M(h), B(h))$ *défini par:*

$$\left\{ (x^\alpha) \in \mathcal{Y} \;/\; \left\{ \begin{array}{c} 0 < a < M(h) \\ a \leq C(h)\,|x^1| \end{array} \right. \quad ou \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 < a < M(h) \\ a > C(h)\,|x^1| \\ x^0 < B(h) \end{array} \right. \right\}$$

i)– le système intégral $(\mathcal{F}_S)$ *admet une unique solution* $\left(U_S, \Omega_S^R\right)$ *dans l'espace des fonctions continues et la fonction* $U = (U_S)$ *appartient à la boule de* $\mathcal{E}_1$ *centrée en* $U_0 = (U_{0S})$ *et de rayon* h;

ii)– les fonctions U_S *prennent sur* $(\mathcal{S}_0)$ *les valeurs* Φ_S.

4.3. **ETABLISSEMENT DES RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE.** Dans ce paragraphe on établit le *théorème* 4.2.2.1 et le *théorème* 4.2.2.2. Il apparaît immédiatement que le premier théorème est une conséquence du second. On va donc établir uniquement le second théorème.

Sous les hypothèses $\mathbf{H}_4$, il découle du *corollaire* 3.2.6.1 que les fonctions Φ_S sont déterminées de façon unique sur $(\mathcal{S}_0)$, elles y sont continues et on a en outre les fonctions $\Phi_S\,|_{(\mathcal{S}_0^w)}$ sont de classe C^1.

En utilisant la *proposition* 3.1.2.1 on a alors la première partie du *théorème* 4.2.2.1 et du *théorème* 4.2.2.2.

En ce qui concerne la deuxième partie du *théorème* 4.2.2.2, on utilise une méthode basée sur le théorème du point fixe de Banach déployé dans l'espace métrique complet $(\mathcal{E}, d)$.

4.3.1. ***Application de*** $\mathcal{E}$ ***dans*** $\mathcal{E}$**.**. On considère l'application Θ définie sur $\mathcal{E}$ par:

$\ll$ A tout élément $(U, \Omega) \equiv \left((U_S), \left(\Omega_S^R\right)\right) \in \mathcal{E}$, on associe $\left((W_S), \left(Z_S^R\right)\right)$ tel que:

$$\begin{aligned} (4.3.1.1)\ \ 4\pi W_S^R(x_0^\alpha) = & \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} \sin\lambda_2 d\lambda_2 \int_0^{\psi\left(x_0^\alpha, \lambda_h\right)} \mathcal{H}_S(U_T, \omega, \varpi)\, d\lambda_1 \\ & + \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} d\lambda_2 \mathcal{J}_S(\omega) \end{aligned}$$

$$(4.3.1.2)\ \ Z_S^R(x_0^\alpha; \lambda_i) = \Omega_{0S}^R + \int_0^{\lambda_1} H_T^R(U_Q)\, \Omega_S^T d\lambda_1 \gg$$

où:

$$(4.3.1.3)\quad \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{H}_S(U_T, \omega) = \Box\left([U_R]\, L_S^R(U_T, \omega, \varpi) + \sigma\omega_S^R(U_Q)\,[f_R(U_T)]\right), \\ \mathcal{J}_S(\omega) = E_S^i(\omega, \varpi, \widehat{\omega})\left(\Delta_i^1 - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_h}\Delta_i^h\right), \\ \text{Les } H_T^R(U_Q) \text{ sont des matrices définies par } (3.1.2.7)\,. \end{array} \right.$$

Proposition 4.3.1.1. *Sous les hypothèses* $\mathbf{H}_4$, *il existe* $h > 0$ *et il existe des constantes* $C(h)$, $M(h)$, $B(h)$ *positives telles que pour un choix convenable du domaine causal* $\mathcal{Y}_0$ *contenu dans*

$$\left\{ (x^\alpha) \in \mathcal{Y} \;/\; \left\{ \begin{array}{c} 0 < a < M(h) \\ a \leq C(h)\,|x^1| \end{array} \right. \quad ou \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 < a < M(h) \\ a > C(h)\,|x^1| \\ x^0 < B(h) \end{array} \right. \right\} \text{ (avec } a = x^0 - \phi(x^i)\text{), } \Theta$$

est une application de $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$.

Preuve. *A/ Montrons que les fonctions* Z_S^R *définies par* (4.3.1.2) *sont telles que* $Z = \left(Z_S^R\right)$ *appartient à* $\mathcal{E}_2$. D'après la relation (4.3.1.2) on a:

$$Z_S^R = \Omega_{0S}^R + \int_0^{\lambda_1} H_T^R \left(U_Q\right) \Omega_S^T d\lambda_1,$$

avec:

$$(4.3.1.4) \begin{cases} H_T^R \left(U_S\right) = \begin{pmatrix} P_T^R & 0 & 0 \\ P_{T,i}^R & p_T^R \delta_i^k & 0 \\ P_{T,ij}^R & P_{T,j}^R \delta_i^k + \delta_j^l p_{T,i}^R & p_T^R \delta_i^k \delta_j^l \end{pmatrix}, \\ P_T^R = -\frac{1}{2} \left(p_j \frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{ij}\right]\right)}{\partial y^i} + \frac{\partial\left(\left[\overset{*}{A}{}^{0i}\right]\right)}{\partial y^i} \right) \delta_T^R + \\ +\frac{1}{2} \left(\left[\overset{*}{B}{}_T^{iR}\right] p_i + \left[\overset{*}{B}{}_T^{0R}\right] \right), \\ P_{T,i}^R = \frac{\partial P_T^R}{\partial p_i^0}, \ P_{T,ij}^R = \frac{\partial^2 P_T^R}{\partial p_i^0 \partial p_j^0}. \end{cases}$$

Puisque les fonctions U_S (qui apparaissent à travers les fonctions $\left[\overset{*}{B}{}_T^{\alpha R}\right]$) sont telles que $U = \left(U_S\right) \in \mathcal{E}_1$, on déduit des propriétés P_1, P_2 et du *corollaire* 3.2.6.1, que sous l'*hypothèse* $\mathbf{H}_4$ (en particulier les hypothèses portant sue les fonctions $A^{\lambda\mu}$ et f_r), les coefficients des matrices H_T^R sont continus et bornés. Puisque $\Omega = \left(\Omega_S^R\right) \in \mathcal{E}_2$, on déduit de la propriété P_4 que les fonctions $\left(H_T^R \left(U_S\right) \Omega_S^T\right)$ sont continues et bornées. En définitive les fonctions Z_S^R sont continues et bornées. Ainsi donc les fonctions Z_S^R sont telles que la propriété P_4 est vérifiée. En outre, sous l'*hypothèse* $\mathbf{H}_4$, en utilisant la *proposition* 1.6.1.1, les fonctions $\frac{Z_S^R - \Omega_{0S}^R}{\lambda_1}$ sont continues et bornées. Donc la propriété P_6 est vérifiée. On déduit du fait que pour $\lambda_1 = 0$, les fonctions Z_S^R prennent les valeurs Ω_{0S}^R que la propriété P_5 est vérifiée. Par conséquent les fonctions Z_S^R sont telles que $Z = \left(Z_S^R\right) \in \mathcal{E}_2$.

B/ Montrons que les fonctions W_S *définies par* (4.3.1.1) *sont telles que* $W = \left(W_S\right) \in \mathcal{E}_1$.

Il s'agit de montrer que sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$ les fonctions W_S définies par (4.3.1.1) sont telles que les propriétés P_1, P_2, P_3 soient vérifiées. On établit tout d'abord le *lemme* suivant:

Lemme 4.3.1.1. *Etant donné* $(U, \Omega) \in \mathcal{E}$, *sous les hypothèses* $\mathbf{H}_4$, *les fonctions* $K_S^i \left(\omega, \widehat{\omega}, \varpi\right)$, *définies par* (4.1.1.11), *sont continues et bornées et satisfont la majoration:*

$$(4.3.1.5) \quad \left|K_S^i \left(\omega, \widehat{\omega}, \varpi\right)\right| \leq k_0 \left(1 + \left\|\widehat{\Omega}_S^R\right\|_\infty\right), \ k_0 \text{ constante;}$$

$$\text{où } \left\|\widehat{\Omega}_S^R\right\|_\infty = \sup_{\left(x_0^\alpha, \lambda_i\right) \in \Lambda_0} \left|\widehat{\Omega}_S^R \left(x_0^\alpha, \lambda_i\right)\right|.$$

