IMHOTEP Vol. 3, No 1 (2000)

Distance de Tchebytchev généralisée et description statistique floue.[1]

Henri Gwêt

Résumé

La définition d'une différence symétrique à partir des opérateurs d'implication floue nous a permis de mettre en évidence une notion de distance qui étend celle de Tchebytchev au cas flou. Nous montrons par la suite comment on peut, à partir de cette distance, construire une mesure de la proximité entre deux modalités de caractères dans une description statistique floue à deux dimensions.

1 Introduction.

Dans ce papier, nous allons dans un premier temps replacer la notion de caractère flou précédemment énoncée (cf. [8]) dans un cadre plus vaste et plus formel, celui des applications floues. Cela nous permettra de définir les notions fondamentales de la statistique descriptive floue. Si en statistique descriptive classique, la notion de "modalité observée" semble

AMS Subject Classification 2000 : 03B52.
Mots-clés : Application floue, correspondance possibiliste, proximité, différence symétrique, opérateurs flous, statistique floue.
Reçu par la Rédaction le 23 septembre 1999.

évidente, dans le cas flou il n'en est rien. En effet, une modalité a du caractère X est observée par l'individu ω d'une population Ω si et seulement si $X(\omega) = a$. Cela traduit le fait que a est l'image de ω par l'application X. Cette opération d'affectation est symbolisée par une application nette X.

Que se passe-t-il si l'application X est floue? Quel sens donner à l'assertion "la modalité a est observée par l'individu ω" quand précisément l'individu ω a la possibilité de choisir plusieurs modalités de l'ensemble des observations A à la fois? Un choix qui peut non seulement *ê*tre multiple mais également à plusieurs niveaux d'intensité, i.e. ω a par exemple la possibilité de choisir un peu a_1, choisir beaucoup a_2 et choisir très peu a_3. Si l'on convient que "choisir un peu" correspond à une association de niveau 0.5, "choisir beaucoup" correspond à une association de niveau 1 et que "choisir très peu" correspond à une association de niveau 0.1, alors on obtient une liaison multivoque entre l'individu ω et les modalités de l'ensemble A. (Figure 1).

En introduisant les notions d'image et d'image réciproque d'un sous-ensemble flou par une application floue, nous proposons une autre interprétation du tableau de correspondance possibiliste.

A chaque modalité a, nous associons le sous-ensemble flou $X^{-1}(a)$, que l'on note $(X = a)$. Ce sous-ensemble flou est une interprétation ensembliste de la modalité a. Cette interprétation nous permettra de mesurer la proximité entre deux modalités de caractères flous. Cette proximité entre deux modalités a et a' sera évaluée en calculant la distance entre les sous-ensembles $(X = a)$ et $(X = a')$ qui leur sont associés. Les distances de Minkowski définies par

$$d(a, a') = (\sum_{\omega \in \Omega} |\mu_{X=a}(\omega) - \mu_{X=a'}(\omega)|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

offrent un grand choix de distances. En particulier pour $p = 1$, on retrouve la distance de Hamming généralisée, largement utilisée dans la littérature. Nous montrons, moyennant un choix approprié d'opérateurs, que cette distance de Hamming peut s'exprimer en terme de cardinal d'une différence symétrique entre les sous-ensembles $(X = a)$ et $(X = a')$. Après un rappel sur les opérateurs flous, l'objet de la première partie de notre papier sera précisément de construire cette différence symétrique. Cela nous permettra par la suite d'obtenir une mesure de proximité dont on montrera qu'elle est une distance et que ses propriétés sont compatibles avec la théorie des possibilités. Tout au long de l'article, le référentiel Ω et l'ensemble des modalités A sont tout deux supposés finis.

2 Opérateurs flous et Différence Symétrique.

On considère le treillis multiplicatif $([0,1], \vee, \wedge, *)$ où $\wedge$ représente le min, $\vee$ le max et $*$ une t-norme. On note $\oplus$ la t-couronne duale de $*$, i.e. telle que

$$\overline{a \oplus b} = \overline{a} \oplus \overline{b} \quad \forall a, b \in [0,1] \tag{2}$$

où $\overline{a} = 1 - a$ est le pseudo-complément de a.

2.1 Opérateurs flous.

Nous désignons par $|$ l'opérateur de pseudo-division associé à la t-norme $*$. Il est défini par

$$a|b = \max_{t \in [0,1]} \{a * t \leq b\}. \tag{3}$$

Nous désignons par $\ominus$, l'opérateur de pseudo-soustraction, dual de $|$. Il est défini par

$$a \ominus b = \min_{t \in [0,1]} \{a \oplus t \geq b\}. \tag{4}$$

$a|b$ (resp. $a \ominus b$) représente en quelque sorte le résultat de la division (resp. soustraction) de b par a dans le treillis multiplicatif $([0,1], \vee, \wedge, *)$.

Nous désignons par $\rightarrow$, l'opérateur d'implication floue (ou implication tout court). Il est défini par

$$a \rightarrow b \ = a|b. \tag{5}$$

Nous désignons par —, l'opérateur de différence (ou différence tout court). Il est défini comme étant le contraire d'une implication, i.e.

$$a \mathbin{\text{—}} b = 1 - a|b. \tag{6}$$

La relation (6) est une traduction de l'identité ensembliste nette

$$E - F = E \cap \overline{F} = \overline{\overline{E} \cup F} = \overline{E \rightarrow F}.$$

Exemple 1.

Si $*$ est la t-norme probabiliste définie par $a * b = ab$, alors

$$a|b = 1 \wedge \frac{b}{a}, \quad a \ominus b = 0 \vee \frac{b-a}{1-a}, \quad a \mathbin{\text{—}} b = 1 - \frac{b}{a} \tag{7}$$

avec $\frac{b}{0} = 1 \quad \forall b \in [0,1]$.

Exemple 2.

