IMHOTEP Vol. 3, No 1 (2000)

Sur la résolubilité de l'équation diophantienne[1]

$$ax^2 + 2bxy - 8ay^2 = \pm 1$$

Lionel Bapoungué

Résumé

Nous discutons, à l'aide des propriétés arithmétiques de l'anneau des entiers de Gauss, la résolubilité de l'équation diophantienne $ax^2 + 2bxy - 8ay^2 = \pm 1$, où a et b sont des entiers positifs. La discussion fait intervenir l'équation de *Pell* $v^2 - (8a^2 + b^2)w^2 = -8$.

Abstract

We discuss, by the aid of arithmetical properties of the ring of Gaussian integers, the solvability of the diophantine equation $ax^2 + 2bxy - 8ay^2 = \pm 1$, where a and b are non negative integers. The discussion is relative to the solution of *Pell* 's equation $v^2 - (8a^2 + b^2)w^2 = -8$.

[1] 2000 *AMS Mathematics Classification* : 11D09.
Mots-clés : Equation diophantienne, équation de Pell, solution divisible, solution monique.
Reçu par la Rédaction le 25 mai 2000 et sous forme révisée, le 2 octobre 2000.

1 Introduction.

Soit à résoudre l'équation diophantienne

$$ax^2 + 2bxy - 8ay^2 = \pm 1, \tag{1}$$

où a et b sont des entiers positifs. D'après la proposition 1 de [2], (1) a toujours des solutions entières si $a = 1$. On peut donc supposer dans toute la suite que $a > 1$. D'autre part, on se restreint au $pgcd(a, 2b) = 1$. Dans le cas contraire, (1) n'est pas résoluble.

On note $\delta = 8a^2 + b^2$ le discriminant de la forme quadratique $ax^2 + 2bxy - 8ay^2$.

Si $a > 1, b \geq 0$ et $pgcd(a, 2b) = 1$, le théorème 1 de [2] montre que (1) n'est pas résoluble non plus si δ est un carré dans $\mathbf{Z}$. On supposera donc aussi que $\delta = 8a^2 + b^2$ n'est pas un carré dans $\mathbf{Z}$, ce qui nécessite b impair. Alors δ vérifie $\delta \equiv 1 (mod\, 8)$. Ainsi (cf. [6]), les entiers algébriques de $K = \mathbf{Q}(\sqrt{\delta})$ sont les nombres $\frac{1}{2}(v + w\sqrt{\delta})$ avec $v, w \in \mathbf{Z}$ de même parité. Par suite, K admet un idéal principal $I = (\frac{v+w\sqrt{\delta}}{2})$ de norme 2, si et seulement si, il existe v et w dans $\mathbf{Z}$ vérifiant la norme $N(I) = \pm 2$, soit

$$v^2 - \delta w^2 = \pm 8.$$

On remarque donc facilement (cf. [2]) que si (x, y) est une solution de (1), alors

$$v = -bx^2 + 16axy + 8by^2, \quad w = x^2 + 8y^2$$

vérifient, avec $\delta = 8a^2 + b^2 \quad (a > 1, b \geq 1, \quad pgcd(a, 2b) = 1)$, l'équation de *Pell*

$$v^2 - \delta w^2 = -8 \quad \text{avec} \quad v, w \quad \text{impairs.} \tag{2}$$

Notre étude sera donc basée sur l'équation (2). Ainsi, en supposant sa résolubilité, nous donnons au paragraphe 2, une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions de (1) (Théorème 1), dont la discussion impose les propriétés arithmétiques de l'ordre $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$ de conducteur 2, contenu dans l'anneau principal $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$. Ensuite, nous prouvons au paragraphe 3 que, δ étant donné, parmi tous les couples d'entiers positifs impairs (a,b) premiers entre eux satisfaisant $\delta = 8a^2+b^2$, il y a exactement un couple pour lequel (1) est résoluble (Théorème 2). Ce couple unique va être construit (Théorème 3) au paragraphe 4 à l'aide du résultat suivant, prouvé dans [7]:

Théorème 0 (de Thue).
Si α et δ sont des entiers satisfaisant $\delta > 1$, $pgcd(\alpha,\delta)=1$ et si m est le plus petit entier strictement supérieur à $\sqrt{\delta}$, il existe x et y dans $]0,m[$ tels que $\alpha y \equiv \pm x\ (mod\ \delta)$.

