

THESE de DOCTORAT de L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité :  
**M E C A N I Q U E**

*présentée*

par Mr **Emile D A N H O**

pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

**ETUDE DE LA STABILITE DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES CISAILLES ET STRATIFIES :  
DETERMINATION DES CONDITIONS AUX DISCONTINUITES POUR LES SYSTEMES NON  
CONSERVATIFS A L'AIDE DES DISTRIBUTIONS NON LINEAIRES**

*soutenue le 27 novembre 1989*

devant le jury composé de :

Mr	D.	EUVRARD	Président du jury
Mr	M.	BOUTHIER	Directeur de thèse
Mr	P.A.	BOIS	Rapporteur
Mme	M.	LARCHEVEQUE	Rapporteur
Mr	J.S.	DARROZES	Examineur

**A MON PERE, GASTON (1928-1977)**

*Qu'il reste présent dans l'esprit de tous ceux qui l'ont connu,  
de loin ou de près !*

*Je tiens particulièrement à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Michel BOUTHIER, Chargé de recherche au CNRS, pour l'intérêt constant qu'il n'a cessé de porter à ce travail. Sa disponibilité, son dévouement, ses conseils éclairés et sa compétence scientifique m'ont permis de le mener à bien. Qu'il en soit infiniment remercié.*

*Que Monsieur Daniel EUVRARD, professeur à PARIS VI, trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance. Son humanisme et son humilité m'ont permis d'applanir les obstacles administratifs que j'ai rencontrés pendant la préparation de cette thèse.*

*J'exprime également mes remerciements à Monsieur Pierre-Antoine BOIS, Professeur à LILLE I, et Madame Michèle LARCHEVEQUE, Maître de Conférences à Paris VI, pour avoir bien voulu accepter les rôles de rapporteurs et porter un jugement pertinent sur ce travail, avec toute la compétence qui est la leur.*

*Que Monsieur J.S. DARROZES, Professeur à PARIS VI, soit remercié pour l'intérêt certain qu'il a porté à cette thèse. Sa présence dans le jury m'honore.*

*Qu'il me soit permis d'adresser mes remerciements à tous les membres du Laboratoire de Modélisation en Mécanique où j'ai effectué ce travail, à travers les Professeurs : Jean-Pierre GUIRAUD qui m'a initié à la stabilité hydrodynamique et Madame Renée GATIGNOL qui m'avait accepté dans sa filière II (mécanique des fluides) de formation en DEA.*

*Je dois enfin remercier Mademoiselle Catherine DIDEROT sans laquelle la réalisation matérielle de ce travail n'aurait pu se faire. Elle a frappé le texte avec amabilité.*

## S O M M A I R E

	<u>RESUME (Abstract)</u> .....	1
	<u>INTRODUCTION GENERALE</u> .....	2
<b>CHAP 1</b>	<b>: EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN ECOULEMENT DIPHASIQUE</b> .....	<b>8</b>
	I - <u>GENERALITES</u> .....	8
	II - <u>EQUATIONS DU MOUVEMENT</u> .....	9
	1.2.1 Equations de Conservation .....	9
	1.2.2 Hypothèse d'incompressibilité.....	10
	III - <u>EQUATIONS CONSERVATIVES POUR LES RELATIONS DE SAUT</u> .....	11
	IV - <u>THEOREME D'OSTROGRADSKII ET RELATIONS DE SAUT</u> .....	13
	1.4.1 Théorème d'Ostrogradskii.....	13
	1.4.2 Conditions de saut associées aux équations conservatives du système (1.1).....	15
	1.4.3 Etude qualitative des conditions de saut.....	16
	V - <u>APPLICATION AU CAS DU CISAILLEMENT DE DEUX COUCHES FLUIDES SUPERPOSEES EN PRESENCE DE PARTICULES DANS L'UNE DES COUCHES</u> .....	19
<b>CHAP 2</b>	<b>: RECHERCHE DE LA CONTRIBUTION DES TERMES NON CONSERVATIFS A TRAVERS UNE DISCONTINUITE : CONDITIONS DE SAUT AUX DISCON- TINUITES</b> .....	<b>22</b>
	I - <u>GENERALITES</u> .....	22
	II - <u>CONTRIBUTIONS DE TERMES NON CONSERVATIFS NE COMPORTANT PAS DE TERMES DE DERIVATION</u> .....	22
	III - <u>CONTRIBUTIONS DE TERMES NON CONSERVATIFS FAISANT INTERVENIR DES QUANTITES DE DERIVATION : THEORIE DES DISTRIBUTIONS (GENERALISEES) NON LINEAIRES</u> .....	24
	2.3.1 Conditions de saut associées à un système conservatif via la théorie linéaire classique des distributions.....	24
	2.3.2 Cas d'un système non conservatif : théorie des distri- butions (généralisées) non linéaires.....	27

	<u>IV - EQUATIONS DU MOUVEMENT VIA LE LANGAGE DES DISTRIBUTIONS GENERALISEES</u> .....	29
	2.4.1 Problème faible associé à (1.1).....	30
	2.4.2 Distribution associée à ..... lorsque $\alpha$ et $P$ sont discontinues sur $\Sigma$ .....	30
	2.4.3 Comparaison de notre résultat (2.44) avec un résultat obtenu par DREW pour le cas particulier du produit ..... où $x$ est la fonction caractéristique de ..... et $f$ une fonction discontinue à la frontière $\Sigma$ de .....	44
	<u>V - DETERMINATION DES CONDITIONS DE SAUT VIA LES DISTRIBUTIONS GENERALISEES</u> .....	45
	2.5.1 Notion de conditions de saut associées à un système d'équations locales d'évolution .....	45
	<u>VI - APPLICATION A L'ECOULEMENT DE CISAILLEMENT</u> .....	58
	2.6.1 Equations de saut à la frontière $z = F(x,y,t)$ .....	59
	2.6.2 Equations de saut à la frontière $z = E(x,y,t)$ .....	61
CHAP 3	: <u>MODELE D'EQUATIONS AVEC COUPLAGE PAR DES TERMES INTERTIELS D'INTERACTION</u> .....	64
	I - <u>GENERALITES</u> .....	64
	II - <u>INFLUENCE DES FORCES COMPLEMENTAIRES : MASSE INDUITE ET FORCE TOURBILLONNAIRE DE SUSTENTATION</u> .....	65
	3.2.1 Influence de la masse induite sur les conditions de saut aux discontinuités .....	65
	3.2.2 Importance de la force tourbillonnaire dans le mécanisme de dédoublement des deux frontières $z = F(x,y,t)$ et $z = E(x,y,t)$	68
CHAP 4	: <u>ETUDE DES PERTURBATIONS DE FAIBLES AMPLITUDES</u> .....	73
	I - <u>GENERALITES</u> .....	73
	II - <u>ECOULEMENT DE BASE STATIONNAIRE</u> .....	74
	4.2.1 Equations de mouvement .....	74
	4.2.2 Conditions de saut en $z = 0$ .....	75
	4.2.3 Solution du problème stationnaire constitué par (4.2) et (4.3) .....	75

III -	<u>ETUDE DE L'ECOULEMENT PERTURBE</u> .....	76
4.3.1	Introduction des variables de perturbation .....	76
4.3.2	Linéarisation des équations du mouvement dans les régions de continuité .....	77
4.3.3	Linéarisation des conditions de saut .....	78
a)	<i>Linéarisation des conditions de saut obtenues à partir du modèle de SAFFMAN-MARBLE</i> .....	79
b)	<i>Linéarisation des conditions de saut obtenues à partir du modèle prenant en compte les forces tourbillonnaires de sustentation</i> .....	83
IV -	<u>CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT PERTURBE DANS LES POCHEs 3 ET 4 : DES EQUATIONS LINEARISEES CONDUISANT A UN PROBLEME NON LINEAIRE</u> .....	87
4.4.1	Problème réduit et applatissement des conditions aux limites .....	87
4.4.2	Equations linéarisées conduisant à la résolution d'un problème non linéaire .....	89
V -	<u>SOLUTION DU PROBLEME LINEAIRE ET NATURE NON SINUSOIDALE DE L'INTERFACE FLUIDE - FLUIDE <math>z = F(x,y,t)</math></u> .....	91
VI -	<u>PROBLEME REDUIT</u> .....	93
4.6.1	Système d'équations pour les coefficients $\mathcal{A}(z)$ des solutions modales (4.29) .....	93
4.6.2	Elimination des variables : Problème de STURM-LIOUVILLE ...	93
CHAP 5 :	<u>APPLICATION A L'ETUDE D'UN ECOULEMENT DE TYPE KELVIN-HELMHOLTZ</u> .....	104
I -	<u>GENERALITES</u> .....	104
II -	<u>RELATION CARACTERISTIQUE AUX VALEURS PROPRES POUR LE CAS KELVIN-HELMHOLTZ DANS LE CADRE DE NOTRE THEORIE</u> .....	104
5.2.1	Problème aux limites associé .....	104
5.2.2	Etude des perturbations associées .....	105
5.2.3	Solution modale et relation caractéristique aux valeurs propres .....	107
5.2.4	Introduction des variables adimensionnelles cinématiques et géométriques dans la relation aux valeurs propres .....	107

5.2.5	Résolution approchée de l'équation caractéristique aux valeurs propres lorsque $\alpha \ll 1$ ( $\alpha$ très petit devant 1) ....	109
1)	<i>On s'intéresse aux deux solutions proches de KELVIN-HELMHOLTZ classique</i> .....	111
2)	<i>Cas du troisième mode</i> .....	114
III	<u>PROPRIETES REMARQUABLES DES TROIS MODES SOLUTIONS DE L'EQUATION AUX VALEURS PROPRES</u> .....	121
5.3.1	Invariance galiléenne des modes .....	121
5.3.2	Propriétés de symétrie .....	121
5.3.3	Propriété algébrique des valeurs propres .....	124
5.3.4	Propriété géométrique des deux modes symétriques dans les limites de nombre d'onde $k = 0$ et $ k  = \infty$ .....	127
CHAP 6	: EXPLORATION NUMERIQUE DE L'EQUATION AUX VALEURS PROPRES ET ETUDE DU COMPORTEMENT DES MODES .....	131
I	- <u>DISPERSION DES ONDES DE PERTURBATION</u> .....	131
6.1.1	Influence des paramètres $k$ , $\alpha$ , et .....	131
6.1.2	Influence des coefficients $\chi$ (coefficient de couplage de pression) et $M$ (masse induite) .....	143
II	- <u>INFLUENCE DE LA PRESENCE DES PARTICULES SUR LA STABILISATION (OU DESTABILISATION) DE L'ECOULEMENT</u> .....	144
6.2.1	Stabilité par rapport à l'approximation barycentrique .....	145
6.2.2	Stabilité par rapport au cas classique de KELVIN-HELMHOLTZ .....	145
a)	<i>Critère de stabilisation de l'écoulement : approche géométrique, discussion en fonction de la position relative des graphes par rapport à la droite dans le plan</i> .....	146
b)	<i>Traduction des critères de stabilité (6.1) à (6.3) à l'aide des paramètres et caractéristiques de l'écoulement</i> .....	149
c)	<i>Conclusion</i> .....	151
	<u>CONCLUSION GENERALE</u> .....	152
ANNEXE A	: Equations intégrales de bilan et Equations locales associées pour un milieu diphasique.....	154
ANNEXE B	: Introduction aux distributions généralisées.....	158
	<u>Liste des symboles fréquemment utilisés</u> .....	167
	<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u> .....	169

## Résumé

Deux modèles, l'un de SAFFMAN-MARBLE et l'autre de DREW-SEGEL sont proposés pour étudier la stabilité de deux fluides superposés dont l'un contient des particules, en l'absence de gravité. Le modèle de DREW-SEGEL autorise un couplage de pression entre les équations du mouvement mais alors des termes non conservatifs y apparaissent. Les conditions de saut pour les discontinuités doivent de ce fait être traitées à l'aide d'une théorie nouvelle. D'autre part, pour l'approximation linéaire de stabilité considérée, les équations deviennent non linéaires et la surface de séparation des deux fluides est alors une onde non sinusoïdale. Nous mettons aussi en évidence la présence d'un nouveau mode pour le cas particulier d'un écoulement de type KELVIN-HELMHOLTZ diphasique. L'équation aux valeurs propres dépend, outre de la fraction volumique  $\alpha$  des particules, d'un nombre d'onde "normalisé"  $K$ , des masses volumiques des deux fluides et de celle des particules, du coefficient de couplage de pression  $\chi$  ( $\chi = 0$  dans le cas du modèle de SAFFMAN-MARBLE et  $\chi = 1$  dans le cas de DREW-SEGEL) et du coefficient de masse induite  $M$ . L'influence de ces différents paramètres sur la stabilité et sur les vitesses de phase est analysée.

## Abstract

Two models, one by SAFFMAN-MARBLE and the other one by DREW-SEGEL are used to study the stability of two layered fluids flows ; there is no gravity and particles are present in one of the layers. The model by DREW-SEGEL allows for a pressure coupling between the constitutive equations but there thus occur non conservative terms. At the discontinuities, jump conditions are then to be processed with the help of a new theory. Otherwise, for the linear stability approximation, the equations become non linear. Then, the interface of the two fluids is a non sinusoidal wave. We also exhibit a new mode in the particular case of a KELVIN-HELMHOLTZ two-phase flow. The eigenvalue equation depends upon the bulk fraction  $\alpha$ , but also upon a "normalized" wave number  $K$ , the densities of both fluids and the particles, the pressure coupling coefficient  $\chi$  ( $\chi = 0$  for the SAFFMAN-MARBLE model and  $\chi = 1$  for the DREW-SEGEL one), and the virtual mass coefficient  $M$ . The influence of these different parameters on the stability and on the phase velocities is analysed.



## INTRODUCTION GENERALE

L'intérêt porté aux écoulements diphasiques et à leur stabilité existe depuis bien longtemps. Mais l'engouement véritable pour ce type d'écoulement ne date que du début des années soixante. Ceci s'explique par le fait qu'à partir de cette date, on a vraiment commencé à proposer des modèles mathématiques fiables [20]. Auparavant, on se bornait à des études empiriques, notamment au niveau des écoulements atmosphériques. Des développements importants dans ce domaine sont récemment intervenus, à partir du milieu des années soixante-dix. Cela résulte de deux circonstances favorables :

La première, c'est l'amélioration assez significative des modèles d'équations décrivant les milieux particuliers. Une formulation en terme de milieux continus est faite. Elle prend de plus en plus en compte les interactions entre les particules et le milieu porteur [7]. Ces modèles ainsi améliorés permettant alors d'aborder des travaux théoriques de stabilité dont les résultats se rapprochent beaucoup mieux des réalités physiques [3,16].

La deuxième circonstance favorable est due : d'une part, au grand développement des sciences météorologiques dont l'importance actuelle est plus qu'indéniable. D'où la nécessité de connaître la dynamique des écoulements atmosphériques et notamment ceux avec présence de masse nuageuse avec la plus grande précision possible. Et donc la formulation d'équations adéquates censées régir le mouvement des masses nuageuses.

Elle est due aussi d'autre part à l'importance sans cesse croissante des écoulements diphasiques dans le développement industriel. On peut citer entre autres l'industrie spatiale qui utilise des carburants faits de mélanges, les problèmes d'écoulements avec bulles de gaz dans les circuits de refroidissement, les lits fluidisés etc ... Des instabilités peuvent s'y développer et il convient de connaître leurs natures pour y faire face.

Très tôt, on a commencé à s'intéresser à la propagation et à la stabilité des ondes acoustiques dans les milieux particuliers. Plusieurs références à ce sujet sont rapportées par N.A. GUMEROV, A.I. IVANDAEV et R.I. NIGMATULIN [25]. Le but du travail effectué par les auteurs ci-dessus cités a été d'établir en fonction des fréquences des perturbations acoustiques émises dans le milieu particulière, les domaines de validité des différentes approximations qu'on a pu faire dans les études antérieures. Pour cela, ils évaluent les différences de températures  $T_2 - T_\sigma$ ,  $T_1 - T_\sigma$ ,  $T_\sigma - T_s$  dans un milieu particulière gaz - gouttelettes en fonction des fréquences des perturbations,  $\omega$  ( $T_1$  étant la température dans le milieu porteur,  $T_2$  celle dans les gouttelettes,  $T_\sigma$  la température à la surface des gouttelettes et  $T_s$  la température de saturation). Il s'en dégage quatre régions de fréquences à considérer :

- (I)  $0 \leq \omega \ll (\tau_\omega^{-1}, \tau_T^{-1})$
- (II)  $(\tau_\omega^{-1/2}, \tau_T^{-1/2}) \leq \omega^{1/2} \ll (\tau_{\mu_i}^{-1/2}, \tau_{\lambda_i}^{-1/2})$
- (III)  $\tau_{\lambda_i}^{-1/2} \leq \omega^{1/2} \ll (\tau_{\mu_i}^{-1/2}, \tau_{\lambda_i}^{-1/2})$
- (IV)  $\tau_{\lambda_i}^{-1} \leq \omega^{1/2} \ll \omega_c$

$\tau_\omega, \tau_T, \tau_{\mu_i}, \tau_{\lambda_i}$  étant des temps caractéristiques et  $\omega_c$  une fréquence caractéristique.

Dans la région (I), les théories qui considèrent le milieu particulaire comme étant en équilibre thermique et énergétique restent une bonne approximation. Dans la région (II), on peut utiliser avec succès l'approximation d'échanges quasi-stationnaires à travers les surfaces des gouttelettes. Dans la région (III), c'est l'approximation prenant en compte les effets non stationnaires de transferts thermiques et énergétiques à l'intérieur du gaz porteur qui doit être adopté. Enfin, dans la région (IV), on se trouve dans le cas le plus général et les effets instationnaires dans les particules doivent être aussi pris en compte.

MARBLE & WOOTEN (voir [25]) et MARBLE [13] ont étudié la dispersion et l'atténuation des ondes acoustiques de basses fréquences dans un milieu gaz - particules solides (fumée ou poussière) pour des concentrations massiques ( $m$ ) en particules faibles. Leurs études montrent qu'on a un maximum d'atténuation par longueur d'onde pour des fréquences adimensionnées  $\omega \tau \sim m$ , c'est-à-dire  $\omega \tau \ll 1$  ( $\omega$  étant la fréquence de la perturbation et  $\tau$  le temps de relaxation caractéristique de Stokes entre les vitesses du fluide porteur et des particules).

DEREVICH, EROSHENKO & ZAICHIK [24] ont analysé l'influence des particules sur les écoulements turbulents dans les canaux. Ils montrent que les particules ont une double influence sur l'écoulement. Dans un premier temps, lorsqu'on ajoute une faible quantité de particules à l'écoulement turbulent, on y constate une stabilisation. Puis, dans un deuxième temps, la présence des particules va engendrer la naissance de forces qui auront tendance à les précipiter à travers l'écoulement, générant ainsi une nouvelle source d'énergie qui va alimenter la diffusion turbulente dans le fluide porteur.

Quant à Yu.A. SERGEEV [26] et [27], il s'est intéressé à la propagation d'ondes non linéaires dans les lits fluidisés. Il a notamment étudié la formation d'onde de choc dans la répartition des particules lorsque l'écoulement est soumis à ces perturbations. Il a porté une attention particulière à l'influence de la taille des particules sur la formation d'inhomogénéités (dues aux discontinuités dans la répartition des particules). Il s'avère que pour des particules de grandes tailles, seules des discontinuités de compression pouvaient se former dans la répartition des particules pour des ondes cinématiques (les ondes cinématiques étant carac-

térisées par une valeur élevée du paramètre R défini à travers la formule (2) de [27]).

Dans le cadre de la stabilité hydrodynamique, P.G. SAFFMAN [20] a été le premier à étudier en 1962, l'influence de la taille des particules sur la stabilité d'écoulement plan de POISEUILLE. De son étude, il ressort que les particules fines et peu pesantes ont un effet déstabilisateur alors que celles de tailles grossières et plus lourdes ont un effet plutôt stabilisateur. Ses travaux ont été repris en 1986 par NAMURATON & SOLOV'EV [16] qui ont trouvé des résultats légèrement différents que nous rapportons dans les généralités du chapitre IV de ce mémoire.

En 1975, DREW [9] a analysé l'influence, sur la stabilité de l'écoulement de COUETTE plan, de la force de sustentation sur les particules. Il s'avère que l'écoulement devient instable pour un nombre de Stokes à peine plus grand que  $1,23 \cdot 10^{-4}$ . Mieux, plus le nombre de Reynolds de l'écoulement est élevé, et plus petite est la taille des particules pour laquelle l'amorce de l'instabilité est observée.

En 1979, le même auteur [10] a analysé la stabilité de la couche de Stokes particulaire. Il trouve que pour les particules de forme grossière, l'écoulement est instable pour des valeurs suffisamment grandes du temps de relaxation des particules. Mais il note qu'en faisant décroître le temps de relaxation (par augmentation de la traînée), on constate une stabilisation de l'écoulement.

Nous pouvons aussi signaler ici un article récent de G.K. BATCHELOR [3] sur le développement des instabilités dans un lit fluidisé uniforme et dont nous rapportons également les résultats dans les généralités du chapitre IV du présent mémoire.

Le propos de ce mémoire est d'étudier la stabilité des écoulements de fluides en présence de particules : l'écoulement présentant des surfaces de discontinuités (interface entre deux fluides, et les frontières libres pour les particules par exemple). Pour cela, nous avons subdivisé le travail en deux parties :

La première comporte trois chapitres. Dans le premier, nous présentons deux modèles initiaux proposés pour décrire le mouvement d'un milieu diphasique, fluide porteur et particules, en les considérant comme des milieux continus en interaction. Dans l'un, celui de SAFFMAN-MARBLE [20] et [13], il n'existe pas de couplage de pression entre les équations du mouvement du fluide porteur et celui des particules. L'autre, celui de DREW-SEGEL [7], prend en compte un tel couplage.

Pour deux fluides en cisaillement et en présence d'une frontière libre pour les particules, l'interface fluide - fluide et la frontière libre constituent des surfaces de discontinuités sur lesquelles des conditions de saut sont à écrire. Les deux modèles, avec couplage ou sans couplage de pression nous fournissent un système de cinq équations de mouvement, auxquelles doivent donc être associées un système de cinq relations de saut. Nous obtenons quatre conditions de saut parmi les cinq à trouver, qui sont identiques pour les deux modèles. L'analyse de ces quatre

relations de saut révèlent que de manière générale, le saut de pression est non nul. Ce résultat apparemment paradoxal dans un fluide incompressible résulte en fait de la présence des particules dans le milieu, le rendant implicitement compressible même faiblement. Nous arrivons alors à expliquer le mécanisme de dédoublement des deux frontières, celle des fluides et celle des particules. Lequel mécanisme résulte de la création, à un certain moment donné, d'une onde de choc à la frontière commune, résultat de l'établissement d'une différence entre la vitesse du fluide et celle des particules en certains points de la frontière commune.

Mais, si nous pouvons aisément trouver la cinquième condition de saut restant dans le modèle sans couplage de pression de SAFFMAN-MARBLE, il n'en est rien du modèle avec couplage de pression de DREW-SEGEL. La présence de ce couplage de pression introduit un terme non conservatif dans les équations, et aucune méthode antérieure (notamment par le théorème de la divergence d'OSTROGRADSKII) ne permet de trouver sa contribution. Nous avons donc élaboré une nouvelle théorie valable pour tout système non conservatif d'équations aux dérivées partielles (c'est-à-dire comportant des termes ne pouvant être écrits sous forme d'une divergence) à partir des distributions non linéaires [21, 22] pour résoudre ce problème. Cela a fait l'objet du deuxième chapitre.

Nous avons montré qu'à un système d'équations locales de la forme  $\frac{\partial}{\partial t} a + \frac{\partial}{\partial x_k} A_k = \varphi \left( \frac{\partial}{\partial t} b + \frac{\partial}{\partial x_k} B_k \right)$  est associée la relation de saut

$$\left[ \left[ A_n - W_\Sigma \alpha \right] \right] = \hat{\varphi} \left[ \left[ B_n - W_\Sigma b \right] \right]$$

où  $A_n = A \cdot \vec{n} = A_k n_k$ ,  $B_n = B \cdot \vec{n}$

avec  $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$  la normale unitaire à la discontinuité  $\Sigma$ ,  $W_\Sigma$  la vitesse d'avancement de  $\Sigma$  et  $\hat{\varphi} = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}$  où  $\varphi_+$  = valeur de  $\varphi$  du côté de  $\Sigma_+$  et  $\varphi_-$ , la valeur de  $\varphi$  du côté (-).

En revanche, si on a  $\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \varphi_+ \varphi_- \left( \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial B_k}{\partial x_k} \right)$ , on n'a pas systématiquement  $\left[ \left[ A_n - W_\Sigma \alpha \right] \right] = \varphi_+ \varphi_- \left[ \left[ B_n - W_\Sigma b \right] \right]$ . On a l'égalité précédente si l'on considère  $\varphi_+ \varphi_-$  comme une fonction unique discontinue  $\varphi$ . Mais si  $\varphi_+ \varphi_-$  est considéré comme le produit de deux fonctions discontinues  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  isolément, alors  $\left[ \left[ A_n - W_\Sigma \alpha \right] \right] \neq \varphi_1 \varphi_2 \left[ \left[ B_n - W_\Sigma b \right] \right]$ . Seule la physique du problème impose le bon choix. Dans le cas d'un milieu particulaire avec surface libre, par exemple, le produit  $\alpha \vec{G}$  (où  $\alpha$  est la fraction volumique des particules et  $\vec{G}$  leur vitesse), doit être considéré comme une fonction unique.

Ces résultats appliqués au modèle avec couplage de pression de DREW-SEGEL montrent que les deux surfaces frontières restent confondues dès qu'elles le sont initialement.

Dans le troisième, nous avons présenté un modèle qui prend en compte l'effet de masse induite et de sustentation dans les équations du mouvement. C'est celui de DREW-LAHEY [12]. Nous avons notamment comparé les résultats que nous obtenons avec ceux des deux modèles précédents. Dans ce cas, on montre que c'est la force tourbillonnaire de sustentation qui engendre le mécanisme de dédoublement des surfaces frontières.

La seconde partie du mémoire comporte aussi trois chapitres (4 à 6) : le quatrième chapitre est consacré à l'étude des perturbations de faibles amplitudes dans un écoulement de base de cisaillement de deux fluides, en présence de particules dans l'un des deux fluides initialement.

Deux systèmes de conditions de saut non linéarisées autorisent le dédoublement de la frontière libre des particules et de l'interface des deux fluides, faisant apparaître quatre types de régions dans l'écoulement (comme on le verra au §.V du chap.I) : les conditions de saut issues du modèle de SAFFMAN-MARBLE et celles issues de celui de DREW-LAHEY.

Une fois linéarisées, on constate que les relations de saut issues du modèle de DREW-LAHEY ne peuvent être admissibles pour le problème. En effet, elles n'autorisent pas, pour les petites perturbations, l'existence des quatre régions. Seules celles issues du modèle de SAFFMAN-MARBLE assurent l'existence des quatre types de régions à la fois après linéarisation, et constituent par conséquent les seules relations de saut admissibles pour le problème linéarisé.

La linéarisation des conditions de saut issues du modèle de SAFFMAN-MARBLE conduit à un système d'équations non linéaires dont la résolution confère à l'interface  $z = F(x,y,t)$  de séparation des deux fluides, un caractère d'onde non sinusoïdale. Et pour l'étude de la stabilité d'un tel écoulement, nous ramenons le problème à celui de l'étude du spectre d'un opérateur différentiel d'ordre 2 (problème de STURM-LIOUVILLE).

Dans le cinquième chapitre, nous portons une attention particulière au cas d'un écoulement de type KELVIN-HELMHOLTZ. Pour ce cas, nous obtenons une expression explicite de l'équation aux valeurs propres : les ondes de stabilité sont régies par une équation caractéristique polynomiale du 3ème degré. Elle a donc trois racines, ce qui met en évidence l'existence d'un troisième mode.

Dans le dernier chapitre, nous analysons l'influence des différents paramètres de l'écoulement (par l'intermédiaire de  $R_p$  le rapport de la densité des particules à celle du fluide 1 (porteur) et  $R_f$  le rapport de la densité du fluide 2 à celle du fluide 1) ainsi que celle du modèle de base utilisé (par l'intermédiaire du coefficient de couplage de pression  $\chi$  et celui de masse induite  $M$ ). Nous observons le caractère essentiellement dispersif des ondes dû à la présence des particules, et nous dégagons aussi des critères simples de stabilité en fonction de  $R_p$  et  $R_f$ .

Cette étude de stabilité s'est effectuée par rapport à deux écoulements de référence.

Par rapport à l'approximation barycentrique (qui considère le milieu diphasique comme un fluide homogène de masse volumique  $\rho_b = \alpha \rho_p + (1-\alpha)\rho_f$ , où  $\rho$  est la masse volumique du fluide porteur et  $\rho_p$  celle des particules) on trouve les résultats suivants pour les différents modèles utilisés : Dans le cas des modèles sans couplage de pression de SAFFMAN-MARBLE ( $\chi = 0$ ,  $M = 0$ ) on a déstabilisation de l'écoulement pour  $R_p < 1$  (les particules sont plus légères que le fluide porteur) et stabilisation de l'écoulement lorsque  $R_p > 1$ .

Dans le cas des modèles de DREW  $(\chi, M) \neq (0, 0)$ , on a toujours stabilisation de l'écoulement par les particules, qu'elles soient plus lourdes ou plus légères que le fluide porteur.

Par rapport à l'approximation fluide classique sans particules, on a les résultats suivants quels que soient les modèles utilisés :

Il y a déstabilisation de l'écoulement lorsque

$$R_p \in ]1, R_f^2[ \text{ si } 1 < R_f \text{ (ou bien } R_p \in ]R_f^2, 1[ \text{ si } R_f < 1)$$

Il y a stabilisation lorsque

$$R_f \ll 1 \ll R_p \quad \text{ou} \quad R_p \ll 1 \ll R_f$$

Et lorsque  $R_p < R_f^2 < 1$  ou  $1 < R_f^2 < R_p$ , pour certaines valeurs de la concentration  $\alpha$ , il existe des plages de nombres d'onde pour lesquels il y a stabilisation et d'autres pour lesquels il y a déstabilisation de l'écoulement.

CHAPITRE IEQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN ECOULEMENT DIPHASIQUEI. GENERALITES

Dans la littérature, plusieurs modèles d'équations sont proposés pour décrire un écoulement diphasique constitué d'une phase continue baignant des particules considérées comme la phase dispersée.

Jusqu'à l'heure actuelle, de nombreux travaux continuent encore de porter sur la recherche et la formulation de nouveaux modèles pouvant mieux rendre compte des phénomènes réels rencontrés. Vu la complexité de ce champ d'exploration, analogue à ce qui se passe en turbulence, il ne semble pas se dégager un modèle universel à portée de main et pouvant couvrir tous les domaines d'écoulements diphasiques possibles. Néanmoins, tous les modèles disponibles présentement ont une caractéristique commune. A savoir qu'ils permettent tous de retrouver les équations du mouvement du fluide classique, en l'absence de phase dispersée. C'est d'ailleurs la condition minimale qu'on puisse exiger d'un tel modèle. Par conséquent, un modèle donné ne pourra donc être privilégié par rapport à un autre que par son aptitude à mieux prévoir les phénomènes physiques réels. Sa validité ne peut donc être confortée que par la confrontation, dans la mesure du possible, avec l'expérimentation.

De plus, tous ces modèles considèrent l'écoulement diphasique comme deux milieux continus en interaction hydrodynamique et ainsi, la phase porteuse sera régie par un système d'équations dépendant de la fraction volumique de la phase dispersée dans le milieu. Et de même, la phase dispersée sera régie par ses propres équations. Les interactions hydrodynamiques intervenant alors au niveau des équations par des termes de couplage qui vont naturellement dépendre de la fraction volumique de la phase dispersée. Et justement, c'est au niveau de ces termes de couplage qu'il y a désaccord entre les différents auteurs.

Pendant la première décennie des années soixante, un modèle qui ignorait le couplage par les termes de pression dans les équations et ne prenait en compte que les couplages cinématiques comme la traînée, a été largement utilisé dans les différents travaux. On peut citer ceux de SAFFMAN [20], MURRAY [15], ANDERSON & JACKSON [1], PANTON [17], RAATS [19], BATCHELOR [2]. Par une analyse phénoménologique lorsque la concentration de la phase dispersée dans le milieu est faible, MARBLE [13] a repris avec succès ce modèle dans l'étude des gaz contenant des particules de poussière.

Mais dès la fin des années soixante et au début des années soixante dix, ce modèle a commencé à être remis en question. Des considérations thermodynamiques et des méthodes de moyennisation conduisent à l'obtention de modèles nouveaux faisant apparaître notamment un couplage systématique

des équations également par le biais des termes de pression. Et dans ce domaine, la contribution de DREW [7] & [8] reste essentielle.

Nous pouvons noter que dans la littérature récente, les modèles qui prennent en compte les couplages des équations du mouvement par les termes de pression semblent recueillir l'assentiment de tous.

Ceci étant, dans notre étude à venir nous ne privilégierons pas systématiquement l'un ou l'autre des deux types de modèles, à savoir celui sans couplage des équations par les termes de pression de SAFFMAN-MARBLE ou celui avec un tel couplage de DREW-SEGEL. Nous menerons une étude de front pour ces deux cas et si possible comparative, de manière à pouvoir dégager les insuffisances et la puissance de l'un ou l'autre des deux modèles.

## II. EQUATIONS DU MOUVEMENT

### 1.2.1 Equations de conservation

les équations à venir vont être valables aussi bien dans le cas de couplage que sans couplage par l'intermédiaire du gradient de pression. Seule la présence d'un coefficient  $\chi$  qui va valoir 1 dans le cas du couplage par la pression, et 0 dans l'autre cas, permettra de spécifier la situation dans laquelle l'on se trouve. De plus, les effets inertiels de masse induite par la différence des accélérations du fluide et des particules dans la convection, bien connus sous le nom de "non drag forces" ne seront pas pris en compte ici. Leur influence sera analysée dans la deuxième partie. Nous ne tiendrons aussi compte dans les équations, ni des forces extérieures comme la gravité, ou la force de Coriolis, ni des termes de diffusion. Enfin, nous supposons qu'il n'y a pas de transfert de masse entre la phase porteuse et la phase dispersée, ce qui implique la conservation de leur masse respective dans le milieu.

Il est à noter aussi que dans la suite, nous dirons éventuellement fluide au lieu de phase porteuse, et particules au lieu de phase dispersée.

Avant d'écrire les équations, il est aussi intéressant de spécifier les paramètres et variables que nous aurons à utiliser.

$\alpha$  représentera la fraction volumique des particules dans le milieu

$\rho$  la masse volumique du fluide

$\rho_e$  la masse volumique des particules que nous supposerons constante

$m$  le coefficient de traînée dépendant de la géométrie des particules

$P$  la pression dans le milieu

$\vec{U}$  de composante  $u, v, w$  par rapport au repère de base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

fixé représente la vitesse du fluide

$\vec{G}$  de composante  $q, r, s$  dans le même repère représente la vitesse des particules



Dans ces conditions, les équations du mouvement s'écrivent :

Conservation de la masse du fluide

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha)\rho + \operatorname{div} (1-\alpha)\rho \vec{U} = 0$$

Conservation de la masse des particules

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\alpha\rho_e) + \operatorname{div} (\alpha\rho_e \vec{G}) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement pour le fluide

$$(1.3) \quad (1-\alpha)\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right) = -(1-\alpha)\rho \nabla P + \alpha m (\vec{G} - \vec{U})$$

Conservation de la quantité de mouvement pour les particules

$$(1.4) \quad \alpha\rho_e \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{G} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right) = -\alpha\rho_e \nabla P + \alpha m (\vec{U} - \vec{G})$$

Avec

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{dans le cas du modèle de SAFFMAN-MARBLE} \\ 1 & \text{dans le cas du modèle avec couplage par le gradient de} \\ & \text{pression de DREW-SEGEL.} \end{cases}$$

D'autre part, si nous appelons  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  les trois variables d'espace, alors pour une quantité vectorielle  $\vec{A}$  de composantes  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  et une quantité tensorielle  $B$ , nous aurons en adoptant la convention de l'indice muet :

$$(1.5) \quad \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_i$$

et

$$(1.6) \quad \vec{A} \cdot \nabla B = A_i \frac{\partial}{\partial x_i} B$$

### 1.2.2 Hypothèse d'incompressibilité

Les équations (1.1) à (1.4) sont au nombre de quatre, alors que les inconnues du problème qui sont  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $P$ ,  $\vec{U}$  et  $\vec{G}$  sont au nombre de cinq. Les équations sont donc en nombre insuffisant et ne pourront nous permettre, à elles seules, de déterminer toutes les inconnues y intervenant. Il est donc impératif de leur adjoindre une équation supplémentaire. Celle-ci nous sera fournie par l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, et nous n'aurons pas à écrire la loi d'état à laquelle elle se substitue.

L'hypothèse d'incompressibilité exprime le fait que la masse volumique du fluide ait une variation totale nulle dans le temps. Ce qui

s'exprime par la relation mathématique.

$$(1.7) \quad \frac{df}{dt} = 0$$

qui peut être réécrite sous la forme :

$$(1.8) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla f = 0$$

Ainsi, le système complet d'équations à considérer pour la détermination des inconnues du problème est :

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla f = 0 \\ (b) \quad \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) f + \operatorname{div} (1-\alpha) f \vec{U} = 0 \\ (c) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G}) = 0 \\ (d) \quad (1-\alpha) f \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right) = - (1-\alpha) \nabla P + \alpha m (\vec{G} - \vec{U}) \\ (e) \quad \alpha \rho_e \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{G} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right) = - \alpha \nabla P + \alpha m (\vec{U} - \vec{G}) \end{array} \right.$$

### III. EQUATIONS CONSERVATIVES POUR LES RELATIONS DE SAUT

Les écoulements réels (écoulements atmosphériques, industriels, etc ...) font souvent apparaître des surfaces de discontinuité dans le milieu. Tel est le cas lorsque deux fluides de masses volumiques différentes sont en contact. Dans de telles situations, en plus du système d'équations (1.9) ci-dessus, il est nécessaire d'écrire les conditions de saut relatives à ces équations aux surfaces de discontinuités pour pouvoir résoudre complètement le problème aux limites qui va en découler. Il est à noter aussi que le type de discontinuité que nous considérons dans toute la suite de ce travail est une discontinuité de première espèce pour toutes les quantités ainsi que leurs dérivées successives. Ce qui implique donc des sauts finis de ces quantités à la traversée de ces discontinuités.

Dans le système (1.9), seules la deuxième et la troisième équation sont conservatives. Toutes les autres sont fortement non conservatives et ne permettent pas l'application du théorème d'OSTROGRADSKII qui offre la possibilité d'obtenir les conditions de saut associées à un système conservatif par passage d'une intégrale volumique à une intégrale de surface, comme nous le verrons.

Néanmoins, nous pouvons réduire le nombre des équations non conservatives de la façon suivante :

1) On combine (1.9,a) et (1.9,b) par soustraction ce qui donne l'équation

$$(1.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) + \operatorname{div} (1-\alpha) \vec{U} = 0$$

Dans le cas d'un fluide monophasique classique, la relation (1.10) se réduit à l'équation classique (dite de continuité) :

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0$$

ce qui n'est pas le cas ici des écoulements diphasiques, où cette relation traduit tout simplement la conservation de la fraction volumique totale  $\int_V (1-\alpha) dv$  associée à un volume pseudo-matériel  $V$  donné du fluide lorsque celui-ci est convecté à la vitesse  $\vec{U}$ .

2) D'autre part, les premiers membres des équations (d) et (e) de (1.9) peuvent être réécrits, à l'aide de la formule de dérivation de Leibnitz de produits de fonctions, respectivement :

$$(1-\alpha) \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \rho \vec{U} + \operatorname{div} (1-\alpha) \rho \vec{U} \otimes \vec{U} - \vec{U} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \rho + \operatorname{div} (1-\alpha) \rho \vec{U} \right\}$$

et

$$\alpha \rho_e \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{G} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e \vec{G}) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G}) - \vec{G} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G}) \right\}$$

En tenant compte des relations (b) et (c) de (1.9) respectivement dans les seconds membres des deux équations précédentes, elles se réduisent à :

$$(1-\alpha) \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \rho \vec{U} + \operatorname{div} (1-\alpha) \rho \vec{U} \otimes \vec{U}$$

et

$$\alpha \rho_e \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{G} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e \vec{G}) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G})$$

de sorte que les relations (d) et (e) de (1.9) seront remplacées respectivement par les relations :

$$\frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \rho \vec{U} + \operatorname{div} (1-\alpha) \rho \vec{U} \otimes \vec{U} = -(1-\alpha) \nabla P + \alpha m (\vec{G} - \vec{U})$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e \vec{G}) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G}) = -\alpha \nabla P + \alpha m (\vec{U} - \vec{G})$$

où seuls les seconds membres de ces équations ne sont pas de forme conservative.

Mais une de ces deux relations ci-dessus peut être remplacée par la nouvelle relation qu'on obtient en les sommant, et qui, elle, est conservative, à savoir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (1-\alpha) \rho \vec{U} + \alpha \rho_e \vec{G} \right\} + \operatorname{div} \left\{ (1-\alpha) \rho \vec{U} \otimes \vec{U} + \alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G} \right\} = -\nabla P$$

de sorte que le nouveau système que nous obtenons et qui se substitue à (1.9) soit :

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \frac{\partial}{\partial t} (1 - \alpha) + \operatorname{div} (1 - \alpha) \vec{U} = 0 \\ (b) \frac{\partial}{\partial t} (1 - \alpha) \rho + \operatorname{div} (1 - \alpha) \rho \vec{U} = 0 \\ (c) \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G}) = 0 \\ (d) \frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - \alpha) \rho \vec{U} + \alpha \rho_e \vec{G} \} + \operatorname{div} \{ (1 - \alpha) \rho \vec{U} \otimes \vec{U} + \alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G} \} = -\nabla P \\ (e) \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e \vec{G}) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G}) = -\alpha \nabla P + \alpha m (\vec{U} - \vec{G}) \end{array} \right.$$

où

$$(1.12) \quad \text{et} \quad \operatorname{div} (1 - \alpha) \rho \vec{U} \otimes \vec{U} = \frac{\partial}{\partial x} (1 - \alpha) \rho u \vec{U} + \frac{\partial}{\partial y} (1 - \alpha) \rho v \vec{U} + \frac{\partial}{\partial z} (1 - \alpha) \rho w \vec{U}$$

$$\operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G}) = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho_e q \vec{G}) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha \rho_e r \vec{G}) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha \rho_e s \vec{G})$$

u, v, w étant les composantes de  $\vec{U}$ ,  
q, r, s étant celles de  $\vec{G}$ .

Le système (1.11) est justement celui que nous obtenons directement en partant des équations intégrales globales (voir Annexe A).

Dans le système (1.11), seule l'équation (e) contient encore des termes non conservatifs  $\alpha \nabla P$  et  $\alpha (\vec{U} - \vec{G})$ . Les autres sont conservatives et les équations de saut qui leur sont associées peuvent être déduites du théorème d'OSTROGRADSKII.

#### IV. THEOREME D'OSTROGRADSKII ET RELATIONS DE SAUT

##### 1.4.1 Théorème d'Ostrogradskii

Considérons un champ tensoriel B défini sur un domaine de  $R \times R^n$  de variable le n+1-uplet  $(t, x_1, \dots, x_n)$ .

Si B est conservatif sur  $R \times R^n$ , alors nous avons

$$\frac{\partial B_0}{\partial t} + \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial B_n}{\partial x_n} = 0$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$(1.13) \quad \operatorname{div}_{(t, x_n)} B = 0$$

avec

$$B_i = B \cdot \vec{e}_i \quad ; \quad i = 0, \dots, n$$

Soit maintenant  $\mathcal{V}$ , un volume du domaine considéré. Nous avons

$$(1.14) \quad \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}_{(t, x_n)} B \, dv = 0$$

et par application du théorème d'Ostrogradskii à (1.13), nous obtenons :

$$(1.15) \int_{\partial V} B \cdot \vec{\nu} \, ds = 0$$

théorème valide même si B est "légèrement" discontinu, par exemple borné et  $c^1$  par morceaux, où  $\partial V$  représente le bord du volume  $V$  et  $\vec{\nu}$  la normale unitaire de l'espace  $R \times R^n$  à  $\partial V$  sortant.

Supposons maintenant que B soit  $c^1$  par morceaux dans le domaine et considérons alors un volume élémentaire  $V$  entourant une partie  $\Sigma_V$  de la surface de discontinuité de première espèce de B. Nous avons

$$V = V_1 \cup V_2$$

avec  $V_1 \cap V_2 = \Sigma_V$

Appliquons le théorème d'Ostrogradskii à chaque volume  $V_i$ ,  $i=1,2$ , c'est-à-dire

$$(1.16) \int_{\partial V_i} B_i \cdot \vec{\nu}_i \, ds = 0$$

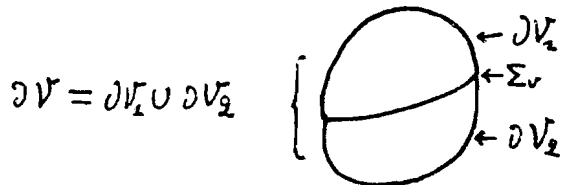
$B_i$  et  $\vec{\nu}_i$  étant respectivement les expressions de B et  $\vec{\nu}$  dans la partie  $V_i$  de  $V$ .

Nous avons alors

$$(1.17) \int_{\partial V_1} B_1 \cdot \vec{\nu}_1 \, ds + \int_{\partial V_2} B_2 \cdot \vec{\nu}_2 \, ds - \int_{\partial V} B \cdot \vec{\nu} \, ds = 0$$

Or,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial V_1} B_1 \cdot \vec{\nu}_1 \, ds + \int_{\partial V_2} B_2 \cdot \vec{\nu}_2 \, ds - \int_{\partial V} B \cdot \vec{\nu} \, ds \\ &= \int_{\partial V \cap \partial V_1} B_1 \cdot \vec{\nu}_1 \, ds + \int_{\Sigma_V} B_1 \cdot \vec{\nu}_1 \, ds + \int_{\partial V \cap \partial V_2} B_2 \cdot \vec{\nu}_2 \, ds + \int_{\Sigma_V} B_2 \cdot \vec{\nu}_2 \, ds - \int_{\partial V} B \cdot \vec{\nu} \, ds \\ &= \int_{\partial V} B \cdot \vec{\nu} \, ds + \int_{\Sigma_V} (B_1 \cdot \vec{\nu}_1 + B_2 \cdot \vec{\nu}_2) \, ds - \int_{\partial V} B \cdot \vec{\nu} \, ds \\ &= \int_{\Sigma_V} (B_1 \cdot \vec{\nu}_1 + B_2 \cdot \vec{\nu}_2) \, ds \end{aligned}$$



Mais, en  $\Sigma_V$

$$\vec{\nu}_2 = -\vec{\nu}_1$$

de sorte que

$$\int_{\Sigma_v} (B_1 \cdot \vec{\mu}_1 + B_2 \cdot \vec{\mu}_2) ds = \int_{\Sigma_v} (B_1 - B_2) \cdot \vec{\mu}_1 ds$$

(1.16) devient donc

$$(1.18) \int_{\Sigma_v} (B_1 - B_2) \cdot \vec{\mu}_1 ds = 0$$

et comme  $\Sigma_v$  est quelconque et les  $B_i$  et  $\vec{\mu}_i$  sont continues sur  $\Sigma_v$ , nous en déduisons

$$(B_1 - B_2) \cdot \vec{\mu}_1 = 0$$

et nous obtenons donc la relation de saut

$$(1.19) \quad \llbracket B \cdot \vec{\nu} \rrbracket = 0$$

avec

$$(1.20) \quad \vec{\nu} = (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (-W_{\Sigma}, \vec{n})$$

où  $W_{\Sigma}$  représente la vitesse d'avancement de la discontinuité,  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la composante de  $\vec{\nu}$  suivant l'espace  $R^n$ .

#### 1.4.2 Conditions de saut associées aux équations conservatives du système (1.11)

En appliquant le résultat précédent de saut dû au théorème d'Ostrogradskii aux quatre premières équations de (1.11) qui sont conservatives, nous obtenons :

La relation de saut associée à (a) de (1.11) :

$$(1.21) \quad \llbracket (1 - \alpha)(U_n - W_{\Sigma}) \rrbracket = 0$$

La relation de saut associée à (b) de (1.11)

$$(1.22) \quad \llbracket (\alpha - \alpha') \rho (U_n - W_{\Sigma}) \rrbracket = 0$$

La relation de saut associée à (c) de (1.11)

$$(1.23) \quad \llbracket \alpha \rho_e (G_n - W_{\Sigma}) \rrbracket = 0$$

La relation de saut associée à (d) de (1.11)

$$(1.24) \quad \llbracket (\alpha - \alpha') \rho (U_n - W_{\Sigma}) \vec{U} + \alpha \rho_e (G_n - W_{\Sigma}) \vec{G} + P \vec{n} \rrbracket = 0$$

Avec, pour une quantité vectorielle  $\vec{A}$ ,

$$(1.25) \quad A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire à la discontinuité suivant les variables d'espace et dirigé dans son sens d'avancement.

Il nous reste maintenant à écrire la condition de saut relative à l'équation (e) du système (1.11) pour constituer le système complet d'équations de saut pour le problème. Mais cette équation est non conservative et du fait de la présence des discontinuités, elle fait intervenir des produits non définis au sens classique comme  $\alpha P$  qui seraient en fait des produits de distributions. Si  $\alpha$  ou  $P$  était continu à la traversée de la surface, on pourrait traiter ce problème via la théorie linéaire classique des distributions. Mais ce n'est pas le cas ici, et il convient de donner un sens à un tel produit pour pouvoir surmonter la difficulté. Il va donc falloir opérer une théorie non linéaire des distributions. Ce sera le propos du prochain chapitre. Néanmoins, nous pouvons déjà obtenir quelques résultats qualitatifs avec les conditions de saut précédentes.

#### 1.4.3 Etude qualitative des conditions de saut

Nous allons voir comment, à partir du système non complet de conditions de saut (1.21) à (1.24), nous pouvons obtenir des informations et des résultats substantiels sur le comportement des surfaces de discontinuité frontières, ne serait-ce que du point de vue qualitatif.

Pour cela, il est intéressant de signaler deux propriétés remarquables de l'opération  $[[ \ ]]$  qui exprime le saut aux discontinuités d'une quantité.

##### Première propriété

L'opération  $[[ \ ]]$  est une opération additive sur son ensemble d'application. C'est-à-dire, pour deux quantités  $a$  et  $b$  qui peuvent être reliées par une loi additive notée  $+$  ou tout simplement qu'on peut sommer et qui admettent des sauts finis aux discontinuités, on a que  $a + b$  admet aussi un saut fini aux discontinuités et

$$(1.26) \quad [[a+b]] = [[a]] + [[b]]$$

Cette propriété découle immédiatement de l'additivité du procédé de calcul de limite conduisant au saut.

##### Deuxième propriété

Nous considérons de nouveau deux quantités  $a$  et  $b$  définies des deux côtés

de la discontinuité et admettant des sauts finis. Supposons à présent que  $a$  et  $b$  puissent être reliées par l'opération de multiplication en dehors de la discontinuité, c'est-à-dire que le produit  $a \times b$  ait un sens.

Alors le produit  $ab$  de  $a$  par  $b$  admet un saut aux discontinuités et on a :

$$(1.27) \quad \llbracket ab \rrbracket = a_+ \llbracket b \rrbracket + b_- \llbracket a \rrbracket$$

Nous allons maintenant appliquer les propriétés précédentes de l'opération de saut  $\llbracket \rrbracket$  aux équations (1.21) à (1.24).

Nous avons les résultats suivants :

(1.21) devient équivalent à

$$(1.28) \quad (1-\alpha)_+ \llbracket U_n \rrbracket = (U_n - W_\Sigma)_- \llbracket \alpha \rrbracket$$

à partir de laquelle on peut exprimer  $\llbracket U_n \rrbracket$  en fonction de  $\llbracket \alpha \rrbracket$ , puisque  $(1-\alpha)_+$  ne peut s'annuler, du fait que  $\alpha$  n'atteint jamais la valeur 1. Il vient donc que

$$(1.29) \quad \llbracket U_n \rrbracket = \frac{(U_n - W_\Sigma)_-}{(1-\alpha)_+} \llbracket \alpha \rrbracket$$

Toujours par application de la relation (1.27), (1.22) devient :

$$\left\{ (1-\alpha)(U_n - W_\Sigma) \right\}_+ \llbracket f \rrbracket + f_- \llbracket (1-\alpha)(U_n - W_\Sigma) \rrbracket = 0$$

Mais compte-tenu de (1.21), le second terme du premier membre de l'équation précédente est nul. Et comme  $\alpha$  n'atteint jamais 1, il ne restera plus que

$$(1.30) \quad (U_n - W_\Sigma)_+ \llbracket f \rrbracket = 0$$

Quant à l'équation (1.23), elle devient équivalente à

$$(1.31) \quad \alpha_+ \llbracket G_n \rrbracket = -(G_n - W_\Sigma)_- \llbracket \alpha \rrbracket$$

Et lorsqu'on se trouve à une frontière de discontinuité séparant deux régions dont une ne contient pas de particules et donc dans laquelle  $\alpha$  vaut identiquement zéro, alors dans une telle région sans particules,  $\vec{G}$  et par suite  $G_n$  ne sont pas définies. Et par voie de conséquence, leurs valeurs limites lorsqu'on s'approche de la discontinuité en étant dans cette région restent non définies et on ne peut donc exprimer  $\llbracket \vec{G} \rrbracket$  ou  $\llbracket G_n \rrbracket$  qui restent indéterminés. Cependant, cela ne nous pose pas de problème quant à la validité de notre équation (1.31). En effet, à la frontière "libre" associée aux particules, on écrit

$$(1.32) \quad G_n - W_\Sigma = 0$$



qui est la définition de  $w_{\Sigma}$

Une fois cette équation posée, on constate qu'elle peut être écrite sous la forme (1.31) avec  $\alpha_* = 0$ . En dehors des frontières "libres" associées aux particules, (1.31) peut s'écrire

$$(1.33) \quad \llbracket G_n \rrbracket = - \frac{(G_n - W_{\Sigma})_-}{\alpha_*} \llbracket \alpha \rrbracket$$

et  $\llbracket G_n \rrbracket$  s'exprime en fonction de  $\llbracket \alpha \rrbracket$ .

Enfin, en appliquant les relations (1.26) et (1.27) à la relation (1.24) et en tenant compte des équations (1.22) et (1.23), l'équation (1.24) devient :

$$(1.34) \quad \left\{ (1 - \alpha) f(U_n - W_{\Sigma}) \right\}_+ \llbracket \vec{U} \rrbracket + \left\{ \alpha f_e(G_n - W_{\Sigma}) \right\}_+ \llbracket \vec{G} \rrbracket + \llbracket P \rrbracket \vec{n} = 0$$

dans laquelle le terme  $\left\{ \alpha f_e(G_n - W_{\Sigma}) \right\}_+ \llbracket \vec{G} \rrbracket$  s'annule lorsqu'on se trouve à une discontinuité frontière des particules.

En projection sur la normale  $\vec{n}$ , la relation (1.34) nous donne :

$$(1.35) \quad \left\{ (1 - \alpha) f(U_n - W_{\Sigma}) \right\}_+ \llbracket U_n \rrbracket + \left\{ \alpha f_e(G_n - W_{\Sigma}) \right\}_+ \llbracket G_n \rrbracket + \llbracket P \rrbracket = 0$$

Et en y portant les expressions de  $\llbracket U_n \rrbracket$  et  $\llbracket G_n \rrbracket$  qui nous sont données respectivement par (1.29) et (1.31), nous obtenons une expression nous donnant  $\llbracket P \rrbracket$  en fonction de  $\llbracket \alpha \rrbracket$ , à savoir

$$(1.36) \quad \llbracket P \rrbracket = k_{\Sigma} \llbracket \alpha \rrbracket$$

avec

$$(1.37) \quad k_{\Sigma} = f_e(G_n - W_{\Sigma})_+ (G_n - W_{\Sigma})_- - f(U_n - W_{\Sigma})_+ (U_n - W_{\Sigma})_-$$

En toute généralité, nous ne pouvons pas supposer que  $k_{\Sigma}$  est identiquement nul en tout lieu, sinon nous aurions une surdétermination sur les inconnues autres que P. Nous sommes donc conduits à la conclusion non classique suivante pour un fluide incompressible : A un saut de  $\alpha$  non nul ( $\llbracket \alpha \rrbracket \neq 0$ ) va être en général associé un saut de pression,  $\llbracket P \rrbracket$  non nul aussi.