Si $*$ est la t-norme de Lukasiewicz définie par $a * b = 0 \vee (a + b - 1)$, alors

$$a|b = 1 \wedge (1 - a + b), \quad a \ominus b = 0 \vee (b - a), \quad a \mathbin{\text{—}} b = 0 \vee (a - b). \tag{8}$$

Certaines propriétés des opérateurs de pseudo-division et de pseudo-soustraction ont été énoncées dans un précédent papier ([8]).

Plusieurs implications ont été proposées dans la littérature. Elles fournissent autant de types d'opérateurs de différence. Ces implications se répartissent en quatre grandes classes ([17], [2]):

type I:

$$a \rightarrow b \ = a|b \quad et \quad a \mathbin{\text{—}} b = 1 - a|b \tag{9}$$

type II:

$$a \rightarrow b \ = 1 - b \ominus a \quad et \quad a \mathbin{\text{—}} b = b \ominus a \tag{10}$$

type III:

$$a \to b \ = \overline{a} \oplus (a * b) \quad et \quad a \text{---}\ b = a * (\overline{a} \oplus \overline{b}) \tag{11}$$

type IV:

$$a \to b \ = \overline{a} \oplus b \quad et \quad a \text{---} b = a * \overline{b}. \tag{12}$$

2.2 Différence.

Soient E et F deux sous-ensembles nets d'un même référentiel Ω. On appelle différence de E et F, le sous-ensemble $E - F$ défini par

$$E - F = E - (E \cap F). \tag{13}$$

De cette définition, il vient immédiatement que

$$E - F = E \cap \overline{F}. \tag{14}$$

On appelle différence symétrique entre E et F, le sous-ensemble $E \triangle F$ défini par

$$E \triangle F = E \cup F - E \cap F. \tag{15}$$

Nous nous proposons d'étendre ces notions de différence et différence symétrique au cas où les deux sous-ensembles E et F sont flous.

Une première extension aux sous-ensembles flous de la notion de différence a été proposée par Kaufmann [10], où μ est la fonction d'appartenance:

$$\mu_{E-F}(\omega) = \mu_E(\omega) \wedge \mu_{\overline{F}}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{16}$$

Cette extension est une transposition au cas flou de la définition (14) car $\mu_E(\omega) \wedge \mu_{\overline{F}}(\omega)$ est la fonction d'appartenance de $E \cap \overline{F}$.

L'inconvénient majeur de cette extension est que si $E \subset F$, on n'a pas $E - F = \emptyset$ comme dans le cas booléen. Nous contournons cet inconvénient en proposant une autre définition de la différence.

Définition.

Soient E et F deux sous-ensembles flous de Ω. Nous appellerons différence de E et F, le sous-ensemble flou $E - F$ défini ar

$$\mu_{E-F}(\omega) = \mu_E(\omega) - \mu_F(\omega). \tag{17}$$

Propriété 1.

$$E \subset F \Leftrightarrow E - F = \emptyset. \tag{18}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E \subset F \quad & \Leftrightarrow \mu_E(\omega) \leq \mu_F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \\ & \Leftrightarrow \mu_E(\omega) | \mu_F(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega \\ & \Leftrightarrow \mu_{E-F}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega \\ & \Leftrightarrow E - F = \emptyset. \end{aligned}$$

Propriété 2.

$$E - F = E - (E \cap F). \tag{19}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mu_{E-(E\cap F)}(\omega) \quad & = 1 - \mu_E(\omega) | \mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega) \\ & = 1 - \mu_E(\omega) | \mu_E(\omega) \quad \wedge \quad \mu_E(\omega) | \mu_F(\omega) \\ & = \mu_{E-F}(\omega). \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que cette définition est une extension de la différence nette. Le choix du type d'opération nette dans la définition (17) dépend des préoccupations que l'on a, et en particulier, la façon de traduire le fait qu'un individu ω appartient de façon nette au sous-ensemble $E - F$.

Exemple 3.

Si — est l'opérateur de différence associé à la t-norme de Lukasiewicz (8), alors la différence $E \mathbin{\text{—}} F$ sera donnée par

$$\mu_{E\text{—}F}(\omega) = 0 \vee (\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)). \tag{20}$$

Dire dans ce cas que ω appartient de façon nette à $E \mathbin{\text{—}} F$ revient à dire que

$$\mu_{E\text{—}F}(\omega) = 1, \quad \text{i.e.} \quad \mu_E(\omega) - \mu_F(\omega) = 1.$$

Mais comme $\mu_E(\omega)$ et $\mu_F(\omega)$ appartiennent à $[0, 1]$, on a

$$\mu_E(\omega) = 1 + \mu_F(\omega) \Rightarrow \mu_E(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_F(\omega) = 0.$$

Autrement dit, dire qu'un individu appartient de façon nette à $E \mathbin{\text{—}} F$ revient à dire qu'il appartient de façon nette à E et à $\overline{F}$.

Exemple 4.

Si — est l'opérateur de différence associé à la t-norme probabiliste (7), alors la différence entre les sous-ensembles flous E et F est donnée par

$$\mu_{E\text{—}F} = 1 - \frac{\mu_F(\omega)}{\mu_E(\omega)}. \tag{21}$$

Et dans ce cas, dire qu'un individu ω appartient de façon nette à $E \mathbin{\text{—}} F$ signifie $\mu_F(\omega) = 0$ et $\mu_E(\omega) \neq 0$, i.e. cet individu appartient de façon nette à $\overline{F}$ et au moins un peu à E.

2.3 Différence symétrique.

Soient E et F deux sous-ensembles flous de Ω. On appellera différence symétrique de E et F, le sous-ensemble flou noté $E \triangle F$ et défini par

$$\mu_{E \triangle F} = \mu_{E \cup F}(\omega) - \mu_{E \cap F}(\omega). \tag{22}$$

Lorsque les sous-ensembles E et F sont nets, on vérifie aisément que cette définition coïncide avec la différence symétrique booléenne.

Remarque.

