Ministère de l'Enseignement Supérieur

République de Côte d'Ivoire
Union - Discipline - Travail

UNIVERSITE DE COCODY

N° 409/2004

THESE

Présentée à l'U.F.R de Mathématiques et Informatique
de l'Université de Cocody
pour obtenir le grade de

Docteur ès-sciences

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**
Option : **Probabilités**

Par

Abouo ELOUAFLIN

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES RETROGRADES AVEC TEMPS TERMINAL ALEATOIRE. HOMOGENEISATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Soutenue publiquement le 30 Octobre 2004

Jury :

Mr. Saliou Touré	: Professeur à l'Université de Cocody	Président.
Mr. Aurel Răşcanu	: Professeur à l'Université Alexandru I. Cuza, Roumanie	Rapporteur.
Mr. Brahim Mezerdii	: Professeur à l'Université Med Khider Biskra, Algérie	Rapporteur.
Mr. Ouagnina Hili	: Maître de Conférences à l'INPHB de Yamoussokro	Rapporteur.
Mr. Ibrahim Fofana	: Maître de Conférences à l'Université de Cocody	Examinateur.
Mr. Modeste N'Zi	: Professeur à l'Université de Cocody	Directeur.

Dédicace

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE.

A MA MÈRE.

"J'èspère que ce travail constitue le point de départ d'une entreprise que je souhaite exaltante et fructueuse".

Remerciements

Je remercie profondément Mr Saliou Touré qui me fait l'honneur de présider ce Jury.

J'exprime toute ma gratitude à Mrs Brahim Mezerdi et Ouagnina Hili qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma très haute considération.

Je remercie également Mrs Aurel Rascanu et S. Hamadène qui m'ont également fait l'honneur de rapporter cette thèse. Vos travaux sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades ont constitué pour moi, une source d'inspiration essentielle.

J'exprime toute ma reconnaissance à Mrs Ibrahim Fofana et Jérôme Adou qui ont bien voulu participer au jury de cette thèse.

J'adresse mes plus vifs et sincères remerciements à Mr Modeste N'ZI, qui par ses conseils pertinents, a su m'orienter dans mes recherches. En m'acceptant sous sa direction, il m'a permi de bénéficier de sa grande culture "stochastique" et m'a fait découvrir que la recherche est une énorme entreprise exaltante.

Les travaux de cette thèse ont été réalisés au sein de l'équipe de probabilités et statistique du laboratoire de mathématiques appliquées de l'UFR-MI de l'université de cocody d'Abidjan. Qu'il me soit permi de remercier les membres de cette équipe pour la bonne ambiance qu'ils ont su apporter durant ces années de doctorat. Une pensée particulière à Auguste Aman et Louis N'goran. Nos discussions m'ont beaucoup apporté.

Mes remeciements vont également à l'endroit de la direction de l'UFR-MI, notamment le directeur, Mr KOUA Konin. Je remercie aussi Mme N'goran Thérèse, la sécrétaire du directeur, Adou N'cho ainsi que tout le personnel de la dite UFR pour leur sollicitude durant ces années.

Qu'il me soit également permi de remercier les laboratoires PHYMAT de l'université de Toulon et du Var et LATP de l'université de Provence Aix-Marseille 1 pour leur hospitalité lors de mes stages de recherche. Je tiens à remercier Mrs Khaled Bahlali et Étienne Pardoux pour leur disponibilté à encadrer les travaux des dits stages. Qu'il me soit permi de leur témoigner toute ma reconnaissance.

Aussi, que tous les doctorants ivoiriens de la technopole de Marseille, Armel Yode, Firmin Koffi, Eric Akéké reçoivent ici toute ma reconnaissance pour leur sollicitude et leur encouragements.

Je remercie chaleuresement Maurice Amichia , Sylvestre Banga et Kacou Elouflin pour le soutien déterminant qu'ils m'ont apporté durant ces années de thèse. Dieu vous bénisse !

J'exprime toute ma reconnaissance à Christiane Elouaflin, Kassi Elouaflin , Pierre Elouaflin et Natacha Kobenan pour leur soutien et encouragement. Une pensée particulière à Monsieur et Madame Enokou, Monsieur et Madame Boko pour leur encouragement durant ces années.

Je ne saurai oublier Marie Audrey Ahoudjo dont la présence et le soutien ont été inestimables durant ces années de thèse.

Pour finir, j'exprime toute ma reconnaissance à mon frère ainé Dr Banga Eloiflin qui m'a permi de débuter les études universitaires dans des conditions les plus favorables.

Résumé de la thèse

Les travaux de cette thèse sont consacrés à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (en abrégé EDSRs) et leurs applications.

Dans une première partie, notre étude concerne les EDSRs avec condition dite de type stochastique. Le premier résultat est un théorème d'existence et d'unicité pour les solutions des EDSRs multivoques avec un temps terminal aléatoire pouvant prendre des valeurs infinies. Ensuite, l'existence et l'unicité de la solution pour les EDSRs avec condition de monotonie stochastique est établi. Une extension aux EDSRs-réfléchies à croissance polynomiale est également donnée.

Dans la deuxième partie, nous considérons d'une part la solution réfléchie d'une EDSR généralisée. Ce type d'équations a été introduit par Pardoux et Zhang [49]. Ce sont des EDSRs qui présentent une intégrale dirigée par un processus croissant. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité sous des hypothèses standard via la méthode de pénalisation. Comme application, nous donnons l'interprètation probabiliste du prix d'une option américaine et la représentation de la solution de viscosité d'une EDP parabolique avec conditions limites de type Neumann. D'autre part, nous présentons un résultat d'homogénéisation pour les EDPs sémi-linéaires dont les coefficients sont non périodiques mais admettent une limite au sens de Česaro. Dans un tel contexte, les coefficients limites peuvent admettre une discontinuité. Nous adoptons une approche probabiliste basée sur la convergence faible des solutions des EDSRs correspondantes dans la S-topologie.

Abstract of the thesis

In this thesis, we first address in part one, extension of existence and uniqueness results for backward stochastic equation (BSDE) with the so-call *stochastic condition*. That is, the Lipschitz constant are allowed to be an adapted process. More precisely, we prove an existence and uniqueness result for multivalued backward stochastic differential equations with random terminal time (allowed to takes infinite values). The solution is constrained to stay in the domain of a proper, lower semicontinuous and convex function. The classical Lipscithz condition on the drift is replaced by a stochastic one. We also establish an existence and uniqueness result

for backward stochastic differential equations whose coefficients satisfy a stochastic monotonicity condition. An extension to reflected backward stochastic differential equations (RBSDEs) in a domain of a lower semi-continuous convex function with stochastic monotone and polynomial growth generators is also established.

In part two, we study reflected solutions of generalized BSDEs. We establish an existence and uniqueness result under standard assumptions. We highlight its connections with an american option pricing. This is done in the case of decoupled FBSDEs. Doing so, our RBSDEs allow the diffusion price process to have a reflection. A link to an obstacle PDE problem of parabolic type with nonlinear boundary condition is also stated. On other hand, we present an homogenization result for some semilinear PDEs whose coefficients are non periodic but admit a limit in a Ćesaro sense. In such a case, the limit coefficients may have discontinuity. We use a probabilistic approach based on weak convergence of solutions to the linked BSDEs in the S-topology.

Table des matières

1 Introduction 1

Partie 1 : EDSRs avec coefficients de type stochastique 8

2 EDSR multivoque avec condition de Lipschitz stochastique 11
- 2.1 Notations, Hypothèses et formulation du problème 11
  - 2.1.1 Notations 11
  - 2.1.2 Hypothèses et formulation du problème 12
- 2.2 Cas du temps terminal déterministe 14
- 2.3 Cas du temps terminal aléatoire 22

3 EDSR avec condition de monotonie stochastique 33
- 3.1 Notations, hypothèses et définitions 33
  - 3.1.1 Notations 33
  - 3.1.2 Hypothèses et définitions 33
- 3.2 Existence et unicité sur un intervalle fixe 35
  - 3.2.1 Unicité 35
  - 3.2.2 Existence 37
- 3.3 Existence et unicité sur un intervalle aléatoire 45
- 3.4 EDSRs Réfléchies avec condition de monotonie stochastique et croissance polynomiale 52
  - 3.4.1 Existence et unicité : cas de la solution d'une EDSR 53
  - 3.4.2 Existence et unicité : cas de la solution d'une EDSR réfléchie . 59

Partie 2 : Sur les EDSRs généralisées réfléchies, Homogenéisation des EDPs via les EDSRs 66

4 EDSR généralisée réfléchie et applications 69
- 4.1 Formulation du problème 69
- 4.2 Résultat d'unicité et d'existence 70

4.3 Applications 79
4.3.1 Une classe de processus de diffusions réfléchis 79
4.3.2 Prix d'une option américaine revisitée 81
4.3.3 EDPs paraboliques avec obstacle et condition de Neumann non linéaire 84

5 Homogénéisation des EDPs à coefficients discontinus via les EDSRs 89
5.1 Introduction 89
5.2 Hypothèses et résultats préliminaires 90
5.2.1 Hypothèses 91
5.2.2 Résultat préliminaire 93
5.3 Convergence des EDSRs 95
5.3.1 Preuve du Lemme 5.3.1 98
5.3.2 Appendice : S-topologie 101

Bibliographie 105

Chapitre 1

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (en abrégé EDSRs) sont apparues sous forme linéaire en contrôle stochastique. C'est Bismut [5, 6] qui l'introduisit pour la première fois en étudiant l'équation adjointe dans la formulation du principe du maximum stochastique de Pontryagin. La théorie des EDSRs non-linéaires a débutée par l'article de Pardoux et Peng [42]. Depuis lors, de nombreux travaux ont enrichi la littérature sur les EDSRs et leurs applications en théorie des équations aux dérivées partielles (en abrégé EDPs), en théorie de jeu stochastique, en mathématiques financières (Cf. Pardoux et Peng [45], Hamadène et Lepeltier [27], El Karoui et al. [21]).
Nous rappelons ci-dessous ce qu'est la solution d'une EDSR non-linéaire et sa connection aux EDPs quasilinéaires.
Soit $T > 0$, un temps positif fixé. Soit $(W_t,\ \mathcal{F}_t,\ 0 \leq t \leq T)$, un mouvement Brownien standard et $\mathcal{F}_t$ sa filtration naturelle augmentée des ensembles nuls. Une solution d'une EDSR est un couple de processus $\mathcal{F}_t$-adaptés $(Y,\, Z)$ satisfaisant l'équation suivante :

$$\begin{cases} (i)\, \mathbb{E}\left(\int_0^T |Z_s|^2 ds\right) < \infty \\ \\ (ii)\, Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s,\, Y_s,\, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \ \ \forall t \in [0,\, T] \end{cases} \tag{1.1}$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable qui est la valeur de Y à l'instant final T. Notons que le processus Z, obtenu grâce au théorème de représentation des martingales browniennes, joue un rôle fondamental dans la résolution de l'équation (1.1). En effet, puisque nous connaissons la valeur de $\{Y_t\}$ à l'instant final, il n'est pas très naturel pour la solution $\{Y_t\}$ d'être adapté à chaque instant au passé du mouvement Brownien $\{W_s\,:\, s \leq t\}$. Pour satisfaire cette contrainte, le processus $\{Z_t\}$ est choisi indépendamment de $\{Y_t\}$ et adapté au passé de $\{W_s\,:\, s \leq t\}$ de sorte que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la solution de l'équation

$$Y_t = y - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^t Z_s dW_s$$

satisfait $Y_T = \xi$.
Sous une hypothèse de Lipschitz continuité, Pardoux et Peng [42] ont montré l'existence et l'unicité d'un couple (Y, Z) vérifiant l'équation (1.1) et satisfaisant

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 ds\right) < \infty.$$

A présent, considérons l' équation dite progressive- rétrograde découplée

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b\left(u, X_u^{t,x}\right) du - \int_s^T \sigma\left(u, X_u^{t,x}\right) dW_u, \ 0 \le t \le s \le T \\ \\ Y_s^{t,x} = g\left(X_T^{t,x}\right) + \int_s^T f\left(u, X_u^{t,x}, Y_u^{t,x}, Z_u^{t,x}\right) du - \int_s^T Z_u^{t,x} dW_u, \ 0 \le t \le s \le T. \end{cases}$$

Le générateur infinitésimal associé au processus de diffusion X est

$$\mathcal{L} = (\sigma\sigma^*)(t,x)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Sous de bonnes conditions sur $g\left(X_T^{t,x}\right)$ et f,

$$Y_t^{t,x} \triangleq u(t,x) \tag{1.2}$$

est l'unique solution de viscosité de l'EDP sémilinéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}u_i + f_i\left(x, u(x), (\nabla u_i \sigma)(x)\right) = 0, \ i = 1, ...d \\ \\ u_i(T,x) = l_i(x), \ i = 1, ...d. \end{cases}$$

De plus, puisque $Y_t^{t,x}$ est déterministe, la représentation précédente donne également la version non-linéaire de la formule de Feynmann-Kaç, c'est à dire :

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left(g\left(X_T^{t,x}\right) + \int_t^T f\left(u, X_u^{t,x}, Y_u^{t,x}, Z_u^{t,x}\right) du \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Pour une connaissance approfondie des EDSRs et leurs connections aux EDPs, nous ramenons le lecteur aux travaux de Pardoux [43, 44].

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies (en abrégé EDSR-R) sont une généralisation des EDSRs. Une EDSR-R s'obtient par l'ajout d'un processus continu dans l'équation d'une EDSR . Ce processus additionnel a pour fonction de maintenir la solution dans un domaine fixé ou au dessus d'un certain processus fixé appelé "obstacle". Le premier résultat dans cette direction est dû à El Karoui et al.[24]. Cvitanić et Karatzas [15], Hamadène et al. [28], Hamadène et Lepeltier [31], Hamadène et al. [29] ont étendu ce résultat aux EDSRs avec deux obstacles. L'extension des EDSR-R en dimension multiple a été etudié par Pardoux et Gegout-Petit [26], Pardoux et Rascanu [46], [47], N'zi et Ouknine[40] parmi tant d'autres. Hamadène et al. [29] ont étudié les EDSR-R à horizon infini mais sous une forte condition de Lipschitz sur le coefficient de dérive. Notons également que, Talay et Zheng [53] ont établi sous une hypothèse de Lipschitz uniforme, l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR-R avec deux barrières et un temps terminal aléatoire.

Depuis leur introduction, les EDSRs, en plus de l'intérêt théorique sont devenues un outil mathématique important dans plusieurs domaines, (cf. Hamadène et Lepeltier [27], El Karoui et al. [21]). Aussi, de nombreux auteurs ont établi l'existence et l'unicité de solution pour les EDSRs en affaiblissant la condition de Lipschitz sur le coefficient de dérive f. A ce propos, on peut citer parmi tant d'autres les travaux de Bahlali et Pardoux [1], Darling et Pardoux [19], Kobylanski [36]. Cependant, il faut noter que les résultats d'existence et d'unicité sont obtenus en supposant que les coefficients de Lipschitz ou de monotonie sont des constantes. Malheuresement dans de nombreuses applications, la non-dépendance du temps et le caractère non-aléatoire des dits coefficients ne sont pas vérifiés. Par exemple, il est établi que la détermination du prix d'une option européenne est équivalente à la résolution de l'EDSR linéaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} -dY_t & = & [r(t)Y(t)+\theta(t)Z(t)]\,dt - Z(t)dW_t \\ Y_T & = & \xi \end{array}\right.$$

où ξ est le prix de l'option à l'instant final, $r(t)$ le taux d'intérêt et $\theta(t)$ le vecteur risque. Ici, $r(t)$ et $\theta(t)$ sont des processus et ne sont pas bornés en général. Pour prendre en compte ces nouvelles difficultés et y remédier, El Karoui et Huang [22] ont introduit la condition dite de Lipschitz stochastique, c'est à dire : les coefficients de Lipschitz sont des processus $\mathcal{F}_t$- adaptés. Sous cette dernière condition, ils ont établit l'existence et l'unicité de solutions pour les EDSRs dirigées par une martingale ayant la propriété de la représentation prévisible et temps terminal aléatoire. Le cas particulier où l'EDSR est dirigée par un mouvement brownien standard a été reconsidéré par Bender and Kohlmann [8]. On notera qu'en affaiblissant la condition de Lipschitz, l'on doit imposer de fortes conditions d'intégrabilité aussi bien sur les données que sur les solutions. Des questions naturelles qui apparaissent sont :

1) *Peut on affaiblir davantage la condition de Lipschitz stochastique et prendre en compte les générateurs de la forme :*

$$f(t,\,y,\,z) = \mu(t)g(t,\,y) + h(t,\,0,\,z),\ (t,\,y,\,z) \in [0,\,T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d,$$

où $\mu(t)$ est un processus nonnégatif, $\mathcal{F}_t$-adapté, g satisfait une condition de monotonie uniforme en y et h satisfait la condition de Lipschitz stochastique en z.
2) *Dans le cas où l'EDSR est dirigée par un mouvement brownien standard, peut-on étendre le résultat de El Karoui et Huang [22] aux EDSR-Réfléchies ?*

Une autre étude menée grâce aux EDSRs est l'homogénéisation des EDPs nonlinéaires. L'homogénéisation est l'approche du comportement d'une variable vivant dans un milieu hétérogène par celui d'une variable vivant dans un milieu homogène. Par la représentation (1.2), Pardoux [50], Pardoux et Veretennikov [51] ont étudié l'approche probabiliste de l'homogénéisation des EDPs sémilinéaires. De fructueuses recherches ont produit divers résultats sur ce sujet (cf. Briand et Hu [11], Buckdahn et al. [12], Delarue [20], Lejay [37]). Il est aussi important de remarquer qu' à l'exception de Lejay, tous les résultats sur l'homogénéisation ont été établis sous une hypothèse de périodicité des coefficients et d'existence d'une densité stationnaire. Ici encore apparait une question naturelle :
3) *la propriété de l'homogénéisation des EDPs reste-t-elle vraie en l'absence de ces hypothèses ?.*
Une des réponses à cette question a été donné par Lejay [37] dans le cas particulier où le milieu est aléatoire et l'opérateur $\mathcal{L}$ est sous forme divergence. Khasminskii et Krylov [35] ont également considéré cette question en étudiant le comportement asymptotique d'un processus de diffusion dont la composante dite rapide est de récurrence nulle. En l'absence de périodicité et d'ergodicité, ils ont étudié la convergence du processus vers une diffusion dont les coefficients sont donnés par une moyenne dite au sens de Cèsaro. Le résultat obtenu permet l'étude asymptotique d'une solution faible d'une EDP linéaire.

Résultats et plan de la thèse

Dans ce travail, nous avons d'une part apporté une réponse positive "partielle" aux questions 1 et 2 et d'autre part combiné le résultat de Khasminskii et Krylov [35] avec la représentation probabiliste de la solution d'une EDP pour traiter l'homogénéisation des EDP sémilinéaires avec coefficients discontinus. Les résultats de nos travaux se présentent comme suit.

Partie 1 : EDSRs avec coefficients de type stochastique

EDSRs multivoques avec condition de Lipschitz stochastique et temps terminal aléatoire

Nous considérons une EDSR multivoque avec un temps terminal aléatoire pouvant prendre des valeurs dans $[0, +\infty]$. La solution est maintenue dans le domaine d'une fonction convexe Φ, propre et sémicontinue-inférieurement. La condition de Lipschitz uniforme est remplacée par une condition de Lipschitz stochastique, c'est à dire que le coefficient de dérive staisfait à la relation :
Il existe deux processus $r(t)$ et $u(t)$ non-négatifs, $\mathcal{F}_t$-adaptés tels que $\forall(y, z, y', z') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n}$,

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq r(t)|y - y'| + u(t)|z - z'|. \tag{1.3}$$

Sous cette condition, nous établissons l'existence et l'unicité d'un triplet (Y, Z, K) satisfaisant les conditions de la Définition 2.1.1. Notre démarche a consisté dans un premier temps, à regarder le cas où le temps terminal est déterministe en utilisant un argument de pénalisation puis dans un second temps, le cas de l'horizon aléatoire est traité en utilisant une suite approximante adéquate.

EDSR avec condition de monotonie stochastique

Dans ce chapitre, nous étudions l'EDSR (1.1) sous une condition de monotonie stochastique. Plus précisement, le générateur f satisfait :

$$\begin{cases} \langle y - y', f(t, y, z) - f(t, y', z)\rangle \leq \theta(t)|y - y'|^2 \\ \\ |f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq v(t)|z - z'| \\ \\ y \mapsto f(., ., y, z) \text{ est continu } dt \otimes d\mathbb{P}p.s. \end{cases} \tag{1.4}$$

Notre résultat d'existence et d'unicité prend en compte les générateurs du type : $f(t, y, z) = \mu(t)g(t, y) + h(t, 0, z)$, $(t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$ où $\mu(t)$ est un processus nonnégatif, $\mathcal{F}$-adapté, g satisfait une condition de monotonie uniforme en y et h satisfait la condition (1.4) en z. Nous étudions le cas du du temps terminal fixe ainsi que celui du temps terminal aléatoire. Notre démarche ici a consisté à trouver une bonne fonction régularisante f_n de f et déterminer un bon espace dans lequel la solution liée aux données (ξ, f_n) convergence vers la solution de l'EDSR considerée. Nous établissons par la suite une extension du Théorème 3.2.1 au cas où le générateur f présente une croissance de type polynomiale. Un théorème d'existence et d'unicité pour les EDSR réfléchies est également établi.

Partie 2 : Sur les EDSRs généralisées réfléchies, Homogenéisation des EDPs via les EDSRs

EDSR-R généralisées et applications

Nous considérons la solution réfléchie d'une EDSR généralisée. Ce type d'équations a été introduit par Pardoux et Zhang [49]. Ce sont des EDSRs qui présentent une intégrale dirigée par un processus croissant. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité sous des hypothèses standard via la méthode de pénalisation. Nous donnons d'une part, l'interprètation probabiliste du prix d'une option américaine et d'autre part la representation de la solution de viscosité d'une EDP parabolique avec condition aux limites de type Neumann.

Homogénéisation des EDP avec coefficients discontinus via les EDSRs

Nous présentons un résultat d'homogénéisation pour les EDP sémi-linéaires dont les coefficients sont non périodiques mais admettent une limite au sens de Česaro. Dans un tel cas, les coefficients limites peuvent admettre une discontinuité. Nous adoptons une approche probabiliste baséec sur la convergence faible dans la S-topologie des solutions des EDSRs correspondants .
Plus précisement, nous considerons

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}(t,\, x_1,\, x_2) + \mathcal{L}^\epsilon(x_1,\, x_2) v^\epsilon(t, x_1,\, x_2) + f(x_1,\, x_2,\, v^\epsilon(t,\, x_1,\, x_2)) = 0 \\ \\ v^\epsilon(0, x_1,\, x_2) = H(x_1,\, x_2), \end{array}\right. \tag{1.5}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\epsilon(x_1,\, x_2) = \epsilon^{-2} a_{00}(x_1,\, x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\epsilon^{-1} a_{i0}(x_1,\, x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_{2i}} \\ + a_{ij}(x_1,\, x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_{2i}\partial x_{2j}} + b_i(x_1,\, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

$a_{00} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \varphi_i^2$, $a_{i0} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \sigma_{ij}\varphi_i$, $a = \frac{1}{2}\sigma\sigma^*$.
Le générateur infinitésimal $\mathcal{L}^\epsilon$ est associé à un $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$-processus de diffusion $(x_t^{1,\epsilon},\, x_t^{2,\epsilon})$, (cf. Krylov et Khasminskii [35]).

$$\left\{\begin{array}{l} x_t^{1,\epsilon} = x_1 + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \varphi(x_s^{1,\epsilon},\, x_s^{2,\epsilon}) dW_s \\ \\ x_t^{2,\epsilon} = x_2 + \int_0^t b(x_s^{1,\epsilon},\, x_s^{2,\epsilon}) ds + \int_0^t \sigma(x_s^{1,\epsilon},\, x_s^{2,\epsilon}) dW_s \end{array}\right. \tag{1.6}$$

où $x_t^{1,\epsilon}$ est la composante rapide de récurrence nulle, φ (resp. σ) est à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ (resp. $\mathbb{R}^{d\times k}$) et W un est $\mathbb{R}^k$-brownien standard à composantes indépendantes. Les coefficients de $\mathcal{L}^\epsilon$ sont non périodiques mais admettent une limite au sens de Cesaro. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soient $\overline{b}(x_1,\, x_2)$, $\overline{a}(x_1,\, x_2)$ et $\overline{f}(x_1,\, x_2,\, y)$ la moyenne respective des coefficients définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\overline{b}(x_1,\, x_2) &= \frac{(pb)^+(x_2)}{p^+(x_2)} 1_{\{x_1>0\}} + \frac{(pb)^-(x_2)}{p^-(x_2)} 1_{\{x_1\leq 0\}}, \\
\overline{a}(x_1,\, x_2) &= \frac{(pa)^+(x_2)}{p^+(x_2)} 1_{\{x_1>0\}} + \frac{(pa)^-(x_2)}{p^-(x_2)} 1_{\{x_1\leq 0\}}, \\
\overline{f}(x_1,\, x_2,\, y) &= \frac{(pf)^+(x_2,\, y)}{p^+(x_2)} 1_{\{x_1>0\}} + \frac{(pf)^-(x_2,\, y)}{p^-(x_2)} 1_{\{x_1\leq 0\}},
\end{aligned}$$

avec $p(x_1,\, x_2)^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \varphi_i^2(x_1,\, x_2)$ et pour toute fonction $K \in \{p,\, pa,\, pb,\, pf\}$ K^+, K^- désigne la limite dans le sens de Cesaro. Il est important de noter que $\overline{b}$, $\overline{a}$ et $\overline{f}$ sont discontinus en $x_1 = 0$. Le but de ce travail est de montrer la convergence de v^ϵ vers un certain v solution de d'une EDP moyennisée de type :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,\, x_1,\, x_2) + \overline{L}(x_1,\, x_2)v(t, x_1,\, x_2) + \overline{f}(x_1,\, x_2,\, v(t,\, x_1,\, x_2)) = 0 \\ v(0, x_1,\, x_2) = H(x_1,\, x_2) \end{cases} \tag{1.7}$$

Travaux ayant servi à la rédaction de cette thèse

1 A. Elouaflin, M. N'Zi. Reflected backward stochastic differential equation with stochastic Lipschitz coefficients and random terminal time. *Article soumis pour publication.*

2 K. Bahlali, A. Elouaflin, M. N'Zi. Backward stochastic differential equation with stochastic monotone coefficients. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2004 : 4, 317-335.*

3 K. Bahlali, A. Elouaflin, M. N'Zi. Reflected backward stochastic differential equation with stochastic monotone and polynomial growth condition. *Article soumis pour publication.*

4 A. Aman, A. Elouaflin, M. N'Zi. Generalized BSDE with reflection and random terminal time. *Article soumis pour publication.*

5 K.Bahlali, A. Elouaflin, E.Pardoux. On homogenization property for discontinuous PDE. *Article soumis pour publication.*

Partie 1
EDSRs avec coefficients de type stochastique

Chapitre 2

EDSR multivoque avec condition de Lipschitz stochastique

2.1 Notations, Hypothèses et formulation du problème

2.1.1 Notations

Dans toute cette partie $W = \{W_t,\, t \geq 0\}$ désigne un mouvement Brownien n-dimensionnel défini sur un espace de probabilté filtré $(\Omega,\, \mathbb{P},\, \mathcal{F},\, \mathcal{F}_t)$ où $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle du mouvemevent Brownien augmenté de tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls de $\mathcal{F}$. Le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^d$ est désigné par $\langle , \rangle$ et sa norme par $|.|$. La norme sur $\mathbb{R}^{d\times n}$ est notée par $|Z| = tr(ZZ^*)$.

Soient $\beta \geq 0$ (à préciser plus tard) et a un processus non négatif, $\mathcal{F}_t$-adapté. Définissons le processus croissant $A(t) = \int_0^t a^2(s)\, ds$ et les ensembles suivants :

$$L^2(\beta,\, a,\, \tau,\, \mathbb{R}^d)$$
$$= \left\{\xi\, ;\ \text{variable aléatoire à valeurs dans } \mathbb{R}^d \text{ telle que } \|\xi\|_\beta^2 = \mathbb{E}(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2) < +\infty\right\}$$

$$L^2(\beta,\, a,\, [0,\, \tau,],\, \mathbb{R}^d)$$
$$= \left\{Y\, ;\ \text{processus } \mathcal{F}_t \text{ -adapté à valeurs dans } \mathbb{R}^d \text{ tel que } \|Y\|_\beta^2 = \mathbb{E}(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|Y(s)|^2 ds) < +\infty\right\}$$

$$L^{2,c}(\beta,\, a,\, [0,\, \tau,],\, \mathbb{R}^d)$$
$$= \left\{Y\, ;\ \text{processus continu, } \mathcal{F}_t \text{ -adapté à valeurs dans } \mathbb{R}^d \text{ tel que } \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq\tau} e^{\beta A(s)}|Y(s)|^2) < +\infty\right\}$$

$L^{2,a}\left(\beta,\, a,\, [0,\, \tau,],\, \mathbb{R}^d\right)$

$= \left\{ Y \text{ ; processus } \mathcal{F}_t \text{ -adapté à valeurs dans } \mathbb{R}^d \text{ tel que } \|aY\|_\beta^2 = \mathbb{E}(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s) |Y(s)|^2 ds) \right\}$

Notons

$$\|Y\|_{\beta,\, c}^2 = \mathbb{E}\left(\sup_{0 \le s \le \tau} e^{\beta A(s)} |Y(s)|^2 \right)$$

$L^2(\beta,\, a,\, [0,\, \tau,],\, \mathbb{R}^d)$ muni de la norme $\|Y\|_\beta$ est un espace de Banach. En conséquence,

$$\mathcal{M}(\beta,\, a,\, \tau) = L^{2,a}(\beta,\, a,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R}^d) \times L^2(\beta,\, a,\, [0,\, \tau,],\, \mathbb{R}^{d\times n})$$

est un espace de Banach avec la norme $\|(Y,\, Z)\|_\beta^2 = \|aY\|_\beta^2 + \|Z\|_\beta^2$. Nous désignons par $\mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau)$ le sous espace de $\mathcal{M}(\beta,\, a,\, \tau)$ définie de la façon suivante :

$\mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau) = \left(L^{2,a}(\beta,\, a,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R}^d) \cap L^{2,c}(\beta,\, a,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R}^d)\right) \times L^2(\beta,\, a,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R}^{d\times n})$

On muni $\mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau)$ de la norme

$$\|(Y,\, Z)\|_{\beta, c}^2 = \|Y\|_{\beta, c}^2 + \|aY\|_\beta^2 + \|Z\|_\beta^2.$$

Remarque 2.1.1. *Si a et b sont deux processus non-négatifs, $\mathcal{F}_t$-adaptés tels que $b > a$, alors $L^2(\beta,\, b,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R}^d) \subset L^2(\beta,\, a,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R}^d)$. Par conséquent $\mathcal{M}^c(\beta,\, b,\, \tau) \subset \mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau)$.*

2.1.2 Hypothèses et formulation du problème

Soit $f\, :\, \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction telle que pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n}$, $f(.,\, .,\, y,\, z)$ est $\mathcal{F}_t$-adapté.
Soient τ un temps d'arrêt pouvant prendre des valeurs inifinies et ξ une variable aléatoire (v.a) $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.
Soit $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow (-\infty,\, +\infty]$ une fonction convexe, propre, sémi-continue inférieurement. $\partial\Phi$ désigne l'opérateur sous-difféfferentiel de Φ.
Posons

$$\mathcal{D}om(\Phi) = \{x \in \mathbb{R}^d : \Phi(x) < +\infty\}$$

$$\partial\Phi(u) = \{u^* \in \mathbb{R}^d : \Phi(z) \ge \Phi(u) + \langle z - u,\, u^*\rangle\, \forall z \in \mathbb{R}^d\}$$

$$\mathcal{D}om(\partial\Phi) = \{u \in \mathbb{R}^d : \partial\Phi(u) \neq \emptyset\}$$

$$Gr(\partial\Phi) = \{(u,\, u^*) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : u \in \mathcal{D}om(\partial\Phi),\, u^* \in \partial\Phi(u)\}$$

Dans la suite, nous supposons sans perte de généralité que $\Phi(x) \geq \Phi(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$; de sorte que nous avons $(0,\, 0) \in Gr(\partial\Phi)$. Nous supposerons également que $int(\mathcal{D}om(\Phi)) \neq \emptyset$.
Pour $\beta > 0$, le triplet $(\tau,\, \xi,\, f)$ satisfait les conditions :

(H1) τ est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt.

(H2) Il existe deux processus $r(t)$ et $u(t)$ non-négatifs, $\mathcal{F}_t$-adaptés tels que $\forall (y,\, z,\, y',\, z') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n}$,

$$|f(t,\, y,\, z) - f(t,\, y',\, z')| \leq r(t)|y - y'| + u(t)|z - z'|.$$

La condition **(H2)** est dite condition de Lipschitz stochastique.