Lorsque des solutions existent, nous décrivons au paragraphe 5, l'ensemble complet des solutions de (1) à partir de l'une d'elles (proposition 2). Cette description fait intervenir l'équation "classique" de *Pell*:

$$p^2-\delta q^2=\pm 1. \tag{3}$$

Nous donnons la conclusion de notre texte au paragraphe 6 par des exemples numériques.

2 Le cas $a>1$, δ impair non carré et (2) résoluble avec v,w impairs.

a) Préliminaires.

Soient v,w des entiers impairs ≥ 1 tels que $v^2-\delta w^2=-8$. Il est clair que

$$pgcd(v,w)=1 \tag{4}$$

car si v et w ont un facteur premier commun d, alors d divise $v^2-\delta w^2 = -8$ et donc 2. Ecrivons l'équation (2) sous la forme

$$\delta w^2=(v+2\sqrt{-2})(v-2\sqrt{-2}). \tag{5}$$

Les deux facteurs de droite de (5) sont relativement premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ puisque tout diviseur commun diviserait $4\sqrt{-2}$; mais w étant impair, $pgcd(w, 4\sqrt{-2}) = 1$. On a donc, dans $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$:

$$pgcd(v + 2\sqrt{-2}, v - 2\sqrt{-2}) = 1. \tag{6}$$

Par ailleurs, puisque l'équation (2) s'écrit sous la forme (5), nous manipulerons les éléments de l'ordre non maximal $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$ de conducteur 2. Nous utiliserons alors l'unicité au signe près de la factorisation des éléments $\alpha + 2\beta\sqrt{-2}$ de $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$, dès que α est impair. Nous avons donc une notion de plus grand commun diviseur entre deux éléments de $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$ premiers au conducteur 2. Ainsi la remarque de la proposition 4 du paragraphe 5 de [2] appliquée à $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$ permet d'énoncer:

Définition.

On dira que $(v, w) \in \mathbf{Z}^2$ *est une solution impaire de* (2):

i) **divisible** *si, dans* $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$, $b + 2a\sqrt{-2}$ *divise* $v + 2\sqrt{-2}$ *ou* $v - 2\sqrt{-2}$;

ii) **monique** *si, dans* $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$, $pgcd(v + 2\sqrt{-2},\ \delta)$ *ou* $pgcd(v - 2\sqrt{-2},\ \delta)$ *vaut* $b + 2a\sqrt{-2}$.

Proposition 1.

Toute solution impaire $(v, w) \in \mathbf{Z}^2$ *de* (2) *qui est divisible est monique.*

b) Un critère de résolution pour (1).

Théorème 1.

Si $a \geq 3$, $b \geq 1$ *sont des entiers impairs avec* $pgcd(a, 2b) = 1$ *et* $\delta = 8a^2 + b^2$ *non carré dans* $\mathbf{Z}$, *il y a équivalence entre:*

i) (1) *a une solution* $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$;

ii) (2) *a une solution impaire* $(v, w) \in \mathbf{Z}^2$ *divisible ;*

iii) (2) *a une solution impaire* $(v, w) \in \mathbf{Z}^2$ *monique.*

Preuve. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Soit $(x,y)\in \mathbf{Z}^2$ une solution de (1). Posons:

$$\epsilon = sgn(ax^2+2bxy-8ay^2),\ \ v=\epsilon(bx^2-16axy-8by^2), w=x^2+8y^2. \quad (7)$$

