

**ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC**

**THÈSE PRÉSENTÉE À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPERIEURE**

**COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DU  
DOCTORAT EN GÉNIE  
Ph.D.**

**PAR  
DONATIEN NGANGA-KOUYA**

**COMMANDE NON LINÉAIRE HYBRIDE FORCE/POSITION POUR LES  
SYSTÈMES ROBOTIQUES AVEC CONTRAINTES HOLONOMIQUES**

**MONTREAL, LE 6 JANVIER 2003**

**© droit réservés de Donatien Nganga-Kouya 2003**

**CETTE THÈSE A ÉTÉ EVALUÉE  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :**

**M. Maarouf Saad, directeur de thèse  
Département de génie électrique de l'École de Technologie Supérieure**

**M. Louis Lamarche, codirecteur de thèse  
Département de génie mécanique de l'École de Technologie Supérieure**

**Mme Ouassima Akhrif, présidente du jury  
Département de génie électrique de l'École de Technologie Supérieure**

**M. Louis A. Dessaint, professeur  
Département de génie électrique de l'École de Technologie Supérieure**

**M. Pierre Sicard, professeur  
Département de génie électrique et génie informatique  
Université du Québec à Trois Rivières**

**ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC**

**Le 21 OCTOBRE 2002**

**À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE**

# **COMMANDE NON LINÉAIRE HYBRIDE FORCE/POSITION POUR LES SYSTÈMES ROBOTIQUES AVEC CONTRAINTES HOLONOMIQUES**

**Donatien Nganga-Kouya**

## **Sommaire**

Cette thèse qui présente une étude générale effectuée sur un robot expérimental, concerne spécifiquement la modélisation et la commande non linéaire basée sur la technique "strict-feedback du backstepping" (SFB) en force et en position, en y introduisant les notions des systèmes passifs. La contribution apportée est relative au développement de lois de commandes passives et adaptatives pour la commande en force et en position. Ces lois de commande ainsi conçues ont l'avantage d'être compatibles aux systèmes robotiques avec des contraintes holonomiques. La modélisation cinématique et la modélisation dynamique, ainsi que des simulations réalisées dans un plan, ont été effectuées à partir des données du robot expérimental. L'architecture de ce robot se caractérise par l'axe 1 qui est prismatique,  $n$  axes rotatifs pouvant avoir une structure redondante, et à l'extrémité, deux axes rotatifs ( $n+1$  et  $n+2$ ) matérialisant le tangage et le roulis. La modélisation cinématique a été réalisée en appliquant la théorie des paramètres de Danevit-Hartenberg (DH), tandis que le modèle dynamique a été l'application des équations de Lagrange. Les matrices des inerties, des forces de Coriolis et le vecteur des termes de gravité, issus du modèle dynamique dans l'espace articulaire, ont ensuite été convertis dans le domaine cartésien, puis dans l'espace de la tâche, assortis d'un découplage en force et en position. Nous sommes assurés au préalable que la matrice  $M$  des inerties est symétrique et définie positive en rapport avec la matrice  $C$  des forces de Coriolis. Aussi, une contrainte en vitesse dans la direction  $z$  d'un système d'axes orthonormé, fixe par rapport à l'effecteur et perpendiculaire à la surface de contact, pour une architecture de quatre axes a été imposée au modèle dynamique. Pour atteindre l'objectif qui est celui d'obtenir une stabilité asymptotique globale du système, l'option de la conception de deux lois de commande non linéaires adaptatives hybrides par la technique SFB a été retenue. Un des avantages de ces conceptions et l'élaboration de leur algorithme de commande est celui d'imposer des propriétés de stabilité désirées en fixant ou en calculant respectivement des fonctions : mémoire, de sortie et stabilisatrice, à chaque étape récursive du système en cascade. A cette technique du SFB, nous considérons entre autre la théorie des systèmes passifs. La conception de ces deux lois de commande adaptatives correspond à trois méthodes distinctes pour l'adaptation des paramètres. Nous mettons en place par ce biais deux lois de commande ayant une flexibilité et qui regroupent en leur sein plusieurs propriétés que possèdent les lois de commande existantes. Les forces et les trajectoires désirées correspondent de toute évidence aux forces et aux trajectoires assignées avec des erreurs de poursuite acceptables, aussi bien pour le suivi des forces que pour celui des positions. Toute la méthodologie utilisée et tous les algorithmes de commande assortis des résultats de simulation vous sont présentés dans cette thèse doctorale.

# **NON-LINEAR CONTROL HYBRID FORCE/POSITION OF ROBOTICS SYSTEMS WITH HOLONOMICS CONSTRAINTS**

**Donatien Nganga-Kouya**

## **Abstract**

This thesis presents a general study on modeling and non-linear control of an experimental robot based on a new technique, named “strict-feedback backstepping” (SFB), applied to the force/position control using passive system concepts. The contribution thus brought in concerns the development of the passive and adaptive control laws for the position/force control. The control laws obtained in this study have the advantage of being compatible with robotic systems holonomic constraints. The kinematic and dynamic modelings, and also the simulation results in a pre-defined path were obtained by using the set of parameters of the experimental robot.

The robot’s architecture includes one prismatic axis,  $n$  rotation axes with the possibility of having a redundant structure, and two rotation axes ( $n+1$  and  $n+2$ ), called pitch and roll, at the end of the effector extremity.

Whereas (HD) the Danevi Hartenberg’s parameter theory was used to get the kinematic modeling, the application of Lagrange’s equation were used for the dynamic modeling.

The inertia matrices, Coriolis forces and vector of gravity derived from the dynamic modeling in the articular space, were first transformed in the cartesian domain then in the task space by decoupling the forces and the position.

Before performing this step, it is very important to ensure that the inertia matrix  $M$  is symmetric and positive definite in relation to the matrix  $C$  of Coriolis forces. In addition, we must impose a constraint on the speed in the direction of the  $z$ -axis of a orthonormal plane fixed in relation to the effector, and perpendicular in relation to the contact surface.

In order to obtain global stability of the system, we have conceived two adaptive non-linear control laws by using the SFB technique, which includes the theory of passive systems. The advantage of this control technique is that it imposes desired stability properties by fixing or calculating the storage, output and candidate Lyapunov functions, for each step of the system recursively in cascade. The realization of these two adaptive control laws involves the use of three different methods for the parameters adaptation :

- direct method;
- direct method based on a proper memory function satisfying all the requirements of passive systems;

- **direct method that is more robust than the two others and which includes two feedback loops (force / position).**

**Using this approach the two control laws obtained present all the good properties that other controls have individually. Moreover, the matrices of the linear dynamics in the articular domain may be transformed into the task space according to the parameters estimation. The application of the two control laws is shown using a triangular path. The forces and trajectories obtained correspond to those assigned with some acceptable tracking errors.**

**The methodology used, all the control algorithms obtained and the results of the simulation are presented in this doctoral thesis.**

## **AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS**

Le doctorat constitue l'étape ultime des études supérieures en enseignement technique. Lorsqu'on s'y engage, on prend le risque de sacrifier une bonne partie de sa vie, sans avoir la certitude ou la garantie d'obtenir des résultats concluants qui couronnent la fin d'un long processus universitaire. Au cours de cette étape décisive, force est de constater qu'on développe en soi, une grande autonomie intellectuelle, une forte maturité d'esprit et une maîtrise très remarquable de ses connaissances. L'apport de l'extérieur ne peut qu'être appréciable, surtout lorsqu'on a l'impression d'être livré à soi-même.

C'est donc au regard de ces difficultés existentielles et au terme de cette difficile formation que je m'en vais remercier les uns et les autres pour leurs contributions sans lesquelles nous aurions eu du mal à atteindre nos objectifs avec sérénité. Il ne m'est malheureusement pas possible de citer tout le monde dans ce document, mais que les uns et les autres trouvent ici, l'expression de notre profonde reconnaissance.

Je tiens d'abord à remercier les professeurs Maarouf Saad, Ph.D. et Louis Lamarche, Dr, de l'École de Technologie Supérieure (É.T.S.) de l'université du Québec, qui ont bien voulu accepter de diriger ces travaux de recherche, en dépit de leurs lourdes charges. Je remercie ensuite le professeur Kamal Al-Haddad, Ph.D. directeur du programme de doctorat en génie de l'É.T.S. qui, par ses sages conseils, n'a cessé de m'encourager tout au long de cette dure et pénible épreuve. Enfin je remercie les professeurs Pierre Sicard,

Ph.D. de l'Université du Québec à Trois Rivières, Ouassima Akhrif, Ph.D. et Louis A. Dessaint, Ph.D. de l'É.T.S. qui ont accepté de prendre part à ce jury.

Un travail de cette envergure ne peut être bien mené que si vous avez une certaine stabilité sociale, un soutien financier conséquent et une bonne ambiance environnementale. C'est pour cela, que je remercie tous mes parents qui ont contribué moralement et financièrement à ma formation doctorale à l'É.T.S.. Je remercie sincèrement ma sœur aînée Florence Kouya Bibenda épouse Lengoumbi, qui a su gérer ma famille avec beaucoup de doigté en dépit des nombreux problèmes qui se sont posés à mon absence. Je remercie aussi mon épouse et mes très chers enfants pour la patience qu'ils ont eue pendant ces longues années de séparation même si cela leur a été très préjudiciable. Je remercie enfin, tous mes collègues et amis, qui m'ont assisté pendant ces durs moments.

Je dédie cette thèse doctorale à trois personnes dont les événements liés à certaines circonstances, marqueront à jamais ma vie :

- D'abord à mon défunt fils Kouya Brice Davy qui nous a quitté le 9 mars 1993 à la suite d'un accident de circulation alors qu'il n'avait que quatorze ans ;
- Ensuite à mon frère Blaise Louembe, qui a comblé ce vide en donnant mon nom et le prénom du défunt à son troisième fils Louembe-Nganga Brice-Kevin;

- Enfin, à ma sœur Arlette Solange Kouya, qui a emboité le pas de son frère, en immortalisant le défunt par le premier de ses triplés Kouya Paul Davy.

**Donatien Nganga-Kouya**

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE.....	i
ABSTRACT.....	ii
AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS.....	iv
TABLE DES MATIÈRES.....	vii
Liste des tableaux.....	ix
Liste des figures.....	x
Liste des abréviations.....	xii
INTRODUCTION.....	1
REVUE DE LA LITTÉRATURE.....	6
PROBLÉMATIQUE DU SUJET.....	13
CONTRIBUTION ORIGINALE.....	15
CHAPITRE 1 MODÉLISATION.....	16
1.1 Introduction.....	16
1.2 Schéma du robot expérimental.....	18
1.3 Enveloppe de travail articulaire du robot expérimental.....	19
1.4 Paramètres articulaires du robot.....	20
1.5 Matrice globale de transformation homogène.....	22
1.6 Équation de Lagrange dans le domaine articulaire.....	32
1.7 Équation dynamique du robot dans le domaine articulaire.....	35
1.8 Équation dynamique du robot dans le domaine cartésien.....	37
1.9 Découplage du système.....	37
1.10 Conclusion.....	47
CHAPITRE 2 GÉNÉRATION DES TRAJECTOIRES.....	50
2.1 Introduction.....	50
2.2 Génération polynomiale d'ordre 5.....	50

2.3	Trajectoire dans le plan.....	51
2.4	Application à une trajectoire triangulaire.....	53
2.5	Conclusion.....	56
<b>CHAPITRE 3 NOTIONS ÉSENTIELLES POUR LA COMMANDE NON LINÉAIRE PAR RETROACTION BASÉE SUR LA COMMANDE RECURSIVE DITE BACKSTEPPING.....</b>		
		<b>57</b>
3.1	Introduction.....	57
3.2	Théorie sur le backstepping.....	58
3.3	Théorie des systèmes passifs.....	65
3.4	Stabilité des systèmes passifs.....	69
3.5	Passivité, optimalité et stabilité.....	73
3.6	Conclusion.....	79
<b>CHAPITRE 4 CONCEPTION DE LA COMMANDE.....</b>		
		<b>80</b>
4.1	Introduction.....	80
4.2	Première loi de commande backstepping force/position.....	83
4.3	Deuxième Loi de commande backstepping force/position.....	98
4.4	Gestion des tâches.....	118
4.5	Paramètres du système.....	120
4.6	Résultats des simulations numériques.....	121
4.7	Analyse des résultats de simulation numérique.....	133
4.8	Conclusion.....	134
<b>CONCLUSION ET RÉCOMMANDATIONS.....</b>		<b>136</b>
<b>ANNEXE</b>		
1:	Matrice de transformation homogène et matrice de rotation 4 axes.....	139
2:	Calculs des vitesses angulaires et linéaires.....	145
3:	Énergie cinétique.....	155
4:	Trajectoire dans le plan.....	178
5:	Organisation vectorielle et matricielle du découplage.....	183
6:	Rappel des notions de stabilité.....	188
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>		<b>193</b>

## **LISTE DES TABLEAUX**

		<b>Page</b>
<b>Tableau I</b>	<b>Enveloppe de travail pour chaque articulation du robot expérimental.....</b>	<b>20</b>
<b>Tableau II</b>	<b>Paramètres articulaires du robot expérimental à n+2 axes.....</b>	<b>21</b>
<b>Tableau III</b>	<b>Paramètres articulaires du robot expérimental à quatre axes.....</b>	<b>22</b>
<b>Tableau IV</b>	<b>Organisation des deux lois de commande.....</b>	<b>81</b>
<b>Tableau V</b>	<b>Paramètres du système.....</b>	<b>120</b>
<b>Tableau VI</b>	<b>Vecteurs de gravité.....</b>	<b>157</b>
<b>Tableau VII</b>	<b>Vecteurs des centres de masse.....</b>	<b>158</b>

## **LISTE DES FIGURES**

	<b>Page</b>
Figure 1 Robot expérimental à n axes.....	19
Figure 2 Rétroaction des systèmes passifs et schéma blocs passifs équivalents.....	65
Figure 3 Schéma de commande de la 1 <sup>ère</sup> loi de commande.....	98
Figure 4 Schéma de commande de la 2 <sup>ème</sup> loi de commande (2 <sup>ème</sup> adaptation des paramètres).....	109
Figure 5 Schéma de commande de la 2 <sup>ème</sup> loi de commande (3 <sup>ème</sup> adaptation des paramètres).....	118
Figure 6 Trajectoires désirée et réelle du robot dans un plan en trois dimensions.....	122
Figure 7 Suivi des positions réelles et désirées cartésiennes.....	123
Figure 8 Erreur de suivi des positions réelles et désirées cartésiennes.....	123
Figure 9 Suivi des vitesses réelles et désirées cartésiennes.....	124
Figure 10 Erreur de suivi des vitesses réelles et désirées cartésiennes.....	124
Figure 11 Suivi des accélérations réelles et désirées cartésiennes.....	125
Figure 12 Erreur de suivi des accélérations réelles et désirées cartésiennes.....	125
Figure 13 Suivi des forces désirée et réelle.....	126
Figure 14 Suivi des forces désirée et réelle $f_d = 0$ .....	126
Figure 15 Paramètres estimés du robot.....	127
Figure 16 Paramètres estimés (valeurs initiales =valeurs réelles).....	127
Figure 17 Commande du système.....	128
Figure 18 Trajectoires désirée et réelle du robot dans un plan en trois dimensions.....	128
Figure 19 Suivi des positions réelles et désirées cartésiennes.....	129

<b>Figure 20</b>	<b>Erreur de suivi des positions réelles et désirées cartésiennes.....</b>	<b>129</b>
<b>Figure 21</b>	<b>Suivi des vitesses réelles et désirées cartésiennes.....</b>	<b>130</b>
<b>Figure 22</b>	<b>Erreur de suivi des vitesses réelles et désirées cartésiennes.....</b>	<b>130</b>
<b>Figure 23</b>	<b>Suivi des accélérations réelles et désirées cartésiennes.....</b>	<b>131</b>
<b>Figure 24</b>	<b>Erreur de suivi des accélérations réelles et désirées cartésiennes.....</b>	<b>131</b>
<b>Figure 25</b>	<b>Suivi des courants réel et désiré.....</b>	<b>132</b>
<b>Figure 26</b>	<b>Paramètres estimés du robot.....</b>	<b>132</b>
<b>Figure 27</b>	<b>Commande du système.....</b>	<b>133</b>

## LISTE DES ABRÉVIATIONS

$a_i$	position $i$ de la trajectoire polynomiale, degré
$C$	matrice des forces de Coriolis et centrifuges dans l'espace articulaire
$C_{cx}$	matrice des forces de Coriolis et centrifuges dans l'espace de la tâche
$C_i C_{ij}$	cosinus $\theta_i$ , cosinus $(\theta_i + \theta_j)$ , degré
$C_x$	matrice des forces de Coriolis et centrifuges dans l'espace cartésien
CLF	fonction de commande de Lyapunov
$d, \dot{d}, \ddot{d}$	vecteurs des coordonnées, vitesses et accélérations généralisées, translation, m, m/s, $m/s^2$
$d_d, \dot{d}_d, \ddot{d}_d$	vecteurs des coordonnées, vitesses et accélération désirées de l'axe prismatique, m, m/s, $m/s^2$
$e_c$	vecteur des erreurs des positions, des vitesses et de force dans l'espace de la tâche
$e_{c1}$	vecteur des erreurs des vitesses dans l'espace de la tâche, m/s
$e_{c2}$	vecteur des erreurs des positions dans l'espace de la tâche, m
$e_f$	erreur de force, N
$e_p$	vecteur des erreurs de position, m
$f$	vecteurs des forces de contraintes généralisées dans l'espace articulaire, N
$f_{int}$	force d'interaction dans l'espace de la tâche, N
$F_{cint}$	vecteurs des forces d'interaction dans l'espace de la tâche, N
$F_{cx}$	vecteurs des forces de contraintes généralisées dans l'espace de la tâche, N
$F_{int}$	vecteurs des forces d'interaction dans l'espace cartésien, N
$F_x$	vecteurs des forces de contraintes généralisées dans l'espace cartésien, N
$G$	vecteurs des termes de gravitation dans l'espace articulaire
$G_{cx}$	vecteurs des termes de gravitation dans l'espace de la tâche
$G_x$	vecteurs des termes de gravitation dans l'espace cartésien

<b>G</b>	force gravitationnelle, N
<b><math>g_i</math></b>	vecteur de force de gravité de l'articulation $i$ , N
<b>I</b>	vecteur du courant appliqué dans l'espace articulaire, A
<b><math>\bar{I}</math></b>	matrice identité
<b><math>I_c</math></b>	vecteur du courant dans le domaine de la tâche, A
<b><math>I_{ci}</math></b>	vecteur du courant de l'articulation $i$ dans l'espace de la tâche, A
<b><math>I_i</math></b>	courant de l'articulation $i$ dans l'espace articulaire, A
<b><math>{}^C I_j</math></b>	tenseur d'inertie du centre de masse du joint $i$ dans le référentiel $\{j\}$
<b>J</b>	matrice jacobienne dans l'espace articulaire, par rapport à $\{0\}$
<b><math>J_c</math></b>	matrice jacobienne dans l'espace de la tâche, par rapport à $\{0\}$
<b><math>\dot{J}</math></b>	dérivée de matrice jacobienne dans l'espace articulaire, par rapport à $\{0\}$
<b><math>J^+</math></b>	inverse généralisée de la matrice jacobienne dans l'espace articulaire par rapport à $\{0\}$
<b><math>k_f</math></b>	gain proportionnel de force
<b><math>k_g</math></b>	facteur d'amortissement
<b><math>k_i</math></b>	énergie cinétique du joint $i$ , J
<b><math>k_p</math></b>	matrice des gains proportionnels de force
<b><math>k_v</math></b>	gain dérivé de force
<b><math>K_i</math></b>	matrice des gains de la commande backstepping
<b><math>K_m</math></b>	matrice des gains constants de l'actionneur dans l'espace articulaire
<b><math>K_{mc}</math></b>	matrice des gains constants de l'actionneur dans l'espace de la tâche
<b><math>K_r</math></b>	matrice des gains caractérisant la conversion entre le courant et le couple dans l'espace articulaire
<b><math>K_{rc}</math></b>	matrice des gains caractérisant la conversion entre le courant et le couple dans l'espace de la tâche
<b>L</b>	matrices des gains des inductances dans le domaine articulaire, Vs
<b><math>L(q, \dot{q})</math></b>	le Lagrangien
<b><math>L_c</math></b>	matrice des gains des inductances dans l'espace de la tâche, Vs

$L_i$	longueur de l'articulation $i$ du robot, m
$m_i$	masse de l'articulation $i$ du robot, kg
$M$	matrice des inerties dans l'espace articulaire
$M_x$	matrice des inerties dans l'espace cartésien
$M_{cx}$	matrice des inerties dans l'espace de la tâche
$p_i$	paramètres $i$ du système robotique
$p_x, p_y, p_z$	positions cartésiennes par rapport au repère $x, y$ et $z$ , m
${}^j P_{ci}$	vecteur des coordonnées du centre du joint $i$ dans le référentiel $\{j\}$
$q, \dot{q}, \ddot{q}$	vecteurs des coordonnées, vitesses et accélérations généralisées rotatif, degré, degré/s, degré/s <sup>2</sup>
$Q$	matrice de pondération de l'équation de Lyapunov
$q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d$	vecteurs des coordonnées, vitesses et accélération désirées des axes rotatifs, degré, degré/s, degré/s <sup>2</sup>
$R$	matrice des valeurs des résistances des actionneurs dans l'espace articulaire, ohms
$R_c$	matrice des résistances de l'actionneur dans l'espace de la tâche, ohms
$R_0$	matrice de rotation du plan de travail
$S_i, S_{ij}$	sinus $\theta_i$ , sinus $(\theta_i + \theta_j)$ ,
SFB	strict-feedback du backstepping
$t$	temps, s
$T$	énergie cinétique
$U$	énergie potentielle, J
$U_i$	énergie potentielle de l'articulation $i$ , J
$v_c$	vecteur de vitesse linéaire dans le référentiel de l'outil, m/s
$V_i$	fonction candidate de Lyapunov
${}^j v_{ci}$	vitesse linéaire du centre de masse du joint $i$ dans le référentiel $\{j\}$ , m/s
$W$	matrice des dynamiques linéaires dans l'espace articulaire
$W_{cx}$	matrice des dynamiques linéaires dans l'espace de la tâche

$W_i$	fonction mémoire
$x, \dot{x}, \ddot{x}$	vecteurs de position, vitesse et accélération dans l'espace cartésien, m, m/s, m/s <sup>2</sup>
$x_c, \dot{x}_c, \ddot{x}_c$	vecteurs de position, vitesse et accélération dans l'espace de la tâche, m, m/s, m/s <sup>2</sup>
$x_d, \dot{x}_d, \ddot{x}_d$	vecteur de position, vitesse et accélération cartésiennes désirées, m, m/s, m/s <sup>2</sup>
$\dot{x}_f$	vecteurs de contrainte de force
$x_p, \dot{x}_p, \ddot{x}_p$	vecteurs de contraintes de position, vitesse et accélération dans l'espace de la tâche, m, m/s, m/s <sup>2</sup>
${}^{i-1}R_i$	matrice de rotation de l'articulation i par rapport à i-1
${}^{i+1}R_i$	matrice de rotation de l'articulation i+1 par rapport à i
${}^{i-1}T_i$	matrice de transformation homogène de l'articulation i à i-1
${}^{i+1}T_i$	matrice de transformation homogène de l'articulation i+1 à i
$y_i$	sortie de l'étape i du système de commande
$u_i$	entrée de l'étape i du système de commande
$\tau$	vecteur du couple d'entrée, Nm
$\alpha_i$	fonction stabilisatrice de l'étape i du système de commande
$v$	commande du système dans l'espace articulaire
$v_c$	commande du système dans l'espace de la tâche
$\varphi$	angle de lacet (yaw), degré
$\psi$	angle de tangage (pitch), degré
$\gamma$	angle de roulis (roll), degré
$\Gamma$	matrice de pondération pour l'adaptation des paramètres
$\Delta$	variation d'une variable définie
$\Lambda$	matrice de pondération

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$	vecteurs d'état de positions, de vitesses et des intensités dans l'espace articulaire
$\xi_{c1}, \xi_{c2}, \xi_{c3}$	vecteurs d'états des variables de positions, de vitesses et des intensités dans l'espace de la tâche
$\xi_{1d}, \xi_{2d}, \xi_{3d}$	vecteurs des variables désirées de positions, de vitesses et des intensités dans l'espace articulaire
$\xi_{c1d}, \xi_{c2d}, \xi_{c3d}$	vecteurs de variables désirés de positions, de vitesses et des intensités dans l'espace de la tâche
$\xi_{cint}$	courant d'interaction dans l'espace de la tâche
$\xi_{cmes}$	courant mesuré dans l'espace de la tâche
$\omega_c$	vecteur de vitesse angulaire dans le référentiel de l'outil, rad/s
${}^j\omega_i$	vitesse angulaire du centre du joint i dans le référentiel {j}, rad/s
$\omega_i, \dot{\omega}_i$	vitesse et accélération angulaire du joint i, rad/s

## **INTRODUCTION**

La fonction principale d'un robot est celle d'exécuter une ou plusieurs tâches bien spécifiques dans une configuration bien déterminée au préalable. Lorsque ces tâches sont réalisées sur une surface de contrainte et que le robot interagit par rapport à son environnement de travail, on déduit qu'il appartient à la classe des systèmes dite avec contraintes. La surface en contact avec l'organe terminal -appelé communément effecteur du robot -peut avoir soit une souplesse, soit une rigidité. Lorsqu'elle est souple, on appliquera nécessairement une commande d'impédance pour effectuer le travail à réaliser. A l'inverse, pour l'exécution des tâches astreintes aux contacts rigides, on fera appel à la commande hybride. En plus de la nature de la surface de contact, qui nous situe la nature de la commande qui peut être appliquée, si les équations de contraintes dépendent uniquement des positions généralisées du robot, qui est en général fixe par rapport à sa base, on parlera des contraintes dites holonomes. A l'opposé de ce qui vient d'être mentionné, au lieu d'être fixe, c'est-à-dire que le robot est mobile par rapport à sa base, les équations de contraintes qui dépendaient uniquement des positions généralisées, seront elles aussi tributaires des déplacements qui en résultent par sa mobilité. Pour ce dernier cas, on se référera aux contraintes dites non holonomiques. La notion de commande non linéaire en prélude à cette thèse, se justifie par le fait que le système en étude est fortement non linéaire. Sa conception par l'utilisation de la technique du backstepping et des notions de la passivité pourra inclure une grande partie de ses non-linéarités.

De ce qui précède, nous développons dans la présente thèse, le problème de la conception de la commande adaptative non linéaire hybride force/position des systèmes robotiques avec des contraintes holonomes. Cette commande adaptative, qui occupe une place de choix dans cette thèse, peut s'interpréter comme un ensemble de méthodes. Ces méthodes regroupées en son sein permettent un ajustement automatique en temps réel, des paramètres incertains du système mis en œuvre dans la boucle de ladite commande

afin de réaliser ou de maintenir un niveau de performance désiré. La méthodologie de conception utilisée est celle du "strict-feedback du backstepping" (SFB en abrégé) en appliquant systématiquement suivant l'opportunité, la théorie de la passivité.

Quant au backstepping (étape avant) qui est au centre de toute notre conception, il sera défini d'une manière explicite dans le chapitre 3. D'une façon sommaire on peut retenir que c'est un système dont la structure en cascade est caractérisée par une forme augmentée d'un intégrateur autant de fois que la récursivité le permet. Il est à noter que nous devons retrouver toutes les propriétés du système initial dans cette forme augmentée. Dans la structure en cascade du backstepping, suivant une certaine configuration, nous pouvons remarquer dans le prolongement en aval des différentes étapes récursives, une forme triangulaire qui se dessine par rapport à la structure générale telle qu'elle se présente. C'est cette forme triangulaire qui est à l'origine de la dénomination de strict-feedback, parce que chaque interconnexion dans le système est une connexion rétroactive de l'état des entrées.

Malgré le fait que nous utilisons la passivité d'une manière spécifique dans la présente thèse, le chapitre 3 fera aussi ressortir ses grandes lignes d'une manière globale. De manière spécifique nous pouvons toutefois retenir, sans aller dans les détails des différents concepts que la passivité est une méthode qui permet d'établir un lien direct entre l'entrée et la sortie d'un système. Le lien une fois établie, assure la convergence asymptotique du système avec une erreur passive (ou nulle) par le choix d'une fonction d'entrée appropriée.

De ce qui vient d'être mentionné, nous visons deux objectifs principaux pour la résolution du problème de la conception de nos lois de commandes adaptatives en force/position :

- maintenir et contrôler une force appliquée par la fin de l'effecteur sur une surface de travail ;
- contrôler en même temps la convergence des erreurs relative au suivi de la trajectoire réelle par rapport à la trajectoire désirée.

Pour atteindre ces deux objectifs, notre problématique est celle d'élaborer une méthode qui garantit l'obtention de la stabilité asymptotique globale et le suivi des trajectoires désirées des positions, des vitesses, des accélérations et de la force appliquée.

Afin de réaliser une loi de commande qui soit fiable sur un système mécanique articulé, il faut absolument détenir un certain nombre d'éléments liés à la cinématique et à la dynamique qui régissent le fonctionnement de ce dernier. A défaut de la possession de ces éléments, comme cela a été le cas pour nous, la modélisation est alors un préalable pour toute conception de la commande en robotique. Le modèle dynamique issu de la modélisation du système pour le robot expérimental en étude devra subir des transformations pour qu'il soit compatible aux contraintes holonomes imposées. Cette argumentation est valable pour tous les types d'architectures des robots. Aussi, si on se trouve dans le cas où les paramètres du robot ne sont pas connus avec précision (cas très fréquent et nous concernant au premier chef), la commande classique ne peut par conséquent pas assurer la convergence du système. C'est pour cela qu'il faut envisager la conception d'une commande adaptative comme nous l'avons déjà préconisé au départ.

La présente recherche fera ressortir deux types de commandes adaptatives SFB découplées en force et en position, compatibles aux systèmes robotiques comme nous l'explicitons ci-dessous :

- la conception du premier type sera basée sur une représentation en cascade faisant ressortir seulement une forme augmentée du backstepping. Les notions de passivité

seront prises en compte et l'adaptation des paramètres se fera par la méthode directe ;

- la seconde conception se fera à base d'une représentation en cascade du SFB ayant le style d'une rétroaction linéarisante, c'est-à-dire ayant  $n$  formes augmentées. La loi de commande qui en découlera utilisera toute la technique des systèmes passifs. Deux méthodes seront utilisées pour la mise en place de la loi d'adaptation des paramètres. La première aura trait à la méthode directe et sera basée exclusivement sur la boucle de la position. La seconde sera on ne peut plus complète avec la prise en compte des deux boucles de rétroaction (position et force). Cela assurera une robustesse mathématique par rapport à la précédente.

Toute la méthodologie utilisée, ainsi que tous les algorithmes de commande assortis des résultats de simulation, vous seront présentés dans cette thèse doctorale, exception faite pour les expressions qui présentent une grandeur remarquable et sont très difficiles à représenter.

La présente thèse doctorale qui met en exergue les résultats obtenus sur les deux lois de commande non linéaire backstepping compatibles aux systèmes robotiques, est organisée de la façon suivante :

- Dans le chapitre 1, nous résumons, pour tous les cas de figure, la modélisation cinématique et la modélisation dynamique du robot expérimental avec des outils simples de calculs matriciels et vectoriels. Après le calcul des positions, des orientations, des vitesses et des accélérations linéaires et angulaires, nous allons mettre en place toutes les matrices jacobiennes et les calculs de la cinématique inverse. Le modèle détaillé pour quatre axes a été mis en pratique, suivi des différentes transformations du domaine articulaire au domaine de la tâche en passant par le domaine cartésien. Nous effectuons aussi pour des besoins spécifiques de commande, un découplage du système dynamique en force et en position dans le

domaine de la tâche en imposant une contrainte dans la direction  $z$  de la vitesse par rapport à un système d'axes orthonormé. Les détails de tous les calculs figurent aux annexes 1, 2 et 3 de la présente thèse et tous les résultats sont validés par le logiciel Maple ;

- Dans le chapitre 2, nous faisons la conception mathématique d'une trajectoire triangulaire désirée. Elle est générée suivant la théorie d'une trajectoire polynomiale d'ordre 5 suivant un certain nombre de points répartis sur la figure géométrique désirée. La trajectoire sous forme de figure réalisée sera suivie par l'organe terminal du robot dans un plan grâce à l'entremise des équations mises en place à cet effet. Les détails des calculs figurent à l'annexe 4 du présent document ;
- En prélude de la conception des lois de commande, dans le chapitre 3 nous expliquons les concepts les plus importants du backstepping et de la passivité. Nous définissons la théorie des systèmes passifs et de ses différentes liaisons avec d'autres concepts importants comme la stabilité, la dissipativité et l'optimalité.
- Dans le chapitre 4, nous présentons toute la méthodologie de la logique de conception des deux lois de commande adaptatives SFB en force et en position. En préliminaire à ces conceptions, respectivement une représentation d'état du modèle dynamique est faite sous différentes formes par rapport au système backstepping ou SFB qui est compatible à la conception des lois de commande envisagées. Si la technique et les attentes de la logique du découplage sont les mêmes pour les deux conceptions, il n'en demeure pas moins vraie qu'il y a une différence notable de la conception de ces commandes au niveau de leur forme en cascade et à la mise en place des différentes lois d'adaptation des paramètres. Aussi, nous présentons tous les schémas blocs de commande liés aux différentes lois d'adaptation de paramètres. Une partie explicative de la gestion des tâches telle que nous l'avons appliquée pour nos simulations est élaborée. Tous les résultats de simulation et leur analyse respective nous donnent un aperçu général du travail effectué.
- Enfin une conclusion et des recommandations, assorties d'une conclusion à chaque fin de chapitre, mettront un terme à cette thèse doctorale.

## **REVUE DE LA LITTÉRATURE**

Un robot peut être défini comme un système mécanique polyarticulé programmable qui sert à exécuter une ou plusieurs tâches dans un environnement de travail au préalable bien déterminé. La plupart des tâches à exécuter (suivi de contour, ébavurage des surfaces, ébarbage des pièces mécaniques, assemblage, grattage etc.) nécessite un contact entre la fin de l'organe terminal du robot et son environnement de travail. Par conséquent, la force due au contact avec la surface active doit être nécessairement prise en compte. Cette force de contact telle qu'elle est expliquée dans la majorité des publications scientifiques à caractères technologiques, ressort l'existence de plusieurs types de tâches à réaliser. Nous allons nous intéresser à ceux qui produisent un contact rigide associé à un suivi de trajectoire en force et en position. Pour ces types de cas, l'interprétation faite s'apparente à une commande robotique hybride avec contrainte. Suivant les explications ci-dessus et selon la nature de la surface de contact, il existe deux types de commandes robotiques avec contraintes :

- le premier type concerne les surfaces qui présentent un degré d'élasticité fini, c'est-à-dire pouvant subir une déformation temporaire suite à un contact avec l'effecteur. Pour ce genre de cas, il existe une relation mathématique entre la force de contact et le déplacement de l'effecteur. La modélisation à ce niveau intervient par la mise à contribution d'une impédance mécanique généralisée, c'est-à-dire comme l'exploitation d'une combinaison d'un système masse-frottement-amortissement. Une approche de ce type a été développée par Lu et Meng [1] et par Lieu et Golenbert [2]. Les robots concernés par cette approche sont assujettis à une commande d'impédance.
- Le second type est relatif aux surfaces infiniment rigides. Certes, même si une surface infiniment rigide ne peut exister en pratique, nous justifions le sens d'une telle supposition uniquement dans l'optique d'éviter d'endommager, soit la surface

de travail, soit l'effecteur lors de l'exécution d'une tâche. Les robots manipulateurs soumis à ce type de contraintes sont l'objet d'une commande hybride.

Pour ce qui est de la présente recherche, nous allons nous intéresser au second type en faisant remarquer que plusieurs articles sur cette catégorie de commande avec contraintes sont basés sur l'approche de McClamroch et Wang [3]. Ces auteurs ont développé un modèle mathématique pour les dynamiques des manipulateurs de contrainte et deux commandes, dont une linéaire et l'autre non linéaire, basées sur les méthodes du couple calculé et découplé, avec des formulations linéaires et non linéaires du problème de la poursuite des trajectoires. La loi de commande présentée ne prend pas en compte l'option où certains paramètres sont inconnus. Par conséquent, des performances qui dégradent le système peuvent engendrer une instabilité du système.

Mnif et al [4], ont traité le cas d'une commande force/position d'un manipulateur robotique soumis à des contraintes holonomiques basées sur le mode de glissement. L'approche utilisée est en partie similaire à celle de Mc Clamroch et Wang [3] qui consiste à introduire une équation de la contrainte dans le modèle articulaire de façon à obtenir la loi de commande appropriée. Dans leur algorithme de commande, ils ont, en plus du mode de glissement, proposé une estimation des paramètres de façon à garantir la stabilité asymptotique du système global et la convergence des erreurs en force et en position.

De la même manière, Khatib [5] a développé une structure de travail pour l'analyse et la commande des systèmes manipulateurs par rapport au comportement dynamique de la fin de l'effecteur. Il a présenté les principes fondamentaux de la formulation de l'espace opérationnel et a développé une approche générale assurant un découplage pour la commande adaptative de force/position avec une extension pour les robots redondants. Les résultats obtenus sont aussi utilisés dans le développement d'une nouvelle approche

systématique pour traiter les problèmes qui interviennent dans la cinématique et qui sont liés aux singularités.

Slotine et Li [6] ont reformulé l'emploi du retour d'état, pour modifier directement la fonction énergie d'un manipulateur pour la commande force/position. Cette approche, qui est assez performante, assure un découplage général du système en deux dynamiques liées à l'espace de l'outil dont une justifie la dynamique de la position et l'autre pour la dynamique de la force. La convergence globale du système est assurée.

DeSantis [7] a conçu une commande basée sur la méthode du couple précalculé et sur l'orthogonalité des sous-espaces décrivant les positions et les forces admissibles. Le découplage du système en force et en position est réalisé dans le domaine cartésien avec une équation de la contrainte en position et en orientation. Cette commande assure une stabilité globale et s'applique aussi bien pour les surfaces de contacts stationnaires que pour les surfaces mobiles.

Su et Stepanenko [8] ont utilisé la technique "integrator backstepping" pour concevoir une loi de commande adaptative hybride pour les joints des robots manipulateurs. L'adaptation des paramètres a été faite par la méthode directe. Le schéma de commande développé est réalisé dans l'optique d'avoir des calculs simples qui évitent les termes dérivés et les inverses dans les matrices des dynamiques linéarisées dites regresseurs, et les inverses des matrices des inerties. La stabilité asymptotique semi-globale du système est établie au sens de Lyapunov.

Guenther et Hsu [9] ont mis au point la conception d'une commande de suivi adaptatif de joint rigide d'un robot manipulateur dans le cas des paramètres mécaniques et électriques incertains et pris arbitrairement. Une stratégie basée sur la régulation en cascade est présentée. Elle combine une organisation adaptative pour la commande des articulations rigides du robot avec une loi de commande à structure variable. La stabilité

asymptotique globale est assurée et l'exécution avec des résultats très satisfaisants est illustrée par un exemple de simulation sur un robot à deux degrés de liberté.

R. Kelly et R Carelli [20] ont présenté une approche unifiée pour la conception et l'analyse des contrôleurs pour les manipulateurs robotiques. Les contrôleurs concernés gèrent cinq aspects bien précis à savoir : la position, l'impédance, la force, l'hybride force/position et l'hybride impédance /force. Dans la conception de sa loi de commande unifiée, tous les aspects précités s'y trouvent. Le principe de fonctionnement de l'algorithme de commande est celui de faire un choix convenable pour la mise en exécution d'un type d'aspect bien précis tout en annulant les quatre autres. En d'autres termes, si la commande unifiée est dévolue par exemple pour faire un suivi d'impédance de force, alors les expressions de ladite commande concernées par la position, l'impédance, la force, l'hybride force/position et l'hybride impédance/force sont automatiquement mises à 0.

N. Tanaka et M. Fujita [21] ont proposé une commande composée d'une partie adaptative qui annule la dynamique du système et d'une commande auxiliaire de type PID en position et PI en force. Les gains de la commande auxiliaire sont calculés de façon à minimiser la norme  $H_\infty$  de l'effet des perturbations sur le système. L'avantage de l'approche est qu'une solution  $H_\infty$  est proposée sans la résolution d'une équation aux dérivées partielles comme l'exige la méthode classique  $H_\infty$  non-linéaire.

M. de Montigny et P. Sicard [23] ont proposé une stratégie de commande hybride force/position d'une main robotique comportant plusieurs doigts. Chaque doigt est considéré comme un robot. La méthode en elle-même combine deux algorithmes bien spécifiques. Le premier est celui de Slotine et Li [24] pour la commande en position composée d'une anticipation et d'un retour équivalent à un contrôleur proportionnel dérivatif. Le deuxième est celui de Seraji [25] pour la commande en force qui est proportionnel intégral non-linéaire. Le problème du rebondissement se produisant au

moment du contact de l'objet sur l'effecteur a été résolu et une loi d'estimation des paramètres du système commandé procure une certaine robustesse au système en chaîne fermée. La coordination des deux compensateurs (de force et de position) est assurée par un planificateur de tâches doté d'une stratégie d'approche (de l'objet) fortement élaborée. Cependant, la stabilité de l'ensemble du système n'est pas démontrée. Aussi le caractère non coordonné intrinsèque de la commande force/position nécessite un planificateur de tâches complexe.

C. M. Kwan [26] a proposé une méthode de synthèse robuste pour la commande simultanée de la position et de la force de contact d'un robot assujéti à certaines contraintes (de surface). Le système commandé inclut la dynamique du robot et celle du moteur à courant continu produisant le couple moteur. Une loi de commande adaptative est utilisée pour pallier les incertitudes paramétriques du robot et une commande en mode de glissement résout le problème de l'incertitude paramétrique du moteur. La solution proposée est basée sur la méthode de réduction de modèle (du système avec contrainte dans l'espace des joints) de McClamroch [3] et consiste en deux étapes de conception.

- La première étape consiste à faire la synthèse d'un couple moteur idéal (ou fictif) du robot. La loi de commande est une version améliorée de celle de Su et al [27] et consiste en un compensateur avant, une commande de type Proportionnel-Dérivé (PD) en position et une commande de type Proportionnel en force. Une loi d'estimation des paramètres du robot met à jour les paramètres du compensateur avant.
- La seconde étape fait la synthèse de la tension appliquée au moteur afin que le couple réel converge vers le couple idéal de l'étape précédente. Elle est basée sur la méthode de conception par mode de glissement. Cette dernière rend le système en chaîne fermée insensible aux variations des paramètres du moteur. Une étude de

stabilité démontre la convergence asymptotique des erreurs de poursuite en position et en force.

M. Queiroz et al [28] ont proposé une méthode de conception de compensateur contrôlant simultanément la force de contact et la position de l'effecteur d'un bras manipulateur. L'avantage de la méthode est qu'elle ne nécessite pas la mesure de la vitesse et que la conception s'effectue dans l'espace de la tâche où les forces et les positions désirées se définissent aisément. Le modèle dynamique du robot est d'abord réduit en deux dynamiques dans l'espace de la tâche à l'aide de la transformation de Mc Clamroch [3]. La première dynamique sert à faire la synthèse de la loi de commande de la position. Cette dernière consiste en une compensation avant et une commande de type Proportionnel Dérivé (PD). La vitesse n'étant pas mesurable, elle est substituée par la sortie d'un filtre passe-haut ayant la position comme entrée. La deuxième dynamique sert pour le contrôle de la force. La loi de commande comporte un terme non linéaire compensant une partie des non linéarités du système et une action de type intégral pour annuler l'erreur sur la force. Deux lois d'estimation mettent à jour les paramètres dans le compensateur avant et dans la partie non linéaire de la commande de force. Une étude analytique prouve la stabilité semi-globale du système en chaîne fermée.

S. Suguru [30] montre que le système robotique est dissipatif et propose deux types de commande en position. L'un est un PID et l'autre un PD dans lequel les paramètres du vecteur de gravité sont estimés en temps réel. Il montre que le système en Boucle Fermée est passif. Aussi il propose une commande avant (feedforward) avec un terme pour compenser les rebondissements. L'avantage de cette approche est que sa loi de commande est simple et exploite la propriété intrinsèque de passivité du robot.

C. Natale et L. Villani [31] ont mis au point une commande annulant la dynamique du système. Une commande auxiliaire de type PD en force/position dont les paramètres représentant la rigidité de la surface est assignée en temps réel. Cette structure assure que le système est passif en boucle fermée.

De tout ce qui précède, nous remarquons qu'une commande en force/position peut se concevoir respectivement dans les domaines, articulaire, cartésien et de la tâche. De même, la manière d'effectuer le découplage en force/position pour une commande spécifique n'est pas forcément applicable lorsqu'on change la configuration de la commande. Cette remarque est d'autant plus vraie au regard de l'exemple de la méthode de découplage utilisée par McClamroch et Wang [3], qui n'est pas compatible à l'algorithme de commande de Khatib [5] et inversement. Aussi, la conception d'une commande peut se faire de différentes manières. On peut au préalable décider d'éviter d'introduire les termes d'accélération et les inverses des matrices dans l'expression d'une commande. Comme tout aussi on peut décider d'obtenir certaines propriétés difficiles à obtenir en commande.

## **PROBLÉMATIQUE DU SUJET**

En tenant compte de l'évolution remarquable et certaine de la technologie dans le domaine de la robotique et plus spécifiquement en commande, nous axons nos recherches sur la conception de deux lois de commande adaptative en force et en position basées sur la méthode du backstepping et en considérant la technique des systèmes passifs. Les avantages qui peuvent être tirés du backstepping sont, d'une part, de pouvoir interpréter et de gérer la forme du strict-feedback générée selon une forme augmentée et au mieux suivant un système du style linéarisant au sens entrée états ; d'autre part, de fixer d'avance les propriétés de stabilité désirées. La technique des systèmes passifs quant à elle justifiera son avantage dans la mesure où, pour chaque étape réursive du backstepping, la fonction stabilisatrice correspondante qui sera mise en œuvre, devra assurer la convergence asymptotique du système par une erreur passive (ou nulle). Par conséquent, la commande générale du système assurera une erreur passive entre l'entrée et la sortie du système général du backstepping. Le problème que nous voulons résoudre est celui de mettre en place une méthode de conception séquentielle de façon à avoir une flexibilité au niveau de la commande. La flexibilité dont on fait allusion s'explique par le fait de fixer ou de calculer les propriétés de stabilité désirées (qui ne sont pas figées) à la convenance du concepteur. Les lois de commande obtenues peuvent être modifiées ou adaptées suivant les besoins. La méthode du backstepping permet entre autre, moins de restriction par rapport à la méthode de la rétroaction linéarisante dans la mesure où on peut surmonter des difficultés de contrôlabilité due aux singularités. Aussi en considérant en plus des propriétés qui peuvent être fixées à l'avance et la théorie des systèmes passifs dans la conception, nous tendons à mettre en place une ou des lois de commande qui regroupent en leur sein, la plupart des propriétés que possèdent les lois de commande existantes. Les lois de commande ainsi conçues, qui seront testées sur un robot à axes rotatifs ayant un axe prismatique dans le domaine de la tâche, n'ont par conséquent pas encore été exploitées en prenant en compte l'actionneur et la théorie de la passivité.

**Notre problématique s'articulera autour de trois points :**

- **faire la modélisation cinématique et dynamique d'un robot expérimental. Cette modélisation est faite sous toutes ses formes et sous tous ses aspects par rapport à l'architecture telle qu'elle se présente et en tenant compte de nos objectifs d'exploitation ;**
- **générer une trajectoire fiable de façon à mieux apprécier les lois de commande et à minimiser l'erreur de position, de vitesse et d'accélération en régime transitoire et surtout en régime permanent ;**
- **mettre en place une stratégie pouvant aboutir à la réalisation de deux lois de commande non linéaires selon la méthodologie du découplage en force et en position mise en place.**

**Nous tenons à faire remarquer que les deux premiers points ne sont que des préalables à toutes conceptions des lois de commande en robotique. Le gros du travail étant bien sûr concentré au troisième point.**

## **CONTRIBUTION ORIGINALE**

**Notre recherche, qui s'est orientée vers la commande adaptative non linéaire en force et en position avec des contraintes holonomiques, a donné lieu au meilleur de ma connaissance aux contributions originales suivantes :**

- 1- La conception de la première loi de commande adaptative avec la prise en compte de sa loi d'adaptation des paramètres a été une combinaison de la théorie du SFB, des concepts de la passivité et de la loi de commande adaptative conçue par Slotine et Li [16] ;**
- 2- La deuxième loi d'adaptation des paramètres pour la conception de la seconde loi de commande adaptative dans le domaine de la tâche a été réalisée en tenant compte de la technique du backstepping avec le respect et la prise en compte de la théorie des systèmes passifs ;**
- 3- La troisième loi d'adaptation des paramètres pour la conception de la seconde loi de commande adaptative, a été réalisée en tenant compte de toutes les erreurs des deux boucles de rétroaction concernées par la position et la force. Les forces réelle et désirée ont été substituées par des courants. Cela assure une robustesse de la commande adaptative obtenue par rapport à la précédente.**

# **CHAPITRE 1**

## **MODÉLISATION**

### **1.1 Introduction**

Afin de bien maîtriser et de contrôler correctement les articulations d'un robot, il est nécessaire de connaître une bonne partie des concepts de ses mouvements (sans quoi, on ne peut ni prévoir, ni contrôler l'activité de ce dernier). Ces concepts sont basés sur des résultats d'une matrice de transformation homogène pour le cas de la modélisation cinématique et d'un modèle dynamique pour celui de la modélisation dynamique. La modélisation fait appel à des notions mathématiques précises. Une modélisation très exacte et très précise est difficile à réaliser, car la connaissance parfaite d'une architecture matérielle n'est pas accessible facilement. Comme cela a été déjà énoncé précédemment, on distingue deux types de modélisations en robotique : la modélisation cinématique et la modélisation dynamique.