Par définition de la différence symétrique, on a

$$E \triangle F = E \cup F - E \cap F. \tag{23}$$

Propriété 3.

$$E \triangle F = (E - F) \cup (F - E). \tag{24}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mu_{(E-F)\cup(F-E)}(\omega) &= \mu_{(E-F)}(\omega) \vee \mu_{(F-E)}(\omega) \\
&= (1 - \mu_E(\omega)|\mu_F(\omega)) \vee (1 - \mu_F(\omega)|\mu_E(\omega)) \\
&= 1 - (\mu_E(\omega)|\mu_F(\omega)\mu_F(\omega)|\mu_E(\omega)) \\
&= 1 - (\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega))|\mu_F(\omega) \wedge \mu_E(\omega)) \\
&= 1 - (\mu_{E\cup F}(\omega)|\mu_{E\cap F}(\omega)) \\
&= \mu_{E\cup F}(\omega) - \mu_{E\cap F}(\omega) \\
&= \mu_{E\triangle F}(\omega).
\end{aligned}$$

Exemple 5.

Si l'on considère l'opérateur de différence associé à la t-norme de Lukasiewicz (8), alors la différence symétrique est donnée par

$$\begin{aligned}
\mu_{E\triangle F}(\omega) &= \mu_{E\cup F}(\omega) - \mu_{F\cup E}(\omega) \\
&= |\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|.
\end{aligned}$$

Exemple 6.
Si l'on considère l'opérateur de différence associé à la t-norme probabiliste (7), alors la différence symétrique est donnée par

$$\begin{aligned} \mu_{E\triangle F}(\omega) &= 1 - \tfrac{\mu_{E\cap F}(\omega)}{\mu_{F\cup E}(\omega)} \\ &= \tfrac{|\mu_E(\omega)-\mu_F(\omega)|}{\mu_E(\omega)\vee\mu_F(\omega)}. \end{aligned}$$

3 Distance de Tchebytchev Généralisée.

Rappelons ce qu'on entend par distance de Tchebytchev entre deux sous-ensembles nets. Soit Ω un référentiel. Soient E et F deux sous-ensembles nets de Ω. La distance de Tchebytchev entre E et F est donnée par

$$d(E,F) = \bigvee_{\omega\in\Omega} |1_E(\omega) - 1_F(\omega)|, \tag{25}$$

où $\bigvee$ est le max et 1_E (resp.1_F) la fonction indicatrice d'appartenance à E (resp. F).
Avant d'étendre cette définition aux sous-ensembles flous, rappelons qu'une application $d : 2^\Omega \times 2^\Omega \to [0,\infty]$ est une distance si et seulement si

$$d(E,F) = 0 \Leftrightarrow E = F \tag{26}$$

$$d(E,F) = d(F,E) \quad \text{(symétrie)} \tag{27}$$

$$d(E,G) \leq d(E,F) \oplus d(F,G) \quad \text{(transitivité)} \tag{28}$$

où $\oplus$ est un opérateur associé à la distance d (généralement une t-conorme).
On vérifie aisément que la distance de Tchebytchev est bien une distance pour $\oplus = +$. Le choix de l'opérateur $\oplus$ est étroitement lié à la nature du problème à étudier.

Considérons maintenant l'extension de la distance de Tchebytchev au cas flou. Une extension naturelle de cette distance est donnée par

$$d(E,F) = \bigvee_{\omega\in\Omega} |\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|. \tag{29}$$

Cette équation peut encore se mettre sous la forme

$$d(E,F) = \bigvee_{\omega\in\Omega} \mu_{E\triangle F}(\omega),$$

où $\triangle$ est la différence symétrique associée à la t-norme de Lukasiewicz.

L'objet de ce paragraphe est de montrer que ce résultat peut se généraliser à des t-normes autres que celle de Lukasiewicz. Considérons le treillis multiplicatif $[0,1],\wedge,\vee,*$, où $*$ est une t-norme. Soit $\oplus$ la t-conorme associée à $*$. On désigne par $\triangle$ la différence symétrique associée à $*$ et définie en (22).

Théorème.

Soient E et F deux sous-ensembles flous de Ω. Si l'on pose

$$d(E,F) = \bigvee_{\omega\in\Omega} \mu_{E\triangle F}(\omega), \tag{30}$$

alors l'application d définit sur $[0,1]^\Omega$ une distance associée à $\oplus$, i.e.

$$\begin{array}{ll} i) & d(E,F)=0 \quad \Leftrightarrow \quad E=F \\ ii) & d(E,F)=d(F,E) \\ iii) & d(E,G)\leq d(E,F)\oplus d(F,G). \end{array}$$

C'est cette distance que nous appellerons distance de Tchebytchev généralisée ou encore distance de la hauteur de la différence symétrique. C'est une formulation analogue à celle de la distance du cardinal de la différence symétrique largement utilisée en Analyse des Données et définie par

$$d(E,F) = \frac{1}{n}.card(E\triangle F).$$

Preuve.
On a :

$$d(E,F) = \bigvee_{\omega\in\Omega} 1 - (\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega))|(\mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega)).$$

i)

$$\begin{array}{rcl} d(E,F) = 0 & \Leftrightarrow & (\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega))|(\mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega)) = 1 \quad \forall\omega \in \Omega \\ & \Leftrightarrow & \mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega) = \mu_E(\omega) \wedge \mu_F(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega \\ & \Leftrightarrow & \mu_E(\omega) = \mu_F(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega \\ & \Leftrightarrow & E = F. \end{array}$$

ii) Trivial.
iii) Quels que soient a, b et c appartenant à $[0,1]$, on a $a|c * c|b \leq a|b$ car $a * a|c * c|b \leq c * c|b \leq b$; d'où:

$$\begin{array}{rl} (a|c \wedge c|a) * (b|c \wedge c|b) & = (a|c * b|c) \wedge (a|c * c|b) \wedge (c|a * b|c) \wedge (c|a * c|b) \\ & \leq (a|c * c|b) \wedge (b|c * c|a) \\ & \leq a|b \wedge b|a. \end{array}$$

Remarquons que $a|b \wedge b|a = (a \vee b)|(a \wedge b)$, car

$$\begin{array}{rl} a \vee b|a \wedge b & = a|a \wedge a|b \wedge b|a \wedge b|b \\ & = 1 \wedge a|b \wedge b|a \\ & = a|b \wedge b|a. \end{array}$$

