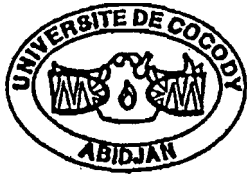


es-06385

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE  
UNION- DISCIPLINE- TRAVAIL



# THÈSE UNIQUE

N° 513 / 2007

*Présentée à l'UFR de Mathématiques et Informatique  
de l'Université de Cocody Abidjan*

*Pour obtenir le grade de*

## DOCTEUR ÈS-SCIENCES

**Mathématiques**

**Spécialité:**

**Mécanique**

**Thème:**

**MODELE ANALYTIQUE D'ETUDE D'UNE FISSURE  
SOUMISE A DES SOLLICITATIONS EXTERIEURES  
D'ORDRE VIBRATOIRE**

*Par*

**WAKEU POLA PIERRE MARIE**

*Soutenue le 09 Novembre 2007*

*Composition du Jury :*

- Président:** Pr. N'ZI Yao Koffi Modeste, Professeur Titulaire, UFR-MI, Université de Cocody  
**Directeur:** Pr. DANHO Emile, Maître de Conférence, UFR-MI, Université de Cocody  
**Rapporteur:** Pr. TOURE Siaka, Professeur Titulaire, UFR-SSMT, Université de Cocody  
**Examineur:** Pr. ADOU Kablan Jérôme, Maître de Conférence, UFR-MI, Université de Cocody  
**Examineur:** Pr. KANGNI Kinvi, Maître de Conférence, UFR-MI, Université de Cocody  
**Examineur:** Pr. FOFANA Ibrahim, Maître de Conférence, UFR-MI, Université de Cocody

# THÈSE UNIQUE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES

Présentée à l'UFR de Mathématiques et Informatique  
de l'Université de Cocody-Abidjan

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR ÈS-SCIENCES DE MATHÉMATIQUES**

Option : **Mécanique**

Sujet :

*MODELE ANALYTIQUE D'ETUDE D'UNE FISSURE SOUMISE A  
DES SOLLICITATIONS EXTERIEURES D'ORDRE VIBRATOIRE.*

Présenté par **WAKEU POLA PIERRE MARIE**

Soutenue le 09 Novembre 2007

2 décembre 2007

# Table des matières

<b>DEDICACES</b>	<b>5</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>14</b>
<b>INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	<b>20</b>
<b>I ETUDE CLASSIQUE</b>	<b>28</b>
<b>1 GENERALITE</b>	<b>29</b>
1.1 Définition d'un matériau . . . . .	30
1.1.1 Différents types de matériaux . . . . .	32
1.1.2 Description de la méthode de classification . . . . .	32
1.2 Définition d'une fissure . . . . .	35
1.2.1 Les différents types de fissure . . . . .	36
1.2.2 Les types de fissuration . . . . .	38
1.3 Les variables d'étude . . . . .	39
1.4 Détermination des valeurs critiques . . . . .	42
1.5 Conclusion . . . . .	44

<b>2</b>	<b>MATERIAU DUCTILE</b>	<b>45</b>
2.1	Définition de la rupture ductile . . . . .	46
2.2	Quelques méthodes de la détermination de la zone plastique en fond de fissure . . . . .	47
2.3	Description de l'écouissage . . . . .	48
2.3.1	Le Critère de Von Mises . . . . .	48
2.3.2	Le Critère de Tresca . . . . .	49
2.3.3	Le Critère de Hill . . . . .	50
2.3.4	Le Critère de Tsai . . . . .	50
2.4	Calcul de la dissipation en fond de fissure . . . . .	51
2.5	Détermination du champ des efforts à la pointe de la fissure .	55
2.6	Application . . . . .	58
2.7	Conclusion . . . . .	63
 <b>II ETUDE DES SINGULARITES EN FOND DE FISSURE</b>		 <b>65</b>
<b>3</b>	<b>CALCUL DU CHAMP DES DEPLACEMENTS EN FOND DE FISSURE</b>	<b>66</b>
3.1	Introduction . . . . .	67
3.2	Formulation du problème . . . . .	67
3.2.1	Domaine d'étude des solutions . . . . .	68
3.3	Equations du système . . . . .	71
3.3.1	Expression de $grad [div U^\epsilon]$ en coordonnées sphériques .	72
3.3.2	Expression de $\Delta U^\epsilon$ . . . . .	74

3.4	Détermination des équations différentielles de propagation selon chaque axe . . . . .	77
3.4.1	Selon $e_r$ . . . . .	78
3.4.2	Selon $e_\theta$ . . . . .	86
3.4.3	Selon $e_\varphi$ . . . . .	91
3.5	Matrice de facteur d'intensité de contraintes . . . . .	99
3.6	Structure de la solution . . . . .	100
3.7	Applications . . . . .	101
3.7.1	Déformation plane . . . . .	102
3.7.2	Déformation antiplane . . . . .	102
3.7.3	Flexion . . . . .	103
3.7.4	Compression . . . . .	103
3.8	Résolution de (3.82-a) . . . . .	104
3.9	Résolution de (3.82-b) et mise en évidence de l'existence de nouvelles solutions modales singulières . . . . .	105
3.9.1	Etude de $P_{1n}, P_{2n}$ et mise en évidence de nouvelles singularités . . . . .	107
3.9.2	Pour les valeurs de $n$ telles que $\sqrt{\delta_n} \notin \mathbb{N}^*$ ( $\mathbb{N}^*$ étant l'ensemble des entiers naturels non nuls) . . . . .	107
3.9.3	Pour les valeurs de $n$ telles que $\sqrt{\delta_n} \in \mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels) . . . . .	109
3.10	Solution de(3.82-c) . . . . .	110
3.11	Solution de (3.82-d) . . . . .	111
3.12	Estimation des fonctions $\Psi_\alpha(\varepsilon)$ . . . . .	112
3.13	Conclusion . . . . .	123

<b>4 INFLUENCE DE LA LONGUEUR DE LA FISSURE ET DES FREQUENCES SUR LES DEPLACEMENTS EN FOND DE FISSURE</b>	<b>125</b>
4.1 Introduction . . . . .	126
4.2 Formulation du problème . . . . .	126
4.3 Changement de coordonnées . . . . .	127
4.3.1 Laplacien en coordonnées curvilignes . . . . .	127
4.4 Projection de l'équation (4.1) suivant les directions $e_r$ , $e_\theta$ , et $e_\varphi$	137
4.4.1 Selon $e_r$ . . . . .	138
4.4.2 Selon $e_\theta$ . . . . .	139
4.4.3 Selon $e_\varphi$ . . . . .	140
4.5 Formulation de la solution . . . . .	141
4.6 Equation (4.46) . . . . .	142
4.7 Equation (4.49) . . . . .	148
4.8 Equation (4.51) . . . . .	152
4.9 Détermination de $\beta_j$ . . . . .	153
4.10 Analyse et commentaire des équations obtenues . . . . .	154
 <b>CONCLUSION GENERALE</b>	 <b>158</b>

# DEDICACES

Que Dieu notre Père, le Tout puissant, créateur de l'univers, soit  
loué et glorifié dans son œuvre par ce travail ;

« je veux dire merci au Seigneur, de tout mon coeur je veux  
remercier le Dieu saint. Oui, je veux remercier le Seigneur sans  
oublier un seul de ses bienfaits.»

(Psaume 103)

« Seigneur, je veux te louer de tout mon coeur. Devant les  
puissances du ciel je veux te célébrer par cette oeuvre (mes  
chants) et m'incliner face à ton sanctuaire.»

(Psaume 138)

**«Tu es la forteresse où je trouve refuge  
Tu es mon Dieu, J'ai confiance en toi.»**  
(Psaume 91)



«Tu as séché mes larmes,  
Tu m'as évité de faire le fatal.  
Sur cette terre destinée aux vivants,  
Je marcherai donc sous le regard du Seigneur.  
J'ai gardé la foi, même quand je répétais :  
Me voilà en bien triste état !  
J'étais si bouleversé que je disais :  
On ne peut se fier à personne !  
Que puis-je rendre au Seigneur  
Pour tout le bien qu'il m'a fait ?  
Je lèverai la coupe des délivrances,  
Et je crierai le nom du Seigneur  
Ce que j'ai promis au Seigneur, je le ferai  
En présence de tout son peuple»

(Psaume 116)

## Je le dédie à sa suite :

### A ma mère

In memoriam **Dengne Angeline**<sup>†</sup>, ce travail est le fruit de nombreux sacrifices que tu as toujours consentis pour nous. Oui, le grain que tu as mis en terre avec beaucoup d'attention et toute la tendresse a fini par germer.

Aujourd'hui, maman, tu n'es pas là, ta présence me manque énormément et je souhaite que ce travail honore ta mémoire.

Sois en fière et repose dans la paix de notre Seigneur.

### A mon père

**Pola Wabo Boniface**, toi qui as consenti et consens encore de nombreux sacrifices pour nous, je voudrais humblement que tu vois en ce travail le fruit de tes efforts pour tes enfants. Papa, je voudrais ici te présenter toutes mes excuses pour toutes ces années passées loin de toi. Que le Seigneur Tout Puissant nous garde et t'accorde longue vie afin que tu puisses voir et goûter a ce que tu as semé.

Que Dieu te garde auprès de nous longtemps ;  
je t' aime papa.

A mes oncles et tantes

Guiagaing Thérèse, Wakeu Tékamdem<sup>†</sup> et Djoguem Marie Madeleine<sup>†</sup>, Tchemo Jean, Téguia Joseph, Kaham Emile, Kamtchueng Jacques, Ntoussida Delphine, Tchuendem Bernadette, Kamdem Philippe, Kamwa Gilbert, Guiaguem Pauline, Wabo Souap Kamdem<sup>†</sup>, Kuissu Odette<sup>†</sup>, Maman Pauline, Siego Cathérine, Maman rachelle, Kaham philippe, Ton françois<sup>†</sup>, maman lydie, je vous remercie non seulement pour vos prières, mais pour les soins que vous m'avez toujours donnés. Que le Seigneur vous accorde longue vie.

Je vous aime tous.

A mes frères, mes soeurs, mes cousins, mes cousines, mes neveux et mes nièces

Pola Joseph Celestin, Pola Charlie Tadjuidje, Pola Joël, Simo Franklin, Kenmogne Emile, Pola Kamwa Pascal, Djoguem Marie Madeleine, Pola Damtchueng Valerie, Pola Francis, Toukan Pola Jacques Bernard, Wankeu Emmanuel, Gatchuessi, Kammengne Pola Hugues, Kenmogne Pola Raoul, Sitchepeng Pola Bienvenu, en memoire de maman, que le Seigneur veille sur notre famille, afin qu'elle soit toujours unie dans l'Amour et la Paix de Jesus-christ. Je vous embrasse tous.

**A ma bien aimée soeur chérie petite maman NAGHAM Ngwessitcheu Edwige Ginelle**

Tu es et tu demeurcras pour moi un trésor inépuisable. Pour tes conseils, ton soutien et ton attention. Comme le soleil pendant le jour et la lune pendant la nuit, tu m'as toujours éclairé.

Que le Seigneur te garde et augmente en toi ces qualités d'amour.

A mes parents bien aimés "**Monsieur & Madame Ngwessitcheu**" et Monsieur, je voudrais ici vous traduire mon attachement pour tout votre soutien moral et spirituel. Ne dit-on pas "tel père tel fils" ?

Je n'ai pas eu besoin de vous rencontrer pour vous connaître. Votre fille Edwige est le reflet de votre amour et de vos sentiments. Vous êtes merveilleux et je ne pourrais que louer le Seigneur qu'il vous accorde longue vie, afin que nous puissions en profiter de vous, au maximum.

Que le Seigneur vous garde longtemps avec nous.

Merci maman, Merci papa.

**A ma Marraine, Docteur NGABA Olive Marie Nicole**

Tu as toujours été pour moi comme une mère, tu m'as aidé dans mes premiers pas vers la communion avec le Christ.

Que le Seigneur te bénisse et te comble de grâce.

**A La Famille GON**

Ce travail est aussi le vôtre. En mémoire de Papa **GON Valentin François<sup>†</sup>**, qui a toujours prôné la justice et l'amour, je voudrais ici, vous marquer mon attachement à tous : **Diogène, Awa, Fatoue, Francis, Vicko, Zembey, Augustine, Etienne, Patrick**, feu **Madjibang Emmanuel<sup>†</sup>**, **Martiale, Valentin**, etc...

Que le Seigneur nous accorde la grâce de demeurer une famille.

**A Madame GON Jeannine**, pour tout l'amour et la tendresse dont vous m'as toujours comblés. Que le Dieu tout puissant vous garde auprès de nous pour longtemps, maman.

**A Maman NGABA Mbezele Béatrice**

Pour votre amour et votre force, que Dieu vous garde longtemps avec nous.

**A mon Frère Jean Noel Pennavayre**

Tous ces moments de joie et de peine que nous avons vécus n'ont fait que renforcer l'amour qui nous lie. Tu as un grand cœur, ne changez surtout pas. Tu m'as ouvert les portes de ton cœur, de ta famille et de ta maison. Que le Seigneur te bénisse, toi, la famille, Marie Claude ton épouse "de tout mon cœur" et mes neveux Moshé et Ariel.

**Au Docteur DJUE N'Dri Roger**

Les moments passés ensemble n'ont fait que renforcer nos liens de fraternité et d'amour. Tu m'as ouvert ton coeur, il est plein d'amour, que Dieu te garde dans cet amour. Tu m'as ouvert ta maison, que le Seigneur te bénisse toi, la famille, Madame "Prisca" et les enfants.

**Au Docteur BOA Amoikon Arsène**

Pour tout le soutien et la spontanéité dont tu as toujours su faire preuve, je ne saurais comment te remercier.

Que le Seigneur vous protège et vous bénisse, toi, ta famille, Lisa et mon neveux.

**Au Docteur Keita Moustapha**

Votre aide a été très capitale pour moi dès mon arrivée ici à Abidjan, que le Dieu tout puissant vous le rende au centuple.

**A mon frère Issaac Angbo**

Président de la FIJDA (Fédération Ivoirienne de Judo et Disciplines Associées) dont le soutien, les qualités et la collaboration ont été sans faille.

**A mon frère Ingénieur ANGOA Ngaba Christian Denis**

Pour tes conseils et ton soutien sans faille.

**A Monsieur et Madame Timothée Mandeng dit "Pablo",** dont les moments n'ont pas toujours été faciles.

Que le Seigneur vous bénisse.

**Au Docteur NGABA Mbezele Denise**

Pour ton soutien.

**Au Docteur YANOU Bilomo Gertrude**

Pour tes conseils et ton soutien moral et spirituel.

**A TOUS CEUX QUE JE N'AI PAS CITÉS**

# REMERCIEMENTS

*Je remercie le Professeur DANHO Emile, Professeur titulaire à l'université d'Abidjan Cocody dont la simplicité et les qualités humaines m'ont beaucoup fasciné.*

*Nous avons bénéficié depuis le DEA jusqu'à l'achèvement de ce travail dont il est le Directeur, de son temps, de son attention, de sa patience et de ses conseils.*

*En travaillant à ses côtés, il nous a inculqué le sens du travail bien fait, de la rigueur et de la discipline. Qu'il veuille trouver ici, l'expression de ma gratitude.*

*Monsieur le Professeur, merci pour votre générosité et votre sens du devoir.*

*Que Dieu vous Garde ainsi que votre famille.*



*Mes remerciement vont aussi à l'endroit du Directeur de l'UFR-MI le **Professeur ADJE Assohoun**, Maître de conférence à l'université d'Abidjan Cocody, du Directeur Adjoint chargé de la recherche le **Professeur N'ZI Modeste**, Professeur titulaire à l'université d'Abidjan Cocody), de tous les **Enseignants chercheurs** membres du Laboratoire de Mécanique de l'université d'Abidjan Cocody, du Directeur du Laboratoire de Mathématiques Appliquées, le **Professeur AKMEL De Godfroy**, Maître de conférence à l'université d'Abidjan Cocody et du directeur du laboratoire de Mathématiques Fondamentales le **Professeur Edmond FEDIDA**, Professeur titulaire à l'université d'Abidjan Cocody pour tous les efforts qu' ils déploient pour l'amélioration du cadre de travail des étudiants en général et en particulier ceux du 3<sup>ème</sup> cycle.*

*Soyez en infiniment remerciés et que Dieu vous bénisse.*

Je remercie le **Professeur KAGNI Kinvi** et **Madame** pour l'assistance permanente qu'ils m'ont toujours accordée.

Que le Seigneur tout puissant veille sur eux et leur famille.



Je remercie le **Docteur SYLLA Moussa** pour ses conseils et son soutien moral permanent.



Je remercie le **Docteur RANDRIANANDRASANA Florentin** pour son soutien et son aide permanente.



Je remercie le **Docteur FEUTO Justin** pour ses conseil et son encouragement.



*Je remercie tous le **personnel enseignants-chercheurs et administratifs** de l'UFR-MI, pour leur gentillesse et leur franche collaboration.*

*Merci pour votre générosité.*

*Que Dieu vous Garde ainsi que votre famille.*

**Je remercie :**

Tous les frères et soeurs de la Paroisse Saint Albert le Grand d'Abidjan, le Curé l'Abbé Goa Ibo.J.M.et les Vicaires.

Les frères et sœurs du Groupe d'Approfondissement de la Foi que dirige le Père ORDUNA Diez Carlos de la communauté de Saint-Viateur.

Les frères Sohotide Jean Didier, Aloue Antoine et tous les clercs de Saint-Viateur.

*L'AUC (l'Abidjan Université Club) et sa section Judo.*

*Tous les enfants du Judo Club de la Riviera II et son Président Monsieur Doue et Madame.*

*Tous les frères et soeurs judokas.*

*Jean Claude CAMEROUN dit "JCC" et Madame sans oublier les enfants.*

*Les frères et soeurs de l'Aïkido en Côte d'Ivoire.*

*Maître Apling Kouassi et Madame,*

*Monsieur Atta Kouamé, et sa bien aimée Eveline et notre fille à tous Edith,*

*Madame et Monsieur Pokam pour leur soutien moral,*

*Mademoiselle Goulia Léocadie Angeline et Monsieur Thierry,*

*Mademoiselle Goulia Marie France,*

*Mademoiselle Goulia Yollande à qui je souhaite beaucoup grâce,*

*Monsieur Goulia Jean Baptiste,*

*Le Docteur Allangba Eric,*

*Le Docteur Lath Lin Charles,*

*Le Docteur Malley Arnaud et Madame,*

*Monsieur Krizoua Paul Aimé,*

*Les étudiants du 3<sup>ème</sup> cycle, en particulier mes promotionnaires parmi lesquels Asséké Donatien, Gomat Landry, Séry Mathias, Yanga Kouassi Kouassi Serge.*

*Monsieur Sylla Cheickna,*

*A mes amis de la faculté des sciences et techniques de l'université de Bangui RCA,*

*Tous les amis et amies de la cité universitaire du campus de Cocody.*

*Mademoiselle Adèle Galani, Sandrine Owona, Christelle Mbakop, Carole,*

*Monsieur Jean Marck GUIRANDOU,*

*Monsieur HAGBE Henry Lionel dit "tchotcho",*

*La famille Binde en particulier Hortence, Giselle, Alike, les jumeaux, Solange etc...*

*Mademoiselle Koffi Affoue Marthe et son enfant,*

*La grande famille Amou de Bonoua, Marcelin, Charles, Marie Laure et tous.*

**Merci pour tous ces moments merveilleux que nous avons passés ensemble.**

*A TOUS CEUX QUE JE N'AI PAS CITES, QU'ILS M'ACCORDENT LEUR INDULGENCE.*

**QUE DIEU VOUS BENISSE**

Enfin, je ne saurais clore cette liste sans avoir une pensée pieuse pour tous les enseignants-chercheurs décédés de l'UFR-MI.

Professeur NIANGO NIANGO Donatien<sup>†</sup>

Professeur NEZIT Pierre<sup>†</sup>

Docteur DALAUD Levry Bogard<sup>†</sup>

Docteur SAÏBA Ouelogo<sup>†</sup>

Docteur SOUMAHORO KODIA<sup>†</sup>

Que le Seigneur vous garde dans sa félicité  
céleste.

# INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Le phénomène de fissuration est un problème particulier dans le domaine des matériaux. Il faut souligner que la fissure fait partir de la vie des matériaux et même du fonctionnement normal de certains matériaux (exemple de la mise en charge des armatures dans le béton armé).

A ce titre, on peut affirmer que la mécanique de la rupture ou de la fissuration existera toujours tant que la construction des structures et le progrès technique se développeront.

Vue sur ce plan, la fissure constitue un véritable problème pour la durée d'utilisation des matériaux. Elle contribue ainsi à la diminution de la durée de vie d'utilisation des matériaux ou des structures.

Il existe deux catégories de rupture : celle qui provient de la conception du matériau lors de sa fabrication ou de l'utilisation et, celle qui provient de nouveaux matériaux délicats à maîtriser.

Devant la complexité du problème, la science de la mécanique de la rupture des matériaux scinde l'évolution de la vie d'un matériau en trois phases selon un schéma simplifié et approximatif dont la représentation graphique

peut être donnée par la fonction de "vie" représentée par  $G$  qui est l'énergie du matériau en fonction du temps. La courbe récapitulative des différentes phases de la durée de vie d'utilisation d'un matériau est présentée sur la Figure. 1.

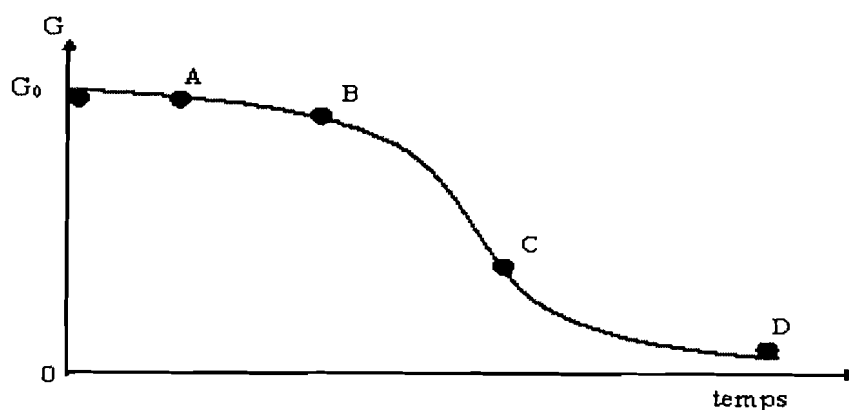


FIG. 1 – Les différentes phases d'évolution (vie) d'un matériau

1) La première phase va du point  $G_0$  au point  $B$ .  $G_0$  est l'énergie initiale du matériau ou de la structure à  $t = 0$  (début de sa mise en charge ou d'utilisation). Cette phase est elle-même subdivisée en deux et comprend une phase de latence  $G_0A$  marquée par la "pureté" du matériau (absence de fissure) et la phase d'endommagement  $AB$ . Cette phase d'endommagement est marquée par la présence de microfissures surfaciques ou volumiques au sein du matériau. La mesure mécanique de cet endommagement se fait par rapport à une direction donnée  $(\vec{N})$  grâce au paramètre d'endommagement noté :  $D_N$ .

2) La phase de fissuration va du point  $B$  au point  $C$ . Cette phase est caractérisée par la présence de macrofissures ou de fissures visibles à l'oeil nu

ou encore techniquement détectable au sein du matériau.

3) La phase de rupture va du point  $C$  au point  $D$ . Elle se caractérise par un accroissement de la longueur de la fissure atteignant des mesures caractéristiques du matériau. A ce stade, on assiste impuissamment à la rupture totale du matériau.

Ces trois phases présentent un caractère d'irréversibilité dans la mesure où la fermeture totale de la fissure est impossible. Néanmoins, les fissures peuvent être réparées dans la mesure du possible en rebutant la pièce là où la fissure est présente, ou par affouillement et soudure.

La mécanique de la rupture connaît ses premiers essais vers le 15<sup>e</sup> siècle avec Léonard de Vinci qui montre que la résistance à la traction varie inversement avec la longueur de la fissure. Cette vision de Léonard de Vinci sera interprétée qualitativement par Griffith avec le critère d'énergie en 1920. Cette date marque un tournant important comme étant véritablement le début de la science de la mécanique de la rupture par fissuration avec la théorie de la rupture fragile de Griffith. C'est pourquoi, on peut affirmer que la mécanique de la rupture a connu un essor tardif et qu'elle dérive largement de la théorie de Griffith.

La première loi est apparue entre les années 1960 et 1980. Il s'agit de la loi empirique de Paris [31] qui est une loi de rupture par fatigue

$$\frac{\partial \ell}{\partial N} = C (\Delta K_{eff})^n, \quad (1)$$

où  $\ell$  désigne la longueur de la fissure,  $N$  le Nombre de cycles,  $\Delta K_{eff}$  la variation du facteur d'intensité de contrainte effective,  $C$  et  $n$  des constantes du matériau ( $n$  est encore appelé exposant de la loi de Paris). Cette loi a connu plusieurs améliorations par plusieurs auteurs, dont celle de Forman



[31] qui introduit le seuil de non fissuration et un coefficient de l'ordre de 0,5 pour ajuster les effets de la force moyenne.

Quant à Griffith A. A., en 1920, avec la théorie énergétique [30], il introduit le taux de restitution de l'énergie  $G$  indépendant de la géométrie du matériau pour décrire la propagation de la fissure. Quelques années plus tard, Irwin G.R. (1956) introduisit la notion de facteur d'intensité de contraintes  $K_i (MP_a\sqrt{m})$  pour décrire les contraintes en fond de fissure, où les différentes valeurs de  $i$  représentent respectivement les différents modes ((voir Figure. 1.5 page 37),  $i = I$  correspond au mode  $I$  qui est le mode d'ouverture,  $i = II$  correspond au mode  $II$  qui est le mode de cisaillement plan,  $i = III$  correspond au mode  $III$  qui est le mode de cisaillement antiplan). Cette notion va permettre à Irwin de caractériser la singularité de la propagation en fond de fissure et de définir les conditions de propagation d'une fissure à partir de la ténacité critique du matériau  $K_c$ .

- Pour  $K_i < K_c$ , pas de propagation. Dans le cas de la fissuration en mode  $I$ , la dérivée de la longueur de la fissure  $\ell$  par rapport au temps est nulle ( $\dot{\ell} = 0$ ).

- Pour  $K_i = K_c$ , il y a possibilité d'une propagation de la fissure ( $\dot{\ell} \geq 0$ )

- Pour  $K_i > K_c$ , il y a propagation de la fissure.

Malgré les avantages de cette théorie proposée par Irwin sur les conditions de propagation et de stabilité de la fissure, elle comporte néanmoins des inconvénients notables comme le manque de données sur la position de la fissure dans l'espace et le temps.

Les travaux de Horii et Nemat-Nasser (1985) [21] sont fondamentaux dans

le sens où ils constituent une synthèse des recherches précédentes et sont le point de départ de nouveaux efforts théoriques et d'un progrès considérable dans le domaine de la micromécanique. L'objectif est de définir un critère global de résistance pour les matériaux rocheux par la mécanique de la rupture. Pour cela, ils réalisent un programme théorique et expérimental, en utilisant, pour vérifier leurs conclusions, des plaques de résine présentant à l'intérieur une ou plusieurs fentes lubrifiées. Pellegrino (1995) [21] cite également les modèles de Berkeley (Ewy et Cook, 1990; Ewy, 1990; Ewy, 1989; Ewy, Kemeny et al., 1987) qui traitent du même problème.

Sur un autre plan, on peut citer les travaux récents de Hai-Ping Lin 2003 [17] qui démontrent l'influence de la fissure sur l'équation de fréquence dans le cas d'une poutre. Ce calcul de Lin permet de détecter la position de la fissure à partir des fréquences de l'onde de perturbation envoyée sur le matériau (les techniques d'ultrason, de radiographie "gamma"). On pourra aussi citer en plus, les techniques d'infiltration de fluides colorés (ressuage).

La mécanique de la rupture a pour origine une approche macroscopique des problèmes d'ingénierie liés à la propagation instable de fissures préexistantes. Elle considère par exemple dans le cas d'une roche, que la rupture est due à l'existence d'une fracture, c'est à dire d'une discontinuité du matériau à l'échelle macroscopique. Elle étudie entre autres, les conditions de propagation d'une fissure préexistante à partir des études prenant en compte la singularité de la présence de la fissure en fond de fissure. De manière générale, on peut affirmer que la mécanique de la rupture dérive largement de la théorie de la rupture fragile de Griffith. Dès lors, plusieurs méthodes vont voir le jour, parmi lesquelles on pourrait citer la méthode RKR (Ritchie,

Knott, Rice) [19].

La méthode RKR met en évidence le fait que la rupture brutale au sein d'un matériau bidimensionnel intervient lorsque les contraintes principales de traction  $\sigma_{yy}$  en avant de la fissure, où

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = R_e \cdot f\left(\frac{r}{K}\right) \cdot g_{ij}(\theta) \quad (2)$$

( $R_e$  est la limite d'élasticité,  $f$  et  $g_{ij}$  des fonctions à déterminer et  $K$  le facteur d'intensité de contrainte), dépassent la contrainte critique de clivage  $\sigma_c$  sur une distance notée  $X_c$  (Fig. 2). L'un des inconvénients du modèle RKR est de négliger l'épaisseur du matériau, ce qui ramène l'analyse à la dimension deux.

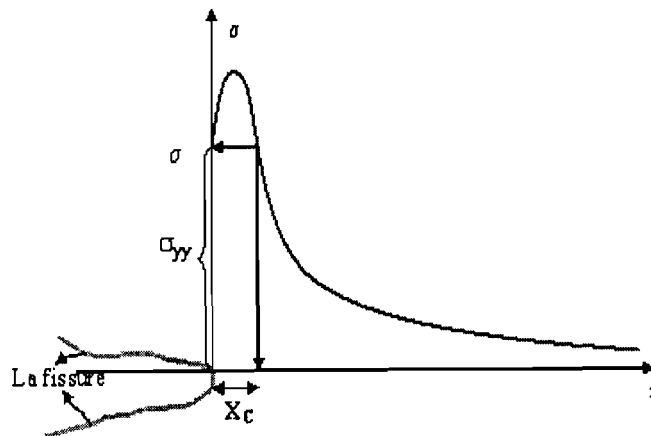


FIG. 2 – Principe du modèle de rupture par clivage

En 1986, à partir d'un modèle de plaque fissurée utilisant la méthode d'homogénéisation à deux variables, Andrieux S., Bamberger Y., Marigo J. J. [1] définissent les critères de fermeture et de contact de la fissure et montrent

que la déformation macroscopique d'une cellule peut s'exprimer à partir des déplacements mesurés sur les bords. Ces déplacements  $U$  sont une contribution de deux déplacements : le déplacement  $U^m$  provenant du matériau sain et le déplacement  $U^d$  dû à la fissure.

En 1995, les travaux de Sehitoglu H., Gall K. et Garcia A. M. [46] vont permettre une amélioration considérable de la loi de Paris sur la définition des variables de la fonction  $\Delta K_{eff}$  et son interprétation.

Dans la même année, Harmuth H. [18] étudie la stabilité de la fissure en considérant deux formes d'énergies : l'énergie de la rupture et l'énergie d'initialisation de la fissure. Il obtient la relation

$$\frac{1}{2Y_T^2} \left( 2 \frac{Y_T'}{Y_T} \lambda_T - \lambda_T' \right) \leq 1, \quad (3)$$

marquant la fin de la stabilité de la fissure ( $Y_T$ ,  $\lambda_T$ ,  $Y_T'$  et  $\lambda_T'$  sont des fonctions de la longueur de la fissure et de la longueur caractéristique du matériau). Biner S. B. [5] utilise la technique dite hybride à partir des fonctions complexes de Muskhelishvili pour l'analyse du passage des microfissures à la fissure principale.