Comme b et x sont impairs, v et w le sont aussi. On a alors

$$v+2\sqrt{-2}=\epsilon(bx^2-16axy-8by^2)+2\epsilon(ax^2+2bxy-8ay^2)\sqrt{-2},$$

de sorte que

$$v+2\sqrt{-2}=\epsilon(b+2a\sqrt{-2})(x+2y\sqrt{-2})^2, \quad (8)$$

où l'on voit que $(v,w)\in Z^2$ est une solution impaire divisible de (2). De plus, en passant à la norme des deux membres de (8), on obtient:

$$v^2+8=(b^2+8a^2)(x^2+8y^2)^2=\delta w^2;$$

donc (v,w) est une solution entière impaire de (2).

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Soit $(v,w)\in \mathbf{Z}^2$ une solution impaire divisible de (2). Alors de l'égalité (8), on a

$$pgcd(v+2\sqrt{-2},\ \ \delta)=(b+2a\sqrt{-2})pgcd((x+2y\sqrt{-2})^2,\quad b-2a\sqrt{-2}).$$

Montrons que

$$pgcd((x+2y\sqrt{-2})^2,\ \ b-2a\sqrt{-2})=1.$$

S'il existe $\alpha\in \mathbf{Z}[2\sqrt{-2}], \alpha$ non unité, c'est-à-dire $\alpha\neq \pm 1$, tel que

$$\alpha | x+2y\sqrt{-2},\quad \alpha | b-2a\sqrt{-2},$$

alors comme (8) entraîne

$$v=\epsilon(bx^2-16axy-8by^2),\quad w=x^2+8y^2,$$

on en déduit que, dans $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$,

$$v\equiv \epsilon[b(-2y\sqrt{-2})^2-16a(-2y\sqrt{-2})y-8by^2]$$

$$\equiv -16\epsilon y^2(b - 2a\sqrt{-2}) \equiv 0(mod\ \alpha),$$
$$w \equiv 0(mod\ \alpha),$$

i.e. α est aussi un diviseur de v et w. Ceci contredit le fait que $pgcd(v, w) = 1$ d'après (4). On a donc

$$pgcd(v + 2\sqrt{-2},\ \ \delta) = b + 2a\sqrt{-2}. \tag{9}$$

Ce qui prouve que $(v, w) \in \mathbf{Z}^2$ est une solution impaire monique de (2).

iii) $\Rightarrow$ *i)* Supposons que $(v, w) \in \mathbf{Z}^2$ est une solution impaire monique de (2). L'équation (2) peut alors s'écrire:

$$(\frac{v + 2\sqrt{-2}}{b + 2a\sqrt{-2}})(\frac{v - 2\sqrt{-2}}{b - 2a\sqrt{-2}}) = w^2,$$

où d'après (6), $\frac{v+2\sqrt{-2}}{b+2a\sqrt{-2}}$ et $\frac{v-2\sqrt{-2}}{b-2a\sqrt{-2}}$ sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$. Il existe donc $\epsilon = \pm 1$ et des entiers x, y tels que

$$\frac{v + 2\sqrt{-2}}{b + 2a\sqrt{-2}} = \epsilon(x + 2y\sqrt{-2})^2, \quad w = x^2 + 8y^2. \tag{10}$$

En prenant

$$v + 2\sqrt{-2} = \epsilon(b + 2a\sqrt{-2})(x + 2y\sqrt{-2})^2 \tag{11}$$

et en égalant les parties imaginaires de (11), on obtient:

$$ax^2 + 2bxy - 8ay^2 = \epsilon,$$

ce qui prouve bien que $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ est une solution de (1).♣

3 Unicité du couple (a, b), δ donné.

On suppose dans cette partie que δ est donné et admet plusieurs décompositions dans $\mathbf{Z}$. Utilisons alors le théorème 1 pour montrer que parmi tous les couples d'entiers (a, b), il y en a exactement un pour lequel (1) est résoluble.

Théorème 2.