(H3) $a^2(t) = r(t) + u^2(t) > 0$.

(H4) $\begin{cases} (i)\ \xi \text{ est une v.a. } \mathcal{F}_\tau\text{-mesurable telle que } \xi \in L^2(\beta,\, a,\, \tau,\, \mathbb{R}^d). \\ (ii)\ \xi \in \overline{\mathcal{D}om(\Phi)}. \end{cases}$

(H5) $\frac{f(.,\,.,0,0)}{a} \in L^2(\beta,\, a,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R}^d)$.

(H6) Le processus $\Gamma = \left\{\Gamma_t = \frac{\mathbb{E}\left(\sqrt{\Phi(\xi)}|\mathcal{F}_t\right)}{a},\ t \geq 0\right\} \in L^2(\beta,\, 2a,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R})$.

A présent, nous introduisons l'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie (en abrégé EDSR-R) associée au quadruplet $(\tau,\, \xi,\, f,\, \Phi)$.

Définition 2.1.1. *Une solution de l'EDSRR $(\tau,\, \xi,\, f,\, \Phi)$ est un triplet $(Y,\, Z,\, K)$ de processus $\mathcal{F}_t$-adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \times \mathbb{R}^d$ tel que :*

(i) $(Y,\, Z) \in \mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau)$, c'est à dire

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\beta A(t)}|Y_t|^2 + \int_0^\tau e^{\beta A(t)} a^2(t)|Y_t|^2 dt + \int_0^\tau e^{\beta A(t)}|Z_t|^2 dt\right) < +\infty.$$

(ii) $\{Y_t\, :\, t \geq 0\}$ est un processus continu à valeurs dans $\overline{\mathcal{D}om(\Phi)}$ sur l'ensemble $\{t \leq \tau\}$.

(iii) $\{K_t : t \geq 0\}$ *est un processus continu satistfaisant* $K_0 = 0$. *De plus* K *est absolument continu par rapport à la mesure* $e^{\beta A(t)} a^{-2}(t)dt$.

(iv) Pour tout $T \geq t \geq 0$,

$$Y_{t\wedge\tau} = Y_{T\wedge\tau} + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s dW_s + K_{T\wedge\tau} - K_{t\wedge\tau}.$$

(v) Pour tout processus optionnels (v, w) *tel que* $(v_t, w_t) \in Gr(\partial\Phi)$ *sur l'ensemble* $\{t \leq \tau\}$, *on a*

$$\int_0^{T\wedge\tau} \langle Y_s - v_s, dK_s + a^2(s)w_s ds\rangle \leq 0, \text{ pour tout } T \geq 0.$$

(vi) $Y_t \equiv \xi$, $Z_t \equiv 0$, $K_t \equiv K_\tau$ *sur l'ensemble* $\{t > \tau\}$.

2.2 Cas du temps terminal déterministe

Cette section est consacrée à l'étude de l'EDSR-R (T, ξ, f, Φ), avec T un temps terminal fixé.
Tout d'abord, rappelons quelques résultats sur l'approximation de Yosida des opérateurs sous-différentiels (voir Brezis [9]). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ la fonction $\Phi_n : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi_n(x) = \min_{y\in\mathbf{R}^d} \left\{\frac{n}{2}|x - y|^2 + \Phi(y)\right\}$$

est une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\nabla\Phi_n = A_n$, où $A_n(x) = n(x - J_n x)$ est l'approximation de Yosida de l'opérateur $\partial\Phi$ et J_n sa régularisée de Yosida. A_n est lipschitzienne de constante de Lipschitz n. On a également

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^d} \Phi(y) \leq \Phi(J_n(x)) \leq \Phi_n(x) \leq \Phi(x) \tag{2.1}$$

De plus, il existe b appartenant à $int(\mathcal{D}om(\Phi))$ et une paire de nombre positifs (μ, γ) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\langle A_n(x), x - b\rangle \geq \gamma|A_n(x)| - \mu|x - b| - \gamma\mu. \tag{2.2}$$

Pour des compléments sur (2.2), nous réferons le lecteur à Cépa [13].
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous considerons l'EDSR non réfléchie

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T [f(s, Y_s^n, Z_s^n) - a^2(s)A_n(Y_s^n)]ds - \int_t^T Z_s^n dW_s, \forall t \in [0, T] \tag{2.3}$$

En utilisant El Karoui et Huang [22], l'EDSR (2.3) admet une solution unique $(Y^n,\, Z^n) \in \mathcal{M}^c(\beta,\, 2a,\, T)$. Mais en vertu de la Remarque 2.1.1, on a $(Y^n,\, Z^n) \in \mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, T)$. Posons

$$K_t^n = -\int_0^t a^2(s) A_n(Y_s^n) ds.$$

Dans la suite, nous établissons les Lemmes préliminaires suivants qui donnent des estimations sur la suite $(Y^n,\, Z^n)$.

Lemme 2.2.1. *Soit $T > 0$. Supposons que les hypothèses* **(H1)** – **(H5)** *sont satisfaites pour $\tau \equiv T$. Alors pour β suffisamment grand, on a*

(i)

$$\sup_{n\in I\!N^*} I\!E\left(\int_0^T e^{\beta A(t)} a^2(t)|Y_t^n|^2 dt + \int_0^T e^{\beta A(t)} |Z_t^n|^2 dt + \int_0^T e^{\beta A(t)} a^2(t) |A_n(Y_t^n| dt\right) < +\infty.$$

(ii)

$$\sup_{n\in I\!N^*} I\!E\left(\int_0^T e^{\beta A(t)} a^2(t) |A_n(Y_t^n|^2 dt\right) < +\infty.$$

(iii)

$$\sup_{n\in I\!N^*} I\!E\left(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta A(t)} |Y_t^n|^2\right) < +\infty.$$

Preuve. En utilisant la formule d'Itô et l'inégalité (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
& e^{\beta A(t)}|Y_t^n - b|^2 + \beta \int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s) |Y_s^n - b\,^2 ds \\
+ & \int_t^T e^{\beta A(s)} |Z_s^n|^2 ds + 2\gamma \int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s) |A_n(Y_s^n| ds \\
\leq & e^{\beta A(T)} |\xi - b|^2 + 2\int_t^T e^{\beta A(s)} \langle Y_s^n - b,\, f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)\rangle ds \\
+ & 2\mu \int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s) |Y_s^n - b| ds + 2\gamma\mu \int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s) ds - 2\int_t^T e^{\beta A(s)} \langle Y_s^n - b,\, Z_s^n dW_s\rangle.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
2\langle Y_s^n - b,\, f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)\rangle &\leq 2|Y_s^n - b| \left(r(s)|Y_s^n - b| + u(s)|Z_s^n| + |f(s,\, b,\, 0)|\right) \\
&\leq 2r(s)|Y_s^n - b|^2 + 2u^2(s)|Y_s^n - b|^2 + \frac{1}{2}|Z_s^n|^2
\end{aligned}$$

$$+(\frac{\beta}{2}-1)a^2(s)|Y_s^n-b|^2+(\frac{2}{\beta-2})\frac{|f(s,b,0)|^2}{a^2(s)}$$

et

$$2\mu\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n-b|ds\le\mu^2\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)ds+\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n-b|^2ds$$

On déduit que

$$\begin{aligned}
& e^{\beta A(t)}|Y_t^n-b|^2+(\frac{\beta}{2}-2)\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2ds+\frac{1}{2}\int_t^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2ds\\
+ & \ 2\gamma\int_0^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|A_n(Y_s^n|ds\\
\le & \ e^{\beta A(T)}|\xi-b|^2+(2\gamma\mu+\mu^2)\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)ds\\
+ & \ \frac{2}{\beta-2}\int_t^T e^{\beta A(s)}(\frac{|f(s,b,0)|^2}{a^2(s)}ds-2\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n-b,\ Z_s^n dW_s\rangle.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
& (\frac{\beta}{2}-2)\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2ds\right)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2ds\right)\\
+ & \ 2\gamma\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|A_n(Y_s^n|ds\right)\\
\le & \ \mathbb{E}\left(e^{\beta A(T)}|\xi-b|^2\right)+(2\gamma\mu+\mu^2)\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)ds\right)\\
+ & \ \frac{2}{\beta-2}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,b,0)|^2}{a^2(s)}ds\right)
\end{aligned}$$

En choisissant $\beta>4$, et en utilisant **(H4-i)** et **(H4-ii)**, on conclut que (i) est vrai. Pour la preuve de (ii), posons $\Psi_n(x)=\frac{1}{n}\Phi_n(x)$. Par convolution avec une fonction suffisament régulière, on peut appliquer la formule d'Itô à la fonction Ψ_n pour obtenir ce qui suit :

$$
\begin{aligned}
& \Psi_n(Y_t^n)e^{\beta A(t)} + \frac{1}{n}\int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s)|A_n(Y_s^n)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_t^T e^{\beta A(s)} Tr(Z_s^n Z_s^{n*} Hess\Psi_n(Y_s^n) ds \\
\leq \ & \Psi_n(\xi)e^{\beta A(T)} + \frac{1}{n}\int_t^T e^{\beta A(s)} |A_n(Y_s^n)||f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)| ds - \beta \int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s)\Psi_n(Y_s^n) ds \\
- \ & \int_t^T e^{\beta A(s)} \langle \nabla \Psi_n(Y_s^n),\, Z_s^n dW_s\rangle \\
\leq \ & \Psi_n(\xi)e^{\beta A(T)} + \frac{1}{2n}\int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s)|A_n(Y_s)|^2 ds + \frac{1}{2n}\int_t^T e^{\beta A(s)} \frac{|f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)|^2}{a^2(s)} ds \\
- \ & \beta\int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s)\Psi_n(Y_s) - \int_t^T e^{\beta A(s)} \langle \nabla \Psi_n(Y_s^n),\, Z_s^n dW_s\rangle .
\end{aligned}
$$

Puisque $\Phi(y) \geq \Phi(0) = 0$, on a

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\Psi_n(Y_t^n)e^{\beta A(t)} + \frac{1}{2n}\int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s)|A_n(Y_s^n)|^2 ds\right) \\
& \leq \mathbb{E}\left(\Psi_n(\xi)e^{\beta A(T)}\right) + \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)} \frac{|f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)|^2}{a^2(s)} ds\right)
\end{aligned}
$$

En utilisant (i), $(\mathbf{H2})$ et $(\mathbf{H4} - \mathbf{ii})$, on déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$
\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}(\Psi_n(Y_t^n)e^{\beta A(T)}) \leq \frac{C}{n},
$$

par suite (ii) est clair.

Pour prouver (iii), nous appliquons la formule d'Itô pour obtenir

$$
\begin{aligned}
& e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2 + \int_t^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds + \beta\int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s)|Y_s^n|^2 ds \\
& = e^{\beta A(T)}|\xi|^2 + 2\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)\rangle ds \\
& -2\int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s)\langle Y_s^n,\, A_n(Y_s^n)\rangle ds - 2\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, Z_s^n dW_s\rangle .
\end{aligned}
$$

D'autre part la condition $(\mathbf{H2})$ et l'inégalité de Young permet d'obtenir

$$
2|\langle Y_s^n,\, f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)\rangle| \leq (\frac{\beta}{2} + 2)a^2(s)|Y_s^n|^2 + \frac{1}{2}|Z_s^n|^2 + \frac{2}{\beta}\frac{|f(s,\, 0,\, 0)|^2}{a^2(s)}
$$

$$
2a^2(s)|\langle Y_s^n,\, A_n(Y_s^n)\rangle| \leq \frac{\beta}{2}a^2(s)|Y_s^n|^2 + \frac{2}{\beta}a^2(s)|A_n(Y_s^n)|^2 .
$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds \\
\leq \; & e^{\beta A(T)}|\xi|^2 + 2\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2 ds + \frac{2}{\beta}\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|A_n(Y_s^n)|^2 ds \\
+ \; & \frac{2}{\beta}\int_t^T e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\, 0,\, 0)|^2}{a^2(s)} ds - 2\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, Z_s^n dW_s\rangle.
\end{aligned}$$

De plus, en vertu de l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy pour les intégrales stochastiques (voir Barlow et Protter [7]) et de l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
& 2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, Z_s^n dW_s\rangle|\right) \\
\leq \; & \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2\right) + 2C^2\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2\right) \\
\leq \; & 2\mathbb{E}\left(e^{\beta A(T)}|\xi|^2\right) + 4\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2 ds\right) + \frac{4}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|A_n(Y_s^n)|^2 ds\right) \\
& + \frac{4}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\, 0,\, 0)|^2}{a^2(s)} ds\right) + 4C^2\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

On obtient alors (iii) en utilisant (**H5**), (i) et (ii).■

Remarque 2.2.1. *(a) L'estimation (i) peut être obtenu en utilisant seulement* $\Phi(x) \geq \Phi(0) = 0$ *et la formule d'Itô pour* $e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2$.
(b) Une autre méthode pour la preuve de (ii) est obtenue en utilisant le résultat suivant dit d'inégalité sous-différentielle stochastique dû à Pardoux et Rascanu [46] :
Soit $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *est une fonction de clacsse* C^1 *telle que pour chaque* $t \geq 0$, $\Psi(t,\, .) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe. Si* $\{X_t;\, t \geq 0\}$ *est une semi-martingale continue ; alors* $\forall s \leq t$:

$$\Psi(s,\, X_s) + \int_s^t \left[\frac{\partial \Psi(r,\, X_r)}{\partial r} dr + \langle \nabla_x \Psi(r,\, X_r),\, dX_r\rangle\right] \leq \Psi(t,\, X_t),\; \mathbb{P} - p.s.$$

En effet, il suffit de poser $\Psi(t,\, Y_t^n) = e^{\beta A(t)}\Phi_n(Y_t^n)$ *et l'on obtient le résultat par des calculs analogues à la preuve précécedente.*

Proposition 2.2.1. *Soit $T > 0$. Supposons que les hypothèses* **(H1)** – **(H5)** *sont satisfaites pour $\tau \equiv T$. Alors pour β suffisamment grand et pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} e^{\beta A(t)}|Y_t^n - Y_t^m|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n - Y_s^m|^2 ds\right)$$
$$+\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n - Z_s^m|^2 ds\right) \le C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Preuve. Par la formule d'Itô, on obtient

$$e^{\beta A(t)}|Y_t^n - Y_t^m|^2 + \int_t^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n - Z_s^m|^2 ds + \beta\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n - Y_s^m)|^2 ds$$
$$= 2\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n - Y_s^m, f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^m, Z_s^m)\rangle ds$$
$$-2\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n - Y_s^m, (Z_s^n - Z_s^m)dW_s\rangle ds - 2\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)\langle Y_s^n - Y_s^m, A_n(Y_s^n) - A_m(Y_s^m)\rangle ds.$$

Puisque,

$$I = J_n + \frac{1}{n}A_n = J_m + \frac{1}{m}A_m;\ A_n(Y_s^n) \in A(J_n(Y_s^n);\ A_m(Y_s^m) \in A(J_m(Y_s^m) \text{ et } ab \le \frac{1}{4}a^2 + b^2,$$

on peut montrer que

$$-\langle Y_s^n - Y_s^m, A_n(Y_s^n) - A_m(Y_s^m)\rangle \le \frac{1}{4m}|A_n(Y_s^n)|^2 + \frac{1}{4n}|A_m(Y_s^m)|^2.$$

On obtient alors :

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t)}|Y_t^n - Y_t^m|^2\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n - Z_s^m|^2 ds\right)$$
$$+\ (\beta - 2)\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n - Y_s^m)|^2 ds\right)$$
$$\le\ \frac{1}{2m}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|A_n(Y_s^n)|^2 ds\right) + \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|A_m(Y_s^m)|^2 ds\right).$$

Grâce au Lemme 2.2.1, on déduit que

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t)}|Y_t^n - Y_t^m|^2\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n - Z_s^m|^2 ds\right)$$
$$+(\beta - 2)\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n - Y_s^m)|^2 ds\right) \le C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Par suite, en utilusant l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy (en abrégé BDG) et un argument similaire à celui de la preuve du (iii) du Lemme 2.2.1, on montre alors que pour β suffisamment grand, on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta A(t)}|Y_t^n - Y_t^m|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n - Y_s^m)|^2 ds\right)$$
$$+\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n - Z_s^m|^2 ds\right) \leq C\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right). \blacksquare$$

Pour la suite, nous avons besoin du Lemme suivant dû à Saisho [52].

Lemme 2.2.2. *Soient $(k^n : n \geq 1)$ et $(y^n : n \geq 1)$ deux suites de l'espace $\mathcal{C}([0, T], I\!R^d)$ convergentes vers k et y respectivement. On suppose que k^n est à variation bornée avec $\sup_{n\in\mathbf{N}^*}\|k^n\|_T < +\infty$, où $\|k^n\|_T$ désigne la variation totale de k sur $[0, T]$. Alors*

$$\int_0^T \langle y^n, dk_s^n\rangle \longrightarrow \int_0^T \langle y, dk_s\rangle.$$

A présent, nous énonçons le principal résultat de cette section.

Théorème 2.2.1. *Soit $T > 0$. Supposons que les hypothèses* **(H1)** – **(H5)** *sont satisfaites pout $\tau \equiv T$. Alors, l'EDSR-R (T, ξ, f, Φ) admet une solution unique (Y, Z, K). De plus pour β suffisamment grand, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} I\!E\left(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\beta A(t)}|Y_t^n - Y_t|^2\right) + I\!E\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n - Y_s)|^2 ds\right)$$
$$+I\!E\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}|Z_s^n - Z_s|^2 ds\right) = 0.$$
$$\lim_{x\to+\infty} I\!E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|K_t^n - K_t|^2\right) = 0.$$

Preuve. Existence. D'après la Proposition 2.2.1, (Y^n, Z^n) est une suite de cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{M}^c(\beta, a, T)$. Notons $Y = \lim Y^n$, $Z = \lim Z^n$ et posons

$$K_t^n = Y_0^n - Y_t^n - \int_0^t f(s, Y_s^n, Z_s^n)ds + \int_0^t Z_s^n dW_s,$$
$$K_t = Y_0 - Y_t - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_0^t Z_s dW_s.$$

On peut alors montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |K_t^n - K_t|^2\right) = 0.$$

Ainsi la suite $(K^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers K dans $L^2(\Omega)$.

Montrons à présent que le triplet $(Y,\, Z,\, K)$ est solution de l'EDSR-R $(T,\, \xi,\, f,\, \Phi)$. En prenant une sous-suite extraite notée (K^n), on a

$$\sup_{0\leq t\leq T} |K_t^n - K_t| \longrightarrow 0$$

quand $n \to +\infty$. Il s'en suit que K est un processus continu. De plus, par le Lemme 2.2.1, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(t)} a^2(t) |A_n(Y_t^n|^2 dt\right) < +\infty.$$

En conséquence, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\|K^n\|_{H^1(0,\, T,\, dL_s,\, \mathbb{R}^d)} < +\infty,$$

où $dL_s = e^{\beta A(s)} a^{-2}(s) ds$ et $H^1(0,\, T,\, dL_s,\, \mathbb{R}^d)$ est l'espace de Sobolev des fonctions absolument continus ayant une dérivée dans $L^2([0,\, T],\, dL_s)$. Ainsi $(K^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega,\, H^1(0,\, T,\, dL_s,\, \mathbb{R}^d))$. On en déduit l'existence d'une sous-suite de $(K^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge faiblement. La limite $K \in L^2(\Omega,\, H^1(0,\, T,\, dL_s,\, \mathbb{R}^d))$ et pour presque tout $\omega \in \Omega$, $K_\cdot(\omega) \in H^1(0,\, T,\, dL_s,\, \mathbb{R}^d)$. Ainsi K est absolument continu et il existe $V_t \in \partial\Phi(Y_t)$ tel que

$$-dK_t = V_t dL_t.$$

La continuité du processus Y provient de la convergence de (Y^n) dans l'espace $L^{2,c}(\beta,\, a,\, [0,\, T],\, \mathbb{R}^d)$.

Montrons que :

$$\mathbb{P}\left\{Y_t \in \overline{\mathcal{D}om(\Phi)}\right\} = 1,\, \forall t \geq 0.$$

Supposons qu'il existe $0 < t_0 < +\infty$ et $B_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B_0) > 0$ et $Y_{t_0} \notin \overline{\mathcal{D}om(\Phi)}$, $\forall\omega \in B_0$. De la continuité de Y, on déduit l'existence de $\delta > 0$, $B_1 \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B_1) > 0$, $Y_t(\omega) \notin \overline{\mathcal{D}om(\Phi)}$ pour tout $(\omega,\, t) \in B_1 \times [t_0 - \delta,\, t_0 + \delta]$. Mais puisque

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)} a^2(s) |A_n(Y_s^n)| ds\right) < +\infty,$$

le Lemme de Fatou donne

$$\int_{B_1}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \liminf_n e^{\beta A(s)} a^2(s)|A_n(Y_s^n)|ds d\mathbb{P} < +\infty,$$

ce qui est impossible, puisque $\lim_n \inf e^{\beta A(s)} a^2(s)|A_n(Y_s^n)| = +\infty$ sur l'ensemble $B_1 \times [t_{t_0} - \delta,\, t_{t_0} + \delta]$.
Achevons la preuve de l'existence en établissant (v) de la Définition 2.1.1. Pour ce faire, nous utilisons le Lemme 2.2.1. En effet, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\int_0^T a^2(s)|A_n(Y_s^n)|ds\right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)} a^2(s)|A_n(Y_s^n)|ds\right) < +\infty.$$

Moyennant une sous suite (si nécéssaire) K^n et Y^n convergent uniformement vers K et Y. Pour tout processus optionnel $(v_s,\, w_s) \in Gr(\partial\Phi)$, on a

$$\int_0^T \langle\, J_n(Y_s^n) - v_s,\, dK_s^n + w_s a^2(s)ds\,\rangle = \int_0^T a^2(s)\langle\, J_n(Y_s^n) - v_s,\, -A_n(Y_s^n) + w_s ds\,\rangle \leq 0,\ \mathbb{P}-p.s$$

En passant à la limite et en utilisant le Lemme 2.2.2, on obtient (v).

Unicité. L'unicité est une conséquence immédiate de ce qui suit. En effet, soit $(Y,\, Z,\, K)$ (resp. $(Y',\, Z',\, K')$) une solution de l'EDSR-R $(T,\, \xi,\, f,\, \Phi)$ (resp, $(T,\, \xi',\, f',\, \Phi)$). Puisque $\partial\Phi$ est un opérateur monotone, $-\frac{dK_t}{dL_t} \in \partial\Phi(Y_t), -\frac{dK'_t}{dL_t} \in \partial\Phi(Y'_t)$; on peut aisement vérifier que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)}\langle\, Y_s - Y'_s,\, dK_s - dK'_s\rangle\right) \leq 0.$$

En appliquant la formule d'Itô à $e^{\beta A(t)}|Y_t - Y'_t|^2$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t)}|Y_t - Y'_t|^2\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)}|Z_s - Z'_s|^2 ds\right) + C\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s)|Y_s - Y'_s|^2 ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(T)}|\xi - \xi'|^2\right) + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\beta A(s)} \frac{|f(s,\, Y'_s,\, Z'_s) - f'(s,\, Y'_s,\, Z'_s)}{a^2(s)} ds\right). \blacksquare$$

2.3 Cas du temps terminal aléatoire

Dans cette section, nous utilisons un schéma d'approximation dont la construction et la convergence sont basées sur le Lemme fondamental suivant :

Lemme 2.3.1. *On suppose que ξ vérifie* $(\mathbf{H4}), (\mathbf{H6})$. *Alors*

(i) Il existe un processus $\{\eta_t : t \geq 0\}$ L_2-intégrable tel que $\xi = I\!E(\xi) + \int_0^\tau \eta(s)dW_s$.

(ii) Le processus $\{\xi_t : t \geq 0\}$ défini en posant $\xi_t = I\!E(\xi\,|\mathcal{F}_t)$ est tel que la paire $(\xi_t, \eta_t) \in \mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$.

(iii) De plus $I\!E\left(\int_0^\tau e^{2\beta A(s)}\frac{\Phi(\xi_s)}{a^2(s)}ds\right) < +\infty$.

Preuve.

(i) : Puisque $L^2(\beta, a, \tau) \subset L^2(0, 0, \tau)$, on a $\mathbb{E}(|\xi|^2) < +\infty$. Le théorème de représentation d'Itô donne l'existence d'un processus η, L_2-intégrable satisfaisant (i).

(ii) : Puisque $\xi_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{t\wedge\tau})$, on a

$$e^{\frac{\beta}{2}A(t\wedge\tau)}|\xi_{t\wedge\tau}| \leq \mathbb{E}(e^{\frac{\beta}{2}A(t\wedge\tau)}|\xi|\;|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}).$$

Grâce aux inégalités de Doob et de Jensen, on déduit que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\beta A(t)}|\xi_t|^2) \leq 4\mathbb{E}(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2). \tag{2.4}$$

De plus par la formule d'Itô, pour tout $T \geq t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
&e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\xi_{t\wedge\tau}|^2 + \beta\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\xi_s|^2ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2ds\\
&\quad = e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\xi_{T\wedge\tau}|^2 - 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle\,\xi_s,\,\eta_s dW_s\rangle.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\xi_{t\wedge\tau}|^2\right) + \beta\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\xi_s|^2)ds\right)\\
+ &\;\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2)ds\right) \qquad (2.5)\\
\leq &\;\mathbb{E}\left(e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\xi_{T\wedge\tau}|^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau}|\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle\,\xi_s,\,\eta_s dW_s\rangle|\right).
\end{aligned}$$

En combinant les inégalités de Burkhölder-Davis-Gundy et l'inégalité de Young $2ab \leq \gamma^2a^2 + \frac{b^2}{\gamma^2}$, on obtient

$$2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau}|\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle\,\xi_s,\,\eta_s dW_s\rangle|\right)$$

$$\leq 2C\mathbb{E}\left\{\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\xi_t|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2)ds\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\leq \gamma^2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\beta A(t)}|\xi_t|^2\right)+\frac{C^2}{\gamma^2}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2)ds\right).$$

Ainsi, l'inégalité (2.5) devient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\xi_{t\wedge\tau}|^2\right)+\beta\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\xi_s|^2)ds\right)+\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\xi_{T\wedge\tau}|^2\right)+\gamma^2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\beta A(t)}|\xi_t|^2\right)+\frac{C^2}{\gamma^2}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2ds\right).$$

En choisissant $\gamma^2 > 2C^2$, il s'en suit que

$$\beta\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\xi_s|^2)ds\right)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2)ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\xi_{T\wedge\tau}|^2\right)+\gamma^2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\beta A(t)}|\xi_t|^2\right).$$

En faisant tendre T vers $+\infty$ et en utilisant à la fois le Lemme de Fatou et le Théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\beta\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\xi_s|^2)ds\right)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2)ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2\right)+\gamma^2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\beta A(t)}|\xi_t|^2\right).$$

Finalement, en combinant cette dernière inégalité avec (2.4), on obtient

$$\beta\mathbb{E}\left(\int_0^{T\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\xi_s|^2)ds\right)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2)ds\right)\leq (4\gamma^2+1)\mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2\right).$$

Dès lors $(\mathbf{H4}-\mathbf{i})$ donne (ii).

(iii) Φ étant convexe, il est aisé de voir que $\xi_t \in \mathcal{D}om(\Phi)$. De plus, en vertu de l'inégalité de Jensen et de $(\mathbf{H6})$, on a

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{2\beta A(s)}\frac{\Phi(\xi_s)}{a^2(s)}ds\right) < +\infty.$$

Ce qui donne (iii) . ■

Théorème 2.3.1. *Sous* **(H1)** – **(H6)**, *l'EDSR-R* (τ, ξ, f, Φ) *admet au plus une solution.*

Preuve Soit (Y, Z, K) et (Y', Z', K') deux solutions de l'EDSR-R (τ, ξ, f, Φ). Notons $\Delta Y_t = Y_t - Y'_t$; $\Delta Z_t = Z_t - Z'_t$; $\Delta K_t = K_t - K'_t$ et $\Delta f(t) = f(t, Y_t, Z_t) - f(t, Y'_t, Z'_t)$. Pour tout $T \geq t \geq 0$, on a

$$\Delta Y_{t\wedge\tau} = \Delta Y_{T\wedge\tau} + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \Delta f(s)ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} d(\Delta K_s) - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \Delta Z_s dW_s.$$

La formule d'Itô donne :

$$e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \beta\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds$$

$$= e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\Delta Y_{T\wedge\tau}|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s, \Delta f(s)\rangle ds + 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s, d(\Delta K_s)\rangle$$

$$-2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s, \Delta Z_s dW_s\rangle.$$

En utilisant la condition **(H2)** et en prenant l'espérance dans ce qui précède, on obtient pour β suffisamment grand :

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2\right) + (\beta - 2)\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds\right)$$

$$+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\Delta Y_{T\wedge\tau}|^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s, d(\Delta K_s)\rangle\right).$$

Mais

$$\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s, d(\Delta K_s)\rangle\right) \leq 0,$$

donc

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\Delta Y_{T\wedge\tau}|^2\right).$$

Comme $(\Delta Y, \Delta Z) \in \mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$, en faisant tendre T vers l'infini et en utilisant du théorème de la convergence dominée, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2\right) = 0.$$

Ce qui implique que $\Delta Y_{t\wedge\tau} = 0$ $\mathbb{P}$-p.s et par suite $\Delta Z_{t\wedge\tau} = 0$ $d\mathbb{P}\otimes dt$-p.s. Enfin, on conclut à l'aide de l'égalité

$$\Delta K_T = \Delta Y_0 - \Delta Y_t - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \Delta f(s)ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \Delta Z_s dW_s. \blacksquare$$

Pour la preuve du résultat d'existence, nous introduisons la suite (Y^n, Z^n) de la façon suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{(Y^n, Z^n, K^n) : 0 \leq 0 \leq n\}$ est la solution unique de l'EDSR-R $(n, \xi_n, 1_{[0,\tau]}f, \Phi)$. C'est à dire

$$Y_t^n = \xi_n + \int_t^n \mathbf{1}_{[0,\tau]} f(s, Y_s^n, Z_s^n)ds - \int_t^n Z_s^n dW_s + K_n^n - K_t^n, \forall\, 0 \leq t \leq n.$$

Étendons ce processus sur l'ensemble $[n, +\infty]$ de la manière suivante :

$$Y_t^n = \xi_t,\ Z_t^n = \eta_t,\ K_t^n = K_{\tau\wedge n}^n,\ \forall t \geq n.$$

Dans ce qui suit, nous étudions la convergence de la suite (Y^n, Z^n, K^n) et nous montrons que sa limite est solution de l'EDSR-R (τ, ξ, f, Φ). Donnons tout d'abord des estimations sur la suite (Y^n, Z^n, K^n).

Lemme 2.3.2. *Sous* **(H1)** – **(H6)**, *pour β suffisamment grand, il existe une constante C telle que :*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\mathbb{E}(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}^n|^2) + \mathbb{E}(\textstyle\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds) + \mathbb{E}(\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)} a^2(s)|Y_s^n|^2 ds)\right] \leq C. \tag{2.6}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq n\wedge\tau} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_t^n|^2\right) \leq C. \tag{2.7}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq n\wedge\tau} |K_t^n|^2\right) \leq C. \tag{2.8}$$

Preuve. En appliquant la formule d'Itô au processus $e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}^n|^2 &+ \int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds + \beta\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)} a^2(s)|Y_s^n|^2 ds \\ &= e^{\beta A(n\wedge\tau)}|Y_n^n|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n, f(s, Y_s^n, Z_s^n)\rangle ds \\ &+2\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n, dK_s^n\rangle - 2\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n, Z_s^n dW_s\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant la condition de Lipschitz stochastique (**H2**) et le fait que

$$\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, dK_s^n\rangle \leq 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}^n|^2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds\right) + (\frac{\beta}{2}-2)\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2 ds\right)\\
\leq\ & \mathbb{E}(e^{\beta A(n\wedge\tau)}|Y_n^n|^2) + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,0,\,0)|^2}{a^2(s)}ds\right)\\
\leq\ & \mathbb{E}(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2) + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,0,\,0)|^2}{a^2(s)}ds\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne (2.6).
Pour obtenir (2.7), il suffit d'appliquer l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy. En effet,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq n\wedge\tau} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_t^n|^2\right)\\
\leq\ & \mathbb{E}(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2) + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,0,\,o)|^2}{a^2(s)}ds\right) + 2c^2\mathbb{E}\left(\int_0^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds\right)\\
+\ & 2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq n\wedge\tau}\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, dK_s^n\rangle\right).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq n\wedge\tau}\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, dK_s^n\rangle\right) \leq 0,$$

nous avons

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq n\wedge\tau} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_t^n|^2\right) \ \leq\ (2+8c^2)\mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2\right) + \frac{16c^2+4}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,0,\,o)|^2}{a^2(s)}ds\right).$$

Ce qui permet d'obtenir (2.7).