Pour ce qui est de la prédiction de la fissure, nous pouvons citer les récents travaux (en 2006) de Sang Tae Kim, Damir Tadjiev & Hyun Tae Yang, [45] utilisant le modèle simple de la racine carrée moyenne dans le cas d'un chargement aléatoire dans les conditions 7475-T7351 de l'alliage d'aluminium avec le Modèle RMS.

Dans l'étude de l'initiation des microfissures, les travaux de P.N.B. Anongba [2], [3] & [4] ont permis de connaître les caractéristiques des champs de déplacements et de contraintes dans le cas des dislocations sinusoïdales prenant naissance dans les coins.

Les effets de la bifurcation dans un matériau fragile endommagé furent étudiés par Xin Sun, Dale Karr [49] (2001) par la théorie des systèmes dynamiques avec la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires.

Les travaux menés par E. Sanchez-Palencia et D. Leguillon [32], [33] & [34], et utilisant la méthode de séparation de variables dans le calcul de la singularité du champ de déplacements avec la théorie des développements asymptotiques montrent que les déplacements sont singuliers en  $r$  à la puissance  $\alpha$ , avec  $\alpha > 0$  en  $2D$  et  $\alpha > -\frac{1}{2}$  en  $3D$ . Ce modèle, bien que ne prenant pas en compte les bifurcations et les différentes combinaisons de modes, compte tenu de l'hypothèse de compatibilité de la fissure initiale et de la sollicitation extérieure, orientera notre étude à proposer un modèle en  $3D$  applicable en  $2D$  [8] & [9].

Le présent travail se focalise sur la résolution analytique du champ de déplacements dans un matériau fragile fissuré, soumis aux sollicitations vibratoires hors de la zone de résonance en utilisant le principe de séparation de variables [8] & [9]. Il est constitué de quatre chapitres.

Le premier chapitre porte sur les généralités de la mécanique de la rupture.

Le deuxième est une étude énergétique de la dissipation dans le cas d'un matériau ductile à la pointe de la fissure et non en fond de fissure.

Le troisième chapitre est l'étude proprement dite du cas fragile qui fait ressortir de nouvelles formes de singularités et un modèle matriciel  $[K]$  du facteur d'intensité de contrainte afin de prendre en compte les bifurcations et les combinaisons de modes de fissuration.

Le quatrième chapitre porte sur l'implication de la longueur de la fissure et l'influence des vibrations sur les déplacements en fond de fissure.

Première partie

**ETUDE CLASSIQUE**

# Chapitre 1

## GENERALITE

### Principales notations

$\ell$  est la longueur de la fissure

$\ell_0$  est la longueur initiale de la fissure

$\Delta K_{eff}$  est la variation du facteur d'intensité de contrainte effective

$G$  est le taux de restitution de l'énergie

$G_C$  est le taux de restitution d'énergie critique

$K_i (MP_a\sqrt{m})$  est le facteur d'intensité de contrainte

$K_{iC}$  le facteur d'intensité de contrainte critique

$R_e$  est la limite d'élasticité

$\nu$  est le coefficient de Poisson

$W_e$  ou  $W$  est la densité d'énergie de déformation

$\sigma_c$  est la contrainte critique

## 1.1 Définition d'un matériau

On définit un matériau comme un assemblage d'atomes liés les uns aux autres par des liaisons interatomiques. Il est considéré neutre dans la mesure où il ne subit aucune sollicitation extérieure. La disposition de ces liaisons interatomiques dans l'espace constitue le réseau cristallin. La compacité du matériau est due à l'action des forces de cohésion interatomiques entre les différents atomes du matériau qui maintiennent les atomes aux différents nœuds du réseau.

L'observation microscopique du matériau pur, bien poli en surface, montre de petits grains de forme presque polygonale, accolés les uns aux autres par le joint de grain dont les dimensions sont de l'ordre du micron ( $1\mu = 10^{-3}mm$ ). L'examen de ce grain polygonal encore appelé cristal ou monocristal pour la diffraction des rayons  $X$  ou par diffraction électronique montre que le grain est constitué d'un empilement régulier d'éléments individualisés appelés atomes; dont les distances interatomiques sont de l'ordre de l'Angström (1 à  $6A^\circ$ ;  $1A^\circ = 10^{-4}\mu$ ).

Ceci permet de considérer macroscopiquement le matériau comme étant un domaine continu que dans maints des cas, on considère comme homogène et isotrope.

Mais une observation minutieuse d'un monocristal montre qu'un grain est parfaitement anisotrope. Ce qui expliquerait parfois, les variations de certains résultats physiques en fonction de la direction. Toutefois, au sein d'un grain, les atomes ont une disposition tout a fait périodique, ce qui permet de définir un grain comme un assemblage régulier d'atomes s'empilant dans les trois directions de l'espace pour former un ensemble triplement périodique. C'est



pourquoi on définit le grain comme un assemblage régulier d'atomes. Ainsi, on définit la compacité d'un matériau en fonction de l'empilement de ses atomes de façon à occuper la plus grande partie de l'espace qui leur est offert. Ce qui entraîne les atomes dans une disposition en plan de façon, pour un atome, à être entouré de six autres atomes pour constituer la couche *A*, de trois atomes pour la couche *B* et la couche *C*. Ce qui conduit à deux possibilités : voir Figure. 1.1 ci-dessous.

Première possibilité : les atomes se placent au droit de la couche *A* pour donner une structure hexagonale compacte notée *HC*.

Deuxième possibilité : les atomes se placent au droit des interstices non occupés de la couche *A* pour donner une structure cubique à face centrée *CFC*.

Il existe aussi des ensembles non compacts avec une structure cubique centrée (métaux).

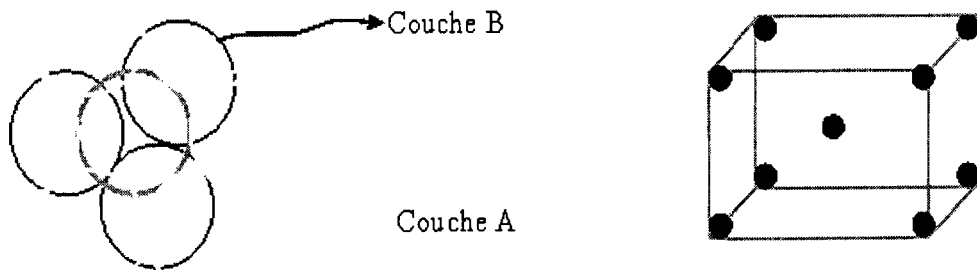


FIG. 1.1 – Disposition compact *HC* et non compact *CC*

### 1.1.1 Différents types de matériaux

Il faut signaler qu'il n'est pas toujours facile de classer les matériaux selon un groupe, dans la mesure où il faut au préalable définir le ou les critère(s) de chaque groupe. Ainsi, on comprend aisément qu'on peut avoir plusieurs méthodes pour différencier ou grouper les matériaux, selon l'objectif ou les besoins recherchés, à condition de bien définir le paramètre de valeur qui permettra de dire que tel matériau appartient à tel ensemble ou non. Pour ce qui est de notre étude, nous utiliserons la méthode classique qui consiste à mettre en évidence la zone plastique ou à considérer le glissement en fond de fissure. Ainsi, on obtient de manière apparente deux critères qui, en fin de compte, se regroupent dans les résultats, dans la mesure où les deux groupes de chacun des paramètres de valeur de sélection (plasticité et glissement) ont les mêmes éléments : les deux conduisant à deux types de matériaux.

Le premier critère utilise le phénomène de plasticité en fond de fissure : Il s'agit de mettre d'un côté, ceux des matériaux qui n'ont pas de zone plastique importante (négligeable) en fond de fissure et qui sont appelés matériaux fragiles, et de l'autre côté ceux des matériaux qui ont une zone plastique importante en fond de fissure et qui sont appelés matériaux ductiles.

### 1.1.2 Description de la méthode de classification

Il s'agit de procéder à des tests macroscopiques en prenant des échantillons (éprouvette) munis d'une fissure initiale, qu'on soumet à une traction afin de déterminer la courbe effort- déplacement ( $P - \delta$ ),  $\delta$  étant l'augmentation de la distance entre les bords de l'entaille.

On obtient deux types de courbes selon que le matériau est fragile ou ductile (Fig.1.2) :

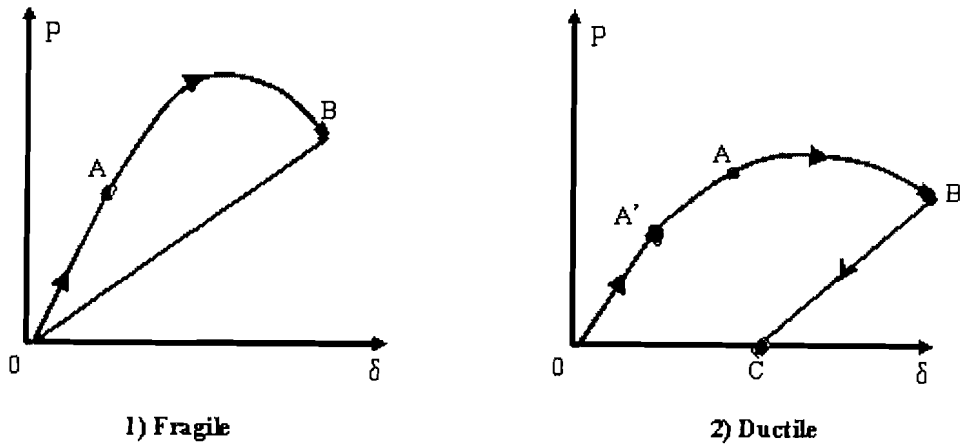


FIG. 1.2 – Courbe  $P - \delta$

**Cas fragile :**

le point  $A$  marque le début de la propagation de la fissure; le point  $B$ , le début de la décharge. Pour étudier les matériaux fragiles, on peut utiliser la Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR).

Ainsi, on définit par matériau fragile, un matériau dont la zone plastique à la pointe de la fissure n'apparaît pas ou est négligeable. On parle dans ce cas de rupture fragile. Cette rupture se caractérise par une propagation brutale de la fissure à grande vitesse sans dissipation plastique, quand les conditions d'instabilités sont atteintes à la pointe de la fissure. Ceci peut se schématiser par une courbe de rupture. Soit " $G$ " le taux de restitution d'énergie et " $G_C$ " le taux de restitution d'énergie critique. On définit la courbe de rupture fragile en fonction de la longueur de la fissure " $\ell$ ". L'analyse de la courbe

montre une rupture brutale de la fissure une fois que le point " $G_C$ " est atteint (Fig.1.3).

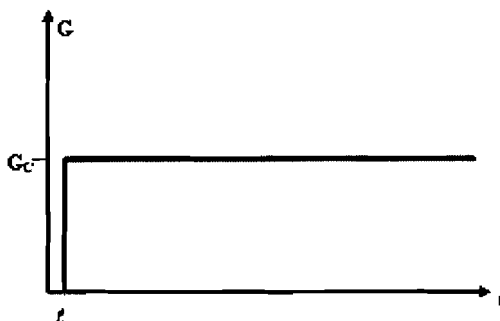


FIG. 1.3 – Courbe de rupture fragile

#### Cas ductile (Figure 1. 2) :

le point  $A'$  marque le début de la plasticité ; le point  $A$ , le début de la propagation de la fissure.  $(A/A)$  caractérise la zone plastique qui se crée à la pointe de la fissure et qui tend à s'opposer à la propagation de la fissure.  $B$  marque le début de la décharge et  $C$ , le point où la déformation devient résiduelle.

Lorsque les métaux sont portés à haute température, on constate qu'ils se déforment beaucoup plus, avant de rompre par rapport aux matériaux fragiles. Pour étudier ces métaux à haute température, on utilise plutôt la Mécanique Elastoplastique de la Rupture (MEPR).

Le deuxième critère consiste à considérer le glissement :

D'un côté, ceux qui ont une facilité de glissement : les alliages métalliques qui se déforment avant de rompre sont dits ductiles.

De l'autre côté, ceux qui n'ont pas de glissement : les oxydes, les cimen-

taires, les verres. Ils sont dits fragiles.

## 1.2 Définition d'une fissure

On parle de fissuration au sein d'un matériau, quand il y a rupture de la liaison interatomique. Cette rupture a comme conséquence première, la diminution de la capacité du matériau à résister aux efforts extérieurs et à la baisse de son énergie. Cette définition chimique de la fissure conduit à une définition physique de la fissure, comme étant une discontinuité du champ de déplacement dans un matériau, traduisant une absence de cohésion au sein du matériau. Ceci se résume comme une incapacité du matériau à transmettre au travers d'une surface ( $\Sigma$ ) une contrainte dont la composante normale est une traction (Fig. 1.4).

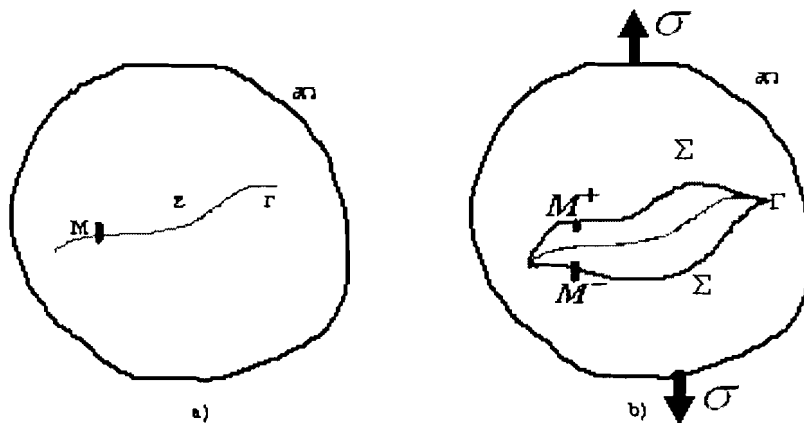


FIG. 1.4 – Discontinuité des déplacements au travers d'une fissure

Dans le schéma (a) de la figure.1.4, on observe un matériau présentant

une fissure simple non sollicitée.

Dans le schéma (b), le matériau fissuré du schéma (a) est maintenant sous l'effet de sollicitations extérieures. Le point  $M$  et la frontière  $\Sigma$  due à la fissure sans sollicitations extérieures du schéma (a) se scindent respectivement en  $M^+$ ,  $M^-$  et  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$  sous la sollicitation extérieure dont la composante normale est une traction. La discontinuité du déplacement se traduit par un saut du déplacement qui s'écrit :

$$[[U]] = U^+ - U^-, \quad (1.1)$$

où  $U^+$  et  $U^-$  représentent les déplacements du point ( $M$ ) appartenant à ( $\Sigma$ ) scindé respectivement en ( $M^+$ ) et ( $M^-$ ). Ces points appartenant respectivement à ( $\Sigma^+$ ) et ( $\Sigma^-$ ) comme le montre la figure.1 4.

### 1.2.1 Les différents types de fissure

L'étude du phénomène de fissuration étant complexe, il s'avère nécessaire de décomposer le phénomène de fissuration en des processus élémentaires, appelés modes élémentaires de fissuration. On distingue ainsi trois modes élémentaires de fissuration qui sont : le Mode *I* dit d'ouverture, le Mode *II* dit de cisaillement ou de glissement plan et le Mode *III* dit de cisaillement ou de glissement antiplan (Fig. 1.5).

Dans ce qui va suivre,  $[[U_i]]$  représentera le saut de la grandeur  $U$  dans la direction  $i$ .

Le mode *I* ou mode d'ouverture : le saut de déplacement est non nul dans la deuxième direction :

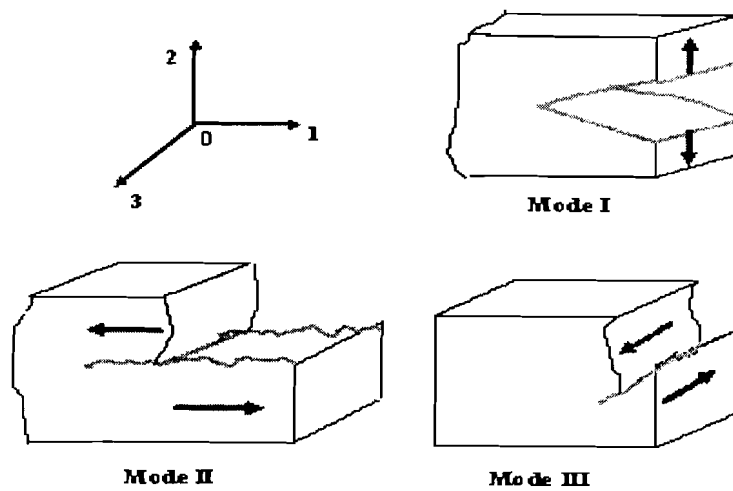


FIG. 1.5 – Les modes élémentaires de fissuration

$$[[U_2]] \neq 0. \quad (1.2)$$

Le mode *II* ou mode de glissement plan : le saut de déplacement est non nul dans la première direction :

$$[[U_1]] \neq 0. \quad (1.3)$$

Le mode *III* ou mode de glissement antiplan : le saut de déplacement est non nul dans la troisième direction :

$$[[U_3]] \neq 0. \quad (1.4)$$

Après cette présentation simplifiée de la fissure, nous passons au phénomène de fissuration proprement dit.

### 1.2.2 Les types de fissuration

Il existe plusieurs types de rupture par fissuration d'un matériau :

**La rupture par fatigue :**

Dans ce cas, la rupture survient sous l'effet des sollicitations extérieures ou chargements répétés, périodiques ou non et parfois même cycliques. Ce qui entraîne de manière progressive et discontinue la propagation de la fissure. C'est le cas, par exemple d'un matériau qu'on soumet à un chargement cyclique (pont).

**La fissuration par fluage :**

il s'agit dans ce cas, de la décohésion des matériaux due à de fortes températures. On observe dans ce cas, des déformations viscoplastiques. La propagation de la fissure a lieu, même si la sollicitation mécanique extérieure demeure constante.

**La rupture fragile :**

il s'agit de la rupture d'un matériau ne présentant pas de déformation plastique ; les effets de viscoplasticité sont négligeables.

**La rupture ductile :**

c'est le contraire de la rupture fragile. On observe à la pointe de la fissure une zone plastique qui tend à s'opposer à la propagation de la fissure.

En ce qui concerne la mesure de la longueur de la fissure, cela peut se faire soit par la méthode optique, soit par les jauges à fils coupés ou par la méthode du potentiel.



### 1.3 Les variables d'étude

L'étude de la fissuration au sein d'un matériau nécessite l'existence d'une fissure initiale. Il s'agit en général, d'étudier les effets de la fissure stable ou non stable sur le comportement du matériau ou de la structure. Cette étude se passe en fond de fissure ou à la pointe de la fissure. L'expérience ayant montré que la présence de la fissure modifie le comportement du matériau [1], il n'est donc plus possible de faire une étude du matériau ou de la structure sans tenir compte de la présence de la fissure qui entraîne de manière visible des singularités géométriques, d'où l'introduction de nouveaux paramètres de singularités.

Les premiers essais se situent vers le 15<sup>e</sup> siècle avec Léonard de Vinci qui montre que la résistance à la traction varie avec la longueur de la fissure inversement. Cette vision de Léonard de Vinci sera interprétée qualitativement par les critères d'énergie de Griffith en 1920 (il y a propagation si l'énergie stockée est supérieure à la résistance du matériau).

Le paramètre du taux de restitution de l'énergie noté  $G$  a été introduit par Irwin en 1948 - 1956 ; il traduit l'énergie disponible pour l'accroissement de la fissure. Il traduit aussi le caractère stable ou instable de la fissure sans tenir compte de la géométrie du matériau.

Les facteurs d'intensité de contraintes ( $K_I, K_{II}, K_{III}$ ) sont introduits dans les années 1957 par Westergaards et Mushkhélishoïlis pour traduire les singularités du champ des contraintes à la pointe de la fissure. Ils se calculent dans certains cas simples à partir de formules accessibles analytiquement [31]. Par exemple, dans un milieu plan en coordonnées polaires on aura :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [|U_3|] \right), \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [|U_1|] \right), \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [|U_2|] \right),
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

où

$C_2 = 1$  en contraintes planes,

$C_2 = 1 - \nu^2$  en déformations planes,

$\nu$  est le coefficient de Poisson,  $E$  est le module de Young et  $\sigma_{ij}$  représente la composante  $ij$  de la matrice de contrainte notée  $[\sigma]$ .

Dans le cas d'un milieu tridimensionnel on obtient :

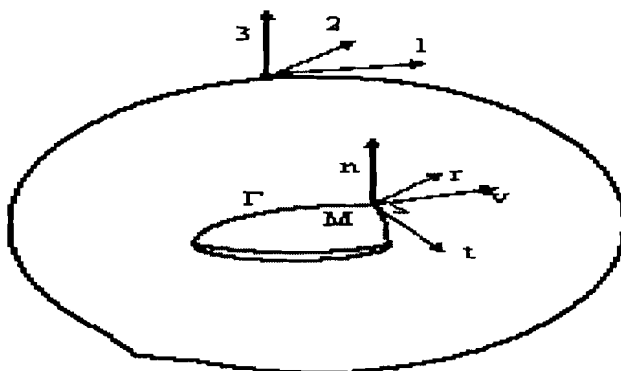


FIG. 1.6 – Fissure dans un milieu tridimensionnel

soit  $(M, n, t, v)$  le repère orthonormé local au point  $M$  de la ligne de front, défini par la normale  $n$  parallèle à  $x_3$  et la tangente  $t$  à  $\Gamma$  en  $M$ . Soit  $(M, r)$  une direction quelconque dans le plan  $(M, n, v)$  sur laquelle la mesure de l'abscisse est  $r$ . Les facteurs d'intensité de contraintes  $(K_I, K_{II}, K_{III})$

sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I(M) = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{33} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{4(1-\nu^2)} \llbracket U_3 \rrbracket \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right), \\ K_{II}(M) = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{3\nu} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{4(1-\nu^2)} \llbracket U_\nu \rrbracket \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right), \\ K_I(M) = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{33} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} \llbracket U_t \rrbracket \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right). \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Un des paramètres utilisés dans l'étude de la fissure est l'intégrale de contour ou intégrale de Rice notée  $J$ . Elle a été déduite de la loi de conservation de l'énergie (en dimension deux  $J = G$ ) :

$$J = \int_c \left( W_e n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial U_i}{\partial x_1} \right) ds. \quad (1.7)$$

$W_e$  est la densité d'énergie de déformation,  $n_j$  la normale selon la direction  $j$ ,  $U_i$  le déplacement selon la direction  $i$  et  $c$  le contour dont une partie est délimitée par la fissure.

L'un des paramètres est aussi l'épaisseur d'ouverture de la fissure notée *COTOD* (Crack tip Opening Displacement).

La connaissance des paramètres ou variables d'étude de la fissure nous conduit, une nouvelle fois, à poser la question suivante : à partir de quelle valeur (valeur critique) la propagation de la fissure a-t-elle lieu ? Afin de donner une réponse à cette question importante, passons à la section suivante se rapportant à l'étude des valeurs critiques.

## 1.4 Détermination des valeurs critiques

Nous présentons ici, quelques unes des méthodes théoriques et expérimentales de la détermination des valeurs critiques.

L'une des méthodes consiste expérimentalement à soumettre un échantillon du matériau avec une fissure initiale sous des charges  $P$  et à observer la fissure afin de déterminer la charge critique  $P_c$  du matériau. Ainsi, pour  $P < P_c$ , on constate que la fissure n'évolue pas ; pour  $P > P_c$ , on constatera que la fissure évolue et, pour  $P = P_c$ , une conclusion ne pourra être donnée qu'après une analyse précise en ce point singulier correspondant à  $P = P_c$ . Cette méthode permet de déterminer en général la contrainte critique  $\sigma_c$ .

Il existe aussi des méthodes utilisant les courbes comme la méthode de la courbe  $J_{R-\Delta\ell}$  [42] qui consiste à tracer la courbe de  $J$  en fonction de  $\Delta\ell$  (variation de la longueur de la fissure) et qui donne la valeur de  $J_c$  (valeur critique de l'intégrale de Rice).

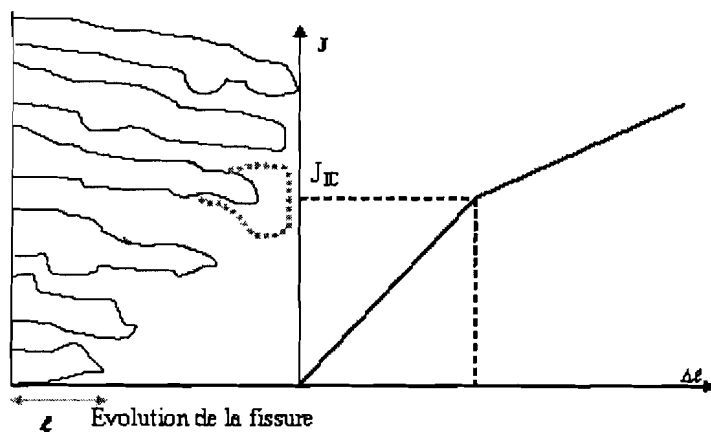


FIG. 1.7 – Courbe  $J_{R-\Delta\ell}$  pour la détermination de  $J_c$

Elle permet aussi de déterminer la tenacité critique du matériau à partir de la relation :

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)}} J_c. \quad (1.8)$$

On a aussi la relation générale [19] & [42] :

$$K_{Ic} = \frac{P_c}{e\sqrt{B}} f\left(\frac{\ell_0}{B}\right) \quad \text{et} \quad K_{Ic} = \frac{3LP_c}{Be^2} \sqrt{\pi\ell} f\left(\frac{\ell}{B}\right), \quad (1.9)$$

où  $P_c$  est la force critique correspondant aussi au chargement critique,  $K_{Ic}$  le facteur d'intensité de contrainte critique en mode  $I$ .

$(B, e)$  sont respectivement la largeur et l'épaisseur de l'éprouvette ou du matériau.

$\ell$  est la longueur de la fissure,  $\ell_0$  la longueur initiale de la fissure et  $L$  la longueur du matériau considéré. Par exemple, dans le cas d'un barreau en flexion 3 points [31] on a :

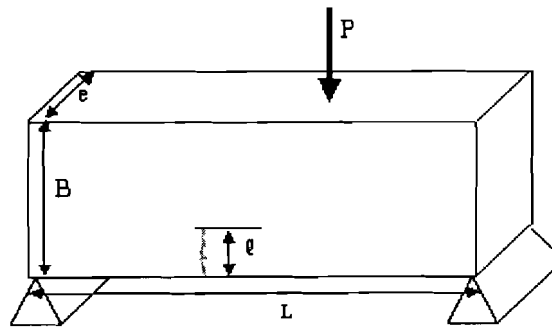


FIG. 1.8 – barreau en flexion 3 points

$$\begin{cases} f\left(\frac{\ell}{B}\right) = 1,96 - 2,75\left(\frac{\ell}{B}\right) + 13,66\left(\frac{\ell}{B}\right)^2 - 23,98\left(\frac{\ell}{B}\right)^3 + 25,22\left(\frac{\ell}{B}\right)^4, \\ \frac{L}{B} = 8; \end{cases} \quad (1.10)$$

ou

$$\begin{cases} f\left(\frac{\ell}{B}\right) = 1,09 - 1,73\left(\frac{\ell}{B}\right) + 8,20\left(\frac{\ell}{B}\right)^2 - 14,2\left(\frac{\ell}{B}\right)^3 + 14,6\left(\frac{\ell}{B}\right)^4, \\ \frac{\ell}{B} \leq 0,6; \quad \frac{L}{B} \simeq 2. \end{cases} \quad (1.11)$$

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre des généralités, après un rappel historique de la mécanique de la rupture, nous présentons ce que c'est qu'un matériau, la fissure et ses différents modes élémentaires, les différents paramètres d'étude et quelques unes des méthodes de calcul des valeurs critiques. Pour ce qui est du chapitre suivant sur les matériaux ductiles, nous présentons le calcul de la dissipation à la pointe de la fissure pour le calcul des déplacements.

# Chapitre 2

## MATERIAU DUCTILE

### Notations

$\beta$  est un  $n$  vecteur de composante  $\beta_p$ , de variables dites internes et introduit pour rendre compte des phénomènes complexes qu'on n'aurait pas pris en compte au niveau microscopique et pouvant se manifester macroscopiquement par certaines irréversibilités.

$\varepsilon^p$  champ de déformation plastique

$\varepsilon^e$  champ de déformation élastique

$W$  l'énergie de déformation

$\tau$  la température

$q$  la quantité de chaleur

$\sigma = \sigma^e + \sigma^p$  la contrainte totale (respectivement élastique et plastique)

$\sigma_y$  la contrainte au-dessus de laquelle on observe des déformations irréversibles

$\sigma_S$  la contrainte seuil (on rappelle qu'à la limite d'élasticité  $\sigma_y = \sigma_S$ ).

$\sigma_{eq}$  la contrainte équivalente

## 2.1 Définition de la rupture ductile

Le mécanisme de la rupture ductile s'effectue avec de grandes déformations plastiques dues à la présence de la zone plastique importante à la pointe de la fissure. Cette zone plastique à la pointe de la fissure est responsable de la stabilité de la fissure avant la rupture par instabilité. Seule la vitesse de chargement influe sur la propagation de la fissure. Si les forces extérieures sont maintenues constantes, la fissure ne progresse plus. Dans ce cas, la résistance " $R$ " du milieu fissuré est une fonction de la longueur de la fissure " $\ell$ ". En traçant la courbe de résistance ou courbe " $R$ ", en maintenant la force extérieure constante, cela permet de déterminer la longueur critique " $\ell_C$ " à partir du point  $P_i$  qui est le point d'intersection entre la courbe  $R(\ell)$  et la droite  $G(\ell, F = c^{te})$  tangente à cette courbe [31], comme l'indique la Figure 2.1.

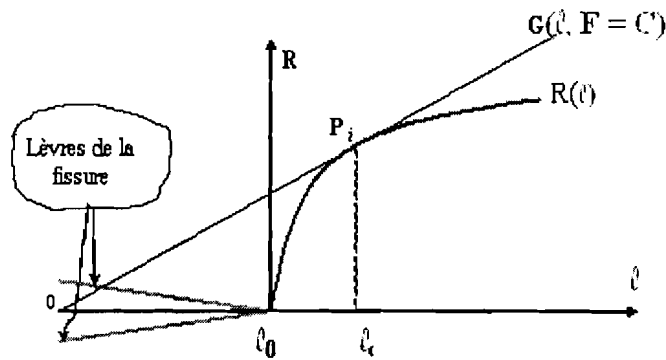


FIG. 2.1 – Courbe  $R$

Tout ceci marque la différence avec la rupture dans le cas des matériaux fragiles. On montre ainsi que le modèle de l'élasticité linéaire est insuffisant



pour l'étude de la propagation d'une fissure dans un matériau ductile. Pour cette étude, on fait l'hypothèse de petites déformations en négligeant les effets thermiques, ce qui conduit à l'hypothèse de petites perturbations avec le paramètre de perturbation qui devient plus complexe dans la mesure où on doit tenir compte de la zone plastique en fond de fissure. Comme dans le cas du matériau fragile, on se place dans le cas d'une fissure initiale de mode I (voir Figure. 1.5). Avant de passer au calcul en fond de fissure, nous allons d'abord estimer la zone plastique en fond de fissure.