A première vue, cette conclusion peut paraître paradoxale. Il n'en est rien, puisque le milieu global contient des particules. La présence de celles-ci introduit de ce fait une certaine compressibilité dans le fluide de manière implicite. La preuve en est que  $\text{div } \vec{u} \neq 0$ . Ce qui montre bien qu'on n'est plus dans un cas classique d'écoulement et que les résultats qu'on obtient peuvent être différents de ce que l'on sait jusque-là.

En résumé, nous avons les relations de saut suivantes :

$$(1.38) \quad \begin{cases} (a) \quad \llbracket (1-\alpha)(U_n - W_z) \rrbracket = 0 \\ (b) \quad \llbracket \alpha(G_n - W_z) \rrbracket = 0 \\ (c) \quad (U_n - W_z)_+ \llbracket \rho \rrbracket = 0 \\ (d) \quad \llbracket P \rrbracket = K_z \llbracket \alpha \rrbracket \end{cases}$$

où  $K_z$  est donné par (1.37).

V. APPLICATION AU CAS DU CISAILLEMENT DE DEUX COUCHES FLUIDES SUPERPOSEES AVEC PRESENCE DE PARTICULES DANS L'UNE DES COUCHES FLUIDES

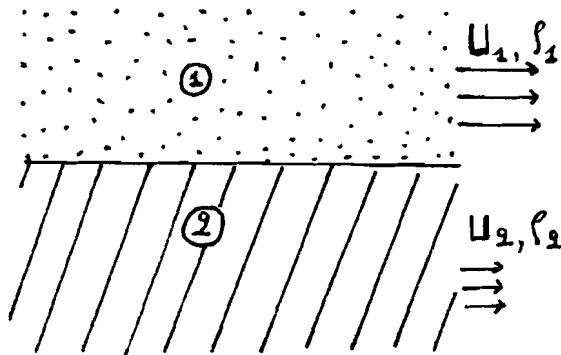


Figure 1 : Ecoulement initial

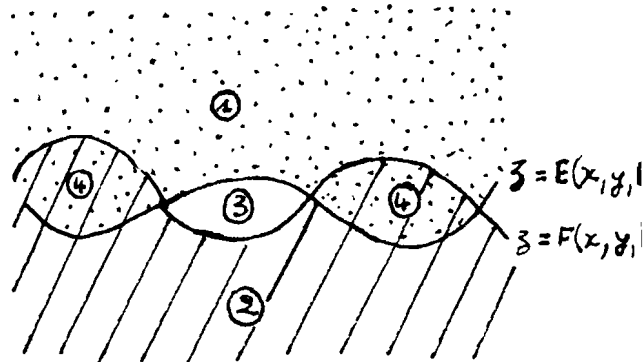


Figure 2 : Ecoulement perturbé

On considère initialement un écoulement constitué de deux couches fluides de masses volumiques respectives  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , séparées par une surface frontière supposée être en  $z = 0$ . Le fluide 1 de masse volumique  $\rho_1$  relatif à la région notée 1 entraîne des particules dont la frontière coïncide avec la surface de séparation des fluides, à la vitesse  $\vec{U}_1$ . Le fluide 2 de la région 2 a une masse volumique  $\rho_2$  et une vitesse  $\vec{U}_2$  (figure 1 ci-dessus).

Lorsqu'on perturbe cet écoulement, on aura en toute généralité un dédoublement des deux frontières, celle d'équation  $z = F(x, y, t)$  pour les deux fluides de masse volumique  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et celle d'équation  $z = E(x, y, t)$  pour les particules, faisant ainsi apparaître quatre types de régions dans l'écoulement (figure 2 ci-dessus). En plus des régions 1 et 2 initialement présentes, la région 3 est une poche de fluide 1 qui s'est vidée de particules, alors que la région de type 4 est une poche de fluide 2 qui a piégé des particules.

Dès lors, les frontières  $z = F(x, y, t)$  et  $z = E(x, y, t)$  sont des surfaces de discontinuité sur lesquelles il va falloir écrire les relations de saut (1.38).

La frontière  $z = E(x,y,t)$  délimite l'espace d'écoulement en une région où  $\alpha$ , la fraction volumique des particules est identiquement nulle, parce qu'il n'y a pas de particules, et une autre où  $\alpha$  ne l'est pas. Il vient alors que l'équation (b) de (1.38) se réduit à (1.32) comme nous l'avons vu, c'est-à-dire

$$(1.39) \quad G_n = W_E$$

du côté de la frontière  $z = E(x,y,t)$  où  $\alpha$  est non identiquement nulle. Par conséquent, cette frontière est surface matérielle pour les particules, et le coefficient  $k_E$  donné par (1.37) se réduit à :

$$(1.40) \quad k_E = - \int (U_n - W_E)_+ (U_n - W_E)_-$$

Et par suite, dans la relation (d) de (1.38),  $[[P]]$  ne peut être, à tout instant et en tout point de la frontière libre  $z = E(x,y,t)$ , identiquement nul sauf si, à tout instant, et en chaque point de cette frontière :

$$\text{Ou bien } [[\alpha]] = 0$$

$$\text{Ou bien } (U_n - W_E)_+ = 0$$

$$\text{Ou bien } (U_n - W_E)_- = 0$$

La première éventualité est incompatible avec la définition de la frontière libre, à savoir qu'à tout instant, et en tout point de cette frontière, on a  $\alpha \neq 0$  d'un côté où on définit  $G_n = W_E$ , et  $\alpha = 0$  de l'autre. Par conséquent, à tout instant,  $[[\alpha]] \neq 0$  sur la frontière libre.

Il ne nous reste donc plus qu'à analyser les conditions  $(U_n - W_E)_+ = 0$  ou  $(U_n - W_E)_- = 0$  en tout point de la frontière libre à chaque instant : Or, l'une ou l'autre des deux égalités ne peut avoir lieu sans qu'on ait l'autre simultanément, d'après la relation (1.38,a). La frontière  $z = E(x,y,t)$  serait ainsi surface matérielle aussi pour les fluides, puisqu'initialement ces deux frontières étaient confondues.

Nous venons donc de montrer qu'au cours du mouvement du milieu : ou bien, à un certain moment donné de l'évolution, nous avons  $[[P]] \neq 0$  en certains points de la frontière particulaire, ou bien la surface de séparation des deux fluides et la frontière du domaine particulaire reste une seule et même frontière au cours du temps.

Dans le système (1.38), si nous remplaçons la relation (a) par la relation (1.28) qui lui est équivalente, et (b) par (1.39), nous obtenons :

$$(1.41) \quad \begin{cases} (a) & (1-\alpha)_+ [[U_n]] = (U_n - W_E)_- [[\alpha]] \\ (b) & G_n^* = W_E \\ (c) & (U_n - W_E)_+ [[f]] = 0 \\ (d) & [[P]] = k_E [[\alpha]] \end{cases}$$

$[\alpha]$  étant toujours non nul en  $z = E(x,y,t)$  comme nous l'avons remarqué précédemment, la relation (a) ci-dessus montre que si  $U_n$  est différente de  $W_E$  en un certain point de la frontière  $z = E(x,y,t)$ , alors  $[U_n]$  y est non nul aussi, ainsi que  $[P]$ . On a donc une onde de choc en des points de la frontière  $z = E(x,y,t)$  où  $U_n \neq W_E$ . Nous trouvons là une explication du mécanisme de dédoublement des deux frontières : lorsque les deux frontières sont confondues, on a en tout point, à la fois  $U_{n+} = W_E$  (et donc  $U_{n-} = W_E$  d'après (1.38-a)) et  $G_n = W_E$ . Dès qu'en un certain point de la frontière commune s'établit une différence entre la vitesse normale du fluide et celle des particules qui vaut  $W_E$  par définition, alors une onde de choc se crée, et on aboutit à une dissociation des frontières.

## CHAPITRE II

RECHERCHE DE LA CONTRIBUTION DES TERMES NON CONSERVATIFS  
A TRAVERS UNE DISCONTINUITÉ  
CONDITIONS DE SAUT AUX DISCONTINUITÉS

I. GENERALITES

Nous nous trouvons en face de l'un des problèmes séculaires auquel ont été confrontés de nombreux mécaniciens à travers tant de générations. Je veux parler des interactions non linéaires. C'est ainsi que, depuis le temps où on a cherché à comprendre le mouvement apparemment simple du si fameux pendule (de Huygens) jusqu'aux théories actuelles des fractals et du chaos, en passant par les bifurcations, les flambements et la turbulence, la science mécanique a toujours été confrontée à des problèmes où interviennent des phénomènes non linéaires. S'il y a des non-linéarités que nous savons bien traiter, résoudre et comprendre actuellement, malheureusement beaucoup d'entre elles restent encore, et resteront sûrement longtemps, hors de notre portée.

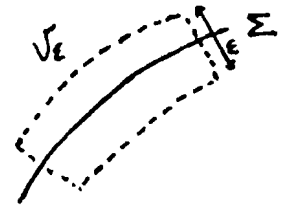
Ceci étant, nous allons essayer d'apporter notre contribution à la compréhension des distributions non linéaires souvent présentes dans les systèmes d'équations d'évolution non conservatives, c'est-à-dire comportant des termes non linéaires ne pouvant être écrits sous la forme de divergence d'une certaine quantité, sur des domaines comportant des discontinuités de première espèce pour les variables et fonctions inconnues des équations. Et dans ce cas, les conditions de saut à écrire aux discontinuités restaient un problème non résolu jusqu'alors.

L'objet du présent chapitre va donc être la recherche de ces conditions de saut via une théorie nouvelle non linéaire de distributions généralisées dont les prémisses ont été posés récemment par J.F. COLOMBEAU [21] [22].

II. CONTRIBUTIONS DE TERMES NON CONSERVATIFS NE COMPORTANT PAS DE TERME DE DERIVATION

Dans l'équation (e) du système (1.11) où apparaissent les termes non conservatifs  $\alpha(\vec{U} - \vec{G})$  et  $\alpha \nabla P$ , seul le terme  $\alpha \nabla P$  est le plus ennuyeux et pose un problème nouveau. Quant au terme  $\alpha(\vec{U} - \vec{G})$ , il ne comporte pas de terme de dérivation et comme nous allons le voir, nous n'aurons pas besoin de faire une théorie nouvelle pour trouver sa contribution à travers une discontinuité. Il est relativement facile de montrer que la contribution de  $\alpha(\vec{U} - \vec{G})$  à travers une surface de discontinuité  $\Sigma$  est nulle.

Pour ce faire considérons un volume élémentaire  $V_\epsilon$  du milieu contenant une portion  $\Sigma_v$  de la discontinuité  $\Sigma$  (figure ci-contre) et évaluons



$$\int_{V_\epsilon} \alpha(\vec{U} - \vec{G}) \, dv \quad \text{lorsque } \epsilon \text{ tend vers zéro.}$$

Nous considérons une partition de  $V_\epsilon$  en  $V_{1\epsilon}$  et  $V_{2\epsilon}$  suivant  $\Sigma_v$  telle que

$$\int_{V_\epsilon} \alpha(\vec{U} - \vec{G}) \, dv = \int_{V_{1\epsilon}} \alpha(\vec{U} - \vec{G}) \, dv + \int_{V_{2\epsilon}} \alpha(\vec{U} - \vec{G}) \, dv$$

Et en prenant les modules, il vient que

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_\epsilon} \alpha(\vec{U} - \vec{G}) \, dv \right| &\leq \int_{V_{1\epsilon}} |\alpha(\vec{U} - \vec{G})| \, dv + \int_{V_{2\epsilon}} |\alpha(\vec{U} - \vec{G})| \, dv \\ &\leq \sup_{V_{1\epsilon}} |\alpha(\vec{U} - \vec{G})| \cdot \text{mes } V_{1\epsilon} + \sup_{V_{2\epsilon}} |\alpha(\vec{U} - \vec{G})| \cdot \text{mes } V_{2\epsilon} \end{aligned}$$

où  $\sup_{V_{1\epsilon}} |\alpha(\vec{U} - \vec{G})|$  et  $\sup_{V_{2\epsilon}} |\alpha(\vec{U} - \vec{G})|$  existent, puisque  $\alpha(\vec{U} - \vec{G})$  est continue respectivement sur  $V_{1\epsilon}$  et  $V_{2\epsilon}$ , et  $\text{mes } \mathcal{A}$  représente la mesure de  $\mathcal{A}$  prise au sens de Lebesgue.

De plus, nous pouvons supposer  $V_{1\epsilon}$  et  $V_{2\epsilon}$  compacts pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$  ( $\epsilon_0$  "assez petit" fixé). Il existe alors  $M > 0$ , indépendant de  $\epsilon$  et vérifiant

$$\forall \epsilon < \epsilon_0, \max \left\{ \sup_{V_{1\epsilon}} |\alpha(\vec{U} - \vec{G})|, \sup_{V_{2\epsilon}} |\alpha(\vec{U} - \vec{G})| \right\} < M$$

Nous avons donc pour de tels  $\epsilon < \epsilon_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_\epsilon} \alpha(\vec{U} - \vec{G}) \, dv \right| &\leq M (\text{mes } V_{1\epsilon} + \text{mes } V_{2\epsilon}) \\ &\leq M \text{mes } V_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \text{mes } \Sigma_v = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre bien que la contribution de  $\alpha(\vec{U} - \vec{G})$  à travers la surface de discontinuité  $\Sigma$  est bien nulle

III. CONTRIBUTION DE TERMES NON CONSERVATIFS FAISANT INTERVENIR DES QUANTITES DE DERIVATION : THEORIE DES DISTRIBUTIONS (GENERALISEES) NON LINFAIRES

2.3.1 Conditions de saut associées à un système conservatif via la théorie linéaire classique des distributions.

Nous avons vu précédemment que lorsqu'un système était conservatif, les conditions de saut qui lui étaient associées s'obtenaient à partir du théorème d'Ostrogradskii aussi appelé théorème de la divergence.

Mais ces conditions de saut peuvent également s'obtenir de manière naturelle à partir de la théorie linéaire des distributions classiques.

A cet effet, considérons l'ensemble

$$(2.2) \quad A = \left\{ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ avec } \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, dx = 1 \right\}$$

où  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ( $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  étant l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}^n$ ) et à support compact.

Notons  $\text{supp}(f)$  le support d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ .

Soit maintenant  $\phi \in A$  avec  $\text{supp}(\phi) \subset B$  où  $B$  est une boule de  $\mathbb{R}^n$  entourant une partie de la surface de discontinuité de la quantité tensorielle  $\mathcal{A}$  que nous notons toujours  $\Sigma$ , de sorte que  $B = B_1 \cup B_2$  avec  $B_1 \cap B_2 = \Sigma$ .

Nous avons au sens des distributions classiques

$$\begin{aligned} (2.3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \text{div } \mathcal{A} \cdot \phi \, dv &= \int_B \text{div } \mathcal{A} \cdot \phi \, dv \\ &= \int_{B_1} \text{div } \mathcal{A}_1 \cdot \phi \, dv + \int_{B_2} \text{div } \mathcal{A}_2 \cdot \phi \, dv \\ &= \int_{B_1} \text{div}(\mathcal{A}_1 \cdot \phi) \, dv - \int_{B_1} \mathcal{A}_1 \cdot \nabla \phi \, dv + \int_{B_2} \text{div}(\mathcal{A}_2 \cdot \phi) \, dv - \int_{B_2} \mathcal{A}_2 \cdot \nabla \phi \, dv \\ &= \int_{B_1} \text{div}(\mathcal{A}_1 \cdot \phi) \, dv + \int_{B_2} \text{div}(\mathcal{A}_2 \cdot \phi) \, dv - \int_{B_1} \mathcal{A}_1 \cdot \nabla \phi \, dv - \int_{B_2} \mathcal{A}_2 \cdot \nabla \phi \, dv \\ &= \left( \int_{\partial B_1} (\phi \mathcal{A}_1) \cdot \vec{n}_1 \, ds + \int_{\partial B_2} (\phi \mathcal{A}_2) \cdot \vec{n}_2 \, ds \right) - \int_B \mathcal{A} \cdot \nabla \phi \, dv \end{aligned}$$

avec

l'opération  $\bullet$  représentant le produit contracté de deux tenseurs,

$\nabla$  l'opérateur gradient,

$\vec{n}_i$  la normale sortant de  $B_i$ ,  $i=1,2$

$\mathcal{A}_i$  la valeur de  $\mathcal{A}$  lorsqu'on est dans  $\mathcal{B}_i$   $i=1,2$

$\partial\mathcal{B}_i$  représente le bord de  $\mathcal{B}_i$ ,  $i=1,2$

Mais

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \vec{n} \text{ sur } \partial\mathcal{B}_1 \cap \partial\mathcal{B}_2 = \Sigma$$

et

$$\begin{aligned} (2.4) \quad \int_{\partial\mathcal{B}_1} (\Phi \mathcal{A}_1) \cdot \vec{n}_1 \, ds + \int_{\partial\mathcal{B}_2} (\Phi \mathcal{A}_2) \cdot \vec{n}_2 \, ds &= \int_{\partial\mathcal{B}_1 \cap \partial\mathcal{B}} (\Phi \mathcal{A}) \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\partial\mathcal{B}_2 \cap \partial\mathcal{B}} (\Phi \mathcal{A}) \cdot \vec{n} \, ds \\ &\quad - \int_{\Sigma \cap \partial\mathcal{B}_2} (\Phi \mathcal{A}_2) \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\Sigma \cap \partial\mathcal{B}_1} (\Phi \mathcal{A}_1) \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \int_{\partial\mathcal{B}} (\Phi \mathcal{A}) \cdot \vec{n} \, ds - \int_{\Sigma} \Phi (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

Comme  $\text{Supp}(\Phi) \subset \mathcal{B}$ , nous avons

$$\int_{\partial\mathcal{B}} (\Phi \mathcal{A}) \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

de sorte que (2.4) se réduit à  $-\int_{\Sigma} \Phi (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot \vec{n} \, ds$

Il vient donc que (2.3) s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \text{div } \mathcal{A} : \Phi = - \int_{\mathcal{B}} \mathcal{A} \cdot \nabla \Phi \, dv - \int_{\Sigma} \Phi (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot \vec{n} \, ds$$

Ce qui s'écrit sous la forme d'égalité au sens des distributions.

$$(2.5) \quad \text{div } \mathcal{A} = (\text{div } \mathcal{A}) + \llbracket \mathcal{A} \cdot \vec{n} \rrbracket \delta_{\Sigma}$$

où  $(\text{div } \mathcal{A})$  représente la fonction tensorielle discontinue définie en dehors de la discontinuité  $\Sigma$  alors que  $\text{div } \mathcal{A}$  représente la divergence de la distribution  $\mathcal{A}$  et est définie par :

$$(2.6) \quad \langle \text{div } \mathcal{A}, \Phi \rangle = - \int_{\mathcal{B}} \mathcal{A} \cdot \nabla \Phi \, dv$$

et  $\llbracket \mathcal{A} \cdot \vec{n} \rrbracket \delta_{\Sigma}$  la distribution définie par

$$(2.7) \quad \langle \llbracket \mathcal{A} \cdot \vec{n} \rrbracket \delta_{\Sigma}, \Phi \rangle = \int_{\Sigma} \Phi (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot \vec{n} \, ds$$

Il apparaît clairement d'après l'égalité (2.5) que  $\text{div } \mathcal{A}$  a une composante définie dans le domaine de continuité de  $\mathcal{A}$ , à savoir  $(\text{div } \mathcal{A})$ , et une composante suivant la discontinuité  $\Sigma$ , à savoir  $\llbracket \mathcal{A} \cdot \vec{n} \rrbracket \delta_{\Sigma}$ . Il vient alors que la relation



$$\operatorname{div} \mathcal{A} = 0$$

va se traduire par l'annulation simultanée des deux composantes de  $\operatorname{div} \mathcal{A}$ , à savoir  $(\operatorname{div} \mathcal{A})$  et

Proposition : L'annulation de la composante surfacique de  $\operatorname{div} \mathcal{A}$  à savoir  $[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}]] \delta_{\Sigma} = 0$  est équivalente à la condition de saut

$$(2.8) \quad [[\mathcal{A} \cdot \vec{n}]] = 0$$

avec  $[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}]]$  représentant la contribution de  $\operatorname{div} \mathcal{A}$  à travers la surface de discontinuité  $\Sigma$  de  $\mathcal{A}$ .

Preuve :

1) le cas où  $\Sigma$  est une surface régulière.

Dans ce cas,  $[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}(\lambda)]]$  est une fonction continue sur  $\Sigma$ . En effet,

$$[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}(\lambda)]] = (\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1) \cdot \vec{n}(\lambda)$$

et comme  $\mathcal{A}_2 \cdot \vec{n}(\lambda)$  et  $\mathcal{A}_1 \cdot \vec{n}(\lambda)$  sont continues sur  $\Sigma$ , il en est de même de  $[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}(\lambda)]]$ .

Donc,  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}]] \phi$  est continue sur  $\Sigma$ . Or  $[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}]] \delta_{\Sigma} = 0$  équivaut à  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n); \int_{\Sigma} [[\mathcal{A} \cdot \vec{n}]] \phi \, d\sigma = 0$ . Et la continuité de  $[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}]] \phi$  implique  $[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}]] \phi = 0$ , et cela  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . On en déduit que  $[[\mathcal{A} \cdot \vec{n}]] = 0$ .

2) Lorsque  $\Sigma$  est de classe  $C^1$  par morceaux, la démonstration précédente s'applique à chaque portion de  $\Sigma$ , et la proposition reste encore vraie.

Si la conservativité s'exprime par  $\nabla \mathcal{A}$  (gradient de  $\mathcal{A}$ ) au lieu de  $\operatorname{div} \mathcal{A}$ , alors (2.5) devient

$$(2.9) \quad \nabla \mathcal{A} = (\nabla \mathcal{A}) + [[\mathcal{A} \otimes \vec{n}]] \delta_{\Sigma}$$

et (2.8)

$$[[\mathcal{A} \otimes \vec{n}]] = 0$$

où  $\otimes$  représente le produit tensoriel classique.

Pour s'en apercevoir, il suffit de remarquer que

$$\nabla \mathcal{A} = \operatorname{div}(\mathcal{A} \otimes I)$$

où  $I$  représente le tenseur unité d'ordre 2 et

$$\mathcal{A} \otimes I \cdot \vec{n} = \mathcal{A} \otimes \vec{n}$$

### 2.3.2. Cas d'un système non conservatif : théorie des distributions (généralisées) non linéaires.

Au regard de toutes les études précédentes, nous constatons que nous arrivons à trouver les contributions à travers les discontinuités de toutes les quantités présentes dans le système (1.11) à l'exception du terme  $\alpha \nabla P$  qui va faire l'objet d'une étude spéciale dans le cadre d'une théorie nouvelle. Néanmoins, nous pouvons noter au passage que si  $\alpha$  était continue à la traversée de la surface de discontinuité  $\Sigma$ , on aurait pu donner un sens à  $\alpha \nabla P$  via la théorie linéaire des distributions classiques de Schwartz. Mais ce n'est pas le cas puisque  $\alpha$  et  $P$  peuvent être toutes les deux discontinues en même temps à la traversée des frontières. D'où la nécessité d'une autre théorie.

#### Notion de distributions (généralisées) non linéaires

En théorie linéaire des distributions, un théorème dit d'impossibilité de SCHWARTZ stipule qu'il est impossible de trouver une algèbre contenant les distributions et dans laquelle le produit puisse coïncider sur  $E(\Omega)$  (l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) avec la multiplication naturelle des fonctions de  $E(\Omega)$ . Jusqu'aux travaux récents de J.F. COLOMBEAU [21], toutes les tentatives précédentes dans la définition des produits de distributions qui tendaient à violer le théorème d'impossibilité de SCHWARTZ se sont vouées à l'échec. Il fallait donc procéder autrement.

La démarche est la suivante (voir Annexe B pour plus de détails).

On considère l'ensemble

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L} \quad \text{et à support compact} \right\}$$

et pour tout  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  étant l'ensemble des entiers naturels)

$$\text{on appelle } \mathcal{A}_q = \left\{ \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\lambda) d\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^i \Phi(\lambda) d\lambda = 0 \text{ pour } i < |i| < q \right\}$$

$$\text{où } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$$

$$\text{et } \lambda^i = \lambda_1^{i_1} \cdot \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \quad ; \quad |i| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

On montre que (voir [21] p. 55. Lemme 3.3.1).

$$\mathcal{A}_q \neq \emptyset \text{ pour tout } q > 1 \text{ et } \mathcal{A}_p \subset \mathcal{A}_q \text{ pour } p > q$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on pose

$$\Phi_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)$$

Il apparaît que  $\Phi_\varepsilon \in \mathcal{A}_q$  dès que  $\Phi \in \mathcal{A}_q$  et réciproquement.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on définit l'opérateur de translation  $\tau_x$  par :

$$(2.10) \quad (\tau_x \Phi)(\lambda) = \Phi(\lambda - x)$$

On appelle alors  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  l'ensemble de toutes les fonctions

$$R : \mathcal{U}_x \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\Phi, x) \longmapsto R(\Phi, x)$$

qui sont de classe  $C^\infty$  par rapport à  $x$  pour tout  $\Phi$  fixé.

Pour deux éléments  $R_1$  et  $R_2$  de  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ , on définit leur produit :  $R = R_1 \circ R_2$  tel que

$$(2.11) \quad R(\Phi, x) = R_1(\Phi, x) \cdot R_2(\Phi, x)$$

qui est aussi dans  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ .  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  muni des opérations  $+$  et  $\circ$  est ainsi une algèbre sur  $\mathbb{C}$

On définit dans  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  l'ensemble  $\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$  des éléments modérés et l'ensemble  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  des éléments nuls (voir annexe B).  $\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  et  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  un idéal de  $\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$  (c'est-à-dire  $\forall R_1 \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  et  $R_2 \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$ ,  $R_1 \circ R_2 \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ ).

L'ensemble quotient

$$(2.12) \quad G(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n] / \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$$

est de ce fait une algèbre

L'ensemble  $C^0(\mathbb{R}^n)$  (des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ ) est identifié à un sous-espace vectoriel de  $G(\mathbb{R}^n)$  par l'application linéaire injective

$$\hat{f} : C^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G(\mathbb{R}^n)$$

$$f \longmapsto R_f$$

telle que  $\forall \Phi \in \mathcal{U}_x$ ,  $R_f(\Phi, x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\eta) \Phi(\eta - x) d\eta$

Et de manière générale, l'ensemble  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  des distributions sur  $\mathbb{R}^n$  est considéré comme sous-espace de  $G(\mathbb{R}^n)$  à l'aide de

$$\hat{T} : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G(\mathbb{R}^n)$$

$$T \longmapsto R_T$$

telle que  $\forall \Phi \in \mathcal{U}_x$ ,  $R_T(\Phi, x) = T(\mathcal{T}_x \Phi)$

De manière générale, on a  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ni T \neq R_T \in G(\mathbb{R}^n)$

Par exemple,

$$C^0(\mathbb{R}) \ni x \cdot |x| \neq x \circ |x| \in G(\mathbb{R})$$

et

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \ni x \delta_0 \neq x \circ \delta_0 \in G(\mathbb{R})$$

où  $C^0(\mathbb{R})$  représente l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  l'ensem-

ble des distributions sur  $\mathbb{R}$ .

Par conséquent, une distribution prise au sens de  $G(\cdot)$  ne va pas coïncider nécessairement avec la distribution usuelle de  $D'(\cdot)$ . Mais la définition à venir va corriger ce défaut.

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$(2.13) \quad \Phi_{\varepsilon, x}(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\varepsilon}\right)$$

On donne alors la définition suivante :

Définition :

Soit  $g \in G(\mathbb{R}^n)$  et  $R \in E_M(D(\mathbb{R}^n))$  un représentant de  $g$ . Si pour tout  $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , le nombre complexe

$$\int_{\mathbb{R}^n} R(\Phi_{\varepsilon, x}) \cdot \Psi(x) dx$$

(qui est indépendant du choix du représentant  $R$  de  $g$ )

a une limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , indépendante de  $\Phi \in A_q$  pour un  $q$  "assez large" et si pour  $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  cette limite définit une distribution sur  $\mathbb{R}^n$  alors on dit que la distribution généralisée  $g$  admet une distribution associée que nous notons  $\tilde{g}$  et qui est définie par la formule

$$(2.14) \quad \langle \tilde{g}, \Psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} R(\Phi_{\varepsilon, x}) \Psi(x) dx$$

On montre tout à fait aisément que toute distribution de  $D'(\mathbb{R}^n)$  considérée comme distribution généralisée au sens de  $G(\mathbb{R}^n)$  s'admet elle-même comme distribution associée.

Outre cette notion de distribution associée dans  $G(\mathbb{R}^n)$ , la dérivation dans  $G(\mathbb{R}^n)$  respecte la loi de LEIBNITZ, à savoir pour  $R_1 \in G(\mathbb{R}^n)$ , et  $R_2 \in G(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(2.15) \quad \frac{\partial}{\partial x} (R_1 \otimes R_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x} R_1\right) \otimes R_2 + R_1 \otimes \frac{\partial}{\partial x} R_2$$

La définition (2.14) et le résultat (2.15) vont être les éléments de base qui vont nous servir dans toute la suite du travail de ce chapitre.

#### IV. EQUATIONS DU MOUVEMENT VIA LE LANGAGE DES DISTRIBUTIONS GENERALISEES

Le système (1.11) précédent est considéré au sens des distributions généralisées et toutes les quantités y intervenant ne sont plus des fonctions et distributions classiques usuelles. La solution de (1.11) dans  $G(\mathbb{R}^3)$  sera la solution forte du problème posé. Mais la solution qui nous intéresse est celle qui doit nous être donnée sous forme de fonctions et distributions

classiques et non directement des éléments de  $G(\mathbb{R}^3)$ . C'est donc une solution faible associée (au sens de 2.14) à la solution forte dans  $G(\mathbb{R}^3)$  que nous recherchons pour (1.11). Il faut donc poser le problème faible associé à (1.11).

#### 2.4.1 Problème faible associé à (1.11)

En fait, dans le système (1.11), seul le terme  $\alpha \nabla P$  pose des problèmes. Les autres termes sont conservatifs et on a vu à la suite de la formule (2.14) que toute distribution usuelle de  $D'(\mathbb{R}^3)$  considérée au sens de distribution généralisée s'admet elle-même comme distribution associée. Ainsi, la formule (2.5) n'est rien d'autre que la formule de la distribution associée à  $\text{div } \mathcal{A}$ .

En adoptant l'écriture de la définition (2.14), cette formule (2.5) devient

$$(2.17) \quad \widetilde{\text{div } \mathcal{A}} = (\text{div } \mathcal{A}) + \llbracket \mathcal{A} \cdot \vec{n} \rrbracket \delta_{\Sigma}$$

où  $(\text{div } \mathcal{A})$  désigne la fonction discontinue  $\text{div } \mathcal{A}$  définie en dehors de la discontinuité  $\Sigma$ , et  $\cdot$  représente le produit contracté entre deux tenseurs.

#### 2.4.2 Distribution associée à $\alpha \nabla P$ lorsque $\alpha$ et $P$ sont discontinus sur $\Sigma$

##### 1) Cas d'une variable d'espace avec discontinuité en $x = 0$

D'après la formule (2.5), nous avons au sens classique

$$(2.18) \quad \frac{dP}{dx} = (P') + \sigma \delta$$

où

$$(2.19) \quad \begin{cases} (P') \text{ est la fonction } dp/dx \text{ définie pour } x \neq 0 \\ \sigma = P(o_+) - P(o_-) = \llbracket P \rrbracket \end{cases}$$

Ainsi, nous avons au sens des distributions généralisées

$$(2.20) \quad \alpha \odot \frac{dP}{dx} = \alpha \odot (P') + \alpha \odot \sigma \delta$$

Tout le problème est de voir s'il existe des distributions  $\alpha \odot (P')$  et  $\alpha \odot \sigma \delta$  associées respectivement à  $\alpha \odot (P')$  et  $\alpha \odot \sigma \delta$  conformément à (2.14).

a - Calcul de  $\widetilde{\alpha \circ (P')}$

Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  deux fonctions de  $D(\mathbb{R})$  avec

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi dx = 1$$

D'après la formule du produit de deux distributions généralisées (2.10), on a :

$$\alpha \circ (P') \{ \Phi_{\epsilon, x} \} = \left( \int_{\mathbb{R}} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \left( \int_{\mathbb{R}} (P')(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)$$

de sorte que

$$(2.21) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \alpha \circ (P') \{ \Phi_{\epsilon, x} \} \Psi(x) dx \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} (P')(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \Psi(x) dx$$

conformément au second membre de (2.14)

Soit maintenant  $R$  un réel positif tel que  $\text{supp}(\Phi) \subset [-R, R]$ . Un tel  $R$  existe, puisque  $\Phi$  est à support borné.

Nous avons :

Premièrement

Pour toute fonction  $f$  continue sauf en  $x = 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda = \int_{-\epsilon R+x}^{\epsilon R+x} f(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda$$

Par changement de variable

$$\mu = \frac{\lambda-x}{\epsilon}$$

dans le terme de droite, il vient que

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda = \int_{-R}^R f(x + \epsilon \mu) \Phi(\mu) d\mu$$

D'autre part,  $f$  étant continue sauf en  $x = 0$ , on a pour tout  $x$  différent de 0,

$$f(x + \epsilon \mu) = f(x) + o(\epsilon)$$

puisque  $|\mu| < R$ .

Nous obtenons donc

$$(2.22) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda = f(x) \int_{-R}^R \Phi d\mu \\ = f(x) \quad \forall x \neq 0$$

Deuxièmement

Le résultat (2.22) précédent nous permet d'écrire que

$$(2.23) \quad \left( \int_{\mathbb{R}} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} (P')\{\lambda\} \cdot \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \Psi(x)$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(x) \cdot (P')\{x\} \cdot \Psi(x), \text{ sauf pour } x=0$$

Et par le théorème de Lebesgue, (2.21) converge vers

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(x) (P')\{x\} \cdot \Psi(x) dx$$

c'est-à-dire vers la distribution  $\alpha(P')$  correspondant à la fonction discontinue  $\alpha dp/dx$  définie pour  $x \neq 0$ .

b - Calcul de  $\widetilde{\alpha(x) \circ \sigma \delta}$

Au sens des distributions généralisées, on a

$$\alpha \circ \sigma \delta \{ \Phi_{\epsilon, x} \} = \sigma \int_{\mathbb{R}} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(-\frac{x}{\epsilon}\right)$$

et donc

$$(2.24) \quad \int_{\mathbb{R}} \alpha \circ \sigma \delta \{ \Phi_{\epsilon, x} \} \Psi(x) dx = \sigma \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) \Psi(x) dx \right)$$

D'après le résultat (2.22) précédent,

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(x) \quad \text{pour } x \neq 0$$

comme  $\text{supp } (\Phi) \subset [-R, R]$ , pour  $x \neq 0$ , lorsque  $\epsilon$  devient suffisamment petit,  $|\frac{x}{\epsilon}|$  devient plus grand que  $R$ , de sorte que  $\frac{1}{\epsilon} \Phi\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) = 0$ . Et on a donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) \Psi(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

Mais pour  $x = 0$ ,  $\frac{1}{\epsilon} \Phi\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) \Psi(x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty$  et nous ne pouvons plus appli-

quer le théorème de Lebesgue dans ce cas-là.

Nous devons donc effectuer une étude spéciale au voisinage de  $x = 0$ .

Le support de  $\Phi\left(-\frac{x}{\epsilon}\right)$  étant contenu dans  $[-\epsilon R, \epsilon R]$  puisque  $\text{supp } (\Phi(x)) \subset [-R, R]$ ,

Le second membre de (2.24) s'écrit donc

$$\sigma \int_{-\epsilon R}^{\epsilon R} \int_{x-\epsilon R}^{x+\epsilon R} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) \Psi(x) dx$$

On opère les changements de variables

$$y = \frac{x}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\lambda}{\epsilon}$$

pour ramener les intervalles d'intégration à des intervalles fixes, soit :

$$\sigma \int_{-R}^R \int_{-R+y}^{R+y} \alpha(\epsilon \mu) \Phi(\mu-y) d\mu \cdot \Phi(-y) \Psi(\epsilon y) dy$$

Comme  $y$  varie de  $-R$  à  $R$ , nous avons  $0 \in [-R+y, R+y]$ , d'où la nécessité de décomposer en deux l'intégrale ci-dessus, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \int_{-R+y}^{R+y} \alpha(\epsilon \mu) \Phi(\mu-y) d\mu \cdot \Phi(-y) \Psi(\epsilon y) dy \\ &= \int_{-R}^R \int_{-R+y}^0 \alpha(\epsilon \mu) \Phi(\mu-y) d\mu \cdot \Phi(-y) \Psi(\epsilon y) dy \\ &+ \int_{-R}^R \int_0^{R+y} \alpha(\epsilon \mu) \Phi(\mu-y) d\mu \cdot \Phi(-y) \Psi(\epsilon y) dy \end{aligned}$$

### Premièrement

Considérons la contribution

$$(2.25) \quad \int_{-R}^R \int_{-R+y}^0 \alpha(\epsilon \mu) \Phi(\mu-y) d\mu \cdot \Phi(-y) \Psi(\epsilon y) dy$$

Nous avons les convergences uniformes suivantes :

$$\alpha(\epsilon u) \text{ vers } \alpha(-0)$$

et

$$\Psi(\epsilon u) \text{ vers } \Psi(0)$$

Par conséquent, (2.25) converge vers

$$\alpha(-0) \Psi(0) \int_{-R}^R \int_{-R+y}^0 \Phi(\mu-y) d\mu \cdot \Phi(-y) dy$$



Posons

$$F(y) = \int_{-R}^y \Phi(s) ds$$

et faisant dans  $\int_{R+y}^0 \Phi(\mu-y) d\mu$ , le changement de variable

$$s = \mu - y$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \int_{-R+y}^0 \Phi(\mu-y) d\mu \cdot \Phi(-y) dy &= \int_{-R}^R \int_{-R}^{-y} \Phi(s) ds \cdot \Phi(-y) dy \\ &= \int_{-R}^R F(-y) \cdot F'(-y) dy \\ &= \left[ -\frac{1}{2} F^2(-y) \right]_{-R}^R \\ &= \frac{1}{2} F^2(R) - \frac{1}{2} F^2(-R) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

puisque  $F(-R)$  vaut 0, et  $F(R)$  vaut 1. Et finalement (2.25) converge vers  $1/2 \alpha(-0) \psi(0)$ .

Deuxièmement

La seconde contribution

$$\int_{-R}^R \int_0^{R+y} \alpha(\epsilon \mu) \Phi(\mu-y) d\mu \cdot \Phi(-y) \Psi(\epsilon y) dy$$

va converger vers

$$\alpha(+0) \Psi(0) \int_{-R}^R \int_0^{R+y} \Phi(\mu-y) d\mu \Phi(-y) dy$$

Et nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R \int_0^{R+y} \Phi(x-y) d\mu \cdot \Phi(-y) dy &= \int_{-R}^R \int_{-y}^R \Phi(s) ds \cdot \Phi(-y) dy \\
&= \int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R \Phi(s) ds - \int_{-R}^{-y} \Phi(s) ds \right) \Phi(-y) dy \\
&= \int_{-R}^R (1 - F(-y)) \Phi(-y) dy \\
&= \int_{-R}^R \Phi(-y) dy - \int_{-R}^R F(-y) \Phi(-y) dy \\
&= \int_{-R}^R \Phi(y) dy - \int_{-R}^R F(y) \Phi(y) dy \\
&= 1 - \int_{-R}^R F(y) \frac{dF(y)}{dy} dy \\
&= 1 - \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{dF^2}{dy} dy \\
&= 1 - \frac{1}{2} \left[ F^2(y) \right]_{-R}^R \\
&= 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La seconde contribution converge donc vers  $1/2 \alpha (+0)\psi(0)$ .

Par sommation de la première et de la seconde contribution, nous obtenons la distribution associée à  $\alpha \circ \sigma \delta$

$$(2.26) \quad \widetilde{\alpha \circ \sigma \delta} = \frac{1}{2} \sigma (\alpha(+0) + \alpha(-0)) \delta$$

Enfin, en réunissant les deux résultats (2.23) et (2.26) et en adoptant la convention

$$(2.27) \quad \hat{f} = \frac{1}{2} (f(+0) + f(-0))$$

nous obtenons la distribution associée à  $dp/dx$  que nous cherchons :

$$(2.28) \quad \widetilde{\alpha \circ \frac{dP}{dx}} = \alpha(P') + \hat{\alpha} [P] \delta$$

## 2) Cas Multidimensionnel

Dans le cas multidimensionnel également, nous avons au sens des distributions classiques, conformément à (2.9)

$$(2.29) \quad \nabla P = (\nabla P) + \sigma \vec{n} \delta_{\Sigma}$$

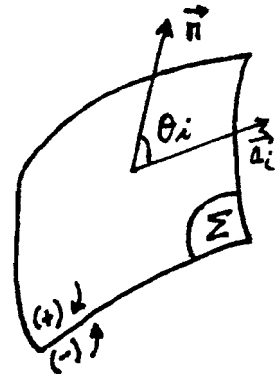
où

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nabla P) \text{ représente la distribution correspondant à la fonction} \\ \text{discontinue } P \text{ définie pour } x \notin \Sigma, \Sigma \text{ étant la discontinuité.} \\ \sigma = \llbracket P \rrbracket \\ \text{avec} \\ \llbracket P \rrbracket = P(x \in \Sigma_+) - P(x \in \Sigma_-) \\ n \text{ la normale unitaire à } \Sigma, \text{ dirigée de } \Sigma_- \text{ vers } \Sigma_+, \text{ donc sortant de} \\ \Sigma \text{ lorsqu'on se trouve du côté de } \Sigma_+ \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma \vec{n} \delta_{\Sigma} = \llbracket P \rrbracket \vec{n} \delta_{\Sigma} : \Phi \longrightarrow \int_{\Sigma} \llbracket P \rrbracket \vec{n} \Phi \, ds \end{array} \right.$$

En projection de la formule (2.29) suivant les axes de coordonnées, il vient que pour toute coordonnée  $x_i$  :

$$(2.31) \quad \frac{\partial P}{\partial x_i} = (P'_{x_i}) + \sigma \cos \theta_i \delta_{\Sigma}$$

Avec  $\theta_i$  représentant l'angle entre la normale  $n$  à la surface de discontinuité et le  $i^{\text{ème}}$  vecteur unitaire de base.



Au sens des distributions généralisées, on a

$$(2.32) \quad \alpha \circ \nabla P = \alpha \circ (\nabla P) + \alpha \circ \sigma \vec{n} \delta_{\Sigma}$$

Tout comme dans le cas unidimensionnel, le problème revient à la recherche de  $\widetilde{\alpha \circ \nabla P}$

Premièrement

On montre sans aucune difficulté comme dans le cas unidimensionnel que

$$(2.33) \quad \widetilde{\alpha \circ (\nabla P)} = \alpha (\nabla P)$$

Deuxièmement

Il nous reste donc à connaître  $\widetilde{\alpha \circ \sigma \vec{n} \delta_{\Sigma}}$

Pour cela, il nous faut chercher

$$(2.34) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} (\sigma \vec{n} \delta_\epsilon)(\lambda) \cdot \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \cdot \Psi(x) dx$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\sigma \vec{n} \delta_\epsilon)(\lambda) \cdot \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda = \int_{\Sigma} \sigma(\lambda) \vec{n}(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda$$

De sorte que (2.34) peut être réécrite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \int_{\Sigma} \sigma(\lambda) \vec{n}(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \Psi(x) dx$$

et dans ce cas multidimensionnel également,

$$\int_{\Sigma} \sigma(\lambda) \vec{n}(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \quad \text{converge vers} \quad \begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin \Sigma \\ \infty & \text{pour } x \in \Sigma \end{cases}$$

Une étude similaire au cas  $n = 1$  doit donc être effectuée au voisinage de  $\Sigma$ .

Si pour le cas  $n = 1$ , l'étude a été relativement "facile" du fait que les changements de variables effectués pour arriver au résultat étaient presque immédiats, il faut s'attendre à ce que le cas  $n > 1$  présente des difficultés notoires pour l'étude. Il va falloir opérer des transformations judicieuses pour espérer aboutir à un résultat.

Appelons  $\mathcal{B}(a, R)$  une boule de centre  $a$  et de rayon  $R$  contenant  $\text{supp}(\Phi(x))$ . Nous avons alors pour  $x$  fixé,

$$\text{supp}\left(\Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right)\right) \subset \mathcal{B}(\epsilon a + x, \epsilon R)$$

Il vient donc

$$(2.35) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \cdot \int_{\Sigma} \sigma(\lambda) \vec{n}(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \Psi(x) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathcal{B}(\epsilon a + x, \epsilon R)} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \cdot \int_{\Sigma \cap \mathcal{B}(\epsilon a + x, \epsilon R)} \sigma(\lambda) \vec{n}(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \Psi(x) dx$$

Sur l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que la distance de  $(x + \epsilon a)$  à  $\Sigma$  est plus grande que  $\epsilon R$ ,

$$\int_{\Sigma \cap \mathcal{B}(\epsilon a + x, \epsilon R)} \sigma(\lambda) \vec{n}(\lambda) \frac{1}{\epsilon} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda = 0$$

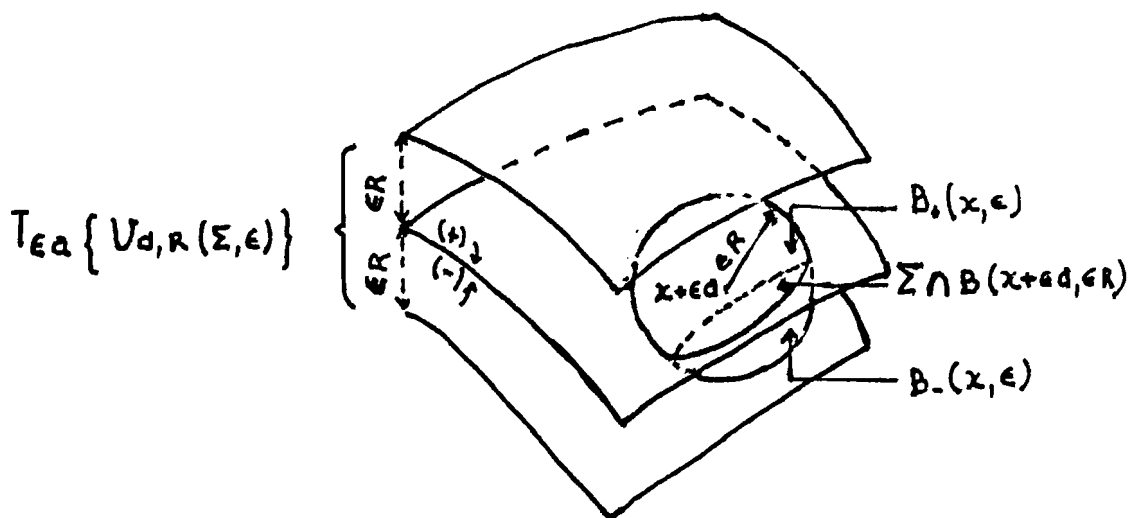
puisque pour de tels  $x$ ,  $\Sigma \cap \mathcal{B}(\epsilon a + x, \epsilon R) = \emptyset$

où  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide.

Par conséquent, sur cet ensemble en question, le second membre de (2.35) est nul.

Appelons alors  $\mathcal{V}_{d,R}(\Sigma, \epsilon)$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que la distance de  $(x + \epsilon a)$  à  $\Sigma$  soit inférieure ou égale à  $\epsilon R$ .

Si nous notons par  $T_{\epsilon a}$  la translation de  $\epsilon a$ , nous avons représenté conformément à la figure ci-dessous, l'image  $T_{\epsilon a} \{ \mathcal{V}_{d,R}(\Sigma, \epsilon) \}$  de l'ensemble  $\mathcal{V}_{d,R}(\Sigma, \epsilon)$  par  $T_{\epsilon a}$



Le second membre de (2.35) s'écrit donc

$$(2.36) \quad \int_{\mathcal{V}_{d,R}(\Sigma, \epsilon)} \left( \int_{B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda - x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \sigma(\lambda) \vec{n}(\lambda) \Phi\left(\frac{\lambda - x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \Psi(x) dx$$

si  $x \in \mathcal{V}_{d,R}(\Sigma, \epsilon)$ , alors  $B(\epsilon a + x, \epsilon R)$  coupe  $\Sigma$  et l'on a la figure ci-dessus, c'est-à-dire

$$B(\epsilon a + x, \epsilon R) = B_+(x, \epsilon) \cup B_-(x, \epsilon)$$

Par conséquent, dans (2.36), nous devons décomposer l'intégrale portant  $\alpha(\lambda)$  en deux, en écrivant (nous laisserons tomber  $x$  et  $\epsilon$  dans  $B_-(x, \epsilon)$  et  $B_+(x, \epsilon)$ )

$$\int_{B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda - x}{\epsilon}\right) d\lambda = \int_{B_+} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda - x}{\epsilon}\right) d\lambda + \int_{B_-} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda - x}{\epsilon}\right) d\lambda$$

a - Recherche de la contribution due à  $\int_{B_\epsilon} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda$  dans (2.36)

Appelons  $x_0$  la projection orthogonale de  $\epsilon a + x$  sur  $\Sigma$ . Nous avons alors

$$(2.37) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha(\lambda) = \alpha_+(\lambda_0) + O(\epsilon) \\ \sigma(\lambda) = \sigma(\lambda_0) + O(\epsilon) \\ n(\lambda) = \vec{n}(\lambda_0) + O(\epsilon) \end{array} \right\} \text{ dans } \Sigma \cap B(\epsilon a + x, \epsilon R)$$

où  $\alpha_+(\lambda_0)$  désigne la valeur limite de  $\alpha$  lorsqu'on se trouve sur la discontinuité  $\Sigma$ , du côté noté (+).

Ce qui nous donne la contribution

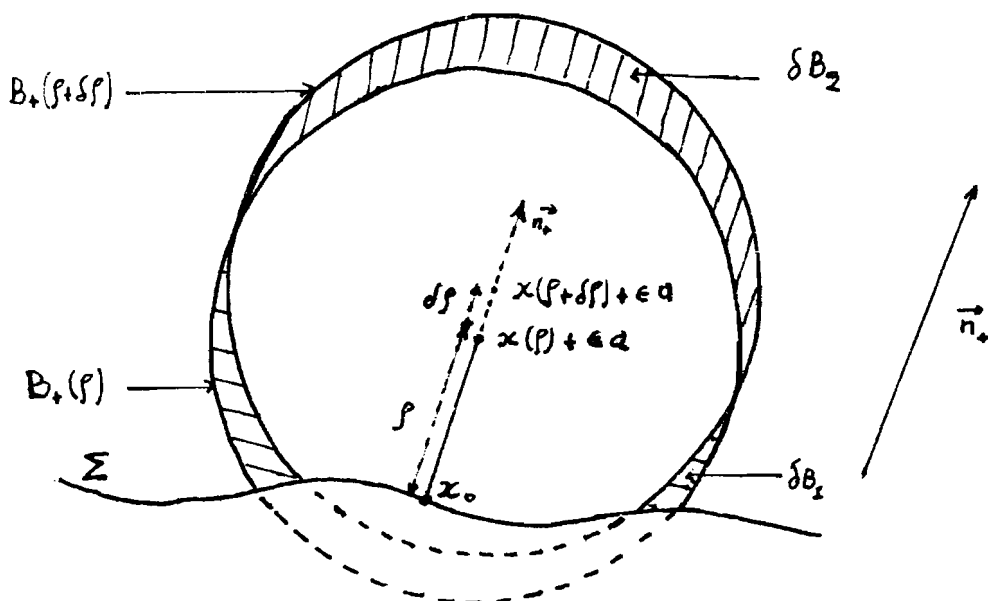
$$(2.38) \quad \int_{V_{a,R}(\Sigma,\epsilon)} \alpha_+(\lambda_0) \sigma(\lambda_0) n(\lambda_0) \int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \Psi(x) dx$$

Désignons par  $\rho$  la distance de  $x + \epsilon a$  à  $\Sigma$  et montrons alors que

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) = \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda$$

Pour cela, considérons une variation infinitésimale  $\delta \rho$  de  $\rho$  et évaluons la

variation subie alors par  $I = \int_{B_\epsilon(\rho)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x(\rho)}{\epsilon}\right) d\lambda$  à savoir  $\delta I$



On a

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{B_+(r)} \delta \left\{ \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x(r)}{\epsilon} \right) \right\} d\lambda \\ &+ \underbrace{\int_{B_+(r+\delta r)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) d\lambda - \int_{B_+(r)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) d\lambda}_{\int_{\delta B_2} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) d\lambda - \int_{\delta B_2} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) d\lambda} \end{aligned}$$

Comme  $\text{supp} \left( \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) \right) \subset B(x + \epsilon \alpha, \epsilon R)$ , alors pour  $\delta r$  suffisamment petit,  $\delta B_2 \cap \text{supp} \left( \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) \right) = \emptyset$  et  $\delta B_2 \cap \text{supp} \left( \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) \right) = \emptyset$

Et ainsi,  $\delta I$  se ramène à

$$\begin{aligned} &\int_{B_+(r)} \delta \left\{ \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x(r)}{\epsilon} \right) \right\} d\lambda \\ &= \int_{B_+(r)} - \frac{x'(r)}{\epsilon^{n+1}} \nabla_\lambda \Phi \left( \frac{\lambda - x(r)}{\epsilon} \right) d\lambda \cdot \delta r \end{aligned}$$

Remarquons maintenant les deux choses essentielles suivantes :

1)  $x'(r) = \vec{n}_+(r)$  (la normale unitaire à  $\Sigma$  passant par  $x + \epsilon \alpha$  et dirigée vers l'intérieur de  $B_+$ ).

$$\begin{aligned} 2) \quad \text{div}_\lambda \left( \vec{n}_+(r) \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) \right) &= \vec{n}_+(r) \cdot \frac{1}{\epsilon} \nabla_\lambda \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) \\ &+ (\text{div}_\lambda \vec{n}_+(r)) \cdot \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) \\ &= \vec{n}_+(r) \cdot \frac{1}{\epsilon} \nabla_\lambda \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) \end{aligned}$$

puisque  $\vec{n}_+(r)$  ne dépend pas de  $\lambda$  et par conséquent

$$\text{div}_\lambda \vec{n}_+(r) = 0$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta f} &= \int_{B_\epsilon} -\frac{1}{\epsilon^n} \operatorname{div}_\lambda \left( \vec{n}_+ \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) \right) d\lambda \\ &= \int_{\partial B_\epsilon} -\frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) \vec{n}_+ \cdot \vec{\nu} \, ds_\lambda \end{aligned}$$

par utilisation du théorème d'Ostrogradskii ( $\vec{\nu}$  étant la normale unitaire à  $\partial B_\epsilon$  extérieure à  $B_\epsilon$ )

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial B_\epsilon \setminus \Sigma} -\frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) \vec{n}_+ \cdot \vec{\nu} \, ds_\lambda \\ &\quad + \int_{\Sigma} -\frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) \vec{n}_+ \cdot \vec{\nu} \, ds_\lambda \end{aligned}$$

Mais

$$\operatorname{supp} \left( \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) \right) \subset B(x+\epsilon a, \epsilon R)$$

et donc 
$$\int_{\partial B_\epsilon \setminus \Sigma} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) \vec{n}_+ \cdot \vec{\nu} \, ds_\lambda = 0$$

Sur  $\Sigma$ ,  $\vec{\nu} = -\vec{n}_+$  de sorte que  $-\vec{n}_+ \cdot \vec{\nu} = 1$

Finalement on a :

$$\frac{\delta I}{\delta f} = \int_{\Sigma} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) \, ds_\lambda \quad \text{pour } \delta f \text{ suffisamment petit, c'est-à-dire le résultat cherché. Nous pouvons écrire :}$$

dire le résultat cherché. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} &\int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a+x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \\ &= \int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial f} \left( \int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial f} \left( \int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 \end{aligned}$$

D'où la contribution (2.38) vaut :

$$(2.39) \int_{\mathcal{U}_{a,R}(\Sigma, \epsilon)} \alpha_\epsilon(x_0) \sigma(x_0) \vec{n}(x_0) \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial f} \left( \int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 \cdot \Psi(x) \, dx$$

Mais pour  $\epsilon$  assez petit, nous avons dans  $\mathcal{U}_{a,R}(\Sigma, \epsilon)$  biunivoquement

$$(2.40) \quad x \longleftrightarrow (x_0, f)$$



où  $\rho < 0$  pour  $x \in U_{a,R(-)}$  et  $\rho > 0$  pour  $x \in U_{a,R(+)}$ ,  
 $U_{a,R(-)}$  et  $U_{a,R(+)}$  étant tels que

$$T_{\epsilon a} \{ U_{a,R}(\Sigma, \epsilon) \} = T_{\epsilon a} \{ U_{a,R(-)} \} \cup T_{\epsilon a} \{ U_{a,R(+)} \}$$

et

$$T_{\epsilon a} \{ U_{a,R(-)} \} \cap T_{\epsilon a} \{ U_{a,R(+)} \} = \Sigma$$

conformément à la représentation ci-dessus.