- La modélisation cinématique consiste à déterminer la position, la vitesse et l'accélération à tout instant de l'évolution du robot dans l'espace par rapport à chacune des articulations qui le constituent. Il existe plusieurs outils de modélisation cinématique. Dans le cadre de la présente recherche, nous ne retenons que les quatre principaux pouvant opérer adéquatement la transformation des coordonnées : (1) Les nombres complexes qui sont déconseillés pour les systèmes à trois dimensions ; (2) Les matrices de rotation qui sont très pratiques pour transformer les vecteurs ; (3) Les quaternions qui sont assez efficaces ; (4) Les matrices de transformation homogènes qui sont idéales pour tous les types des systèmes. Le modèle cinématique qui va être mis en place sera l'application du dernier cas cité. Cette méthode a été développée en 1955 par J. Denavit et R. S. Hartenberg pour la modélisation cinématique des mécanismes spatiaux. Elle est utilisée actuellement par la grande

majorité des chercheurs sous l'appellation de méthode Danevit-Hartenberg (DH) [10], pour résoudre les problèmes des chaînes cinématiques.

- La modélisation dynamique quant à elle peut s'interpréter comme une façon de décrire un système physique, sous la forme d'un ensemble de matrices et d'équations algèbro-différentielles. Elle fait appel à des formalismes variés et se présente comme un ensemble des jeux d'équations différentielles non linéaires. Ces équations déterminent les couples et les moments des différentes articulations du robot qui agissent sur ses positions, ses vitesses et ses accélérations. L'ensemble de ces équations qui est entre autre caractérisé par des paramètres du robot, composés essentiellement des masses, des inerties, des longueurs et des centres de masse, est d'usage appelé modèle dynamique. Ce modèle dynamique peut être défini selon la spécificité et suivant certaines conversions, soit dans le domaine articulaire, soit dans le domaine cartésien, soit dans le domaine de la tâche. Parmi les outils de modélisation se distingue respectivement le formalisme de Newton et des équations de Lagrange. C'est le dernier cité qui est le plus familier pour nous et celui qui a été mis en pratique pour la présente étude. Comme préalable à toutes résolutions mathématiques de ce type de modélisation, il est nécessaire, à partir d'un schéma explicatif et caractéristique du robot, de définir pour chaque articulation, des systèmes d'axes et des positions des centres de masse comme cela est montré à la figure 1. C'est à partir de cette figure que nous allons réaliser la modélisation cinématique et dynamique pour la plupart des cas de figures importants. Ce qui est assez intéressant dans les résultats obtenus pour la modélisation dynamique, c'est l'idée qui consiste à faire une transformation du modèle articulaire au modèle dans le domaine de la tâche assortie d'un découplage en force et en position.

Le calcul de l'état d'une chaîne cinématique (positions, vitesses et orientations), en fonction des consignes sous forme d'ordres fournis aux moteurs qui assurent tous les mouvements, consiste à résoudre le problème de cinématique directe. De même,

lorsqu'on applique une commande quelconque à un robot en vue de lui faire suivre une trajectoire désirée, on est en présence de la résolution d'un problème de cinématique inverse. Ainsi, en préliminaire à notre étude concernant le chapitre actuel, nous allons présenter le schéma explicite du robot expérimental à la figure 1. De ce schéma du robot va découler la mise en place du tableau des paramètres et les calculs de la cinématique directe et de la cinématique inverse. Des informations nécessaires et précises sur le robot sont données dans le tableau I concernant l'enveloppe de travail pour chaque articulation, et dans le tableau II pour les paramètres articulaires qui permettent le calcul des matrices de transformation homogène. C'est en appliquant la théorie des paramètres de Danevit-Hartenberg (DH) [10] et la théorie de Lagrange que nous pouvons mettre en place toutes les structures cinématiques. Les modèles dynamiques du robot dans le domaine articulaire pour quatre axes ont été réalisés. La représentation de ces modèles dans le domaine cartésien se fera aisément par des formules qui existent déjà. La transformation du modèle cartésien au domaine dans l'espace de la tâche, la méthodologie de découplage du système dynamique en force et en position, suivi d'une conclusion mettront un terme à ce chapitre.

## **1.2 Schéma du robot expérimental**

Le robot expérimental représenté par la figure 1 comme toute structure de cette nature est définie comme un système mécanique polyarticulé pouvant, dans certaines configurations, avoir une architecture redondante. La redondance intervient d'une part, lorsque le nombre d'équations ( $v$ ), du système généré par la matrice de transformation dont les composantes principales sont la cinématique directe et la matrice de rotation, est inférieur aux nombres d'inconnues ( $w$ ). D'autre part, elle est nécessaire lorsqu'on veut accroître l'accessibilité d'un robot dans un environnement encombré d'obstacles. Le robot concerné par notre recherche est caractérisé par un axe prismatique (axe 1),  $n$  axes rotatifs pouvant concerner l'aspect redondant lorsque  $n$  est supérieur à trois ( $n > 3$ ), et deux orientations (axes  $n+1$  et  $n+2$ ) rotatifs caractérisant le tangage et le roulis situés à

l'extrémité pour l'effecteur du robot. Ce robot, de par sa polyvalence, peut être exploité suivant toutes ses articulations (axes rotatifs et prismatique) ou alors uniquement suivant les axes rotatifs (cas ne faisant pas partie de notre étude).

Pour l'application des résultats de nos recherches, nous nous limiterons à l'architecture du robot expérimental pour quatre axes. Par conséquent, nous n'attacherons pas une très grande importance à l'aspect redondant parce que l'opportunité de ce dernier cas ne s'impose pas.

Nous présentons ci-dessous, le robot expérimental suivant sa forme générale.

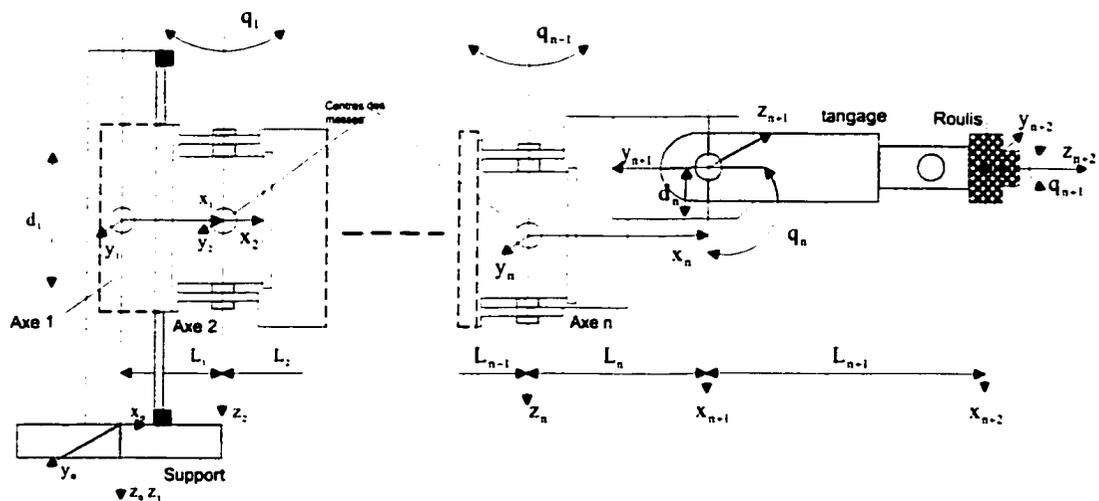


Figure 1 Robot expérimental à n axes

### 1.3 Enveloppe de travail articulaire du robot

Comme tout système de cette nature, Le robot expérimental de la figure 1 exécute des tâches dans une configuration bien précise. Cela justifie nécessairement la mise en place de l'enveloppe de travail pour chaque articulation. L'enveloppe de travail pour chaque articulation nous ressort les limites des manœuvres dimensionnelles de chaque axe. Dans cette optique, nous prenons le soin de faire apparaître les limites de ses mouvements.

Ces limites sont répertoriées dans le tableau I pour l'ensemble de tous les cas de figure des articulations du robot.

Tableau I

Enveloppe de travail pour chaque articulation du robot

Articulations	Espace de travail
1 (prismatique)	Entre 0 mm et 1000 mm
2 (rotatif)	Entre $-90^{\circ}$ et $+90^{\circ}$
3 (rotatif)	Entre $-90^{\circ}$ et $+90^{\circ}$
.....	.....
.....	.....
n (rotatif)	Entre $-90^{\circ}$ et $+90^{\circ}$
n + 1 (rotatif)	Entre $-90^{\circ}$ et $+90^{\circ}$
n + 2 (rotatif)	Entre $-90^{\circ}$ et $+90^{\circ}$

#### 1.4 Paramètres articulaires du robot

Les paramètres articulaires du robot sont donnés dans le tableau II pour sa forme générale et dans les tableaux III pour le cas spécifique concernant quatre. Ces paramètres sont obtenus à partir du modèle de Danevit-Hartenberg (DH) [10] : d'abord pour le robot correspondant à n+2 axes, puis comme nous l'avons mentionné ci-dessus pour l'architecture concernée par notre recherche qui est celle de quatre axes. Nous présentons ci-dessous, le tableau des paramètres articulaires pour n+2 axes.

Tableau II

Paramètres articulaires du robot expérimental à n+2 axes

Matrices	Articulations	Variables	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$q_i$
${}^0_1T$	1	$d_1$	0	0	$d_1$	0
${}^1_2T$	2	$q_1$	0	$L_1$	0	$q_1$
${}^2_3T$	3	$q_2$	0	$L_2$	0	$q_2$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
${}^{n-1}_nT$	n	$q_{n-1}$	0	$L_{n-1}$	0	$q_{n-1}$
${}^n_{n+1}T$	n+1	$q_n$	$90^0$	$L_n$	$d_n$	$q_n$
${}^{n+1}_{n+2}T$	n+2	$q_{n+1}$	$90^0$	0	$L_{n+1}$	$q_{n+1}$

Nous allons définir ci-dessous, les éléments figurant dans les quatre dernières colonnes de la première ligne du tableau II.

$\alpha_{i-1}$  est l'angle entre  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  mesuré autour de  $X_{i-1}$  ;

$a_{i-1}$  est la distance entre  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  mesuré le long de  $X_{i-1}$  ;

$d_i$  est la distance entre  $X_{i-1}$  et  $X_i$  mesuré le long de  $Z_i$  ;

$q_i$  est l'angle entre  $X_{i-1}$  et  $X_i$  mesuré autour de  $Z_i$ .

A partir du tableau II, nous pouvons, pour chaque nombre d'axes précis, adapter un tableau correspondant comme montré ci-dessous pour l'exemple de quatre axes.

Tableau III

## Paramètres articulaires du robot expérimental à quatre axes

Matrices	Articulations	Variables	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$q_i$
${}^0_1T$	1	$d_1$	0	0	$d_1$	0
${}^1_2T$	2	$q_1$	0	$L_1$	0	$q_1$
${}^2_3T$	3	$q_2$	$90^0$	$L_2$	$d_2$	$q_2$
${}^3_4T$	4	$q_3$	$90^0$	0	$L_3$	$q_3$

### 1.5 Matrice globale de transformation homogène

Une matrice de transformation homogène notée  ${}_{i-1}^i T$ , définit les relations géométriques qui existent entre deux systèmes de coordonnées consécutifs  $O_i$  et  $O_{i-1}$ , en fonction des variables articulaires notées  $q_i$  lorsqu'il s'agit d'un axe de rotation et  $d_i$  pour le cas d'un axe de translation. En règle générale, lorsqu'on applique la théorie de la matrice de transformation homogène à un robot, l'objectif principal est celui de trouver la transformation de la position de l'organe terminal d'un robot à sa base 0. C'est pour cela que la lecture de la matrice de transformation homogène se fait toujours en sens inverse c'est-à-dire de  $i-1$  à  $i$ .

A partir des configurations des tableaux II et III, faisons ressortir les matrices de transformation homogènes par l'application de la théorie du paramétrage de Denavit-Hartenberg [10] résumée en annexe (A.1.1) et par la résolution de la matrice de transformation du quatrième axe par rapport à sa base comme le spécifie l'annexe (A.1.2). Comme on peut le remarquer à la figure 1, le robot expérimental peut se décomposer en trois parties distinctes à savoir ; la partie de  $n$  à  $n-1$  axes, ensuite celle de

$n+1$  à  $n$  axes et enfin celle de  $n+2$  à  $n+1$  axes. Les matrices de transformation ci-dessous représentent respectivement les différentes structures précitées.

$${}_{n-1}^n T = \begin{bmatrix} C_{n-1} & -S_{n-1} & 0 & L_{n-1} \\ S_{n-1} & C_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$${}_{n+1}^n T = \begin{bmatrix} C_n & -S_n & 0 & L_n \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_n & C_n & 0 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$${}_{n+2}^{n+1} T = \begin{bmatrix} C_{n+1} & -S_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_{n+1} \\ S_{n+1} & C_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Pour les prochaines étapes de notre travail, nous allons mettre en place toute la logique mathématique pouvant ressortir la matrice de transformation générale de l'extrémité du robot donnée par  $n+2$  axes à sa base représentée par 0.

En conformité avec les matrices spécifiques trouvées en (1.1), (1.2) et (1.3), pour le cas pratique du robot expérimental à quatre axes, nous avons les résultats ci-dessous en appliquant la forme générale suivante :

$${}^0_n T = {}^0_1 T \times {}^1_2 T \times \dots \times {}^{n-1}_n T \quad (1.4)$$

- Les résultats pour quatre axes sont exprimés comme suit :

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 + S_1S_3 & -C_1C_2S_3 + S_1C_3 & C_1S_2 & C_1S_2L_3 + C_1L_2 + L_1 \\ S_1C_2C_3 - C_1S_3 & -S_1C_2S_3 - C_1C_3 & S_1S_2 & S_1S_2L_3 + S_1L_2 \\ S_2C_3 & -S_2S_3 & -C_2 & -C_2L_3 + d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

- Concernant le cas de  $n+2$  axes, on peut se baser par inspection sur (1.5) pour faire ressortir l'expression générale de la matrice de rotation. Ainsi, en posant respectivement les relations ci-dessous qui découlent de (1.5), on obtient ce qui suit :

$$x_1 = L_1 + L_2C_1 + L_3C_{12} + \dots + L_nC_{12\dots n-1} + L_{n+1}C_{123\dots n} \quad (1.6)$$

$$y_1 = L_2S_1 + L_3S_{12} + \dots + L_nS_{12\dots n-1} + L_{n+1}S_{123\dots n} \quad (1.7)$$

$$\Phi = q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} \quad (1.8)$$

De (1.6), (1.7) et (1.8) nous pouvons déduire l'expression générale  ${}^0_{n+2}T$  comme suit :

$${}^0_{n+2}T = \begin{bmatrix} C_\Phi C_n C_{n+1} + S_\Phi S_{n+1} & -C_\Phi C_n S_{n+1} + S_\Phi C_{n+1} & C_\Phi S_n & C_\Phi S_n L_{n+1} + x_1 \\ S_\Phi C_n C_{n+1} - C_\Phi S_{n+1} & -S_\Phi C_n S_{n+1} - C_\Phi C_{n+1} & S_\Phi S_n & S_\Phi S_n L_{n+1} + y_1 \\ S_n C_{n+1} & -S_n S_{n+1} & -C_n & -C_n L_{n+1} + d_1 + d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

avec  $n \geq 2$

### 1.5.1 Cinématique directe du robot

Comme expliqué au sous chapitre de l'annexe 1.1, les matrices de transformation homogènes sont composées essentiellement d'une sous matrice de rotation ( $3 \times 3$ ) et d'un vecteur de translation ( $3 \times 1$ ). La cinématique directe est définie par ce vecteur de translation ( $3 \times 1$ ) et aussi par la matrice de rotation.

Ainsi, à partir des résultats de la matrice de transformation homogène donnée par (1.9), nous pouvons ressortir le vecteur qui concerne la cinématique directe pour le robot à n+2 axes. Il est donné par ce qui suit :

$$H_{n+2}(q) = \begin{bmatrix} C_\phi S_n L_{n+1} + x_1 \\ S_\phi S_n L_{n+1} + y_1 \\ -C_n L_{n+1} + d_1 + d_n \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

La cinématique directe, pour le cas spécifique de quatre axes, peut être calculée soit en appliquant les résultats exprimés par le vecteur (1.10), soit en lisant directement les résultats de la partie vectorielle contenue dans la matrice de transformation homogène donnée par (1.5). Pour ce cas comme pour l'autre, on arrive aux mêmes résultats donnés par l'expression ci-dessous en sachant que  $n = 2$  si on considère (1.10).

$$H_4(q) = \begin{bmatrix} C_1 S_2 L_3 + C_1 L_2 + L_1 \\ S_1 S_2 L_3 + S_1 L_2 \\ -C_2 L_3 + d_1 + d_2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

### 1.5.1.1 Position du poignet pour quatre axes

Les positions d'un robot dans un plan sont données par les dénominations  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$ . Elles résultent du vecteur de la cinématique directe (1.11) du robot comme ci-dessous montré.

$$p_x = C_1(S_2 L_3 + L_2) + L_1 \quad (1.12)$$

$$p_y = S_1(S_2 L_3 + L_2) \quad (1.13)$$

$$p_z = -C_2 L_3 + d_1 + d_2 \quad (1.14)$$

### 1.5.1.2 Orientation du poignet pour quatre axes

Les orientations d'un robot sont déterminées en faisant le rapport des angles entre la matrice de rotation du robot, figurant dans la matrice de transformation homogène et une matrice de rotation des angles d'Euler appropriée. Cette matrice est choisie par inspection des matrices de rotation figurant dans la référence de Craig [12]. Ainsi, nous avons ci-dessous, la matrice de rotation de Craig [12] de convention  $R_{z\alpha z}(\gamma, \psi, \varphi)$  compatible au système en étude.

$$R_{z\alpha z}(\gamma, \psi, \varphi) = \begin{bmatrix} -S_\varphi C_\psi S_\gamma + C_\varphi C_\gamma & -S_\varphi C_\psi C_\gamma - C_\varphi S_\gamma & S_\varphi S_\psi \\ C_\varphi C_\psi S_\gamma + S_\varphi C_\gamma & C_\varphi C_\psi C_\gamma - S_\varphi S_\gamma & -C_\varphi S_\psi \\ S_\psi S_\gamma & S_\psi C_\gamma & C_\psi \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

De cette matrice de Craig qui peut être interprétée comme la matrice de rotation d'Euler donné par (1.15), on peut déduire suivant la forme trigonométrique les angles d'Euler qui caractérisent l'orientation du poignet, en se basant par rapport à la sous matrice de rotation du robot incluse dans la matrice de transformation homogène donnée par (1.5).

Nous avons les différentes relations trigonométriques obtenues par inspection des rapports entre les matrices de rotations concernées par les résolutions comme montré ci-dessous :

$$C_\psi = -C_2 \quad (1.15a)$$

Suivant [17], (1.15a) est équivalent à :

$$-C_{(\pi-\psi)} = -C_2 \quad (1.15b)$$

d'où

$$\psi = \pi - q_2 \quad (1.15c)$$

De même :

$$S_\psi S_\gamma = S_2 C_3 \quad (1.16a)$$

Suivant [17], (1.16a) est équivalent à :

$$S_\psi C_{\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)} = S_2 C_3 \quad (1.16b)$$

d'où

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + q_3 \quad (1.16c)$$

De même :

$$-C_\varphi S_\psi = S_1 S_2 \quad (1.17a)$$

Suivant [17], (1.17a) est équivalent à :

$$-S_{\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} S_\psi = S_1 S_2 \quad (1.17b)$$

d'où

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + q_1 \quad (1.17c)$$

### 1.5.1.3 Vitesses linéaires et angulaires du poignet

Les vitesses linéaires et angulaires du robot par rapport au repère  $\{0\}$  issues respectivement de l'annexe (A.2.16), (A.2.17), (A.2.18), (A.2.23), (A.2.24) et (A.2.25), peuvent s'écrire sous des formes matricielles comme montré ci-dessous :

- Matrice des vitesses linéaires

$${}^0 v_4 = \begin{bmatrix} -S_1(S_2 L_3 + L_2)\dot{q}_1 + C_1 C_2 L_3 \dot{q}_2 \\ C_1(S_2 L_3 + L_2)\dot{q}_1 + S_1 C_2 L_3 \dot{q}_2 \\ S_2 L_3 \dot{q}_2 + \dot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (1.18a)$$

- Matrice des vitesses angulaires

$${}^0\omega_3 = \begin{bmatrix} S_1\dot{q}_2 + C_1S_2\dot{q}_3 \\ -C_1\dot{q}_2 + S_1S_2\dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 - C_2\dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (1.18b)$$

### 1.5.1.4 Accélérations linéaires et angulaires du poignet

Les accélérations linéaires et angulaires du robot par rapport au repère  $\{0\}$  sont obtenues en calculant respectivement les expressions des vitesses donnée par (1.18a) et (1.18b) rapport au temps. Ainsi, nous avons ce qui suit :

- Accélérations linéaires

$$\dot{v}_x = -C_1(S_2L_3 + L_2)\dot{q}_1^2 - 2S_1C_2L_3\dot{q}_1\dot{q}_2 - S_1(S_2L_3 + L_2)\ddot{q}_1 - C_1S_2L_3\dot{q}_2^2 + C_1C_2L_3\ddot{q}_2 \quad (1.19a)$$

$$\dot{v}_y = -S_1(S_2L_3 + L_2)\dot{q}_1^2 + 2C_1C_2L_3\dot{q}_1\dot{q}_2 + C_1(S_2L_3 + L_2)\ddot{q}_1 - S_1S_2L_3\dot{q}_2^2 + S_1C_2L_3\ddot{q}_2 \quad (1.19b)$$

$$\dot{v}_z = C_2L_3\dot{q}_2^2 + S_2L_3\ddot{q}_2 + \ddot{d}_1 \quad (1.19d)$$

- Accélérations angulaires

$$\dot{\omega}_x = C_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + S_1\ddot{q}_2 - S_1S_2\dot{q}_1\dot{q}_3 + C_1C_2\dot{q}_2\dot{q}_3 + C_1S_2\ddot{q}_3 \quad (1.20a)$$

$$\dot{\omega}_y = S_1\dot{q}_1\dot{q}_2 - C_1\ddot{q}_2 + C_1S_2\dot{q}_1\dot{q}_3 + S_1C_2\dot{q}_2\dot{q}_3 + S_1S_2\ddot{q}_3 \quad (1.20b)$$

$$\dot{\omega}_z = \ddot{q}_1 + S_2\dot{q}_2\dot{q}_3 - C_2\ddot{q}_3 \quad (1.20c)$$

### 1.5.2 Matrices jacobienne et sa dérivée

Les deux matrices des vitesses linéaire et angulaire données par (1.18a) et (1.18b) peuvent se mettre sous une même organisation matricielle comme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -S_1(S_2L_3 + L_2) & C_1C_2L_3 & 0 \\ 0 & C_1(S_2L_3 + L_2) & S_1C_2L_3 & 0 \\ 1 & 0 & S_2L_3 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & C_1S_2 \\ 0 & 0 & -C_1 & S_1S_2 \\ 0 & 1 & 0 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Du système d'équation matricielle (1.21) qui réunit les deux vitesses, nous avons ci-dessous sa forme générale :

$$v = J(q)\dot{q} \quad (1.22)$$

En considérant (1.21) et (1.22), nous pouvons déduire par inspection, la matrice jacobienne par rapport au repère  $\{0\}$ .

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -S_1(S_2L_3 + L_2) & C_1C_2L_3 & 0 \\ 0 & C_1(S_2L_3 + L_2) & S_1C_2L_3 & 0 \\ 1 & 0 & S_2L_3 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & C_1S_2 \\ 0 & 0 & -C_1 & S_1S_2 \\ 0 & 1 & 0 & -C_2 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Par contre, la dérivée de la matrice jacobienne ci-dessous s'obtient en calculant individuellement la dérivée des éléments de (1.23) par rapport au temps comme nous le montre les résultats ci-dessous :

$$j = \begin{bmatrix} 0 & -C_1(S_2L_3 + L_2)\dot{q}_1 - S_1C_2L_3\dot{q}_2 & -S_1C_2L_3\dot{q}_1 - C_1S_2L_3\dot{q}_2 & 0 \\ 0 & -S_1(S_2L_3 + L_2)\dot{q}_1 + C_1C_2L_3\dot{q}_2 & C_1C_2L_3\dot{q}_1 - S_1S_2L_3\dot{q}_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2L_3\dot{q}_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1\dot{q}_1 & -S_1S_2\dot{q}_1 + C_1C_2\dot{q}_2 \\ 0 & 0 & S_1\dot{q}_1 & C_1S_2\dot{q}_1 + S_1C_2\dot{q}_2 \\ 0 & 0 & 0 & S_2\dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

### 1.5.3 Pseudo-inverse de la matrice jacobienne

La pseudo-inverse, appelée aussi inverse généralisée de la matrice jacobienne, nous permet de calculer l'inverse de la matrice jacobienne dans le cas spécifique où la matrice n'est pas carrée. En considérant une matrice non carrée  $A^{m \times n}$ , la pseudo-inverse représentée par  $A^+$  est déterminée par les différents choix qui suivent [11] :

$$A^+ = \begin{cases} A^T[AA^T]^{-1} & \text{si } m \leq n \\ A^{-1} & \text{si } m = n \\ [A^TA]^{-1}A^T & \text{si } m \geq n \end{cases} \quad (1.25)$$

où  $m$  est le nombre de lignes et  $n$  le nombre de colonnes de la matrice  $A$ .

Pour le cas concerné par le robot expérimental, nous avons  $m \geq n$ , alors, en considérant (1.25), nous avons l'expression de la pseudo-inverse de la matrice jacobienne comme suit :

$$J^+ = (J^T J)^{-1} J^T \quad (1.26a)$$

Après les calculs symboliques nous avons ci-dessous, l'expression finale de la matrice de la pseudo-inverse.

$$J^+ = (J^T J)^{-1} J^T = \begin{bmatrix} J_{11}^+ & J_{12}^+ & 1 & J_{14}^+ & J_{15}^+ & 0 \\ J_{21}^+ & J_{22}^+ & 0 & J_{24}^+ & J_{25}^+ & J_{26}^+ \\ J_{31}^+ & J_{32}^+ & 0 & J_{34}^+ & J_{35}^+ & 0 \\ J_{41}^+ & J_{42}^+ & 0 & J_{44}^+ & J_{45}^+ & J_{46}^+ \end{bmatrix} \quad (1.26b)$$

Les éléments de cette matrice se trouvent à l'annexe (A.2.35) de la présente thèse.

#### 1.5.4 Cinématique inverse du robot

Tout en sachant que l'acquisition des données peut se faire dans le domaine opérationnel comme ont si bien démontré les sous-sections 1.5.1.1 et 1.5.1.2, la cinématique inverse nous permet cependant de déterminer les angles des différentes articulations du robot. Nous effectuons par conséquent, des opérations inverses, qui consistent à résoudre le système d'équations donné par la cinématique directe. Si le nombre des inconnues ( $w$ ) est supérieur à trois et inférieur à six ( $3 < w < 6$ ), on a recours aux orientations données par la matrice de rotation du robot qui est inéluctablement comparée à une matrice appropriée tirée de la référence de Craig [12]. Par contre, si le nombre des inconnues ( $w$ ) est supérieur à six ( $w > 6$ ), on se retrouve dans le cas redondant pour lequel notre étude n'est pas concernée. Toutefois, si nous nous retrouvons en face d'une structure redondante, nous voyons dans quelle mesure résoudre ce cas spécifique de façon que la commande envisagée s'adapte à ladite structure.

Considérons maintenant le système d'équations ci-dessous qui dérive de la cinématique directe :

$$\begin{cases} p_x = C_1(S_2L_3 + L_2) + L_1 \\ p_y = S_1(S_2L_3 + L_2) \\ p_z = -C_2L_3 + d_1 + d_2 \end{cases} \quad (1.27)$$

Au vu du système donné par (1.27), nous remarquons que le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnue ( $d_1$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ ) qui lui même est inférieur à six. Ainsi, la résolution du système d'équations (1.27), suivant la sous-section 2.4 de l'annexe 2 qui doit absolument tenir compte de la matrice de rotation, nous permet d'obtenir les angles des différentes articulations du robot expérimental. Ces angles sont exprimés comme montré ci-dessous :

$$q_1 = a \tan 2(p_y, p_x - L_1) ; \quad (1.28a)$$

$$q_2 = a \sin \left( \frac{C_1 p_x + S_1 p_y - L_1 C_1 - L_2}{L_3} \right) ; \quad (1.28b)$$

$$q_3 = \gamma - \frac{\pi}{2} \quad (1.28c)$$

$$d_1 = p_z + C_2 L_3 \quad (1.28d)$$

Avec  $d_2$  qui est négligeable. Les résultats obtenus ci-dessus pour les différentes positions du robot mettent fin à l'étude sur la modélisation cinématique. Nous allons maintenant aborder dans le sous-chapitre ci-dessous l'étude de la modélisation dynamique.

## 1.6 Équation de Lagrange dans le domaine articulaire

Pour les mécanismes robotiques, les équations du mouvement peuvent être obtenues en utilisant le formalisme de Lagrange ou d'autres méthodes. Le formalisme des équations de Lagrange va nous permettre de déterminer la structure générale du modèle dynamique du robot caractérisé par des couples pour le cas des articulations rotatives, et par des forces articulations prismatiques pour le cas cartésien. Ces équations du mouvement sont définies par le Lagrangien  $L(q, \dot{q})$  qui est la différence explicite de l'énergie cinétique  $T$  et de l'énergie potentielle  $U$ . Alors, nous allons définir les équations de Lagrange [12] comme prévue dans le domaine articulaire. Les conversions des matrices dans les domaines cartésiens et de la tâche interviendront par la suite. Le lagrangien  $L$  est donné par la forme suivante :

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \quad (1.29)$$

Les équations de Lagrange du mouvement sans contraintes sont données par l'expression ci-dessous :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (1.30)$$

où  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $q_i$  est la position de la  $i$ ème coordonnée généralisée du système, et  $\tau_i$  est la force de la  $i$ ème coordonnée généralisée du système.

L'énergie cinétique d'un système mécanique robotique, sous une forme quadratique est représentée comme suit :

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (1.31)$$

où  $M(q)$  est la matrice des masses et d'inerties du système.

En considérant (1.31), le Lagrangien (1.29) peut être reformulé de la façon suivante :

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - U(q) \quad (1.32)$$

L'application des différentes formules ci-dessus aboutit à la mise en place des expressions qui concernent les couples comme nous allons le monter par la suite.

### 1.6.1 Couples appliqués

En principe, quelle que soit sa configuration, il y a autant de forces que d'articulations sur un système robotique. Ces couples s'exercent sur les différentes articulations du robot, par l'intermédiaire des transmissions pilotées par les moteurs électriques. Suivant les résultats de la section 3.7.1 de l'annexe 3, nous avons les résultats suivants :

-Articulation 1

$$\tau_1 = p_1 \ddot{d}_1 - p_4 S_2 \ddot{q}_2 - p_4 C_2 \dot{q}_2^2 - p_{12} g \quad (1.33a)$$

-Articulation 2

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & \begin{pmatrix} p_2 + 2p_{14}S_2 + 2p_{22}S_2 - p_3C_2^2 - 2p_{16}C_2^2 \\ -2p_{17}S_2 - p_{18}C_2^2 - p_{20}C_2^2 + p_7S_2^2 \\ +p_8C_2^2 + p_{10}S_3^2S_2^2 + p_9C_3^2S_2^2 + p_{11}C_2^2 \end{pmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{pmatrix} p_9S_3C_3S_2 - \\ p_{10}S_3C_3S_2 \end{pmatrix} \ddot{q}_2 - p_{11}C_2\ddot{q}_3 + \\
& \left[ \begin{pmatrix} p_{14}C_2 + p_3S_2C_2 - p_{17}C_2 + p_{22}C_2 + p_{20}S_2C_2 + \\ 2p_{16}S_2C_2 - p_8C_2S_2 + p_{18}C_2S_2 + p_{10}S_3^2C_2S_2 \\ +p_7S_2C_2 + p_9C_3^2S_2C_2 - p_{11}S_2C_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2 + 2 \begin{pmatrix} p_{10}S_2^2S_3C_3 - \\ p_9C_3S_3S_2^2 \end{pmatrix} \dot{q}_3 \right] \dot{q}_1 + \\
& (p_9S_3C_3C_2 - p_{10}C_2S_3C_3)\dot{q}_2^2 + [p_{11}S_2 + p_9(C_3^2S_2 - S_3^2S_2) + p_{10}(S_3^2S_2 - C_3^2S_2)]\dot{q}_3\dot{q}_2 - \\
& p_5gS_1S_2 + p_{13}gS_1 + p_{21}gS_1S_2 + p_6gS_1S_2 + p_{15}gS_1 \quad (1.33b)
\end{aligned}$$

### -Articulation 3

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & -p_4S_2\ddot{q}_1 + (p_9S_3C_3S_2 - p_{10}S_3C_3S_2)\ddot{q}_1 + (p_{19} + p_9S_3^2 + p_{10}C_3^2)\ddot{q}_2 + \\
& [(p_9S_3C_3C_2 - p_{10}C_2S_3C_3)\dot{q}_2 + (p_9(C_3^2S_2 - S_3^2S_2) + p_{10}(S_3^2S_2 - C_3^2S_2))\dot{q}_3]\dot{q}_1 + \\
& 2(p_9S_3C_3 - p_{10}S_3C_3)\dot{q}_3\dot{q}_2 - \begin{pmatrix} p_{14}C_2 + p_{13}C_2 + p_3C_2S_2 + 2p_{16}C_2S_2 - p_{17}C_2 \\ +p_{18}C_2S_2 + p_{20}C_2S_2 + p_7C_2S_2 - p_8C_2S_2 \\ +p_{10}S_3^2S_2C_2 + p_9C_3^2S_2C_2 - p_{11}S_2C_2 \end{pmatrix} \dot{q}_1^2 + \\
& [(p_9S_3C_3C_2 - p_{10}C_2S_3C_3)\dot{q}_2 + p_{11}S_2\dot{q}_3]\dot{q}_1 + p_5gC_1C_2 - p_{21}gC_1C_2 - p_6gC_1C_2 \quad (1.33c)
\end{aligned}$$

### -Articulation 4

$$\begin{aligned}
\tau_4 = & -p_{11}C_2\ddot{q}_1 + p_{11}\ddot{q}_3 + p_{11}S_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - (p_{10}C_3S_2^2S_3 - p_9C_3S_2^2S_3)\dot{q}_1^2 - \\
& [p_{10}(-C_3^2S_2 + S_3^2S_2) + p_9(C_3^2S_2 - S_3^2S_2)]\dot{q}_1\dot{q}_2 - (-p_{10}S_3C_3 + p_9C_3S_3)\dot{q}_2^2 \quad (1.33d)
\end{aligned}$$

## 1.7 Équation dynamique du robot dans le domaine articulaire

L'équation dynamique d'un robot pour n degrés de liberté dans le domaine articulaire peut s'écrire sous les formes données ci-dessous, avec au préalable une signification précise de ses éléments.

$q \in \mathcal{R}^n$  signifie le vecteur des déplacements généralisés.

Si  $q \in \mathcal{R}^1$   $\mathcal{R}^n$  est dérivable, alors  $\dot{q}$  signifie cette dérivée dans le temps.

$q \in \mathcal{R}^n$  est un vecteur colonne de telle sorte que son transposé  $q^T$  est un vecteur rang.

$M : q \in \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$  est une matrice des inerties, symétrique et définie positive.

$C : q \in \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^1$  est une matrice des coefficients de coriolis et centrifuge.

$G \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des termes de gravité.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau + f \quad (1.34)$$

où  $\tau$  et  $f \in \mathcal{R}^n$  sont respectivement les vecteurs des couples d'entrée généralisés et des forces de contrainte dans les coordonnées du robot.

Le vecteur des couples d'entrées généralisés des articulations produit par les actionneurs est donné par la relation suivante :

$$\tau = K_r I \quad (1.35)$$

où  $I \in \mathcal{R}^n$  signifie le vecteur du courant appliqué aux actionneurs. Suivant [9], nous avons une nouvelle forme de l'équation dynamique donnée ci-dessous, qui s'obtient en substituant (1.35) dans (1.34), puis en ajoutant l'expression de l'équation de l'actionneur comme défini ci-dessous :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_r I + f \\ L\dot{I} + RI + K_m \dot{q} = v \end{cases} \quad (1.36)$$

L'actionneur exprimé en (1.36) est une machine à courant continu à excitation constante. Par conséquent  $L$ ,  $R$ ,  $K_m$  et  $K_r \in \mathcal{R}^{n \times n}$  sont des matrices diagonales définies positives qui représentent respectivement, l'inductance de l'actionneur, la résistance de l'actionneur, le flux d'excitation constant et le coefficient constant du couple.  $v \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur du voltage d'armature qui est l'entrée de sous-système.

Pour la matrice  $M(q)$  des inerties, nous rappelons toutefois les trois propriétés suivantes [12] :

- 1<sup>er</sup>  $M(q)$  est symétrique ;
- 2<sup>eme</sup>  $M(q)$  est définie positive et bornée ;
- 3<sup>eme</sup>  $M^{-1}(q)$  existe, et est définie positive et bornée.

Ces trois propriétés revêtent une importance capitale pour la conception de la plupart des lois de commande robotiques.

### 1.7.1 Système sous forme matricielle

L'équation (1.34), étant valide, suivant l'annexe (A.3.25a), (A.3.25b), (A.3.25c) et (A.3.25d) nous avons le modèle dynamique suivant :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & 0 \\ 0 & M_{24} & 0 & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ 0 & C_{42} & -C_{34} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Les éléments de ces matrices obtenus du sous-chapitre 1.6.1, se trouvent à de l'annexe 3.8 de la présente thèse.

- Au vu des éléments de la matrice  $M$ , contenus dans (1.37), on voit bien qu'elle est symétrique puisque  $M^T = M$  ;
- En effectuant l'opération suivante  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) = \mathbb{N}$ , avec  $\mathbb{N}$  qui est anti-symétrique. On vérifie aisément que  $\alpha^T \mathbb{N} \alpha = 0$  (Compte tenu de la lourdeur des expressions, nous avons jugé utile de ne pas les représenter dans ce document) ;

- De même, le calcul de  $M^{-1}(q)$  est possible malgré la non-représentation des expressions qui sont aussi lourdes.

Les trois propriétés de la matrice  $M$  sont bien respectées conformément à [12].

## 1.8 Équation dynamique du robot dans le domaine cartésien

L'équation dynamique du robot dans l'espace cartésien peut être exprimée comme suit :

$$M_x(q)\ddot{x} + C_x(q, \dot{q})\dot{x} + G_x(x) = F_x \quad (1.38)$$

où  $F_x \in \mathcal{R}^n$  signifie le vecteur des forces externes dans le domaine cartésien.

Les matrices  $M_x$  et  $C_x$  et le vecteur  $G_x$  sont des matrices similaires de celles du domaine articulaire. Elles sont déduites de  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  et  $G(q)$  de la façon suivante :

$$M_x(q) = J^{+T}(q)M(q)J^+(q) \quad (1.39)$$

$$C_x(q) = J^{+T}(q)C(q, \dot{q})J^+(q) - M_x(q)\dot{J}(q)J^+ \quad (1.40)$$

$$G_x(q) = J^{+T}(q)G(q) \quad (1.41)$$

## 1.9 Découplage du système

On parle du découplage pour un système spécifique, lorsqu'on estime que le fonctionnement de ce dernier doit se faire au moins en deux, si ce n'est en plusieurs sous-systèmes indépendants. En d'autres termes, un système est dit découplé s'il se présente comme un ensemble de  $m$  systèmes mono ou multi entrées et mono ou multi sorties indépendantes. Les entrées du sous-système  $i$  ne doivent pas affecter les sorties du sous système  $j$  et réciproquement. Dans le cadre de notre conception, le découplage concerné se décomposera en deux sous-systèmes concernés pour la boucle de position et

pour celle de la force. Sa raison d'être se justifiera pour les deux raisons principales suivantes :

- 1- une partie de la dynamique du système devra être utilisée pour la commande de position, de façon à assurer la convergence des variables des positions des vitesses et des accélérations, réelles vers celles désirées ;
- 2- une autre partie servira à annuler toute la dynamique de la boucle de la force afin d'imposer une expression de la loi de commande pouvant assurer la convergence de la force réelle vers la force désirée.

Le découplage tel que nous l'envisageons se fera exclusivement dans le domaine de la tâche, en utilisant la matrice de rotation développée suivant la logique adaptée par Khatib [5] ou d'Asada et Slotine [15].

### **1.9.1 Matrice de rotation $R_0$ de découplage**

Pour exécuter une tâche sur une surface de contraintes avec un découplage, il est nécessaire de définir une structure conforme de gestion. Cette dernière sera matérialisée par une matrice de rotation  $R_0$  de dimension  $(6 \times 6)$ . L'idée fondamentale est celle d'adapter cette matrice de rotation qui est composée de deux sous matrices diamétralement opposées et de même rang. La première sous matrice  $R_1$  agira pour les forces associées aux positions, tandis que la seconde sous matrice  $R_2$  agira sur les moments associés aux orientations.

Si on suppose  $fd_1$  et  $fd_2$ , les vecteurs respectifs des forces et des moments, appliqués dans la structure  $R_0$ ,  $R_1$  est obtenu de  $R_0$  par la rotation telle qu'un axe de  $R_1$  est dans le même alignement de  $fd_1$ . D'une manière similaire,  $R_2$  est obtenu de  $R_0$  par la rotation telle qu'un axe de  $R_2$  se trouve dans l'alignement de  $fd_2$ . En fonction des tâches,  $R_1$  et  $R_2$  peuvent être constants ou variants dans le temps.

Pour le cas spécifique de l'application de notre recherche, étant donné que nous imposons l'outil perpendiculaire à la surface de contrainte et que l'axe des forces appliquées est le même que celui des moments, nous aurons par conséquent, les matrices  $R_1$  et  $R_2$  constantes et identiques ( $R_1=R_2$ ). Nous précisons pour la suite de l'étude que  $R_0$  sera considéré comme variant dans le temps. La matrice  $R_1$  sera alors définie comme étant la matrice de rotation du plan. En quelque sorte, suivant les hypothèses que nous venons de fixer, nous aurons la matrice de rotation organisée comme suit :

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

### 1.9.2 Découplage du système en force/position

Sur la base du modèle dans l'espace cartésien donné par (1.38), suivant Slotine et Li [6], définissons le vecteur de vitesse lié au référentiel de l'outil tel que :

$$\dot{x}_c = \begin{pmatrix} v_c \\ \omega_c \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

où  $v_c$  et  $\omega_c$  sont respectivement les vecteurs des vitesses linéaire et angulaire dans le référentiel de l'outil.

Ce vecteur de vitesse  $\dot{x}_c$  est lié au vecteur  $\dot{x}$  du système dans le domaine cartésien par la matrice de transformation  $R_0$  telle que :

$$\dot{x} = R_0 \dot{x}_c \quad (1.44)$$

La dérivée de l'expression donnée par (1.44) par rapport au temps implique :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_0 \ddot{\mathbf{x}}_c + \dot{\mathbf{R}}_0 \dot{\mathbf{x}}_c \quad (1.45)$$

En remplaçant (1.44) et (1.45) dans (1.38), nous obtenons une nouvelle expression du modèle dynamique liée à la structure de travail comme montré ci-dessous :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})(\mathbf{R}_0 \ddot{\mathbf{x}}_c + \dot{\mathbf{R}}_0 \dot{\mathbf{x}}_c) + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathbf{R}_0 \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_x + \mathbf{F}_{int} \quad (1.46)$$

où  $\mathbf{F}_{int}$  est la force d'interaction entre l'outil et la surface de contact par rapport aux coordonnées généralisées  $\mathbf{x}$ .

En développant (1.46), on obtient :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{R}_0 \ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{M}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{R}}_0 \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathbf{R}_0 \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_x + \mathbf{F}_{int} \quad (1.47)$$

La mise de (1.47) sous forme de produit de facteur par rapport aux coordonnées généralisées, nous donne :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{R}_0 \ddot{\mathbf{x}}_c + (\mathbf{M}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathbf{R}_0)\dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_x + \mathbf{F}_{int} \quad (1.48)$$

En multipliant (1.48) de part et d'autre par  $\mathbf{R}_0^T$ , on obtient :

$$\underbrace{\mathbf{R}_0^T \mathbf{M}(\mathbf{x}) \mathbf{R}_0}_{\mathbf{M}_{cx}} \ddot{\mathbf{x}}_c + \underbrace{(\mathbf{R}_0^T \mathbf{M}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{R}_0^T \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{R}_0)}_{\mathbf{C}_{cx}} \dot{\mathbf{x}}_c + \underbrace{\mathbf{R}_0^T \mathbf{G}(\mathbf{x})}_{\mathbf{G}_{cx}} = \underbrace{\mathbf{R}_0^T \mathbf{f}_x}_{\mathbf{F}_{cx}} + \underbrace{\mathbf{R}_0^T \mathbf{F}_{int}}_{\mathbf{F}_{cint}} \quad (1.49)$$

Comme nous le montre (1.49), nous avons l'expression équivalente ci-dessous qui est définie comme étant le modèle dynamique du robot dans le domaine de la tâche en respectant la codification des termes.

$$\mathbf{M}_{cx} \ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{C}_{cx} \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{G}_{cx} = \mathbf{F}_{cx} + \mathbf{F}_{cint} \quad (1.50)$$

où  $M_{cx}$ ,  $C_{cx}$ , et  $G_{cx}$  sont respectivement les matrices équivalentes des masses et des inerties, des forces de coriolis et le vecteur des forces de gravité exprimées dans la structure de travail par rapport au référentiel de l'outil.  $F_{cx}$  est le vecteur des forces actives exprimées dans la structure de travail par rapport au référentiel de l'outil, et  $F_{cint}$  est le vecteur des forces de contact (ou  $F_{mesurée}$ ) exprimées dans la structure de travail par rapport au référentiel de l'outil. Les expressions équivalentes de  $M_{cx}$ ,  $C_{cx}$ ,  $G_{cx}$ ,  $F_{cx}$  et  $F_{cint}$  sont visibles dans (1.49). Ces matrices et vecteurs après les calculs symboliques ont les formes suivantes :

$$M_{cx} = \begin{bmatrix} M_{cx11} & M_{cx12} & M_{cx13} & M_{cx14} & M_{cx15} & M_{cx16} \\ M_{cx12} & M_{cx22} & M_{cx23} & M_{cx24} & M_{cx25} & M_{cx26} \\ M_{cx13} & M_{cx23} & M_{cx33} & M_{cx34} & M_{cx35} & M_{cx36} \\ M_{cx14} & M_{cx24} & M_{cx34} & M_{cx44} & M_{cx45} & M_{cx46} \\ M_{cx15} & M_{cx25} & M_{cx35} & M_{cx45} & M_{cx55} & M_{cx56} \\ M_{cx16} & M_{cx26} & M_{cx36} & M_{cx46} & M_{cx56} & M_{cx66} \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

$$C_{cx} = \begin{bmatrix} C_{cx11} & C_{cx12} & C_{cx13} & C_{cx14} & C_{cx15} & C_{cx16} \\ C_{cx21} & C_{cx22} & C_{cx23} & C_{cx24} & C_{cx25} & C_{cx26} \\ C_{cx31} & C_{cx32} & C_{cx33} & C_{cx34} & C_{cx35} & C_{cx36} \\ C_{cx41} & C_{cx42} & C_{cx43} & C_{cx44} & C_{cx45} & C_{cx46} \\ C_{cx51} & C_{cx52} & C_{cx53} & C_{cx54} & C_{cx54} & C_{cx56} \\ C_{cx61} & C_{cx62} & C_{cx63} & C_{cx64} & C_{cx65} & C_{cx66} \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

$$G_{cx} = \begin{bmatrix} G_{xc1} \\ G_{xc2} \\ G_{xc3} \\ G_{xc4} \\ G_{xc5} \\ G_{xc6} \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Les éléments de ces matrices ne sont pas représentés dans ce document, compte tenu de la lourdeur des expressions qui en découle. Nous remarquons cependant que la matrice  $M_{cx}$  est symétrique, puisque  $M_{cx}^T = M_{cx}$ . De plus, en effectuant toutes les opérations nécessaires avec des logiciels symboliques appropriés notamment Maple, on arrive à

démontrer que  $M_{cx}$ , en liaison avec  $C_{cx}$ , est défini positive et bornée et  $M_{cx}^{-1}$  existe. Ces trois propriétés sont très importantes car sans elles, la conception de la commande par la technique du backstepping s'avérera difficile si ce n'est impossible à réaliser.

La force active dans le domaine cartésien peut être utilisée selon l'organisation suivante :

$$F_{cx} = \begin{Bmatrix} F_{cx1} \\ F_{cx2} \end{Bmatrix} = R_0^T F_x = \underbrace{R_0^T J^{+T}}_{J_c^{*T}} \tau \quad (1.54)$$

où  $F_{cx1}$  et  $F_{cx2}$  sont les forces actives exprimées dans le référentiel de l'outil par rapport au découplage.