## 2.2 Quelques méthodes de la détermination de la zone plastique en fond de fissure

Il s'agit de déterminer la zone au-dessus de laquelle apparaissent des déformations irréversibles. En dessous de cette zone, on a le domaine ou zone de plasticité où toute variation de contraintes n'engendre que des variations de déformation élastique. L'estimation de cette zone se fait de plusieurs façons selon des critères bien établis.

En général, il existe deux critères de plasticité : les critères isotropes avec un état d'érouissage isotrope faisant intervenir toutes les composantes du tenseur des contraintes (le Critère de Von Mises, le Critère de Tresca) et les critères anisotropes avec des directions privilégiées (le Critère de Hill, le Critère de Tsai).

## 2.3 Description de l'érouissage

Le phénomène d'érouissage consiste à soumettre le matériau (métal) à des contraintes  $\sigma$  de sorte qu'il acquiert des propriétés plastiques : on parle d'élévation de la limite d'élasticité du matériau (Figure. 2.2).

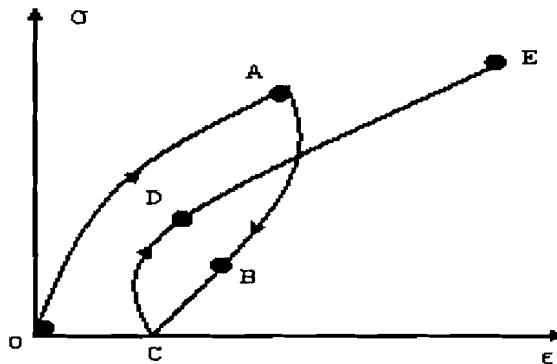


FIG. 2.2 – Phénomène d'érouissage

Le chargement s'effectue du point  $o$  au point  $A$ . Lors de la décharge, on remarque que la courbe  $ABC$  est non seulement différente de la courbe  $oA$ , mais elle est sensiblement rectiligne. Si l'on recharge, la courbe  $CDE$  diffère peu de la courbe  $ABC$  par suite d'un étirage : le matériau se comporte comme s'il avait acquis des propriétés élastiques et une limite d'élasticité plus élevée tout en perdant une partie notable de sa déformation plastique ( $\epsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$ ).

### 2.3.1 Le Critère de Von Mises

Le matériau est supposé isotrope. Seuls les glissements et les cisaillements intracristallins venant des contraintes tangentielles sont responsables de la

déformation plastique. Le seuil de plasticité étant lié à l'énergie élastique de cisaillement, il permet de négliger l'influence du troisième invariant [31], et de prendre une expression linéaire pour la fonction estimée de la zone plastique "  $f$  ". Ce qui conduit au résultat :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_y = 0 . \quad (2.1)$$

En dimension trois avec l'hypothèse d'isotropie, on rappelle que les invariants du tenseur de contrainte  $\sigma$  et de déformation  $\varepsilon$  noté respectivement  $\sigma'$  et  $\varepsilon'$  sont définies par la relation :

$$\begin{cases} \sigma' = \sigma - \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma) I \\ \varepsilon' = \varepsilon - \frac{1}{3} \text{Tr}(\varepsilon) I \end{cases} , \quad (2.2)$$

où  $\text{Tr}(\sigma)$  et  $\text{Tr}(\varepsilon)$  représentent respectivement la trace du tenseur  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , avec  $I$  qui représente la matrice identité.

En outre on rappelle que ce sont des tenseurs d'un second ordre possédant trois invariants élémentaires définis par trois fonctions scalaires indépendantes, qui sont mathématiquement les coefficients de l'équation caractéristique  $\det(\sigma - xI) = 0$  tel qu'on a :

$$\begin{cases} \sigma_I = \text{Tr}(\sigma) \\ \sigma_{II} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^2) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \\ \sigma_{III} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma^3) = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{kl} \end{cases} . \quad (2.3)$$

### 2.3.2 Le Critère de Tresca

On considère le matériau isotrope, le seuil de plasticité ici n'est plus lié à l'énergie mais à la contrainte de cisaillement et la contrainte tangentielle

maximale. La fonction  $f$  s'exprime par la formule :

$$f = \sup_{i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_S . \quad (2.4)$$

### 2.3.3 Le Critère de Hill

Le matériau est anisotrope avec trois plans de symétrie dans l'état d'écroutissage. Après détermination expérimentale des six paramètres scalaires ( $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ ) qui caractérisent l'état d'écroutissage, par trois expériences de traction simple et trois de cisaillement simple, on obtient la formule :

$$\begin{cases} F_1 (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + F_2 (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + F_3 (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \\ + 2F_4 \sigma_{12}^2 + 2F_5 \sigma_{23}^2 + 2F_6 \sigma_{13}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

### 2.3.4 Le Critère de Tsai

Il prend en compte les états d'écroutissage de traction et de compression. Il est la somme d'une forme linéaire et d'une forme quadratique des six composantes des contraintes, ressemblant ainsi au critère de Hill mais avec huit paramètres ( $F'_1, F'_2, F'_3, F'_4, F'_5, F'_6, F'_7, F'_8$ ) au lieu de six comme chez Hill. Ces huit paramètres se déterminent aussi expérimentalement à l'aide des essais de traction, de compression et de cisaillement dans toutes les directions du matériau. On obtient la formule :

$$\begin{cases} F'_1 (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + F'_2 (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + F'_3 (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2F'_4 \sigma_{12}^2 \\ + 2F'_5 \sigma_{23}^2 + 2F'_6 \sigma_{13}^2 + F'_7 \sigma_{11} + F'_8 \sigma_{22} - (F'_7 + F'_8) \sigma_{33} = 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

La zone plastique étant très difficile à déterminer avec précision, voilà quelques méthodes utilisées dans la pratique.

## 2.4 Calcul de la dissipation en fond de fissure

Le calcul de la dissipation en fond de fissure a déjà été abordé par Griffith vers les années 1920, en utilisant des critères simples qui lui ont permis de déterminer le taux de restitution de l'énergie  $G = 2\gamma$  où  $\gamma$  est l'énergie de liaison positive par unité de surface. Cette théorie, bien qu'instructive pour la compréhension du phénomène, présente des insuffisances comme la non prise en compte de la chaleur reçue pour donner le premier principe de la thermodynamique, et en outre de considérer le phénomène réversible. Cette théorie fut améliorée à partir du premier et du second principe de la thermodynamique. En ce qui concerne le calcul de la dissipation, nous allons, tout en tenant compte des principes de la thermodynamique, déterminer l'énergie à la pointe de la fissure en réduisant le fond de fissure à sa pointe.

On considère un matériau de volume  $\Omega$  et de surface frontière  $\partial\Omega$  possédant une fissure initiale quelconque de longueur  $\ell_0$ . Sous l'effet de la contrainte extérieure appliquée  $\sigma_{ij}$  et dans les conditions de propagation telle que  $\frac{d\ell}{dt} \neq 0$ , on a à la pointe de la fissure sous les effets des efforts extérieurs, l'apparition d'une zone dite de fissuration assimilable à la zone plastique dans le cas fragile. Cette zone occupe un volume  $V_\Gamma$  et de surface frontière  $\Gamma$ . On a alors  $\Omega - V_\Gamma$  le volume extérieur à la surface frontière  $\Gamma$  (Fig. 2.3).

On se propose ici de déterminer la dissipation  $\Phi$  en fond de fissure. Soit

$$\Phi = P_{ext} - P_r, \quad (2.7)$$

avec  $P_{ext}$  qui est la puissance des efforts appliqués au système :

$$P_{ext} = \int_{\partial\Omega} \dot{u} \sigma \cdot n \, ds, \quad (2.8)$$

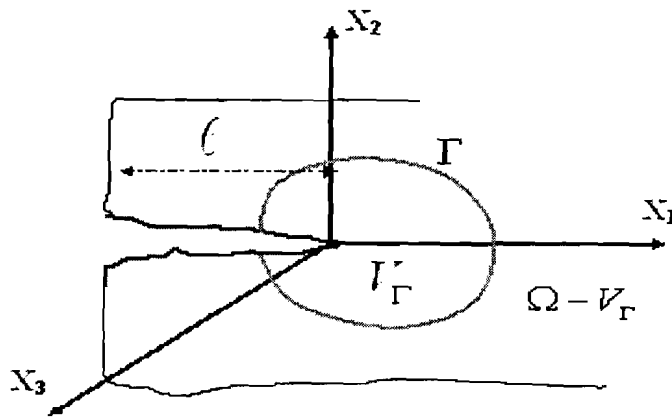


FIG. 2.3 – Zone plastique en fond de fissure

où l'opération "." entre les deux quantités représente la contraction tensorielle ou le produit scalaire, et  $P_r$  la puissance stockée réversiblement par le système; elle s'interprète aussi en terme de variation ou même de taux d'énergie :

$$P_r = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} W [\varepsilon(\tilde{u})] d\Omega. \tag{2.9}$$

On considère le système isotherme et on néglige les effets dus à la viscosité (contrainte visqueuse  $\sigma^v = 0$ ,  $\Omega$  est le domaine d'intégration de densité volumique  $\rho$ ,  $v_i$  et  $v^* = \frac{1}{2} [grad v_i + (grad v_i)^T]$  représentent respectivement le champ de vitesse et le tenseur des taux de déformation). (2.7) devient :

$$\Phi = \int_{\partial\Omega} \dot{u} \sigma \cdot n ds - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} W [\varepsilon(\tilde{u})] d\Omega. \tag{2.10}$$

Pour une bonne compréhension de la suite, on fixe l'origine du repère à la pointe de la fissure [14], ce qui permet de fixer le domaine  $V_{\Gamma}$  de frontière  $\Gamma$ . En calculant  $\Phi$  sur chacune des parties de  $\Omega$ , on obtient pour  $P_r$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} W [\varepsilon(\tilde{u})] d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{V_{\Gamma}} W [\varepsilon(\tilde{u})] d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega - V_{\Gamma}} W [\varepsilon(\tilde{u})] d\Omega. \tag{2.11}$$

Or, le domaine  $V_\Gamma$  étant fixe, l'intégration par rapport à  $V_\Gamma$  donne

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\Gamma} W \left[ \varepsilon(\underset{\sim}{u}) \right] d\Omega = \int_{V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega, \quad (2.12)$$

où " : " représente la double contraction tensorielle (produit de dualité).

(2.11) devient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} W \left[ \varepsilon(\underset{\sim}{u}) \right] d\Omega = \int_{V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega - V_\Gamma} W \left[ \varepsilon(\underset{\sim}{u}) \right] d\Omega, \quad (2.13)$$

or l'intégrale portant sur le contour  $\Omega - V_\Gamma$  donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega - V_\Gamma} W \left[ \varepsilon(\underset{\sim}{u}) \right] d\Omega = \int_{\Omega - V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega - \int_{\Gamma} W \left[ \varepsilon(\underset{\sim}{u}) \right] d\Gamma \dot{\ell}_i \cdot n_i. \quad (2.14)$$

En outre, sachant que l'intégration portant sur le contour  $\Omega - V_\Gamma$  est fixe, alors que le contour  $\Gamma$  est mobile, et en supposant que la propagation a lieu dans la direction  $e_i$  où  $i = \{r, \theta, \varphi\}$ , et que la normale dans cette direction est  $n_i$ , telle que  $n_i = e_i \underset{\sim}{n}$ , alors on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega - V_\Gamma} W \left[ \varepsilon(\underset{\sim}{u}) \right] d\Omega = \int_{\Omega - V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega - \int_{\Gamma} W \cdot \dot{\ell}_i \cdot n_i d\Gamma, \quad (2.15)$$

où  $(\ell_i)$  est prise ici comme une quantité vectorielle.  $(\underset{\sim}{n})$  est la normale extérieure à  $(\Gamma)$  et l'intégrale portant sur le contour  $\Omega - V_\Gamma$  est une intégrale sur un domaine fixe avec :  $\underset{\sim}{n}\Gamma = -n(\partial(\Omega - V_\Gamma))$  sur  $(\Gamma)$ . Par contre l'intégrale portant sur le contour  $\Gamma$  est sur un domaine mobile.

Compte tenu de (2.15), (2.13) devient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} W \left[ \varepsilon(\underset{\sim}{u}) \right] d\Omega = \int_{V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega + \int_{\Omega - V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega - \int_{\Gamma} W \cdot \dot{\ell}_i \cdot n_i d\Gamma. \quad (2.16)$$

Le terme portant sur le contour  $\Omega - V_\Gamma$  de (2.16) donne

$$\int_{\Omega - V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega = \int_{\partial(\Omega - V_\Gamma)} \sigma : \underset{\sim}{\dot{u}} \cdot \underset{\sim}{n} ds, \quad (2.17)$$

ou encore

$$\int_{\Omega - V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma \cdot \underset{\sim}{n} ds - \int_\Gamma \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma \cdot \underset{\sim}{n} d\Gamma. \quad (2.18)$$

La relation (2.16) devient en y reportant (2.18) :

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega W [\varepsilon(\underset{\sim}{u})] d\Omega = \begin{cases} \int_{V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma \cdot \underset{\sim}{n} ds \\ - \int_\Gamma \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma \cdot \underset{\sim}{n} d\Gamma - \int_\Gamma W \cdot \dot{\ell}_i \cdot n_i d\Gamma, \end{cases} \quad (2.19)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega W [\varepsilon(\underset{\sim}{u})] d\Omega = \begin{cases} \int_{V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma \cdot \underset{\sim}{n} ds \\ - \int_\Gamma (W \dot{\ell}_i n_i + \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma n) d\Gamma. \end{cases} \quad (2.20)$$

Revenons à la formule de la dissipation (2.10) en y reportant (2.20). On obtient

$$\Phi = \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma \cdot \underset{\sim}{n} ds - \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma \cdot \underset{\sim}{n} ds \\ - \int_{V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega \\ + \int_\Gamma (W \dot{\ell}_i n_i + \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma n) d\Gamma, \end{cases} \quad (2.21)$$

soit

$$\Phi = \int_\Gamma (W \dot{\ell}_i n_i + \underset{\sim}{\dot{u}} \sigma n) d\Gamma - \int_{V_\Gamma} \sigma : \dot{\varepsilon}(t) d\Omega. \quad (2.22)$$



En faisant tendre  $\Gamma$  vers 0, on a  $V_\Gamma$  qui tend aussi vers  $\emptyset$  (ensemble vide ou zéro). Ainsi, on obtient à la pointe de la fissure la valeur de la dissipation  $\Phi$  :

$$\Phi = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left( W \dot{\ell}_i n_i + \dot{u} \sigma n \right) d\Gamma. \quad (2.23)$$

On sait que pour toute grandeur physique notée par exemple " $f$ " attachée à un point matériel, " $\dot{f}$ " a la même singularité que  $(-\dot{\ell} f_{,i})$  au point 0, où  $i$  indique le gradient dans la direction de propagation de la fissure. Ceci étant, comme " $\dot{u}$ " admet une contribution singulière identique à  $(-\dot{\ell} u_{,i})$ , on a :

$$\Phi = \left( \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left( W n_i - u_{,i} \sigma n \right) d\Gamma \right) \dot{\ell}_i. \quad (2.24)$$

En posant

$$G_{0i} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left( W n_i - u_{,i} \sigma n \right) d\Gamma, \quad (2.25)$$

on obtient

$$\Phi = G_{0i} \dot{\ell}_i, \quad (2.26)$$

où  $G_{0i}$  traduit l'expression d'une force ponctuelle qui permet de faire évoluer la fissure.  $G_{0i}$  peut aussi être assimilé au taux de restitution d'énergie à la pointe de la fissure.

## 2.5 Détermination du champ des efforts à la pointe de la fissure

Compte tenu de la complexité du problème dans le cas des matériaux ductiles, on utilisera la méthode énergétique. La fonction de dissipation vérifie

en fond de fissure la relation

$$\Phi = \Phi_v + \Phi_p + \Phi_{th} \geq 0, \quad (2.27)$$

où :  $\Phi_v = \sigma^v : \dot{\varepsilon}^e$  qui représente la dissipation visqueuse ;  $\Phi_p = \sigma : \dot{\varepsilon}^P + A \cdot \dot{\beta}$ , la dissipation plastique et  $\Phi_{th} = \tau q \nabla \left( \frac{1}{\tau} \right)$  la dissipation thermique avec la température  $\tau$  et  $q$  la quantité de chaleur. On négligera la viscosité et les effets thermiques, et ainsi la dissipation (2.27) devient

$$\Phi = \sigma : \dot{\varepsilon}^P + A \cdot \dot{\beta}, \quad (2.28)$$

où  $A = -\frac{\partial W}{\partial \beta}$  ( $W$  est l'énergie de déformation) et  $\beta$  est un  $n$  vecteur de composante  $\beta_p$  de variables d'état dites internes et introduit pour rendre compte des phénomènes complexes qu'on n'aurait pas pris en compte au niveau microscopique et pouvant se manifester macroscopiquement par certaines irréversibilités, avec  $\dot{\beta}$  qui est la dérivée par rapport à la variable associée du dual du potentiel de dissipation.

En mettant (2.28) sous la forme d'un produit scalaire dans un espace de dimension appropriée et en appliquant l'inégalité de la dissipation on obtient :

$$\Phi \left( Y, \dot{X} \right) = Y \cdot \dot{X} \geq 0, \quad (2.29)$$

avec :

$$Y = (\sigma, A) \quad \text{et} \quad X = (\varepsilon^P, \beta). \quad (2.30)$$

Sachant que  $W(\varepsilon^e)$  représente l'énergie de déformation, on aura :

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e}. \quad (2.31)$$

D'après le critère de plasticité, il existe une fonction  $f(\sigma)$  du domaine de plasticité  $C$  ou domaine d'écoulement, qui se définit à partir de la relation  $f(\sigma) = 0$  telle que :

$$C = \left\{ \sigma \mid f(\underline{\sigma}) \leq 0 \right\}, \quad (2.32)$$

où  $C$  est un domaine convexe contenant l'origine qui dans notre cas est la pointe de la fissure, avec  $\underline{\sigma}$  qui représente les contraintes déviatoires par rapport à  $\sigma$ .  $C$  ainsi défini par (2.32) constitue le domaine d'écoulement plastique.

La loi de normalité (2.29) conduit à :

$$\dot{\varepsilon}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}, \quad (2.33)$$

$\lambda$  étant un multiplicateur plastique.

En tenant compte de (2.26), on a

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^P + A \cdot \dot{\beta} = G_{0i} \dot{\ell}_i. \quad (2.34)$$

Dans le cas particulier où  $\dot{\varepsilon}^P = 0$ , on a

$$A \cdot \dot{\beta} = G_{0i} \dot{\ell}_i. \quad (2.35)$$

En considérant la dissipation comme un produit de dualité entre la contrainte et la déformation, c'est à dire

$$\Phi = \sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (2.36)$$

on obtient

$$\sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} = A \cdot \dot{\beta} = G_{0i} \dot{\ell}_i. \quad (2.37)$$

On peut ainsi, par identification, dire que  $A = G_{0i}$  et  $\beta = \ell_i$ .

## 2.6 Application

On considère une fissure initiale de mode  $I$  en dim 2. Soit  $U$  le vecteur déplacement tel que : ( $\sigma = [(\sigma^v = 0) + (\sigma^e)]$ )

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^P, \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}), \\ \underline{U} = (U_1, U_2, U_3), \\ \sigma = \sigma^v + \sigma^e = E\varepsilon^e, \end{cases} \quad (2.38)$$

où  $E$  représente le module de Young.

Pour calculer les contraintes en fond de fissure, on suppose dans un premier temps que  $\varepsilon^P$  est connue. En mode  $I$  le vecteur déplacement

$$\underline{U}(x, y) = [U_1(x, y), U_2(x, y), 0]. \quad (2.39)$$

En appliquant la deuxième relation de (2.38), on obtient

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (U_{1,2} + U_{2,1}) = \varepsilon_{12}^e + \varepsilon_{12}^P, \\ \varepsilon_{11} = U_{1,1} = \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{11}^P, \\ \varepsilon_{22} = U_{2,2} = \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{22}^P, \end{cases} \quad (2.40)$$

soit le système

$$\begin{cases} (\dot{U}_{1,2} + \dot{U}_{2,1}) = 2(\dot{\varepsilon}_{12}^e + \dot{\varepsilon}_{12}^P) \\ \dot{U}_{1,1} = \dot{\varepsilon}_{11}^e + \dot{\varepsilon}_{11}^P \\ \dot{U}_{2,2} = \dot{\varepsilon}_{22}^e + \dot{\varepsilon}_{22}^P \end{cases} \quad (2.41)$$

D'après (2.33) on a  $\dot{\varepsilon}_{11}^P$ ,  $\dot{\varepsilon}_{12}^P$  et  $\dot{\varepsilon}_{22}^P$  tel que :

$$\dot{\varepsilon}_{11}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \quad \dot{\varepsilon}_{22}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_{12}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}}, \quad (2.42)$$

ce qui permet de déterminer le multiplicateur plastique en utilisant l'une des expressions (2.42) reportées dans (2.41).

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_{1,1} = \dot{\varepsilon}_{11}^e + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} \\ \dot{U}_{2,2} = \dot{\varepsilon}_{22}^e + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} \\ \dot{U}_{1,2} + \dot{U}_{2,1} = 2 \left( \dot{\varepsilon}_{12}^e + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} \right) \end{array} \right. , \quad (2.43)$$

avec

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^P \implies \dot{\varepsilon}^e = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P, \quad (2.44)$$

où :

$$\dot{\varepsilon}^e = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P = \frac{\dot{\sigma}^e}{E}. \quad (2.45)$$

En substituant  $\varepsilon^e$  par sa valeur (2.45) dans (2.43), on a le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{\sigma}_{11}^e}{E} + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = \dot{U}_{1,1} \\ \frac{\dot{\sigma}_{22}^e}{E} + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} = \dot{U}_{2,2} \\ 2 \frac{\dot{\sigma}_{12}^e}{E} + 2 \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} = \dot{U}_{1,2} + \dot{U}_{2,1} \end{array} \right. . \quad (2.46)$$

De même, comme  $\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$ , et que  $\varepsilon^p$  est donné par (2.42), on a

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2} \left\{ U_{1,2} + U_{2,1} - 2 \int \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} d\sigma_{12} \right\}, \quad (2.47)$$

ce qui nous donne

$$\int \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} d\sigma_{12} = \frac{EU_{1,2} + EU_{2,1} - 2\sigma_{12}}{2E}, \quad (2.48)$$

d'où

$$\dot{\lambda} = \frac{EU_{1,2} + EU_{2,1} - 2\sigma_{12}}{2E \int \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} d\sigma_{12}}, \quad (2.49)$$

puisque  $\dot{\lambda}$  ne dépend pas de  $\sigma$ .

On rappelle que le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est de manière générale [31] donné par la relation

$$\dot{\lambda} = \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon} \right\rangle}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)}, \quad (2.50)$$

déduite de la relation d'orthogonalité entre la vitesse de contrainte et le taux de déformation plastique ( $\dot{\sigma} : \dot{\varepsilon}^P = 0$ ), où  $\langle \dots \rangle$  indique la partie positive, soit

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}. \quad (2.51)$$

Soit la fonction  $\varphi$  telle qu'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}_{12}} = 2E \left( \frac{\dot{U}_{1,2} + \dot{U}_{2,1}}{2} - \dot{\varepsilon}_{12}^P \right), \quad (2.52)$$

c'est à dire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}_{12}} = 2E \left( \dot{\varepsilon}_{12} - \dot{\varepsilon}_{12}^P \right).$$

On en déduit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}} = 2E \left( \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P \right), \quad (2.53)$$

c'est à dire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}} = 2E\dot{\varepsilon} - 2E\dot{\varepsilon}^P, \quad (2.54)$$

ou encore

$$\partial \varphi = 2E \left( \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P \right) \partial \dot{\varepsilon}. \quad (2.55)$$

En remplaçant  $\dot{\varepsilon}^P$  par son expression (2.33) dans (2.55) on obtient après transformation

$$2E \left( \int \dot{\varepsilon} \partial \dot{\varepsilon} - 2\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \int \partial \dot{\varepsilon} \right) = \int \partial \varphi, \quad (2.56)$$

puisque l'expression (2.33) de  $\dot{\varepsilon}^P$  ne depend pas explicitement de  $\varepsilon$ .

On en déduit :

$$2E \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^2 - 2E\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\varepsilon} = \varphi + c^{te}, \quad (2.57)$$

soit

$$E \left( \dot{\varepsilon}^2 - 2\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\varepsilon} \right) = \varphi + c^{te}. \quad (2.58)$$

Or  $\sigma = E\varepsilon^e$ , d'où  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e = E \left( \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P \right)$ . En introduisant la valeur de  $\dot{\varepsilon}$  donnée par l'expression (2.50) dans celle de  $\dot{\varepsilon}^P$  de l'équation (2.33), on obtient

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon} \right\rangle}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)} E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}. \quad (2.59)$$

En posant

$$\Psi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^2 E - \frac{1}{2} \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}^2 \rangle}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)} \cdot E \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (2.60)$$

(2.59) devient

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \Psi(\dot{\varepsilon})}{\partial \dot{\varepsilon}}. \quad (2.61)$$

On définit  $\Psi(\dot{\varepsilon})$  comme le potentiel des vitesses de déformation. Sachant par hypothèse que  $\Psi$  est convexe, en utilisant sa transformée de Legendre-Fenchel, on obtient  $\Psi^*$  la fonction duale de  $\Psi$  par

$$\Psi^*(\dot{\sigma}) = \sup_{\dot{\varepsilon}} \left[ \dot{\sigma} : \varepsilon - \Psi(\dot{\varepsilon}) \right], \quad (2.62)$$

d'où

$$\Psi^*(\dot{\sigma}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \dot{\sigma} S \dot{\sigma} \text{ si } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \leq 0 \\ +\infty \text{ si non} \end{array} \right\}, \quad (2.63)$$

où  $S$  est le tenseur des complaisances.

On rappelle que  $\dot{x}$  représente la dérivée par rapport au temps de la quantité  $(x)$ .

L'expression (2.58) devient

$$\dot{\varepsilon}^2 - 2\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\varepsilon} - \frac{\varphi + c^{te}}{E} = 0, \quad (2.64)$$

qui est une équation du second degré par rapport à la variable  $\dot{\varepsilon}$ . Soit  $\delta$  son déterminant réduit, tel que

$$\delta = \left( \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{\varphi + c^{te}}{E}. \quad (2.65)$$



$\delta$  étant positif ( $\delta > 0$ ), on obtient les solutions

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{(1)} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \sqrt{\delta} \\ \dot{\varepsilon}_{(2)} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \sqrt{\delta} \end{cases}, \quad (2.66)$$

soit

$$\varepsilon_{(1)} = \int \left( \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \sqrt{\delta} \right) dt, \quad (2.67)$$

ou

$$\varepsilon_{(2)} = \int \left( \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \sqrt{\delta} \right) dt. \quad (2.68)$$

Or  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i})$  se ramène ici à  $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (u_{,2} + v_{,1})$  ce qui permet la détermination de  $u(x, y) = U_1$  en fonction de  $v(x, y) = U_2$  ou inversement par la résolution des équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} U_{1,2} + U_{2,1} = 2\varepsilon_{(12)_1} = 2 \left( \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \sqrt{\delta} \right) \\ \text{ou} \\ U_{1,2} + U_{2,1} = 2\varepsilon_{(12)_2} = 2 \left( \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \sqrt{\delta} \right) \end{cases}. \quad (2.69)$$

## 2.7 Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre des généralités sur les matériaux ductiles, les critères de détermination de la zone plastique et le calcul de la dissipation en fond de fissure. Par la suite nous avons déduit, lorsque  $\ell$  tend vers zéro ( $\ell \rightarrow 0$ ), la valeur de la dissipation à la pointe de la fissure. Il en résulte que :

$$\Phi = G_{0i} \dot{\ell}_i,$$

où

$$G_{0i} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left( W n_i - u_{,i} \sigma n \right) d\Gamma.$$

Comme on le voit,  $G_{0i}$  peut soit s'interpréter comme étant une force ponctuelle qui permet à la pointe de la fissure d'évoluer, ou être assimilé au taux de restitution d'énergie à la pointe de la fissure.

Ce résultat obtenu a permis d'exprimer les déformations et les contraintes à la pointe de la fissure en utilisant le potentiel des vitesses de déformation  $\Psi(\dot{\varepsilon})$  et en tenant compte du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$ .

Deuxième partie

*ETUDE DES SINGULARITES*  
**EN FOND DE FISSURE**

## Chapitre 3

# CALCUL DU CHAMP DES DEPLACEMENTS EN FOND DE FISSURE

### Notations

$\nu$  est le coefficient de Poisson

$\lambda$  est la constante de Lamé

$\mu$  est le module de cisaillement

$\varepsilon$  est un paramètre de défaut

$\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes

$C_{ijkl}$  est le tenseur de rigidité élastique

$\xi$  est le tenseur des déformations

$U^\varepsilon, U_i^\varepsilon$  ou  $U$  est le vecteur déplacement de composante  $(U_1^\varepsilon, U_2^\varepsilon, U_3^\varepsilon)$

$\omega$  est la fréquence de la force vibratoire

$\ell$  est la longueur de la fissure et  $\ell_0$  est la longueur initiale de la fissure

### 3.1 Introduction

En tenant compte des travaux déjà effectués dans ce domaine, comme ceux de Leguillon D. & Sanchez-Palencia E. [32] & [33] qui utilisent la méthode asymptotique en  $3D$  et  $2D$  pour la détermination des solutions, celui de Leblond J.B. [30] qui prend en compte la matrice de facteur d'intensité de contrainte en mode  $I$ ,  $II$  et  $III$  avec le facteur d'intensité de contrainte avant et après la fissure, ceux de Adrieux S., Bamberger Y., Marigo J.J. [1] and Sehitoglu H., Gall K. et Garcia A.M. [46] respectivement sur les déplacements macroscopiques et les paramètres d'étude, ce chapitre présente un modèle en dimension trois qui permet la détermination du champ de déplacement en fond de fissure avec la prise en compte des bifurcations et des combinaisons de modes. Ce modèle met en évidence les facteurs d'intensité de contrainte sous forme matricielle  $[K]$ . D'autre part, comme les travaux de Hai-Ping LIN [17] ont montré que la fissure interagissait avec les ondes de perturbation et que les fréquences de vibration s'en trouvaient modifiées lors de tests de detection des fissures, nous ne considérons dans ce travail qu'une étude de vibration en dehors de la zone de résonance. Le travail se focalisera sur la résolution analytique des différentes équations du système.

### 3.2 Formulation du problème

On considère un matériau ( $S$ ) homogène et isotrope de volume  $\Omega$ , de surface  $\partial\Omega$ , de masse volumique  $\rho$  et de normale extérieure  $n_i$  ( nous notons un vecteur  $X$  par  $\vec{X}$  ou  $X_i$ ) de composantes  $(n_1, n_2, n_3)$ . ( $S$ ) possède une fissure initiale de forme arbitraire ou de mode mixte (mode  $I$ ,  $II$ ,  $III$ ) et de lon-

gueur initiale  $\ell_0$ , sollicité par des forces surfaciques extérieures d'ordre vibratoire  $F_i \cos \omega t$  ( $F_1, F_2, F_3$  étant des constantes) où les densités volumiques de force comme le poids sont inopérantes ou négligeables. On rappelle que les contraintes sont maximales au voisinage des extrémités. En outre, l'hypothèse de compatibilité de la force extérieure et la fissure initiale quelconque exclut toute évolution de la fissure liée à un défaut de structure ou de sa mise en forme. Ce qui permet de considérer une fissure initiale de mode mixte compte tenu de la sollicitation généralisée.