Soit δ un entier positif impair non carré pour lequel (2) *a une solution impaire* $(v, w) \in \mathbf{Z}^2$. *Alors parmi tous les couples d'entiers positifs impairs étrangers* (a, b) *satisfaisant* $\delta = 8a^2+b^2$, *il y a exactement un couple* $(a, b) = (A, B)$ *tel que* (1) *soit résoluble.*

Preuve. Soit $(v, w) \in \mathbf{Z}^2$ une solution impaire divisible de (2). Posons:

$$A = |a|, \quad B = b.$$

Soit $g = pgcd(a, b)$. Alors

$$v + 2\sqrt{-2} = g(\alpha + 2\beta\sqrt{-2}) \Rightarrow 1 = g\beta,$$

donc $g = 1$. D'autre part, (v, w) étant une solution impaire de (2), on a $\delta \equiv 1\ (mod\, 8)$ et donc a et b sont impairs. On a donc $pgcd(A, B) = 1$, avec A et B tous deux impairs.

D'après la définition de A et B, on voit que $B + 2A\sqrt{-2}$ divise $v + 2\sqrt{-2}$ ou $v - 2\sqrt{-2}$. On peut donc supposer que $B + 2A\sqrt{-2}$ divise $v + 2\sqrt{-2}$. L'équation (2) peut alors s'écrire

$$\frac{v + 2\sqrt{-2}}{B + 2A\sqrt{-2}}(v - 2\sqrt{-2}) = \frac{\delta}{B + 2A\sqrt{-2}}w^2, \tag{12}$$

où $\frac{v+2\sqrt{-2}}{B+2A\sqrt{-2}}$ et $\frac{\delta}{B+2A\sqrt{-2}}$ sont des éléments de $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$ (car v, w, B sont impairs) premiers entre eux. L'équation (12) montre que $\frac{\delta}{B+2A\sqrt{-2}}$ divise $v - 2\sqrt{-2}$; mais $\frac{\delta}{B+2A\sqrt{-2}}$ divise aussi δ, donc $\frac{\delta}{B+2A\sqrt{-2}}$ divise

$$pgcd(v - 2\sqrt{-2},\ \delta) = B - 2A\sqrt{-2}$$

dans $\mathbf{Z}[2\sqrt{-2}]$ et par conséquent

$$\delta | B^2 + 8A^2. \tag{13}$$

D'autre part, comme $B + 2A\sqrt{-2}|\delta$, en prenant les conjugués, on obtient aussi $B - 2A\sqrt{-2}|\delta$. Soit $\pi \in \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ premier divisant à la fois $B + 2A\sqrt{-2}$ et $B - 2A\sqrt{-2}$. Alors on a

$$\frac{B^2 + 8A^2}{\pi}|\delta. \tag{14}$$

Puisque (v, w) est une solution impaire divisible, on a $\pi|\frac{v+2\sqrt{-2}}{B+2A\sqrt{-2}}$ et $\pi|\frac{v-2\sqrt{-2}}{b+2a\sqrt{-2}}$, et comme $v \equiv B \ (mod\, 2)$, le lemme 2 de [2] appliqué à $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ montre que $\pi = 1$; alors la relation (14) devient

$$B^2 + 8A^2|\delta. \tag{15}$$

Alors $\delta = 8A^2 + B^2$ résulte de (13) et (15). Donc $\delta = 8A^2 + B^2$ est une décomposition de δ qui satisfait la condition *ii)* du théorème 1. Donc par le théorème 1, l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy - 8Ay^2 = \pm 1$$

est résoluble; A et B sont uniques.♣

En appliquant les théorèmes 1 et 2, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire.

Si δ est un nombre premier $\equiv 1 \ (mod\, 8)$, pour lequel (2) est résoluble, notons d, e des entiers tels que $\delta = 8d^2 + e^2$ (ils sont uniques au signe près). Alors l'une des équations

$$dx^2 + 2exy - 8dy^2 = \pm 1$$

est résoluble.