□

Preuve. Soit $(U,\Omega) \in \mathcal{E}$, d'après les *hypothèses* P_4 et P_6, les fonctions Ω_S^R et $\widehat{\Omega}_S^R = \frac{\Omega_S^R - \Omega_{0S}^R}{\lambda_1}$ sont continues et bornées. D'où les fonctions $\omega, \widehat{\omega}, \varpi$ sont continues et bornées dans Λ_0. Sous les hypothèses H_4 et par définition des $K_S^i(\omega,\widehat{\omega},\varpi)$, ces dernières sont des fonctions affines de leurs arguments à coefficients continus et bornés. D'où les fonctions $K_S^i(\omega,\widehat{\omega},\varpi)$ sont continues et bornées dans Λ_0. En utilisant (4.1.1.11) on a:

$$K_S^i(\omega,\widehat{\omega},\varpi) = E_{0S}^i + E_{1R}^i \widehat{\omega}_S^R + E_{2R}^i \omega_S^R + E_{3R}^{ik} \frac{\omega_{S,k}^R}{\lambda_1},$$

où les coefficients $E_{0S}^i, E_{1R}^i, E_{2R}^i, E_{3R}^{ik}$ sont des fonctions continues et bornées. Donc il existe des constantes positives k^i telles que:

$$\begin{aligned}\left|K_S^i(\omega,\widehat{\omega},\varpi)\right| &\le k^i \left(1 + \left|\widehat{\omega}_S^R\right| + \left|\frac{\omega_S^{R,k}}{\lambda_1}\right|\right)\\ &\le k_0^i \left(1 + \left\|\frac{\Omega_S^R - \Omega_{0S}^R}{\lambda_1}\right\|_\infty\right)\\ &\le k_0 \left(1 + \left\|\widehat{\Omega}_S^R\right\|_\infty\right).\end{aligned}$$

Si on pose $\widehat{\Omega} = \left(\widehat{\Omega}_S^R\right)$, et $\left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty = \max\limits_{R,S} \left\|\widehat{\Omega}_S^R\right\|_\infty$ on a aussi:

$$(4.3.1.6) \quad \left|K_S^i(\omega,\widehat{\omega},\varpi)\right| \le k_0 \left(1 + \left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right).$$

Ce qui achève la preuve du *lemme*. □

i) Montrons que les fonctions W_S vérifient P_1.

Il s'agit de montrer que pour $(U,\Omega) \in \mathcal{E}$ et sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, les fonctions W_S définies par (4.3.1.1) sont continues et bornées dans $\Gamma_2(A)$.

D'après (4.3.1.1) on a:

$$(4.3.1.7) \begin{cases} 4\pi W_S(x_0^\alpha) = \mathcal{T}_S(x_0^\alpha) + \mathcal{I}_S(x_0^\alpha) \text{ avec} \\ \mathcal{T}_S(x_0^\alpha) = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^\pi \sin\lambda_2 d\lambda_2 \int_0^{\psi\left(x_0^\alpha,\lambda_h\right)} \mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right) d\lambda_1, \\ \mathcal{I}_S(x_0^\alpha) = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^\pi d\lambda_2 \mathcal{J}_S\left(\Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right), \\ \qquad \text{les fonctions } \mathcal{H}_S \text{ et } \mathcal{J}_S \text{ étant définies par } (4.2.2.2). \end{cases}$$

a) Montrons que les fonctions $\mathcal{T}_S$ sont continues et bornées

Soit $(U,\Omega) \in \mathcal{E}$.

D'après les propriétés P_4, P_6 les fonctions Ω_S^R, $\widehat{\Omega}_S^R$ sont continues et bornées. Sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, en utilisant la *proposition* 1.6.2.1 et le *corollaire* 3.2.6.1, on déduit que les fonctions $\mathcal{H}_S$ sont continues et bornées.

En utilisant le théorème de continuité des intégrales dépendant de paramètres, on déduit que les fonctions $\mathcal{T}_S$ sont continues et bornées à l'intérieur de $\Gamma_2(A)$.

· *Etudions la continuité de $\mathcal{T}_S$ sur $(\mathcal{S}_0)$.*

Pour cela on utilise l'étude de la fonction $V\left(x_0^\alpha\right)$ faite au paragraphe 2.4.

$\circ$) *Dans le domaine* $a \leq C\left|x_0^1\right|$

En utilisant la relation (2.4.1.1) on a:

$$(4.3.1.8)\quad \left|\mathcal{T}_S\left(x_0^\alpha\right)\right| \leq \sup\left\{\left|\mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right)\right|, \left(x_0^\alpha, \lambda_i\right) \in \Lambda\right\} K' a^{\frac{1}{2}}$$

$\circ$) *Dans le domaine* $a > C\left|x_0^1\right|$, $x_0^0 < B_2$

En utilisant la relation (2.4.2.1) on a:

$$(4.3.1.9)\quad \left|\mathcal{T}_S\left(x_0^\alpha\right)\right| \leq \sup\left\{\left|\mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right)\right|, \left(x_0^\alpha, \lambda_i\right) \in \Gamma\right\} K'' x_0^0$$

En utilisant les relations $(4.3.1.8-9)$ on a:

Lorsque $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ tend vers un point de $\left(\mathcal{S}_0\right)$, les fonctions $\mathcal{T}_S\left(x_0^\alpha\right)$ tendent vers zéro.

b) Montrons que les fonctions $\mathcal{I}_S$ *sont continues et bornées*

On utilise l'étude préliminaire qui a été faite au sous-paragraphe 4.1.2; on combine les résultats que l'on y a obtenus au *lemme* 4.3.1.1

α) *Dans le domaine* $a \leq C\left|x_0^1\right|$, $\left(x_0^i\right) \in \left(\mathcal{D}_0^w\right)$.

$\bullet$) *Dans le domaine* $\zeta^1 \geq 0$

D'après (4.1.2.2) on a:

$$\mathcal{J}_{SB}'^w(\omega) = \sin\lambda_{2'} \overset{*}{\Phi}{}_S^w\left(\xi^i\right) + aK\left(\omega, \varpi, \widehat{\omega}\right).$$

En utilisant (4.3.1.6) et le fait que, d'après le *lemme* 2.2.1.9, dans ce domaine l'inégalité suivante est vérifiée $\left|\gamma\left(\lambda_{3'}\right) - \frac{\pi}{2}\right| < K'a$, on a après intégration:

$$(4.3.1.10)\quad \mathcal{I}_{SB} = \int_0^{2\pi} d\lambda_{3'} \int_{\gamma\left(\lambda_{3'}\right)}^{\pi} \mathcal{J}_{SB}'(\omega)\, d\lambda_{2'}$$
$$= 2\pi\Phi_S\left(\xi^i\right) + k_1 a\left(1 + \left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right), k_1 \text{ fonction bornée.}$$

$\bullet$) *Dans le domaine* $\zeta^1 < 0$

$\circ$) *Dans le domaine* $\zeta^1 \leq -ma$

D'après la relation (4.1.2.3) on a:

$$\mathcal{J}_{SC_1}(\omega) = \frac{\sqrt{a}}{\left|\zeta^1\right|^{\frac{3}{2}}} K\left(\omega, \varpi, \widehat{\omega}\right).$$

$\circ$) *Dans le domaine* $-b < \zeta^1 < 0$

D'après la relation (4.1.2.4) on a:

$$\mathcal{J}_{SC_2}(\omega) = \Phi_S\left(\xi^i\right) \frac{\overline{a}}{\left(\overline{a} + \left|\zeta^1\right|\right)^2} + \sqrt{\frac{a}{a + \left|\zeta^1\right|}} K\left(\omega, \varpi, \widehat{\omega}\right).$$

De même que dans le cas des systèmes linéaires, on est amené à distinguer deux cas (selon la valeur de $\max\left\{-b, \frac{1}{2}\mu_0\left(\xi^i\right)\right\}$) avant de proceder à l'intégration.

Après avoir distingué les deux cas, puis en intégrant et enfin en utilisant (4.3.1.6) on a:

$$(4.3.1.11)\quad \mathcal{I}_{SC} = 2\pi\Phi_S^w\left(\xi^i\right) + k_2\sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|}}\left(1 + \left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right).$$

•) *Dans le domaine* $D(M_0)$

D'après la relation (4.1.2.5) on a la relation suivante qui est l'analogue de :

$$\mathcal{J}_{SD}(\omega) = K(\omega, \varpi, \widehat{\omega}).$$

De même que dans le cas des systèmes linéaires, on distingue deux cas avant de proceder à l'intégration.

○) *Si* $M_0(x_0^\alpha)$ *est voisin de* $(\mathcal{S}_0)\backslash\mathcal{T}$

En utilisant (4.3.1.6), puis en intégrant on a:

$$(4.3.1.12)\ \mathcal{I}_{SD_1} = k_3\left(1+\left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right)\sup\left\{\lambda_{2'}, (\lambda_{2'}, \lambda_{3'}) \in \Diamond_{2'}\right\}.$$

○) *Si* $M_0(x_0^\alpha)$ *est voisin de* $\mathcal{T}$

En utilisant (4.3.1.6), puis en intégrant on a de la même manière que dans le cas des systèmes linéaires:

$$(4.3.1.13)\ \mathcal{I}_{SD_2} = k_4\left(1+\left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right)\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}+|x_0^1|}.$$

On déduit des relations (4.3.1.10 à 4.3.1.13) que dans le domaine $a \leq C\,|x_0^1|$, on a:

∗) *Si* $M_0(x_0^\alpha)$ *est voisin de* $(\mathcal{S}_0)\backslash\mathcal{T}$

$$(4.3.1.14)\ \mathcal{I}_S(x_0^\alpha) = 4\pi\Phi_S\left(\xi^i\right) + k\left(1+\left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right)\left(a+\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}}+\sup_{(\lambda_{2'},\lambda_{3'})\in\Box'_2}\lambda_{2'}\right).$$

∗) *Si* $M_0(x_0^\alpha)$ *est voisin de* $\mathcal{T}$

$$(4.3.1.15)\ \mathcal{I}_S(x_0^\alpha) = 4\pi\Phi_S\left(\xi^i\right) + k'\left(1+\left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right)\left(a+\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}+|x_0^1|}\right).$$

Sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, en utilisant le *corollaire* 3.2.6.1 et les relations $(4.3.1.14-15)$, on conclut que dans le domaine $a \leq C\,|x_0^1|$, les $\mathcal{I}_S$ sont continues et bornées.