Le changement de variable (2.40) étant opéré, (2.39) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{U_{a,R}(\Sigma, \epsilon)} \alpha_+(x_0) \sigma(x_0) \vec{n}(x_0) \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial f} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 \Psi(x) dx \\ &= \int_{\Sigma} \int_{f=-\epsilon R}^{f=\epsilon R} \alpha_+(x_0) \sigma(x_0) \vec{n}(x_0) \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial f} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 \Psi(x_0, f) df ds \\ &= \int_{\Sigma} \alpha_+(x_0) \sigma(x_0) \vec{n}(x_0) \Psi(x_0, 0) \cdot \frac{1}{2} \int_{f=-\epsilon R}^{f=\epsilon R} \frac{\partial}{\partial f} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 df ds \end{aligned}$$

à  $O(\epsilon)$  près puisque  $\Psi(x_0, f) = \Psi(x_0, 0) + O(\epsilon)$

D'autre part,

$$\int_{f=-\epsilon R}^{f=\epsilon R} \frac{\partial}{\partial f} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 df = \left[ \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 \right]_{f=-\epsilon R}^{f=\epsilon R}$$

Or,

pour  $f = \epsilon R$ , on a  $B_+ = B(\epsilon a + x, \epsilon R)$

et

pour  $f = -\epsilon R$ , on a  $B_+ = \emptyset$

Et comme

$$\int_{B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda = \int_{B(a, R)} \Phi(\mu) d\mu = 1, \quad ,$$

Donc

$$\int_{\rho = -\epsilon R}^{\rho = \epsilon R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) d\lambda \right)^2 d\rho = 1$$

Et par suite, la contribution finale de (2.39) est :

$$(2.41) \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \alpha_+(x_0) \sigma(x_0) \vec{n}(x_0) \Psi(x_0) dx_0$$

Recherche de la contribution due à  $\int_{B_-} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) d\lambda$

En procédant de manière analogue pour la contribution due à  $B_-$ , nous obtenons une expression analogue à (2.41) avec  $\alpha_-$  à la place de  $\alpha_+$ .

Et puis, en sommant les deux contributions, celle due à  $B_+$  et celle due à  $B_-$ , nous obtenons le résultat cherché, à savoir

$$(2.42) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) d\lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (\sigma \vec{n} \delta_{\Sigma})(\lambda) \cdot \frac{1}{\epsilon^n} \Phi \left( \frac{\lambda - x}{\epsilon} \right) d\lambda \cdot \Psi(x) dx$$

$$= \int_{\Sigma} \frac{1}{2} (\alpha_+(x_0) + \alpha_-(x_0)) \sigma(x_0) \vec{n}(x_0) \Psi(x_0) dx_0$$

Et on reconnaît dans le second membre de (2.42) la formule donnant l'image par la distribution  $\hat{\alpha} \sigma \vec{n} \delta_{\Sigma}$  de  $\Psi$ .

On en déduit alors que

$$(2.43) \widetilde{\alpha \otimes \sigma \vec{n} \delta_{\Sigma}} = \hat{\alpha} \sigma \vec{n} \delta_{\Sigma}$$

En réunissant maintenant les résultats (2.33) et (2.43), nous obtenons la relation la plus générale.

$$(2.44) \widetilde{\alpha \otimes \nabla P} = \alpha(\nabla P) + \hat{\alpha} [[P]] \vec{n} \delta_{\Sigma}$$

2.4.3 Comparaison de notre résultat (2.44) avec un résultat obtenu par DREW [14] pour le cas particulier du produit  $f\nabla\chi$  où  $\chi$  est la fonction caractéristique de  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction discontinue à la frontière  $\Sigma$  de  $\mathcal{E}$

A travers la formule (19) de son article, DREW tentait de donner un sens à  $f\nabla\chi$ . Et d'après son résultat,  $f$  serait définie par :

$$(2.45) \quad f\nabla\chi : \Phi \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Sigma} \vec{n} f_{(-)} \Phi \, ds \, dt$$

où  $f_{(-)}$  est la valeur de  $f$  sur  $\Sigma$ , lorsqu'on la traverse en étant dans  $\mathcal{E}$ . On pourrait éventuellement prendre cette formule comme définition pour  $f\nabla\chi$ . Mais les insuffisances d'une telle définition restent évidentes, ne serait-ce que du point de vue de son interprétation physique. En effet, elle signifierait qu'à la traversée de la frontière  $\Sigma$ , seule  $f_{(-)}$  aurait une contribution, et  $f_{(+)}$  n'en aurait pas. Ce qui a priori reste peu plausible. De plus, du point de vue mathématique, le procédé d'obtention de cette formule n'est pas cohérent. En effet, DREW a écrit de manière exhaustive

$$(2.46) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} (f\nabla\chi) \Phi \, dx \, dt &= - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \chi \nabla(f\Phi) \, dx \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{E}} \nabla(f\Phi) \, dx \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Sigma} \vec{n} f_{(-)} \Phi \, dx \, dt \end{aligned}$$

où  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$

Le résultat serait tout à fait correct si la première ligne de l'égalité (2.46) l'était. Mais ce n'est pas le cas et cette première ligne est impropre. En effet, DREW utilise la formule de dérivation des distributions pour l'écrire, alors que la fonction  $f$  n'est pas une fonction régulière, puisque  $f$  admet une discontinuité. Par conséquent, la première ligne de (2.46) est incorrecte et donc le résultat qui en découle ne peut qu'être erroné et non valide.

Disons pour finir que ces deux anomalies, tant du point de vue physique que du point de vue mathématique du résultat de DREW sont levées par nos résultats précédents via les distributions généralisées. Et d'après notre formule (2.44), on aura :

$$(2.47) \quad \widetilde{f \circ \nabla \chi} : \Phi \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Sigma} \hat{f}[\chi] \vec{n} \Phi \, ds \, dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Sigma} \hat{f} \vec{n} \Phi \, ds \, dt$$

où  $\hat{f} = \frac{1}{2} (f_{(+)} + f_{(-)})$

## V. DETERMINATION DES CONDITIONS DE SAUT VIA LES DISTRIBUTIONS GENERALISEES

Dans ce chapitre, nous allons, à la lumière d'exemples issus d'équations de continuité de notre problème de base, montrer comment :

1) établir les relations de saut associées à un système d'équations locales d'évolution donné de manière générale

2) déterminer la contribution à la discontinuité d'un produit faisant intervenir un gradient et plusieurs fonctions (discontinues) comme par exemple  $d\vec{G} \cdot \nabla \vec{G}$ , en mettant en relief le fait que la règle

$$\varphi \left( \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \text{div } B \right) \longrightarrow \hat{\varphi} \left[ B_n - w_x \vec{a} \right]$$

tombe en échec lorsque  $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$ , sauf si  $\varphi_1 \varphi_2$  représente le "groupement-fonction  $\varphi_1 \varphi_2$ " et non le produit de  $\varphi_1$  par  $\varphi_2$ . Et en déduire la non-équivalence, de manière générale, des systèmes de relations de saut issues de deux systèmes d'équations locales équivalents dans les domaines de continuité

3) nous essaierons de déterminer, en application de notre problème physique de milieu diphasique, quelles sont les types de discontinuités sur lesquelles deux systèmes d'équations locales équivalents dans le domaine de continuité vont conduire aux mêmes relations de saut. Et comment le type de problème physique que l'on considère va nous fixer la manière de considérer le produit  $\varphi_1 \varphi_2$  : comme un "groupement-fonction", ou comme un produit au sens strict du terme, de deux fonctions séparées  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .

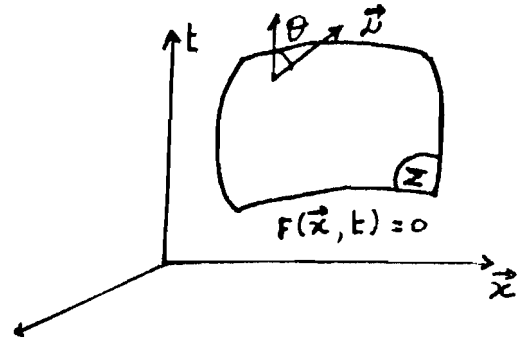
### 2.5.1. Notion de conditions de saut associées à un système d'équation locales d'évolution

a - Considérons par exemple l'équation (1.4) du chapitre I. Lorsque  $\alpha$  est non nul, cette équation est équivalente à

$$(2.48) \quad \rho_e \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right) = -\chi \nabla P + m_1 (\vec{U} - \vec{G})$$

D'après les résultats obtenus précédemment

$$(2.49) \quad \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} = \left( \frac{\partial G}{\partial t} \right) + \left[ \left[ \vec{G} \right] \right] \cos \theta \delta \Sigma$$



où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{n}$ , la normale à l'hypersurface  $\Sigma$  (de l'espace à quatre dimensions composé de l'axe des temps et de l'espace physique à trois dimensions) et l'axe des temps

Les points de l'hypersurface  $\Sigma$  vérifient l'équation

$$(2.50) \quad F(x, y, z, t) = 0$$

$\Sigma$  est supposée régulière de sorte que  $\vec{n}$  est parallèle au vecteur qui a pour composante  $\partial F / \partial t$  suivant l'axe des temps et  $\nabla F$  suivant l'espace physique (le gradient étant pris par rapport aux variables  $x, y$  et  $z$  de l'espace physique).

Nous écrivons donc symboliquement

$$\vec{n} \parallel \left( \frac{\partial F}{\partial t}, \nabla F \right)$$

Notons  $\vec{W}_\Sigma (w_1, w_2, w_3)$  la vitesse des points de  $\Sigma$ , celle-ci n'étant pas nécessairement une surface matérielle

En différentiant la relation (2.50) par rapport au temps  $t$ , nous obtenons

$$\frac{\partial F}{\partial t} + w_1 \frac{\partial F}{\partial x} + w_2 \frac{\partial F}{\partial y} + w_3 \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

D'où nous tirons

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \left( w_1 \frac{\partial F}{\partial x} + w_2 \frac{\partial F}{\partial y} + w_3 \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} &= -\vec{W}_\Sigma \cdot \nabla F \\ &= -|\nabla F| \left( \vec{W}_\Sigma \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right)\end{aligned}$$

Posons

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$

$n$  est donc la normale à  $\Sigma$  dans l'espace physique à trois dimensions et

$$W_\Sigma = \vec{W}_\Sigma \cdot \vec{n}$$

$W_\Sigma$  est la vitesse d'avancement de la discontinuité  $\Sigma$ . On a alors

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -|\nabla F| W_\Sigma$$

et

$$\nabla F = |\nabla F| \vec{n}$$

Donc

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t}, \nabla F \right) = |\nabla F| (-W_\Sigma, \vec{n})$$

De sorte que

$$\vec{D} // (-W_\Sigma, \vec{n})$$

Et comme  $\vec{D}$  est unitaire, nous avons

$$(2.51) \quad \vec{D} = (W_\Sigma^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (-W_\Sigma, \vec{n})$$

Et ainsi

$$(2.52) \quad \begin{aligned}\cos \theta &= (1, 0) \cdot \vec{D} \\ &= -(W_\Sigma^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} W_\Sigma\end{aligned}$$

(2.49) s'écrit alors

$$(2.53) \quad \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} = \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \right) - (W_\Sigma^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} W_\Sigma \llbracket \vec{G} \rrbracket \delta_\Sigma$$

Dans (2.48), on a au sens des distributions généralisées

$$\begin{aligned}
\vec{G} \circ \nabla \vec{G} &= \left\{ (\nabla \vec{G}) + \llbracket \vec{G} \rrbracket \circ \vec{U} \delta \Sigma \right\} \circ \vec{G} \\
&= \vec{G} \circ (\nabla \vec{G}) + (\vec{G} \cdot \vec{U}) \circ \llbracket \vec{G} \rrbracket \delta \Sigma \\
&= \vec{G} \circ (\nabla \vec{G}) + (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (\vec{G} \cdot \vec{n}) \circ \llbracket \vec{G} \rrbracket \delta \Sigma
\end{aligned}$$

Posons

$$G_n = \vec{G} \cdot \vec{n}$$

On a donc

$$\vec{G} \circ \nabla \vec{G} = \vec{G} \circ (\nabla \vec{G}) + (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} G_n \circ \llbracket \vec{G} \rrbracket \delta \Sigma$$

Et par suite

$$(2.54) \quad \widetilde{\vec{G} \circ \nabla \vec{G}} = \vec{G} \cdot (\nabla \vec{G}) + (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \hat{G}_n \llbracket \vec{G} \rrbracket \delta \Sigma$$

Quant à  $\nabla P$ , on aura

$$(2.55) \quad \widetilde{\nabla P} = (\nabla P) + (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \llbracket P \rrbracket \vec{n} \delta \Sigma$$

En regroupant maintenant les résultats (2.53), (2.54) et (2.55), l'égalité (2.48) considérée dans  $G(\mathbb{R}^3)$  au sens des distributions généralisées conduit à l'égalité dans  $D'(\mathbb{R}^3)$  au sens des distributions classiques suivante :

$$\begin{aligned}
(2.56) \quad \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right) + \int_{\Omega} (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (-W_{\Sigma} + \hat{G}_n) \llbracket \vec{G} \rrbracket \delta \Sigma \\
= -\nabla P + m(\vec{U} - \vec{G}) - (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \llbracket P \rrbracket \vec{n} \delta \Sigma
\end{aligned}$$

Puis en séparant la composante suivante  $\delta \Sigma$ , il vient

$$(2.57) \quad \int_{\Omega} (-W_{\Sigma} + \hat{G}_n) \llbracket \vec{G} \rrbracket + \chi \llbracket P \rrbracket \vec{n} = 0$$

(2.57) est la relation de saut associée à l'équation d'évolution (2.48)

b - Considérons maintenant l'équation (1.4) du chapitre I, à savoir

$$\int_{\Omega} \alpha \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{G} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right) = -\chi \alpha \nabla P + m \alpha (\vec{U} - \vec{G})$$

plutôt que (2.48) et recherchons la relation de saut qui lui est associée.

La recherche de cette condition de saut revient à trouver la composante suivant  $\delta \Sigma$  de l'équation faible associée à (1.4)

D'après les études précédentes du § IV, nous aurons les contributions

suivantes :

$$(2.58) \quad \begin{aligned} \overbrace{\int_{\Sigma} \alpha \circ \frac{\partial \vec{G}}{\partial t}} &\longrightarrow - (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} W_{\Sigma} \int_{\Sigma} \hat{\alpha} \llbracket \vec{G} \rrbracket \delta_{\Sigma} \\ \overbrace{\alpha \circ \nabla P} &\longrightarrow (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \hat{\alpha} \llbracket P \rrbracket \vec{n} \delta_{\Sigma} \end{aligned}$$

Par contre, il ne faut pas se laisser induire en erreur en écrivant par exemple que

$$\overbrace{\alpha \circ \vec{G} \circ \nabla \vec{G}} \longrightarrow \hat{\alpha} G_n \llbracket \vec{G} \rrbracket \delta_{\Sigma}$$

En fait, on a seulement :

$$\overbrace{(\alpha \circ \vec{G}) \circ \nabla \vec{G}} \longrightarrow \hat{\alpha} G_n \llbracket \vec{G} \rrbracket \delta_{\Sigma}$$

Mais, si  $G(\mathbb{R}^3)$  (l'algèbre des distributions généralisées) est associative, c'est-à-dire, si  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$  sont des éléments dans  $G(\mathbb{R}^3)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_3 &= (\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2) \circ \mathcal{D}_3 \\ &= \mathcal{D}_1 \circ (\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_3) \end{aligned}$$

l'opération d'association ( $\sim$ ) ne respecte pas l'association de la loi multiplicative de  $G(\mathbb{R}^3)$ , c'est-à-dire qu'on a en général

$$(2.59) \quad \overbrace{\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_3} \neq \overbrace{(\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2) \circ \mathcal{D}_3}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de prendre

$$\mathcal{D}_1 = H, \quad \mathcal{D}_2 = H, \quad \mathcal{D}_3 = \delta_{\Sigma}$$

où  $H$  est la fonction d'Heaviside associée à  $\Sigma$ , c'est-à-dire

$$H = \begin{cases} 0 & \text{dans la région contigue à } \Sigma_+ \\ 1 & \text{dans la région contigue à } \Sigma_- \end{cases}$$

avec  $\Sigma_+$  et  $\Sigma_-$  les côtés de  $\Sigma$  orientés par rapport au sens de la normale.

Un calcul similaire à ceux du § IV montre que dans le cas d'une dimension d'espace,



$$\begin{aligned} \widetilde{H \circ H \circ \delta} &= \widetilde{H^2 \circ \delta} && (\text{où } H^2 = H \circ H) \\ &= \frac{1}{3} \delta \end{aligned}$$

Alors que

$$\widetilde{H^2} = H$$

et en posant  $\sigma$  égal à 1 et  $\alpha$  égal à  $H$  dans (2.26), on obtient

$$\widetilde{H} \delta = \frac{1}{2} \delta$$

Et comme

$$\begin{aligned} \widetilde{H^2 \circ \delta} &= \widetilde{H \circ \delta} \\ &= \frac{1}{2} \delta \end{aligned}$$

et que

$$\frac{1}{2} \delta \neq \frac{1}{3} \delta$$

puisque  $\delta$  est non nul, il apparaît bien que

$$\widetilde{H \circ H \circ \delta} \neq \widetilde{(H \circ H) \circ \delta}$$

ce qui confirme le résultat (2.59), qui reste d'ailleurs vraie pour tout produit de plus de deux distributions généralisées. Dans ces cas-là, une étude spéciale doit toujours être effectuée, pour trouver la composante suivante  $\delta_\Sigma$  de la distribution associée au produit des distributions généralisées.

Néanmoins, la démarche reste analogue à celle du produit de deux distributions.

On écrit que

$$(2.60) \quad \alpha \circ \vec{G} \circ \nabla \vec{G} = (\alpha \circ \vec{G} \circ \nabla \vec{G}) + (W_\Sigma^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \alpha \circ [\vec{G}] \otimes \vec{n} \delta_\Sigma \circ \vec{G}$$

Si nous posons

$$\vec{\sigma} = [\vec{G}]$$

on a

$$\alpha \circ [\vec{G}] \otimes \vec{n} \delta_\Sigma \circ \vec{G} = \alpha \circ \vec{\sigma} \otimes \vec{n} \delta_\Sigma \circ \vec{G}$$

Le problème revient à trouver  $\alpha \circ \vec{\sigma} \otimes \vec{n} \delta_\Sigma \circ \vec{G}$ . Il nous faut donc chercher la limite lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro de

$$\begin{aligned}
(2.61) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} (\vec{\sigma} \otimes \vec{n} \delta_{\Sigma})(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \\
& \left( \int_{\mathbb{R}^n} \vec{G}(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \Psi(x) dx \\
& = \int_{\mathcal{U}_{\alpha, R}(\Sigma, \epsilon)} \int_{B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \alpha(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \vec{\sigma}(\lambda) \otimes \vec{n}(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \\
& \quad \cdot \int_{B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \vec{G}(\lambda) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda
\end{aligned}$$

En effectuant la partition de  $B(\epsilon a + x, \epsilon R)$  en  $B_+$  et  $B_-$  comme au § IV, puis en développant  $\alpha(\lambda)$ ,  $\vec{\sigma}(\lambda)$ ,  $\vec{n}(\lambda)$  et  $\vec{G}(\lambda)$  au voisinage de  $x_0$ , projection de  $\lambda$  sur  $\Sigma$ , il vient que (2.61) vaut

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{U}_{\alpha, R}(\Sigma, \epsilon)} \left( \int_{B_+} \alpha_+(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda + \int_{B_-} \alpha_-(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \\
& \quad \cdot \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \vec{\sigma}(x_0) \otimes \vec{n}(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \left\{ \int_{B_+} \vec{G}_+(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right. \\
& \quad \left. + \int_{B_-} \vec{G}_-(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right\} \Psi(x) dx
\end{aligned}$$

à  $O(\epsilon)$  près,

ce qui va donner lieu à quatre contributions  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

$$\begin{aligned}
C_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}_{\alpha, R}(\Sigma, \epsilon)} & \left( \int_{B_+} \alpha_+(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \vec{\sigma}(x_0) \otimes \vec{n}(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right. \\
& \left. \cdot \int_{B_+} \vec{G}_+(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \Psi(x) dx
\end{aligned}$$

$C_2$  est identique à  $C_1$  en remplaçant les indices + par les indices -

$C_3$  est une quantité croisée, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
C_3 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}_{\alpha, R}(\Sigma, \epsilon)} & \left( \int_{B_+} \alpha_+(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a + x, \epsilon R)} \vec{\sigma}(x_0) \otimes \vec{n}(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right. \\
& \left. \cdot \int_{B_-} \vec{G}_-(x_0) \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \Psi(x) dx
\end{aligned}$$

$C_4$  s'obtient à partir de  $C_3$  en permutant les indices + et -.

Calcul de  $C_1$ 

En procédant au changement de variables par la transformation biunivoque (2.40), on a

$$C_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \int_{\rho=-\epsilon R}^{\rho=\epsilon R} \left\{ \alpha_+(x_0) \vec{\sigma}(x_0) G_n^+(x_0) \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 \right. \\ \left. \cdot \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a+x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right\} \Psi(x_0, \rho) d\rho dx_0$$

En remarquant que

$$\left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a+x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^3$$

et en développant  $\Psi(x_0, \rho)$  au voisinage de  $\rho = 0$ , il apparaît que

$$C_1 = \int_{\Sigma} \frac{1}{3} \alpha_+(x_0) G_n^+(x_0) \vec{\sigma}(x_0) \Psi(x_0) \left[ \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^3 \right]_{\rho=-\epsilon R}^{\rho=\epsilon R} dx_0 \\ = \int_{\Sigma} \frac{1}{3} \alpha_+(x_0) G_n^+(x_0) \vec{\sigma}(x_0) \Psi(x_0) dx_0$$

On en déduit symétriquement que :

$$C_2 = \int_{\Sigma} \frac{1}{3} \alpha_-(x_0) G_n^-(x_0) \vec{\sigma}(x_0) \Psi(x_0) dx_0$$

Calcul de  $C_3$ 

La transformation biunivoque (2.40) étant toujours opérée,

$$C_3 = \int_{\Sigma} \alpha_+(x_0) G_n^-(x_0) \vec{\sigma}(x_0) \Psi(x_0) \int_{\rho=-\epsilon R}^{\rho=\epsilon R} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \\ \cdot \int_{B_-} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \int_{\Sigma \cap B(\epsilon a+x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda d\rho dx_0$$

Mais

$$\int_{B_-} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda = \int_{B(\epsilon a+x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda - \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \\ = 1 - \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \int_{\rho=-\epsilon R}^{\rho=\epsilon R} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \cdot \int_{B_-} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \left( \int_{\Sigma \cap B(\epsilon\alpha+x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) d\rho \\
&= \int_{\rho=-\epsilon R}^{\rho=\epsilon R} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \left\{ 1 - \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right\} \right) \left( \int_{\Sigma \cap B(\epsilon\alpha+x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) d\rho \\
&= \int_{\rho=-\epsilon R}^{\rho=\epsilon R} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) \int_{\Sigma \cap B(\epsilon\alpha+x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda d\rho - \int_{\rho=-\epsilon R}^{\rho=\epsilon R} \left( \int_{B_+} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right)^2 \left( \int_{\Sigma \cap B(\epsilon\alpha+x, \epsilon R)} \frac{1}{\epsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda-x}{\epsilon}\right) d\lambda \right) d\rho
\end{aligned}$$

Les deux termes du membre de droite ont déjà été calculés. Ils valent respectivement  $1/2$  et  $-1/3$ , de sorte que leur somme vaut  $1/6$ .

Par conséquent, on a :

$$C_3 = \int_{\Sigma} \frac{1}{6} \alpha_+(x_0) G_n^-(x_0) \vec{\sigma}(x_0) \Psi(x_0) dx_0$$

Et on en déduit par permutation sur le signe  $+$  et  $-$  à partir de  $C_3$ , l'expression de  $C_4$  à savoir :

$$C_4 = \int_{\Sigma} \frac{1}{6} \alpha_-(x_0) G_n^+(x_0) \vec{\sigma}(x_0) \Psi(x_0) dx_0$$

En sommant les contributions  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha \circ \vec{\sigma} \otimes \vec{n} \delta_{\Sigma} \circ \vec{G}} &= \left\{ \frac{1}{3} (\alpha_+ G_n^+ + \alpha_- G_n^-) + \frac{1}{6} (\alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+) \right\} \|\vec{G}\| \delta_{\Sigma} \\
&= \left\{ \frac{2}{3} \widehat{\alpha G}_n + \frac{1}{6} (\alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+) \right\} \|\vec{G}\| \delta_{\Sigma}
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement pour  $\int_{\Sigma} \alpha \widehat{\vec{G}} \cdot \nabla \vec{G}$ , la contribution

$$(2.62) \quad \int_{\Sigma} \widehat{\alpha \circ \vec{G} \circ \nabla \vec{G}} \longrightarrow \int_{\Sigma} (W_{\Sigma}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{3} \widehat{\alpha G}_n + \frac{1}{6} (\alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+) \right\} \|\vec{G}\| \delta_{\Sigma}$$

Puis, en regroupant les contributions (2.58) et (2.62), il vient enfin que la condition de saut associée à l'équation (1.4) est

$$(2.63) \quad \int_{\Sigma} \left\{ -\widehat{\alpha} W_{\Sigma} + \frac{2}{3} \widehat{\alpha G}_n + \frac{1}{6} (\alpha_+ V_n^- + \alpha_- V_n^+) \right\} \|\vec{G}\| + \chi \widehat{\alpha} \|\vec{P}\| \vec{n} = 0$$

### c - Discussion

Au chapitre I, nous avons déjà écrit quatre relations de saut (1.21), (1.22), (1.23), (1.24) relatives au système d'équations locales d'évolution

(1.11). Et il nous restait une équation de saut à déterminer pour le problème.

Si nous adjoignons la condition de saut (2.57) associée à l'équation (2.48) aux quatre conditions de saut déjà déterminées, nous obtenons le système de relations de saut :

$$(2.64) \quad \begin{cases} (a) & \llbracket (1 - \alpha) (U_n - W_\Sigma) \rrbracket = 0 \\ (b) & \llbracket (1 - \alpha) \rho (U_n - W_\Sigma) \rrbracket = 0 \\ (c) & \llbracket \alpha \rho_e (G_n - W_\Sigma) \rrbracket = 0 \\ (d) & \llbracket (1 - \alpha) \rho (U_n - W_\Sigma) \vec{U} + \alpha \rho_e (G_n - W_\Sigma) \vec{G} + P \vec{n} \rrbracket = 0 \\ (e) & \rho_e (-W_\Sigma + \hat{G}_n) \llbracket \vec{G} \rrbracket + \chi \llbracket P \rrbracket \vec{n} = 0 \end{cases}$$

Par contre, si nous leur adjoignons la condition de saut (2.63) associée à l'équation (1.4), nous obtenons le système de relations de saut

$$(2.65) \quad \begin{cases} (a) & (2.64, a) \\ (b) & (2.64, b) \\ (c) & (2.64, c) \\ (d) & (2.64, d) \\ (e) & \rho_e \left\{ -\hat{\alpha} W_\Sigma + \frac{2}{3} \hat{\alpha} \hat{G}_n + \frac{1}{6} (\alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+) \right\} \llbracket \vec{G} \rrbracket + \chi \hat{\alpha} \llbracket P \rrbracket \vec{n} = 0 \end{cases}$$

Toute la question reste de savoir sur quels types de surfaces de discontinuité les deux systèmes (2.64) et (2.65) représenteront-ils les mêmes relations de saut. Sur de telles surfaces de discontinuité, on pourrait utiliser indifféremment l'un ou l'autre des deux systèmes.

#### Premièrement

A partir de l'équation (e) de (2.64) nous pouvons voir que

$$\chi \llbracket P \rrbracket \vec{n} = \rho_e (W_\Sigma - \hat{G}_n) \llbracket \vec{G} \rrbracket$$

Portons cette valeur dans l'équation (e) de (2.65). Nous obtenons la relation

$$\rho_e \left\{ -\hat{\alpha} W_\Sigma + \frac{2}{3} \hat{\alpha} \hat{G}_n + \frac{1}{6} (\alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+) \right\} \llbracket \vec{G} \rrbracket + \rho_e \hat{\alpha} (W_\Sigma - \hat{G}_n) \llbracket \vec{G} \rrbracket = 0$$

ce qui donne, par factorisation de  $\rho_e \llbracket \vec{G} \rrbracket$ :

$$\left\{ -\hat{\alpha} \hat{G}_n + \frac{2}{3} \hat{\alpha} \hat{G}_n + \frac{1}{6} (\alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+) \right\} \left[ \vec{G} \right] = 0$$

On a

$$\begin{aligned} & -\hat{\alpha} \hat{G}_n + \frac{2}{3} \hat{\alpha} \hat{G}_n + \frac{1}{6} (\alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+) \\ &= -\frac{(\alpha_+ + \alpha_-)}{2} \times \frac{(G_n^+ + G_n^-)}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{(\alpha_+ G_n^+ + \alpha_- G_n^-)}{2} + \frac{1}{6} (\alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+) \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \{ \alpha_+ G_n^+ + \alpha_- G_n^- \} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \{ \alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+ \} \\ &= \frac{1}{12} \{ \alpha_+ G_n^+ + \alpha_- G_n^- - (\alpha_+ G_n^- + \alpha_- G_n^+) \} \\ &= \frac{1}{12} \{ \alpha_+ (G_n^+ - G_n^-) - \alpha_- (G_n^+ - G_n^-) \} \\ &= \frac{1}{12} (\alpha_+ - \alpha_-) (G_n^+ - G_n^-) \\ &= \frac{1}{12} \left[ \alpha \right] \left[ G_n \right] \end{aligned}$$

Donc,  $\left[ \alpha \right] \left[ G_n \right] \left[ \vec{G} \right] = 0$

ce qui revient simplement à :

$$(2.66) \quad \left[ \alpha \right] \left[ G_n \right] = 0$$

Nous sommes donc conduits à  $\left[ \alpha \right] = 0$  ou  $\left[ G_n \right] = 0$ .  $\left[ \alpha \right] = 0$  est vérifié à la frontière  $z = F(x, y, t)$  des fluides, et  $\left[ G_n \right] = 0$  est vérifié à la frontière  $z = E(x, y, t)$  des particules où  $\left[ \alpha \right] \neq 0$ , en dehors du cas où  $z = E(x, y, t)$  est une frontière libre (sur une frontière libre,  $\alpha \neq 0$  d'un côté de la frontière, alors que  $\alpha$  est identiquement nulle de l'autre (fig 2, p.21).  $\left[ \alpha \right] y$  est donc non nul, mais on ne peut définir  $\left[ G_n \right]$  puisque  $G_n$  est non défini là où  $\alpha = 0$ ). (2.64) et (2.65) sont donc équivalents lorsque  $z = E(x, y, t)$  n'est pas une frontière libre.

Deuxièmement : Cas où  $z = E(x, y, t)$  est une frontière libre

Pour ce type de discontinuité, les systèmes (2.64) et (2.65) ne peuvent représenter les conditions de saut à y considérer. En effet, elles font intervenir de manière isolée  $G_n^+$  et  $G_n^-$  ou  $\vec{G}^+$  et  $\vec{G}^-$  dans les équations. Or ces quantités y restent indéterminées, en dehors des groupements  $\alpha G_n$  ou  $\alpha \vec{G}$ . Elles introduisent ainsi dans le problème posé, des quantités indéterminées rendant de fait impossible sa résolution.

Il importe donc de redéfinir un système d'équations locales qui soit équivalent, dans les domaines de continuité, aux systèmes ayant conduit aux relations de saut (2.64) et (2.65) et qui soient

susceptibles d'avoir des contributions aux discontinuités prenant en compte le cas où  $\alpha$  vaut zéro d'un côté de la discontinuité. Un tel système, s'il existe, sera appelé un système admissible associé à un système d'équations locales d'évolution données.

En général, en rendant le système de départ quasi conservatif, c'est-à-dire en combinant les équations de départ dans le système de manière à faire apparaître le maximum de termes conservatifs, on arrive à obtenir le système admissible, à des combinaisons internes aux équations du système près.

Dans notre cas présent, le système admissible en question est le système quasi-conservatif (1.11) où seul le terme  $\alpha \nabla P$  était non conservatif (système déduit directement à partir des équations globales ou intégrales de bilan). Mais nous avons trouvé sa contribution au § 2.4.2, formule (2.44), de sorte que la condition de saut associée à la relation (e) de (1.11) est

$$\left[ \int_{\Sigma} \alpha (G_n - W_z) \vec{G} + \lambda \hat{\alpha} P \vec{n} \right] = 0$$

Et ainsi, le système de conditions de saut recherchées pour les équations du mouvement au départ se trouve être

$$(2.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad (2.64, a) \\ (b) \quad (2.64, b) \\ (c) \quad (2.64, c) \\ (d) \quad (2.64, d) \\ (e) \quad \left[ \int_{\Sigma} \alpha (G_n - W_z) \vec{G} + \lambda \hat{\alpha} P \vec{n} \right] = 0 \end{array} \right.$$

Dans (2.67),  $\vec{G}$  apparaît toujours par le groupement  $\alpha \vec{G}$  qui s'annule en même temps que  $\alpha$ . Par conséquent, nous ne sommes plus confrontés au problème d'indétermination introduit dans les systèmes (2.64) et (2.65) par leur dernière équation de saut (e), lorsque  $z = E(x, y, t)$  est une frontière libre.

De plus, (2.67) reste encore valable pour les surfaces de discontinuité où (2.66) est vérifiée et recouvre (2.64) ou (2.65).

En conclusion, il faut noter que l'étude que nous venons de mener via les produits de distributions généralisées est tout à fait nouvelle et ouvre pour la première fois (du moins à notre connaissance) la voie dans l'étude des systèmes non conservatifs pour lesquels les conditions de saut n'ont pu être rigoureusement établies jusqu'alors et donc quasiment non considérés dans la littérature. Dès lors, nous avons un outil assez puissant qui va nous permettre d'aborder un plus grand nombre de problèmes qui ne pouvaient

être traités jusqu'alors.

Dans les problèmes physiques, les systèmes d'équations locales qui vont servir à l'établissement des relations de saut seront ceux qui résultent directement des équations intégrales (ou globales) d'une part, et d'autre part, ils doivent prendre en compte la plupart des situations physiques qu'on désire étudier. Et cela, de manière à ne pas introduire dans les relations aux discontinuités, des indéterminations pesantes et regrettables. Dans le cas présent, non seulement les équations locales doivent résulter des équations intégrales, mais en plus, les relations de saut qui vont en résulter doivent faire intervenir  $\vec{U}$  et  $\vec{G}$  non pas de manière isolée, mais respectivement par les groupements  $(1 - \alpha)\vec{U}$  et  $\alpha\vec{G}$ , de manière à prendre en compte le cas de la frontière libre (où  $\alpha$  et par voie de conséquence  $\alpha\vec{G}$  est identiquement nulle d'un côté de la discontinuité).

Dans le chapitre prochain, nous allons tenir compte explicitement de ce principe pour reformuler les forces de masse induite et tourbillonnaire de sustentation proposées initialement par DREW, lorsqu'il n'y a pas de frontière libre dans le milieu.

Enfin, retenons les résultats essentiels suivants issus de la théorie des distributions généralisées :

1) si une équation de locale de continuité a la forme

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div } A = \varphi \left( \frac{\partial b}{\partial t} + \text{div } B \right)$$

alors la relation de saut correspondante est  $\boxed{A_n - W_z a} = \hat{\varphi} \boxed{B_n - W_z b}$

2) si une équation de continuité a la forme

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div } A = \varphi_1 \varphi_2 \left( \frac{\partial b}{\partial t} + \text{div } B \right)$$

Deux types de relations de saut peuvent lui être associées suivant la manière de considérer le produit  $\varphi_1 \varphi_2$  dans l'espace  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)$  des distributions généralisées.

a) si on considère  $\varphi_1 \varphi_2$  comme un "groupement fonction discontinue"  $\varphi$ ,

alors l'équation précédente s'écrit au sens des distributions généralisées :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div } A = (\varphi_1 \cdot \varphi_2) \odot \left( \frac{\partial b}{\partial t} + \text{div } B \right)$$

où  $\cdot$  est le produit usuel des fonctions classiques et  $\odot$  représente le produit dans  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^4)$ . Dans ce cas, la règle précédente pour l'établissement des relations de saut s'applique et la relation de saut correspondante à l'équation de continuité se trouve être :

$$\boxed{A_n - W_z a} = \widehat{\varphi_1 \varphi_2} \boxed{B_n - W_z b}$$



b) En revanche, si  $\varphi_1 \varphi_2$  n'est pas un groupement, mais un produit de deux fonctions discontinues intervenant indépendamment, alors  $\varphi_1 \varphi_2$  est au sens de  $G(\mathbb{R}^+)$ ,  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  de sorte que l'équation de continuité devient dans  $G(\mathbb{R}^+)$ :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \operatorname{div} A = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \left( \frac{\partial b}{\partial t} + \operatorname{div} B \right)$$

Cette équation ne conduit pas à la relation de saut précédente (exemple de la relation (2.63) associée à l'équation (1.4))

Par conséquent, la règle :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \operatorname{div} A = \varphi \left( \frac{\partial b}{\partial t} + \operatorname{div} B \right) \longmapsto \llbracket A_n - W_x \alpha \rrbracket = \hat{\varphi} \llbracket B_n - W_x b \rrbracket$$

n'est valable seulement que si  $\varphi$  est un "groupement fonction" et non un produit de fonctions isolées.

Pour savoir si  $\varphi$  doit être considéré comme un "groupement fonction" ou un "vrai" produit de fonctions, on doit se référer à la physique du problème. Par exemple, dans le problème avec frontière libre que nous traitons,  $\vec{G}$  doit intervenir par le groupement  $\alpha \vec{G}$ . Par conséquent,  $\alpha \vec{G}$  n'est pas le produit de la fonction  $\alpha$  par la fonction  $\vec{G}$ .

## VI. APPLICATION A L'ÉCOULEMENT DE CISAILLEMENT

Si nous appliquons la seconde propriété de la relation de saut  $\llbracket \cdot \rrbracket$  étudiée au chapitre I et exprimée par la formule (1.27) à la relation (b) du système (2.67), celle-ci va s'écrire :

$$\int_{\Sigma} \left[ (1 - \alpha) (U_n - W_x) \right] + (1 - \alpha)_- (U_n - W_x)_- \llbracket f \rrbracket = 0$$

Mais comme  $\llbracket (1 - \alpha) (U_n - W_x) \rrbracket = 0$  d'après la relation (a) de (2.67), la relation (b) de (2.67) va s'écrire tout simplement

$$(1 - \alpha) (U_n - W_x) \llbracket f \rrbracket = 0$$

où  $(1 - \alpha) (U_n - W_x)$  peut désigner indifféremment

$$(1 - \alpha)_- (U_n - W_x)_- \text{ ou } (1 - \alpha)_+ (U_n - W_x)_+$$

la relation (e) de (2.67) implique

$$\llbracket \rho_e \alpha (G_n - W_x) \vec{G} \rrbracket = -\chi \hat{\alpha} \llbracket P \rrbracket \vec{n}$$

Et en reportant cette expression de  $\llbracket \rho_e \alpha (G_n - W_x) \vec{G} \rrbracket$  dans la relation (d) de (2.67), on trouve la relation

$$\llbracket (1 - \alpha) f (U_n - W_x) \vec{U} + (1 - \chi \hat{\alpha}) P \vec{n} \rrbracket = 0$$

qui peut être réécrite,

$$(1 - \alpha) f (U_n - W_z) \llbracket \vec{U} \rrbracket + (1 - \chi \hat{\alpha}) \llbracket P \rrbracket \vec{n} = 0$$

en raison de la relation (b) de (2.67) qui permet d'écrire que

$$\llbracket (1 - \alpha) f (U_n - W_z) \vec{U} \rrbracket = (1 - \alpha) f (U_n - W_z) \llbracket \vec{U} \rrbracket$$

(2.67) est finalement équivalent à

$$(2.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \llbracket (1 - \alpha) (U_n - W_z) \rrbracket = 0 \\ (b) \quad (1 - \alpha) (U_n - W_z) \llbracket f \rrbracket = 0 \\ (c) \quad \llbracket \alpha f_e (G_n - W_z) \rrbracket = 0 \\ (d) \quad (1 - \alpha) f (U_n - W_z) \llbracket \vec{U} \rrbracket + (1 - \chi \hat{\alpha}) \llbracket P \rrbracket \vec{n} = 0 \\ (e) \quad \llbracket f_e \alpha (G_n - W_z) \vec{G} \rrbracket = -\chi \hat{\alpha} \llbracket P \rrbracket \vec{n} \end{array} \right.$$

### 2.5.1 Equations de saut à la frontière $z = F(x, y, t)$

A la frontière  $z = F(x, y, t)$ , nous avons deux fluides différents de part et d'autre de cette frontière et nous y avons donc  $\llbracket \rho \rrbracket \neq 0$  et la relation (b) de (2.68) implique

$$(2.69) \quad U_n = W_F$$

des deux côtés de la discontinuité frontière, puisque  $(1 - \alpha)$  ne s'annule pas. La frontière  $z = F(x, y, t)$  est donc une surface matérielle pour les deux fluides. Les particules qui y étaient au départ, y restent tout au long du mouvement du milieu.

D'autre part, en tenant compte de (2.69) dans l'équation (d) de (2.68), il vient

$$(2.70) \quad \llbracket P \rrbracket = 0$$

puisque  $(1 - \chi \hat{\alpha})$  ne peut s'annuler. Ceci est dû au fait que  $\alpha < 1$  dans tout l'écoulement, et donc  $\chi \hat{\alpha} < 1$  en raison de la valeur de  $\chi$  (0 ou 1).

Il y a donc continuité de la pression  $P$  à la traversée de la frontière  $z = F(x, y, t)$ .

En portant (2.70) dans la relation (2.68, e), on s'aperçoit que

$$(2.71) \quad \llbracket \alpha f_e (G_n - W_F) \vec{G} \rrbracket = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha(G_n - W_f) \llbracket \vec{G} \rrbracket = 0$$

en tenant compte de (2.68,c).

Dans l'égalité précédente,  $\alpha(G_n - W_f)$  désigne indifféremment  $\alpha_{(z)} (G_n^{(z)} - W_f)$ . Nous sommes donc conduits à :

$$\alpha_{(z)} = 0$$

ou

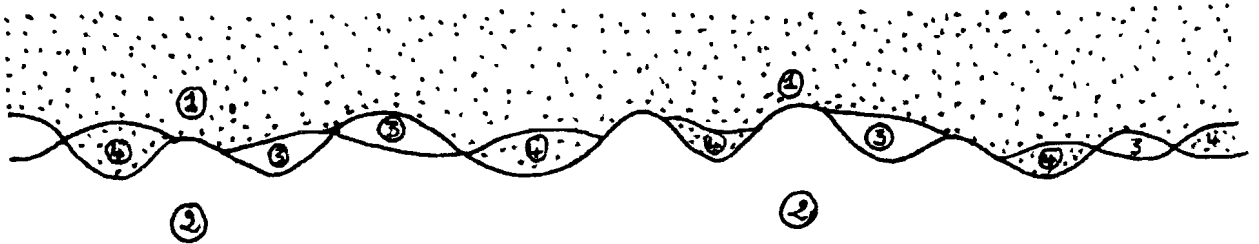
$$G_n^{(z)} - W_f = 0$$

ou encore

$$\llbracket \vec{G} \rrbracket = 0$$

Si l'on suppose que les frontières  $z = F(x,y,t)$  des deux fluides et  $z = E(x,y,t)$  des particules se dissocient, alors nécessairement, à un certain moment, on doit avoir  $G_n - W_f \neq 0$  en certains points de  $z = F(x,y,t)$ . C'est le mécanisme de dédoublement des frontières par onde de choc en  $z = E(x,y,t)$  que nous avons exposé à la fin du chapitre I.

L'écoulement au voisinage des deux frontières a l'aspect le plus général suivant :



**Figure 1** : Aspect général de l'écoulement au voisinage de  $z = F(x, y, t)$  (frontières 1→4, 1→2, 3→4) et  $z = E(x, y, t)$  (frontières 2→4, 1→2, 1→3)

Et au cours du mouvement, on peut passer par toutes les configurations imaginables possibles.

Entre les régions 1 et 2, nous avons toujours  $\llbracket \alpha \rrbracket \neq 0$  alors qu'entre 2 et 3, on a toujours  $\llbracket \alpha \rrbracket = 0$ . En revanche, entre 1 et 4, on ne peut rien conclure quant au  $\llbracket \alpha \rrbracket$  en tout point. On a  $\llbracket P \rrbracket = K_f \llbracket \alpha \rrbracket$  d'après (1.36), où  $K_f = \int_{\Sigma} (G_n - W_f)_+ \cdot (G_n - W_f)_-$ . Ce qui nous donne seulement  $K_f \llbracket \alpha \rrbracket = 0$  en raison de (2.70). A chaque instant, on peut avoir  $\llbracket \alpha \rrbracket \neq 0$  en certains points, pourvu que  $(G_n - W_f)_+ \cdot (G_n - W_f)_-$  soit nul, où  $\llbracket \alpha \rrbracket = 0$  pourvu que  $(G_n - W_f)_+ \cdot (G_n - W_f)_-$  soit non nul.

En toute généralité, nous aurons en  $z = F(x,y,t)$  les relations de saut :

$$(2.72) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad U_{n_+} = W_f \\ (b) \quad U_{n_-} = W_f \\ (c) \quad \llbracket \alpha (G_n - W_f) \rrbracket = 0 \\ (d) \quad \llbracket P \rrbracket = 0 \\ (e) \quad \alpha (G_n - W_f) \llbracket \vec{G} \rrbracket = 0 \end{array} \right.$$

### 2.6.2 Equations de saut à la frontière $z = E(x, y, t)$

Comme  $z = E(x, y, t)$  représente la frontière des particules,  $\alpha$  va être identiquement nulle d'un côté de la frontière et rester non nulle de l'autre. Si nous marquons du signe (-) les quantités définies du côté où  $\alpha = 0$  et que nous récrivons (2.68) en  $z = E(x, y, t)$ , nous trouvons

$$(2.73) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad (1 - \alpha)_+ (U_n - W_E)_+ - (U_n - W_E)_- = 0 \\ (b) \quad (1 - \alpha)_+ (U_n - W_E)_+ \llbracket \rho \rrbracket = 0 \\ (c) \quad G_n^+ - W_E = 0 \\ (d) \quad (1 - \alpha)_+ \int_+ (U_n - W_E)_+ \llbracket \vec{U} \rrbracket + (1 - \lambda \frac{\alpha}{2})_+ \llbracket P \rrbracket \vec{n} = 0 \\ (e) \quad \chi \llbracket P \rrbracket = 0 \end{array} \right.$$

La relation (c) ci-dessus implique

$$G_n = W_E$$

c'est-à-dire que la frontière  $z = E(x, y, t)$  est une surface matérielle pour les particules. Quant à la relation (e), elle implique

$$\begin{array}{l} \chi = 0 \\ \text{ou} \\ \llbracket P \rrbracket = 0 \end{array}$$

*a - Cas où  $\chi = 0$  (modèle sans couplage de pression de SAFFMAN-MARBLE)*

Le système (2.73) est dans ce cas-là réduit à ses quatre premières équations.

Les conditions de saut pour le modèle de SAFFMAN-MARBLE s'écrivent donc

$$(2.74) \quad \begin{cases} (a) & (1 - \alpha)_+ (U_n - W_E)_+ - (U_n - W_E)_- = 0 \\ (b) & (U_n - W_E)_+ \llbracket P \rrbracket = 0 \\ (c) & G_n^* - W_E = 0 \\ (d) & (1 - \alpha)_+ \int_+ (U_n - W_E)_+ \llbracket \vec{U} \rrbracket + \llbracket P \rrbracket \vec{n} = 0 \end{cases}$$

b - Cas où  $\alpha = 1$  (modèle avec couplage de pression de DREW-SEGEL)

On a nécessairement dans ce cas-là

$$\llbracket P \rrbracket = 0$$

et la relation (d) de (2.73) implique

$$(1 - \alpha)_+ \int_+ (U_n - W_E)_+ \llbracket \vec{U} \rrbracket = 0$$

soit,

$$U_n - W_E = 0$$

ou bien

$$\llbracket \vec{U} \rrbracket = 0$$

Mais comme la seconde condition  $\llbracket \vec{U} \rrbracket = 0$  implique également la condition

$$\llbracket U_n^* - W_E \rrbracket = 0$$

et que la relation (a) de (2.73) peut aussi s'écrire

$$\llbracket U_n - W_E \rrbracket - \alpha_+ (U_n - W_E)_+ = 0$$

il va s'ensuivre que

$$\alpha_+ (U_n - W_E)_+ = 0$$

et donc

$$(U_n - W_E)_+ = 0$$

puisque  $\alpha$  est non nul.

Nous aurons donc dans tous les cas

$$U_n^* = W_E$$

ce qui signifie que dans le cas du modèle de DREW-SEGEL où  $\alpha = 1$ , la frontière  $z = E(x, y, t)$  des particules est également une surface matérielle pour les fluides, et donc les surfaces  $z = F(x, y, t)$  et  $z = E(x, y, t)$  restent une même et unique surface. Dans ces conditions, les régions 3 et 4 de l'écoulement n'existent plus et les conditions de saut en l'unique frontière  $z = E(x, y, t)$  s'écrivent alors

$$(2.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad U_n^* = W_E \\ (b) \quad U_n^- = W_E \\ (c) \quad G_n^* = W_E \\ (d) \quad \llbracket P \rrbracket = 0 \end{array} \right.$$

*c - Discussion*

Dans le cas du modèle de DREW-SEGEL, la condition très forte de non dissociation des frontières nous a conduit au système de relations de saut (2.75) dans lequel les égalités (a) et (c) impliquent la condition

$$(2.76) \quad G_n^* = U_n$$

Cette condition peut s'avérer surabondante dans plusieurs cas. Tel peut être le cas lorsque  $G_n$  est une fonction linéaire de  $U_n$ . La condition (2.76) peut nous conduire alors à une impossibilité de trouver une solution autre que la solution triviale identiquement nulle. En effet, si  $G_n$  est une fonction linéaire de  $U_n$ , alors  $G_n$  va s'écrire

$$(2.77) \quad G_n = a U_n, \quad \text{où } a \text{ est un coefficient.}$$

De telle sorte que (2.76) va nous donner

$$a U_n = U_n$$

soit

$$(a - 1)U_n = 0$$

Lorsque  $a \neq 1$ , et ce qui peut être le cas, comme dans l'étude des petites perturbations où  $G_n$  et  $U_n$  peuvent être linéairement reliées, il va s'ensuire que  $U_n = 0$  et il en sera de même de  $G_n$ . Les conditions de saut relatives au modèle de DREW-SEGEL vont dans ce cas-là nous conduire à l'impossibilité de trouver des modes de perturbation non triviaux.

### CHAPITRE III

#### MODELE D'EQUATIONS AVEC COUPLAGE PAR DES TERMES INERTIELS D'INTERACTION

##### I. GENERALITES

Dans les chapitres précédents, nous avons considéré les équations de mouvement du fluide porteur et des particules qu'il contient, en ne prenant en compte, dans les équations de la quantité de mouvement, que la force de traînée comme seule force d'interaction fluide-particules. L'analyse des conditions de saut nous avait conduit, dans le cas du modèle de DREW-SEGEL, à une non-dissociation de la frontière des deux fluides  $Z = F(x,y,t)$ , d'avec celle des particules  $z = E(x,y,t)$  après perturbation de l'écoulement initial.

De plus, nous avons montré que dans le cas du modèle de DREW-SEGEL, lorsque la vitesse normale des particules est reliée linéairement à celle du fluide qui les contient, alors ces deux vitesses deviennent identiquement nulles. Ce qui augure d'une situation assez contraignante pour les modes de perturbation pouvant évoluer dans un tel milieu. Ils devront dès lors être aussi identiquement nuls, rendant ainsi impossible l'évolution des perturbations de faibles amplitudes.

Cette déconvenue doit être recherchée dans la faiblesse du modèle de DREW-SEGEL qui, bien qu'en apparence plus élaboré que celui de SAFFMAN-MARBLE (puisque prenant en compte un couplage de pression) reste tout de même perfectible.

Il est tout à fait reconnu aujourd'hui que dans un fluide non visqueux contenant des particules, les différences entre les gradients spatiaux et temporels des vitesses du fluide porteur et des particules vont générer des forces d'interaction. Il y a la force de masse induite provenant de la différence d'accélération, ainsi que des forces tourbillonnaires engendrant la sustentation des particules (DREW-LAHEY [12]. Ces forces peuvent-elles engendrer le dédoublement des frontières  $z = F(x,y,t)$  des fluides et  $z = E(x,y,t)$  des particules ?

II. INFLUENCE DES FORCES COMPLEMENTAIRES :  
MASSE INDUITE ET FORCE TOURBILLONNAIRE DE SUSTENTATION

3.2.1 Influence de la masse induite sur les conditions de saut aux discontinuités.

En présence de la force due à la masse induite que nous notons  $M_1$ , les équations du mouvement du milieu particulaire se réduisent aux équations de continuité

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho = 0 \\ (b) \quad \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \rho + \operatorname{div} (1-\alpha) \rho \vec{U} = 0 \\ (c) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G}) = 0 \\ (d) \quad (1-\alpha) \rho \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right) = -(1-\alpha) \nabla P + \alpha m (\vec{G} - \vec{U}) - M_1 \\ (e) \quad \alpha \rho_e \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right) = -\alpha \nabla P + \alpha m (\vec{U} - \vec{G}) + M_1 \end{array} \right.$$

où

$$(3.2) \quad M_1 = \alpha \rho M \left\{ \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right) - \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right) \right\}$$

avec  $M$ , un coefficient constant de couplage.

Nous pouvons remarquer qu'en l'absence de la force de masse induite  $M_1$ , (3.1) se réduit aux modèles considérés dans la première partie.

En vue des relations de saut associées au problème physique lorsque le milieu comporte des discontinuités, il importe de considérer le système d'équations locales directement issu des équations intégrales et qui est équivalent à (3.1) dans les domaines de continuité, à savoir

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) + \operatorname{div} (1-\alpha) \vec{U} = 0 \\ (b) \quad \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \rho + \operatorname{div} (1-\alpha) \rho \vec{U} = 0 \\ (c) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G}) = 0 \\ (d) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (1-\alpha) \rho \vec{U} + \alpha \rho_e \vec{G} \right\} + \operatorname{div} \left\{ (1-\alpha) \rho \vec{U} \otimes \vec{U} + \alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G} \right\} = -\nabla P \\ (e) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e \vec{G}) + \operatorname{div} (\alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G}) = -\alpha \nabla P + \alpha m (\vec{U} - \vec{G}) + M_1 \end{array} \right.$$



Nous avons déjà trouvé dans le chapitre précédent les contributions aux discontinuités des différents termes qui apparaissent dans le système (3.3) à l'exception du terme  $M_1$ .

Ce terme est non conservatif au regard de son expression (3.2). Nous allons donc lui appliquer les résultats relatifs à la théorie des distributions non linéaires développées dans le chapitre précédent, afin de trouver sa contribution aux discontinuités.