Nous avons ci-dessous des transformations utiles qui vont nous servir pour la suite de nos recherches.

$$\tau = J^T R_0^{-T} F_{cx} \quad (1.55a)$$

$$R_0^{-T} = (R_0^T)^{-1} \quad (1.55b)$$

$$\tau = K_r I \quad (1.56)$$

En remplaçant (1.56) dans (1.54), on obtient l'expression ci-dessous.

$$F_{cx} = J_c^{*T} K_r I \quad (1.57)$$

où  $J_c^* = J^+ R_0$  est l'inverse de la matrice jacobienne de transformation dans le référentiel de l'outil. La substitution de (1.57) dans (1.50) nous donne la relation ci-dessous :

$$M_{cx} \ddot{x}_c + C_{cx} \dot{x}_c + G_{cx} = J_c^{*T} K_r I + F_{cint} \quad (1.58)$$

Le vecteur des vitesses  $\dot{x}_c$ , peut être réparti comme ci-dessous suivant les directions contraintes et non contraintes :

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_f \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

Si nous considérons un contact rigide entre l'outil et la surface, alors le mouvement de la fin de l'effecteur dans la direction de contrainte est négligeable ( $\dot{\mathbf{x}}_f = 0$ ), par rapport au mouvement dans la direction non contrainte. De toute évidence (1.59) prend alors la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

Nous obtenons alors les deux expressions découplées ci-dessous dont la première est pour la position et la seconde pour la force.

$$\mathbf{M}_{cx11} \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_{cx11} \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{G}_{cx1} = \mathbf{F}_{cx1} \quad (1.61)$$

$$\mathbf{M}_{cx21} \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_{cx21} \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{G}_{cx2} = \mathbf{F}_{cx2} + \mathbf{f}_{int} \quad (1.62)$$

où  $\mathbf{M}_{cx11}$ ,  $\mathbf{M}_{cx21}$ ,  $\mathbf{C}_{cx11}$ ,  $\mathbf{C}_{cx21}$ ,  $\mathbf{G}_{cx1}$ ,  $\mathbf{G}_{cx2}$  sont les matrices et vecteurs équivalents des masses et des inerties, des forces de coriolis et de vecteur de gravité par rapport au découplage, et  $\mathbf{f}_{int}$  est la force d'interaction de contact entre l'outil et la surface dans la structure de travail par rapport à la boucle de la force.

Toutes les formes des matrices découplées se trouvent à l'annexe 5.

En tenant compte de (1.57), les forces actives découplées, exprimées dans la structure de travail prennent les formes ci-dessous :

$$\mathbf{F}_{cx1} = \mathbf{J}_{c1}^{+T} \mathbf{K}_r \mathbf{I} \quad (1.63)$$

$$\mathbf{F}_{cx2} = \mathbf{J}_{c2}^{+T} \mathbf{K}_r \mathbf{I} \quad (1.64)$$

où  $J_{c1}$  et  $J_{c2}$  sont les matrices jacobiennes de découplage dans l'espace de la tâche.

En substituant (1.63) et (1.64) respectivement dans (1.61) et (1.62), les expressions découplées du manipulateur prennent la forme du système comme montré ci-dessous.

$$\begin{cases} M_{cx11}\ddot{x}_p + C_{cx11}\dot{x}_p + G_{cx1} = J_{c1}^{+T}K_r I \\ M_{cx21}\ddot{x}_p + C_{cx21}\dot{x}_p + G_{cx2} = J_{c2}^{+T}K_r I + f_{int} \end{cases} \quad (1.65a)$$

En multipliant l'équation de l'actionneur donnée par l'expression (1.36), de part et d'autre par  $J_c^{+T}$ , on obtient :

$$J_c^{+T}L\dot{I} + J_c^{+T}RI + J_c^{+T}K_m\dot{q} = J_c^{+T}v \quad (1.65b)$$

En tenant compte respectivement de ce qui suit :

$$\dot{q} = J^+ \dot{x} \quad (1.66)$$

$$\dot{x} = R_0 \dot{x}_c \quad (1.67)$$

En substituant l'expression(1.67) dans celle de (1.66), on obtient :

$$\dot{q} = J^+ R_0 \dot{x}_c = J_c^+ \dot{x}_c \quad (1.68)$$

(1.65b) prend alors une nouvelle expression en tenant compte de (1.68) comme le montre l'expression suivante :

$$J_c^{+T}L\dot{I} + J_c^{+T}RI + J_c^{+T}K_m J_c^+ \dot{x}_c = J_c^{+T}v \quad (1.69)$$

Pour des raisons de simplifications des expressions, nous allons opérer un changement des coordonnées. Ainsi, nous avons l'organisation qui suit :

$$J_c^{+T} \mathbf{v} = \mathbf{v}_c \quad (1.70)$$

Si on considère l'expression ci-dessous :

$$\mathbf{I}_c = J_c \mathbf{I} \quad (1.71a)$$

Ceci implique à partir de (1.71a), l'expression ci-dessous :

$$\mathbf{I} = J_c^+ \mathbf{I}_c \quad (1.71b)$$

En calculant la dérivée de l'expression donnée par (1.71b), on obtient l'expression ci-dessous :

$$\dot{\mathbf{I}} = J_c^+ \dot{\mathbf{I}}_c + \dot{J}_c^+ \mathbf{I}_c \quad (1.72)$$

A partir de (1.70), (1.71b) et (1.72), nous avons alors une nouvelle expression pour l'actionneur (1.69) comme ci-dessous représenté :

$$J_c^{+T} \mathbf{L} (J_c^+ \dot{\mathbf{I}}_c + \dot{J}_c^+ \mathbf{I}_c) + J_c^{+T} \mathbf{R} J_c^+ \mathbf{I}_c + J_c^{+T} \mathbf{K}_m J_c^+ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{v}_c \quad (1.73)$$

où  $\mathbf{v}_c$  est la commande du système dans le domaine de la tâche.

(1.73) peut être réorganisé comme suit :

$$J_c^{+T} \mathbf{L} J_c^+ \dot{\mathbf{I}}_c + J_c^{+T} (\mathbf{L} \dot{J}_c^+ + \mathbf{R} J_c^+) \mathbf{I}_c + J_c^{+T} \mathbf{K}_m J_c^+ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{v}_c \quad (1.74)$$

En considérant la contrainte dans la direction z du repère de l'outil, on a :

$$J_c^+ \dot{\mathbf{x}}_c = J_c^+ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{cl}^+ \dot{\mathbf{x}}_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

(1.65a) prend une nouvelle forme en tenant compte de (1.71b) et en respectant la logique du découplage.

$$\begin{cases} M_{cx11}\ddot{x}_p + C_{cx11}\dot{x}_p + G_{cx1} = J_{c1}^{+T}K_rJ_{c1}^+I_{c1} \\ M_{cx21}\ddot{x}_p + C_{cx21}\dot{x}_p + G_{cx2} = J_{c2}^{+T}K_rJ_{c2}^+I_{c2} + f_{int} \end{cases} \quad (1.76)$$

De même en optant pour un changement de variables, posant respectivement ce qui suit :

$$L_c = J_c^{+T}LJ_c^+ \quad (1.77)$$

$$R_c = J_c^{+T}(L\dot{J}_c^+ + RJ_c^+) \quad (1.78)$$

$$K_{mc} = J_c^{+T}K_mJ_c^+ \quad (1.79)$$

$$K_{rc} = J_c^{+T}K_rJ_c^+ \quad (1.80)$$

L'actionneur représenté pour (1.74), en tenant compte de (1.77), (1.78) et (1.79), prend par conséquent la forme suivante :

$$\begin{cases} L_{c1}\dot{I}_{c1} + R_{c1}I_{c1} + K_{mc1}\dot{x}_p = v_{c1} \\ L_{c2}\dot{I}_{c2} + R_{c2}I_{c2} + K_{mc2}\dot{x}_p = v_{c2} \end{cases} \quad (1.81)$$

où  $v_{c1}$ ,  $v_{c2}$ ,  $I_{c1}$  et  $I_{c2}$  représentent respectivement, les commandes et les courants équivalents dans l'espace de la tâche par rapport au découplage.  $L_{c1}$ ,  $L_{c2}$ ,  $R_{c1}$ ,  $R_{c2}$ ,  $K_{mc1}$  et  $K_{mc2}$  sont les matrices des inductances, des résistances, des coefficients constants de l'actionneur, par rapport au découplage.

De (1.76) et (1.81), nous avons les nouveaux modèles dynamiques ci-dessous respectivement pour la position et pour la force :

$$\begin{cases} M_{cx11}\ddot{x}_p + C_{cx11}\dot{x}_p + G_{cx1} = K_{rc1}I_{c1} \\ L_{c1}\dot{I}_{c1} + R_{c1}I_{c1} + K_{mc1}\dot{x}_p = v_{c1} \end{cases} \quad (1.82)$$

$$\begin{cases} M_{cx21}\ddot{x}_p + C_{cx21}\dot{x}_p + G_{cx2} = K_{rc2}I_{c2} + f_{int} \\ L_{c2}\dot{I}_{c2} + R_{c2}I_{c2} + K_{mc2}\dot{x}_p = v_{c2} \end{cases} \quad (1.83)$$

où  $K_{rc1}$  et  $K_{rc2}$  sont des coefficients constants caractérisant la conversion électromécanique entre le courant et le couple par rapport au découplage.

C'est dans le souci de réaliser un découplage évident que nous pouvons poser ceci :

$$v_{c2} = v_{c21} + v_{c22} \quad (1.84)$$

où  $v_{c21}$  est la loi de commande qui va compenser les dynamiques de la boucle de la force et  $v_{c22}$  est la loi de commande en force.

### 1.10 Conclusion

Nous avons fait la modélisation sur un plan général d'un robot expérimental. Ce robot, a une architecture particulière qui peut être exploitée à bon escient sous plusieurs aspects. Les résultats des différentes matrices et expressions obtenus sont liés d'une part, à l'application des notions fondamentales de la dynamique existantes et d'autre part, à un travail de fond lié à toutes les transformations des matrices du système dans le domaine de la tâche.

La résolubilité d'un système d'équations robotiques pose le problème de la transformation des coordonnées entre l'espace de la tâche ou cartésien et l'espace des variables articulaires. Cette résolubilité est très importante pour la commande envisagée dans la mesure où cette dernière est liée aux éléments connus dans l'espace de la tâche ou cartésien. C'est pour cette raison que la cinématique inverse revêt une importance capitale parce que nous avons la possibilité d'établir les liens directs entre les domaines cartésiens ou de la tâche au domaine articulaire pour l'exécution des différents travaux.

Le modèle dynamique du robot qui résulte de notre modélisation dynamique a été transformé dans l'espace de la tâche en tenant compte de l'actionneur. Par conséquent,

les trois propriétés des matrices obtenues sont les mêmes que celles des domaines articulaires et cartésiens conformément à [12] ;

La transformation du modèle suivant la forme (1.36), nous permet de piloter le robot électriquement. Cette forme d'expression est très importante, car c'est par ce biais que nous pouvons avoir une forme récursive pouvant nous conduire à retrouver les structures du backstepping et du SFB.

Les transformations des modèles (1.82) et (1.83) dans le domaine de la tâche nous permettent d'avoir deux systèmes découplés et liés l'un à l'autre par des variables d'états communes. Les expressions de ces deux systèmes nous permettront de faire la conception des différentes lois de commande en force et en position en exploitant la technique du backstepping et du SFB. Nous précisons toutefois que les matrices obtenues respectent les trois propriétés du sous-chapitre 1.7 qui sont très importantes pour la conception et le fonctionnement de la commande robotique.

Par rapport au découplage réalisé, nous présumons le fonctionnement des deux prochaines lois de commande en tenant compte de (1.82), (1.83) et (1.84) tel que : pour la boucle de la position, il n'y aura qu'une loi de commande pour gérer le suivi des positions des vitesses et des accélérations ; pour ce qui concerne la boucle de la force, nous aurons deux lois de commande bien spécifiques, dont une aura pour objectif d'annuler toute la dynamique du modèle concernant la boucle de la force, tandis que l'autre imposera aisément la structure proprement dite de la commande de force.

Les équations engendrées par le robot en étude sont complexes et lourdes à gérer, malgré l'apparence rudimentaire du mécanisme tel qu'il est décrit. Comme l'on peut s'en douter, l'augmentation du nombre de degrés de liberté du système robotique en étude rend son analyse particulièrement inextricable et très difficile à manipuler. C'est pour

**cette raison que nous n'avons pas représenté certains calculs et certaines matrices, compte tenu de la lourdeur et de la grandeur des expressions qui en découlent.**

## **CHAPITRE 2**

### **GENERATION DES TRAJECTOIRES**

#### **2.1 Introduction**

L'exécution d'une tâche par l'intermédiaire d'un système robotique s'effectue à partir d'une trajectoire assignée. Ces trajectoires sont obtenues par des méthodes diverses de conception allant des plus simples aux plus complexes. Pour ce qui nous concerne, nous allons utiliser la méthode qui consiste à mettre en pratique la génération polynomiale d'ordre 5. Cette méthode, qui est de nature simple et très pratique, consiste à obtenir une figure géométrique tracée au préalable et qui sert de base pour la trajectoire désirée. Cette trajectoire désirée est obtenue en décomposant la figure géométrique tracée au préalable en un certain nombre de points suivant des mouvements interpolés avec un contrôle effectif des positions, des vitesses et des accélérations articulaires du robot.

Dans le chapitre actuel, nous allons présenter d'abord la génération polynomiale d'ordre 5. Ensuite, nous allons définir la trajectoire dans le plan appliqué à un triangle. Enfin, une conclusion mettra un terme à ce chapitre.

#### **2.2 Génération polynomiale d'ordre 5**

Comme préalablement énoncé, la forme polynomiale d'ordre 5 consiste à tracer une succession de trajectoires curvilignes dans une trajectoire globale prédéfinie, tout en décrivant à tout instant, la position, la vitesse et l'accélération des articulations du robot. Les équations de ces trajectoires curvilignes sont représentées ci-dessous [12] :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_t = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 + \mathbf{a}_4 t^4 + \mathbf{a}_5 t^5 \\ \dot{\mathbf{q}}_t = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 t + 3\mathbf{a}_3 t^2 + 4\mathbf{a}_4 t^3 + 5\mathbf{a}_5 t^4 \\ \ddot{\mathbf{q}}_t = 2\mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_3 t + 12\mathbf{a}_4 t^2 + 20\mathbf{a}_5 t^3 \end{cases} \quad (2.1)$$

La résolution du système d'équations exprimé en (2.1) suivant [12] nous donne les résultats suivants :

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{q}_0 \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{a}_1 = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\ddot{\mathbf{q}}_0}{2} \quad (2.2c)$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{20\mathbf{q}_f - 20\mathbf{q}_0 - (8\dot{\mathbf{q}}_f + 12\dot{\mathbf{q}}_0)t_f - (3\ddot{\mathbf{q}}_0 - \ddot{\mathbf{q}}_f)t_f^2}{2t_f^3} \quad (2.2d)$$

$$\mathbf{a}_4 = \frac{30\mathbf{q}_0 - 30\mathbf{q}_f + (14\dot{\mathbf{q}}_f + 16\dot{\mathbf{q}}_0)t_f + (3\ddot{\mathbf{q}}_0 - 2\ddot{\mathbf{q}}_f)t_f^2}{2t_f^4} \quad (2.2e)$$

$$\mathbf{a}_5 = \frac{12\mathbf{q}_f - 12\mathbf{q}_0 - (6\dot{\mathbf{q}}_f + 6\dot{\mathbf{q}}_0)t_f - (\ddot{\mathbf{q}}_0 - \ddot{\mathbf{q}}_f)t_f^2}{2t_f^5} \quad (2.2f)$$

Tout en optant pour l'hypothèse selon laquelle le robot va travailler dans un plan, il paraît opportun de développer toute la méthodologie mathématique concernée pour la mise en place de la structure adéquate. Cette structure qui sera développée dans le prochain sous-chapitre, permettra au robot de positionner son premier point dans ce plan.

### 2.3 Trajectoire dans le plan

L'équation d'une trajectoire dans un plan est donnée par la forme suivante [14] :

$$A_p x + B_p y + C_p z + D_p = 0 ; \quad (2.3)$$

où  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  et  $D_p$  sont les éléments du plan par rapport à un repère orthonormé représenté par  $x$ ,  $y$  et  $z$ . A partir de (2.3), nous pouvons mettre en place des vecteurs directeurs qui nous permettront de déterminer les positions et les orientations du plan comme le détaille l'annexe 4.

### 2.3.1 Positions dans le plan

Suivant la section 4.4 de l'annexe 4, les expressions des positions ci-dessous ont été obtenues comme suit :

$$p_x = \frac{-C_p x}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} + \frac{A_p B_p y}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} + \frac{A_p z}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \quad (2.4a)$$

$$p_y = 0 + \frac{-(A_p^2 + C_p^2)y}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} + \frac{B_p z}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \quad (2.4b)$$

$$p_z = \frac{A_p x}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} + \frac{B_p C_p y}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} + \frac{C_p z}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \quad (2.4c)$$

### 2.3.2 Matrice de rotation du plan

Suivant la section 4.4 de l'annexe 4, nous avons obtenu les résultats de la matrice de rotation suivante :

$$\text{Rot}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} & \frac{A_p B_p}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} & \frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \\ 0 & \frac{A_p^2 + C_p^2}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} & \frac{B_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \\ \frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} & \frac{B_p C_p}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} & \frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

### 2.3.3 Orientations dans le plan

Suivant la section 4.4 de l'annexe 4, les résultats des orientations donnent :

$$\psi = \text{acos} \left( \frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \right) \quad (2.6a)$$

$$\gamma = \text{asin} \left( \frac{\frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}}}{\sin\left(\text{acos}\left(\frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}}\right)\right)} \right) \quad (2.6b)$$

$$\varphi = \text{asin} \left( \frac{\frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}}}{\sin\left(\text{acos}\left(\frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}}\right)\right)} \right) \quad (2.6c)$$

## 2.4 Application de la trajectoire triangulaire

Aux sous chapitres 2.2 et 2.3, nous avons défini la génération de la trajectoire polynomiale d'ordre 5 et les positions et orientations d'un plan qui sont valables pour toutes les formes géométriques des figures pouvant être appliquées. Nous avons choisi pour toutes nos simulations une figure triangulaire. Comme on l'a si bien dit, cela aurait pu être, un cercle, un rectangle, etc... A travers le choix du triangle, nous espérons mieux apprécier le comportement de nos lois de commandes qui sont obligées d'affronter des trajectoires discontinues. Nous résumons cette technique pour la simulation du modèle à quatre axes comme suit :

1<sup>ère</sup> Les éléments du plan  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  et  $D_p$  doivent être définis de façon que le robot puisse accéder au plan concerné en appliquant les résultats de la cinématique inverse.

Pour le triangle généré par notre algorithme de simulation, les éléments du plan ont été définis comme suit :

$$A_p = 2 ; B_p = 0.1 ; C_p = 0.47 \text{ et } D_p = 0.5.$$

2<sup>ème</sup> A partir des éléments du plan caractérisés par sa matrice de rotation (2.5) et de son équation (2.3), on met en pratique les relations trigonométriques des différents angles liés aux articulations du robot. Ainsi, nous avons ce qui suit :

$$q_2 = a \cos \left( -\frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \right) \quad (2.7a)$$

$$q_1 = a \tan 2(B_p, A_p) \quad (2.7b)$$

$$d_1 = -\frac{D_p + A_p[C_1(S_2L_3 + L_2) + L_1] + B_pS_1(S_2L_3 + L_2)}{C_p} + C_2L_3 \quad (2.7c)$$

Les angles  $d_1$ ,  $q_1$  et  $q_2$  ci-dessus, qui sont effectivement fixes, permettent au robot de positionner son organe terminal dans le plan. Par conséquent, ils sont considérés comme angles initiaux de la trajectoire désirée.

3<sup>ème</sup> On définit les vecteurs directeurs du plan à partir des données des vecteurs directeurs du plan donné par (A.4.2) et (A.4.3).

$$U_x = -C_p \quad (2.8a)$$

$$U_y = 0 \quad (2.8b)$$

$$U_z = A_p \quad (2.8c)$$

$$V_x = A_p B_p \quad (2.8d)$$

$$V_y = -(A_p^2 + C_p^2)^2 \quad (2.8e)$$

$$V_z = B_p C_p \quad (2.8f)$$

4<sup>ème</sup> On choisit les trois points des coordonnées du triangle par rapport au plan et en spécifiant la distance entre les trois points choisis et la vitesse de parcours. Ces distances pour notre cas sont données par des valeurs  $\lambda_i$ .

5<sup>ème</sup> Enfin, on construit un algorithme qui permet de calculer automatiquement tous les points entre les coordonnées choisies du triangle suivant  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$ .

Nous avons ainsi, d'une manière mathématique, construit un triangle dans un plan. C'est ce triangle qui fait office de la trajectoire désirée. A partir des différentes positions ( $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$ ) et orientations ( $\phi$ ,  $\psi$ , et  $\gamma$ ) acquisitionnés, nous pouvons maintenant définir les différents angles désirés que le robot doit générer par l'entremise de la cinématique inverse.

$$q_{1d} = a \tan 2(p_y, p_x - L_1) \quad (2.9a)$$

$$q_{2d} = \pi - \text{asin} \left( \frac{\frac{p_x - L_1}{C_{1d} - L_2}}{L_3} \right) \quad (2.9b)$$

$$d_{1d} = p_z + C_{2d} L_3 \quad (2.9c)$$

$$q_{3d} = -\gamma \quad (2.9d)$$

$$\phi_d = \text{asin} \left( q_{1d} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.9e)$$

$$\psi_d = \pi - q_{2d} \quad (2.9f)$$

$$\gamma_d = \frac{\pi}{2} + q_{3d} \quad (2.9g)$$

## **2.5 Conclusion**

Ce chapitre est une illustration pratique des résultats mathématiques existants pour la mise au point d'une trajectoire. Nous avons d'un part utilisé les résultats de l'ouvrage de Craig [12] pour la génération de la trajectoire polynomiale d'ordre 5. D'autre part les notions et certaines relations mathématiques nous ont servi pour construire une structure conforme qui lie le robot à un plan. Par l'intermédiaire de sa cinématique inverse, le robot utilisé doit logiquement être capable de suivre la figure géométrique tracée dans ce plan. L'exploitation de ces résultats, qui sont conformes sous tous ces aspects, nous servira de base pour le suivi de la trajectoire désirée en utilisant cette fois une commande évoluée. Cette trajectoire qui est un triangle, est déterminée exclusivement par un certain nombre de points, dont les calculs s'appliquent aussi bien pour les positions, les vitesses et les accélérations articulaires du robot. Cette étape est très importante et significative, car sans elle toute application d'une quelconque commande reste impossible.

## **CHAPITRE 3**

### **NOTIONS ESSENTIELLES POUR LA COMMANDE NON LINEAIRE PAR RETROACTION BASEE SUR LA TECHNIQUE DU BACKSTEPPING**

#### **3.1 Introduction**

Ce chapitre a pour objectif de résumer un certain nombre de concepts liés à la conception de nos lois de commande. Ces concepts concernent exclusivement le backstepping et la passivité. Nous allons dans un premier temps exposer les grandes lignes de la théorie du backstepping sur un plan général. Dans un second temps, nous allons ensuite détailler quelques structures du backstepping, et la façon dont peut se faire l'exploitation. D'une manière spécifique, nous allons aborder le backstepping en liaison avec le concept de passivité. La passivité elle-même étant bien sûr liée à d'autres notions très importantes comme la stabilité, la dissipativité, la détectabilité et l'optimalité. Toutes ces notions sont nécessaires pour la synthèse des lois de commande. C'est pour cette raison qu'en marge de l'analyse d'une partie de la technique du backstepping, comme préalablement énoncé, nous développerons sommairement la technique dite de passivation par rétroaction (c'est-à-dire comment rendre un système passif par rétroaction). Nous examinerons entre autre les caractéristiques d'un système passif et les limitations de la technique de passivation par rétroaction. Une de ces limitations trouve sa solution par la commande récursive dite "backstepping". Les notions ainsi présentées sont extraites des ouvrages de Sepulchre et al [13] et de Krstic et al [29] pour lesquelles nous prenons le soin d'en faire référence. Par conséquent, nous conseillons fortement aux lecteurs de cette thèse de consulter ces références pour une vision plus large si ce n'est plus globale des sujets énoncés. Les notations utilisées sont standards et basées sur la commande géométrique qui est désormais bien connue car largement publiée dans la référence d'Isidori [22].

Dans ce chapitre, nous allons d'abord définir le backstepping et certaines méthodologies de sa conception. Ensuite nous allons résumer par des définitions, des théorèmes et des lemmes la théorie des systèmes passifs et de l'étude de la stabilité. Enfin, nous allons établir les liens entre la passivité, et certains concepts importants notamment : l'optimalité, la dissipativité et la stabilité. Une conclusion mettra fin à ce chapitre.

A l'annexe 6, nous avons jugé nécessaire de ressortir les notions de stabilité de Lyapunov et de Lasalle pour un complément d'information.

### **3.2 Théorie sur le backstepping**

Le backstepping est une méthode qui est à ce jour d'actualité dans la conception récursive des lois de commande. Elle peut se définir comme une façon d'organiser un système en plusieurs sous systèmes en cascade qui se présentent sous plusieurs formes. L'exploitation de la méthodologie de conception sur un plan général par rétroaction qui aboutit à la mise en place d'une loi de commande, associe systématiquement une fonction de Lyapunov ou l'équivalent. Les propriétés importantes de la stabilité locale ou globale relatives à la future loi de commande s'obtiennent en ressortant une fonction stabilisatrice à chaque étape du système en cascade. Ces fonctions stabilisatrices sont liées entre elle et la dernière faisant office de loi de commande de tout le système. Un des avantages que procure la méthode du backstepping est celui de garder les propriétés du système initial dans la loi de commande obtenue. Ceci constitue en quelques sorte la particularité du backstepping par rapport à d'autres méthodes telles que le feedback linéarisant.

Nous n'avons pas la prétention de faire une présentation de la théorie du backstepping dans son entièreté, mais nous limiterons notre résumé à certains concepts que nous avons jugés utiles pour nos recherches.

**Hypothèse 3.1** Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(0) = 0, \quad (3.1a)$$

où  $x \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u \in \mathfrak{R}$  est l'entrée du système.

Il existe pour (3.1a) une loi de commande par retour d'information continûment dérivable tel que :

$$u = \alpha(x), \quad \alpha(0) = 0,$$

et une fonction définie positive non bornée :  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  telle que :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\alpha(x)] \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n, \quad (3.1b)$$

où  $W : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  est semi-définie positive.

Sous cette hypothèse, la commande  $u = \alpha(x)$ , appliquée au système considéré, garantit que  $x(t)$  est globalement borné, par l'intermédiaire du théorème de LaSalle-Yoshizawa comme expliqué à la page 24 de la référence [29] et résumé pour la circonstance à l'annexe 6.

**Lemme 3.1** (Integrator Backstepping)

Soit le système exprimé en (3.1a) que nous augmentons d'un intégrateur tel que :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (3.2)$$

En supposant que le premier sous système de (3.2) satisfait l'hypothèse 3.1 avec  $\xi \in \mathfrak{R}$  et qui est considéré comme sa commande.

i-) Si  $W(x)$  est défini positive, alors

$$V_a(x, \xi) = V(x) + \frac{1}{2}[\xi - \alpha(x)]^2 \quad (3.3a)$$

est une fonction de commande de Lyapunov (clf) pour (3.2) comme définie à la page 25 de [29].

La commande du système est alors définie comme suit :

$$u = -C(\xi - \alpha(x)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\xi] - \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) \quad (3.3b)$$

où  $C > 0$  est considéré comme un gain et  $\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)$  et  $\frac{\partial V}{\partial x}(x)$  sont respectivement les dérivées de la fonction stabilisatrice et de la clf.

ii-) Si  $W(x)$  est seulement semi-définie positif, alors il existe une commande par retour d'information qui rend

$$\dot{V}_a \leq -W_a(x, \xi) \leq 0$$

Toutefois,  $W_a(x, \xi) > 0$  quand  $W(x) > 0$  ou  $\xi \neq \alpha(x)$ . Ceci garantit que  $\begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$  converge et est globalement borné comme le spécifie la preuve de ce lemme donnée à la page 34 de [29].

Uniquement à partir de cette hypothèse et de ce lemme, nous pouvons faire une extension de ces concepts à différentes formes du backstepping comme nous allons le montrer ci-dessous.

### 3.2.1 Méthodologie de la conception des systèmes strict-feedback

L'utilisation des systèmes strict-feedback se justifie pour notre backstepping car sa configuration est plus appropriée aux systèmes robotiques. Elle est donnée par la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2)\xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{k-1} = f_{k-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) + g_{k-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})\xi_k \\ \dot{\xi}_k = f_k(x, \xi_1, \dots, \xi_k) + g_k(x, \xi_1, \dots, \xi_k)u \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $x \in \mathcal{R}^n$  et  $\xi_1, \xi_2$  et  $\xi_k$  sont des scalaires.

Supposons que le sous-système  $x$  de (3.4) satisfait l'hypothèse 3.1 c'est-à dire qu'il dépend de  $f(x)$  et de  $g(x)$ . Pour ce sous-système,  $\xi_1$  est considéré comme la commande d'entrée. Notre conception récursive démarre avec le sous système ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \end{cases} \quad (3.5a)$$

si  $f_1 \equiv 0$  et  $g_1 \equiv 1$ , le lemme 3.1 peut être directement appliqué en considérant  $\xi_2$  comme une commande dite virtuelle, alors :

$$V(x, \xi_1) = V(x) + \frac{1}{2}[\xi_1 - \alpha(x)]^2 \quad (3.5b)$$

où  $\alpha(x)$  est un retour d'information stabilisant qui satisfait (3.1b) pour le sous système  $x$ . En introduisant une fonction stabilisatrice  $\alpha_1(x, \xi_1)$  pour la commande virtuelle de (3.5a), nous avons besoin de calculer la dérivée de  $V_1$  non positive quand  $\xi_2 = \alpha_1(x, \xi_1)$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -W(x) + [\xi_1 - \alpha(x)] \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) + f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\xi_1] \right\} \\ &= -W(x, \xi_1) + \frac{\partial V}{\partial \xi_1}(x, \xi_1)g_1(x, \xi_1)[\xi_2 - \alpha_1(x, \xi_1)]. \end{aligned}$$

où  $W(x, \xi_1) > 0$  quand  $W(x) > 0$  ou  $\xi_1 \neq \alpha(x)$ .

Si  $g_1(x, \xi_1) \neq 0$  pour tout  $x$  et  $\xi_1$  on choisit la fonction stabilisatrice  $\alpha_1$  tel que :

$$\alpha_1(x, \xi_1) = \frac{1}{g_1(x, \xi_1)} \left\{ -c_1[\xi_1 - \alpha(x)] - \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) - f_1(x, \xi_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\xi_1] \right\} \quad (3.5c)$$

avec  $c_1 > 0$ , qui donne  $W_1(x, \xi_1) = W(x) - c_1[\xi_1 - \alpha(x)]^2$ .

L'objectif de cette étape étant atteint par la mise en place de la fonction stabilisatrice  $\alpha_1(x, \xi_1)$ , notre méthode récursive se poursuit par la notation compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = F_1(X_1) + G_1(X_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = f_2(X_1, \xi_2) + g_2(X_1, \xi_2)\xi_3 \end{cases} \quad (3.5d)$$

où  $f_2(X_1, \xi_2), g_2(X_1, \xi_2)$  représentent respectivement  $f_2(x, \xi_1, \xi_2), g_2(x, \xi_1, \xi_2)$  et

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ \xi_1 \end{bmatrix}; \quad F_1(X_1) = \begin{bmatrix} f(x) + g(x)\xi_1 \\ f_1(x, \xi_1) \end{bmatrix} \text{ et } G_1(X_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(x, \xi_1) \end{bmatrix}.$$

La structure de (3.5d) est identique à celle de (3.5a), nous reprenons ainsi, la même itération par l'introduction de l'expression ci dessous :

$$\begin{aligned}
V_2(X_2, \xi_2) &= V_1(X_1) + \frac{1}{2}[\xi_2 - \alpha_1(X_1)]^2 \\
&= V(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [\xi_i - \alpha_{i-1}(X_{i-1})]^2
\end{aligned} \tag{3.5e}$$

où, pour une notation convenable, nous employons,  $X_0 = x$  et  $\alpha_0(X_0) = \alpha(x)$ .

La fonction stabilisatrice  $\alpha_2(X_2), X_2^T = [X_1^T \ \xi_2]^T$  pour le contrôle virtuel  $\xi_3$  est alors déterminée par :

$$\dot{V}_2 \leq -W_2(X_1, \xi_2) + \frac{\partial V_2}{\partial \xi_2}(X_1, \xi_2) g_2(X_1, \xi_2) [\xi_3 - \alpha_2(X_2)] \tag{3.6}$$

avec  $W_2(X_1, \xi_2) > 0$  quand  $W(x, \xi_1) > 0$  ou  $\xi_2 \neq \alpha_1(X_1)$ .

Il est clair que cette procédure détermine la prochaine itération de  $k$ , pour laquelle le système (3.4) est stabilisé par une commande  $u$ . Dans une notation compacte, le système (3.4), peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}_{k-1} = F_{k-1}(X_{k-1}) + G_{k-1}(X_{k-1})\xi_k \\ \dot{\xi}_k = f_k(X_{k-1}, \xi_k) + g_k(X_{k-1}, \xi_{k-1})u \end{cases} \tag{3.7}$$

où

$$X_{k-1} = \begin{bmatrix} X_{k-2} \\ \xi_{k-1} \end{bmatrix}; \quad F_{k-1}(X_{k-1}) = \begin{bmatrix} F_{k-2}(X_{k-2}) + G_{k-2}(X_{k-2})\xi_{k-1} \\ f_{k-1}(X_{k-2}, \xi_{k-1}) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$G_{k-1}(X_{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_{k-1}(X_{k-2}, \xi_{k-1}) \end{bmatrix}$$

De la même manière, la fonction de Lyapunov pour (3.7) est la suivante :

$$\begin{aligned}
V_k(x, \xi_1, \dots, \xi_k) &= V_{k-1}(X_{k-1}) + \frac{1}{2}[\xi_k - \alpha_{k-1}(X_{k-1})]^2 \\
&= V(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [\xi_i - \alpha_{i-1}(X_{i-1})]^2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

En calculant la dérivée de (3.8) avec le respect de toute la procédure, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_k &= \dot{V}_{k-1} + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[ f_k + g_k u - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial X_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right] \\
 &\leq -W_{k-1}(X_{k-2}, \xi_{k-1}) + \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} (\xi_k - \alpha_{k-1}) + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[ f_k + g_k u - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial X_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right] \\
 &= -W_{k-1}(X_{k-2}, \xi_{k-1}) + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[ \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} + f_k + g_k u - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial X_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right] \quad (3.9a)
 \end{aligned}$$

Si la condition est non singulière, c'est-à-dire  $g_k(x, \xi_1, \dots, \xi_k) \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}^n, \forall \xi_i \in \mathfrak{R}, i = 1, \dots, k$ , est satisfait, alors le choix pour  $u$  est le suivant :

$$u = \frac{1}{g_k} \left[ -c_k (\xi_k - \alpha_{k-1}) - \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} - f_k + \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial X_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right] \quad (3.9b)$$

La méthodologie ainsi présentée nous assure une fonction stabilisatrice du système à chaque étape du système et la dernière fonction stabilisatrice fait office de loi de commande de tout le système. Nous voyons aisément que cette façon d'obtenir la loi de commande par la méthode du backstepping, nous permet non seulement de stabiliser le système, mais aussi de garder tous les éléments non linéaires. Ceci n'est pas évident pour d'autres méthodes de conception.

A ce niveau, la conception de la loi de commande backstepping telle qu'elle se présente ne peut pas être applicable en robotique parce que les variables d'états sont des scalaires purs alors que nous travaillons avec des matrices. Pour contourner cette difficulté, nous allons avoir besoin de la passivité dont la forme strict-feedback du backstepping utilise les éléments sous forme de matrices.

### 3.3 Théorie des systèmes passifs

En prélude à la mise en place de la structure du SFB recherché, nous allons détailler les grands axes des systèmes passifs. Nous expliquons la théorie de la passivité en nous basant d'abord sur l'exemple de la figure 2 où nous avons à gauche deux blocs en rétroaction et à droite la figure équivalente de gauche. De la figure 2 (de gauche à droite), nous pouvons ressortir la loi fondamentale qui stipule qu'un système composé de deux blocs passifs en rétroaction est passif.

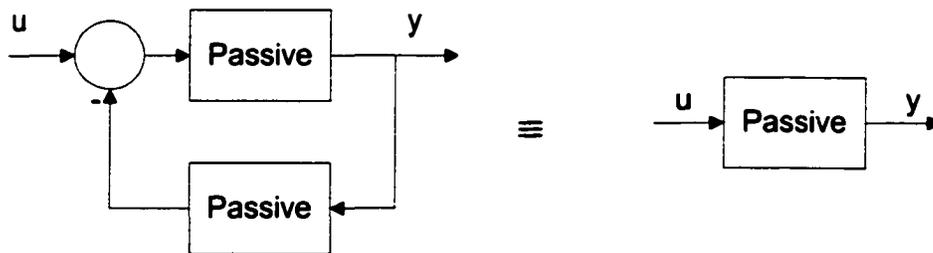


Figure 2. Rétroactions des systèmes passifs et schéma bloc passif équivalent

L'argumentation utilisée précédemment se justifie par le fait que si on suppose que les deux blocs de la figure 2 (de gauche) sont linéaires et passifs, leurs fonctions de transfert sont dites réels positifs avec un déphasage par un bloc passif inférieur à  $90^0$ . Par conséquent, le déphasage pour tout le système (en considérant les deux blocs) n'est pas plus grand que  $180^0$ , et par conséquent, en se référant au critère de Nyquist-Bode, une boucle passive de rétroaction stable possède une marge de gain.

Si on fait une analogie en considérant cette fois deux blocs non linéaires, le concept de la passivité peut être vu comme une extension de  $180^0$  du retard de phase (Nyquist-Bode). Pour ne pas nous limiter à cette définition sommaire de la passivité, nous allons donner plus d'éclaircissement en abordant les sous-chapitre ci-dessous.

### 3.3.1 Notion de passivité

Considérons le système dynamique représenté par H et décrit par l'équation suivante.

$$H : \begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u = F(x, u) \\ y = h(x, t) + j(x, t)u = H(x, u) \end{cases} \quad (3.10)$$

avec  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{R}^m$  et  $y \in \mathcal{R}^m$

Imaginons que l'augmentation de l'énergie du système physique H n'est due qu'à une source externe (Exemple : un circuit RLC connecté à une batterie), les définitions ci-dessous sont valides.

Avant de passer aux différentes définitions, nous rappelons toutefois, que c'est en se référant à (3.10), vers les années 70 que Willems [18] a systématisé le concept de dissipativité et de passivité par l'introduction de deux fonctions dont une emmagasine l'énergie représentée par S et l'autre la propulse dont le symbole est donné par W.

#### Définition 3.3.1 (Dissipativité)

Supposons qu'au système H donné par (3.10) est associée une fonction  $W : \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$  appelée taux d'approvisionnement localement intégrable pour tout  $u \in U \subset \mathcal{R}^m$ , c'est-à-dire

$$\int_{t_0}^{t_1} W(u(t), y(t)) dt < \infty \quad \forall t_0 \leq t_1 \quad (3.11)$$

où  $y(t)$  est la sortie

Soit X un sous-ensemble connecté  $\subset \mathcal{R}^m$  contenant l'origine. On dit que H est dissipatif sur X avec un taux d'approvisionnement  $W(u, y)$  s'il existe une fonction  $S(x)$ ,  $S(0)=0$  tel

que  $\forall x \in X, S(x) \geq 0$ ,

$$S(x(T)) - S(x(0)) \leq \int_0^T W(u, y) dt \quad \forall u \in U \text{ et } \forall T \geq 0 \text{ tel que } x(t) \in X \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.12)$$

$S(x)$  est appelé fonction de stockage ou encore fonction mémoire.

### Définition 3.3.2 (Passivité)

Le système H exprimé en (3.10) est dit passif s'il est dissipatif avec un taux d'approvisionnement

$$W(u, y) = u^T y \quad (3.13)$$

Dans le cas d'un circuit électrique  $S(x)$  et  $W(u, y)$  représentent respectivement l'énergie emmagasinée dans le circuit et la puissance fournie par la source. Par conséquent, la relation  $\int_0^T W(u, y) dt$  est donc l'énergie fournie par la source externe.

Un système est donc dissipatif si son accroissement d'énergie est inférieur ou égal à l'énergie fournie. Si  $S(x)$  est dérivable, l'expression (3.12) est équivalente à :

$$\dot{S}(x) \leq W(u, y) \quad (3.14)$$

### Exemple 3.3.1

Soit un circuit électrique régi par le système d'équations d'état suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} v \\ \frac{d}{dt} v_C = \frac{1}{RC} (v - v_C) \\ i = i_L + \frac{1}{R} (v - v_C) \end{cases} \quad (3.15)$$

où  $v$  et  $i$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système.

L'énergie emmagasinée dans l'inductance est égale à  $\frac{1}{2}Li_L^2$  et celle emmagasinée dans la capacitance est donnée par  $\frac{1}{2}Cv_C^2$ . L'énergie totale du circuit qui est la somme de l'énergie emmagasinée dans l'inductance et dans la capacitance est égale à :

$$E = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Cv_C^2 \quad (3.16)$$

L'accroissement de l'expression (3.16) est donnée par :

$$\frac{d}{dt}E = vi - \frac{1}{R}(v - v_C)^2 \leq vi \quad (3.17)$$

En tenant compte de (3.17) on conclut que le système est alors dissipatif.

Aussi, si nous avons :

$$W(u, y) = vi \quad (3.18)$$

le système est donc passif.

Une propriété fondamentale des systèmes passifs concerne l'interconnexion de systèmes passifs.

### **Théorème 3.3.1**

Supposons que deux systèmes représentés par  $H_m$  et  $H_n$  sont passifs. Alors les systèmes obtenus par l'interconnexion en parallèle ou en rétroaction de  $H_m$  et  $H_n$  sont aussi passifs pour tout  $u$  et  $T$  supérieur ou égal à zéro ( $u$  et  $T \geq 0$ ). Ce théorème et la preuve sont donnés à la page 33 de [13].

La passivité est donc, la propriété que la différence de la mémoire exprimée par  $S(x)$  est plus petite que l'énergie fournie. D'où la nouvelle formulation donnée par l'expression suivante.

$$\dot{S} \leq w(u, y)$$

Ceci nous amène à aborder le rapport entre la passivité et la stabilité tout en faisant déjà remarquer que la fonction mémoire  $S(x)$  pour certains cas peut être considérée comme une fonction candidate de Lyapunov.

### 3.4 Stabilité des systèmes passifs

Couramment un système est dit stable, si en l'absence d'entrée, l'effet d'une perturbation ne provoque pas la divergence de sa sortie. Pour ce qui est des systèmes passifs, on peut aisément constater que la notion de la fonction de stockage fait quelque peu penser à la fonction de Lyapunov. En fait, cette ressemblance n'est pas fortuite car une relation étroite existe entre les propriétés de dissipativité et de stabilité. Pour éviter de surcharger cette présentation, un rappel sur la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov est exposé à l'annexe 6 de la présente thèse.

Notons qu'il n'est pas nécessaire que la fonction de stockage  $S(x)$  d'un système dissipatif (ou passif) soit définie (strictement) négative. Elle peut être définie semi-négative contrairement à la fonction de Lyapunov qui doit être définie strictement négative. Par conséquent, si un système dissipatif possède une partie non observable instable, son point d'équilibre peut être instable.

Exemple :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_2 \end{cases} \quad (3.19)$$

(3.19) est passif avec  $S(x) = \frac{1}{2} x_2^2$ .

Pour exclure cette situation, des conditions sont imposées sur la stabilité de la partie non observable.

**Définition 3.4.1** (Déteçtabilité zéro - état et observabilité)

Soit un système  $H_1$  tel que  $u = 0$  c'est-à-dire :

$$H_1 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.20)$$

et  $Z \in \mathbb{R}^n$  son plus grand ensemble invariant contenu dans  $\{x \in \mathbb{R}^n / y = h(x) = 0\}$ .  $H_1$  est dit zéro - état déteçtable (ZED) si  $x = 0$  est asymptotiquement stable conditionnellement à  $Z$  (voir annexe 6). Si  $Z = \{0\}$ ,  $H_1$  est dit zéro - état observable.

Avec la notion de ZED, la stabilité d'un système passif peut être conclue même en présence de fonction de stockage définie semi-négative. L'avantage est qu'on peut obtenir une convergence asymptotique en choisissant simplement une loi de commande de la forme

$$u = -y \quad (3.21)$$

**Théorème 3.4.1** (Passivité et stabilité)

Soit le système ci-dessous :

$$H_2 : \begin{cases} \dot{x} = F(x, u) \\ y = H(x, u) \end{cases} \quad (3.22)$$

(3.22) est un système passif dont les fonctions  $F(x,u)$  et  $H(x,u)$  sont définis en (3.10) avec une fonction de stockage  $S(x)$  continûment dérivable (c'est-à-dire à dérivé continue) et  $H(x,u)$  aussi continûment dérivable en  $u \forall x$  alors, si  $S > 0$  alors  $x = 0$  avec  $u = 0$  est stable.

Si  $H_2$  est ZED alors  $x = 0$  avec  $u = 0$  est stable.

si  $y = h(x)$  alors  $u = -y$  rend  $x = 0$  asymptotiquement stable. Si et seulement si  $H_2$  est ZED.

Quand  $S(x)$  est non bornée (c'est à dire  $S(x) \rightarrow \infty$  si  $\|x\| \rightarrow \infty$ ), on parle de stabilité globale. La démonstration et la preuve de ce théorème sont données aux pages 50 et 51 de la référence [13].

### 3.4.1 Caractérisation des systèmes affines passifs

Considérons le système donné par (3.22) avec  $F(x,u)$  et  $H(x,u)$  définis en (3.10).

#### **Théorème 3.4.2** (Caractérisation des systèmes affines passifs)

Supposons que  $S(x) > 0$  et  $S(x) \in C^1$  (c'est-à-dire continûment dérivable).  $H_2$  est dissipatif avec un taux d'approvisionnement tel que :

$$W(u,y) = u^T y - \alpha y^T y - \beta u^T u \quad (3.23)$$

avec  $\alpha, \beta$  deux nombres réels positifs, si et seulement si,  $\exists q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  et  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k \times m}$  pour un certain  $k$ , tel que :

$$L_f S(x) = \frac{1}{2} q^T q - \rho h^T h \quad (3.24a)$$

$$L_g S(x) = \frac{1}{2} h^T - 2\rho h^T j - q^T w \quad (3.24b)$$

$$w^T w = 2vl - 2\rho j^T j + j^T + \frac{d}{dt} j(x) \quad (3.24c)$$

tel que  $L_f S = \frac{\partial S}{\partial x} f(x)$  et  $L_g S = \frac{\partial S}{\partial x} g(x)$  qui sont les dérivées de  $S$  respectivement dans la direction de  $f(x)$  et de  $g(x)$ .

$j$  étant défini en (3.10) en sous entendant pour ce système que l'entrée n'agit pas sur la sortie.

Si  $H_2$  est passif avec  $j(x) = 0$  alors

$$L_f S(x) \leq 0$$

$$L_g S(x) = h^T(x)$$

Dans le cas des systèmes linéaires définis par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.25)$$

La condition (3.24b) est équivalente à :

$$\exists S(x) = x^T P x, P \geq 0$$

tel que

$$PA + A^T P \leq 0 \quad (3.26a)$$

$$B^T P = C \quad (3.26b)$$

La démonstration et la preuve de ce théorème sont aux pages 56, 57 et 58 de [13].

### 3.5 Passivité, optimalité et stabilité

Il existe un lien étroit (sous certaines conditions) entre les notions de passivité et de stabilité. En effet un système passif possède une certaine marge de phase. Aussi, nous savons qu'un système optimal est stable et possède une marge de stabilité. On peut donc s'interroger s'il existe un lien entre la passivité et l'optimalité. La réponse à cette question est affirmative.

#### 3.5.1 Commande stabilisante optimale

Soit à déterminer  $u(x)$  pour le système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.27)$$

tel que

(i)  $u(x)$  stabilise asymptotiquement

$$x = 0$$

(ii)  $u(x)$  minimise la fonction coût

$$J = \int_0^{\infty} (L(x) + u^T R(x)u) dt \quad (3.28)$$

$$L(x) \geq 0, R(x) > 0, \forall x$$

#### **Théorème 3.5.1** (optimalité et stabilité)

Supposons que  $V(x) \in C^1$  satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$L(x) + L_f V(x) - \frac{1}{4} L_g V(x) R^{-1} (L_g V(x))^T = 0 \quad (3.29)$$

$$V(0) = 0$$

tel que

$$u^*(x) = -\frac{1}{2}R^{-1}(x)(L_g V(x))^T \quad (3.30)$$

stabilise asymptotiquement

$$x = 0$$

alors  $u^*(x)$  est la commande optimale qui minimise  $J$  et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

$V(x)$  est la valeur optimale de  $J$ .

La démonstration et la preuve de ce théorème sont aux pages 91 et 92 de [13].

### 3.5.2 Optimalité et passivité

Posons  $R(x) \equiv I$  dans  $J$  de (3.28). Autrement dit

$$J = \int_0^{\infty} (L(x) + u^T u) dt \quad (3.31)$$

#### Théorème 3.5.2

La loi de commande

$$u = -k(x) \quad (3.32)$$

est optimale pour  $J$  si et seulement si

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = k(x) \end{cases} \quad (3.33)$$

est ZED (zéro - état stable) et dissipatif avec comme taux d'approvisionnement

$$w(u, y) = u^T y - \frac{1}{2} y^T y \quad (3.34)$$

et une fonction de stockage  $S(x) \in C^1$  tel que

$$S(x) = \frac{1}{2} V(x) \quad (3.35)$$

La démonstration de ce théorème est à la page 95 de [13].