A présent, pour tout $t \leq n$, on a

$$K_t^n = Y_0^n - Y_t^n - \int_0^t f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)ds + \int_0^t Z_s^n dW_s$$

En utilisant une fois encore l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy, on déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le n\wedge\tau}|K_t^n|^2\right)\\
\le\ & 4\mathbb{E}\left(|Y_0^n|^2\right)+\frac{3}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,0,\,o)|^2}{a^2(s)}ds\right)+C\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le n\wedge\tau}e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2\right)\\
+\ & C\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n}e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2ds\right)+C\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n}e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2ds\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, les inégalités (2.6) et (2.7) permettent d'obtenir (2.8). ■

Proposition 2.3.1. *Sous* **(H1)** – **(H6)**, $(Y^n,\,Z^n,\,K^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de Cauchy.*

Preuve. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$ tels que $m>n$. Posons

$$\Delta Y_t=Y_t^m-Y_t^n;\ \Delta Z_t=Z_t^m-Z_t^n;\ \Delta K_t=K_t^m-K_t^n.$$

Nous examinons la convergence du processus $(Y^n,\,Z^n)$ dans la partie **A** et celle du processus K^n dans la partie **B**.

Partie A.

• Pour tout $n\le t\le m$, on a

$$Y_t^n=\xi_t=\mathbb{E}(\xi\,|\mathcal{F}_t)=\xi_m-\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}\eta(s)dW_s,$$

$$Y_t^m=\xi_m+\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}f(s,\,Y_s^m,\,Z_s^m)ds-\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}Z_s^mdW_s+\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}dK_s^m,$$

et

$$\Delta Y_t=\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}f(s,\,Y_s^m,\,Z_s^m)ds-\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}\Delta Z_sdW_s+\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}dK_s^m.$$

Par la formule d'Itô, on obtient

$$e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_t|^2+\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2ds+\beta\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2ds$$

$$=2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,f(s,\,Y_s^m,\,Z_s^m)\rangle ds+2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,dK_s\rangle\rangle$$

$$-2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,\Delta Z_sdW_s\rangle.$$

On déduit que

$$\begin{aligned}
&e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_t|^2+\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2ds+\frac{\beta}{2}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2ds\\
\leq\ & \frac{2}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,Y_s^m,\,Z_s^m)|^2}{a^2(s)}ds+2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,dK_s\rangle\\
-\ & 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,\Delta Z_s dW_s\rangle\\
\leq\ & \frac{4}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,Y_s^m,\,Z_s^m)-f(s,\,\xi_s,\,\eta_s)|^2}{a^2(s)}ds+\frac{4}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,\xi_s,\,\eta_s)|^2}{a^2(s)}ds\\
+\ & 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,dK_s\rangle-2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,\Delta Z_s dW_s\rangle.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
&e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_t|^2+\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2ds+\frac{\beta}{2}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2ds\\
\leq\ & \frac{8}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2ds+\frac{8}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2ds\\
+\ & \frac{4}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,\xi_s,\,\eta_s)|^2}{a^2(s)}ds+2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,dK_s\rangle\\
-\ & 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,\Delta Z_s dW_s\rangle. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Puisque $-\frac{dK_s^m}{dL_s}\in\partial\Phi(Y_s^m)$, on a

$$\left\langle Y_s^m-\xi_s,\,\frac{dK_s^m}{dL_s}\right\rangle\leq\Phi(\xi_s)-\Phi(Y_s^m).$$

Mais $\Phi\geq 0$, donc :

$$\left\langle Y_s^m-\xi_s,\,\frac{dK_s^m}{dL_s}\right\rangle\leq\Phi(\xi_s).$$

En conséquence,

$$2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s,\,dK_s\rangle ds\leq 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{2\beta A(s)}\frac{\Phi(\xi_s)}{a^2(s)}ds$$

Ainsi (2.9) devient

$$e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_t|^2+\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2ds+\frac{\beta}{2}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m}e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2ds$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{8}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds + \frac{8}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds \\ &+\frac{4}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,\xi_s,\,\eta_s)|^2}{a^2(s)}ds + 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{2\beta A(s)}\frac{\Phi(\xi_s)}{a^2(s)}ds \\ &\qquad -2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s,\, \Delta Z_s dW_s\rangle. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de BDG, nous déduisons que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\sup_{n\leq t\leq m} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_t|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_{n\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s^m|^2 ds\right) \\ +\;& C\mathbb{E}\left(\int_{n\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s^m|^2 ds\right) \\ \leq\;& C\mathbb{E}\left(\int_{n\wedge\tau}^{\tau} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,\xi_s,\,\eta_s)|^2}{a^2(s)}ds\right) + C\mathbb{E}\left(\int_{n\wedge\tau}^{\tau} e^{2\beta A(s)}\frac{\Phi(\xi_s)}{a^2(s)}ds\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

En vertu du Lemme 2.3.1 (iii), le terme à droite de l'inégalité (2.10) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

• Pour $t \leq n$, nous avons :

$$\begin{aligned} Y_t^n &= Y_n^n + \int_t^{\tau\wedge n} f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)ds - \int_t^{\tau\wedge n} Z_s^n dW_s + \int_t^{\tau\wedge n} dK_s^n. \\ Y_t^m &= Y_n^m + \int_t^{\tau\wedge n} f(s,\, Y_s^m,\, Z_s^m)ds - \int_t^{\tau\wedge n} Z_s^m dW_s + \int_t^{\tau\wedge n} dK_s^m. \end{aligned}$$

De ces egalités, on tire :

$$\Delta Y_t = \Delta Y_n + \int_t^{\tau\wedge n}[f(s,\, Y_s^m,\, Z_s^m) - f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)]ds - \int_t^{\tau\wedge n}\Delta Z_s dW_s + \int_t^{\tau\wedge n} d(\Delta K_s).$$

Des calculs similaires au cas déterministe donnent

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau\wedge n} e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right) \\ +\;& C\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds\right) \\ \leq\;& \mathbb{E}\left(e^{\beta A(n\wedge\tau)}|\Delta Y_n|^2\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

En tenant compte de (2.10), nous déduisons que le terme de droite tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

PartieB

• pour $t \leq n$

$$K_t^n = Y_0^n - Y_t^n - \int_0^{\tau\wedge t} f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)ds + \int_0^{\tau\wedge t} Z_s^n dW_s$$

$$K_t^m = Y_0^m - Y_t^m - \int_0^{\tau\wedge t} f(s,\, Y_s^m,\, Z_s^m)ds + \int_0^{\tau\wedge t} Z_s^m dW_s$$

$$\Delta K_t = \Delta Y_0 - \Delta Y_t - \int_0^{\tau\wedge t} [f(s,\, Y_s^m,\, Z_s^m) - f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)]ds + \int_0^{\tau\wedge t} \Delta Z_s dW_s$$

On a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq\tau\wedge n} |\Delta K_t|^2\right) \leq C\mathbb{E}\left(|\Delta Y_0|^2 + \sup_{0\leq\tau\wedge n} e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2\right)$$
$$+C\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right) + C\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n} e^{\beta A(s)} a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds\right)$$

En faisant tendre n vers l'infini, il est clair que le membre de gauche tend vers zéro.

• Pour $n \leq t \leq m$

$$K_t^m - K_t^n = K_t^m - K_{\tau\wedge n}^m + K_{\tau\wedge n}^m - K_{\tau\wedge n}^n.$$
$$K_{\tau\wedge n}^m - K_{\tau\wedge n}^n = \Delta K_{\tau\wedge n}.$$

On a

$$\mathbb{E}\left(|\Delta K_{\tau\wedge n}|^2\right) \leq C\mathbb{E}\left(|\Delta Y_0|^2 + |\Delta Y_t|^2\right)$$
$$+C\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right) + C\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n} e^{\beta A(s)} a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds\right) \qquad (2.12)$$

D'autre part

$$K_t^m - K_{\tau\wedge n}^m = Y_n^m - Y_t^m - \int_{\tau\wedge n}^{\tau\wedge t} f(s,\, Y_s^m,\, Z_s^m)ds + \int_{\tau\wedge n}^{\tau\wedge t} Z_s^m dW_s$$

$$K_t^m - K_{\tau\wedge n}^m = Y_n^m - Y_n^n + Y_n^n - Y_t^m - \int_{\tau\wedge n}^{\tau\wedge t} f(s,\, Y_s^m,\, Z_s^m)ds + \int_{\tau\wedge n}^{\tau\wedge t} Z_s^m dW_s$$

$$K_t^m - K_{\tau\wedge n}^m = \Delta Y_n + (Y_n^n - Y_t^m) - \int_{\tau\wedge n}^{\tau\wedge t} f(s,\, Y_s^m,\, Z_s^m)ds + \int_{\tau\wedge n}^{\tau\wedge t} Z_s^m dW_s$$

Ainsi

$$|K_t^m - K_{\tau\wedge n}^m|^2 \leq 4\left\{|\Delta Y_n|^2 + |Y_n^n - Y_t^m|^2 + \left|\int_{\tau\wedge n}^{\tau\wedge t} f(s,\, Y_s^m,\, Z_s^m)ds\right|^2 + \left|\int_{\tau\wedge n}^{\tau\wedge t} Z_s^m dW_s\right|^2\right\}$$

L'inégalité de BDG permet alors d'obtenir

$$\mathbb{E}\left(\sup_{n\leq t\leq m} |K_t^m - K_{\tau\wedge n}^m|^2\right) \leq C\mathbb{E}\left(|\Delta Y_n|^2 + \sup_{n\leq t\leq m} |Y_n^n - Y_t^m|^2\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\int_{\tau\wedge n}^{\tau} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,0,0)|^2}{a^2(s)}ds + \int_{\tau\wedge n}^{\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^m|^2 ds + \int_{\tau\wedge n}^{\tau} e^{\beta A(s)}|Z_s^m|^2 ds\right)$$

Le Lemme 2.3.2 et la condition (**H5**) permettent alors de conclure que le terme de droite tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Par suite, de l'inégalité (2.12), on déduit que $\mathbb{E}\left(\sup_{n\leq t\leq m}|K_t^m - K_t^n|^2\right)$ tend vers zéro.

• Pour $t \geq m \geq n$; $K_t^m - K_t^n = K_{\tau\wedge m}^m - K_{\tau\wedge n}^n$ qui tend vers zéro. On conclut ainsi que $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}|\Delta K_t|^2\right)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.■

Théorème 2.3.2. *Supposons* (**H1**) – (**H6**) *satisfaites. Alors l'EDSR-R* $(\tau,\, \xi,\, f,\, \Phi)$ *admet au moins une solution.*

Preuve Notons $(Y_t,\, Z_t,\, K_t)$ la limite de la suite $(Y_t^n,\, Z_t^n,\, K_t^n)$ et prouvons que le triplet $(Y_t,\, Z_t,\, K_t)$ est solution de l'EDSR-R $(\tau,\, \xi,\, f,\, \Phi)$. D'après le cas déterministe, on sait que pout tout $T > 0$, l'EDSR-R $(T,\, Y_T,\, 1_{[0,\tau]}f,\, \Phi)$ admet une solution unique $(\overline{Y}_t,\, \overline{Z}_t,\, \overline{K}_t)$. En conséquence, pour obtenir le résultat, il suffit de prouver que $(Y_t,\, Z_t,\, K_t) = (\overline{Y}_t,\, \overline{Z}_t,\, \overline{K}_t)$, $\forall\, t \leq T$. Pour ce faire, remarquons que

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\overline{Y}_t - Y_t|^2\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\overline{Y}_t - Y_t^n|^2\right),$$

Il suffit donc de montrer que le terme de droite est égale à zero.

$$\begin{aligned}
\overline{Y}_t &= Y_T + \int_t^T 1_{[0,\tau]}f(s,\, \overline{Y}_s,\, \overline{Z}_s)ds - \int_t^T \overline{Z}_s dW_s + \overline{K}_T - \overline{K}_t\\
Y_t^n &= Y_T^n + \int_t^T 1_{[0,\tau]}f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)ds - \int_t^T Z_s^n dW_s + K_T^n - K_t^n
\end{aligned}$$

Notons $\widehat{\Delta Y}_t = \overline{Y}_t - Y_t^n$, $\widehat{\Delta Z}_t = \overline{Z}_t - Z_t^n$ et $\widehat{\Delta K}_t = \overline{K}_t - K_t^n$. On a

$$\widehat{\Delta Y}_t = \widehat{\Delta Y}_T + \int_t^T 1_{[0,\tau]}[f(s,\, \overline{Y}_s,\, \overline{Z}_s) - f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)]ds - \int_t^T \widehat{\Delta Z}_s dW_s + \int_t^T d(\widehat{\Delta K}_s)$$

En utilisant un argument similaire à celui de la preuve de l'unicité, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\widehat{\Delta Y}_t|^2\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\widehat{\Delta Y}_T|^2\right)$$

Ainsi

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\overline{Y}_t - Y_t|^2\right) \leq \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_T - Y_T^n|^2\right) = 0.$$

On conclut ainsi que pour tout $t \leq T$, $(Y_t,\, Z_t,\, K_t) = (\overline{Y}_t,\, \overline{Z}_t,\, \overline{K}_t)$. ■

Chapitre 3

EDSR avec condition de monotonie stochastique

3.1 Notations, hypothèses et définitions

3.1.1 Notations

Dans tout ce chapitre $W = \{W_t,\ t \geq 0\}$ désigne un mouvement Brownien n-dimensionnel défini sur un espace de probabilté filtré $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}_t)$ où $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle du mouvemevent Brownien augmenté de tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls de $\mathcal{F}$. Le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^d$ est désigné par $\langle .,\ .\rangle$ et sa norme par $|.|$. La norme sur $\mathbb{R}^{d\times n}$ est notée par $|Z| = tr(ZZ^*)$.

Soient $\beta \geq 0$ (à préciser plus tard) et a un processus non négatif, $\mathcal{F}_t$-adapté. $L^2(\beta,\ a,\ \tau,\ \mathbb{R}^d)$, $L^2(\beta,\ a,\ [0,\ \tau],\ \mathbb{R}^d)$, $L^{2,a}(\beta,\ a,\ [0,\ \tau],\ \mathbb{R}^d)$, $L^{2,c}(\beta,\ a,\ [0,\ \tau],\ \mathbb{R}^d)$, $\mathcal{M}(\beta,\ a,\ \tau)$ et $\mathcal{M}^c(\beta,\ a,\ \tau)$ désignent les même espaces que ceux définis au chapitre 2 munis de leurs normes respectives. Par crainte d'être incomplet, nous rappelons ici la Remarque 2.1.1 du chaiptre 2

Remarque 3.1.1. *Si a et b sont deux processus non-négatifs, $\mathcal{F}_t$-adaptés tel que $b > a$, alors $L^2(\beta,\ b,\ [0,\ \tau],\ \mathbb{R}^d) \subset L^2(\beta,\ a,\ [0,\ \tau],\ \mathbb{R}^d)$. Par conséquent $\mathcal{M}^c(\beta,\ b,\ \tau) \subset \mathcal{M}^c(\beta,\ a,\ \tau)$.*

3.1.2 Hypothèses et définitions

Soit $f\ :\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction telle que pour tout $(y,\ z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n}$, $f(.,\ .,\ y,\ z)$ est progressivememnt mesurable et ξ une $\mathbb{R}^d$-variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

Pour $\beta \geq 0$, nous supposons que le triplet $(\tau,\ \xi,\ f)$ satisfait les conditions suivantes :

(H1) Il existe un processus $\mathcal{F}_t$-adapté $\theta(t)$ et un processus nonnégative, $\mathcal{F}_t$-adapté $v(t)$ tels que $\forall (y,\, z,\, y',\, z') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n}$,

$$\begin{cases} (i) \quad \langle y - y',\, f(t,\, y,\, z) - f(t,\, y',\, z)\rangle \leq \theta(t)|y - y'|^2 \\ (ii) \quad |f(t,\, y,\, z) - f(t,\, y,\, z')| \leq v(t)|z - z'| \\ (iii) \quad y \mapsto f(.,\, .,\, y,\, z) \text{ est continu } dt \otimes d\mathbb{P} p.s. \end{cases}$$

(H2) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a^2(t) = |\theta(t)| + v^2(t) > \varepsilon$.

(H3)

$$\begin{cases} (iv) \quad \xi \in L^2(\beta,\, a,\, \tau,\, \mathbb{R}^d) \\ (v) \quad \frac{f(.,0,0)}{a} \in L^2(\beta,\, a,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R}^d) \\ (vi) \quad \mathbb{E}(e^{\beta A(\tau)}) < +\infty. \end{cases}$$

(H4) Il existe un processus positif, η, $\mathcal{F}_t$-adapté et une constante positive K tels que,

$$\begin{cases} (vii) \quad \eta \in L^2(\beta,\, a,\, [0,\, \tau],\, \mathbb{R}^d) \\ (viii) \quad |f(t,\, y,\, z)| \leq |f(t,\, 0,\, z)| + \eta(t) + K|y| \end{cases}$$

A présent nous précisons la solution de notre EDSR.

Définition 3.1.1. *Si τ est une constante, alors, une solution de l'EDSR $(\tau,\, \xi,\, f)$ est un couple de processus $\mathcal{F}_t$-adaptés $\{(Y_t,\, Z_t);\, t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times R^{d\times n}$ tels que*

(j) $(Y,\, Z) \in \mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau)$, *en d'autres termes*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\beta A(t)}|Y_t|^2 + \int_0^\tau e^{\beta A(t)} a^2(t)|Y_t|^2 dt + \int_0^\tau e^{\beta A(t)}|Z_t|^2 dt\right) < +\infty.$$

(jj) $Y_t = \xi + \int_t^\tau f(s,\, Y_s,\, Z_s)ds - \int_t^\tau Z_s dW_s$.

Définition 3.1.2. *Si τ est un temps aléatoire, alors une solution de l'EDSR $(\tau,\, \xi,\, f)$ est un couple de processus $\mathcal{F}_t$-adaptés $\{(Y_t,\, Z_t);\, t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times R^{d\times n}$ tels que*

(3j) $(Y,\, Z) \in \mathcal{M}^c(\beta,\, a,,\, \tau)$.

(4j) pour tout $T \geq t \geq 0$,

$$Y_t \wedge \tau = Y_T \wedge \tau + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f(s,\, Y_s,\, Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s dW_s.$$

(5j) $Y_t = \xi$ *sur l'ensemble* $\{t \geq \tau\}$.

3.2 Existence et unicité sur un intervalle fixe

Tout au long de cette section, τ est un réel positif fixé et C désignera une constante positive pouvant varier d'une ligne à une autre

3.2.1 Unicité

Nous donnons tout d'abord des estimations à priori sur les solutions de notre EDSR.

Proposition 3.2.1. *Supposons* **(H1)** – **(H4)** *satisfaites. Soient* $(Y,\, Z)$ *(resp.*$(Y',\, Z')$*) une solution de l'EDSR* $(\tau,\, \xi,\, f)$ *(resp.* $(\tau,\, \xi',\, f')$*).*
Notons $\Delta f(t) = f(t,\, Y'_t,\, Z'_t) - f'(t,\, Y'_t,\, Z'_t)$, $\Delta Y_t = Y_t - Y'_t, \Delta Z_t = Z_t - Z'_t$, $\Delta\xi = \xi - \xi'$ *et* $\Gamma = \mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}|\Delta\xi|^2 + \frac{2}{\beta}\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)}ds\right)$. *Alors pour* β *suffisamment grand, on a :*

(i)

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)}ds\right) < +\infty.$$

(ii)

$$\begin{cases} (a)\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right) \leq 2\Gamma \\ \\ (b)\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds\right) \leq \frac{2}{\beta-4}\Gamma \end{cases}$$

(iii)

$$I\!E\left(\sup_{0\le t\le\tau} e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2\right) \le C(\beta)\Gamma$$

où $C(\beta)$ est une constante qui dépend uniquement de β.

Preuve. Sans perte de la généralité, nous supposons que les coefficients $\theta(s)$ et $v(s)$ sont identiques pour les fonctions f et f'. (i) s'obtient alors en combinant $(\mathbf{H1-ii})$, $(\mathbf{H3-v})$ et $(\mathbf{H4})$.
Par la formule d'Itô, nous avons

$$\begin{aligned}
&e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2 + \beta\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds + \int_t^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds \\
&= e^{\beta A(\tau)}|\Delta\xi|^2 + 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s,\, f(s,\, Y_s,\, Z_s) - f'(s,\, Y'_s,\, Z'_s)\rangle ds \\
&\quad -2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s,\, \Delta Z_s dW_s\rangle.
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions $(\mathbf{H1-i})$, $(\mathbf{H1-ii})$ et l'inégalité de Young $2uv \le \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{2}{\alpha}v^2$ pour $\alpha > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&2\langle \Delta Y_s,\, f(s,\, Y_s,\, Z_s) - f'(s,\, Y'_s,\, Z'_s)\rangle \\
&\le 2\theta(s)|\Delta Y_s|^2 + 2|\Delta Y_s|[v(s)|\Delta Z_s| + |\Delta f(s)|] \\
&\le \left(2+\frac{\beta}{2}\right)a^2(s)|\Delta Y_s|^2 + \frac{1}{2}|\Delta Z_s|^2 + \frac{2}{\beta}\frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)}.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
&e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2 + \left(\frac{\beta}{2}-2\right)\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds + \frac{1}{2}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds \qquad (3.1)\\
&\le e^{\beta A(\tau)}|\Delta\xi|^2 + \frac{2}{\beta}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)}ds - 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s,\, \Delta Z_s dW_s\rangle.
\end{aligned}$$

Par suite, on déduit que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\beta}{2}-2\right)\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right) \\
&\le \mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}|\Delta\xi|^2 + \frac{2}{\beta}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)}ds\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne (ii).
Pour obtenir (iii) , il suffit de prendre $\sup_{0\le t\le\tau}(.)$ dans (3.1) et d'utiliser $(ii-a)$ et l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy.■

Corollaire 3.2.1. *Sous les conditions* **(H1)** – **(H4)**, *l'EDSR (jj) admet au plus une solution.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 3.2.1.■

3.2.2 Existence

Tout d'abord, nous avons besoin d'établir le résultat suivant.

Proposition 3.2.2. *Supposons les conditions* **(H1)** – **(H2)** *satisfaites. soit* $\{V_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ *un processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté vérifiant* $I\!E\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|V_s|^2 ds\right) < +\infty$. *De plus, supposons qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\textbf{(H5)} \quad I\!E\left[e^{(1+\delta)\beta A(\tau)}(1+|\xi|^{2(1+\delta)}) + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\eta_s^2 ds\right)\right] < +\infty.$$

Alors, il existe un processus (Y, Z), $\mathcal{F}_t$*-adapté à valeurs dans* $I\!R^d \times I\!R^{d\times n}$ *tel que*

(6j) $(Y, Z) \in \mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$

(7j) $Y_t = \xi + \int_t^\tau f(s, Y_s, V_s)ds - \int_t^\tau Z_s dW_s$.

Preuve. Dans ce qui suit, nous posons $h(s, y) = f(s, y, V_s)$ pour tout $s \in [0, \tau]$ et nous divisons la preuve en deux parties.
Partie I. Posons $\overline{\xi} = e^{\frac{\beta}{2}A(\tau)}|\xi|$ et supposons que

$$|\overline{\xi}|^2 + \sup_{0\leq t\leq\tau} |h(t, 0)|^2 \leq C. \tag{3.2}$$

Soit φ_q une fonction régulière de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}_+$ telle que $0 \leq \varphi_q \leq 1$ et définie par $\varphi_q(x) = 1$ si $|x| \leq q$, $\varphi_q(x) = 0$ dès que $|x| \geq q+1$. Posons $q(n) = [(C + \frac{6\tau}{\beta\varepsilon}(nC + n^3 + K^2 n))^{\frac{1}{2}}]$, ou $[\,r\,]$ désigne la partie entière de r. Définissons

$$h_n(t, y) = 1_{\{\eta(t)+e^{\beta A(t)}\leq n\}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{q(n)+2}(y-u)h(t, y-u)\rho_n(u)du$$

où $\rho_n : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la suite de fonction régulière à support compact dans la boule $B(0, 1)$ qui approxime la mesure de Dirac en 0 et satisfaisant $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(u)du = 1$. Il est clair que $h_n(t, .)$ est une suite de fonction à support compact vérifiant ce qui suit :

(a) $h_n(t, .)$ converge vers $h(t, .)$ sur les ensembles compacts.

(b) $h_n(t, .)$ est globalement Lipschitz stochastique de coefficient : $K(n, t) = a^2(t) + C_n$, avec $C_n = \frac{1}{4}\alpha_n^2 C + \alpha_n(n + K(1 + q(n) + 3))$ et $\alpha_n = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \rho_n(u)| du$.

(c) Pour $|y|, |y'| \leq q(n)+1$, $\langle y - y', h_n(t, y) - h_n(t, y')\rangle \leq 1_{\{\eta(t)+e^{\beta A(t)} \leq n\}}\theta(t)|y - y'|^2$.

(d) $|h_n(t, y)| \leq 1_{\{\eta(t)+e^{\beta A(t)} \leq n\}}[|h(t, 0)| + \eta(t) + K(1 + |y|)]$.

Posons à présent $a_n^2(t) = K(n, t)$ et $A_n(t) = \int_0^t a_n^2(s)ds = A(t) + C_n t$. On vérifie aisement que

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A_n(\tau)}|\xi|^2\right) < +\infty, \quad \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A_n(s)} \frac{|h_n(s, 0)|^2}{a_n^2(s)} ds\right) < +\infty.$$

Ainsi, en utilisant El Karoui et Huang [22], l'équation

$$Y_t^n = \xi + \int_t^\tau h_n(s, Y_s^n)ds - \int_t^\tau Z_s^n dW_s$$

admet une solution unique (Y^n, Z^n) dans l'espace $\mathcal{M}^c(\beta, a_n, \tau)$. Mais grâce à de la Remarque 3.1.1, on a $(Y^n, Z^n) \in \mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$.
Remarquons que pour tout y, $2\langle y, h_n(t, y)\rangle \leq (2 + \frac{\beta}{2})a^2(t)|y|^2 + \frac{2}{\beta}\frac{|h_n(t,0)|^2}{a^2(t)}$. Par conséquent, pour tout t fixé dans $[0, \tau]$, en appliquant la formule d'Itô à $e^{\beta[A(s)-A(t)]}|Y_s^n|^2$ pour tout $s \in [t, \tau]$, puis en prenant l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(.\,|\,\mathcal{F}_t)$ et en choisissant β grand, on obtient

$$|Y_t^n|^2 \leq \mathbb{E}\left(e^{\beta[A(\tau)-A(t)]}|\xi|^2 + \frac{2}{\beta\varepsilon}\int_t^\tau e^{\beta[A(u)-A(t)]}|h_n(u, 0)|^2 du\,|\mathcal{F}_t\right).$$

De plus, en combinant (3.2) et (d), on a

$$\left(\int_t^\tau e^{\beta[A(u)-A(t)]}|h_n(u, 0)|^2 du\,|\mathcal{F}_t\right) \leq 3\tau(Cn + n^3 + K^2 n)$$

On déduit alors que

$$\forall t \in [0, \tau] \ \ |Y_t^n|^2 \leq C + \frac{6\tau}{\beta\varepsilon}(Cn + n^3 + K^2 n). \tag{3.3}$$

Ce qui justifie le choix de l'entier $q(n)$. Le reste de la preuve est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.1 (Estimations à priori uniformes en n). *Supposons les conditions* **(H1)** – **(H5)** *satisfaites. Alors pour β suffisamment grand, on a :*

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2ds + \int_0^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2ds\right) < +\infty$

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|h_n(s,\, Y_s^n)|^2ds\right) < +\infty$

(iii) $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le \tau} e^{(1+\delta)\beta A(t)}|Y_t^n|^2\right) < +\infty$

Preuve. En vertu de la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2 + \beta\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2ds + \int_t^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2ds \qquad (3.4)\\ \le e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2 + 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}|Y_s^n||h_n(s,\, Y_s^n)|ds - 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, Z_s^n dW_s\rangle. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young et (d), on montre que

$$2|Y_s^n||h_n(s,\, Y_s^n)| \le \left(\frac{\beta}{2} + 2 + \frac{K}{\varepsilon}\right)a^2(s)|Y_s^n|^2 + \frac{2}{\beta}\frac{|h(s,\,0)|^2}{a^2(s)} + \frac{\eta(s)^2 + K^2}{a^2(s)}.$$

Si nous prenons β suffisamment grand de sorte que $(\frac{\beta}{2} - 2 - \frac{K}{\varepsilon}) > 0$, (3.4) devient

$$\begin{aligned} e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2 + (\frac{\beta}{2} - 2 - \frac{K}{\varepsilon})\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2ds + \int_t^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2ds \qquad (3.5)\\ \le e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2 + \frac{2}{\beta}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|h(s,\,0)|^2}{a^2(s)}ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\eta^2(s)ds\\ + \frac{K^2}{\varepsilon}\int_t^\tau e^{\beta A(s)} - 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, Z_s^n dW_s\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, (i) s'obtient en combinant **(H3)**, **(H4)** et (3.2).
En vertu de (d), (3.2) et (i), (ii) est evident.
En prenant l'espérance conditionnelle dans (3.5) et en utilisant (3.2), on obtient

$$e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2 \le \mathbb{E}\left\{e^{\beta A(\tau)}(C_1 + |\xi|^2) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\eta^2(s)ds \,|\, \mathcal{F}_t\right\}$$

où $C_1 = \frac{2C^2}{\beta\varepsilon^2} + \frac{K^2}{\varepsilon^2}$. Ensuite, par l'inégalité maximale de Doob, (en posant $p = 1+\delta$) on déduit que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} e^{p\beta A(t)}|Y_t^n|^{2p}\right) \le c(p)\mathbb{E}\left[e^{p\beta A(\tau)}(1 + |\xi|^{2p}) + \frac{1}{\varepsilon^p}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\eta^2(s)ds\right)^p\right],$$

ce qui assure (iii).■

Lemme 3.2.2. *Sous* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H5})$, (Y^n, Z^n) *est une suite de Cauchy dans* $\mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$.