### 3.2.1 Domaine d'étude des solutions

Compte tenu de la présence de la fissure qui crée une discontinuité des déplacements, les solutions sont particulièrement singulières en fond de fissure dans le domaine  $\Omega^s$  ou zone de singularité (Fig. 3.1).

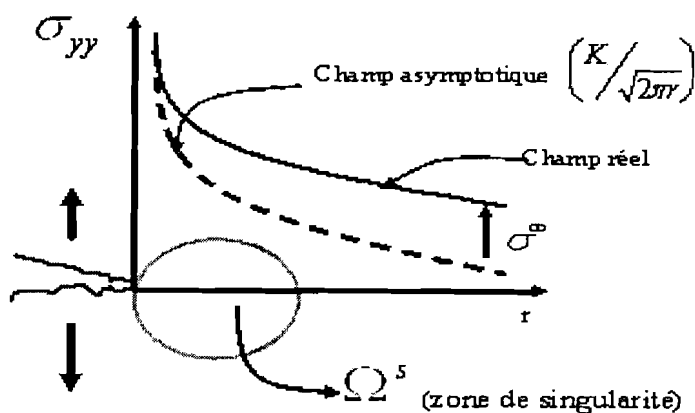


FIG. 3.1 – Courbe de résistance ou de propagation

Le domaine  $\Omega^s$  représente le domaine de fortes singularités autour de la pointe de la fissure. Ce domaine peut s'étendre tout au long des lèvres de la fissure compte tenu du fait que la fissure initiale est arbitraire ou de mode mixte. On obtient ainsi le domaine  $\Omega^e$  des solutions singulières prenant en compte les lèvres de la fissure et constituant dans le cas d'une recherche asymptotique des solutions, le domaine intérieur. Ces différents domaines peuvent être représentés comme suit en tenant compte des travaux de Le-guillon D. & Sanchez-Palencia E. [32] (Fig. 3.2).

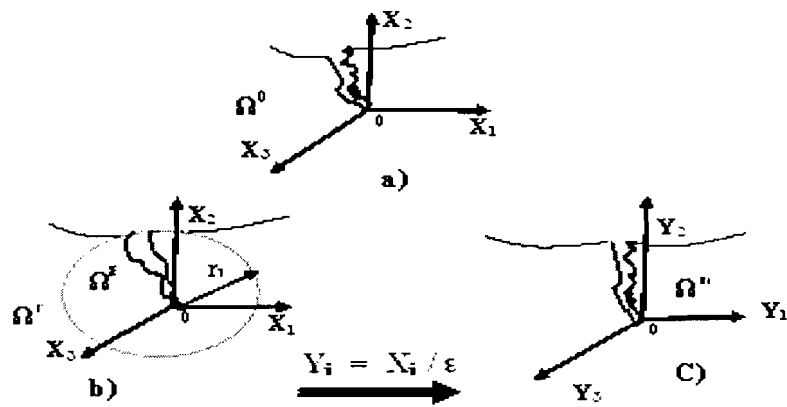


FIG. 3.2 – Les différents domaines

a)  $\Omega^0$  représente le domaine des solutions moins perturbées ou non perturbées. Dans la recherche de ces solutions, la pointe et les lèvres de la fissure constituent des endroits où des conditions aux limites doivent être données ou recherchées.

b) En mécanique linéaire de la rupture (MLR), la courbe de propagation fait clairement apparaître en fond de fissure, une zone de singularité qui peut s'étendre aux lèvres de la fissure qui constituent aussi une zone de singularité :

Au lieu de  $\Omega^s$  on obtient  $\Omega^\varepsilon$ .

c)  $\Omega^{in}$  est l'agrandissement du domaine des singularités ou une dilatation de  $\Omega^\varepsilon$  ( $\Omega^{in} = \frac{\Omega^\varepsilon}{\varepsilon}$ ). Il permet grâce au paramètre  $\varepsilon$  de défaut, de fixer le domaine constituant ainsi le domaine des solutions intérieures (lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) pour une recherche de solutions par la méthode asymptotique par raccordement, qui n'est pas abordée ici.

La variable  $\varepsilon$  traduit les variations du domaine dues à la présence de la fissure au travers de la fonction de jauge  $\Psi_\alpha(\varepsilon)$ , ou  $\alpha$  est l'indice de sommation asymptotique. Physiquement, le paramètre  $\varepsilon$  rend compte du défaut de la structure qui est la fissure dans notre cas. Il s'interprète comme le rapport des longueurs caractéristiques du domaine perturbé  $\Omega^\varepsilon$  et du domaine  $\Omega^0$  ( $\Omega^0 = \Omega^r + \Omega^\varepsilon$ ) non perturbé ou stable, ce qui se traduit concrètement comme le rapport de la longueur de la fissure  $\ell$  sur la longueur caractéristique  $\mathcal{L}$  du matériau dans la direction considérée ( $\frac{\ell}{\mathcal{L}} \ll 1$  en général). Si  $\ell = \mathcal{L}$ , la fissure est très importante et on est à la rupture totale du matériau. Pour  $\varepsilon = 0$ , on retrouve  $\Omega^0$  : la structure est stable  $\ell = \ell_0$ . Les schémas ci-dessus représentent de façon schématique les différents domaines en fond de fissure.

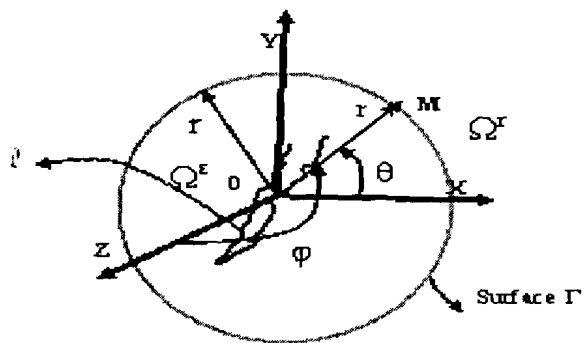


FIG. 3.3 – Domaine



Le système étant ainsi décrit, Nous passons aux équations régissant la dynamique du milieu.

### 3.3 Equations du système

Les équations de la dynamique du milieu, en hypothèse de petits mouvements linéaires et en dehors des forces de densité volumique s'écrivent

$$\operatorname{div} \sigma = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1)$$

avec l'équation de compatibilité et de comportement du milieu,

$$\xi = \frac{1}{2}(\nabla U + {}^T \nabla U) \quad (3.2)$$

et

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \xi_{kl}, \quad (3.3)$$

où  $U$  est le vecteur déplacement,  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes,  $C_{ijkl}$  le tenseur de rigidité élastique du milieu et  $\xi$  celui des déformations. On a

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = F_i \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.4)$$

et  $\vec{\gamma}$  le vecteur accélération se réduit à  $\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ .

Comme nous nous intéressons au comportement des solutions au voisinage de la fissure dans un matériau isotrope, alors, à partir de (3.2) et (3.3), l'équation d'évolution du système (3.1) devient

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} [\operatorname{div} U^\varepsilon] + \mu \operatorname{div} [\operatorname{grad} U^\varepsilon] = \rho \frac{\partial^2 U^\varepsilon}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon. \quad (3.5)$$

Comme  $\operatorname{div} \operatorname{grad} U^\varepsilon = \nabla \cdot \nabla U^\varepsilon = \Delta U^\varepsilon$ , (3.5) s'écrit

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} [\operatorname{div} U^\varepsilon] + \mu \Delta U^\varepsilon = \rho \frac{\partial^2 U^\varepsilon}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \quad (3.6)$$

soit

$$\operatorname{grad} [\operatorname{div} U^\varepsilon] + a_1^2 \Delta U^\varepsilon = a^2 \left( \frac{\partial^2 U^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \quad (3.7)$$

avec  $a_1^2 = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)}$  et  $a^2 = \frac{\rho}{(\lambda + \mu)}$ .

Pour ce qui est de la solution singulière  $U^\varepsilon$  sur  $\Omega^\varepsilon$  de frontière  $\Gamma$  (Fig. 3.3), la condition (3.4) est vérifiée indirectement à la frontière de la zone de fissuration  $\Gamma$  pour  $r \approx r_1$ , tel que  $U^\varepsilon \approx U^0$ . Par contre pour  $r > r_1$ , on a  $U^\varepsilon(r > r_1, \theta, \varphi) = U^0(r, \theta, \varphi)$  dans  $\Omega^r$  où  $r, \theta$  et  $\varphi$  sont les coordonnées sphériques,  $U^0(r, \theta, \varphi)$  est la solution non perturbée en l'absence de fissure, et  $U^0$  est le premier terme du développement de  $U^\varepsilon$  qui doit se raccorder à  $U_0(r, \theta, \varphi)$ .

Pour la suite nous utilisons l'indice  $i = \{1, 2, 3\}$  en coordonnées sphériques tel que  $i = \{1 = r, 2 = \theta, 3 = \varphi\}$  pour désigner les composantes du vecteur  $U^\varepsilon$  dans la base  $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$ .

### 3.3.1 Expression de $\operatorname{grad} [\operatorname{div} U^\varepsilon]$ en coordonnées sphériques

On a

$$\operatorname{div} U^\varepsilon = \left( \frac{2}{r} U_1^\varepsilon + \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial r} \right) + \left( \frac{1}{r} U_2^\varepsilon \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi}, \quad (3.8)$$

soit

$$\operatorname{grad} [\operatorname{div} U^\varepsilon] = \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\operatorname{div} U^\varepsilon) \right] e_r + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{div} U^\varepsilon) \right] e_\theta + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{div} U^\varepsilon) \right] e_\varphi. \quad (3.9)$$

En écrivant en colonne, on a

$$\text{grad}[\text{div}U^\varepsilon] = \begin{pmatrix} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\text{div}U^\varepsilon) \right] e_r \\ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{div}U^\varepsilon) \right] e_\theta \\ \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\text{div}U^\varepsilon) \right] e_\varphi, \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

avec

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\text{div}U^\varepsilon) \right] e_r = & \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U_1^\varepsilon + \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cot \theta \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_2^\varepsilon \cot \theta \right. \\ & \left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] e_r, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{div}U^\varepsilon) \right] e_\theta = & \left[ \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} \cot \theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} U_2^\varepsilon \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] e_\theta, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\text{div}U^\varepsilon) \right] e_\varphi = & \left[ \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \varphi} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right] e_\varphi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3.2 Expression de $\Delta U^\varepsilon$

On rappelle que  $\Delta U^\varepsilon = \text{div grad} U^\varepsilon$ .

Par conséquent,

$$\Delta U^\varepsilon = \begin{pmatrix} \left[ \Delta U_1^\varepsilon - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left( U_1^\varepsilon \sin \theta + \sin \theta \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} + U_2^\varepsilon \cos \theta + \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right) \right] e_r \\ \left[ \Delta U_2^\varepsilon - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{U_2^\varepsilon}{2} - \sin^2 \theta \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \cos \theta \right) \right] e_\theta \\ \left[ \Delta U_3^\varepsilon - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{U_3^\varepsilon}{2} - \sin \theta \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \varphi} - \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \varphi} \cos \theta \right) \right] e_\varphi, \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

avec

$$\Delta X = \frac{2}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}, \quad (3.15)$$

où  $\{X\} = \{U_1^\varepsilon, U_2^\varepsilon, U_3^\varepsilon\}$ .

(3.14) peut se réécrire

$$\Delta U^\varepsilon = \begin{pmatrix} \left[ \Delta U_1^\varepsilon - \frac{2}{r^2} U_1^\varepsilon - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} U_2^\varepsilon \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] e_r \\ \left[ \Delta U_2^\varepsilon - \frac{1}{r^2 \sin \theta} U_2^\varepsilon + \frac{2}{r^2} \sin \theta \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] e_\theta \\ \left[ \Delta U_3^\varepsilon - \frac{1}{r^2 \sin \theta} U_3^\varepsilon + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \varphi} \cot \theta \right] e_\varphi \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

En tenant compte de (3.15), on trouve

$$\Delta U^\varepsilon = \left( \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} U_1^\varepsilon - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} U_2^\varepsilon \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] e_r \\ \\ \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2 \sin \theta} U_2^\varepsilon + \frac{2}{r^2} \sin \theta \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] e_\theta \\ \\ \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2 \sin \theta} U_3^\varepsilon + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \varphi} \cot \theta \right] e_\varphi. \end{array} \right) \quad (3.17)$$

En revenant à (3.5) et en remplaçant  $\text{grad} [\text{div} U^\varepsilon]$  par  
 (3.11) $e_r$  + (3.12) $e_\theta$  + (3.13) $e_\varphi$ ) et  $\Delta U^\varepsilon$  par ((3.17) $e_r$  + (3.17) $e_\theta$  + (3.17) $e_\varphi$ ,

on obtient

$$((3.11)e_r + (3.12)e_\theta + (3.13)e_\varphi) + a_1^2 ((3.17)e_r + (3.17)e_\theta + (3.17)e_\varphi) = a^2 \frac{\partial^2 U^\varepsilon}{\partial t^2}.$$

Soit trois équations scalaires :

$$(e_r) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U_1^\varepsilon + \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cot \theta \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_2^\varepsilon \cot \theta \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] \\ + a_1^2 \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} U_1^\varepsilon - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} U_2^\varepsilon \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] = a^2 \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial t^2}, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} \cot \theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} U_2^\varepsilon \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] \\ + a_1^2 \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2 \sin \theta} U_2^\varepsilon + \frac{2}{r^2} \sin \theta \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] = a^2 \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial t^2}, \end{array} \right. \quad (3.19)$$

et

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \varphi} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right] \\ + a_1^2 \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2 \sin \theta} U_3^\varepsilon + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \varphi} \cot \theta \right] = a^2 \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial t^2}, \end{array} \right. \quad (3.20)$$

### 3.4 Détermination des équations différentielles de propagation selon chaque axe

Compte tenu de la complexité du problème et grâce à la méthode de superposition des solutions, on scinde le problème en supposant une évolution indépendante selon chacune des directions. Ainsi, à partir des équations (3.18), (3.19) et (3.20), on détermine les systèmes d'équations d'évolution des composantes des déplacements selon chacune des trois directions de l'espace.

On considère la structure de la solution comme suit ( $U^\varepsilon = U_i^\varepsilon$ ) [19], [28] et [33] :

$$U_i^\varepsilon(r, \theta, \varphi) = \sum_{j=1}^3 [K_{ij}] \times \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\varepsilon) R_{\alpha j}(r) \Theta_{\alpha j}(\theta) \Phi_{\alpha j}(\varphi) T_{\alpha j}(t), \quad (3.21)$$

où  $[K_{ij}]$  sera dans notre cas, par anticipation, une matrice  $3 \times 3$  dite de facteur

d'intensité de contrainte puisqu'elle va dépendre de ces quantités.

En substituant (3.21) dans les équations de base (3.18), (3.19) et (3.20), on détermine les systèmes d'équations différentielles.

### 3.4.1 Selon $e_r$

On remarque que, par regroupement de terme, (3.18) peut se réécrire

$$(e_r) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r} (1 + a_1^2) \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial r} - \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2) U_1^\varepsilon + (1 + a_1^2) \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cot \theta \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial r} \\ - \frac{1}{r^2} (1 + 2a_1^2) U_2^\varepsilon \cot \theta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial r \partial \varphi} \\ - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} + a_1^2 \left[ \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} \right] = a^2 \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial t^2}, \end{array} \right. \quad (3.22)$$

soit en y portant (3.21) et en ignorant dans un premier temps les indices  $\alpha$  et  $j$ , sauf ceux se rapportant aux indices  $i$  de  $U_i^\varepsilon$ , on obtient

$$(e_r) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r} (1 + a_1^2) \dot{R}_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1 - \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2) R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1 + (1 + a_1^2) \ddot{R}_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1 \\ + \frac{1}{r} \dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2 \cot \theta - \frac{1}{r^2} (1 + 2a_1^2) R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2 \cot \theta \\ - \frac{1}{r^2} R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2 + \frac{1}{r} \dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3 - \frac{1}{r^2 \sin \theta} R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3 \\ + a_1^2 \left[ \frac{1}{r^2} \cot \theta R_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1 + \frac{1}{r^2} R_1 \ddot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_1 \Theta_1 \ddot{\Phi}_1 T_1 \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2 - \frac{2}{r^2 \sin \theta} R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3 \right] = a^2 R_1 \Theta_1 \Phi_1 \ddot{T}_1, \end{array} \right. \quad (3.23)$$



où les fonctions  $(\dot{R}_i, \dot{\Theta}_i, \dot{\Phi}_i, \dot{T}_i)$  et  $(\ddot{R}_i, \ddot{\Theta}_i, \ddot{\Phi}_i, \ddot{T}_i)$  sont des dérivées première et seconde des fonctions  $(R_i, \Theta_i, \Phi_i, T_i)$  par rapport à leur argument respectif  $(r, \theta, \varphi, t)$ , pour éviter les surcharges d'écriture. Ainsi,

$$\dot{R}_i = \frac{\partial R_i}{\partial r}; \quad \dot{\Theta}_i = \frac{\partial \Theta_i}{\partial \theta}; \quad \dot{\Phi}_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi}; \quad \dot{T}_i = \frac{\partial T_i}{\partial t}. \quad (3.24)$$

En divisant chaque membre de (3.23) par  $R_1\Theta_1\Phi_1T_1$ , on obtient

$$(e_r) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{r} (1 + a_1^2) \frac{\dot{R}_1}{R_1} - \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2) + (1 + a_1^2) \frac{\ddot{R}_1}{R_1} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}_2\dot{\Theta}_2\dot{\Phi}_2\dot{T}_2}{R_1\Theta_1\Phi_1T_1} \cot \theta \\ & - \frac{1}{r^2} (1 + 2a_1^2) \frac{R_2\dot{\Theta}_2\dot{\Phi}_2\dot{T}_2}{R_1\Theta_1\Phi_1T_1} \cot \theta - \frac{1}{r^2} \frac{R_2\dot{\Theta}_2\dot{\Phi}_2\dot{T}_2}{R_1\Theta_1\Phi_1T_1} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}_2\dot{\Theta}_2\dot{\Phi}_2\dot{T}_2}{R_1\Theta_1\Phi_1T_1} \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\dot{R}_3\dot{\Theta}_3\dot{\Phi}_3\dot{T}_3}{R_1\Theta_1\Phi_1T_1} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{R_3\dot{\Theta}_3\dot{\Phi}_3\dot{T}_3}{R_1\Theta_1\Phi_1T_1} \Big] \\ & + a_1^2 \left[ \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{1}{r^2} \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} \right. \\ & \left. - \frac{2}{r^2} \frac{R_2\dot{\Theta}_2\dot{\Phi}_2\dot{T}_2}{R_1\Theta_1\Phi_1T_1} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{R_3\dot{\Theta}_3\dot{\Phi}_3\dot{T}_3}{R_1\Theta_1\Phi_1T_1} \right] = a^2 \frac{\ddot{T}_1}{T_1}. \end{aligned} \right. \quad (3.25)$$

Comme le second membre est indépendant de  $r, \theta$  et  $\varphi$  alors que le premier membre en depend, alors il existe nécessairement une constante  $\lambda_{12}$  telle que

$$a^2 \frac{\ddot{T}_1}{T_1} = -\lambda_{12}^2, \quad (3.26)$$

c'est à dire

$$\ddot{T}_1 + a^{-2} \lambda_{12}^2 T_1 = 0, \quad (3.27)$$

et

$$(e_r) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{r} (1 + a_1^2) \frac{\dot{R}_1}{R_1} - \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2) + (1 + a_1^2) \frac{\ddot{R}_1}{R_1} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} (1 + 2a_1^2) \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta - \frac{1}{r^2} \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] \\ + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \\ + a_1^2 \left[ \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{1}{r^2} \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] = -\lambda_{12}^2. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

En multipliant (3.28) par  $r^2$ , on obtient

$$(e_r) \left\{ \begin{array}{l} 2r (1 + a_1^2) \frac{\dot{R}_1}{R_1} - 2(1 + a_1^2) + r^2 (1 + a_1^2) \frac{\ddot{R}_1}{R_1} + r \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta \\ - (1 + 2a_1^2) \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta - \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + r \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \\ + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \\ + a_1^2 \left[ \cot \theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} \right. \\ \left. - 2 \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] = -r^2 \lambda_{12}^2, \end{array} \right. \quad (3.29)$$

soit

$$(e_r) \left\{ \begin{aligned} & \left[ 2r(1+a_1^2) \frac{\dot{R}_1}{R_1} - 2(1+a_1^2) + r^2(1+a_1^2) \frac{\ddot{R}_1}{R_1} + r^2 \lambda_{12}^2 \right] \\ & + a_1^2 \left[ \cot \theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} \right] + \\ & \left[ -(1+2a_1^2) \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta - \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + r \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right. \\ & \left. + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] \\ & + a_1^2 \left[ -2 \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] + r \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta = 0, \end{aligned} \right. \quad (3.30)$$

ou encore

$$(e_r) \left\{ \begin{aligned} & \left[ 2r(1+a_1^2) \frac{\dot{R}_1}{R_1} - 2(1+a_1^2) + r^2(1+a_1^2) \frac{\ddot{R}_1}{R_1} + r^2 \lambda_{12}^2 \right] = \\ & -a_1^2 \left[ \cot \theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} \right] \\ & - \left[ -(1+2a_1^2) \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta - \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + r \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right. \\ & \left. + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] \\ & - a_1^2 \left[ -2 \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] - r \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta. \end{aligned} \right. \quad (3.31)$$

Comme le premier membre de l'équation ne dépend pas de  $t$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  alors que le second en dépend, alors il existe une constante  $\lambda_{13}$  telle que

$$\left[ 2r(1+a_1^2) \frac{\dot{R}_1}{R_1} - 2(1+a_1^2) + r^2(1+a_1^2) \frac{\ddot{R}_1}{R_1} + r^2 \lambda_{12}^2 \right] = \lambda_{13}, \quad (3.32)$$

soit

$$r^2 \ddot{R}_1 + 2r \dot{R}_1 + \left( \frac{r^2 \lambda_{12}^2}{(1+a_1^2)} - \left( \frac{\lambda_{13}}{(1+a_1^2)} + 2 \right) \right) R_1 = 0, \quad (3.33)$$

et

$$(e_r) \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 \left[ \cot \theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} \right] + \\ \left[ - (1 + 2a_1^2) \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta - \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + r \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right. \\ \left. + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] \\ \left. + a_1^2 \left[ -2 \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] + r \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \cot \theta + \lambda_{13} = 0. \right. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Multiplions cette dernière par  $\sin^2 \theta$  pour obtenir

$$(e_r) \left\{ \begin{array}{l} \left[ a_1^2 \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} \right] + \left[ a_1^2 \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \sin^2 \theta \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} \right) + \lambda_{13} \sin^2 \theta \right] + \\ \left[ - \frac{(1 + 2a_1^2)}{2} \sin 2\theta \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + r \sin^2 \theta \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right. \\ \left. + r \sin \theta \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] \\ \left. a_1^2 \left[ -2 \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - 2 \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] + \frac{r}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} = 0, \right. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

soit

$$(e_r) \left\{ \begin{aligned} & \left[ a_1^2 \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} \right] = - \left[ a_1^2 \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \sin^2 \theta \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} \right] + \lambda_{13} \sin^2 \theta \right] \\ & - \left[ -\frac{(1+2a_1^2)}{2} \sin 2\theta \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + r \sin^2 \theta \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right. \\ & \left. + r \sin \theta \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] \\ & - a_1^2 \left[ -2 \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - 2 \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] - \frac{r}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1}. \end{aligned} \right. \quad (3.36)$$

Pour des raisons analogues que précédemment, il existe une constante  $\lambda_{14}$  telle que

$$a_1^2 \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} = -\lambda_{14}, \quad (3.37)$$

c'est à dire

$$\ddot{\Phi}_1 + \frac{\lambda_{14}}{a_1^2} \Phi_1 = 0, \quad (3.38)$$

et

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& a_1^2 \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \sin^2 \theta \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} \right) + \lambda_{13} \sin^2 \theta \\
& + \left[ -\frac{(1+2a_1^2)}{2} \sin 2\theta \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + r \sin^2 \theta \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right. \\
& \left. + r \sin \theta \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] + \frac{r}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \\
& + a_1^2 \left[ -2 \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - 2 \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] - \lambda_{14} = 0,
\end{aligned} \right\} \quad (e_r) \quad (3.39)
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \left[ a_1^2 \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \sin^2 \theta \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} \right] + \lambda_{13} \sin^2 \theta \right] = \\
& - \left[ -\frac{(1+2a_1^2)}{2} \sin 2\theta \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + r \sin^2 \theta \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right. \\
& \left. + r \sin \theta \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] - \frac{r}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \\
& - a_1^2 \left[ -2 \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - 2 \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \right] + \lambda_{14}.
\end{aligned} \right\} \quad (e_r) \quad (3.40)
\end{aligned}$$

De même, il existe une constante  $\lambda_{15}$  telle que

$$\left[ a_1^2 \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \sin^2 \theta \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} \right) + \lambda_{13} \sin^2 \theta \right] = \lambda_{15}, \quad (3.41)$$

c'est à dire

$$\ddot{\Theta}_1 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_1 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{\lambda_{13}}{a_1^2} \sin^2 \theta - \frac{\lambda_{15}}{a_1^2} \right) \Theta_1 = 0, \quad (3.42)$$

et

$$\left[ \begin{aligned} & -\frac{(1+2a_1^2)}{2} \sin 2\theta \frac{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + r \sin^2 \theta \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \\ & + r \sin \theta \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} + \frac{r}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} \\ & - 2a_1^2 \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - 2a_1^2 \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \Phi_1 T_1} - \lambda_{14} + \lambda_{15} = 0. \end{aligned} \right] \quad (3.43)$$

Finalement, on a le système

$$e_r \left\{ \begin{aligned} & \ddot{T}_1 + a^{-2} \lambda_{12}^2 T_1 = 0 \\ & r^2 \ddot{R}_1 + r \dot{R}_1 + \left( \frac{r^2 \lambda_{12}^2}{(1+a_1^2)} - \left( \frac{\lambda_{13}}{(1+a_1^2)} + 2 \right) \right) R_1 = 0 \\ & \ddot{\Phi}_1 + \frac{\lambda_{14}}{a_1^2} \Phi_1 = 0 \\ & \ddot{\Theta}_1 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_1 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{\lambda_{13}}{a_1^2} \sin^2 \theta - \frac{\lambda_{15}}{a_1^2} \right) \Theta_1 = 0 \end{aligned} \right. , \quad (3.44)$$

avec (3.43).

### 3.4.2 Selon $e_\theta$

Les équations (3.19) selon  $e_\theta$  peuvent aussi être réécrites

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial \theta} \cot \theta \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (1 + a_1^2 \sin \theta) U_2^\varepsilon + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3^\varepsilon}{\partial \theta \partial \varphi} \right] \\ \left. - \frac{\cot \theta}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{\partial U_3^\varepsilon}{\partial \varphi} + a_1^2 \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_2^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right] = a^2 \frac{\partial^2 U_2^\varepsilon}{\partial t^2}, \right. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

soit en y reportant (3.21),

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2 \sin \theta) R_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1 + \frac{1}{r} \dot{R}_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1 \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) R_2 \dot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2 \cot \theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (1 + a_1^2 \sin \theta) R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2 \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) R_2 \ddot{\Theta}_2 \Phi_2 T_2 + \frac{1}{r^2 \sin \theta} R_3 \dot{\Theta}_3 \dot{\Phi}_3 T_3 \right] \\ \left. - \frac{\cot \theta}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3 + a_1^2 \frac{2}{r} \dot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2 \right. \\ \left. + a_1^2 \ddot{R}_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2 + \frac{+a_1^2}{r^2 \sin^2 \theta} R_2 \Theta_2 \ddot{\Phi}_2 T_2 = a^2 R_2 \Theta_2 \Phi_2 \ddot{T}_2. \right. \end{array} \right. \quad (3.46)$$



En divisant chaque membre par  $R_2\Theta_2\Phi_2T_2$ , on obtient

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{R_1\dot{\Theta}_1\Phi_1T_1}{R_2\Theta_2\Phi_2T_2} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}_1\dot{\Theta}_1\Phi_1T_1}{R_2\Theta_2\Phi_2T_2} \\ + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \cot \theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (1 + a_1^2 \sin \theta) \\ + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{R_3\dot{\Theta}_3\dot{\Phi}_3T_3}{R_2\Theta_2\Phi_2T_2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_3\Theta_3\dot{\Phi}_3T_3}{R_2\Theta_2\Phi_2T_2} \\ + a_1^2 \left[ \frac{2}{r} \frac{\dot{R}_2}{R_2} + \frac{\ddot{R}_2}{R_2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_2}{\Phi_2} \right] = a^2 \frac{\ddot{T}_2}{T_2}. \end{array} \right. \quad (3.47)$$

Comme dans le cas des équations selon  $e_r$ , il existe une constante  $\lambda_{22}$  telle que

$$\ddot{T}_2 + a^{-2} \lambda_{22}^2 T_2 = 0, \quad (3.48)$$

et

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{R_1\dot{\Theta}_1\Phi_1T_1}{R_2\Theta_2\Phi_2T_2} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}_1\dot{\Theta}_1\Phi_1T_1}{R_2\Theta_2\Phi_2T_2} + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \cot \theta \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (1 + a_1^2 \sin \theta) + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{R_3\dot{\Theta}_3\dot{\Phi}_3T_3}{R_2\Theta_2\Phi_2T_2} \right] \\ \left. - \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_3\Theta_3\dot{\Phi}_3T_3}{R_2\Theta_2\Phi_2T_2} \cot \theta + a_1^2 \left[ \frac{2}{r} \frac{\dot{R}_2}{R_2} + \frac{\ddot{R}_2}{R_2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_2}{\Phi_2} \right] = -\lambda_{22}^2. \end{array} \right. \quad (3.49)$$

En multipliant les membres de la dernière équation par  $r^2$ , on obtient

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{R_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} + r \frac{\dot{R}_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_3 \dot{\Theta}_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \\ - \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \cot \theta \\ + (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} + (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \cot \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} (1 + a_1^2 \sin \theta) \\ + \left[ a_1^2 \left( 2r \frac{\dot{R}_2}{R_2} + r^2 \frac{\ddot{R}_2}{R_2} \right) + r^2 \lambda_{22}^2 \right] + a_1^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_2}{\Phi_2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

En introduisant la constante  $\lambda_{23}$ , le système se subdivise en deux. D'un côté, on a

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} \left[ 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{R_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} + r \frac{\dot{R}_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_3 \dot{\Theta}_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \right. \\ - \left. \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \cot \theta \right. \\ + \left. (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} + (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \cot \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} (1 + a_1^2 \sin \theta) \right] \\ + a_1^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_2}{\Phi_2} \right) = -\lambda_{23} \end{array} \right. \quad (3.50)$$

et de l'autre côté, on a

$$\left[ a_1^2 \left( 2r \frac{\dot{R}_2}{R_2} + r^2 \frac{\ddot{R}_2}{R_2} \right) + r^2 \lambda_{22}^2 \right] = -\lambda_{23}, \quad (3.51)$$

qui peut encore s'écrire

$$r^2 \ddot{R}_2 + 2r \dot{R}_2 + \left( r^2 \frac{\lambda_{22}^2}{a_1^2} - \frac{\lambda_{23}}{a_1^2} \right) R_2 = 0. \quad (3.52)$$