Remarquons au préalable que  $M_1$  peut s'écrire sous la forme :

Cependant, si nous ne tenons pas compte du principe expliqué dans la conclusion faisant suite au système (2.67), et que nous considérons dans (3.2) le produit, au sens des distributions généralisées, de  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\vec{U}$ ,  $\vec{G}$  et leurs dérivées de manière isolée, à savoir :

$$M_1 = M \alpha \otimes \rho \otimes \left\{ \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \otimes \nabla \vec{U} \right) - \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{G} \otimes \nabla \vec{G} \right) \right\}$$

on s'exposera de façon certaine à des indéterminations liées à  $[[\vec{U}]]$  ou  $[[\vec{G}_n]]$  à la frontière libre. Il convient donc de transformer l'écriture (3.2) de  $M_1$  en écrivant :

$$M_1 = M \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot (1-\alpha) \int \left\{ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right\} - M \frac{\rho}{\rho_e} \cdot \alpha \int_e \left\{ \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right\}$$

Et comme

$$(1-\alpha) \int \left\{ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \int \vec{U} + \text{div} (1-\alpha) \int \vec{U} \otimes \vec{U}$$

en raison de (3.3, b), et que

$$\alpha \int_e \left\{ \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{G} \cdot \nabla \vec{G} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \int_e \vec{G}) + \text{div} (\alpha \int_e \vec{G} \otimes \vec{G})$$

en raison de (3.3, c), on obtient

$$M_1 = M \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \int \vec{U} + \text{div} (1-\alpha) \int \vec{U} \otimes \vec{U} \right\} \\ - M \frac{\rho}{\rho_e} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \int_e \vec{G}) + \text{div} (\alpha \int_e \vec{G} \otimes \vec{G}) \right\}$$

Soit au sens des distributions généralisées :

$$(3.4) \quad M_1 = M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \otimes \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \int \vec{U} + \text{div} (1-\alpha) \int \vec{U} \otimes \vec{U} \right\} \\ - \frac{M}{\rho_e} \int_e \otimes \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \int_e \vec{G}) + \text{div} (\alpha \int_e \vec{G} \otimes \vec{G}) \right\}$$

ce qui nous donne la contribution

$$(3.5) \quad \tilde{M}_1 = M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \cdot \left[ (1-\alpha) \int (U_n - W_\Sigma) \vec{U} \right] - \frac{M}{\rho_e} \hat{\int}_e \cdot \left[ \alpha \int_e (G_n - W_\Sigma) \vec{G} \right]$$

D'où les conditions de saut relatives à (3.3)

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad (2.64, a) \\ (b) \quad (2.64, b) \\ (c) \quad (2.64, c) \\ (d) \quad \llbracket P \rrbracket \vec{n} = - \llbracket (1-\alpha) f (U_n - W_\Sigma) \vec{U} + \alpha \rho_e (G_n - W_\Sigma) \vec{G} \rrbracket \\ (e) \quad \llbracket \alpha \rho_e (G_n - W_\Sigma) \vec{G} \rrbracket = -\chi \hat{\alpha} \llbracket P \vec{n} \rrbracket + \tilde{M}_z \end{array} \right.$$

Portons dans (3.6,e) l'expression de  $\tilde{M}_z$  et celle de  $\llbracket P \vec{n} \rrbracket$  déduite de (3.6,d) et regroupons les termes. Le système (3.6) devient alors équivalent à

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \llbracket (1-\alpha) (U_n - W_\Sigma) \rrbracket = 0 \\ (b) \quad \llbracket (1-\alpha) f (U_n - W_\Sigma) \rrbracket = 0 \\ (c) \quad \llbracket \alpha \rho_e (G_n - W_\Sigma) \rrbracket = 0 \\ (d) \quad \llbracket P \rrbracket \vec{n} = - \llbracket (1-\alpha) f (U_n - W_\Sigma) \vec{U} + \alpha \rho_e (G_n - W_\Sigma) \vec{G} \rrbracket \\ (e) \quad \left( 1 + \frac{M}{\rho_e} \hat{\rho} - \chi \hat{\alpha} \right) \llbracket \alpha \rho_e (G_n - W_\Sigma) \vec{G} \rrbracket \\ \quad - \left( \chi \hat{\alpha} + M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) \llbracket (1-\alpha) f (U_n - W_\Sigma) \vec{U} \rrbracket = 0 \end{array} \right.$$

A la frontière  $z = E(x,y,t)$  des particules,  $G_n = W_E$  et l'équation (e) de (3.7) se réduit à

$$\left( \chi \hat{\alpha} + M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) \llbracket (1-\alpha) f (U_n - W_E) \vec{U} \rrbracket = 0$$

On est donc conduit de nouveau à la condition contraignante

$$\llbracket (1-\alpha) f (U_n - W_E) \vec{U} \rrbracket = 0, \text{ impliquant } U_n = W_E \text{ en tout point de } z = E(x,y,t)$$

Et comme dans le cas du modèle de DREW-SEGEL, on arrive aux mêmes conclusions : les frontières  $z = F(x,y,t)$  et  $z = E(x,y,t)$  ne se dédoublent pas. Elles restent une même et unique surface au cours du mouvement.

Nous pouvons donc conclure que la force de masse induite n'est pas responsable du mécanisme du dédoublement des deux frontières.

### 3.2.2 Importance de la force tourbillonnaire dans le mécanisme de dédoublement des deux frontières $z = F(x,y,t)$ et $z = E(x,y,t)$

Prenons maintenant en compte la force tourbillonnaire dans les équations du mouvement. Cette force résulte de la différence de vitesse entre le fluide porteur et les particules, et de la présence d'un gradient spatial dans le mouvement du milieu. Elle a pour expression :

$$(3.8) \quad M_2 = L (\text{rot } \vec{U}) \wedge \alpha f (\vec{G} - \vec{U})$$

où  $L$  est un coefficient de couplage constant. Cette force est visiblement non objective. Cependant, cela ne constitue pas un handicap pour nous, dans la mesure où nous travaillons dans des référentiels galiléens. Lorsque ce n'est pas le cas, la question de l'objectivité des forces d'interaction fluide-particules peut se poser. Cette question reste encore ouverte, et il y a divergence de point de vue entre les thermodynamiciens des milieux diphasiques.

Dès lors, le nouveau système d'équations du mouvement est obtenu en remplaçant seulement dans (3.1) ou (3.3),  $M_1$  par  $M_1 + M_2$ .

Les conditions de saut relatif à ce nouveau système seront similaires à (3.6), système dans lequel on remplacera  $\tilde{M}_1$  par  $\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2$ . Il reste donc à déterminer  $\tilde{M}_2$ . Pour cela, remarquons que  $M_2$  peut aussi s'écrire (voir [12]) :

$$(3.9) \quad M_2 = L \alpha f (\vec{G} - \vec{U}) \cdot (\nabla \vec{U} - (\nabla \vec{U})^t)$$

Et donc,

$$\tilde{M}_2 = \overbrace{L \alpha f (\vec{G} - \vec{U}) \otimes \nabla \vec{U}} - \overbrace{L \alpha f (\vec{G} - \vec{U}) \otimes (\nabla \vec{U})^t}$$

A partir de la théorie de distributions non linéaires que nous avons mise en place au chapitre précédent, nous avons

$$\begin{aligned} \overbrace{L \alpha f (\vec{G} - \vec{U}) \otimes \nabla \vec{U}} &= L \left[ \overbrace{\vec{U}} \right] \otimes \vec{n} \cdot \overbrace{\alpha f (\vec{G} - \vec{U})} \\ &= L \overbrace{\alpha f (G_n - U_n)} \left[ \overbrace{\vec{U}} \right] \end{aligned}$$

Quant à  $\alpha f (\vec{G} - \vec{U}) \cdot (\nabla \vec{U})^t$ , remarquons ceci :

si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont deux vecteurs, alors, avec la convention de l'indice de sommation, nous avons :

$$(3.10) \quad \vec{a} \cdot (\nabla \vec{b})^t = \vec{e}_j \otimes \frac{\partial \vec{b}}{\partial x_j} \cdot \vec{a}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad \widehat{\vec{a} \circ (\nabla \vec{b})^t} &= \vec{e}_j \circ \left[ \widehat{\vec{b} \cdot n_j} \right] \cdot \hat{\vec{a}} \\
 &= n_j \vec{e}_j \circ \left[ \widehat{\vec{b}} \right] \cdot \hat{\vec{a}} \\
 &= (\hat{\vec{a}} \cdot \left[ \widehat{\vec{b}} \right]) \vec{n}
 \end{aligned}$$

où  $\cdot$  représente le produit scalaire de deux vecteurs et  $\circ$  leur produit tensoriel.

Par conséquent, nous aurons

$$\widehat{L \alpha f(\vec{G} - \vec{U}) \circ (\nabla \vec{U})^t} = L \left( \widehat{\alpha f(\vec{G} - \vec{U}) \cdot \left[ \widehat{\vec{U}} \right]} \right) \vec{n}$$

Et par suite,

$$\tilde{M}_2 = L \left\{ \widehat{\alpha f(G_n - U_n) \left[ \widehat{\vec{U}} \right]} - \left( \widehat{\alpha f(\vec{G} - \vec{U}) \cdot \left[ \widehat{\vec{U}} \right]} \right) \vec{n} \right\}$$

Dans l'expression ci-dessus, décomposons les vecteurs suivant leurs composantes tangentielle et normales. Nous pouvons alors la réécrire :

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad \tilde{M}_2 &= L \left\{ \widehat{\alpha f(G_n - U_n) \cdot \left[ \widehat{U_n \vec{n} + \vec{U}_t} \right]} \right. \\
 &\quad \left. - \left( \widehat{\alpha f(G_n - U_n) \left[ \widehat{U_n} \right]} \vec{n} + \left( \widehat{\alpha f(\vec{G}_t - \vec{U}_t) \cdot \left[ \widehat{\vec{U}_t} \right]} \right) \vec{n} \right) \right\} \\
 &= L \left\{ \widehat{\alpha f(G_n - U_n) \left[ \widehat{\vec{U}_t} \right]} - \left( \widehat{\alpha f(\vec{G}_t - \vec{U}_t) \cdot \left[ \widehat{\vec{U}_t} \right]} \right) \vec{n} \right\}
 \end{aligned}$$

Les nouvelles relations de saut seront alors :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \text{(a) } (3.7, a) \\
 \text{(b) } (3.7, b) \\
 \text{(c) } (3.7, c) \\
 \text{(d) } (3.7, d) \\
 \text{(e) } \left( 1 + \frac{M}{f_e} \hat{f} - \alpha \hat{\alpha} \right) \left[ \widehat{\alpha f_e (G_n - W_z) \vec{G}} \right] \\
 \quad - \left( \alpha \hat{\alpha} + M \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \right) \left[ \widehat{(1 - \alpha) f (U_n - W_z) \vec{U}} \right] \\
 = L \left\{ \widehat{\alpha f(G_n - U_n) \left[ \widehat{\vec{U}_t} \right]} - \left( \widehat{\alpha f(\vec{G}_t - \vec{U}_t) \cdot \left[ \widehat{\vec{U}_t} \right]} \right) \vec{n} \right\}
 \end{array} \right.$$

Dès lors, nous pouvons réécrire (3.13) sur chaque frontière

a - Relations de saut à la frontière  $z = F(x,y,t)$  des fluides

A la frontière  $z = F(x,y,t)$  de séparation des fluides,  $U_n = W_F$  des deux côtés de la discontinuité et le système (3.13) se ramène à

$$(3.14) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad U_n^+ = W_F \\ (b) \quad U_n^- = W_F \\ (c) \quad \left[ \alpha (G_n - W_F) \right] = 0 \\ (d) \quad \left[ P \right] \vec{n} = - \left[ \alpha \rho_e (G_n - W_F) \vec{G} \right] \\ (e) \quad \left( 1 + \frac{M}{\rho_e} \hat{f} - \alpha \hat{\alpha} \right) \left[ \alpha \rho_e (G_n - W_F) \vec{G} \right] \\ \quad = L \left\{ \widehat{\alpha \rho_e (G_n - U_n)} \left[ \vec{U}_t \right] - \left( \alpha \rho_e (\vec{G}_t - \vec{U}_t) \cdot \left[ \vec{U}_t \right] \right) \vec{n} \right\} \end{array} \right.$$

b - Relations de saut à la frontière  $z = E(x,y,t)$  des particules

A la frontière libre  $z = E(x,y,t)$  des particules,  $\alpha$  est identiquement nulle dans le domaine sans particules. Si nous indiquons du signe (-) les quantités à la frontière lorsqu'on s'y rapproche en étant dans le domaine sans particules, le système (3.13) va se ramener à

$$(3.15) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad (1 - \alpha) (U_n^+ - W_E) - (U_n^- - W_E) = 0 \\ (b) \quad (1 - \alpha) (U_n^+ - W_E) \left[ \rho \right] = 0 \\ (c) \quad G_n^+ = W_E \\ (d) \quad \left[ P \right] \vec{n} = - (1 - \alpha) \rho (U_n^+ - W_E) \left[ \vec{U} \right] \\ (e) \quad \left( \alpha \hat{\alpha} + M \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \right) (1 + \alpha) \rho_+ (U_n^+ - W_E) \left[ \vec{U} \right] \\ \quad = L \left\{ \left( \alpha \rho_+ (\vec{U}_t - \vec{G}_t) \cdot \left[ \vec{U}_t \right] \right) \vec{n} + \alpha \rho_+ (G_n - U_n)_+ \left[ \vec{U}_t \right] \right\} \end{array} \right.$$

La relation (3.15,e) peut se réécrire :

$$\begin{aligned}
 & \left( \lambda \alpha + M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) (1-\alpha) \rho_+ (U_n^* - W_E) \left[ \vec{U}_t + U_n \vec{n} \right] \\
 & = L \left\{ \alpha \rho_+ (G_n^* - U_n^*) \left[ \vec{U}_t \right] - \left( \alpha \rho_+ (\vec{G}_t - \vec{U}_t) \cdot \left[ \vec{U}_t \right] \right) \vec{n} \right\}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left( \lambda \alpha + M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) (1-\alpha) \rho_+ (U_n^* - W_E) - L \alpha \rho_+ (G_n^* - W_E) \right\} \left[ \vec{U}_t \right] \\
 & + \left\{ \left( \lambda \alpha + M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) (1-\alpha) \rho_+ (U_n^* - W_E) \left[ U_n \right] \right. \\
 & \left. + L \alpha \rho_+ (\vec{G}_t - \vec{U}_t) \cdot \left[ \vec{U}_t \right] \right\} \vec{n} = 0
 \end{aligned}$$

Et en séparant les composantes tangentielle et normales, nous obtenons les deux relations :

$$(a) \left\{ \left( \lambda \alpha + M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) (1-\alpha) \rho_+ (U_n^* - W_E) - L \alpha \rho_+ (G_n - U_n)_+ \right\} \left[ \vec{U}_t \right] = 0$$

$$(b) \left( \lambda \alpha + M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) (1-\alpha) \rho_+ (U_n - W_E)_+ \left[ U_n \right] + L \alpha \rho_+ (\vec{G}_t - \vec{U}_t) \cdot \left[ \vec{U}_t \right] = 0$$

Il est impératif de bien avoir à l'esprit que les relations ci-dessus sont des relations locales qui doivent être vérifiées de manière ponctuelle sur la frontière  $z = E(x, y, t)$  à tout instant  $t$ . Si nous considérons par exemple la relation (a), en un point  $(x_0, y_0, t)$  de  $E(x, y, t)$  on peut avoir  $\left[ \vec{U}(x_0, y_0, t) \right] = 0$ , et en un autre point  $(x_1, y_1, t)$  de  $E(x, y, t)$ , avoir  $\left[ \vec{U}(x_1, y_1, t) \right] \neq 0$ , mais  $\left\{ \left( \lambda \alpha + M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) (1-\alpha) \rho_+ (U_n^* - W_E) - L \alpha \rho_+ (G_n - U_n)_+ \right\} = 0$

La relation (a) est un produit nul de deux facteurs.

On ne doit pas avoir  $\left[ \vec{U}_t \right] = 0$  dans (a) à tout instant et en chaque point de  $z = E(x, y, t)$ , sinon la relation (b) se ramènerait à

$$(U_n - W_E) \left[ U_n \right] = 0, \text{ identiquement}$$

Et on se retrouverait alors dans le cas du non-dédoublément des deux frontières. Par conséquent, si l'on veut qu'il puisse y avoir un dédoublément des frontières à un certain moment, il est nécessaire qu'on puisse trouver des points sur  $z = E(x, y, t)$  où  $\left[ \vec{U}_t \right] \neq 0$ . En ces points le système précédent se réduit à :

$$(a) \left( \chi \alpha + M \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right) (1-\alpha) \int_+ (U_n^* - W_E) = L \alpha \int_+ (G_n - U_n)_+$$

$$(b) L \left\{ \alpha \int_+ (G_n - U_n)_+ \left[ \left[ U_n \right] \right] + \alpha \int_+ (\vec{G}_t - \vec{U}_t)_+ \cdot \left[ \left[ \vec{U}_t \right] \right] \right\} = 0$$

Néanmoins, la seule condition  $\left[ \left[ \vec{U}_t \right] \right] \neq 0$  en certains points n'est pas suffisante pour qu'il y ait un dédoublement des frontières. Il est nécessaire aussi qu'en ces points,  $(U_n - W_E)_+$  soit non nul. Ce qui impose au second membre de la relation (a) ci-dessus d'être non nul, puisque le premier membre est de la forme :  $a(U_n - W_E)_+$ , avec  $a$  non nul. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que  $G_n^* - U_n^*$  soit non nul dans la mesure où  $L$  est déjà non nul. Par conséquent, en présence de la force tourbillonnaire de sustentation, nous avons le dédoublement des frontières  $z = F(x,y,t)$  et  $z = E(x,y,t)$  à un instant donné, dès qu'en certains points où elles étaient confondues jusque là, on arrive à avoir à la fois  $\left[ \left[ \vec{U}_t \right] \right] \neq 0$  et  $G_n^* \neq U_n^*$ .

Tout le raisonnement que nous venons de faire pour expliquer le mécanisme de dédoublement des deux frontières  $z=E(x,y,t)$  et  $z = F(x,y,t)$  a été possible parce que nous avons considéré la force tourbillonnaire de sustentation ( $L \neq 0$ ). Ce qui traduit toute l'importance de la force tourbillonnaire de sustentation dans le mécanisme du dédoublement de ces frontières  $z = E(x,y,t)$  et  $z = F(x,y,t)$  dans le cas du modèle avec couplage de pression.

### c - Conclusion

Après avoir déterminé le mécanisme de séparation des deux surfaces frontières, mécanisme engendré par la force tourbillonnaire, nous avons écrit les relations de saut relatives à chacune d'elle. Le problème à résoudre est parfaitement bien posé maintenant. Il est constitué par les équations de continuité (3.1) ( $M_1$  devant y être remplacé par  $M_1 + M_2$ ) couplées par les relations aux discontinuités (3.14) et (3.15).

Nous pouvons à présent aborder l'étude de la stabilité de l'écoulement de départ.

## CHAPITRE IV

## ETUDE DES PERTURBATIONS DE FAIBLES AMPLITUDES

I. GENERALITES

La configuration d'écoulement considéré dans ce chapitre est celle décrite dans les précédents, à savoir deux couches de fluides en contact, dont l'une contient des particules initialement (voir fig.2 §.5 Chap.I)

Le principe général de l'étude des perturbations de faibles amplitudes est basé sur le traitement par linéarisation des équations du mouvement. On considère l'écoulement instationnaire comme la superposition à un écoulement initial stationnaire supposé connu, d'un écoulement instationnaire dit de perturbation. Et les amplitudes de cette perturbation sont suffisamment faibles pour que les termes non linéaires en ces variables de perturbation puissent être considérés comme négligeables devant les termes linéaires.

La stabilité hydrodynamique des milieux diphasiques a fait l'objet de peu d'études jusqu'aux environs de 1980. Cela est dû essentiellement au fait qu'il n'y avait pas assez de modèles consistants pour décrire le mouvement macroscopique d'un milieu fluide porteur - particules en interaction. Dans la première moitié des années soixante, les contributions essentielles à la compréhension de l'influence de la présence des particules sur la stabilité du fluide porteur ont été celles de SAFFMAN [20] dont les travaux ont été complétés par MICHAEL [14]. A partir du modèle sans couplage de pression des équations, SAFFMAN était arrivé à la conclusion que la stabilité d'un écoulement parallèle de fluide contenant des particules revenait à celle d'un fluide homogène dont la masse volumique est la moyenne pondérée par la fraction volumique  $\alpha$ , des masses volumiques  $\rho$  du fluide porteur et  $\rho_p$  des particules. Ce fluide ainsi obtenu ayant aussi une vitesse de base non plus réelle, mais complexe. De plus, l'étude effectuée à partir du modèle considéré révèle que les particules légères et de petites tailles ont une influence déstabilisatrice sur l'écoulement, alors que les particules plus larges et plus lourdes ont une influence plutôt stabilisatrice.

Il a fallu attendre quelques années plus tard pour voir de nouveau des travaux sur la stabilité de fluides diphasiques. On peut citer MARBLE en 1970 [13] DREW en 1976 [9;10], NAMURATOV & SOLOVEV en 1986 [16], PROSPERETTI & JONES en 1987 [18] et BATCHELOR en 1988 [3].

Si dans son approche, MARBLE a encore considéré le même modèle que SAFFMAN, NAMURATOV & SOLOVEV ont plutôt utilisé avec succès le modèle de DREW-SEGEL dans le cas d'un écoulement de POISEUILLE plan pour analyser l'influence de la taille des particules. Dans l'exemple choisi,  $\rho_p = 1000$ ,  $\alpha = 1$  et  $f = 0,05$  (où  $f$  est la concentration massique en particules et  $a$



pour expression  $f = \alpha \rho_p / \rho$ ,  $\alpha$  = fraction volumique particulaire). Leur étude révèle que pour un temps de relaxation  $\tau$  ( $\tau = \rho_p / m$ , où  $m$  est le coefficient de traînée et dépend de la géométrie des particules) variant de 0 à 6 (particules de petites mais aussi de moyennes tailles), les particules ont un effet plutôt déstabilisateur sur l'écoulement. A partir de  $\tau = 6$ , les particules ont tendance à stabiliser l'écoulement. Et l'effet stabilisateur devient maximal pour une valeur  $\tau_m$  de  $\tau$  comprise entre 10 et 40.

PROPERETTI & JONES ont étudié la stabilité d'écoulement unidirectionnel avec un modèle prenant en compte les effets de masse ajoutée et de tension superficielle. L'équation aux valeurs propres qu'ils obtiennent est un polynôme de degré élevé par rapport à la vitesse de phase complexe  $\omega$ . Dans la limite des grandes longueurs d'onde, ils obtiennent un critère algébrique de stabilité dépendant des paramètres de l'écoulement.

BATCHELOR a obtenu des résultats généraux dans l'étude de la sédimentation de particules solides dans les lits fluidisés où l'écoulement est encore unidirectionnel et dépendant d'une variable d'espace. Et cela à partir d'un modèle de diffusion. La stabilité de l'écoulement est contrôlée par un nombre adimensionnel  $N$  (voir [3] formule (4.10)) et ce nombre doit être supérieur à 1 pour qu'il y ait instabilité. Le nombre  $N$  dépend du nombre de FROUDE  $\zeta$  et il s'avère que pour une concentration en particules donnée, il existe une valeur critique  $\zeta_c$  du nombre de FROUDE à partir duquel il y a instabilité.

D'autre part, l'étude de BATCHELOR montre que le phénomène de diffusion tend à s'opposer à une concentration importante des particules localement.

## II. ECOULEMENT DE BASE STATIONNAIRE

### 4.2.1. Equations de mouvement

L'écoulement initial est supposé s'établir dans les deux couches de fluides superposés avec une vitesse  $\vec{U}$  horizontale suivant le vecteur  $\vec{e}_1$ . ( $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ) constituant les vecteurs de base avec  $\vec{e}_3$  orienté dans le sens vertical. Nous avons donc

$$(4.1) \quad \vec{U} = U(x, y, z) \vec{e}_1$$

D'autre part, les particules étant entièrement entraînées initialement dans le fluide où elles baignent, nous aurons aussi :

$$\vec{G} = \vec{U}$$

et les équations de mouvement dans chaque domaine de l'écoulement, indépendamment du modèle considéré, deviennent :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad U \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ (b) \quad (1-\alpha) \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \\ (c) \quad \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \\ (d) \quad (1-\alpha) \rho U \frac{\partial U}{\partial x} \vec{a}_1 = -(1-\alpha) \nabla P \\ (e) \quad \alpha \rho U \frac{\partial U}{\partial x} \vec{a}_1 = -\alpha \nabla P \end{array} \right.$$

avec naturellement,  $\alpha = 0$  dans la partie de l'écoulement sans particules.

#### 4.2.2 Condition de saut en $z = 0$

Les relations de saut en  $z = 0$ , qui est initialement à la fois frontière libre des particules et surface de séparation des deux fluides, se réduisent à la condition unique

$$(4.3) \quad \llbracket P \rrbracket = 0$$

#### 4.2.3 Solution du problème stationnaire constitué par (4.2) et (4.3)

L'équation (4.2,a) montre que  $\rho$  est indépendante de la variable  $x$  pour  $U$  non identiquement nulle. Par conséquent, nous avons

$$(4.4) \quad \rho = \rho(y, z)$$

D'autre part, par sommation de (4.2,b) et (4.2,c), il vient

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$U$  est donc aussi indépendante de  $x$  et par suite

$$(4.5) \quad U = U(y, z)$$

La relation (4.2,c) devient alors

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$$

ce qui montre que  $\alpha$  est aussi indépendante de  $x$ , c'est-à-dire

$$(4.6) \quad \alpha = \alpha(y, z)$$

Enfin, la relation (4.2,d) se réduit à  $\nabla P = 0$ .

$P$  est donc une constante dans chaque domaine de continuité de l'écoulement.

Et comme la pression  $P$  est continue à la traversée de  $z = 0$  d'après (4.3), la pression  $P$  est une unique et même constante dans tout l'écoulement.

### III. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT PERTURBÉ

#### 4.3.1. Introduction des variables de perturbation

Nous nous plaçons dans le cadre d'un écoulement de base stationnaire avec une stratification verticale, c'est-à-dire

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \rho &= \rho(z) \\ U &= U(z) \\ \alpha &= \alpha(z) \end{aligned}$$

$$P = \text{constante}$$

Nous considérons l'écoulement non stationnaire comme étant la superposition de l'écoulement stationnaire représenté par les variables du système (4.7) et de quantités de perturbations  $C$ ,  $V$ ,  $g$ ,  $\varpi$ ,  $p$  telles que

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_*(x, y, z, t) &= \rho(z) + c(x, y, z, t) \\ \vec{U}(x, y, z, t) &= U(z)\vec{e}_1 + \vec{V}(x, y, z, t) \\ \vec{G}(x, y, z, t) &= U(z)\vec{e}_2 + \vec{g}(x, y, z, t) \\ \alpha_*(x, y, z, t) &= \alpha(z) + \varpi(x, y, z, t) \\ P_*(x, y, z, t) &= P + p(x, y, z, t) \end{aligned} \right.$$

$$\rho_*(x, y, z, t); \vec{U}(x, y, z, t); \vec{G}(x, y, z, t); \alpha_*(x, y, z, t), P_*(x, y, z, t)$$

représentant respectivement la masse volumique du fluide porteur, sa vitesse, celle des particules, la fraction volumique des particules et la pression dans l'écoulement perturbé. Nous rappelons aussi que la masse volumique  $\rho_e$  des particules est toujours supposée constante au cours du mouvement.

Les vitesses de perturbations  $\vec{V}$  et  $\vec{g}$  ont pour composantes :

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} q(x, y, z, t) \\ r(x, y, z, t) \\ s(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

#### 4.3.2 Linéarisation des équations du mouvement dans les régions de continuité

On porte les quantités du système (4.8) dans le système d'équations de mouvement le plus général (3.1). Comme expliqué dans le §.1 de ce chapitre sur les généralités, nous ne retenons dans le procédé de linéarisation que les termes linéaires en variables de perturbations qui sont les inconnues du problème.

Le système (3.1) linéarisé dans les régions particulières s'écrit :

$$(4.9) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{d\rho}{dz} = 0 \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial M}{\partial t} - (1-\alpha) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + w \frac{d\rho}{dz} + u \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \text{(c)} \quad \frac{\partial M}{\partial t} + \alpha \left\{ \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} \right\} + s \frac{d\rho}{dz} + u \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \text{(d)} \quad (1-\alpha) \rho \left\{ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + w \frac{dU}{dz} \vec{a}_1 \right\} = -(1-\alpha) \nabla p \\ \quad + \alpha m (\vec{g} - \vec{V}) - \alpha \rho M \left\{ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + w \frac{dU}{dz} \vec{a}_1 \right. \\ \quad \left. - \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} + s \frac{dU}{dz} \vec{a}_1 \right) \right\} + L \alpha \rho \frac{dU}{dz} \left\{ (w-s) \vec{a}_1 + (q-u) \vec{a}_3 \right\} \\ \text{(e)} \quad \alpha \rho \alpha \left\{ \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} + s \frac{dU}{dz} \vec{a}_1 \right\} = -\alpha \nabla p + \alpha m (\vec{V} - \vec{g}) \\ \quad + \alpha \rho M \left\{ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + w \frac{dU}{dz} \vec{a}_1 - \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} + s \frac{dU}{dz} \vec{a}_1 \right) \right\} \\ \quad + L \alpha \rho \frac{dU}{dz} \left\{ (s-w) \vec{a}_1 + (u-q) \vec{a}_3 \right\} \end{array} \right.$$

Dans les régions de fluides classiques sans particules,  $\alpha$  est nulle ainsi

que  $\bar{w}$ . Il suffit alors de poser  $\alpha = 0$  et  $\bar{w} = 0$  dans (4.9) pour obtenir les équations linéarisées relatives à ces régions, soit le système :

$$(4.10) \quad \begin{cases} (a) & \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{d\rho}{dz} = 0 \\ (b) & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ (c) & \int \left\{ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + U \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + w \frac{dU}{dz} \vec{e}_1 \right\} = -\nabla P \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à adjoindre à ces équations de continuité linéarisées de type (4.9) et (4.10), les conditions de saut aux discontinuités frontières pour poser entièrement le problème linéarisé.

Nous disposons de deux ensembles de relations de saut non linéarisées autorisant l'existence de deux frontières non identiquement confondues dont une pour les deux fluides,  $z = F(x, y, t)$ , et une autre pour les particules,  $z = E(x, y, t)$ .

Le premier ensemble de relations de saut (2.72) et (2.74), on l'avait obtenu à partir du modèle sans couplage de pression de SAFFMAN-MARBLE. Et l'autre ensemble (3.14) et (3.15), on l'avait obtenu à partir du modèle du chapitre précédent qui prend en compte dans les équations de mouvement, en plus du couplage de pression, la force de masse induite et la force tourbillonnaire de sustentation. Il convient donc d'analyser ces deux ensembles de relations de saut après les avoir linéarisées. Et l'ensemble de relations de saut linéarisées qui sera admissible pour le problème sera celui qui autorisera l'existence à la fois des régions de type 3 et celles de type 4 après linéarisation. Procédons donc à la linéarisation de ces deux ensembles de relations de saut.

#### 4.3.3 Linéarisation des conditions de saut

L'écoulement a l'aspect suivant que nous rappelons ici :

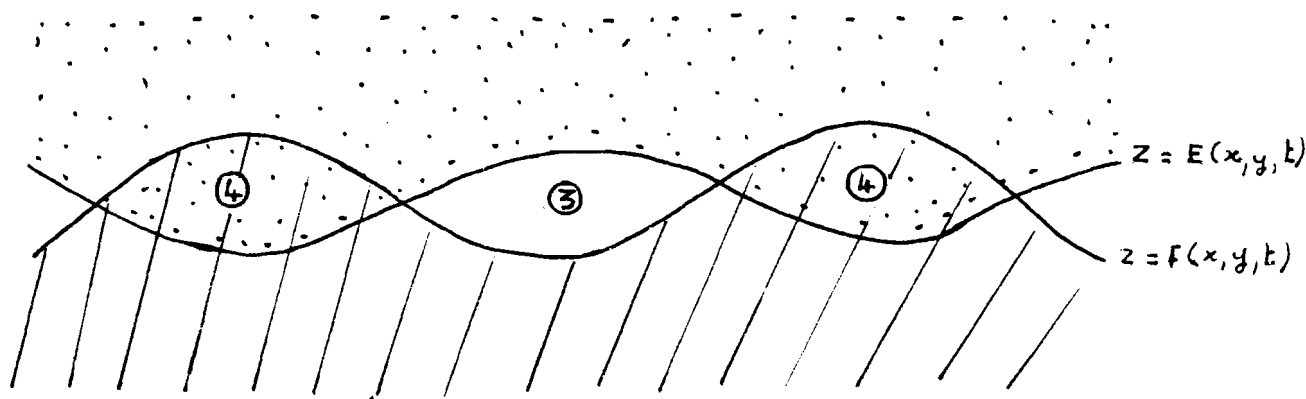


Figure 1 : Aspect de l'écoulement perturbé

a - Linéarisation des conditions de saut obtenues à partir du modèle de SAFFMAN-MARBLE.

Les relations de saut relatives au modèle de SAFFMAN-MARBLE sont constituées par les systèmes (2.72) défini à la frontière  $z = F(x,y,t)$  des fluides, et (2.74) défini à la frontière  $z = E(x,y,t)$  des particules. L'écoulement perturbé comportant quatre types de régions notées 1, 2, 3, et 4 (voir fig. 1 ci-dessus), il convient de considérer les relations de saut linéarisées sur chaque portion des frontières  $F(x,y,t)$  et  $E(x,y,t)$  séparant deux quelconques de ces régions. Précisons à cet effet les variables dans chacune de ces régions. Nous ne mentionnerons pas la dépendance des quantités de perturbation par rapport aux variables  $x, y, t$  pour alléger les écritures.

Dans la région 1 (qui est un domaine particulaire)

Nous avons

$$p_1^* = p_1(z) + e_1$$

$$\vec{U}_1^* = U_1(z)\vec{e}_1 + \vec{V}_1$$

$$\vec{G}_1^* = U_1(z)\vec{e}_1 + \vec{g}_1$$

$$\alpha_1^* = \alpha(z) + \omega_1$$

$$P_1^* = P + p_1$$

Dans la région 2 (qui est un domaine de fluide classique sans particules)

Nous avons

$$p_2^* = p_2(z) + e_2$$

$$\vec{U}_2^* = U_2(z)\vec{e}_1 + \vec{V}_2$$

$$P_2^* = P + p_2$$

Dans la région 3 (qui est une poche de fluide 1 vidée de particules)

Nous avons

$$p_3^* = p_1(z) + e_3$$

$$\vec{U}_3^* = U_1(z) + \vec{V}_3$$

$$P_3^* = P + p_3$$

Dans la région 4 (qui est une poche de fluide 2 qui a piégé des particules)

$$f_4^v = f_2(z) + e_4$$

$$\vec{U}_4^v = U_2(z) \vec{e}_1 + \vec{V}_4$$

$$\vec{G}_4^v = U_1(z) \vec{e}_1 + \vec{g}_4$$

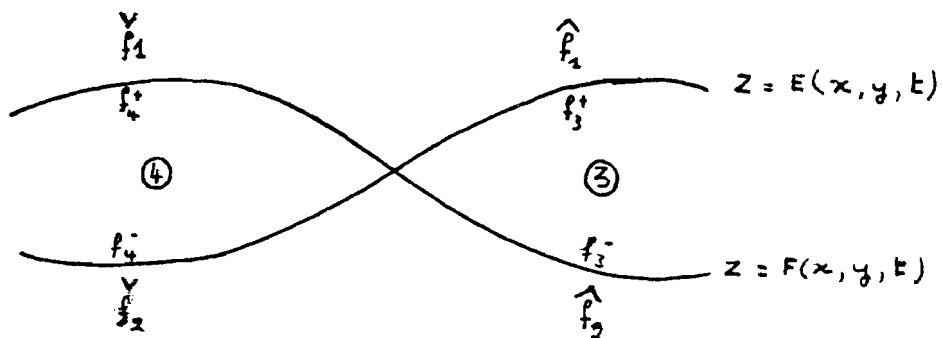
$$\alpha_4^v = \alpha(z) + \omega_4$$

$$P_4^v = P + p_4$$

$P$  est la pression constante de l'écoulement de base stationnaire.

Dans tout le développement à venir, nous utiliserons les signes  $\vee$  et  $\wedge$  sur les variables de perturbations dans les régions 1 et 2 pour préciser si on se trouve à une frontière avec la région 4, ou avec la région 3. Si les conditions de saut doivent être écrites à une frontière avec la région 4, on utilisera  $\vee$  (pour spécifier que  $E(x,y,t) \leftarrow F(x,y,t)$ ). Par contre, si on se trouve à une frontière avec la région 3, on utilisera  $\wedge$  (pour spécifier que  $E(x,y,t) \gg F(x,y,t)$ ).

Soit  $f_4$  une quantité définie dans la région 4 : on la notera  $f_4^+$  lorsqu'on est à la frontière  $z = F(x,y,t)$  et  $f_4^-$  lorsqu'on se trouve en  $z = E(x,y,t)$ . Quant aux quantités  $f_3$  dans la région 3,  $f_3^+$  désignera la valeur limite en  $z = E(x,y,t)$  et  $f_3^-$  en  $z = F(x,y,t)$ . On a le schéma suivant :



Ecrivons maintenant les relations de saut linéarisées sur les différentes frontières séparant les domaines.

Remarque :

De manière générale, en une frontière  $z = I(x,y,t)$  (où  $I(x,y,t)$  désigne indifféremment  $F(x,y,t)$  ou  $E(x,y,t)$ ), on a

$$\vec{N} = \nabla(z - I(x,y,t)) = \vec{e}_3 - \frac{\partial I}{\partial x} \vec{e}_1 - \frac{\partial I}{\partial y} \vec{e}_2$$

et si

$$\vec{Q}^* = a \vec{e}_1 + (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3)$$

où  $\vec{a}$  est une quantité de base stationnaire et  $a_1, a_2, a_3$  sont les composantes du vecteur de la perturbation,

$$\text{alors } \vec{a} \cdot \vec{N} = -\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + a_3 + \text{TNL}$$

où TNL désigne les "Termes Non Linéaires (en variables de perturbation)"

Entre les régions 1 et 4 : on se trouve à la frontière  $z = F(x,y,t)$  telle que  $E(x,y,t) < F(x,y,t)$ .  $W_F = \partial F / \partial t$  et on doit y écrire les relations (2.72) linéarisées : on a (d'après la remarque précédente) :

$$U_n^+ = -U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + w_1^+ + \text{TNL}$$

$$(\vec{U}^+ = U_1 \vec{e}_1 + \vec{v}_1^+ \quad \text{puisque'on est dans la région 1 contenant le fluide 1})$$

$$U_n^- = -U_2 \frac{\partial F}{\partial x} + w_4^+ + \text{TNL}$$

$$(\vec{U}^- = U_2 \vec{e}_2 + \vec{v}_4^+ \quad \text{puisque'on est dans la région 4 contenant le fluide 2})$$

$$G_n^+ = -U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + s_1^+ + \text{TNL}$$

$$(\text{puisque } \vec{G}^+ = U_1 \vec{e}_1 + \vec{g}_1^+)$$

$$G_n^- = -U_2 \frac{\partial F}{\partial x} + s_4^+ + \text{TNL}$$

$$(\text{puisque } \vec{G}^- = U_2 \vec{e}_2 + \vec{g}_4^+)$$

Les équations (2.72) linéarisées deviennent alors :

$$(4.11) \quad \begin{cases} (a) & w_1^+ = U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ (b) & w_4^+ = U_2 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ (c) & s_1^+ = s_1^+ \\ (d) & p_4^+ = p_1^+ \end{cases}$$

Entre les régions 2 et 4 : on se trouve à la frontière  $z = E(x,y,t)$  telle que  $E(x,y,t) < F(x,y,t)$ .  $W_E = \partial E / \partial t$  et on doit y écrire les relations (2.74) linéarisées :

On a (d'après la remarque précédente) :

$$U_n^+ = -U_2 \frac{\partial E}{\partial x} + w_4^- + \text{TNL}$$

$$(\vec{U}^+ = U_2 \vec{e}_2 + \vec{v}_4^- \quad \text{puisque'on est dans le région 4 contenant le fluide 2})$$

$$U_n^- = -U_2 \frac{\partial E}{\partial x} + w_2^- + \text{TNL}$$



( $\vec{U}^- = U_2 \vec{e}_1 + \vec{V}_2$     puisqu'on est dans la région 2 contenant le fluide 2)

$$G_n^+ = -U_1 \frac{\partial E}{\partial x} + S_4^- + \text{TNL}$$

(puisque  $\vec{G}^+ = U_1 \vec{e}_1 + \vec{g}_4^-$  )

Dans les équations (2.74), seule la linéarisation de (2.74-d) peut poser quelques difficultés. Elle s'écrit :

$$(1 - \alpha) \text{TNL} + (1 - \frac{\alpha}{2}) (\rho_4^+ - \rho_2^-) \vec{e}_3 + \text{TNL} = 0$$

Le premier TNL provient de

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha) \rho_2^+ (U_n - W_t)_+ \left[ \vec{U} \right] \\ &= (1 - \alpha) \rho_2 \left( -U_2 \frac{\partial E}{\partial x} + w_4^- - \frac{\partial E}{\partial t} \right) (U_2 \vec{e}_1 + \vec{V}_2 - (U_2 \vec{e}_1 + \vec{V}_4^-)) + \text{TOS} \\ &= (1 - \alpha) \rho_2 \underbrace{\left( w_4^- - U_2 \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial t} \right)}_{\text{TNL}} (\vec{V}_2 - \vec{V}_4^-) + \text{TOS} \end{aligned}$$

où TOS signifie "Termes d'ordre supérieur"

Le second TNL provient de  $[[P]]\vec{n}$ .

D'où les équations (2.74) linéarisées deviennent :

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad (1 - \alpha) \left\{ w_4^- - U_2 \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial t} \right\} = \vec{V}_2 - U_2 \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial t} \\ (b) \quad \rho_4^- = \rho_2^- \\ (c) \quad S_4^- = U_1 \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} \\ (d) \quad \rho_4^- = \rho_2^- \end{array} \right.$$

Entre les régions 1 et 3 : on se trouve à la frontière  $z = E(x, y, t)$  telle que  $E(x, y, t) > F(x, y, t)$ .  $w_E = \partial E / \partial t$  et les relations (2.74) y sont linéarisées suivant un procédé analogue au précédent.

$$U_n^+ = -U_1 \frac{\partial E}{\partial x} + \hat{w}_1 + \text{TNL}$$

( $\vec{U}^+ = U_1 \vec{e}_1 + \hat{\vec{V}}_1$     puisqu'on est dans la région 1 contenant le fluide 1)

$$U_n^- = -U_1 \frac{\partial E}{\partial x} + w_3^+ + \text{TNL}$$

( $\vec{U}^- = U_1 \vec{e}_1 + \vec{V}_3^+$     puisqu'on est dans la région 3 contenant le fluide 1)

D'où les équations linéarisées :

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad (1 - \alpha) \left\{ \hat{w}_1 - U_1 \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial t} \right\} = w_3^+ - U_1 \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{(b)} \quad \hat{e}_3^+ = \hat{e}_1 \\ \text{(c)} \quad \hat{s}_1 = U_1 \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{(d)} \quad \hat{p}_3^+ = \hat{p}_1 \end{array} \right.$$

Entre les régions 2 et 3 : on se trouve à la frontière  $z = F(x, y, t)$  telle que  $E(x, y, t) > F(x, y, t)$ . On a deux fluides classiques en contact.  $w_p = \partial F / \partial t$  et les relations (2.72) linéarisées deviennent

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \hat{w}_2 = U_2 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ \text{(b)} \quad w_3^- = U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ \text{(c)} \quad \hat{p}_3^- = \hat{p}_2 \end{array} \right.$$

Conclusion : Nous avons supposé l'existence des poches 3 et 4 dans l'écoulement perturbé et nous avons procédé à la linéarisation des relations de saut issues du modèle de SAFFMAN-MARBLE sur les différentes frontières. Les systèmes de relations (4.11) à (4.14) résultant ne font apparaître aucun terme d'ordre 0, c'est-à-dire aucun terme qui ne serait pas un infiniment petit du premier ordre. Par conséquent, l'existence supposée au départ des poches 3 et 4 n'est pas remise en cause. Les systèmes de relations (4.11) à (4.14) sont donc bien admissibles pour le problème linéarisé.

b - Linéarisation des conditions de saut obtenues à partir du modèle prenant en compte les forces tourbillonnaires de sustentation.

Ces conditions de saut sont constituées respectivement par les systèmes (3.14) pour les frontières de type  $z = F(x, y, t)$  et (3.15) pour celles de type  $z = E(x, y, t)$ . Nous supposons toujours au départ l'existence des régions 3 et 4. Procédons alors à la linéarisation desdites relations de saut sur les différentes frontières avec ces deux régions. Nous sommes conduits aux résultats suivants :

Entre les régions 2 et 4, aussi bien qu'entre les régions 1 et 3, et ainsi qu'entre les régions 3 et 4, on retrouve les mêmes résultats que dans les cas précédents étudiés à partir des relations issues du modèle de SAFFMAN-MARBLE. C'est-à-dire qu'on retrouve respectivement les relations (4.12), (4.13) et (4.14).

Par contre, entre les régions 1 et 4, en plus des relations (a) à (d) du système (4.11), il apparaît une relation supplémentaire due à la prise en compte de la force tourbillonnaire de sustentation : on l'obtient en linéarisant (3.14-e).

Le premier membre de (3.14-e) se présente sous la forme

$$A (G_n - W_f)_+ \left[ \vec{G} \right]$$

$$\text{Mais } \vec{G}^+ = U_1 \vec{e}_1 + \vec{q}_1^+ \quad \text{et} \quad \vec{G}^- = U_1 \vec{e}_1 + \vec{q}_1^- \quad , \text{ donc } \left[ \vec{G} \right] = \vec{q}_1^+ - \vec{q}_1^-$$

$$\text{Comme } G_n^+ - W_f = \dot{S}_1 - U_1 \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\text{alors } (G_n - W_f)_+ \left[ \vec{G} \right] \quad \text{est un TNL.}$$

Quant au membre de droite de (3.14-e), rappelons-nous ceci :

$$U_n^+ = \dot{w}_1 - U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \text{TNL} \quad ; \quad G_n^+ = \dot{S}_1 - U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \text{TNL}$$

$$U_n^- = w_4^+ - U_2 \frac{\partial F}{\partial x} + \text{TNL} \quad ; \quad G_n^- = S_4^+ - U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \text{TNL}$$

De sorte que

$$G_n^+ - U_n^+ = \dot{S}_1 - \dot{w}_1 + \text{TNL} \quad \text{et} \quad G_n^- - U_n^- = S_4^+ - w_4^+ + (U_2 - U_1) \frac{\partial F}{\partial x} + \text{TNL}$$

$$\vec{G}_1^+ - \vec{U}_1^+ = (\dot{q}_1 - \dot{u}_1) \vec{e}_1 + (\dot{r}_1 - \dot{v}_1) \vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{G}_1^- - \vec{U}_1^- = (U_2 - U_1) \vec{e}_1 + (q_4^+ - u_4^+) \vec{e}_1 + (r_4^+ - v_4^+) \vec{e}_2$$

$$\left[ \vec{U}_1 \right] = (U_2 - U_1) \vec{e}_1 + (u_4^+ - \dot{u}_1) \vec{e}_1 + (v_4^+ - \dot{v}_1) \vec{e}_2$$

L'expression de droite de (3.14-e) s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ (U_2 - U_1) \left( \alpha \rho_1 (\dot{S}_1 - \dot{w}_1) + \alpha \rho_2 (S_4^+ - w_4^+ + (U_2 - U_1) \frac{\partial F}{\partial x}) \right) \vec{e}_1 \right. \\ & \quad - \left( \alpha \rho_1 (\dot{q}_1 - \dot{u}_1) + \alpha \rho_2 (U_2 - U_1 + q_4^+ - u_4^+) \right) (U_2 - U_1 + \dot{u}_1 - u_4^+) \\ & \quad \left. \times \left( \vec{e}_3 - \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_1 - \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_2 \right) \right\} + \text{TOS} \end{aligned}$$

Négligeons les termes non linéaires en variables de perturbation dans (3.14,e). Son premier membre doit être égalé à 0 alors. Son second membre ci-dessus devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \alpha (U_2 - U_1) \left\{ \left( \rho_1 (\dot{S}_1 - \dot{w}_1) + \rho_2 (S_4^+ - w_4^+ + (U_2 - U_1) \frac{\partial F}{\partial x}) \right) \vec{e}_1 \right. \\ & \quad - \left( \rho_1 (\dot{q}_1 - \dot{u}_1) + \rho_2 ((q_4^+ - u_4^+) + (\dot{u}_1 - u_4^+)) \right) \vec{e}_3 \\ & \quad \left. + \rho_2 (U_2 - U_1) \left( \vec{e}_3 - \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_1 - \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_2 \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$1) \text{ Si } U_2 - U_1 = 0$$

alors l'égalité ci-dessus ne donne aucune condition supplémentaire sur les variables de perturbation, et on est ramené simplement aux relations données par le modèle de SAFFMAN-MARBLE.

2) Si  $U_2 - U_1 \neq 0$

alors l'égalité initiale se ramène à :

$$\left( \rho_1 (\dot{y}_2 - \dot{w}_2) + \rho_2 (s_4^* - w_4^* + (U_2 - U_1) \frac{\partial F}{\partial x}) \vec{e}_1 - \left( \rho_1 (\dot{y}_1 - \dot{u}_1) + \rho_2 ((q_4^* - u_4^*) + (\dot{u}_1 - u_4^*)) \right) \vec{e}_3 = \rho_2 (U_1 - U_2) \left( \vec{e}_3 - \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_1 - \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_2 \right)$$

En utilisant les relations (a) à (c) de (4.11), on remarque que dans l'égalité ci-dessus,

$$s_4^* - w_4^* = \dot{y}_2 - \dot{w}_2 - (U_2 - U_1) \frac{\partial F}{\partial x}$$

de sorte que pour  $U_2 - U_1 \neq 0$ , on est ramené à :

$$(4.15) \quad (\rho_1 + \rho_2) (\dot{y}_2 - \dot{w}_2) \vec{e}_1 - \left( \rho_1 (\dot{y}_1 - \dot{u}_1) + \rho_2 ((q_4^* - u_4^*) + (\dot{u}_1 - u_4^*)) \right) \vec{e}_3 \\ = \rho_2 (U_1 - U_2) \left( \vec{e}_3 - \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_1 - \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_2 \right)$$

Cette relation comporte dans son membre de droite, le terme  $\rho_2 (U_1 - U_2) \vec{e}_3$  qui n'est pas un infiniment petit.

Par conséquent, si  $U_2 - U_1 \neq 0$ , alors un terme d'ordre 0 apparaît dans la relation (4.15) conduisant à une incompatibilité entre les quantités infiniment petites de perturbation et le terme  $\rho_2 (U_1 - U_2) \vec{e}_3$  qui ne l'est pas, mettant en cause l'existence de la région 4.

Deux conclusions sont possibles à ce niveau, sans que l'on puisse opérer un choix net.

1) les phénomènes prenant naissance dans la région 4 sont de nature purement non linéaire. Dans ce cas, la théorie linéaire ne peut prévoir leurs évolutions et l'apparition du terme d'ordre zéro dans l'équation n'est pas choquante. Cette apparition traduit dans ce cas-là l'inadéquation de la méthode utilisée pour l'étude du phénomène réel (non linéaire) sous-jacent. Et dans cette hypothèse, les conditions de saut obtenues en présence de la force tourbillonnaire et linéarisées nous conduisent à la configuration d'écoulement ci-dessous, où la région 4 n'est plus qu'une ligne sur laquelle  $E \approx F$

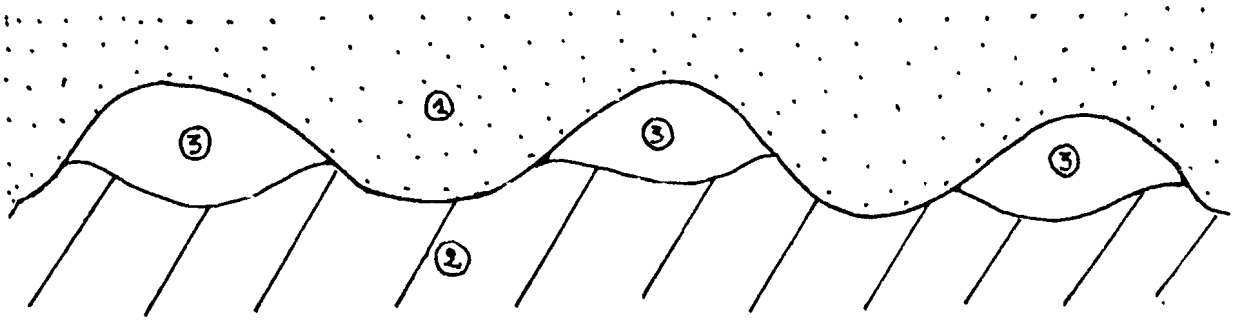


Figure 2

On n'a donc plus que trois types de frontières à considérer. Entre 1 et 2, entre 1 et 3, et entre 2 et 3. Entre les régions 1 et 3 et entre 2 et 3, on aura encore les relations (4.13) et (4.14).

Les relations (4.11) et (4.12) sont remplacées par :

Entre 1 et 2 ( $E(x,y,t) = F(x,y,t)$ )

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad w_1 = U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ \text{(b)} \quad w_2 = U_2 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ \text{(c)} \quad s_1 = U_1 \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{(d)} \quad \uparrow_1 = \uparrow_2 \end{array} \right.$$

2) les phénomènes linéaires dans la région 4 existent bel et bien. Dans ce cas, l'apparition du terme d'ordre 0 dans l'équation "aux infiniment petits" révèle les limites du procédé classique de linéarisation qui consiste à écrire les variables réelles comme somme de quantités de base stationnaires, et de quantités de perturbation, puis à les porter dans les équations en ne retenant que les termes qui sont de l'ordre des perturbations. Les termes d'ordre 0 doivent s'éliminer en tant que solution du problème de base stationnaire ; ce qui n'est pas le cas pour ce problème non classique. Il importerait sans doute d'attaquer le problème à l'aide d'autres méthodes non classiques de linéarisation qui tiennent compte de ce caractère "singulier" de la poche 4 en présence de force tourbillonnaire de sustentation. Nous ne pourrions le faire dans ce mémoire.

Conclusion : Nous venons de voir que la force tourbillonnaire, si elle a permis l'existence théorique de la double frontière dans le modèle de DREW-SEGEL initial, n'autorise pas, dans le cadre de la théorie linéaire classique des petites perturbations, la pénétration des particules dans la région 2 initialement vide de particules pour la formation de la région 4. Les particules ne peuvent seulement qu'être refoulées à l'intérieur de la région 1 où elles étaient, entraînant la formation des poches 3 (cf Fig. ci-dessus).

En utilisant les procédés classiques de linéarisation, les systèmes (4.11) à (4.14) issus du modèle sans couplage de pression de SAFFMAN-MARBLE sont donc les seules relations admissibles pour le problème avec quatre types de régions considéré. Dorénavant, elles constitueront les relations de saut aux discontinuités pour le problème linéarisé.

Dans toute la suite du travail, nous ne tiendrons plus compte de la force tourbillonnaire. Cela revient à poser  $L = 0$  dans (4.9).

#### IV. CARACTERISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT PERTURBÉ DANS LES POCHES 3 ET 4 : DES ÉQUATIONS LINÉARISÉES CONDUISANT À UN PROBLÈME NON LINÉAIRE

##### 4.4.1 Problème réduit et aplatissement des conditions aux limites

Dans chaque domaine de continuité de l'écoulement correspondant respectivement aux régions de type 1, 2, 3 et 4, nous devons en toute généralité résoudre les équations de type (4.9) ou (4.10), fortement couplées par les conditions aux discontinuités (4.11) à (4.14). On ne pourrait se douter du degré de complexité que constituerait un tel problème si fortement couplé. Mais dans les poches 3 et 4 les quadruplets  $(x, y, z, t)$  sont tels que

$$F(x, y, t) < z < E(x, y, t) \quad \text{ou bien} \quad E(x, y, t) < z < F(x, y, t)$$

Comme  $|E - F|$  est un infiniment petit du même ordre que  $E$  et  $F$ , on peut envisager pour toute quantité  $\mathcal{A}$  liée à la perturbation un développement de Taylor au voisinage de  $E(x, y, t)$ , soit :

$$\mathcal{A}(x, y, z, t) = \mathcal{A}(x, y, E, t) + (z - E) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z}(x, y, z = E, t) \\ + \text{termes d'ordre supérieur}$$

où  $\mathcal{A}(x, y, E, t)$  est la valeur (ou la limite) de  $\mathcal{A}(x, y, z, t)$  en  $z = E(x, y, t)$ .

Puisque  $\mathcal{A}$  est supposé être un infiniment petit du 1er ordre, le terme  $(z - E) \partial \mathcal{A} / \partial z$  apparaît être du second ordre ; en conséquence, il doit être négligé (ainsi que les autres termes d'ordre supérieur) dans le cadre de la présente théorie linéaire. Nous avons donc

$$\mathcal{A}(x, y, z, t) = \mathcal{A}(x, y, E(x, y, t), t)$$

pour tout  $z$  dans la poche 3 ou 4.

Mais  $E(x, y, t)$  étant infiniment petit, on peut réitérer un développement de Taylor au voisinage de  $z = 0$  ; on est ainsi conduit à faire finalement l'identification

$$(4.17) \quad \mathcal{A}(x, y, z, t)^* = \mathcal{A}(x, y, 0, t)$$

pour tout  $z$  dans les régions 3 ou 4. En particulier, dans les relations de saut précédentes, les quantités  $u_3^+$  et  $v_3^-$  doivent être égalées (à  $u_3(0)$ ). Il en sera de même pour  $u_4^+$  et  $v_4^-$ .

Nous n'aurons donc pas à résoudre les équations linéarisées dans les poches 3 et 4. Les valeurs des perturbations dans ces régions seront connues une fois le problème dans les régions 1 et 2 résolu. Les régions 3 et 4 seront donc assimilées à des portions de la surface  $z = 0$ .

Nous avons donc un allègement substantiel du problème de départ qui se réduit à la résolution des équations dans deux régions seulement à savoir 1 et 2, au lieu de quatre, avec des conditions aux limites aplaties en  $z = 0$ .