En passant au complément à 1, on a:

$$(1 - a \vee b|a \wedge b) \leq (1 - a \vee c|a \wedge c) \oplus (1 - b \vee c|b \wedge c).$$

En posant $a = \mu_E(\omega)$, $\quad b = \mu_F(\omega)$ et $c = \mu_G(\omega)$, on a:
$1 - \mu_{E\cup F}(\omega)|\mu_{E\cap F}(\omega)$

$$\leq (1 - \mu_{E\cup G}(\omega)|\mu_{E\cap G}(\omega)) \oplus (1 - \mu_{F\cup G}(\omega)|\mu_{F\cap G}(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega.$$

Remarquons que

$$\bigvee_i (a_i \oplus b_i) \leq \bigvee_i a_i \oplus \bigvee_i b_i,$$

car $a_i \leq \bigvee_i a_i$ et $b_i \leq \bigvee_i b_i$ entraînent $a_i \oplus b_i \leq \bigvee_i a_i \oplus \bigvee_i b_i$; d'où $\bigvee_i (a_i \oplus b_i) \leq \bigvee_i a_i \oplus \bigvee_i b_i$.

Finalement, on a:

$\bigvee_{\omega \in \Omega} [1 - \mu_{E \cup F}(\omega) | \mu_{E \cap F}(\omega)]$

$$\leq \bigvee_{\omega} [1 - \mu_{E \cup G} | \mu_{E \cap G}(\omega) | \mu_{E \cap G}(\omega)] \oplus [1 - \mu_{F \cup G}(\omega) | \mu_{F \cap G}(\omega)],$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \textstyle\bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{E \triangle F}(\omega) \quad & \leq \textstyle\bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{E \triangle G}(\omega \oplus \mu_{F \triangle G}(\omega) \\ & \leq \textstyle\bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{E \triangle G}(\omega) \oplus \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{F \triangle G}(\omega). \end{aligned}$$

D'où $d(E, F) \leq d(E, G) \oplus d(G, F)$.

Remarque.

Il est également possible de définir une distance de Tchebytchev entre deux distributions de possibilités. En effet, on peut interpréter une distribution de possibilités π sur Ω comme étant la fonction d'appartenance à un sous-ensemble flou E tel que $\pi(\omega) = \mu_E(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$. Ainsi pour deux distributions de possibilités π et π' sur Ω, on a:

$$d(\pi, \pi') = \bigvee_{\omega \in \Omega} 1 - (\pi(\omega) \vee \pi'(\omega)) | (\pi(\omega) \wedge \pi'(\omega)).$$

Exemple 7.

Si l'on choisit la t-norme de Lukasiewicz, cela donne

$$d(E, F) = \bigvee_{\omega \in \Omega} |\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|$$

qui est une distance associée à la somme bornée $a \oplus b = 1 \wedge (a + b)$.

Prenons par exemple $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Pour $E = \{(\omega_1, .3),\ (\omega_2, .2),\ (\omega_3, 0)\}$ et $F = \{(\omega_1, .2),\ (\omega_2, .8),\ (\omega_3, .5)\}$, on aura

$$d(E, F) = .1 \vee .6 \vee .5 = .6$$

Exemple 8.
Si l'on choisit la t-norme produit, alors

$$d(E, F) = \bigvee_{\omega \in \Omega} \frac{|\mu_E(\omega) - \mu_F(\omega)|}{\mu_E(\omega) \vee \mu_F(\omega)}$$

qui est une distance associée à la somme probabiliste $\oplus$ définie par $a \oplus b = a + b - ab$.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Pour $E = \{(\omega_1, .8),\ (\omega_2, .2),\ (\omega_3, .1)\}$ et $F = \{(\omega_1, .2), (\omega_2, .5),\ (\omega_3, .1)\}$, on a:

$$d(E, F) = \frac{.6}{.8} \vee \frac{.3}{.5} \vee \frac{0}{1} = .75$$

4 Applications Floues.

L'objet de ce paragraphe est de proposer une extension au cas flou de la notion d'application entre ensembles, avec pour objectif de conserver le maximum de propriétés possible des applications classiques. Commençons d'abord par rappeler ce que l'on entend par correspondance entre deux ensembles.

4.1 Application nette.

Soient E et F deux référentiels. Une correspondance entre E et F est une relation R de E vers F. Une telle relation se présente sous la forme d'un tableau à deux entrées E et F, où à la croisée de la ligne x et de la colonne y, on a le nombre $1_R(x,y)$ qui vaut 1 ou 0 selon que x et y sont en relation ou non:

$$1_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est en relation avec } y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un élément x de S donné, on apelle coupe suivant x, l'ensemble $C(x)$ des éléments y de F qui sont en relation avec x :

$$C(x) = \{y \in F \ / \ 1_E(x,y) = 1\}. \tag{31}$$

On peut encore définir la coupe suivant x par la valeur de sa fonction indicatrice:

$$1_C(x)(y) = 1_R(x,y) \quad \forall y \in F. \tag{32}$$

Une application nette est une correspondance de E vers F telle que

$$\sum_{y \in F} 1_{C(x)}(y) = 1 \quad \forall x \in E. \tag{33}$$

Cette condition traduit le fait que sur chaque ligne du tableau de correspondance nette, on retrouve une fois et une seule, le chiffre 1, ou encore que chaque élément x de l'ensemble de départ E a une image et une seule y dans l'ensemble d'arrivée. L'image d'un élément x de E par l'application X est alors donnée par

$$X(x) = C(x) \quad \forall x \in E. \tag{34}$$

4.2 Application Floue.

Voyons maintenant comment on peut étendre l'ensemble de ces définitions au cas flou. Soient E et F deux référentiels. Une correspondance floue de E vers F se présente sous la forme d'un tableau $E \times F$ où à la croisée de la ligne x et de la colonne y, on a le nombre $\mu_R(x,y) \in [0,1]$ qui évalue le degré avec lequel x et y sont en relation.