La passivation par rétroaction est une technique de conception qui consiste à rendre un système passif en boucle fermée par une forme particulière de la loi de commande. Le système devenu passif est évidemment stable, par conséquent il possède une certaine marge de stabilité (c'est-à-dire qu'il peut admettre une incertitude dans la modélisation).

Le principe vient du fait que pour le système passif

$$H_3 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.36)$$

Une loi de commande pour  $H_3$  comme ci-dessous montré

$$u = -y = -h(x) \quad (3.37)$$

permet de stabiliser de façon asymptotique le point d'équilibre si  $H_3$  est ZED.

Ainsi pour

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.38)$$

la technique consiste à déterminer une sortie

$$y = h(x) \quad (3.39)$$

et une loi de commande

$$u = a(x) + b(x)v \quad (3.40)$$

tel que :

$$H_4 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)(a(x) + b(x)v) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.41)$$

est passif. Si  $H_4$  est ZED alors on a :

$$v = -y \quad (3.42)$$

qui permet ensuite de stabiliser de façon asymptotique.

### 3.5.3 Passivation par la méthode de conception réursive "backstepping"

Cette méthode consiste à appliquer la passivation sur un sous-système du système à commander, ensuite à l'appliquer de nouveau étape par étape en augmentant au fur et à mesure l'ordre du sous-système. La synthèse se termine quand on retrouve le système entier. Ainsi, à chaque étape de la conception, on détermine une sortie qui rend le sous-système considéré passif et une fonction de stockage qui sera utilisée comme fonction de Lyapunov. Notons que la technique dite "backstepping" s'applique aisément aux systèmes ayant une certaine structure triangulaire inférieure.

#### Proposition 3.5.3

Supposons que pour le système

$$H_5 : \dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.43)$$

il existe une fonction continûment dérivable

$$u = \alpha_0(x) + v_0 \quad (3.44)$$

et une fonction de stockage  $W(x)$  deux fois continûment dérivable (c'est-à-dire  $\in C^2$ ), définie positive, non bornée et connue tel que  $H_5$  soit passif avec comme entrée  $v_0$  et une sortie de la forme

$$y_0 = (L_g W)^T(x) \quad (3.45)$$

alors le système augmenté

$$H_6 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\varepsilon \\ \dot{\varepsilon} = a(x, \varepsilon) + b(x, \varepsilon)u \end{cases} \quad (3.46)$$

( $b^{-1}(x, \varepsilon)$  existant), est (globalement) passif par rétroaction avec comme sortie

$$y = \varepsilon - \alpha_0(x) \quad (3.47)$$

et comme fonction de stockage

$$V(x, y) = W(x) + \frac{1}{2} y^T y \quad (3.48)$$

Une forme particulière de la commande qui rend le système passif est

$$u = b^{-1}(x, \varepsilon) \left[ -a(x, \varepsilon) - y_0 + \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} (f(x) + g(x)\varepsilon) + v \right] \quad (3.49)$$

$v$  étant une entrée auxiliaire.

Le système  $H_6$  donné par (3.46) avec comme commande  $u$  ci-dessus donné par (3.49) est ZED (zéro - état détectable), si  $H_5$  donné par (3.43) est ZED avec comme entrée  $v_0$ . De plus, si  $W(x)$  est strictement décroissante pour  $H_6$  ayant comme entrée

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{x}) \quad (3.50)$$

alors

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = W(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y} \quad (3.51)$$

est aussi strictement décroissante pour  $H_6$  donné par (3.46) avec une entrée auxiliaire

$$\mathbf{v} = -k\mathbf{y} \quad (3.52)$$

avec  $k > 0$ .

D'une façon générale, la méthode précédente s'applique aux systèmes de la forme ci-dessous que nous avons appelés couramment strict-feedback du backstepping (SFB) :

$$H_7 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \mathbf{a}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) + \mathbf{b}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \dots \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n = \mathbf{a}_n(\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) + \mathbf{b}_n(\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\mathbf{u} \end{cases} \quad (3.53)$$

La procédure de la proposition précédente est appliquée de façon récursive au système SFB  $H_7$  jusqu'à l'obtention de  $\mathbf{u}$ . Ainsi à chaque étape récursive, nous avons :

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\alpha}_{i-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}) \quad (3.54)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{b}_i^{-1}(-\mathbf{a}_i - \mathbf{y}_{i-1} + \frac{d\boldsymbol{\alpha}_{i-1}}{dt} - \mathbf{y}_i) \quad (3.55)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}_n + \mathbf{b}_n^{-1}\mathbf{v} \quad (3.56)$$

### **3.6 Conclusion**

Dans ce chapitre, il a été question de ressortir la théorie du backstepping et de la passivité telle qu'elle peut être exploitée pour la commande robotique. Nous avons défini et mis en exergue les définitions et les théorèmes des systèmes passifs. Nous avons entre autre établi les rapports de la passivité avec d'autres concepts tels que la dissipativité, la détectabilité, l'observabilité et l'optimabilité.

Par la méthode du backstepping, on arrive à mettre en place des lois de commande qui stabilisent les différentes étapes du système en cascade en sachant que la dernière fonction stabilisatrice fait office de commande pour le système. En associant la passivité au backstepping nous donnons plus d'ouverture en robotique. Nous assurons de ce fait des lois de commande très performantes.

Tous les concepts préalablement définis revêtent une importance capitale par rapport à la stabilité recherchée. La plupart de ces notions nous seront très utiles dans la conception des différentes lois de commandes envisagées.

## **CHAPITRE 4**

### **CONCEPTION DE LA COMMANDE**

#### **4.1 Introduction**

La commande en elle-même peut être définie d'une manière générale comme une expression mathématique homogène, dont sa conception et sa mise en place permettent d'assurer le fonctionnement attendu ou souhaité d'un système donné, afin d'exécuter une ou des tâches bien précises. Nous allons aborder dans ce chapitre, la conception de deux lois de commandes adaptatives SFB en force et en position pouvant être compatibles aux systèmes robotiques suivant les approches ci-dessous :

- La première loi de commande sera issue de la technique du backstepping associée à la théorie des systèmes passifs. La première loi d'adaptation des paramètres pour la présente loi de commande qui est réalisée par la méthode directe, sera l'application d'un cas particulier de la loi de Slotine et Li [16]. Elle se fera par l'entremise du calcul du courant désiré exprimé dans l'équation du manipulateur ;
- La seconde loi de commande SFB sera tributaire de deux algorithmes d'adaptation des paramètres. Selon l'ordre préalablement établi comparativement à la première loi de commande, la deuxième loi d'adaptation des paramètres pour la seconde commande est aussi réalisée par la méthode directe mais avec le respect de toute la théorie et de toutes les exigences des systèmes passifs. La troisième loi d'adaptation des paramètres aura un algorithme qui conférera à la seconde loi de commande une robustesse. Cette dernière loi d'adaptation des paramètres qui est en fait obtenue par la méthode directe, sera tirée d'une fonction de Lyapunov avec la prise en compte les erreurs des deux boucles de rétroaction.

Nous résumons dans le tableau ci-dessous, l'organisation des deux lois de commande.

Tableau IV

Organisation des deux lois de commande

CONCEPTION DE DEUX LOIS DE COMMANDE ADAPTATIVE	
Première loi de commande	1 <sup>ère</sup> loi d'adaptation des paramètres
Deuxième loi de commande	2 <sup>ème</sup> loi d'adaptation des paramètres
	3 <sup>ème</sup> loi d'adaptation des paramètres

Il est à noter que la conception des deux types des lois de commandes adaptatives (mentionnées dans le tableau IV ci-dessus) tiendra absolument compte d'une logique de découplage commune, qui a été réalisée au sous chapitre 1.10. Dans la pratique et comme cela pourra s'observer au cours des différentes simulations numériques, il s'avère qu'un système n'est pas complètement ou totalement découplé. Etant donné que les boucles sont liées par les mêmes vecteurs d'états, cela a pour conséquence que la dynamique de l'un peut de toute évidence influencer les résultats de l'autre. L'importance du découplage à notre avis est une façon réelle de résoudre la dualité qui existe entre la commande de force et celle de position. Cette dualité peut s'expliquer par le fait qu'un robot qui exécute une tâche sur un environnement de travail suivant toutes ses directions, n'a en principe et d'une manière théorique aucun déplacement possible dans la direction de contrainte. Par conséquent, il ne peut exercer des déplacements sur cet environnement de travail. En d'autres termes, un robot n'est pas capable de

contrôler une force et un déplacement suivant une même direction. A l'inverse, si on considère le robot dans un espace libre, l'absence de tout contact empêche la création ou la génération des forces. Pour tenir compte du déplacement de l'effecteur dans les directions de contraintes et dans celles non contraintes, il faut introduire sous forme de découplage dans la dynamique du robot deux boucles de rétroaction qui vont caractériser les commandes envisagées en force et en position. Une des caractéristiques qui convient d'être appuyée fortement est celle de maintenir, à tout instant, l'effecteur en contact avec la surface de travail. Cet aspect du problème sera abordé dans le sous chapitre concernant la gestion des tâches, car il serait souhaitable que l'outil, pour une raison ou pour une autre, ne sorte pas de la zone par excellence de travail. Nous espérons de ce fait, assurer pour tous les deux types des lois de commande adaptatives envisagés une stabilité globale du système.

Comme hypothèses de départ pour la conception, nous poserons une contrainte dans la direction  $z$  de la vitesse par rapport à un système orthonormé. Nous faisons toutefois remarquer que les résultats de la modélisation cinématique nous donnent respectivement les positions et les orientations. Autant nous pouvons démontrer sur le plan pratique que la dérivée des trois positions correspond aux vitesses linéaires, autant il n'est pas vrai que les dérivées des orientations correspondent aux vitesses angulaires. C'est pour cela qu'en introduisant la contrainte, nous allons procéder à nouveau au calcul des vitesses linéaires et angulaires à partir de la matrice jacobienne de façon à retrouver les positions correspondantes par le biais du calcul de l'intégrale de ces vitesses.

Ainsi, la position de la contrainte  $x_p$  qui sera l'intégrale de la vitesse, avec le courant, seront l'objet d'une organisation vectorielle de  $(5 \times 1)$  tout en précisant que l'élément concerné par la contrainte est inexistant. Cette organisation est par conséquent représentée comme suit :

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{p1} \\ \mathbf{x}_{p2} \\ \mathbf{x}_{p3} \\ \mathbf{x}_{p4} \\ \mathbf{x}_{p5} \end{bmatrix} = \int \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{p1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{p2} \\ \dot{\mathbf{x}}_{p3} \\ \dot{\mathbf{x}}_{p4} \\ \dot{\mathbf{x}}_{p5} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

et

$$\xi_{c3l} = I_{cl} = \begin{bmatrix} I_{c11} \\ I_{c22} \\ I_{c44} \\ I_{c55} \\ I_{c66} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

## 4.2 Première loi de commande backstepping force/position

La conception de la loi de commande pour certains cas de figure comme le nôtre nécessite au préalable la mise en place du système sous forme de variables d'états. Nous pouvons poser respectivement pour la boucle de la position comme vecteur d'état, les matrices suivantes pour le manipulateur et pour l'actionneur tout en sachant que le système considéré est donné par (1.82) :

$$\xi_c = \begin{bmatrix} \xi_{c1} \\ \xi_{c2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où  $\xi_c$  est une variable d'état représenté sous forme vectorielle et qui englobe les positions et les vitesses dans l'espace de la tâche.  $\xi_{c1}$  et  $\xi_{c2}$  représentent respectivement les variables d'états de la position et de la vitesse dans l'espace de la tâche.

Les expressions internes de (4.4) sont définies comme suit :

$$\xi_{c1} = x_p \quad (4.5a)$$

$$\xi_{c2} = \dot{x}_p \quad (4.5b)$$

La forme matricielle du courant dans l'espace de la tâche est la suivante :

$$\xi_{c3} = \begin{bmatrix} \xi_{c31} \\ \xi_{c32} \end{bmatrix} \quad (4.6a)$$

où  $\xi_3$  est une variable d'état représentée sous forme vectorielle et qui englobe les courants dans l'espace de la tâche.  $\xi_{c31}$  et  $\xi_{c32}$  représentent les variables d'états du courant dans l'espace de la tâche pour la boucle de position et celle de la force par rapport au découplage.

Les expressions internes de (4.6a) sont définies comme suit :

$$\xi_{c31} = I_{c1} \quad (4.6b)$$

$$\xi_{c32} = I_{c2} \quad (4.6c)$$

Nous obtenons de ce qui précède un nouveau modèle sous forme de variables d'états pour la boucle de la position ayant une forme augmentée par un intégrateur et qui prend en compte la contrainte. Ce modèle est ci-dessous représenté:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_c = \begin{bmatrix} \xi_{c2} \\ -M_{cx11}^{-1} (C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2})\xi_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1})) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M_{cx11}^{-1} K_{rc1} \end{bmatrix} \xi_{c31} \\ \dot{\xi}_{c31} = \underbrace{-L_{c1}^{-1} R_{c1} \xi_{c31} - L_{c1}^{-1} K_{mcl} \xi_{c2}}_{f_{c1}(\xi_{c2}, \xi_{c31})} + \underbrace{L_{c1}^{-1}}_{g_{c1}(\xi_{c2}, \xi_{c31})} v_{c1} \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $\xi_c \in \mathcal{R}^{2n}$ ,  $\xi_{c31} \in \mathcal{R}^n$  et  $v_{c1} \in \mathcal{R}^n$ .

Le modèle backstepping en cascade pour la boucle de position donnée par (4.7) a la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_c = f_c(\xi_c) + g_c(\xi_c)\xi_{c31} \\ \dot{\xi}_{c31} = f_{c1}(\xi_{c2}, \xi_{c31}) + g_{c1}(\xi_{c2}, \xi_{c31})v_{c1} \end{cases} \quad (4.8)$$

Les expressions des fonctions  $f_c(\xi_c)$ ,  $g_c(\xi_c)$ ,  $f_{c1}(\xi_{c2}, \xi_{c31})$  et  $g_{c1}(\xi_{c2}, \xi_{c31})$  de (4.8) sont visibles dans (4.7).

Nous faisons remarquer toutefois que la forme du backstepping trouvées ci-dessus est comparable à (3.4) sauf qu'elle est augmentée d'un intégrateur.

#### 4.2.1 Loi de commande en position avec un suivi de trajectoire

La loi de commande pour le contrôle de position est conçue en exploitant la technique du SFB. Pour assurer la stabilité globale du système, la technique du backstepping consiste, pour une sortie  $y_i$  donnée, à fixer une fonction mémoire  $W_i(\xi_c)$  et à calculer les fonctions, candidate  $V_i(\xi_c, \xi_{c31})$  et stabilisatrice  $\alpha_i(\xi_c)$  valables pour chaque étape  $i$  du système. Pour le système donné par (4.7), nous n'avons qu'une seule étape comme montré en (3.46). Par conséquent  $\alpha_1$  sera la loi de commande du système et  $\alpha_0$  déterminera la loi de commande stabilisatrice du premier sous-système du système de la forme augmentée. Ainsi, nous allons considérer respectivement la sortie, la fonction candidate, la fonction mémoire et la fonction stabilisatrice comme ci-dessous représentées en tenant compte de (3.47) et (3.48) :

$$y_1 = \beta(\xi_{c31} - \xi_{c31d}) - \alpha_0(\xi_c); \quad (4.9)$$

où  $\beta = \bar{I}$  la matrice d'identité.

$$V_1(\xi_c, \xi_{c31}) = W_1(\xi_c) + \frac{1}{2} y_1^T y_1. \quad (4.10)$$

$$W_1(\xi_c) = \frac{1}{2}(\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) \quad (4.11)$$

$$\alpha_0(\xi_c) = \beta(\xi_{c31} - \xi_{c31d}) - (\xi_{c2} - \xi_{c2d}) \quad (4.12)$$

En considérant  $W_1(\xi_c)$  donné par (4.11) et en faisant la substitution dans (4.10), on obtient une nouvelle expression de la fonction candidate définie comme suit :

$$V_1(\xi_c, \xi_{c31}) = \frac{1}{2}(\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) + \frac{1}{2}y_1^T y_1 \quad (4.13)$$

En calculant les dérivées dans le temps de (4.11), (4.9) et (4.13), on obtient respectivement :

$$\dot{W}_1(\xi_c) = (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d}) \quad (4.14)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{\xi}_{c31} - \dot{\xi}_{c31d} - \frac{\partial \alpha_0(\xi_c)}{\partial (\xi_c)} \dot{\xi}_c \quad (4.15)$$

$$\dot{V}_1(\xi_c, \xi_3) = (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d}) + y_1^T \dot{y}_1 \quad (4.16)$$

En remplaçant (4.15) dans (4.16), on obtient :

$$\dot{V}_1(\xi_c, \xi_{c31}) = (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d}) + y_1^T \left[ \dot{\xi}_{c31} - \dot{\xi}_{c31d} - \frac{\partial \alpha_0(\xi_c)}{\partial (\xi_c)} \dot{\xi}_c \right] \quad (4.17)$$

(4.17) va alors prendre une nouvelle expression en substituant  $\dot{\xi}_{c31}$  et  $\dot{\xi}_c$  par leur valeur donnée par (4.7) :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\xi_c, \xi_{c31}) = & (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d}) + y_1^T \left[ -L_{c1}^{-1} R_{c1} \dot{\xi}_{c31} - L_{c1}^{-1} K_{mc1} \dot{\xi}_{c2} + L_{c1}^{-1} v_{c1} - \right. \\ & \left. \dot{\xi}_{c31d} - \frac{\partial \alpha_0(\xi_c)}{\partial (\xi_c)} \left( \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{c2} \\ -M_{cx11}^{-1} [C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2}) \dot{\xi}_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1})] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M_{cx11}^{-1} K_{rc1} \end{bmatrix} \xi_{c31} \right) \right] \quad (4.18) \end{aligned}$$

C'est en se basant sur la définition de la passivité (3.13) et (3.14) que nous introduisons à ce niveau la théorie de la passivité en posant ce qui suit et tout en étant conscient que c'est ce que nous voulons obtenir :

$$\dot{V}_1(\xi_c, \xi_{c31}) \leq y_1^T v_1 \quad (4.19)$$

où  $v_1$  est l'entrée du système.

L'expression donnée par (4.18), peut prendre alors la forme suivante en considérant (4.19) :

$$\begin{aligned} & (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\xi_{c2} - \xi_{c2d}) + y_1^T \left[ -L_{c1}^{-1} R_{c1} \xi_{c31} - L_{c1}^{-1} K_{mc1} \xi_{c2} + L_{c1}^{-1} v_{c1} - \dot{\xi}_{c31d} - \right. \\ & \left. \frac{\partial \alpha_0(\xi_c)}{\partial(\xi_c)} \left( \begin{bmatrix} \xi_{c2} \\ -M_{cx11}^{-1} [C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2}) \xi_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1})] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M_{cx11}^{-1} K_{rc1} \end{bmatrix} \xi_{c31} \right) \right] \leq y_1^T v_1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

(4.20) est équivalent à l'expression ci-dessous après quelques manipulations mathématiques et en optant l'hypothèse de l'égalité relative comme montré en [32] et [33] :

$$\begin{aligned} & y_1^T \left[ -L_{c1}^{-1} R_{c1} \xi_{c31} - L_{c1}^{-1} K_{mc1} \xi_{c2} + L_{c1}^{-1} v_{c1} - \dot{\xi}_{c31d} - \frac{\partial \alpha_0(\xi_c)}{\partial(\xi_c)} \left( \begin{bmatrix} \xi_{c2} \\ -M_{cx11}^{-1} [C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2}) \xi_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1})] \end{bmatrix} \right. \right. \\ & \left. \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ M_{cx11}^{-1} K_{rc1} \end{bmatrix} \xi_{c31} \right) \right] = y_1^T v_1 - (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\xi_{c2} - \xi_{c2d}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

En considérant (4.9) et (4.12), nous avons ci-dessous, la simplification de l'expression (4.21) :

$$\begin{aligned} & -L_{c1}^{-1} R_{c1} \xi_{c31} - L_{c1}^{-1} K_{mc1} \xi_{c2} + L_{c1}^{-1} v_{c1} - \dot{\xi}_{c31d} - \frac{\partial \alpha_0(\xi_c)}{\partial(\xi_c)} \left( \begin{bmatrix} \xi_{c2} \\ -M_{cx11}^{-1} [C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2}) \xi_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1})] \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ M_{cx11}^{-1} K_{rc1} \end{bmatrix} \xi_{c31} \right) = v_1 - (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Alors la loi de commande particulière backstepping qui respectera la condition de la passivité (4.19) est égale à :

$$v_{cl} = L_{cl} \left[ L_{cl}^{-1} R_{cl} \xi_{c31} + L_{cl}^{-1} K_{mcl} \xi_{c2} + \dot{\xi}_{c31d} + \frac{\partial \alpha_0(\xi_c)}{\partial (\xi_c)} \left( \left[ -M_{cx11}^{-1} [C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2}) \xi_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1})] \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ M_{cx11}^{-1} K_{rc1} \end{bmatrix} \xi_{c31} \right) + v_1 - (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) \right] \quad (4.23)$$

avec

$$v_1 = -K_1 y_1 \quad (4.24)$$

En substituant (4.24) dans (4.23) et en résolvant ses expressions internes, c'est-à-dire en calculant la dérivée partielle de  $\alpha_0(\xi_c)$  par rapport à  $\begin{bmatrix} \xi_{c1} \\ \xi_{c2} \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$v_{cl} = L_{cl} \left[ L_{cl}^{-1} R_{cl} \xi_{c31} + L_{cl}^{-1} K_{mcl} \xi_{c2} + \dot{\xi}_{c31d} + M_{cx11}^{-1} [C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2}) \xi_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1})] - M_{cx11}^{-1} K_{rc1} - K_1 [\beta(\xi_{c31} - \xi_{c31d}) - \beta(\xi_{c31} - \xi_{c31d}) - (\xi_{c2} - \xi_{c2d})] - (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) \right]$$

La forme définitive de la loi de commande en position similaire à (3.49) est montrée ci-dessous :

$$v_{cl} = L_{cl} \left[ L_{cl}^{-1} R_{cl} \xi_{c31} + L_{cl}^{-1} K_{mcl} \xi_{c2} - K_1 (\xi_{c2} - \xi_{c2d}) - (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) + \dot{\xi}_{c31d} + M_{cx11}^{-1} [C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2}) \xi_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1})] - M_{cx11}^{-1} K_{rc1} \xi_{c31} \right] \quad (4.25)$$

L'expression donnée par (4.25) remplacée dans (4.7) rend le système passif entre l'entrée  $v_1$  et la sortie  $y_1$  par l'intermédiaire de (4.19). La stabilité asymptotique du système est assurée par (4.24) conformément au principe de la passivité. L'expression (4.25) a la forme générale suivante :

$$v_c = g_{c1}^{-1}(\xi, \xi_3) \left[ -f_{c1}(\xi_{c2}, \xi_{c31}) - y_0 + \frac{\partial \alpha_0}{\partial \xi_c} (f_c(\xi_c) + g_c(\xi_c) \xi_{c31}) + v_1 \right] \quad (4.26)$$

En considérant (4.25) l'expression de  $y_0$  est égale à :

$$y_0 = \xi_{c1} - \xi_{c1d} - \xi_{c31d} \quad (4.27)$$

Nous soulignons toutefois un handicap majeur au niveau de l'expression de la commande donnée par (4.25) qui a des inverses de la matrice des inerties. Cet handicap n'est pas insurmontable, car Craig [19] a été confronté à ce problème.

#### 4.2.2 Première loi de commande adaptative en position

Toute la logique du backstepping décrite précédemment ne nous a pas permis de trouver une forme conviviale pour faire une estimation directe des paramètres. Pour faire une estimation des paramètres, il faut avoir la possibilité de regrouper sous une même expression la matrice de masse  $M$ , la matrice des inerties  $C$  et le vecteur des termes de gravité  $G$ . Dans ces conditions, nous pensons qu'une façon de le faire est de passer par le calcul du courant désiré ( $\xi_{c31d}$ ). Ainsi, de la manière dont les calculs vont s'articuler, le courant désiré pourra être considéré comme une commande fictive spécifique pour la boucle du manipulateur de façon à appliquer une estimation des paramètres par la méthode directe. Ainsi, définissons l'erreur du courant tel que :

$$\tilde{\xi}_{c31} = \xi_{c31} - \xi_{c31d} \quad (4.28)$$

En reconsidérant l'expression du manipulateur déduit de (1.82) comme suit :

$$M_{cx11}(\xi_{c1}) \dot{\xi}_{c2} + C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2}) \xi_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1}) = K_{rc1} \xi_{c31d} + K_{rc1} \tilde{\xi}_{c31} \quad (4.29)$$

(4.29) peut être considéré comme un sous système qui a une perturbation  $\tilde{\xi}_{c31}$  et qui est commandé par  $K_{rc1}\xi_{c31d}$ . Pour déterminer la loi d'adaptation des paramètres, nous allons nous baser sur le modèle nominal (sans perturbation).

$$M_{cx11}(\xi_{c1})\dot{\xi}_{c2} + C_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2})\xi_{c2} + G_{cx1}(\xi_{c1}) = K_{rc1}\xi_{c31d} \quad (4.30)$$

L'expression (4.30) peut se mettre sous une forme compacte en ressortant la matrices des dynamiques linéarisées comme montré ci-dessous :

$$K_{rc1}\xi_{c31d} = W_{cx1}(\xi_{c1}, \xi_{c2}, \dot{\xi}_{c2})p \quad (4.31)$$

où  $W_{cx1}$  est la matrice des dynamiques linéarisées dans le domaine de la tâche pour la boucle de position et  $p$  est un vecteur des paramètres estimés égal à  $[p_1, p_2, \dots, p_{22}]$ .

Nous allons calculer le courant désiré d'une façon similaire à Slotine et Li [16], pour assurer une estimation directe des paramètres. Alors :

$$\xi_{c31d} = K_{rc1}^{-1} \left[ \hat{M}_{cx11}(\xi_{c1})\dot{\xi}_{c2}^* + \hat{C}_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2})\xi_{c2}^* + \hat{G}_{cx1}(\xi_{c1}) - k_d e_{c1} \right] \quad (4.32)$$

où  $e_{c1}$  est l'erreur de vitesse.

Pour obtenir la loi d'adaptation justifiant entre autre (4.32), nous allons utiliser la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v = \frac{1}{2} (e_{c1}^T M_{cx11} e_{c1} + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p}) \quad (4.33)$$

où  $\tilde{p}$  est le vecteur  $(22 \times 1)$  des paramètres estimés, et  $\Gamma$  est une matrice diagonale de pondération constante et définie positive. L'erreur de vitesse  $e_{c1}$  est définie comme suit :

$$\mathbf{e}_{c1} = \xi_{c2} - \xi_{c2d} + \Lambda(\xi_{c1} - \xi_{c1d}) \quad (4.34)$$

où  $\Lambda$  est une matrice de pondération.

En considérant :

$$\xi_{c2}^* = \xi_{c2d} - \Lambda(\xi_{c1} - \xi_{c1d}) \quad (4.35)$$

L'expression dérivée de (4.35) donne :

$$\dot{\xi}_{c2}^* = \dot{\xi}_{c2d} - \Lambda(\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d}) \quad (4.36)$$

Alors, (4.34) et son expression dérivée en considérant (4.35) et (4.36) prennent respectivement les formes suivantes :

$$\mathbf{e}_{c1} = \xi_{c2} - \xi_{c2}^* \quad (4.37)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{c1} = \dot{\xi}_{c2} - \dot{\xi}_{c2}^* \quad (4.38)$$

Les paramètres  $\mathbf{p}$  du système ne peuvent pas être connus avec précision. C'est pour cela que nous aurons recours aux paramètres estimés  $\hat{\mathbf{p}}$ . Ainsi, en posant l'erreur des paramètres comme suit :

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}$$

La dérivée de la fonction candidate donnée par (4.33) a la forme suivante :

$$\dot{v} = \mathbf{e}_{c1}^T (\mathbf{M}_{cx11} \dot{\mathbf{e}}_{c1} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_{cx11} \mathbf{e}_{c1}) + \tilde{\mathbf{p}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \quad (4.39)$$

En sachant que  $(\dot{\mathbf{M}}_{cx11} - 2\mathbf{C}_{cx11})$  est anti-symétrique, la forme quadratique est donnée par ce qui suit :

$$\mathbf{e}_{cl}^T (\dot{\mathbf{M}}_{cx11} - 2\mathbf{C}_{cx11}) \mathbf{e}_{cl} = 0 \quad (4.40)$$

(4.40) implique l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2} \mathbf{e}_{cl}^T \dot{\mathbf{M}}_{cx11} \mathbf{e}_{cl} = \mathbf{e}_{cl}^T \mathbf{C}_{cx11} \mathbf{e}_{cl} \quad (4.41)$$

Par voie de conséquence, en remplaçant l'expression équivalente de (4.41) dans (4.39), on obtient :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_{cl}^T (\mathbf{M}_{cx11} \dot{\mathbf{e}}_{cl} + \mathbf{C}_{cx11} \mathbf{e}_{cl}) + \tilde{\mathbf{p}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \quad (4.42)$$

En substituant (4.37) et (4.38) dans (4.42), on trouve :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_{cl}^T (\mathbf{M}_{cx11} \dot{\xi}_{c2} - \mathbf{M}_{cx11} \dot{\xi}_{c2}^* + \mathbf{C}_{cx11} \xi_{c2} - \mathbf{C}_{cx11} \xi_{c2}^*) + \tilde{\mathbf{p}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \quad (4.43)$$

De (4.30), on a :

$$\dot{\xi}_{c2} = \mathbf{M}_{cx11}^{-1}(\xi_{cl}) [\mathbf{K}_{rc1} \xi_{c31d} - \mathbf{C}_{cx11}(\xi_{cl}, \xi_{c2}) \xi_{c2} - \mathbf{G}_{cx1}(\xi_{cl})] \quad (4.44)$$

En substituant l'expression de  $\dot{\xi}_{c2}$  donnée par (4.44) dans (4.43), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{e}_{cl}^T (\mathbf{K}_{rc1} \xi_{c31d} - \mathbf{C}_{cx11} \xi_{c2} - \mathbf{G}_{cx1} - \mathbf{M}_{cx11} \dot{\xi}_{c2}^* + \mathbf{C}_{cx11} \xi_{c2} - \mathbf{C}_{cx11} \xi_{c2}^*) + \tilde{\mathbf{p}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\ &= \mathbf{e}_{cl}^T (\mathbf{K}_{rc1} \xi_{c31d} - \mathbf{G}_{cx1} - \mathbf{M}_{cx11} \dot{\xi}_{c2}^* - \mathbf{C}_{cx11} \xi_{c2}^*) + \tilde{\mathbf{p}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

En substituant aussi l'expression donnée par (4.32) dans l'expression de (4.45), on trouve :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_{cl}^T [\tilde{\mathbf{M}}_{cx11}(\xi_{cl}) \dot{\xi}_{c2}^* + \tilde{\mathbf{C}}_{cx11}(\xi_{cl}, \xi_{c2}) \xi_{c2}^* + \tilde{\mathbf{G}}_{cx1}(\xi_{cl}) - \mathbf{k}_d \mathbf{e}_{cl}] + \tilde{\mathbf{p}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \quad (4.46)$$

Supposons ceci :

$\tilde{M} = \hat{M} - M$ , la matrice d'erreur d'estimation des masses ;

$\tilde{C} = \hat{C} - C$ , la matrice d'erreur d'estimation des termes de Coriolis et des forces centrifuges ;

$\tilde{G} = \hat{G} - G$ , le vecteur d'erreur d'estimation des paramètres des forces de gravité.

En sachant que les équations dynamiques sont linéaires par rapport aux paramètres  $p$  comme on l'a écrit en (4.31), on peut retrouver la même expression dans (4.46) en l'écrivant comme représentée ci-dessous :

$$\tilde{M}_{cx11}(\xi_{c1})\dot{\xi}_{c2}^* + \tilde{C}_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2})\xi_{c2}^* + \tilde{G}_{cx1}(\xi_{c1}) = W_{cx1}(\xi_{c1}, \xi_{c2}, \xi_{c2}^*, \dot{\xi}_{c2}^*)\tilde{p} \quad (4.47)$$

En considérant (4.47), nous avons une nouvelle expression de (4.46) qui est représentée ci-dessous :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= e_{c1}^T (W_{cx1}\tilde{p} - k_d e_{c1}) + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \\ &= -e_{c1}^T k_d e_{c1} + \tilde{p}^T (W_{cx1}^T e_{c1} + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Si on choisit pour la loi d'adaptation, l'expression ci-dessous conformément à (4.48) :

$$\tilde{p}^T (W_{cx1}^T e_{c1} + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}}) = 0 \quad (4.49)$$

Alors en tenant compte de (4.49), on a :

$$\dot{v} = -e_{c1}^T k_d e_{c1} \leq 0 \quad (4.50)$$

(4.50) est semi-définie négative. La loi d'adaptation en supposant les paramètres constants et en tenant compte de (4.49) est égale à :

$$\dot{\tilde{p}} = -\Gamma W_{cx1}^T e_{c1}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(p - \hat{p}) &= -\Gamma W_{cx1}^T e_{c1} \\ \dot{\hat{p}} &= \Gamma W_{cx1}^T e_{c1}\end{aligned}\quad (4.51)$$

Il est à noter que les paramètres du modèle sont constants.

De ce fait, la loi de commande adaptative en position est la suivante :

$$\begin{aligned}\hat{v}_{c1} = L_{c1} \left[ L_{c1}^{-1} R_{c1} \xi_{c31} + L_{c1}^{-1} K_{mc1} \xi_{c2} - K_1 (\xi_{c2} - \xi_{c2d}) - (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) + \right. \\ \left. \dot{\xi}_{c31d} + \hat{M}_{cx11}^{-1} (\hat{C}_{cx11}(\xi_{c1}, \xi_{c2}) \xi_{c2} + \hat{G}_{cx1}(\xi_{c1})) - \hat{M}_{cx11}^{-1} K_{rc1} \xi_{c31} \right]\end{aligned}\quad (4.52)$$

L'expression (4.50) nous assure une stabilité au sens de Lyapunov démontrée par le lemme de Barbalat [13].

#### 4.2.2.1 Calcul de la matrice $W_{cx1}$

Suivant (4.31) et (4.47), la matrice des dynamiques linéarisées  $W_{cx1}$  est exprimée dans le domaine de la tâche. Si précédemment nous avons fait observer que les expressions du modèle dans le domaine de la tâche étaient trop lourdes à gérer en terme de volume et de grandeur, il n'en demeure pas moins vraie que la matrice  $W_{cx}$  qui en résulte le soit encore beaucoup plus. Cela peut vraisemblablement être un handicap non seulement pour la représentation en terme d'encombrement, mais aussi en terme des calculs numériques. Ce handicap peut être pallié si nous faisons une transformation directe à partir de la matrice équivalente  $W$  obtenu dans le domaine articulaire. Cette transformation peut être aisément réalisée à partir de l'organisation que nous allons développer pour la suite.

Le modèle dynamique du robot dans l'espace articulaire en minimisant la force peut être exprimé de la façon suivante :

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = W(q, \dot{q}, \ddot{q})p \quad (4.53)$$

où  $W$  est la matrice des dynamiques linéarisées dans le domaine articulaire.

De même, Le modèle dynamique du robot dans l'espace cartésien peut être exprimé de la façon suivante :

$$F_x = M_x(q)\ddot{x} + C_x(q, \dot{x})\dot{x} + G_x(q) = W_x(\dot{x}, \ddot{x})p \quad (4.54)$$

où  $W_x$  est la matrice des dynamiques linéarisées dans le domaine cartésien.

Aussi, Le modèle dynamique du robot dans l'espace de la tâche peut être exprimé de la façon suivante :

$$F_{cx} = M_{cx}(q)\ddot{x}_p + C_{cx}(q, \dot{x}_p)\dot{x}_p + G_{cx}(q) = W_{cx}(\dot{x}_p, \ddot{x}_p)p \quad (4.55)$$

où  $W_{cx}$  est la matrice des dynamiques linéarisées dans le domaine de la tâche.

En tenant compte de la relation suivante [12] ;

$$F_x = J^{+T} \tau \quad (4.56)$$

Par analogie de (4.53) à (4.54) et de (4.55) à (1.54), on peut déduire les transformations ci-dessous. Ainsi :

$$W_x = J^{+T} W \quad (4.57)$$

$$W_{cx} = J_c^T W \quad (4.58)$$

Par voie de conséquence, en considérant (4.58) les matrices découplées en force et en position sont alors exprimées comme suit :

$$W_{cx1} = J_{c1}^{+T} W \quad (4.59)$$

$$W_{cx2} = J_{c2}^{+T} W \quad (4.60)$$

où  $W_{cx1}$  et  $W_{cx2}$  sont les matrices des dynamiques linéarisées dans le domaine de la tâche respectivement pour la boucle de la position et celle de la force.

Les transformations ainsi appliquées trouvent une solution heureuse au problème de la grandeur des expressions et cela résout et met fin à la conception de la première loi de commande de position. Nous allons maintenant passer à la conception de loi de commande en force.

### 4.2.3 Loi de commande en force

L'organisation de la boucle de la force suivant (1.83) en tenant compte de la nouvelle variable du courant peut s'organiser comme suit :

$$\begin{cases} M_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + C_{cx21} \xi_{c2} + G_{cx2} = K_{rc2} \xi_{c32} + f_{int} \\ L_{c2} \dot{\xi}_{c32} + R_{c2} \xi_{c32} + K_{mc2} \xi_{c2} = v_{c2} \end{cases} \quad (4.61)$$

avec  $v_{c2}$  qui est défini en (1.84).

Dans l'expression (4.61) du manipulateur, nous avons l'expression du courant comme suit

$$\xi_{c32} = K_{c2}^{-1} (M_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + C_{cx21} \xi_{c2} + G_{cx2} - f_{int}) \quad (4.62)$$

En remplaçant (4.62) dans l'expression de l'actionneur donnée par (4.61), on a :

$$L_{c2} \dot{\xi}_{c32} + R_{c2} K_{rc2}^{-1} (M_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + C_{cx21} \xi_{c2} + G_{cx2} - f_{int}) + K_{mc2} \xi_{c2} = v_{c2} \quad (4.63)$$

De (4.63), nous pouvons ressortir les deux expressions de la commande en force comme expliqué en (1.84).

Pour compenser les dynamiques de la force, nous avons :

$$v_{c21} = L_{c2} \dot{\xi}_{c32} + R_{c2} K_{rc2}^{-1} (M_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + C_{cx21} \xi_{c2} + G_{cx2}) + K_{mc2} \xi_{c2} \quad (4.64)$$

Pour la commande de la force, nous proposons, pour faire converger la force mesurée vers la force désirée, une commande de type proportionnel de la forme suivante qui va assurer la stabilité du système :

$$v_{c22} = R_{c2} K_{rc2}^{-1} (f_d - k_f (f_{int} - f_d) - k_g \dot{x}_f) \quad (4.65)$$

où  $k_g$ , qui est le facteur d'amortissement avec son expression ci-dessous :

$$k_g = k_v M_{cx21} \quad (4.66)$$

Le schéma bloc du système en boucle fermée est le suivant en considérant les différentes forces d'interactions :

$$f_{cint} = R_{c2} K_{rc2}^{-1} f_{int} \quad (4.67)$$

$$f_{int} = -f_{mes} = (M_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + C_{cx21} \xi_{c2} + G_{cx2} - K_{rc2} \xi_{c32}) \quad (4.68)$$

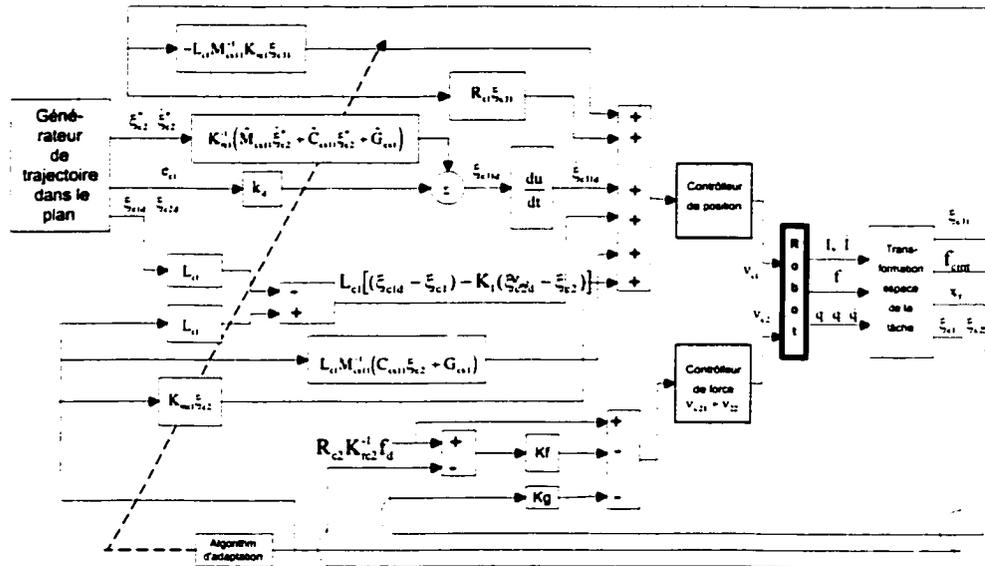


Figure 3 Schéma de commande de la 1<sup>ère</sup> loi de commande

### 4.3 Deuxième loi de commande backstepping force/position

Comme pour la première loi de commande, la mise du système sous forme de variables d'état nous permet d'avoir une forme récursive de façon à réaliser aisément la conception de la commande envisagée. Ces variables d'état sont exprimées dans l'espace de la tâche par la représentation ci-dessous dont la forme en cascade est différente de celle obtenue précédemment en (4.7). Posons pour la boucle de la position donnée par (1.82) les variables d'états suivantes :

$$\begin{cases} \xi_{c1} = x_p \\ \xi_{c2} = \dot{\xi}_{c1} = \dot{x}_p \\ \xi_{c3} = I_{c1} \end{cases} \quad (4.69)$$

Par voie de conséquence, en considérant (4.69), nous obtenons un système en cascade comme montré ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{c1} = \xi_{c2} \\ \dot{\xi}_{c2} = -M_{cx11}^{-1} (C_{cx11} \xi_{c2} + G_{cx1}) + M_{cx11}^{-1} K_{rc1} \xi_{c31} \\ \dot{\xi}_{c31} = -L_{c1}^{-1} (R_{c1} \xi_{c31} + K_{mc1} \xi_{c2}) + L_{c1}^{-1} v_{c1} \end{cases} \quad (4.70)$$

Comme nous l'avons préalablement prévu nous remarquons aisément que le système en cascade représenté par (4.70), est différent de celui obtenu en (4.7).

#### 4.3.1 Loi de commande en position avec suivi de trajectoire

La conception de la deuxième loi de commande SFB contrairement à la précédente, va se faire progressivement pour chaque étape récursive décomposée du système. Ainsi, pour assurer la stabilité globale, nous avons jugé nécessaire et utile de considérer la technique de passivité. Cette technique consiste à s'assurer qu'à chaque étape  $\{i\}$  décomposée du système, nous pouvons avoir respectivement, pour une sortie  $y_{i-1}$  donnée, une fonction stabilisatrice  $\alpha_{i-1}$  jouant le rôle de la loi de commande correspondante, une fonction d'entrée  $v_{i-1}$  et une fonction mémoire  $W_{i-1}$  qui est toujours fixée. Nous assurons de ce fait par l'entremise de la fonction stabilisatrice la stabilité à chaque étape  $\{i\}$  du système. Toute la méthodologie et toutes les relations existantes entre les différents éléments sont expliquées dans le développement du processus ci-dessous. Nous aurons ainsi l'organisation de trois étapes récursives qui correspondent à chacun des sous-systèmes des paliers du système en cascade.

##### Étape 1

Considérons le premier état du système tel que :

$$\dot{\xi}_{c1} = \xi_{c2} \quad (4.71)$$

L'expression (4.71) est de la forme :

$$\dot{\xi}_{c1} = f(\xi_{c1}) + g(\xi_{c1})\xi_{c2} \quad (4.72)$$

où les fonctions  $f(\xi_{c1}) = 0$  et  $g(\xi_{c1}) = \bar{1}$ .

En considérant  $\xi_{c2}$  comme une entrée virtuelle pour (4.71), il faut d'abord déterminer une commande stabilisatrice  $\alpha_0$  et une fonction mémoire  $W_0$  comme indiqué en (3.41) de façon à ce que :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{c1} = \alpha_0 + v_0 \\ y_0 = (L_g W_0)^T(\xi_{c1}) \end{cases} \quad (4.73)$$

(4.73) est un système passif avec comme entrée auxiliaire  $v_0$  et comme sortie  $y_0$  qui dépend d'une fonction mémoire  $W_0$ .

(4.71) est un système du premier ordre,  $\alpha_0$  et  $W_0$  se déterminent aisément.

$$\alpha_0 = -K_0(\xi_{c1} - \xi_{c1d}) + \dot{\xi}_{c1d} \quad (4.74)$$

avec  $K_0$  est un vecteur de gain qui assure la convergence asymptotique.

$$W_0 = \frac{1}{2}(\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T(\xi_{c1} - \xi_{c1d}) \quad (4.75)$$

La sortie  $y_0$  qui se calcule à partir de la fonction mémoire  $W_0$  et est égale à :

$$y_0 = \frac{\partial W_0}{\partial \xi_{c1}} g(\xi_{c1}) = \frac{\partial W_0}{\partial \xi_{c1}} = \xi_{c1} - \xi_{c1d} \quad (4.76)$$

On peut montrer que le système (4.73) est effectivement passif, car :

$$\begin{aligned}
\dot{W}_0 &= (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d}) = (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\alpha_0 + \nu_0 - \xi_{c2d}) \\
&= -\mathbf{K}_0 (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) + (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T \nu_0 \\
&\leq y_0^T \nu_0
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Toutes les conditions de stabilisation étant satisfaites, nous passons alors à l'étape suivante.

## Étape 2

Comme précédemment dit, organisons les deux premiers états du système de façon à constituer l'étape 2 comme montré ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{c1} = \xi_{c2} \\ \dot{\xi}_{c2} = -\mathbf{M}_{cx11}^{-1} (\mathbf{C}_{cx11} \xi_{c2} + \mathbf{G}_{cx1}) + \mathbf{M}_{cx11}^{-1} \mathbf{K}_{rc1} \xi_{c31} \end{cases} \tag{4.78}$$

La fonction stabilisatrice et la sortie de ce sous système sont données par les expressions suivantes conformément à (3.54) et (3.55) :

$$\alpha_1 = (\mathbf{M}_{cx11}^{-1} \mathbf{K}_{rc1})^{-1} [\mathbf{M}_{cx11}^{-1} (\mathbf{C}_{cx11} \xi_{c2} + \mathbf{G}_{cx1}) - y_0 + \dot{\alpha}_0 + \nu_1] \tag{4.79}$$

$$y_1 = \xi_{c2} - \xi_{c2d} + \mathbf{K}_0 (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) \tag{4.80}$$

avec

$$\dot{\alpha}_0 = -\mathbf{K}_0 (\xi_{c2} - \xi_{c2d}) + \dot{\xi}_{c2d} \tag{4.81}$$

La fonction mémoire qui permet de déterminer la sortie  $y_1$  est :

$$W_1 = \frac{1}{2} (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) + \frac{1}{2} y_1^T y_1 \tag{4.82}$$

Le sous-système (4.78) est passif avec  $v_1$  comme entrée et comme sortie  $y_1$ . En effet on peut montrer que :

$$\dot{W}_1 \leq y_1^T v_1 \quad (4.83)$$

L'entrée auxiliaire  $v_1$  est choisie de façon à assurer la convergence asymptotique du sous système passif ci-dessus.

$$v_1 = -K_1 y_1 \quad (4.84)$$

où  $K_1$  est aussi une matrice diagonale définie positive.

### Étape 3

De même, considérant le modèle général (4.70), étant donné que nous sommes au dernier état, la fonction stabilisatrice à ce niveau déterminera la loi de commande générale du système. Ainsi, pour la sortie nous avons :

$$y_2 = \xi_{c31} - \xi_{c31d} - \alpha_1 \quad (4.84)$$

La commande découplée se décompose comme suit :

$$v_c = \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

avec

$$v = J_c^{-T} v_c \quad (4.86)$$

La loi de commande en position est exprimée de la façon suivante :

$$v_{c1} = L_{c1} \left[ L_{c1}^{-1} [R_{c1} \xi_{c31} + K_{mc1} \xi_{c2}] - y_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_{c1}} \dot{\xi}_{c1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_{c2}} \dot{\xi}_{c2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_{c1d}} \dot{\xi}_{c1d} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_{c2d}} \dot{\xi}_{c2d} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial p} \dot{p} + v_2 \right] \quad (4.87)$$

avec respectivement :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_{c1}} \dot{\xi}_{c1} = (M_{cx11}^{-1} K_{rc1})^{-1} (-\bar{I} - K_1 K_0) \xi_{c2} \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_{c2}} \dot{\xi}_{c2} = (M_{cx11}^{-1} K_{rc1})^{-1} (-M_{cx11}^{-1} C_{cx11} - K_0 - K_1) (-M_{cx11}^{-1} (C_{cx11} \xi_{c2} + G_{cx1}) + M_{cx11}^{-1} K_{rc1} \xi_{c31}) \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_{c1d}} \dot{\xi}_{c1d} = (M_{cx11}^{-1} K_{rc1})^{-1} (I + K_1 K_0) \xi_{c2d} \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_{c2d}} \dot{\xi}_{c2d} = (M_{cx11}^{-1} K_{rc1})^{-1} (K_0 + K_1) \xi_{c2d} \quad (4.91)$$

C'est en remplaçant l'expression de la commande dans le système général que nous obtenons un système passif avec comme entrée  $v_2$  et comme sortie  $y_2$ .