Les conditions de saut (4.11) à (4.14) doivent maintenant être regroupées par deux et ajoutées : elles se réduisent alors à deux types de relations en  $z = 0$ .

On doit distinguer deux types de portions de la surface  $z = 0$  (voir fig 3 ci-dessous). Ceux pour lesquels les triplets  $(x, y, t)$  sont tels que  $E(x, y, t) \ll F(x, y, t)$  et qui représentent la trace des poches de type 4 ; et ceux pour lesquels  $F(x, y, t) \ll E(x, y, t)$  et qui représentent la trace des poches de type 3.

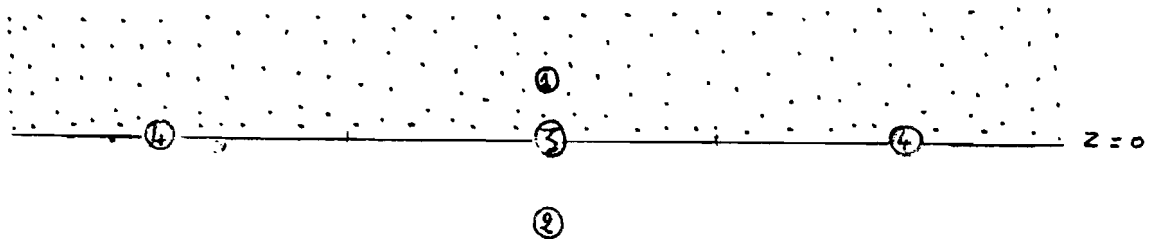


Figure 3

4 : Trace des poches 4

3 : Trace des poches 3

Il vient alors pour les relations de saut à considérer entre les régions 1 et 2, en  $z = 0$  :

Premièrement

Pour les  $(x, y, t)$  tels que  $E(x, y, t) \ll F(x, y, t)$ , on a :

$$(4.18) \quad \begin{cases} (a) & \overset{v}{w}_1(x, y, 0, t) = U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ (b) & \overset{v}{w}_2(x, y, 0, t) = \ll \left\{ U_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right\} (E - F) + U_2 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ (c) & \overset{v}{s}_1(x, y, 0, t) = U_1 \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} \\ (d) & \overset{v}{p}_2(x, y, 0, t) = \overset{v}{p}_1(x, y, 0, t) \end{cases}$$





Deuxièmement

Pour les  $(x, y, t)$  tels que  $E(x, y, t) \geq F(x, y, t)$ , on a :

$$(4.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \hat{w}_1(x, y, 0, t) = U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ U_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right\} (E - F) \\ (b) \quad \hat{w}_2(x, y, 0, t) = U_2 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ (c) \quad \hat{s}_1(x, y, 0, t) = U_1 \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} \\ (d) \quad \hat{p}_2(x, y, 0, t) = \hat{p}_1(x, y, 0, t) \end{array} \right.$$

#### 4.4.2 Equations linéarisées conduisant à la résolution d'un problème non linéaire

On peut trouver une formulation qui regroupe les systèmes (4.18) et (4.19) en une seule et unique expression ; c'est :

$$(4.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad w_1(x, y, 0, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + U_1 \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right\} Y(E - F) \\ (b) \quad w_2(x, y, 0, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + U_2 \frac{\partial F}{\partial x} - \alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right\} Y(F - E) \\ (c) \quad s_1(x, y, 0, t) = \frac{\partial E}{\partial t} + U_1 \frac{\partial E}{\partial x} \\ (d) \quad p_2(x, y, 0, t) = p_1(x, y, 0, t) \end{array} \right.$$

valide pour tout  $(x, y, t)$  de la surface  $z = 0$ .

La fonction  $Y(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$Y(x) = \sup(0, x) \\ = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Par conséquent, le problème à résoudre sera constitué des équations de continuité (4.9) et (4.10) écrites dans les régions 1 et 2 et qui seront couplées par le système des équations de saut (4.20).

Si les équations (4.9) et (4.10) sont bien linéaires par rapport à la perturbation, il n'en est rien des conditions de saut (4.20) qui sont non classiques et qui forment un système non linéaire.

En effet, la fonction  $Y(x)$  bien qu'étant linéaire par morceaux, est une fonction non linéaire sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Et c'est elle qui confère à (4.20) et donc au problème couplé son caractère non linéaire, emmenant de ce fait le paradoxe d'un système d'équations linéarisées aboutissant à la résolution d'un problème non linéaire.

Dans le système (4.20), c'est la présence de la fonction  $Y(E - F)$  qui engendre le plus de difficulté. Nous allons par conséquent l'éliminer entre les deux équations (a) et (b) de (4.20) où elle est présente. Et à cet effet, faisons agir l'opérateur de dérivation  $(\partial/\partial t + U_2 \partial/\partial x)$  sur l'égalité

(a) et l'opérateur  $\frac{1}{1-\alpha} (\partial/\partial t + U_1 \partial/\partial x)$  sur l'égalité (b) et procédons à leur soustraction. Nous obtenons alors la relation :

$$(4.22) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) w_1 - \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) w_2 \\ = - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left( Y(E-F) - Y(F-E) \right) + F \right\}$$

Mais la fonction  $Y(x)$  vérifie

$$(4.23) \quad Y(x) - Y(-x) = x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et donc

$$Y(E-F) - Y(F-E) = E-F$$

et (4.22) s'écrit alors

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) w_1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) w_2 \\ = - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) E$$

Le système (4.20) est donc équivalent à :

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad s_1(x, y, 0, t) = \frac{\partial E}{\partial t} + U_1 \frac{\partial E}{\partial x} \\ (b) \quad \dot{P}_2(x, y, 0, t) = \dot{P}_1(x, y, 0, t) \\ (c) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) w_1 - \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) w_2 \\ \quad = - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) E \\ (d) \quad w_2(x, y, 0, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + U_2 \frac{\partial F}{\partial x} - \alpha \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) Y(F-E) \end{array} \right.$$

Le problème à résoudre reste toujours non linéaire, et cela à cause de l'équation (d) ci-dessus. Cependant, cette équation est découplée des autres équations du problème dans la mesure où l'inconnue  $F(x, y, t)$  n'apparaît nulle part ailleurs que dans cette seule équation. Nous pourrions donc résoudre les autres équations pour déterminer les inconnues autres que  $F(x, y, t)$ , et l'équation (4.24,d) servira alors de problème non homogène pour la détermination de  $F(x, y, t)$ . Du fait que  $\alpha = \alpha(y, z)$ , (4.24,d) peut s'écrire :

$$(4.25) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) (F - \alpha Y(F-E)) = w_2(x, y, 0, t)$$

Si nous appelons  $S(x, y, t)$  la solution de l'équation non homogène

$$(4.26) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) S(x, y, t) = w_2(x, y, 0, t)$$

alors  $F(x, y, t)$  sera connue par la résolution de l'équation non linéaire

$$(4.27) \quad F - \alpha Y(F-E) = S$$

et l'inversion de cette équation nous donne

$$(4.28) \quad F = \mathcal{J} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma(\mathcal{J}-E)$$

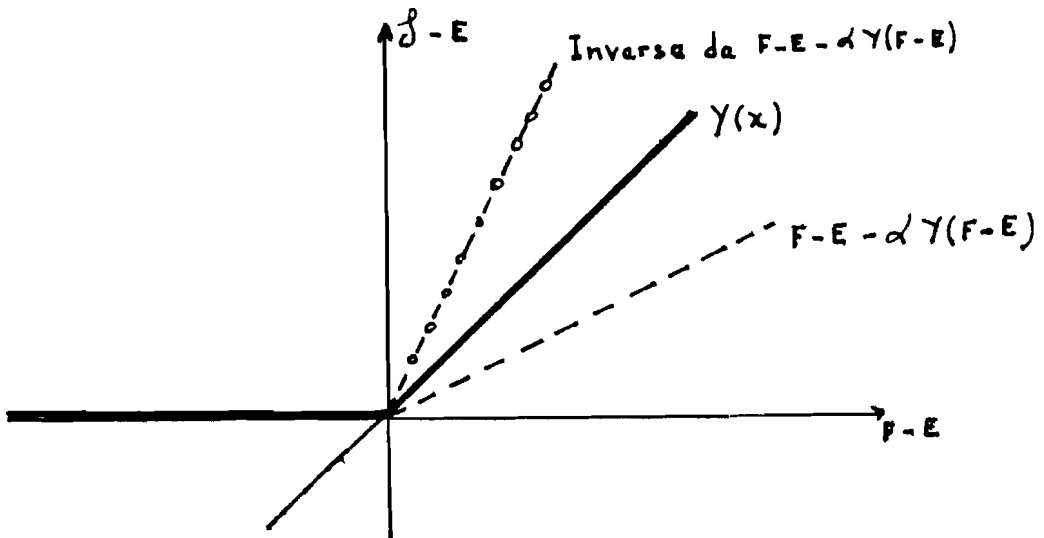


Figure 4 : Représentation de  $(F - E) - \alpha\gamma(F - E)$  et son inverse

#### V. SOLUTION DU PROBLEME LINEARISE ET NATURE NON SINUSOIDALE DE L'INTERFACE FLUIDE-FLUIDE $z = F(x,y,t)$

Nous avons vu à la fin du paragraphe précédent que l'équation (4.24,d) était découplé des autres et constituait une équation non homogène pour la détermination de  $F(x,y,t)$ .

Considérons à présent l'autre groupe d'équations constitué par les systèmes (4.9) et (4.10) et couplés avec les relations (a), (b) et (c) de (4.24). Nous pouvons y remarquer que les coefficients des opérateurs de dérivation agissant sur les variables inconnues de perturbation ne dépendent ni de  $t$ , ni de  $x$  et ni de  $y$ . Les perturbations solutions  $\mathcal{A}(x,y,z,t)$  peuvent donc être recherchées sous la forme d'ondes modales (sinusoïdales) en  $x$ ,  $y$  et  $t$  :

$$(4.29) \quad \mathcal{A}(x,y,z,t) = \mathcal{A}(z) e^{i(kx+ly+\sigma t)}$$

où  $i$  représente la racine du nombre réel  $(-1)$ .

En particulier,

$$w_2(x,y,z,t) = w_2(z) e^{i(kx+ly+\sigma t)} ;$$

et

$$E(x,y,t) = \dot{E} e^{i(kx+ly+\sigma t)} ; E \text{ étant une constante complexe.}$$

(4.26) s'écrit alors

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{J}(x, y, t) = W_2(0) a^{i(kx + ly + \sigma t)}$$

Et pour les mêmes raisons que précédemment,  $\mathcal{J}(x, y, t)$  peut être cherchée sous la forme :

$$\mathcal{J}(x, y, t) = \mathcal{J} e^{i(kx + ly + \sigma t)}, \quad \mathcal{J} \text{ étant une constante.}$$

Ce qui nous donne la relation

$$i(\sigma + k U_2(0)) \mathcal{J} = W_2(0)$$

Et lorsque  $\sigma + k U_2(0) \neq 0$ , et ce qui est justement le cas lorsqu'on ne s'intéresse qu'au spectre discret, alors on trouve

$$\mathcal{J} = \frac{W_2(0)}{i(\sigma + k U_2(0))}$$

L'égalité (4.28) s'écrit alors

$$(4.30) \quad F(x, y, t) = R_e(\mathcal{J}(x, y, t)) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma \{ R_e(\mathcal{J}(x, y, t) - E(x, y, t)) \}$$

avec

$$R_e(\mathcal{J}(x, y, t) - E(x, y, t)) = \sqrt{|\mathcal{J}|^2 + |E|^2 - 2|\mathcal{J}| \cdot |E| \cos(\varphi_{\mathcal{J}} - \varphi_E)} \cos(kx + ly + \sigma t + \varphi_{\mathcal{J}-E})$$

où  $|A|$  et  $\varphi_A$  représente respectivement le module et l'argument de la quantité complexe  $A$ , avec  $E$  et  $\mathcal{J}$  les constantes introduites précédemment.

Il s'ensuit de (4.30) que  $z = F(x, y, t)$  est une onde modale non sinusoïdale. Elle va présenter des points anguleux conformément à la représentation ci-dessous, alors que  $z = E(x, y, t)$  est une onde sinusoïdale parfaite.

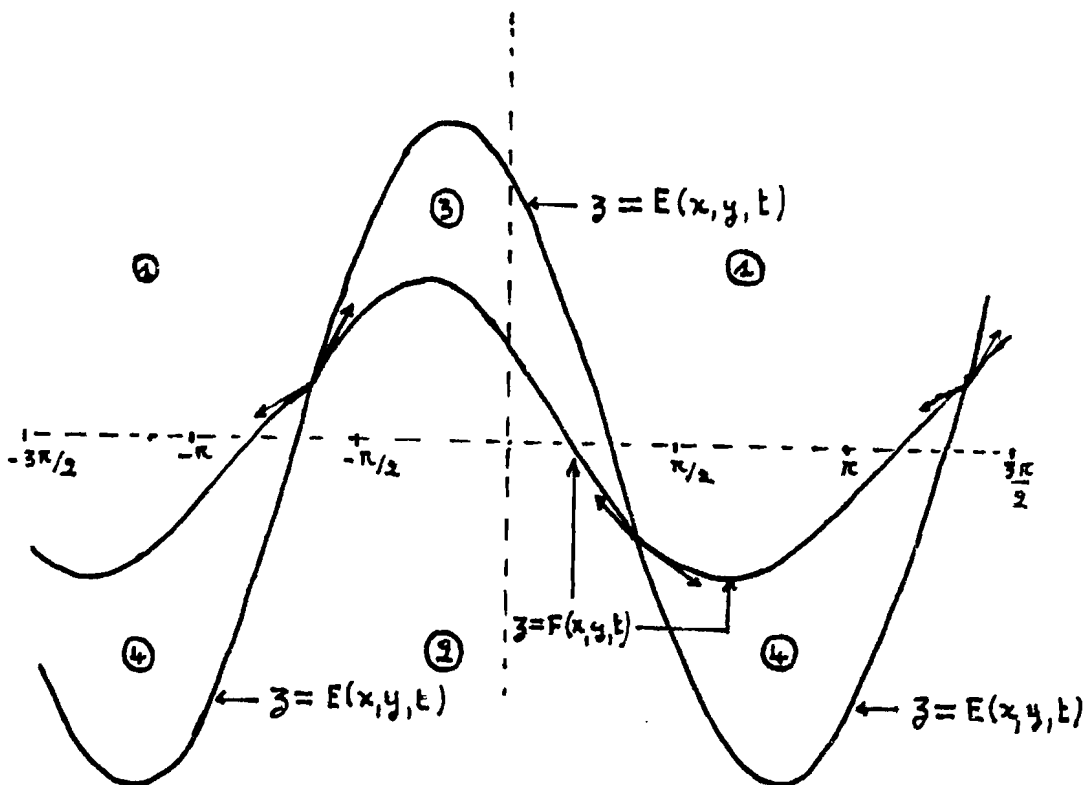


Figure 5 : Représentation de  $z = E(x, y, t)$  et  $z = F(x, y, t)$

Nous venons donc de voir que la non-linéarité du problème linéarisé révèle que la surface  $z = F(x, y, t)$  de séparation des deux fluides est une onde non sinusoïdale alors qu'elle s'avère être une sinusoïde parfaite dans le cas de cisaillement de deux fluides classiques purs.

## VI. PROBLEME REDUIT

### 4.6.1 Système d'équation pour les coefficients $A(z)$ des solutions modales (4.29)

Notre problème linéarisé de départ se réduit donc aux équations (4.9) dans la région 1 et (4.10) dans la région 2, avec les relations de couplages (4.24,a), (4.24,b) et (4.24,c) en  $z = 0$ .

Portons dans ces équations et relations les solutions modales (4.29) pour les perturbations, et posons

$$(4.31) \quad Q = \sigma + k U.$$

Les équations en question deviennent alors :

Dans la région particulière 1

$$(4.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad i Q \varpi + \dot{f} w = 0 \\ (b) \quad i Q \varpi - (1-\alpha) \{ i(ku + lr) + D w \} + \alpha' w = 0 \\ (c) \quad i Q \varpi + \alpha \{ i(kq + lr) + D s \} + \alpha' s = 0 \\ (d) \quad (1-\alpha) \rho \left\{ i Q \vec{V} + w \frac{dU}{dz} \vec{e}_1 \right\} = - (1-\alpha) \{ i p(k\vec{a}_1 + l\vec{a}_2) + D p \vec{a}_3 \} \\ \quad + \alpha m (\vec{g} - \vec{V}) - \alpha \rho M \left\{ i Q (\vec{V} - \vec{g}) + (w-s) \frac{dU}{dz} \vec{e}_1 \right\} \\ (e) \quad \alpha \rho_a \left\{ i Q \vec{g} + s \frac{dU}{dz} \vec{e}_1 \right\} = - \alpha \{ i p(k\vec{a}_1 + l\vec{a}_2) + D p \vec{a}_3 \} \\ \quad + \alpha m (\vec{V} - \vec{g}) + \alpha \rho M \left\{ i Q (\vec{V} - \vec{g}) + (w-s) \frac{dU}{dz} \vec{e}_1 \right\} \end{array} \right.$$

Par souci d'allègement d'écriture et de clarté, nous avons omis les indices pour le moment. Il faut noter aussi que toutes les quantités présentes dans (4.32) sont des fonctions qui ne dépendent que de la seule variable d'espace  $z$ . De plus,  $\cdot$  (point) et  $D$  représente l'opérateur de dérivation  $d/dz$ , et dans la suite, nous pourrions éventuellement utiliser ' (prime) pour aussi le désigner.

Dans la région 2

On obtient un système analogue à (4.31) en y posant

$$\alpha = \varpi = \alpha' = 0$$

En  $z = 0$

$$(4.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad S(0) = Q_1 E \\ (b) \quad P_2(0) = P_1(0) \\ (c) \quad (1-\alpha) Q_2 w_1 - Q_1 w_2 + \alpha Q_2 Q_1 E = 0 \end{array} \right.$$

$Q_1$  et  $Q_2$  sont données par (4.31) en y remplaçant  $U$  respectivement par  $U_1$  et  $U_2$ .

#### 4.6.2 Elimination des variables : Problème de STURM-LIOUVILLE

Le problème constitué par les systèmes d'équations (4.32) et (4.33) est un système d'équations différentielles à plusieurs inconnues. Sa résolution directe n'est pas toujours triviale. La méthode générale consiste à lui substituer un système équivalent avec moins d'inconnues, mais d'un

ordre différentiel souvent plus élevé. Pour ce faire, on procède par éliminations successives de certaines inconnues du système, pour arriver à un autre système contenant un nombre très réduit d'inconnues. Lequel système une fois résolu permettra la détermination des inconnues éliminées, au départ, par remontée successive.

Nous allons donc appliquer cette méthode d'éliminations successives des inconnues à notre problème.

Notons au préalable que dans les problèmes de stabilité hydrodynamique, certaines inconnues sont privilégiées par rapport à d'autres. ainsi, les termes de perturbation de pression ( $p$ ,  $Dp$ , etc...) doivent être éliminés dès qu'on le peut, alors qu'on essaie de conserver la composante verticale  $w$  de la vitesse perturbée du fluide. On procède ainsi parce que très souvent, il est possible de faire un rapprochement entre  $w$  et la fonction de courant de l'écoulement lorsqu'elle existe. Ce qui n'est pas le cas pour notre écoulement présent. Néanmoins, dans le cas présent, nous privilégierons encore  $w$  par analogie avec les cas d'écoulements admettant une fonction de courant.

Revenons à présent à notre problème.

#### *a - Elimination des inconnues $\varphi$ et $\omega$*

Dans le système (4.32), la relation (a) est découplée des autres équations et permettra de trouver  $\varphi$  une fois  $\omega$  connue. Nous pouvons donc l'ignorer.

Nous pouvons aussi éliminer  $\omega$  entre les relations (4.32,b) et (4.32,c) par soustraction pour obtenir la relation :

$$i \{ (1 - \alpha) (k u + l v) + \alpha (k q + l r) \} + D \omega + (\alpha^2 + \alpha D) (s - \omega) = 0$$

qui, avec les équations (4.32-d) et (4.32-e) constituent le nouveau système réduit que nous substituons à (4.32).

Projetons maintenant les relations (4.32-d) et (4.32-e) sur les vecteurs de base pour avoir des relations scalaires.

Le système réduit en question obtenu par élimination de  $\varphi$  et  $\omega$  se trouve être alors :

$$(4.34) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad i \{ (1-\alpha)(ku + lv) + \alpha(kq + lr) \} + \mathcal{D}w + (\alpha + \alpha\mathcal{D})(s-w) = 0 \\ (b) \quad (1-\alpha) \rho \left\{ iQ\mu + w \frac{dU}{dz} \right\} = -i(1-\chi\alpha)kp + \\ \quad \alpha(m + i\rho MQ)(q-u) + \alpha\rho M(s-w) \frac{dU}{dz} \\ (c) \quad i(1-\alpha) \rho Qv = -i(1-\chi\alpha)lp + \alpha(m + i\rho MQ)(r-v) \\ (d) \quad i(1-\alpha) \rho Qw = -(1-\chi\alpha)Dp + \alpha(m + i\rho MQ)(s-w) \\ (e) \quad \alpha\rho_a \left( iQq + s \frac{dU}{dz} \right) = -i\chi\alpha kp + \alpha(m + i\rho MQ)(u-q) + \\ \quad \alpha\rho M(w-s) \frac{dU}{dz} \\ (f) \quad i\alpha\rho_a Qr = -i\chi\alpha lp + \alpha(m + i\rho MQ)(r-r) \\ (g) \quad i\alpha\rho_a Qs = -\chi\alpha Dp + \alpha(m + i\rho MQ)(w-s) \end{array} \right.$$

b - Elimination partielle de la pression p entre certaines équations de (4.34) et expression de la vitesse verticale S des particules en fonction de w.

Le but final que nous recherchons est l'élimination de toutes les inconnues autres que w dans le système en vue d'avoir une équation différentielle en la seule variable w. Et l'étude de la stabilité reviendra alors à l'étude du spectre de l'opérateur associé à cette équation.

Dans un premier temps, nous allons procéder à une élimination partielle de p entre les équations du système, c'est-à-dire essayer de trouver un système équivalent à (4.34) où p apparaît dans le moins d'équations possibles. Nous ferons aussi apparaître dans le nouveau système que nous recherchons les groupements  $(ku + lv)$  ;  $(lu - kv)$  ;  $(kq + lr)$  ;  $(lq - kr)$ , comme nouvelles inconnues en lieu et place de u, v, q et r de manière à obtenir un système découplé. Procédons par étapes. Éliminons p entre les relations (4.34,b) et (4.34,c) pour obtenir la relation :

$$(4.35) \quad \left\{ \alpha m + i\rho \{ (1-\alpha) + \alpha M \} Q \right\} (lu - kv) - \alpha(m + i\rho MQ)(lq - kr) \\ = l\rho \frac{dU}{dz} \left\{ \alpha M(s-w) - (1-\alpha)w \right\}$$

De même, éliminons p entre les relations (4.34,e) et (4.34,f) pour aboutir à la relation

$$(4.36) \quad (m + i\rho MQ)(lu - kv) - \{ m + i(\rho_a + \rho M)Q \} (lq - kr) \\ = l \frac{dU}{dz} \left\{ M\rho(s-w) + \rho_a s \right\}$$

Nous pouvons aussi éliminer p entre :  
d'une part, les relations (4.34,b) et (4.34,e) pour aboutir à l'égalité :



$$\begin{aligned}
& -\chi(1-\alpha)\rho\left(iQu + w \frac{dU}{dz}\right) + (1-\chi\alpha)\rho_e\left(iQq + s \frac{dU}{dz}\right) \\
& = (m + i\rho MQ)(u - q) + \rho M(w - s) \frac{dU}{dz}
\end{aligned}$$

et d'autre part, les relations (4.34,c) et (4.34,f) pour obtenir l'égalité :

$$i\chi(1-\alpha)\rho Qv + i(1-\chi\alpha)\rho_e Qr = (m + i\rho MQ)(v - r)$$

Ces deux égalités que nous avons obtenues sont en fait des égalités intermédiaires en vue d'aboutir à une nouvelle relation faisant apparaître les groupements  $(ku + \ell v)$  et  $(kq + \ell r)$ . A cet effet, multiplions la première des deux égalités ci-dessus par  $k$  et la seconde par  $\ell$  et procédons à leur sommation. Il s'ensuit la relation que voici :

$$\begin{aligned}
(4.37) \quad & \left\{ m + i\rho \left[ \chi(1-\alpha) + M \right] Q \right\} (ku + \ell v) \\
& - \left\{ m + i \left[ (1-\chi\alpha)\rho_e + \rho M \right] Q \right\} (kq + \ell r) \\
& = k \left\{ \left[ (1-\chi\alpha)\rho_e + \rho M \right] s - \left[ \chi(1-\alpha) + M \right] \rho w \right\}
\end{aligned}$$

Nous pouvons encore obtenir une quatrième relation indépendante de  $p$  en éliminant  $Dp$  entre les relations (4.34,d) et (4.34,g), soit :

$$iQ \left\{ (1-\chi\alpha)\rho_e s - \chi(1-\alpha)\rho w \right\} = \left\{ m + i\rho MQ \right\} (w - s)$$

ce qui nous permet d'exprimer  $s$  en fonction de  $w$  :

$$(4.38) \quad s = \frac{m + i\rho \left\{ \chi(1-\alpha) + M \right\} Q}{m + i \left\{ (1-\chi\alpha)\rho_e + \rho M \right\} Q} w$$

Nous voyons bien que  $s$  est une fonction linéaire de  $w$ , c'est-à-dire de la forme  $s = aw$ , et le coefficient  $a$  est différent de 1. Par conséquent, les conclusions que nous avons avancées au terme de la discussion sur le modèle de DREW-SEGEL dans la première partie du mémoire, et relatives aux relations (2.76) et (2.77) sur la non-existence de modes non triviaux conséquence de la non-dissociation des frontières  $z = F(x,y,t)$  et  $z = E(x,y,t)$  se trouvent vérifiées et confortées.

La démarche que nous menons jusqu'ici consiste à trouver un système équivalent à (4.34) dans lequel les nouvelles inconnues seront  $(ku + \ell v)$  ;  $(\ell u - kv)$  ;  $w$  ;  $(kq + \ell r)$  ;  $(\ell q - \ell r)$  ;  $S$  ; et  $p$ .

Nous avons déjà trouvé quatre équations de ce système par combinaison des équations de (4.34). Ce sont les équations (4.35), (4.36), (4.37) et (4.38). Il nous en manque 3.

Les deux dernières relations de ce système feront intervenir la pression  $p$ .

Pour obtenir l'avant-dernière relation, on multiplie la relation (4.34,b) par  $k$  et (4.34,c) par  $\ell$  et on procède à leur sommation. Les calculs effectués, il s'ensuit la relation

$$(4.39) \quad (1 - \chi\alpha)(k^2 + \ell^2)p = \{i\alpha m - (\alpha M + (1 - \alpha))\rho Q\}(ku + \ell v) \\ + \alpha(-im + \rho M Q)(kq + \ell r) \\ + k\rho \frac{dU}{dz} \left\{ \frac{i(1 - \alpha)m - \{(1 - \alpha)(1 - \chi\alpha)\rho_e + (1 - \chi\alpha)((1 - \alpha)\rho + \alpha\rho_e)M\}Q}{m + i\{(1 - \chi\alpha)\rho_e + \rho M\}Q} \right\} Q$$

Et la relation (4.34,d) constituera la dernière équation du système. Regroupons toutes ces équations. Soit le système

$$(4.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4.38) \\ (4.35) \\ (4.36) \\ (4.37) \\ (4.34,a) \\ (4.39) \\ (4.34,d) \end{array} \right.$$

Dans (4.40), l'équation (4.38) nous donnait déjà  $S$ . Le sous-système (4.35) et (4.36) nous donnera les groupements  $(\ell u - kv)$  et  $(\ell q - kr)$  par résolution d'un système de Cramer à deux inconnues. De même, la résolution du sous-système (4.37) et (4.34,a) qui est aussi de Cramer en  $(ku + \ell v)$  et  $(kq + \ell r)$ , nous permettra de les trouver.

Par conséquent, en ignorant (4.38), le sous-système (4.40) est découpé en trois sous-systèmes : (4.35) et (4.36) ; (4.37) et (4.34,a) et enfin (4.39) et (4.34,d)

Seuls les groupements  $(ku + \ell v)$  et  $(kq + \ell r)$  interviennent dans le dernier sous-système. Nous pouvons donc ignorer le sous-système indépendant (4.35) et (4.36), et ramener le problème (4.40) à :

$$(4.41) \left\{ \begin{array}{l} (4.38) \\ (4.37) \\ (4.34, a) \\ (4.39) \\ (4.34, d) \end{array} \right.$$

C - Résolution du sous-système de Cramer (4.37) ; (4.34,a) avec (ku + lv) et (kq + lr) comme inconnues.

Portons l'expression de S donnée par (4.38) dans les équations (4.37) et (4.34, a). Le système (4.37) (4.34, a) s'écrit alors :

$$(4.42) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \{ m + i f (\chi(1-\alpha) + M) \} (ku + lv) \\ \quad - \{ m + i \{ (1-\chi\alpha) f + f M \} Q \} (kq + lr) \\ \quad = k \frac{m \{ (1-\chi\alpha) f_a - \chi(1-\alpha) f \}}{m + i \{ (1-\chi\alpha) f_a + M f \} Q} \frac{dU}{d\beta} w \\ (b) \quad (1-\alpha)(ku + lv) + \alpha(kq + lr) = i D w - \\ \quad (\alpha + \alpha D) \left\{ \frac{\{ \chi(1-\alpha) f - (1-\chi\alpha) f_a \} Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha) f_a + f M \}} w \right\} \end{array} \right.$$

De (4.42, a), on tire

$$(4.43) \quad (kq + lr) = \frac{m + i f \{ (1-\alpha)\chi + M \} Q}{m + \{ f_a(1-\chi\alpha) + f M \} Q} (ku + lv) \\ + k \frac{\{ \chi(1-\alpha) f - (1-\chi\alpha) f_a \} m}{\{ m + i \{ (1-\chi\alpha) f_a + f M \} Q \}^2} \frac{dU}{d\beta} w$$

qu'on porte dans (4.42, b) pour avoir

$$(ku + lv) = \frac{1}{m + i \{ (1-\alpha)(\chi\alpha f + (1-\chi\alpha) f_a) + f M \} Q} \times$$

$$\left\{ (i m - \{ f_a(1-\chi\alpha) + f M \} Q) \left\{ D w + i(\alpha + \alpha D) \left\{ \frac{\{ \chi(1-\alpha) f - (1-\chi\alpha) f_a \} Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha) f_a + f M \} Q} w \right\} \right\} \right. \\ \left. - k \alpha \frac{\{ \chi(1-\alpha) f - (1-\chi\alpha) f_a \} m}{m + i \{ (1-\chi\alpha) f_a + f M \} Q} \frac{dU}{d\beta} w \right\}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 & D w + i (\alpha' + \alpha D) \left\{ \frac{(\chi(1-\alpha)\rho - (1-\chi\alpha)\rho_a) Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q} w \right\} \\
 &= \left( 1 + i \alpha \frac{(\chi(1-\alpha)\rho - (1-\chi\alpha)\rho_a) Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q} \right) D w + i w (\alpha' + \alpha D) \left\{ \frac{(\chi(1-\alpha)\rho - (1-\chi\alpha)\rho_a) Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q} \right\} \\
 &= \frac{m + i \{ (1-\alpha)(\chi\alpha\rho + (1-\chi\alpha)\rho_a) + \rho M \} Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q} D w + i w (\alpha' + \alpha D) \left\{ \frac{(\chi(1-\alpha)\rho - (1-\chi\alpha)\rho_a) Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q} \right\}
 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 (4.44) \quad (k u + l v) &= i D w - \left\{ \frac{1}{m + i \{ (1-\alpha)(\chi\alpha\rho + (1-\chi\alpha)\rho_a) + \rho M \} Q} \right\} \times \\
 &\left\{ (m + i \{ \rho_a(1-\chi\alpha) + \rho M \} Q) (\alpha' + \alpha D) \left\{ \frac{\{ \chi(1-\alpha)\rho - (1-\chi\alpha)\rho_a \} Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q} \right\} \right. \\
 &\left. + k \alpha \frac{\{ \chi(1-\alpha)\rho - (1-\chi\alpha)\rho_a \} m}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q} \frac{dU}{dz} \right\} w
 \end{aligned}$$

Nous avons donc exprimé les inconnues du sous-système (4.37) (4.34,a) de (4.41). On va maintenant les porter dans le sous-système (4.39) (4.34,d) pour procéder à l'élimination de la pression.

d - Elimination de la pression dans le sous-système (4.39) (4.34,d) de (4.41) :

Portons les expressions (4.43) et (4.44) dans la relation (4.39). Nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 (1-\chi\alpha)(k^2 + l^2)p &= \left\{ (i\alpha m - \{ \alpha M + (1-\alpha) \} \rho Q) \right. \\
 &+ \alpha (-im + \rho M Q) \frac{m + i \{ \chi(1-\alpha) + M \} Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q} \left. \right\} (k u + l v) \\
 &+ k \left\{ \alpha (-im + \rho M Q) \frac{(\chi(1-\alpha)\rho - (1-\chi\alpha)\rho_a) m}{(m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q)^2} \right. \\
 &+ \rho \frac{i(1-\alpha)m - \{ (1-\alpha)(1-\chi\alpha)\rho_a + (1-\chi\alpha)((1-\alpha)\rho + \alpha\rho_a) M \} Q}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_a + \rho M \} Q} \left. \right\} \frac{dU}{dz} w
 \end{aligned}$$

Puis, en y portant de nouveau l'expression de  $(k u + l v)$  donnée par (4.44) et après quelques calculs effectués, nous aboutissons à la relation

$$(4.45) \quad (1 - \chi \alpha) (k^2 + l^2) p = A D w + (B_1 + k B_2) w$$

où

$$(4.46) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= -i (1 - \chi \alpha) \left\{ \frac{((1 - \alpha) \rho + \alpha \rho_a) m + i \rho \{ (1 - \alpha) \rho_a + ((1 - \alpha) \rho + \alpha \rho_a) M \} Q}{m + i \{ (1 - \chi \alpha) \rho_a + \rho M \} Q} \right\} Q \\ B_1 &= i A (\alpha + \alpha D) \left\{ \frac{\{ \chi (1 - \alpha) \rho - (1 - \chi \alpha) \rho_a \} Q}{m + i \{ (1 - \chi \alpha) \rho_a + \rho M \} Q} \right\} \\ B_2 &= i \frac{dU}{dz} \left\{ (1 - \alpha) \rho + \alpha \frac{\{ \chi (1 - \alpha) \rho - (1 - \chi \alpha) \rho_a \}}{m + i \{ (1 - \chi \alpha) \rho_a + \rho M \} Q} (M \rho Q + \right. \\ &\quad \left. \frac{(1 - \alpha) (1 - \chi \alpha) \rho_a \rho Q^2 - (m + i \{ (1 - \alpha) \rho + (1 - \chi \alpha) \rho_a + M \rho \} Q) (m + i M \rho Q)}{(m + i \{ (1 - \chi \alpha) \rho_a + M \rho \} Q) (m + i \{ (1 - \alpha) (\chi \alpha \rho + (1 - \chi \alpha) \rho_a) + M \rho \} Q)} \right\} \end{aligned} \right.$$

Il suffit maintenant de porter l'expression de  $p$  donnée par (4.45) dans (4.34,d) pour obtenir l'équation unique en  $w$  à laquelle nous espérons aboutir au départ. Mais auparavant, remarquons que dans l'équation (4.34,d) intervient  $s$  aussi : substituons-y l'expression (4.38) de  $s$ . Après avoir effectué les calculs, nous pouvons la récrire :

$$(4.47) \quad (1 - \chi \alpha) D p = -i (1 - \chi \alpha) Q \left[ \frac{m \{ (1 - \alpha) \rho + \alpha \rho_a \} + i \rho \{ (1 - \alpha) \rho_a + ((1 - \alpha) \rho + \alpha \rho_a) M \} Q}{m + i \{ (1 - \chi \alpha) \rho_a + M \rho \} Q} \right] w$$

Avant d'y porter l'expression (4.45), remarquons que le membre de gauche de (4.47) peut être récrit :

$$(1 - \chi \alpha) D p = D \{ (1 - \chi \alpha) p \} + \chi \alpha \dot{p}$$

et que son second membre est égal à  $A w$ , c'est-à-dire

$$D \{ (1 - \chi \alpha) p \} + \chi \alpha \dot{p} = A w$$

Portons dans cette équation l'expression de  $p$  donnée par (4.45) pour aboutir à notre équation finale en  $w$  ; soit :

$$(4.48) \quad \mathcal{P} w = 0$$

où  $\mathcal{P}$  est l'opérateur différentiel

$$(4.49) \quad \mathcal{P} = A \left\{ D^2 - (k^2 + l^2) \right\} + \left\{ \left( D + \frac{\chi \alpha \dot{}}{1 - \chi \alpha} \right) A + (B_1 + k B_2) \right\} D + \left( D + \frac{\chi \alpha \dot{}}{1 - \chi \alpha} \right) (B_1 + k B_2)$$

avec  $A$ ,  $B_1$  et  $B_2$  définies en (4.46), et  $D$  représentant toujours, avec  $\dot{\phantom{x}}$ , l'opérateur de dérivation  $d/dz$ .

e - Système de STURM-LIOUVILLE pour l'étude de la stabilité

1) Le problème de STURM-LIOUVILLE associé à l'étude de la stabilité sera constitué de deux équations différentielles du second ordre, l'une définie dans la région 1 ayant pour inconnue  $w_1$  et l'autre dans la région 2 ayant pour inconnue  $w_2$  avec des conditions aux limites en  $z = 0$  et à l'infini.

L'équation (4.48) avec  $w = w_1$  représentera l'équation différentielle dans la région 1. L'équation analogue dans la région 2 s'obtient en posant  $w = w_2$  et  $\alpha = 0$  dans (4.48). Soit le système :

$$(4.50) \begin{cases} \mathcal{P} w_1 = 0 \\ Q_2 \left\{ D^2 w_2 + \frac{\dot{f}_2}{f_2} D w_2 - (k^2 + \ell^2) w_2 \right\} - k \left\{ \frac{\dot{f}_2}{f_2} U_2' + U_2'' \right\} w_2 = 0 \end{cases}$$

avec  $\mathcal{P}$  définie en (4.49) et  $Q_2$  introduit en (4.33)

2) Conditions aux limites en  $z = 0$  et à l'infini :

Les conditions en  $z = 0$  sont données initialement par (4.33). En éliminant  $E$  entre (4.33,a) et (4.33,c), on se ramène au système

$$(4.51) \begin{cases} p_2(0) = p_1(0) \\ (1-\alpha) Q_2 w_1^{(c)} - Q_1 w_2^{(c)} + \alpha Q_2 s^{(c)} = 0 \end{cases}$$

Remplaçons dans ce système,  $s$ ,  $p_1$  et  $p_2$  par leurs expressions en fonction de  $w_1$  et  $w_2$ .

$s$  est donnée par (4.38), avec  $w = w_1$  et  $Q = Q_1$

$p_1$  est donnée par (4.45) en y posant  $w = w_1$

l'expression de  $p_2$  est aussi obtenue en posant dans (4.45),  $\alpha = 0$ ,  $w = w_2$  et  $Q = Q_2$ , soit :

$$(4.52) \quad (k^2 + \ell^2) p_2 = -i f_2 (D w_2 + k U_2')$$

(4.51) devient alors :

$$(4.53) \begin{cases} \left\{ \frac{m + i \{ (1-\alpha)(\chi \alpha f_2 + (1-\chi \alpha) f_2 + M f_2) \} Q_1}{m + i \{ (1-\alpha) f_2 + f_2 M \} Q_1} \right\} Q_2 w_1(0) - Q_1 w_2(0) = 0 \\ i A D w_2(0) + (B_1 + k B_2) w_2(0) = (1-\alpha) f_2 (Q_2 D w_2(0) - k U_2' w_2(0)) \end{cases}$$

D'autre part, les perturbations vont s'atténuer à l'infini si le domaine d'écoulement est "suffisamment grand". Et ainsi, nous pouvons écrire les conditions

$$(4.54) \quad \begin{cases} W_2(+\infty) = 0 \\ W_2(-\infty) = 0 \end{cases}$$

L'étude de la stabilité de l'écoulement perturbé de départ revient ainsi à l'étude du problème spectral associé au système de STURM-LIOUVILLE (4.50) avec les conditions aux limites (4.53) et (4.54).

## C H A P I T R E V

### APPLICATION A L'ETUDE D'UN ECOULEMENT DE TYPE KELVIN-HELMHOLTZ

#### I. GENERALITES

L'écoulement de KELVIN-HELMHOLTZ est un cas particulier d'écoulement stratifié de deux fluides superposés. Dans cet écoulement, les vitesses  $U_1$  du fluide 1,  $U_2$  du fluide 2, et respectivement les masses volumiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont constantes initialement.

L'écoulement de KELVIN-HELMHOLTZ est le plus connu et le plus étudié des écoulements stratifiés. Il est intéressant pour les travaux théoriques car il permet des calculs analytiques explicites et comparatifs.

Aujourd'hui encore, cet écoulement sert de base à de nombreux travaux aussi bien en stabilité magnétohydrodynamique que purement hydrodynamique. La bibliographie sur ce sujet est assez importante (voir à cet effet quelques références à la fin de ce mémoire).

Cet écoulement a été initialement étudié par Lord KELVIN, puis HELMHOLTZ dès 1880. L'étude effectuée révèle l'existence de deux modes (conjugués), l'un instable, et l'autre stable. L'apparition simultanée de ces deux modes indissociables fait que tout écoulement est instable ou bien son spectre lui fait défaut.

C'est bien plus tard que les résultats des expériences ont été expliqués. En effet, la prise en compte de la viscosité dans les équations de mouvement conduit aux équations d'ORR-SOMMERFELD dans le problème aux valeurs propres ; et la solution modale qu'on obtient à partir de ces équations converge toujours vers le mode instable lorsqu'on fait tendre la viscosité vers zéro (écoulements à grands nombres de REYNOLDS). Ce qui permet de conclure que l'écoulement de KELVIN-HELMHOLTZ non visqueux, qui est le cas extrême de l'écoulement visqueux, est instable aux petites perturbations en théorie linéaire. Le mode stable étant donc un mode parasite.

#### II. RELATION CARACTERISTIQUE AUX VALEURS PROPRES POUR LE CAS KELVIN-HELMHOLTZ DANS LE CADRE DE NOTRE THEORIE

##### 5.2.1 Problème aux limites associé

Nous venons de voir dans les généralités que pour l'écoulement de KELVIN-HELMHOLTZ, on avait à la fois  $U_1$  et  $U_2$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  constantes.

Dans le cas présent, nous avons des particules dans le fluide 1 représentées par leur fraction volumique  $\alpha$ , qui n'est pas nécessairement constante dans le cadre général du chapitre précédent. Ici, nous allons



supposer homogène la répartition initiale des particules.

Dans ces conditions, le problème aux limites ((4.50);(4.53);(4.54)) se réduit à :

$$(a) A \{ D^2 w_1 - (k^2 + l^2) w_1 \} = 0$$

$$(b) Q_2 \{ D^2 w_2 - (k^2 + l^2) w_2 \} = 0$$

Avec  
en  $z = 0$

$$(5.1) \quad (c) \frac{m + i \{ (1-\alpha)(\chi\alpha\rho_1 + (1-\chi\alpha)\rho_2) + M\rho_1 \} Q_1}{m + i \{ (1-\chi\alpha)\rho_2 + M\rho_1 \} Q_2} Q_2 w_1(0) - Q_1 w_2(0) = 0$$

$$(d) A D w_1(0) - (1-\chi\alpha)\rho_2 Q_2 D w_2(0) = 0$$

A l'infini

$$(e) w_1(+\infty) = 0$$

$$(f) w_2(-\infty) = 0$$

où A est donné par (4.46) et  $Q_2$  par (4.31)

### 5.2.2 Etude des perturbations associées

Si nous observons le problème aux limites dans le cas général ((4.50); (4.53); (4.54)), nous pouvons constater que lorsque  $A = 0$  ou  $Q_2 = 0$  ce problème devient singulier. On a une dégénérescence du système d'équations et l'ensemble des valeurs de la vitesse de phase complexe  $c = -\sigma/k$  annulant A ou  $Q_2$  est situé dans le spectre des opérateurs du système. Et plus précisément, cet ensemble est situé dans le spectre continu associé au problème spectral.

Pour étudier la stabilité d'un écoulement dans le cas général, on doit considérer une perturbation initiale quelconque et suivre son développement à des instants ultérieurs. Ces perturbations se propagent dans le milieu sous forme de paquets d'ondes. Certaines de ces ondes peuvent s'amplifier et d'autres s'atténuer. L'étude de ces ondes de perturbation revient à celle des valeurs du spectre de l'opérateur associé au problème spectral.

Dans les paquets d'ondes, nous trouvons des contributions dues aux valeurs discrètes (ou isolées) du spectre (ondes monochromatiques) et celles dues au spectre essentiel. Ce dernier étant constitué du spectre continu et des points d'accumulation des valeurs discrètes, lorsqu'ils existent.

Dans les études classiques de stabilité, l'accent est souvent mis sur les modes propres (correspondant aux valeurs discrètes du spectre) pour deux raisons essentielles : la première de ces deux raisons provient des travaux originaux de K. CASE [6]. C'est lui qui initialement a montré que l'étude de la stabilité hydrodynamique se ramenait à celle du spectre d'un opérateur via les transformations de LAPLACE et de FOURIER. Partant de là, il a établi la corrélation entre les ondes monochromatiques et le spectre discret d'une part, et celles du spectre essentiel et les paquets d'ondes associées d'autre part. Cette corrélation étant établie, il apparaît de ce fait que les modes propres ne forment pas un système complet pour la décomposition spectrale, et qu'il faut par conséquent tenir compte du spectre essentiel associé aux paquets d'ondes. D'où la nécessité de l'étude de ce spectre (qui dans la plupart des cas se réduit au spectre continu en hydrodynamique). Le travail essentiel de K. CASE a été d'avoir montré que pour les écoulements parallèles classiques, les perturbations situées dans le spectre continu s'atténuent. Par conséquent, dans la recherche des modes instables, on peut ne considérer que les modes propres.

La deuxième raison tient plutôt à la difficulté mathématique que représente la théorie spectrale des opérateurs. La preuve de l'existence du spectre continu et de sa localisation n'est pas toujours triviale. Et l'étude des paquets d'ondes associés passe par la recherche de fonctions spectrales qui ne sont pas toujours des distributions classiques, sauf dans des cas très particuliers. Tout ceci constitue un domaine d'accès difficile et quasi-hermétique pour la plupart des chercheurs.

Par conséquent, les difficultés inhérentes à la théorie spectrale et les résultats remarquables de CASE font qu'on se borne souvent au cas des modes propres dans les études. Et pourtant, dans certains cas le spectre continu ne se trouve pas sur l'axe des réels comme dans la théorie de CASE. Une attention particulière doit être alors portée à l'étude du spectre continu pour savoir s'il n'existe pas de perturbations qui sont susceptibles d'être amplifiées dans les paquets d'onde associés.

La preuve de l'existence d'un spectre continu pour l'équation d'ORR-SOMMERFELD dans la cas du profil de BLASIUS par MACK, GROSCH & SALWEN, GUSTAVSON a été un fait remarquable sans précédent dans le contexte de la stabilité hydrodynamique. Cela a été rapporté par M. BOUTHIER [4] qui dans un article original a généralisé ce résultat obtenu pour le profil de Blasius au cas le plus général d'écoulements non parallèles. Mieux, il a montré que le spectre continu était bidimensionnel et qu'il avait une frontière parabolique dans le cas de perturbations à développement temporel, et hyperbolique dans le cas de perturbations à développement spatial.

Dans l'étude présente, nous n'aborderons pas l'analyse du spectre continu. Néanmoins, nous pouvons dire que ce spectre continu est situé dans le plan complexe, contrairement au cas des fluides classiques où il est situé sur l'axe réel.

Par conséquent, si nous écartons le cas des valeurs spectrales du spectre continu annulant  $A$  et  $Q_2$ , les deux équations (5.1,a) et (5.1,b)

deviennent :

$$(5.2) \quad \begin{cases} (a) \mathcal{D}^2 w_1 - (k^2 + l^2) w_1 = 0 \\ (b) \mathcal{D}^2 w_2 - (k^2 + l^2) w_2 = 0 \end{cases}$$

### 5.2.3 Solution modale et relation caractéristique aux valeurs propres

Dans (5.2), posons  $\Omega^2 = k^2 + l^2$ . En tenant compte des conditions à l'infini, la solution de (5.2) est alors de la forme

$$(5.3) \quad \begin{cases} w_1(z) = w_1 e^{-\Omega z} \\ w_2(z) = w_2 e^{-\Omega z} \end{cases}$$

où

$e^x$  = Exponentielle de  $x$ ,  
 $w_1$  et  $w_2$  étant des constantes.

Il reste maintenant à satisfaire les conditions en  $z = 0$  (5.1,c) et (5.1,d). Portons-y (5.3). Nous obtenons alors le système en  $w_1$  et  $w_2$  suivant :

$$(5.4) \quad \begin{cases} \frac{m + i \{ (1-\alpha) (\chi \alpha \rho_2 + (1-\chi \alpha) \rho_a) + M \rho_2 \} Q_2}{m + i \{ (1-\chi \alpha) \rho_a + M \rho_1 \} Q_1} Q_2 w_1 - Q_2 w_2 = 0 \\ \frac{\{ (1-\alpha) \rho_2 + \alpha \rho_a \} m + i \rho_2 \{ (1-\alpha) \rho_a + ((1-\alpha) \rho_2 + \alpha \rho_a) M \}}{m + i \{ (1-\chi \alpha) \rho_a + M \rho_2 \} Q_1} Q_1 w_1 + \rho_2 Q_2 w_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système est indépendant du fait que le fluide 1 (particulaire) se trouve soit au-dessus, soit en-dessous du fluide 2 initialement dans l'écoulement. Cette propriété du système (5.4) est due au fait qu'il n'y a pas d'anisotropie due à la gravité dans le problème.

L'existence de solutions non triviales pour le système de Cramer (5.4) requiert l'annulation de son déterminant associé. Cela conduit à la relation caractéristique aux valeurs propres cherchée :

$$(5.5) \quad \rho_1 Q_1^2 \left\{ m \left( (1-\alpha) + \alpha \frac{\rho_a}{\rho_2} \right) + i \left( (1-\alpha) \rho_a + ((1-\alpha) \rho_2 + \alpha \rho_a) M \right) Q_2 \right\} \\ + \rho_2 Q_2^2 \left\{ m + i \left( (1-\alpha) (\chi \alpha \rho_2 + (1-\chi \alpha) \rho_a) + M \rho_2 \right) Q_1 \right\} = 0$$

### 5.2.4 Introduction des variables adimensionnelles cinématiques et géométriques dans la relation aux valeurs propres

Le but de ce sous-paragraphe est de réduire le nombre de paramètres intervenant dans l'équation (5.5), en lui substituant une relation équivalente qui ne dépendra que de variables sans dimension. Les paramètres initiaux sont au nombre de huit :  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_e$ ,  $m$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $\alpha$  et  $k$ .

On peut choisir pour paramètres indépendants :  $\rho_2/\rho_1$  ;  $\rho_e/\rho_1$  ;  $\alpha'$  et  $\frac{\rho_1 (U_2 - U_1) k}{m}$ .

Pour cela, remarquons que (5.5) peut s'écrire aussi, par factorisation de  $m$  et  $\rho_1$  :

$$(5.6) \quad Q_1^2 \left\{ (1 - \alpha) + \alpha \frac{\rho_e}{\rho_2} + i \left( (1 - \alpha) \frac{\rho_e}{\rho_2} \left\{ (1 - \alpha) + \alpha \frac{\rho_e}{\rho_2} \right\} M \right) \frac{\rho_2}{m} Q_2 \right\} \\ + \frac{\rho_2}{\rho_1} Q_2^2 \left\{ 1 + i \left( (1 - \alpha) \left\{ \alpha + (1 - \alpha) \frac{\rho_e}{\rho_2} \right\} + M \right) \frac{\rho_2}{m} Q_2 \right\} = 0$$

D'autre part, nous avons aussi :

$$Q_2 = \sigma + k U_2 \\ = \sigma + k U_1 + k \Delta U \\ = Q_1 + k \Delta U$$

où  $\Delta U = U_2 - U_1$

Appelons  $C$  la vitesse de phase complexe. Nous avons donc  $C = -\frac{\sigma}{k}$  et par suite :

$$Q_1 = k (U_1 - C)$$

Introduisons maintenant les vitesses adimensionnées par  $\Delta U$  :

$$(5.7) \quad U = \frac{U_1}{\Delta U} \quad \text{et} \quad C = \frac{C}{\Delta U}$$

et appelons  $Q$  leur différence, soit :

$$(5.8) \quad Q = C - U$$

Nous avons alors

$$Q_1 = -k \Delta U Q \quad \text{et} \quad Q_2 = -k \Delta U (Q - 1)$$

Reportons les expressions de  $Q_1$  et  $Q_2$  ci-dessus dans la relation (5.6). Nous obtenons :

$$(5.9) \quad Q^2 \left\{ (1-\alpha) + \alpha \frac{\rho_a}{\rho_2} - i \left( (1-\alpha) \frac{\rho_a}{\rho_2} + \left\{ (1-\alpha) + \alpha \frac{\rho_a}{\rho_2} \right\} M \right) \frac{\rho_2}{m} \Delta U k Q \right\} \\ + \frac{\rho_2}{\rho_1} (Q-1)^2 \left\{ 1 - i \left( (1-\alpha) \left\{ \chi \alpha + (1-\chi \alpha) \frac{\rho_a}{\rho_2} \right\} + M \right) \frac{\rho_2}{m} \Delta U k Q \right\} = 0$$

Posons à présent dans (5.9) :

$$R_f = \frac{\rho_2}{\rho_1} ; R_p = \frac{\rho_e}{\rho_1} ; K = \frac{\rho_1}{m} \Delta U k$$

pour aboutir à la relation finale cherchée :

$$(5.10) \quad Q^2 \left\{ (1-\alpha) + \alpha R_p - i \left( (1-\alpha) R_p + \left\{ (1-\alpha) + \alpha R_p \right\} M \right) K Q \right\} \\ + R_f (Q-1)^2 \left\{ 1 - i \left( (1-\alpha) \left\{ \chi \alpha + (1-\chi \alpha) R_p \right\} + M \right) K Q \right\} = 0$$

qui ne dépend plus que des quatre paramètres annoncés plus haut  $R_f$  ;  $R_p$  ;  $\alpha$  et  $K$ .

Nous pouvons remarquer que l'équation caractéristique (5.10) précédente qui va régir la stabilité de l'écoulement ne dépend que du seul nombre d'onde  $K$  dans la direction longitudinale des  $x$ . Le nombre d'onde  $\ell$  dans la direction transversale des  $y$  n'intervient que dans la définition de l'interface  $F(x,y,t)$  à travers la formule (4.30). Par conséquent, si on ne s'intéresse qu'à la stabilité de l'écoulement, seules les perturbations bidimensionnelles sont à considérer. C'est l'élargissement du théorème de SQUIRE au cas présent.

### 5.2.5 Résolution approchée de l'équation caractéristique aux valeurs propres lorsque $\alpha \ll 1$ ( $\alpha$ très petit devant 1)

La relation aux valeurs propres (5.10) est une équation algébrique du troisième degré en  $Q$ . Elle admet donc trois racines, et chaque racine va représenter un mode propre associé aux ondes de perturbation.

En particulier, pour  $\alpha = 0$ , la relation (5.10) devient

$$(5.11) \quad \left\{ Q_0^2 + R_f (Q_0 - 1)^2 \right\} \cdot \left\{ 1 - i (R_p + M) K Q_0 \right\} = 0$$

Par conséquent, en plus des deux modes symétriques (conjugués) qui nous sont donnés par la théorie classique de l'écoulement de KELVIN-HELMHOLTZ et vérifiant

$$(5.12) \quad Q^2 + R_f (Q-1)^2 = 0$$

nous en trouvons un troisième :

$$(5.13) \quad Q_* = -\frac{i}{(R_p + M)K}$$

Ce mode non révélé par la théorie classique et mis en évidence par la présente théorie, plonge dans le spectre continu du problème général ((4.50) ; (4.53) ; (4.54)). C'est un mode toujours stable car

$$\begin{aligned} K C_i &= \text{Im}(K Q_*) \\ &= -\frac{1}{R_p + M} < 0, \forall K \end{aligned}$$

Les deux modes symétriques de KELVIN-HELMHOLTZ classique vérifiant (5.12) sont :

$$(5.14) \quad Q_\epsilon = \frac{R_f}{1 + R_f} - i \epsilon \frac{\sqrt{R_f}}{1 + R_f}$$

avec  $\epsilon = \pm 1$

Appelons toujours  $Q_0$  l'une quelconque des solutions dans le cas  $\alpha = 0$ .