Pour un élément x de E donné, nous appellerons coupe suivant x, le sous-ensemble flou $C(x)$ de F défini par

$$\mu_{C(x)}(y) = \mu_R(x, y) \quad \forall y \in F. \tag{35}$$

Cette définition est semblable à celle des coupes nettes, sauf qu'ici, les indicatrices sont remplacées par les fonctions d'appartenance.

Soit R une correspondance floue de E vers F et $C(x)$ la coupe suivant un élément x de E. On dira que la correspondance R est une application floue si et seulement si

$$\bigvee_{y \in F} \mu_{C(x)}(y) = 1 \quad \forall x \in E. \tag{36}$$

Cette condition traduit le fait que sur chaque ligne du tableau de correspondance floue (Tableau 2), on retrouve au moins une fois le chiffre 1. Ou encore que chaque élément de l'ensemble de départ a au moins une image nette dans l'ensemble d'arrivée.

On appellera image d'un élément x de E par l'application X, le sous-ensemble flou $X(x)$ défini par

$$X(x) = C(x) \quad \forall x \in E. \tag{37}$$

Remarque.

Pour reprendre la terminologie traditionnelle, on peut dire qu'une application floue de E vers F est une correspondance floue, fonctionnelle entre E et l'ensemble des sous-ensembles flous de F, c'est-à-dire une application nette de E vers $[0, 1]^F$. Par ailleurs, une application nette n'est qu'une application floue particulière.

Soit X une application nette de E vers F et A un sous-ensemble flou de E. Le principe d'extension de Zadeh permet de définir à partir de A, un sous-ensemble flou de F, que l'on notera $X(A)$, par

$$\mu_{X(A)}(y) = \bigvee_{x \in E} \mu_A(x) \wedge 1_{X(x)=y}. \tag{38}$$

$X(A)$ est l'image du sous-ensemble flou de A par l'application nette X.
Ce principe s'étend facilement au cas où X est une application floue en posant

$$\mu_{X(A)}(y) = \bigvee_{x \in E} \mu_A(x) \wedge \mu_{X(x)}(y). \tag{39}$$

$X(A)$ est l'image du sous-ensemble flou de A par l'application floue X.
On dira qu'un élément y de F est image nette d'un élément x de E par l'application floue X si et seulement si

$$\mu_{X(x)}(y) = 1. \tag{40}$$

Soit X une application floue de E vers F. Soit B un sous-ensemble flou de F. L'image réciproque de B par X est définie par

$$\mu_{X^{-1}(B)}(x) = \bigvee_{y \in F} \mu_B(y) \wedge \mu_{X(x)}(y). \tag{41}$$

Lorsque le sous-ensemble B est réduit à un seul élément y de F, la formule (41) se réduit à

$$\mu_{X^{-1}(y)}(x) = \mu_{X(x)}(y). \tag{42}$$

Remarque.

En rapprochant les équations définissant l'image et l'image réciproque, on remarque qu'une ligne x du tableau de correspondance floue représente l'image de x par X. La colonne y du même tableau est elle, représentée par l'image réciproque de y par X. Par la suite, on écrira $(X = y)$ pour représenter le sous-ensemble flou $X^{-1}(\{y\})$.

Remarque

L'image et l'image réciproque par une application X peuvent se définir de façon plus condensée par

$$\mu_{X(A)}(y) = h(A \cap (X = y)) \tag{43}$$

et

$$\mu_{X^{-1}(B)}(x) = h(B \cap X(x)). \tag{44}$$

Voici deux propriétés des applications nettes, qui restent valables dans le cas des applications floues.

Propriété 4.

Si $X : E \to F$ est une application floue, alors:

$$X^{-1}(F) = E. \tag{45}$$

Preuve.

Par définition de l'image réciproque, on a:

$$\begin{aligned} \mu_{X^{-1}(F)}(x) &= \textstyle\bigvee_{y \in F} \mu_{X(x)}(y) \quad \forall x \in E \\ &= h(X(x)) \\ &= 1 \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

Propriété 5.

$$\bigcup_{y \in F} (X = y) = E. \tag{46}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mu_{\cup_{y\in F}(X=y)}(x) &= \bigvee_{y\in F} \mu_{X=y}(x)\\ &= \bigvee_{y\in F} \mu_{X(x)}(y)\\ &= h(X(x))\\ &= 1 \quad \forall x \in E.\end{aligned}$$

Si $noy(A)$ est le noyau de A, on dira qu'une application floue $X : E \to F$ est surjective si et seulement si

$$card(noy(X = y)) \geq 1 \quad \forall y \in F. \tag{47}$$

Cela veut dire que sur chaque colonne du tableau de correspondance floue (Tableau 2), on retrouve au moins une fois le chiffre 1; ou encore que chaque élément de F est image nette d'au moins un élément de E.

Remarque.

Cette condition de surjectivité équivaut à $X(E) = F$, car quel que soit $y \in F$,

$$\begin{aligned}X(E) = F &\Leftrightarrow \mu_{X(E)}(y) = 1 \quad \forall y \in F\\ &\Leftrightarrow \bigvee_{x\in E} \mu_{X(x)}(y) \quad \forall y \in F\\ &\Leftrightarrow \bigvee_{x\in E} \mu_{X=y}(x) \quad \forall y \in F\\ &\Leftrightarrow h(X = y) \quad \forall y \in F\\ &\Leftrightarrow card(noy(X = y)) \geq 1 \quad \forall y \in F\\ &\Leftrightarrow X \text{ est surjective.}\end{aligned}$$

Si $noy(A)$ est le noyau de A, on dira qu'une application floue $X : E \to F$ est injective si et seulement si

$$card(noy(X = y)) \leq 1 \quad \forall y \in F. \tag{48}$$

Cette condition d'injectivité signifie que chaque élément y de F est image nette par X d'au plus un élément de E. Autrement dit, sur chaque colonne du tableau de correspondances (Tableau 2), on retrouve au plus une fois le chiffre 1.

On dira qu'une application floue $X : E \to F$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire

$$card(noy(X = y)) = 1 \quad \forall y \in F. \tag{49}$$

On notera que l'ensemble de ces définitions coïncide avec les notions traditionnelles d'injection, de surjection et de bijection lorsque l'application est nette.