Preuve. Pour $m > n$, posons $\Delta Y_t = Y_t^m - Y_t^n$, $\Delta Z_t = Z_t^m - Z_t^n$. Par l aformule d' Itô, on a

$$e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2 + \beta \int_t^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds + \int_t^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds$$
$$= 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s,\, h_m(s,\, Y_s^m) - h_n(s,\, Y_s^n)\rangle ds - 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle\, \Delta Y_s,\, \Delta Z_s dW_s\rangle.$$

Nous avons

$$2\langle \Delta Y_s,\, h_m(s,\, Y_s^m) - h_n(s,\, Y_s^n)\rangle = 2\langle \Delta Y_s,\, h_m(s,\, Y_s^m) - h_m(s,\, Y_s^n)\rangle$$
$$+2\langle \Delta Y_s,\, h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)\rangle.$$

Mais de (3.3), on a $|Y_s^m| \leq q(m) + 1$, $|Y_s^n| \leq q(n) + 1 \leq q(m) + 1$ et par suite

$$2\langle \Delta Y_s,\, h_m(s,\, Y_s^m) - h_m(s,\, Y_s^n)\rangle \leq 1_{\{\eta(s)+e^{\beta A(s)}\leq m\}}\theta(s)|\Delta Y_s|^2 \leq a^2(s)|\Delta Y_s|^2.$$

Il s'en suit que

$$e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2 + (\beta - 2)\int_t^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds + \int_t^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds \quad (3.6)$$
$$\leq 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Y_s||h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|ds - 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle\, \Delta Y_s,\, \Delta Z_s dW_s\rangle.$$

Comme β a été choisi suffisamment grand, nous deduisons

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right) \leq 2\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Y_s||h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|ds\right). \quad (3.7)$$

D'autre part, l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy donne

$$2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} |\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle\, \Delta Y_s,\, \Delta Z_s dW_s\rangle|\right).$$
$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2\right) + 2C^2\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right) \quad (3.8)$$

En prenant $\sup_{0\leq t\leq\tau}(\,.\,)$ dans (3.6), en combinant avec (3.7) et (3.8), on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2\right) + (\beta - 2)\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds\right)$$
$$+\ \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right)$$
$$\leq\ C\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Y_s||h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|ds\right). \quad (3.9)$$

Maintenant pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que

$$I_{m,n} = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Y_s||h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|ds\right)$$

tend vers zéro quand $m, n \to +\infty$.
Pour tout $M > 0$, posons $B_{m,n}^M = \{(s, w) \,:\, |Y_s^m| + |Y_s^n| > M\}$, $\overline{B}_{m,n}^M = \Omega \backslash B_{m,n}^M$ et notons $C(\delta,\, \tau)$ une constante positive pouvant varier d'une ligne à une autre. On a

$$I_{m,\,n} = I_{m,\,n}^1 + I_{m,\,n}^2$$

avec

$$I_{m,\,n}^1 = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Y_s||h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|1_{\overline{B}_{m,\,n}^M} ds\right)$$

$$I_{m,\,n}^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Y_s||h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|1_{B_{m,\,n}^M} ds\right)$$

Nous estimons d'abord $I_{m,\,n}^2$. Pour ce faire, nous combinons l' inégalité de Hölder et celle de Young pour obtenir

$$\begin{aligned}
I_{m,\,n}^2 &\leq \frac{1}{M^\delta}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Y_s||h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|(|Y_s^m| + |Y_s^n|)^\delta ds\right) \\
&\leq \frac{1}{M^\delta}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}(|Y_s^m| + |Y_s^n|)^{\delta+1}|h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|ds\right) \\
&\leq \frac{C(\tau,\,\delta)}{M^\delta}\mathbb{E}\left\{\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^{2+2\delta} + \int_0^\tau e^{\beta A(s)}|h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|^2 ds\right\} \\
&\leq \frac{C(\tau,\,\delta)}{M^\delta}\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^{2+2\delta}\right) \\
&+ \frac{C(\tau,\,\delta)}{M^\delta}\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|h_m(s,\, Y_s^n) - h_n(s,\, Y_s^n)|^2 ds\right)
\end{aligned}$$

De (d), et des inégalités (ii), (iii) du Lemme 3.2.1, on déduit que

$$I_{m\,n}^2 \leq \frac{C(\tau,\,\delta)}{M^\delta}.$$

Puisque M est arbitraire, $I^2_{m,n}$ peut etre rendu arbitrairement petit en choisissant M suffisament grand.
Estimons à présent $I^1_{m,n}$.

$$\begin{aligned} I^1_{m,n} &\leq M\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|h_m(s,\, Y^n_s) - h_n(s,\, Y^n_s)|1_{\{|Y^n_s|\leq M\}}ds\right) \qquad (3.10) \\ &\leq M\mathbb{E}\left(\int_0^\tau \sup_{\{|y|\leq M\}} e^{\beta A(s)}|h_m(s,\, y) - h_n(s,\, y)|ds\right) \end{aligned}$$

Puisque $h_n(t,\, .)$ converge vers $h(t,\, .)$ sur les ensembles compacts et $\sup_{\{|y|\leq M\}} e^{\beta A(s)}|h_n(s,\, y)| \leq \{|h_s(s,\, 0)|^2 + \eta(s) + K(1+M)\}e^{\beta A(s)}$, le Théoreme de la convergence dominée de Lebesgue assure que le terme de droite de l'inégalité (3.10) tend vers zéro quand $m,\, n \longrightarrow +\infty$.
Ainsi, en vertu de (3.9), on conclut que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2\right) + (\beta-2)\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2ds\right)$$
$$+\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2ds\right)$$

tend vers zéro quand $m,\, n \longrightarrow +\infty$. ■

Posons $Y = \lim_n Y^n$, $Z = \lim_n Z^n$ dans $\mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau)$. Nous allons montrer que $(Y,\, Z)$ est la solution de l'EDSR $(\tau,\, \xi,\, h)$. Puisque $(Y\, Z) \in \mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau)$, on a,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\beta A(t)}|Y^n_t - Y_t|^2\right) = 0. \qquad (3.11)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(t)}|Z^n_t - Z_t|^2dt\right) = 0 \qquad (3.12)$$

De l'égalité (3.12), on déduit que $\forall\, t \in [0,\, \tau]$, $\int_t^\tau Z^n_s dW_s \to \int_t^\tau Z_s dW_s$ en probabilité.
Ainsi pour obtenir le résultat, nous devons seulement montrer que

$$\forall\, t \in [0,\, \tau],\ \int_t^\tau h_n(s,\, Y^n_s)ds \to \int_t^\tau h(s,\, Y_s)ds\ \textit{(en probabilité)}.$$

De (3.11), nous déduisons l'existence d'une sous suite (Y^{n_k}) telle que

$$\forall\, t \in [0,\, \tau],\ Y^{n_k}_t \to Y_t,\ \mathbb{P}-p.s. \qquad (3.13)$$

Pour la simplicité, nous supposons que (3.13) est vraie sans extraction de sous suite. On a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\left|\int_t^T h_n(s, Y_s^n)ds - \int_t^T h(s, Y_s)ds\right|\right) \\
\leq\ & \mathbb{E}\left(\int_t^T |h_n(s, Y_s^n) - h(s, Y_s^n)|ds\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T |h(s, Y_s^n) - h(s, Y_s)|ds\right) \\
\leq\ & I_1 + I_2
\end{aligned}$$

A l'aide d'un argument similaire à celui de la preuve du Lemme 3.2.2, on montre que I_1 tend vers zéro.
Soit

$$X_s^n = |h(s, Y_s^n) - h(s, Y_s)|.$$

On a

$$\begin{aligned}
I_2 &= \mathbb{E}\left(\int_0^T X_s^n ds\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)} X_s^n ds\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)} X_s^n 1_{\{X_s^n \leq r\}} ds\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)} X_s^n 1_{\{X_s^n > r\}} ds\right)
\end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini et de l'inégalité de Chebychev, on a

$$I_2 \leq \int_0^T \mathbb{E}(e^{\beta A(s)} X_s^n)ds + \frac{\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)} (X_s^n)^2 ds\right)}{r} \tag{3.14}$$

De plus, en vertu de (**H4**) et du Lemme 3.2.2, il est clair que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\beta A(s)} (X_s^n)^2 ds\right) < +\infty.$$

Par conséquent, le second terme à droite de (3.14) peut être rendu arbitrairement petit en choisissant r suffisament grand. Ensuite puisque $y \mapsto h(., y)$ est continue, nous déduisons de (3.13) que pour s fixé, $X_s^n \to 0$ $\mathbb{P}$-p.s. En combinant (**H3 − vi**), le théorème de Fubini et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il s'en suit que le premier terme à droite de (3.14) tend vers zéro quand $n \to \infty$. Ainsi $\int_.^T h_n(s, Y_s^n)ds \longrightarrow \int_.^T h(s, Y_s)ds$ en probabilité ; ce qui achève la preuve de la Partie I.

PartieII
Soit

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{\inf(n, e^{\frac{\beta A(\tau)}{2}}|\xi|)}{e^{\frac{\beta A(\tau)}{2}}|\xi|}\xi, \\ h_n(t, y) &= \begin{cases} h(t, y) - h(t, 0) + \frac{\inf(n, |h(t,0)|)}{|h(t,0)|}h(t, 0), \; si\, h(t, 0) \neq 0 \\ \\ h(t, y), \; si\, h(t, 0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On a $\mathbb{E}(e^{\beta A(\tau)}|\xi_n - \xi|^2) \to 0$, $\mathbb{E}(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|h_n(s,0)-h(s,0)|^2}{a^2(s)}ds) \to 0$ quand $n \to +\infty$, et (ξ_n, h_n) satisfait (3.2). Ainsi d'après la partie I, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe (Y^n, Z^n) qui satisfait $(3j)$ et

$$Y_t^n = \xi_n + \int_t^\tau h_n(s, Y_s^n)ds - \int_t^\tau Z_s^n dW_s, \; 0 \leq t \leq \tau.$$

On peut aisement montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\beta A(t)}|Y_t^n - Y_t^m|^2 + \left(\frac{\beta}{2} - 2\right)\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n - Y_s^m|^2 ds\right) \\ + \; &\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s^n - Z_s^m|^2 ds\right) \\ \leq \; &\mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}|\xi_n - \xi_m|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|h_n(s, 0) - h_m(s, 0)|^2}{a^2(s)}ds\right). \end{aligned}$$

Le terme de droite tend vers zéro quand $n, m \longrightarrow 0$. Ainsi, il existe un couple de processus (Y, Z), $\mathcal{F}_t$-adaptés tels que

$$\lim_n ||(Y^n, Z^n) - (Y, Z)||^2_{\beta, c} = 0$$

et qui satisfait $(3j)$, $(4j)$. La preuve de la Proposition 3.2.2 est complète. ■ Le pricinpal résultat de cette section est :

Théorème 3.2.1. *Supposons que les conditions* **(H1)** – **(H5)***sont satisfaites. Alors pour β suffisamment grand, l'EDSR (j), $(2j)$ admet une solution unique.*

Preuve Pour (U, V) fixé dans $\mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$, la Proposition 3.2.2 dit que l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^\tau f(s, Y_s, V_s)ds - \int_t^\tau Z_s dW_s.$$

admet une solution unique. On peut donc définir l'application

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{M}(\beta, a, \tau) &\longrightarrow \mathcal{M}(\beta, a, \tau) \\ (U, V) &\mapsto \Pi(U, V) \end{aligned}$$

telle que $\Pi(U, V)$ soit l'unique solution de l'ESDR correspondant. Soit $(U, V, U', V') \in \mathcal{M}(\beta, a, \tau) \times \mathcal{M}(\beta, a, \tau)$ et $\Pi(U, V) = (Y, Z)$, $\Pi(U', V') = (Y', Z')$. En combinant $(ii-a)$ and $(ii-b)$ de la Proposition 3.2.1, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)|Y_s - Y'_s|^2 ds\right) &+ \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s - Z'_s|^2 ds\right) \\ &\leq \left(\frac{4}{\beta} + \frac{4}{\beta^2 - 4\beta}\right) \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|V_s - V'_s|^2 ds\right).\end{aligned}$$

En d'autres termes

$$||(Y, Z) - (Y', Z')||_\beta^2 \leq \left(\frac{4}{\beta} + \frac{4}{\beta^2 - 4\beta}\right) ||(U, V) - (U', V')||_\beta^2.$$

Par conséquent, en prenant β suffisamment grand, Π est une application contractante et son unique point fixe est la solution de l'EDSR considérée. ■

3.3 Existence et unicité sur un intervalle aléatoire

Dans toute cette section, nous supposons que les conditions **(H1)** – **(H5)** sont satisfaites avec τ un temps terminal aléatoire pouvant prendre des valeurs dans $[0, +\infty]$. Nous utilisons un schéma d'approximation dont la construction et la convergence sont basées sur le Lemme fondamental suivant :

Lemme 3.3.1. *On suppose que ξ vérifie* **(H3 – i)**. *Alors*

(i) Il existe un processus $\{\eta_t : t \geq 0\}$ L_2-intégrable tel que $\xi = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^\tau \eta(s) dW_s$.

(ii) Le processus $\{\xi_t : t \geq 0\}$ défini en posant $\xi_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$ est tel que $(\xi_t, \eta_t) \in \mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$.

Preuve.

(i) Puisque $L^2(\beta, a, \tau) \subset L^2(0, 0, \tau)$, on a $\mathbb{E}(|\xi|^2) < +\infty$. Le théorème de représentation d'Itô donne l'existence d'un processus η, L_2-intégrable satistaisant (i).

(ii) Puisque $\xi_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}$, on a

$$e^{\frac{\beta}{2}A(t\wedge\tau)}|\xi_{t\wedge\tau}| \leq \mathbb{E}(e^{\frac{\beta}{2}A(t\wedge\tau)}|\xi||\mathcal{F}_{t\wedge\tau}.$$

Grâce aux inégalités de Doob et de Jensen, on déduit que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\beta A(t)}|\xi_t|^2) \leq 4\mathbb{E}(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2). \tag{3.15}$$

De plus par un calcul standard, on obtient que pour tout $T \geq t \geq 0$

$$\beta \mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)} a^2(s)|\xi_s|^2)ds\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2)ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\xi_{T\wedge\tau}|^2\right) + \gamma^2 \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau} e^{\beta A(t)}|\xi_t|^2\right) + \frac{C^2}{\gamma^2}\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2)ds\right).$$

En choisissant $\gamma^2 \geq 2C^2$, en faisant tendre T vers $+\infty$ et en utilisant à la fois le Lemme de Fatou et le Théorème de la convergence dominée, on déduit

$$\beta \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{\beta A(s)} a^2(s)|\xi_s|^2)ds\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{\beta A(s)}|\eta_s|^2)ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2\right) + \gamma^2 \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\beta A(t)}|\xi_t|^2\right).$$

Dès lors (3.15) et $(\mathbf{H3} - \mathbf{iv})$ donnent (i). ■

Le résultat principal de cette section est :

Théorème 3.3.1. *Supposons que les conditions* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H5})$ *sont satisfaites. Alors l'EDSR* $(\tau,\, \xi,\, f)$ *admet une solution unique.*

Le résultat d'existence est basé sur la suite de processus suivante :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous savons par le Théorème 3.2.1 que l'EDSR $(n,\, \xi_n,\, 1_{[0,\,\tau]}f)$ admet une solution unique $(Y^n,\, Z^n)$. Nous avons :

$$Y_t^n = \xi_n + \int_t^n \mathbf{1}_{[0,\,\tau]} f(s, Y_s^n,\, Z_s^n)ds - \int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} Z_s^n dW_s \,, \forall\, 0 \leq t \leq n.$$

Nous étendons la suite $(Y^n,\, Z^n)$ en posant

$$Y_t^n = \xi_t,\;\; Z_t^n = \eta_t,\;\; ,\; \forall t \geq n.$$

Ainsi, $(Y^n,\, Z^n)$ est solution de l'équation

$$Y_t^n = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} 1_{[0,\,n]} f(s, Y_s^n,\, Z_s^n)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s^n dW_s \,, \forall\, t \geq 0$$

Etudions la convergence de la suite $(Y^n,\, Z^n)_{n\geq 0}$. Pour ce faire nous avons besoin des résultats suivants.

Lemme 3.3.2. *(Estimations àpriori uniformes en n) Posons*

$$\Gamma = I\!E\left(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2 + \frac{2}{\beta}\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,0,\,0)|^2}{a^2(s)}ds\right).$$

Alors

$$\sup_{n\in I\!N^*}\left[\frac{1}{2}I\!E\left(\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds\right) + \left(\frac{\beta}{2}-2\right)I\!E(\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2 ds)\right] \leq \Gamma. \quad (3.16)$$

$$\sup_{n\in I\!N^*} I\!E\left(\sup_{0\leq t\leq n\wedge\tau} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_t^n|^2\right) \leq 2\Gamma. \quad (3.17)$$

Preuve. En appliquant la formule d'Itô au processus $e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2$, on obtient :

$$e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}^n|^2 + \frac{1}{2}\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds + \left(\frac{\beta}{2}-2\right)\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2 ds$$

$$\leq e^{\beta A(n\wedge\tau)}|Y_n^n|^2) + \frac{2}{\beta}\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,0,\,0)|^2}{a^2(s)}ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n,\, Z_s^n dW_s\rangle.$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_{t\wedge\tau}^n|^2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds\right) + \left(\frac{\beta}{2}-2\right)\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2 ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(n\wedge\tau)}|Y_n^n|^2\right) + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,0,\,0)|^2}{a^2(s)}ds\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2\right) + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,\,0,\,0)|^2}{a^2(s)}ds\right),$$

ce qui donne (3.16). Pour obtenir (3.17), il suffit d'appliquer l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy. ■

Proposition 3.3.1. *Sous* **(H1)** – **(H5)**, $(Y^n,\, Z^n,\, K^n)_{n\in I\!N^*}$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau)$.

Preuve. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $m > n$. Posons

$$\Delta Y_t = Y_t^m - Y_t^n;\ \Delta Z_t = Z_t^m - Z_t^n.$$

• Pour tout $n \leq t \leq m$, on a

$$Y_t^n = \xi_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \xi_m - \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} \eta(s)dW_s,$$

$$Y_t^m = \xi_m + \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} f(s, Y_s^m, Z_s^m)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} Z_s^m dW_s.$$

Ce qui donne

$$\Delta Y_t = \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} f(s, Y_s^m, Z_s^m)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} \Delta Z_s dW_s.$$

On a

$$e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_t|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds + \beta \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)} a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds$$

$$= 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s, f(s, Y_s^m, Z_s^m)\rangle ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s, \Delta Z_s dW_s\rangle.$$

Puisque

$$\begin{aligned} 2\langle \Delta Y_s, f(s, Y_s^m, Z_s^m)\rangle &= 2\langle \Delta Y_s, f(s, Y_s^m, Z_s^m) - f(s, \xi_s, Z_s^m)\rangle \\ &+ 2\langle \Delta Y_s, f(s, \xi_s, Z_s^m) - f(s, \xi_s, \eta_s)\rangle \\ &+ 2\langle \Delta Y_s, f(s, \xi_s, \eta_s)\rangle, \end{aligned}$$

on obtient

$$e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds + \left(\frac{\beta}{2} - 2\right)\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)} a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds$$

$$\leq \frac{2}{\beta}\int_{n\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s, \xi_s, \eta_s)|^2}{a^2(s)}ds) - 2\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s, \Delta Z_s dW_s\rangle.$$

Grâce à l'inégalité de BDG, nous déduisons que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\sup_{n\leq t\leq m} e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_t|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_{n\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right) \\ &\qquad + C\mathbb{E}\left(\int_{n\wedge\tau}^{\tau\wedge m} e^{\beta A(s)} a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds\right) \\ &\qquad \leq C\mathbb{E}\left(\int_{n\wedge\tau}^{\tau} e^{\beta A(s)}\frac{|f(s, \xi_s, \eta_s)|^2}{a^2(s)}ds\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ainsi en vertu du Lemme 3.3.1, le terme à droite de l'inégalité (3.18) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

• Pour $t \leq n$, nous avons :

$$\Delta Y_t = \Delta Y_n + \int_t^{\tau\wedge n} [f(s,\, Y_s^m,\, Z_s^m) - f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)]ds - \int_t^{\tau\wedge n} \Delta Z_s dW_s + \int_t^{\tau\wedge n} d(\Delta K_s).$$

Par des calculs similaires au cas précédent, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau\wedge n} e^{\beta A(t)}|\Delta Y_t|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds\right) \\ &+C\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge n} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(n\wedge\tau)}|\Delta Y_n|^2\right) \end{aligned}$$

En tenant compte de (3.18), nous déduisons que le terme de droite tend vers zero quand n tend vers l'infini. ■

Preuve du Théorème 3.3.1.

Unicité

Soit $(Y,\, Z)$ et $(Y',\, Z')$ deux solutions de l'EDSR $(\tau,\, \xi,\, f)$. Notons $\Delta Y_t = Y_t - Y'_t$; $\Delta Z_t = Z_t - Z'_t$. On a

$$\Delta Y_{t\wedge\tau} = \Delta Y_{T\wedge\tau} + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} [f(s,\, Y_s,\, Z_s) - f(s,\, Y'_s,\, Z'_s)]ds - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \Delta Z_s dW_s,\ T \geq t \geq 0.$$

La formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} &e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \beta\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s|^2 ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds \\ &= e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\Delta Y_{T\wedge\tau}|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s,\, f(s,\, Y_s,\, Z_s) - f(s,\, Y'_s,\, Z'_s)\rangle ds \\ &\quad -2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle \Delta Y_s,\, \Delta Z_s dW_s\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant la condition **(H1)** et en prenant l'espérance dans ce qui précède, on obtient pour β suffisamment grand :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\Delta Y_{T\wedge\tau}|^2\right) \end{aligned}$$

Puisque $(\Delta Y,\, \Delta Z) \in \mathcal{M}^c(\beta,\, a,\, \tau)$, en faisant tendre T vers l'infini et en utilisant le Théorème de la convergence dominée, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2\right) = 0,$$

Par conséquent $\Delta Y_{t\wedge\tau} = 0$ $\mathbb{P}$-p.s et par suite $\Delta Z_{t\wedge\tau} = 0$ $d\mathbb{P}\otimes dt$-p.s.
Existence : Notons (Y_t, Z_t) la limite de la suite (Y_t^n, Z_t^n) et prouvons que (Y_t, Z_t) est solution de l'EDSR (τ, ξ, f). En vertu du Théorème 3.2.2, on sait que pout tout $T > 0$, l'EDSR $(T, Y_T, 1_{[0,\tau]}f)$ admet une solution unique $(\overline{Y}_t, \overline{Z}_t)$. En conséquence, pour obtenir le résultat, il suffit de prouver que $(Y_t, Z_t) = (\overline{Y}_t, \overline{Z}_t)$, $\forall t \leq T$. On a

$$\overline{Y}_t = Y_T + \int_t^T 1_{[0,\tau]}f(s, \overline{Y}_s, \overline{Z}_s)ds - \int_t^T \overline{Z}_s dW_s$$

$$Y_t^n = Y_T^n + \int_t^T 1_{[0,\tau]}f(s, Y_s^n, Z_s^n)ds - \int_t^T Z_s^n dW_s$$

Par extraction d'une sous-suite notée Y_t^n, nous avons

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(s\wedge\tau)}|\overline{Y}_t - Y_t|^2\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(e^{\beta A(s\wedge\tau)}|\overline{Y}_t - Y_t^n|^2\right)$$

Montrons que le terme de droite est zéro.
Notons $\widehat{\Delta Y}_t = \overline{Y}_t - Y_t^n$, $\widehat{\Delta Z}_t = \overline{Z}_t - Z_t^n$. On a

$$\widehat{\Delta Y}_t = \widehat{\Delta Y}_T + \int_t^T 1_{[0,\tau]}[f(s, \overline{Y}_s, \overline{Z}_s) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)]ds - \int_t^T \widehat{\Delta Z}_s dW_s$$

En utilisant un argument similaire à celui de la preuve de l'unicité, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\widehat{\Delta Y}_t|^2\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\widehat{\Delta Y}_T|^2\right)$$

Ainsi

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\overline{Y}_t - Y_t|^2\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|Y_T - Y_T^n|^2\right) = 0.$$

On conclut ainsi que pour tout $t \leq T$, $(Y_t, Z_t) = (\overline{Y}_t, \overline{Z}_t)$. ■
A présent, nous énonçons un résultat de comparaison.

Théorème 3.3.2. (*Théorème de comparaison*)
Supposons $d = 1$ et les conditions **(H1)** $-$ **(H5)** *satisfaites. Soit (Y, Z) (resp. (Y', Z')) une solution de l'ESDR (τ, ξ, f) (resp.(τ, ξ', f')) telles que $\xi \leq \xi'$ p.s, $f(t, Y_t, Z_t) \leq f(t, Y_t', Z_t')$ $dt \times d\mathbb{P}$p.s. Alors $Y_t \leq Y_t'$ p.s sur l'ensemble $\{t \leq \tau\}$.*

Preuve
Posons $\Delta Y_t^+ = Y_t - Y_t'$; $\Delta Z_t = Z_t - Z_t'$. Une fois encore, par la formule d'Itô , on obtient :

$$\begin{aligned}
& e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}^+|^2 + \beta\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}a^2(s)|\Delta Y_s^+|^2 ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}|\Delta Z_s|^2 ds \\
= \; & e^{\beta A(T\wedge\tau)}|\Delta Y_{T\wedge\tau}^+|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s^+, f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s', Z_s')\rangle ds \\
- \; & 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\beta A(s)}\langle\Delta Y_s^+, \Delta Z_s dW_s\rangle, \forall 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta Y_s^+, f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s', Z_s')\rangle &\leq a^2(s)|\Delta Y_s^+|^2 + \frac{1}{2}|\Delta Z_s|^2 \\
&+ \langle \Delta Y_s^+, f(s, Y_s', Z_s') - f'(s, Y_s', Z_s')\rangle.
\end{aligned}
$$

Et de façon similaire à la preuve de l'unicité, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(e^{\beta A(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}^+|^2\right) = 0,$$

ce qui donne $\Delta Y_{t\wedge\tau^+} = 0$ $\mathbb{P}$-p.s .■

Remarque 3.3.1. *Lorsque le temps aléatoire est un temps de sortie de la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS), le Théorème 3.3.1 permet de donner une interprétation probabiliste de la solution de viscosité d'une EDP de type élliptique. Plus précisement, soit*

$$X_s^x = x + \int_0^s b(X_r^x)dr + \int_0^s \sigma(X_r^x)dW_r$$

la diffusion dont le générateur infinitésimal est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\sigma\sigma_{ij}^t)(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Soit (Y^x, Z^x) la solution unique de l'EDSR

$$Y_s^x = l(X_{\tau_x}^x) + \int_{s\wedge\tau_x}^{\tau_x} f(X_r^x, Y_r^x, Z_r^x)dr - \int_{s\wedge\tau_x}^{\tau_x} Z_r^x dW_r, \; s \geq 0$$

où $(y, z) \mapsto f(X^x, y, z)$ satisfait les hypothéses $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H5})$,
$\sup_{x\in\overline{G}} \mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau_x)}\right) < \infty$ *et* $\sup_{x\in\overline{G}} \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_x} e^{\beta A(t)} \frac{|f(X_t^x, 0, 0)|^2}{a^2(t)} dt\right) < +\infty$. *Alors $u(x) = Y_0^x$ est continu sur $\overline{G}$ et est une solution de viscosité du système sémilinéaire ci-dessous :*

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}u_i + f_i(x, u(x), (\nabla u_i \sigma)(x)) = 0, \;\; x \in G, \, i = 1, \, ..., \, d \\
\\
u_i(x) = l_i(x), \;\; x \in \partial G, \, i - 1, \, ..., \, d,
\end{cases}
$$

où G désigne un sous ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, ∂G sa frontière de classe C^1, $l \in C(\overline{G}, \mathbb{R}^d)$ et $\tau_x = \inf\{t \geq 0, \, X_t^x \notin \overline{G}\}$ est un temps d'arrêt satisfaisant $\mathbb{P}\{\tau_x < +\infty\} = 1$.

3.4 EDSRs Réfléchies avec condition de monotonie stochastique et croissance polynomiale

Dans cette section, τ est un temps terminal déterministe et nous dirons que $(Y, Z) \in \mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau)$ si

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{0\le t\le\tau}|Y_t|^{2p} + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s|^2ds\right)^p + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s|^2ds\right)^p\right\} < +\infty$$

Hypothèses et définitions

Soit $f : \Omega \times [0,\tau] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction telle que pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n}$, $f(.,.y, z)$ est progressivement mesurable, ξ une R^d-variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau-$mesurable .
Pour $\beta > 0$, nous supposons que le triplet (τ, ξ, f) satisfait les conditions :

(H1) Il existe un processus $\mathcal{F}_t-$adapté $\theta(t)$ et un processus nonnégatif $\mathcal{F}_t-$adapté $v(t)$ tels que $\forall (y, y', z, z') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \times \mathbb{R}^{d\times n}$,

$$\begin{cases} (i) & \langle y - y',\ f(t,y,z) - f(t,y',z)\rangle \le \theta(t)|y-y'|^2 \\ (ii) & |f(t,y,z) - f(t,y,z')| \le v(t)|z-z'| \\ (iii) & y \mapsto f(.,.,y,z) \text{ is continuous } dt\otimes d\mathbb{P} \text{ a.s.} \end{cases}$$

(H2) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a^2(t) \triangleq |\theta(t)| + v^2(t) > \varepsilon$.
Si **(H2)** is n'est pas vérifiée, on peut remplacer $v(t)$ par $v(t) + \sqrt{\varepsilon}$.

(H3) Il existe un processus $\mathcal{F}_t-$adapté $\eta(t)$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, $p > 1$ et une constante positive K tels que

$$\begin{cases} (iv) & \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|\eta(s)|^2 ds\right)^p\right] < +\infty \\ (v) & |f(t,y,z)| \le |f(t,0,z)| + \eta(t) + K(1+|y|^p). \end{cases}$$

(H4)

$$\begin{cases} (vi) & \mathbb{E}\left[e^{p\beta A(\tau)}\left(1+|\xi|^{2p}\right)\right] < +\infty \\ (vii) & \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|f(.,0,0))|^2}{a^2(s)}ds\right)^p\right] < +\infty \end{cases}$$

Remarque 3.4.1. *Ici, nous considérons uniquement le cas $p > 1$ car le cas $p = 1$ a été étudié dans Bahlali et al. [2].*

Définition 3.4.1. *Une solution de l'EDSR (τ, ξ, f) est un couple de processus $\mathcal{F}_t-$adaptés $\{(Y_t, Z_t)\,; t \ge 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n}$ tels que*
(j) $(Y, Z) \in \mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau)$, c'est à dire

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} e^{p\beta A(t)}|Y_t|^{2p} + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s|^2 ds\right)^p + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s|^2 ds\right)^p\right) < +\infty$$

(jj) $Y_t = \xi + \int_t^\tau f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^\tau Z_s dW_s$

3.4.1 Existence et unicité : cas de la solution d'une EDSR

Unicité

Nous donnons tout d'abord des estimations à priori sur les solutions.

Proposition 3.4.1. *Supposons que les données* (τ, ξ, f), (τ, ξ', f') *vérifient (***H1***)-(***H4***) avec les mêmes coefficients*[1]*. Soit* (Y, Z) *(resp.* (Y', Z')*) une solution de l'EDSR correspondante. Notons* $\Delta f(t) = f(t, Y_t', Z_t') - f'(t, Y_t', Z_t')$, $\Delta Y_t = Y_t - Y_t'$, $\Delta Z_t = Z_t - Z_t'$, $\Delta\xi = \xi - \xi'$ *. Si de plus* $I\!E\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} \frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)} ds\right)^p < +\infty$, *alors pour* β *suffisamment grand, il existe une constante qui dépend uniquement de* p *telle que*
(i)

$$I\!E\left(\sup_{0 \le t \le \tau} e^{p\beta A(t)} |\Delta Y_t|^{2p}\right) \le C\Gamma$$

(ii)

$$I\!E\left[\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} |\Delta Z_s|^2 ds\right)^p + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s) |\Delta Y_s|^2 ds\right)^p\right] \le C\Gamma$$

où nous avons posé $\Gamma \triangleq I\!E\left[\left(e^{p\beta A(\tau)} |\Delta\xi|^{2p}\right) + \frac{2^p}{\beta^p}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} \frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)} ds\right)^p\right]$.

Preuve. Dans tout ce qui suit, $C(p)$ désigne une constante qui dépend uniquement de p et peut varier d'une ligne à une autre.
Par la formule d' Itô , on a

$$\begin{aligned} & e^{\beta A(t)} |\Delta Y_t|^2 + \beta \int_t^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s) |\Delta Y_s|^2 ds + \int_t^\tau e^{\beta A(s)} |\Delta Z_s|^2 ds \\ = \; & e^{\beta A(\tau)} |\Delta\xi|^2 + 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)} \langle \Delta Y_s, f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s', Z_s')\rangle ds \\ & -2\int_t^\tau e^{\beta A(s)} \langle \Delta Y_s, \Delta Z_s dW_s\rangle. \end{aligned}$$

La condition **(H1-i)**, **(H1-ii)** et l'inégalité de Young $2ab \le ka^2 + \frac{1}{k}b^2$, pour tout $k > 0$ donnent

$$\begin{aligned} & 2\langle \Delta Y_s, f(s, Y_s, Z_s) - f'(s, Y_s', Z_s')\rangle \\ \le \; & 2\theta(s) |\Delta Y_s|^2 + 2|\Delta Y_s| \left[v(s) |\Delta Z_s| + |\Delta f(s)|\right] \\ \le \; & \left(\frac{\beta}{2} + 2\right) a^2(s) |\Delta Y_s|^2 + \frac{1}{2} |\Delta Z_s|^2 + \frac{2}{\beta} \frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)}. \end{aligned}$$

[1] Cette hypothèse n'est pa srestrictive puisque on peut toujours choisir $a^2(t) \triangleq \overline{\theta}(t) + \overline{v}^2(t)$, avec $\overline{\theta}(t) \triangleq \max(\theta(t), \theta'(t))$, $\overline{v}(t) \triangleq \max(v(t), v'(t))$.