β) *Dans le domaine* $a > C\,|x_0^1|$, $x_0^0 < B_2$

D'après la relation (4.2.1.6) on a:

$$\mathcal{J}_S(\omega) = \sin\lambda_2\Phi_S\left(\xi^i\right) + \lambda_1 K(\omega, \varpi, \widehat{\omega}).$$

En utilisant la relation (4.3.1.6), le fait que l'on a $\lambda_1 = kx_0^0$ d'après le *lemme* 2.1.3.2, on déduit après intégration que:

$$(4.3.1.16)\ \mathcal{I}_S(x_0^\alpha) = 4\pi\Phi_S\left(\xi^i\right) + k_5x_0^0\left(1+\left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right),$$

On déduit de la relation (4.3.1.16) que sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, en utilisant le *corollaire* 3.2.6.1, les fonctions $\mathcal{I}_S$ sont continues et bornées dans le domaine $a > C\,|x_0^1|$, $x_0^0 < B_2$.

Des études faites en a) et b), on déduit que:

∗) *Dans le domaine* $a \leq C\,|x_0^1|$:

$$4\pi W_S\left(x_0^\alpha\right)=\begin{cases} 4\pi\Phi_S\left(\xi^i\right)+ka^{\frac{1}{2}}+\ k_1\left(1+\left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right)\left(a+\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}}+\sup\limits_{\left(\lambda_{2'},\lambda_{3'}\right)\in\square'_2}\lambda_{2'}\right) \\ \quad \text{si } M_0\left(x_0^\alpha\right) \text{ est voisin de } \left(\mathcal{S}_0\right)\backslash\mathcal{T}, \\ 4\pi\Phi_S\left(\xi^i\right)+ka^{\frac{1}{2}}+k_1\left(1+\left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right)\left(a+\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}+|x_0^1|}\right) \\ \quad \text{si } M_0\left(x_0^\alpha\right) \text{ est voisin de } \mathcal{T}. \end{cases} \tag{4.3.1.17}$$

$*$) *Dans le domaine* $a>C\left|x_0^1\right|$, $x_0^0<B_2$

$$4\pi W_S\left(x_0^\alpha\right)=4\pi\Phi_S\left(\xi^i\right)+k_2x_0^0\left(1+\left\|\widehat{\Omega}\right\|_\infty\right), \tag{4.3.1.18}$$

On déduit des relations $(4.3.1.17-4.3.1.18)$ que les fonctions W_S sont continues et bornées dans $\Gamma_2(A)$.

En outre, en utilisant le *lemme* 2.2.1.10, on a:

Les fonctions W_S prennent les valeurs Φ_S sur $\left(\mathcal{S}^0\right)$.

Il reste à établir que les W_S vérifient P_3.

Pour ce faire, on établit le résultat suivant:

Lemme 4.3.1.2. *Pour* $(U,\Omega)\in\mathcal{E}$ *et sous les hypothèses* $\mathbf{H}_4$.

Pour h *convenablement choisi, il existe* $C(h)$, $M(h)$, $B(h)$ *constantes positives telles que:*

Pour $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ *appartenant au domaine* $\mathcal{D}(C,M,B)$ *défini par:*

$$\left\{\left(x^\alpha\right)\in\mathbb{R}^4/\left\{\begin{array}{l}0<a<M\\ a\leq C\left|x^1\right|\end{array}\right.,\ ou\ \left\{\begin{array}{l}0<a<M\\ a>C\left|x^1\right|\\ x^0<B\end{array}\right.\right\},\ on\ a:$$

$$\left|W_S\left(x_0^0,x_0^i\right)-\Phi_S\left(x_0^i\right)\right|<h.$$

Preuve:

On a vu que pour $(U,\Omega)\in\mathcal{E}$ et sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, les fonctions W_S vérifient les relations $(4.3.1.17-4.3.1.18)$.

On déduit de ces relations et du fait que d'après la propriété P_6 les fonctions $\widehat{\Omega}_S^R$ sont bornées que:

- *Dans le domaine* $a<C\left|x^1\right|$

  Pour M_0 *voisin de* $\mathcal{T}$

$$\left|W_S-\Phi_S\right|\leq K\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}+|x_0^1|}\right). \tag{4.3.1.19}$$

  Pour M_0 *voisin de* $\left(\mathcal{S}^0\right)\backslash\mathcal{T}$

$$\left|W_S-\Phi_S\right|\leq K\left(\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}}+\sqrt{a}+\sup_{\left(\lambda_{2'},\lambda_{3'}\right)\in\Diamond'_2}\lambda_{2'}\right). \tag{4.3.1.20}$$

• *Dans le domaine* $a > C\left|x^1\right|$, $x^0 < B_2$

$$(4.3.1.21) \quad |W_S - \Phi_S| \leq K x_0^0.$$

Pour établir le lemme, il suffit de choisir convenablement h tel que l'on puisse trouver des constantes $C(h)$, $M(h)$ et $B(h)$ pour lesquelles:

$$(4.3.1.22) \quad \left.\begin{array}{l} 0 < a < M(h) \\ a \leq C(h)\left|x_0^1\right| \\ M_0 \text{ voisin de } \mathcal{T} \end{array}\right\} \Longrightarrow K\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|} + \left|x_0^1\right|}\right) < h\ ,$$

$$(4.3.1.23) \quad \left.\begin{array}{l} 0 < a < M(h) \\ a \leq C(h)\left|x_0^1\right| \\ M_0 \text{ voisin de } \left(\mathcal{S}^0\right)\backslash\mathcal{T} \end{array}\right\} \Longrightarrow K\left(\sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|}} + \sqrt{a} + \sup_{\left(\lambda_{2'},\lambda_{3'}\right)\in\Diamond_2'} \lambda_{2'}\right) < h,$$

$$(4.3.1.24) \quad \left.\begin{array}{l} 0 < a < M(h) \\ a > C(h)\left|x_0^1\right| \\ x_0^0 < B(h) \end{array}\right\} \Longrightarrow K x_0^0 < h.$$

C'est (4.3.1.22) qui permet de choisir convenablement h. En effet (4.3.1.22) est définie pour M_0 voisin de $\mathcal{T}$: $x^1 = 0 = x^0$; on choisit h tel que dans le domaine: $a < C\left|x_0^1\right|$ et pour M_0 voisin de $\mathcal{T}$ on ait $\left|x_0^1\right| < \left(\frac{h}{3K}\right)^2$.

• Pour h ainsi choisi, (4.3.1.22) est satisfaite si on a:

$$a < \left(\frac{h}{3K}\right)^2 \text{ et } a < \left(\frac{h}{3K}\right)^2 \left|x_0^1\right|.$$

On pose:

$$M_1(h) = \left(\frac{h}{3K}\right)^2,\ C_1(h) = \min\left(C, \left(\frac{h}{3K}\right)^2\right),$$

C étant la constante définie au *théorème* 2.2.3.1.

• (4.3.1.23) est définie pour M_0 voisin de $\left(\mathcal{S}^0\right)\backslash\mathcal{T}$. En utilisant le *lemme* 2.2.1.10, il existe $M_2(h) > 0$ tel que:

$$a < M_2(h) \Longrightarrow \sup_{\left(\lambda_{2'},\lambda_{3'}\right)\in\Diamond_2'} \lambda_{2'} < \frac{h}{3K}.$$

(4.3.1.23) est alors satisfaite, si on a:

$$a < \left(\frac{h}{3K}\right)^2 \text{ et } a < \left(\frac{h}{3K}\right)^2 \left|x_0^1\right|.$$

On pose:

$$M(h) = \min\left(M_1(h), M_2(h)\right) \text{ et } C(h) = C_1(h).$$

• (4.3.1.24) permet de déterminer $B(h)$.

Pour

$$0 < a < M(h), a > C(h)\left|x_0^1\right|, x_0^0 < \frac{h}{K} = B(h);\ \text{l'on a } (4.3.1.24).$$

On a ainsi établi le *lemme*.

On aura établi que les fonctions W_S vérifient P_3, si on montre que l'on peut trouver un domaine causal qui soit contenu dans $\Lambda\left(C,M,B\right)$.

D'après le *lemme* 2.1.3.2, pour toute constante constante positive A, il existe un domaine $\Gamma_2\left(A\right)$ défini par:

$$\begin{cases} 0 < a < a_2\left(x_0^i; A\right) \\ \left(x_0^i\right) \in \mathcal{D} \end{cases}$$

où a_2 est une fonction continue de ses arguments vérifiant $0 < a_2\left(x_0^i; A\right) < A$ tel que $\forall M_0\left(x_0^\alpha\right) \in \Gamma_2\left(A\right), \left(\mathcal{C}_{M_0}^-\right) \subset \Gamma_2\left(A\right)$.