Soient $X : E \to F$ et $Y : F \to G$ deux applications floues. L'application composée $Y \circ X : E \to G$ est définie par

$$\mu_{Y \circ X(x)}(z) = \bigvee_{y \in F} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{Y(y)}(z) \quad \forall x \in E,\ z \in G. \tag{50}$$

D'après la définition de l'image floue, on obtient l'associativité de la composition max-min par

$$(Y \circ X)(x)(x) = Y(X(x)) \quad \forall x \in E. \tag{51}$$

Soit $X : E \to F$ une application floue. Soient $A_1, A_2 \subset E$ et $B_1, B_2 \subset F$ des sous-ensembles flous.

Propriété 6.

$$A_1 \subset A_2 \quad \Leftrightarrow \quad X(A_1) \subset X(A_2) \quad \forall x \in E. \tag{52}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
A_1 \subset A_2 \ & \Rightarrow \mu_{A_1}(x) \leq \mu_{A_2}(x) \quad \forall x \in E \\
& \Rightarrow \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{A_1}(x) \leq \mu_{X(x)} \wedge \mu_{A_2}(x) \quad \forall x \in E \\
& \Rightarrow \textstyle\bigvee_{x \in E} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{A_1}(x) \leq \bigvee_{x \in E} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{A_2}(x) \\
& \Rightarrow \mu_{X(A_1)}(y) \leq \mu_{X(A_2)}(y) \quad \forall y \in F \\
& \Rightarrow X(A_1) \subset X(A_2).
\end{aligned}$$

Propriété 7.

$$B_1 \subset B_2 \quad \Rightarrow \quad X^{-1}(B_1) \subset X^{-1}(B_2). \tag{53}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} B_1 \subset B_2 \ & \Rightarrow \mu_{B_1}(y) \leq \mu_{B_2}(y) \quad \forall y \in F \\ & \Rightarrow \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{B_1}(y) \leq \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{B_2}(y) \quad \forall y \in F \\ & \Rightarrow \textstyle\bigvee_{y \in F} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{B_1}(y) \leq \bigvee_{y \in F} \mu_{X(x)}(y) \wedge \mu_{B_2}(y) \\ & \Rightarrow \mu_{X^{-1}(B_1)}(x) \leq \mu_{X^{-1}(B_2)}(x) \quad \forall x \in E \\ & \Rightarrow X^{-1}(B_1) \subset X^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Propriété 8.

$$X(A_1 \cup A_2) = X(A_1) \cup X(A_2). \tag{54}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mu_{X(A_1 \cup A_2)}(y) \ & = h((A_1 \cup A_2) \cap (X = y)) \\ & = h(A_1 \cap (X = y)) \vee h(A_2 \cap (X = y)) \\ & = \mu_{X(A_1)}(y) \vee \mu_{X(A_2)(y)} \\ & = \mu_{X(A_1) \cup X(A_2)}(y). \end{aligned}$$

Propriété 9.

$$X^{-1}(B_1 \cup B_2) = X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2). \tag{55}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mu_{X^{-1}(B_1 \cup B_2)}(x) \ & = h(B_1 \cup B_2) \cap (X(x)) \\ & = h(B_1 \cap X(x)) \vee h(B_2 \cap X(x)) \\ & = \mu_{X^{-1}(B_1)}(x) \vee \mu_{X^{-1}(B_2)}(x) \\ & = \mu_{X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)}(x). \end{aligned}$$

Propriété 10.

$$X(A_1 \cap A_2) \subset X(A_1) \cap X(A_2). \tag{56}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mu_{X(A_1 \cap A_2)} &= h(A_1 \cap A_2 \cap (X = y)) \\ &\leq h(A_1 \cap (X = y)) \wedge h(A_2 \cap (X = y)) \\ &= \mu_{X(A_1)}(y) \wedge \mu_{X(A_2)(y)} \\ &= \mu_{X(A_1) \cap X(A_2)}(y). \end{aligned}$$

Propriété 11.

$$X^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset X^{-1}(B_1) \cap X^{-1}(B_2). \tag{57}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mu_{X^{-1}(B_1 \cup B_2)} &= h(B_1 \cap B_2 \cap X(x)) \\ &\leq h(B_1 \cap X(x)) \wedge h(B_2 \cap X(x)) \\ &= \mu_{X^{-1}(B_1)}(x) \wedge \mu_{X^{-1}(B_2)(x)} \\ &= \mu_{X^{-1}(B_1) \cap X^{-1}(B_2)}(x). \end{aligned}$$

5 Description floue.

Soit Ω une population. On convient de désigner un individu de Ω par le symbole ω. Nous dirons que la population Ω est décrite par un caractère flou X si et seulement si X est une application floue de X dans un ensemble A appelé ensemble des observations. Les éléments A sont appelés des modalités.

5.1 Descripteur et signification.

On appelle descripteur d'un individu ω, le sous-ensemble flou $X(\omega)$. Pour une modalité $a \in A$ donnée, on appelle signification de a, le sous-ensemble

$X^{-1}(a)$. La description floue de la population Ω par le caractère X se présente sous la forme d'un tableau à deux entrées (Tableau 4).

La ligne de rang ω du Tableau 4 représente le descripteur de l'individu ω. La colonne de rang a du même tableau représente la signification de la modalité a. A la croisée de la ligne ω et de la colonne a, on a le nombre $k(\omega, a) = \mu_{X(\omega)}(a)$ qui représente le degré d'association entre l'individu ω et la modalité a. Une modalité a_j de A est dite observée (sigificative) si et seulement si

$$\bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_{X(\omega)}(a_j) \neq 0. \tag{58}$$

Cela revient à dire que la j^e colonne du tableau de description floue n'est pas remplie que de chiffres 0. Autrement dit, il existe au moins un individu de la population qui soit associé, même faiblement, à la modalité a_j.