Ainsi, l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} & e^{\beta A(t)}\left|\Delta Y_t\right|^2+\left(\frac{\beta}{2}-2\right) \int_t^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)\left|\Delta Y_s\right|^2 d s+\frac{1}{2} \int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 d s \\ \leq & e^{\beta A(\tau)}|\Delta \xi|^2+\frac{2}{\beta} \int_t^\tau e^{\beta A(s)} \frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)} d s-2 \int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left\langle\Delta Y_s, \Delta Z_s d W_s\right\rangle . \qquad (3.19) \end{aligned}$$

En choisissant $\beta > 4$ et en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$, on obtient

$$e^{\beta A(t)}\left|\Delta Y_t\right|^2 \leq \mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}|\Delta \xi|^2+\frac{2}{\beta} \int_0^\tau e^{\beta A(s)} \frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)} d s \,|\mathcal{F}_t\right)$$

Par suite, puisque $p > 1$, l'inégalité maximale de Doob donne

$$\mathbb{E}\left(\sup _{0 \leq t \leq \tau} e^{\beta A(t)}\left|\Delta Y_t\right|^{2 p}\right) \leq C(p) \mathbb{E}\left[e^{p \beta A(\tau)}|\Delta \xi|^{2 p}+\frac{2^p}{\beta^p}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} \frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)} d s\right)^p\right]$$

D'où (i).
De l'inégalité (3.19), on tire

$$\begin{aligned} & \sup _{0 \leq t \leq \tau} e^{\beta A(t)}\left|\Delta Y_t\right|^2+\left(\frac{\beta}{2}-2\right) \int_0^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)\left|\Delta Y_s\right|^2 d s+\frac{1}{2} \int_0^\tau e^{\beta A(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 d s \\ \leq & e^{\beta A(\tau)}|\Delta \xi|^2+\frac{2}{\beta} \int_0^\tau e^{\beta A(s)} \frac{|\Delta f(s)|^2}{a^2(s)} d s+2 \sup _{0 \leq t \leq \tau}\left|\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left\langle\Delta Y_s, \Delta Z_s d W_s\right\rangle\right| . \end{aligned}$$

En combinant l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy et l'inégalité élémentaire $ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, on déduit que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 d s\right)^p \\ \leq & C(p) \Gamma+C(p) \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{2 \beta A(s)}\left|\Delta Y_s\right|^2\left|\Delta Z_s\right|^2 d s\right)^{\frac{p}{2}} \\ \leq & C(p) \Gamma+C(p) \mathbb{E}\left(\sup _{0 \leq t \leq \tau} e^{\frac{p}{2} \beta A(t)}\left|\Delta Y_t\right|^p\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 d s\right)^{\frac{p}{2}}\right) \\ \leq & C(p) \Gamma+C(p) \mathbb{E}(\sup _{0 \leq t \leq \tau} e^{p \beta A(t)}\left|\Delta Y_t\right|^{2 p})+\frac{1}{2} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 d s\right)^p . \end{aligned}$$

Par suite, en tenant compte de (i), on obtient

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 d s\right)^p \leq C(p) \Gamma .$$

De la même manière, on montre que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)\left|\Delta Y_s\right|^2 ds\right)^p \leq C(p)\Gamma,$$

et en combinant ces deux dernières inégalités, on obtient (ii).■

Corollaire 3.4.1. *Soit* (Y, Z) *une solution de l'EDSR* (τ, ξ, f). *Alors*

$$\begin{aligned}
& I\!E\left[\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{p\beta A(t)}|Y_t|^{2p} + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s|^2 ds\right)^p + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s|^2 ds\right)^p\right] \\
\leq \;& C(p) I\!E\left[(e^{p\beta A(\tau)}|\xi|^{2p}) + \frac{2^p}{\beta^p}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,0,0)|^2}{a^2(s)}ds\right)^p\right].
\end{aligned}$$

Preuve. Par la formule d'Itô ,

$$\begin{aligned}
& e^{\beta A(t)}\left|Y_t\right|^2 + \beta\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)\left|Y_s\right|^2 ds + \int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left|Z_s\right|^2 ds \\
= \;& e^{\beta A(\tau)}\left|\xi\right|^2 + 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left\langle Y_s, f(s, Y_s, Z_s)\right\rangle ds - 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left\langle Y_s, Z_s dW_s\right\rangle.
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité

$$2\left\langle Y_s, f(s, Y_s, Z_s)\right\rangle \leq \left(\frac{\beta}{2}+2\right)a^2(s)\left|Y_s\right|^2 + \frac{1}{2}|Z_s|^2 + \frac{2}{\beta}\frac{|f(s,0,0)|^2}{a^2(s)},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& e^{\beta A(t)}|Y_t|^2 + \left(\frac{\beta}{2}-2\right)\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s|^2 ds + \frac{1}{2}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s|^2 ds \\
\leq \;& e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2 + \frac{2}{\beta}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,0,0)|^2}{a^2(s)}ds - 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle Y_s, Z_s dW_s\rangle.
\end{aligned}$$

Le résultat se déduit alors par un argument similaire à celui de la Proposition 3.4.1.■

Corollaire 3.4.2. *Supposons que les conditions* **(H1)- (H4)** *sont satisfaites. Alors l'EDSR* (jj) *admet au plus une solution.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 3.4.1.

Existence

Le principal résultat est :

Théorème 3.4.1. *Supposons que les conditions* **(H1)** - **(H4)** *sont satisfaites. Alors pour β suffisamment grand, l'EDSR $(j) - (jj)$ admet au moins une solution.*

La preuve est basée sur un argument utilisant le théorème du point fixe, des estimations à priori et le résultat technique suivant.

Proposition 3.4.2. *Supposons* **(H1)** - **(H4)** *satisfaites. Soit $\{V_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifiant $I\!E\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} |V_s|^2 ds\right)^p < +\infty$. Alors, il existe un processus $\mathcal{F}_t$-adapté (Y, Z) à valeurs dans $I\!R^d \times I\!R^{d\times n}$ tel que*

$$(3j)\ I\!E\left[\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{p\beta A(t)}|Y_t|^{2p} + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s|^2 ds\right)^p + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s|^2 ds\right)^p\right] < +\infty.$$

et

$$(4j)\ Y_t = \xi + \int_t^\tau f(s, Y_s, V_s)ds - \int_t^\tau Z_s dW_s\ .$$

Preuve. Dans ce qui suit, nous posons $h(s, y) \triangleq f(s, y, V_s)$ pour tout $s \in [0, \tau]$ et subdivisons la preuve en deux étapes.
Etape 1. Posons $\overline{\xi} = e^{\frac{\beta}{2}A(\tau)}\,|\xi|$ et supposons que

$$|\overline{\xi}|^2 + \sup_{0\leq t\leq\tau} |h(t, 0)|^2 \leq C. \tag{3.20}$$

Posons $q(n) = [(C + \frac{6\tau}{\beta\varepsilon}(nC + n^3 + 4K^2 n))^{\frac{1}{2}}]$, où $[r]$ est la partie entière de r et considérons la suite de fonction définie par :

$$h_n(t, y) \triangleq h_{n,\, q(n)+2}(t, y) = 1_{\left\{\eta(t)+e^{\beta A(t)}\leq n\right\}} \int_{I\!R^d} \varphi_{q(n)+2}(y-u)h(t, y-u)\rho_n(u)du,$$

où ρ_n et φ_q sont les fonctions régulières spécifiées dans la sous-section 3.2.1.
Nous rappelons ici les propriétés de $h_n(t, .)$.

(a) $h_n(t, .)$ converge vers $h(t, .)$ sur les ensembles compacts.

(b) $h_n(t, .)$ est globalement Lipschitz stochastique avec les coefficients $K(n, t) = a^2(t) + C_n$, où $C_n = \frac{1}{4}\alpha_n^2 \dfrac{C}{\varepsilon} + \alpha_n\left[n + K\left(2 + (q(n) + 3)^p\right)\right]$ et $\alpha_n = \int_{I\!R^d} |\nabla\rho_n(u)|du$

(c) Pour $|y|, |y'| \leq q(n)+1$, $\langle y - y', h_n(t, y) - h_n(t, y')\rangle \leq 1_{\left\{\eta(t)+e^{\beta A(t)}\leq n\right\}}\theta(t)|y - y'|^2$.

(d) $|h_n(t,y)| \leq 1_{\{\eta(t)+e^{\beta A(t)}\leq n\}}\left(|h(t,0)| + \eta(t) + K(2+|y|^p)\right)$.

A présent, posons $a_n^2(t) \triangleq K(n,t)$, $A_n(t) \triangleq \int_0^t a_n^2(s)ds = \int_0^t K(n,s)ds = A(t) + C_n t$. D'après El Karoui et Huang [22], l'équation

$$Y_t^n = \xi + \int_t^\tau h_n(s, Y_s^n)ds - \int_t^\tau Z_s^n dW_s \tag{3.21}$$

admet une solution unique (Y^n, Z^n) qui appartient à l'espace $\mathcal{M}^c(\beta, a_n, \tau)$. Mais en vertu de la Remarque 2.1.1 du chapitre 2, $(Y^n, Z^n) \in \mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$. De plus, en utilisant (3.20), on peut montrer que

$$\forall t \in [0,\tau] \qquad |Y_t^n|^2 \leq C + \frac{6\tau}{\beta\varepsilon}(nC + n^3 + 4K^2 n), \tag{3.22}$$

ce qui justifie le choix de $q(n)$. Montrons à présent que la suite (Y^n, Z^n) converge vers la solution de l'EDSR $(4j)$. Pour ce faire, nous avons besoin de ce qui suit.

Lemme 3.4.1. *(estimations à priori uniformes en n). Supposons* **(H1)** - **(H4)** *satisfaites. Alors pour β suffisamment grand, il existe une constante C dépendant seulement de p, β, K et ε telle que :*

$$(i) \quad \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\Big\{\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{p\beta A(t)}|Y_t^n|^{2p} + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2 ds\right)^p + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds\right)^p\Big\}$$

$$\leq C\mathbb{E}\left\{e^{p\beta A(\tau)}(1+|\xi|^{2p}) + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\eta(s)^2 ds\right)^p\right\}.$$

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left\{\int_0^\tau e^{\beta A(s)}|h_n(s,Y_s^n)|^2 ds\right\} < +\infty.$

Preuve.(i) La formule d' Itô donne

$$\begin{aligned} & e^{\beta A(t)}|Y_t^n|^2 + \beta\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n|^2 ds + \int_t^\tau e^{\beta A(s)}|Z_s^n|^2 ds \\ = \; & e^{\beta A(\tau)}|\xi|^2 + 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n, h_n(s,Y_s^n)\rangle ds - 2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n, Z_s^n dW_s\rangle. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Grâce à

$$\begin{aligned} 2\langle Y_s^n, h_n(s,Y_s^n)\rangle &= 2\langle Y_s^n, h_n(s,Y_s^n) - h_n(s,0)\rangle + 2\langle Y_s^n, h_n(s,0)\rangle \\ &\leq \left(2 + \frac{\beta}{2}\right)a^2(s)|Y_s^n|^2 + \frac{2}{\beta\varepsilon}|h_n(s,0)|^2 \end{aligned}$$

et par des calculs analogues au Corollaire 3.4.1, il vient

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left\{\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{p\beta A(t)}\left|Y_t^n\right|^{2p}+\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)\left|Y_s^n\right|^2 ds\right)^p+\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\left|Z_s^n\right|^2 ds\right)^p\right\} \\
\leq\; & C(p)\mathbb{E}\left\{e^{p\beta A(\tau)}\left|\xi\right|^{2p}+\frac{2^p}{(\beta\varepsilon)^p}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\left|h_n(s,0)\right|^2 ds\right)^p\right\}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent en utilisant (d), on déduit (i). Pour obtenir (ii), il suffit d'utiliser (i) et **(H3)** .■

Lemme 3.4.2. *Supposons* **(H1)** - **(H4)** *satisfaites. Alors* (Y^n, Z^n) *est une suite de Cauchy dans* $\mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$.

Preuve. Elle est similaire à la preuve du Lemme 3.2.2 du chapitre 3.■

Ainsi, la suite (Y^n, Z^n) converge vers (Y, Z) dans l'espace $\mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$. De plus, nous savons par le Lemme 3.4.1 que (Y^n, Z^n) est uniformement bornée dans $\mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau)$. On déduit par le Lemme de Fatou que (Y, Z) appartient à l'espace $\mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau)$. En passant à la limite dans (3.21) on peut montrer que le processus (Y, Z) est solution de l'équation $(7j)$.

Etape 2

Soit

$$
\begin{aligned}
\xi_n &= \frac{\inf(n, e^{\frac{\beta A(\tau)}{2}}\left|\xi\right|)}{e^{\frac{\beta A(\tau)}{2}}\left|\xi\right|}\xi, \\
h_n(t,y) &= \begin{cases} h(t,y)-h(t,0)+\frac{\inf(n,|h(t,0)|)}{|h(t,0)|}h(t,0), & \text{if } h(t,0)\neq 0. \\ h(t,y) & \text{, if } h(t,0)=0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nous avons $\mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}\left|\xi_n-\xi\right|^2\right)$, $\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|h_n(s,0)-h(s,0)|^2}{a^2(s)}ds\right)\to 0$, et (ξ_n, h_n) satisfait (3.20). Ainsi pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, il existe (Y^n, Z^n) qui satisfait $(3j)$ et

$$
Y_t^n=\xi_n+\int_t^\tau h_n(s,Y_s^n)ds-\int_t^\tau Z_s^n dW_s,\ 0\leq t\leq\tau.
$$

On vérifie aisement que pour tout $n, m\in\mathbb{N}^*$

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\beta A(t)}\left|Y_t^n-Y_t^m\right|^2+\left(\frac{\beta}{2}-2\right)\int_0^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)\left|Y_s^n-Y_s^m\right|^2 ds\right) \\
& +\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\left|Z_s^n-Z_s^m\right|^2 ds\right) \\
\leq\; & C\mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}\left|\xi_n-\xi_m\right|^2+\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{\left|h_n(s,0)-h_m(s,0)\right|^2}{a^2(s)}ds\right)\to 0,\ \text{quand } n,m\to+\infty.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, il existe un couple de processus (Y,Z) $\mathcal{F}_t-$adaptés vérifiant

$$\lim_n \|(Y^n, Z^n) - (Y,Z)\|^2_{\beta,c} = 0,$$

(3j) et (4j). Une fois de plus, on montre aisement que la suite (Y^n, Z^n) est uniformement bornée dans $\mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau)$. Par conséquent le Lemme de Fatou assure que (Y,Z) appartient à l'espace $\mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau)$. La preuve est à présent complète.■

Preuve du Théorème 3.4.1 Pour tout couple fixé $(U,V) \in \mathcal{M}_p(\beta, a, \tau)$, la Proposition 3.4.2 assure que l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^\tau f(s, Y_s, V_s)ds - \int_t^\tau Z_s dW_s.$$

admet une solution unique. Ainsi, nous pouvons définir l'application

$$\begin{array}{rccc} \Pi: & \mathcal{M}_p(\beta, a, \tau) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau) \subset \mathcal{M}_p(\beta, a, \tau) \\ & (U,V) & \longmapsto & \Pi(U,V) \end{array}$$

de sorte que $\Pi(U,V)$ soit l'unique solution de l'EDSR correspondante.
Soit $((U,V), (U',V')) \in \mathcal{M}_p(\beta, a, \tau) \times \mathcal{M}_p(\beta, a, \tau)$ et $\Pi(U,V) = (Y,Z)$, $\Pi(U',V') = (Y',Z')$. Posant $\Delta Y_t = Y_t - Y_t'$, $\Delta Z_t = Z_t - Z_t'$, on déduit de la Proposition (3.4.1) que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} |\Delta Z_s|^2 ds\right)^p + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s) |\Delta Y_s|^2 ds\right)^p\right] \\ \leq \; & \frac{2^p C(p)}{\beta^p} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} \frac{\left|f(s, Y_s', V_s) - f(s, Y_s', V_s')\right|^2}{a^2(s)} ds\right)^p \end{aligned}$$

En vertu de (**H1-ii**), il vient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} |\Delta Z_s|^2 ds\right)^p + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s) |\Delta Y_s|^2 ds\right)^p\right] \\ \leq \; & \frac{2^p C(p)}{\beta^p} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} \left|V_s - V_s'\right|^2 ds\right)^p \end{aligned}$$

Ainsi donc si β est suffisament grand, Π est une application contractante et son unique point fixe est solution de notre EDSR.■

3.4.2 Existence et unicité : cas de la solution d'une EDSR réfléchie

Dans toute cette section, nous considérons les éléments suivants. Soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

Soit $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe et sémi-continue inférieurement. $\partial\Phi$ désigne l'opérateur sousdifférentiel de Φ.

Posons

$$\begin{aligned}
Dom(\Phi) &= \left\{x \in \mathbb{R}^d : \ \Phi(x) < +\infty\right\} \\
\partial\Phi(u) &= \left\{u^* \in \mathbb{R}^d : \ \Phi(z) \geq \Phi(u) + \langle\, z-u,\ u^* \rangle \ , \forall z \in \mathbb{R}^d\right\} \\
Dom(\partial\Phi) &= \left\{u \in \mathbb{R}^d : \partial\Phi(u) \neq \emptyset\right\} \\
Gr(\partial\Phi) &= \left\{\ (u, u^*) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : u \in Dom(\partial\Phi) \text{ and } u^* \in \partial\Phi(u)\right\}
\end{aligned}$$

Pour $\beta > 0$, nous supposons que le triplet $(\tau, \xi, f\ )$ satisfait **(H1)** à **(H4)** et de plus

(H5) $\xi \in \overline{Dom(\Phi)}$, $\mathbb{E}\left(e^{\beta A(\tau)}\Phi(\xi)\right) < +\infty$.

Nous introduisons maintenant notre équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie associée aux données (τ, ξ, f, Φ).

Définition 3.4.2. *Une solution de l'EDSR-R (τ, ξ, f, Φ) est un triplet $\{(Y_t, Z_t, K_t) : 0 \leq t \leq \tau\}$ de processus $\mathcal{F}_t$-adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times n}$ et $\mathbb{R}^d$ respectivement et tel que*

(i) $(Y, Z) \in \mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau)$, c'est à dire

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{p\beta A(t)}|Y_t|^{2p} + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(t)} a^2(t)|Y_t|^2 dt\right)^p + \left(\int_0^\tau e^{\beta A(t)}|Z_t|^2 dt\right)^p\right) < +\infty.$$

(ii) $\{Y_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ est un processus continu à valeurs dans $\overline{Dom(\Phi)}$.

(iii) $\{K_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ est un processus continu tel que $K_0 = 0$ p.s. De plus K est absolument continu par rapport à la mesure $e^{\beta A(t)}dt$.

(iv) Pour tout $0 \leq t \leq \tau$,

$$Y_t = \xi + \int_t^\tau f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^\tau Z_s dW_s + K_\tau - K_t\ .$$

(v) Pour tout processus optionnel (α, β) tels que $(\alpha_t, \beta_t) \in Gr\ (\partial\Phi)$, on a

$$\int_0^\tau \langle Y_s - \alpha_s, dK_s + \beta_s ds\rangle \leq 0\ .$$

Dans la suite, nous pouvons supposer sans perdre la généralité que $\Phi(x) \geq \Phi(0) = 0$. Ainsi, nous avons $(0,0) \in Gr\ (\partial\Phi)$. Nous supposerons également que $int(\mathcal{D}om(\Phi)) \neq \emptyset$.
Rappelons à ce niveau quelques résultats sur l'approximation de Yosida des opérateurs sousdifférentiels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}^d$, soit

$$\Phi_n(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^d} \left\{ \frac{n}{2} |x-y|^2 + \Phi(y) \right\}.$$

$\Phi_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe de classe C^1 avec $\nabla\Phi_n = A_n$, où $A_n(x) = n(x - J_n x)$ est l'approximée de Yosida de l'opérateur sousdifférentiel $\partial\Phi$ et J_n la régularisée de cet opérateur. A_n est Lipschitz de constante de Lipschitz n. On a également

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^d} \Phi(y) \leq \Phi(J_n x) \leq \Phi_n(x) \leq \Phi(x). \tag{3.24}$$

De plus, il exist b dans l'intérieur de $Dom\,(\Phi)$ et une paire de réels positifs (μ, γ) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle A_n(x), x - b \rangle \geq \gamma |A_n(x)| - \mu |x - b| - \gamma\mu . \tag{3.25}$$

Pour plus de détails sur cette inégalité, nous référons le lecteur à Cépa [13]. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'EDSR non réfléchie :

$$Y_t^n = \xi + \int_t^\tau [\ f\ (s, Y_s^n, Z_s^n) - A_n(Y_s^n)]ds - \int_t^\tau Z_s^n dW_s\ ,\ \forall\, t \in [0, \tau\ ]. \tag{3.26}$$

Puisque A_n est un opérateur monotone, la fonction $f_n\ (s,y,z) = f\ (s,y,z) - A_n(y)$ satisfait **(H1)**. En vertu de Théorème 3.4.1 l'EDSR (3.26) admet une solution unique $(Y^n, Z^n) \in \mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau\ )$.
Notons

$$K_t^n = -\int_0^t A_n(Y_s^n)ds.$$

Le résultat principal de cette section est :

Théorème 3.4.2. *Supposons* **(H1)-(H5)**. *Alors l'ESDR-R* (τ, ξ, f, Φ) *admet une solution unique* $(Y, Z, K\ )$ *dans l'espace* $\mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau) \times L^2(\Omega)$. *De plus*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} I\!\!E \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} |K_t^n - K_t|^2 \right) = 0.$$

Pour la preuve, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.4.3. *Supposons* **(H1)-(H5)**. *Alors*

(*i*)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\Big\{\left(\int_0^\tau e^{\beta A(t)}a^2(t)\left|Y_t^n\right|^2dt\right)^p+\left(\int_0^\tau e^{\beta A(t)}\left|Z_t^n\right|^2dt\right)^p$$
$$+\int_0^\tau e^{\beta A(t)}\left|A_n(Y_t^n)\right|dt\Big\}<+\infty.$$

(*ii*)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}e^{p\beta A(t)}\left|Y_t^n\right|^{2p}\right)<+\infty.$$

(*iii*)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(t)}\left|A_n(Y_t^n)\right|^2dt\right)<+\infty.$$

Preuve. En combinant la formule d' Itô et l'inégalité (3.25), on obtient :

$$\begin{aligned}
& e^{\beta A(t)}\left|Y_t^n-b\right|^2+\beta\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)\left|Y_s^n-b\right|^2ds\\
& +\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left|Z_s^n\right|^2ds+2\gamma\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left|A_n(Y_s^n)\right|ds\\
\leq\ & e^{\beta A(\tau)}\left|\xi-b\right|^2+2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left\langle Y_s^n-b,f\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)\right\rangle ds\\
& +2\mu\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left|Y_s^n-b\right|ds+2\gamma\mu\int_t^\tau e^{\beta A(s)}ds\\
& -2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left\langle Y_s^n-b,Z_s^ndW_s\right\rangle.
\end{aligned}\tag{3.27}$$

Grâce aux inégalités

$$\begin{aligned}
& 2\langle Y_s^n-b,f\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)\rangle\\
\leq\ & 2\,\theta(s)|Y_s^n-b|^2+\left|Y_s^n-b\right|\left(v(s)\left|Z_s^n\right|+\left|f\left(s,b,0\right)\right|\right)\\
\leq\ & \left(2+\frac{\beta}{2}\right)a^2(s)\left|Y_s^n-b\right|^2+\frac{1}{2}\left|Z_s^n\right|^2+\frac{2}{\beta}\frac{\left|f\left(s,b,0\right)\right|^2}{a^2(s)}
\end{aligned}$$

et

$$2\mu\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\left|Y_s^n-b\right|ds\leq\frac{\mu^2}{2\varepsilon}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}ds+2\int_t^\tau e^{\beta A(s)}a^2(s)|Y_s^n-b|^2ds,$$

on déduit en vertu de (3.27) et du Corollaire 3.4.1, que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\left(\int_0^\tau e^{\beta A(t)}a^2(t)\left|Y_t^n-b\right|^2dt\right)^p+\left(\int_0^\tau e^{\beta A(t)}\left|Z_t^n\right|^2dt\right)^p+\int_0^\tau e^{\beta A(t)}a^2(t)\left|A_n(Y_t^n)\right|dt\right)\\
\leq\ & C\mathbb{E}\left[\left(e^{p\beta A(\tau)}(1+|\xi|^{2p}\right)+\frac{2^p}{\beta^p}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\frac{|f(s,b,0)|^2}{a^2(s)}ds\right)^p\right].
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir (i) et (ii) .

Pour la preuve du (iii), notons $\Psi_n(x) = \frac{1}{n}\Phi_n(x)$. En utilisant la convolution avec des fonctions régulières, on peut appliquer la formule d' Itô à Ψ_n et obtenir :

$$\begin{aligned}
& \Psi_n(Y_t^n)e^{\beta A(t)} + \frac{1}{n}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\,|A_n(Y_s^n)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_t^\tau e^{\beta A(s)} Tr\,(Z_s^n Z_s^{n^*} Hess(\Psi_n(Y_s^n))ds \\
\leq\ & \Psi_n(\xi)e^{\beta A(T)} + \frac{1}{n}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\,|A_n(Y_s^n)||f\,(s, Y_s^n, Z_s^n)|ds \\
& -\beta\int_t^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)\Psi_n(Y_s^n)\,ds - \int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle\nabla\Psi_n(Y_s^n), Z_s^n dW_s\rangle ds \\
\leq\ & \Psi_n(\xi)e^{\beta A(\tau)} + \frac{1}{2n}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\,|A_n(Y_s^n)|^2 ds + \frac{1}{2n}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}|f\,(s, Y_s^n, Z_s^n)|^2 ds \\
& -\beta\int_t^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)\Psi_n(Y_s^n)\,ds - \int_t^\tau e^{\beta A(s)}\langle\nabla\Psi_n(Y_s^n), Z_s^n dW_s\rangle.
\end{aligned}$$

Puisque $\Phi(y) \geq \Phi(0) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\Psi_n(Y_t^n)e^{\beta A(t)} + \frac{1}{2n}\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\,|A_n(Y_s^n)|^2 ds\right) \\
\leq\ & \mathbb{E}\left(\Psi_n(\xi)e^{\beta A(\tau)}\right) + \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{\beta A(s)}|f\,(s, Y_s^n, Z_s^n)|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Grâce à (i),(ii), **(H1)**, **(H3)** et **(H5)**, nous déduisons que

$$\sup_{0\leq t\leq\tau}\mathbb{E}\left(\Psi_n(Y_t^n)e^{\beta A(t)}\right) \leq \frac{C}{n},$$

et par suite (iii).■

Proposition 3.4.3. *Supposons* **(H1)-(H5)** *satisfaites. Alors,* (Y^n, Z^n) *est une suite de Cauchy dans* $\mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$.

preuve. Une fois de plus, par la formule d' Itô , on a :

$$\begin{aligned}
& e^{\beta A(t)}\,|Y_t^n - Y_t^m|^2 + \int_t^T e^{\beta A(s)}\,|Z_s^n - Z_s^m|^2 ds + \beta\int_t^T e^{\beta A(s)} a^2(s)\,|Y_s^n - Y_s^m|^2 ds \\
=\ & 2\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n - Y_s^m,\ f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^m, Z_s^m)\rangle ds \\
& -2\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n - Y_s^m,\ (Z_s^n - Z_s^m)dW_s\rangle \\
& -2\int_t^T e^{\beta A(s)}\langle Y_s^n - Y_s^m,\ A_n(Y_s^n) - A_m(Y_s^m)\rangle ds.
\end{aligned}$$

De plus puisque,

$$I = J_n + \frac{1}{n} A_n = J_m + \frac{1}{m}; A_n(Y_s^n) \in A\left(J_n\left(Y_s^n\right)\right); A_m(Y_s^m) \in A\left(J_m\left(Y_s^m\right)\right) \text{ et } ab \leq \frac{1}{4}a^2 + b^2,$$

on peut montrer que

$$-\langle Y_s^n - Y_s^m,\ A_n(Y_s^n) - A_m(Y_s^m)\rangle \leq \frac{1}{4m}|A_n(Y_s^n)|^2 + \frac{1}{4n}|A_m(Y_s^m)|^2.$$

Ainsi par le Lemme 3.4.3, l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy et un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du Lemme 3.4.3 -(ii), on peut montrer que pour β suffisamement grand

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\beta A(t)}\,|Y_t^n - Y_t^m|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\,|Z_s^n - Z_s^m|^2 ds\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)\,|Y_s^n - Y_s^m|^2 ds\right) \\
\leq\ & C\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4m}\right),
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.■

Le Lemme suivant est dû à Saisho [52]

Lemme 3.4.4. *soit* $(k^n : n \geq 1)$ *et* $(y^n : n \geq 1)$ *deux suites de* $C([0,\tau], \mathbb{R}^d)$ *convergeant uniformement vers* k *et* y *respectivement. Supposons que* k^n *est à variation borné et* $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|k^n\|_\tau < +\infty$, *où* $\|.\|_\tau$ *désigne la variation totale sur* $[0,\tau]$. *Alors*

$$\int_0^\tau \langle y^n, dk_s^n\rangle \longrightarrow \int_0^\tau \langle y, dk_s\rangle.$$

Preuve du résultat principal.

Existence. De la Proposition 3.4.3, on déduit que $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite (Y, Z) dans l'espace $\mathcal{M}^c(\beta, a, \tau)$. Le Lemme de Fatou et le le Lemme 3.4.3 assurent que $(Y, Z) \in \mathcal{M}_p^c(\beta, a, \tau)$.

Posons

$$\begin{aligned}
K_t^n &= Y_0^n - Y_t^n - \int_0^t f(s, Y_s^n, Z_s^n)ds + \int_0^t Z_s^n dW_s \\
K_t &= Y_0 - Y_t - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_0^t Z_s dW_s.
\end{aligned}$$

On vérifie aisement que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} |K_t^n - K_t|^2\right) = 0.$$

Dès lors $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformement dans $L^2(\Omega)$ vers K .
Vérifions à présent que le triplet (Y, Z, K) est solution de notre EDSR-R(τ, ξ, f, Φ).
En prenant une sous suite si necessaire, on peut supposer que

$$\sup_{0\le t\le\tau} |K_t^n - K_t| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Il s'en suit que K est un processus continu. De plus, du Lemme 3.4.3, on déduit que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\, \|K^n\|_{H^1\left(0,\tau,\, dL_s\, \mathbb{R}^d\right)} < +\infty,$$

où $dL_s = e^{\beta A(s)}ds$ et $H^1(0, \tau, dL_s, \mathbb{R}^d)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions absolument continues et à dérivée dans $L^2([0,\tau]\ , dL_s)$. Ainsi $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, H^1(0, \tau, dL_s, \mathbb{R}^d))$. Par conséquent, il existe une sous suite de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge faiblement.
La limite $K \in L^2(\Omega, H^1(0, \tau, dL_s, \mathbb{R}^d))$ et pour presque tout ω, $K(\omega) \in H^1(0, \tau, dL_s, \mathbb{R}^d)$.
On conclut ainsi que K est absolument continu et

$$-dK_t = V_t dL_t \text{ avec } V_t \in \partial\Phi\,(Y_t)\,.$$

La continuité du processus Y provient de la convergence de la suite (Y^n) dans l'espace $L^{2,c}(\beta, a, [0,\tau]\,, \mathbb{R}^d)$.
Montrons que

$$\mathbb{P}\{Y_t \in \overline{Dom\,(\Phi)}\ \} = 1, \quad \forall \le t \le \tau.$$

De la convergence de (Y^n) dans l'espace $L^{2,c}(\beta, a, [0,\tau]\,, \mathbb{R}^d)$, on déduit l'existence d'une sous suite $Y_t^{n_k} \to Y_t$ p.s. On conclut ainsi que $Y_t \in \overline{Dom\,(\Phi)}$ pour tout $t \in [0,\tau]\,.$
Achevons la preuve de l'existence en vérifiant (v) de la Définition 3.4.2. Pour ce faire, nous utilisons le Lemme 3.4.4.
En effet, nous avons

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau |A_n(Y_s^n)|ds\right) \le \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\beta A(s)}\, |A_n(Y_s^n)|ds\right) < +\infty.$$

En prenant une sous suite, nous pouvons affirmer que K^n et Y^n convergent uniformement vers K et Y respectivement. Pour tout processus optionnel (α, β) tel que $(\alpha_s, \beta_s) \in Gr\,(\partial\Phi)\,$, on a

$$\int_0^\tau \langle J_n(Y_s^n) - \alpha_s, dK_s^n + \beta_s ds\rangle = \int_0^\tau \langle J_n(Y_s^n) - \alpha_s, -A_n(Y_s^n) + \beta_s ds\rangle \le 0.\ a.s\ .$$

Le Lemme 3.4.4 permet de passer à la limite et d'obtenir (v).