Pour  $\alpha \ll 1$ , opérons le développement de  $Q$  au voisinage de  $\alpha = 0$  :

$$(5.15) \quad Q = Q_0 + \alpha Q_1 + O(\alpha^2)$$

et portons cette expression de  $Q$  dans (5.10).

Il advient la relation ordonnée par puissances croissantes de  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} &\left\{ Q_0^2 + R_f (Q_0 - 1)^2 \right\} \left\{ 1 - i (R_p + M) K Q_0 \right\} \\ &+ \alpha \left[ Q_1 \left( 2 \left\{ Q_0 + R_f (Q_0 - 1) \right\} \left\{ 1 - i (R_p + M) K Q_0 \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i (R_p + M) K \left\{ Q_0^2 + R_f (Q_0 - 1)^2 \right\} \right) \right. \\ &\quad \left. + Q_0^2 \left\{ (R_p - 1) + i \left\{ R_p + (1 - R_p) M \right\} K Q_0 \right\} \right. \\ &\quad \left. + i R_f (Q_0 - 1)^2 \left\{ (1 + \chi) R_p - \chi \right\} K Q_0 \right] + O(\alpha^2) = 0 \end{aligned}$$

et en tenant compte de (5.11), et en annulant le coefficient de  $\alpha$  dans la relation ci-dessus, on aboutit à la relation :

$$(5.16) \quad \left\{ 2 \left( Q_0 + R_f (Q_0 - 1) \right) \left( 1 - i(R_f + M) K Q_0 \right) - i(R_f + M) K \left( Q_0^2 + R_f (Q_0 - 1)^2 \right) \right\} Q_2 \\ = -Q_0^2 \left\{ (R_f - 1) + i \left\{ R_f + (1 - R_f) M \right\} K Q_0 \right\} - i R_f (Q_0 - 1)^2 \left\{ (1 + \chi) R_f - \chi \right\} K Q_0$$

qui définit le facteur  $Q_1$ .

1) On s'intéresse aux deux solutions proches de KELVIN-HELMHOLTZ classique

On va ignorer l'indice de  $Q_0$  en posant  $Q = Q_0$ . Dans ce cas, (5.12) est vérifiée et on a à la fois

$$R_f (Q - 1)^2 = -Q^2$$

et

$$R_f (Q - 1) = \varepsilon i \sqrt{R_f} Q$$

(5.16) devient alors :

$$2 \left( 1 + i \varepsilon \sqrt{R_f} \right) \left( 1 - i(R_f + M) K Q \right) Q_2 \\ = - (R_f - 1) \left( 1 - i(\chi + M) K Q \right) Q$$

Mais nous pouvons transformer l'écriture de (5.14) pour obtenir :

$$1 + i \varepsilon \sqrt{R_f} = \frac{i \varepsilon (R_f + 1)}{\sqrt{R_f}} Q$$

et donc l'égalité précédente va s'écrire

$$2 i \varepsilon \frac{R_f + 1}{\sqrt{R_f}} \left\{ 1 - i(R_f + M) K Q \right\} Q_2 \\ = - (R_f - 1) \left\{ 1 - i(\chi + M) K Q \right\}$$

soit

$$(5.17) \quad Q_2 = i \varepsilon (R_f - 1) \frac{\sqrt{R_f}}{2(R_f + 1)} \left\{ \frac{1 - i(\chi + M) K Q}{1 - i(R_f + M) K Q} \right\} \\ = i \varepsilon \frac{(R_f - 1) \sqrt{R_f}}{2(R_f + 1)} \left( \frac{\chi + M}{R_f + M} + \frac{R_f - \chi}{R_f + M} \frac{1}{1 - i(R_f + M) K Q} \right) \\ = i \varepsilon \frac{(R_f - 1) \sqrt{R_f}}{2(R_f + 1)} \left( \frac{\chi + M}{R_f + M} + \frac{R_f - \chi}{R_f + M} \left\{ \frac{1 + i(R_f + M) K \bar{Q}}{|1 - i(R_f + M) K Q|^2} \right\} \right)$$

où  $\bar{Q}$  représente le conjugué de  $Q$

Portons dans (5.17) l'expression de  $Q$  donnée par (5.14) et séparons les parties réelle et imaginaire de  $Q_1$  pour aboutir aux expressions :

$$(5.18) \quad \begin{cases} (a) \operatorname{Re} Q_1 = A + \frac{BK + C}{\left| (R_f + 1 - \epsilon(R_p + M)\sqrt{R_f}K) - iR_f(R_p + M)K \right|^2} \\ (b) \operatorname{Im} Q_1 = A' + \frac{B'K + C'}{\left| (R_f + 1 - \epsilon(R_p + M)\sqrt{R_f}K) - iR_f(R_p + M)K \right|^2} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} A = C = 0 \\ B = -\epsilon(R_p - 1)(R_p - \chi)R_f\sqrt{R_f} \\ A' = \frac{\epsilon(R_p - 1)(\chi + M)\sqrt{R_f}}{2(R_f + 1)(R_p + M)} \\ B' = -\frac{R_f(R_p - 1)(R_p - \chi)}{2(R_f + 1)} \\ C' = \frac{\epsilon(R_p - 1)(R_p - \chi)}{2(R_p + M)}(R_f + 1)\sqrt{R_f} \end{cases}$$

a - Cas limites  $|K| = \infty$  et  $K = 0$

Lorsque  $|K|$  tend vers  $\infty$  (très courtes longueur d'onde) dans (5.18),  $Q_1$  admet une asymptote :

$$Q_{as} = iA'$$

et lorsque  $K$  tend vers 0 (grandes longueurs d'onde),  $Q_1$  admet la valeur limite

$$Q_2 = i\epsilon \frac{(R_p - 1)\sqrt{R_f}}{2(R_f + 1)}$$

Nous avons donc

$$Q_2 = \frac{(R_p + M)}{(\chi + M)} Q_{as}$$

et nous pouvons évaluer l'ordre de grandeur relatif des phénomènes de très grandes longueurs d'onde par rapport à ceux de très courtes longueur d'onde, soit



$$(5.19) \quad \frac{Q_e - Q_{as}}{Q_{as}} = \frac{R_p - \chi}{\chi + M}$$

Lorsque  $R_p$  est très grand (exemple de la météorologie où les masses nuageuses sont constituées de particules d'eau en suspension dans l'air), le rapport (5.19) est très important. Donc, pour pouvoir observer à la fois les phénomènes de très petites et grandes échelles, il faudra utiliser des appareils d'observation qui tiennent compte de ce rapport.

*b - Graphes de  $R_e Q_1$  et  $J_m Q_1$*

Considérons les variations de (5.18). Suivant le signe de B (ou B'), on aura :

1) si  $B > 0$

K	$-\infty$	$+\infty$
BK + C	$-\infty$	$+\infty$
Dénominateur	0	0
(5.18)	A	A

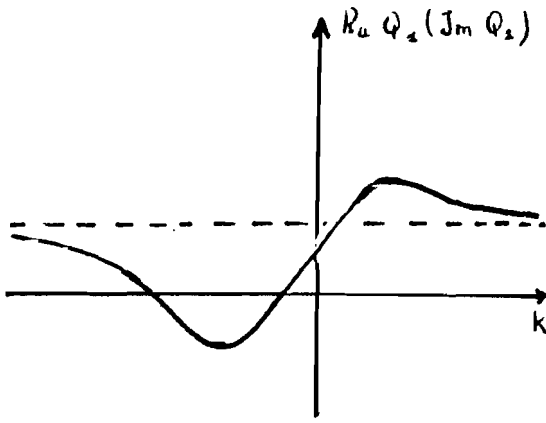
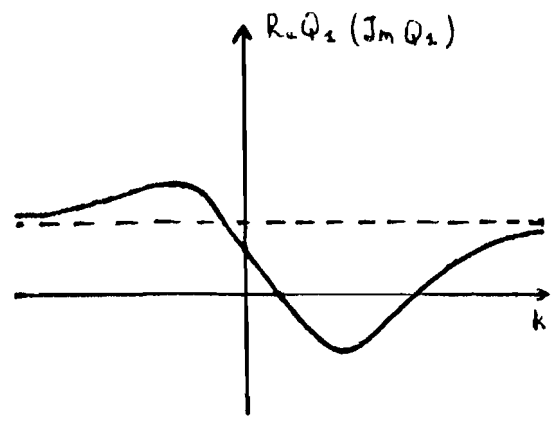
2) Si  $B < 0$

K	$-\infty$	$+\infty$
BK + C	$+\infty$	$-\infty$
Dénominateur	0	0
(5.18)	A	A

Les variations de (5.18) résultent 1) de ses valeurs à l'infini, 2) de son signe, 3) de la dérivée de  $\frac{BK + C}{|D|^2}$  ( $|D|^2$  étant le dénominateur) qui se

présente sous la forme  $\frac{P_2(K)}{|D|^4}$  où  $P_2(K)$  est un polynôme du 2ème degré qui ne peut donc donner que deux extréma.

On va donc avoir pour  $\alpha \ll 1$ , l'un ou l'autre des deux graphes :

Figure 1 : cas où  $B > 0$ Figure 2 : cas où  $B < 0$ 

## 2) Cas du troisième mode

Pour ce cas,  $Q_0$  vérifie (5.13) et (5.16) devient (avec  $Q = Q_0$ ) :

$$i(R_p + M)(Q^2 + R_f(Q-1)^2)kQ_2$$

$$= Q^2 \left\{ (R_p - 1) + i \left\{ R_f + (1 - R_p)M \right\} kQ \right\} - i R_f (Q-1)^2 \left\{ (1+\chi)R_p - \chi \right\} kQ$$

En y portant l'expression (5.13) de  $Q$ , et après quelques calculs, on trouve :

$$Q_2 = \frac{-i}{(R_p + M)^2 k} \left\{ R_p + \chi(R_p - 1) + \frac{(R_p - 1)(R_p - \chi)}{1 - R_f \left\{ i + (R_p + M)k \right\}^2} \right\}$$

Puis en séparant les parties réelle et imaginaire, nous arrivons aux relations

$$(5.20) \quad \begin{cases} (a) \operatorname{Re} Q_2 = \frac{2 R_f (R_p - 1) (R_p - \chi)}{(R_p + M) \left\{ (1 + R_f - R_f (R_p + M)^2 k^2)^2 + 4 R_f^2 (R_p + M)^2 k^2 \right\}} \\ (b) \operatorname{Im} Q_2 = \frac{1}{(R_p + M)^2 k} \left\{ \chi - R_p(1 + \chi) + \frac{(R_p - 1)(R_p - \chi) (R_f (R_p + M)^2 k^2 - (R_f + 1))}{(1 + R_f - R_f (R_p + M)^2 k^2)^2 + 4 R_f^2 (R_p + M)^2 k^2} \right\} \end{cases}$$

Graphes de  $\operatorname{Re} Q_1$

On pose  $X = (R_p + M)^2 k^2$

Le dénominateur  $(1 + R_f - R_f (R_p + M)^2 k^2)^2 + 4 R_f^2 (R_p + M)^2 k^2$

s'écrit alors :

$$R_f^2 X^2 + 2 R_f (R_f - 1) X + (R_f + 1)^2$$

Il y a deux cas à distinguer :

1) si  $R_f - 1 \geq 0$ , c'est-à-dire  $R_f \geq 1$ , alors :

$X$	0 <span style="float: right;"><math>+\infty</math></span>
Dénominateur	$(R_f + 1)^2$ <span style="float: right;"><math>\longrightarrow +\infty</math></span>

D'où les variations en fonction de  $K$  :

$K$	$-\infty$ <span style="float: right;"><math>+\infty</math></span>
$X$	$+\infty \longrightarrow 0 \longrightarrow +\infty$
Dénominateur	$+\infty \longrightarrow (R_f + 1)^2 \longrightarrow +\infty$
$R_1, Q_1$	$0 \begin{cases} \xrightarrow{\text{si } X=1 \text{ ou } R_f \gg 1} \frac{2 R_f (R_f - 1) (R_f - X)}{(R_f + 1) (R_f + 1)^2} \\ \xrightarrow{\text{si } X=0 \text{ et } R_f < 1} \end{cases} \longrightarrow 0$

2) si  $R_f < 1$ , alors

$X$	0 <span style="float: right;"><math>\longrightarrow +\infty</math></span> $\longrightarrow \frac{(1 - R_f)}{R_f}$
Dénominateur	$(R_f + 1)^2$ <span style="float: right;"><math>\longrightarrow +\infty</math></span> $\longrightarrow 4 R_f$

D'où les variations en fonction de  $K$

K	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{1-R_f}}{(R_p+M)\sqrt{R_f}}$	0	$\frac{\sqrt{1-R_f}}{(R_p+M)\sqrt{R_f}}$	$+\infty$
X	$+\infty$	$\rightarrow (1-R_f)/R_f$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow (1-R_f)/R_f$	$\rightarrow +\infty$
Dénominateur	$+\infty$	$\rightarrow 4R_f$	$\rightarrow (R_f+1)^2$	$\rightarrow 4R_f$	$\rightarrow +\infty$
$R_p, Q_2$					

avec  $Q_a = \frac{(R_p-1)(R_p-x)}{2(R_p+M)}$  ;  $Q_b = \frac{2R_f(R_p-1)(R_p-x)}{(R_p+M)(R_f+1)^2}$

3) Représentations

a - Si  $R_p > 1$  ou  $x = 1$

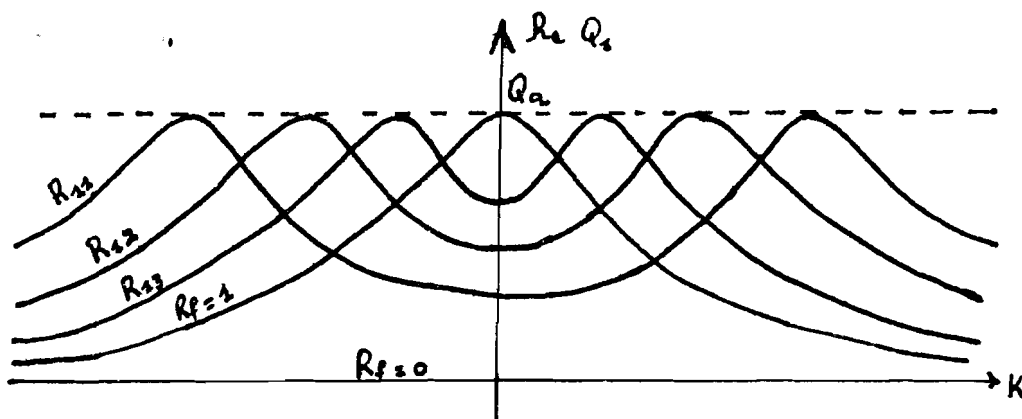


Figure 3 :  $x = 1, R_p > 1 ; R_f < 1$

Evolution des courbes pour les valeurs croissantes de  $R_f$  de 0 à 1 :

$R_f = 0 < R_{11} < R_{12} < R_{13} < 1$

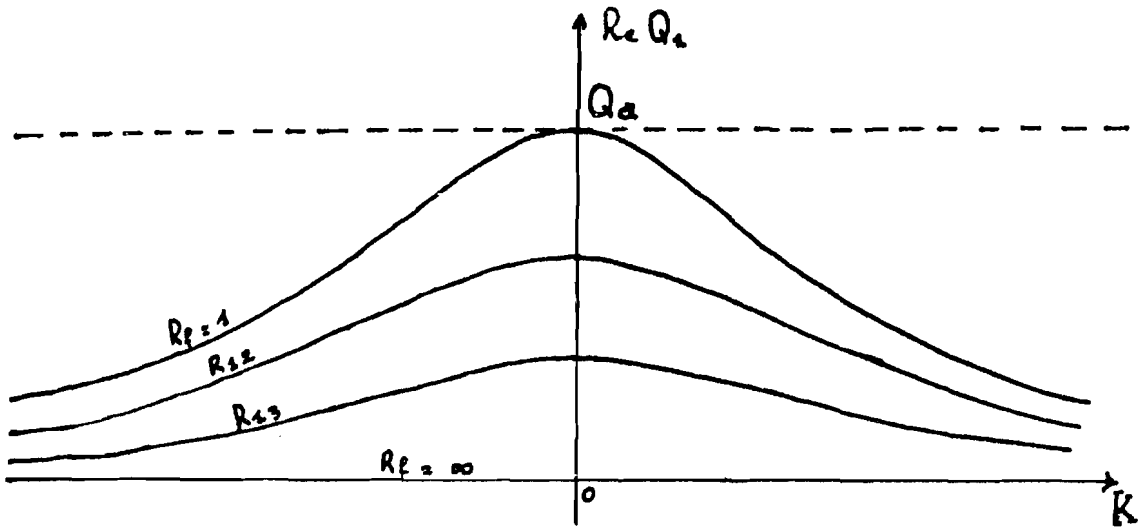


Figure 4 : Cas où  $R_f \gg 1$

Evolution des courbes pour les valeurs croissantes de  $R_f$  de 1 à l'infini :  $R_1 = 1 < R_{12} < R_{13} < \infty$

b - si  $\chi = 0$  et  $R_p \ll 1$

Les courbes dans ce cas-ci sont obtenues à partir de celles des cas précédents, symétriquement par rapport à l'axe  $(0, K)$  des nombres d'onde.

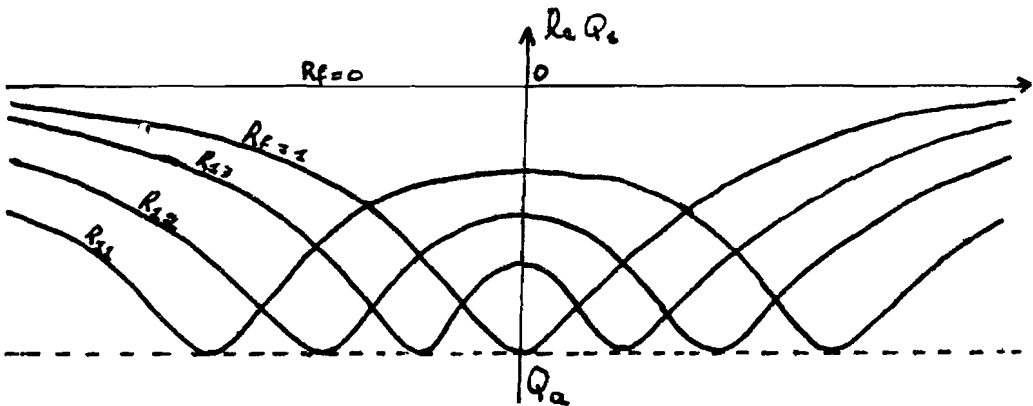


Figure 5 :  $\chi = 0$  ;  $R_p \ll 1$  ;  $R_f \ll 1$

Evolution des courbes pour les valeurs croissantes de  $R_f$  de 0 à 1 :  
 $R_f = 0 < R_{11} < R_{12} < R_{13} < 1$

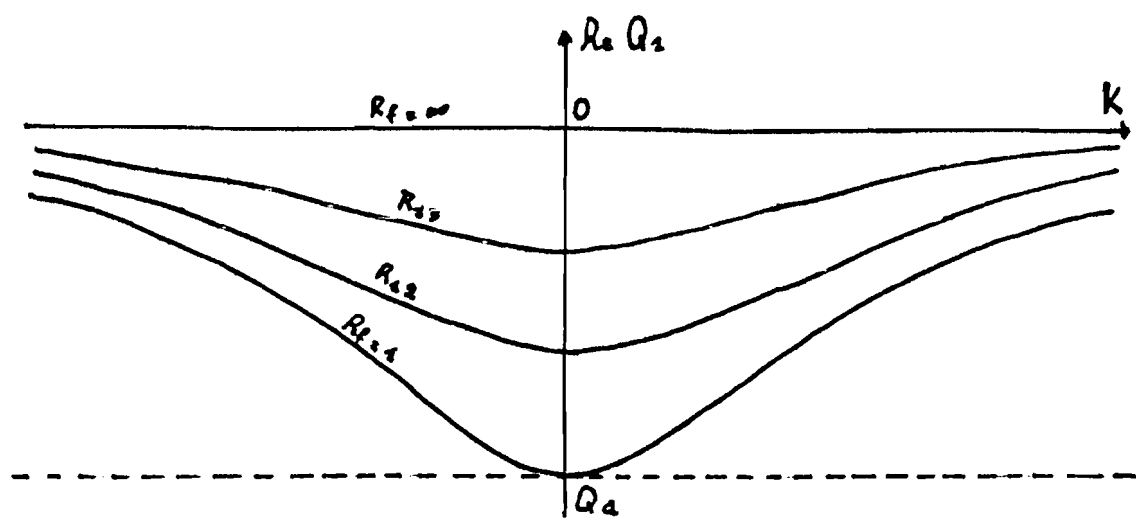


Figure 6 :  $x = 0$  ;  $R_p < 1$  ;  $R_f > 1$

Evolution des courbes pour les valeurs croissantes de  $R_f$  de 1 à l'infini

$$R = 1 < R_{12} < R_{13} < \infty$$

Graphes de  $\text{Im } Q_4$

A partir de (5.20,b), nous nous apercevons que

$$\frac{1}{(R_p - 1)(R_p - x)} \left\{ (R_p + M)^2 k \text{Im } Q_2 + (1 - x) R_p - x \right\}$$

est une fraction rationnelle se présentant sous la forme :

$$\varphi = \frac{Y}{Y^2 + 4 R_f Y + 4 R_f (R_f + 1)}$$

en posant  $Y = R_f (R_p + M)^2 k^2 - (R_f + 1)$

La variation de  $\varphi$  va dépendre de celle de  $Y$  qu'on peut observer sur le tableau ci-dessous :

K	$-\infty$	0	$+\infty$
Y	$+\infty$	$-(R_f + 1)$	$+\infty$

La dérivée de  $\varphi$  par rapport à  $Y$ ,

$$\varphi' = \frac{-Y^2 + 4 R_f (R_f + 1)}{\{Y^2 + 4 R_f Y + 4 R_f (R_f + 1)\}^2}$$

s'annule pour  $Y_0 = -2 \sqrt{R_f (R_f + 1)}$  et  $Y_2 = 2 \sqrt{R_f (R_f + 1)}$   
 d'où la variation de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$  :

$Y$	$-\infty$	$Y_0$	$Y_1$	$+\infty$
$\varphi$	0	$\varphi(Y_0)$	$\varphi(Y_1)$	0

avec

$$\varphi(Y_0) = \frac{1}{4(1 - \sqrt{R_f(R_f+1)})} ; \quad \varphi(Y_1) = \frac{1}{4(1 + \sqrt{R_f(R_f+1)})}$$

Pour les variations de  $\varphi$  en fonction de  $K$  à travers  $Y$ , deux cas sont à considérer :

1) si  $Y_0 = -2\sqrt{R_f(R_f+1)} \leq -(R_f+1)$ , c'est-à-dire  $R_f > 1/3$ , alors on a le tableau de variation suivant :

$K$	$-\infty$	$-K_2$	0	$K_2$	$+\infty$
$Y$	$+\infty$	$Y_1$	$-(R_f+1)$	$Y_2$	$+\infty$
$\varphi$	0	$\varphi(Y_2)$	$\frac{-1}{R_f+1}$	$\varphi(Y_2)$	0

2) si  $R_f < \frac{1}{3}$ , alors on a les variations :

$K$	$-\infty$	$-K_1$	$-K_0$	0	$K_0$	$K_1$	$+\infty$
$Y$	$+\infty$	$Y_2$	$Y_0$	$-(R_f+1)$	$Y_0$	$Y_2$	$+\infty$
$\varphi$	0	$\varphi(Y_2)$	$\varphi(Y_0)$	$\frac{-1}{R_f+1}$	$\varphi(Y_0)$	$\varphi(Y_2)$	0

Etudions maintenant  $\text{Im}Q$  qui se présente sous la forme :

$$\text{Im}Q = \frac{i}{(R_p+M)K} \left\{ -1 + \alpha(A+B\varphi) \right\}$$

où A et B sont constantes.

La dérivée par rapport à K en est :

$$\frac{1}{(R_p + M)K^2} \left\{ 1 + \alpha(-A - B\varphi + B K\varphi') \right\}$$

D'après ce qui précède,  $\varphi$  est bornée  $\forall K$  ; il en est de même de  $K\varphi'$ . Par conséquent, pour  $\alpha$  suffisamment petit, le signe du crochet sera celui de 1, c'est-à-dire positif. La présence de la correction  $\alpha$  ne change donc pas le signe de la dérivée de  $\text{Im}Q$  et l'on a les variations :

K	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{Im} Q_4$	0	$+\infty$	0

D'après ce qui précède, il y aura donc fluctuation autour de la valeur centrale  $-\frac{1}{(R_p + M)K}$  mais jamais changement de variation. D'où l'allure des graphes :

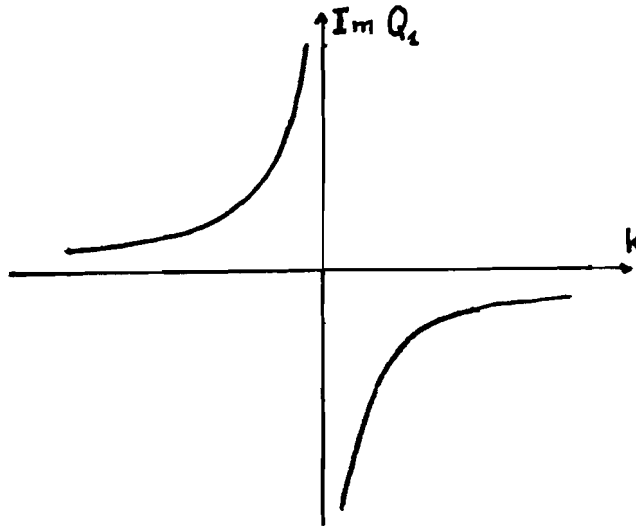


Figure 7 : Allure des graphes  $\text{Ci}(\text{Im}Q) = F(K)$  pour  $\alpha \ll 1$

### 3) Conclusion

Le premier résultat perceptible de l'étude des graphes précédents est le caractère essentiellement dispersif des ondes de perturbation. Les modes propres dépendent des nombres d'onde K, contrairement aux solutions classiques de KELVIN-HELMHOLTZ.

De plus, on peut relever les symétries suivantes par rapport au nombre d'onde K.

1) Pour les modes  $Q_e$  proches des solutions de KELVIN-HELMHOLTZ classique, nous avons :



$$(5.21) \quad \begin{cases} (a) & \operatorname{Re} Q_{\epsilon}(-k) = \operatorname{Re} Q_{-\epsilon}(k) \\ (b) & \operatorname{Im} Q_{\epsilon}(-k) = -\operatorname{Im} Q_{-\epsilon}(k) \end{cases}$$

2) Pour le troisième mode, nous avons :

$$(5.22) \quad \begin{cases} (a) & \operatorname{Re} Q_{\eta}(-k) = \operatorname{Re} Q_{\eta}(k) \\ (b) & \operatorname{Im} Q_{\eta}(-k) = -\operatorname{Im} Q_{\eta}(k) \end{cases}$$

### III. PROPRIETES REMARQUABLES DES TROIS MODES SOLUTIONS DE L'EQUATION AUX VALEURS PROPRES

#### 5.3.1 Invariance galiléenne des modes

L'invariance galiléenne des modes est immédiate, puisque toute solution  $Q$  de l'équation aux valeurs propres (5.10) est une fonction des seuls paramètres  $K$ ,  $\alpha$ ,  $R_p$  et  $R_f$  qui ne dépendent pas du repère galiléen choisi. C'est-à-dire qu'on a :

$$\begin{aligned} Q &= C - U \\ &= F(K, \alpha, R_p, R_f) ; \forall U \end{aligned}$$

Par conséquent,  $C - U$  est une quantité indépendante du repère galiléen, d'où l'invariance galiléenne des modes.

#### 5.3.2 Propriétés de symétrie

*a - Théorème :*

Les symétries (5.21) et (5.22) restent vérifiées  $\forall \alpha$

*Preuve :*

La preuve de ces symétries est loin d'être évidente. Toute la démonstration va reposer sur la remarque essentielle suivante :  $K$  n'intervient dans (5.10) que par le groupement  $iK$ . Nous pouvons donc considérer le premier membre de (5.10) comme une expression polynomiale  $P(X, \bar{Y})$  à deux indéterminées complexes  $X = Q$  et  $Y = iK$ , et à coefficients réels.

Lemme préliminaire

Soit  $P(X, Y)$  un polynôme à coefficients réels et à deux indéterminées  $X$  et  $Y$  complexes. Alors :

$$(5.23) \quad P(\bar{X}, \bar{Y}) = \overline{P(X, Y)}$$

où " — " placé sur une quantité complexe signifie qu'on prend son expression conjuguée.

Le résultat du lemme est immédiat. C'est une propriété des nombres complexes.

Ceci étant, dans (5.10), si nous faisons la transformation

$$K \longrightarrow -K ,$$

on aboutit à

$$Y = i K \longrightarrow -i K = \overline{Y}$$

(5.10) peut donc être réécrite sous la forme :

$$(5.24) \quad P(X, \overline{Y}) = 0$$

Or, d'après le lemme précédent,  $P(X, \overline{Y}) = \overline{P(\overline{X}, Y)}$

Par conséquent, on aura aussi

$$P(\overline{X}, Y) = 0.$$

On en conclut que les trois racines de (5.10) dans la transformation  $K \longrightarrow -K$  sont les conjuguées des trois racines qu'on trouve pour  $K$ , c'est-à-dire qu'on a l'égalité ensembliste :

$$(5.25) \quad \left\{ C_{*}(-K); C_{-}(-K); C_{+}(-K) \right\} = \left\{ \overline{C_{*}(K)}; \overline{C_{-}(K)}; \overline{C_{+}(K)} \right\}$$

Ainsi, lorsque l'on passe continûment de  $K$  à  $-K$ , nous aurons deux types de configurations possibles, à savoir :

1) soit les modes se correspondent, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C_{*}(-K)} = C_{*}(K) \\ \overline{C_{-}(-K)} = C_{-}(K) \\ \overline{C_{+}(-K)} = C_{+}(K) \end{array} \right. ,$$

$\forall K$

2) soit l'une reste inchangée et les deux autres s'échangent comme par exemple dans le schéma

$$(5.26) \quad \begin{cases} \overline{C_{*}(-k)} = C_{*}(k) \\ \overline{C_{+}(-k)} = C_{-}(k) \end{cases}$$

Trois configurations sont possibles pour ce deuxième type. Au total, l'égalité ensembliste (5.25) nous conduit à quatre éventualités. Nous avons donc une indétermination liée à la configuration de correspondance des modes qu'il faut lever.

Pour lever cette indétermination, nous allons nous placer en  $K = 0$  où (5.10) devient singulière, amenant une dégénérescence d'ordre 1 de (5.10) qui passe du troisième degré à une équation polynomiale du deuxième degré. Une des trois racines est renvoyée à l'infini, c'est le troisième mode, et pour les deux autres, nous sommes ramenées à un cas de KELVIN-HELMOLTZ classique où les deux racines sont conjuguées et donc s'échangent par paire suivant un schéma du deuxième type. Il reste donc trois éventualités. Mais la conclusion définitive résulte de la continuité de deux des trois racines par rapport à  $K$ . Par conséquent, s'il y a deux racines qui s'échangent par paire, ce ne peut être que celles qui sont continues. Et comme en  $K = 0$ , le troisième mode est singulier, c'est donc ce mode qui reste solitaire. On a donc le schéma (5.26), d'où les symétries qu'on voulait montrer.

#### *b - Corollaire*

En posant  $\sigma = K C$ , nous pouvons écrire les relations de symétries relatives au taux d'amplitude  $\text{Im } \sigma = K C_i$  et aux vitesses de phase  $\text{Re } C = C_r$ , soit :

$$(5.27) \quad \begin{cases} \text{(a)} \quad \begin{cases} C_{*r}(k) = C_{*r}(-k) \\ \sigma_{*i}(k) = \sigma_{*i}(-k) \end{cases} \\ \text{(b)} \quad \begin{cases} C_{+r}(k) = C_{-r}(-k) \\ \sigma_{+i}(k) = \sigma_{-i}(-k) \end{cases} \end{cases}$$

*Preuve :*

Les égalités  $C_{*r}(k) = C_{*r}(-k)$  et  $C_{+r}(k) = C_{-r}(-k)$

font partie des résultats de symétrie (5.21,a) et (5.22,a) prouvés dans le théorème précédent.

Quant aux deux autres égalités du corollaire, remarquons que :

$$\begin{aligned}
\sigma_{*i}(k) &= k C_{*i}(k) \\
&= k (-C_{*i}(-k)) \quad , \text{ d'après (5.22,b)} \\
&= -k C_{*i}(-k) \\
&= \sigma_{*i}(-k)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma_{+i}(k) &= k C_{+i}(k) \\
&= k (-C_{-i}(-k)) \quad , \text{ d'après (5.21,b)} \\
&= -k C_{-i}(-k) \\
&= \sigma_{-i}(-k)
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

*c - Conclusion :*

A partir du théorème précédent et son corollaire, nous pouvons restreindre l'étude des ondes de perturbation de l'écoulement de KELVIN-HELMHOLTZ diphasique à celle de deux modes, le troisième mode singulier, et l'un des deux modes conjugués, le premier. De plus, avec les propriétés de symétrie du troisième mode, nous pouvons l'étudier uniquement pour les  $K < 0$ .

Dans le plan complexe  $(C_r - U, C_i)$ , le deuxième mode et l'évolution du troisième mode pour les  $K > 0$ , seront symétriques des graphes du premier mode, et des évolutions du troisième mode pour les  $K < 0$ , par rapport à l'axe des  $C_r - U$ .

### 5.3.3 Propriété algébrique des valeurs propres

*Théorème :*

Les trois valeurs propres de l'équation caractéristique (5.10) vérifient la relation algébrique remarquable :

$$(5.38) \quad \sum \frac{(C_r - U) C_i}{\{(C_r - U)^2 + C_i^2\}^2} = 0$$

où la somme porte sur les trois modes (valeurs propres) solutions.

Preuve :

En développant (5.10) suivant les puissances décroissantes de  $Q$ , nous pouvons la récrire sous la forme :

$$(5.29) \quad Q^3 + (p+iq)Q^2 + (r+is)Q + it = 0$$

où

$$(5.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = -\frac{2C_1}{C_2} \\ q = \frac{(1-\alpha) + \alpha R_p + R_f}{K C_2} \\ r = \frac{C_1}{C_2} \\ s = \frac{-2R_f}{K C_2} \\ t = \frac{R_f}{K C_2} \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= R_f \left\{ (1-\alpha) \left( \chi\alpha + (1-\chi\alpha)R_p \right) + M \right\} \\ C_2 &= (1-\alpha) \left( \chi\alpha R_f + R_p \left\{ 1 + R_f(1-\chi\alpha) \right\} \right) + M \left\{ R_f + (1-\alpha) + \alpha R_p \right\} \end{aligned}$$

En raison des symétries précédentes, nous allons nous placer dans le cas où  $K < 0$  pour la démonstration du résultat (5.28).

D'après (5.30) et la remarque ci-dessus, nous avons les relations remarquables suivantes :

$$(5.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad t_p = rs \\ (b) \quad t \leq 0 \end{array} \right.$$

qui vont être les clefs de la démonstration du résultat (5.28).

Considérons à présent les trois racines :  $a e^{ix}$  ;  $b e^{iy}$  ;  $c e^{iz}$  de (5.29) écrites sous forme polaire. Ces trois racines vérifient donc l'égalité :

$$Q^3 + (p+iq)Q^2 + (r+is)Q + it = (Q - a e^{ix})(Q - b e^{iy})(Q - c e^{iz})$$

En développant le membre de droite de la relation ci-dessus et en égalant les puissances successives de  $Q$ , on aboutit entre autres aux égalités suivantes :

$$(5.32) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad abc e^{i(x+y+z)} = -it \iff \begin{cases} abc = -t \\ x+y+z = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ (b) \quad a \cos x + b \cos y + c \cos z = -p \\ (c) \quad ab \cos(x+y) + ac \cos(x+z) + bc \cos(y+z) = r \\ (d) \quad ab \sin(x+y) + ac \sin(x+z) + bc \sin(y+z) = s \end{array} \right.$$

(5.31,a) devient équivalent à :

$$\begin{aligned} & abc \{ a \cos x + b \cos y + c \cos z \} \\ &= \{ ab \cos(x+y) + ac \cos(x+z) + bc \cos(y+z) \} \\ & \quad \times \{ ab \sin(x+y) + ac \sin(x+z) + bc \sin(y+z) \} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi, en tenant compte de  $x + y + z = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$$\begin{aligned} & abc (a \cos x + b \cos y + c \cos z) \\ &= (ab \sin z + ac \sin y + bc \sin x) (ab \cos z + ac \cos y + bc \cos x) \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} & a^2 bc \cos x + a b^2 c \cos y + abc^2 \cos z \\ &= (ab)^2 \sin z \cdot \cos z + (ac)^2 \sin y \cdot \cos y + (bc)^2 \sin x \cdot \cos x \\ & \quad + \underbrace{ab^2 c \sin(x+z)}_{a b^2 c \cos y} + \underbrace{a^2 bc \sin(y+z)}_{a^2 bc \cos x} + \underbrace{abc^2 \sin(x+y)}_{abc^2 \cos z} \end{aligned}$$

Nous aboutissons donc à la relation :

$$(ab)^2 \sin z \cdot \cos z + (bc)^2 \sin x \cdot \cos x + (ac)^2 \sin y \cdot \cos y = 0$$

Et en multipliant les deux membres de cette égalité par  $\frac{1}{a^2 b^2 c^2}$ , nous obtenons :

$$\frac{\sin z \cdot \cos z}{c^2} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{a^2} + \frac{\sin y \cdot \cos y}{b^2} = 0$$

ce qui peut se récrire :

$$(5.33) \quad \frac{c \sin z \cdot c \cos z}{c^4} + \frac{d \sin x \cdot a \cos x}{a^4} + \frac{b \sin y \cdot b \cos y}{b^4} = 0$$

et en se rappelant que :

$$a \cos x = C_{1r} - U \quad , \quad a \sin x = C_{1i}$$

$$b \cos x = C_{2r} - U \quad , \quad b \sin x = C_{2i}$$

$$c \cos x = C_{3r} - U \quad , \quad c \sin x = C_{3i}$$

(5.33) est justement le résultat (5.28). Ce qui achève la démonstration.

#### 5.3.4 Propriété géométrique des deux modes symétriques dans les limites de nombres d'onde $K = 0$ et $|K| = +\infty$

##### Théorème

Pour  $|K| = 0$  ou  $\infty$ ,

les deux premiers modes sont situés sur le cercle  $C(A(\frac{1/2}{0}), 1/2)$  de centre  $A(\frac{1/2}{0})$ , et de rayon  $1/2$  dans le plan complexe  $(C_r - U, c_i)$  des modes propres.

##### Preuve

Si nous nous plaçons dans la limite  $K = 0$  pour les nombres d'onde, nous observons une dégénérescence de l'équation (5.10), et les deux solutions régulières en  $K = 0$ , c'est-à-dire les deux premiers modes, vérifient :

$$(5.34) \quad Q^2 + d_1 (Q-1)^2 = 0$$

avec

$$d_1 = \frac{R_f}{\alpha R_p + (1-\alpha)}$$

Dans la limite  $|K| = \infty$ , (5.10) devient :

$$(5.35) \quad Q \{ Q^2 + d_2 (Q-1)^2 \} = 0$$

avec

$$d_2 = \frac{R_f \{ (1-\alpha) (\alpha + (1-\alpha) R_p) + M \}}{(1-\alpha) R_p + \alpha \{ \alpha R_p + (1-\alpha) \}}$$

Soit  $Q = 0$  ou

$$(5.36) \quad Q^2 + a_2(Q - 1)^2 = 0$$

Le mode qui vérifie la relation  $Q = 0$  en  $|K| = \infty$  dans (5.35) coïncide avec le point  $(0,0)$  du cercle  $C(A(\frac{1}{2}), 1/2)$  dans le plan complexe  $(C_r - U, C_i)$  des modes propres.

Ecrivons (5.34) et (5.36) sous forme d'une seule expression

$$(5.37) \quad Q^2 + a(Q - 1)^2 = 0$$

avec

$$a = \begin{cases} a_1 & \text{pour } K = 0 \\ a_2 & \text{pour } |k| = \infty \end{cases}$$

En portant l'expression  $Q = C_r - U + i C_i$  dans (5.37), celle-ci devient :

$$(C_r - U + i C_i)^2 + a(C_r - U - 1 + i C_i)^2 = 0$$

Puis en séparant les parties réelle et imaginaire, on aboutit aux relations :

$$(5.38) \quad \begin{cases} (a) & (C_r - U)^2 - C_i^2 + a \{ (C_r - U - 1)^2 - C_i^2 \} = 0 \\ (b) & C_i \{ (C_r - U) + a(C_r - U - 1) \} = 0 \end{cases}$$

Si  $a > 0$  (c'est-à-dire  $R_r > 0$ ), alors dans (5.38,b), on ne doit avoir  $C_i = 0$ , sinon (5.38,a) serait équivalente à  $(C_r - U)^2 + a(C_r - U - 1)^2 = 0$ . Ce qui nous conduirait à la fois à  $C_r = U$  et  $C_r = U + 1$ , puisque  $a > 0$ . Ce qui est impossible. Par conséquent, on doit avoir nécessairement

$$(5.39) \quad C_r - U + a(C_r - U - 1) = 0 \quad \text{dans (5.38,b)}$$

Dans (5.39),  $C_r - U - 1 \neq 0$ . Sinon on aurait aussi  $C_r - U = 0$  ; ce qui est impossible. Nous pouvons donc exprimer  $a$  à partir de (5.39), soit :

$$(5.40) \quad a = -\frac{C_r - U}{C_r - U - 1}$$

Et comme  $a > 0$ , nous avons un encadrement de la vitesse de phase  $C_r$  :

$$U \leq C_r \leq U + 1$$

ou en variable non adimensionnalisées,



$$(5.41) \quad \begin{cases} U_1 \leq C_r \leq U_2 & \text{si } \Delta U \geq 0 \\ U_2 < C_r < U_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et l'égalité à  $U_1$  a lieu si  $a = 0$ , c'est-à-dire si  $R_f = 0$  ou  $R_p = \infty$ , et à  $U_2$  si  $a = \infty$ , c'est-à-dire  $R_f = \infty$ .  $U_1$  et  $U_2$  représentant respectivement les vitesses initiales du fluide 1 et du fluide 2.

Portons (5.40) dans (5.38,a). Après simplification, nous aboutissons à la relation

$$(5.42) \quad \left\{ (C_r - U) - \frac{1}{2} \right\}^2 + C_i^2 = \frac{1}{4}$$

c'est-à-dire que le mode représenté par  $(C_r - U, C_i)$  et correspondant à  $K = 0$  ou  $|K| = \infty$  se trouve sur le cercle  $CA(\frac{1}{2}, 1/2)$  dans le plan complexe. Ce qui achève la démonstration.

Et nous pouvons ajouter ceci :

1) En raison des symétries ((5.21);(5.22)) ou (5.27), nous pouvons conclure que le premier mode, pour  $K = 0$  et  $|k| = \infty$ , se trouve sur le demi-cercle supérieur, ainsi que le troisième mode, pour  $K = -\infty$  et  $K = 0$ .

2) Le cercle caractéristique  $C(A(\frac{1}{2}), 1/2)$  que nous venons de mettre en évidence peut être qualifié de "cercle des points de KELVIN-HELMHOLTZ". En effet, tous les cas classiques de KELVIN-HELMHOLTZ se ramènent au cas d'ondes très longues ou très courtes c'est-à-dire aux cas limites  $K = 0$  ou  $|K| = \infty$ . Chaque point du demi-cercle supérieur va donc représenter un écoulement particulier de KELVIN-HELMHOLTZ classique

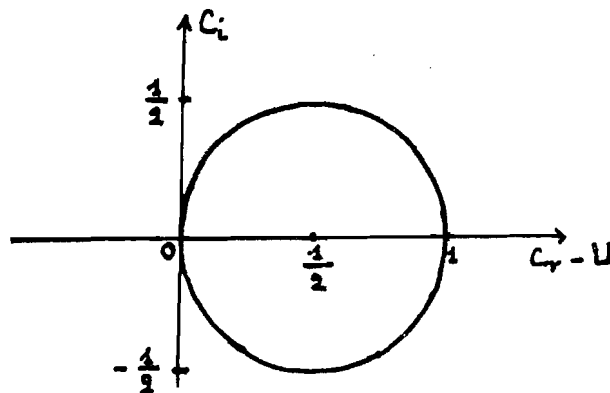


Figure 7 : Cercle des points de KELVIN-HELMHOLTZ

Sur le "cercle de KELVIN-HELMHOLTZ", les coordonnées des points sont :

$$(5.43) \quad C_r - U = \frac{a}{1+a}$$

et

$$(5.44) \quad C_i = \frac{\sqrt{a}}{1+a}$$

3) a) Dans la limite de nombre d'onde  $K = 0$ ,

$$(5.45) \quad a = \frac{R_f}{\alpha(R_p - 1) + 1}$$

et par conséquent les points correspondants du premier mode décrivent continûment un arc de cercle à partir du point limite correspondant à  $\alpha = 0$ , vers le point limite correspondant à  $\alpha = 1$ . Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que  $C_r - U$  est une fonction monotone de  $a$ , et donc de  $\alpha'$ , si  $a$  est aussi une fonction monotone de  $\alpha$  sur  $[0,1]$ . Ce qui est le cas avec l'expression de  $a$  ci-dessus.

b) Dans la limite de nombre  $K = \infty$

Si  $M = 0$  (masse induite non prise en compte) ou  $\chi = 0$  (pas de couplage de pression),  $a$  est encore une fonction monotone de  $\alpha$  sur  $[0,1]$ , et on a les mêmes conclusions que précédemment.

Si  $M \neq 1$  et  $\chi = 1$  (couplage de pression), alors  $a$  est de la forme :

$$a = R_f \frac{\xi \alpha^2 + \zeta \alpha + \gamma}{\eta \alpha + \delta}$$

où  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  et  $\delta$  dépendent de  $R_p$  et  $M$ . La monotonie de  $a$  sur  $[0,1]$  dépend des valeurs de  $R_p$  pour le paramètre  $M$  fixé. On ne peut réitérer d'emblée les conclusions précédentes. On laissera les résultats numériques illustrer les cas d'évolution possibles, si éventuellement on s'écartait des conclusions précédentes.

## C H A P I T R E VI

### EXPLORATION NUMERIQUE DE L'EQUATION AUX VALEURS PROPRES ET ETUDE DU COMPORTEMENT DES MODES

#### I. - DISPERSION DES ONDES DE PERTURBATION

##### 6.1.1 Influence des paramètres $K$ , $\alpha$ , $R_p$ et $R_f$

Nous avons vu que les modes propres dépendaient de quatre paramètres :  $K$ ,  $\alpha$ ,  $R_p$  et  $R_f$  (équation caractéristique (5.11)).

On fait varier d'abord la longueur d'onde  $K$ . Ce qui permet de représenter dans le plan complexe  $(c_r ; c_i)$ , la courbe décrite par la valeur propre  $C = (c_r ; c_i)$  lorsque  $K$  varie.

Deuxièmement, on fait varier la concentration particulaire  $\alpha$  pour observer aussi bien les positions relatives des courbes les unes par rapport aux autres que l'ampleur du phénomène de dispersion pour les différentes valeurs de  $\alpha$ .

Troisièmement, la variation de  $R_p$  nous permet d'observer les comportements des différents modes dans le plan complexe, en suivant également la variation de  $\alpha$ . On pourrait alors se rendre compte de l'existence ou non du phénomène de coalescence entre deux modes, consécutif à une forte dispersion. On pourrait ainsi trouver les plages de valeurs de  $R_p$  pour lesquels le phénomène de coalescence entre deux modes peut se produire.

La dernière variation sera celle de  $R_f$ . Cette hiérarchie des différents paramètres nous est imposée par la physique du problème. En effet, on déterminera d'abord la nature des deux fluides en présence, d'où fixation de  $R_f$  en premier. Ensuite, on précisera la nature des particules présentes dans le fluide, d'où fixation de  $R_p$ . Puis la connaissance de la concentration volumique considérée nous fixera  $\alpha$ . Enfin, on observe les perturbations qui se développent dans l'écoulement global, d'où variation des nombres d'onde qui leur sont associés.

Nous obtenons les résultats suivants à l'exploration numérique :

Pour  $R_f$  fixé, il existe deux valeurs particulières  $R_p^0$  et  $R_p^1$  de  $R_p$  vérifiant  $R_p^0 \leq 1 \leq R_p^1$  telles qu'on ait :

1) Pour tout  $R_p \in [0 ; R_p^0] \cup [R_p^1 ; +\infty[$ , il existe une valeur particulière  $\alpha_0$  de  $\alpha$  telle qu'on ait passage continu entre le premier et le troisième mode dans le plan complexe  $(c_r, c_i)$  pour toute valeur  $\alpha$  de la concentration volumique supérieure à  $\alpha_0$  (fig. 2-4-5-7 et 9 ci-après).

2) Pour tout  $R_p \in ]R_p^0, R_p^1[$ , les courbes restent déconnectées dans le plan  $(c_r, c_i)$  pour toutes les valeurs de  $\alpha$  (fig. 1-3-6 et 8 ci-après).