En effet on peut aussi montrer que :

$$\dot{W}_2 \leq y_2^T v_2 \quad (4.92a)$$

$$v_2 = -K_2 y_2 \quad (4.92a)$$

Le système est rendu asymptotiquement stable par le choix de  $v_2$  comme ci-dessus indiqué.

En analysant (4.91) et (4.92a-4.92f), on valide par conséquent l'expression donnée par (3.55) où nous avons un système passif et qui est stabilisé asymptotiquement.

### 4.3.2 Loi de commande adaptative en position

La loi de commande exprimée en (4.91) est valide si nous connaissons parfaitement tous les paramètres du système. Comme cela est loin d'être le cas, nous allons faire la conception d'une commande adaptative non linéaire. Comme vous allez le remarquer, cette conception est originale dans la mesure où nous ne l'avons rencontré nulle part du moins pour les revues et articles que nous avons eu le privilège de consulter.

Ainsi, l'expression (1.82) du manipulateur, en tenant compte de l'estimation des paramètres et de la mise des éléments sous forme de variables d'état peut s'écrire logiquement de la façon suivante :

$$K_{rc1} \xi_{c31} = W_{cx11} (\xi_{c1}, \xi_{c2}, \dot{\xi}_{c2}) p \quad (4.93)$$

où  $W_{cx11}$  est la matrice régresseur et  $p = [p_1; p_2; \dots p_{22}]^T$  est le vecteur des paramètres du système.

Suivant l'organisation faite à la section 4.3.1 pour la commande de position, l'adaptation des paramètres trouvera sa solution au niveau de l'étape 2 car les matrices M et C et le vecteur G concernés par l'estimation des paramètres s'y trouvent.

Ainsi, à l'étape 1 définie par l'expression (4.71) qui est valide, ajoutant  $-\xi_{c2d}$  de part et d'autre, on obtient ce qui suit.

$$\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d} = \xi_{c2} - \xi_{c2d} \quad (4.94)$$

L'étape 2 quant à elle est exprimée comme montré ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d} = \xi_{c2} - \xi_{c2d} \\ M_{cx11} \dot{\xi}_{c2} = -C_{cx11} \xi_{c2} - G_{cx1} + K_{rc1} u_2 \end{cases} \quad (4.95)$$

où  $u_2$  est considéré pour la circonstance comme la nouvelle commande du système.

Les paramètres  $p$  du système, ne peuvent pas être connus avec précision. C'est pour cela que nous aurons recours aux paramètres estimés  $\hat{p}$ . Ainsi, en posant l'erreur des paramètres suit :

$$\tilde{p} = p - \hat{p}$$

L'expression de l'étape 2 qui dépend aussi de  $p$ , peut être reformulée comme suit en tenant compte de l'erreur des paramètres :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d} = \xi_{c2} - \xi_{c2d} \\ \left\{ \hat{M}_{cx11} + \tilde{M}_{cx11} \right\} \dot{\xi}_{c2} = - \left\{ \hat{C}_{cx11} + \tilde{C}_{cx11} \right\} \xi_{c2} - \hat{G}_{cx1} - \tilde{G}_{cx1} + K_{rc1} u_2 \end{cases} \quad (4.96)$$

où  $\hat{M}_{cx11}$ ,  $\hat{C}_{cx11}$ ,  $\hat{G}_{cx1}$ ,  $\tilde{M}_{cx11}$ ,  $\tilde{C}_{cx11}$  et  $\tilde{G}_{cx1}$  représentent les matrices estimées et les matrices des erreurs.

Après le développement de (4.96), nous avons ci-dessous une expression logiquement équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d} = \xi_{c2} - \xi_{c2d} \\ \dot{\xi}_{c2} = -\hat{M}_{cx11}^{-1} \left[ \tilde{M}_{cx11} \dot{\xi}_{c2} + \tilde{C}_{cx11} \xi_{c2} + \tilde{G}_{cx1} \right] - \hat{M}_{cx11}^{-1} \left[ \hat{C}_{cx11} \xi_{c2} + \hat{G}_{cx1} - K_{rc1} u_2 \right] \end{cases} \quad (4.97)$$

Par rapport à la nouvelle formulation des expressions liée à l'adaptation des paramètres, par hypothèse la loi de commande stabilisatrice  $\hat{\alpha}_1$  prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 = & (\hat{M}_{cx11}^{-1} K_{rc1})^{-1} \left[ \hat{M}_{cx11}^{-1} (\hat{C}_{cx11} \xi_{c2} + \hat{G}_{cx1}) - (\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d}) - K_0 (\xi_{c2} - \xi_{c2d}) + \dot{\xi}_{c2d} - \right. \\ & \left. K_1 (\xi_{c2} - \xi_{c2d} + K_0 (\xi_{c1} - \xi_{c1d})) \right] \end{aligned} \quad (4.98)$$

En sachant que  $u_2 = \hat{\alpha}_1$ , et en remplaçant (4.98) dans (4.97) en place et lieu de  $u_2$ , on

aboutit à l'expression suivante qui revêt une importance capitale, car elle nous servira de base pour organiser la loi d'adaptation :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d} = \xi_{c2} - \xi_{c2d} \\ \dot{\xi}_{c2} - \dot{\xi}_{c2d} = -\hat{M}_{cx11}^{-1} \left[ \tilde{M}_{cx11} \dot{\xi}_{c2} + \tilde{C}_{cx11} \xi_{c2} + \tilde{G}_{cx1} \right] - (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) - K_0 (\xi_{c2} - \xi_{c2d}) - \\ K_1 (\xi_{c2} - \xi_{c2d} + K_0 (\xi_{c1} - \xi_{c1d})) \end{cases} \quad (4.99)$$

Nous tenons à faire remarquer que [4.99] respecte bien l'hypothèse 3.1 du chapitre précédent.

### 4.3.3 Recherche de la deuxième loi d'adaptation des paramètres

Dans la majorité des cas, lorsqu'on fait la conception d'une loi d'adaptation, comme on l'a fait pour la première loi de commande, mathématiquement on s'appuie toujours sur une fonction candidate. C'est en calculant la dérivée de cette fonction candidate et en adoptant une certaine logique liée à la commande, que la loi d'adaptation peut être mise en place.

La deuxième loi d'adaptation des paramètres que nous allons mettre en place s'appuiera sur une fonction candidate de Lyapunov. Cette fonction candidate sera issue de notre propre fonction mémoire conformément à la stabilité due au principe de la passivité. Notre argumentation se justifie pleinement lorsqu'on se réfère au théorème 3.3.1 du sous-chapitre 3.3.

Ainsi, en reposant la fonction mémoire déduite de l'étape 2 qui prend la dénomination de fonction candidate de Lyapunov comme suit :

$$W_1 = \frac{1}{2} (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) + \frac{1}{2} y_1^T y_1 + \frac{1}{2} \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \quad (4.100)$$

En substituant (4.80) dans (4.100), puis en calculant la dérivée de cette nouvelle fonction mémoire, on obtient les résultats ci-dessous:

$$\dot{W}_1 = (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T (\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d}) + [\xi_{c2} - \xi_{c2d} + K_0(\xi_{c1} - \xi_{c1d})]^T [\dot{\xi}_{c2} - \dot{\xi}_{c2d} + K_0(\dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d})] + \dot{\tilde{p}}^T \Gamma \tilde{p} \quad (4.101)$$

En considérant les valeurs de  $\dot{\xi}_{c1}$  et  $\dot{\xi}_{c2}$  déduit de (4.99) puis en faisant respectivement leur substitution dans (4.101) on obtient ce qui suit après quelques manipulations mathématiques et des simplifications :

$$\dot{W}_1 = -y_1^T \hat{M}_{cx1}^{-1} W_{cx1} \tilde{p} - (\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T K_0^T (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) - y_1^T K_1 y_1 + \dot{\tilde{p}}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \quad (4.102)$$

Si pour l'adaptation des paramètres nous prenons l'expression suivante tirée de (4.102) comme suit :

$$-y_1^T \hat{M}_{cx1}^{-1} W_{cx1} \tilde{p} + \dot{\tilde{p}}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} = 0 \quad (4.103)$$

alors la dérivée de la fonction candidate exprimée par (4.102) prendra la forme ci-dessous assortie du respect de la condition des systèmes passifs. Ainsi :

$$\dot{W}_1 = -(\xi_{c1} - \xi_{c1d})^T K_0^T (\xi_{c1} - \xi_{c1d}) - y_1^T K_1 y_1 \leq -y_1^T K_1 y_1 \quad (4.104)$$

La condition (4.104) étant aisément vérifiée et satisfaite, nous pouvons ressortir la loi d'adaptation des paramètres à partir de (4.103) comme suit :

$$\Gamma^{-T} \dot{\tilde{p}} = W_{cx1}^T \hat{M}_{cx1}^{-T} y_1 \quad (4.105)$$

(4.105) est logiquement équivalent à :

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \Gamma^T \mathbf{W}_{\text{cx1}}^T \hat{\mathbf{M}}_{\text{cx11}}^{-T} \mathbf{y}_1 \quad (4.106)$$

où  $\hat{\mathbf{M}}_{\text{cx11}}^{-1}$  doit toujours être définie positive et un mécanisme indicateur doit vérifier la validité de cette condition.

De (4.106) nous avons l'implication ci-dessous :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) = \Gamma^T \mathbf{W}_{\text{cx1}}^T \hat{\mathbf{M}}_{\text{cx11}}^{-T} \mathbf{y}_1 \quad (4.107)$$

(4.107) nous donne ce qui suit :

$$-\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \Gamma^T \mathbf{W}_{\text{cx1}}^T \hat{\mathbf{M}}_{\text{cx11}}^{-T} \mathbf{y}_1 \quad (4.108)$$

De (4.108) nous avons la loi d'adaptation suivante :

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\Gamma^T \mathbf{W}_{\text{cx1}}^T \hat{\mathbf{M}}_{\text{cx11}}^{-1} \mathbf{y}_1 \quad (4.109)$$

Comme nous l'avons dit précédemment, les paramètres  $\mathbf{p}$  du système sont constants.

En définitive, la loi de commande adaptative en position est la suivante :

$$\hat{\mathbf{v}}_{\text{cl}} = \mathbf{L}_{\text{cl}} \left[ \mathbf{L}_{\text{cl}}^{-1} [\mathbf{R}_{\text{cl}} \dot{\xi}_{\text{c31}} + \mathbf{K}_{\text{mcl}} \dot{\xi}_{\text{c2}}] - \mathbf{y}_1 + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{\text{c1}}} \dot{\xi}_{\text{c1}} + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{\text{c2}}} \dot{\xi}_{\text{c2}} + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{\text{c1d}}} \dot{\xi}_{\text{c1d}} + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{\text{c2d}}} \dot{\xi}_{\text{c2d}} + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \dot{\hat{\mathbf{p}}} + \mathbf{u}_2 \right] \quad (4.110)$$

avec respectivement :

$$\frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{\text{c1}}} \dot{\xi}_{\text{c1}} = (\hat{\mathbf{M}}_{\text{cx11}}^{-1} \mathbf{K}_{\text{rc1}})^{-1} (-\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_0) \xi_{\text{c2}}$$

$$\frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{c2}} \dot{\xi}_{c2} = (\hat{M}_{cx11}^{-1} K_{rc1})^{-1} (-\hat{M}_{cx11}^{-1} \hat{C}_{cx11} - K_0 - K_1) (-\hat{M}_{cx11}^{-1} (\hat{C}_{cx11} \xi_{c2} + \hat{G}_{cx1}) + \hat{M}_{cx11}^{-1} K_{rc1} \xi_{c31})$$

$$\frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{c1d}} \dot{\xi}_{c1d} = (\hat{M}_{cx11}^{-1} K_{rc1})^{-1} (I + K_1 K_0) \xi_{c2d}$$

$$\frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{c2d}} \dot{\xi}_{c2d} = (\hat{M}_{cx11}^{-1} K_{rc1})^{-1} (K_0 + K_1) \dot{\xi}_{c2d}$$

$$\hat{u}_2 = -K_2 \hat{y}_2$$

Les expressions matérialisant la commande de force sont les mêmes que celles exprimées en (4.64) et (4.65).

En considérant :

$$f_{cint} = R_{c2} K_{rc2}^{-1} f_{int} \quad (4.111)$$

avec  $f_{int}$  qui est calculée en (4.68).

Le schéma bloc du système en boucle fermée est le suivant :

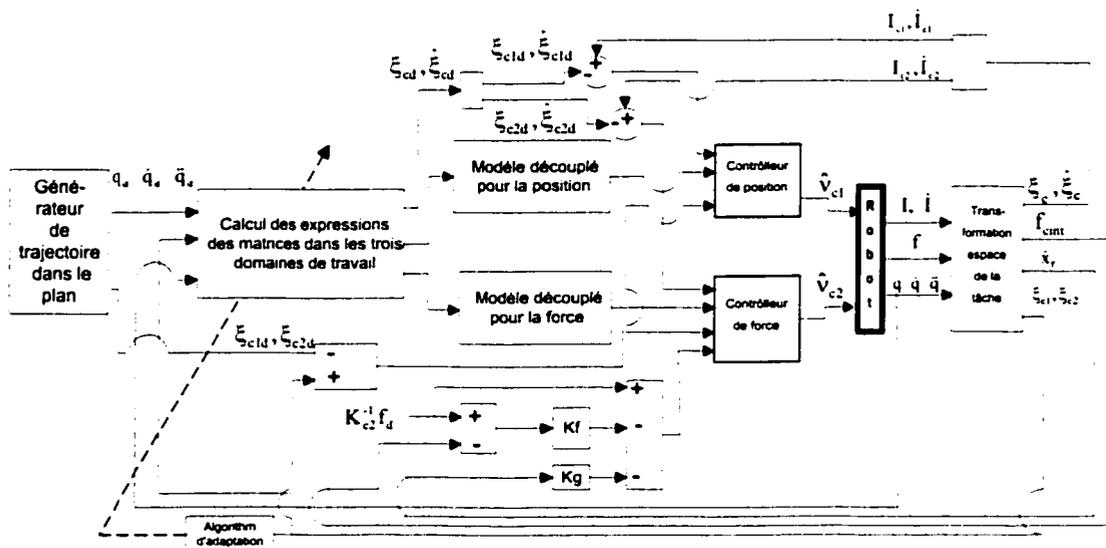


Figure 4 Schéma de commande de la 2<sup>ème</sup> loi de commande  
(2<sup>ème</sup> adaptation des paramètres)

#### 4.3.4 Loi de commande adaptative en force

La première loi d'adaptation étant valide, nous allons chercher une méthode pour avoir plus de robustesse au niveau de cette adaptation des paramètres. Cette robustesse se trouve aisément en faisant intervenir les éléments de la dynamique de la force dans l'expression de l'adaptation des paramètres. Ainsi, avant de passer à la mise en place de la loi d'adaptation des paramètres comme ainsi préconisé, nous allons analyser au préalable la loi de commande adaptative pour la force et nous allons convertir les expressions de la force en courant. Nous garderons quand même l'appellation de commande en force en sous-entendant que c'est un contrôle en courant. D'ailleurs un courant est l'équivalent d'une force en électrique. Nous faisons remarquer une fois de plus que la conception qui va suivre relève d'une contribution originale puisqu'elle n'existe nulle part ou du moins par rapport aux revues et articles que nous avons eu le privilège de consulter.

Nous allons de prime à bord considérer la transformation suivante dans l'optique de faire une commande en courant au profit de celle en force. Ainsi nous allons poser la relation entre la force et le courant comme suit :

$$\mathbf{K}_{rc2} \xi_{int} = \mathbf{f}_{int} \quad (4.112)$$

Nous pensons logiquement que l'organisation de la boucle de la force peut se faire en substituant l'expression de la force d'interaction  $\mathbf{f}_{int}$  donnée par (4.112) dans (4.61) et en tenant compte de l'adaptation des paramètres qui en découle suivant la logique du sous chapitre précédent. Ainsi, nous avons une nouvelle expression du modèle dynamique comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}}_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + \tilde{\mathbf{M}}_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + \hat{\mathbf{C}}_{cx21} \xi_{c2} + \tilde{\mathbf{C}}_{cx21} \xi_{c2} + \hat{\mathbf{G}}_{cx2} + \tilde{\mathbf{G}}_{cx2} = \mathbf{K}_{rc2} \xi_{c32} + \mathbf{K}_{rc2} \xi_{int} \\ \mathbf{L}_{c2} \dot{\xi}_{c32} + \mathbf{R}_{c2} \xi_{c32} + \mathbf{K}_{mc2} \xi_{c2} = \hat{\mathbf{v}}_{c2} \end{cases} \quad (4.113)$$

L'expression (1.84) étant toujours valide pour le découplage.

(4.113) est logiquement équivalent à :

$$\begin{cases} \hat{M}_{cx21}\dot{\xi}_{c2} + \hat{C}_{cx21}\xi_{c2} + \hat{G}_{cx2} = K_{rc2}\xi_{c32} + K_{rc2}\xi_{int} - \tilde{M}_{cx21}\dot{\xi}_{c2} - \tilde{C}_{cx21}\xi_{c2} - \tilde{G}_{cx2} \\ L_{c2}\dot{\xi}_{c32} + R_{c2}\xi_{c32} + K_{mc2}\xi_{c2} = \hat{v}_{c2} \end{cases} \quad (4.114)$$

En posant :

$$-\tilde{M}_{cx21}\dot{\xi}_{c2} - \tilde{C}_{cx21}\xi_{c2} - \tilde{G}_{cx2} = -W_{cx21}\tilde{p} \quad (4.115)$$

En remplaçant (4.115) dans (4.114), on obtient :

$$\begin{cases} \hat{M}_{cx21}\dot{\xi}_{c2} + \hat{C}_{cx21}\xi_{c2} + \hat{G}_{cx2} = K_{rc2}\xi_{c32} + K_{rc2}\xi_{int} - W_{cx21}\tilde{p} \\ L_{c2}\dot{\xi}_{c32} + R_{c2}\xi_{c32} + K_{mc2}\xi_{c2} = \hat{v}_{c2} \end{cases} \quad (4.116)$$

L'expression du courant déduite de (4.117) du manipulateur est donnée par l'expression suivante :

$$\xi_{c32} = K_{rc2}^{-1}(\hat{M}_{cx21}\dot{\xi}_{c2} + \hat{C}_{cx21}\xi_{c2} + \hat{G}_{cx2} - K_{rc2}\xi_{int} + W_{cx21}\tilde{p}) \quad (4.117)$$

En remplaçant (4.117), dans l'expression (4.116) de l'actionneur, on a :

$$L_{c2}\dot{\xi}_{c32} + R_{c2}K_{rc2}^{-1}(\hat{M}_{cx21}\dot{\xi}_{c2} + \hat{C}_{cx21}\xi_{c2} + \hat{G}_{cx2} + W_{cx21}\tilde{p}) + K_{mc2}\xi_{c2} = \hat{v}_{c2} + R_{c2}\xi_{int} \quad (4.118)$$

Si pour compenser les dynamiques de la position on a :

$$\hat{v}_{c2} = L_{c2}\dot{\xi}_{c32d} + R_{c2}K_{rc2}^{-1}(\hat{M}_{cx21}\dot{\xi}_{c2} + \hat{C}_{cx21}\xi_{c2} + \hat{G}_{cx2}) + K_{mc2}\xi_{c2} + \hat{v}_{c22} \quad (4.119)$$

alors pour la dynamique de la force, on aura

$$\mathbf{R}_{c2} \mathbf{K}_{rc2}^{-1} \mathbf{W}_{cx21} \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{R}_{c2} \xi_{int} + \hat{\mathbf{v}}_{c22} \quad (4.120)$$

De (4.119), la première commande de la force qui compense les dynamiques est exprimée comme suit :

$$\hat{\mathbf{v}}_{c21} = \mathbf{L}_{c2} \dot{\xi}_{c32d} + \mathbf{R}_{c2} \mathbf{K}_{rc2}^{-1} \left( \hat{\mathbf{M}}_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + \hat{\mathbf{C}}_{cx21} \xi_{c2} + \hat{\mathbf{G}}_{cx2} \right) + \mathbf{K}_{mc2} \xi_{c2} \quad (4.121)$$

Tout en sachant que la force d'interaction est l'opposée de la force mesurée, nous pouvons logiquement poser :

$$\xi_{cint} = -\xi_{cmes} \quad (4.122)$$

En considérant (4.122), nous avons la deuxième expression de la commande en force comme montré ci-dessous :

$$\hat{\mathbf{v}}_{c22} = \mathbf{R}_{c2} \left[ \dot{\xi}_{c32d} - \mathbf{k}_p (\xi_{cmes} - \xi_{c32d}) - \mathbf{k}_v (\dot{\xi}_{cmes} - \dot{\xi}_{c32d}) \right] \quad (4.123)$$

#### 4.3.5 Recherche de la troisième loi d'adaptation des paramètres

Pour mettre en place une troisième loi d'adaptation valide, nous aurons nécessairement besoin d'une expression contenant les termes des dynamiques linéarisés. C'est pour cela que nous allons substituer (4.122) et (4.123) dans (4.120) :

$$\mathbf{R}_{c2} \mathbf{K}_{rc2}^{-1} \mathbf{W}_{cx21} \tilde{\mathbf{p}} = -\mathbf{R}_{c2} \xi_{cmes} + \mathbf{R}_{c2} \left[ \dot{\xi}_{c32d} - \mathbf{k}_p (\xi_{cmes} - \xi_{c32d}) - \mathbf{k}_v (\dot{\xi}_{cmes} - \dot{\xi}_{c32d}) \right] \quad (4.124)$$

Après simplification de (4.124), on obtient :

$$\mathbf{K}_{rc2}^{-1} \mathbf{W}_{cx2} \tilde{\mathbf{p}} = -(\mathbf{k}_p + 1)(\xi_{mes} - \xi_{c32d}) - \mathbf{k}_v(\dot{\xi}_{mes} - \dot{\xi}_{c32d}) \quad (4.125)$$

La troisième loi d'adaptation se fera en tenant compte simultanément de la boucle de la force, qui est représentée par le courant, et de la boucle de la position. C'est pour cela que nous allons développer l'adaptation des paramètres de position séparément de celle de la force avant de les sommer dans un même vecteur pour avoir une adaptation commune.

Ainsi, pour la position, on peut mettre au préalable (4.99) sous forme matricielle en posant respectivement :

$$\mathbf{e}_p = \xi_c - \xi_{cd} \quad (4.126)$$

avec :

$$\xi_c - \xi_{cd} = \begin{bmatrix} \xi_{c1} - \xi_{c1d} \\ \xi_{c2} - \xi_{c2d} \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \dot{\xi}_c - \dot{\xi}_{cd} \quad (4.128)$$

où

$$\dot{\xi}_c - \dot{\xi}_{cd} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{c1} - \dot{\xi}_{c1d} \\ \dot{\xi}_{c2} - \dot{\xi}_{c2d} \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

En considérant (4.129) et (4.128), (4.127) et (4.126), (4.99) prend alors la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} - \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_0 & -\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{c1} - \xi_{c1d} \\ \xi_{c2} - \xi_{c2d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{\mathbf{M}}_{cx11}^{-1} \mathbf{W}_{cx1} \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

(4.130) qui représente l'expression qui va nous servir pour l'adaptation des paramètres au compte de la boucle de position est de la forme :

$$\dot{e}_p = A_p e_p + W_{aug} \tilde{p} \quad (4.131)$$

avec respectivement :

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I - K_1 K_0 & -K_0 - K_1 \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

$$W_{aug} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{M}_{cx11}^{-1} W_{cx1} \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

Comme pour la position, posons les expressions ci-dessous pour la force :

$$e_f = \xi_{mes} - \xi_{c32d} \quad (4.134)$$

$$\dot{e}_f = \dot{\xi}_{mes} - \dot{\xi}_{c32d} \quad (4.135)$$

En considérant (4.134) et (4.135), (4.125) prend alors la forme suivante :

$$K_{rc2}^{-1} W_{cx2} \tilde{p} = -k_v \dot{e}_f - (k_p + 1) e_f \quad (4.136)$$

(4.136) est logiquement équivalent à :

$$\frac{K_{rc2}^{-1} W_{cx2} \tilde{p}}{k_v} = -\dot{e}_f - \frac{(k_p + 1)}{k_v} e_f \quad (4.137)$$

De (4.137) nous pouvons ressortir l'expression unique de  $\dot{e}_f$  comme montré ci-dessous :

$$\dot{e}_f = -\frac{(k_p + 1)}{k_v} e_f - \frac{K_{rc2}^{-1} W_{cx2} \tilde{p}}{k_v} \quad (4.138)$$

(4.138) est l'expression qui va nous servir pour l'adaptation des paramètres au compte de la force. Comme pour les deux précédentes commandes, nous allons nous baser sur

une fonction candidate. Ainsi, en mettant (4.131) et (4.138) sous forme matricielle, on a :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_p \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & -\frac{(k_p + 1)}{k_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{aug} \\ -\frac{K_{rc2}^{-1} W_{cx2}}{k_v} \end{bmatrix} \tilde{p} \quad (4.139)$$

(4.139) est de la forme :

$$\dot{e}_c = A_\tau e_c + W_\tau \tilde{p} \quad (4.140)$$

où nous avons respectivement :

$$A_\tau = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & -\frac{(k_p + 1)}{k_v} \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

$$W_\tau = \begin{bmatrix} W_{aug} \\ -\frac{K_{rc2}^{-1} W_{cx2}}{k_v} \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

En considérant maintenant la fonction candidate de Lyapunov ci-dessous suivie du calcul de sa dérivée, on obtient :

$$v(t) = e_c^T Q e_c + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \quad (4.143)$$

$$\dot{v}(t) = \dot{e}_c^T Q e_c + e_c^T Q \dot{e}_c + 2\tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \quad (4.144)$$

La matrice  $A_\tau$  de (4.140) étant stable, cela signifie qu'il existe une matrice  $Q$  définie positive telle que :

$$A_{\tau}^T Q + Q A_{\tau} = -\bar{I} \quad (4.145)$$

En remplaçant l'expression (4.140) dans (4.144), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= (e_c^T A_{\tau}^T + \tilde{p}^T W_{\tau}^T) Q e_c + e_c^T Q (A_{\tau} e + W_{\tau} \tilde{p}) + 2\tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \\ &= e_c^T (A_{\tau}^T Q + Q A_{\tau}) e_c + 2\tilde{p}^T W_{\tau}^T Q e_c + 2\tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \end{aligned} \quad (4.146)$$

En substituant le résultat de (4.145) dans (4.146), on obtient :

$$\dot{v} = -e_c^T e_c + 2\tilde{p}^T W_{\tau}^T Q e_c + 2\tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \quad (4.147)$$

Si l'on choisit pour la loi d'adaptation, l'expression ci-dessous

$$2\tilde{p}^T W_{\tau}^T Q e_c + 2\tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} = 0 \quad (4.148)$$

Nous avons alors l'expression (4.147) définie comme suit :

$$\dot{v} = -e_c^T e_c \leq 0 \quad (4.149)$$

(4.149) est semi-définie négative et nous assure une stabilité au sens de Lyapunov démontrée par le lemme de Barbalat. Alors on choisit  $\dot{\tilde{p}}$  en résolvant (4.148) :

$$\Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} = -W_{\tau}^T Q e_c \quad (4.150)$$

(4.150) implique ce qui suit :

$$\dot{\tilde{p}} = -\Gamma W_{\tau}^T Q e_c \quad (4.151)$$

cette dernière expression donnée par (4.151) nous permet de poser :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) = -\Gamma \mathbf{W}_\tau^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_c$$

d'où

$$-\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\Gamma \mathbf{W}_\tau^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_c$$

La loi d'adaptation est alors égale à :

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \Gamma \mathbf{W}_\tau^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_c \quad (4.152)$$

Le Q de la loi d'adaptation est la solution de l'équation (4.145) de Lyapunov.

Nous avons en définitive, les lois de commande adaptative pour la position et pour la force comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_{c1} = \mathbf{L}_{c1} \left[ \mathbf{L}_{c1}^{-1} [\mathbf{R}_{c1} \xi_{c31} + \mathbf{K}_{mc1} \xi_{c2}] - y_1 + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{c1}} \dot{\xi}_{c1} + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{c2}} \dot{\xi}_{c2} + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{c1d}} \dot{\xi}_{c1d} + \right. \\ \left. \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \xi_{c2d}} \dot{\xi}_{c2d} + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \dot{\hat{\mathbf{p}}} + \hat{\mathbf{U}}_2 \right] \end{aligned} \quad (4.153)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{c21} = \mathbf{L}_{c2} \dot{\xi}_{c32d} + \mathbf{R}_{c2} \mathbf{K}_{rc2}^{-1} (\hat{\mathbf{M}}_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + \hat{\mathbf{C}}_{cx21} \dot{\xi}_{c2} + \hat{\mathbf{G}}_{cx2}) + \mathbf{K}_{mc2} \xi_{c2} \quad (4.154)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{c22} = \mathbf{R}_{rc2} \left[ \xi_{32d} - k_p (\xi_{mes} - \xi_{32d}) - k_v (\dot{\xi}_{mes} - \dot{\xi}_{32d}) \right] \quad (4.155)$$

Le schéma bloc du système en boucle fermée est le suivant en considérant :

$$\xi_{cmes} = \mathbf{K}_{rc2}^{-1} \xi_{mes} \quad (4.156)$$

$$\dot{\xi}_{cmes} = \mathbf{K}_{rc2}^{-1} \dot{\xi}_{mes} \quad (4.157)$$

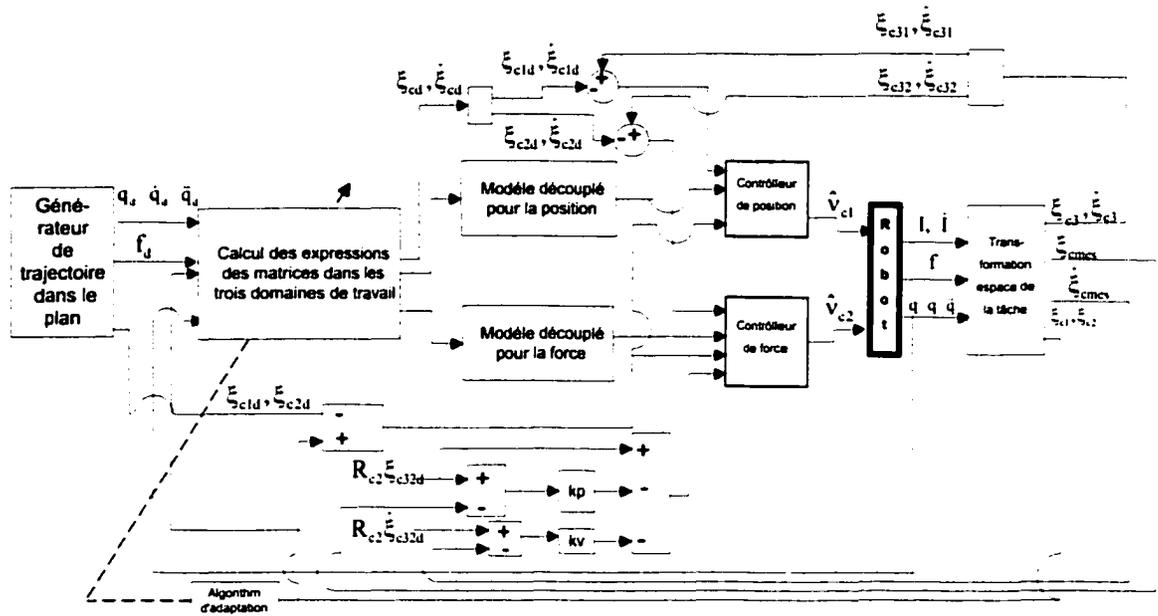


Figure 5 Schéma de commande de la 2<sup>e</sup> loi de commande (3<sup>e</sup> adaptation des paramètres)

#### 4.4 Gestion des tâches

Dans ce sous chapitre, nous allons expliquer les conditions dans lesquelles les simulations ont été effectuées, en dépit des perturbations qui peuvent être occasionnées. L'objectif ici est celui de créer des conditions pour que les simulations numériques soient le plus près possible de la réalité pratique et avec comme préoccupation principale, assurer pour la commande en force, une bonne adhésion entre la fin de l'effecteur du robot et son environnement de travail aussi bien, lors du premier contact, que tout le long du suivi de trajectoire.

Pour les deux conceptions des lois de commande que nous avons eu à réaliser, nous avons bien spécifié la fonction des deux boucles de rétroaction pour les différentes lois de commandes de force, à savoir que la première devait compenser les dynamiques de la boucle de force, tandis que la deuxième imposera la commande de force proprement

dite. Dans la structure de la commande en force, il est nécessaire d'imposer d'une manière ou d'une autre un amortissement. Ce problème peut être réglé directement ou indirectement suivant la nature de l'expression de la commande obtenue :

- Directement si la structure de la commande mise en place inclut un facteur d'amortissement ;
- Indirectement si la commande n'inclut pas ce facteur d'amortissement concerné.

Dans les expressions de la première loi de commande en force, le problème de l'amortissement est réglé directement. Cela se matérialise par l'expression de l'amortissement représentée en considérant la vitesse  $\dot{x}_f$  dans la direction de la contrainte, la matrice des inerties en force  $M_{cx21}$  et un gain de force  $k_v$ . Le produit de ces trois éléments ( $k_v \times M_{cx21} \times \dot{x}_f$ ) soustrait de toute la dynamique de force, nous assure l'existence d'un certain amortissement dans l'expression de la commande en force comme cela est représenté en (4.65). Cette expression atténue les oscillations aussi bien lorsque l'outil accoste sur la surface de travail pour le cas du premier contact que lorsqu'il est en pleine exécution.

Par contre, il peut s'avérer que dans les résultats de la conception d'une commande en force, cette expression d'amortissement ne peut pas s'intégrer dans la forme générale comme pour le cas de la deuxième commande de notre conception donnée par (4.123). Ce handicap peut être pallié suivant différentes méthodes. Pour ce qui concerne notre seconde loi de commande, nous avons pensé à mettre en place une loi de commande en force qui fonctionnera parallèlement à la commande réelle. Le principe est celui de tenir compte de la loi de commande ainsi conçue lors que l'outil est en contact avec la surface de travail. Si cette condition n'est pas remplie, on fait appel à une commande parallèle qui a pour objet uniquement d'introduire l'expression de l'amortissement de façon à faire revenir l'outil en contact avec la surface de contact afin d'assurer efficacement son amortissement pour une meilleure adhésion entre la fin de l'effecteur et la surface de

contact. Il est à noter que cette loi de commande parallèle ne fonctionne que d'une manière temporaire, c'est-à-dire juste le temps de remettre l'outil en contact avec la surface de travail. La transition douce de cette loi de commande est assurée par un commutateur qui permute la loi de commande auxiliaire. La différence avec la loi de commande valide c'est qu'elle a un facteur d'amortissement en plus. Sur le plan pratique, avec une vitesse moyenne, l'aspect de l'amortissement est quasiment nul sur la surface de contact.

#### 4.5 Paramètres du système

On entend par paramètres du système, le regroupement organisé des masses, des inerties, des longueurs et des centres de masses. Ces paramètres peuvent être répertoriés dans un tableau comme montré ci-dessous et sont valables pour l'architecture du robot expérimental à quatre axes :

Tableau V

Paramètres du système

$p_1 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$	$p_9 = I_{xx4}$	$p_{17} = m_3 y_3 L_2$
$p_2 = I_{zz2} + m_2 x_2^2 + m_4 L_2^2 + m_4 L_3^2 + m_4 z_4^2 + m_3 y_3^2 + 2m_4 z_4 L_3$	$p_{10} = I_{yy4}$	$p_{18} = m_4 L_3^2$
$p_3 = m_3 y_3^2$	$p_{11} = I_{zz4}$	$p_{19} = I_{zz3} + m_3 y_3^2 + m_4 L_3^2 + m_4 z_4^2 + 2m_4 z_4 L_3$
$p_4 = -m_4 z_4 + m_3 y_3 - m_4 L_3$	$p_{12} = m_1$	$p_{20} = m_4 z_4^2$
$p_5 = m_3 y_3$	$p_{13} = m_3 L_2$	$p_{21} = m_4 z_4$
$p_6 = m_4 L_3$	$p_{14} = m_4 L_3 L_2$	$p_{22} = m_4 z_4 L_2$
$p_7 = I_{xx3}$	$p_{15} = m_4 L_2$	
$p_8 = I_{yy3}$	$p_{16} = m_4 z_4 L_3$	

**Valeur des paramètres :**

**Masses :**  $m_1 = 3.71 \text{ kg}$  ;  $m_2 = 3.72 \text{ kg}$  ;  $m_3 = 9.165 \text{ kg}$ ,  $m_4 = 1.156 \text{ kg}$  ;

**Longueurs :**  $L_1 = 0.1731 \text{ m}$  ;  $L_2 = 0.11229 \text{ m}$  ;  $L_3 = 0.1769 \text{ m}$

**Centre de masse :**  $x_2 = 0.1151 \text{ m}$  ;  $y_3 = 0.2301 \text{ m}$  ;

**Inertie :**  $I_{z2} = 3 \text{ kg.m}^2$  ;  $I_{z3} = 4 \text{ kg.m}^2$  ;  $I_{y3} = 7 \text{ kg.m}^2$  ;  $I_{x3} = 7 \text{ kg.m}^2$  ;

**Paramètres électriques :**

$L = [3.16 \ 0 \ 0; 0 \ 3.16 \ 0; 0 \ 0 \ 3.16] \times 10^{-3} \text{ V.s/A}$  ;

$R = [11.5 \ 0 \ 0; 0 \ 11.5 \ 0; 0 \ 0 \ 11.5] \text{ Ohm}$  ;

$K_r = [2.124 \ 0 \ 0; 0 \ 2.124 \ 0; 0 \ 0 \ 2.124] \text{ V.s}$  ;

$K_m = [2 \ 0 \ 0; 0 \ 2 \ 0; 0 \ 0 \ 2] \text{ V.s}$  ;

La trajectoire désirée est un triangle tracé dans plan avec les coordonnées suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -(D_p + A_p \times A_x + B_p \times A_y) / C_p \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} A_x + \lambda_1 U_x \\ A_y + \lambda_1 U_y \\ A_z + \lambda_1 U_z \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} B_x + \lambda_2 V_x \\ B_y + \lambda_2 V_y \\ B_z + \lambda_2 V_z \end{bmatrix}$$

où  $A_p = 2$ ,  $B_p = 0.1$ ,  $C_p = 0.47$  et  $D_p = -0.5$  sont les éléments du plan,  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$ ,  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  les vecteurs directeurs de l'équation du plan.  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  sont les coordonnées initiales des points A, et B. Le temps de parcours entre les points A, B et C est  $T_i = \lambda_i / v_u$ ,  $i = 1, 2, 3$ .  $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\lambda_2 = 0.5$  et  $\lambda_3 = 0.4$  déterminent la distance entre les points A, B et C et  $V_u = 0.25 \text{ m/s}$  est la vitesse.

#### 4.6 Résultats de la simulation numérique

Nous allons vous présenter les résultats des simulations numériques pour les deux lois de commandes adaptatives conçues. Il est à noter que les deux premières lois d'adaptations

des paramètres à des petites différences près, nous donnent les mêmes résultats. C'est pour cette raison que nous ne donnerons que les résultats de la première loi d'adaptation des paramètres concernée par la première loi de commande et de la troisième loi d'adaptation des paramètres concernés par la deuxième loi de commande.

Les résultats dans l'ensemble sont acceptables pour les deux cas de figures précités. Nous précisons toutefois que nous avons plus de robustesse au niveau de la troisième loi d'adaptation des paramètres en tenant compte que la force a été convertie spécifiquement en courant et l'adaptation des paramètres est faite avec les deux boucles de rétroaction.

#### 4.6.1 Résultats de la première loi de commande

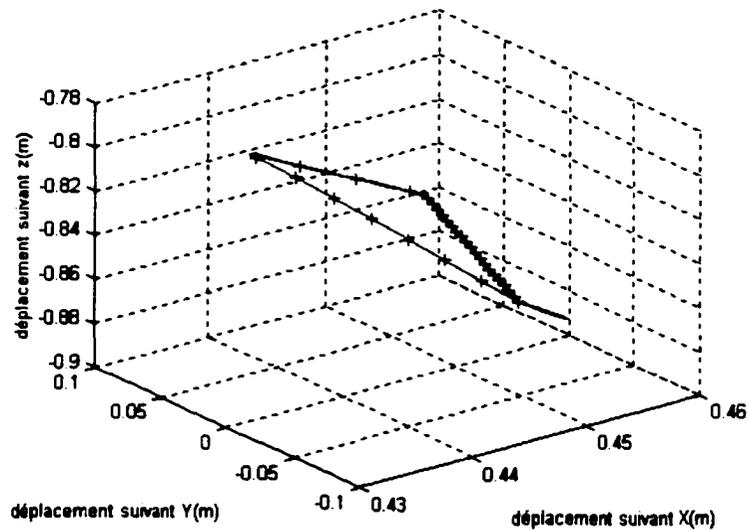


Figure 6 Trajectoires désirée et réelle du robot en trois dimensions dans un plan

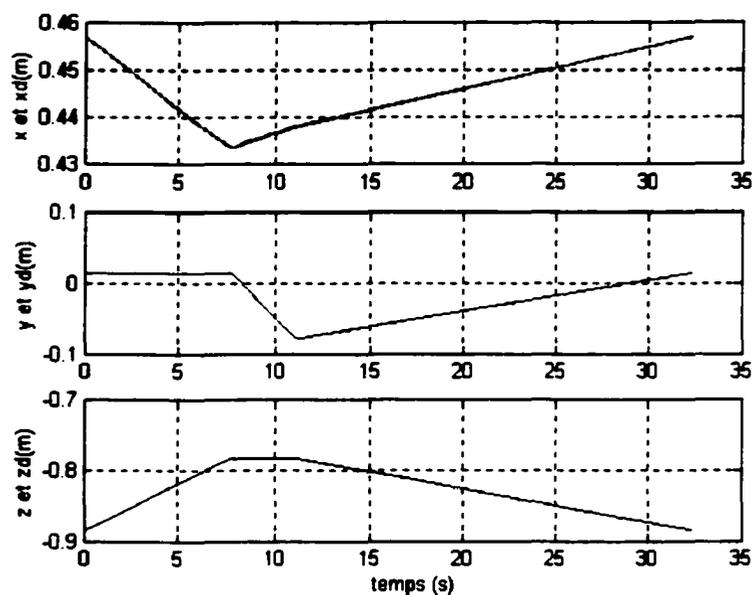


Figure 7 Suivi des positions réelles et désirées cartésiennes

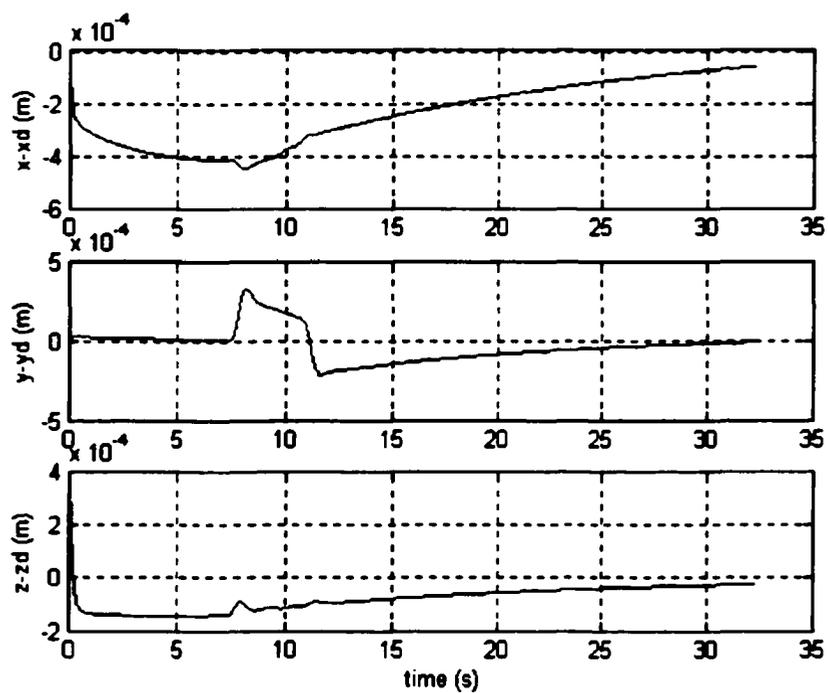


Figure 8 Erreurs de suivi des positions réelles et désirées cartésiennes

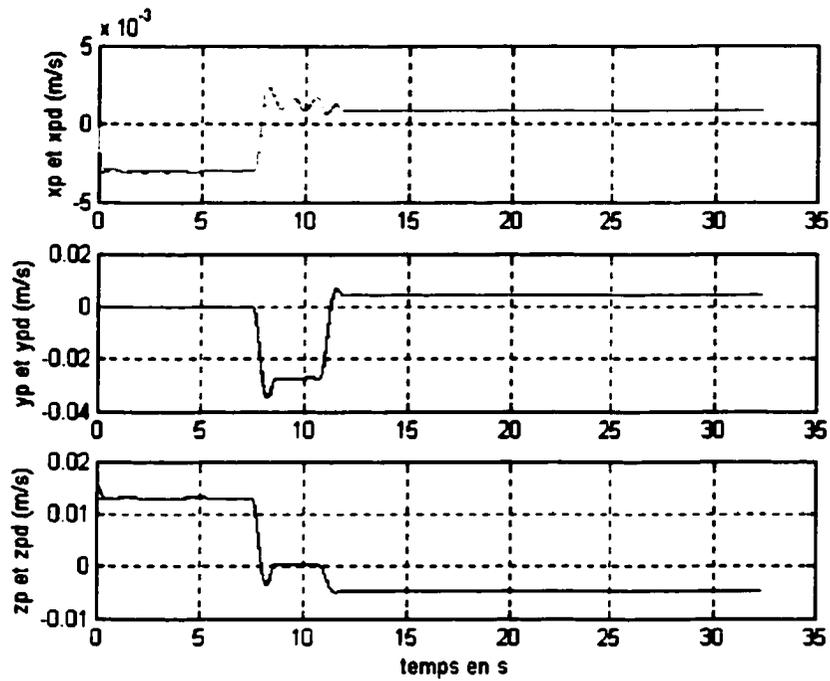


Figure 9 Suivi des vitesses réelles et désirées cartésiennes

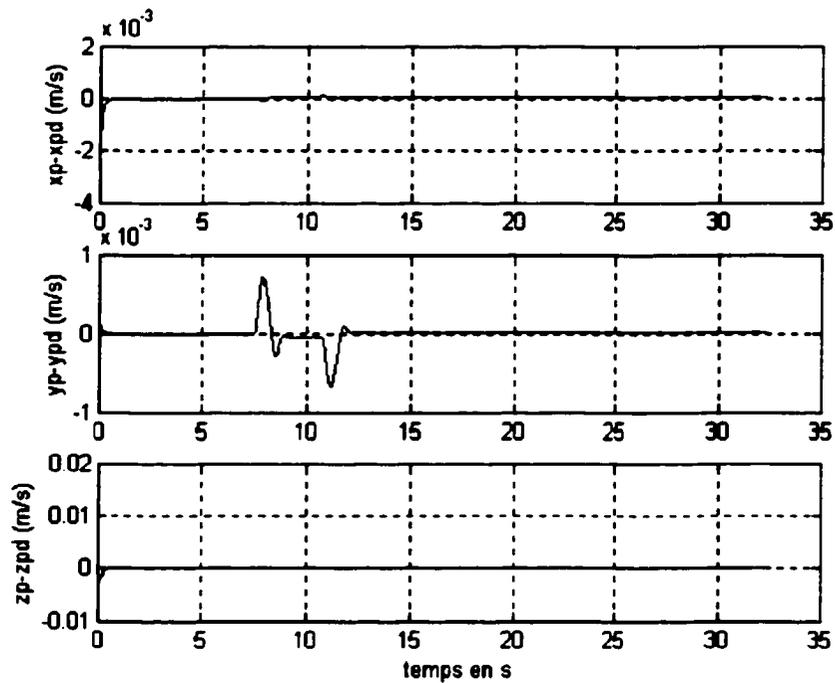


Figure 10 Erreurs des vitesses réelles et désirées cartésiennes

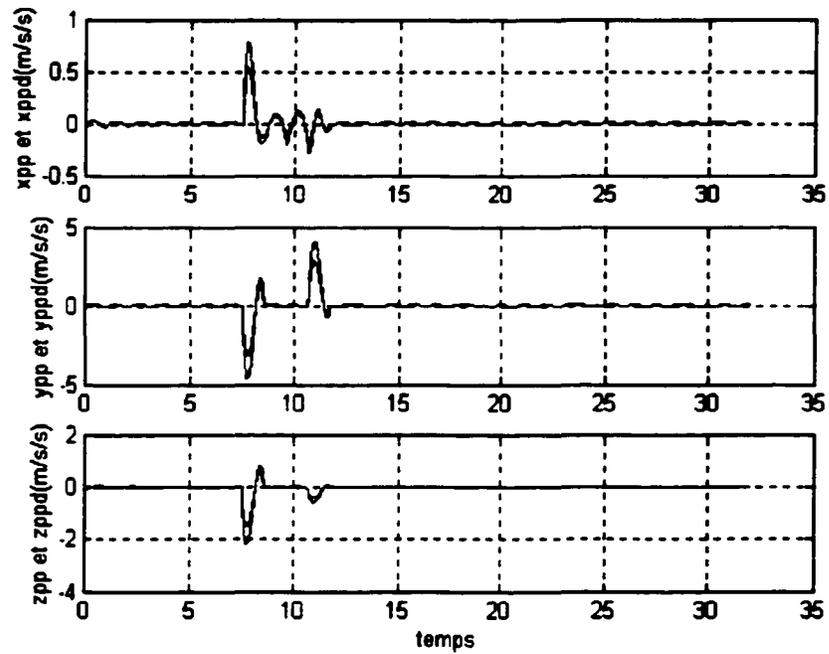


Figure 11 Suivi des accélérations réelles et désirées cartésiennes

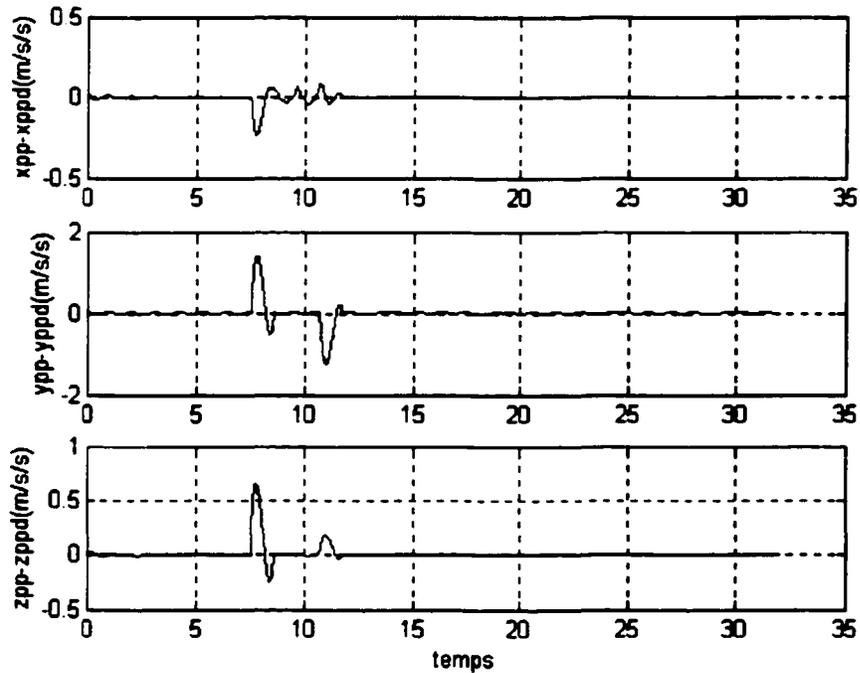


Figure 12 Erreurs des accélérations réelles et désirées cartésiennes

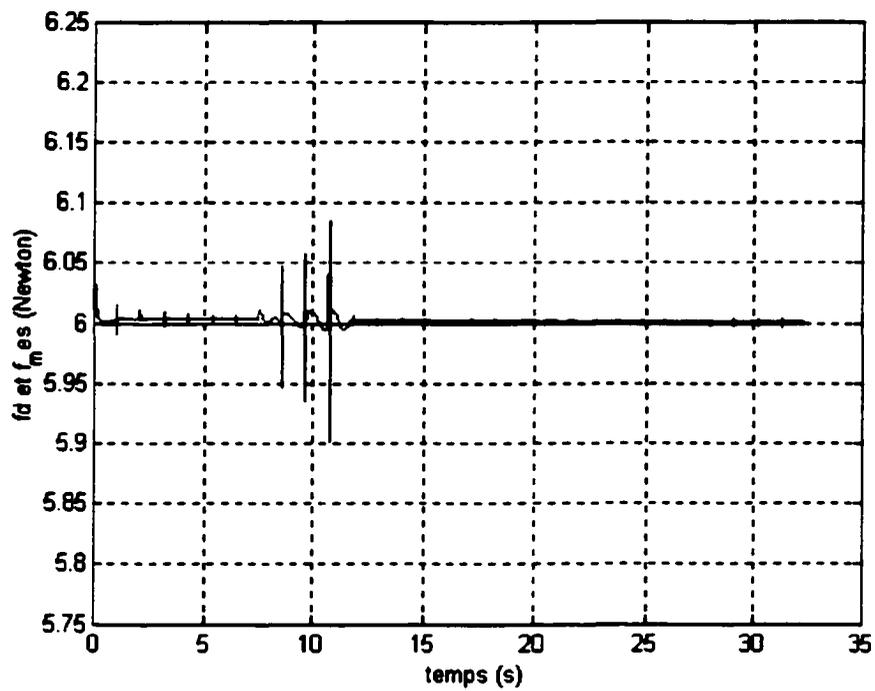


Figure 13 Suivi des forces réelle et désiré

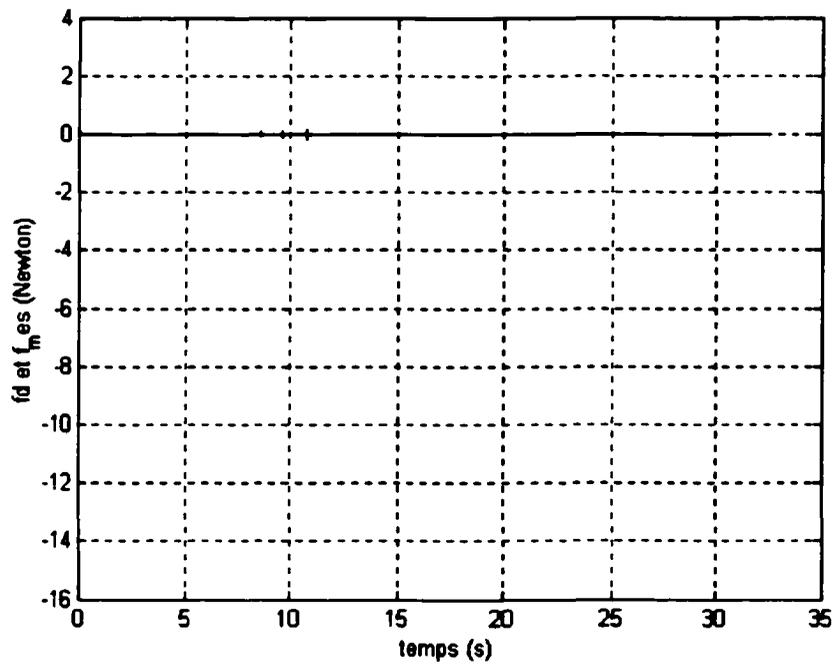


Figure 14 Suivi des forces réelle et désiré ( $f_d=0$ )