Unicité. Puisque $\partial\Phi$ est un opérateur monotone, $-\frac{dK_t}{dL_t} \in \partial\Phi(Y_t)$ et $-\frac{dK'_t}{dL_t} \in \partial\Phi(Y'_t)$, on a

$$\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{\beta A(s)} \langle Y_s - Y'_s, dK_s - dK'_s\rangle\right) \leq 0.$$

Par conséquent, en appliquant la formule d'Itô au processus $e^{\beta A(t)}|Y_t - Y'_t|^2$ et un usant de l'inégalité de Young, il s'en suit que si (Y, Z, K) (resp.(Y', Z', K')) est solution de l'EDSR-R((τ, ξ, f, Φ)) (resp.(τ, ξ', f', Φ)), alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(e^{\beta A(t)}|Y_t - Y'_t|^2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{\beta A(s)}\,|Z_s - Z'_s|^2 ds\right) + C\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{\beta A(s)} a^2(s)\,|Y_s - Y'_s|^2 ds\right)\\ \leq \mathbb{E}\,(e^{\beta A(t)}|\xi - \xi'|^2) + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{\beta A(s)} \frac{|f(s, Y'_s, Z'_s) - f's, Y'_s, Z'_s|^2}{a^2(s)} ds\right).\end{aligned}$$

On en déduit l'unicité de la solution de l'EDSR-R.■

Partie 2
Sur les EDSRs généralisées réfléchies, Homogenéisation des EDPs via les EDSRs

Chapitre 4

EDSR généralisée réfléchie et applications

4.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $(W_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ un processus de Wiener unidimensionnel défini sur cet espace. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ désigne sa filtration naturelle augmentée de tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls de $\mathcal{F}$.
Considerons les objets suivants :

$$
(\mathbf{A1}) \begin{cases} (i) & \tau \text{ est un } \mathcal{F}_t\text{-temps d'arrêt fini } \mathbb{P}-p.s. \\ (ii) & \begin{cases} \{G_t\}_{t\geq 0} \text{ est un processus continu, à valeurs réelles et croissant,} \\ \mathcal{F}_t\text{-progressivement mesurable et satisfaisant } G_0 = 0 \end{cases} \end{cases}
$$

($\mathbf{A2}$) $f : \Omega \times \mathbb{R}^+\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifient les hypothèses suivantes : il existe des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $K > 0$ et des processus $\{\varphi_t, \psi_t\}_{t\geq 0}$ à valeurs dans $[1, +\infty)$ tels que

$$
(i) \quad \begin{cases} \forall (y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (\omega, t) \longrightarrow (f(\omega, t, y, z),\ g(\omega, t, y)) \text{ est} \\ \mathcal{F}_t\text{-progressivement mesurable} \end{cases}
$$

$$
(ii) \quad \forall t, \forall y, \forall (z, z'), \quad |f(t,y,z) - f(t,y,z')| \leq K|z - z'|
$$

$$
(iii) \quad \forall t, \forall z, \forall (y, y'), \ (y - y')\,(f(t,y,z) - f(t,y',z)) \leq \alpha|y - y'|^2
$$

$$
(iv) \quad \forall t, \forall z, \forall (y, y'), \ (y - y')\,(g(t,y) - g(t,y')) \leq \beta|y - y'|^2
$$

$$
(v) \quad \forall t, \forall y, \forall z, \ |f(t,y,z)| \leq \varphi_t + K(|y| + |z|), \quad |g(t,y)| \leq \psi_t + K|y|
$$

$$
(vi) \quad \forall t, \forall z, \qquad y \longmapsto (f(t,y,z),\ g(t,y)) \text{ est continu.}
$$

$$(vii)\left\{\begin{array}{l}\text{Il existe } \lambda > 2|\alpha| + K^2,\ \mu > 2|\beta| \text{ tel que} \\ \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\varphi^2(s)ds + \psi^2(s)dG_s\right]\right) < +\infty.\end{array}\right.$$

$$\textbf{(A3)}\left\{\begin{array}{ll}(i) & \xi \text{ est une varaiable aléatoire } \mathcal{F}_\tau\text{-mesurable telle que } \mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau+\mu G(\tau)}|\xi|^2\right) < +\infty. \\ (ii) & \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[|f(s,0,0)|^2 ds + |g(s,0)|^2 dG_s\right]\right) < +\infty.\end{array}\right.$$

$$\textbf{(A4)}\left\{\begin{array}{ll}(i) & \left\{\begin{array}{l}(S_t)_{t\geq 0} \text{ est un processus à valeurs réelles continu, progressivement mesurable} \\ \text{satisfaisant } \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{2\lambda t+2\mu G(t)}\left(S_t^+\right)^2\right) < +\infty.\end{array}\right. \\ (ii) & S_\tau \leq \xi \ \mathbb{P}\ a.s.\end{array}\right.$$

A présent, précisons ce qu'est la solution généralisée de l'EDSR-R associée aux données (τ, ξ, f, g, S). Une solution généralisée de l'EDSR-R (τ, ξ, f, g, S) est un triplet $(Y_t, Z_t, K_t)_{t\geq 0}$ de processus progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et satisfaisant :

$$\left\{\begin{array}{l}(j)\ Y \text{ est un processus continu.} \\ (jj)\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } 0 \leq t \leq T, \\ Y_{t\wedge\tau} = Y_{T\wedge\tau} + \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge T} f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^{\tau\wedge T} g(s, Y_s)dG_s - \int_t^{\tau\wedge T} Z_s dW_s + K_{\tau\wedge T} - K_{t\wedge\tau}.\end{array}\right. \\ (3j)\ Y_t \geq S_t, \text{ sur l'ensemble } \{t \leq \tau\}. \\ (4j)\ \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}|Y_t|^2 + \int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left(|Y_s|^2 + |Z_s|^2\right)ds + |Y_s|^2 dG_s\right]\right) < +\infty. \\ (5j)\ K \text{ est un processus croissant tel que } K_0 = 0 \text{ et } \int_0^{\tau\wedge T}(Y_t - S_t)\,dK_t = 0\ p.s.\ \forall\ T \geq 0. \\ (6j)\ Y_t = \xi,\ Z_t = 0,\ K_t = K_\tau \text{ sur l'ensemble } \{t > \tau\}.\end{array}\right.$$

4.2 Résultat d'unicité et d'existence

Grâce au résultat de [49], pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple de processus $\mathcal{F}_t$−progressivement mesurables $(Y_t^n, Z_t^n)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tels que

$$(7j)\quad \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}|Y_t^n|^2 + \int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left(|Y_s^n|^2 + |Z_s^n|^2\right)ds + |Y_s^n|^2 dG_s\right]\right) < +\infty.$$

$$(8j)\left\{\begin{array}{l}Y_{t\wedge\tau}^n = Y_{T\wedge\tau}^n + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f(s, Y_s^n, Z_s^n)ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} g(s, Y_s^n)dG_s \\ +n\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}(Y_s^n - S_s)^-(ds + dG_s) - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s^n dW_s, \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T.\end{array}\right.$$

Définissons

$$K^n_{T\wedge\tau} - K^n_{t\wedge\tau} = n\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} (Y^n_s - S_s)^- (ds + dG_s).$$

Le principal résultat de cette section est :

Théorème 4.2.1. *Supposons que les conditions* **(A1)** **(A2)**, **(A3)**, **(A4)** *sont satisfaites. Supposons de plus que S_t est un processus d'Itô de la forme :*
$dS_t = m_t 1_{[0,\tau]}dt + u_t 1_{[0,\tau]}dG_t + v_t 1_{[0,\tau]}dW_t$, où m_t, u_t, v_t sont des processus progressivement mesurables satisfaisant :$I\!E\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}(|m_s|^2 + |v_s|^2)ds + |u_s|^2 dG_s\right) < +\infty$. Alors, il existe un unique triplet (Y, Z, K), solution de l'EDSR-R généralisée (τ, ξ, f, g, S). De plus,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} I\!E\left(\sup_{0\le t\le\tau} |K^n_t - K_t|^2\right) = 0.$$

Preuve.
Preuve de l'existence
Nous la subdivisons en plusieurs étapes et dans tout ce qui suit, C est une constante positive qui peut varier d'une ligne à une autre.

Etape 1 : *Estimations à priori uniformes en n.*
Par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)} |Y^n_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} |Y^n_s|^2 (\lambda ds + \mu dG_s) \\
& + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} |Z^n_s|^2 ds \\
= \; & e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)} |Y^n_{T\wedge\tau}|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s f(s, Y^n_s, Z^n_s) ds + \\
& 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s g(s, Y^n_s) dG_s - 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s Z^n_s dW_s \\
& +2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s dK^n_s.
\end{aligned}$$

En utilisant **(A2-ii)**-**(A2-v)**, on obtient

$$\begin{cases} 2Y^n_s f(s, Y^n_s, Z^n_s) \le (2\alpha + \frac{1}{\gamma_1}K^2 + \rho)|Y^n_s|^2 + \gamma_1 |Z^n_s|^2 + C|f(s,0,0)|^2. \\ 2Y^n_s g(s, Y^n_s) \le (2\beta + \rho)|Y^n_s|^2 + c|g(s,0)|^2. \end{cases}$$

En choisissant $\frac{K^2}{\lambda - 2\alpha} < \gamma_1 < 1$, ρ tels que $\overline{\lambda} = \lambda - 2\alpha - \frac{1}{\gamma_1}K^2 - \rho > 0, 1 - \gamma_1 > 0$, et

$\overline{\mu} = \mu - 2\beta - \rho > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)} \left|Y^n_{t\wedge\tau}\right|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|Y^n_{s\wedge\tau}\right|^2 (\overline{\lambda} ds + \overline{\mu} dG_s) \\
& +(1-\gamma_1) \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|Z^n_s\right|^2 ds \\
\leq\ & e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)} \left|Y^n_{T\wedge\tau}\right|^2 + 2C \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|f(s,0,0)\right|^2 ds + \\
& 2C \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|g(s,0)\right|^2 dG_s - 2 \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s Z^n_s dW_s \\
& +2 \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s dK^n_s.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Il est facile de voir que

$$\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s dK^n_s \leq \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} S_s dK^n_s.$$

L'inégalité (4.1) devient alors :

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)} \left|Y^n_{t\wedge\tau}\right|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|Y^n_{s\wedge\tau}\right|^2 (\overline{\lambda} ds + \overline{\beta} dG_s) \\
& +(1-\gamma_1) \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|Z^n_s\right|^2 ds \\
\leq\ & e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)} \left|Y^n_{T\wedge\tau}\right|^2 + 2C \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|f(s,0,0)\right|^2 ds + \\
& 2C \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|g(s,0)\right|^2 dG_s - 2 \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s Z^n_s dW_s \\
& +2 \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} S_s, dK^n_s.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Par suite, on déduit que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y_{t\wedge\tau}^n\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_{s\wedge\tau}^n\right|^2\left(\overline{\lambda} ds+\overline{\mu} dG_s\right)\right) \\
& +(1-\gamma_1)\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z_s^n\right|^2 ds\right) \\
\leq\ & \mathbb{E}\left(e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\left|Y_{T\wedge\tau}^n\right|^2\right)+2C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}|f(s,0,0)|^2 ds\right)+ \\
& 2C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}|g(s,0)|^2 dG_s\right) \\
& +\frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2\lambda t+2\mu G(t)}\left|(S_t)^+\right|^2\right)+\delta\mathbb{E}(K_{T\wedge\tau}^n-K_{t\wedge\tau}^n)^2.
\end{aligned}$$

Mais pour tout $0<\lambda'<\min(\lambda,\mu)$, on a

$$\begin{aligned}
& \delta\mathbb{E}\left|K_{T\wedge\tau}^n-K_{t\wedge\tau}^n\right|^2 \\
\leq\ & C\delta\mathbb{E}\left(\left|Y_{t\wedge\tau}^n\right|^2+\left|Y_{T\wedge\tau}^n\right|^2+\frac{1}{\lambda'}\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda' s}\left(\varphi^2(s)+\left|Y_s^n\right|^2+\left|Z_s^n\right|^2\right) ds\right. \\
& \left.+\frac{1}{\lambda'}\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda' G(s)}\left(\psi^2(s)+\left|Y_s^n\right|^2\right) dG_s\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta\mathbb{E}\left|K_{T\wedge\tau}^n-K_{t\wedge\tau}^n\right|^2 \\
\leq\ & C\delta\mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y_{t\wedge\tau}^n\right|^2+e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\left|Y_{T\wedge\tau}^n\right|^2\right) \\
& +C\delta\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left|Y_s^n\right|^2(ds+dG_s)+\left|Z_s^n\right|^2 ds\right]\right) \\
& +C\delta\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left(\varphi^2(s)ds+\psi^2(s)dG_s\right)\right)
\end{aligned}$$

En prenant δ suffisament petit tel que $1-C\delta>0$, $\overline{\overline{\lambda}}=\overline{\lambda}-C\delta>0$, $1-\gamma_1-C\delta>0$, et $\overline{\overline{\mu}}=\overline{\mu}-C\delta>0$, on déduit que

$$\begin{aligned}
& (1-C\delta)\,\mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y_{t\wedge\tau}^n\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_{s\wedge\tau}^n\right|^2\left(\overline{\overline{\lambda}} ds+\overline{\overline{\mu}} dG_s\right)\right) \\
& +(1-\gamma_1-C\delta)\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z_s^n\right|^2 ds\right) \\
\leq\ & (1+C\delta)\,\mathbb{E}\left(e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\left|Y_{T\wedge\tau}^n\right|^2\right)+2C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}|f(s,0,0)|^2 ds\right) \\
& +2C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}|g(s,0)|^2 dG_s\right)+\frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2\lambda t+2\mu G(t)}\left(S_t^+\right)^2\right).
\end{aligned}$$

En faisant $T \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, le Lemme de Fatou et le Théorème de la convergence dominée permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y_{t\wedge\tau}^n\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_s^n\right|^2\left(\bar{\bar{\lambda}}ds+\bar{\bar{\mu}}dG_s\right)\right) \qquad (4.3)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z_s^n\right|^2 ds\right)\\
\leq\ & C\mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau+\mu G(\tau)}|\xi|^2+\int_t^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|f(s,0,0)\right|^2 ds\right)\\
&+C\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2\lambda t+2\mu G(t)}\left|(S_t)^+\right|^2+\int_t^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|g(s,0)\right|^2 dG_s\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq\tau}\mathbb{E}\left(e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|Y_t^n\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left|Y_s^n\right|^2(ds+dG_s)+\left|Z_s^n\right|^2 ds\right]\right)\\
\leq\ & C\mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau+\mu G(\tau)}|\xi|^2+\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left|f(s,0,0)\right|^2 ds+\left|g(s,0)\right|^2 dG_s\right]\right.\\
&\left.+\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2\lambda t+2\mu G(t)}\left|(S_t)^+\right|^2\right)
\end{aligned}$$

En utilisant une fois encore (4.2) et l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy, on déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|Y_t^n\right|^2+\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left|Y_s^n\right|^2(ds+dG_s)+\left|Z_s^n\right|^2 ds\right]\right)\\
\leq\ & C\mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau+\mu G(\tau)}|\xi|^2+\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left|f(s,0,0)\right|^2 ds+\left|g(s,0)\right|^2 dG_s\right]\right.\\
&\left.+\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2\lambda t+2\mu G(t)}\left|(S_t)^+\right|^2\right)
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}\left|K_t^n\right|^2\right)\leq C.$$

A présent, posons

$$f_n(t,y,z) = f(t,y,z)+n(y-S_t)^-, \quad g_n(t,y)=g(t,y)+n(y-S_t)^-,$$

on a

$$f_n(t,y,z) \leq f_{n+1}(t,y,z), \quad g_n(t,y)\leq g_{n+1}(t,y).$$

Par le théorème de comparaison (cf. Pardoux et Zhang [49]), nous déduisons que la suite $(Y^n)_{n>0}$ est non-décroissante. Il existe donc un processus progressivement mesurable Y tel que $Y_t^n \nearrow Y_t$ $p.s$ sur l'ensemble $\{t \leq \tau\}$. Alors, grâce au Lemme de Fatou, on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|Y_t\right|^2\right) < +\infty.$$

De plus, le théorème de la convergence dominée assure que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_s^n - Y_s\right|^2 (ds + dG_s)\right)$$

tends vers zéro quand $n \to \infty$.

Etape 2 *: Montrons que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|(Y_t^n - S_t)^-\right|^2) = 0$. Soit $\left\{(\widetilde{Y}_t^n, \widetilde{Z}_t^n),\ 0 \leq t \leq T\right\}$ la solution unique de l'EDSR

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_{t\wedge\tau}^n &= \widetilde{Y}_{T\wedge\tau}^n + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f(s, \widetilde{Y}_s^n, \widetilde{Z}_s^n)ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} g(s, \widetilde{Y}_s^n)dG_s \\
&\quad + n\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} (S_s - \widetilde{Y}_s^n)(ds + dG_s) - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} \widetilde{Z}_s^n dW_s,\ 0 \leq t \leq T
\end{aligned}$$

Le théorème de comparaison permet de déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\widetilde{Y}_t^n \leq Y_t^n,\ \mathbb{P}\ p.s \text{ sur l'ensemble } \{t \leq \tau\}.$$

Soit ν un temps d'arrêt tel que $0 \leq \nu \leq \tau\ \mathbb{P} - p.s$. Alors en appliquant la formule d' Itô à $e^{-n(G_{t-\nu}+t-\nu)}\widetilde{Y}_t^n$, et en prenant l'espérance conditionnelle, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_\nu^n &= \mathbb{E}\Bigg[e^{-n(G_{\tau-\nu}+\tau-\nu)}\xi + \int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))} f(s, \widetilde{Y}_s^n, \widetilde{Z}_s^n)ds \\
&\quad + \int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))} g(s, \widetilde{Y}_s^n)dG_s + n\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))} S_s (ds + dG_s) \mid \mathcal{F}_\nu\Bigg]
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que $e^{-n(G_{\tau-\nu}+\tau-\nu)}\xi +\ n\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))} S_s (ds + dG_s)$ converge vers $\xi\mathbf{1}_{\{\nu=\tau\}} + S_\nu\mathbf{1}_{\{\nu<\tau\}}$ $p.s.$ et dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. L'espérance conditionnelle converge aussi dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. De plus,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))} f(s, \widetilde{Y}_s^n, \widetilde{Z}_s^n)ds\right| &\leq \left|\int_\nu^\tau e^{-n(s-\nu)} f(s, \widetilde{Y}_s^n, \widetilde{Z}_s^n)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\int_\nu^\tau \left|f(s, \widetilde{Y}_s^n, \widetilde{Z}_s^n)^2\right| ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\int_\nu^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|f(s, \widetilde{Y}_s^n, \widetilde{Z}_s^n)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}g(s,\widetilde{Y}_s^n)dG_s\right| &\leq \left|\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu})}g(s,\widetilde{Y}_s^n)dG_s\right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\int_\nu^\tau \left|g(s,\widetilde{Y}_s^n)\right|^2 dG_s\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\int_\nu^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|g(s,\widetilde{Y}_s^n)\right|^2 dG_s\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}f(s,\widetilde{Y}_s^n,\widetilde{Z}_s^n)ds+\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}g(s,\widetilde{Y}_s^n)dG_s \to 0 \text{ in } L^2(\Omega,\mathbb{P}).$$

Par conséquent

$$\widetilde{Y}_\nu^n \longrightarrow \xi\mathbf{1}_{\{\nu=\tau\}}+S_\nu\mathbf{1}_{\{\nu<\tau\}} \quad \text{dans } L^2(\Omega,\mathbb{P}).$$

Il en résulte que

$$Y_\nu \geq S_\nu \quad \mathbb{P}p.s. \tag{4.4}$$

De (4.4) et du théorème de section (voir Dellacherie and Meyer [18], page 220), on obtient

$$Y_t \geq S_t \ \ p.s \text{ sur } \{t\leq\tau\}\ .$$

Ainsi

$$(Y_t^n - S_t)^- \downarrow 0,\ \mathbb{P}p.s \text{ sur } \{t\leq\tau\}\ .$$

Grâce au théorème de Dini, la convergence est uniforme en t. Pour la suite, en remarquant que pour tout n, $Y_t^n \geq Y_0^n$, on peut remplacer S_t par $S_t\vee Y_0^n$. Ensuite puisque $(Y_t^n-S_t)^- \leq (S_t-Y_t^0)^+ \leq |S_t|+|Y_t^0|$, on déduit que si $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|S_t\right|^2\right) < \infty$, alors le théorème de la convergence dominée donne

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|(Y_t^n-S_t)^-\right|^2)=0,$$

Etape 3 : *Convergence de la suite* (Y^n,Z^n,K^n).

Pour tout $n\geq p$, on obtient par la formule d' Itô,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_s^n-Y_s^p\right|^2(\overline{\lambda}ds+\overline{\mu}dG_s)\right) \\ &+(1-\gamma_1)\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2 ds\right) \\ \leq\ & 2\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}(Y_s^n-Y_s^p)(dK_s^n-dK_s^p)\right)\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
& 2\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left(Y_s^n-Y_s^p\right)\left(dK_s^n-dK_s^p\right)\right) \\
\leq\; & 2\mathbb{E}\left(\sup_{t\wedge\tau\leq s\leq T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left(Y_s^n-S_s\right)^-\left(K_{T\wedge\tau}^n-K_{t\wedge\tau}^n\right)\right. \\
& \left.+\sup_{t\wedge\tau\leq s\leq T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left(Y_s^p-S_s\right)^-\left(K_{T\wedge\tau}^p-K_{t\wedge\tau}^p\right)\right).
\end{aligned}$$

Des étapes 1 et 2, on déduit que le terme à droite de l'inégalité tend vers zéro quand $n,\, p\to\infty$. Ensuite, en faisant $T\to\infty$, le Lemme de Fatou assure que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_s^n-Y_s^p\right|^2\left(\overline{\lambda}ds+\overline{\mu}dG_s\right)\right)+(1-\gamma_1)\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z_s^n-Z_s^p\right|^2 ds\right)$$

tend vers zéro quand $n,p\to\infty$.
Par suite, l'inégalité de Bürkhölder-Davis-Gundy permet de montrer que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\wedge\tau\leq s\leq T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_s^n-Y_s^p\right|^2\right)\to 0,\ \text{quand}\ n,\, p\to\infty.$$

Une fois encore, en faisant tendre T vers l'infini, le Lemme de Fatou donne

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_s^n-Y_s^p\right|^2\right)\to 0,\ \text{as}\ n,p\to\infty.$$

Par suite de $(8j)$, on déduit que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq\tau}\left|K_s^n-K_s^p\right|^2\right)\to 0,\ \text{as}\ n,p\to\infty. \tag{4.5}$$

Etape 4 *la limite du processus (Y,Z,K) est solution de notre EDSR-R généralisée (τ,ξ,f,g,S).*

De (4.5), on tire l'existence d'un processus non-décroissant K_t ($K_0=0$) sur l'ensemble $\{t\leq\tau\}$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq\tau}\left|K_s^n-K_s\right|^2\right)\to 0,\ \text{as}\ n\to\infty.$$

D'autre part, puisque $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|(Y_t^n-S_t)^-\right|^2)=0$, on a $Y_t\geq S_t$ $\mathbb{P}$ $p.s.$ sur $\{t\leq\tau\}$.
Pour conclure la preuve d'existence, nous devons vérifier que

$$\int_0^{T\wedge\tau}\left(Y_s-S_s\right)dK_s=0,\ \text{pour tout}\ T\geq 0.$$

En effet, puisque $Y_t \geq S_t$ $\mathbb{P}$ $p.s.$ sur $\{t \leq \tau\}$, on a

$$\int_0^{T\wedge\tau} (Y_s - S_s)\, dK_s \geq 0.$$

Mais,

$$\int_0^{T\wedge\tau} (Y_s^n - S_s) dK_s^n = -n \int_0^{T\wedge\tau} \left((Y_s^n - S_s)^-\right)^2 (ds + dG_s) \leq 0.$$

En passant à la limite sur n, on obtient

$$\int_0^{T\wedge\tau} (Y_s - S_s)\, dK_s \leq 0.$$

D'où

$$\int_0^{T\wedge\tau} (Y_s - S_s)\, dK_s = 0.$$

Preuve de l'unicité

Soit $\{(Y_t,\, Z_t,\, K_t)\,,\ 0 \leq t \leq \tau\}$ et $\{(Y'_t,\, Z'_t,\, K'_t),\ 0 \leq t \leq \tau\}$ deux solutions de l'EDSR-R généralizée. Posons

$$\{(\Delta Y_t,\, \Delta Z_t,\, \Delta K_t)\,,\ 0 \leq t \leq \tau\} = \{(Y_t - Y'_t,\, Z_t - Z'_t, K_t - K'_t),\ 0 \leq t \leq \tau\}\,.$$

Remarquons tout de suite que

$$(Y_t - Y'_t)\,(dK_t - dK'_t) \leq 0. \tag{4.6}$$

Pour tout $0 \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\, |\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\, |\triangle Y_s|^2\, (\lambda ds + \mu dG_s) \\
& + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\, |\triangle Z_s|^2\, ds \\
= \ & e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\, |\Delta Y_{T\wedge\tau}|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \triangle Y_s\, (f(s,Y_s,Z_s) - f(s,Y'_s,Z'_s))\, ds + \\
& 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \triangle Y_s\, (g(s,Y_s) - g(s,Y'_s))\, dG_s - 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \triangle Y_s \triangle Z_s dW_s \\
& +2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \triangle Y_s \triangle dK_s.
\end{aligned}$$

Grâce à (4.6), un argument similaire à l'étape 3 permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)} \left|\Delta Y_{t\wedge\tau}\right|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|\triangle Y_s\right|^2 (\overline{\lambda} ds + \overline{\mu} dG_s) \\
& +(1-\gamma_1) \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|\triangle Z_s\right|^2 ds \\
\leq \; & e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)} \left|\Delta Y_{T\wedge\tau}\right|^2 - 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left(\triangle Y_s, \triangle Z_s dW_s\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)} \left|\Delta Y_{t\wedge\tau}\right|^2\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)} \left|\Delta Y_{T\wedge\tau}\right|^2\right).$$

En faisant $T \to \infty$, le théorème de la convergence dominée donne

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)} \left|\Delta Y_{t\wedge\tau}\right|^2\right) = 0.$$

Il en résulte que $\Delta Y_{t\wedge\tau} = 0$, $\Delta Z_{t\wedge\tau} = 0$. Par suite, on conclut grâce à l'égalité

$$\begin{aligned}
\Delta K_t \;=\; & \Delta Y_0 - \Delta Y_t - \int_0^{t\wedge\tau} \left(f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y_s', Z_s')\right) ds \\
& - \int_0^{t\wedge\tau} \left(g(s, Y_s) - g(s, Y_s')\right) dG_s + \int_0^{t\wedge\tau} \triangle Z_s dW_s.
\end{aligned}$$

4.3 Applications

Dans cette section, nous nous plaçons dans un cadre Markovien et donnons à la fois l'interpretation probabiliste du prix d'une option américaine, et de la solution de viscosité d'une EDP parabolique avec obstacle .

4.3.1 Une classe de processus de diffusions réfléchis

Soit $b : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ des fonctions telles que

$$\left|b(x) - b(x')\right| + \left|\sigma(x) - \sigma(x')\right| \leq K\left|x - x'\right|.$$

Soit Θ un sous ensemble ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$, tel que pour une certaine fonction $\psi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d), \Theta = \{\psi > 0\}, \partial\Theta = \{\psi = 0\}$, et $\left|\nabla\psi(x)\right| = 1, x \in \partial\Theta$. Notons qu'en tout point de la frontière $x \in \partial\Theta$, $\nabla\psi(x)$ est le vecteur normal unitaire orienté vers l'intérieur de $\partial\Theta$. D'après Lions et Szitman [38] (voir aussi Saisho [52], pour chaque $x \in \overline{\Theta}$, il existe un unique couple de processus progressivement mesurables, continu $\{(X_s^x, G_s^x) : t \geq 0\}$, à valeurs dans $\overline{\Theta} \times \mathbb{R}_+$, et vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} X_s^x = x + \int_0^s b(X_r^x)dr + \int_0^s \sigma(X_r^x)dW_r + \int_0^s \nabla\psi(X_r^x)dG_r^x, s \geq 0 \\ \\ G_s^x = \int_0^s 1_{\{X_r^x \in \partial\Theta\}} dG_r^x, \; G_\cdot^x \text{ est croissant.} \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Nous rappelons quelques propriétés du processus $\{(X_s^x, G_s^x), s \geq 0\}$. Nous référons le lecteur à Pardoux et Zhang [49].

Proposition 4.3.1. *Pour chaque $T \geq 0$, il existe une constante $C(T)$ telle que pour tout $x, x' \in \overline{\Theta}$*

$$\left\{\begin{array}{l} (i) \; \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^x - X_s^{x'}|^4 \leq C(T)|x - x'|^4). \\ \\ (ii) \; \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |G_s^x - G_s^{x'}|^4 \leq C(T)|x - x'|^4). \end{array}\right.$$

De plus, il existe une constante $C(p)$ telle que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\Theta}$, $\mathbb{E}(|G_t^x|^p) \leq C(p)\,(1+t)^p$, et pour chaque μ, $t > 0$, il exsiste $C(\mu,\, t)$ telle que pour tout $x \in \overline{\Theta}$, $\mathbb{E}\left(e^{\mu G_t^x}\right) \leq C(\mu, t)$.

Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\Theta}$, $\{(X_s^{t,x}, G_s^{t,x}), s \geq 0\}$ désigne l'unique solution de l'EDS réfléchie

$$\left\{\begin{array}{l} X_s^{t,x} = x + \int_t^{t\vee s} b(X_r^{t,x})dr + \int_t^{t\vee s} \sigma(X_r^{t,x})dW_r + \int_t^{t\vee s} \nabla\psi(X_r^{t,x})dG_r^{t,x}, s \geq 0 \\ G_s^{t,x} = \int_t^{t\vee s} 1_{\{X_r^x \in \partial\Theta\}} dG_r^{t,x}, \; G_\cdot^{t,x} \text{ est croissant.} \end{array}\right. \tag{4.8}$$

Fixons $T > 0$. Supposons que les données $(\xi,\, f,\, g,\, S)$ de l'ESDR-R généralisée sont de la forme :

$$\xi = l(X_T^{t,x}),\; f(s,y,z) = f(s, X_s^{t,x}, y, z),\; g(s,y) = g(s, X_s^{t,x}, y),\; S_s = h(s, X_s^{t,x}).$$

avec $f \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Theta} \times \mathbb{R}^{1\times d}; \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Theta} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $l \in \mathcal{C}(\overline{\Theta}, \mathbb{R})$ et ayant au plus une croissance polynomiale. $h \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \; \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$

$$h(t,x) \leq K(1 + |x|^p),\; t \in [0,T],\; x \in \mathbb{R}^d.$$

Supposons de plus que $h(T,x) \leq l(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Pour chaque $t > 0$, notons par $\{\mathcal{F}_s^t,\; t \leq s \leq T\}$ la filtration naturelle du monvement Brownien $\{W_s - W_t,\; t \leq s \leq T\}$, augmenté des $\mathbb{P}$-nuls ensembles de $\mathcal{F}$. D'après le Théorème 4.2.1, pour chaque

$$\begin{cases} (i)\ Y_s^{t,x} = l(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr + \int_s^T g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x})dG_r^{t,x} \\ - \int_s^T Z_r^{t,x} dW_r + K_T^{t,x} - K_s^{t,x},\ t \leq s \leq T \\ (ii)\ Y_s^{t,x} \geq h(s, X_s^{t,x}),\ t \leq s \leq T \\ (iii)\ \mathbb{E}\left(\int_t^T |Z_r^{t,x}|^2\, dr\right) < +\infty. \\ (iv)\ K_s^{t,x} \text{ est un processus croissant tel que } K_0 = 0 \text{ et} \\ \int_t^T (Y_s^{t,x} - h(s, X_s^{t,x}))dK_s^{t,x} = 0\ . \end{cases} \tag{4.9}$$

Etendons $Y_s^{t,x}$, $Z_s^{t,x}$, $K_s^{t,x}$ pour tout $s \in [0, T]$ en posant $Y_s^{t,x} = Y_t^{t,x}$, $Z_s^{t,x} = 0$, $K_s^{t,x} = 0$ pour tout $s \in [0, t]$

4.3.2 Prix d'une option américaine revisitée

Considérons l'équation (4.9). A la lumière de Cvitanic et Ma [16], la diffusion (4.7) décrit la dynamique du prix d'un actif financier ayant une réflection dans Θ : le sous ensemble ouvert connexe, borné de $\mathbb{R}$ specifié plus haut. La diffusion X affecte la richesse de l'investisseur représentée par le processus Y mais, cet investisseur n'a aucune influence sur la diffusion X. Le but de l'investisseur est de maximixer ses revenus donnés ici par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(R(t, \theta_t) \middle| \mathcal{F}_t \right) &= \mathbb{E}\left\{ \int_t^\theta f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr + \int_t^\theta g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x})dG_r^{t,x} \right. \\ &\quad \left. + h(\theta, X_\theta^{t,x}) 1_{\{\theta < T\}} + l(X_T^{t,x}) 1_{\{\theta = T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \end{aligned}$$

pour tout temps d'arrêt θ à valeurs dans $[t, T]$.
Le théorème suivant est analoque à celui de Cvitanic and Ma [16].

Théorème 4.3.1. *Soit $(Y^{t,x},\ Z^{t,x},\ K^{t,x})$ une solution de l'ESDR-R généralisée (4.9). Alors, pour chaque $t \in [0, T]$, il existe un temps d'arrêt opitmal donné par*

$$\widehat{\theta}_t = \inf\left\{ t \leq u \leq T, Y_u^{t,x} = h(u, X_u^{t,x}) \right\} \wedge T$$

tel que

$$\mathbb{E}(R(t, \widehat{\theta}_t) \mid \mathcal{F}_t) = Y_t^{t,x} = ess \sup_{\theta \in \mathcal{M}(t,T)} \mathbb{E}\left(R(t, \theta) \mid \mathcal{F}_t\right),$$

où $\mathcal{M}(t, T)$ est l'ensemble de tous les temps d'arrêt à valeurs dans $[t, T]$.