Le résultat sera établi si l'on montre que l'on peut choisir la constante A telle que:

$$(*) \quad \left\{\left(x_0^i\right) \in \mathbb{R}^4;\ 0 < a < A\right\} \subset \mathcal{D}\left(C,M,B\right).$$

Sous les hypothèses $\mathbf{H}_4$, on peut trouver une constante positive $A\left(h\right)$ telle que $(*)$ soit vérifié. (Dans le cas de générique où $\mathcal{S}$ est d'équation : $x^0 = |x^1|$, il suffit de prendre $A\left(h\right) = \min\left\{M\left(h\right), \frac{C(h)}{1+C(h)}B\left(h\right)\right\}$).

$A\left(h\right)$ étant choisi, on prend $\mathcal{Y}_0 = \Gamma_2\left(A\left(h\right)\right)$.

On a ainsi établi la *proposition* 4.3.1.1.

4.3.2. ***Point fixe de Θ dans $\mathcal{E}$.*** On montre dans ce sous-paragraphe que Θ admet un unique point fixe dans $\mathcal{E}$ pour $\mathcal{Y}_0$ convenablement choisi. On ne montrera pas que Θ diminue les distances dans $\mathcal{E}$. On va plutôt exploiter la linéarité des intégrandes par rapport aux fonctions Ω_S^R dans les relations (4.3.1.2).

On considère $\left(U,\Omega\right)$ et $\left(U',\Omega'\right)$ deux éléments de $\mathcal{E}$.

Posons $\left(W,Z\right) = \Theta\left(U,\Omega\right)$ et $\left(W',Z'\right) = \Theta\left(U',\Omega'\right)$.

Lemme 4.3.2.1. *Sous les hypothèses* $\mathbf{H}_4$,

$$(4.3.2.1) \quad \left|Z_S'^R - Z_S^R\right| \le K'\left|\lambda_1\right|\left(\left\|U'-U\right\|_1 + \left\|\Omega'-\Omega\right\|_2\right).$$

Preuve:

D'après les relations (4.3.1.2) on a:

$$Z_S'^R = \Omega_{0S}^R + \int_0^{\lambda_1} H_T^R\left(U_S'\right)\Omega_S'^T d\lambda_1 \quad Z_S^R = \Omega_{0S}^R + \int_0^{\lambda_1} H_T^R\left(U_S\right)\Omega_S^T d\lambda_1.$$

D'où:

$$(4.3.2.2) \quad Z_S'^R - Z_S^R = \int_0^{\lambda_1}\left[H_T^R\left(U_S'\right)\left(\Omega_S'^T - \Omega_S^T\right) + \Omega_S^T\left(H_T^R\left(U_S'\right) - H_T^R\left(U_S\right)\right)\right]d\lambda_1.$$

Pour toute matrice $H = \left(h_{ij}\right)$ on définit pour norme de la matrice H le réel:

$$\left\|H\right\| = \sup_i\left(\sup_j\left|h_{ij}\right|\right).$$

Puisque $U, U' \in \mathcal{E}_1$ et sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, en utilisant les relations (4.3.1.4) définissant les matrices H_T^R, on déduit que les coefficients des matrices $H_T^R\left(U_S'\right)$ sont bornées indépendamment des fonctions U_S'.

Donc il existe une constante positive k_1' telle que:

$$(4.3.2.3) \quad \left\| H_T^R\left(U_S'\right) \right\| \leq k_1'.$$

Puisque $U, U' \in \mathcal{E}_1$, sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$ et en particulier celles faites sur les fonctions f_r, et en utilisant les relations (4.3.1.4) qui définissent les matrices $H_T^R\left(U_S\right)$, on conclut que les coefficients des matrices $H_T^R\left(U_S\right)$ sont lipschitziens en les fonctions U_S. D'où il existe une constante $k_2' > 0$ telle que:

$$(4.3.2.4) \quad \left\| H_T^R\left(U_S'\right) - H_T^R\left(U_S\right) \right\| \leq k_2' \left\| U' - U \right\|_1.$$

En utilisant les relations (4.3.2.2 à 4.3.2.4) et le fait que $\Omega', \Omega \in \mathcal{E}_2$ on a:

$$(4.3.2.5) \quad \left| Z_S'^R - Z_S^R \right| \leq K' \left|\lambda_1\right| \left(\left\| U' - U \right\|_1 + \left\| \Omega' - \Omega \right\|_2 \right).$$

On se propose dans la suite d'établir des inégalités similaires pour les fonctions W_S. Pour ce faire on sépare l'étude des intégrales doubles de celle des intégrales triples.

D'après (4.3.1.1) on a:

$$4\pi W_S\left(x_0^\alpha\right) = \mathcal{T}_S\left(x_0^\alpha\right) + \mathcal{I}_S\left(x_0^\alpha\right),$$

les fonctions $\mathcal{T}_S$ et $\mathcal{I}_S$ étant définies par (4.3.1.7).

i) Etude des fonctions $\mathcal{T}_S\left(x_0^\alpha\right)$. Pour étudier les intégrales triples, on va établir le résultat suivant:

Proposition 4.3.2.1. *Sous les hypothèses* $\mathbf{H}_4$*, les fonctions* $\mathcal{T}_S$ *définies par* (4.3.1.7) *vérifient:*

- *Dans le domaine* $a \leq C\left|x_0^1\right|$

$$(4.3.2.6) \quad \left| \mathcal{T}_S'\left(x_0^\alpha\right) - \mathcal{T}_S\left(x_0^\alpha\right) \right| \leq K'' \sqrt{a} \left(\left\| U' - U \right\|_1 + \left\| \Omega' - \Omega \right\|_2 + \left\| \widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega} \right\|_2 \right).$$

- *Dans le domaine* $a > C\left|x_0^1\right|$, $x_0^0 < B$

$$(4.3.2.7) \quad \left| \mathcal{T}_S'\left(x_0^\alpha\right) - \mathcal{T}_S\left(x_0^\alpha\right) \right| \leq K'' x_0^0 \left(\left\| U' - U \right\|_1 + \left\| \Omega' - \Omega \right\|_2 + \left\| \widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega} \right\|_2 \right).$$

Avant d'établir ce résultat, on a besoin d'un résultat préliminaire. On écrit les fonctions $\mathcal{H}_S$ qui interviennent dans les intégrales triples comme somme de deux fonctions pour lesquelles on établit des propriétés de Lipschitz par rapport à leurs arguments.

D'après la relation (4.3.1.3),

$$\mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right) = \Box\left(\left[U_R\right] L_S^R\left(U_T, \omega, \varpi\right) + \sigma \omega_S^R\left(U_T\right)\left[f_R\left(U_T\right)\right]\right).$$

On pose:

$$^1\mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right) = \Box\left[U_R\right] L_S^R\left(U_T, \omega, \varpi\right),$$
$$^2\mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R\right) = \Box \sigma \omega_S^R\left(U_T\right)\left[f_R\left(U_T\right)\right].$$

Lemme 4.3.2.2. *Les fonctions* $^1\mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R, \widehat{\Omega}_T^R\right)$ *et* $^2\mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega_T^R\right)$ *sont lipschitziennes par rapport à leurs arguments.*

Preuve:

•) *On montre que* ${}^1\mathcal{H}_S$ *est lipschitzienne*

On pose:

$$ {}^1\mathcal{H}'_S = {}^1\mathcal{H}_S\left(U'_T, \Omega'^R_T, \widehat{\Omega}'^R_T\right) \text{ et } , {}^1\mathcal{H}_S = {}^1\mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega^R_T, \widehat{\Omega}^R_T\right) $$

On a:

$$ {}^1\mathcal{H}'_S - {}^1\mathcal{H}_S = \Box\left[\left[U'_R\right] L^R_S\left(U'_T, \omega', \varpi'\right) - [U_R]\, L^R_S\left(U_T, \omega, \varpi\right)\right] $$
$$ = \Box\left\{\begin{array}{c} \left(\left[U'_R\right] - [U_R]\right) L^R_S\left(U'_T, \omega', \varpi'\right) \\ + [U_R]\left(L^R_S\left(U'_T, \omega', \varpi'\right) - L^R_S\left(U'_T, \omega, \varpi\right)\right) \\ + [U_R]\left(L^R_S\left(U'_T, \omega, \varpi\right) - L^R_S\left(U_T, \omega, \varpi\right)\right) \end{array}\right\}. $$

D'après la *proposition* 1.6.2.1, sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$ et en utilisant le fait que $(U', \Omega') \in \mathcal{E}$, on déduit qu'il existe une constante positive k_1 telle que:

$$ (4.3.2.8) \quad \left|\Box L^R_S\left(U'_T, \omega', \varpi'\right)\right| \leq k_1 $$

D'après la *proposition* 1.6.2.1, sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, en utilisant le fait que $U' \in \mathcal{E}_1$ et le *corollaire* 3.2.6.1 on a:

$$ (4.3.2.9) \quad \left|\Box\,[U_R]\left(L^R_S\left(U'_T, \omega', \varpi'\right) - L^R_S\left(U'_T, \omega, \varpi\right)\right)\right| \leq k_2\left(\left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2\right). $$

où k_2 est une constante positive.