Revenons à la relation (3.50), en multipliant le tout par  $\sin^2 \theta$ . On obtient

$$(e_\theta) \left\{ \begin{aligned} & \left[ 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{R_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \sin^2 \theta + r \frac{\dot{R}_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \sin^2 \theta \right. \\ & \left. + \frac{R_3 \dot{\Theta}_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \sin \theta - \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \frac{1}{2} \sin 2\theta \right] \\ & + (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} \sin^2 \theta + (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \frac{1}{2} \sin 2\theta + \lambda_{23} \sin^2 \theta - (1 + a_1^2 \sin \theta) \\ & = -a_1^2 \frac{\ddot{\Phi}_2}{\Phi_2}, \end{aligned} \right. \quad (3.53)$$

de sorte qu'il existe une constante  $\lambda_{24}$  telle que

$$-a_1^2 \frac{\ddot{\Phi}_2}{\Phi_2} = \lambda_{24}, \quad (3.54)$$

ou encore

$$\ddot{\Phi}_2 + \frac{\lambda_{24}}{a_1^2} \Phi_2 = 0, \quad (3.55)$$

et

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{R_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \sin^2 \theta + r \frac{\dot{R}_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \sin^2 \theta \\ + \frac{R_3 \dot{\Theta}_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \sin \theta - \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ + (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} \sin^2 \theta + (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \frac{1}{2} \sin 2\theta + \lambda_{23} \sin^2 \theta \\ - (1 + a_1^2 \sin \theta) - \lambda_{24} = 0, \end{array} \right. \quad (3.56)$$

c'est à dire

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} - \left[ 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{R_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} + r \frac{\dot{R}_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \right. \\ \left. + \frac{R_3 \dot{\Theta}_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} (\sin \theta)^{-1} - \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \frac{1}{2} \cot \theta \right] \\ = (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} + (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \frac{1}{2} \cot \theta + \lambda_{23} - \frac{(1 + \lambda_{24} + a_1^2 \sin \theta)}{\sin^2 \theta}. \end{array} \right. \quad (3.57)$$

De même, il existe une constante  $\lambda_{25}$ , telle qu'après tout calcul fait, on ait

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} \ddot{T}_2 + a^{-2} \lambda_{22}^2 T_2 = 0 \\ r^2 \ddot{R}_2 + 2r \dot{R}_2 + \left( r^2 \frac{\lambda_{22}^2}{a_1^2} - \frac{\lambda_{23}}{a_1^2} \right) R_2 = 0 \\ \ddot{\Phi}_2 + \frac{\lambda_{24}}{a_1^2} \Phi_2 = 0 \\ \ddot{\Theta}_2 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_2 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{\lambda_{23} - \lambda_{25}}{(1 + a_1^2)} \sin^2 \theta - \frac{1 + \lambda_{24} + a_1^2 \sin \theta}{(1 + a_1^2)} \right) \Theta_2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.58)$$

et

$$\left[ \begin{array}{l} 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{R_1 \dot{\Theta}_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} + r \frac{\dot{R}_1 \dot{\Theta}_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} - \lambda_{25} \\ + \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_3 \dot{\Theta}_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} - \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \cot \theta = 0 \end{array} \right]. \quad (3.59)$$

### 3.4.3 Selon $e_\varphi$

En portant (3.21) dans (3.20) et en divisant le tout par  $R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3$ , on trouve

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \cot \theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \right] \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Phi}_3}{\Phi_3} + a_1^2 \left[ \frac{2 \dot{R}_3}{r R_3} + \frac{\ddot{R}_3}{R_3} + \frac{1}{r^2} \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} \cot \theta + \frac{1}{r^2} \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \right] = a^2 \frac{\ddot{T}_3}{T_3}. \end{array} \right. \quad (3.60)$$

Il existe donc une constante  $\lambda_{32}^2$ , telle que

$$\ddot{T}_3 + a^{-2}\lambda_{32}^2 T_3 = 0, \quad (3.61)$$

et

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \\ + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \cot \theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Phi}_3}{\Phi_3} + a_1^2 \left[ \frac{2 \dot{R}_3}{r R_3} + \frac{\ddot{R}_3}{R_3} + \frac{1}{r^2} \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} \cot \theta + \frac{1}{r^2} \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \right] + \lambda_{32}^2 = 0. \end{array} \right. \quad (3.62)$$

En multipliant (3.62) par  $r^2$ , on obtient

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} 2 \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \\ + \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \\ + \frac{1}{\sin^2 \theta} (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Phi}_3}{\Phi_3} + \left[ a_1^2 \left[ 2r \frac{\dot{R}_3}{R_3} + r^2 \frac{\ddot{R}_3}{R_3} \right] + r^2 \lambda_{32}^2 \right] \\ + a_1^2 \left[ \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} \cot \theta + \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} - \frac{1}{\sin \theta} \right] = 0, \end{array} \right. \quad (3.63)$$

soit

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \left[ a_1^2 \left[ 2r \frac{\dot{R}_3}{R_3} + r^2 \frac{\ddot{R}_3}{R_3} \right] + r^2 \lambda_{32}^2 \right] = -\frac{1}{\sin^2 \theta} (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Phi}_3}{\Phi_3} \\ -a_1^2 \left[ \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} \cot \theta + \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} - \frac{1}{\sin \theta} \right] \\ - \left[ 2 \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} + \right. \\ \left. \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \right]. \end{array} \right.$$

De même, il existe une constante  $\lambda_{33}$ , telle que

$$a_1^2 \left( 2r \frac{\dot{R}_3}{R_3} + r^2 \frac{\ddot{R}_3}{R_3} \right) + r^2 \lambda_{32}^2 = \lambda_{33}, \quad (3.64)$$

ou encore

$$r^2 \ddot{R}_3 + 2r \dot{R}_3 + \left( r^2 \frac{\lambda_{32}^2}{a_1^2} - \frac{\lambda_{33}}{a_1^2} \right) R_3 = 0, \quad (3.65)$$

et

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin^2 \theta} (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Phi}_3}{\Phi_3} + a_1^2 \left[ \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} \cot \theta + \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} - \frac{1}{\sin \theta} \right] \\ + 2 \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \\ + \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} + \lambda_{33} = 0. \end{array} \right. \quad (3.66)$$

En multipliant (3.66) par  $\sin^2 \theta$ , il vient

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Phi}_3}{\Phi_3} = -a_1^2 \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} + \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} \sin^2 \theta - \sin \theta \right] - \lambda_{33} \sin^2 \theta \\ - \left[ 2 \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \sin^2 \theta + r \sin \theta \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \sin \theta \right]. \end{array} \right. \quad (3.67)$$

De même on dira qu'il existe une constante  $\lambda_{34}$ , telle que

$$(1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Phi}_3}{\Phi_3} = -\lambda_{34}, \quad (3.68)$$

ou encore

$$\ddot{\Phi}_3 + \frac{\lambda_{34}}{(1 + a_1^2)} \Phi_3 = 0, \quad (3.69)$$

et

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} + \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} \sin^2 \theta \right] - a_1^2 \sin \theta + \lambda_{33} \sin^2 \theta \\ + 2 \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \sin^2 \theta + r \sin \theta \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \\ + \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \sin \theta - \lambda_{34} = 0. \end{array} \right. \quad (3.70)$$



En divisant cette dernière par  $\sin \theta$ , on obtient

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 \left[ \frac{1}{2} \cos \theta \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} + \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} \sin \theta \right] + \lambda_{33} \sin \theta - \left( a_1^2 + \frac{\lambda_{34}}{\sin \theta} \right) = \\ - \left[ 2 \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \sin \theta + r \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \cos \theta + \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \right]. \end{array} \right. \quad (3.71)$$

Soit la constante  $\lambda_{35}$  telle que

$$a_1^2 \left( \cos \theta \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} + \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} \sin \theta \right) + \lambda_{33} \sin \theta - \left( a_1^2 + \frac{\lambda_{34}}{\sin \theta} \right) = \lambda_{35}, \quad (3.72)$$

d'où

$$\ddot{\Theta}_3 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_3 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{a_1^2} (\lambda_{33} \sin^2 \theta - (a_1^2 + \lambda_{35}) \sin \theta - \lambda_{34}) \Theta_3 = 0. \quad (3.73)$$

Le système final s'écrit

$$(e_\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \ddot{T}_3 + a^{-2} \lambda_{32}^2 T_3 = 0 \\ r^2 \ddot{R}_3 + 2r \dot{R}_3 + \left( r^2 \frac{\lambda_{32}^2}{a_1^2} - \frac{\lambda_{33}}{a_1^2} \right) R_3 = 0 \\ \ddot{\Phi}_3 + \frac{\lambda_{34}}{(1 + a_1^2)} \Phi_3 = 0 \\ \ddot{\Theta}_3 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_3 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{a_1^2} (\lambda_{33} \sin^2 \theta - (a_1^2 + \lambda_{35}) \sin \theta - \lambda_{34}) \Theta_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.74)$$

avec

$$\left[ \begin{array}{l} 2 \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3} \sin \theta + r \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3} + \lambda_{35} \\ + \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3} \cos \theta + \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3} = 0 \end{array} \right]. \quad (3.75)$$

En conclusion, on obtient les systèmes suivants :

$$e_r \left\{ \begin{array}{l} \ddot{T}_1 + a^{-2} \lambda_{12}^2 T_1 = 0 \\ r^2 \ddot{R}_1 + r \dot{R}_1 + \left( \frac{r^2 \lambda_{12}^2}{(1 + a_1^2)} - \left( \frac{\lambda_{13}}{(1 + a_1^2)} + 2 \right) \right) R_1 = 0 \\ \ddot{\Phi}_1 + \frac{\lambda_{14}}{a_1^2} \Phi_1 = 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_1 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{\lambda_{13}}{a_1^2} \sin^2 \theta - \frac{\lambda_{15}}{a_1^2} \right) \Theta_1 = 0 \end{array} \right. , \quad (3.76)$$

avec

$$\left[ \begin{array}{l} -\frac{(1 + 2a_1^2)}{2} \sin 2\theta \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1} - \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1} + r \sin^2 \theta \frac{\dot{R}_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1} \\ + r \sin \theta \frac{\dot{R}_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1} - \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1} - 2a_1^2 \sin^2 \theta \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1} \\ - 2a_1^2 \sin \theta \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1} + \frac{r}{2} \sin 2\theta \frac{\dot{R}_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1} - \lambda_{14} - \lambda_{15} = 0 \end{array} \right], \quad (3.77)$$

$$e_\theta \left\{ \begin{array}{l} \ddot{T}_2 + a^{-2} \lambda_{22}^2 T_2 = 0 \\ r^2 \ddot{R}_2 + 2r \dot{R}_2 + \left( r^2 \frac{\lambda_{22}^2}{a_1^2} - \frac{\lambda_{23}}{a_1^2} \right) R_2 = 0 \\ \ddot{\Phi}_2 + \frac{\lambda_{24}}{a_1^2} \Phi_2 = 0 \\ \ddot{\Theta}_2 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_2 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{\lambda_{23} - \lambda_{25}}{(1 + a_1^2)} \sin^2 \theta - \frac{1 + \lambda_{24} + a_1^2 \sin \theta}{(1 + a_1^2)} \right) \Theta_2 = 0 \end{array} \right. , \quad (3.78)$$

avec

$$\left[ \begin{array}{l} 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{R_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} + r \frac{\dot{R}_1 \dot{\Theta}_1 \Phi_1 T_1}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \\ + \frac{1}{\sin \theta} \frac{R_3 \dot{\Theta}_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} - \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_3 \Theta_3 \dot{\Phi}_3 T_3}{R_2 \Theta_2 \Phi_2 T_2} \cot \theta - \lambda_{25} = 0 \end{array} \right] , \quad (3.79)$$

et

$$e_\varphi \left\{ \begin{array}{l} \ddot{T}_3 + a^{-2} \lambda_{32}^2 T_3 = 0 \\ r^2 \ddot{R}_3 + 2r \dot{R}_3 + \left( r^2 \frac{\lambda_{32}^2}{a_1^2} - \frac{\lambda_{33}}{a_1^2} \right) R_3 = 0 \\ \ddot{\Phi}_3 + \frac{\lambda_{34}}{(1 + a_1^2)} \Phi_3 = 0 \\ \ddot{\Theta}_3 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_3 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{a_1^2} (\lambda_{33} \sin^2 \theta - (a_1^2 + \lambda_{35}) \sin \theta - \lambda_{34}) \Theta_3 = 0 \end{array} \right. , \quad (3.80)$$

avec

$$\left[ \begin{array}{l} 2 \left( \frac{1}{\sin \theta} + a_1^2 \right) \frac{R_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \sin \theta + r \frac{\dot{R}_1 \Theta_1 \dot{\Phi}_1 T_1}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} + \\ + \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{R_2 \Theta_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} \cos \theta + \frac{R_2 \dot{\Theta}_2 \dot{\Phi}_2 T_2}{R_3 \Theta_3 \Phi_3 T_3} + \lambda_{35} = 0 \end{array} \right]. \quad (3.81)$$

Les systèmes (3.76), (3.78) et (3.80) peuvent se mettre sous la forme générique

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{T} + a^{-2} E_0^2 T = 0 \quad (a) \\ r^2 \ddot{R} + 2r \dot{R} + (r^2 E_1^2 - E_2) R = 0 \quad (b) \\ \ddot{\Phi} + E_3 \Phi = 0 \quad (c) \\ \ddot{\Theta} \sin^2 \theta + \dot{\Theta} \frac{1}{2} \sin 2\theta + (E_4 \sin^2 \theta - E_5 \sin \theta - E_6) \Theta = 0 \quad (d) \end{array} \right. , \quad (3.82)$$

où les  $E_k$  sont des constantes dépendantes de la fréquence  $\omega$  de la force vibratoire, comme on le verra par la suite.

Les équations (3.77), (3.79) et (3.81) sont des relations de compatibilité qui vont contribuer à la détermination des constantes.

### 3.5 Matrice de facteur d'intensité de contraintes

Notée  $[K]$ , nous la définissons comme étant la matrice "directionnelle" de facteur d'intensité de contraintes, comportant 9 éléments qui ne sont pas des facteurs d'intensité de contraintes, mais qui dépendent des trois facteurs d'intensité de contraintes. La matrice  $[K]$  peut avoir plusieurs interprétations. Cependant, son introduction repose sur l'idée simple que le déplacement résultant en un point sera une combinaison de déplacements dus à la fois aux combinaisons de modes de fissuration, de branchements ou bifurcations éventuelles en ce point et tout cela dans les trois directions principales liées au repère  $(r, \theta, \varphi)$ . Dans le cas du modèle de Leblond [30],  $[K]$  peut être interprétée comme une matrice diagonale telle que les éléments de la diagonale

$$K_{ii} = \begin{cases} K_i \text{ avant les points de branchements} \\ K_i^* \text{ après les points de branchements} \end{cases}, \quad (3.83)$$

où les  $K_i$  et  $K_i^*$  sont les facteurs d'intensité de contraintes, avec  $(K_i^*) = [H_{ij}](K_j)$ , où

$$[H_{ij}] = \begin{bmatrix} H_{11}(\xi) & H_{12}(\xi) & H_{13}(\xi) \\ H_{21}(\xi) & H_{22}(\xi) & H_{23}(\xi) \\ H_{31}(\xi) & H_{32}(\xi) & H_{33}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

est un opérateur linéaire dépendant uniquement de l'angle de déviation ou d'embranchement  $(\xi)$  de la fissure par rapport à la direction précédente [30].  $(K_i^*)$  et  $(K_i)$  sont respectivement des vecteurs de colonne de composante  $(K_I^*, K_{II}^*, K_{III}^*)$  et  $(K_I, K_{II}, K_{III})$ . La relation (3.84) permet de connaître les facteurs d'intensité de contrainte  $K_j^*$  juste après embranchement en fonction des facteurs d'intensité de contraintes  $K_j$  juste avant les points d'embranchement.

Par contre dans le modèle de Henry [19] , les composantes de  $K_{ij}$  peuvent être ramenées sous la forme  $K_{ij} = \mathcal{F}_i g_j$ , où  $\mathcal{F}_i$  est la composante de  $\mathcal{F}$  dans la direction  $i$  et  $g_j$  une fonction qui dépend à la fois de la géométrie et des caractéristiques physiques du matériau, aussi bien que de la géométrie et de la nature de la fissure ( longueur, épaisseur, mode de fissuration).

La matrice  $[K]$ , tout en autorisant les trois modes de fissuration et les combinaisons de modes, permet aussi d'introduire les directions de propagation. Dans certains cas, on pourrait assimiler les éléments  $K_{ij}$  de la  $i^{eme}$  ligne et  $j^{eme}$  colonne de  $[K]$  à des facteurs d'intensité de contrainte selon la direction  $j$ . Ainsi, on pourrait aussi interpréter ces facteurs d'intensité de contrainte comme suit :

$$K_I \begin{cases} K_{1,I} = K_I \text{ dans la direction } 1 = r \\ K_{2,I} = K_I \text{ dans la direction } 2 = \varphi \\ K_{3,I} = K_I \text{ dans la direction } 3 = \theta \end{cases} , \quad (3.85)$$

$$K_{II} \begin{cases} K_{1,II} = K_{II} \text{ dans la direction } 1 = r \\ K_{2,II} = K_{II} \text{ dans la direction } 2 = \varphi \\ K_{3,II} = K_{II} \text{ dans la direction } 3 = \theta \end{cases} , \quad (3.86)$$

$$K_{III} \begin{cases} K_{1,III} = K_{III} \text{ dans la direction } 1 = r \\ K_{2,III} = K_{III} \text{ dans la direction } 2 = \varphi \\ K_{3,III} = K_{III} \text{ dans la direction } 3 = \theta \end{cases} . \quad (3.87)$$

### 3.6 Structure de la solution

Compte tenu de la spécificité du problème lié aux vibrations, la solution en fond de fissure dans le domaine  $\Omega^\varepsilon$  ou zone de singularité sera notée

$U^\varepsilon(r, \theta, \varphi)$ . Dans les cas classiques où il n'y a pas de vibrations, comme dans les travaux de Leguillon et E.Sanchez-Palencia [33] & [34], les déplacements sont singuliers en  $r$  exposant  $\lambda > \frac{-1}{2}$  en  $3D$  et  $\lambda > 0$  en  $2D$ . Dans ce cas, la fonction  $R(r) = r^\lambda$ . En ce qui concerne notre étude, le niveau de singularité ne sera connu qu'après la détermination des fonctions  $R(r)$ ,  $\Theta(\theta)$  et  $\Phi(\varphi)$ .

Sans restreindre la généralité, nous adoptons un modèle simple pour la matrice de facteurs d'intensité de contrainte  $(K_{ij})$  où le premier indice correspond à la direction d'évolution de la fissure et le deuxième au mode de fissuration.  $\underline{U}$  est le vecteur déplacement effectif en fond de fissure à l'ordre  $\Psi_\alpha(\varepsilon)$  pour une perturbation associée aux variations du domaine dues à la fissure [34], de sorte que

$$U^\varepsilon = \Psi_\alpha(\varepsilon) \underline{U}. \quad (3.88)$$

Ainsi, le terme d'ordre  $\Psi_\alpha(\varepsilon)$  de (3.21), en ignorant momentanément la fonction de temps  $T_\alpha$ , peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} U_1^\varepsilon(r, \theta, \varphi) \\ U_2^\varepsilon(r, \theta, \varphi) \\ U_3^\varepsilon(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = \Psi_\alpha(\varepsilon) \begin{pmatrix} K_{11}\Theta_1\Phi_1 + K_{12}\Theta_2\Phi_2 + K_{13}\Theta_3\Phi_3 \\ K_{21}\Theta_1\Phi_1 + K_{22}\Theta_2\Phi_2 + K_{23}\Theta_3\Phi_3 \\ K_{31}\Theta_1\Phi_1 + K_{32}\Theta_2\Phi_2 + K_{33}\Theta_3\Phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

Connaissant la forme générale de la solution (3.89), considérons à présent le cas de sollicitations simples.

### 3.7 Applications

On se place dans le cas d'un matériau plan, soit en  $2D$ .

### 3.7.1 Déformation plane

A partir de (3.89) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^\varepsilon(r, \theta) \\ U_2^\varepsilon(r, \theta) \end{array} \right\} = \Psi_\alpha(\varepsilon) \begin{pmatrix} K_{11}\Theta_1^1 + K_{12}\Theta_2^1 \\ K_{21}\Theta_1^2 + K_{22}\Theta_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}. \quad (3.90)$$

En considérant que la fissure est droite, en mode *I* et *II*, à l'ordre  $\alpha = 0$ ,  $\Psi(\varepsilon) = 1$ . On retrouve par identification le cas de singularité en mode *I* et *II* avec  $R_i(r) = \frac{1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$  [30], où  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_1^1 = (5 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \quad \text{et} \quad \Theta_2^1 = (-5 + 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \\ \Theta_1^2 = (-7 + 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \quad \text{et} \quad \Theta_2^2 = (-7 + 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}. \end{array} \right. \quad (3.91)$$

### 3.7.2 Déformation antiplane

En considérant uniquement le mode anti plan ou mode *III* en  $2D$ , (3.89) devient

$$\begin{pmatrix} U_1^\varepsilon(r, \theta) \\ U_2^\varepsilon(r, \theta) \\ U_3^\varepsilon(r, \theta) \end{pmatrix} = \Psi_\alpha(\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{31}\Theta_1^3 + K_{32}\Theta_2^3 + K_{33}\Theta_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_3 \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

La fissure peut évoluer mathématiquement en mode *III*, *II* et *I* dans la troisième direction, traduisant l'incompatibilité de la force appliquée et la fissure. Dans ce cas, l'évolution de la fissure est plus liée à un défaut de structure lors de sa conception ou de sa mise en forme. En considérant que l'hypothèse de compatibilité est satisfaite, on a  $K_{31} = K_I = 0$  et  $K_{32} =$



$K_{II} = 0$ , et on retrouve le cas classique tel que

$$\begin{pmatrix} U_1^\varepsilon(r, \theta) \\ U_2^\varepsilon(r, \theta) \\ U_3^\varepsilon(r, \theta) \end{pmatrix} = \Psi_\alpha(\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{33} \Theta_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad (3.93)$$

avec  $R_3(r) = \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$  et  $\Theta_3^3 = \sin \frac{\theta}{2}$ .

### 3.7.3 Flexion

En considérant le chargement excentré ou extérieur à la fissure avec bifurcation, on a  $F_i = (0, F_2, 0)$  et  $U^\varepsilon = (u, v, w)$ , d'où

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

Sans bifurcation, on a  $U^\varepsilon = (0, v, 0)$  soit

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & K_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

### 3.7.4 Compression

Dans ce cas, la sollicitation est de la forme  $F_i = (\pm F_1, 0, 0)$  avec  $U^\varepsilon = (u^i, v^i, w^i)$ . La matrice  $[K]$  est de la forme

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

Dans ce cas de sollicitation, la fissure peut évoluer dans les différents modes avec bifurcation. Dans l'hypothèse de propagation d'une fissure en compression, même sans être compatible avec la fissure initiale, la matrice  $[K]$  permet d'envisager et de prévoir, selon la sollicitation, les différents cas de fissuration possibles y compris les embranchements. Ceci montre l'importance et la généralisation du facteur d'intensité de contrainte sous forme matricielle.

### 3.8 Résolution de (3.82-a)

Il existe des constantes  $B_0$  et  $\beta_0$  dépendant de  $E_0(\omega)$  telles que

$$T(t) = B_0(\omega) \cos \left[ \left( \frac{E_0(\omega)}{a} \right) t + \beta_0 \right]. \quad (3.97)$$

Pour  $\omega \neq 0$ , on a  $\vec{F}(t_k, \omega) = \vec{0}$  et  $\vec{U}^\varepsilon(t_k, \omega) = \vec{0}$  pour tout

$$t_k(\omega) = \frac{\pi}{2\omega} (2k + 1),$$

où  $k$  est un entier naturel ( $k \in \mathbb{N}$ ). Il s'en suit que

$T(t_{k(\omega)}) = 0$ , et cela entraîne que

$$B_0(\omega) \cos \left( \frac{E_0(\omega)}{a} \frac{\pi}{2\omega} (2k + 1) + \beta_0 \right) = 0, \quad (3.98)$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, il existe un entier naturel  $n$  dépendant de  $k$  et noté  $n_k$  ( $n_k \in \mathbb{N}$ ) tel que

$$\pi \frac{E_0(\omega)}{a} (2k + 1) = \omega \pi (1 + 2n_k) - 2\omega \beta_0. \quad (3.99)$$

Comme  $E_0(\omega)$  est indépendant de  $k$ , il existe nécessairement des nombres entiers  $n$  et  $\xi$  ne dépendant pas de  $k$  tel que

$$2n_k + 1 = (2n + 1)(2k + 1) \text{ et } \beta_0 = \xi \pi (2k + 1). \quad (3.100)$$

Comme  $\beta_0$  est aussi indépendant de  $k$ , nécessairement  $\xi$  est nul et il en est ainsi de  $\beta_0$ .

Finalement on obtient  $E_0(\omega)$  comme étant une fonction dépendant de  $n \in \mathbb{N}$ , telle que

$$E_0(\omega) = \frac{E_0(n, \omega)}{a} = (2n + 1)\omega. \quad (3.101)$$

En remplaçant  $B_0$  par  $B_{0n}$ , la solution de (3.97) devient :

$$T_n(t) = B_{0n}(\omega) \cos[(2n + 1)\omega t]. \quad (3.102)$$

Les constantes  $B_{0n(\omega)}$  dépendent bien sûr de l'amplitude de la force de vibration  $\vec{F}$ , de la pulsation  $\omega$ , et des caractéristiques physiques du matériau. Il apparaît dès lors que  $U_i^\varepsilon$  est une superposition de solutions modales telles que

$$U_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^3 [K_{ij}] \sum_{\alpha} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} B_{j0n(\omega)} \Psi_{\alpha n}(\varepsilon) R_{jn}(r) \Phi_{jn}(\varphi) \Theta_{jn}(\theta) \cos[(2n + 1)\omega t] \right). \quad (3.103)$$

### 3.9 Résolution de (3.82-b) et mise en évidence de l'existence de nouvelles solutions modales singulières

En fond de fissure, pour les cas classiques ([31], [33] et [34]) les solutions sont singulières en  $r$  à la puissance  $-\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{2}$  (déplacement ou contrainte). Nous pouvons donc légitimement penser à priori par anticipation, que dans

notre cas, les solutions seront aussi singulières en  $r$  à une certaine puissance  $P_n$ . Cette idée n'est cependant pas fortuite. Elle découle de la nature de l'équation (3.82) qui se prête à une résolution par la méthode de séries entières.

En effet  $R_n(r)$  peut être recherchée sous la forme

$$R_n(r) = r^{P_n} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_n)} r^m, \quad (3.104)$$

où les  $A_{mn}^{(P_n)}$  sont déterminés par la relation de récurrence

$$A_{mn}^{(P_n)} = \frac{-E_1(n, \omega) A_{(m-2)n}^{(P_n)}}{(m + P_n)^2 + (m + P_n) - E_2(n, \omega)}, \quad (3.105)$$

pour tout  $m \geq 2$  avec  $E_1(n, \omega)$  qui est une constante dépendante du matériau. Cette relation de récurrence a pour équation déterminante associée

$$P_n^2 + P_n - E_2(n, \omega) = 0, \quad (3.106)$$

avec

$$(m + P_n)^2 + (m + P_n) - E_2(n, \omega) \neq 0. \quad (3.107)$$

Comme (3.106) est vérifiée, alors (3.107) revient à

$$m^2 + m(2P_n + 1) \neq 0, \quad (3.108)$$

soit

$$m \neq -2P_n - 1. \quad (3.109)$$

On trouve alors

$$P_{1n} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4E_2(n, \omega)}}{2} \quad \text{et} \quad P_{2n} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4E_2(n, \omega)}}{2} \quad (3.110)$$

comme étant les solutions de (3.106).

### 3.9.1 Etude de $P_{1n}$ , $P_{2n}$ et mise en évidence de nouvelles singularités

Posons

$$|P_{1n} - P_{2n}| = \delta_n. \quad (3.111)$$

On a alors

$$\delta_n = \sqrt{1 + 4E_2(n, \omega)}. \quad (3.112)$$

Ecrivons  $\delta_n$  sous la forme polaire

$$\delta_n = \Gamma_n e^{iJ_n}, \quad (3.113)$$

avec  $i^2 = -1$ ,  $\Gamma_n$  et  $J_n$  étant respectivement le module et l'argument de  $\delta_n$ .

Intéressons nous à présent à la nature de  $\sqrt{\delta_n}$ .

### 3.9.2 Pour les valeurs de $n$ telles que $\sqrt{\delta_n} \notin \mathbb{N}^*$ ( $\mathbb{N}^*$ étant l'ensemble des entiers naturels non nuls)

Soit  $k'_n = \sqrt{\delta_n}$ , avec  $k'_n \notin \mathbb{N}^*$ . On a alors

$$k'_n = \sqrt{1 + 4E_2(n, \omega)}, \quad (3.114)$$

de sorte que

$$E_2(n, \omega) = \frac{(k'_n)^2 - 1}{4}. \quad (3.115)$$

Ainsi, d'après la théorie des équations différentielles ordinaires, la solution (3.104) de (3.82-b) est donnée par la relation

$$R_a(r, P_{1n}, P_{2n}) = \begin{cases} \text{real} \{B_{1n} R_{1n}(r) + B_{2n} R_{2n}(r)\} \\ + \text{Im} \{B_{1n} R_{1n}(r) + B_{2n} R_{2n}(r)\}, \end{cases} \quad (3.116)$$

où  $B_{1n}$  et  $B_{2n}$  sont des constantes, avec

$$R_{1n}(r) = \begin{cases} \left[ r^{\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2}} \right] \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} r^m \right] \times \\ \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln r \right) + i \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln r \right) \right], \end{cases} \quad (3.117)$$

et

$$R_{2n}(r) = \begin{cases} \left[ r^{\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2}} \right] \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} r^m \right] \times \\ \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln r \right) - i \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln r \right) \right]. \end{cases} \quad (3.118)$$

$\text{Real}(X)$  et  $\text{Im}(X)$  représentant respectivement les parties réelle et imaginaire de  $X$ .

### 3.9.3 Pour les valeurs de $n$ telles que $\sqrt{\delta_n} \in \mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels)

Soit  $k'_n = \sqrt{\delta_n}$  avec  $k'_n \in \mathbb{N}$ . On a encore

$$k'_n = \sqrt{1 + 4E_2(n, \omega)}, \quad (3.119)$$

et par conséquent

$$E_2(n, \omega) = \frac{(k'_n)^2 - 1}{4}, \quad (3.120)$$

avec la solution de (3.82-b) qui est de la forme

$$R_b(r, P_{1n}, P_{2n}) = B_{3n}R_{3n}(r) + B_{4n}R_{4n}(r), \quad (3.121)$$

où

$$R_{3n}(r) = \mu_n r^{\frac{-1+k_n}{2}} \ln r \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} r^m + r^{\frac{-1-k_n}{2}} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} r^m, \quad (3.122)$$

et

$$R_{4n}(r) = r^{\frac{-1+k_n}{2}} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} r^m, \quad (3.123)$$

$B_{3n}$ ,  $B_{4n}$  et  $\mu_n$  étant des constantes.