Preuve

Pour tout $\theta \in \mathcal{M}(t,T)$, on a

$$\begin{aligned} Y_t^{t,x} &= Y_\theta^{t,x} + \int_t^\theta f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr + \int_t^\theta g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x})dG_r^{t,x} \\ &\quad - \int_t^\theta Z_r^{t,x}dW_r + K_\theta^{t,x} - K_t^{t,x}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

D'autre part,

$$Y_{\widehat{\theta}_t}^{t,x} = h(\widehat{\theta}_t, X_{\widehat{\theta}_t}^{t,x})1_{\{\widehat{\theta}_t<T\}} + l(X_T^{t,x})1_{\{\widehat{\theta}_t=T\}}.$$

Puisque $Y_t^{t,x}$ est déterministe et $K_{\widehat{\theta}_t}^{t,x} = K_t^{t,x}$, il vient

$$\begin{aligned} Y_t^{t,x} &= \mathbb{E}\left\{\int_t^{\widehat{\theta}_t} f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr + \int_t^{\widehat{\theta}_t} g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x})dG_r^{t,x}\right. \\ &\quad \left. + h(\widehat{\theta}_t, X_{\widehat{\theta}_t}^{t,x})1_{\{\widehat{\theta}_t<T\}} + l(X_T^{t,x})1_{\{\widehat{\theta}_t=T\}} \mid \mathcal{F}_t\right\}. \end{aligned}$$

De (4.10), on déduit également que pour tout $\theta \in \mathcal{M}(t,T)$,

$$\begin{aligned} Y_t^{t,x} &= \mathbb{E}\left\{Y_\theta^{t,x} + \int_t^\theta f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr\right. \\ &\quad \left. + \int_t^\theta g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x})dG_r^{t,x} + K_\theta^{t,x} - K_t^{t,x} \mid \mathcal{F}_t\right\}. \end{aligned}$$

Mais $K_\cdot^{t,x}$ est croissant et

$$\begin{aligned} Y_\theta^{t,x} &= Y_\theta^{t,x}1_{\{\theta<T\}} + Y_\theta^{t,x}1_{\{\theta=T\}} \\ &\geq h(\theta, X_\theta^{t,x})1_{\{\theta<T\}} + l(X_T^{t,x})1_{\{\theta=T\}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Donc

$$\begin{aligned} Y_t^{t,x} &\geq \mathbb{E}\left\{\int_t^\theta f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr + \int_t^\theta g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x})dG_r^{t,x}\right. \\ &\quad \left. + h(\theta, X_\theta^{t,x})1_{\{\theta<T\}} + l(X_T^{t,x})1_{\{\theta=T\}} \mid \mathcal{F}_t\right\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$Y_t^{t,x} = ess \sup_{\theta\in\mathcal{M}(t,T)} \mathbb{E}\left(R(t,\theta) \mid \mathcal{F}_t\right) \blacksquare.$$

Proposition 4.3.2. *Soit $(Y_\cdot^{t,x}, Z_\cdot^{t,x}, K_\cdot^{t,x})$ une solution de l'EDSR-R généralisée (4.9). Alors la prime ("uppper price" : le prix maximum que l'investiseur devra payer) est Y_0.*

Preuve
Posons

$$\begin{aligned} V(t) &= ess \sup_{\theta \in \mathcal{M}(t,T)} \mathbb{E}\left(R(t,\theta) \mid \mathcal{F}_t\right), \\ V(0) &= ess \sup_{\theta \in \mathcal{M}(0,T)} \mathbb{E}\left(R(0,\theta)\right). \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,T]$, on a (en supprimant les inscriptions en exposant$^{"0,x"}$)

$$Y_t + \int_0^t f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_0^t g(r,X_r,Y_r)dG_r = C + \int_0^t Z_r dB_r - K_t.$$

Puisque $K_{.}$ est croissant et $\mathbb{E}\left(1 \mid \mathcal{F}_t\right) = 1$, le terme de droite est une supermartingale, ce qui implique que le terme de gauche en est une. Ainsi pour tout temps d'arrêt à valeurs dans $\mathcal{M}\left(t,T\right)$, on a

$$\begin{aligned} & Y_t + \int_0^t f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_0^t g(r,X_r,Y_r)dG_r \\ \geq \; & \mathbb{E}\left(Y_0 + \int_0^\theta f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_0^\theta g(r,X_r,Y_r)dG_r \mid \mathcal{F}_t\right), \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} Y_t &\geq \mathbb{E}\left\{Y_\theta + \int_t^\theta f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_t^\theta g(r,X_r,Y_r)dG_r \mid \mathcal{F}_t\right\} \\ &\geq \mathbb{E}\left\{\int_t^\theta f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_t^\theta g(r,X_r,Y_r)dG_r \right. \\ &\quad \left. + h(\theta,X_\theta)1_{\{\theta<T\}} + l(X_T)1_{\{\theta=T\}} \middle| \mathcal{F}_t\right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent $Y_t \geq V(t)$, $\forall\, t$. On déduit alors que $Y_0 \geq V(0)$.
Inversement, soit $\left(\overline{Y},\, \overline{Z},\, \overline{K}\right)$ une solution indistinguable de notre l'EDSR-R généralisée . Soit

$$\widehat{\theta_0} = \inf\left\{0 \leq u \leq T, \overline{Y_u} = h(u,X_u)\right\} \wedge T$$

un temps d'arrê optimal. De la définition de $\widehat{\theta_0}$, on a $\overline{Y}_{\widehat{\theta_0}} \geq \overline{Y}_\theta$ pour tout $\theta \in \mathcal{M}\left(0,T\right)$. En vertu du Théorème 4.3.1, on sait que

$$\overline{Y}_{\widehat{\theta_0}} \geq ess \sup_{\theta \in \mathcal{M}(0,T)} \mathbb{E}\left(R(0,\theta)\right) = \overline{Y}_0.$$

Ainsi

$$Y_0 \geq V(0) \geq \overline{Y}_0,$$

la preuve est complète. ■

4.3.3 EDPs paraboliques avec obstacle et condition de Neumann non linéaire

Considérons le problème d'obstacle suivant :

$$\begin{cases} \min\{u(t,x)-h(t,x), \\ -\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-(\mathcal{L}u)(t,x)-f(s,x,u(t,x),(\nabla u(t,x))^{*}\sigma(t,x))\}=0, \\ (t,x)\in[0,T]\times\Theta \\ \Gamma u(t,x)+g(t,x,u(t,x))=0,\ \ (t,x)\in[0,T]\times\partial\Theta \\ u(T,x)=l(x),\ \ x\in\overline{\Theta}, \end{cases} \tag{4.12}$$

où

$$(\mathcal{L}\varphi)(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^{*})_{ij}(t,x)\frac{\partial^{2}\varphi}{(\partial x_i\partial x_j)}(t,x)+\sum_{i=1}^{d}b_i(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

et au point $x\in\partial\Theta$

$$(\Gamma\varphi)(t,x)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,x).$$

Pour la suite, nous rappelons la notion de solution de viscosité d'une EDP (voir [14]).
$S(d)$ designera l'ensemble $d\times d$ des matrices symmetriques non-negatives.

Définition 4.3.1. *Soit* $u\in\mathcal{C}\left([0,T]\times\overline{\Theta}\right)$ *et* $(t,x)\in[0,T]\times\overline{\Theta}$.
Notons $\mathcal{P}^{2,+}u(t,x)$, *le " surject parabolique" de* u *au point* (t,x) *l'ensemble de triplets* $(p,q,X)\in I\!R\times I\!R^{d}\times S(d)$ *tels que*

$$\begin{aligned} u(t,y) &\leq u(t,x)+p(s-t)+(q,y-x)+\frac{1}{2}(X(y-x),y-x) \\ &\quad +o(|s-t|+|y-x|^{2}). \end{aligned}$$

De la même manière, nous notons par $\mathcal{P}^{2,-}u(t,x)$ *(le "sousject parabolique" de* u *au point* (t,x) *l'ensemble des triplets* $(p,q,X)\in I\!R\times I\!R^{d}\times S(d)$ *tels que*

$$\begin{aligned} u(t,y) &\geq u(t,x)+p(s-t)+(q,y-x)+\frac{1}{2}(X(y-x),y-x) \\ &\quad +o(|s-t|+|y-x|^{2}). \end{aligned}$$

Définition 4.3.2. *Soit* $u \in \mathcal{C}\left([0,\,T] \times \overline{\Theta}\right)$ *tel que* $u\,(T,\,x) = l(x),\ x \in \overline{\Theta}$.
(a) u est une sous-solution de viscosité de (4.12) si pour tout $(p,\,q,\,X) \in \mathcal{P}^{2,+}u\,(t,\,x)$ *et en tout point* $(t, x) \in [0,\,T] \times \overline{\Theta}$ *tel que*

$$u\,(t,\,x) > h(t,\,x),$$

on a

$$-p - \frac{1}{2}Tr\,((\sigma\sigma^*)\,(t,\,x)X) - (b(t,\,x),\,q) - f\,(t,\,x,\,u(t,\,x),\,q\sigma(t,\,x)) \leq 0,\ \ x \in \Theta$$

$$\min\left(-p - \tfrac{1}{2}Tr\,((\sigma\sigma^*)\,(t,\,x)X) - (b(t,\,x),\,q) - f(t,\,x,\,u(t,\,x),\,q\sigma(t,\,x)),\right.$$

$$\left.(q\psi(t,\,x),\,q) + g(t,\,x,\,u(t,\,x))\right) \leq 0,\ \ x \in \partial\Theta.$$

(b) u est une sur-solution de viscosité de (4.12) si pour tout $(p,\,q,\,X) \in \mathcal{P}^{2,+}u\,(t,\,x)$ *et en tout point* $(t, x) \in [0,\,T] \times \overline{\Theta}$ *tel que*

$$u\,(t,\,x) \geq h(t,\,x),$$

$$-p - \frac{1}{2}Tr\,((\sigma\sigma^*)\,(t,\,x)X) - (b(t,\,x),\,q) - f\,(t,\,x,\,u(t,\,x),\,q\sigma(t,\,x)) \geq 0,\ \ x \in \Theta$$

$$\max\left(-p - \tfrac{1}{2}Tr\,((\sigma\sigma^*)\,(t,\,x)X) - (b(t,\,x),\,q) - f(t,\,x,\,u(t,\,x),\,q\sigma(t,\,x)),\right.$$

$$\left.(q\psi(t,\,x),\,q) + g(t,\,x,\,u(t,x))\right) \geq 0,\ \ x \in \partial\Theta.$$

(c)u est une solution de viscosité de (4.12) si u est à la fois une sous-solution et une sur-solution de viscosité.

Définissons

$$u\,(t,\,x) = Y_t^{t,x},\,(t,\,x) \in [0,\,T] \times \overline{\Theta}\ , \tag{4.13}$$

$u\,(t,x)$ est une quantité deterministe puisque $Y_t^{t,x}$ est mesurable par rapport à la $\sigma-$ algèbre $\sigma\,(W_r - W_t : t \leq r)$. Des calculs standards sur les EDSRs et la Proposition 4.3.1 permettent d'obtenir la Propositin ci-dessous.

Proposition 4.3.3. *La fonction u satisfait :*
(*a*) $u\,(t,\,x) \geq h\,(t,\,x)\ \ \forall\ \ (t,\,x) \in [0,\,T] \times \overline{\Theta}$
(*b*) $\sup_{x \in \overline{\Theta}} |u\,(t,\,x)| \leq C\,(1 + |x|)\ \ \forall\ t \in [0,\,T]$
(*c*) $u \in \mathcal{C}\left([0,\,T] \times \overline{\Theta}\right)$,
avec $C > 0$ *une constante independente de t et x.*

Le résultat principal est :

Théorème 4.3.2. *La fonction définie par (4.13) est une solution de viscosité de (4.12).*

Preuve
Pour chaque $(t,\, x) \in [0,\, T] \times \overline{\Theta}$,soit $(Y^{t,x}_{n,s},\, Z^{t,x}_{n,s})$ une solution de l'EDSR généralisée

$$\begin{aligned} Y^{t,x}_{n,s} &= l(X^{t,x}_T) + \int_s^T f(r, X^{t,x}_r, Y^{t,x}_{n,r}, Z^{t,x}_{n,r})dr + \int_s^T g(r, X^{t,x}_r Y^{t,x}_{n,r})dG^{t,x}_r \\ &\quad - \int_s^T Z^{t,x}_{n,r} dW_r + K^{t,x}_{n,T} - K^{t,x}_{n,s}, \end{aligned}$$

où

$$K^{t,x}_{n,s} = n\int_0^s (Y^{t,x}_{n,r} - h(r, X^{t,x}_r))^-(dr + dG^{t,x}_r).$$

En vertu de Pardoux et Zhang [49], $u_n\,(t,\, x) = Y^{t,x}_{n,t}$ est une solution de viscosité de l'EDP parabolique ; pour tout $(t,\, x) \in [0,\, T] \times \overline{\Theta}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t}\,(t,\, x) + (\mathcal{L}u_n)\,(t,\, x) + f_n(s,\, x,\, u_n\,(t,\, x)\,,\, (\nabla u_n\,(t,\, x))^*\,\sigma\,(t,\, x)) = 0, \\ (t,\, x) \in [0, T] \times \Theta \\ \min\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\,(t,\, x) + (\mathcal{L}u_n)\,(t,\, x) + f_n(s,\, x,\, u_n\,(t,\, x)\,, (\nabla u_n\,(t,\, x))^*\,\sigma\,(t,\, x))\,,\right. \\ \left.\Gamma u_n\,(t,\, x) + g_n\,(t,\, x,\, u_n\,(t,\, x))\right) \leq 0, \quad (t,\, x) \in [0,\, T] \times \partial\Theta, \\ u_n\,(T,\, x) = l\,(x)\,, \quad x \in \overline{\Theta}, \end{cases} \tag{4.14}$$

avec $f_n(s, x, y, z) = f(s, x, y, z) + n(y - h\,(t, x))^-$ et $g_n(s,\, x,\, y) = g(s,\, x,\, y) + n(y - h\,(t,\, x))^-$. On peut montrer que

$$|u_n\,(t,\, x) - u\,(t,\, x)|^2 \leq \mathbb{E}(\sup_{t\leq s\leq T} \left|Y^{t,x}_{n,s} - Y^{t,x}_s\right|^2),\ \forall\ (t,\, x) \in [0,\, T] \times \overline{\Theta},$$

On en déduit que pour chaque $(t,\, x) \in [0,\, T] \times \overline{\Theta}$

$$u_n\,(t,\, x) \uparrow u\,(t,\, x) \text{ as } n \longrightarrow +\infty.$$

Puisque u_n et u sont continus, le théorème de Dini assure que la convergence ci-dessus est uniforme sur les ensembles compacts. A présent, montrons seulement que u est une sous-solution de (4.12). Par le même argument, on peut montrer que u est également sur-solution de (4.12).
Supposons que (t, x) satifait $u\,(t, x) > h\,(t, x)$, et soit $(p, q, X) \in \mathcal{P}^{2,+}u\,(t, x)$. Par

un argument similaire au Lemme 6.1 dans [14], il existe des suites

$$\begin{cases} (t_{n_j},\, x_{n_j}) \in [0,T] \times \mathbb{R},\ (p_{n_j},\, q_{n_j},\, X_{n_j}) \in \mathcal{P}^{2,+}u_{n_j}(t_{n_j},\, x_{n_j}) \text{ such that} \\ (t_{n_j},\, x_{n_j}, u_{n_j}(t_{n_j},\, x_{n_j}),\, p_{n_j},\, q_{n_j}, X_{n_j}) \longrightarrow (t,\, x,\, u(t,\, x),\, p,\, q,\, X) \\ \text{quand } j \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

Si $x \in \Theta$, alors, pour tout j

$$\begin{aligned} & -p_{n_j} - \frac{1}{2} Tr\left(\sigma\sigma^*(t_{n_j},\, x_{n_j})X_{n_j}\right) - (b(t_{n_j},\, x_{n_j}),\, q_{n_j}) \\ & -f(t_{n_j},\, x_{n_j},\, u_{n_j}(t_{n_j},\, x_{n_j}),\, q_{n_j}\sigma(t_{n_j},\, x_{n_j})) \\ \leq\ & -n_j(u_{n_j}(t_{n_j},\, x_{n_j}) - h(t_{n_j},\, x_{n_j}))^-. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Puisque $u\,(t,x) > h\,(t,x)$ et u_n converge uniformement sur les ensembles compacts, il existe j suffisamment large tel que $u_{n_j}(t_{n_j},\, x_{n_j}) > h(t_{n_j},\, x_{n_j})$. De (4.15), on déduit que

$$-p - \frac{1}{2} Tr\left((\sigma\sigma)^*(t,\, x)X\right) - (b(t,\, x),\, q) - f(t,\, x,\, u\,(t,\, x)\,,\, q\sigma\,(t,\, x)) \leq 0.$$

Si $x \in \partial\Theta$, de la même manière, on obtient

$$\min\left(-p - \tfrac{1}{2} Tr\left((\sigma\sigma^*)\,(t,\, x)X\right) - (b(t,\, x),\, q) - f(t,\, x,\, u(t,x),\, q\sigma(t,\, x)),\right.$$

$$\left.(q\psi(t,\, x),\, q) + g(t,\, x,\, u(t,\, x))\right) \leq 0.$$

La preuve est complète ■.

Chapitre 5

Homogénéisation des EDPs à coefficients discontinus via les EDSRs

Nous présentons un résultat d'homogénéisation pour les EDPs sémi-linéaires dont les coefficients sont non périodiques mais admettent une limite au sens de Cèsaro. Dans un tel cas, les coefficients limites peuvent admettre une discontinuité. Nous adoptons une approche probabiliste basée sur la convergence faible dans la S-topologie des solutions des EDSRs correspondantes.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique de la solution v^ε de l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}(t,\, x_1,\, x_2) + \mathcal{L}^\varepsilon(x_1,\, x_2)v^\varepsilon(t, x_1,\, x_2) + f(x_1,\, x_2,\, v^\varepsilon(t,\, x_1,\, x_2)) = 0 \\ \\ v^\varepsilon(0, x_1,\, x_2) = H(x_1,\, x_2), \end{cases} \tag{5.1}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon(x_1,\, x_2) = \varepsilon^{-2}a_{00}(x_1,\, x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\varepsilon^{-1}a_{i0}(x_1,\, x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_{2i}} \\ +a_{ij}(x_1,\, x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_{2i}\partial x_{2j}} + b_i(x_1,\, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

$a_{00} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \varphi_i^2$, $a_{i0} = \frac{1}{2}\sum_{i=j}^k \sigma_{ij}\varphi_i j$, $a = \frac{1}{2}\sigma\sigma^*$.
Le générateur infinitésimal $\mathcal{L}^\varepsilon$ est associé au $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$-processus de diffusion $(x_t^{1,\varepsilon},\, x_t^{2,\varepsilon})$ (voir Krylov et Khasminskii [35]).

$$\begin{cases} x_t^{1,\varepsilon} = x_1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \varphi(x_s^{1,\varepsilon},\, x_s^{2,\varepsilon})dW_s \\ \\ x_t^{2,\varepsilon} = x_2 + \int_0^t b(x_s^{1,\varepsilon},\, x_s^{2,\varepsilon})ds + \int_0^t \sigma(x_s^{1,\varepsilon},\, x_s^{2,\varepsilon})dW_s \end{cases} \tag{5.2}$$

où $x_t^{1,\varepsilon}$ est la composante rapide de réccurrence nulle, φ (resp. σ) est à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ (resp. $\mathbb{R}^{d\times k}$ et W est un $\mathbb{R}^k$-brownoien standard à composantes indépendantes. Les coefficients de $\mathcal{L}^\varepsilon$ sont non périodiques mais admettent une limite au sens de Cesaro. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour ce faire, nous utilisons la convergence faible de l'EDSR correspondante dans la S-topologie. Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2, nous donnons les hypothèses, précisons davantage le problème et donnons quelques résultats préliminaires. La section 3 est consacrée à l'étude de la convegence des EDSRs correspondantes. Ce qui permet de déduire le comportement asymptotique de la solution faible de l'EDP.

5.2 Hypothèses et résultats préliminaires

Soient $X_t^{1,\varepsilon} = \varepsilon x_t^{1,\varepsilon}$, $X_t^{2,\varepsilon} = x_t^{2,\varepsilon}$, $Y_t^\varepsilon = y_t^\varepsilon$, (5.1) est connectée au système Progressive-Rétrograde

$$\begin{cases} X_t^{1,\varepsilon} = \varepsilon x_1 + \int_0^t \varphi(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon})dW_s \\ \\ X_t^{2,\varepsilon} = x_2 + \int_0^t b(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon})ds + \int_0^t \sigma(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon})dW_s \\ \\ Y_t^\varepsilon = H(X_T^{1,\varepsilon},\, X_T^{2,\varepsilon}) + \int_t^T f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon},\, Y_s^\varepsilon)ds - \int_t^T Z_s^\varepsilon dM_s^{U^\varepsilon} \end{cases} \tag{5.3}$$

où M^{U^ε} est la partie martingale du processus $U^\varepsilon = (X^{1,\varepsilon},\, X^{2,\varepsilon})$
Sous de bonnes conditions, la solution unique $(Y^\varepsilon,\, Z^\varepsilon)$ de (5.3) est $\mathcal{F}^{U^\varepsilon}$-adaptée.

Soient $\overline{b}(x_1,\, x_2)$, $\overline{a}(x_1,\, x_2)$ and $\overline{f}(x_1,\, x_2,\, y)$ le coefficients moyens définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overline{b}(x_1,\, x_2) &= \frac{(pb)^+(x_2)}{p^+(x_2)}1_{\{x_1>0\}} + \frac{(pb)^-(x_2)}{p^-(x_2)}1_{\{x_1\le 0\}}, \\ \overline{a}(x_1,\, x_2) &= \frac{(pa)^+(x_2)}{p^+(x_2)}1_{\{x_1>0\}} + \frac{(pa)^-(x_2)}{p^-(x_2)}1_{\{x_1\le 0\}}, \\ \overline{f}(x_1,\, x_2,\, y) &= \frac{(pf)^+(x_2,\, y)}{p^+(x_2)}1_{\{x_1>0\}} + \frac{(pf)^-(x_2,\, y)}{p^-(x_2)}1_{\{x_1\le 0\}}, \end{aligned}$$

où $p(x_1,\, x_2)^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \varphi_i^2(x_1,\, x_2)$ et pour touc fonction $K\in\{pa,\, pb,\, pf\}$ K^+, K^- désigne la limite au sens de Cesaro (à préciser plus tard). Il est important de remarquer que$\overline{b}, \overline{a}$ and $\overline{f}$ sont discontinus en $x_1 = 0$. Notre objectif est de montrer que v^ε converge vers un certain v qui est solution de l'EDP " moyennisé"de type :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,\, x_1,\, x_2) + \overline{L}(x_1,\, x_2)v(t, x_1,\, x_2) + \overline{f}(x_1,\, x_2,\, v(t,\, x_1,\, x_2)) = 0 \\ \\ v(0, x_1,\, x_2) = H(x_1,\, x_2) \end{cases} \tag{5.4}$$

En gardant bien à l'esprit la représentation $v^\varepsilon(t, x) = Y_0^\varepsilon$, nous montrerons seulement que Y_0^ε converge vers Y_0, où le processus $(U = (X^1, X^2), Y, Z)$ est solution de l'EDS progressive-rétrograde

$$\begin{cases} U_t = u_0 + \int_0^t \overline{b}(U_s)ds + \int_0^t \overline{\sigma}(U_s)dW_s \\ \\ Y_t = H(X_T^1, X_T^2) + \int_t^T \overline{f}(X_s^1, X_s^2, Y_s)ds - \int_t^T Z_s dM_s^U. \end{cases} \tag{5.5}$$

avec $\overline{a} = \frac{1}{2}\overline{\sigma}\overline{\sigma}*$.

5.2.1 Hypothèses

Dans toute la suite, nous supposerons que les coefficients vérifient les conditions (A), (B) et (C).

(A1) La fonction b est Lipschitz continu en (x_1, x_2) et, pour chaque x_1, ses dérivées en x_2 jusqu'à l'ordre 2 sont des fonctions bornées et continues de x_2.

(A2) Il existe des constantes positives C_1, C_2, C_3 telles que

$$\begin{cases} (i)\ C_1 \leq a_{00}(x_1, x_2) \leq C_2 \\ \\ (ii)\ \sum_{i=1}^d [a_{ii}(x_1, x_2) + b_i^2(x_1, x_2)] \leq C_3(1 + |x_2|^2) \end{cases}$$

(B1) Notons par convenence :$p(x_1, x_2) = a_{00}(x_1, x_2)^{-1}$ et supposons que $p(x_1, x_2)$ admet une limite $p^\pm$ au sens de Cesaro :

$$p^\pm(x_2) = \lim_{x_1 \to \pm\infty} \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} p(t, x_2)dt$$

uniformement en $x_2 \in \mathbb{R}^d$. De plus

$$D_{x_2} p^\pm(x_2) = \lim_{x_1 \to \pm\infty} \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} D_{x_2} p(t, x_2)dt$$

$$D_{x_2}^2 p^\pm(x_2) = \lim_{x_1 \to \pm\infty} \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} D_{x_2}^2 p(t, x_2)dt$$

$D_{x_2}u$, $D_{x_2}^2 u$ désigne respectivement le vecteur $(D_{x_{21}}u, ...D_{x_{2i}}u, ..., D_{x_{2d}}u)$ et la matrice des dérivées secondes en x_2 de u.

(B2) For $i = 1, ..., d$, $j = 0, ..., d$, les coefficients

$$pb_i,\ D_{x2}(pb_i),\ D_{x2}^2(pb_i),\ pa_{ij},\ D_{x2}(pa_{ij}),\ D_{x2}^2(pa_{ij})$$

admettent des limites au sens de Cesaro. De plus, pour toute fonction $k(x_1, x_2) \in \{pb_i, D_{x_2}(pb_i), D^2_{x_2}(pb_i), pa_{ij}, D_{x_2}(pa_{ij}), D^2_{x_2}(pa_{ij})\}$, nous notons

$$\begin{aligned} k^+(x_2) &= \lim_{x_1\to+\infty} \tfrac{1}{x_1}\textstyle\int_0^{x_1} k(t, x_2)dt, \ k^-(x_2) = \lim_{x_1\to-\infty} \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} k(t, x_2)dt. \\ k^\pm(x_1, x_2) &= k^+(x_2)1_{\{x_1>0\}} + k^-(x_2)1_{\{x_1\leq 0\}}, \end{aligned}$$

et supposons que

(B3)

$$\frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} k(t, x_2)dt - k^\pm(x_1, x_2) = (1+|x_2|^2)\alpha(x_1, x_2),$$

où α est une fonction bornée telle que

$$\lim_{|x_1|\longrightarrow\infty} \sup_{x_2\in\mathbb{R}^d} |\alpha(x_1, x_2)| = 0. \tag{5.6}$$

(C1) Il existe des constantes positives C_4, C_5 telles que les fonctions H, f à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifient

(i) $\langle y - y', f(x_1, x_2, y) - f(x_1, x_2, y')\rangle \leq C_4|y - y'|^2$

(ii) $|H(x_1, x_2)|^2 + |f(x_1, x_2, y)|^2 \leq C_5(1 + |x_2|^2 + |y|^2)$.

(C2) pf admet une limite au sens de Cesaro et satisfait

$$(pf)^\pm(x_1, x_2, y) := (pf)^+(x_2, y)1_{\{x_1>0\}} + (pf)^-(x_2, y)1_{\{x_1\leq 0\}}$$

$$\frac{1}{x_1}\int_0^{x_2} p(t, x_2)f(t, x_2, y)dt - (pf)^\pm(x_1, x_2, y) = (1 + |x_2|^2 + |y|^2)\beta(x_1, x_2, y)$$

où β est une fonction mesurable et bornée telle que

$$\lim_{|x_1|\to\infty} \sup_{(x_2, y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\beta(x_1, x_2, y)| = 0. \tag{5.7}$$

(C3) Pour chaque x_1, pf admet des dérivées d'ordre 2 en x_2 uniformement en y. Toutes ces dérivées sont bornées et vérifient $(C2)$

5.2.2 Résultat préliminaire

Sous les conditions A et B, Khasminskii et Krylov ont montré la convergence de l'EDS. Plus précisement, ils ont établi le théorème suivant :

Théorème 5.2.1. *(Khasminskii and Krylov [35])*
Supposons que les conditions A et B sont satisfaites. Supposons de plus que l'EDS limite dans (5.5) admet une solution faible unique. Alors, le processus $U^\varepsilon = (X^{1,\varepsilon}, X^{2,\varepsilon})$ converge en loi vers le processus $U = (X^1, X^2)$.

Lemme 5.2.1. *(Khasminskii and Krylov[35]) Supposons que la fonction $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) : I\!R \times I\!R^d \longrightarrow I\!R$ est borel mesurable et satisfait*

$$|f(x_1, x_2)| \leq C(1 + |x_2|^k).$$

Supposons que

$$F(x_1, x_2) := \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} f(t, x_2)dt = (1 + |x_2|^k)\alpha(x_1, x_2),$$

où la fonction α satisfy (5.6). *Désignons par u_ε la solution du problème*

$$D^2_{x_1} u_\varepsilon(x_1, x_2) = f(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2); \;\; u_\varepsilon(0, x_2) = D_{x_1} u_\varepsilon(0, x_2) = 0.$$

Alors

$$D_{x_1} u_\varepsilon(x_1, x_2) = x_1(1 + |x_2|^k)\alpha(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2), \;\; u_\varepsilon(x_1, x_2) = x_1^2(1 + |x_2|^k)\alpha(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2).$$

Si de plus, pour chaque x_1, la fonction F admet des dérivées d'ordre 2 continues en x_2 et satisfaisant

$$D_{x_2} F(x_1, x_2) = (1 + |x_2|^k)\alpha(x_1, x_2), \;\; D^2_{x_2} F(x_1, x_2) = (1 + |x_2|^k)\alpha(x_1, x_2),$$

alorts, les dérivées en x_2 de la solution vérifient :

$$\begin{aligned} D_{x_2} u_\varepsilon(x_1, x_2) &= x_1^2(1 + |x_2|^k)\alpha(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2) \\ D^2_{x_2} u_\varepsilon(x_1, x_2) &= x_1^2(1 + |x_2|^k)\alpha(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2) \\ D_{x_2} D_{x_1} u_\varepsilon(x_1, x_2) &= x_1^2(1 + |x_2|^k)\alpha(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2). \end{aligned}$$

Nous en déduisons la conséquence suivante,

Lemme 5.2.2. *Pour $y \in I\!R$ fixé, notons $V^{\varepsilon,y}(x_1, x_2)$ la solution de l'équation :*

$$a_{00}(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2)D^2_{x_1}u(x_1, x_2) = f(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y) - \overline{f}(x_1, x_2, y), \; u(0, x_2) = D_{x_1}u(0, x_2) = 0 \quad (5.8)$$

Alors

$$D_{x_1}V^{\varepsilon,y}(x_1, x_2) = x_1(1 + |x_2|^2 + |y|^2)\beta(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y) - x_1(1 + |x_2|^2)m(x_1, x_2, y)$$

et pour toute fonction

$K^{\varepsilon,y}(x_1, x_2) \in \{V^{\varepsilon,y}(x_1, x_2), D_{x_2}V^{\varepsilon,y}(x_1, x_2), D^2_{x_2}V^{\varepsilon,y}(x_1, x_2), D_{x_1}D_{x_2}V^{\varepsilon,y}(x_1, x_2)\}$,

on a

$$K^{\varepsilon,y}(x_1, x_2) = x_1^2(1 + |x_2|^2 + |y|^2)\beta(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y) - x_1^2(1 + |x_2|^2)m(x_1, x_2, y)$$

où nous avons posé $m(x_1, x_2, y) = \frac{(pf)^{\pm}(x_1,x_2,y)}{p^{\pm}(x_1,x_2)}\alpha(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2)$ et $\alpha(x_1, x_2)$, $\beta(x_1, x_2, y)$ sont des bonctions bornées pouvant varier d'une ligne à une autre et satisfaisant respectivement les propriétés (5.6) et (5.7).