D'après la *proposition* 1.6.2.1, sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, en utilisant le fait que $\Omega \in \mathcal{E}_2$ et le *corollaire* 3.2.6.1 on a l'existence d'une constante positive k_3 telle que:

$$ (4.3.2.10) \quad \left|[U_R]\,\Box\left(L^R_S\left(U'_T, \omega, \varpi\right) - L^R_S\left(U_T, \omega, \varpi\right)\right)\right| \leq k_3\left\|U' - U\right\|_1. $$

En utilisant les relations (4.3.2.8 à 4.3.2.10) et la relation ci-dessus définissant ${}^1\mathcal{H}'_S - {}^1\mathcal{H}_S$, on a:

$$ (4.3.2.11) \quad \left|{}^1\mathcal{H}'_S - {}^1\mathcal{H}_S\right| \leq k\left(\left\|U' - U\right\|_1 + \left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2\right). $$

•) *On montre que* ${}^2\mathcal{H}_S$ *est lipschitzienne*

On pose

$$ {}^2\mathcal{H}'_S = {}^2\mathcal{H}_S\left(U'_T, \Omega'^R_T\right) \text{ et } , {}^2\mathcal{H}_S = {}^2\mathcal{H}_S\left(U_T, \Omega^R_T\right) . $$

On a:

$$ {}^2\mathcal{H}'_S - {}^2\mathcal{H}_S = \Box\sigma\left\{\left(\Omega'^R_S - \Omega^R_S\right)\left[f_R\left(U'_T\right)\right] + \Omega^R_S\left(\left[f_R\left(U'_T\right)\right] - \left[f_R\left(U_T\right)\right]\right)\right\}. $$

Puisque $|\Box\sigma| = |\Box|^{\frac{1}{2}}$ est bornée; sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$ et en utilisant le fait que $\Omega \in \mathcal{E}_2$, on a l'existence d'une constante positive k' telle que:

$$ (4.3.2.12) \quad \left|{}^2\mathcal{H}'_S - {}^2\mathcal{H}_S\right| \leq k'\left(\left\|U' - U\right\|_1 + \left\|\Omega' - \Omega\right\|_2\right). $$

Ainsi donc le *lemme* est établi.

Preuve de la *proposition* **4.3.2.1**

Puisque $\mathcal{H}_S = {}^1\mathcal{H}_S + {}^2\mathcal{H}_S$, en utilisant les relations (4.3.2.11 − 4.3.2.12) on a:

$$ (4.3.2.13) \quad \left|\mathcal{H}'_S - \mathcal{H}_S\right| \leq k''\left(\left\|U' - U\right\|_1 + \left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2\right) $$

D'après les relations (4.3.1.7) on a:

$$\left|\mathcal{T}_S^{'}-\mathcal{T}_S\right| \leq \int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^{\pi} \sin\lambda_2 d\lambda_2 \int_{\psi\left(x_0^{\alpha};\lambda_h\right)}^{0} \left|\mathcal{H}_S^{'}-\mathcal{H}_S\right| d\lambda_1.$$

En utilisant (4.3.2.13) et l'étude des fonctions $V\left(x_0^{\alpha}\right)$ faite au paragraphe 2.4, on a:

•) *Dans le domaine* $a \leq C\left|x_0^1\right|$

$$\left|\mathcal{T}_S^{'}-\mathcal{T}_S\right| \leq K'\sqrt{a}\left(\left\|U^{'}-U\right\|_1+\left\|\Omega^{'}-\Omega\right\|_2+\left\|\widehat{\Omega}^{'}-\widehat{\Omega}\right\|_2\right).$$

•) *Dans le domaine* $a > C\left|x_0^1\right|$, $x_0^0 < B$

$$\left|\mathcal{T}_S^{'}-\mathcal{T}_S\right| \leq K'x_0^0\left(\left\|U^{'}-U\right\|_1+\left\|\Omega^{'}-\Omega\right\|_2+\left\|\widehat{\Omega}^{'}-\widehat{\Omega}\right\|_2\right)$$

Ce qui achève la preuve de la *proposition* 4.3.2.1

ii) Etude des fonctions $\mathcal{I}_S\left(x_0^{\alpha}\right)$.

Dans le sous-paragraphe 4.1.2, on a étudié les fonctions $\mathcal{J}_S\left(x_0^{\alpha}\right)$ qui apparaissent dans les intégrales doubles définies par les fonctions $\mathcal{I}_S\left(x_0^{\alpha}\right)$. On utilisera cette étude pour établir pour ce qui est des intégrales doubles un résultat analogue à celui obtenu pour les intégrales triples.

On a le résultat suivant:

Proposition 4.3.2.2. *Sous les hypothèses* $\mathbf{H}_4$*, les fonctions* $\mathcal{I}_S$ *définies par* (4.3.1.7) *vérifient:*

•) *Dans le domaine* $a \leq C\left|x_0^1\right|$

Pour $M_0\left(x_0^{\alpha}\right)$ *voisin de* $\left(\mathcal{S}_0\right)\backslash\mathcal{T}$

$$\left|\mathcal{I}_S^{'}-\mathcal{I}_S\right| \leq K^{'''}\left(a+\sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|}}+\sup_{\left(\lambda_{2'},\lambda_{3'}\right)\in\square_2'}\lambda_{2'}\right)\left(\left\|\Omega^{'}-\Omega\right\|_2+\left\|\widehat{\Omega}^{'}-\widehat{\Omega}\right\|_2\right). \quad (4.3.2.14)$$

Pour $M_0\left(x_0^{\alpha}\right)$ *voisin de* $\mathcal{T}$

$$\left|\mathcal{I}_S^{'}-\mathcal{I}_S\right| \leq K^{''}\left(a+\sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|}+\left|x_0^1\right|}\right)\left(\left\|\Omega^{'}-\Omega\right\|_2+\left\|\widehat{\Omega}^{'}-\widehat{\Omega}\right\|_2\right). \quad (4.3.1.15)$$

•) *Dans le domaine* $a > C\left|x_0^1\right|$, $x_0^0 < B$

$$\left|\mathcal{I}_S^{'}-\mathcal{I}_S\right| \leq K^{''}x_0^0\left(\left\|\Omega^{'}-\Omega\right\|_2+\left\|\widehat{\Omega}^{'}-\widehat{\Omega}\right\|_2\right). \quad (4.3.1.16)$$

On établit au préalable le *lemme* suivant:

Lemme 4.3.2.3. *Sous les hypothèses* $\mathbf{H}_4$*, les fonctions* $K_S^i\left(\omega,\varpi,\widehat{\omega}\right)$ *définies par* (4.1.1.11) *sont lipschitziennes par rapport à leurs arguments.*

Preuve. D'après le *lemme* 4.1.1.1 et sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, les fonctions $K_S^i\left(\omega,\varpi,\widehat{\omega}\right)$ peuvent se mettre sous la forme:

$$K_S^i\left(\omega,\varpi,\widehat{\omega}\right)=K_{0S}^i+K_{1S}^i\left(\omega,\varpi,\widehat{\omega}\right),$$

où:

- les K_{0S}^i sont des fonctions continues indépendantes de ω,ϖ et $\widehat{\omega}$;

- les K_{1S}^{i} sont des combinaisons linéaires des fonctions $\omega, \varpi, \widehat{\omega}$ à coefficients continus et bornés.

D'où il existe une constante $k_0 > 0$ telle que:

$$(4.3.2.17)\quad \left|K_S\left(\omega^{'}, \varpi^{'}, \widehat{\omega}^{'}\right) - K_S\left(\omega, \varpi, \widehat{\omega}\right)\right| \leq k_0\left(\left\|\Omega^{'} - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}^{'} - \widehat{\Omega}\right\|_2\right).$$

D'où le *lemme.* □

Preuve de la *proposition* ***4.3.2.2:***

On utilise la division de la 2−surface $S_0(M_0)$ suivant le système de coordonnées approprié utilisé telle qu'apparue dans le sous-paragraphe 4.1.2.