Une modalité qui n'est pas observée est dite sans signification. Dans la pratique, une modalité qui n'est pas observée n'a que peu d'intérêt. Dans notre étude, sauf indication contraire, une modalité sera toujours supposée être observée.

Une modalité a_j de A est dite nettement observée (ou pleinement significative) si et seulement si

$$\bigvee_{\omega \in \omega} \mu_{X(\Omega)}(a_j) = 1. \tag{59}$$

Cela veut dire que la j^e colonne du tableau de description floue comporte au moins une fois le chiffre 1, i.e. qu'il existe au moins un individu de la population qui soit pleinement associé à la modalité a_j.

5.2 Correspondance possibiliste.

On considère maintenant deux variables statistiques floues X et Y, à valeurs dans les ensembles d'observations respectifs A et B. Soit (X, Y) :

$\Omega \to [0,1]^A \times [0,1]^B$ la variable conjointe définie par

$$(X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)).$$

On pose

$$(X = a) = X^{-1}(a), \quad (Y = b) = Y^{-1}(b) \quad \text{et}$$
$$(X = a,\ Y = b) = (X,Y)^{-1}(a,b)).$$

Tout comme pour les caractères nets, la signification conjointe est égale à la conjonction des significations, i.e. $(X = a, Y = b) = (X = a) \cap (Y = b)$.

Nous nous proposons de mesurer la signification conjointe $(X = a,\ Y = b)$ d'un couple de modalités observées (a,b) de $A \times B$.

Le sous-ensemble $(X = a,\ Y = b)$ joue un rôle assez particulier dans l'étude des relations entre deux caractères X et Y décrivant une population Ω donnée. Dans le cas où X et Y sont des caractères nets, le sous-ensemble $(X = a,\ Y = b)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des individus de Ω ayant à la fois les modalités a et b. Pour résumer l'information contenue dans la paire (X,Y), on construit alors un tableau de contingence $(k(a,b))_{a\in A,\ b\in B}$ où à la croisée de la ligne a et de la colonne b, on a le terme $k(a,b)$ qui est le nombre d'individus de Ω ayant à la fois les modalités a et b (Tableau 5). Ce terme mesure, par le cardinal, l'importance que l'on accorde au couple (a,b) :

$$k(a,b) = card(X = a, Y = b). \tag{60}$$

Le terme de rang b de la ligne de marge est le nombre d'individus ayant la modalité b. Il vaut $card(Y = b)$. De même, le terme de rang a de la colonne de marge est le nombre d'individus ayant la modalité a. Il vaut $card(X = a)$.

Cette mesure par le cardinal donne, à notre sens, une évaluation quantitative des données. Lorsqu'on manipule des informations vagues, on a surtout besoin d'une évaluation qualitative des données. C'est la raison pour laquelle nous utilisons une autre mesure, la mesure de possibilité, pour évaluer le sous-ensemble $(X = a,\ Y = b)$. Ce sous-ensemble est flou lorsque les applications X et Y le sont aussi. On obtient ainsi un tableau de correspondance possibiliste $(\pi(a,b))_{a\in B,\ b\in B}$ avec

$$\pi(a,b) = \Pi(X = a,\ Y = b) \tag{61}$$

où Π est une mesure de possibilité sur Ω.

5.3 Proximité entre modalités.

A partir du tableau de correspondance possibiliste, nous nous proposons de mesurer la proximité entre deux modalités a et a' de l'ensemble A des observations du caractère flou X.

Nous définissons la proximité au sens de Tchebytchev entre les modalités a et a' comme étant égale à la distance de Tchebytchev généralisée entre les sous-ensembles flous $(X = a)$ et $(X = a')$.

Cela donne

$$d(a,a') = \bigvee_{\omega\in\Omega} 1 - (\mu_{X=a}(\omega) \vee \mu_{X=a'}(\omega))|(\mu_{X=a}(\omega) \wedge \mu_{X=a'}(\omega)), \tag{62}$$

où $|$ est un opérateur de pseudo-division.

Remarque.

Il peut arriver dans la pratique qu'on obtienne directement une correspondance possibiliste entre deux ensembles A et B sans passer par une population Ω. Dans ce cas, la distance entre deux modalités a et a' de A sera donnée par

$$d(a,a') = \bigvee_{b\in B} 1 - (\mu_{Y(X=a)}(b) \vee \mu_{Y(X=a')}(b))|(\mu_{Y(X=a)}(b) \wedge \mu_{Y(X=a')}(b). \tag{63}$$

Le choix de cette distance se justifie par le fait que la ligne de rang a du tableau de correspondance possibiliste (Tableau 6) représente l'image du sous-ensemble flou $(X = a)$ par l'application Y, lorsque la population sous-jacente Ω est munie d'une mesure de possibilité uniforme Π_0 définie par

$$\Pi_0(E) = \bigvee_{\omega \in \Omega} \mu_E(\omega).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \pi(a,b) &= \Pi_0(X = a, Y = b) \\ &= \textstyle\bigvee_{\omega\in\Omega} \mu_{X=a}(\omega) \vee \mu_{Y=b}(\omega) \\ &= \textstyle\bigvee_{\omega\in\Omega} \mu_{X=a}(\omega) \vee \mu_{Y(\omega)}(b) \\ &= \mu_{Y(X=a)}(b). \end{aligned}$$

Cela veut dire que $\pi(a, b)$ représente le degré d'appartenance de la modalité b à l'image du sous-ensemble flou $(X = a)$ par l'application floue Y.

La ligne de marge $(\pi(b))_{b\in B}$ du tableau de correspondance floue représente l'image $Y(\Omega)$ de la population tout entière par l'application Y car quel que soit $b \in B$,

$$\begin{aligned} \pi(b) &= \Pi_0(Y = b) \\ &= \textstyle\bigvee_{\omega\in\Omega} \mu_{Y=b}(\omega) \\ &= \mu_{Y(\Omega)}(b). \end{aligned}$$

De même, la colonne de marge représente le sous-ensemble flou $X(\Omega)$; c'est dire

$$\pi(a) = \mu_{X(\Omega)}(a).$$

Puisque la modalité a est représentée par le sous-ensemble flou $Y(X = a)$, il est naturel de définir la distance entre deux modalités a et a' par la distance entre les sous-ensembles $Y(X = a)$ et $Y(X = a')$, soit,

$$\begin{aligned} d(a,a') &= d(Y(X = a),\ Y(X = a')) \\ &= \bigvee_{b\in B} 1 - (\mu_{Y(X=a)}(b) \vee \mu_{Y(X=a')}(b))|(\mu_{Y(X=a)}(b) \wedge \mu_{Y(X=a')}(b)). \end{aligned}$$

Remarque.