Finalement, la solution (3.103) s'écrit

$$U_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^3 [K_{ij}] \sum_{\alpha} \left( \sum_{n \notin I} B_{0jna} \Psi_{\alpha na}(\varepsilon) R_{aj}(r, P_{1n}, P_{2n}) \Phi_{naj}(\varphi) \Theta_{naj}(\theta) \cos(2n+1)\omega t \right. \\ \left. + \sum_{n \in I} B_{0jnb} \Psi_{\alpha nb}(\varepsilon) R_{bj}(r, P_{1n}, P_{2n}) \Phi_{nbj}(\varphi) \Theta_{nbj}(\theta) \cos(2n+1)\omega t \right), \quad (3.124)$$

où  $I = \left\{ n \in \mathbb{N} / \sqrt{1 + 4E_2(n, \omega)} \text{ entier naturel} \right\}$ ,  $B_{0na}$ ,  $B_{0nb}$  représentant les constantes  $B_{0n}$ , les indices  $a$  ou  $b$  spécifiant dans quel ensemble, respectivement  $n \notin I$  ou  $n \in I$  est faite la sommation.

### 3.10 Solution de(3.82-c)

On obtient mathématiquement deux cas de solutions possibles non triviales :

Soit  $E_3(n, \omega) < 0$  et

$$\Phi_{1n} = B_{5n} \exp\left(\sqrt{-E_3(n, \omega)}\varphi\right) + D_{1n} \exp\left(-\sqrt{-E_3(n, \omega)}\varphi\right), \quad (3.125)$$

et dans ce cas, ne considérant que les  $\varphi \geq 0$ , (3.125) converge si et seulement si  $B_{5n} = 0$ , d'où

$$\Phi_{1n} = D_{1n} \exp\left(-\sqrt{-E_3(n, \omega)}\varphi\right). \quad (3.126)$$

Soit  $E_3(n, \omega) > 0$  et

$$\Phi_{2n} = B_{6n} \cos\left(\left(\sqrt{E_3(n, \omega)}\right)\varphi\right) + D_{2n} \sin\left(\left(\sqrt{E_3(n, \omega)}\right)\varphi\right). \quad (3.127)$$

Lorsque  $E_3(n, \omega) = 0$ , on trouve la solution triviale  $\Phi_n = 0$ .



### 3.11 Solution de (3.82-d)

En utilisant le programme maple 9.5, la résolution de (3.82-d) donne :

$$\Theta_n(\theta) = DESol \left( \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} (E_{4n} \tan \theta \sin^2 \theta - E_{5n} \tan \theta \sin \theta - E_{6n} \tan \theta) Y(\theta) \\ + \dot{Y}(\theta) \sin^2 \theta + \ddot{Y}(\theta) \tan \theta \sin^2 \theta \end{array} \right\} \\ \{Y(\theta)\} \end{array} \right), \quad (3.128)$$

où  $DESol$  est un opérateur qui permet de donner la structure des solutions d'équation différentielle.

Si  $E_{5n} = 0$ , on trouve

$$\Theta_n(\theta) = \frac{C_{1n} \sqrt{\sin(\theta)} Leg Q \left( \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4E_{4n}} - \frac{1}{2}, \sqrt{E_{6n}}, \sqrt{\cos^2(\theta)} \right)}{(\cos(\theta) - 1)^{\frac{1}{4}} (1 + \cos(\theta))^{\frac{1}{4}}} + \frac{C_{2n} \sqrt{\sin(\theta)} Leg P \left( \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4E_{4n}} - \frac{1}{2}, \sqrt{E_{6n}}, \sqrt{\cos^2(\theta)} \right)}{(\cos(\theta) - 1)^{\frac{1}{4}} (1 + \cos(\theta))^{\frac{1}{4}}}, \quad (3.129)$$

où  $Q$  et  $P$  sont des fonctions de Legendre.

Pour des variations très faibles de  $\theta$ , on a

$$\Theta_n(\theta) \simeq -\theta^{-\frac{1}{2}} \left( \begin{array}{c} C_{1n} WhittakerM \left( \frac{\frac{1}{2} I E_{5n}}{E_{4n}}, \sqrt{E_{6n}}, 2I \sqrt{E_{4n}} \theta \right) \\ - \\ C_{2n} WhittakerW \left( \frac{\frac{1}{2} I E_{5n}}{E_{4n}}, \sqrt{E_{6n}}, 2I \sqrt{E_{4n}} \theta \right) \end{array} \right), \quad (3.130)$$

où  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{W}$  sont des fonctions de Whittaker [25] et  $C_{in}$  des constantes.

### 3.12 Estimation des fonctions $\Psi_\alpha(\varepsilon)$

Les fonctions  $\Psi_\alpha(\varepsilon)$  forment une suite de fonctions de Jauge, traduisant l'état de la singularité du domaine, qui varient selon les différents modes de vibrations  $n$ . Pour des valeurs de  $n$  tel que  $n \in I$ , elles sont représentées par des fonctions notées  $f_{\alpha n}(\varepsilon)$ , et pour des valeurs de  $n$  tel que,  $n \notin I$ , elles sont représentées par des fonctions notées  $F_{\alpha n}(\varepsilon)$ .

On rappelle que  $I = \left\{ n \in \mathbb{N} / \sqrt{1 + 4E_2(n, \omega)} \text{ entier naturel} \right\}$ .

Compte tenu du fait que nous avons axé notre étude en fond de fissure, les fonctions  $\Psi_\alpha(\varepsilon)$  s'obtiennent à partir d'un développement intérieur en faisant un changement de variable où  $r = \varepsilon Y$  (voir figure. 3.2 page 69). Afin de tenir compte de la solution extérieure, on pose  $r = \varepsilon^x Y$ .

Une fois le changement de variable fait, nous effectuons un développement des fonctions de singularités  $R_a(r, P_{1n}, P_{2n})$  et  $R_b(r, P_{1n}, P_{2n})$ .

On rappelle que  $R_a(r, P_{1n}, P_{2n})$  est donnée par la relation(3.116), tel que

$$R_a((\varepsilon^x Y), P_{1n}, P_{2n}) = \begin{cases} \text{real} \{ B_{1n} R_{1n}(\varepsilon^x Y) + B_{2n} R_{2n}(\varepsilon^x Y) \} \\ + \text{Im} \{ B_{1n} R_{1n}(\varepsilon^x Y) + B_{2n} R_{2n}(\varepsilon^x Y) \} \end{cases} \quad (3.131)$$

et  $R_b(r, P_{1n}, P_{2n})$  par la relation (3.121), telle que

$$R_b((\varepsilon^x Y), P_{1n}, P_{2n}) = B_{3n} R_{3n}(\varepsilon^x Y) + B_{4n} R_{4n}(\varepsilon^x Y). \quad (3.132)$$

Passons à présent aux différents calculs intermédiaires. Il s'agit du calcul de  $R_{1n}(\varepsilon^x Y)$ ,  $R_{2n}(\varepsilon^x Y)$ ,  $R_{3n}(\varepsilon^x Y)$  et  $R_{4n}(\varepsilon^x Y)$ .

Calcul de  $R_{1n}(\varepsilon^\varkappa Y) = R_{1n}$

On a, à partir de (3.117),

$$R_{1n} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ (\varepsilon^\varkappa Y)^{\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2}\right)} \right] \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m \right] \\ \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln (\varepsilon^\varkappa Y) \right) \right. \\ \left. + i \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln (\varepsilon^\varkappa Y) \right) \right], \end{array} \right. \quad (3.133)$$

ou encore

$$R_{1n} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^\varkappa \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2}\right) Y^{\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2}\right)} \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m \right] \\ \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^\varkappa + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \\ \left. + i \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^\varkappa + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right]. \end{array} \right. \quad (3.134)$$

En introduisant la formule  $\left( \begin{array}{l} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{array} \right)$  dans (3.134),

on trouve

$$R_{1n} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\kappa} \left( \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) Y^{\left( \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^{\kappa m} Y^m \right] \\ \times \left[ \left( \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\kappa} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \right. \\ - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\kappa} \right) \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \\ \left. \left. + i \left( \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\kappa} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\kappa} \right) \right] \right]. \end{array} \right. \quad (3.135)$$

Calcul de  $R_{2n}(\varepsilon^{\kappa} Y) = R_{2n}$

On a

$$R_{2n} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\kappa} \left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) Y^{\left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^{\kappa m} Y^m \right] \\ \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) (\ln \varepsilon^{\kappa} + \ln Y) \right. \\ \left. - i \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) (\ln \varepsilon^{\kappa} + \ln Y) \right], \end{array} \right. \quad (3.136)$$

ou encore

$$R_{2n} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\varkappa} \left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) Y^{\left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m \right] \\ \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right] \\ -i \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right], \end{array} \right. \quad (3.137)$$

soit finalement

$$R_{2n} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\varkappa} \left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) Y^{\left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m \right] \\ \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} \right] \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln Y \\ - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln Y \\ -i \left[ \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} \right] \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln Y \\ + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln Y \right] \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} \right]. \end{array} \right. \quad (3.138)$$

Le calcul de  $R_{3n}(\varepsilon^\varkappa Y) = R_{3n}$

nous donne

$$R_{3n} = \begin{cases} \mu_n \varepsilon^\varkappa \left(\frac{-1+k_n}{2}\right) Y^{\left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} \ln(\varepsilon^\varkappa Y) \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^\varkappa Y^m \\ + \varepsilon^\varkappa \left(\frac{-1-k_n}{2}\right) Y^{\left(\frac{-1-k_n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^\varkappa Y^m, \end{cases} \quad (3.139)$$

ou encore

$$R_{3n} = \begin{cases} \mu_n \varepsilon^\varkappa \left(\frac{-1+k_n}{2}\right) Y^{\left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} (\ln \varepsilon^\varkappa + \ln Y) \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^\varkappa Y^m \\ + \varepsilon^\varkappa \left(\frac{-1-k_n}{2}\right) Y^{\left(\frac{-1-k_n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^\varkappa Y^m. \end{cases} \quad (3.140)$$

Enfin, on obtient pour  $R_{4n}(\varepsilon^\alpha Y) = R_{4n}$ ,

$$R_{4n} = \varepsilon^\varkappa \left(\frac{-1+k_n}{2}\right) Y^{\left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^\varkappa Y^m. \quad (3.141)$$

Le calcul des fonctions  $R_{1n}(\varepsilon^\varkappa Y)$ ,  $R_{2n}(\varepsilon^\varkappa Y)$ ,  $R_{3n}(\varepsilon^\varkappa Y)$  et  $R_{4n}(\varepsilon^\varkappa Y)$  achevé, les fonctions  $\Psi_\alpha(\varepsilon)$  sont les coefficients des fonctions  $R_a(\varepsilon^\varkappa Y)$  et  $R_b(\varepsilon^\varkappa Y)$  qui sont fonctions de  $\varepsilon$  et qui deviennent évanescences avec  $\varepsilon$  au voisinage du point singulier.

On rappelle que

$$\left\{ \begin{array}{l} U_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^3 [K_{ij}] \times \sum_\alpha \\ \left( \sum_{n \notin I} B_{0naj} \Psi_{\alpha na}(\varepsilon) R_{aj}(r, P_{1n}, P_{2n}) \Phi_{naj}(\varphi) \Theta_{naj}(\theta) \cos(2n+1)\omega t \right. \\ \left. + \sum_{n \in I} B_{0nbj} \Psi_{\alpha nb}(\varepsilon) R_{bj}(r, P_{1n}, P_{2n}) \Phi_{nbj}(\varphi) \Theta_{nbj}(\theta) \cos(2n+1)\omega t \right), \end{array} \right. \quad (3.142)$$

peut encore s'écrire sous la forme

$$U_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^3 [K_{ij}] \sum_{\alpha} \left( \sum_{n \notin I} B_{0naj} \Psi_{\alpha na}(\varepsilon) U_{aj}^\alpha + \sum_{n \in I} B_{0nbj} \Psi_{\alpha nb}(\varepsilon) U_{bj}^\alpha \right), \quad (3.143)$$

ou encore

$$U_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^3 [K_{ij}] \sum_{\alpha} (F_{\alpha n}(\varepsilon) U_j^\alpha + f_{\alpha n}(\varepsilon) U_i^\alpha), \quad (3.144)$$

avec la condition asymptotique à savoir,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Psi_{\alpha na}(\varepsilon)}{\Psi_{(\alpha-1)na}(\varepsilon)} = 0.$$

Ces précisions étant faites, revenons aux calculs de  $R_a(\varepsilon^* Y)$  et  $R_b(\varepsilon^* Y)$  afin de déterminer les fonctions  $F_{\alpha n}(\varepsilon)$  et  $f_{\alpha n}(\varepsilon)$ .

Calcul de  $R_a((\varepsilon^x Y), P_{1n}, P_{2n}) = R_a$

On a d'après la relation (3.116)

$$R_a = \left\{ \begin{array}{l} B_{1n} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^x \left( \frac{-1 + \sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) Y \left( \frac{-1 + \sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^{xm} Y^m \right] \\ \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^x \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \\ - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^x \right) \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \\ \left. + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^x \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \\ \left. + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^x \right) \right] \\ + \\ B_{2n} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^x \left( \frac{-1 - \sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) Y \left( \frac{-1 - \sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^{xm} Y^m \right] \\ \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^x \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \\ - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^x \right) \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \\ - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^x \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \\ \left. + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^x \right) \right] \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right\}, \tag{3.145}$$



ou encore

$$R_a = \left\{ \begin{array}{l}
 B_{1_n} \left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon^{\varkappa} \left( \frac{-1 + \sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) Y^{\left( \frac{-1 + \sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m \right] \\
 \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} \right) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right] + \right. \\
 \left. \left. \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} \right) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right] \right] \right] \\
 + \\
 B_{2_n} \left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon^{\varkappa} \left( \frac{-1 - \sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right) Y^{\left( \frac{-1 - \sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m \right] \\
 \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} \right) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right] \right. \\
 \left. \left. - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\varkappa} \right) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right] \right] \right] , \\
 ,
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

d'où

$$R_a = \left\{ \begin{array}{l} B_{1_n} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\kappa \left( \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} Y^{\left( \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^{\kappa m} Y^m \right] \\ \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\kappa} \right) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right] + \right. \\ \left. \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\kappa} \right) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right] \right] \right. \\ \\ B_{2_n} \left\{ \begin{array}{l} + \\ \varepsilon^{\kappa \left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} Y^{\left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \left[ \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^{\kappa m} Y^m \right] \\ \times \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\kappa} \right) - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon^{\kappa} \right) \right] \\ \\ \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln Y \right) \right]. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ainsi, pour  $n \notin I$ , la fonction  $\Psi_{\alpha n}$  est représentée par  $F_{n\alpha}(\varepsilon)$ .

Pour les deux premiers termes  $F_{0n}(\varepsilon)$  et  $F_{1n}(\varepsilon)$ , on a

$$F_{0n}(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} B_{1n} \left[ \varepsilon^{\left( \frac{2m-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} + \varepsilon^{\left( \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \times \right. \\ \\ \left. \left( \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon \right) + \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon \right) \right] + \right. \\ \\ B_{2n} \left[ \varepsilon^{\left( \frac{2m-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} + \varepsilon^{\left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \times \right. \\ \\ \left. \left. + \left( \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon \right) - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon \right) \right) \right] \right\} \quad (3.146)$$

et

$$F_{1n}(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} B_{1n} \varepsilon^{\left( \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^m \times \\ \\ \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon \right) + \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon \right) \right] \\ \\ + B_{2n} \varepsilon^{\left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \cos \frac{J_n}{2} \right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^m \times \\ \\ \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon \right) - \sin \left( \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_n}{2} \right) \right) \ln \varepsilon \right) \right] \end{array} \right\} \quad (3.147)$$

Calcul de  $R_b((\varepsilon^\varkappa Y), P_{1n}, P_{2n}) = R_b$

De même, on a  $R_b = B_{3n}R_{3n} + B_{4n}R_{4n}$ , d'où

$$R_b = \begin{cases} B_{3n}\mu_n [\varkappa \ln \varepsilon + \ln Y] \varepsilon^{\varkappa \left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} Y^{\left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m \\ + B_{3n} \varepsilon^{\varkappa \left(\frac{-1-k_n}{2}\right)} Y^{\left(\frac{-1-k_n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m \\ + B_{4n} \varepsilon^{\varkappa \left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} Y^{\left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m, \end{cases} \quad (3.148)$$

soit

$$R_b = \begin{cases} \left( \varepsilon^{\varkappa \left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} Y^{\left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m \right) \times \\ (B_{3n}\mu_n \ln \varepsilon^\varkappa + B_{3n}\mu_n \ln Y + B_{4n}) \\ + B_{3n} \varepsilon^{\varkappa \left(\frac{-1-k_n}{2}\right)} Y^{\left(\frac{-1-k_n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^{\varkappa m} Y^m. \end{cases} \quad (3.149)$$

Pour  $n \in I$ , la fonction  $\Psi_{\alpha n}(\varepsilon)$  est représentée par  $f_{\alpha n}(\varepsilon)$ , telle que pour les deux premiers termes  $f_{0n}(\varepsilon)$  et  $f_{1n}(\varepsilon)$ , on a

$$f_{0n}(\varepsilon) = B_{3n}\mu_n (\ln \varepsilon + 1) (\varepsilon)^{\frac{k_n}{2}}, \quad (3.150)$$

et

$$f_{1n}(\varepsilon) = B_{3n} \varepsilon^{\left(\frac{-1+k_n}{2}\right)} \left[ \mu_n \ln \varepsilon \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{1n})} \varepsilon^m + \sum_{m=0}^{+\infty} A_{mn}^{(P_{2n})} \varepsilon^m \right]. \quad (3.151)$$

On trouve des fonctions  $\Psi_\alpha(\varepsilon)$  qui varient avec les modes de vibration et la fonction de récurrence  $A_{mn}^{(P_{in})}$ . Ainsi  $\Psi_\alpha(\varepsilon)$  devient  $\Psi_{\alpha nm}(\varepsilon)$  qui est différente des formes classiques où  $\Psi_\alpha(\varepsilon)$  n'a qu'un seul indice de sommation.

Pour ce qui est du développement extérieur, en  $2D$ , on a  $\varkappa = 2$  et en  $3D$ , on a encore  $\varkappa = 2$  avec des termes exposant  $2P_{in} + 1$  à la place de  $2P_{in}$ .

### 3.13 Conclusion

Cette analyse montre qu'un chargement vibratoire à la surface libre d'un matériau possédant une fissure initiale, telle que  $\dot{\ell} \neq 0$  engendre une solution en déplacement. Cette solution est une superposition de modes non classiques constitués de nouveaux types de singularité apparaissant par le facteur

$$r^{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Gamma_{n\alpha}}}{2}} \cos \frac{J_{n\alpha}}{2} \cos \left[ \frac{\sqrt{\Gamma_{n\alpha}}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_{n\alpha}}{2} \right) \right) \ln r + \frac{\pi}{2} \chi_n \right], \quad (3.152)$$

en fond de fissure. Selon l'amplitude de la fréquence de la force vibratoire, on obtient soit de faibles singularités, soit de fortes singularités.

Ces modes ne sont pas rencontrés quand les forces du chargement ne sont pas vibratoires. De plus, comme la matière vibre, et la fissure initiale est de mode quelconque, la condition de compatibilité chargement - mode initial de fissure n'est plus ni respectée, ni nécessaire. Alors, la force vibratoire produira des microfissures qui se brancheront à la fissure initiale ou principale, quand l'intensité de la force et la fréquence auront atteint le seuil critique. On peut alors assister à une rupture rapide du matériau par rapport au cas classique, dans lequel le modèle ne prend pas en compte les vibrations qui entraînent des microfissures.

La méthode de séparation de variables montre qu'en fond de fissure, la singularité dépend aussi en coordonnées polaires ou sphériques de la variable angulaire  $\theta$ . Les déplacements sont aussi singuliers en  $\theta \frac{-1}{2}$  pour les très faibles valeurs de  $\theta$  contrairement au cas classique où on n'observe pas de singularité en  $\theta$ .

La matrice du facteur d'intensité de contrainte  $[K]$  permet de prévoir, compte tenu des sollicitations extérieures, les embranchements et les combinaisons de modes de fissuration éventuels.

En outre, on constate une stabilité de la fissure aux instants  $t_k = \frac{\pi}{2\omega} (2k + 1)$  avec  $k \in \mathbf{N}$ , et l'existence des fonctions  $\Psi_{na,b}(\varepsilon)$  qui sont fortement singulières, et qui varient avec la relation de récurrence  $\sum_{m=0}^{+\infty} A_{\alpha mn}^{(P_{in})}$  qui dépend des vibrations, contrairement au cas classique où il y n'a pas de vibration.

## Chapitre 4

# INFLUENCE DE LA LONGUEUR DE LA FISSURE ET DES FREQUENCES SUR LES DEPLACEMENTS EN FOND DE FISSURE

### Notations

$\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes

$\lambda$  est la constante de Lamé

$\mu$  est le module de cisaillement

$U$  est le vecteur déplacement de composantes  $(U_1, U_2, U_{13})$

$[K]$  est la matrice de facteur d'intensité de contrainte

$\omega$  est la fréquence de la force vibratoire

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons traité des singularités en fond de fissure, sans pour autant insister sur les effets de la longueur de la fissure et de la fréquence de vibration. Il s'agissait là, d'une évolution quasi-statique de la fissure. Dans ce chapitre, il s'agit pour nous, d'étudier l'implication de la longueur de la fissure et de la fréquence de vibration  $\omega$  sur les déplacements. Nous sommes donc dans un cas d'évolution dynamique de la fissure.

### 4.2 Formulation du problème

Nous considérons un matériau homogène et isotrope possédant une fissure initiale de mode quelconque ou arbitraire et soumis à une force extérieure ( $F_i$ ) de composantes ( $F_1, F_2, F_3$ ) appliquée sur la surface  $\partial\Omega^d$  telle que  $\sigma.n = F_i$ .

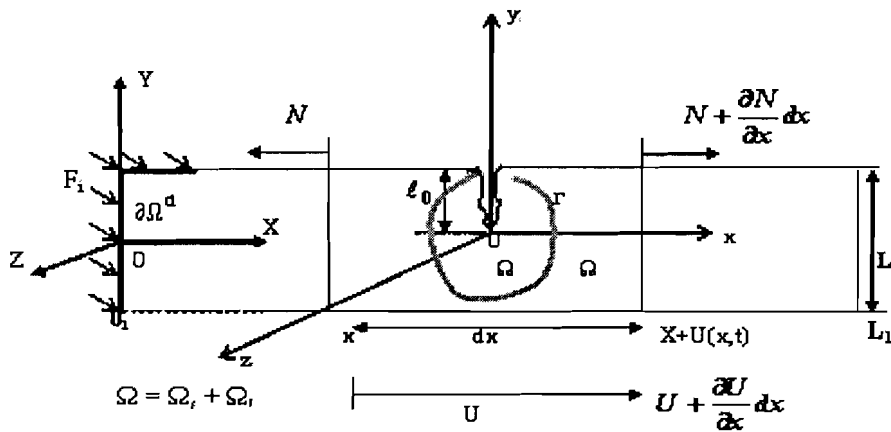


FIG. 4.1 – Exemple de matériau fissuré y compris les repères d'étude

Les solutions appartiennent au domaine  $\Omega_s$  de frontière  $\Gamma$  afin de prendre



en compte les effets de la singularité due à la présence de la fissure. Le vecteur déplacement  $U$  a pour composante  $(U_1, U_2, U_3)$ .

L'équation de la dynamique du milieu est encore régie par la relation

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U + \mu \Delta U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (4.1)$$

### 4.3 Changement de coordonnées

Afin de prendre en compte la longueur curviligne  $\ell$  de la fissure dans son évolution dynamique, nous procédons à un changement judicieux de repère.

#### 4.3.1 Laplacien en coordonnées curvilignes

Pour tenir compte de l'influence du repère mobile lié à la trajectoire évolutive de la fissure, on introduit au voisinage de la pointe, un changement de variables en procédant de la façon suivante :

Dans le repère initial de référence,  $R_0(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  d'origine fixe  $O$ , un point  $M$  du milieu est repéré par ses coordonnées  $(x, y, z)$  de sorte que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ . Si  $\Omega$  est la pointe mobile de la fissure, de coordonnées  $(-x_0, -y_0, -z_0)$  dans le repère initiale  $R_0$ , alors, dans le repère  $R_\Omega = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  translaté de  $R_0$  par le vecteur  $\overrightarrow{O\Omega} = -(x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3)$ , un point  $M$  sera repéré par les coordonnées  $(X, Y, Z)$  de sorte que  $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$ .

Comme  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ , alors le changement de variables judicieux

(quoique trivial) est trouvé :

$$\begin{cases} x = X - x_0 \\ y = Y - y_0 \\ z = Z - z_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

où les coordonnées  $(-x_0, -y_0, -z_0)$  de la pointe  $\Omega$  dans  $R_0$  sont aussi judicieusement choisies pour que la transformation (4.2) soit appropriée.  $(x, y, z)$  sont les coordonnées, dans  $R_0$ , du point situé en fond de fissure ou au voisinage de la pointe de la fissure, de sorte que, dans le repère lié à la pointe, on ait

$$\begin{cases} X = r \cos \varphi \cos \theta \\ Y = r \sin \varphi \cos \theta \\ Z = r \sin \theta \end{cases}, \quad (4.3)$$

où  $r, \varphi, \theta$  sont les coordonnées sphériques habituelles dans le repère  $R_\Omega$ . A partir des transformations (4.2), c'est une trivialité que les opérateurs de dérivation par rapport aux variables initiales  $(x, y, z)$  soient transformés en des opérateurs de dérivation dépendant des nouvelles variables  $(x_0, y_0, z_0, X, Y, Z)$  selon le schéma :

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial z_0}, \quad (4.4)$$

où le signe " $\equiv$ " signifie tout simplement que dans les équations initiales, les dérivations par rapport aux variables  $x, y$  et  $z$  doivent être remplacées par les dérivations des schémas (4.4).

Ainsi, on aura aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x_0} \right) - \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sachant que c'est la variation de la longueur curviligne de la trajectoire  $\ell$  de la fissure qui induit la variation des coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  de la pointe  $\Omega$ , par le biais de la contrainte appliquée  $\sigma^{app}$  en fond de fissure, de ce fait, il apparaît donc que toute variation de quantités physiques ou mathématiques par rapport à  $(x_0, y_0, z_0)$  ne peut se faire que par le biais de  $\sigma^{app}$  et  $\ell$  d'abord, puis par la variation induite de la longueur de la trajectoire de la fissure  $\ell$  par rapport à  $(x_0, y_0, z_0)$ . Ainsi, par le biais de la dérivation composée, on aura

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial \ell}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial \ell} \right) - \frac{\partial \ell}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial \ell}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial \ell} \right). \quad (4.6)$$

Nous convenons de noter  $s_1 = \frac{\partial \ell}{\partial x_0}$ ,  $s_2 = \frac{\partial \ell}{\partial y_0}$  et  $s_3 = \frac{\partial \ell}{\partial z_0}$ .

Les  $s_i$  ( $i = \{1, 2, 3\}$ ) représentent dans le modèle les composantes du vecteur appartenant au sous différentiel  $\partial \ell$  des champs de gradient de  $\ell$  en  $\Omega$  et donnant la direction de propagation de la fissure à partir de  $\Omega (-x_0, -y_0, -z_0)$ . Dans la suite du problème,  $s_i$  sera le gradient directionnel de la propagation de la fissure dans la direction  $i$ .

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\equiv \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial}{\partial X} - s_1 \frac{\partial}{\partial \ell} \right) - s_1 \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{\partial}{\partial X} - s_1 \frac{\partial}{\partial \ell} \right) \\ &\equiv \frac{\partial^2}{\partial X^2} - s_1 \frac{\partial^2}{\partial X \partial \ell} - s_1 \frac{\partial^2}{\partial X \partial \ell} + s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

car les  $s_i$  sont indépendants de  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , et ne dépendent pas explicitement de  $\ell$ . Finalement,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial X^2} - 2s_1 \frac{\partial^2}{\partial X \partial \ell} + s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2}. \quad (4.8)$$

De manière analogue, on obtient  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Or

$$\Delta_{(x,y,z)} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.9)$$

Par conséquent

$$\Delta_{(x,y,z)} \longrightarrow \tilde{\Delta}_{(X,Y,Z,\ell)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - 2s_1 \frac{\partial^2}{\partial X \partial \ell} + s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} \\ + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - 2s_2 \frac{\partial^2}{\partial Y \partial \ell} + s_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} \\ + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - 2s_3 \frac{\partial^2}{\partial Z \partial \ell} + s_3^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Posons

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (4.11)$$

On a

$$\tilde{\Delta}_{(X,Y,Z,\ell)} \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) + s^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} - 2 \left( s_1 \frac{\partial^2}{\partial X \partial \ell} + s_2 \frac{\partial^2}{\partial Y \partial \ell} + s_3 \frac{\partial^2}{\partial Z \partial \ell} \right), \quad (4.12)$$

soit

$$\Delta_{(x,y,z)} \equiv \Delta_{(X,Y,Z)} + s^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} - 2 \left( s_1 \frac{\partial^2}{\partial X \partial \ell} + s_2 \frac{\partial^2}{\partial Y \partial \ell} + s_3 \frac{\partial^2}{\partial Z \partial \ell} \right).$$

En considérant les déplacements élémentaires  $dr$ ,  $r d\theta$ ,  $r \sin \theta d\varphi$ , le laplacien associé à  $\Delta_{(x,y,z)}$  s'écrit en coordonnées curviligne-sphériques ou coordonnées curvilino-sphériques

$$\Delta_{(x,y,z)} \equiv \Delta_{(r,\varphi,\theta)} + s^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} - 2 \left( s_1 \frac{\partial^2}{\partial X \partial \ell} + s_2 \frac{\partial^2}{\partial Y \partial \ell} + s_3 \frac{\partial^2}{\partial Z \partial \ell} \right).$$

Passons au calcul de

$$\left( s_1 \frac{\partial^2}{\partial X \partial \ell} + s_2 \frac{\partial^2}{\partial Y \partial \ell} + s_3 \frac{\partial^2}{\partial Z \partial \ell} \right) \quad (4.13)$$

en fonction de  $(r, \varphi, \theta, \ell)$ .

Sachant que les  $s_i$  ne dépendent pas de  $\ell$ , l'expression (4.13) devient en sortant  $\frac{\partial}{\partial \ell}$  de la parenthèse

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left( s_1 \frac{\partial}{\partial X} + s_2 \frac{\partial}{\partial Y} + s_3 \frac{\partial}{\partial Z} \right). \quad (4.14)$$

Ainsi, les termes à l'intérieur de la parenthèse deviennent :

pour le premier terme  $s_1 \frac{\partial}{\partial X}$ , on a

$$s_1 \frac{\partial}{\partial X} \equiv s_1 \left( \frac{\partial r}{\partial X} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (4.15)$$

pour le deuxième terme  $s_2 \frac{\partial}{\partial Y}$  et le troisième terme  $s_3 \frac{\partial}{\partial Z}$ , on retrouve

$$s_2 \frac{\partial}{\partial Y} \equiv s_2 \left( \frac{\partial r}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (4.16)$$

et

$$s_3 \frac{\partial}{\partial Z} \equiv s_3 \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (4.17)$$

Calculons maintenant les termes

$$\frac{\partial r}{\partial X}, \frac{\partial \theta}{\partial X}, \frac{\partial \varphi}{\partial X}, \frac{\partial r}{\partial Y}, \frac{\partial \theta}{\partial Y}, \frac{\partial \varphi}{\partial Y}, \frac{\partial r}{\partial Z}, \frac{\partial \theta}{\partial Z} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \text{ issus de (4.15), (4.16)}$$

et (4.17).