A/ Dans le domaine $a \leq C\left|x_0^1\right|$

i) Dans le domaine $\zeta^1 \geq 0$

D'après la relation (4.1.2.2) on a:

$$\mathcal{J}_{SB}^{\prime}\left(\omega^{'}\right) - \mathcal{J}_{SB}^{\prime}\left(\omega\right) = a\left(K_S\left(\omega^{'}, \varpi^{'}, \widehat{\omega}^{'}\right) - K_S\left(\omega, \varpi, \widehat{\omega}\right)\right).$$

En utilisant (4.3.2.17) en ensuite en intégrant on a:

$$(4.3.2.18)\left|\mathcal{I}_{SB}^{\prime} - \mathcal{I}_{SB}\right| \leq k_1^{''} a\left(\left\|\Omega^{'} - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}^{'} - \widehat{\Omega}\right\|_2\right).$$

ii) Dans le domaine $\zeta^1 < 0$

$*$) Pour $\zeta^1 \leq -ma$

D'après la relation (4.1.2.3) on a:

$$\mathcal{J}_{SC_1}\left(\omega^{'}\right) - \mathcal{J}_{SC_1}\left(\omega\right) = \sqrt{\frac{a}{\left|\zeta^1\right|^3}}\left(K_S\left(\omega^{'}, \varpi^{'}, \widehat{\omega}^{'}\right) - K_S\left(\omega, \varpi, \widehat{\omega}\right)\right).$$

En utilisant la relation (4.3.2.17) on obtient:

$$\mathcal{J}_{SC_1}\left(\omega^{'}\right) - \mathcal{J}_{SC_1}\left(\omega\right) = k\sqrt{\frac{a}{\left|\zeta^1\right|^3}}\left(\left\|\Omega^{'} - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}^{'} - \widehat{\Omega}\right\|_2\right),$$

où k est une fonction bornée.

$*$) Pour $-b < \zeta^1 < 0$

D'après (4.1.2.4) on a:

$$\mathcal{J}_{SC_2}\left(\omega^{'}\right) - \mathcal{J}_{SC_2}\left(\omega\right) = \sqrt{\frac{a}{a + \left|\zeta^1\right|}}\left(K_S\left(\omega^{'}, \varpi^{'}, \widehat{\omega}^{'}\right) - K_S\left(\omega, \varpi, \widehat{\omega}\right)\right).$$

D'où en utilisant la relation (4.3.2.17), on a:

$$\mathcal{J}_{SC_2}\left(\omega^{'}\right) - \mathcal{J}_{SC_2}\left(\omega\right) = k^{\prime}\sqrt{\frac{a}{a + \left|\zeta^1\right|}}\left(\left\|\Omega^{'} - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}^{'} - \widehat{\Omega}\right\|_2\right).$$

En tenant compte du fait que l'on doit avoir $-ma > \max\left(-b, \frac{1}{2}\mu_0\left(\xi^i\right)\right)$, on obtient après intégration:

$$(4.3.2.19)\quad \left|\mathcal{I}_{SC}^{\prime} - \mathcal{I}_{SC}\right| \leq K_1^{''}\sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|}}\left(\left\|\Omega^{'} - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}^{'} - \widehat{\Omega}\right\|_2\right).$$

iii) Dans le domaine $D\left(M_0\right)$

D'après la relation (4.1.2.5) on a:

$$\mathcal{J}_{SD}\left(\omega'\right) - \mathcal{J}_{SD}(\omega) = K_S\left(\omega', \varpi', \widehat{\omega}'\right) - K_S(\omega, \varpi, \widehat{\omega}).$$

Avant de proceder à l'intégration, on distingue deux cas:

*) *Si M_0 est voisin de* $(\mathcal{S}^0)\backslash\mathcal{T}$

En utilisant la relation (4.3.2.17) et ensuite en intégrant, on a:

$$(4.3.2.20)\quad \left|\mathcal{I}_{SD}' - \mathcal{I}_{SD}\right| \leq K_2''\left(\sup_{(\lambda_{2'},\lambda_{3'})\in\Diamond_2'} \lambda_{2'}\right)\left(\left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2\right)$$

*) *Si M_0 est voisin de* $\mathcal{T}$

En utilisant la relation (4.3.2.17) et ensuite en intégrant, on a:

$$(4.3.2.21)\quad \left|\mathcal{I}_{SD}' - \mathcal{I}_{SD}\right| \leq K_3''\sqrt{\frac{a}{|x_0^1|} + |x_0^1|}\left(\left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2\right)$$

On déduit des relations (4.3.2.18 à 4.3.2.21) que dans le domaine $a \leq C\,|x_0^1|$, on a:

•) *Si M_0 est voisin de* $(\mathcal{S}^0)\backslash\mathcal{T}$

$$(4.3.2.22)\quad \left|\mathcal{I}_S' - \mathcal{I}_S\right| \leq K''\left(a + \sqrt{\frac{a}{|x_0^1|}} + \sup_{(\lambda_{2'},\lambda_{3'})\in\square_2'} \lambda_{2'}\right)\left(\left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2\right).$$

•) *Si M_0 est voisin de* $\mathcal{T}$

$$(4.3.2.23)\quad \left|\mathcal{I}_S' - \mathcal{I}_S\right| \leq K''\left(a + \sqrt{\frac{a}{|x_0^1|} + |x_0^1|}\right)\left(\left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2\right).$$

B/ Dans le domaine $a > C\,|x_0^1|$, $x_0^0 < B_2$

D'après la relation (4.1.2.6) on a:

$$\mathcal{J}_S'\left(\omega'\right) - \mathcal{J}_S(\omega) = \lambda_1\left(K_S\left(\omega', \varpi', \widehat{\omega}'\right) - K_S(\omega, \varpi, \widehat{\omega})\right).$$

En utilisant le fait que d'après le *lemme* 2.1.3.2 on a $\lambda_1 = kx_0^0$ et la realtion (4.3.2.17) on a après intégration:

$$(4.3.2.24)\quad \left|\mathcal{I}_S' - \mathcal{I}_S\right| \leq K'''x_0^0\left(\left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2\right).$$

Ainsi donc la *proposition* 4.3.2.2 est établie.

D'après la *proposition* 4.3.2.1 et la *proposition* 4.3.2.2, sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, on a:

$\Theta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$(U, \Omega) \longmapsto (W, Z)$ est telle que:

$$
(4.3.2.25)\quad \begin{cases}
\bullet)\ \textit{Dans le domaine } a \leq C\left|x_0^1\right| \\
\quad *\ \textit{Pour } M_0 \textit{ voisin de } (\mathcal{S}_0)\backslash\mathcal{T} \\
\left|W_S'\left(x_0^\alpha\right)-W_S\left(x_0^\alpha\right)\right| \leq K\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|}}+\sup\limits_{\left(\lambda_{2'},\lambda_{3'}\right)\in\Diamond_2'}\lambda_{2'}\right)\times \\
\qquad\qquad \times\left(\left\|U'-U\right\|_1+\left\|\Omega'-\Omega\right\|_2+\left\|\widehat{\Omega}'-\widehat{\Omega}\right\|_2\right), \\
\quad *\ \textit{Pour } M_0 \textit{ voisin de } \mathcal{T} \\
\left|W_S'\left(x_0^\alpha\right)-W_S\left(x_0^\alpha\right)\right| \leq K\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|}+\left|x_0^1\right|}\right)\times \\
\qquad\qquad \times\left(\left\|U'-U\right\|_1+\left\|\Omega'-\Omega\right\|_2+\left\|\widehat{\Omega}'-\widehat{\Omega}\right\|_2\right). \\
\bullet)\ \textit{Dans le domaine } a > C\left|x_0^1\right|, x_0^0 < B_2 \\
\left|W_S'\left(x_0^\alpha\right)-W_S\left(x_0^\alpha\right)\right| \leq Kx_0^0\left(\left\|U'-U\right\|_1+\left\|\Omega'-\Omega\right\|_2+\left\|\widehat{\Omega}'-\widehat{\Omega}\right\|_2\right).
\end{cases}
$$

et

$$
(4.3.2.26)\quad \left|Z_S'-Z_S\right| \leq K\left|\lambda_1\right|\left(\left\|U'-U\right\|_1+\left\|\Omega'-\Omega\right\|_2\right).
$$

Remarque 4.3.2.1. *L'apparition des termes* $\left\|\widehat{\Omega}'-\widehat{\Omega}\right\|_2$ *dans les membres de droite des inégalités de* (4.3.2.25) *montre qu'il serait délicat d'établir que* Θ *est contractante.*

Dans [11, p.205 − 206], *Y. CHOQUET-BRUHAT a proposé pour surmonter cette difficulté, qui apparaissait aussi dans le cas des systèmes non linéaires à données initiales sur une hypersurface spatiale, d'utiliser* Θ^2 *qui serait alors une contraction stricte. En réalité cette proposition n'est pas satisfaisante dans la mesure où elle ne fait nullement disparaître* $\left\|\widehat{\Omega}'-\widehat{\Omega}\right\|_2$ *et aucune itération de* Θ *ne pourrait la faire disparaître.*

En outre, si tout de même on parvenait à montrer que Θ^2 *était une contraction, à cause de l'inégalité* (4.3.2.26), *on aboutirait à des solutions pour des petites valeurs de* x_0^0. *Pour surmonter cette difficulté, on va dans un premier temps résoudre l'équation définissant les fonctions* Z_S^R *pour* $U = (U_S)$ *fixé dans* $\mathcal{E}_1$. *Exploitant ensuite la linéarité dans les équations* (4.3.1.2) *des intégrandes par rapport aux fonctions* Ω_S^R, *on pourra prolonger la solution à tout* $\mathcal{Y}_0$. *Il sera alors possible de déterminer la solution du système intégral* $(\mathcal{F}_S)$.