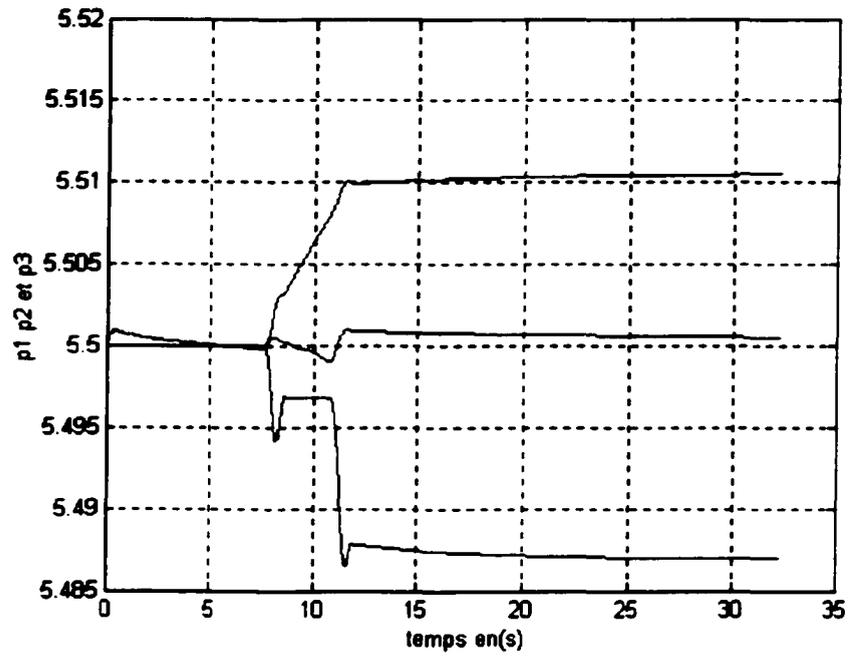


Figure 15 Paramètres estimés

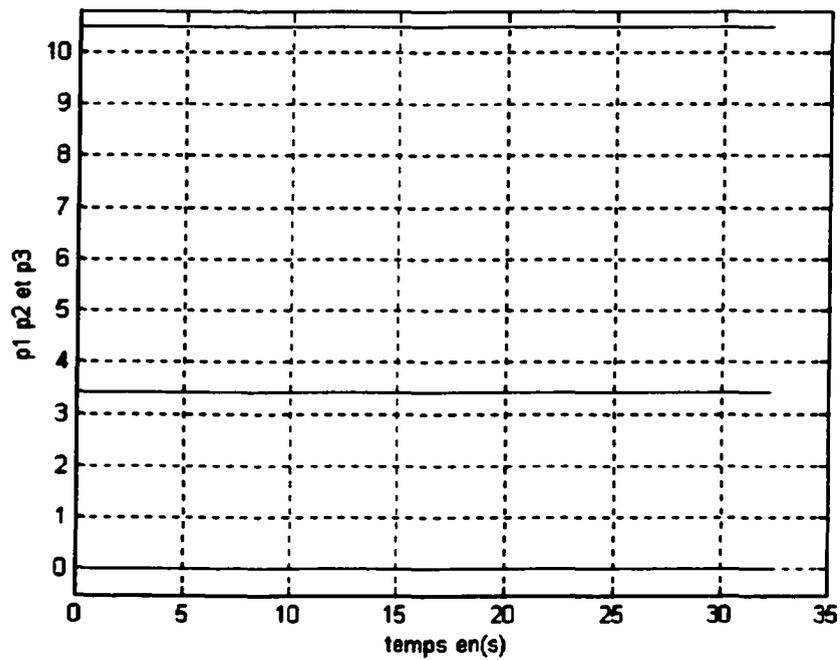


Figure 16 Paramètres estimés (valeurs initiales =valeurs réelles)

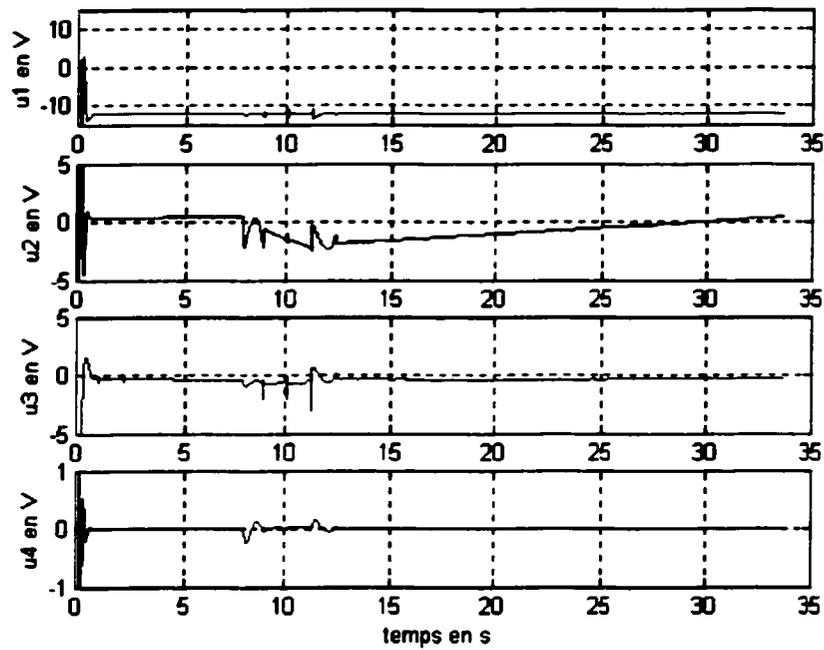


Figure 17 Commande du système

#### 4.6.2 Résultats de la deuxième loi de commande

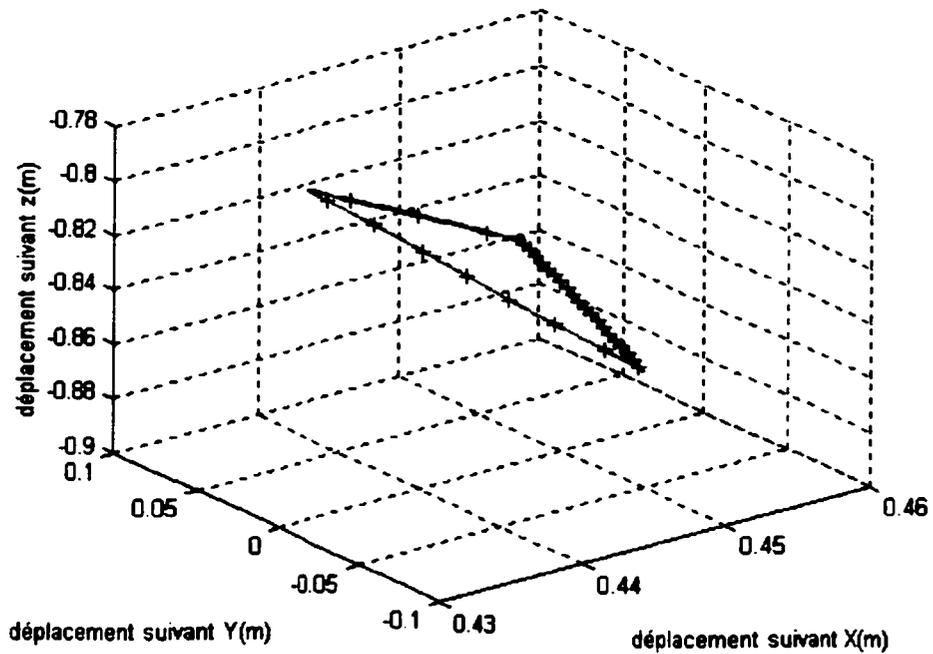


Figure 18 Trajectoires désirée et réelle du robot en trois dimensions dans un plan

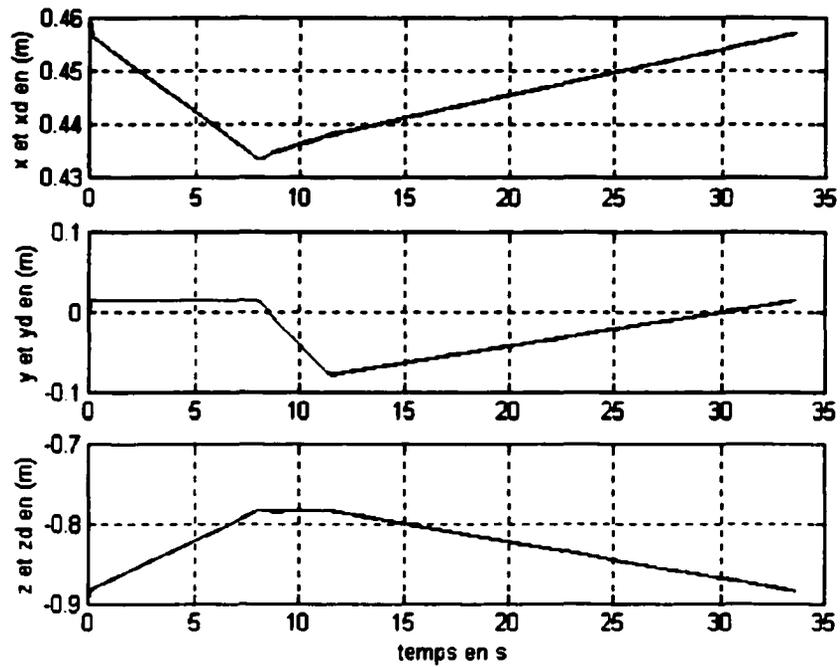


Figure 19 Suivi des positions réelles et désirées cartésiennes

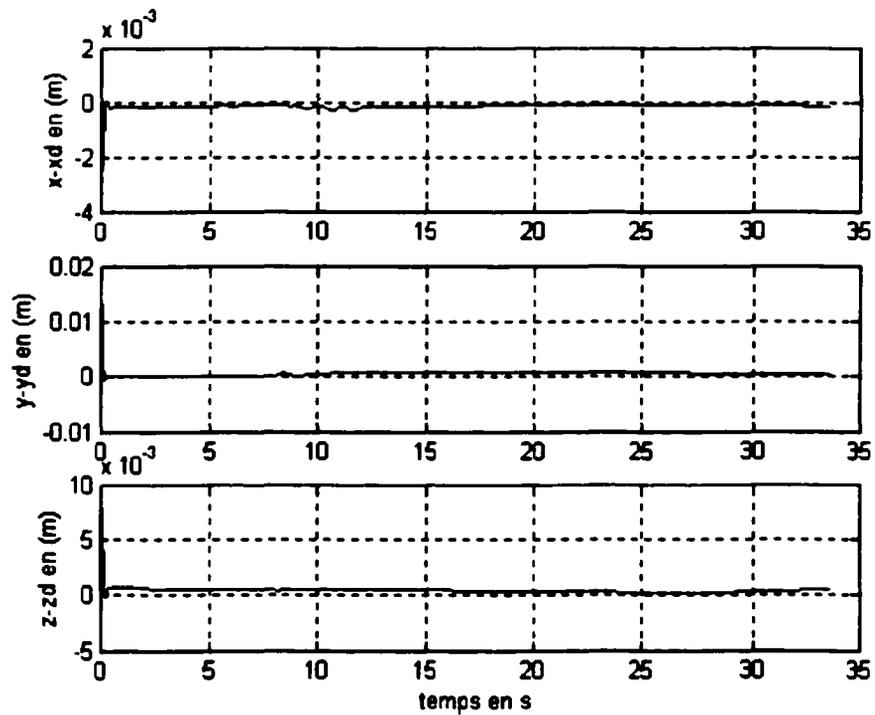


Figure 20 Erreurs des positions réelles et désirées cartésiennes

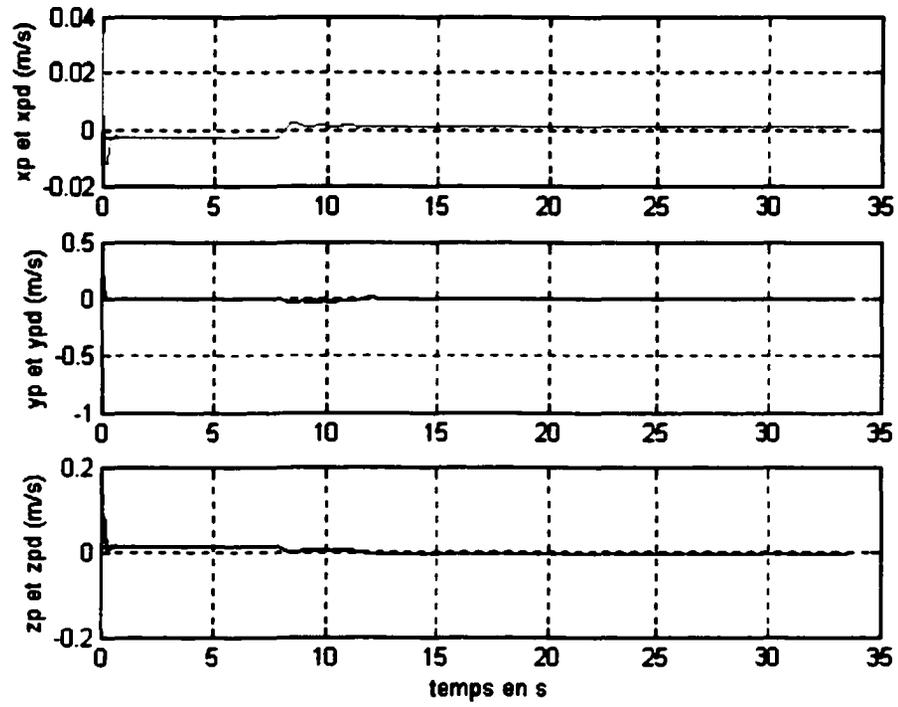


Figure 21 Suivi des vitesses réelles et désirées cartésiennes

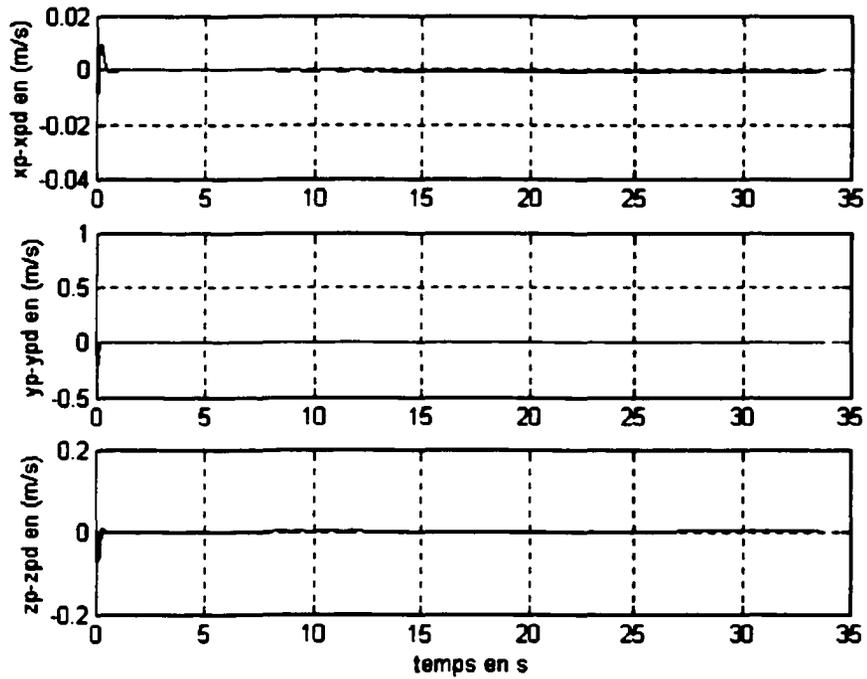


Figure 22 Erreurs des vitesses réelles et désirées cartésiennes

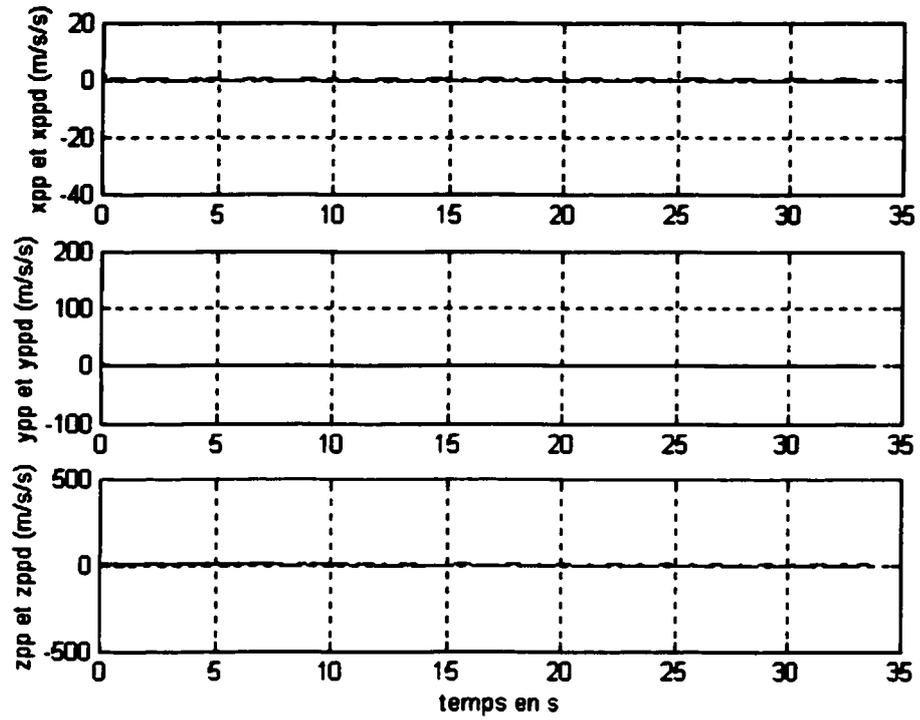


Figure 23 Suivi des accélérations réelles et désirées cartésiennes

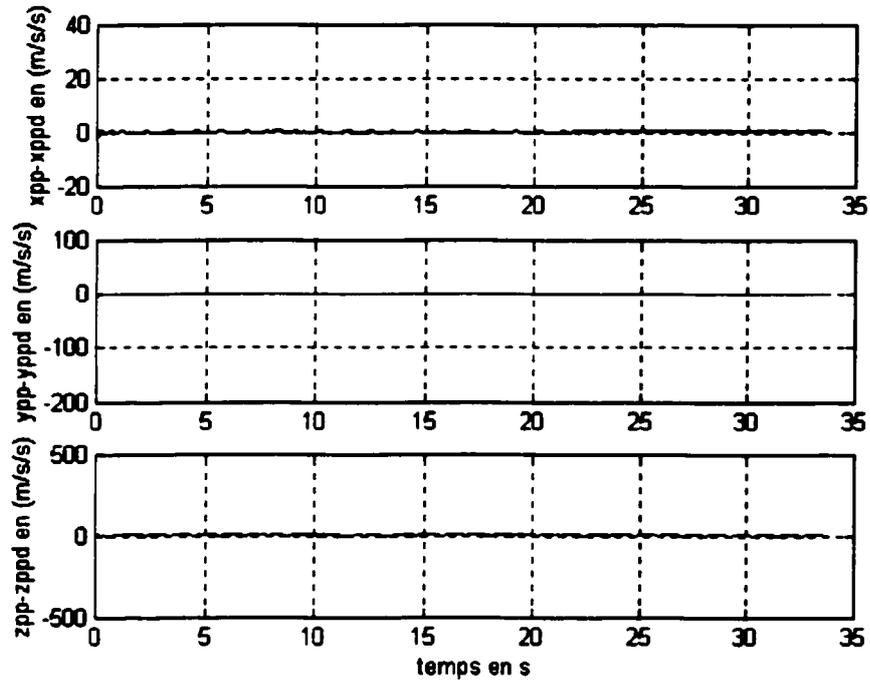


Figure 24 Erreurs des accélérations réelles et désirées cartésiennes

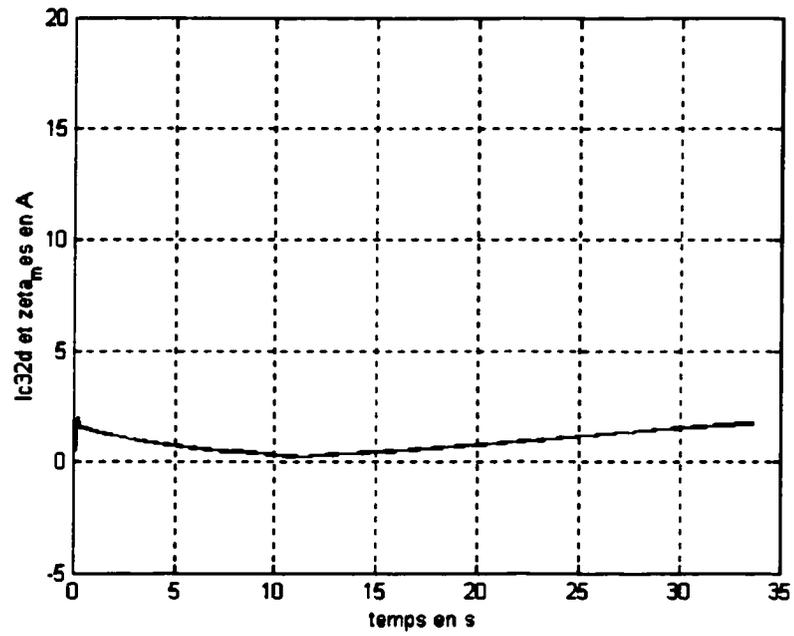


Figure 25 Suivi des courants réel et désiré

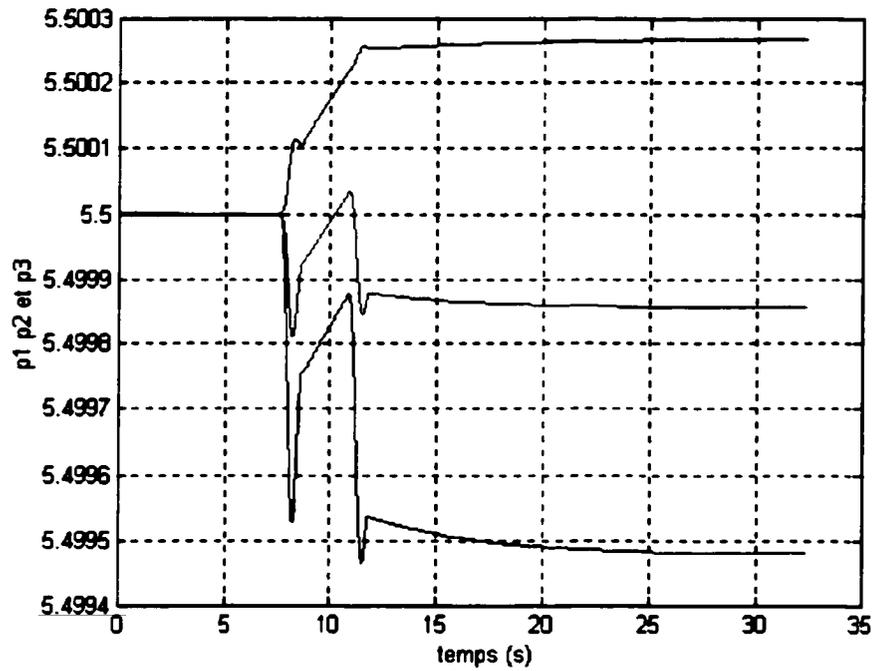


Figure 26 Paramètres estimés

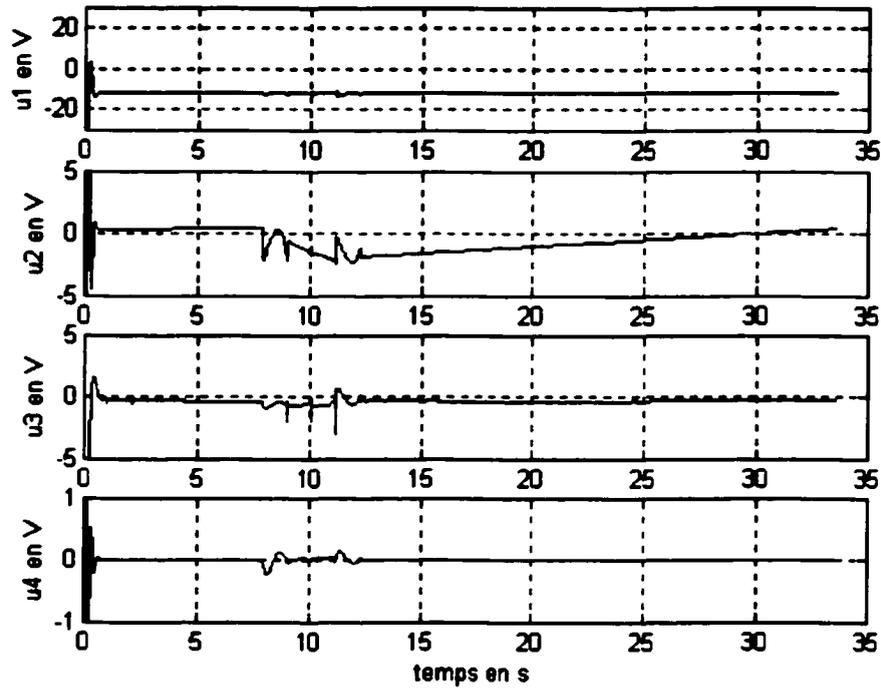


Figure 27 Commande du système

#### 4.7 Analyse des résultats de la simulation

L'analyse des résultats de la simulation se fera d'une manière globale et comparative entre les deux types de conceptions des lois de commandes. Les résultats du suivi du triangle désiré obtenu pour les deux commandes comme le spécifient les figures 6 et 16 sont très corrects. En bleu, nous avons les triangles désirés, tandis qu'en rouge nous avons les triangles réels. Ces performances communes peuvent vraisemblablement s'expliquer par le fait que les deux lois de commandes pour les positions obéissent à la même logique de conception. Les suivis des positions cartésiennes sont acceptables comme le montre les figures 7 et 19. Il en est de même pour les vitesses et accélérations montrées respectivement par les figures 9, 21, 11 et 23. Aussi en bleu, nous avons les courbes désirées, tandis qu'en rouge, nous avons les courbes réelles. Les erreurs de suivi

pour les positions, les vitesses et les accélérations sont négligeables comme le montre les figures 8, 10, 12, 20, 22 et 24.

Le suivi des forces réelle (courbe en rouge) et désirée (courbe en bleu) pour la première loi de commande montrée à la figure 13 est parfait tout comme pour la figure 14 dont l'effort désiré est nul. Il en est de même pour le suivi des courants réel et désiré représentant les forces pour La deuxième loi de commande comme cela est montré à la figure 25. Pour une force désirée nulle, il n'est pas possible d'avoir un courant nul parce qu'il y a une dynamique qui existe.

Les paramètres estimés du système montré aux figures 15, 16 et 26 convergent mais pas vers les valeurs réelles. Ils convergent rapidement quand les conditions initiales correspondent aux valeurs réelles de ces paramètres comme le montre la figure 16. Toujours est-il que l'essentielle est la convergence.

Les commandes du système donné par les figures 17 et 27 se comportent normalement.

#### **4.8 Conclusion**

Nous avons fait la conception de deux lois de commande SFB en considérant la théorie des systèmes passifs. Au préalable, la matrice des dynamiques linéarisées ( $W_{cx}$ ) concernée pour l'adaptation des paramètres dans le domaine de la tâche n'a pas été calculée par le regroupement des matrices d'inertie et des forces de Coriolis et du vecteur des termes de gravité. Nous avons fait une transformation directe de la matrice équivalente ( $W$ ) du domaine articulaire au domaine de la tâche en utilisant la matrice jacobienne. Cette transformation qui est plus pratique de cette façon est d'autant plus bénéfique dans la mesure où il y a une réduction très remarquable de la quantité des termes générés d'une part et de la simplification notable des calculs symboliques d'autre part. Les deux lois de commandes sont différentes sur quatre aspects à savoir :

- la forme récursive du backstepping de la première loi de commande est différente de la seconde. La première a une forme pure du backstepping et n'a qu'une seule étape en avant. La deuxième a la forme d'un système de la rétroaction linéarisante ayant une forme triangulaire, c'est-à-dire qu'elle a la forme strict-feedback ;
- les fonctions candidates de Lyapunov et la méthodologie pour les trois lois d'adaptation des paramètres concernant les deux lois de commandes sont différentes. La première loi d'adaptation des paramètres est une combinaison de la conception de Slotine et Li et de la théorie des systèmes passifs. La deuxième est une exploitation logique d'une fonction mémoire répondant à toute la logique de la passivité. Enfin la troisième est une loi d'adaptation qui prend en compte les deux boucles de rétroaction en force et position ;
- la commande de force pour la seconde loi de commande concernée par la troisième loi d'adaptation des paramètres est faite par le biais des courants réel et désiré, comparativement à la précédente qui est faite directement par les forces réelle et désirée ;
- enfin le facteur d'amortissement pour la simulation numérique pour la deuxième commande est tenu compte par une conception parallèle. Cet aspect du problème est préoccupant lorsqu'on exploite le robot pour des vitesses assez élevées.

La conception de la commande strict-feedback du backstepping, nous a permis de conserver une bonne partie des non-linéarités du système. Les résultats de la simulation numérique sont satisfaisants sur un plan général. Les paramètres convergent comme on l'aurait souhaité. Lorsque les conditions initiales sont prises arbitrairement, la convergence n'est pas instantanée. Ce handicap est vraisemblablement dû d'une part à la dérivée de la fonction candidate exprimée en (4.50) qui est semi-défini négative et d'autre part aux inverses des matrices des inerties contenues dans la loi d'adaptation des

paramètres. Comparativement aux autres algorithmes tel que le feedback linéarisant, nous avons l'avantage d'avoir des efforts de commande qui sont acceptables. Un des inconvénients mineurs est matérialisé par des expressions matricielles qui sont assez lourdes à gérer en temps de calcul et qui ne sont pas très compatibles avec les inverses des matrices concernées par la loi d'adaptation des différentes estimations des paramètres. Toutes les erreurs de suivi sont dans les limites d'acceptation.

Le découplage du système a cet avantage d'imposer une commande de force à la convenance du concepteur pour une même commande de position. Nous pouvons ainsi imposer une commande en force proprement dite et une commande en courant pour une même commande de position.

La prise en compte de la boucle de la force dans la troisième loi d'adaptation des paramètres procure aussi des résultats acceptables.

## **CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS**

Nous avons d'abord fait la modélisation cinématique et la modélisation dynamique d'un robot expérimental. Nous avons ensuite mis au point une trajectoire triangulaire suivant la génération polynomiale d'ordre 5 couramment appelé splines quintiques. Nous avons poursuivi par l'élaboration d'un résumé qui concerne les théories du backstepping et des systèmes passifs. Nous avons enfin terminé par la conception de deux lois de commande adaptative par la méthode SFB en force force/position assortie à trois lois distinctes pour l'adaptation des paramètres.

La modélisation cinématique nous a permis d'avoir le contrôle des positions, des vitesses et des accélérations du robot à tout instant de son évolution lorsqu'il exécute des tâches. La modélisation dynamique quant à elle nous a fait ressortir le modèle dynamique du robot qui est l'élément de base pour la conception de la commande. A base du modèle dynamique obtenu dans le domaine articulaire, une conversion aboutissant dans le domaine de la tâche a été réalisée. Ce modèle dans le domaine de la tâche a été découplé en deux dynamiques dont une pour la position et l'autre pour la force. Nous faisons toutefois remarquer que le type de robot qui a fait l'objet de nos travaux génère des expressions très complexes. Cela est un handicap non moins négligeable pour les calculs symboliques.

La génération des trajectoires consiste par le biais des manipulations mathématiques, de mettre en pratique une figure géométrique faisant office de trajectoire désirée. Notre trajectoire a été réalisée dans un plan en tenant compte de toutes les transformations possibles liées aux différentes matrices de rotation.

Afin de permettre à tous les lecteurs de la présente thèse de mieux cerner le fil conducteur de nos recherches, nous avons pris le soin de résumer d'abord la technique du backstepping dans une vue globale. Ensuite d'une manière spécifique, nous avons

mis en exergue la théorie de la passivité qui est un concept très important pour le backstepping. Le développement de la théorie de la passivité nous a amené à établir les liens étroits avec d'autres notions telle que la stabilité, l'optimalité, la dissipativité, la détectabilité et l'observabilité. Ces différents concepts définis soit sous formes de théorèmes ou de lemmes, nous ont servi de près ou de loin pour la conception de nos deux lois de commande.

En prélude à la conception des différentes lois de commande, une représentation d'état respective pour chaque conception s'est avérée nécessaire. Cette représentation d'état tient compte d'une part de la boucle de l'actionneur, et d'autre part du découplage du système en force et en position. Cette façon de faire est incontournable à notre avis car, c'est par ce biais que nous pouvons ressortir les formes du backstepping et du SFB telles que nous avons voulu les exploiter. La conception des deux lois de commandes adaptatives, qui tient absolument compte des formes précitées ci-dessus et, avec la prise en compte des notions de passivité, nous fait ressortir d'une manière ou d'une autre le caractère original de nos recherches comme cela est spécifié ci-dessous.

- L'originalité de la première loi de commande se distingue par la combinaison du backstepping, de la passivité et de l'adaptation des paramètres par la méthode directe qui est comparable à la logique de Slotine et Li.
- L'originalité de la seconde loi de commande se remarque aisément par la méthodologie de conception. Cette méthodologie se distingue d'une part par l'exploitation du SFB et de l'introduction d'une fonction candidate de Lyapunov qui reflète une bonne partie de la structure de la fonction mémoire des systèmes passifs pour le compte de la deuxième loi d'adaptation des paramètres. D'autre part cette méthodologie est mise en exergue par la transformation logique du résultat de la commande en force que nous prenons le soin de convertir en courant. L'adaptation des paramètres pour la troisième loi englobe aussi bien la boucle de position que celle de la force. Cela nous assure par conséquent une fiabilité remarquable.

Le fruit des différentes lois de commande obtenu a fait l'objet des simulations numériques. Les résultats des simulations obtenus dans son ensemble sont assez concluants à l'exception des paramètres qui ne convergent pas avec la rapidité qu'on aurait souhaité. Ce handicap est vraisemblablement lié à la fonction de Lyapunov qui est semi-défini négative, aux inverses des matrices des inerties et aux expressions qui sont très grandes et lourdes en calculs numériques. La différence obtenue par rapport à la deuxième loi de commande nous ressort certes une différence de conception mais qui malheureusement n'est pas aussi significative qu'on l'aurait souhaité par rapport à l'estimation des paramètres. Nous aurions souhaité que les paramètres du système convergent rapidement. Aussi pour une force désirée nulle, la première loi de commande réagit comme il se doit, c'est-à-dire que le suivi de force se fait à 0 sans pour autant perturber le reste de la dynamique. Pour la deuxième loi de commande et troisième adaptation des paramètres  $f_d = 0$  n'implique pas  $\xi_{c32d} = 0$ . Ceci peut s'expliquer par le fait que le courant est lié à toute la dynamique de boucle correspondante par conséquent la  $f_d=0$  ne peut pas mettre toute la dynamique à 0. Aussi bien pour un cas comme pour l'autre, aucun cycle limite ne se produit.

Une des limites observées au niveau de la deuxième loi de commande est que le système ne supporte pas des efforts élevés (10 N étant le maximum).

Aux titres des recommandations, nous suggérons que les simulations soient effectuées avec un découplage qui tient compte d'une part de la mobilité de la surface de contrainte et de la direction de la contrainte orientée suivant un angle précis. Aussi une expérimentation pratique mais sur un robot manipulateur à deux axes peut être envisagée. La conception d'une commande backstepping en prenant en compte le concept de la redondance est aussi recommandée.

## **ANNEXE 1**

### **Matrices de transformation homogène et matrices de rotation pour quatre axes**

## 1.1 Matrice de transformation homogène

La matrice de transformation homogène, composée de la paire cinématiques, (rotation et translation) a la forme générale et conventionnelle suivante avec la théorie de D-H [10] :

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1}d_i \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.1})$$

où la partie rotation est une matrice 3x3 constituée exclusivement des trois premières lignes et des trois premières colonnes de (A.1.1). La partie translation quant à elle est un vecteur 3x1 constitué des trois premières lignes de la dernière colonne.

En appliquant la forme générale donnée par (A.1.1) et le tableau III, on obtient les matrices de transformation homogène pour chaque axe ou articulation du robot comme montré ci-dessous :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & L_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

## 1.2 Matrice de transformation homogène dans le référentiel de base

La matrice de transformation homogène dans le référentiel de base s'exprime en faisant successivement les calculs donnés par la forme générale suivante :

$${}^0_nT = {}^0_1T \times {}^1_2T \times \dots \times {}^{n-1}_nT \quad (\text{A.1.3a})$$

Ainsi pour le cas présent de quatre axes, nous avons :

$${}^0_4T = {}^0_1T \times {}^1_2T \times {}^2_3T \times {}^3_4T \quad (\text{A.1.3b})$$

Les calculs qui s'effectuent cependant d'une manière récursive ont les résultats suivants :

$$\begin{aligned} {}^0_2T &= {}^0_1T \times {}^1_2T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & L_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & L_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.4a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0_3T &= {}^0_2T \times {}^2_3T \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & L_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & S_1 & C_1L_2 + L_1 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & -C_1 & S_1L_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.4b}) \end{aligned}$$

$${}^0_4T = {}^0_3T \times {}^3_4T$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & C_1 L_2 + L_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & S_1 L_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3 & -C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3 & C_1 S_2 & C_1 S_2 L_3 + C_1 L_2 + L_1 \\ S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3 & -S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 & S_1 S_2 & S_1 S_2 L_3 + S_1 L_2 \\ S_2 C_3 & -S_2 S_3 & -C_2 & -C_2 L_3 + d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.4c})
\end{aligned}$$

### 1.3 Matrice de rotation

La matrice de rotation  ${}^{i-1}R_i$  comme on l'a spécifié au chapitre 1.1 est la sous-matrice (3x3) de la matrice de transformation homogène donnée par (A.1.1). Elle a naturellement la structure de la forme suivante :

$${}^{i-1}R_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.5})$$

Pour le calcul pratique du robot pour quatre axes, on peut calculer toutes les matrices de rotation  ${}^{i-1}R_i$  soit en appliquant (A.1.5), ou en les lisant directement dans les matrices de transformations homogènes.

$$\begin{aligned}
{}^0R_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^1R_2 &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
{}^2R_3 &= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix}; & {}^3R_4 &= \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S_3 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.6})
\end{aligned}$$

La matrice de rotation  ${}_{i-1}^i R$  est la transposée de la matrice  ${}^{i-1}_i R$ .

$${}_{i-1}^i R = \begin{bmatrix} C\theta_i & S\theta_i C\alpha_{i-1} & S\theta_i S\alpha_{i-1} \\ -S\theta_i & C\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} \\ 0 & -S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.7})$$

Aussi, on peut calculer toutes les matrices de rotation  ${}_{i-1}^i R$  pour le robot expérimental à quatre axes en utilisant (A.1.7), ou à défaut, en transposant respectivement les matrices de rotation obtenues en (A.1.6).

$$\begin{aligned} {}_0^1 R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}_1^2 R &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ {}_2^3 R &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; & {}_3^4 R &= \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 \\ -S_3 & 0 & C_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

#### 1.4 Cinématique directe du robot

La cinématique directe exprimant le mouvement de translation comme on l'a spécifiée au chapitre 1.1 est déduite du deuxième élément de la paire cinématique qui est un vecteur inclus dans la matrice de transformation homogène (A.1.4c). Elle est égale à :

$$H_4(q) = \begin{bmatrix} C_1 S_2 L_3 + C_1 L_2 + L_1 \\ S_1 S_2 L_3 + S_1 L_2 \\ -C_2 L_3 + d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.9})$$

Comparativement à (A.1.4.c), nous allons considérer ici  $d_1 = d_{\text{initiale}} + d_2$ .

C'est dans le souci de ne pas alourdir inutilement les expressions que nous ne l'avons pas inclus dans les calculs de la cinématique inverse.

### 1.5 Cinématique inverse du robot pour quatre axes

Le calcul de la cinématique inverse consiste à résoudre le système d'équations donné par la cinématique directe. Toutefois, si le nombre d'inconnues est supérieur aux nombres d'équations, on fait recours à la matrice de rotation.

Ainsi, suivant (A.1.9), nous avons respectivement les expressions ci-dessous :

$$p_x = C_1(S_2 L_3 + L_2) + L_1 \quad (\text{A.1.10a})$$

(A.1.10a) implique l'expression suivante :

$$C_1 = \frac{p_x - L_1}{S_2 L_3 + L_2} \quad (\text{A.1.10b})$$

De même en considérant

$$p_y = S_1(S_2 L_3 + L_2) \quad (\text{A.1.11a})$$

nous avons (A.1.11a) qui implique le résultat suivant :

$$S_1 = \frac{p_y}{S_2 L_3 + L_2} \quad (\text{A.1.11b})$$

Aussi en tenant compte de

$$p_z = -C_2 L_3 + d_1 \quad (\text{A.1.12a})$$

nous avons (A.1.12a) qui nous donne le résultat suivant :

$$C_2 = \frac{-p_z + d_1}{L_3} \quad (\text{A.1.12b})$$

Pour trouver l'expression du premier angle, nous allons considérer (A.1.10b) et (A.1.11b) pour obtenir :

$$q_1 = a \tan 2(p_y, p_x - L_1) \quad (\text{A.1.13})$$

De même si nous voulons obtenir l'expression du deuxième angle, nous allons multiplier de part et d'autre (A.1.10b) par  $C_1$  et (A.1.11b) par  $S_1$ . Ces produits nous donnent respectivement :

$$C_1 P_x = C_1^2 (S_2 L_3 + L_2) + C_1 L_1 \quad (\text{A.1.14a})$$

$$S_1 P_y = S_1^2 (S_2 L_3 + L_2) \quad (\text{A.1.14b})$$

En faisant la somme de (A.1.14a) et (A.1.14b) on a :

$$\begin{aligned} C_1 P_x + S_1 P_y &= C_1^2 (S_2 L_3 + L_2) + L_1 C_1 + S_1^2 (S_2 L_3 + L_2) \\ &= (S_2 L_3 + L_2)(C_1^2 + S_1^2) + L_1 C_1 \end{aligned} \quad (\text{A.1.15a})$$

(A.1.15a) est logiquement équivalent à :

$$C_1 P_x + S_1 P_y - L_1 C_1 = S_2 L_3 + L_2 \quad (\text{A.1.15b})$$

(A.1.15b) implique ce qui suit :

$$S_2 = \frac{C_1 p_x + S_1 p_y - L_1 C_1 - L_2}{L_3} \quad (\text{A.1.16})$$

De (A.1.16), nous avons le deuxième angle comme suit :

$$q_2 = a \sin\left(\frac{C_1 p_x + S_1 p_y - L_1 C_1 - L_2}{L_3}\right) \quad (\text{A.1.16b})$$

L'obtention du déplacement de l'articulation 1 s'obtient de (A.1.12a) où on peut tirer la relation ci-dessous :

$$d_1 = p_z + C_2 L_3 \quad (\text{A.1.17})$$

Le calcul de l'angle  $q_3$  se fera comme on l'a si bien dit à partir de la matrice de rotation du robot. Ces calculs ont été déjà effectués au sous chapitre 1.5.1.2 du chapitre 1. Le résultat qui nous intéresse est celui donné par (1.16c) :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + q_3 \quad (\text{A.1.18})$$

Ainsi de (A.1.18), on obtient :

$$q_3 = \gamma - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.1.19})$$

## **ANNEXE 2**

### **Calcul des vitesses angulaires et linéaires**

## 2.1 Calcul des vitesses angulaires

Le calcul des vitesses angulaires s'effectue suivant les formules des axes qui peuvent être soit rotatifs, soit prismatiques [12].