Preuve. Elle résulte du fait que tout nombre premier δ de la forme $4m + 1$ est de façon unique somme de deux carrés (cf. [7]).♣

4 Construction de $(A,B),\delta$ donné.

Montrons maintenant comment (A,B) peut être construit.

Théorème 3.

Soit δ un entier positif impair non carré tel que (2) *ait une solution impaire $(v,w)\in\mathbf{Z}^2$. Alors il existe un unique couple d'entiers impairs étrangers (a,b) satisfaisant*

$$\left\{\begin{array}{c} b\pm av\equiv 0\ (mod\ \delta)\\ 0<a<\sqrt{\delta},\ \ 0<b<\sqrt{\delta}\\ \delta=8a^2+b^2\end{array}\right. \tag{16}$$

De plus pour ce couple unique (a,b), l'équation (1) *a une solution (x,y) dans $\mathbf{Z}^2$.*

Preuve. En prenant $\alpha=v$ dans le théorème 0, on voit qu'il existe des entiers a et $b>0$ tels que

$$b\pm av\equiv 0\ (mod\ \delta),\quad a<\sqrt{\delta},\quad b<\sqrt{\delta}. \tag{17}$$

Puisque $(v,\delta)=1$, on a

$$b^2+8a^2\equiv a^2v^2+8a^2\equiv -8a^2+8a^2\equiv 0\ (mod\ \delta),$$

c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel non nul $r\le 8$ tel que

$$b^2+8a^2=r\delta$$

car $0<b^2+8a^2<9\delta$; on ne peut avoir $r>1$, sinon a et b seraient divisibles par δ et on aurait

$$r=\delta((\frac{b}{\delta})^2+8(\frac{a}{\delta})^2),$$

donc δ divise r, ce qui est impossible. On a donc

$$\delta=8a^2+b^2, \tag{18}$$

qui vérifie, puisque (v, w) est une solution impaire de (2), $\delta \equiv 1\ (mod\ 8)$ et donc a et b sont impairs.

Montrons ensuite que si (a, b) satisfait (17) et (18), alors $pgcd(a, b) = 1$. Posons $g = pgcd(a, b)$ et soient $a = ga', b = gb'$. Alors (18) devient

$$b'^2 + 8a'^2 = \delta_1, \quad avec \quad \delta_1 = \frac{\delta}{g^2} \tag{19}$$

La relation (17) montre qu'il existe $\lambda \in \mathbf{Z}$ tel que $b = \pm av + \lambda\delta$ et donc $b' = \pm a'v + \lambda g\delta_1$. En remplaçant b' dans (19), on obtient:

$$(\pm a'v + \lambda g\delta_1)^2 + 8a'^2 = \delta_1,$$

et, avec (2), on déduit que

$$g(w^2a'^2 \pm 2a'\lambda v + \lambda^2 g\delta_1) = 1,$$

ce qui prouve que $g = 1$.

Montrons maintenant que (a, b) est unique. Supposons que (a_1, b_1) est une autre solution de (17) et (18). Alors des congruences

$$b + av \equiv b_1 + a_1v \equiv 0\ (mod\ \delta)$$

ou

$$b - av \equiv b_1 - a_1v \equiv 0\ (mod\ \delta),$$

on voit que

$$bb_1 + 8aa_1 \equiv 0\ (mod\ \delta)$$

et

$$ab_1 - a_1b \equiv 0\ (mod\ \delta).$$

Du produit des deux expressions $b^2 + 8a^2 = \delta$ et $b_1^2 + 8a_1^2 = \delta$, on déduit

$$(bb_1 + 8aa_1)^2 + 8(ab_1 - a_1b)^2 = \delta^2,$$

ou encore (en divisant par δ^2),

$$(\frac{bb_1 + 8aa_1}{\delta})^2 + 8(\frac{ab_1 - a_1b}{\delta})^2 = 1,$$

qui fournit

$$\left\{ \begin{array}{c} bb_1 + 8aa_1 = \pm\delta \\ ab_1 - a_1b = 0 \end{array} \right. \tag{20}$$

Les relations (20) imposent

$$(a_1, b_1) = \pm(a, b).$$

Ainsi, il existe une unique solution de (17) satisfaisant $a > 0, \quad b > 0$.