On considère l'application Ξ définie sur $\mathcal{E}_1$ par:

<< A tout $U \equiv (U_S) \in \mathcal{E}_1$, on associe $\Xi(U) = W \equiv (W_S)$ défini par:

$$
(4.3.2.27)\quad \begin{cases}
4\pi W_S\left(x_0^\alpha\right) = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^\pi \sin\lambda_2 d\lambda_2 \int_0^{\psi\left(x_0^\alpha,\lambda_h\right)} \mathcal{H}_S\left(U_T,\Omega_T^R,\widehat{\Omega}_T^R\right)d\lambda_1 \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} d\lambda_3 \int_0^\pi d\lambda_2 \mathcal{J}_S\left(\Omega_T^R,\widehat{\Omega}_T^R\right).
\end{cases} \quad >>
$$

Les fonctions Ω_S^R étant telles que $\Omega = \left(\Omega_S^R\right)$ est la solution dans $\mathcal{E}_2$ du système d'équations intégrales linéaires:

$$(4.3.2.28)\ \ \Omega_S^R\left(x_0^\alpha;\lambda_i\right) = \Omega_{0S}^R + \int_0^{\lambda_1} H_T^R\left(U_Q\right)\Omega_S^T d\lambda_1.$$

Les fonctions $\mathcal{H}_S\left(U_T,\Omega_T^R,\widehat{\Omega}_T^R\right)$, $\mathcal{J}_S\left(\Omega_T^R,\widehat{\Omega}_T^R\right)$ étant définies par (4.3.1.3) ; les matrices $H_T^R\left(U_Q\right)$ étant définies par (4.3.1.4).

Puisque l'on a établi que Θ est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ au sous-paragraphe 4.3.1, on en déduit que Ξ est une application de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_1$.

•) Ξ **est une contraction stricte de** $\mathcal{E}_1$. On établit au préalable le résultat suivant qui permettra de faire disparaître le terme $\left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2$ dans les membres de droite des inégalités de (4.3.2.25).

Lemme 4.3.2.4. *Pour* $U, U' \in \mathcal{E}_1$ *et sous les hypothèses* $\mathbf{H}_4$.

Pour toutes fonctions Ω, $\Omega' \in \mathcal{E}_2$ *solutions des équations intégrales* (4.3.2.28) *associées à* U *et* U' *respectivement, on a:*

$$(4.3.2.29)\ \ \left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 \leq K_0 \left\|U' - U\right\|_1,$$

$$(4.3.2.30)\ \ \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2 \leq K_0 \left\|U' - U\right\|_1,$$

K_0 *étant une constante positive.*

Preuve:

D'après la relation (4.3.2.28) on a:

$$\begin{aligned}\Omega_S'^R - \Omega_S^R &= \int_0^{\lambda_1}\left[H_T^R\left(U_Q'\right)\Omega_S'^T - H_T^R\left(U_Q\right)\Omega_S^T\right]d\lambda_1\\ &= \int_0^{\lambda_1}\left[H_T^R\left(U_Q'\right)\left(\Omega_S'^T - \Omega_S^T\right) + \Omega_S^T\left(H_T^R\left(U_Q'\right) - H_T^R\left(U_Q\right)\right)\right]d\lambda_1.\end{aligned}$$

Puisque $U, U' \in \mathcal{E}_1$, en utilisant les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, les relations $(4.3.2.3 - 4.3.2.4)$ et le fait que $\Omega \in \mathcal{E}_2$, on a:

$$(4.3.2.31)\ \ \left|\Omega_S'^R - \Omega_S^R\right| \leq k_1' \int_0^{\lambda_1}\left|\Omega_S'^R - \Omega_S^R\right| d\lambda_1 + k_2''\left|\lambda_1\right|\left\|U' - U\right\|_1.$$

On pose:

$$T = \sup\left\{x_0^0;\ \ \left(x_0^\alpha;\lambda_i\right) \in \Lambda_0\right\}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (4.3.2.31) on a:

$$(4.3.2.32)\ \ \left|\Omega_S'^R - \Omega_S^R\right| \leq k_2''\left|\lambda_1\right|\left\|U' - U\right\|_1 \exp\left(k_1'\left|\lambda_1\right|\right).$$

D'après le *lemme* 2.1.3.2, on a:

$$0 < \left|\lambda_1\right| \leq \left|\psi\left(x_0^\alpha;\lambda_h\right)\right| < k_0 x_0^0.$$

Par conséquent on a:

$$\left|\Omega_S'^R - \Omega_S^R\right| \leq k_2'' k_0 T \exp\left(k_1' k_0 T\right)\left\|U' - U\right\|_1.$$

D'où

$$(4.3.2.33)\quad \left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 \leq K_0 \left\|U' - U\right\|_1 .$$

D'après la relation (4.3.2.26) on a:

$$\left|\Omega_S'^R - \Omega_S^R\right| \leq K \left|\lambda_1\right| \left(\left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|U' - U\right\|_1\right).$$

On en déduit que:

$$(4.3.2.34)\quad \left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2 \leq K \left(\left\|\Omega' - \Omega\right\|_2 + \left\|U' - U\right\|_1\right).$$

En combinant les relations $(4.3.2.33 - 4.3.2.34)$ on a:

$$\left\|\widehat{\Omega}' - \widehat{\Omega}\right\|_2 \leq K' \left\|U' - U\right\|_1 .$$

Ce qui achève la preuve du *lemme* 4.3.2.4.

En utilisant les résultats du *lemme* 4.3.2.4 dans les relations (4.3.2.25) on a: sous les *hypothèses* $\mathbf{H}_4$, pour $U \in \mathcal{E}_1$,

$$(4.3.2.35)\quad \begin{cases} \bullet)\ \textit{Dans le domaine } a \leq C\left|x_0^1\right| \\ \quad *)\ \textit{Pour } M_0 \textit{ voisin de } \left(\mathcal{S}^0\right)\backslash\mathcal{T} \\ \left|W_S'\left(x_0^\alpha\right) - W_S\left(x_0^\alpha\right)\right| \leq K \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|}} + \sup\limits_{\left(\lambda_{2'},\lambda_{3'}\right)\in\Diamond_2'} \lambda_{2'}\right)\left(\left\|U' - U\right\|_1\right), \\ \quad *)\ \textit{Pour } M_0 \textit{ voisin de } \mathcal{T} \\ \left|W_S'\left(x_0^\alpha\right) - W_S\left(x_0^\alpha\right)\right| \leq K \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a}{\left|x_0^1\right|} + \left|x_0^1\right|}\right)\left(\left\|U' - U\right\|_1\right), \\ \bullet)\ \textit{Dans le domaine } a > C\left|x_0^1\right|, x_0^0 < B_2 \\ \left|W_S'\left(x_0^\alpha\right) - W_S\left(x_0^\alpha\right)\right| \leq K x_0^0 \left(\left\|U' - U\right\|_1\right). \end{cases}$$

En utilisant les relations (4.3.2.35), on va montrer que pour $\mathcal{Y}_0$ domaine causal convenablement choisi Ξ est une contraction stricte de $\mathcal{E}_1$.

Lemme 4.3.2.5. *Pour $U, U' \in \mathcal{E}_1$ et sous les hypothèses $\mathbf{H}_4$.*
Il existe des constantes positives $C'(h)$, $M'(h)$, $B'(h)$ telles que:
Pour $M_0\left(x_0^\alpha\right)$ appartenant au domaine $\mathcal{D}\left(C', M', B'\right)$ défini par:

$$\left\{\left(x^\alpha\right) \in IR^4 / \begin{cases} 0 < a < M' \\ a \leq C'\left|x^1\right| \end{cases}, ou \begin{cases} 0 < a < M' \\ a > C'\left|x^1\right| \\ x^0 < B' \end{cases}\right\},$$

on a:

$$\left\|W' - W\right\|_1 \leq \frac{3}{4}\left\|U' - U\right\|_1 ,$$

avec: $W = \Xi(U)$ et $W' = \Xi(U')$.

Preuve:
Elle se fait exactement comme celle du *lemme* 4.3.1.2.
On choisit les constantes $C'(h)$, $M'(h)$, $B'(h)$ telles que: $C'(h) \leq C(h)$, $M'(h) \leq M'(h)$, $B'(h) \leq B(h)$.

Preuve de la partie 2) *théorème* 4.2.2.2.

D'après le *lemme* 4.3.1.2 et le *lemme* 4.3.2.5, en choisissant $\mathcal{Y}_0$ comme un domaine causal contenu dans $\mathcal{D}(C', M', B')$ et tel que sa frontière contienne $(\mathcal{S}_0)$, Ξ est une contraction stricte de $\mathcal{E}_1$.

L'espace métrique $(\mathcal{E}_1, d_1)$ étant complet, il existe un unique point fixe U de Ξ dans $\mathcal{E}_1$.

On a: $(U, \Omega) = (\Xi(U), \Omega) = \Theta(U, \Omega)$. D'où (U, Ω) est une solution du système d'équations intégrales $(\mathcal{F}_S)$.

Remarque 4.3.2.2.