Comme

$$\begin{cases} dX = \cos \varphi \cos \theta dr - r \sin \varphi \cos \theta d\varphi - r \cos \varphi \sin \theta d\theta \\ dY = \sin \varphi \cos \theta dr + r \cos \varphi \cos \theta d\varphi - r \sin \varphi \sin \theta d\theta \\ dZ = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{cases}, \quad (4.18)$$

réécrivons (4.18) sous forme matricielle. On a :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \\ d\theta \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Pour déterminer  $dr$ ,  $d\varphi$  et  $d\theta$ , on introduit la matrice inverse. Il est en effet évident que la matrice  $3 \times 3$  intervenant dans (4.19) est inversible car étant une matrice de changement de base. On obtient après calcul

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} & -\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} & \frac{1}{\sin \theta} \\ -\frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} & 0 \\ \frac{\sin(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} & -\frac{\cos(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} & \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} dr = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} dX - \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} dY + \frac{1}{\sin \theta} dZ \\ d\varphi = \frac{-\sin \varphi}{r \cos \theta} dX + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} dY \\ d\theta = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} dX - \frac{\cos(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} dY + \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} dZ \end{array} \right. \quad (4.21)$$

On obtient ainsi  $dr$ ,  $d\varphi$  et  $d\theta$  en fonction de  $dX$ ,  $dY$  et  $dZ$ .

Les coefficients de  $dX$ ,  $dY$  et  $dZ$  seront respectivement les valeurs des termes  $\frac{\partial r}{\partial X}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial X}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial X}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial Y}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial Y}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial Y}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial Z}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial Z}$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial Z}$ .

D'où

$$\frac{\partial r}{\partial X} = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{-\sin \varphi}{r \cos \theta}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\sin(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial r}{\partial Y} = -\frac{\cos \varphi}{\cos \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = -\frac{\cos(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta}, \quad (4.23)$$

et

$$\frac{\partial r}{\partial Z} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta}. \quad (4.24)$$

En reportant ces résultats dans (4.15), (4.16) et (4.17), on obtient de nouvelles expressions :

(4.15) devient

$$s_1 \frac{\partial}{\partial X} \equiv s_1 \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (4.25)$$

(4.16) devient

$$s_2 \frac{\partial}{\partial Y} \equiv s_2 \left( -\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (4.26)$$

et enfin (4.16) qui donne

$$s_3 \frac{\partial}{\partial Z} \equiv s_3 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (4.27)$$

Revenons sur l'expression initiale (4.14). On obtient en introduisant (4.25), (4.26) et (4.27),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \ell} \left( s_1 \frac{\partial}{\partial X} + s_2 \frac{\partial}{\partial Y} + s_3 \frac{\partial}{\partial Z} \right) \equiv \\ \frac{\partial}{\partial \ell} \left[ s_1 \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right. \\ \left. + s_2 \left( -\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right. \\ \left. + s_3 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right], \end{array} \right. \quad (4.28)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \ell} \left( s_1 \frac{\partial}{\partial X} + s_2 \frac{\partial}{\partial Y} + s_3 \frac{\partial}{\partial Z} \right) \equiv \\ s_1 \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ + s_2 \left( -\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ + s_3 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \end{array} \right. \quad (4.29)$$



Ceci peut aussi s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \ell} \left( s_1 \frac{\partial}{\partial X} + s_2 \frac{\partial}{\partial Y} + s_3 \frac{\partial}{\partial Z} \right) \equiv \\ s_1 \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial r} + \frac{\sin(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} \right) \\ + s_2 \left( -\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial r} - \frac{\cos(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} \right) \\ + s_3 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial r} + \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \theta} \right), \end{array} \right. \quad (4.30)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( s_1 \frac{\partial^2}{\partial X \partial \ell} + s_2 \frac{\partial^2}{\partial Y \partial \ell} + s_3 \frac{\partial^2}{\partial Z \partial \ell} \right) \equiv \\ \left( s_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} - s_2 \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} + s_3 \frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial r} \\ + \left( s_1 \frac{\sin(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} - s_2 \frac{\cos(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} + s_3 \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \theta} \\ + \left( -s_1 \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} + s_2 \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi}. \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Les calculs étant ainsi faits, revenons à l'expression (4.12).

En posant

$$\Delta_{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial}{\partial \ell} \left( s_1 \frac{\partial}{\partial X} + s_2 \frac{\partial}{\partial Y} + s_3 \frac{\partial}{\partial Z} \right), \quad (4.32)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1 = 2 \left( s_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} - s_2 \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} + s_3 \frac{1}{\sin \theta} \right) \\ \mathcal{L}_2 = \frac{2}{r} \left( s_1 \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin^2 \theta} - s_2 \frac{\cos(\varphi - \theta)}{\sin^2 \theta} + s_3 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \\ \mathcal{L}_3 = \frac{2}{r} \left( -s_1 \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} + s_2 \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \right), \end{array} \right. \quad (4.33)$$

on a

$$\Delta_{\mathcal{L}} = \left\{ \begin{array}{l} \left( s_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} - s_2 \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} + s_3 \frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial r} \\ + \left( s_1 \frac{\sin(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} - s_2 \frac{\cos(\varphi - \theta)}{r \sin^2 \theta} + s_3 \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \theta} \\ + \left( -s_1 \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} + s_2 \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi}. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

On rappelle que l'expression du laplacien  $\Delta_{(r,\varphi,\theta)}U$  a déjà été définie au chapitre précédent par la relation (3.17).

Ainsi, on obtient

$$\Delta_{(x,y,z)} \equiv \Delta_{(r,\varphi,\theta)} + s^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} - 2 \Delta_{\mathcal{L}}. \quad (4.35)$$

En projetant sur  $e_r$ ,  $e_\theta$  et  $e_\varphi$ , on trouve :

suiuant  $e_r$ ,

$$\left[ \Delta_{(x,y,z)} \equiv (\Delta_{(r,\varphi,\theta)})_{e_r} + s^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} - 2 \Delta_{\mathcal{L}} \right] e_r, \quad (4.36)$$

suiuant  $e_\theta$

$$\left[ \Delta_{(x,y,z)} \equiv (\Delta_{(r,\varphi,\theta)})_{e_\theta} + s^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} - 2 \Delta_{\mathcal{L}} \right] e_\theta, \quad (4.37)$$

et suivant  $e_\varphi$ , on a

$$\left[ \Delta_{(x,y,z)} \equiv (\Delta_{(r,\varphi,\theta)})_{e_\varphi} + s^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} - 2\Delta_{\mathcal{L}} \right] e_r, \quad (4.38)$$

où  $(\Delta_{(r,\varphi,\theta)})_{e_r}$ ,  $(\Delta_{(r,\varphi,\theta)})_{e_\theta}$  et  $(\Delta_{(r,\varphi,\theta)})_{e_\varphi}$  représentent respectivement les composantes du laplacien  $\Delta_{(r,\varphi,\theta)}$  selon  $e_r$ ,  $e_\theta$  et  $e_\varphi$ .  $\Delta_{\mathcal{L}}$  est défini ci-dessus en (4.34).

Nous venons ainsi de calculer les différents termes de l'équation de la dynamique du milieu (4.1). Nous passons à présent à la projection de (4.1) sur les différents axes.

#### 4.4 Projection de l'équation (4.1) suivant les directions $e_r$ , $e_\theta$ , et $e_\varphi$

L'expression du  $\Delta U$  étant déjà connue, nous rappelons que l'expression  $grad \operatorname{div} U$  est donnée en coordonnées sphériques suivant  $e_r$ ,  $e_\theta$  et  $e_\varphi$  par les relations (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13) du chapitre précédent.

En reconsidérant l'équation du milieu (4.1)

$$grad \operatorname{div} U + a_1^2 \Delta U = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (4.39)$$

avec  $a_1^2 = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)}$  et  $a^2 = \frac{\rho}{(\lambda + \mu)}$ , on obtient, en y introduisant le changement de variable (4.2),

$$grad \operatorname{div} U + a_1^2 \Delta_{(r,\theta,\varphi)} U + s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \ell^2} - 2 \Delta_{\mathcal{L}} U = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (4.40)$$

ou encore

$$grad \operatorname{div} U + a_1^2 \Delta_{(r,\theta,\varphi)} U - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \ell^2} + 2 \Delta_{\mathcal{L}} U \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (4.41)$$

En posant

$$\Pi = \text{grad div}U + a_1^2 \Delta_{(r,\theta,\varphi)} U - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (4.42)$$

(4.41) devient

$$\Pi = -s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \ell^2} + 2 \Delta_{\mathcal{L}} U \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (4.43)$$

On rappelle que les composantes de  $\Pi$  ( $\Pi_{e_r}$ ,  $\Pi_{e_\theta}$  et  $\Pi_{e_\varphi}$ ) suivant  $e_r$ ,  $e_\theta$  et  $e_\varphi$ , sont données respectivement par les relations (3.18), (3.19) et (3.20).

Projetons (4.43) suivant  $e_r$ ,  $e_\theta$  et  $e_\varphi$ .

#### 4.4.1 Selon $e_r$

On obtient

$$\Pi_{e_r} = -s^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \ell^2} + 2 \Delta_{\mathcal{L}} U_1. \quad (4.44)$$

En y remplaçant (3.22) et (4.31) par leurs expressions, on a

$$e_r \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r} (1 + a_1^2) \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2) U_1 + (1 + a_1^2) \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cot \theta \frac{\partial U_2}{\partial r} \\ - \frac{1}{r^2} (1 + 2a_1^2) U_2 \cot \theta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial \varphi} \\ - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + a_1^2 \left[ \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \right] + s^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \ell^2} - 2 \Delta_{\mathcal{L}} U_1 = a^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (4.45)$$

En remplaçant  $\Delta_{\mathcal{L}}U_1$  par son expression, on obtient

$$e_r \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r} (1 + a_1^2) \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2) U_1 + (1 + a_1^2) \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cot \theta \frac{\partial U_2}{\partial r} \\ - \frac{\cot \theta}{r^2} (1 + 2a_1^2) U_2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial \varphi} \\ - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + a_1^2 \left[ \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \right] + s^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \ell^2} \\ - 2 \left( \mathcal{L}_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \ell \partial r} + \mathcal{L}_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \ell \partial \theta} + \mathcal{L}_3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \ell \partial \varphi} \right) = a^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

où les  $\mathcal{L}_i$  sont définis en (4.33).

#### 4.4.2 Selon $e_\theta$

En faisant le même raisonnement, on trouve

$$\Pi_{e_\theta} = -s^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \ell^2} + 2 \Delta_{\mathcal{L}} U_2, \quad (4.47)$$

soit

$$(e_\theta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \cot \theta \\ - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (1 + a_1^2 \sin \theta) U_2 + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta \partial \varphi} \\ - \frac{\cot \theta}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + a_1^2 \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} \right] \\ + s^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \ell^2} - 2 \Delta_\ell U_2 = a^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \end{array} \right. \quad (4.48)$$

d'où

$$e_\theta \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \cot \theta \\ - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (1 + a_1^2 \sin \theta) U_2 + \frac{1}{r^2} (1 + a_1^2) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta \partial \varphi} \\ - \frac{\cot \theta}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + a_1^2 \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} \right] \\ + s^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \ell^2} - 2 \left( \mathcal{L}_1 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \ell \partial r} + \mathcal{L}_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \ell \partial \theta} + \mathcal{L}_3 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \ell \partial \varphi} \right) = a^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (4.49)$$

#### 4.4.3 Selon $e_\varphi$

On a

$$\Pi_{e_\varphi} = -s^2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial \ell^2} + 2 \Delta_\ell U_3, \quad (4.50)$$

soit

$$e_\varphi \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \varphi^2} \\ & + a_1^2 \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial U_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_3}{\partial \theta} \cot \theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \varphi^2} - \frac{U_3}{r^2 \sin \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \cot \theta \right] \\ & + s^2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial \ell^2} - 2 \left( \mathcal{L}_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial \ell \partial r} + \mathcal{L}_2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial \ell \partial \theta} + \mathcal{L}_3 \frac{\partial^2 U_3}{\partial \ell \partial \varphi} \right) = a^2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \right. \quad (4.51)$$

Les équations (4.46), 4.49) et (4.51) représentent respectivement les équations générales de propagation de la fissure selon les directions  $e_r$ ,  $e_\theta$  et  $e_\varphi$ . Nous passons à la formulation de la structure de la solution afin de ressortir les différentes équations différentielles suivant chacune des directions.

## 4.5 Formulation de la solution

Pour la résolution des équations (4.46), (4.49) et (4.51), comme, les coefficients des opérateurs ne dépendent pas de  $\ell$  et  $t$ , il est classique de chercher les solutions sous la forme

$$U_j = \mathbb{U}_j(r, \varphi, \theta) e^{b_j \ell} e^{i \mathcal{U}_n t}, \quad (4.52)$$

où

$$\begin{cases} \underline{U}_j(r, \varphi, \theta) = R_j(r) \Phi_j(\varphi) \Theta_j(\theta) \\ \underline{U}_n = (2n + 1) \omega \end{cases}, \quad (4.53)$$

$\iota^2 = -1$  et  $\beta_j$  une variable intrinsèque qui rend compte de " l'intensité " du champ de contrainte en fond de fissure et de la cinématique complexe du mouvement de la fissure. Il dépend forcément dans ce cas de la contrainte appliquée.

Ainsi

$$U_1 = \underline{U}_1(r, \varphi, \theta) e^{\beta_1 \iota} e^{\iota \omega_n t}, \quad (4.54)$$

$$U_2 = \underline{U}_2(r, \varphi, \theta) e^{\beta_2 \iota} e^{\iota \omega_n t}, \quad (4.55)$$

$$U_3 = \underline{U}_3(r, \varphi, \theta) e^{\beta_3 \iota} e^{\iota \omega_n t}. \quad (4.56)$$

Reprenons le calcul de (4.46), (4.49) et (4.51) en y introduisant  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  données respectivement par (4.54), (4.55) et (4.56).

## 4.6 Equation (4.46)

L'équation (4.46) devient en y reportant  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  données ci-dessus,



$$\left. \begin{aligned}
& \frac{2}{r} (1 + a_1^2) \dot{R}_1 \Phi_1 \Theta_1 - \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2) R_1 \Phi_1 \Theta_1 + (1 + a_1^2) \ddot{R}_1 \Phi_1 \Theta_1 \\
& + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} - \frac{(1 + a_1^2) \cot \theta}{r^2} U_2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r \partial \theta} \\
& + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + a_1^2 \left[ \frac{\cot \theta}{r^2} R_1 \Phi_1 \dot{\Theta}_1 + \frac{1}{r^2} R_1 \Phi_1 \ddot{\Theta}_1 \right. \\
& \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_1 \ddot{\Phi}_1 \Theta_1 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \right] + s^2 \beta_1^2 R_1 \Phi_1 \Theta_1 \\
& - 2\beta_1 \left( \mathcal{L}_1 \dot{R}_1 \Phi_1 \Theta_1 + \mathcal{L}_2 R_1 \Phi_1 \dot{\Theta}_1 + \mathcal{L}_3 R_1 \dot{\Phi}_1 \Theta_1 \right) = -a^2 \mathcal{U}_n^2 R_1 \Phi_1 \Theta_1.
\end{aligned} \right\} e_r \quad (4.57)$$

En la multipliant par  $\frac{r^2}{R_1 \Phi_1 \Theta_1}$ , on trouve après calcul

$$\left. \begin{aligned}
& (1 + a_1^2) r^2 \frac{\ddot{R}_1}{R_1} + 2r (1 + a_1^2) \frac{\dot{R}_1}{R_1} - 2(1 + a_1^2) + r^2 s^2 \beta_1^2 + a^2 \mathcal{U}_n^2 r^2 \\
& + \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} a_1^2 \cot \theta + a_1^2 \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} - 2\mathcal{L}_1 \beta_1 r^2 \frac{\dot{R}_1}{R_1} - 2\mathcal{L}_2 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} \\
& - 2\mathcal{L}_3 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Phi}_1}{\Phi_1} - (1 + a_1^2) \cot \theta \frac{U_2}{U_1} + \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial r} r \cot \theta \\
& - \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + r \frac{1}{U_1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{1}{U_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \\
& - \frac{2a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} = 0,
\end{aligned} \right\} e_r \quad (4.58)$$

soit

$$e_r \left\{ \begin{array}{l} - (1 + a_1^2) r^2 \frac{\ddot{R}_1}{R_1} - 2r (1 + a_1^2) \frac{\dot{R}_1}{R_1} + 2 (1 + a_1^2) - r^2 s^2 \beta_1^2 - a^2 \mathcal{U}_n^2 r^2 = \\ + \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} a_1^2 \cot \theta + a_1^2 \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} - 2 \mathcal{L}_1 \beta_1 r^2 \frac{\dot{R}_1}{R_1} - 2 \mathcal{L}_2 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} \\ - 2 \mathcal{L}_3 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Phi}_1}{\Phi_1} - (1 + a_1^2) \cot \theta \frac{U_2}{U_1} + \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial r} r \cot \theta - \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \\ + r \frac{1}{U_1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{1}{U_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} - \frac{2 a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \\ - \frac{2}{\sin \theta} \frac{a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} = 0. \end{array} \right. \quad (4.59)$$

Comme le premier membre de l'équation (4.59) ne dépend que de  $r$ , alors que le second dépend de  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $r$ , il existe donc une constante  $\lambda_{1r}$ , telle que

$$(1 + a_1^2) r^2 \frac{\ddot{R}_1}{R_1} + 2r (1 + a_1^2) \frac{\dot{R}_1}{R_1} - 2 (1 + a_1^2) + r^2 s^2 \beta_1^2 + a^2 \mathcal{U}_n^2 r^2 = -\lambda_{1r}, \quad (4.60)$$

ou encore

$$r^2 \ddot{R}_1 + 2r \dot{R}_1 + \left( \frac{s^2 \beta_1^2 + a^2 \mathcal{U}_n^2}{1 + a_1^2} r^2 - \frac{2 + 2a_1^2 - \lambda_{1r}}{1 + a_1^2} \right) R_1 = 0, \quad (4.61)$$

et

$$e_r \left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} a_1^2 \cot \theta + a_1^2 \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} + \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1} - 2\mathcal{L}_1 \beta_1 r^2 \frac{\dot{R}_1}{R_1} - 2\mathcal{L}_2 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} \\ - 2\mathcal{L}_3 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Phi}_1}{\Phi_1} - (1 + a_1^2) \cot \theta \frac{U_2}{U_1} + \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial r} r \cot \theta \\ - \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + r \frac{1}{U_1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{1}{U_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \\ - \frac{2a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} = \lambda_{1r}. \end{array} \right. \quad (4.62)$$

En multipliant (4.62) par  $\sin^2 \theta$ , on obtient

$$e_r \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} a_1^2 \sin^2 \theta + \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} \frac{a_1^2}{2} \sin 2\theta - 2\mathcal{L}_1 \beta_1 r^2 \frac{\dot{R}_1}{R_1} \sin^2 \theta - 2\mathcal{L}_2 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} \sin^2 \theta \\ - 2\mathcal{L}_3 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Phi}_1}{\Phi_1} \sin^2 \theta - \frac{(1 + a_1^2)}{2} \frac{U_2}{U_1} \sin 2\theta + \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial r} \frac{r \sin 2\theta}{2} \\ - \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \sin^2 \theta + \frac{r}{U_1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r \partial \theta} \sin^2 \theta + \frac{r \sin \theta}{U_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\sin \theta}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \\ - \frac{2a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \frac{a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} - \lambda_{1r} \sin^2 \theta = -a_1^2 \frac{\ddot{\Phi}_1}{\Phi_1}. \end{array} \right. \quad (4.63)$$

En appliquant à (4.63) le même raisonnement que celui appliqué à (4.59), on obtient en considérant l'existence d'une constante  $\lambda_{2r}^2$  :

$$\ddot{\Phi}_1 + \frac{\lambda_{2r}^2}{a_1^2} \Phi_1 = 0, \quad (4.64)$$

et

$$e_r \left\{ \begin{array}{l} \frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} a_1^2 \sin^2 \theta + \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} \frac{a_1^2}{2} \sin 2\theta - \lambda_{1r} \sin^2 \theta + \lambda_{2r}^2 = \\ + 2\mathcal{L}_1 \beta_1 r^2 \frac{\dot{R}_1}{R_1} \sin^2 \theta + 2\mathcal{L}_2 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} \sin^2 \theta + 2\mathcal{L}_3 \beta_1 r^2 \frac{\dot{\Phi}_1}{\Phi_1} \sin^2 \theta \\ + \frac{(1+a_1^2)}{2} \frac{U_2}{U_1} \sin 2\theta - \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial r} \frac{r \sin 2\theta}{2} + \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \sin^2 \theta - \frac{r}{U_1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r \partial \theta} \sin^2 \theta \\ - \frac{r \sin \theta}{U_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin \theta}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{2a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \frac{a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi}. \end{array} \right. \quad (4.65)$$

En appliquant à (4.65) le même raisonnement que celui appliqué à (4.59) et (4.63), on obtient en considérant l'existence d'une constante  $\lambda_{3r}$  :

$$\frac{\ddot{\Theta}_1}{\Theta_1} a_1^2 \sin^2 \theta + \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} \frac{a_1^2}{2} \sin 2\theta - \lambda_{1r} \sin^2 \theta + \lambda_{2r}^2 = \lambda_{3r}, \quad (4.66)$$

soit

$$\ddot{\Theta}_1 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_1 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{-\lambda_{1r}}{a_1^2} \sin^2 \theta + \frac{\lambda_{2r}^2 - \lambda_{3r}}{a_1^2} \right) \Theta_1 = 0, \quad (4.67)$$

et la relation dite " complémentaire "

$$e_r \left\{ \begin{array}{l} 2\beta_1 \left( \mathcal{L}_1 r^2 \frac{\dot{R}_1}{R_1} \sin^2 \theta + \mathcal{L}_2 r^2 \frac{\dot{\Theta}_1}{\Theta_1} \sin^2 \theta + \mathcal{L}_3 r^2 \frac{\dot{\Phi}_1}{\Phi_1} \sin^2 \theta \right) \\ + \frac{(1+a_1^2) U_2}{2 U_1} \sin 2\theta - \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial r} \frac{r \sin 2\theta}{2} + \frac{1}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \sin^2 \theta \\ - \frac{r}{U_1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial r \partial \theta} \sin^2 \theta - \frac{r \sin \theta}{U_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin \theta}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \\ + \frac{2a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \frac{a_1^2}{U_1} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} = \lambda_{3r}. \end{array} \right. \quad (4.68)$$

En ce qui est de la projection sur l'axe  $e_r$ , on obtient le système suivant :

$$e_r \left\{ \begin{array}{l} r^2 \ddot{R}_1 + 2r \dot{R}_1 + \left( \frac{s^2 \beta_1^2 + a^2 U_n^2}{1+a_1^2} r^2 - \frac{2+2a_1^2-\lambda_{1r}}{1+a_1^2} \right) R_1 = 0, \\ \ddot{\Phi}_1 + \frac{\lambda_{2r}^2}{a_1^2} \Phi_1 = 0, \\ \ddot{\Theta}_1 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_1 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{-\lambda_{1r}}{a_1^2} \sin^2 \theta + \frac{\lambda_{2r}^2 - \lambda_{3r}}{a_1^2} \right) \Theta_1 = 0. \end{array} \right. \quad (4.69)$$

## 4.7 Equation (4.49)

En considérant (4.49) et en substituant  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  par leur expression (4.54), (4.55) et (4.56), on trouve

$$e_\theta \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r^2} (1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \underline{U}_1}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \underline{U}_3}{\partial \theta \partial \varphi} \\ - \frac{\cot \theta}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{\partial \underline{U}_3}{\partial \varphi} - \frac{(1 + a_1^2 \sin \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} R_2 \Phi_2 \Theta_2 \\ + \frac{(1 + a_1^2)}{r^2} R_2 \Phi_2 \ddot{\Theta}_2 + \frac{(1 + a_1^2)}{r^2} R_2 \Phi_2 \dot{\Theta}_2 \cot \theta + \frac{2a_1^2}{r} \dot{R}_2 \Phi_2 \Theta_2 \\ + a_1^2 \ddot{R}_2 \Phi_2 \Theta_2 + \frac{a_1^2}{r^2 \sin^2 \theta} R_2 \ddot{\Phi}_2 \Theta_2 + s^2 \beta_2^2 R_2 \Phi_2 \Theta_2 - 2 \mathcal{L}_1 \beta_2 \dot{R}_2 \Phi_2 \Theta_2 \\ - 2 \mathcal{L}_2 \beta_2 R_2 \Phi_2 \dot{\Theta}_2 - 2 \mathcal{L}_3 \beta_2 R_2 \dot{\Phi}_2 \Theta_2 = -a^2 \mathcal{U}_n^2 R_2 \Phi_2 \Theta_2. \end{array} \right. \quad (4.70)$$

En multipliant (4.70) par  $\frac{r^2}{\underline{U}_2}$ , on a

$$e_\theta \left\{ \begin{array}{l} 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{1}{\underline{U}_2} \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial \theta} + r \frac{1}{\underline{U}_2} \frac{\partial^2 \underline{U}_1}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\underline{U}_2} \frac{\partial^2 \underline{U}_3}{\partial \theta \partial \varphi} \\ - \cot \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{1}{\underline{U}_2} \frac{\partial \underline{U}_3}{\partial \varphi} - \frac{(1 + a_1^2 \sin \theta)}{\sin^2 \theta} + (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} \\ + \cot \theta (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} - 2r^2 \mathcal{L}_1 \beta_2 \frac{\dot{R}_2}{R_2} - 2r^2 \mathcal{L}_2 \beta_2 \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} - 2r^2 \mathcal{L}_3 \beta_2 \frac{\dot{\Phi}_2}{\Phi_2} \\ + \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_2}{\Phi_2} = -a_1^2 r^2 \frac{\ddot{R}_2}{R_2} - r 2a_1^2 \frac{\dot{R}_2}{R_2} - r^2 s^2 \beta_2^2 - a^2 \mathcal{U}_n^2 r^2. \end{array} \right. \quad (4.71)$$

Comme le premier membre de l'équation dépend de  $\theta$ ,  $r$  et  $\varphi$ , alors que le second ne dépend que de  $r$ , il existe donc une constante  $\lambda_{1\theta}$ , telle que

$$e_{\theta} \left\{ \begin{array}{l} 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{1}{U_2} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + r \frac{1}{U_2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta \partial r} \\ - \cot \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{1}{U_2} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{U_2} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta \partial \varphi} \\ - \frac{(1 + a_1^2 \sin \theta)}{\sin^2 \theta} + (1 + a_1^2) \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} + \cot \theta (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \\ - 2r^2 \mathcal{L}_1 \mathfrak{B}_2 \frac{\dot{R}_2}{R_2} - 2r^2 \mathcal{L}_2 \mathfrak{B}_2 \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} - 2r^2 \mathcal{L}_3 \mathfrak{B}_2 \frac{\dot{\Phi}_2}{\Phi_2} + \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta} \frac{\ddot{\Phi}_2}{\Phi_2} = \lambda_{1\theta}, \end{array} \right. \quad (4.72)$$

et

$$a_1^2 r^2 \frac{\ddot{R}_2}{R_2} + r 2a_1^2 \frac{\dot{R}_2}{R_2} + r^2 s^2 \mathfrak{B}^2 + a^2 \mathcal{U}_n^2 r^2 = \lambda_{1\theta}, \quad (4.73)$$

soit

$$r^2 \ddot{R}_2 + 2r \dot{R}_2 + \left( \frac{s^2 \mathfrak{B}_2^2 + a^2 \mathcal{U}_n^2 r^2}{a_1^2} - \frac{\lambda_{1\theta}}{a_1^2} \right) R_2 = 0. \quad (4.74)$$

En appliquant le même raisonnement à (4.72), on obtient en multipliant par  $\sin^2 \theta$  et en considérant que les deux membres de l'égalité sont égales à une constante  $\lambda_{2\theta}^2$  :

$$e_\theta \left\{ \begin{array}{l} -a_1^2 \frac{\ddot{\Phi}_2}{\Phi_2} = 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{\sin^2 \theta}{\underline{U}_2} \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial \theta} + r \frac{\sin^2 \theta}{\underline{U}_2} \frac{\partial^2 \underline{U}_1}{\partial \theta \partial r} \\ - \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{\sin 2\theta}{2\underline{U}_2} \frac{\partial \underline{U}_3}{\partial \varphi} + \frac{\sin \theta}{\underline{U}_2} \frac{\partial^2 \underline{U}_3}{\partial \theta \partial \varphi} - \lambda_{1\theta} \sin^2 \theta \\ - (1 + a_1^2 \sin \theta) + (1 + a_1^2) \sin^2 \theta \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} + \frac{\sin 2\theta}{2} (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \\ - 2r^2 \mathcal{L}_1 \mathcal{B}_2 \sin^2 \theta \frac{\dot{R}_2}{R_2} - 2r^2 \mathcal{L}_2 \mathcal{B}_2 \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \sin^2 \theta - 2r^2 \mathcal{L}_3 \mathcal{B}_2 \frac{\dot{\Phi}_2}{\Phi_2} \sin^2 \theta, \end{array} \right. \quad (4.75)$$

d'où

$$\ddot{\Phi}_2 + \frac{\lambda_{2\theta}^2}{a_1^2} \Phi_2, \quad (4.76)$$

et

$$e_\theta \left\{ \begin{array}{l} 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{\sin^2 \theta}{\underline{U}_2} \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial \theta} + r \frac{\sin^2 \theta}{\underline{U}_2} \frac{\partial^2 \underline{U}_1}{\partial \theta \partial r} - \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{\sin 2\theta}{2\underline{U}_2} \frac{\partial \underline{U}_3}{\partial \varphi} \\ + 1 \frac{\sin \theta}{\underline{U}_2} \frac{\partial^2 \underline{U}_3}{\partial \theta \partial \varphi} - r^2 \mathcal{L}_1 \mathcal{B}_2 \sin^2 \theta \frac{\dot{R}_2}{R_2} - r^2 \mathcal{L}_2 \mathcal{B}_2 \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \sin^2 \theta + r^2 \mathcal{L}_3 \mathcal{B}_2 \frac{\dot{\Phi}_2}{\Phi_2} \sin^2 \theta \\ = - (1 + a_1^2) \sin^2 \theta \frac{\ddot{\Theta}_2}{\Theta_2} - \frac{\sin 2\theta}{2} (1 + a_1^2) \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} + \lambda_{1\theta} \sin^2 \theta + \\ (1 + a_1^2 \sin \theta) + \lambda_{2\theta}^2. \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Comme le premier membre de l'équation dépend encore de  $\theta$ ,  $r$  et  $\varphi$ , alors que le second membre de l'équation ne dépend que de  $\theta$ , alors il existe une



constante  $\lambda_{3\theta}$ , telle que

$$e_\theta \left\{ \begin{array}{l} 2(1 + a_1^2 \sin \theta) \frac{\sin^2 \theta}{\underline{U}_2} \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial \theta} + r \frac{\sin^2 \theta}{\underline{U}_2} \frac{\partial^2 \underline{U}_1}{\partial \theta \partial r} + 1 \frac{\sin \theta}{\underline{U}_2} \frac{\partial^2 \underline{U}_3}{\partial \theta \partial \varphi} \\ - \left( \frac{1}{\sin \theta} + 2a_1^2 \right) \frac{\sin 2\theta}{2\underline{U}_2} \frac{\partial \underline{U}_3}{\partial \varphi} - r^2 \mathcal{L}_1 \beta_2 \sin^2 \theta \frac{\dot{R}_2}{R_2} \\ - r^2 \mathcal{L}_2 \beta_2 \frac{\dot{\Theta}_2}{\Theta_2} \sin^2 \theta + r^2 \mathcal{L}_3 \beta_2 \frac{\dot{\Phi}_2}{\Phi_2} \sin^2 \theta = \lambda_{3\theta} \end{array} \right. \quad (4.78)$$

et

$$\ddot{\Theta}_2 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_2 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{-\lambda_{1\theta}}{1+a_1^2} \sin^2 \theta - \frac{a_1^2}{1+a_1^2} \sin \theta + \frac{\lambda_{3\theta} - \lambda_{2\theta}^2 - 1}{1+a_1^2} \right) \Theta_2 = 0. \quad (4.79)$$

D'où le système

$$e_\theta \left\{ \begin{array}{l} r^2 \ddot{R}_2 + 2r \dot{R}_2 + \left( \frac{s^2 \beta_2^2 + a^2 \underline{U}_n^2}{a_1^2} r^2 - \frac{\lambda_{1\theta}}{a_1^2} \right) R_2 = 0 \\ \ddot{\Phi}_2 + \frac{\lambda_{2\theta}^2}{a_1^2} \Phi_2 \\ \ddot{\Theta}_2 \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_2 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{-\lambda_{1\theta}}{1+a_1^2} \sin^2 \theta - \frac{a_1^2}{1+a_1^2} \sin \theta + \frac{\lambda_{3\theta} - \lambda_{2\theta}^2 - 1}{1+a_1^2} \right) \Theta_2 = 0. \end{array} \right. \quad (4.80)$$

A présent, considérons la projection sur  $e_\varphi$  (4.51).