Montrons enfin la dernière assertion. Il s'agit de prouver que si (a, b) satisfait (16), alors (1) est résoluble. Supposons donc que

$$b \pm av \equiv 0 \ (mod\ \delta) \tag{21}$$

Comme $v^2 \equiv -8 \ (mod\ \delta)$, en multipliant (21) par v, on obtient

$$bv \equiv \pm av^2 \equiv \pm 8a \ (mod\ \delta)$$

et par conséquent

$$\frac{v \pm 2\sqrt{-2}}{b + 2a\sqrt{-2}} = \frac{bv \pm 8a}{\delta} - 2(\frac{\pm b + av}{\delta})\sqrt{-2} \in \mathbf{Z}[2\sqrt{-2}].$$

Ainsi

$$b + 2a\sqrt{-2} | v \pm 2\sqrt{-2}.$$

Ceci prouve que (v, w) est une solution impaire divisible de (2). Donc d'après le théorème 1, l'équation (1) a une solution $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$.♣

5 Ensemble complet des solutions de (1).

Nous décrivons dans ce paragraphe la famille des solutions de (1) par la proposition suivante:

Proposition 2.

Sous les conditions du théorème 1*, soit* (x_0, y_0) *une solution de* (1)*. Alors l'ensemble des solutions* (x, y) *de* (1) *est donné par*

$$ax + by + y\sqrt{\delta} = \pm(p_0 + q_0\sqrt{\delta})^n(ax_0 + by_0 + y_0\sqrt{\delta}) \qquad (22)$$

dans laquelle (p_0, q_0) *est la solution minimale de* (3) *et* $n \in \mathbf{Z}$.

Preuve. Soit (x_0, y_0) une solution particulière de (1). Montrons comment toutes les solutions (x, y) de (1) peuvent être obtenues en termes de (x_0, y_0) et de la solution minimale (p_0, q_0) de (3). Si (x, y) est une solution de (1) et si on pose

$$J = \frac{ax + by + y\sqrt{\delta}}{ax_0 + by_0 + y_0\sqrt{\delta}},$$

la norme de J vaut

$$\frac{(ax + by)^2 - \delta y^2}{(ax_0 + by_0)^2 - \delta y_0^2} = \frac{a(ax^2 + 2bxy - 8ay^2)}{a(ax_0^2 + 2bx_0y_0 - 8ay_0^2)},$$

soit ± 1.

Par ailleurs, J s'écrit $D + E\sqrt{\delta}$, où D et E sont des entiers donnés par

$$D = axx_0 + b(xy_0 + x_0y) - 8ayy_0, \quad E = x_0y - xy_0.$$

Alors, d'après la théorie de l'équation de *Pell*, on a

$$J = \pm(p_0 + q_0\sqrt{\delta})^n,$$

où $n \in \mathbf{Z}$. Ainsi, on a montré l'existence d'un entier n satisfaisant (22).

Réciproquement, soient x et y définis par (22) pour $n \in \mathbf{Z}$. En prenant les normes des deux membres de (22), on voit que x et y vérifient (1). Il reste à montrer qu'ils sont entiers. Ecrivons les entiers M et N sous la forme

$$M + N\sqrt{\delta} = \pm(p_0 + q_0\sqrt{\delta})^n.$$

Alors, en égalant les coefficients dans (22), on obtient

$$ax + by = M(ax_0 + by_0) + \delta N y_0, \quad y = My_0 + N(ax_0 + by_0).$$

Il est clair que $y \in \mathbf{Z}$. En utilisant $\delta = 8a^2 + b^2$, on obtient