• *La solution ci-dessus est unique dans la boule de* $\mathcal{E}$ *dans laquelle elle existe; on pourrait étendre l'unicité à tout le domaine causal à travers des hypothèses sur les fonctions* $A^{\lambda\mu}$ *telles qu'on puisse feuilleter l'intérieur de* $\mathcal{Y}$ *par des hypersurfaces spatiales appropriées. En effet, s'il est possible de feuilleter l'intérieur de* $\mathcal{Y}$ *par des hypersurfaces spatiales, en combinant le théorème 4.2.2.2 au résultat similaire pour des systèmes non linéaires à données initiales sur une hypersurface ordinaire obtenu par Y. FOURES (CHOQUET) -BRUHAT dans* [11] *on parvient à étendre l'unicité à tout l'intérieur de* $\mathcal{Y}$ *. On fera à la suite de ce travail* (*voir* [23]), *dans la Partie II, une hypothèse géométrique qui permettra un tel feuilletage (Cf. hypothèse* $(\mathcal{G})$*).*

• *Le résultat d'existence et d'unicité dans un espace de fonctions continues pour le système intégral des formules de Kirchhoff associé à un système semi-linéaire hyperbolique à données initiales sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes montre que ce dernier problème admet au plus une solution continue. On montrera à la suite de ce travail, dans un article à paraître (Partie II), que ce problème admet effectivement une solution semi-globale dans un espace de type Sobolev à poids, moyennant des hypothèses de structure (Cf. hypothèse* $(\mathcal{G}_1)$*) qui découlent de la détermination des restrictions aux hypersurfaces caractéristiques des dérivées premières de la solution éventuelle régulière du problème de Goursat semi-linéaire (voir* [23]*).*

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. BAH, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des équations semi-linéaires linéaires hyperboliques du second ordre, Thèse de 3^{è} cycle, Université de Yaoundé I (1994).

[2] S. BAH , Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des équations semi-linéaires linéaires hyperboliques, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **326**, *Série I*, p. 1381-1384 (1998).

[3] A. CABET, Problèmes avec données initiales caractéristiques pour des équations d'ondes non linéaires, Thèse de Doctorat, Université de Tours (2003).

[4] A. CABET, Local existence of a solution of a semi-linear wave equation in a neighborhood of initial characteristic hypersurfaces, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., (6), **12**, n°*1,p. 47-102 (2003).

[5] F. CAGNAC, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique, Thèse d'Etat, Université de Paris VI (1973).

[6] F. CAGNAC, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (IV), Vol. **104**, p. 355-393 (1975).

[7] F. CAGNAC, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des équations quasi-linéaires, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (IV), Vol. **129**, p. 13-41 (1980).

[8] F. CAGNAC, Problème de Cauchy pour les hypersurfaces caractéristiques des équations d'Einstein du vide, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **262**, p. 1488-1491 (1966).

[9] F. CAGNAC et M. DOSSA, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique. Applications à certains systèmes non linéaires d'origine physique, p. 35-47 in *Physics on Manifolds* (1992) (Proceedings of the International Colloquium in honour of Yvonne Choquet-Bruhat, Paris, June 3-5, 1992) edited by Flato, Kerner, Lichnerowicz Mathematical Physics Studies, Vol. **15**, *Kluwer Academic Publishers* (1994).

[10] D. CHRISTODOULOU et H. MÜLLER zum HAGEN, Problème à valeur initiale caractéristique pour des équations quasi-linéaires du second ordre, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **293**, *Série I*, p. 39-42 (1981).

[11] Y. CHOQUET-BRUHAT, Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *Acta Mathematica*, **88**, p. 141-225 (1952).

[12] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Vol **64**, p. 191-228 (1964).

[13] D'ADHEMAR, Sur une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique, Etude de l'intégrale près d'une frontière caractéristique, *Rendicondi del Circolo Matematico di Palermo,* **20**, p. 142-159 (1905) .

[14] P.A. DIONNE, Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés, *J. Analyse Maths*., Jerusalem, Vol. **10**, p 1-90 (1962) .

[15] M. DOSSA, Inégalités énergétiques sur un conoïde caractéristique, *Ann. Fac. Sci. Yaoundé, Maths-Phys., Nouvelles Séries I, t.*1 (1985)

[16] M. DOSSA, Problèmes de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des équations quasi-linéaires du second ordre, Thèse d'Etat, (Première et deuxième Parties), Université de Yaoundé (1992) .

[17] M. DOSSA et S. BAH, Solutions de problèmes de Cauchy semi-linéaires hyperboliques sur un conoïde caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **333**, p. 179-184* (2001).

[18] G. F. D. DUFF, Mixed Problems for Linear Systems of First Order, *Can. J. Math.*, *Vol.* **10**, p. 127-160 (1958).

[19] F. G. FRIEDLANDER, The wave equation on a curved space-time, *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*-**2** (1975).

[20] S. W. HAWKING and G. F. R. ELLIS, The Large Scale Structure of Space-time, *Cambridge University Press* (1973).

[21] J. HADAMARD, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles hyperboliques, Paris (1932).

[22] D. E. HOUPA, M. DOSSA, Problèmes de Goursat pour des systèmes semi-linéaires hyperboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* ***341,*** *p. 15-20* (2005).

[23] D. E. HOUPA D., Solutions semi-globales pour le problème de Goursat associé à des systèmes non linéaires hyperboliques et applications, Thèse de Doctorat/Ph.D, Université de Yaoundé 1 (2006).

[24] R. A. ISAACSON, J. S. WELLING and J. WINICOUR, Null cone computation of gravitational radiation, *J. Math. Phys., Vol.* **24,** p. 1824-1834 (1983).

[25] J. LERAY, Hyperbolic Differential Equations, Princeton, IAS (1952).

[26] H. MÜLLER zum HAGEN and H.J. SEIFERT, On characteristic initial value and mixed problems, *Gen. Rel. and Grav.*, *Vol.* **8**, p.259-301 (1977).

[27] H. MÜLLER zum HAGEN, Characteristic initial value problem for hyperbolic systems of second order differential equations, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor., Vol.* **53,** n°2, p. 159-216 (1990).

[28] R. PENROSE, Null hypersurface initial data for classical fields of arbitary spin and for General Relativity, *Aerospace Research Laboratories Report*, **63-56** (1963); *Gen. Rel. and Grav.*, Vol. **12**, N° 3, p.225-264 (1980).

[29] A. D. RENDALL, Reduction of the characteristic initial value problem to the Cauchy problem and its applications to the Einstein equations, *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A, Vol. **427**, p. 221-239 (1990).

[30] A. D. RENDALL, The characteristic initial value problem for the Einstein equations, Nonlinear hyperbolic equations and Field theory (Lake Como), 1991, *Pitman Res. Notes, Maths, ser.* **253,** *Longman Sci. Techn. Harlow,* p. 154-163 (1992).

[31] M. RIESZ, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta. Math.*, Vol. **81**, p. 107-125 (1949).

[32] S. SOBOLEV, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Rec. Math. Moscou*, N. s. **1** p. 31-79 (1936).

[33] J. TOLEN, Problèmes de Cauchy sur deux hypersurfaces caractéristiques sécantes, Thèse de $3^{è}$ cycle, Université de Yaoundé (1980).

[34] J. WINICOUR, Characteristic Evolution and Matching, *Living Rev. Relativity,* **2,** (2001), 3, http://www.livingreviews.org/Articles/Volume5/2001-3winicour.

[35] M. DOSSA, Espaces de Sobolev non isotropes, à poids et problèmes de Cauchy quasi-linéaires sur un conoïde caractéristique, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor., Vol.* **66,** n°1, p. 37-107 (1997).

[36] M. DOSSA, Solutions C^∞ d'une classe de problèmes de Cauchy quasi-linéaires hyperboliques du second ordre sur un conoïde caractéristique, *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol.* **11,** n°3, p. 351-376 (2002).

[37] M. DOSSA, Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour les équations d'Einstein (conformes) du vide et pour les équations de Yang-Mills-Higgs, *Ann. Henri Poincaré,* **4,** p. 385-411 (2003).

[38] M. DOSSA, F. TOUADERA, Solutions globales de systèmes hyperboliques non linéaires sur un cône caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* ***341,*** *p. 409-414* (2005).

[39] G. CACIOTTA, F. NICOLO, Global characteristic problem for Einstein vacuum equations with small initial data: (I). The initial data constraints, *J. H. D. E.,Vol* ***2,*** *1, p.201-277* (2005).

[40] G. CACIOTTA, F. NICOLO, Global characteristic problem for Einstein vacuum equations with small initial data: (II). The existence proof, *Preprint* (2006).

[41] S. KLAINERMAN, F. NICOLO, The Evolution Problem in General Relativity, *Progress in Mathematical Physics, Birkhauser* (2003).

[42] D. CHRISTODOULOU, S. KLAINERMAN, The global non linear stability of the Minkowski space, *Princeton Mathematical Series,* **41**, (1993).

(D.E. Houpa Danga) Université de Ngaoundéré, Faculté des Sciences, B.P. 454 Ngaoundéré, Cameroun

E-mail address, D.E. Houpa Danga: e_houpa@yahoo.com

(M. Dossa) Université de Yaoundé I, Faculté des Sciences, B.P. 812 Yaoundé, Cameroun
E-mail address, M. Dossa: marceldossa@yahoo.fr