Axe rotatif :

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} ; \quad (\text{A.2.1})$$

avec

$$\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

Axe prismatique :

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R^i \omega_i \quad (\text{A.2.3})$$

avec

$${}^0\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.4})$$

### 2.1.1 Axe 1 prismatique

En appliquant (A.2.2), nous avons :

$${}^1\omega_1 = {}^1R^0 \omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

### 2.1.2 Axe 2 rotatif

En appliquant (A.2.1), pour le reste des axes qui sont rotatifs, nous aurons respectivement ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 {}^2\omega_2 &= {}^2R^1\omega_1 + \dot{\theta}_1 {}^1Z_1 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.2.6}$$

### 2.1.3 Axe 3 rotatif

Comme précédemment, nous avons les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 {}^3\omega_3 &= {}^3R^2\omega_2 + \dot{\theta}_2 {}^2Z_2 \\
 &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2\dot{q}_1 \\ C_2\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.2.7}$$

### 2.1.4 Axe 4 rotatif

De façon similaire, nous avons ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 {}^4\omega_4 &= {}^4R^3\omega_3 + \dot{\theta}_3 {}^3Z_3 \\
 &= \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 \\ -S_3 & 0 & C_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2\dot{q}_1 \\ C_2\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} C_3 S_2 \dot{q}_1 + S_3 \dot{q}_2 \\ -S_3 S_2 \dot{q}_1 + C_3 \dot{q}_2 \\ -C_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.8})$$

## 2.2 Vitesses linéaires de chaque articulation

Comme pour les vitesses angulaires, le calcul des vitesses linéaires se fait suivant les formules des axes rotatifs ou prismatiques [12].

Axes rotatif

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}R({}^i v_i + {}^i \omega_i {}^i P_{i+1}) \quad (\text{A.2.9})$$

Axes prismatique

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}R({}^i v_i + {}^i \omega_i {}^i P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (\text{A.2.10})$$

### 2.2.1 Axe1 prismatique

En appliquant (A.2.9), on a :

$$\begin{aligned} {}^1 v_1 &= {}^1R({}^0 v_0 + {}^0 \omega_0 {}^0 P_1) + \dot{d}_1 {}^1\hat{Z}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2.11})$$

### 2.2.2 Axe2 rotatif

En appliquant (A.2.9) pour le reste des axes qui sont rotatifs, nous aurons respectivement ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 {}^2v_2 &= {}^2R({}^1v_1 + {}^1\omega_1 {}^1P_2) \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.2.12}$$

### 2.2.3 Axe3 rotatif

Comme précédemment, nous avons les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 {}^3v_3 &= {}^3R({}^2v_2 + {}^2\omega_2 {}^2P_3) \\
 &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{q}_1 \\ L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_2\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2\dot{q}_1 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2\dot{d}_1 \\ C_2\dot{d}_1 \\ -L_2\dot{d}_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.2.13}$$

### 2.2.4 Axe4 rotatif

De façon similaire, nous avons ce qui suit :

$${}^4v_4 = {}^4R({}^3v_3 + {}^3\omega_3 {}^3P_4)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 \\ -S_3 & 0 & C_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} S_2 \dot{d}_1 \\ C_2 \dot{d}_1 \\ -L_2 \dot{d}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ S_2 \dot{q}_1 & C_2 \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \\ 0 & -L_3 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 \\ -S_3 & 0 & C_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} S_2 \dot{d}_1 \\ C_2 \dot{d}_1 \\ -L_2 \dot{d}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_3 \dot{q}_3 \\ 0 \\ -L_3 S_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 \\ -S_3 & 0 & C_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \dot{d}_1 + L_3 \dot{q}_3 \\ C_2 \dot{d}_1 \\ -L_2 \dot{d}_1 - L_3 S_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_3(S_2 \dot{d}_1 + L_3 \dot{q}_3) - S_3(L_2 \dot{d}_1 + L_3 S_2 \dot{q}_1) \\ -S_3(S_2 \dot{d}_1 + L_3 \dot{q}_3) - C_3(L_2 \dot{d}_1 + L_3 S_2 \dot{q}_1) \\ -C_2 \dot{d}_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix} \tag{A.2.14}
\end{aligned}$$

### 2.3 Positions du poignet

Les positions du robot  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$  résultent de la cinématique directe donnée par (A.1.9).

$$p_x = C_1(S_2 L_3 + L_2) + L_1 \tag{A.2.15a}$$

$$p_y = S_1(S_2 L_3 + L_2) \tag{A.2.15b}$$

$$p_z = -C_2 L_3 + d_1 \tag{A.2.15c}$$

### 2.4 Vitesse linéaire du poignet

Les vitesses linéaires du robot sont obtenues en calculant respectivement les dérivées premières des positions du poignet obtenues par rapport au temps :

$$v_x = -S_1(S_2 L_3 + L_2) \dot{q}_1 + C_1 C_2 L_3 \dot{q}_2 \tag{A.2.16}$$

$$v_y = C_1(S_2 L_3 + L_2) \dot{q}_1 + S_1 C_2 L_3 \dot{q}_2 \tag{A.2.17}$$

$$v_z = S_2 L_3 \dot{q}_2 + \dot{d}_1 \tag{A.2.18}$$

## 2.5 Accélérations linéaires du poignet

Les accélérations linéaires du robot sont obtenues en calculant respectivement les dérivées secondes de (A.2.16), (A.2.17) et (A.2.18) par rapport au temps :

$$\dot{v}_x = -C_1 S_2 L_3 \dot{q}_1^2 - 2S_1 C_2 L_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - S_1 S_2 L_3 \ddot{q}_1 - C_1 S_2 L_3 \dot{q}_2^2 + C_1 C_2 L_3 \ddot{q}_2 - C_1 L_2 \dot{q}_1^2 - S_1 L_2 \ddot{q}_1 \quad (\text{A.2.19})$$

$$\dot{v}_y = -S_1 S_2 L_3 \dot{q}_1^2 + 2C_1 C_2 L_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + C_1 S_2 L_3 \ddot{q}_1 - S_1 S_2 L_3 \dot{q}_2^2 + S_1 C_2 L_3 \ddot{q}_2 - S_1 L_2 \dot{q}_1^2 + C_1 L_2 \ddot{q}_1 \quad (\text{A.2.20})$$

$$\dot{v}_z = C_2 L_3 \dot{q}_2^2 + S_2 L_3 \ddot{q}_2 + \ddot{d}_1 \quad (\text{A.2.21})$$

## 2.6 Vitesse angulaire du poignet

Les vitesses angulaires du robot, par rapport au repère  $\{0\}$ , ci-dessous sont obtenues en faisant le produit de la matrice de rotation issue de (A.4) par la vitesse angulaire (A.2.8).

$$\begin{aligned} {}^0\omega_4 &= {}_4R^0 \omega_4 \\ &= \begin{bmatrix} C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3 & -C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3 & C_1 S_2 \\ S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3 & -S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 & S_1 S_2 \\ S_2 C_3 & -S_2 S_3 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 S_2 \dot{q}_1 + S_3 \dot{q}_2 \\ -S_3 S_2 \dot{q}_1 + C_3 \dot{q}_2 \\ -C_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_x &= C_1 C_2 C_3^2 S_2 \dot{q}_1 + C_1 C_2 C_3 S_3 \dot{q}_2 + C_3 S_2 S_1 S_3 \dot{q}_1 + S_1 S_3^2 \dot{q}_2 + C_1 C_2 S_3^2 S_2 \dot{q}_1 - \\ &\quad C_1 C_2 C_3 S_3 \dot{q}_2 - S_1 C_3 S_3 S_2 \dot{q}_1 + S_1 C_3^2 \dot{q}_2 - C_1 S_2 C_2 \dot{q}_1 + C_1 S_2 \dot{q}_3 \\ &= C_1 C_2 S_2 \dot{q}_1 + S_1 \dot{q}_2 - C_1 S_2 C_2 \dot{q}_1 + C_1 S_2 \dot{q}_3 \\ &= S_1 \dot{q}_2 + C_1 S_2 \dot{q}_3 \quad (\text{A.2.23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_y &= S_1 C_2 C_3^2 S_2 \dot{q}_1 + S_1 C_2 C_3 S_3 S_2 \dot{q}_2 - C_3 S_2 C_1 S_3 \dot{q}_1 - C_1 S_3^2 \dot{q}_2 + \\ &\quad S_1 C_2 S_3^2 S_2 \dot{q}_1 - S_1 C_2 C_3 S_3 \dot{q}_2 + C_1 C_3 S_3 S_2 \dot{q}_1 - C_1 C_3^2 \dot{q}_2 - S_1 S_2 C_2 \dot{q}_1 + S_1 S_2 \dot{q}_3 \\ &= S_1 C_2 S_2 \dot{q}_1 - C_1 \dot{q}_2 - S_1 S_2 C_2 \dot{q}_1 + S_1 S_2 \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$= -C_1\dot{q}_2 + S_1S_2\dot{q}_3 \quad (\text{A.2.24})$$

$$\begin{aligned} \omega_z &= S_2^2C_3^2\dot{q}_1 + S_2S_3C_3\dot{q}_2 + S_2^2S_3^2\dot{q}_1 - S_2S_3C_3\dot{q}_2 + C_2^2\dot{q}_1 - C_2\dot{q}_3 \\ &= S_2^2\dot{q}_1 + C_2^2\dot{q}_1 - C_2\dot{q}_3 \\ &= \dot{q}_1 - C_2\dot{q}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.2.25})$$

## 2.7 Accélérations angulaires du poignet

Les accélérations angulaires du robot sont obtenues en calculant respectivement les dérivées premières des vitesses angulaires obtenues ci-dessus par rapport au temps :

$$\dot{\omega}_x = C_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + S_1\ddot{q}_2 - S_1S_2\dot{q}_1\dot{q}_3 + C_1C_2\dot{q}_2\dot{q}_3 + C_1S_2\ddot{q}_3 \quad (\text{A.2.26})$$

$$\dot{\omega}_y = S_1\dot{q}_1\dot{q}_2 - C_1\ddot{q}_2 + C_1S_2\dot{q}_1\dot{q}_3 + S_1C_2\dot{q}_2\dot{q}_3 + S_1S_2\ddot{q}_3 \quad (\text{A.2.27})$$

$$\dot{\omega}_z = \ddot{q}_1 + S_2\dot{q}_2\dot{q}_3 - C_2\ddot{q}_3 \quad (\text{A.2.28})$$

## 2.8 Matrices de vitesses linéaires et angulaires du poignet

Les vitesses linéaires et angulaires issues des sous sections 2.4 et 2.6 du robot, par rapport au repère  $\{0\}$ , peuvent s'écrire respectivement sous formes matricielles comme suit :

$${}^0v_4 = \begin{bmatrix} -S_1(S_2L_3 + L_2)\dot{q}_1 + C_1C_2L_3\dot{q}_2 \\ C_1(S_2L_3 + L_2)\dot{q}_1 + S_1C_2L_3\dot{q}_2 \\ S_2L_3\dot{q}_2 + \dot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.29})$$

$${}^0\omega_4 = \begin{bmatrix} S_1\dot{q}_2 + C_1S_2\dot{q}_3 \\ -C_1\dot{q}_2 + S_1S_2\dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 - C_2\dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.30})$$

## 2.9 Matrice jacobienne

(A.2.29) et (A.2.30), peuvent se mettre ensemble sous forme matricielle.

$$J = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -S_1(S_2L_3 + L_2) & C_1C_2L_3 & 0 \\ 0 & C_1(S_2L_3 + L_2) & S_1C_2L_3 & 0 \\ 1 & 0 & S_2L_3 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & C_1S_2 \\ 0 & 0 & -C_1 & S_1S_2 \\ 0 & 1 & 0 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.31})$$

De (A.2.31), on obtient la matrice jacobienne ci-dessous :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -S_1(S_2L_3 + L_2) & C_1C_2L_3 & 0 \\ 0 & C_1(S_2L_3 + L_2) & S_1C_2L_3 & 0 \\ 1 & 0 & S_2L_3 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & C_1S_2 \\ 0 & 0 & -C_1 & S_1S_2 \\ 0 & 1 & 0 & -C_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.32})$$

## 2.10 Pseudo-inverse de la matrice jacobienne

La pseudo-inverse de la matrice jacobienne est donnée par l'expression ci-dessous [11].

$$J^+ = (J^T J)^{-1} J^T \quad (\text{A.2.33})$$

En appliquant cette formule de la pseudo-inverse, on effectue aisément les calculs ci-dessous :

$$J^* = (J^T J)^{-1} J^T = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 1 & J_{14}^* & J_{15}^* & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & J_{24}^* & J_{25}^* & J_{26}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & 0 & J_{34}^* & J_{35}^* & 0 \\ J_{41}^* & J_{42}^* & 0 & J_{44}^* & J_{45}^* & J_{46}^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.34})$$

avec :

$$\begin{aligned} J_{11}^* &= -\frac{S_2 L_3^2 C_1 C_2}{C_2^2 L_3^2 + 1}; & J_{12}^* &= -\frac{S_2 L_3^2 S_1 C_2}{C_2^2 L_3^2 + 1}; & J_{14}^* &= -\frac{S_2 L_3 S_1}{C_2^2 L_3^2 + 1}; & J_{15}^* &= \frac{S_2 L_3 C_1}{C_2^2 L_3^2 + 1}; \\ J_{21}^* &= \frac{S_1 (S_2 L_3 + L_2)}{C_2^2 - L_3^2 - L_2^2 - 2S_2 L_3 L_2 + C_2^2 L_3^2 - 1}; \\ J_{22}^* &= \frac{-C_1 (S_2 L_3 + L_2)}{C_2^2 - L_3^2 - L_2^2 - 2S_2 L_3 L_2 + C_2^2 L_3^2 - 1}; & J_{24}^* &= \frac{-C_2 C_1 S_2}{C_2^2 - L_3^2 - L_2^2 - 2S_2 L_3 L_2 + C_2^2 L_3^2 - 1}; \\ J_{25}^* &= \frac{-C_2 C_1 S_2}{C_2^2 - L_3^2 - L_2^2 - 2S_2 L_3 L_2 + C_2^2 L_3^2 - 1}; & J_{26}^* &= \frac{-1 + C_2^2}{C_2^2 - L_3^2 - L_2^2 - 2S_2 L_3 L_2 + C_2^2 L_3^2 - 1}; \\ J_{31}^* &= \frac{C_1 C_2 L_3}{C_2^2 L_3^2 + 1}; & J_{32}^* &= \frac{S_1 C_2 L_3}{C_2^2 L_3^2 + 1}; & J_{34}^* &= \frac{S_1}{C_2^2 L_3^2 + 1}; & J_{35}^* &= -\frac{C_1}{C_2^2 L_3^2 + 1}; \\ J_{41}^* &= \frac{C_2 S_1 (S_2 L_3 + L_2)}{C_2^2 (L_3^2 + 1) - 2S_2 L_3 L_2 - L_3^2 - L_2^2 - 1}; \\ J_{42}^* &= \frac{-C_2 C_1 (S_2 L_3 + L_2)}{C_2^2 (L_3^2 + 1) - 2S_2 L_3 L_2 - L_3^2 - L_2^2 - 1}; \\ J_{44}^* &= \frac{C_1 [S_2 (C_2^2 L_3^2 - L_3^2 - L_2^2 - 1) + 2L_3 L_2]}{C_2^2 (L_3^2 + 1) - 2S_2 L_3 L_2 - L_3^2 - L_2^2 - 1}; \\ J_{45}^* &= \frac{S_1 [S_2 (C_2^2 L_3^2 - L_3^2 - L_2^2 - 1) - 2L_3 L_2 + 2C_2^2 L_2 L_3]}{C_2^2 (L_3^2 + 1) - 2S_2 L_3 L_2 - L_3^2 - L_2^2 - 1}; \\ J_{46}^* &= \frac{-C_2 (-L_3^2 + C_2^2 L_3^2 - 2L_3 L_2 S_2 - L_2^2)}{C_2^2 - L_3^2 - L_2^2 - 2S_2 L_3 L_2 + C_2^2 L_3^2 - 1}; \end{aligned} \quad (\text{A.2.35})$$

## **ANNEXE 3**

### **Énergie cinétique**

### 3.1 Formule de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un système robotique a la forme générale suivante :

$$k(q, \dot{q}) = \sum_i^n k_i \quad (\text{A.3.1})$$

où  $k_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) qui est l'énergie cinétique pour chaque articulation  $i$  du robot, est la somme des énergies cinétiques dues à la vitesse linéaire et à la vitesse angulaire [12].

$$k_i = \frac{1}{2} m_i {}^0v_{ci}^T {}^0v_{ci} + \frac{1}{2} {}^i\omega_i^T {}^{ci}I_i \omega_i \quad (\text{A.3.2})$$

où  $m_i$ ,  ${}^0v_{ci}$ ,  ${}^i\omega_i^T$  et  ${}^{ci}I_i$  sont respectivement la masse de l'articulation  $i$ , la vitesse linéaire du centre de masse de l'articulation  $i$  par rapport à  $\{0\}$ , la vitesse angulaire du centre de masse de l'articulation  $i$  par rapport à  $\{0\}$  et la matrice caractérisant le tenseur d'inertie du centre de masse de l'articulation  $i$  par rapport à  $\{0\}$ .

L'énergie cinétique totale  $k(q, \dot{q})$  comme le montre (A.3.1) est la somme des énergies  $k_i$  composées des énergies cinétiques dues aux vitesses linéaires  $\frac{1}{2} m_i {}^0v_{ci}^T {}^0v_{ci}$  et angulaires  $\frac{1}{2} {}^i\omega_i^T {}^{ci}I_i \omega_i$ .

### 3.2 Énergie cinétique due à la vitesse linéaire

Comme expliqué au sous chapitre 3.1, l'énergie cinétique due à la vitesse linéaire a la forme générale suivante [12] :

$$k_{\text{linéaire}} = \frac{1}{2} m_i {}^0v_{ci}^T {}^0v_{ci} \quad (\text{A.3.3a})$$

L'expression de la vitesse du centre de masse est la suivante :

$${}^0v_{ci} = \frac{d{}^0P_{ci}}{dt} \quad (\text{A.3.3b})$$

où  ${}^0P_{ci}$  est le vecteur coordonnée du centre de masse de l'articulation  $i$  par rapport à  $\{0\}$ . Les calculs de (A.3.3b) ne peuvent être possibles que si nous connaissons respectivement les vecteurs de gravité et les vecteurs de centres de masses. Nous avons ci-dessous, le tableau résumant les vecteurs de gravité.

Tableau VI

## Vecteurs de gravité

Articulations	Vecteur de gravité
1	$g_1 = [0 \ 0 \ g]^T$
2	$g_2 = [0 \ 0 \ 0]^T$
3	$g_3 = [g \ 0 \ 0]^T$
4	$g_4 = [g \ 0 \ 0]^T$

Le calcul de (A.3.3b) est aussi possible, si nous calculons la matrice de position des centres de masse dans laquelle nous pourrions ressortir les coordonnées des centres de masses  ${}^0P_{ci}$ . Au préalable, il convient de mettre en place les matrices de transformation des centres de masse qui sont eux tributaires des vecteurs des centres de masses.

### 3.2.1 Matrice de transformation des centres de masse

Nous avons dans le tableau ci-dessous, les coordonnées du centre de masse de l'articulation  $i$  par rapport au référentiel  $\{i\}$ .

Tableau VII

## Vecteurs des centres de masses

Articulations	Vecteurs du centre de masse
1	${}^1P_{c1} = [x_1 \ 0 \ 0]^T$
2	${}^2P_{c2} = [x_2 \ 0 \ 0]^T$
3	${}^3P_{c3} = [0 \ y_3 \ 0]^T$
4	${}^4P_{c4} = [0 \ 0 \ z_4]^T$

A partir du tableau VII, nous pouvons établir les matrices (4x4) de transformation des centres de masses. Ces matrices sont composées d'une sous matrice concernant la matrice d'identité et d'un sous vecteur concernant le centre de masse comme montré ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 {}^1T_{c1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^2T_{c2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 {}^3T_{c3} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^4T_{c4} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.3.4}$$

### 3.2.2 Matrice des positions des centres de masses

Les matrices de positions des centres de masses sont calculées en faisant le produit de

la matrice de transformation par rapport à  $\{0\}$  par la matrice de transformation des centres de masse correspondante.

$${}^0T_{c1} = {}^0T_1 \times {}^1T_{c1} \quad (\text{A.3.5a})$$

Ainsi, nous avons ci-dessous, tous les développements de un à quatre axes :

$${}^0T_{c1} = {}^0T_1 \times {}^1T_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.5b})$$

$${}^0T_{c2} = {}^0T_2 \times {}^2T_{c2} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & L_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & C_1 x_2 + L_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & S_1 x_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.5c})$$

$${}^0T_{c3} = {}^0T_3 \times {}^3T_{c3} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & C_1 L_2 + L_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & S_1 L_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & -C_1 S_2 y_3 + C_1 L_2 + L_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & -S_1 S_2 y_3 + S_1 L_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & C_2 y_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.5d})$$

$${}^0T_{c4} = {}^0T_4 \times {}^4T_{c4} \\ = \begin{bmatrix} C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3 & -C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3 & C_1 S_2 & C_1 S_2 L_3 + C_1 L_2 + L_1 \\ S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3 & -S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 & S_1 S_2 & S_1 S_2 L_3 + S_1 L_2 \\ S_2 C_3 & -S_2 S_3 & -C_2 & -C_2 L_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3 & -C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3 & C_1 S_2 & C_1 S_2 z_4 + C_1 S_2 L_3 + C_1 L_2 + L_1 \\ S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3 & -S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 & S_1 S_2 & S_1 S_2 z_4 + S_1 S_2 L_3 + S_1 L_2 \\ S_2 C_3 & -S_2 S_3 & -C_2 & -C_2 z_4 - C_2 L_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.5e})$$

### 3.2.3 Coordonnées des centres de masse

Les coordonnées des centres de masses sont les vecteurs substitués aux matrices de position des centres de masse c'est-à-dire, les trois premières lignes de la dernière colonne. Nous avons ainsi les résultats suivants :

$${}^0P_{c1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}; \quad {}^0P_{c2} = \begin{bmatrix} C_1 x_2 + L_1 \\ S_1 x_2 \\ d_1 \end{bmatrix}; \quad {}^0P_{c3} = \begin{bmatrix} C_1(-S_2 y_3 + L_2) + L_1 \\ S_1(-S_2 y_3 + L_2) \\ C_2 y_3 + d_1 \end{bmatrix};$$

$${}^0P_{c4} = \begin{bmatrix} C_1(S_2 z_4 + S_2 L_3 + L_2) + L_1 \\ S_1(S_2 z_4 + S_2 L_3 + L_2) \\ -C_2(z_4 + L_3) + d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.6})$$

### 3.2.4 Vitesses linéaires des centres de masse

Les vitesses des centres de masses sont obtenues en calculant la dérivée première des positions des coordonnées des centres de masse.

$${}^0v_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^0v_{c2} = \begin{bmatrix} -S_1 x_2 \dot{q}_1 \\ C_1 x_2 \dot{q}_1 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^0v_{c3} = \begin{bmatrix} S_1(S_2 y_3 - L_1) \dot{q}_1 - C_1 C_2 y_3 \dot{q}_2 \\ -C_1(S_2 y_3 + L_2) \dot{q}_1 - S_1 C_2 y_3 \dot{q}_2 \\ -S_2 y_3 \dot{q}_2 + \dot{d}_1 \end{bmatrix};$$

$${}^0v_{c4} = \begin{bmatrix} -S_1(S_2z_4 + S_2L_3 + L_2)\dot{q}_1 + C_1(C_2z_4 + C_2L_3)\dot{q}_2 \\ C_1(S_2z_4 + S_2L_3 + L_2)\dot{q}_1 + S_1(C_2z_4 + C_2L_3)\dot{q}_2 \\ -S_2(z_4 - L_3)\dot{q}_2 + \dot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.7})$$

On peut maintenant déterminer les différentes énergies dues à la vitesse linéaire de chaque articulation.

### 3.2.5 Calcul des énergies cinétiques dues à la vitesse linéaire de chaque axe

Comme nous l'avons spécifié en (A.3.3a), la formule pouvant déterminer l'énergie cinétique due à la vitesse linéaire a la forme générale suivante :

$$k_{\text{linéaire}} = \frac{1}{2} m_i {}^0v_{ci}^T {}^0v_{ci}$$

Ainsi pour chaque articulation, nous allons appliquer l'expression ci-dessus.

$$k_{1\text{linéaire}} = \frac{1}{2} m_1 {}^0v_{c1}^T {}^0v_{c1} = \frac{1}{2} m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{d}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m_1 \dot{d}_1^2 \quad (\text{A.3.8a})$$

$$\begin{aligned} k_{2\text{linéaire}} &= \frac{1}{2} m_2 {}^0v_{c2}^T {}^0v_{c2} = \frac{1}{2} m_2 \begin{bmatrix} -S_1x_2\dot{q}_1 & C_1x_2\dot{q}_1 & \dot{d}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1x_2\dot{q}_1 \\ C_1x_2\dot{q}_1 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m_2 (S_1^2x_2^2\dot{q}_1^2 + C_1^2x_2^2\dot{q}_1^2 + \dot{d}_1^2) \\ &= \frac{1}{2} m_2 (x_2^2\dot{q}_1^2 + \dot{d}_1^2) = \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 x_2^2 \dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3.8b})$$

$$k_{3\text{linéaire}} = \frac{1}{2} m_3 {}^0v_{c3}^T {}^0v_{c3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} m_3 \left[ S_1(S_2 y_3 - L_2) \dot{q}_1 - C_1 C_2 y_3 \dot{q}_2 \quad -C_1(S_2 y_3 - L_2) \dot{q}_1 - S_1 C_2 y_3 \dot{q}_2 \quad -S_2 y_3 \dot{q}_2 + \dot{d}_1 \right] \begin{bmatrix} S_1(S_2 y_3 - L_2) \dot{q}_1 - C_1 C_2 y_3 \dot{q}_2 \\ -C_1(S_2 y_3 - L_2) \dot{q}_1 - S_1 C_2 y_3 \dot{q}_2 \\ -S_2 y_3 \dot{q}_2 + \dot{d}_1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} m_3 \left[ (S_1^2 S_2^2 y_3^2 \dot{q}_1^2 - S_1 S_2 C_1 C_2 y_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - S_1 S_2 C_1 C_2 y_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + C_1^2 C_2^2 y_3^2 \dot{q}_2^2 + C_1 C_2 S_1 L_2 y_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - S_1^2 S_2 L_2 y_3 \dot{q}_1^2 \right. \\
&\quad + C_1 C_2 S_1 L_2 y_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + S_1^2 L_2^2 \dot{q}_1^2) + (C_1^2 S_2^2 y_3^2 \dot{q}_1^2 + C_1 S_1 S_2 C_2 y_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - C_1^2 S_2 L_2 y_3 \dot{q}_1^2 \\
&\quad + S_1 C_1 S_2 C_2 y_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + S_1^2 C_2^2 y_3^2 \dot{q}_2^2 - S_1 C_1 C_2 L_2 y_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - C_1^2 S_2 L_2 y_3 \dot{q}_1^2 - S_1 C_1 C_2 L_2 y_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + C_1^2 L_2^2 \dot{q}_1^2) \\
&\quad \left. + (S_2^2 y_3^2 \dot{q}_2^2 - 2 S_2 y_3 \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \dot{d}_1^2) \right] \\
&= \frac{1}{2} m_3 \left[ (S_1^2 S_2^2 y_3^2 \dot{q}_1^2 - 2 S_1 S_2 C_1 C_2 y_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2 S_1^2 S_2 L_2 y_3 \dot{q}_1^2 + C_1^2 C_2^2 y_3^2 \dot{q}_2^2 + 2 C_1 C_2 S_1 L_2 y_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + S_1^2 L_2^2 \dot{q}_1^2) \right. \\
&\quad \left. + (C_1^2 S_2^2 y_3^2 \dot{q}_1^2 + 2 C_1 S_1 S_2 C_2 y_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2 C_1^2 S_2 L_2 y_3 \dot{q}_1^2 + S_1^2 C_2^2 y_3^2 \dot{q}_2^2 - 2 S_1 C_1 C_2 L_2 y_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + C_1^2 L_2^2 \dot{q}_1^2 + (S_2^2 y_3^2 \dot{q}_2^2 - \right. \\
&\quad \left. 2 S_2 y_3 \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \dot{d}_1^2) \right] \\
&= \frac{1}{2} m_3 (S_2^2 y_3^2 \dot{q}_1^2 - 2 S_2 L_2 y_3 \dot{q}_1^2 + C_2^2 y_3^2 \dot{q}_2^2 + L_2^2 \dot{q}_1^2 + S_2^2 y_3^2 \dot{q}_2^2 - 2 S_2 y_3 \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \dot{d}_1^2) \\
&= \frac{1}{2} m_3 (S_2^2 y_3^2 - 2 S_2 L_2 y_3 + L_2^2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 y_3^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{d}_1^2 - m_3 S_2 y_3 \dot{q}_2 \dot{d}_1 \tag{A.3.8c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{4\text{linéaire}} &= \frac{1}{2} m_4 {}^0 \mathbf{v}_{c4}^T {}^0 \mathbf{v}_{c4} \\
&= \frac{1}{2} m_4 \begin{bmatrix} -S_1(S_2 z_4 + S_2 L_3 + L_2) \dot{q}_1 + C_1(C_2 z_4 + C_2 L_3) \dot{q}_2 \\ C_1(S_2 z_4 + S_2 L_3 + L_2) \dot{q}_1 + S_1(C_2 z_4 + C_2 L_3) \dot{q}_2 \\ -S_2(z_4 - L_3) \dot{q}_2 + \dot{d}_1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} -S_1(S_2 z_4 + S_2 L_3 + L_2) \dot{q}_1 + C_1(C_2 z_4 + C_2 L_3) \dot{q}_2 \\ C_1(S_2 z_4 + S_2 L_3 + L_2) \dot{q}_1 + S_1(C_2 z_4 + C_2 L_3) \dot{q}_2 \\ -S_2(z_4 - L_3) \dot{q}_2 + \dot{d}_1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} m_4 (-S_1(S_2 z_4 + S_2 L_3 + L_2) \dot{q}_1 + C_1(C_2 z_4 + C_2 L_3) \dot{q}_2)^2 + \\
&\quad (C_1(S_2 z_4 + S_2 L_3 + L_2) \dot{q}_1 + S_1(C_2 z_4 + C_2 L_3) \dot{q}_2)^2 + (-S_2(z_4 - L_3) \dot{q}_2 + \dot{d}_1)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_4 \left( \dot{d}_1^2 + 2 S_2(z_4 + L_3) \dot{q}_2 \dot{d}_1 + (L_2^2 - C_2^2 L_3^2 - 2 C_2^2 z_4 L_3 + 2 S_2 z_4 L_2 \right. \\
&\quad \left. + 2 S_2 L_3 L_2 - z_4^2 C_2^2 + L_3^2 + 2 z_4 L_3 + z_4^2) \dot{q}_1^2 + (L_3^2 + 2 z_4 L_3 + z_4^2) \dot{q}_2^2 \right) \tag{A.3.8d}
\end{aligned}$$

### 3.2.6 Energie cinétique totale due à la vitesse linéaire

La formule de l'énergie cinétique totale due à la vitesse linéaire revêt la forme

suivante :

$$k_{\text{linéaire}} = \sum_1^n k_i = k_{1\text{linéaire}} + k_{2\text{linéaire}} + k_{3\text{linéaire}} + k_{4\text{linéaire}} \quad (\text{A.3.9a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m_1 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 x_2^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 (S_2^2 y_3^2 - 2S_2 L_2 y_3 + L_2^2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 y_3^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{d}_1^2 \\ &- m_3 S_2 y_3 \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \frac{1}{2} m_4 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_4 (2S_2 z_4 + 2S_2 L_3) \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \\ &\frac{1}{2} m_4 (L_2^2 - C_2^2 L_3^2 - 2C_2^2 z_4 L_3 + 2S_2 z_4 L_2 + 2S_2 L_3 L_2 - z_4^2 C_2^2 + 2z_4 L_3 + z_4^2) \dot{q}_1^2 + \\ &\frac{1}{2} m_4 (L_3^2 + 2z_4 L_3 + z_4^2) \dot{q}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} m_2 x_2^2 + m_3 (S_2^2 y_3^2 - 2S_2 L_2 y_3 + L_2^2) + \\ m_4 (L_2^2 - C_2^2 L_3^2 - 2C_2^2 z_4 L_3 + 2S_2 z_4 L_2 \\ + 2S_2 L_3 L_2 - z_4^2 C_2^2 + L_3^2 + 2z_4 L_3 + z_4^2) \end{array} \right] \dot{q}_1^2 + \\ &S_2 (-m_3 y_3 + m_4 L_3 + m_4 z_4) \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \frac{1}{2} m_4 (L_3^2 + 2z_4 L_3 + z_4^2) \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3.9b})$$

### 3.3 Energie cinétique due à la vitesse angulaire

La formule pouvant déterminer l'énergie cinétique due à la vitesse angulaire a la forme suivante :

$$k_{\text{angulaire}} = \frac{1}{2} \omega_i^T {}^{ci} I_i' \omega_i \quad (\text{A.3.10})$$

Les matrices des tenseurs d'inertie  ${}^{ci} I_i$ , sont des matrices diagonales, définies positives qui comportent les éléments des inerties correspondants à chaque axe comme montré ci-dessous.

$${}^{c1} I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}; \quad {}^{c2} I_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix};$$

$${}^{c3}I_3 = \begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix}; \quad {}^{c4}I_4 = \begin{bmatrix} I_{xx4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.11})$$

### 3.3.2 Énergies cinétiques dues à la vitesse angulaire de chaque articulation

Les énergies cinétiques dues à la vitesse angulaire de chaque articulation sont calculées en appliquant (A.3.10).

$$k_{1\text{angulaire}} = \frac{1}{2} \omega_1^T {}^{c1}I_1 \omega_1 = 0 \quad (\text{A.3.12a})$$

$$k_{2\text{angulaire}} = \frac{1}{2} \omega_2^T {}^{c2}I_2 \omega_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 I_{zz2} \quad (\text{A.3.12b})$$

$$\begin{aligned} k_{3\text{angulaire}} &= \frac{1}{2} \omega_3^T {}^{c3}I_3 \omega_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_2 \dot{q}_1 & C_2 \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \dot{q}_1 \\ C_2 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (I_{xx3} S_2^2 \dot{q}_1^2 + I_{yy3} C_2^2 \dot{q}_1^2 + I_{zz3} \dot{q}_2^2) \end{aligned} \quad (\text{A.3.12c})$$

$$\begin{aligned} k_{4\text{angulaire}} &= \frac{1}{2} \omega_4^T {}^{c4}I_4 \omega_4 = \begin{bmatrix} C_3 S_2 \dot{q}_1 + S_3 \dot{q}_2 & -S_3 S_2 \dot{q}_1 + C_3 \dot{q}_2 & -C_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} I_{xx4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 S_2 \dot{q}_1 + S_3 \dot{q}_2 \\ -S_3 S_2 \dot{q}_1 + C_3 \dot{q}_2 \\ -C_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} I_{xx4} (C_3^2 S_2^2 \dot{q}_1^2 + S_3^2 \dot{q}_2^2 + 2C_3 S_2 \dot{q}_1 S_3 \dot{q}_2) + \frac{1}{2} I_{yy4} (S_3^2 S_2^2 \dot{q}_1^2 + C_3^2 \dot{q}_2^2 - 2S_3 S_2 \dot{q}_1 C_3 \dot{q}_2) + \\ &\quad \frac{1}{2} I_{zz4} (C_2^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2 - 2C_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3) \end{aligned} \quad (\text{A.3.12d})$$

### 3.3.3 Énergie cinétique totale due à la vitesse angulaire

L'énergie cinétique totale due à la vitesse angulaire est la somme de toutes les différentes énergies dues à la vitesse angulaire.

$$k_{angulaire} = \sum_1^n k_i = k_{1angulaire} + k_{2angulaire} + k_{3angulaire} + k_{4angulaire} \quad (\text{A.3.13a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 I_{zz2} + \frac{1}{2} (I_{xx3} S_2^2 \dot{q}_1^2 + I_{yy3} C_2^2 \dot{q}_1^2 + I_{zz3} \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_{xx4} (C_3^2 S_2^2 \dot{q}_1^2 + S_3^2 \dot{q}_2^2 + 2C_3 S_2 \dot{q}_1 S_3 \dot{q}_2) \\ &+ \frac{1}{2} I_{yy4} (S_3^2 S_2^2 \dot{q}_1^2 + C_3^2 \dot{q}_2^2 - 2S_3 S_2 \dot{q}_1 C_3 \dot{q}_2) + \frac{1}{2} I_{zz4} (C_2^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2 - 2C_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3) \end{aligned} \quad (\text{A.1.13b})$$

### 3.4 Énergie cinétique totale

La formule de l'énergie cinétique totale est la somme des énergies totales dues aux vitesses linéaires et angulaires comme montré ci-dessous.

$$K = k_{linéaire} + k_{angulaire} \quad (\text{A.3.14})$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ m_2 x_2^2 + m_3 (S_2^2 y_3^2 - 2S_2 L_2 y_3 + L_2^2) + \right. \\ &\quad \left. m_4 \left( L_2^2 - C_2^2 L_3^2 - 2C_2^2 z_4 L_3 + 2S_2 z_4 L_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2S_2 L_3 L_2 - z_4^2 C_2^2 + L_3^2 + 2z_4 L_3 + z_4^2 \right) \right] \dot{q}_1^2 + \\ &\frac{1}{2} (-2m_3 S_2 y_3 + 2m_4 S_2 L_3 + 2m_4 S_2 z_4) \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \\ &\frac{1}{2} m_4 (L_3^2 + 2z_4 L_3 + z_4^2) \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 I_{zz2} + \frac{1}{2} (I_{xx3} S_2^2 \dot{q}_1^2 + I_{yy3} C_2^2 \dot{q}_1^2 + I_{zz3} \dot{q}_2^2) + \\ &\frac{1}{2} I_{xx4} (C_3^2 S_2^2 \dot{q}_1^2 + S_3^2 \dot{q}_2^2 + 2C_3 S_2 \dot{q}_1 S_3 \dot{q}_2) + \frac{1}{2} I_{yy4} (S_3^2 S_2^2 \dot{q}_1^2 + C_3^2 \dot{q}_2^2 - 2S_3 S_2 \dot{q}_1 C_3 \dot{q}_2) \\ &+ \frac{1}{2} I_{zz4} (C_2^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2 - 2C_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ m_2 x_2^2 + m_3 (S_2^2 y_3^2 - 2S_2 L_2 y_3 + L_2^2) + \right. \\
&\quad \left. m_4 \left( L_2^2 - C_2^2 L_3^2 - 2C_2^2 z_4 L_3 + 2S_2 z_4 L_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2S_2 L_3 L_2 - z_4^2 C_2^2 + L_3^2 + 2z_4 L_3 + z_4^2 \right) + I_{zz2} + \dot{q}_1^2 + \right. \\
&\quad \left. I_{xx3} S_2^2 + I_{yy3} C_2^2 + I_{xx4} C_3^2 S_2^2 + I_{yy4} S_3^2 S_2^2 + I_{zz4} C_2^2 \right] \\
&\frac{1}{2} S_2 (-2m_3 y_3 + 2m_4 L_3 + 2m_4 z_4) \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \frac{1}{2} m_4 (L_3^2 + 2z_4 L_3 + z_4^2 + I_{zz3} + I_{xx4} S_3^2 + I_{yy4} C_3^2) \dot{q}_2^2 + (A.3.15) \\
&\frac{1}{2} I_{zz4} \dot{q}_3^2 + (I_{xx4} C_3 S_2 S_3 - I_{yy4} S_3 S_2 C_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - I_{zz4} C_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3
\end{aligned}$$

(A.3.15) peut être harmonisé en opérant à un regroupement adéquat des masses, des longueurs, des inerties et des positions des centres de masses comme montré ci-dessous :

$$\begin{aligned}
p_1 &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 ; p_2 = I_{zz2} + m_2 x_2^2 + m_4 L_2^2 + m_4 L_3^2 + m_4 z_4^2 + m_3 y_3^2 + 2m_4 z_4 L_3 ; \\
p_3 &= m_3 y_3^2 ; p_4 = -m_4 z_4 + m_3 y_3 - m_4 L_3 ; p_5 = m_3 y_3 ; p_6 = m_4 L_3 ; p_7 = I_{xx3} ; p_8 = I_{yy3} ; \\
p_9 &= I_{xx4} ; p_{10} = I_{yy4} ; p_{11} = I_{zz4} ; p_{12} = m_1 ; p_{13} = m_3 L_2 ; p_{14} = m_4 L_3 L_2 \\
p_{15} &= m_4 L_2 ; p_{16} = m_4 z_4 L_3 ; p_{17} = m_3 y_3 L_2 ; p_{18} = m_4 L_3^2 ; \\
p_{19} &= I_{zz3} + m_3 y_3^2 + m_4 L_3^2 + m_4 z_4^2 + 2m_4 z_4 L_3 ; p_{20} = m_4 z_4^2 ; p_{21} = m_4 z_4 ; p_{22} = m_4 z_4 L_2
\end{aligned}$$

De ce qui précède, nous obtenons une nouvelle expression pour l'énergie cinétique totale.

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} p_1 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ p_3 S_2^2 - 2p_{17} S_2 - p_{18} C_2^2 - 2p_{16} C_2^2 + \right. \\
&\quad \left. 2p_{22} S_2 + 2p_{14} S_2 - p_{20} C_2^2 + p_7 S_2^2 + \dot{q}_1^2 - p_4 S_2 \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \right. \\
&\quad \left. p_8 C_2^2 + p_9 C_3^2 S_2^2 + p_{10} S_3^2 S_2^2 + p_{11} C_2^2 \right] \dot{q}_2^2 + (A.3.16) \\
&\frac{1}{2} m_4 (p_{19} + p_9 S_3^2 + p_{10} C_3^2) \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} p_{11} \dot{q}_3^2 + (p_9 C_3 S_2 S_3 - p_{10} S_3 S_2 C_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - p_{11} C_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3
\end{aligned}$$

### 3.5 Énergie potentielle

La formule permettant le calcul de l'énergie potentielle a la forme générale suivante :

$$u_i = -m_i \mathbf{g}_i^{T0} P_{ci} \quad (A.3.17)$$

Nous appliquons le concept de (A.3.17) pour trouver l'énergie potentielle de chaque articulation.

$$u_1 = -m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} = -m_1 g d_1 \quad (\text{A.3.18a})$$

$$u_2 = -m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ z_2 + d_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.3.18b})$$

$$u_3 = -m_3 \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_1 S_2 y_3 + C_1 L_2 + L_1 \\ -S_1 S_2 y_3 + S_1 L_2 \\ C_2 y_3 + d_1 \end{bmatrix} = -m_3 g (-C_1 S_2 y_3 + C_1 L_2 + L_1) \quad (\text{A.3.18c})$$

$$u_4 = -m_4 \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 S_2 z_4 + C_1 S_2 L_3 + C_1 L_2 + L_1 \\ S_1 S_2 z_4 + S_1 S_2 L_3 + S_1 L_2 \\ -C_2 z_4 - C_2 L_3 + d_1 \end{bmatrix} \\ = -m_4 g (C_1 S_2 z_4 + C_1 S_2 L_3 + C_1 L_2 + L_1) \quad (\text{A.3.18d})$$

### 3.6 Énergie potentielle totale

L'énergie potentielle totale est la somme de toutes les énergies potentielles de chaque articulation.

$$U = \sum_1^n u_i \quad (\text{A.3.19})$$

D'où :

$$U = -m_1 g d_1 + 0 - m_3 g (-C_1 S_2 y_3 + C_1 L_2 + L_1) - m_4 g (C_1 S_2 z_4 + C_1 S_2 L_3 + C_1 L_2 + L_1) \\ = -m_1 g d_1 - g (m_3 L_1 + m_4 L_1) - g (-C_1 S_2 m_3 y_3 + C_1 m_3 L_2 + C_1 S_2 m_4 z_4 + \\ C_1 S_2 m_4 L_3 + C_1 m_4 L_2) \quad (\text{A.3.20a})$$

(A.3.20a) peut aussi être harmonisé en opérant à un regroupement adéquat des

masses, des longueurs, des inerties et des positions des centres de masses comme montré ci-dessous :

$$\begin{aligned} p_5 &= m_3 y_3; & p_6 &= m_4 L_3; & p_{12} &= m_1; & p_{13} &= m_3 L_2; & p_{15} &= m_4 L_2; & p_{21} &= m_4 z_4; \\ p_{23} &= m_2 z_2 + m_3 L_1 + m_4 L_1. \end{aligned}$$

De ce qui précède, nous obtenons aussi une nouvelle expression pour l'énergie potentielle totale.

$$U = -gp_{12}d_1 - gp_{23} - g(-p_5 C_1 S_2 + p_{13} C_1 + p_{21} C_1 S_2 + p_6 C_1 S_2 + p_{15} C_1) \quad (\text{A.3.20b})$$

### 3.7 Résolution de l'équation de Lagrange

L'équation de Lagrange est caractérisée par la formule suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial k}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau \quad (\text{A.3.21})$$

Les éléments de (A.3.21), vont être calculés individuellement.