$$x = (M - bN)x_0 + 8aNy_0,$$

de sorte que x est aussi un entier.♣

6 Exemples numériques.

Exemple 1. Si $a = 19$ et $b = 3$, alors $\delta = 8(19)^2 + 3^2 = 2897 \equiv 1\,(mod\,8)$ est non carré et tel que $(v, w) = (915, 17)$ est une solution divisible de (2):

$$v^2 - 2897w^2 = -8$$

car $\frac{2897+2\sqrt{-2}}{3+38\sqrt{-2}} = 1 + 12\sqrt{-2}$ et le théorème 1 montre que l'équation (1) est résoluble; en fait, c'est $19x^2 + 6xy - 152y^2 = 1$ ($(x, y) = (3, -1)$ est une solution).

Exemple 2. Dans le cas $\delta = 3681 = 8(5)^2 + 59^2 = 8(18)^2 + 33^2 = 8(17)^2 + 37^2$, on a $\delta \equiv 1 \quad (mod\ 8)$ non carré et tel que $(v, w) = (4429, 73)$ est une solution de (2). Comme $pgcd(4429 + 2\sqrt{-2}, \quad 3681) = 59 + 10\sqrt{-2}$, les théorèmes 1 et 2 montrent que (1) est résoluble dans le seul cas où $(a, b) = (5, 59)$; en fait, c'est $5x^2 + 118xy - 40y^2 = -1$ ($(x, y) = (1, 3)$ est une solution).

Les équations $18x^2 + 66xy - 144y^2 = \pm 1$ et $17x^2 + 74xy - 136y^2 = \pm 1$ ne sont pas résolubles.

Exemple 3. Pour illustrer l'utilité du théorème 3, prenons $\delta = 513$. Alors on a $\delta \equiv 1 \ (mod\, 8)$ non carré et tel que $(v, w) = (2197, 97)$ est une solution de (2). Les candidats pour l'unique couple (a, b) satisfaisant (16) doivent être des solutions de $\delta = 8a^2 + b^2$, soit

$$(a, b) = \pm(7, 11), \pm(8, 1), \pm(6, 15), \pm(3, 21).$$

Le seul couple satisfaisant (16) est $(a, b) = (7, 11)$ de sorte que $(7, 11)$ est l'unique couple pour lequel l'équation (1) est résoluble; en fait, c'est $7x^2 + 22xy - 56y^2 = 1$ ($(x, y) = (5, 3)$ est une solution).

Les équations $8x^2+2xy-64y^2 = \pm1$, $6x^2+30xy-64y^2 = \pm1$, $3x^2+42xy - 24y^2 = \pm1$ ne sont pas résolubles.

L'auteur exprime ses remerciements aux referees anonymes qui ont contribué par leurs commentaires et leurs réactions à l'amélioration de ce texte.

Références bibliographiques.

[1] L. Bapoungué, "Sur la résolubilité de l'équation diophantienne $ax^2 + 2bxy - kay^2 = \pm1$," C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I, 235-238 (1989).

[2] L. Bapoungué, "Un critère de résolution pour l'équation diophantienne $ax^2 + 2bxy - kay^2 = \pm1$," Expo. Math. 16, 249-262 (1998).

[3] L. Bapoungué, "Sur les solutions générales de l'équation diophantienne $ax^2 + 2bxy - kay^2 = \pm1$," Expo. Math. 18, 165-176 (2000).

[4] A. Faisant, "*L'équation diophantienne du second degré*", Hermann, Paris (1991).

[5] K. Hardy and K. Williams, "On the solvability of the diophantine equation $dV^2 - 2eVW - dW^2 = 1$," Pacific J. Math., Vol. 124, No 1, 145-158 (1986).

[6] P. Samuel, "*Théorie algébrique des nombres*", Hermann, Paris (1967).

[7] D. Shanks, "*Solved and unsolved problems in number theory*", Spartan Books, Vol. 1, Washington D. C. (1962).

Département de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure B.P. 47
Université de Yaoundé I, Yaoundé (Cameroun)
lbapou@uycdc.uninet.cm