Si la structure des données l'impose, on peut remplacer la distance de Tchebytchev par la distance du cardinal de la différence symétrique définie par

$$d(a,a') = \sum_{\omega} 1 - (\mu_{X=a}(\omega) \vee \mu_{X=a'}(\omega) | \mu_{X(a)} \wedge \mu_{X=a'}(\omega)). \qquad (64)$$

On montre qu'il s'agit bien d'une distance lorsque l'opérateur de pseudo-division $|$ est associé à la t-norme de Lukasiewicz où à la t-norme probabiliste.

Si par exemple l'opérateur de pseudo-division $|$ est associé à la t-norme probabiliste, alors l'expression de la distance entre les modalités a et a' est donnée par

$$\begin{aligned} d(a,a') &= \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} 1 - \frac{\mu_{X=a}(\omega) \wedge \mu_{X=a'}(\omega)}{\mu_{X=a}(\omega) \vee \mu_{X=a'}(\omega)} \\ &= \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} \frac{|\mu_{X=a}(\omega) - \mu_{X=a'}(\omega)|}{\mu_{X=a}(\omega) \vee \mu_{X=a'}(\omega)} \end{aligned}$$

Si par exemple l'opérateur de pseudo-division $|$ est associé à la t-norme de Lukasiewicz, alors l'expression de la distance entre les modalités a et a' est donnée par

$$\begin{aligned} d(a,a') &= \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} 1 - (1 - (\mu_{X=a}(\omega) \vee \mu_{X=a'}(\omega)) + (\mu_{X=a}(\omega) \vee \mu_{X=a'}(\omega)) \\ &= \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} |\mu_{X=a}(\omega) - \mu_{X=a'}(\omega)|. \end{aligned}$$

6 Remarques et Conclusion.

Il est essentiel d'offrir plusieurs choix d'opérateurs dans la définition des concepts flous. Cela permet leur meilleure adaptation aux contraintes particulières de chaque utilisateur. La distance de Tchebytchev généralisé présente beaucoup d'avantages, mais aussi quelques inconvénients. L'avantage avec cette famille de distances est qu'elle permet une évaluation qualitative des données par l'utilisation des opérateurs flous. De plus, c'est une distance liée à la différence symétrique et compatible avec l'arithmétique dans le treillis multiplicatif $([0,1],\wedge,\vee,*)$. Mais dans la pratique, elle ne peut apporter de bons résultats que si les données sont "très floues". Dans le cas où il y a une majorité de données binaires, il est plus indiqué d'utiliser la distance du cardinal de la différence symétrique associée à la t-norme de Lukasiewicz.

7 Bibliographie

[1] J.-P. Benzécri, "Histoire et préhistoire de l'analyse des données", Cahiers de l'Analyse des Données, II, 1, 9-40 (1977).

[2] B. Bouchon-Ménier, "*La logique floue*", PUF, Paris (1993).

[3] J.-L. Boursin et G. Duru, "*Statistique*", Vuibert, Paris (1995).

[4] F. Caillez et J.-P. Pages, "*Introduction à l'analyse de données*", S-mash (1976).

[5] E. Diday et J. Lemaire, "*Eléments d'analyse des données*", Dunod, Paris (1982).

[6] D. Dubois et H. Prade, "A theorem of implication functions defined from triangular norms", Stochastica, VIII, 3, 267-279 (1984).

[7] D. Dubois et H. Prade, "*Théorie des possibilités*", Masson, Paris (1987).

[8] H. Gwêt, "Normalized conditional possibility distributions and informational connection between fuzzy variables", International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol. 5, No 2, 177-198 (1997).

[9] H. Gwêt, "Questionnaire flou et analyse différentielle, application en pédiatrie", Health and System Science, Vol. 1, No 1, 57-84 (1997).

[10] A. Kaufmann, "*Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*", 4 volumes, Masson, Paris (1973).

[11] E. Klement, "Construction of fuzzy σ-algebra using triangular norms", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 85, 543-565 (1982).

[12] G. Klir and M. Mariano, “On the uniqueness of possibilistic measure of uncertainty and information”, Fuzzy sets and Systems, 24, 197-219 (1987).

[13] P. Poitier, “Mesure de liaison entre deux variables qualitatives: relation entre un coefficient de corrélation généralisé et le Khi-deux”, Revue de Statistique Appliquée, XLII, 41-61 (1994).

[14] M.L. Puri and D.A. Ralescu, “The concept of normality for fuzzy random variables”, The Annals of Probability, 13, No 4, 1373-1379 (1985).

[15] M. Sugeno, “Fuzzy measures and fuzzy integral: a survey”, Fuzzy and Decision Processes, M.M. Gupta eds., North-Holland, New York (1977).

[16] T. Terano and M. Sugeno, “Conditional fuzzy measures and their applications”, Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Progress, US-Japan seminar, Berkeley (1975).

[17] S. Weber, “A general concept of fuzzy connectives, negation and implications based on t-norms and t-conorms”, Fuzzy Sets and Systems, 11, 115-134 (1983).

[18] L. Zadeh, “Fuzzy-sets”, Information and Control, 8, 338-353 (1965).

[19] L. Zadeh, “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning”, Information Sciences, I, 8, 199-249 and III, 9, 43-80 (1975).

Département de Mathématiques et Informatique
Ecole Nationale Supérieure Polytechnique
B.P. 8390 Université de Yaoundé I
Yaoundé (Cameroun)
Fax : (237)-23-18-41
E-mail : henri_gwet@hotmail.com