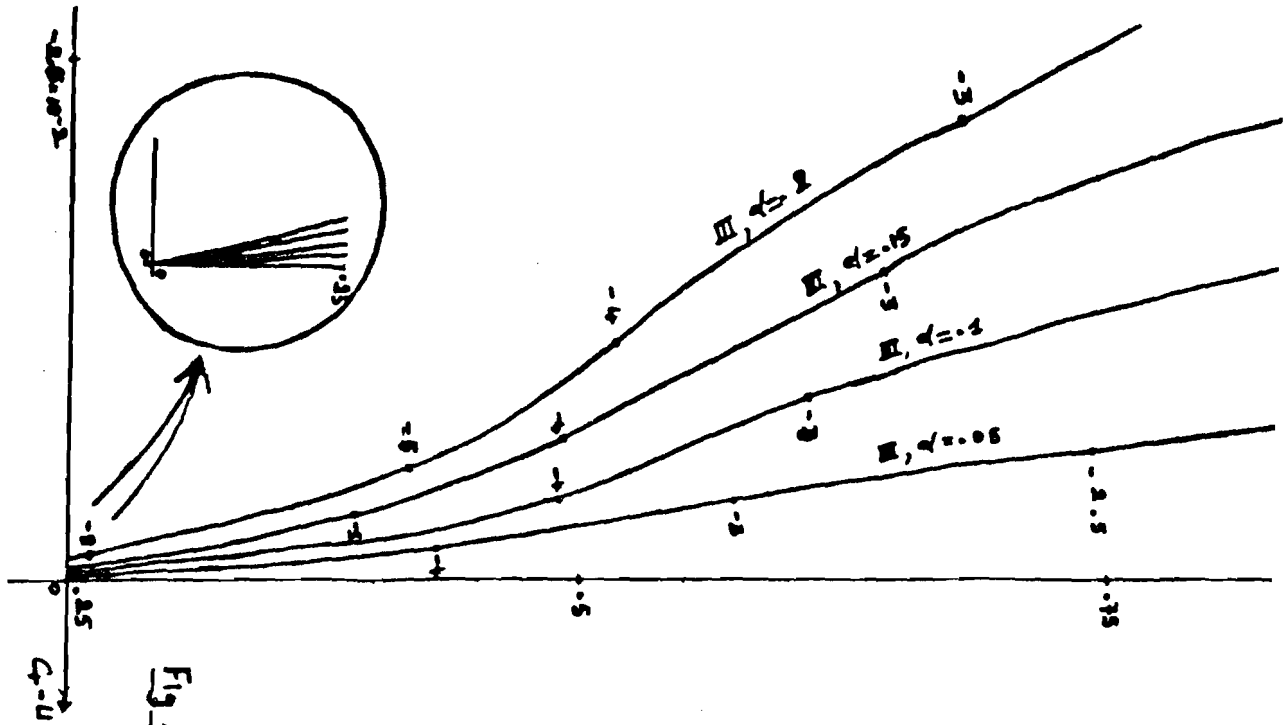
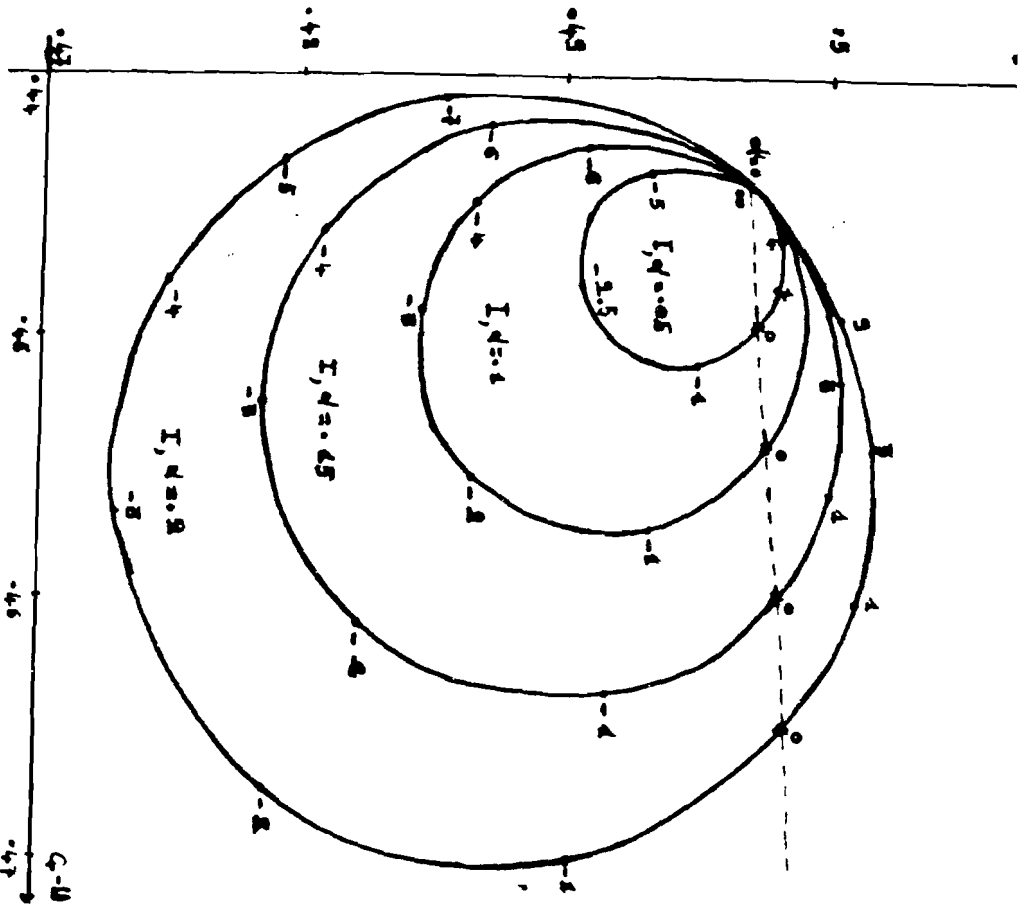


Fig 4 :



Modèle de MAREZ (absence de masse induite et de couplage de pression) : Evolution des courbes représentant les modes I et III pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\phi$

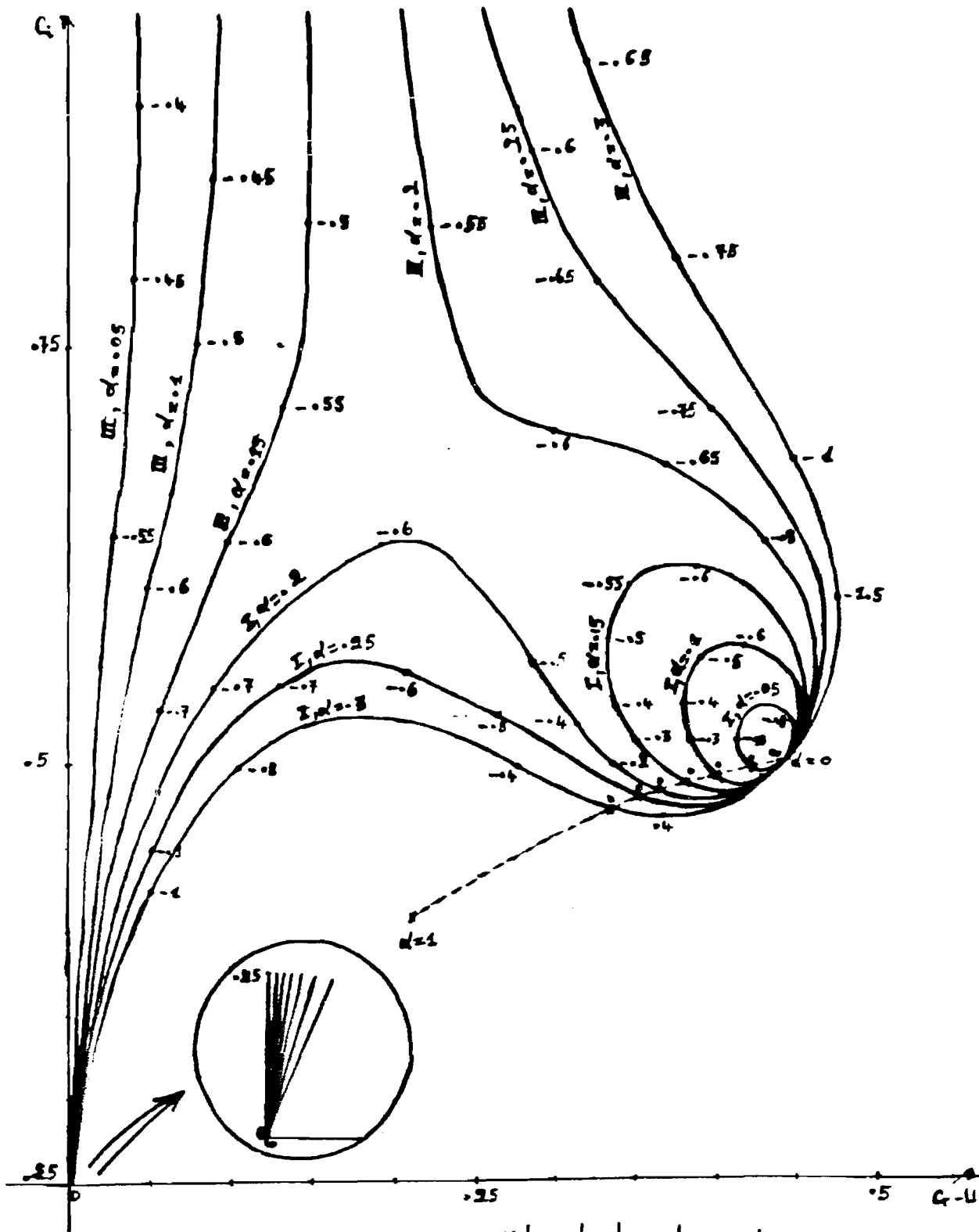


Fig 2 :

$\chi = 0, M = 0, R_f = 0.8, R_p = 3$

Valuers la long des courbes = les nombres d'onde

Modèle de MARBLE (Absence de masse induite et de couplage de pression) : Evolution des courbes représentant les modes I et II pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\alpha$

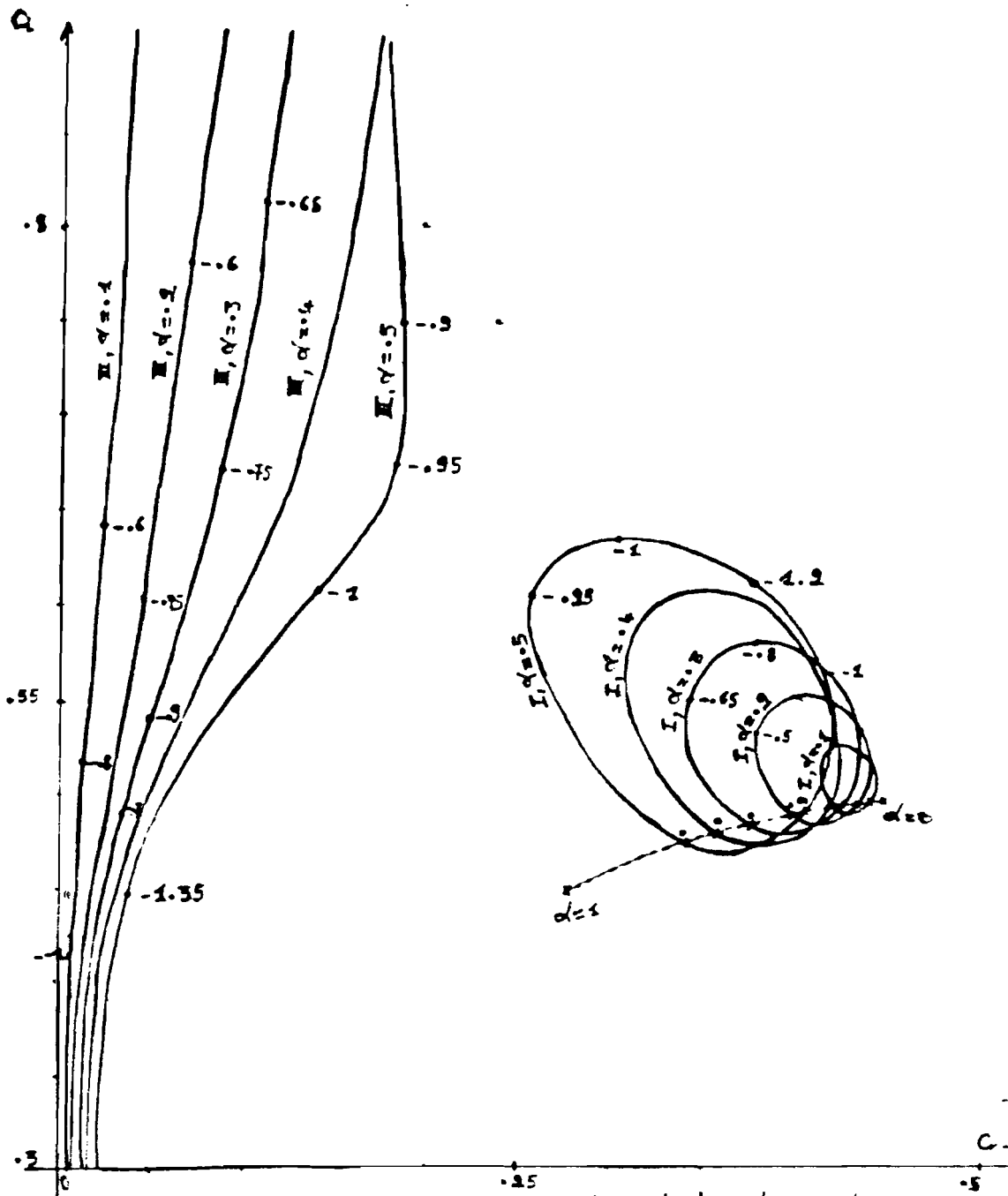


Fig. 3 :

$$\lambda = 0, M = 0.5, R_f = 0.8, R_p = 2.1$$

valeurs le long des courbes  
= les nombres d'onde

Modèle d'équations avec masse induite et sans couplage de pression: Evolution des courbes représentant les modes I et II pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\alpha$

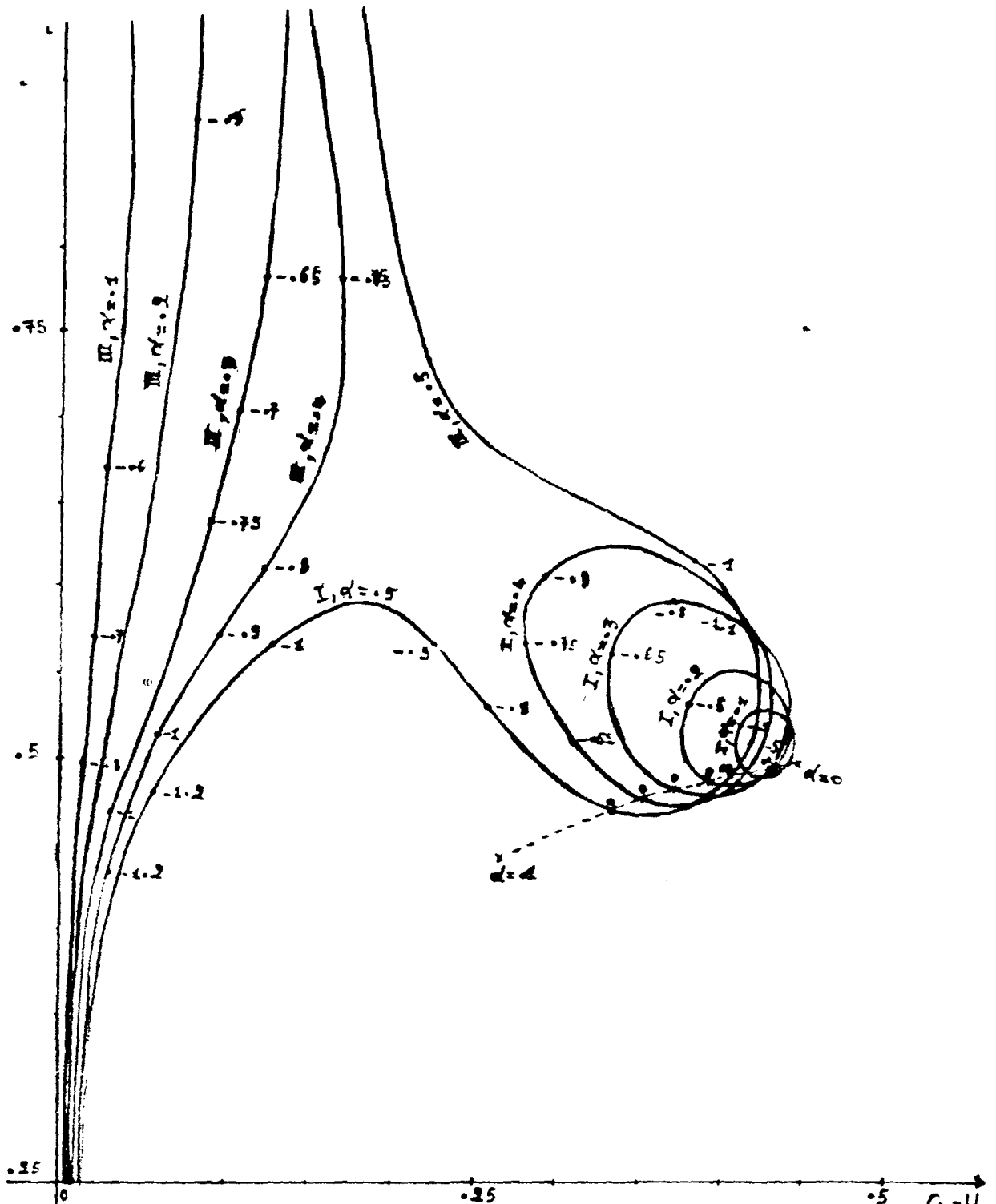


Fig 4 :

$I = 0, M = 0.5, R_s = 0.8, R_p = 2.2$

valeurs le long des courbes = les nombres d'onde

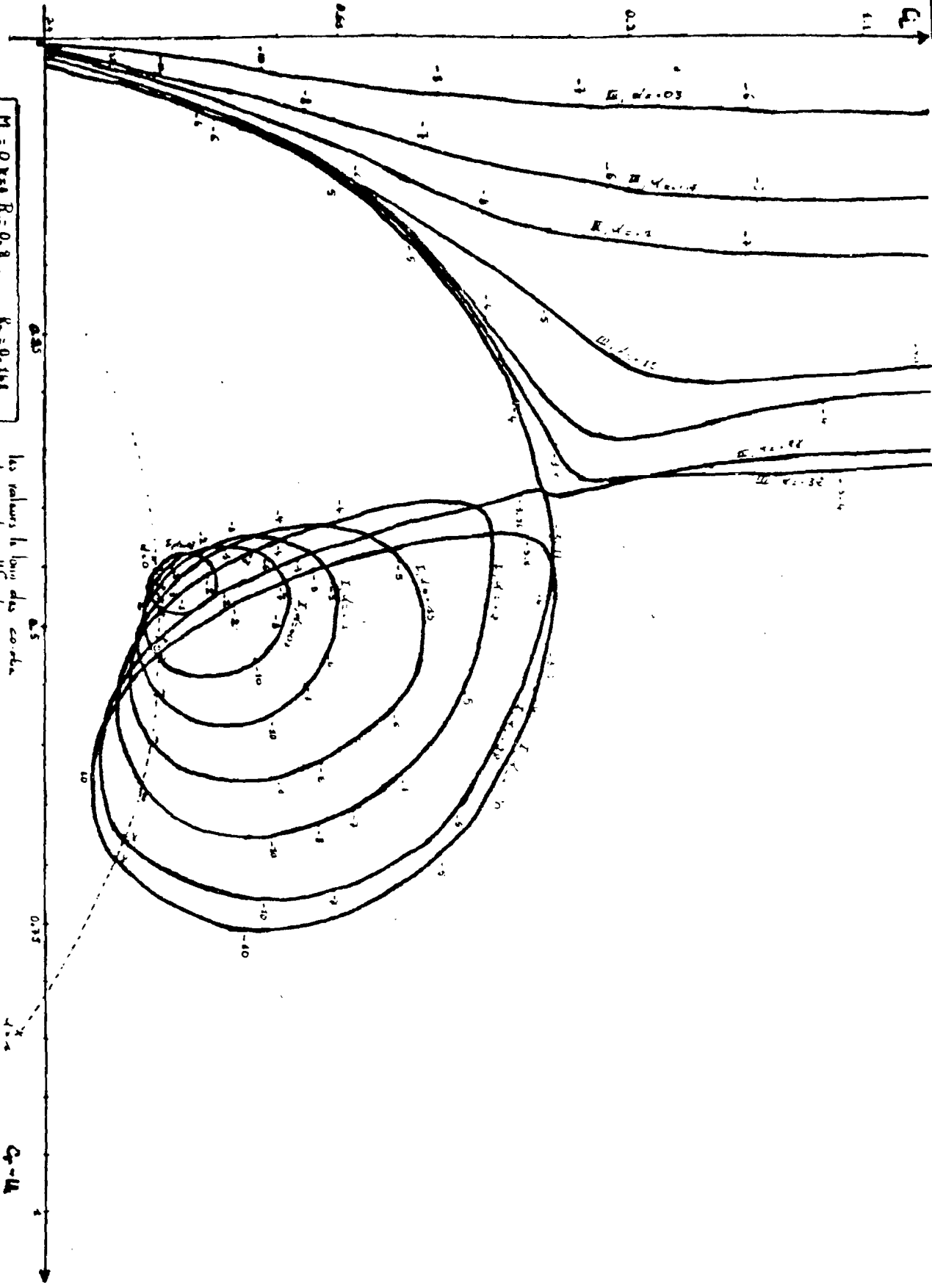
Modèle d'équation avec masse induite et sans couplage de pression : Evolution des courbes pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\alpha$

Fig 5:

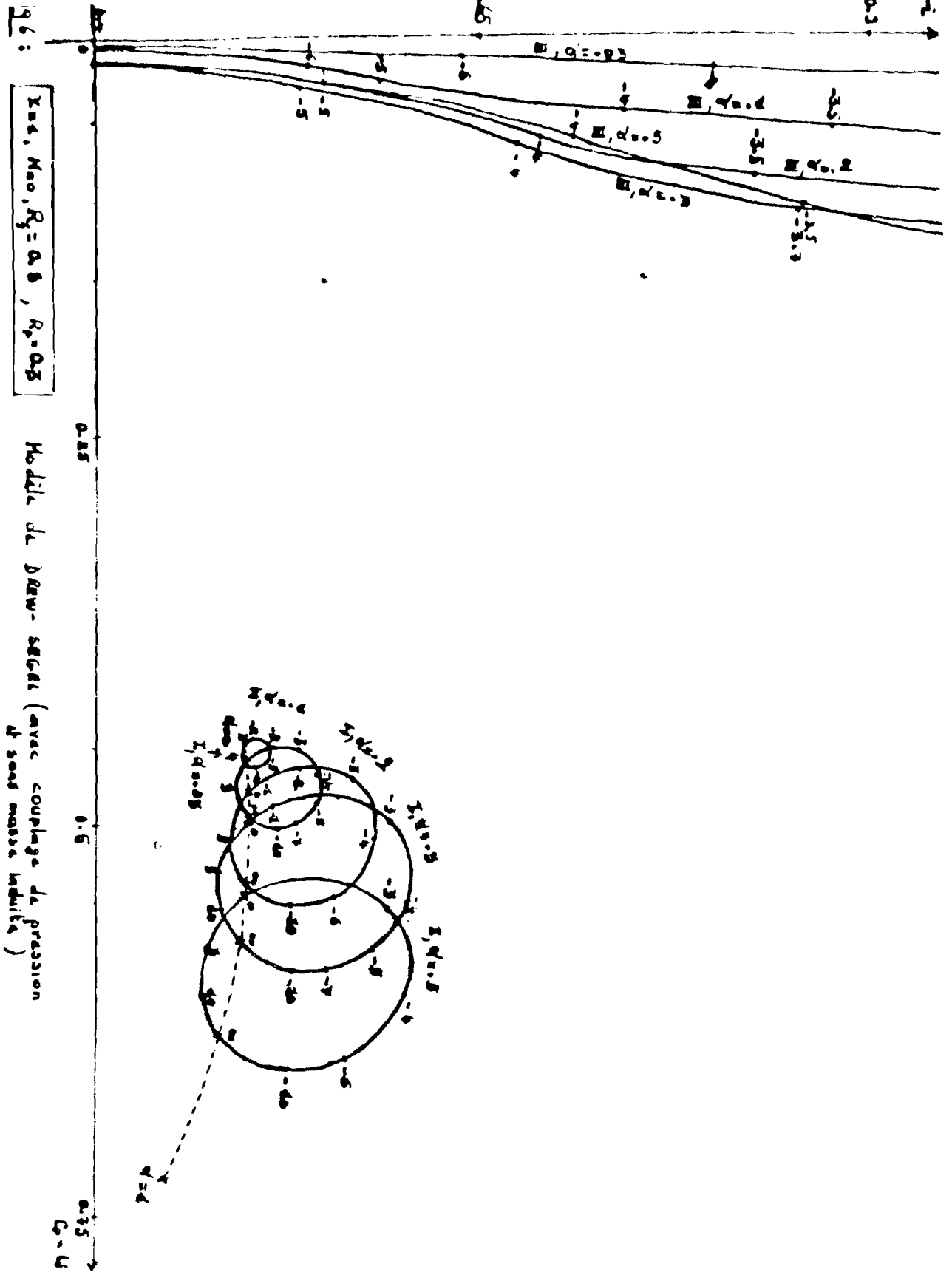
$M = 0, R_0 = 0,8, K_p = 0,161$

les valeurs le long des courbes  
= les nombres d'onde

Modèle de DREW-SEGEL (avec couplage de pression  
et sans masse induite)







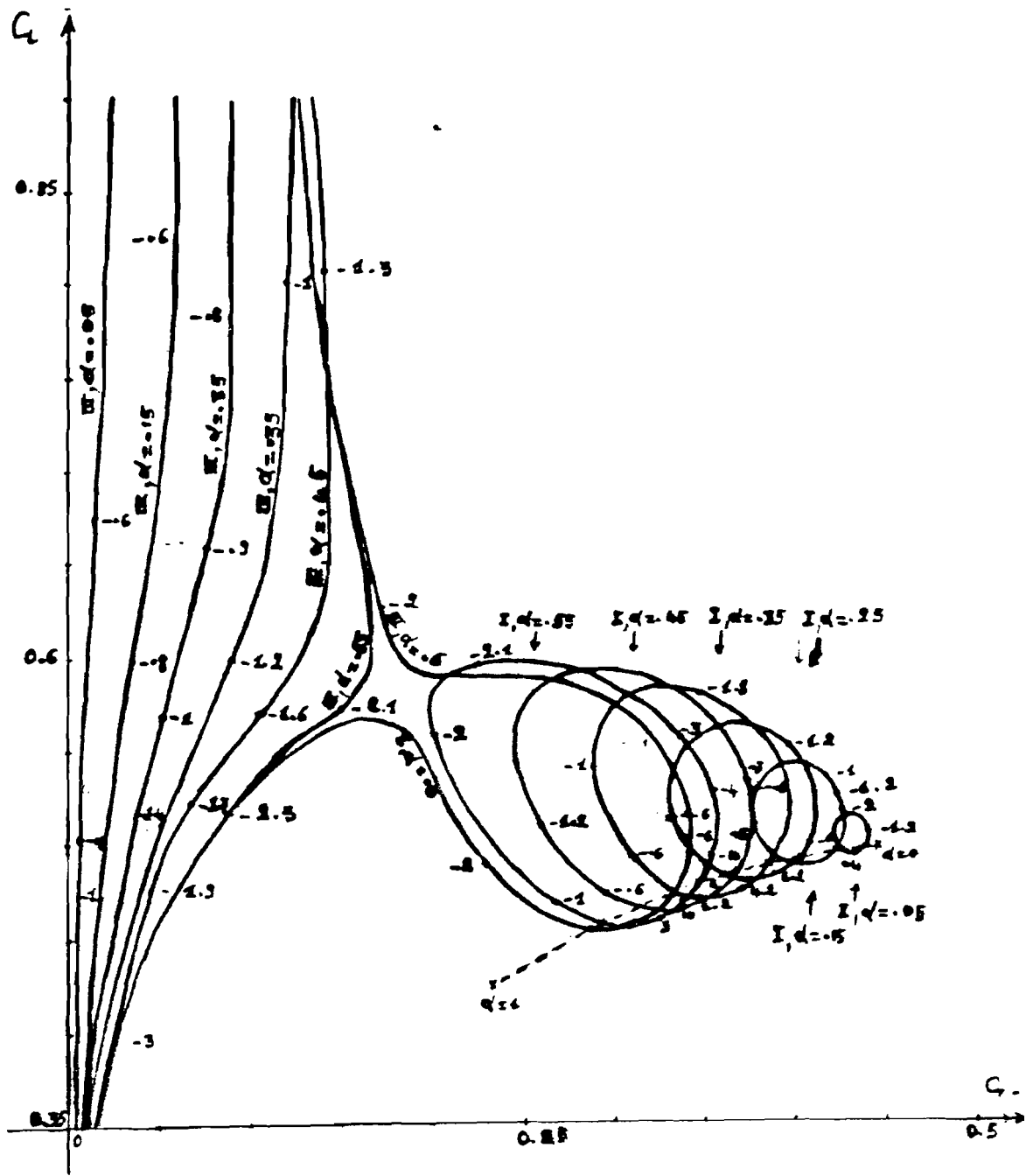


Fig. 7:

$\lambda=1, M=0, R_f=0.8, R_r=2.65$

Modèle de BREW-SEGEL  
(avec couplage de pression  
et sans masse induite)

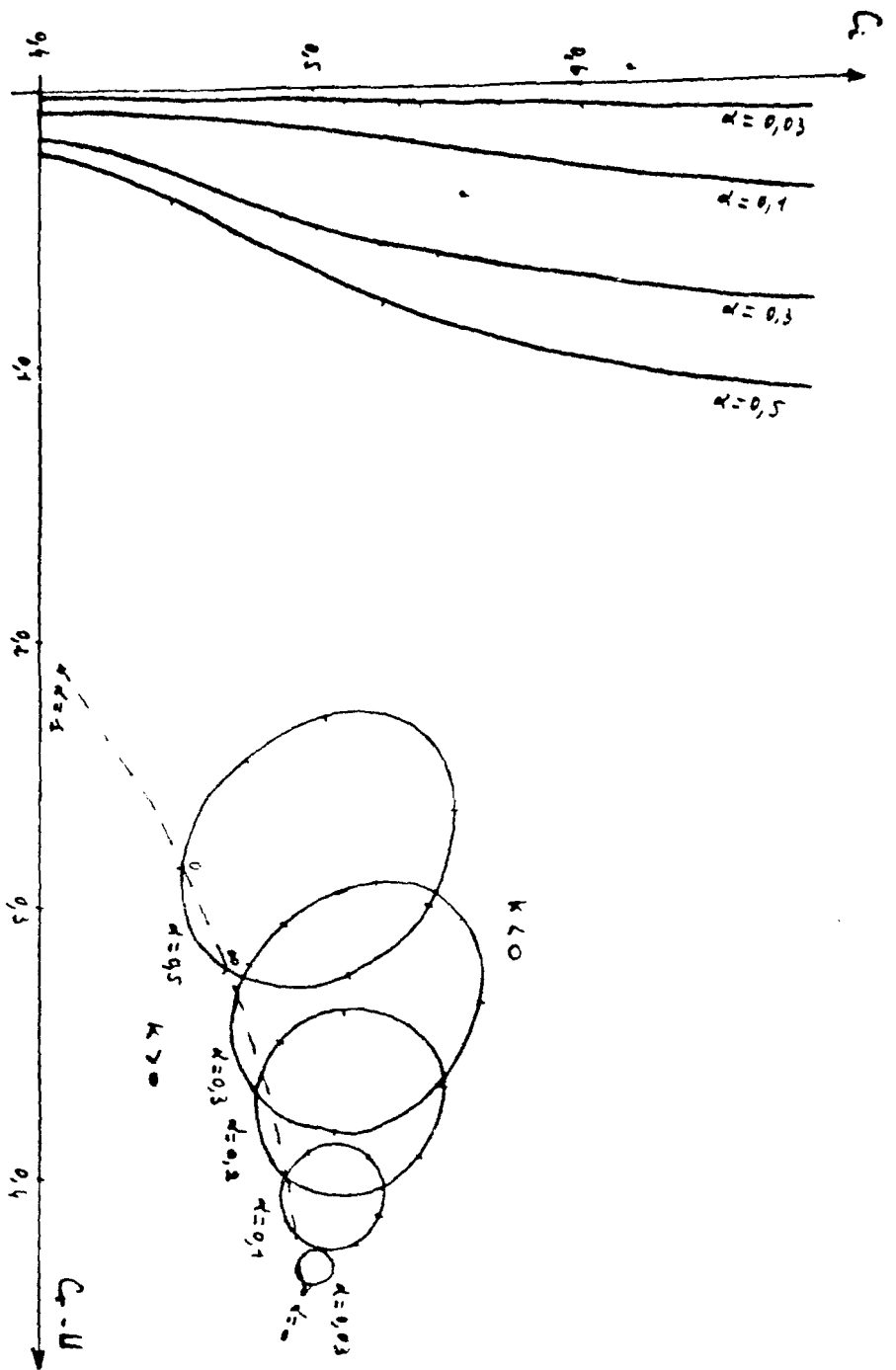


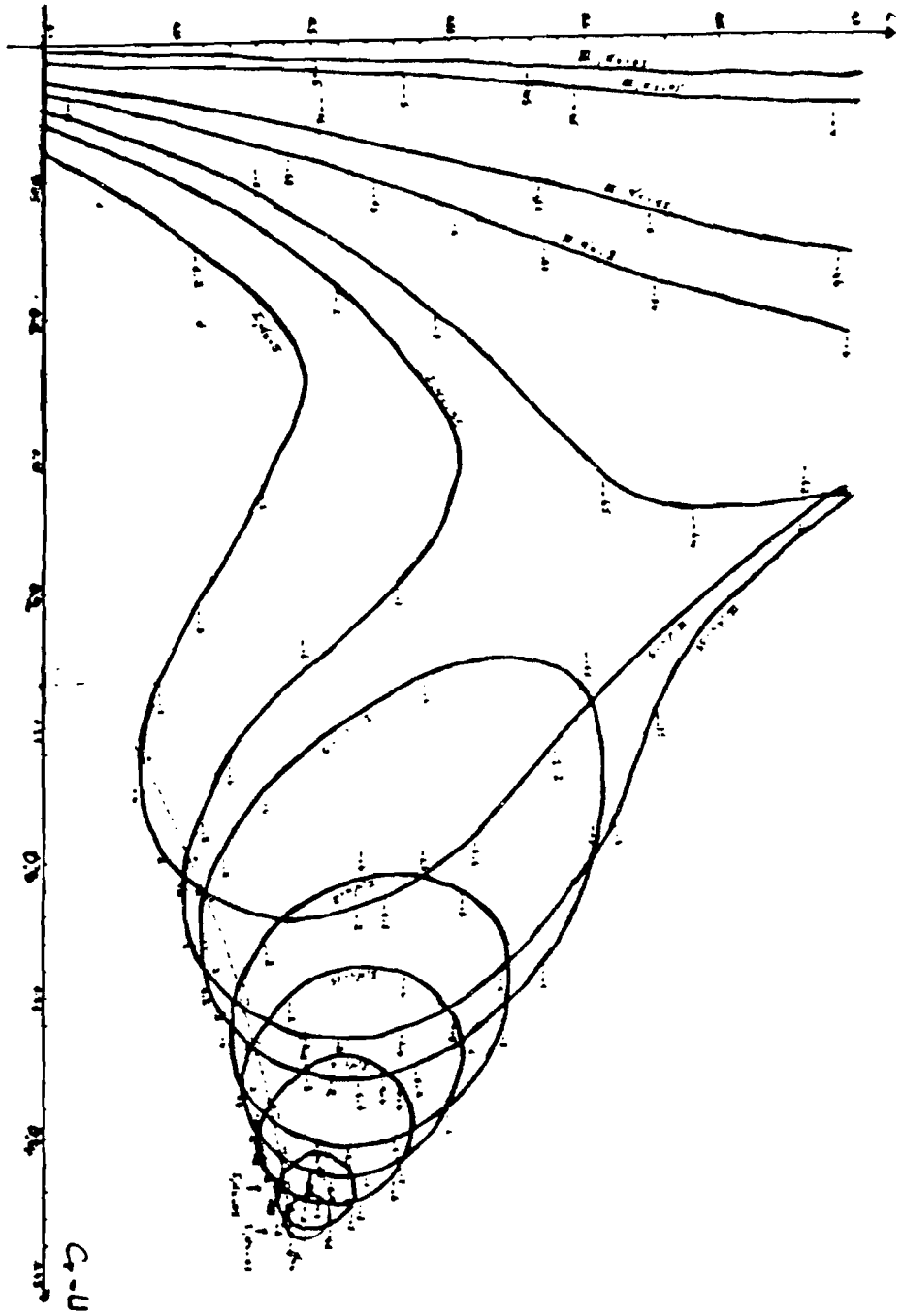
Fig 1 :

$\gamma = 4$ ,  $M = 0.5$ ,  $R_f = 0.8$ ,  $R_p = 3$

valeurs le long des courbes  
= les nombres d'onde

Modèle de DREW-LAMBY ( avec masse  
induite et couplage de pression ) : Evolution des courbes  
représentant les modes I et III pour différentes valeurs de  $\alpha$

**Fig 9**  
**1st Mode, 2nd, 3rd, 4th**  
 Modèle de BREW-LAHEY  
 (avec couplage de pression  
 et masse induite)



Chaque graphe est tracé pour un couple coefficient de couplage de pression-masse induite  $(\chi, M)$  fixé, correspondant à un modèle particulier.

Lorsque  $\chi = 0$  (absence de couplage de pression) ou  $M \neq 0$  (prise en compte de la masse induite), nous avons vérifié que la valeur limite inférieure  $R_p^0$  introduite ci-dessus vaut zéro. Et  $R_p^0$  est différent de zéro lorsque  $M = 0$  et  $\chi = 1$  (modèle de DREW-SEGEL). A titre d'exemple, pour  $R_f = 0.8$ ,  $R_p^0 \approx 0.148$  cf à fig.5.

Le phénomène de raccordement entre les modes dans le plan  $(C_r, C_i)$  peut être interprété de deux manières :

1) Elle peut être un test de détermination de la valeur limite  $\alpha_0$  de  $\alpha$  pour  $R_f$  et  $R_p$  donnés au-delà de laquelle la théorie asymptotique que nous avons construite pour  $\alpha \ll 1$  cesserait d'être valable. En effet, pour  $\alpha < \alpha_0$ , les graphes représentant  $C_r$  (la vitesse de phase) et  $c_i$  ( $K c_i$  étant le facteur d'amplification ou d'atténuation suivant qu'il est positif ou négatif) en fonction du nombre d'onde  $K$  sont analogues à ceux trouvés dans la théorie asymptotique (chap V, fig 1 à 7). En revanche, au-delà de  $\alpha_0$ , pour un  $\alpha$  fixé dans la frange de coalescence des modes dans le plan complexe  $(c_r, c_i)$ , si nous représentons  $c_r$  et  $c_i$  en fonction de  $K$ , nous trouvons les allures suivantes (fig.10 et 11).

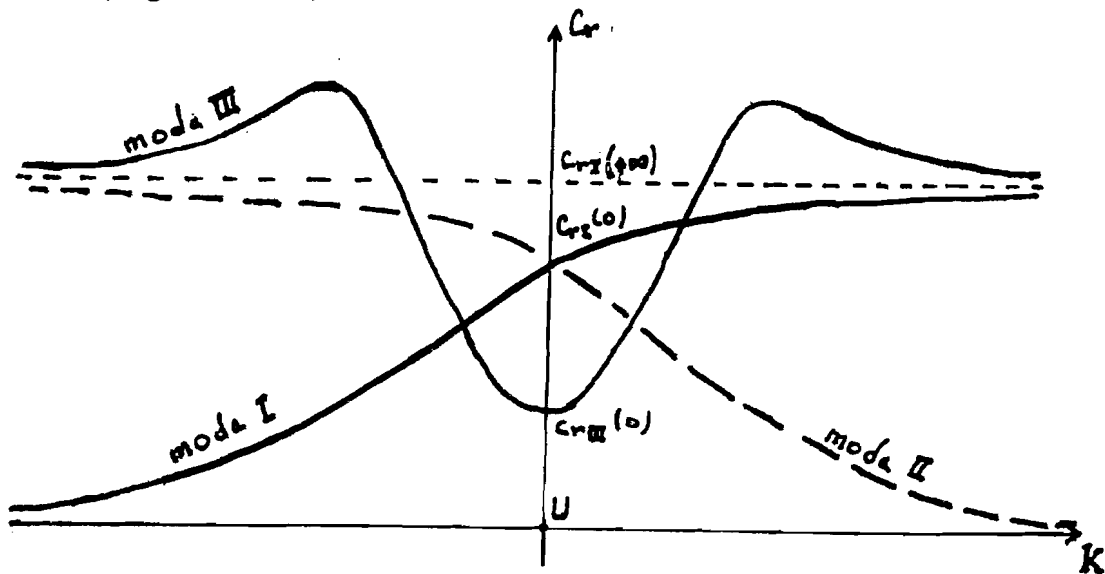
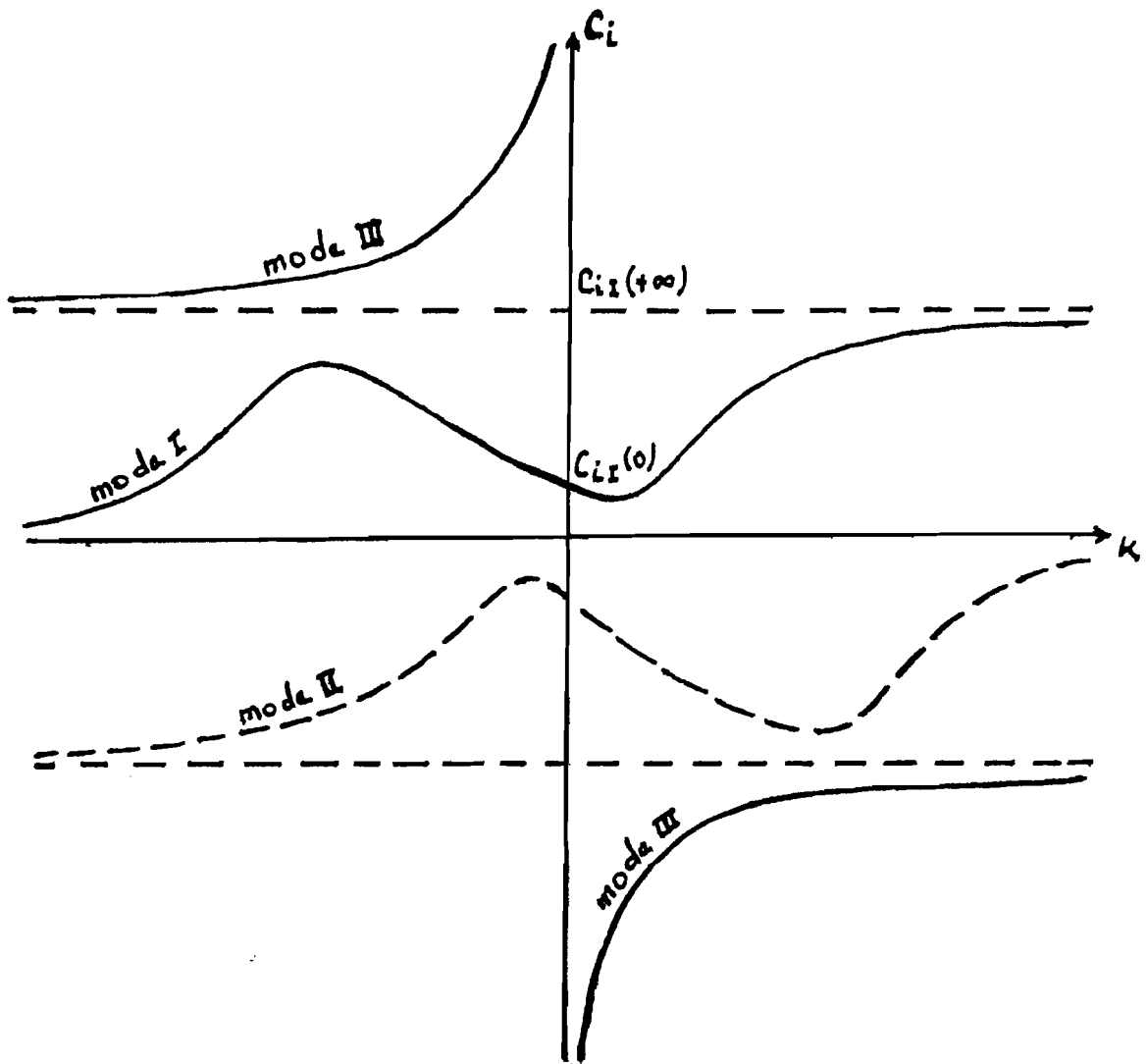


Fig 10 : Représentation de la vitesse de phase  $c_r$  des modes I et III en fonction du nombre d'onde  $K$  pour  $\alpha$  fixée dans la frange de coalescence.



**Fig 11** : Représentation de  $c_i$  en fonction de  $K$  pour  $\alpha$  fixée dans la frange de coalescence.

2) Ou encore, l'apparition du phénomène de raccordement des courbes dans le plan  $(c_r, c_i)$  pourrait marquer aussi la limite de validité de la présente théorie, lorsque cette zone d'intense dispersion des ondes correspond à des valeurs  $\alpha$  de la concentration élevées ( $\alpha > 0.5$ ). En effet, nous avons élaboré notre théorie à partir de modèles d'équations faisant l'hypothèse de phase dispersée, donc de concentration volumique en particules faible. Mais à ce niveau, il faut être assez prudent avant de tirer des conclusions hâtives, puisque pour des valeurs de  $R_p$  élevées, cette coalescence des modes est observée très tôt, c'est-à-dire pour des valeurs de concentration  $\alpha$  très faibles et rentrant pleinement dans le cadre de la présente théorie. Dans ce cas-là, nous pensons que c'est la première hypothèse qui est la plus plausible. A titre d'exemple, lorsque  $R_f \approx 1$  et  $R_p \approx 1000$  (écoulements atmosphériques) la coalescence des modes s'effectue pour  $\alpha \approx 10^{-4}$ .

Le fait que le phénomène de coalescence apparaît très tôt pour les  $R_p$  très grands s'explique. En effet, sur le "cercle des points de KELVIN-HELMOLTZ" (fig 8, chap V), les points correspondants aux  $R_p$  très grands sont très proches de  $(0,0)$   $((c_r - U, c_i) \xrightarrow{R_p \rightarrow \infty} (0,0)$  car

$(c_r - U, c_i) \xrightarrow{\delta_i \rightarrow 0} (0,0)$  d'après (5.43) et (5.44), et  $a_1 \xrightarrow{R_p \rightarrow \infty} 0$  d'après

l'expression (5.34) de  $a_1$ ). Par conséquent, la coalescence entre le premier et le troisième mode ne peut que se produire très tôt, puisque ces deux modes sont dans ce cas très proches de 0.

De même, plus on s'éloigne de la limite inférieure  $R_p^0$  ( $R_p \ll R_p^0$ ), et plus tôt aussi apparaît le phénomène de coalescence.

Tout ceci montre que le milieu est d'autant plus dispersif que l'écart entre la masse volumique des particules et celle du fluide qui les porte initialement est important.

Quant à l'influence de  $R_f$ , elle se traduit par le fait que les valeurs limites  $R_p^0$  et  $R_p^1$  de  $R_p$  deviennent respectivement plus petites et plus grandes lorsque  $R_f$  devient grand. Cela signifie que le milieu est d'autant moins dispersif que  $R_f$  est grand.

### 6.1.2 Influence des coefficients $\chi$ (coefficient de couplage de pression) et M (masse induite)

La particularité à signaler existe lorsque  $\chi = 0$  et  $M = 0$  (modèle de SAFFMAN-MARBLE).

Au voisinage de  $|K| = \infty$ , toutes les courbes fermées du plan complexe  $(c_r, c_i)$  deviennent tangentes au même point pour toute valeur de la concentration  $\alpha$  (fig 1 et 2). Ce qui montre que dans le modèle de SAFFMAN-MARBLE, pour le mode I (et par symétrie pour le mode II), la présence des particules n'a aucune influence sur les phénomènes de très courtes longueurs d'onde.

En ce qui concerne le mode III, nous avons les résultats suivants pour les vitesses (de phase) adimensionnalisées :

Pour  $R_p < 1$ , on a  $c_r - U < 0$  (fig 1).

Pour  $R_p > 1$ , on a  $c_r - U > 0$  (fig.2).

Dans tous les autres cas à savoir  $(\chi, M) \neq (0,0)$ , on a toujours  $c_r - U > 0$ .

Pour tirer les conclusions relatives à ces résultats, il convient de passer en variables réelles  $(c_r - U_1)$  non adimensionnalisées en multipliant  $c_r - U$  par  $\Delta u$ , c'est-à-dire  $U_2 - U_1$ . Le sens des inégalités précédentes relatives à  $c_r - U$  va être conservé ou pas, selon que  $\Delta u$  est positif ou non. Mais le signe de  $\Delta u$  qui devient dès lors primordial pour les conclusions reste relatif. En effet, il va dépendre de l'orientation que l'on va se donner au départ sur l'axe  $\vec{e}_1$  du premier vecteur d'espace. Cette orien-

tation peut se faire par rapport au sens de l'écoulement initial du fluide 1. Fixons-nous donc au départ dans un choix, celui du sens d'écoulement du fluide 1, c'est-à-dire en prenant  $U_1$  toujours positif ( $U_1 > 0$ ). Dès lors, on a les conclusions suivantes :

1) Si  $U_2 - U_1 > 0$ ,

alors le sens des inégalités précédentes reste inchangé et on a les résultats suivants :

a) lorsque  $(\chi, M) = (0, 0)$

Pour  $R_p < 1$ ,  $c_r - U_1 < 0$ , c'est-à-dire qu'on observe un ralentissement des ondes de perturbation représentant le troisième mode par rapport au mouvement propre initial du fluide porteur.

Pour  $R_p > 1$ , on a  $c_r - U_1 > 0$  et donc une accélération de ces ondes par rapport à la vitesse initiale du fluide 1.

b) lorsque  $(\chi, M) \neq (0, 0)$ ,

on aura toujours  $c_r - U_1 > 0$ , c'est-à-dire une accélération de ces ondes par rapport à la vitesse initiale du fluide 1.

2) Si  $U_2 - U_1 < 0$ ,

les inégalités précédentes relatives à  $c_r - U_1$  s'en trouvent inversées ainsi que les conclusions qui s'y réfèrent.

## II. INFLUENCE DE LA PRESENCE DES PARTICULES SUR LA STABILISATION (OU DESTABILISATION) DE L'ÉCOULEMENT

Dans l'étude de la stabilité de l'écoulement classique de KELVIN-HELMHOLTZ, nous avons vu qu'on trouvait deux modes conjugués, l'un stable et l'autre instable. Et on montrait que l'écoulement était plutôt instable en étudiant le comportement des solutions d'ORR-SOMMERFELD lorsque  $R_e$  (le nombre de Reynolds) devient grand. Dans notre présente théorie, nous avons mis en évidence l'existence d'un troisième mode. Ce dernier est toujours stable car  $c_1 > 0$  pour tout  $K < 0$  et donc  $K c_1 < 0$  pour tout  $K$  (en vertu des propriétés de symétries que nous avons démontrées).

Nous allons donc nous intéresser à la stabilisation (ou déstabilisation) du mode le plus instable que nous avons appelé le mode I. Cette étude de stabilité sera regardée par rapport à deux approximations d'écoulement. D'une part, nous allons voir les résultats que prédisent notre théorie par rapport à l'approximation qui consiste à considérer le fluide particulaire comme un fluide ordinaire de masse volumique barycentrique  $\rho_b = \alpha \rho_e + (1 - \alpha)\rho$  ( $\rho$  et  $\rho_e$  étant respectivement les masses volumiques du fluide porteur et des particules) ;

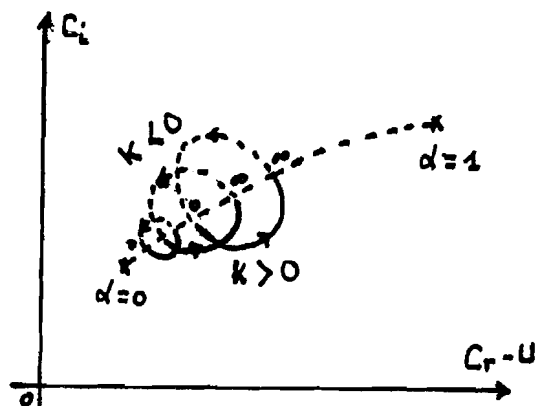


### 6.2.1 Stabilité par rapport à l'approximation barycentrique

Dans l'approximation barycentrique, tout se passe comme si on ramenait l'étude des ondes de perturbation à celle des ondes de très grande longueur d'onde ( $K \rightarrow 0$ ). Ainsi, dans le plan complexe des valeurs propres ( $c_r, c_i$ ) les points correspondant à cette approximation seront situés sur le "cercle des points de KELVIN-HELMHOLTZ" (chap V, fig 8) et précisément sur l'arc  $\overline{c(\alpha = 0), c(\alpha = 1)}$  où  $c(\alpha = 0)$  et  $c(\alpha = 1)$  sont les points du cercle correspondant aux valeurs de concentration  $\alpha = 0$  (fluide sans particules) et  $\alpha = 1$ .

Dans le plan  $(c_r, c_i)$ , l'arc  $\overline{c(\alpha = 0), c(\alpha = 1)}$  sépare chaque graphe représentant le mode I en deux portions pour toute valeur de la concentration  $\alpha$  comme sur le schéma ci-contre.

On remarque une portion correspondant aux évolutions pour les  $K < 0$  et une autre pour les  $K > 0$ . C'est la portion correspondant aux  $K > 0$  qui va nous intéresser (c'est cette portion-là qui est instable du fait que  $c_i > 0$  et donc  $K c_i > 0$  aussi).



On dira qu'il y a stabilisation par rapport à l'approximation considérée si la portion correspondant aux  $k > 0$  se trouve en dessous de l'arc  $\overline{c(\alpha = 0), c(\alpha = 1)}$ . Avec ce critère, nous avons les conclusions suivantes :

Lorsque  $\chi = 0$  et  $M = 0$ , nous avons une déstabilisation de l'écoulement par rapport à cette approximation lorsque  $c_r(\alpha = 0) < c_r(\alpha = 1)$  ( $c_r(\alpha)$  étant l'abscisse du point  $c(\alpha)$  sur le "cercle des points de KELVIN-HELMHOLTZ"). Or,  $c_r(\alpha = 0) = \frac{R_f}{1 + R_f}$  et  $c_r(\alpha = 1) = \frac{R_f/R_p}{1 + R_f/R_p}$  d'après (5.43) (dans (5.43),  $a = \frac{R_f}{\alpha R_p + (1-\alpha)}$  et on obtient les expressions pour  $c_r(\alpha = 0)$  et  $c_r(\alpha = 1)$  en remplaçant dans l'expression de  $a$ ,  $\alpha$  respectivement par 0 et 1). D'où l'inégalité  $c_r(\alpha = 0) < c_r(\alpha = 1)$  revient tout simplement à la condition  $R_p < 1$ . Par conséquent, lorsque  $\chi = 0$  et  $M = 0$ , il y a déstabilisation par rapport à l'approximation d'écoulement auquel on se réfère pour  $R_p < 1$ , c'est-à-dire pour le cas de particules légères (fig.1).

Dans tous les autres cas, ( $(\chi, M) \neq (0,0)$  ou  $R_p > 1$ ) il y a stabilisation par rapport à l'approximation de l'écoulement considéré (fig. 2 à 9).

### 6.2.2 Stabilité par rapport au cas classique de KELVIN-HELMHOLTZ en absence de particules

a - Critère de stabilisation de l'écoulement : approche géométrique, discussion en fonction de la position relative des graphes par rapport à la droite  $c_i = c_i(\alpha = 0)$  dans le plan  $(c_r, c_i)$

Ici encore, ce sont les portions des courbes correspondant aux nombres d'onde  $K > 0$  qui vont nous intéresser.

La stabilité devant être discutée par rapport au cas classique correspondant à la concentration  $\alpha = 0$ , dans le plan complexe  $(c_r, c_i)$ , cela va se ramener à l'étude de la position relative des courbes pour  $K > 0$  par rapport à la droite d'équation  $c_i = c_i(\alpha = 0)$ , où  $c_i(\alpha = 0)$  est l'ordonnée du point  $c(\alpha = 0)$ .

Nous aurons stabilisation de l'écoulement pour une frange de nombres d'onde  $K > 0$  si la position de la portion de courbe correspondante se trouve en-dessous de la droite  $c_i = c_i(\alpha = 0)$ .

Ce critère étant fixé, nous pouvons distinguer plusieurs cas dans la discussion, selon la position relative de l'arc  $\overline{c(\alpha = 0), c(\alpha = 1)}$  sur le "demi-cercle supérieur des points de KELVIN-HELMHOLTZ". Deux configurations sont possibles :

1er Cas : l'arc  $\overline{c(\alpha = 0), c(\alpha = 1)}$  est entièrement situé sur l'une des deux moitiés du demi-cercle délimitées par l'axe d'équation  $c_r = 1/2$  comme indiqué ci-dessous :

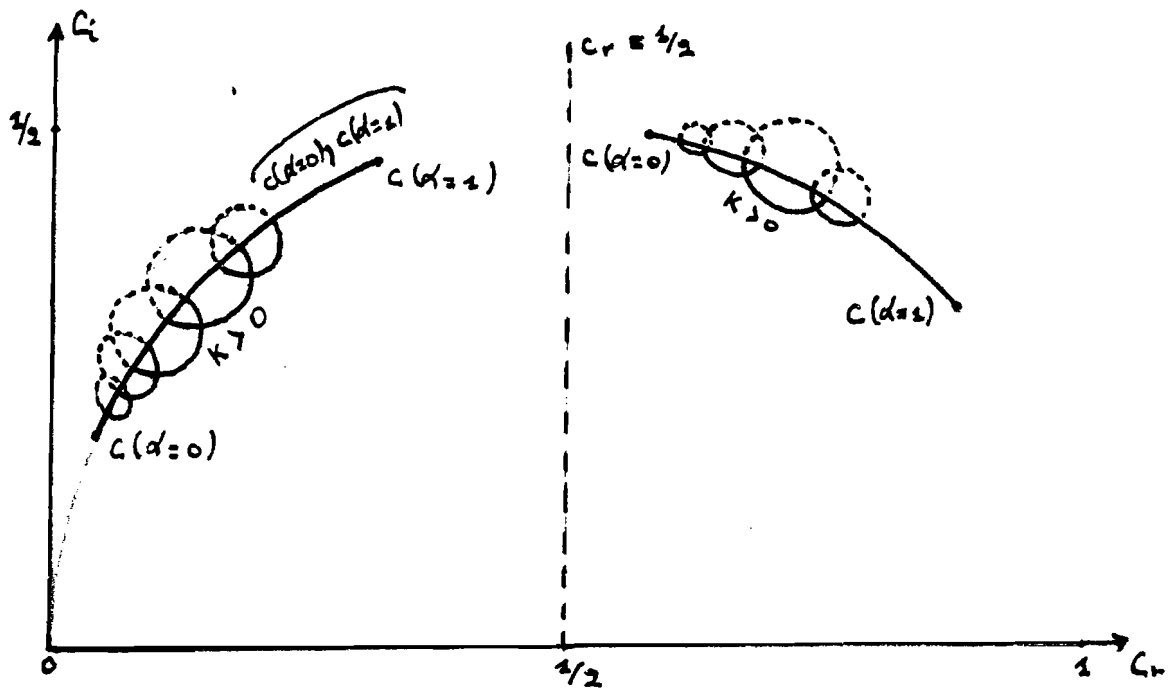


Fig 12 : Configuration dans laquelle  $\overline{c(\alpha = 0), c(\alpha = 1)}$  se trouve entièrement dans l'une des moitiés du demi-cercle.

2ème cas : L'arc  $\overline{c(\alpha = 0), c(\alpha = 1)}$  est à cheval sur les deux moitiés comme indiqué ci-dessous :

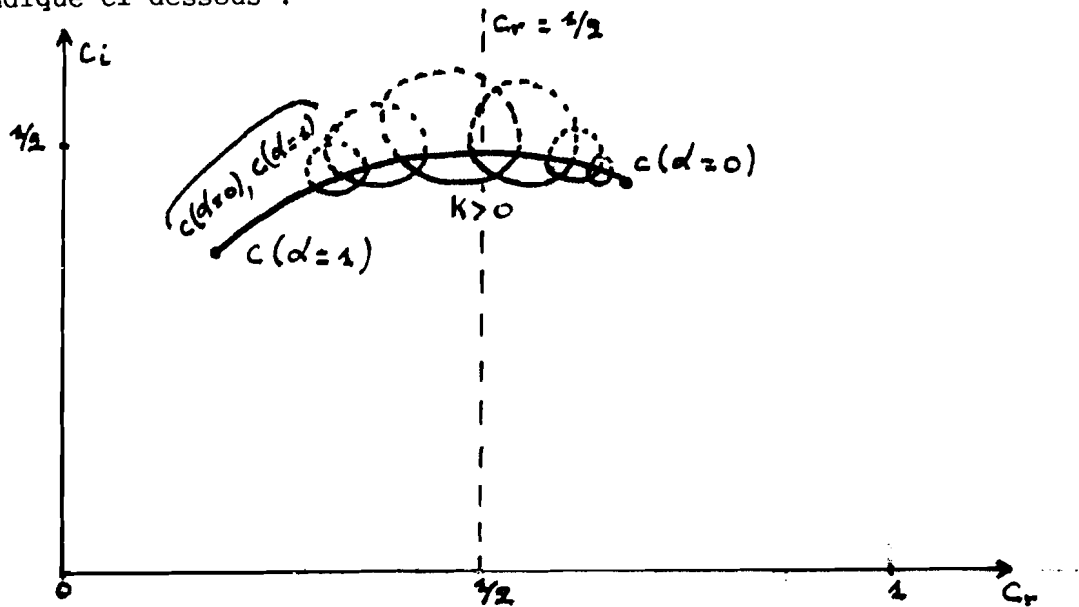


Fig 13 : Configuration dans laquelle l'arc  $\overline{c(\alpha = 0), c(\alpha = 1)}$  se trouve à cheval sur les deux moitiés du demi-cercle

Dans le premier cas, nous aurons, pour toute concentration  $\alpha$  fixée entre 0 et 1, une stabilisation du mode pour tout nombre d'onde  $K > 0$  de la perturbation, si le point  $c(\alpha = 1)$  est en-dessous de  $c(\alpha = 0)$  dans le plan  $(c_r, c_i)$  (c'est-à-dire  $c_i(\alpha = 1) < c_i(\alpha = 0)$ ) puisqu'alors, tous les graphes vont se trouver en-dessous de la droite  $c_i = c_i(\alpha = 0)$ . Et il y aura déstabilisation si  $c(\alpha = 1)$  est au-dessus de  $c(\alpha = 0)$ .

Dans le second cas aussi, deux situations sont à considérer :

Si  $c(\alpha = 1)$  est au dessus de  $c(\alpha = 0)$ , là encore on a une déstabilisation de l'écoulement pour tout nombre d'onde  $K > 0$  et à toute concentration  $\alpha$  de particules dans le milieu.