1<sup>er</sup> Calcul de  $\frac{\partial k}{\partial \dot{q}}$  :

par rapport à  $\dot{d}_1$  :

$$= p_1 \dot{d}_1 - p_4 S_2 \dot{q}_2 \quad (\text{A.3.22a})$$

par rapport à  $\dot{q}_1$  :

$$= \left[ \begin{aligned} & p_3 S_2^2 - 2p_{17} S_2 - p_{18} C_2^2 - 2p_{16} C_2^2 + \\ & 2p_{22} S_2 + 2p_{14} S_2 - p_{20} C_2^2 + p_7 S_2^2 + \\ & p_8 C_2^2 + p_9 C_3^2 S_2^2 + p_{10} S_3^2 S_2^2 + p_{11} C_2^2 \end{aligned} \right] \dot{q}_1 + (p_9 C_3 S_2 S_3 - p_{10} S_3 S_2 C_3) \dot{q}_2 - p_{11} C_2 \dot{q}_3 \quad (\text{A.3.22b})$$

par rapport à  $\dot{q}_2$  :

$$= -p_4 S_2 \dot{d}_1 + (p_{19} + p_{18} L_3^2 + p_9 S_3^2 + p_{10} C_3^2) \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (p_9 C_3 S_2 S_3 - p_{10} S_3 S_2 C_3) \dot{q}_1 \quad (\text{A.3.22c})$$

par rapport à  $\dot{q}_3$  :

$$= p_{11} \dot{q}_3 - p_{11} C_2 \dot{q}_1 \quad (\text{A.3.22d})$$

2<sup>eme</sup> Calcul de  $\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}}$

par rapport à  $\dot{d}_1$  :

$$= p_1 \ddot{d}_1 - p_4 S_2 \ddot{q}_2 - p_4 S_2 \dot{q}_2^2 \quad (\text{A.3.23a})$$

par rapport à  $\dot{q}_1$  :

$$\begin{aligned} &= \left[ \begin{array}{l} p_2 + p_3 S_2^2 - 2p_{17} S_2 - p_{18} C_2^2 - 2p_{16} C_2^2 + 2p_{22} S_2 + 2p_{14} S_2 \\ -p_{20} C_2^2 + p_7 S_2^2 + p_8 C_2^2 + p_9 C_3^2 S_2^2 + p_{10} S_3^2 S_2^2 + p_{11} C_2^2 \end{array} \right] \ddot{q}_1 + (p_9 C_3 S_2 S_3 - p_{10} S_3 S_2 C_3) \ddot{q}_2 - \\ & p_{11} C_2 \ddot{q}_3 + \left[ \begin{array}{l} (2p_3 S_2 C_2 - 2p_{17} C_2 + 2p_{18} S_2 C_2 + 4p_{16} S_2 C_2 + \\ 2p_{22} C_2 + 2p_{14} C_2 + 2p_{20} S_2 C_2 + 2p_7 S_2 C_2 - \\ 2p_8 S_2 C_2 + 2p_9 C_3^2 S_2 C_2 + 2p_{10} S_3^2 S_2 C_2 + 2p_{11} S_2 C_2) \\ + (-p_9 S_3 C_3 S_2^2 + p_{10} S_3 C_3 S_2^2) \dot{q}_3 \end{array} \right] \dot{q}_2 + \left( \begin{array}{l} p_9 C_3 C_2 S_3 - \\ p_{10} S_3 C_2 C_3 \end{array} \right) \dot{q}_2^2 + \quad (\text{C.23b}) \\ & (p_9 (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2) - p_{10} (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2)) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + p_{11} S_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{aligned}$$

par rapport à  $\dot{q}_2$  :

$$\begin{aligned}
 &= -p_4 S_2 \ddot{d}_1 + (p_{19} + p_9 S_3^2 + p_{10} C_3^2) \ddot{q}_2 + (p_9 C_3 S_2 S_3 - p_{10} S_3 S_2 C_3) \ddot{q}_1 \\
 &- p_4 C_2 \dot{d}_1 \dot{q}_2 + (2p_9 S_3 C_3 - 2p_{10} S_3 C_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (p_9 C_3 C_2 S_3 - p_{10} S_3 C_2 C_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
 &(p_9 (C_3^2 S_2 - S_2 S_3^2) - p_{10} (S_2 C_3^2 + S_2 S_3^2)) \dot{q}_1 \dot{q}_3
 \end{aligned} \tag{A.3.23c}$$

par rapport à  $\dot{q}_3$  :

$$= p_{11} \ddot{q}_3 - p_{11} C_2 \ddot{q}_1 \tag{A.3.23d}$$

3<sup>eme</sup> Calcul de  $\frac{\partial k}{\partial q}$

par rapport à  $d_1$

$$= 0 \tag{A.3.23a}$$

par rapport à  $q_1$  :

$$= 0 \tag{A.3.23b}$$

par rapport à  $q_2$  :

$$\begin{aligned}
 &= \left( \begin{array}{l} p_3 S_2 C_2 - p_{17} C_2 + p_{18} S_2 C_2 + 2p_{16} S_2 C_2 + \\ p_{22} C_2 + p_{14} C_2 + p_{20} S_2 C_2 + p_7 S_2 C_2 + \\ p_8 S_2 C_2 + p_9 C_3^2 S_2 C_2 + p_{10} S_3^2 S_2 C_2 + p_{11} S_2 C_2 \end{array} \right) \dot{q}_1^2 - p_4 C_2 \dot{q}_2 \dot{d}_1 + \\
 &(p_9 C_3 C_2 S_3 - p_{10} S_3 C_2 C_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - p_{11} S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3
 \end{aligned} \tag{A.3.23c}$$

par rapport à  $q_3$  :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [-2p_9 S_3 C_3 S_2^2 + p_{10} S_3 C_3 S_2^2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} (2p_9 S_3 C_3 - p_{10} S_3 C_3) \dot{q}_2^2 + \\
 &\frac{1}{2} (p_9 (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2) - p_{10} (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_2
 \end{aligned} \tag{A.3.23d}$$

4<sup>eme</sup> Calcul de  $\frac{\partial k}{\partial U}$

par rapport à  $d_1$  :

$$= -p_{12} g \quad (\text{A.3.24a})$$

par rapport à  $q_1$  :

$$= -g(p_5 S_1 S_2 - p_{13} S_1 - p_{21} S_1 S_2 - p_6 S_1 S_2 - p_{15} S_1) \quad (\text{A.3.24b})$$

par rapport à  $q_2$  :

$$= -g(-p_5 C_1 C_2 + p_{21} C_1 C_2 + p_6 C_1 C_2) \quad (\text{A.3.24c})$$

par rapport à  $q_3$  :

$$= 0 \quad (\text{A.3.24d})$$

### 3.7.1 Calcul du couple appliqué à chaque articulation en se basant sur (A.3.21)

$$\tau_1 = p_1 \ddot{d}_1 - p_4 S_2 \ddot{q}_2 - p_4 S_2 \dot{q}_2^2 - p_{12} g \quad (\text{A.3.25a})$$

$$\tau_2 = \left[ \begin{array}{l} p_2 + p_3 S_2^2 - 2p_{17} S_2 - p_{18} C_2^2 - 2p_{16} C_2^2 + \\ 2p_{22} S_2 + 2p_{14} S_2 - p_{20} C_2^2 + p_7 S_2^2 + \\ p_8 C_2^2 + p_9 C_3^2 S_2^2 + p_{10} S_3^2 S_2^2 + p_{11} C_2^2 \end{array} \right] \ddot{q}_1 + (p_9 C_3 S_2 S_3 - p_{10} S_3 S_2 C_3) \ddot{q}_2 -$$

$$p_{11} C_2 \ddot{q}_3 + \left[ \begin{array}{l} (2p_3 S_2 C_2 - 2p_{17} C_2 + 2p_{18} S_2 C_2 + 4p_{16} S_2 C_2 + \\ 2p_{22} C_2 + 2p_{14} C_2 + 2p_{20} S_2 C_2 + 2p_7 S_2 C_2 - \\ 2p_8 S_2 C_2 + 2p_9 C_3^2 S_2 C_2 + 2p_{10} S_3^2 S_2 C_2 + 2p_{11} S_2 C_2) \\ + (-p_9 S_3 C_3 S_2^2 + 2p_{10} S_3 C_3 S_2^2) \dot{q}_3 \end{array} \right] \dot{q}_1 +$$

$$(p_9 C_3 C_2 S_3 - p_{10} S_3 C_2 C_3) \dot{q}_2^2 + (p_9 (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2) - p_{10} (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2)) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + p_{11} S_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 -$$

$$g(p_5 S_1 S_2 - p_{13} S_1 - p_{21} S_1 S_2 - p_6 S_1 S_2 - p_{15} S_1)$$

$$(\text{A.3.25b})$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & -p_4 S_2 \ddot{d}_1 + (p_{19} + p_9 S_3^2 + p_{10} C_3^2) \ddot{q}_2 + (p_9 C_3 S_2 S_3 - p_{10} S_3 S_2 C_3) \ddot{q}_1 \\ & - p_4 C_2 \dot{d}_1 \dot{q}_2 + (2p_9 S_3 C_3 - 2p_{10} S_3 C_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (p_9 C_3 C_2 S_3 - p_{10} S_3 C_2 C_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ & (p_9 (C_3^2 S_2 - S_2 S_3^2) - p_{10} (S_2 C_3^2 + S_2 S_3^2)) \dot{q}_1 \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (A.3.25c)$$

$$\begin{aligned} & - \left( \begin{array}{l} p_3 S_2 C_2 - p_{17} C_2 + p_{18} S_2 C_2 + 2p_{16} S_2 C_2 + \\ p_{22} C_2 + p_{14} C_2 + p_{20} S_2 C_2 + p_7 S_2 C_2 + \\ p_8 S_2 C_2 + p_9 C_3^2 S_2 C_2 + p_{10} S_3^2 S_2 C_2 + p_{11} S_2 C_2 \end{array} \right) \dot{q}_1^2 + p_4 C_2 \dot{q}_2 \dot{d}_1 - \\ & (p_9 C_3 C_2 S_3 - p_{10} S_3 C_2 C_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + p_{11} S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - g(-p_5 C_1 C_2 + p_{21} C_1 C_2 + p_6 S_1 S_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_4 = & p_{11} \ddot{q}_3 - p_{11} C_2 \ddot{q}_1 - [-p_9 S_3 C_3 S_2^2 + p_{10} S_3 C_3 S_2^2] \dot{q}_1^2 - (p_9 S_3 C_3 - p_{10} S_3 C_3) \dot{q}_2^2 - \\ & (p_9 (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2) - p_{10} (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (A.3.25d)$$

### 3.8 Mise en place du système sous forme matricielle pour le modèle à quatre axes

En isolant adéquatement les accélérations et les vitesses, nous pouvons mettre les résultats des différents couples sous formes matricielles comme montré ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & 0 \\ 0 & M_{24} & 0 & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ 0 & C_{42} & -C_{34} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A.3.26)$$

$$M_{11} = p_1; \quad M_{13} = -p_4 S_2; \quad M_{22} = \begin{pmatrix} p_2 + 2p_{14} S_2 + 2p_{22} S_2 - p_3 C_2^2 - 2p_{16} C_2^2 \\ -2p_{17} S_2 - p_{18} C_2^2 - p_{20} C_2^2 + p_7 S_2^2 + \\ p_8 C_2^2 + p_{10} S_3^2 S_2^2 + p_9 C_3^2 S_2^2 + p_{11} C_2^2 \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = p_9 S_3 C_3 S_2 - p_{10} S_3 C_3 S_2; \quad M_{24} = -p_{11} C_2; \quad M_{31} = -p_4 S_2;$$

$$M_{32} = p_9 S_3 C_3 S_2 - p_{10} S_3 C_3 S_2; \quad M_{33} = p_{19} + p_9 S_3^2 + p_{10} C_3^2;$$

$$M_{42} = -p_{11} C_2; \quad M_{44} = p_{11};$$

$$\begin{aligned}
C_{13} &= -p_4 C_2 \dot{q}_2; \\
C_{22} &= \begin{pmatrix} p_{14} C_2 + p_3 S_2 C_2 - p_{17} C_2 + p_{22} C_2 + p_{20} S_2 C_2 \\ +2p_{16} S_2 C_2 - p_8 C_2 S_2 + p_{18} C_2 S_2 + p_{10} S_3^2 C_2 S_2 \\ +p_7 S_2 C_2 + p_9 C_3^2 S_2 C_2 - p_{11} S_2 C_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2 + (p_{10} S_2^2 S_3 C_3 - p_9 C_3 S_3 S_2^2) \dot{q}_3; \\
C_{23} &= \begin{pmatrix} p_{14} C_2 + p_3 S_2 C_2 - p_{17} C_2 + p_{22} C_2 + p_{20} S_2 C_2 \\ +2p_{16} S_2 C_2 - p_8 C_2 S_2 + p_{18} C_2 S_2 + p_{10} S_3^2 C_2 S_2 \\ +p_7 S_2 C_2 + p_9 C_3^2 S_2 C_2 - p_{11} S_2 C_2 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + (p_9 S_3 C_3 C_2 - p_{10} C_2 S_3 C_3) \dot{q}_2; \\
C_{24} &= (p_{10} S_2^2 S_3 C_3 - p_9 C_3 S_3 S_2^2) \dot{q}_1 + (p_{11} S_2 + p_9 (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2) + p_{10} (S_3^2 S_2 - C_3^2 S_2)) \dot{q}_2; \\
C_{32} &= - \begin{pmatrix} p_{14} C_2 + p_{22} C_2 + p_3 C_2 S_2 + 2p_{16} C_2 S_2 - p_{17} C_2 \\ +p_{18} C_2 S_2 + p_{20} C_2 S_2 + p_7 C_2 S_2 - p_8 C_2 S_2 \\ +p_{10} S_3^2 S_2 C_2 + p_9 C_3^2 S_2 C_2 - p_{11} S_2 C_2 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} p_9 (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2) \\ +p_{10} (S_3^2 S_2 - C_3^2 S_2) \end{pmatrix} \dot{q}_3 \\
C_{33} &= (p_9 S_3 C_3 - p_{10} S_3 C_3) \dot{q}_3; \quad C_{34} = (p_9 S_3 C_3 - p_{10} S_3 C_3) \dot{q}_2 - p_{11} S_2 \dot{q}_1; \\
C_{42} &= -(p_{10} C_3 S_2^2 S_3 - p_9 C_3 S_2^2 S_3) \dot{q}_1 - (p_{10} (-C_3^2 S_2 + S_3^2 S_2) + p_9 (C_3^2 S_2 - S_3^2 S_2)) \dot{q}_2; \\
C_{43} &= -(-p_{10} S_3 C_3 + p_9 C_3 S_3) \dot{q}_2 + p_{11} S_2 \dot{q}_1
\end{aligned}$$

$$G_1 = -p_{12} g; \quad G_2 = -p_5 g S_1 S_2 + p_{13} g S_1 + p_{21} g S_1 S_2 + p_6 g S_1 S_2 + p_{15} g S_1;$$

$$G_3 = p_5 g C_1 C_2 - p_{21} g C_1 C_2 - p_6 g C_1 C_2$$

### 3.9 Mise en place du système sous forme matricielle pour le modèle à cinq axes

$$\tau = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{15} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} & M_{15} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} & 0 \\ M_{15} & M_{15} & M_{15} & 0 & M_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & -C_{45} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.27)$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} p_1 + p_{37} C_4^2 + p_{40} C_4^2 + p_{35} S_4^2 + p_{36} C_5^2 S_4^2 + p_{38} S_5^2 S_4^2 - p_{13} C_4^2 - p_{25} C_4^2 - p_{28} C_4^2 + 2(p_{22} S_4 + \\ p_9 C_2 + p_8 C_3 + p_{24} S_4 - p_{12} S_4 C_3 + p_{11} C_{23} + p_{19} C_{23} + p_7 C_{23} + p_{18} S_4 C_{23} + p_{15} C_2 + p_{27} S_4 C_{23} \\ +p_{17} S_4 C_3 + p_{26} C_2 + p_{21} S_4 C_3 + p_{10} S_4 C_{23} - p_{20} C_4^2 + p_{14} C_3 + p_6 C_2 + p_{23} C_3 - p_{16} S_4) \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \left[ \begin{array}{l} p_2 + p_{37}C_4^2 + p_{40}C_4^2 + p_{35}S_4^2 + p_{36}C_5^2S_4^2 + p_{38}S_5^2S_4^2 - p_{13}C_4^2 - p_{25}C_4^2 - p_{28}C_4^2 + p_9C_2 + \\ 2(p_{22}S_4 + p_8C_3 + p_{24}S_4 + p_{17}S_4C_3 - p_{12}S_4C_3 + p_{21}S_4C_3 - p_{20}C_4^2 + p_{14}C_3 - p_{16}S_4) + \\ p_{11}C_{23} + p_{19}C_{23} + p_7C_{23} + p_{18}S_4C_{23} + p_{15}C_2 + p_{27}S_4C_{23} + p_{26}C_2 - p_{10}S_4C_{23} + p_6C_2 + p_{23}C_3 \end{array} \right]$$

$$M_{13} = \left[ \begin{array}{l} p_3 + p_{37}C_4^2 + p_{40}C_4^2 + p_{35}S_4^2 + p_{36}C_5^2S_4^2 + p_{38}S_5^2S_4^2 - p_{13}C_4^2 - p_{25}C_4^2 - p_{28}C_4^2 + \\ 2p_{22}S_4 + p_8C_3 + 2p_{24}S_4 - p_{12}S_4C_3 - p_{11}S_3S_2 - p_{19}S_3S_2 - p_7S_3S_2 - p_{18}S_4S_3S_2 \\ - p_{27}S_4S_3S_2 + p_{17}S_4C_3 - p_{10}S_4C_3C_2 + p_{21}S_4C_3 + p_{27}S_4C_3C_2 + p_{10}S_4S_3S_2 + \\ p_{18}S_4C_3C_2 - p_{20}C_4^2 + p_{14}C_3 + p_7C_3C_2 + p_{19}C_3C_2 + p_{11}C_3C_2 + p_{23}C_3 - p_{16}S_4 \end{array} \right]$$

$$M_{14} = \left[ \begin{array}{l} -p_{10}S_{23} - p_{12}C_4S_3 + p_{27}C_4S_{23} + p_{17}C_4S_3 + \\ p_{36}S_5C_5S_4 - p_{38}S_5C_5S_4 + p_{18}C_4S_{23} + p_{21}C_4S_3 \end{array} \right]; \quad M_{15} = -p_{40}C_4$$

$$M_{22} = \left[ \begin{array}{l} p_5 + p_{37}C_4^2 + p_{40}C_4^2 + p_{35}S_4^2 + p_{36}C_5^2S_4^2 + p_{38}S_5^2S_4^2 - p_{13}C_4^2 \\ - p_{25}C_4^2 - p_{28}C_4^2 + 2(p_{22}S_4 + p_8C_3 + p_{24}S_4 - p_{12}S_4C_3 \\ + p_{17}S_4C_3 + p_{21}S_4C_3 - p_{20}C_4^2 + p_{14}C_3 + p_{23}C_3 - p_{16}S_4) \end{array} \right]$$

$$M_{23} = \left[ \begin{array}{l} p_{29} + p_{37}C_4^2 + p_{40}C_4^2 + p_{35}S_4^2 + p_{36}C_5^2S_4^2 + p_{38}S_5^2S_4^2 - p_{13}C_4^2 - p_{25}C_4^2 - p_{28}C_4^2 + 2p_{22}S_4 + \\ p_8C_3 + 2p_{24}S_4 - p_{12}S_4C_3 + p_{17}S_4C_3 + p_{21}S_4C_3 - 2p_{20}C_4^2 + p_{14}C_3 + p_{23}C_3 - 2p_{16}S_4 \end{array} \right]$$

$$M_{24} = [p_{17}C_4S_3 - p_{12}C_4S_3 + p_{36}S_5C_5S_4 - p_{38}C_5S_5S_4 + p_{21}C_4S_3]$$

$$M_{33} = \left[ \begin{array}{l} p_3 + p_{36}C_5^2S_4^2 + p_{38}S_5^2S_4^2 + p_{37}C_4^2 + p_{40}C_4^2 + p_{35}S_4^2 - p_{25}C_4^2 \\ + 2p_{24}S_4 - p_{13}C_4^2 + 2p_{22}S_4 - 2p_{20}C_4^2 - 2p_{16}S_4 - p_{28}C_4^2 \end{array} \right]$$

$$M_{34} = [p_{36}S_5C_5S_4 - p_{38}S_5C_5S_4]; \quad M_{44} = [p_{29} + p_{36}S_5^2 + p_{38}C_5^2]; \quad M_{55} = p_{40}$$

$$C_{11} = \frac{1}{2}[H_1\dot{q}_2 + (H_2 + H_9)\dot{q}_3 + (H_3 + H_{11} + H_{12} + H_{13})\dot{q}_4 + H_4\dot{q}_5];$$

$$C_{12} = \frac{1}{2}H_1\dot{q}_1 + \frac{1}{2}H_1\dot{q}_2 + (H_2 + \frac{1}{2}H_9)\dot{q}_3 + (H_3 + H_{11} + H_{12} + \frac{1}{2}H_{13})\dot{q}_4 + H_4\dot{q}_5$$

$$C_{13} = \frac{1}{2}H_9\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(H_2 + H_9)\dot{q}_1 + \frac{1}{2}(H_2 + H_9)\dot{q}_3 + \left[ H_{11} + \frac{1}{2}(H_{12} + H_{13}) + \frac{1}{2}H_3 \right]\dot{q}_4 + H_4\dot{q}_5$$

$$C_{14} = \frac{1}{2}H_3\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(H_3 + H_{12})\dot{q}_3 + H_5\dot{q}_4 + \frac{1}{2}H_2\dot{q}_5 + \frac{1}{2}(H_3 + H_{11} + H_{12} + H_{13})\dot{q}_1$$

$$C_{15} = \frac{1}{2}H_{10}\dot{q}_4 + \frac{1}{2}H_4\dot{q}_1 ; C_{21} = -\frac{1}{2}H_1\dot{q}_1 ;$$

$$C_{22} = \frac{1}{2}(H_2\dot{q}_3 + (H_{11} + H_{12} + H_{13})\dot{q}_4 + H_4\dot{q}_5$$

$$C_{23} = H_2\dot{q}_1 + \frac{1}{2}H_2\dot{q}_2 + \frac{1}{2}H_2\dot{q}_3 + (H_{11} + \frac{1}{2}H_{12} + H_{13})\dot{q}_4 + H_4\dot{q}_5$$

$$C_{24} = H_{12}\dot{q}_3 + H_7\dot{q}_4 + \frac{1}{2}H_6\dot{q}_5 + (H_{11} + H_{12} + H_{13})\dot{q}_1 + \frac{1}{2}(H_{11} + H_{13})\dot{q}_2$$

$$C_{25} = \frac{1}{2}H_{10}\dot{q}_4 + H_4\dot{q}_1 + \frac{1}{2}H_4\dot{q}_2 + \frac{1}{2}H_6\dot{q}_4$$

$$C_{31} = -\frac{1}{2}(H_2 + H_9)\dot{q}_1 ; C_{32} = -H_2\dot{q}_1 - \frac{1}{2}H_2\dot{q}_2 ; C_{33} = \frac{1}{2}[H_{11} + H_{13}]\dot{q}_4 + \frac{1}{2}H_4\dot{q}_5$$

$$C_{34} = H_{14}\dot{q}_4 + \frac{1}{2}H_6\dot{q}_5 + (H_{11} + H_{13})\dot{q}_1 + (H_{11} + H_{13})\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(H_{11} + H_{13})\dot{q}_3$$

$$C_{35} = \frac{1}{2}H_1\dot{q}_4 + H_4\dot{q}_1 + H_4\dot{q}_2 + \frac{1}{2}H_4\dot{q}_3$$

$$C_{41} = -(H_3 + H_{11} + H_{12} + H_{13})\dot{q}_1 ; C_{42} = -(H_{11} + H_{12} + H_{13})\dot{q}_1 - \frac{1}{2}(H_{11} + H_{13})\dot{q}_2 ;$$

$$C_{43} = -(H_{11} + H_{13})\dot{q}_1 - (H_{11} + H_{13})\dot{q}_2 - \frac{1}{2}(H_{11} + H_{13})\dot{q}_3 ;$$

$$C_{44} = \frac{1}{2}H_8\dot{q}_5 ; C_{45} = \frac{1}{2}(H_6 - H_{10})\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(H_6 - H_{10})\dot{q}_3 + \frac{1}{2}(H_6 - H_{10})\dot{q}_5 + \frac{1}{2}H_8\dot{q}_4$$

$$C_{51} = -\frac{1}{2}H_4\dot{q}_1 ; C_{52} = -H_4\dot{q}_1 - \frac{1}{2}H_4\dot{q}_2 - \frac{1}{2}H_6\dot{q}_4 ; C_{53} = -H_4\dot{q}_1 - H_4\dot{q}_2 - \frac{1}{2}H_4\dot{q}_3$$

$$H_1 = 2 \begin{pmatrix} -p_{11}S_{23} - p_9S_2 - p_7S_{23} - p_6S_2 + p_{10}S_4S_{23} - \\ p_{26}S_2 - p_{27}S_4S_{23} - p_{15}S_2 - p_{19}S_{23} - p_{18}S_4S_{23} \end{pmatrix} ; H_2 = 2 \begin{pmatrix} -p_{14}S_3 - p_{17}S_4S_3 \\ -p_8S_3 + p_{12}S_4S_3 \\ -p_{21}S_4S_3 - p_{23}S_3 \end{pmatrix} ;$$

$$H_3 = 2(p_{27}C_4C_{23} + p_{18}C_4C_{23} - p_{10}C_4C_{23}) ; H_4 = 2(p_{38}S_5S_4^2C_5 - p_{36}C_5S_4^2S_5) ;$$

$$H_5 = \begin{pmatrix} -p_{27}S_4S_{23} - p_{18}S_4S_{23} + \\ p_{36}S_5C_5C_4 - p_{17}S_4S_3 - p_{21}S_4S_3 + \\ p_{12}S_4S_3 - p_{38}S_5C_5C_4 + p_{10}S_4S_{23} \end{pmatrix}; H_6 = 2 \begin{pmatrix} p_{38}S_5^2S_4 + p_{36}C_5^2S_4 \\ -p_{36}S_5^2S_4 - p_{38}C_5^2S_4 \end{pmatrix};$$

$$H_7 = \begin{pmatrix} p_{12}S_4S_3 - p_{17}S_4S_3 - p_{38}S_5C_5C_4 \\ + p_{36}S_5C_5C_4 - p_{22}S_4S_3 \end{pmatrix}; H_8 = 2(p_{36}S_5C_5 - p_{38}S_5C_5);$$

$$H_9 = 2 \begin{pmatrix} -p_{27}S_4S_{23} - p_7S_{33} - p_{11}S_{23} \\ -p_{18}S_4S_{23} + p_{10}S_4S_{23} - p_{19}S_{23} \end{pmatrix}; H_{10} = 2p_{40}S_4;$$

$$H_{11} = 2 \begin{pmatrix} p_{28}C_4S_4 - p_{40}C_4S_4 + p_{38}S_5^2S_4C_4 - p_{37}C_4S_4 \\ -p_{16}C_4 + p_{24}C_4 + p_{35}S_4C_4 + p_{36}C_5^2S_4C_4 \\ + p_{13}C_4S_4 + p_{22}C_4 + p_{25}C_4S_4 \end{pmatrix};$$

$$H_{12} = 2(p_{21}C_4C_3 + p_{17}C_4C_3 - p_{12}C_4C_3); H_{13} = 4p_{20}C_4S_4; H_{14} = p_{36}S_5C_5C_4 - p_{38}S_5C_5C_4;$$

$$G_1 = -p_{30}gS_{123}S_4 + p_{31}gS_{123} + p_{32}gS_{12} + p_{33}gS_1 + p_{30}gS_{123}S_4 + p_{41}gS_{123}S_4 + p_{42}gS_{123}S_4 + \\ p_{43}gS_{123} + p_{44}gS_{12} + p_{45}gS_1$$

$$G_2 = -p_{30}gS_{123}S_4 + p_{31}gS_{123} + p_{32}gS_{12} + p_{41}gS_{123}S_4 + p_{42}gS_{123}S_4 + p_{43}gS_{123} + p_{44}gS_{12}$$

$$G_3 = -p_{30}gS_{123}S_4 + p_{31}gS_{123} + p_{41}gS_{123}S_4 + p_{42}gS_{123}S_4 + p_{43}gS_{123}$$

$$G_4 = p_{30}gC_{123}C_4 - p_{41}gC_{123}C_4 - p_{42}gC_{123}C_4$$

### 3.10 Paramètres du robot à cinq axes

Les paramètres du robot ont été obtenus en harmonisant les masses et les inerties comme suit :

$$p_1 = m_3L_1^2 + m_2L_1^2 + m_5L_2^2 + m_4L_2^2 + m_5L_3^2 + m_3L_2^2 + m_4L_3^2 + m_5L_1^2 + m_5L_4^2 + m_4L_1^2 + 2m_5z_5L_4 \\ + m_4x_4^2 + m_3x_3^2 + m_2x_2^2 + m_1x_1^2 + m_5z_5^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + I_{zz3}$$

$$p_2 = m_3L_3^2 + m_4L_2^2 + m_5L_2^2 + m_5L_3^2 + m_3L_2^2 + m_6L_2^2 + m_4L_3^2 + m_6L_4^2 + m_5L_4^2 + m_6L_5^2 + 2m_5z_5L_4 + \\ m_4x_4^2 + m_3x_3^2 + m_2x_2^2 + m_5z_5^2 + I_{zz2} + I_{zz3}$$

$$p_3 = m_5 L_3^2 + m_4 L_3^2 + m_5 L_4^2 + 2m_5 z_5 L_4 + m_4 x_4^2 + m_3 x_3^2 + m_5 z_5^2 + I_{zz3}$$

$$p_4 = m_5 L_3^2 + m_4 L_3^2 + m_6 L_5^2 + 2m_5 z_5 L_4 + m_4 x_4^2 + m_5 z_5^2 + I_{zz3}$$

$$p_5 = m_5 L_2^2 + m_4 L_2^2 + m_5 L_3^2 + m_3 L_2^2 + m_6 L_2^2 + m_4 L_3^2 + m_5 L_4^2 + 2m_5 z_5 L_4 + m_4 x_4^2 + m_3 x_3^2 + m_2 x_2^2 + m_5 z_5^2 + I_{zz2} + I_{zz3}$$

$$p_6 = m_2 x_2 L_1 ; p_7 = m_3 x_3 L_1 ; p_8 = m_3 x_3 L_2 ; p_9 = m_3 L_1 L_2 ;$$

$$p_{10} = m_4 x_4 L_1 ; p_{11} = m_4 L_1 L_3 ; p_{12} = m_4 x_4 L_2 ; p_{13} = m_4 x_4^2 ;$$

$$p_{14} = m_4 l_2 L_3 ; p_{15} = m_4 L_1 L_2 ; p_{16} = m_4 x_4 l_3 ; p_{17} = m_5 L_4 L_2 ; p_{18} = m_5 L_1 L_4 ;$$

$$p_{19} = m_5 L_3 L_1 ; p_{20} = m_5 L_4 z_5 ; p_{21} = m_5 z_5 L_2 ;$$

$$p_{22} = m_5 L_3 z_5 ; p_{23} = m_5 L_2 L_3 ;$$

$$p_{24} = m_5 L_4 L_3 ; p_{25} = m_5 L_4^2 ; p_{26} = m_5 L_1 L_2 ; p_{27} = m_5 L_1 z_5 ; p_{28} = m_5 z_5^2 ;$$

$$p_{29} = I_{zz4} + m_5 z_5^2 + m_5 L_4^2 + 2m_5 z_5 L_4 + m_4 x_4^2 ; p_{30} = m_4 x_4 ; p_{31} = m_4 L_3 ; p_{32} = m_4 L_2 ;$$

$$p_{33} = m_4 L_1 ; p_{34} = m_5 L_1 ;$$

$$p_{35} = I_{xx4} ; p_{36} = I_{xx5} ; p_{37} = I_{yy4} ; p_{38} = I_{yy5} ; p_{39} = I_{zz4} ; p_{40} = I_{zz5} ; p_{41} = m_5 z_5 ;$$

$$p_{42} = m_5 L_4 ; p_{43} = m_5 L_3 ; p_{44} = m_5 L_2$$

## **ANNEXE 4**

### **Trajectoire dans le plan**

#### 4.1 Équation de la trajectoire dans le plan

L'équation d'un plan P est donnée par [14] :

$$A_p x + B_p y + C_p z + D_p = 0 ; \quad (\text{A.4.1})$$

#### 4.2 Vecteurs directeurs du plan

Les vecteurs directeurs peuvent être déterminés par ce qui suit, en tenant compte du système d'axes x, y et z :

Pour z, on a :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} A_p \\ B_p \\ C_p \end{pmatrix} ; \quad (\text{A.4.2})$$

Pour x, on a :

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -C_p \\ 0 \\ A_p \end{pmatrix} ; \quad (\text{A.4.3})$$

Pour y qui doit être perpendiculaire à x et à z, on a :

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_p & B_p & C_p \\ -C_p & 0 & A_p \end{vmatrix}$$

Les vecteurs directeurs sont alors donnés par les relations ci-dessous pour les différents axes x, y et z.

Pour x :

$$\vec{u} = \frac{-C_{pi} + 0_{pj} + A_{pk}}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} = \frac{\vec{V}_2}{\|\vec{V}_2\|}; \quad (\text{A.4.5})$$

Pour y :

$$\vec{v} = \frac{A_p B_{pi} - (A_p^2 + C_p^2)_j + B_p C_{pk}}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} = \frac{\vec{V}_3}{\|\vec{V}_3\|}; \quad (\text{A.4.6})$$

Pour z :

$$\vec{w} = \frac{A_{pi} + B_{pj} + C_{pk}}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|}; \quad (\text{A.4.7})$$

### 4.3 Positions dans le plan

Soit le point p dans le repère d'axe  $(0, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  :

$$\vec{op} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad (\text{A.4.8})$$

$$\begin{aligned} \vec{op} &= x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \\ &= x \left( \frac{-C_{pi} + 0_{pj} + A_{pk}}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} \right) + y \left( \frac{A_p B_{pi} - (A_p^2 + C_p^2)_j + B_p C_{pk}}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} \right) + z \left( \frac{A_{pi} + B_{pj} + C_{pk}}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \right) \\ &= \left( \frac{-C_p x}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} + \frac{A_p B_p y}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} + \frac{A_p z}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \right) \vec{i} + \\ &\quad \left( 0 + \frac{-(A_p^2 + C_p^2) y}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} + \frac{B_p z}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \right) \vec{j} + \\ &\quad \left( \frac{A_p x}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} + \frac{B_p C_p y}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} + \frac{C_p z}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (\text{A.4.9})$$

De (A.4.9), on peut exprimer les positions du plan :

$$p_x = \frac{-C_p x}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} + \frac{A_p B_p y}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} + \frac{A_p z}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \quad (\text{A.4.10})$$

$$p_y = 0 + \frac{-(A_p^2 + C_p^2)y}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} + \frac{B_p z}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \quad (\text{A.4.11})$$

$$p_z = \frac{A_p x}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} + \frac{B_p C_p y}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} + \frac{C_p z}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \quad (\text{A.4.12})$$

#### 4.4 Orientation du plan

Nous allons procéder ci-dessous à la mise en place d'un système matriciel de  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$  suivant (A.4.10), (A.4.11) et (A.4.12) :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} & \frac{A_p B_p}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} & \frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \\ 0 & -\frac{A_p^2 + C_p^2}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} & \frac{B_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \\ \frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} & \frac{B_p C_p}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} & \frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.13})$$

De (A.4.13), on peut avoir la matrice de rotation du plan.

$$\text{Rot}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} & \frac{A_p B_p}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} & \frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \\ 0 & -\frac{A_p^2 + C_p^2}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} & \frac{B_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \\ \frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} & \frac{B_p C_p}{\sqrt{A_p^2 B_p^2 + (A_p^2 + C_p^2)^2 + B_p^2 C_p^2}} & \frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.14})$$

Les orientations dans le plan par rapport au robot sont obtenues en faisant le rapport des matrices (1.14) et (A.4.14). Ce rapport donne les résultats ci-dessous :

$$C_\psi = \frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}} \Rightarrow \psi = \arccos\left(\frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}}\right) \quad (\text{A.4.15})$$

$$S_\psi S_\gamma = \frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}} \Rightarrow \gamma = \arcsin\left(\frac{\frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + C_p^2}}}{\sin\left(\arccos\left(\frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}}\right)\right)}\right) \quad (\text{A.4.16})$$

$$S_\varphi S_\psi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\frac{A_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}}}{\sin\left(\arccos\left(\frac{C_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}}\right)\right)}\right) \quad (\text{A.4.17})$$

## **ANNEXE 5**

### **Organisation vectorielle et matricielle du découplage**

### 5.1 Vecteur de découplage des vitesses et accélérations

L'organisation vectorielle du découplage se fait logiquement en fonction de la direction imposée pour la contrainte. Pour la présente recherche, nous avons imposé la contrainte dans la direction de z par rapport à la vitesse. Ceci nous amène à poser le vecteur des vitesses comme suit :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.1})$$

où  $v_x$ ,  $v_y$  et 0 de (A.5.1) représentent respectivement les vitesses linéaires dans l'espace de la tâche par rapport à x, y et z.  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  représentent respectivement les vitesses angulaires dans l'espace de la tâche par rapport à x, y et z.

De l'expression donnée par (A.5.1) le vecteur des vitesses contraint prend logiquement la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{p1} \\ \dot{x}_{p2} \\ \dot{x}_{p3} \\ \dot{x}_{p4} \\ \dot{x}_{p5} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.2})$$

L'accélération du vecteur des vitesses contraint est égale à :

$$\ddot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{p1} \\ \ddot{x}_{p2} \\ \ddot{x}_{p3} \\ \ddot{x}_{p4} \\ \ddot{x}_{p5} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.4})$$

En posant :  $\dot{x}_{p1} = v_x$ ,  $\dot{x}_{p2} = v_y$ ,  $\dot{x}_{p3} = \omega_x$ ,  $\dot{x}_{p4} = \omega_y$  et  $\dot{x}_{p5} = \omega_z$ , et en considérant la contrainte, on a :

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.5})$$

## 5.2 Découplage de $M_{cx}$ , $C_{cx}$ et $G_{cx}$

Le découplage des matrices  $M_{cx}$ ,  $C_{cx}$  et du vecteur  $G_{cx}$  sera fonction de la matrice de rotation  $R_0$  du plan. En considérant l'hypothèse que la direction de  $z$  est perpendiculaire au plan, nous aurons la matrice de rotation  $R_1$  par rapport à la force, qui sera égale à  $R_2$  par rapport au moment. Par conséquent, nous avons ces matrices comme suit :

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.6})$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.7})$$

Nous savons que les matrices d'inertie, de force de Coriolis et le vecteur de gravité sont obtenues par les formules suivantes :

$$M_{cx} = R_0^T M(x) R_0 \quad (\text{A.5.8})$$

$$C_{cx} = R_0^T M(x) \dot{R}_0 + R_0^T C(x, \dot{x}) R_0 \quad (\text{A.5.9})$$

$$G_{cx} = R_0^T G(x) \quad (\text{A.5.10})$$

Suivant la direction de la contrainte, nous avons les résultats suivants :

$$M_{cx11} = \begin{bmatrix} M_{xc11} & M_{xc12} & M_{xc14} & M_{xc15} & M_{xc16} \\ M_{xc12} & M_{xc22} & M_{xc24} & M_{xc25} & M_{xc26} \\ M_{xc14} & M_{xc24} & M_{xc44} & M_{xc45} & M_{xc46} \\ M_{xc15} & M_{xc25} & M_{xc45} & M_{xc55} & M_{xc56} \\ M_{xc16} & M_{xc26} & M_{xc46} & M_{xc56} & M_{xc66} \end{bmatrix}; \quad C_{cx11} = \begin{bmatrix} C_{xc11} & C_{xc12} & C_{xc14} & C_{xc15} & C_{xc16} \\ C_{xc21} & C_{xc22} & C_{xc24} & C_{xc25} & C_{xc26} \\ C_{xc41} & C_{xc42} & C_{xc44} & C_{xc45} & C_{xc46} \\ C_{xc51} & C_{xc52} & C_{xc54} & C_{xc55} & C_{xc56} \\ C_{xc61} & C_{xc62} & C_{xc64} & C_{xc65} & C_{xc66} \end{bmatrix};$$

$$M_{cx21} = [M_{xc13} \quad M_{xc23} \quad M_{xc34} \quad M_{xc35} \quad M_{xc36}]; \quad C_{cx21} = [C_{xc31} \quad C_{xc32} \quad C_{xc34} \quad C_{xc35} \quad C_{xc36}];$$

$$G_{cx1} = \begin{bmatrix} G_{xc1} \\ G_{xc2} \\ G_{xc4} \\ G_{xc5} \\ G_{xc6} \end{bmatrix}; \quad G_{cx2} = G_{xc3};$$

Nous ne pouvons malheureusement pas représenter les éléments de ces matrices, car les expressions sont grandes. Ceci est valable pour la suite des matrices et des vecteurs dans l'espace de la tâche.

### 5.3 Découplage de $J_c$ , et $I_c$

Le découplage de la matrice  $J_c$ , et du vecteur  $I_c$ , sera aussi fonction de la matrice de rotation  $R_0$  du plan en tenant compte de la contrainte dans la direction de  $z$ .

La matrice jacobienne de transformation  $J_c$  est égale à :

$$J_c = J^+ R_0 = \begin{bmatrix} J_{11}^+ & J_{12}^+ & 1 & J_{14}^+ & J_{15}^+ & 0 \\ J_{21}^+ & J_{22}^+ & 0 & J_{24}^+ & J_{25}^+ & J_{26}^+ \\ J_{31}^+ & J_{32}^+ & 0 & J_{34}^+ & J_{35}^+ & 0 \\ J_{41}^+ & J_{42}^+ & 0 & J_{44}^+ & J_{45}^+ & J_{46}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & 0 & 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} J_{11}^{\circ} & J_{12}^{\circ} & J_{13}^{\circ} & J_{14}^{\circ} & J_{15}^{\circ} & J_{16}^{\circ} \\ J_{21}^{\circ} & J_{22}^{\circ} & J_{23}^{\circ} & J_{24}^{\circ} & J_{25}^{\circ} & J_{26}^{\circ} \\ J_{31}^{\circ} & J_{32}^{\circ} & J_{33}^{\circ} & J_{34}^{\circ} & J_{35}^{\circ} & J_{36}^{\circ} \\ J_{41}^{\circ} & J_{42}^{\circ} & J_{43}^{\circ} & J_{44}^{\circ} & J_{45}^{\circ} & J_{46}^{\circ} \end{bmatrix}$$

Et les matrices jacobiennes de transformation découplées  $J_{c1}$  et  $J_{c2}$  sont égales à :

$$J_{c1} = \begin{bmatrix} J_{11}^{\circ} & J_{12}^{\circ} & J_{14}^{\circ} & J_{15}^{\circ} & J_{16}^{\circ} \\ J_{21}^{\circ} & J_{22}^{\circ} & J_{24}^{\circ} & J_{25}^{\circ} & J_{26}^{\circ} \\ J_{31}^{\circ} & J_{32}^{\circ} & J_{34}^{\circ} & J_{35}^{\circ} & J_{36}^{\circ} \\ J_{41}^{\circ} & J_{42}^{\circ} & J_{44}^{\circ} & J_{45}^{\circ} & J_{46}^{\circ} \end{bmatrix}; \text{ et } J_{c2} = \begin{bmatrix} J_{13}^{\circ} \\ J_{23}^{\circ} \\ J_{33}^{\circ} \\ J_{43}^{\circ} \end{bmatrix}$$

Le vecteur du courant  $I_c$  est égal à :

$$I_c = J_c^{-1} I$$

Avec le découplage, nous avons  $I_{c1}$  et  $I_{c2}$  qui sont égales à :

$$I_{c1} = \begin{bmatrix} I_{c11} \\ I_{c22} \\ I_{c44} \\ I_{c55} \\ I_{c66} \end{bmatrix} \text{ et } I_{c2} = I_{c33}$$

## **ANNEXE 6**

### **Rappel des notions de stabilité**

## 6.1 Notions de stabilité de Lyapunov

Considérons le système invariant

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{A.6.1})$$

$x \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement continue. La solution de (A.6.1g) qui débute en  $x_0$  à  $t = t_0 = 0$  est notée  $x(t, x_0)$ . Soit  $\tilde{x}_0$  une perturbation de  $x_0$ .

- $x(t, x_0)$  est bornée si  $\exists$  une constante  $k(x_0)$  tel que  $\|x(t, x_0)\| \leq k(x_0) \quad \forall t \geq t_0$ .
- $x(t, x_0)$  est stable si  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$  tel que  $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ .
- $x(t, x_0)$  est attractive si  $\exists r(x_0) > 0$  tel que  $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0)\| = 0$ .
- $x(t, x_0)$  est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.
- $x(t, x_0)$  est instable s'il n'est pas stable.

Certaines solutions peuvent être stables et d'autres instables, en particulier le point  $x_c$  tel que  $x(t, x_c) = x_c$  et caractérisé par  $f(x_c) = 0 \quad t \geq t_0$ . Il est appelé point d'équilibre et,

- $x_c$  est globalement stable s'il est stable et toute solution de (A.6.1) est bornée.
- $x_c$  est globalement asymptotiquement stable s'il est asymptotiquement stable et sa région d'attraction est  $\mathbb{R}^n$ .
- $x_c$  est localement exponentiellement stable s'ils existent  $\alpha, \beta$  et  $r > 0$  tel que  $\|x_0 - x_c\| < r \Rightarrow \|x(t, x_0) - x_c\| < \beta \exp(-\alpha t) \|x_0 - x_c\|$ .

**Théorème 6.1a**

Supposons que  $x_e = 0$  est le point d'équilibre de l'expression donnée par (A.6.1), c'est-à-dire

$$\dot{x} = f(x)$$

et que  $f$  est localement continue et lipschitz. Supposons que  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction  $C^1$  (continûment dérivable) définie positive et non bornée tel que

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0 \quad (\text{A.6.2})$$

alors  $x_e = 0$  est globalement stable (GS) et toute solution de (A.6.1) converge vers l'ensemble  $E$  où

$$\dot{V} \equiv 0 \quad (\text{A.6.3})$$

Si  $\dot{V}$  est définie (strictement) négative alors  $x_e = 0$  est globalement asymptotiquement stable.

**Définition 6.1**

La solution  $x(t, x_0)$  est

- stable conditionnellement à  $Z$ , si  $x_0 \in Z$  et  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  tel que  $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta$  et  $\tilde{x}_0 \in Z \Rightarrow \|x(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0)\| < \varepsilon \forall t \geq t_0$ .
- attractive conditionnellement à  $Z$ , si  $x_0 \in Z$  et  $\exists r(x_0) > 0$  tel que  $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < r$  et  $\tilde{x}_0 \in Z \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0)\| = 0$ .

- asymptotiquement stable conditionnellement à  $Z$ , s'il est stable et attractive conditionnellement à  $Z$ .
- globalement asymptotiquement stable conditionnellement à  $Z$ , s'il est asymptotiquement stable conditionnellement à  $Z$  et  $r(x_0) = +\infty$ .

### **Théorème 6.1b**

Supposons que  $x_c = 0$  est le point d'équilibre de (A.6.1), c'est-à-dire

$$\dot{x} = f(x)$$

et que  $f$  est localement continue et lipschitz. Supposons que  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction  $C^1$  (continûment dérivable) semi définie positive tel que

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x) \leq 0 \quad (\text{A.6.4})$$

Soit  $Z$  le plus grand ensemble invariant contenant  $\{x / V(x) = 0\}$ . Si  $x_c = 0$  est asymptotiquement stable conditionnellement à  $Z$  alors  $x_c = 0$  est stable.

## **6.2 Notions de stabilité de Lasalle**

### **Théorème 6.2**

Soit  $\Omega$  un ensemble positivement invariant de  $\dot{x} = f(x)$ .

Soit  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continûment dérivable telle que  $V(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$ .

Soit  $E = \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\}$ , et soit  $M$  le plus grand ensemble invariant contenu dans  $E$ .

Alors, toute solution bornée  $x(t)$  débutant dans  $\Omega$  converge dans  $M$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Corollaire 62 (Stabilité Asymptotique)**

Soit  $x = 0$  l'unique point d'équilibre de  $\dot{x} = f(x)$ .

Soit  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continûment dérivable, définie positive et non bornée telle que  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Soit  $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$ , et supposons qu'aucune solution autre que  $x(t) \equiv 0$  ne peut rester indéfiniment dans  $E$ .

Alors l'origine  $x = 0$  est globalement asymptotiquement stable.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Lu, W. S. and Meng, Q. H. (1991). Impedance Control with Adaptation for robotic Manipulations, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 7, 408-415.
- [2] Liu, G. J. Goldenberg, A. A. (1991). Robust Hybrid Impedance Control of Robot Manipulators, *Proceeding of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, California*, 287-292.
- [3] Mc Clamroch, N. H. and Wang, D. (1988), Feedback stabilization and tracking of constrained robots, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 33, 419-426.
- [4] Mnif, F. Saad, M. and Boukas, E. K. (1996). An adaptive sliding-mode approach for force/motion control of manipulators under holonomic constraints, *Can. J. Elect & Comp. Eng.*, 21, 73-80.
- [5] Khatib, O. (1987). A Unified approach for motion and force control of robot manipulators : The operational space formulation, *IEEE Journal of robotics and automaion*, Vol.3, 43-53.
- [6] Slotine, J. -J. E. LI, W. (1987), Adaptive strategies in constrained manipulation, *IEEE Conference on Robotics and Automation*, 595-601.
- [7] Desantis, R. M. (1996). Motion/Force control of Robotics manipulator, *Transactions of the ASME, journal of dynamics systems, measurement and control*, 118, 386-389.
- [8] Su, C. Y. Stepanenko, Y. (1997). Backstepping-Based hybrid adaptive control of robot manipulators incorporating actuator dynamics, *International journal of adaptive control and signal processing*, 11, 141-153.
- [9] Guenther, R. Hus, L. (1993). Variable structure adaptive cascade control of rigid-link electrically-driven robot manipulators, *Proc. IEEE Int. conf. On decision and control*, San Antonio, Tx, IEEE, New York, 2137-2142.
- [10] Lallemand, J. P. Zegloul, S. (1994). *Robotique Aspects fondamentaux*, Masson Paris Millan Barcelone.
- [11] Schilling, R. J. (1990). *Fundamentals of Robotics-Analysis and Control*, Englewood Cliffs (N.J.) : Prentice-Hall.
- [12] Craig, J. J. (1989). *Introduction to Robotics Mechanics and Control*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Second edition.

- [13] Sepulchre, R. Jankovic, M. and Kokotovic, P. (1997). *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag.
- [14] Murray Spiegel, R. (1974). *Formules et tables de mathématique*, McGraw-Hill inc, New York.
- [15] Assada, H. and Slotine, J. –J. E. (1986). *Robot analysis and control*, John Wiley & Sons.
- [16] Slotine, J. J. Li, W. (1987), On the adaptative control of robot manipulator. *Int. J. Robotics Research*, 6, 49-59.
- [17] Spiegel, M. R. (1993). *Formules et tables de mathématiques*, Mc Graw-hill
- [18] Willems, J. C. (1972), Dissipative dynamical system, parts I and II Arch. *Rational Mechanical and Analysis*, 45, 331-393.
- [19] Craig, J. J. (1995). *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Second edition.
- [20] Kelly, R. and Carelli, R. (1988), Unified approach to adaptive control of robotic manipulators, *Proceedings of the 27<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, Austin, Texas*, 1598-1603.
- [21] Tanaka, N. and Fujita, M. (1999). Adaptive  $H_{\infty}$  approach based on energy-shaping for robotic force/position regulation and motion control, *Proceeding of the American Control Conference*, San Diego, California, 2445-2449.
- [22] A. Isidori (1989). *Nonlinear Control System*. New York: Springer Verlag.
- [23] De Montigny , M. et Sicard, P. (1999). Commande adaptative force/position d'une main robotique, *Proceedings of the 1999 IEEE canadian conference on electrical and computers Enginnering*, 1392-1397.
- [24] Slotine, J. and Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, (Englewood Cliffs NJ), Prentice Hall.
- [25] Seraji, H. (1998). Nonlinear and Adaptive control of force and Compliance in Manipulator, *International Journal of Robotics Research*, 17, 467-484.
- [26] Kwan, C. M. (1996). Robust adaptive force/motion control of constrained robots, *IEEE Proc. Control Theory Appl.* 143, 103-109.

- [27] Su, C. Y., Leung T. P. and Zhou, Q. J. (1990). Adaptive control of robot manipulators under constrained motion. *Proceedings of the 29<sup>th</sup> IEEE conference on decision and control*, 2650-2655.
- [28] Queiroz, M. Hu, J. and Dawson, D. M. (1997) Adaptive Position/Force Control of Robot Manipulators Without Velocity Measurements: Theory and Experimentation, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics -Part B: Cybernetics*, 27,796-809.
- [29] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic. (1995) *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons.
- [30] Arimoto S. (2000), Passivity-Based Control, *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, San Francisco, CA*, 227-232.
- [31] Natale, C. and Villani, L. (1998). Passivity-based design and experimental validation of adaptive force/position controllers for robot manipulators, *Proceeding of the 37<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision & Control*, Tampa, Florida USA, 427-432.
- [32] Nganga-Kouya, D. Saad, M. and Lamarche, L. (2001). Backstepping adaptive Force/position Control for robotic manipulators, *Applied Simulation and Modelling proceedings of the IASTED International Conference*, Marbella, Spain, 279-284.
- [33] D. Nganga-Kouya, M. Saad and L. Lamarche, Backstepping adaptive position Control for robotic manipulators, *2001 American Control Conference, Cristal Gateway Marriot Arlington, Virginia*, 636-640, 2001