## 4.8 Equation (4.51)

En reportant  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  dans (4.51), et en multipliant par  $\frac{r^2}{R_3\Phi_3\Theta_3}$ , on obtient

$$e_\varphi \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{\sin\theta} \frac{1}{U_3} \frac{\partial U_1}{\partial\varphi} - \frac{r}{\sin\theta} \frac{1}{U_3} \frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi\partial r} - \frac{\cot\theta}{\sin\theta} \frac{1}{U_3} \frac{\partial U_2}{\partial\varphi} - \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{U_3} \frac{\partial^2 U_2}{\partial\varphi\partial\theta} \\ -\frac{2a_1^2}{U_3} \frac{\partial U_1}{\partial\varphi} - \frac{2a_1^2}{U_3} \frac{\partial U_2}{\partial\varphi} \cot\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\ddot{\Phi}_3}{\Phi_3} - a_1^2 \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} \cot\theta - a_1^2 \frac{\ddot{\Theta}_3}{\Theta_3} \\ -\frac{a_1^2}{\sin^2\theta} \frac{\ddot{\Phi}_3}{\Phi_3} + \frac{a_1^2}{\sin\theta} + 2\mathcal{L}_1\beta_3 r^2 \frac{\dot{R}_3}{R_3} + 2\mathcal{L}_2\beta_3 r^2 \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} + 2\mathcal{L}_3\beta_3 r^2 \frac{\dot{\Phi}_3}{\Phi_3} = \\ a_1^2 r^2 \frac{\ddot{R}_3}{R_3} + 2ra_1^2 \frac{\dot{R}_3}{R_3} + s^2\beta_3^2 r^2 + r^2 a^2 \mathcal{U}_n^2. \end{array} \right. \quad (4.81)$$

En faisant le même raisonnement par rapport à la direction de propagation  $e_\varphi$ , on obtient en considérant l'existence des constantes  $\lambda_{1\varphi}$ ,  $\lambda_{2\varphi}^2$  et  $\lambda_{3\varphi}$  le système

$$e_\varphi \left\{ \begin{array}{l} r^2 \ddot{R}_3 + 2r \dot{R}_3 + \left( \frac{s^2\beta_3^2 + a^2 \mathcal{U}_n^2}{a_1^2} r^2 - \frac{\lambda_{1\varphi}}{a_1^2} \right) R_3 = 0 \\ \ddot{\Phi}_3 + \frac{\lambda_{2\varphi}^2}{(1+a_1^2)} \Phi_3 = 0 \\ \ddot{\Theta}_3 \sin^2\theta + \dot{\Theta}_3 \frac{1}{2} \sin 2\theta + \left( \frac{-\lambda_{1\varphi}}{a_1^2} \sin^2\theta - \sin\theta + \frac{\lambda_{3\varphi} - \lambda_{2\varphi}^2}{a_1^2} \right) \Theta_3 = 0, \end{array} \right. \quad (4.82)$$

et la relation

$$e_\varphi \left\{ \begin{array}{l} 2 \sin \theta \frac{1}{\underline{U}_3} \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial \varphi} + r \sin \theta \frac{1}{\underline{U}_3} \frac{\partial^2 \underline{U}_1}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{1}{\underline{U}_3} \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial \varphi} \\ + \sin \theta \frac{1}{\underline{U}_3} \frac{\partial^2 \underline{U}_2}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{2a_1^2}{\underline{U}_3} \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial \varphi} \sin^2 \theta + \frac{a_1^2}{\underline{U}_3} \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial \varphi} \sin 2\theta - \lambda_{3\varphi} \\ - 2\mathcal{L}_1 \beta_3 r^2 \frac{\dot{R}_3}{R_3} \sin^2 \theta - 2\mathcal{L}_2 \beta_3 r^2 \frac{\dot{\Theta}_3}{\Theta_3} \sin^2 \theta - 2\mathcal{L}_3 \beta_3 r^2 \frac{\dot{\Phi}_3}{\Phi_3} \sin^2 \theta = 0. \end{array} \right. \quad (4.83)$$

Comme au chapitre précédent, nous obtenons après projection de l'équation du milieu (4.1) dans le repère sphérique de directions  $e_r$ ,  $e_\theta$  et  $e_\varphi$ , trois systèmes d'équations (4.69), (4.80) et (4.82). Au chapitre précédent, nous avons résolu ces systèmes afin de déterminer en plus des fonctions  $R(r)$ ,  $\Theta(\theta)$  et  $\Phi(\varphi)$ , de nouveaux modes de singularité en fond de fissure.

## 4.9 Détermination de $\beta_j$

Nous définissons  $\beta_j$ , conformément à la théorie de la mécanique de la rupture qui exige des variables intrinsèques pour l'étude d'un matériau en fond de fissure, comme paramètre rendant compte du degré de concentration des contraintes en fond de fissure. Dans le cas de la mécanique de la rupture, la prise en compte d'un tel paramètre a été introduite par G.R.Iwin avec le facteur d'intensité de contrainte (FIC)  $K$  et l'intégrale de Rice  $J$ .

Ainsi, en considérant (4.52), tel que  $U_j = \underline{U}_j(r, \varphi, \theta) e^{\beta_j \ell} e^{i\Omega_n t}$  où  $\beta_j$  caractérise les singularités du champ des déplacements en fond de fissure, le terme  $e^{\beta_j \ell}$  peut dans certains cas s'identifier formellement aux facteurs d'intensité

de contrainte  $K$ . Soit

$$K_i = e^{\beta_j \ell}, \quad (4.84)$$

où  $i = \{I, II, III\}$ .

On peut obtenir  $\beta_j$  selon chaque mode élémentaire de fissuration. Le calcul de  $K_i$  étant connu [10], [30] et [31], à partir de la relation (4.84), on obtient

$$\beta_i = \frac{\ln K_i}{\ell}. \quad (4.85)$$

Ceci nous donne la relation entre  $\beta_i$  et  $K_i$ .

Dans le cas général où il y a combinaison de modes, il n'est pas certain que la relation (4.84) reste vérifiée. Dans ce cas, les  $\beta_j$  sont fonction des  $K_i$  et de la fréquence de vibration  $\omega$ , et ces dépendances peuvent être complexes.

## 4.10 Analyse et commentaire des équations obtenues

On obtient en fin de compte, selon la direction de propagation de la fissure, un système de trois équations différentielles qu'on regroupe sous la forme générale

$$e_i \begin{cases} r^2 \ddot{R}_i + 2r \dot{R}_i + (E_1^2 r^2 - E_2) R_i = 0, & (a) \\ \ddot{\Phi}_i + E_3^2 \Phi_i = 0, & (b) \\ \ddot{\Theta}_i \sin^2 \theta + \dot{\Theta}_i \frac{1}{2} \sin 2\theta - (E_4 \sin^2 \theta - E_5 \sin \theta - E_6) \Theta_i = 0. & (c) \end{cases} \quad (4.86)$$

( $i = \{1, 2, 3\}$  pour  $R$ ,  $\Theta$  et  $\Phi$ , pour  $e_i$   $i = \{r, \theta, \varphi\}$ ).

On remarque, à priori, que les trois équations de ce système sont du même type que les trois équations (b), (c) et (d) du système (3.82) du chapitre 3.

Compte tenu de l'équation de la dynamique du milieu, les constantes  $E_i$  prennent les valeurs suivantes selon les directions :

Suivant la direction  $e_r$

$$E_1^2 = \frac{s^2\beta_1^2 + a^2\mathcal{U}_n^2}{1+a_1^2}, \quad E_2 = \frac{2+2a_1^2-\lambda_{1r}}{1+a_1^2} \quad \text{et} \quad E_3^2 = \frac{\lambda_{2r}^2}{a_1^2}, \quad (4.87)$$

$$E_4 = \frac{-\lambda_{1r}}{a_1^2}, \quad E_5 = 0 \quad \text{et} \quad E_6 = \frac{\lambda_{3r}-\lambda_{2r}^2}{a_1^2}. \quad (4.88)$$

Suivant la direction  $e_\theta$

$$E_1^2 = \frac{s^2\beta_2^2 + a^2\mathcal{U}_n^2}{a_1^2}, \quad E_2 = \frac{\lambda_{1\theta}}{a_1^2} \quad \text{et} \quad E_3^2 = \frac{\lambda_{2\theta}^2}{a_1^2}, \quad (4.89)$$

$$E_4 = \frac{-\lambda_{1\theta}}{1+a_1^2}, \quad E_5 = \frac{a_1^2}{1+a_1^2} \quad \text{et} \quad E_6 = \frac{1+\lambda_{2\theta}^2-\lambda_{3\theta}}{1+a_1^2}. \quad (4.90)$$

Enfin suivant la direction  $e_\varphi$ , on a

$$E_1^2 = \frac{s^2\beta_3^2 + a^2\mathcal{U}_n^2}{a_1^2}, \quad E_2 = \frac{\lambda_{1\varphi}}{a_1^2}, \quad E_3^2 = \frac{\lambda_{2\varphi}^2}{1+a_1^2}, \quad (4.91)$$

$$E_4 = \frac{-\lambda_{1\varphi}}{a_1^2}, \quad E_5 = 1 \quad \text{et} \quad E_6 = \frac{\lambda_{2\varphi}^2 - \lambda_{3\varphi}}{a_1^2}. \quad (4.92)$$

Ceci montre bien que les différentes constantes dépendent des caractéristiques du matériau suivant la direction de propagation.

En ce qui concerne les singularités, nous revenons sur l'équation (4.86 (a)) qui met en évidence l'influence de la vibration propre et de la longueur de la fissure par son coefficient  $\beta$ . Ceci au travers de la résolution de l'équation différentielle (4.86 (a)) qui fait intervenir les constantes  $E_{1r}$ ,  $E_{1\theta}$  et  $E_{1\varphi}$  selon chacune des directions (voir (4.87), (4.89) et (4.91)).

On remarque que  $E_{1r}$ ,  $E_{1\theta}$  et  $E_{1\varphi}$  sont fonction de la fréquence de vibration  $\mathcal{U}_n = (2n + 1)\omega$  et du gradient directionnel de la propagation de la

fissure  $s$ . La relation de recurrence (3.105), s'écrit alors

$$A_{\alpha mn}^{(P_n)} = \frac{-\sqrt{\frac{s^2 \beta_j^2 + a^2 \mathcal{U}_n^2}{\tilde{a}_j}} A_{(m-2)n}^{(P_n)}}{(m + P_n)^2 + (m + P_n) - E_2(n, \omega)}, \quad (4.93)$$

où  $\tilde{a}_j$  vaut  $1 + a_1^2$ ,  $a_1^2$  et  $a_1^2$  selon qu'on soit dans la direction  $e_r$ ,  $e_\theta$  ou  $e_\varphi$ .

Les cas  $\mathcal{U}_n = 0$ , c'est à dire  $(2n + 1)\omega = 0$  correspondent à  $\omega = 0$ . Dans ces cas, la force extérieure appliquée ( $F_i = f_i \cos \omega t$ ) se réduit à l'amplitude ( $F_i = f_i$ ). On retrouve le cas d'une force extérieure sans vibration. Dans ce cas de figure, les risques de combinaison de modes de fissuration et les bifurcations sont quasi nuls. Le gradient directionnel de propagation de la fissure se ramène à un gradient uni-dimensionnel. L'évolution de la fissure est forcément compatible avec la contrainte appliquée et on a  $s^2 = s_i^2 \neq 0$ , où  $i$  vaut soit 1, 2 ou 3.

Il y a stabilité de la fissure, quand  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ . Dans ce cas de figure, on a (4.93) qui devient

$$A_{\alpha mn}^{(P_n)} = \frac{-\sqrt{\frac{a^2 \mathcal{U}_n^2}{\tilde{a}_1}} A_{(m-2)n}^{(P_n)}}{(m + P_n)^2 + (m + P_n) - E_2(n, \omega)}. \quad (4.94)$$

On constate alors que la contrainte extérieure appliquée est insuffisante pour faire évoluer la fissure, quel que soit le mode de sollicitation vibratoire. En outre les singularités en fond de fissure demeurent toujours fonction des fréquences de vibration  $\mathcal{U}_n$ .

L'analyse de la relation (4.85) montre que  $\beta_i$  en un point, est la pente à la droite d'équation  $\ln K_i = \beta_j \ell$ . Quand  $\beta_j$  croit, tel que  $\beta_j > \beta_{jC}$  ( $\beta_{jC}$  valeur critique de  $\beta_i$ ), on a une évolution rapide de la fissure qui s'accompagne d'une amplification des déplacements à un facteur près de  $e^{\beta_j \ell}$ . Quand  $\beta_j$  décroît

tel qu'on ait  $\beta_j < \beta_{jC}$ , forcément on a une stabilité de la fissure avec de faibles singularités. Si  $\beta_j$  tend vers zéro, les concentrations de contrainte en fond de fissure sont de l'ordre de l'unité; la force appliquée est très éloignée de la fissure ou est nulle.

La fissure est alors hors chargement et  $\ell = \ell_0$ . Par contre si  $\beta_j = 0$  et  $\mathcal{U} \neq 0$ , on retrouve le cas du chapitre III.

Sur le plan mathématique, le gradient directionnel  $s_i$  de propagation de la fissure par rapport à un point  $M(x_0, y_0, z_0)$  est une condition double d'évolution de la fissure. Elle est double parce que  $s_i$  joue un double rôle :

il y a évolution de la fissure si et seulement si  $s_i \neq 0$ . Ce qui veut dire que la fissure évolue dans la direction  $i$  s'il en est ainsi.

Il n'y a pas d'évolution de la fissure si et seulement si  $s_i = 0$ .

Contrairement au paramètre  $K$  (FIC) qui renseigne uniquement sur l'évolution de la fissure, le gradient directionnel  $s_i$  donne en plus, la direction d'évolution de la fissure quand il y a propagation de la fissure.

# CONCLUSION GENERALE

Ce travail a porté principalement sur une étude analytique des singularités en fond de fissure dans un matériau fragile possédant une fissure initiale de mode quelconque, soumise à une force extérieure d'ordre vibratoire.

Dans la première partie sur les généralités de la mécanique de la rupture, nous avons fait une revue de la théorie énergétique dans le cas de l'étude d'une fissure dans un matériau ductile où la force ponctuelle  $G_{0i}$  ou le taux de restitution de l'énergie apparaît comme l'un des paramètres importants capable de faire évoluer la fissure. Dans cette théorie, le calcul des déformations en fond de fissure peut se faire en fonction du potentiel des vitesses de déformation  $\Psi(\dot{\varepsilon})$  et du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$ .

Dans la deuxième partie, qui englobe l'essentiel de notre recherche sur les singularités en fond de fissure dans un matériau fragile, nous procédons en deux étapes.

Dans la première étape, il s'est agi d'une propagation de la fissure dans un cadre quasi-statique dans les conditions de propagation de Griffith. Dans ces conditions, l'énergie en fond de fissure est supérieure à l'énergie critique du matériau.

On a obtenu avec l'équation de la dynamique des milieux continus (4.1),



et la méthode de séparation de variables de Fourier en fond de fissure dans un matériau fragile, les différentes équations différentielles des fonctions  $R(r)$ ,  $\Theta(\theta)$  et  $\Phi(\varphi)$  du vecteur déplacement et de la fonction du temps  $T(t)$ . La résolution de l'équation différentielle de la fonction du temps fait ressortir le caractère oscillatoire du problème et une stabilité de la propagation de la fissure aux instants  $t_k = \frac{\pi}{2\omega} (2k + 1)$  avec  $k \in \mathbf{N}$ . En ce qui concerne les équations différentielles linéaires à coefficients non constants des fonctions  $R(r)$  et  $\Theta(\theta)$ , on a obtenu des résultats qui sont singuliers en  $r$  et en  $\theta$ . Outre les singularités qu'on rencontre dans les cas classiques, mais dont les exposants sont modifiés ici par la nature vibratoire de la sollicitation, d'autres singularités nouvelles apparaissent. Ces dernières singularités trouvées sont de la forme non classique

$$r^{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Gamma_{n\alpha}}}{2} \cos \frac{J_{n\alpha}}{2}} \cos \left[ \frac{\sqrt{\Gamma_{n\alpha}}}{2} \left( \sin \left( \frac{J_{n\alpha}}{2} \right) \right) \ln r + \frac{\pi}{2} \chi_n \right] \quad \text{et} \quad \theta^{-\frac{1}{2}}.$$

La remodelisation du facteur d'intensité de contrainte sous forme matricielle a permis de prendre en compte dans cette étude les embranchements et les combinaisons de modes de fissurations.

Cette partie de notre travail sur l'étude des nouveaux modes de singularité en fond de fissure a fait l'objet d'une publication [8].

En fond de fissure, on a obtenu des fonctions de Jauge  $\Psi_{na}(\varepsilon)$ , qui sont aussi de formes non classiques et composées, outre des fonctions de jauge classiques, de nouvelles fonctions de même nature que les singularités de  $R(r)$ . Cette différence notoire avec les cas classiques résulte ici encore dans la nature vibratoire de la sollicitation. Ces fonctions de jauge dépendent de la fréquence de vibration  $\omega$  et de l'exposant  $P_n$  qui caractérisent l'intensité

de la singularité du champ de contrainte à la pointe de la fissure.

Dans la seconde étape, nous avons mis en évidence l'influence de la longueur de la fissure et des fréquences propres de vibration  $\mathcal{U}_n = (2n + 1)\omega$  dans les déplacements en fond de fissure. Ceci à travers la relation de récurrence

$$A_{\alpha mn}^{(P_n)} = \frac{-\sqrt{\frac{s^2 \beta_j^2 + a^2 \mathcal{U}_n^2}{\tilde{a}_1}} A_{(m-2)n}^{(P_n)}}{(m + P_n)^2 + (m + P_n) - E_2(n, \omega)}.$$

Dans ce cas, outre l'influence des fréquences propres  $\mathcal{U}_n$  et des exposants de singularités atypiques  $P_n$  jouant un rôle important dans les cas quasi-statiques, deux nouveaux paramètres liés à l'évolution de la fissure viennent jouer des rôles importants. Il s'agit des paramètres  $\beta_j$  et  $s_i$ .  $\beta_j$  est ici un pseudo facteur d'intensité de contrainte ; il dépend uniquement de la contrainte appliquée et rend compte de l'état d'évolution de la fissure. Lorsque  $\beta_j = 0$  et  $\omega \neq 0$ , on retrouve le cas étudié au chapitre III. Lorsque  $\beta_j \neq 0$ , on est dans le cadre d'évolution dynamique. Ainsi lorsque,  $\beta_j < 0$ , la fissure a tendance à une stabilisation totale, puisque les déplacements en fond de fissure sont très atténués à un facteur  $e^{\beta_j \ell}$  près ( $\ell$  étant la longueur de la fissure) par rapport au cas quasi-statique. Lorsque  $\beta_j > 0$ , la fissure a tendance à s'accroître rapidement et les déplacements en fond de fissure sont amplifiés au facteur  $e^{\beta_j \ell}$  près.

Le paramètre  $s = (\sum s_i^2)^{\frac{1}{2}}$  rend compte des directions de propagation. Le concept de gradient directionnel de la propagation de la fissure  $s_i$  selon la direction  $i$ , introduit ici, a permis, s'il y a évolution de la fissure, de donner sa direction de propagation et de quantifier la vitesse de propagation dans cette direction. Les embranchements liés à ces variations directionnelles sont ici pris en compte dans le modèle et influent de manière interactive sur les

singularités et leurs intensités, aussi bien que sur la propagation de la fissure elle-même.

Cette partie de notre travail sur l'étude dynamique des déplacements en fond de fissure a aussi fait l'objet d'une publication [9].

Nous pouvons finalement retenir de ce travail, qu'il a permis de déterminer les équations différentielles des différentes fonctions des variables radiale et angulaires du vecteur déplacement, de modéliser le facteur d'intensité de contrainte sous forme matricielle, ce qui permet la prise en compte des bifurcations et des combinaisons de modes de fissuration, de mettre en évidence l'existence de nouveaux modes de singularité et pour finir, d'étudier à la fois l'influence de la longueur et la propagation de la fissure, et celle des fréquences de sollicitation de vibration sur les déplacements en fond de fissure. Les cas d'interaction de ces fréquences de sollicitation de vibration avec les fréquences propres du milieu fissuré n'ont pas été abordés et par conséquent, le problème de la résonance a été occulté. Une attention particulière pourrait être portée sur ces aspects dans des travaux futurs qui prolongeraient ceux-ci.

# Bibliographie

- [1] Andrieux S., Bamberger Y. et Marigo J.J. (1986), Modèle de Matériau Microfissuré pour le béton et les roches. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* Vol 5, n<sup>o</sup>3, pp 471-513.
- [2] Anongba P.N.B., Oberli S. and Steinemann S.G. (1995), A study of the brittle fracture characteristics of  $\text{CoS}_{12}$  using laser beam reflections. *Acta metall mater.* Vol 43, n<sup>o</sup>6, pp 2275-2285.
- [3] Anongba P.N.B. (1996), A Non-planar crack analysis using continuously distributed sinusoidal edge dislocations. *Max-Planck-Institut fur Metallforschung. Institut fur Physik Stuttgart. Phys. Stat. Sol. (b)* 194 133.
- [4] Anongba P.N.B. (1995), The Displacement and Stress Fields Due to a Sinusoidal Edge Dislocation. *Max-Planck-Institut fur Metallforschung. Institut fur Physik Stuttgart. Phys. Stat. Sol. (b)* 190 133.
- [5] Biner S.B. (1995), A fem analysis of crack growth in microcracking brittle solids. *Engineering fracture Mechanics (Iowa State Univ USA)*. Vol 51, n<sup>o</sup>4, pp 555-573.
- [6] Brock L.M. (March 2000), Effets of Mixed-Mode and crack surface convection in rapid crack growth in coupled thermoelastic solids. *Journal*

- of Applied Mechanics, Vol 67 59-67.
- [7] Chaussin Robert (octobre 1991), Elements de décision d'acceptation ou de réparation des fissures. (Service d'études techniques des routes et autoroutes : S.E.T.R.A.) CEBTP. Direction technique et de la qualité : Examen de structures fissurées.
- [8] DANHO E. and Wakeu Pola P. M. (February 2007), The analytic solution in the vicinity of crack tip in a material loaded by a random surface density vibratory force. Far East Journal of Applied Mathematics (Far East J. Appl. Math), Vol. 26(2), N° 2, pp. 241-256.
- [9] DANHO E. and Wakeu Pola P.M. (July 2007), Crack length and vibratory loading frequency effect on singular displacements solutions at a crack tip in a fragile material : Case of a dynamic evolution of the crack. Far East Journal of Applied Mathematics, (Far East J. Appl. Math) Vol. 28(1), N° 2, pp. 113-129.
- [10] Dominique François (2004), Endommagement et Rupture des matériaux, EDP Sciences.
- [11] Dieulesaint E. et Royer D. (1974), Ondes Elastiques dans les solides. Application au traitement du signal. Masson et CIE.
- [12] Destuynder P. (1986), Une Théorie Asymptotique des Plaques Minces en Elasticité Linéaire. RMA2 Masson.
- [13] Donzats M. et Rampal A. (Mars - Avril 1988), Bulletin de liaison des Laboratoires des ponts et chaussées, n°154, PP57-71.
- [14] Germain P. (1986), Mécanique des milieux continus, tome 1 et tome 2, Ecole Polytechnique, ellipses.

- [15] Gérardin M. et Rixen D. (1992), *Théorie des Vibrations, Application à la dynamique des structures*, 2<sup>e</sup> édition. Masson Paris, Milan, Barcelone, Bonn.
- [16] Godfred T.A. and Rossettos J.N. (December 1999), The onset of tear propagation at slits in stressed uncoated plain weave fabrics. *Journal of Applied Mechanics*, vol 66 pp 926-933.
- [17] Hai-Ping LIN (March 2003), Crack Identification of a Beam by Measurements of Natural Frequencies. *Jpn. J. Appl. Phys. Part 1, No. 3, Vol. 42 (2003) pp. 1341–1347.*
- [18] Harmuth H. (1995), Stability of crack propagation associated with fracture energy determined by wedge splitting specimen. *Theoretical and Applied fracture Mechanics Vol 23, PP 103-108.*
- [19] Henry M., Marandet B., Mudry F. et Pineau A. (1985), Effet de la Température et de la Vitesse de chargement sur la ténacité à rupture d'un acier faiblement allié. Interprétation par des critères locaux. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol 4, n°6, pp 741-768.*
- [20] Hesebeck O. (2001), On an Isotropic Damage Mechanics Model for Ductile Materials. *International journal of Damage Mechanics, Vol. 10, 325-346.*
- [21] HORII H. and NEMAT-Nasser S. (1985), Elastic fields of interacting inhomogeneities. *International Journal of Solids and Structures (Int.J.Solids Struct)*, Vol. 21, N° 7, pp 731-745.
- [22] Jean Ferrandon (1961), *Cours de Mécanique. Systèmes de corps rigides solide déformables et structures - fluide - vibrations et propagation.*

- Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications. Editions Eyrolles Editeur Paris.
- [23] Janis Varna, Andrejs Krasnikovs, Rajesh S. Kumar and Ramesh Talreja (2004), A Synergistic Damage Mechanics Approach to Viscoelastic Response of Cracked Cross-ply Laminates. *International journal of Damage Mechanics*, Vol. 13, 301-334.
- [24] Jin Lu, Xi Zhang and Yiu-Wing (Mai 2005), A Preliminary Study on Damage Wave in Elastic-brittle Materials. *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 14, No. 2, 127-147.
- [25] José L. López (1999), Asymptotic expansions of the whitaker functions forage order parameter. *Methods and Applications of Analysis*, vol 6 (2), pp. 249-256.
- [26] Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (mars 1986), Service d'études techniques des routes et autoroutes. 2<sup>e</sup> partie, dispositions particulières, Fascicule 32 : Ponts en béton précontraint, sous fascicule 32.1 Ponts courant.
- [27] Lacroix R., Fuentes A. and Thontier H. (1982), *Traité de Béton Armé*. Eyrolle.
- [28] Lalanne M., Berthier P. et Hagopian Der J. (1986), *Mécanique des vibrations linéaires* 2<sup>e</sup> édition refondue et augmentée, Masson.
- [29] Larralde J.P. (1981), *Resistanc des matériaux : Sollicitation simple*. Edition Masson EAP.
- [30] Leblond Jean-Baptiste (2003), *Mécanique de la Rupture Fragile et Ductile*. Germes Lavoisier.

- 
- [31] Lemaitre J., Chaboche J.L. et Germain P. (1985), *Mécanique des Matériaux Solides : Grandes déformations et endommagement*. Bordas Paris.
- [32] Leguillon D. and Sanchez-Palencia E. (1992), *Fracture in Heterogeneous Materials, Weak and strong Singularities*. New Advances in Computational Structural Mechanics P.Ladevèze and O.C.Zienkiewicz (Editors).Basic Instructions.
- [33] Leguillon D. and Sanchez-Palencia E. (1992), *On 3D Cracks Intersecting a Free Surface in Laminted Composites*. International Journal of Fracture, pp 25 - 40.
- [34] Leguillon D. and Sanchez-Palencia E. (1994), *Fracture in Anisotropic Materials-Cleavage*. Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity. (ICF8) Pergamon, pp 153 - 160.
- [35] Liu G.R., Xi Z.C., Lam K.Y. and Shang H.M. (December 1999), *A strip element method for analyzing wave scattering by a crack in an immersed composite laminate*. Journal of Applied Mechanic, vol 66 pp 898-903.
- [36] Liu C. T. (2000), *Effect of Load History on Damage Characteristics Near Crack Tips in a Particulate Composite Material*. International Journal of Damage Mechanics, Vol. 9, No. 1, 40-56.
- [37] Mclean M. and dyson B.F. (July 2000), *Modeling the effect of damage and microstructural evolutionon the creep behavior of engineering alloys*. Journal of Engineering Material and Technology, vol 122 pp 273-277.
- [38] Mohan R. and Brust F.W. (July 2000), *On void growth in elastic-nonlinear viscous solids under creep and cyclic creep conditions*. Journal of Engineering Materials and Technology, vol 122 pp 283-280.



- [39] Nougies J.P. (1993), Méthodes de calcul numérique 3<sup>e</sup> edition Masson.
- [40] Onck P.H., Nguyen B.N. and Van der Giessen E. (July 2000), The linkage between microscopic cavitation damage and macroscopic crack growth. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol 122 pp 279-282.
- [41] Piskounov N. (1980), Calcul différentiel et intégrale. Traduction française 9<sup>e</sup> edition tome II, edition Mir Moscou (Traduction française).
- [42] Pluvinage G. (1989), Mécanique Elastoplastique de la Rupture : Critère d'amorçage. Nabla.
- [43] Sanchez Hubert J. and Sanchez Palencia E. (1989), Vibration and Coupling of Continuous Systems Asymptotic Methods. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo.
- [44] Sanchez-Hubert J. et Sanchez-Palencia E. (1992), Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l'Homogénéisation : Application à la mécanique des milieux continus. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson Paris Milan Barcelone Born.
- [45] Sang Tae Kim, Damir Tadjiev and Hyun Tae Yang (2006), Fatigue Life Prediction under Random Loading Conditions in 7475-T7351 Aluminum Alloy using the RMS Model. *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 15, N° 1, pp 89 -102.
- [46] Sehitoglu H., Gall K. and Garcia A.M. (1996), Recent advances in fatigue crack growth modeling, *International Journal of Fracture* Vol 80 pp 165-192.
- [47] Stepine P. (1983), Résistance des Matériaux. Edition Mir. Moscou.

- [48] Wu M.S. and Guo J. (March 2000), Analysis of a sector crack in a three dimensional voronoi polycrystal with microstructural stresses. *Journal of applied Mechanics*, vol 67 pp 50-59.
- [49] Xin Sun and Dale G. Karr, (2001), A Dynamical Systems Approach to Bifurcation and Instability of Constitutive Relations for Brittle Damage Materials. *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 10, No. 4, 279-299.