Si  $c(\alpha = 0)$  est au-dessus de  $c(\alpha = 1)$ , alors il va exister deux valeurs  $\alpha_m$  et  $\alpha_M$  de la concentration  $\alpha$  telles que :

1) Pour tout  $\alpha < \alpha_m$ , l'écoulement sera déstabilisé pour tout nombre d'onde  $K$  de la perturbation émise

2) Pour  $\alpha > \alpha_M$ , l'écoulement sera stabilisé pour tout nombre d'onde  $K$  de la perturbation émise

3) Si  $\alpha_m < \alpha < \alpha_M$ , alors il va exister  $K_0$  et  $K_1$  valeurs de  $K$  telles qu'on ait stabilisation de l'écoulement pour  $K \in [K_0, K_1]$  et déstabilisation pour les  $K \in [0, K_0[ \cup ]K_1, +\infty[$

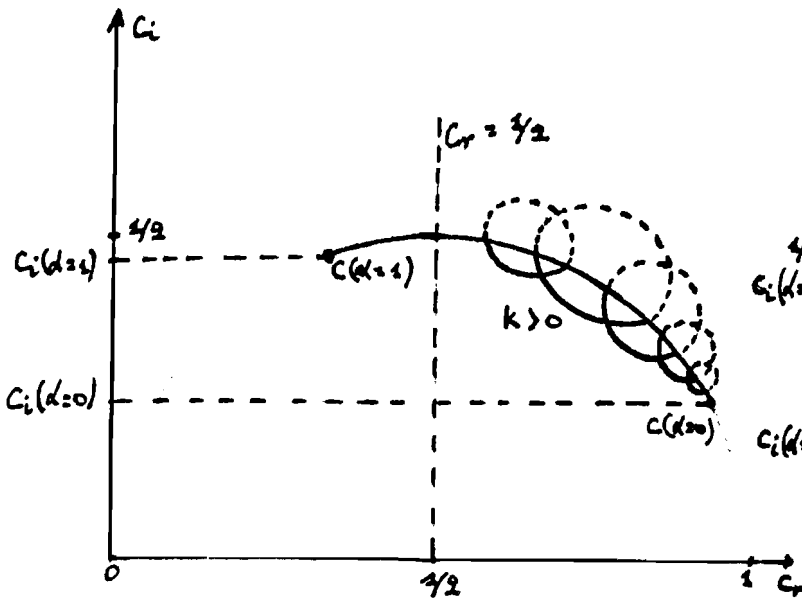


Fig 14-a : Configuration de déstabilisation de l'écoulement

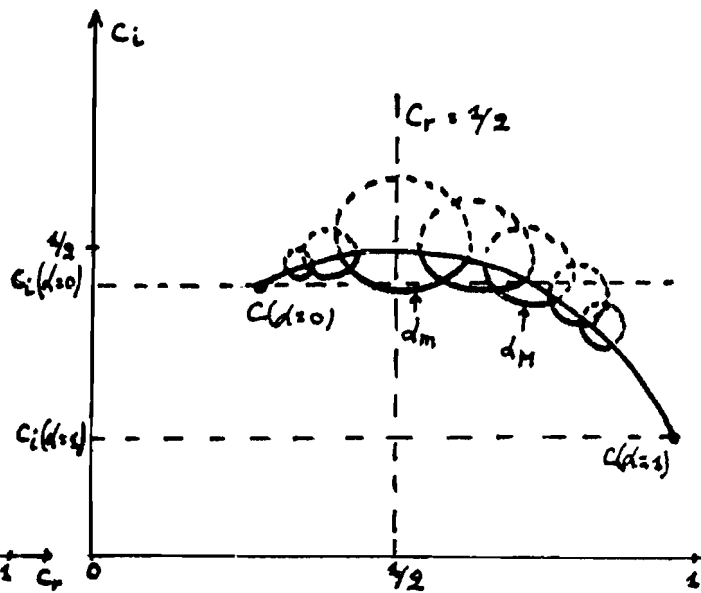


Fig 14-b : Configuration dans laquelle il existe des zones de stabilisation et de déstabilisation de l'écoulement.

En résumé, nous pouvons dire que nous avons les situations suivantes :

1) Si  $c(\alpha=0)$  est en dessous de  $c(\alpha=1)$ , c'est-à-dire

$$(6.1) \quad c_i(\alpha=0) < c_i(\alpha=1)$$

alors on a une déstabilisation de l'écoulement.

2) Si l'arc  $\overline{c(\alpha=0), c(\alpha=1)}$  se trouve entièrement dans l'une des moitiés du demi-cercle et  $c(\alpha=0)$  est au-dessus de  $c(\alpha=1)$ , c'est-à-dire si on a les systèmes d'inégalités

$$(6.2) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} C_i(\alpha=1) \leq C_i(\alpha=0) \\ C_r(\alpha=0) \leq 1/2 \\ C_r(\alpha=1) \leq 1/2 \end{array} \right. \\ \text{ou} \\ \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} C_i(\alpha=1) \leq C_i(\alpha=0) \\ C_r(\alpha=0) \geq 1/2 \\ C_r(\alpha=1) \geq 1/2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

alors il y a stabilisation de l'écoulement

3) si  $\overline{C(\alpha=0), C(\alpha=1)}$  se trouve à cheval sur les deux moitiés du demi-cercle et  $C(\alpha=0)$  se trouve au-dessus de  $C(\alpha=1)$ , ce qui se traduit au niveau des inégalités par :

$$(6.3) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} C_i(\alpha=1) \leq C_i(\alpha=0) \\ C_r(\alpha=0) \leq 1/2 \\ C_r(\alpha=1) \geq 1/2 \end{array} \right. \\ \text{ou} \\ \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} C_i(\alpha=1) \leq C_i(\alpha=0) \\ C_r(\alpha=0) \geq 1/2 \\ C_r(\alpha=1) \leq 1/2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

on a des régions de stabilisation et des régions de déstabilisation de l'écoulement comme expliqué précédemment.

b - Traduction des critères de stabilité (6.1) à (6.3) à l'aide des paramètres  $R_f$  et  $R_p$  caractéristiques de l'écoulement.

Dans (6.1) à (6.3), portons les expressions de  $C_r$  et  $C_i$  données par (5.43) et (5.44) où  $a$  dans ces expressions, est donné par (5.45), pour les valeurs  $\alpha = 0$  et 1.

1) L'inégalité (6.1) devient alors :

$$(6.4) \quad \frac{\sqrt{R_f}}{1+R_f} < \frac{\sqrt{R_f/R_p}}{1+R_f/R_p}$$

ce qui, développé, conduit à l'inégalité

$$(R_p - R_f^2)(R_p - 1) < 0$$

Et donc il y a déstabilisation pour :

$$(6.5) \quad R_p \in ]1, R_f^2[ \quad \text{si } 1 < R_f \quad (\text{ou bien } R_p \in ]R_f^2, 1[ \quad \text{si } R_f < 1)$$

2) Le système d'inégalités (6.2) se ramène à

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} R_p \in \mathbb{R}^+ \setminus ]1, R_f^2[ \\ \frac{R_f}{1+R_f} \leq 1/2 \\ \frac{R_f/R_p}{1+R_f/R_p} \leq 1/2 \end{array} \right. \\ \text{ou} \\ \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} R_p \in \mathbb{R}^+ \setminus ]1, R_f^2[ \\ \frac{R_f}{1+R_f} \geq 1/2 \\ \frac{R_f/R_p}{1+R_f/R_p} \geq 1/2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

avec  $\mathbb{R}^+$  désignant l'ensemble des nombres réels positifs.

La résolution des inégalités (6.6) nous conduit à

$$(6.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_f \leq 1 \leq R_p \\ \text{ou} \\ R_p \leq 1 \leq R_f \end{array} \right.$$

qui correspond au cas de déstabilisation de l'écoulement.

3) Enfin, le système d'inégalité (6.3) va conduire aux conditions

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_p \leq R_f^2 \leq 1 \\ \text{ou} \\ 1 \leq R_f^2 \leq R_p \end{array} \right.$$

qui correspondent au cas où on trouve à la fois des régions de stabilisation et de déstabilisation de l'écoulement.

### C - Conclusion

En ramenant l'étude de la stabilité de l'écoulement à un problème géométrique qui a consisté à étudier les positions relatives de courbes dans le plan complexe  $(C_r, C_i)$ , nous avons trouvé des critères simples ((6.5), (6.7) et (6.8)) de stabilité ne faisant intervenir que les paramètres dynamiques de l'écoulement :  $R_f$ , le rapport des masses volumiques des deux fluides, et  $R_p$ , le rapport des masses volumiques des particules et du fluide porteur. Aucun travail n'ayant été effectué sur ce sujet précédemment, nous n'avons donc pas d'éléments de comparaison possible pour nos résultats présents.

## CONCLUSION GENERALE

Le but que nous nous étions fixé dans ce mémoire était d'étudier la stabilité d'un milieu fluide stratifié à deux couches, dans un écoulement de cisaillement et en présence de particules dans l'une des couches. Un tel écoulement présentant des surfaces de discontinuité dont une frontière libre pour les particules est non classique dans le contexte de la stabilité hydrodynamique des milieux particuliers. A notre connaissance, aucun travail antérieur n'a été effectué dans ce sens. Dans les écoulements étudiés jusqu'alors, on a toujours considéré une répartition de particules occupant le domaine d'écoulement tout entier. Les écoulements dont il est question dans le présent mémoire font apparaître des régions de fluides classiques qui sont contiguës à des régions fluides contenant des particules.

Après avoir dégagé les différents modèles d'équations permettant de décrire le mouvement du milieu particulaire, nous avons été amenés à élaborer une théorie nouvelle, à partir des distributions non linéaires, pour les conditions de saut aux discontinuités dans un système non conservatif. Par la suite, il s'est avéré que seules les conditions de saut fournies par le modèle sans couplage de pression de SAFFMAN-MARBLE étaient admissibles pour le problème avec frontière libre pour les particules.

Dans l'étude des conditions de saut linéarisées, nous avons été conduits à la résolution d'équations non linéaires et il s'est trouvé que la frontière de séparation des fluides était une onde non sinusoïdale, contrairement au résultat de la théorie classique.

La linéarisation des équations du mouvement nous a amenés à la résolution d'un problème de STURM-LIOUVILLE comme c'est souvent le cas dans les problèmes de stabilité linéaire des écoulements de fluides non visqueux. Dans l'étude des ondes modales pour l'exemple simple d'un écoulement de type KELVIN-HELMHOLTZ, nous avons mis en évidence, outre la présence d'un troisième mode, le caractère essentiellement dispersif des ondes de perturbation dû à la présence des particules. D'autre part, pour certaines valeurs du rapport  $R_p$ , nous avons constaté un raccordement des courbes représentant le troisième mode avec celles des deux autres modes dans le plan complexe  $(C_r, C_i)$  pour certaines valeurs de la concentration  $\alpha$  plus grandes qu'une valeur limite  $\alpha_c$ . Cette valeur limite  $\alpha_c$ , lorsqu'elle est petite, marquant la limite de validité de la théorie asymptotique que nous avons construite pour les valeurs  $\alpha$  de la concentration faibles. Mais lorsque  $\alpha_c$  est "suffisamment grande", elle fixe tout simplement le domaine de validité de la théorie générale que nous avons élaborée à partir des modèles de base considérés qui font l'hypothèse de concentrations peu élevées.

D'autre part, l'étude de stabilité s'est effectuée par rapport à deux



approximations d'écoulements : l'approximation barycentrique qui consiste à considérer le milieu particulaire comme un fluide homogène avec une masse volumique pondérée par la fraction volumique  $\alpha$ , et l'approximation fluide porteur classique sans particules.

Dans cette dernière approximation, nous avons utilisé une approche géométrique pour discuter de la stabilité de l'écoulement. Ce qui nous a permis de dégager des critères simples ne faisant intervenir que des paramètres dynamiques de l'écoulement, à savoir  $R_f$  et  $R_p$  ((6.5) ; (6.7) et (6.8)). Ces critères sont indépendants des coefficients  $\chi$  (couplage de pression) et  $M$  (coefficient de masse induite), montrant que la stabilité de l'écoulement est indépendante du modèle choisi. L'influence du modèle intervenant seulement au niveau de la dispersion des ondes, et donc des vitesses de phase des perturbations émises.

Il faut aussi noter que dans le prolongement de cette étude, on peut envisager l'étude du spectre continu de l'opérateur de STURM-LIOUVILLE. Dans le cas classique, on sait que le spectre est situé sur une portion de l'axe réel et que les perturbations associées à ce spectre sont neutres. Dans le cas présent, une étude générale doit être réitérée pour la connaissance du comportement des perturbations associées à ce spectre.

Il y a aussi un problème que nous n'avons pas abordé dans ce travail, c'est celui de la prise en compte de la gravité. En présence de gravité, l'écoulement de base unidirectionnel suivant le premier vecteur de base  $\vec{e}_1$ , que nous avons considéré dans l'étude de la stabilité, n'est plus solution des équations du mouvement. Il serait donc intéressant de se pencher sur la manière d'aborder le problème lorsqu'on tient compte de la gravité.

Enfin, nous n'avons pas pris en compte dans nos modèles, les phénomènes de couplage thermique et de transfert de masse (évaporation et condensation), et de plus, nous nous sommes placés dans le cas d'incompressibilité du milieu. Dans des études ultérieures, on pourrait éventuellement porter une attention particulière à tous ces problèmes non résolus.

## Annexe A : Equations Intégrales de bilan et Equations locales associées pour un milieu diphasique.

L'ensemble fluide porteur-particules est un milieu continu sur lequel on peut définir les variables caractéristiques comme  $\rho$  (la masse volumique),  $\vec{V}$  (la vitesse),  $P$  (la pression), etc... en chaque point et à tout instant  $t$ . On peut donc lui appliquer les lois de bilan classiques de la mécanique des milieux continus résultant de la loi fondamentale de la dynamique.

En négligeant les effets de transfert de masse, de chaleur, la tension superficielle et la diffusion, on obtient les équations globales suivantes:

-Conservation de la masse

$$(A-1) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0$$

-Loi de bilan pour la quantité de mouvement

$$(A-2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{V} \, dV = \int_V \rho \vec{f} \, dV + \int_{\partial V} \vec{t}(\vec{n}) \, ds$$

où  $V$  est un volume matériel arbitraire convecté à la vitesse  $\vec{V}(\vec{x}, t)$ , et  $\rho(\vec{x}, t)$  est la densité définie en chaque point  $(\vec{x}, t)$ .  $\vec{f}$  est une densité volumique de force extérieure (la gravité par exemple) et  $\vec{t}(\vec{n})$  une densité surfacique de force extérieure à  $V$ ,  $\vec{n}$  étant la normale à  $\partial V$  (sortant).

Les lois globales ci-dessus sont "grossières" et ne mettent pas en évidence, de manière explicite, l'hétérogénéité du milieu. Il convient de spécifier (ou individualiser) les évolutions de chaque composante du milieu.

Par conséquent, il est nécessaire de caractériser les régions d'écoulement correspondant à chaque composante, et d'autre part, de dégager des équations globales de bilan pour chacune d'elle.

La caractérisation des composantes (ou phases) va se faire par l'introduction d'une fonction caractéristique dite de phase que nous allons noter  $\beta_\alpha(\vec{x}, t)$  et définie par :

$$\beta_\alpha(\vec{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \text{ se trouve dans la phase } \alpha \text{ à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec cette définition de la fonction de phase, on assure que les équations globales (A-1) et (A-2) peuvent s'écrire sur chaque phase (voir [7]), et prennent la forme :

$$(A-3) \quad \frac{d}{dt} \int_V \beta_\alpha \rho \, dV = 0$$

$$(A-4) \quad \frac{d}{dt} \int_V \beta_\alpha \rho \vec{V} \, dV = \int_V \beta_\alpha \rho \vec{f} \, dV + \int_{\partial V} \beta_\alpha \vec{t}(\vec{n}) \, ds + \int_{\partial V} \vec{E}_{\beta_\alpha}(\vec{n}_{\beta_\alpha}) \, ds_\alpha$$

où  $\int_{S_a} \vec{t}_{ra}(\vec{n}_{ra}) ds_a$  représente les forces surfaciques sur la phase a

due à l'autre phase dans le volume matériel  $V$ .

Néanmoins, les équations (A-3) et (A-4) restent encore peu accessibles, du fait de la présence de  $\rho$ ,  $\vec{v}$  ou  $\vec{t}$  qui sont des quantités relatives au milieu continu initial et non spécifiées sur chaque phase. Pour y remédier, on va faire intervenir les densités moyennes, les vitesses moyennes, etc... propres à chaque phase par un processus de moyenne (décrit dans [7], formule (2.13) dont nous admettrons l'existence.

Notons \* le processus de moyenne utilisé.

Soit  $\beta_a^*$  la fraction volumique de la phase a dans le milieu

$$\beta_a^* = \alpha \quad \text{pour les particules}$$

$$1 - \alpha \quad \text{pour le fluide porteur}$$

On introduit alors les notions de :

"moyenne volumique" relativement à la phase a de la quantité  $\psi$  :

$$\tilde{\psi}_a = (\beta_a \psi)^* / \beta_a^*$$

et "moyenne pondérée" relativement à la phase a de la quantité  $\psi$  :

$$\hat{\psi}_a = (\beta_a \psi)^* / \beta_a^*$$

En admettant que le processus de moyenne utilisé commute avec toutes les opérations classiques de somme, de produit, de dérivation et d'intégration dans (A - 3) ou (A - 4), on obtient les nouvelles équations globales:

$$(A-5) \quad \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \beta_a^* \tilde{f}_a dv = 0$$

$$(A-6) \quad \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \beta_a^* \tilde{f}_a \hat{V}_a dv = \int_{V_a(t)} \beta_a^* \tilde{f}_a f dv + \int_{\partial V_a(t)} \beta_a^* \tilde{t}_a(\vec{n}) ds + \int_{S_a(t)} (t_{ra}(\vec{n}_{ra}))^* ds$$

où  $\hat{V}_a(t)$  est un élément de volume convecté à la vitesse  $\hat{V}_a$ .

On montre (voir [7] p211) que pour chaque phase  $\alpha$ , il existe un tenseur de contrainte  $\tilde{T}_a$  tel que :

$$\tilde{t}_a(n) = \tilde{T}_a \cdot \vec{n}$$

Mais d'après ([11] p 273 ou [7] p. 214, formule 3.11) on a

$$\tilde{T}_a = -\tilde{P}_a I + \tilde{\tau}_a$$

où  $\tilde{P}_a$  est obtenu à partir de la pression microscopique  $p$  définie dans le milieu continu initial, et  $\tilde{\tau}_a$  est une contrainte résiduelle.

On montre, (conformément à [7] p 214) que la contrainte  $\tilde{\tau}_a$  est négligeable lorsque la

phase porteuse est un fluide (classique).

$$\text{De même, on montre ([ 7 ]) que } \int_{\mathcal{V}_a(t)} (\vec{t}_{ra}(\vec{n}_{ra}))^* ds = \int_{\mathcal{V}_a(t)} \vec{F}_a dV$$

où  $\vec{F}_a$  représente une densité de forces d'interaction entre les phases.

Lorsqu'on se trouve dans le fluide porteur (phase continue), on notera la force  $\vec{F}_a$ ,  $\vec{F}_c$  et on la notera  $\vec{F}_d$  pour les particules (phase dispersée). De même, dans le fluide porteur,  $\vec{V}_a$  sera notée  $\vec{U}$ , et pour les particules, on la notera  $\vec{G}$ . Quant à  $\vec{f}_a$ , elle sera notée  $f$  pour le fluide, et  $f_c$  pour les particules.

On montre (voir [ 7 ], p. 215) qu'en l'absence de tension superficielle,

$$\vec{F}_c + \vec{F}_d = 0$$

On montre également ([ 7 ] p. 214) que pour chaque phase  $a$ ,  $\vec{P}_a$  est peu différente de  $P$  la pression macroscopique dans le fluide porteur.

Si on néglige les effets de masse virtuelle (induite) et de sustentation, alors  $\vec{F}_d$  prend en compte deux contributions : une contribution due à la traînée sur les particules et valant  $\alpha m (\vec{U} - \vec{G})$  et l'autre due à la pression dans le milieu, lorsque la fraction volumique  $\alpha$  des particules dans le milieu est variable. Celle-ci vaut

(voir [ 7 ], appendix B) :

$$(A - 7) \vec{F} = P \nabla \alpha$$

On obtient alors

$$\vec{F}_d = \vec{F} + \alpha m (\vec{U} - \vec{G})$$

où  $m$  est le coefficient de traînée.

Par suite si nous négligeons la densité volumique extérieure  $\vec{f}(\vec{f} = 0)$ , alors les équations de bilan deviennent :

### 1) Pour le fluide porteur :

a) Conservation de la masse

$$(A - 8) \frac{d}{dt} \int_V (1 - \alpha) f dV = 0$$

b) Equation de bilan pour la quantité de mouvement

$$(A - 9) \frac{d}{dt} \int_V (1 - \alpha) f \vec{U} dV = \int_V -\nabla((1 - \alpha)P) dV - \int_V P \nabla \alpha dV + \int_V \alpha m (\vec{U} - \vec{G}) dV$$

$$= \int_V -(1 - \alpha) \nabla P dV + \int_V \alpha m (\vec{G} - \vec{U}) dV$$

## 2) Pour les particules

a) Conservation de la masse

$$(A - 10) \quad \frac{d}{dt} \int_V \alpha \rho_e \, dv = 0$$

b) Equation de bilan pour la quantité de mouvement

$$(A - 11) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \alpha \rho_e \vec{G} \, dv &= \int_V -\nabla(\alpha P) \, dv + \int_V P \nabla \alpha \, dv + \int_V \alpha m (\vec{U} - \vec{G}) \, dv \\ &= \int_V -\alpha \nabla P \, dv + \int_V \alpha m (\vec{U} - \vec{G}) \, dv \end{aligned}$$

## 3) L'hypothèse d'incompressibilité (hypothèse de travail)

L'incompressibilité du fluide porteur va se traduire par la conservation du pseudo-volume matériel  $\int_V (1 - \alpha) \, dv$  du fluide convecté à la vitesse  $\vec{U}$  au cours du temps, c'est à dire :

$$(A - 12) \quad \frac{d}{dt} \int_V (1 - \alpha) \, dv = 0$$

Les équations globales (A - 12), (A - 8), (A - 10), (A - 9) et (A - 11) vont nous conduire aux équations locales :

$$(A - 13) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (1 - \alpha) + \text{div} (1 - \alpha) \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (1 - \alpha) \rho + \text{div} (1 - \alpha) \rho \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e) + \text{div} (\alpha \rho_e \vec{G}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - \alpha) \rho \vec{U} \} + \text{div} \{ (1 - \alpha) \rho \vec{U} \otimes \vec{U} \} = -(1 - \alpha) \nabla P + \alpha m (\vec{G} - \vec{U}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_e \vec{G}) + \text{div} (\alpha \rho_e \vec{G} \otimes \vec{G}) = -\alpha \nabla P + \alpha m (\vec{U} - \vec{G}) \end{cases}$$

et à des conditions de sont associées aux discontinuités (qu'il faut trouver). On remarque dans (A - 13) la présence du terme non conservatif  $\alpha \nabla P$  (non classique) dont l'origine trouve son explication à travers la force  $\vec{F}$  définie ci-dessus en (A - 7).

## ANNEXE B : INTRODUCTION AUX DISTRIBUTIONS GENERALISEES

### 1) Généralités et introduction de l'espace $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$

On considère l'ensemble

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{ \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \text{ et à support compact} \}$$

Pour tout  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  fixé, on appelle  $\mathcal{A}_q$  l'ensemble :

$$\mathcal{A}_q = \{ \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \int \Phi(\lambda) d\lambda = 1$$

$$\text{et } \int \lambda^i \Phi(\lambda) d\lambda = 0 \text{ pour } 1 \leq |i| \leq q \}$$

où  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$

et  $\lambda^i = \lambda_1^{i_1} \times \dots \times \lambda_n^{i_n}$ ,  $|i| = i_1 + \dots + i_n$

On montre que  $\mathcal{A}_q \neq \emptyset$  pour tout  $q > 1$  et  $\mathcal{A}_p \subset \mathcal{A}_q$  pour  $p > q$  (voir [21], p. 55 Lemme 3.3.1)

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on pose

$$\Phi_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon^n} \Phi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)$$

Il apparaît que  $\Phi_\varepsilon \in \mathcal{A}_q$  dès que  $\Phi \in \mathcal{A}_q$  et réciproquement.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , définissons l'opérateur de translation  $\mathcal{T}_x$  par :

$$(\mathcal{T}_x \Phi)(\lambda) = \Phi(\lambda - x).$$

$$\text{et } \Phi_{\varepsilon, x}(\lambda) = (\mathcal{T}_x \Phi_\varepsilon)(\lambda)$$

Appelons  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  l'ensemble de toutes les fonctions

$$R : \mathcal{A}_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\Phi, x) \longmapsto R(\Phi, x)$$

qui sont  $C^\infty$  par rapport à  $x$  pour tout  $\Phi$  fixé.

Il ne faut pas confondre  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  avec l'ensemble  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  des fonctions de classe  $C^\infty$  sur

$\mathbb{R}^n$  que l'on note aussi  $E[\mathbb{R}^n]$ . Ce dernier peut être tout simplement considéré comme

l'ensemble des éléments de  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  qui ne dépendent pas de  $\Phi$ .

Appelons maintenant  $F(\mathcal{A}_1 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  l'ensemble des applications de  $\mathcal{A}_1 \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ .

Soit :

$$\otimes : \mathcal{E}[\mathbb{R}^n] \times \mathcal{E}[\mathbb{R}^n] \rightarrow F(\mathcal{A}_1 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

$$(R_1, R_2) \rightarrow R_1 \otimes R_2$$

telle que  $R_1 \otimes R_2(\Phi, x) = R_1(\Phi, x) \cdot R_2(\Phi, x)$ ,

où  $\cdot$  est la multiplication classique dans  $\mathbb{C}$ .

L'opération  $\odot$  est en fait une loi interne dans  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ . Il faut pour cela montrer que  $R_1 \odot R_2$  est de classe  $C^\infty$  par rapport à  $x$  pour  $\Phi$  fixé.

Le résultat est immédiat. En effet, pour tout  $\Phi$  fixé,  $R_1(\Phi, x)$  et  $R_2(\Phi, x)$  sont des fonctions classiques de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent, pour tout  $\Phi$  fixé,  $R_1(\Phi, x) \cdot R_2(\Phi, x)$  l'est aussi.

Muni de la loi additive  $+$  et de la loi multiplicative  $\odot$ ,  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  est alors une algèbre sur  $\mathbb{C}$  qui est unitaire puisque  $R = 1 \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ .

$$\text{Si } D = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

et  $R \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ ,  $DR$  est défini comme un opérateur de dérivation par rapport à  $x$  pour  $\Phi$  fixé :

$$DR(\Phi, x) = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} R(\Phi, x)$$

Par définition même de  $R$ ,  $DR$  va être aussi de classe  $C^\infty$  par rapport à  $x$ , c'est à dire  $DR \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ . Par conséquent, si  $R_1$  et  $R_2 \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (R_1 \odot R_2)(\Phi, x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (R_1(\Phi, x) \cdot R_2(\Phi, x)) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_i} R_1(\Phi, x) \right) \cdot R_2(\Phi, x) + R_1(\Phi, x) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_i} R_2(\Phi, x) \right) \\ &= \left( \frac{\partial R_1}{\partial x_i} \odot R_2 \right)(\Phi, x) + \left( R_1 \odot \frac{\partial R_2}{\partial x_i} \right)(\Phi, x) \\ &= \left( \frac{\partial R_1}{\partial x_i} \odot R_2 + R_1 \odot \frac{\partial R_2}{\partial x_i} \right)(\Phi, x) \end{aligned}$$

et par suite,  $\forall R_1 \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  et  $\forall R_2 \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (R_1 \odot R_2) = \frac{\partial R_1}{\partial x_i} \odot R_2 + R_1 \odot \frac{\partial R_2}{\partial x_i}$$

c'est à dire que la règle de dérivation de Leibnitz reste satisfaite sur  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ .

## 2) Notion d'éléments modérés de $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$

**Définition :** On dit qu'un élément  $R$  de  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  est modéré, si pour tout compact

$K \subset \mathbb{R}^n$  et pour tout opérateur de dérivation  $D$  (défini ci-dessus,  $D$  pouvant être d'ordre zéro

c'est à dire l'identité), il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $\Phi \in \mathcal{A}_N$ , alors il existe  $\eta > 0$  et  $c > 0$

satisfaisant :  $\forall x \in K$  et  $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \eta$

$$|DR(\Phi_{\varepsilon, x})| \leq \frac{c}{\varepsilon^N}$$

Appelons  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  l'ensemble des éléments modérés de  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ . On montrera dans la suite du développement que  $C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$ .

### Exemple d'élément modéré (et non modéré) de $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$

Posons  $R_1(\Phi, x) = \Phi(-x)$ , où  $\Phi \in \mathcal{A}_1$

Nous avons alors  $R_1(\Phi_\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \Phi(-\frac{x}{\varepsilon})$

Il est évident que  $R_1 \in \mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  : il suffit de choisir

$N = n + |k|$  si  $D = \frac{\partial^{1+k}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ ,  $C = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |D\Phi(y)|$  et  $\eta = 1$  par exemple.

Par contre si nous posons

$R_2(\Phi, x) = \exp(\Phi(-x))$  où  $\Phi \in \mathcal{A}_1$

et  $\exp(t)$  représente la fonction exponentielle de  $t$ ,

alors  $R_2(\Phi_\varepsilon, x) = \exp[\frac{1}{\varepsilon^n} \Phi(-\frac{x}{\varepsilon})]$

On montre (voir [22], p. 10(1.1.7)) que pour tout entier  $q$ , il existe  $\Phi$  appartenant à  $\mathcal{A}_q$  avec  $\Phi(0) = 1$ . Soient alors  $K$  un compact contenant  $x = 0$ ,  $D$  l'opérateur de dérivation d'ordre zéro. Pour tout  $N$  entier et tout  $C$  positif, on a

$$|R_2(\Phi_\varepsilon, 0)| = \exp[\frac{1}{\varepsilon^n}] > \frac{C}{\varepsilon^N} \quad \text{pour } \varepsilon > 0 \text{ assez petit}$$

ce qui montre que  $R_2$  n'appartient pas à  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$

### 3) Fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ considérées comme éléments de $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$

Notons  $C^0(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ .

Considérons l'application  $\mathcal{L}$  de  $C^0(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  telle que

$$\mathcal{L}(f) = R_f$$

où  $R_f$  est l'application de  $\mathcal{A}_1 \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$(B-1) \quad R_f(\Phi, x) = \int f(\lambda) \Phi(\lambda - x) d\lambda$$

$R_f$  ainsi définie est  $C^\infty$  par rapport à la variable  $x$  car  $\Phi$  appartient à  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et est un élément de  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$ .

D'après (B-1),

$$(B-2) \quad R_f(\Phi_\varepsilon, x) = \int \frac{1}{\varepsilon^n} f(\lambda) \Phi(\frac{\lambda-x}{\varepsilon}) d\lambda = \int f(x + \varepsilon\mu) \Phi(\mu) d\mu$$

et

$$(B-3) \quad (DR_{f,\varepsilon})_{\varepsilon,x} = \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|k|} \frac{1}{\varepsilon^n} f(\lambda) (D\Phi)\left(\frac{\lambda-x}{\varepsilon}\right) d\lambda$$



$$= (-\frac{\epsilon}{2})^{|k|} \int f(x + \epsilon\mu) (D\Phi)(\mu) d\mu$$

où  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  est l'ordre de dérivation de  $D$

La relation (B - 3) montre que  $R_f$  appartient à  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  puisque l'application

$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \epsilon\mu) (D\Phi)(\mu) d\mu$  est définie pour tout  $x$  ( $\Phi$  étant  $C^\infty$  et à support compact) et continue d'après le théorème de Lebesgue sur la continuité d'une intégrale par rapport à un paramètre.

L'application  $\chi$  est d'une manière évidente linéaire; elle est également injective. En effet si  $R_f$  vaut zéro identiquement, la relation (B - 2) devient

$$R_f(\Phi_\epsilon, x) = \int f(x + \epsilon\mu) \Phi(\mu) d\mu = 0$$

pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  et tout  $\Phi$  de  $\mathcal{A}_1$ .

Le théorème de Lebesgue montre que :

$$(B - 4) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} R_f(\Phi_\epsilon, x) = f(x) \\ \text{car } \int \Phi(\mu) d(\mu) = 1$$

Donc  $f$  est alors nécessairement la fonction nulle.

On peut donc, grâce à  $\chi$  considérer  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$  comme un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$ . Cependant,  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$  n'est pas alors une sous-algèbre de  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  car l'image par  $\chi$  du produit  $f_1 \cdot f_2$  de deux éléments de  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$  n'est pas  $\chi(f_1) \otimes \chi(f_2)$  puisqu'en général :

$$\int f_1(x + \epsilon\mu) \cdot f_2(x + \epsilon\mu) \Phi(\mu) d\mu \neq \int f_1(x + \epsilon\mu) \Phi(\mu) d\mu \cdot \int f_2(x + \epsilon\mu) \Phi(\mu) d\mu$$

**Remarques :** on peut identifier  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  avec un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  par deux processus différents. Soit un homomorphisme pour les produits, soit en identifiant  $f$ , élément de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , avec l'élément  $\tilde{R}_f$  de  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  défini par

$$(B - 5) \quad \tilde{R}_f(\Phi, x) = f(x)$$

Le premier processus s'étend à  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$  et le deuxième respecte l'égalité.

$$R_{f_1 f_2} = R_{f_1} \otimes R_{f_2} \text{ pour tout } f_1, f_2 \text{ de } C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Afin de déterminer un processus d'identification de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  (et de  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$ ) avec un sous-espace vectoriel convenable qui respecte ces deux propriétés

simultanément, Colombeau a proposé de ne pas considérer l'algèbre  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$

elle-même, mais son quotient par un idéal  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  approprié de telle sorte que

pour tout  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $R_f = \chi(f)$  et  $\tilde{R}_f$  soient regroupés dans une même classe. A cet effet,

introduisons la définition suivante :

#### 4) Définition des éléments nuls de $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ et construction de l'algèbre quotienté $G(\mathbb{R}^n)$

Un élément  $R \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$  est dit nul si pour tout compact  $K \Subset \Omega$  et tout opérateur de dérivation  $D$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$ , et une fonction croissante  $\beta(q)$  définie de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}_+$  et vérifiant  $\beta(q) \rightarrow \infty$ , tels que pour tout  $\Phi \in \mathcal{A}_q$ ,  $q \geq N$ , il existe  $\eta > 0$ ,  $c > 0$  satisfaisant :

$$\forall x \in K \text{ et } \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \eta$$

$$|DR(\Phi_{\varepsilon, x})| \leq C \varepsilon^{\beta(q) - N}$$

Appelons  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  l'ensemble des éléments nuls de  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ .

On montre ( voir [21], p. 63) que  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  est à la fois un sous-espace vectoriel et un idéal de  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  (c'est à dire que  $R_1 \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  et  $R_2 \in \mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  implique  $R_1 \oplus R_2 \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ )

On montre que si  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors l'élément  $R$  de  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  défini par :

$$R = \widetilde{R}_f - R_f$$

appartient à  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  (voir [22] p. 14)

Soit  $G(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n] / \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  l'algèbre quotienté de  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  par l'idéal  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  et on introduit la définition suivante :

Tout élément de  $G(\mathbb{R}^n)$  est appelé fonction généralisée sur  $\mathbb{R}^n$ ; il correspond à une classe d'équivalence modulo  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  sur  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$ , c'est à dire que deux éléments  $R_1$  et  $R_2$  de  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  définissent la même fonction généralisée sur  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $R_1 - R_2$  appartient à  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ .

#### 5) Identification de $C^\circ(\mathbb{R}^n)$ avec un sous-espace vectoriel de $G(\mathbb{R}^n)$

Soit  $\hat{\chi}$  l'application de  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$  dans  $G(\mathbb{R}^n)$  définie par :

$$\begin{aligned} \hat{\chi} : C^\circ(\mathbb{R}^n) &\rightarrow G(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \hat{\chi}(f) \end{aligned}$$

où  $\hat{\chi}(f)$  est la classe de l'élément  $R_f$  de  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$  défini par (B - 1).

Comme  $\chi, \hat{\chi}$  est linéaire; elle est également injective. En effet, si  $\hat{\chi}(f)$  est la classe nulle,  $R_f$  appartient à  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ ; alors la définition d'un élément de  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$  montre que

$$R_f(\Phi_{\varepsilon, x}) = \int f(x + \varepsilon\mu) \Phi(\mu) d\mu \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

lorsque  $\Phi$  est un élément de  $\mathcal{A}_q$  pour  $q$  suffisamment grand.

Mais nous avons vu dans le paragraphe 3 que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f(x + \varepsilon\mu)\Phi(\mu) d\mu = f(x)$$

Donc  $f(x)$  est nécessairement nul pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ ; par conséquent  $\hat{\chi}$  est injective et  $\hat{\chi}$  permet d'identifier  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$  avec un sous-espace vectoriel de  $G(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $f$  appartient à  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\tilde{R}_f$  et  $R_f$  définis par (B - 4) et (B - 5) définissent la même fonction généralisée de  $G(\mathbb{R}^n)$  puisqu'il a été établi dans le paragraphe précédent que  $\tilde{R}_f - R_f$  appartient à  $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ . Donc  $(C^\infty(\mathbb{R}^n))$  est une sous algèbre de  $G(\mathbb{R}^n)$  car  $\hat{\chi}_{f_1 f_2} = \hat{\chi}_{f_1} \otimes \hat{\chi}_{f_2}$ .

De plus les opérateurs de dérivation introduits dans  $\mathcal{M}[\mathbb{R}^n]$  passent au quotient et les opérateurs de dérivation ainsi définis sur  $G(\mathbb{R}^n)$  généralisent exactement ceux définis sur  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

On a donc les inclusions

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\circ(\mathbb{R}^n) \subset G(\mathbb{R}^n).$$

et toute fonction appartenant à  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$  considéré comme élément de  $G(\mathbb{R}^n)$  admet des dérivés partielles de tous ordres au sens de la dérivation dans  $G(\mathbb{R}^n)$ .

Cependant,  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$  n'est pas une sous-algèbre de  $G(\mathbb{R}^n)$  (nous l'admettons, sinon se reporter au contre-exemple dans (22), p16), ce qui est décevant car le produit au sens usuel de deux fonctions de  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$  est encore une fonction de  $C^\circ(\mathbb{R}^n)$ . Afin de corriger ce défaut, on va définir plus loin la notion "d'association" qui est une notion faible par rapport à l'égalité stricte dans  $G(\mathbb{R}^n)$  et qui nous permettra de retrouver les résultats classiques.

Avant d'en arriver là, nous allons voir comment on peut définir la notion la plus générale de fonctions généralisées sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , et montrer comment une distribution classique peut être associée à un élément de l'ensemble  $G(\Omega)$  de ces fonctions.

### 6) Définition de $G(\Omega)$ et notion de distribution généralisée sur $\Omega$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$

On définit  $\mathcal{D}(\Omega)$  et  $\mathcal{A}_q$  en reprenant les définitions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{A}_q$  associé et en y remplaçant  $\mathbb{R}^n$  par  $\Omega$ .

On considère pour la suite du développement, le sous-ensemble  $U(\Omega)$  de  $\mathcal{A}_1 \times \Omega$  défini

par :

$$U(\Omega) = \{(\Phi, x) \in \mathcal{A}_1 \times \Omega / \lambda \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_x \Phi(\lambda) = \Phi(\lambda - x) \in \mathcal{D}(\Omega)\}$$

Montrons que  $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega / \exists \Phi \in \mathcal{A}_1 \text{ vérifiant } (\Phi, x) \in U(\Omega)\}$  est un ouvert de  $\Omega$ .

Il suffit de montrer que si  $x \in \tilde{\Omega}$ , alors il existe  $r > 0$  tel que la boule  $B(x, r) \subset \tilde{\Omega}$

Par définition,  $x \in \tilde{\Omega}$ , donc il existe  $\Phi \in \mathcal{A}_1$  telle que

$$\lambda \rightarrow \Phi(\lambda - x) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Appelons  $K$  le support compact de  $\Phi$ , contenu dans  $\Omega$ .

Le support de  $\Phi(\lambda - x)$  qui est

$$K + x = \{\lambda \in \mathbb{R}^n / (\lambda - x) \in K\}$$

est aussi compact et est contenu dans l'ouvert  $\Omega$ . Par définition, il existe donc

$$r > 0 \text{ tel que } K + B(x, r) = \{\lambda + y, \lambda \in K \text{ et } y \in B(x, r)\}$$

soit contenu dans  $\Omega$ . Par conséquent, pour tout  $y \in B(x, r)$ ,  $K + y$  qui est le support de  $\Phi(\lambda - y)$  est un compact contenu dans  $\Omega$ . Donc  $B(x, r) \subset \tilde{\Omega}$ , et on a le résultat cherché à savoir  $\tilde{\Omega}$  est ouvert.

$U(\Omega)$  possède la propriété suivante :

† Pour tout compact  $K \subset \Omega$  et tout  $\Phi \in \mathcal{A}_1$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $(\Phi, x) \in U(\Omega) \forall x \in K$  et  $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \eta$

Cette propriété découle immédiatement du fait que  $\Phi$  est à support compact et que la distance du support de  $\Phi$  à la frontière de  $\Omega$  est strictement positive.

Cette propriété ci-dessus nous est utile pour la définition des éléments modérés.

Appelons maintenant  $\mathcal{E}[\Omega]$  l'ensemble de toutes les fonctions  $R : U(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$

de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  pour tout  $\Phi$  fixé.

Comme  $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ ,  $\mathcal{E}[\Omega]$  est une algèbre.

A l'aide de la propriété ci-dessus de  $U(\Omega)$ , on peut définir ici aussi  $\mathcal{E}_m[\mathbb{R}^n]$ ,  $\mathcal{N}(\Omega)$

exactement de la même manière que précédemment en remplaçant  $\mathbb{R}^n$  par  $\Omega$  dans les définitions. Et on définit de ce fait l'ensemble des fonctions généralisées sur  $\Omega$  par :

$$G(\Omega) = \mathcal{E}_m[\Omega] / \mathcal{N}(\Omega)$$

### Distribution comme éléments de $G(\Omega)$

On appelle  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'ensemble des distributions sur  $\Omega$  (muni de sa pseudo-topologie de la convergence des suites). Appelons encore  $\chi$  l'application de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  dans  $\mathcal{E}[\Omega]$  telle que

$$\chi(T) = R_T, T \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

où  $R_T$  est l'application de  $U(\Omega)$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$(B-6) \quad R_T(\Phi, x) = T(\mathcal{T}_x \Phi)$$

Remarque :  $T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \forall \omega$  ouvert relativement compact de  $\Omega$ ,  $\exists f \in C^\infty(\omega)$  et  $D$  opérateur de

dérivation telle que

$T/\omega = Df/\omega$  (au sens des distributions classiques).

Cette définition s'étend à  $G(\Omega)$  : on dit qu'un élément  $R \in G(\Omega)$  est une distribution (généralisée) sur  $\Omega$  si pour tout ouvert relativement compact  $\omega$  de  $\Omega$ , il existe un opérateur de dérivation  $D$  et une fonction  $f \in C^0(\omega)$  telle qu'on ait :

$$R/\omega(\omega) = DRf/\omega(\omega)$$

Si  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on a :

$$(B-7) R_T/\omega(\omega) (\Phi, x) \stackrel{\text{d.f.}}{=} T/\omega (\tau_x \Phi) \stackrel{\uparrow}{=} (-1)^{|k|} \int_{\omega} f(\lambda) D \Phi(\lambda - x) d\lambda$$

↑  
définition des distributions usuelles

Ce qui montre que  $R_T \in G(\Omega)$  et de plus,

$$R_T/\omega(\omega) = DRf/\omega(\omega)$$

Exemples de distributions [au sens de la définition dans  $G(\Omega)$ ]

Soit  $H(x)$  la fonction de Heaviside sur  $\mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Pour  $(\Phi, x) \in \mathcal{D}' \times \mathbb{R}$ , posons

$$R_H(\Phi, x) = \int H(\lambda) \Phi(\lambda - x) d\lambda = \int_0^{+\infty} \Phi(\lambda - x) d\lambda$$

De par sa définition,  $R_H \in \mathcal{E}'_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .

Soit maintenant la fonction continue  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Un représentant de  $f$  dans  $G(\mathbb{R})$  est

$$R_f(\Phi, x) = \int_0^{+\infty} \lambda \Phi(\lambda - x) d\lambda$$

On a

$$\frac{d}{dx} R_f(\Phi, x) = - \int \lambda \Phi'(\lambda - x) d\lambda = \int \Phi(\lambda - x) d\lambda = R_H(\Phi, x)$$

Par conséquent, la classe de  $R_H$  que nous notons toujours  $H$ , est un élément de  $G(\mathbb{R})$  qui est la dérivée d'une fonction continue  $f$  : dans  $G(\mathbb{R})$ , nous écrivons  $H = \frac{df}{dx}$  et ainsi, la fonction de Heaviside est une distribution.

De même,

$$\frac{d}{dx} R_H(\Phi, x) = - \int \Phi'(\lambda - x) d\lambda = \Phi(-x)$$

or  $\Phi(-x) = \delta(\tau_x \Phi) = \delta_{-x}(\Phi)$  où  $\delta$  est la distribution de Dirac. Donc

$H$  est un représentant de la distribution généralisée  $\delta_x$ .

Tout comme dans le cas des fonctions usuelles  $f \in C^0(\tilde{\Omega})$ , on avait

$$f(x) = \int f(\lambda) \Phi(\lambda - x) d\lambda$$

dans le cas des distributions classiques aussi, on a  $T \neq R_T$  en général.

Pour corriger ces défauts, on donne la définition suivante :

Définition : soit  $g \in G(\Omega)$  et  $R \in \mathcal{L}_m[\Omega]$  un représentant de  $g$ . Si pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , le nombre complexe  $\int R(\Phi_\varepsilon, x) \cdot \psi(x) dx$  (qui est indépendant du choix du représentant  $R$  de  $g$ ) a une limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , indépendante de  $\Phi \in \mathcal{A}_q$  pour un  $q$  "suffisamment grand" et si pour  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  cette limite définit une distribution classique sur  $\Omega$ , alors on dit que la distribution généralisée  $g$  admet une distribution associée que nous notons  $\tilde{g}$  et qui est définie par la formule

$$(B - 8) \quad \langle \tilde{g}, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int R(\Phi_\varepsilon, x) \psi(x) dx$$

On montre, en se servant des définitions (B - 6), (B - 7) et du théorème de Lebesgue que toute distribution de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  considérée comme distribution généralisée au sens de  $G(\Omega)$  s'admet elle-même comme distribution associée.

Outre la notion de distribution associée dans  $G(\Omega)$ , la dérivation dans  $G(\Omega)$  respecte la loi de LEIBNITZ à savoir pour  $R_1 \in G(\Omega)$  et  $R_2 \in G(\Omega)$ ,

$$(B - 9) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (R_1 \circ R_2) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} R_1 \right) \circ R_2 + R_1 \circ \frac{\partial}{\partial x_i} R_2$$

Ce sont la définition (B - 8) et (B - 9) qui forment les éléments de base de notre travail dans la recherche des conditions de saut pour les systèmes non conservatifs faisant intervenir les produits de distributions.

Liste des Symboles fréquemment utilisés

$\mathcal{A}_q$	: ensemble de fonctions-test
$\mathcal{A}$	: quantité tensorielle
$\mathcal{A}(x,y,z,t)$	: quantité de perturbation
$c$	: vitesse de phase complexe d'une onde de perturbation
$D$	: opérateur de dérivation
$\mathcal{D}(\Omega)$	: ensemble des fonctions de classe $C^\infty$ sur $\Omega$ et à support compact
$\mathcal{D}'(\Omega)$	: ensemble des distributions sur $\Omega$
$\text{div}$	: opérateur divergence
$E(\Omega)$	: ensemble des fonctions de classe $C^\infty$ sur $\Omega$
$\mathcal{E}[\Omega]$ et $\mathcal{L}_m[\Omega]$	: voir les définitions dans l'annexe B
$E(x,y,t)$	: frontière (libre) des particules
$F(x,y,t)$	: surface de séparation des fluides
$\vec{G}$ (ou $\vec{g}$ )	: vitesse des particules
$G_n$	: composante suivant la normale $\vec{n}$ à la surface de discontinuité $\Sigma$ de $\vec{G}$
$G(\Omega)$	: ensemble des distributions (ou fonctions généralisées)
$H(x)$	: fonction (ou distribution) d'Heaviside
$K$ (ou $k$ )	: nombre d'onde dans la direction des $x$
$L$	: constante de la force de sustentation introduite au Chap. III
$\ell$	: nombre d'onde dans la direction des $y$
$\mathcal{L}(E(\Omega), C)$	: (voir $E'(\Omega)$ )
$M$	: constante de masse virtuelle introduite au Chap III
$m$	: coefficient de traînée
$\mathcal{N}[\Omega]$	: voir annexe B (définition des éléments nuls)
$\vec{n}$	: normale à la surface de discontinuité $\Sigma$ .
$P$	: pression
$Q = c - U$	: vitesse de phase complexe rapporté à $U$
$q$	: 1ère composante de la vitesse des particules
$r$	: 2ème composante de la vitesse des particules
$s$	: 3ème composante de la vitesse des particules
$R_f$	: rapport de la masse volumique du fluide 2 à celle du fluide 1
$R_p$	: rapport de la masse volumique des particules à celle du fluide 1
$\vec{U}$	: vitesse du fluide
$\vec{V}$	: perturbation de la vitesse du fluide
$u$	: 1ère composante de la vitesse du fluide
$v$	: 2ème composante de la vitesse du fluide
$w$	: 3ème composante de la vitesse du fluide
$W_{\Sigma}$	: vitesse d'avancement (suivant $\vec{n}$ ) de la surface de discontinuité $\Sigma$
$Y(x)$	: fonction $\text{sup}(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\alpha$	: fraction volumique des particules dans le milieu
$\beta(q)$	: voir definition des elements nuls ( $\mathcal{C}^0[\mathbb{R}^n]$ ) dans l'annexe B
$\delta_\Sigma$	: la distribution de Dirac
$\phi$	: fonction-test élément de $\mathcal{D}(\Omega)$
$\rho$	: masse volumique du fluide
$\rho_e$	: perturbation de la masse volumique du fluide
$\rho_p$	: masse volumique des particules
$\alpha$	: perturbation de la fraction volumique
$\gamma$	: coefficient de couplage de pression
$\chi(f)$ ou $\hat{\chi}(f)$	: identification de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ dans $G(\mathbb{R}^n)$ (voir annexe B)



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] T.B. ANDERSON & R. JACKSON, A fluid mechanical description of fluidized beds - I. & E.C. Fundamentals 6, 4 (1967).
- [2] G.K. BATCHELOR, The stress system in a suspension of force-free particles - J. Fluid Mech. 41,3 (1970).
- [3] G.K. BATCHELOR, A new theory of the instability of a uniform fluidized bed - J. Fluid Mech. (1988), vol. 193, p. 75-110.
- [4] M. BOUTHIER, Sur la stabilité des écoulements non confinés et le spectre continu - Extrait des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Série II, t 296 (1983) p. 593 - 596.
- [5] M. BOUTHIER, Une équation nouvelle en stabilité des écoulements fluides non confinés - Extrait des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Série II, t 296 (1983) p. 1293 - 1296.
- [6] K.M. CASE, Stability of Inviscid Plane Couette Flow - Phys. of Fluids (1960), Vol 3, N°2, p. 143-148.
- [7] D.A. DREW & L.A.SEGEL, Averaged Equations for Two-Phase Flows - Studies in Applied Math. (1971), vol L N°3, p. 205-231.
- [8] D.A. DREW, Two Phase Flows : Constitutive Equations for lift and Brownian Motion and Some Basic Flows - Arch. Rat. Mech. Analysis, 62, (1976) p. 149-163.
- [9] D.A. DREW, lift-generated instability of the plane Couette Flow of a particle - fluid mixture - The Phys. of Fluids (1975), Vol 18, N°8, p. 935-938.
- [10] D.A.DREW, Stability of a Stoke's layer of a dusty gas - Phys. of Fluids. 22 (11), November (1979) p. 2081-2086.
- [11] D.A.DREW, Mathematical Modeling of Two-Phase Flow - Ann. Rev. Fluid Mech. (1983), 15, p. 261-291.
- [12] D.A.DREW & R.T. LAHEY JR, The Virtual Mass and Lift Force On a Sphere In Rotating And Straining Inviscid Flow - Intl J. Multiphase Flow, Vol 13, N°1 (1987) p.113-121.
- [13] Frank E. MARBLE, Dynamics of Dusty Gases - Ann. Rev. Fluid Mech. (1970), 2, p. 397-446.
- [14] D.H. MICHAEL, The stability of Plane Poiseuille Flow of a Dusty Gas - J.F.M. (1964) Vol 18, p. 19-32.
- [15] J.D. MURRAY, On the Mathematics of Fluidization I - J.F.M., 21, 3 (1965).
- [16] Ch. B. NAMURATOV & A S. SOLOV'EV, Effet of Suspended Particles on The Stability of Plane Poiseuille Flow - Fluid Dynamics, N°1 (Jan-Feb 1986) p. 38-44.
- [17] R. PANTON, Flow properties for the continuum viewpoint of a nonequilibrium gas-particle mixture - J.F.M. 31, 2 (1968).
- [18] A. PROSPERETTI & A.V. JONES, The linear stability of general two-phase flow models ; II - Intl J of Multiphase flows, vol 13, N°2

- (1987) p. 161-171.
- [19] P.A.C. RAATS, Forces Acting Upon The Solid Phase of a Porious Medium - Zamp, 19 (1968).
- [20] P.G. SAFFMAN, On the stability of Laminar flow of a dusty gas - J.F.M., vol 13 (1962) p.120-128.
- [21] J.F. COLOMBEAU, New Generalized Functions And Multiplication of Distributions - Mathematics Studies, North Holland (1984).
- [22] J.F.COLOMBEAU, Elementary Introduction to New Generalized Functions - North Holland, Math. Studies 113 (1985).
- [23] J.F. COLOMBEAU, Multiplication de Distributions et Acoustique - J1 Acoustique 1 (1988), p. 9-14.
- [24] I.Y. DEREVICH, V.M. EROSHENKO & L.I. ZAICHIR, Influence of particles on turbulent flow in channels - Fluid Dynamic, N°1, (Jan - Feb, 1985) p. 34-42.
- [25] N.A. GUMEROV, A.I. IVANOAEV & R.I. NIGMATULIN, Sound waves in mono-disperse gas-particle or vapour-droplet mixtures - J.F.M. (1988), vol 193 p. 53-74.
- [26] Yu.A. SERGEEV, The Propagation of Nonlinear Waves in a Bidispersed Fluidized Bed - Fl. Dynamic, N°1 (Jan-Feb 1985), p.42-50.
- [27] Yu.A. SERGEEV, Effect of Particle Size on Nonlinear Wave. Propagation in a Fluidized Bed - Fluid Dynamic, N°3 (May-June 1987), p.410-413.
- [28] T.F. BALSÀ, On the spatial Instability of piecewise linear free shear layers - J.F.M. (1987), vol 174, p. 553-563.
- [29] Y.T. FUNG, Richardson Criteria for stratified Vortex Motions under Gravity - Phys. Fluids 29 (2), Feb 1986 p. 368-371.
- [30] Y.T. FUNG, On Inviscid Stratified Parallel Flows Varying in Two Directions - Geophys. Asterophys. Fl. Dynamics, Vol 35 (1986) p. 57-70.
- [31] Todd I.HELSA, Ferdinand R. PRANCK & Luigi PREZIOSI, Squire's Theorem for two stratified fluids - Phys. Fluids 29 (9), sept.1986 p. 2808-2811.
- [32] M.MAGEN, D. PNUELI & Y. ZVIRIN, The stability chart of parallel shear flows with double-diffusive processes - general properties J1 of eng. Math. 19 (1985) p. 175-187.
- [33] Michaël MAGEN & Antony T. PATERA, Three-Dimensional linear instability of parallel shear flows - Phys. Fluids 29 (2), Feb 1986, p. 364-367.
- [34] P. SATYANARAYANA & Y.C. LEE, J.D. HUBA ; The stability of a stratified shear layer - Phys. Fluids 30 (1), Jan 1987 p. 81-83.
- [35] V. BONTOZOGLOU & T.J. HANRATTY, Effets of finite depth and current velocity on large amplitude KELVIN-HELMHOLTZ waves - J.F.M. (1988), Vol 196 p. 187-204.
- [36] G. CHIMONAS, The combined Rayleigh, Kelvin-Helmholtz problem - Phys. Fluids 29 (7), July 1986, p. 2061-2066.
- [37] W. HORTON, T. TAJIMA & T. KAMIMURA, Kelvin-Helmholtz instability and vortices in magnetized plasma - Phys. Fluids 30 (11), Nov. 1987, p. 3485-3495.

- [38] A.G. KULIKOVSKII & I.S. SHIKINA, On the asymptotic behavior of localized perturbations in the presence of Kelvin-Helmholtz instability - Fluid Dynamic, N°2, (March-April 1985) p. 186-193.
- [39] Chia-Shum YIH, Stratified Flows - Academic Press (1980).
- [40] P.G. DRAZIN & W.H. REID, Hydrodynamic Stability - Cambridge University Press (1981).
- [41] Dan S. HENNINGTON, The Inviscid Initial Value Problem for a Piecewise Linear Mean Flow - Arch. Rat. Mech. & An. (1988).