Preuve Pour tout y fixé, posons

$$F(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y) = \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} p(\frac{t}{\varepsilon}, x_2)g(\frac{t}{\varepsilon}, x_2, y)dt$$

où $g(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y) = f(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y) - \overline{f}(x_1, x_2, y)$. Pour $x_1 > 0$, on a

$$\begin{aligned}
F(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y) &= \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} p(\frac{t}{\varepsilon}, x_2)f(\frac{t}{\varepsilon}, x_2, y)dt - (pf)^+(x_2, y) \\
&+ (pf)^+(x_2, y) - \frac{(pf)^+(x_2, y)}{p^+(x_2)}\frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} p(\frac{t}{\varepsilon}, x_2)dt \\
&= (1 + |x_2|^2 + |y|^2)\beta_1(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y) + (pf)^+(x_2, y)\left[1 - \frac{1}{p^+(x_2)x_1}\int_0^{x_1} p(\frac{t}{\varepsilon}, x_2)dt\right] \\
&= (1 + |x_2|^2 + |y|^2)\beta_1(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y) - (1 + |x_2|^2)\frac{(pf)^+(x_2, y)}{p^+(x_2)}\alpha_1(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2)
\end{aligned}$$

Puisque, $D_{x_1}V^{\varepsilon,y}(x_1, x_2) = x_1F(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, y)$, on déduit le résultat pour $D_{x_1}V^{\varepsilon,y}(x_1, x_2)$. Ensuite en intégrant, on obtient

$$\begin{aligned}
V^{\varepsilon,y}(x_1, x_2) &= x_1^2(1 + |x_2|^2 + |y|^2)\left((\frac{\varepsilon}{x_1})^2\int_0^{\frac{x_1}{\varepsilon}} t\beta_1(t, x_2, y)dt\right) \\
&- (1 + |x_2|^2)\frac{(pf)^+(x_2, y)}{p^+(x_2)}\left((\frac{\varepsilon}{x_1})^2\int_0^{\frac{x_1}{\varepsilon}} t\alpha_1(t, x_2)dt\right)
\end{aligned}$$

On montre aisement que,

$$\beta(\frac{x_1}{\varepsilon},\, x_2,\, y) = (\frac{\varepsilon}{x_1})^2 \int_0^{\frac{x_1}{\varepsilon}} t\beta_1(t,\, x_2,\, y)dt,\ \alpha(\frac{x_1}{\varepsilon},\, x_2) = (\frac{\varepsilon}{x_1})^2 \int_0^{\frac{x_1}{\varepsilon}} t\alpha(t,\, x_2)dt$$

vérifient respectivement (5.6) et (5.7). Pour $x < 0$, la preuve est identique au précédent. Les résultats pour $D_{x_2}V^{\varepsilon,y}(x_1,\, x_2)$, $D^2_{x_2}V^{\varepsilon,y}(x_1,\, x_2)$ et $D_{x_1}D_{x_2}V^{\varepsilon,y}(x_1,\, x_2)$ sont obtenus par un argument similaire.

5.3 Convergence des EDSRs

Nous étudions la convergence de la suite dans le sens de la topologie de Jakubowsky.

$$Y_t^\varepsilon = H(X_T^{1,\varepsilon},\, X_T^{2,\varepsilon}) + \int_t^T f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon},\, Y_s^\varepsilon)ds - \int_t^T Z_s^\varepsilon dM_s^{U^\varepsilon} \tag{5.9}$$

Posons $M_t^\varepsilon = \int_t^T Z_s^\varepsilon dM_s^{U^\varepsilon}$. Le résultat principal est

Théorème 5.3.1. *Supposons que les conditions (A), (B) et (C) sont satisfaites. Supposons de plus que l'EDS limite dans (5.5) est faiblement unique. Alors, il existet un ensemble dénombrable $\mathcal{D} \subset [0,\, T]$ tel que pour une sous suite,*

$$(\, Y_t^\varepsilon,\ M_t^\varepsilon\,) \overset{\mathcal{D}ist}{\Longrightarrow} (Y_t,\ M_t\,)\ \forall t \in \mathcal{D}^c.$$

Preuve

Rappelons tout d'abord que pour tout $k \geq 1$, on a

$$\sup_\varepsilon \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left[|X_s^{1,\varepsilon}|^{2k} + |X_s^{2,\varepsilon}|^{2k}\right]\right) < +\infty. \tag{5.10}$$

Etape 1 : *estimations à priori sur* $(Y^\varepsilon,\, M^\varepsilon)$. Par la formule d'Itô's formula, on a

$$\begin{aligned}
&|Y_t^\varepsilon|^2 + \int_t^T |Z_s^\varepsilon|^2 d\langle\, M^{U^\varepsilon}\,\rangle_s \\
= \ & |H(X_T^{1,\varepsilon},\, X_T^{2,\varepsilon})|^2 + 2\int_t^T \langle Y_s^\varepsilon,\, f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon},\, Y_s^\varepsilon)\rangle ds - 2\int_t^T \langle Y_s^\varepsilon,\, Z_s^\varepsilon dM_s^{U^\varepsilon}\rangle. \\
\leq \ & |H(X_T^{1,\varepsilon},\, X_T^{2,\varepsilon})|^2 + (2K+2)\int_t^T |Y_s^\varepsilon|^2 ds + \int_t^T |f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon},\, 0)|^2 ds \\
- \ & 2\int_t^T \langle Y_s^\varepsilon,\, Z_s^\varepsilon dM_s^{U^\varepsilon}\rangle.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\mathbb{E}\left(|Y_t^\varepsilon|^2 + \int_t^T |Z_s^\varepsilon|^2 d\langle M^{U^\varepsilon}\rangle_s\right)$$
$$\leq \mathbb{E}\left(|H(X_T^{1,\varepsilon}, X_T^{2,\varepsilon})|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_t^T |f(\tfrac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, 0)|^2 ds\right)$$
$$+(2K+2)\mathbb{E}\left(\int_t^T |Y_s^\varepsilon|^2 ds\right).$$

Le lemme de Gronwall permet alors de déduire que

$$\mathbb{E}\left(|Y_t^\varepsilon|^2\right) \leq C(K,t,T)\mathbb{E}\left(|H(X_T^{1,\varepsilon}, X_T^{2,\varepsilon})|^2 + \int_0^T |f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, 0)|^2 ds\right) \quad (5.11)$$

Ce qui conduit à

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T |Z_s^\varepsilon|^2 d\langle M^{U^\varepsilon}\rangle_s\right)$$
$$\leq C(K,t,T)\mathbb{E}\left(|H(X_T^{1,\varepsilon}, X_T^{2,\varepsilon})|^2 + \int_0^T |f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, 0)|^2 ds\right). \quad (5.12)$$

En combinant (5.12) et l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy et modifiant $C(K,t,T)$ si necessaire, on déduit

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^\varepsilon|^2\right) \leq C(K,t,T)\mathbb{E}\left(|H(X_T^{1,\varepsilon}, X_T^{2,\varepsilon})|^2 + \int_0^T |f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, 0)|^2 ds\right)$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^\varepsilon|^2 + \int_t^T |Z_s^\varepsilon|^2 d\langle M^{U^\varepsilon}\rangle_s\right)$$
$$\leq C(K,t,T)\mathbb{E}\left(|H(X_T^{1,\varepsilon}, X_T^{2,\varepsilon})|^2 + \int_0^T |f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, 0)|^2 ds\right)$$

En vertu de la condition $(C1)$ et (5.10), on obtient

$$\sup_\varepsilon \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^\varepsilon|^2 + \int_t^T |Z_s^\varepsilon|^2 d\langle M^{U^\varepsilon}\rangle_s\right) \leq C(K,t,T) \quad (5.13)$$

Etape 2 : *Tension de la suite* $(Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$. Il est aisé de voir que

$$CV(Y^\varepsilon) \leq KT\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^\varepsilon|\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T |f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, 0)|^2 ds\right).$$

Par conséquent,

$$\sup_{\varepsilon}\left\{CV(Y^{\varepsilon})+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{\varepsilon}|^2+\int_t^T|Z_s^{\varepsilon}|^2d\langle M^{U^{\varepsilon}}\rangle_s\right)\right\}<+\infty. \tag{5.14}$$

Etape 3 : *Convergence.* En vertu de (5.14), la suite $(Y^{\varepsilon},\, M^{\varepsilon})$ est tendue et il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{D}$ et un processus $(\overline{Y},\, \overline{M})$ tels que pour une sous suite, on a pour tout $t\in[0,\, T]\setminus\mathcal{D}$

$$\mathcal{L}(Y_t^{\varepsilon_k},\, M_t^{\varepsilon_k}\,|\,\mathbb{P})\longrightarrow\mathcal{L}(\overline{Y}_t,\, \overline{M}_t\,|\,\mathbb{P})$$

Admettons pour l'instant le résultat suivant :

Lemme 5.3.1.

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left(f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon},\, Y^{\varepsilon})-\overline{f}(X_s^{1,\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon},\, Y_s^{\varepsilon})\right)ds\right|$$

converge en probabilité vers zéro quand $\varepsilon\longrightarrow 0$.

Par passage à la limite dans l'équation (5.9), on obtient grâce au Lemme 5.3.1

$$\overline{Y}_t=H(X_T^1,\, X_T^2)+\int_t^T\overline{f}(X_s^1,\, X_s^2,\, \overline{Y}_s)ds-\overline{M}_T-\overline{M}_t \tag{5.15}$$

Etape 4 : *Propriéte de Martingale de la limite* $\overline{M}$. Notons $U=(X^1,\, X^2)$ et $\mathcal{F}^{U,\overline{Y}}$, la plus petite filtration admissible et complète générée par U, $\overline{Y}$. Nous devons montrer que $\overline{M}$ est une $\mathcal{F}^{U,\overline{Y}}$, $\mathbb{P}$-martingale.
$(Y^{\varepsilon},\, M^{\varepsilon})$ est $\mathcal{F}_t^{U^{\varepsilon}}$-adapté. Puisque $\overline{M}$ est une fonction de $\overline{Y}$, U_s (pour $s\leq t$) ; il est $\mathcal{F}_t^{U,\overline{Y}}$-adapté. Dès lors, en combinant les estimations uniformes de l'étape 1, avec les Lemmes 5.3.2 et 5.3.3 de l'appendice, on déduit que $\overline{M}$ est bien $\mathcal{F}^{U,\overline{Y}}$, $\mathbb{P}$-martingale.
Etape 5 : *Identification de la limite.* Soit $(Y,\, Z)$ la solution unique $\mathcal{F}_t^U$ -adapté de l'EDSR

$$Y_t=h(U_T)+\int_t^T\overline{f}(s,\, U_s,\, Y_s)ds-\int_t^TZ_sdM_s^U$$

avec $\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2+\int_0^T|Z_s|^2d\langle M\rangle_s)<\infty$. Comme Y est $\mathcal{F}_t^U$ -adapté, il est également $\mathcal{F}_t^{U,\overline{Y}}$-adapté.
D'autre part, le Lemme 5.3.3 dans l'appendice assure que $\overline{Y}_t$ et $\overline{M}_t$ sont de carré intégrables pour chaque $t\geq 0$. L'inégalité

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T\langle\overline{Y}_s,\, d\overline{M}_s\rangle\right)\leq\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|\overline{Y}_t|^2+\langle\overline{M}\rangle_T\right)<\infty$$

permet alors de conclure que $\int_0^T \langle \overline{Y}_s, d\overline{M}_s \rangle$ est une martingale de carré intégrable.
A présent, posons $M_t = \int_0^t Z_s dM_s^U$. La formule d'Itô donne

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(|Y_t - \overline{Y}_t|^2\right) + \mathbb{E}\left([M - \overline{M}]_T - [M - \overline{M}]_t\right) \\
&= 2\mathbb{E}\left(\int_t^T \langle Y_s - \overline{Y}_s, \overline{f}(s, U_s, Y_s) - \overline{f}(s, U_s, \overline{Y}_s)\rangle\, ds\right) \\
&\leq 2C\mathbb{E}\left(\int_t^T |Y_s - \overline{Y}_s|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Par le Lemme de Gronwall, on déduit que $Y_t = \overline{Y}_t$, $\mathbb{P} - p.s$ et par suite $M = \overline{M}$.■

5.3.1 Preuve du Lemme 5.3.1

Nous adaptons l'argument utilisé dans Pardoux [50] ou encore dans [51]
Posons

$$h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y^\varepsilon) = f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) - \overline{f}(X_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon).$$

Montrons que pour tout $0 \leq s \leq T$

$$\left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) ds\right|$$

tend vers zéro en probabilité quand ε tend vers zéro.
Soit y^1, ..., y^N la famille de fonctions définies sur $[0, T]$ vers $\mathbb{R}$ telles que pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $A_\varepsilon = \cap_{k=1}^N \left\{\mu\{0 \leq s \leq t : |Y_s^\varepsilon - y_s^k| > \delta\} > \delta\right\}$ satisfait $\mathbb{P}(A_\varepsilon) < \delta$. Posons $A_\varepsilon^C = \cup_{k=1}^N B_k^\varepsilon$, où $B_k^\varepsilon = \left\{\mu\{0 \leq s \leq t : |Y_s^\varepsilon - y_s^k| > \delta\} \leq \delta\right\}$. On peut supposer sans perte de la généralité que $supp(h) = \mathbb{R}^d \times [-M, M]$. Posons $K_M = \sup_{\mathbb{R}^d \times [-M, M]} |h(x_1, x_2, y)|$ et $w(\delta)$ le module de continuité de la fonction h sur son troisième argument sur l'ensemble $[-M, M]$. On a

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) ds\right| &\leq \left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) ds\right| 1_{A_\varepsilon} + \sum_{k=1}^N \left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) ds\right| 1_{B_k^\varepsilon} \\
&\leq tK_M 1_{A_\varepsilon} + \sum_{k=1}^N \left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, y^k(s)) ds\right| 1_{B_k^\varepsilon} \\
&+ \sum_{k=1}^N \left|\int_0^t \left[h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) - h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, y^k(s))\right] ds\right| 1_{B_k^\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N}\left|\int_0^t \left[h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) - h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, y^k(s))\right] ds\right| 1_{B_k^\varepsilon} \\
\leq & \sum_{k=1}^{N}\left|\int_0^t \left[h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) - h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, y^k(s))\right] 1_{\{|Y_s^\varepsilon - y^k(s)| \leq \delta\}} ds\right| 1_{B_k^\varepsilon} \\
+ & \sum_{k=1}^{N}\left|\int_0^t \left[h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) - h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, y^k(s))\right] 1_{\{|Y_s^\varepsilon - y^k(s)| > \delta\}} ds\right| 1_{B_k^\varepsilon} \\
\leq & \; w(\delta)t \sum_{k=1}^{N} 1_{B_k^\varepsilon} + 2K_M \sum_{k=1}^{N} \mu\{0 \leq s \leq t : |Y_s^\varepsilon - y_s^k| > \delta\} 1_{B_k^\varepsilon} \\
\leq & \; w(\delta)t + 2K_M\delta
\end{aligned}
$$

Il s'en suit que

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) ds\right| \\
\leq & \; tK_M\delta + w(\delta)t + 2K_M\delta + \sum_{k=1}^{N}\left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, y^k(s)) ds\right|
\end{aligned}
$$

Ainsi, en choisissant δ suffisamment petit tel que pour tout $\eta > 0$, $tK_M\delta + w(\delta)t + 2K_M\delta < \frac{\eta}{2}$, on obtient

$$
\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^\varepsilon) ds\right| > \eta\right) \leq \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, y^k(s)) ds\right| > \frac{\eta}{2N}\right).
$$

Pour achever la preuve, nous devons montrer que

$$
\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, y^k(s)) ds\right| > \frac{\eta}{2N}\right).
$$

tend vers zéro. Pour ce faire, considerons $V^{y^k(s),\varepsilon}$ la solution de l'équation (5.8). Par la formule d'Itô-Krylov, on a

$$
\begin{aligned}
& V^{y^k(t),\varepsilon}(X_t^{1,\varepsilon}, X_t^{2,\varepsilon}) = V^{y^k(0),\varepsilon}(\varepsilon x_1, x_2) + \int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}, y^k(s)) ds \\
+ & \int_0^t a_{ij}(X_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}) \frac{\partial^2 V^{y^k(s),\varepsilon}}{\partial x_{2i} \partial x_{2j}}(X_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}) ds + \int_0^t b_j(X_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}) \frac{\partial V^{y^k(s),\varepsilon}}{\partial x_{2j}}(X_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}) ds \\
+ & \int_0^t [\frac{\partial V^{y^k(s),\varepsilon}}{\partial x_1}(X_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}) \varphi(X_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}) + \frac{\partial V^{y^k(s),\varepsilon}}{\partial x_2}(X_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon}) \sigma(X_s^{1,\varepsilon}, X_s^{2,\varepsilon})] dW_s
\end{aligned}
$$

En vertu du Lemme 5.2.2, il est évident que $V^{y^k(0),\varepsilon}(\varepsilon x_1,\, x_2)$ tend vers zéro. Une fois encore, du Lemme 5.2.2, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|V^{y^k(t),\varepsilon}(X_t^{1,\varepsilon},\, X_t^{2,\varepsilon})\right| \\
\leq\ & \varepsilon\left[(1+|X_t^{2,\varepsilon}|^2+|y^k(t)|^2)|\beta(\frac{X_t^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_t^{2,\varepsilon},\, y^k(t))|\right] \\
+\ & \varepsilon\left[(1+|X_t^{2,\varepsilon}|^2)\frac{(pf)^+(X_t^{2,\varepsilon},\, y^k(t))}{p^+(X_t^{2,\varepsilon})}|\alpha(\frac{X_t^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_t^{2,\varepsilon})|\right] \\
+\ & 1_{\{|X_t^{1,\varepsilon}|\geq\sqrt{\varepsilon}\}}|X_t^{1,\varepsilon}|^2\left[(1+|X_t^{2,\varepsilon}|^2+|y^k(t)|)|\beta(\frac{X_t^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_t^{2,\varepsilon},\, y^k(t))|\right] \\
+\ & 1_{\{|X_t^{1,\varepsilon}|\geq\sqrt{\varepsilon}\}}|X_t^{1,\varepsilon}|^2\left[(1+|X_t^{2,\varepsilon}|^2)\frac{(pf)^+(X_t^{2,\varepsilon},\, y^k(t))}{p^+(X_t^{2,\varepsilon})}|\alpha(\frac{X_t^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_t^{2,\varepsilon})|\right]
\end{aligned}
$$

Il s'en suit que

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|V^{y^k(t),\varepsilon}(X_t^{1,\varepsilon},\, X_t^{2,\varepsilon})|\right)\leq K\left(\varepsilon+\sup_{|x_1|\geq\sqrt{\varepsilon}}\sup_{(x_2,\, y)}|\beta(\frac{x^1}{\varepsilon},\, x^2,\, y)|+\sup_{|x_1|\geq\sqrt{\varepsilon}}\sup_{x_2}|\alpha(\frac{x^1}{\varepsilon},\, x^2)|\right).
$$

Puisque α et β vérifient respectivement (5.6) et (5.7), le terme de droite tend vers zéro quand $\varepsilon\longrightarrow 0$.
De la même manière, on peut montrer que les termes contenant une intégrale ds et le dernier terme tend vers zéro probabilité. On conclut ainsi que $|\int_0^t h(\overline{X}_s^{1,\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon},\, y^k(s))ds|$ tend vers zéro en probabilité. ■

Corollaire 5.3.1. *Y_0^ε converge en loi vers $\overline{Y}_0$*

Preuve La convergence dans la S-topologie n'assure pas la convergence de Y_0^ε, mais nous avons

$$
Y_0^\varepsilon = H(X_T^{1,\varepsilon},\, X_T^{2,\varepsilon})+\int_0^T f(\frac{X_s^{1,\varepsilon}}{\varepsilon},\, X_s^{2,\varepsilon},\, Y_s^{,\varepsilon})ds+M_T^\varepsilon.
$$

En vertu de la Remarque 5.3.1, on déduit que M_T^ε converge en distribution vers $\overline{M}_T$. Il en résulte que $Y_0^\varepsilon \overset{\mathcal{D}ist}{\Longrightarrow} \overline{Y}_0$. De plus, comme Y_0^ε et Y_0 sont déterministes, $Y_0^\varepsilon\longrightarrow H(X_T^1,\, X_T^2)+\int_0^T\overline{f}(X_s^1,\, X_s^2,\, \overline{Y}_s)ds+\overline{M}_T$, quand $\varepsilon\longrightarrow 0$.■

Corollaire 5.3.2. *Supposons que les conditions A, B et C sont satisfaites. Supposons de plus que la matrice $(a_{ij})_{i,j=0}^d$ est uniformement non-dégénérée. Supposons en outre que pour toute fonction bornée infiniement difféerentiable $H(x_1,\, x_2)$, l'équation*

$$
\begin{cases}
\frac{\partial v}{\partial t}(t,\, x_1,\, x_2)+\overline{L}(x_1,\, x_2)v(t,x_1,\, x_2)+\overline{f}(x_1,\, x_2,\, v(t,\, x_1,\, x_2))=0\\
v(0,x_1,\, x_2)=H(x_1,\, x_2)
\end{cases}
$$

admet une solution unique bornée $v(t,\, x_1,\, x_2) \in W^{1,2}_{d+1,\,loc}$*. Alors, la solution bornée* $v^\varepsilon(t,\, x_1,\, x_2) \in W^{1,2}_{d+1,\,loc}$ *de l'EDP (5.1) satisfait*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} v^\varepsilon(t,\, x_1,\, x_2) = v(t,\, x_1,\, x_2).$$

Preuve

C'est une conséquence immédiate de la représentation $v^\varepsilon(t,\, x) = Y_0^\varepsilon,\, v(t,\, x) = \overline{Y}_0$ et du Corollaire 5.3.1.■

5.3.2 Appendice : S-topologie

La S-topologie a été introduite par Jakubowski ([34]). C'est une topologie définie sur l'espace de Skorohod des fonctions càdlàg : $\mathcal{D}([0,\, T];\, \mathbb{R})$. Cette topologie est plus fine que la topologie de skorohod mais présente des critères de tension plus facile à établir. Ces critères sont les meêmes que ceux de la topologie de de Meyer-Zheng ([39]).

Soit $N^{a,\,b}(z)$, le nombre de " up-crossing" de la fonction $z \in \mathcal{D}([0,\, T];\, \mathbb{R})$ dans un niveau $a < b$ donné. Rappelons quelques résultats sur la S-topologie.

Proposition 5.3.1. *(critère de S-tension). Une suite* $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *est S-tendue si et seulement si elle est relativement compacte dans la S-topologie.*
Soit $((Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une famille de processus stochastiques dans* $\mathcal{D}([0,\, T];\, \mathbb{R})$*. Alors cette famille est tendue pour la S-topologie si et seulement si* $(\|Y^\varepsilon)_\varepsilon\|_\infty)_{\varepsilon>0}$ *et* $(N^{a,\,b}(Y^\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ *sont tendus pour chaque* $a < b$.

Si $(Y,\, \mathbb{P},\, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ est un processus dans $\mathcal{D}([0,\, T];\, \mathbb{R})$ tel que Y_t soit intégrable pour tout t, la variation conditionnelle de Y est définie par

$$CV(Y) = \sup_{0\leq t_1<\ldots<t_n=T,\, partition\, de\, [0,\, T]} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[|\mathbb{E}[Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i}]|].$$

Le processus est dit *quasimartingale* si $CV(Y) < +\infty$. Si Y est une $\mathcal{F}_t$-martingale, $CV(Y) = 0$. Une variation de l'inégalité de Doob (cf. Lemme 3, p.359 dans Meyer et Zheng, 1984, où $Y_T = 0$) implique que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,\,T]} |Y_t| \geq k\right] \leq \frac{2}{k}\left(CV(Y) + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,\,T]} |Y_t|\right]\right),$$

$$\mathbb{E}\left[N^{a,\,b}(Y)\right] \leq \frac{1}{b-a}\left(|a| + CV(Y) + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,\,T]} |Y_t|\right]\right).$$

Il s'en suit que la suite $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est tendue si

$$\sup_{\varepsilon>0}\left(CV(Y) + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,\,T]} |Y_t|\right]\right) < +\infty.$$

Théorème 5.3.2. *Soit* $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une famille tendue de processus stochastiques dans* $\mathcal{D}([0,\,T];\,I\!R)$. *Alors, il existe une suite* $(\varepsilon_k)_{k\in I\!N}$ *decroissante vers zéro, un processus* $Y\in\mathcal{D}([0,\,T];\,I\!R)$ *et un sous-ensemble dénombrable* $D\in[0,\,T]$ *tels que pour tout* n *et tout* $(t_1,\,...,\,t_n)\in[0,\,T]\backslash D$,

$$(Y_{t_1}^{\varepsilon_k},\,...,\,Y_{t_n}^{\varepsilon_k})\overset{\mathcal{D}ist}{\longrightarrow}(Y_{t_1},\,...,\,Y_{t_n})$$

Remarque 5.3.1. *La projection* $:\pi_T\ y\in(\mathcal{D}([0,\,T];\,I\!R),\,S)\mapsto y(T)$ *est continue (voir Remark 2.4, p.8 in jakubowski,1997), mais* $y\mapsto y(t)$ *n'est pas continu pour chaque* $0\leq t\leq T$.

Lemme 5.3.2. *Soit* $(X^\varepsilon,\,M^\varepsilon)$ *un processus multidimensionnel de* $\mathcal{D}([0,\,T];\,I\!R^p)$ $(p\in I\!N^*)$ *convergeant vers* $(Y,\,M)$ *dans la S-topologie. Soit* $(\mathcal{F}_t^{X^\varepsilon})_{t\geq0}$ *(resp.* $(\mathcal{F}_t^{X})_{t\geq0}$*) la plus petite filtration admissible complète pour* X^ε *(resp.*X*). Supposons que* $\sup_{\varepsilon>0}I\!E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|M_t^\varepsilon|^2\right]<C_T\ \forall T>0$, M^ε *est une* $\mathcal{F}^{X^\varepsilon}$*-martingale et* M *est* $\mathcal{F}^X$*-adapté. Alors* M *est une* $\mathcal{F}^X$*-martingale.*

Lemme 5.3.3. *Soit* $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une suite de processus convergeant faiblement dans* $\mathcal{D}([0,\,T];\,I\!R^p)$ *vers* Y. *Supposons que* $\sup_{\varepsilon>0}I\!E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^\varepsilon|^2\right]<+\infty$. *Ainsi, pour tout* $t\geq0$, $E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right]<+\infty$.

Conclusion

Les résultats de nos travaux nous ont permi de donner des réponses positives aux questions *1*, *2* et *3*. Cependant, nous annonçons ici des travaux en cours qui généralisent les résultats présentés dans cette thèse.
1) Localisation des conditions de type stochastique : par exemple supposer l'existence de processus $r(t)$ et $u(t)$ tels que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $(y,\, z,\, y',\, z')$ tels que $|y|,\, |y'|, |, \|z\|,\, \|z'\| \leq N$, on ait

$$|f(t,\, y,\, z) - f(t,\, y',\, z')| \leq r_N(t)|y - y'| + u_N(t)|z - z'|.$$

2) Homogénéisation dans le cas òu le terme nonlinéaire dépend du gradiant de la solution

$$\begin{cases} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}(t,\, x_1,\, x_2) + \mathcal{L}^\varepsilon(x_1,\, x_2)v^\varepsilon(t, x_1,\, x_2) + f(x_1,\, x_2,\, v^\varepsilon(t,\, x_1,\, x_2),\, \nabla_x v^\varepsilon(t,\, x_1,\, x_2)) = 0 \\ \\ v^\varepsilon(0, x_1,\, x_2) = H(x_1,\, x_2), \end{cases}$$

Bibliographie

[1] K. Bahlali, E. Pardoux (2001) Backward stochastic differential equations with locally monotone coefficient.*Preprint.*

[2] K. Bahlali, A. Elouaflin, M. N'ZI (2004) Backward stochastic differential equations with stochastic monotone coefficients. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 4, 317-335.*

[3] K. Bahlali, Essaky E. H, Ouknine Y.(2002) Reflected backward stochastic equation with jumps and locally Lipschitz coefficient. *to appear in Random Operator ans Stochastic Equation.*

[4] Bensoussan, A, J.L. Lions, G. Papanicolaou (1978) Asymptotic Analysis for periodic structures. *North-holland, Amsterdam* .

[5] Bismut J. M. (1973) Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *J. Math. Anal. App.*, 44, 384-404.

[6] Bismut J M,(1978) An introductory approach to duality in stochastic control. *J Math. SIAM Rev*, 20, 62-78.

[7] Barlow M. T., Protter P. (1989) On the convergence of semimartingales. *séminaire de probabilités XXIV. Lect. Notes Math.*, 188-193.

[8] Bender, Kholmann M. (2000) BSDE wuth stochastic Lipschitz condition. *preprint.*

[9] H. Brezis (1973) Opérateurs maximaux monotones. *Mathematics Studies.* Noth-Holland.

[10] Ph. Briand, R. Carmona (2000) BSDEs with polynomial growth generators. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 13, no. 3, 207-238.

[11] Ph. Briand, Y. HU (1998) Stability of BSDEs with random terminal time and homogenization of semilinear elliptic PDEs. *J. Funct. Anal.*, 155, 455-494.

[12] R. Buckdahn, Y. Hu, S. Peng Probability approach to homogenization of viscosity solutions of parabolic PDESs. *preprint.*

[13] Cépa, E.(1996). Equations differentièlles stochastiques multivoques.*Lecture Notes Math., 1613, 86-107.*

[14] M. Crandall, H. Ichii, P. L. Lions (1992) User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. soc.*, , 27 , 1-67.

[15] J. Cvitanić and I. Karatzas (1996) Backward stochastic differential equations with reflection and Dynkin games. *Annals Probab*, 24(4), 2024-2056.

[16] Cvitanic J and Ma J (1996) Hedging option for a large investor andForward-Backward SDE's. *The Annals of Applied Probability*, 6, 370-398.

[17] Cvitanic J and Ma J, Forward-backward stochastic equations with reflecting boundary conditions, *Preprint.*

[18] Dellacherie C and Meyer P A (1975) Probabilités et Potentiel. *I-IV. Hermann, Paris.*

[19] R. Darling, E. Pardoux (1997) Backward SDE with random terminal time and application to semilinear PDE. *Annals of Probab.*, 25 (4), 1135-1159.

[20] F. Delarue (2002) Equations différentielles stochastiques progressives-retrogrades. Application à l'homogénéisation des EDP quasi-linéaires. *Thèse de doctorat, Univeristé de provence AIX MARSEILLE I*

[21] El Karoui, Peng S and Quenez M C, (1997) Backward stochastic differential equation in finance. *Mathematical finance*, 7, 1-71.

[22] N. El Karoui, and S.J Huang (1997) A general result of existence and uniqueness of backward stochastic differential equations, in *Backward Stochastic Differential Equations. Editors N. El Karoui and L. Mazliak. Pitman Research Notes in Mathematics Series* , vol.364, 27-36. *Longman.*

[23] N. El Karoui, S. Peng, M. Quenez (1997) Backward stochastic differential equations in finance. *Finance* , f 7(1) , 1-71.

[24] N.El Karoui, C.Kapoudjian, E.Pardoux, S.Peng, M.C.Quenez (1997) Reflected solutions of backward SDE's and related obstacle problems for PDE's. *Annals Probab.* 25(2), 702-737.

[25] Essaky E H, Modeste N'zi and Ouknine Y (2004) Reflected BSDE's and viscosity solution of multivalued PDE's with nonlinear Neumann boundary condition, submitted.

[26] Gegout-Petit A and Pardoux E, (1996) Equations differentielle stochastiques retrogrades refléchies dans un convexe. *Stochastic and Stochastic Rep*, 57, 111-128.

[27] S. Hamadène, J.P. Lepeltier (1995) Backward equations, stochastic control and zero-sum stochastic differential games. *Stoch. Stoch. Reports* , 54 , 221-231.

[28] S. Hamadène, J.P. Lepeltier and A. Matoussi (1997) Double barriers reflected backward sde's with continuous cefficients. In *Backward Stochastic Differential Equations. Editors N. El Karoui and L. Mazliak. Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 364. Longman.*

[29] S. Hamadène, J.P. Lepeltier and Z. Wu (1999) Infinite horizon reflected backward stochastic differential equations and applications in mixed control and game problems. *Probab. Math. Statist.* 19, 211-234.

[30] Hamadene S and Lepeltier J P (1997) Zero-sum stochastic games and BSDEs. *Systems and control Letters*, 24, 259-263.

[31] Hamadène S and Lepeltier J P (2000) Reflected BSDes and mixed game problem, *Stochastic processes and their application applications*, 85, 177-188.

[32] Hamadene S, Lepeltier J P and Matoussi A, Double barrier reflected backward stochastic equation with continuous coefficient, Backward SDE's. *Pitman Research Notes in Mathematic Series.*

[33] Hamadene S, Ouknine Y (2003) Reflected Backward Stochastic Differential Equations with jumps and random obstacle. *EJP,* , Vol. 8 *paper no 2, 1-20.*

[34] Jakubowski, A. (1997) A non-Skorohod topology on the skorohod space. *Electron. J. Probab.* 2 , paper no. 4, pp.1-21.

[35] Khasminskii, R, Krylov, N. (2001) On averaging principle for diffusion processes with null-recerrent fast component. *Stochastic Processes and their applications*, 93, 229-240.

[36] M. Kobylanski (1997) Résultats d'existence et d'unicité pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec des générateurs à croissance quadratique. (French) [Existence and uniqueness results for backward stochastic differential equations when the generator has quadratic growth] *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math* 324 (1) : 81-86.

[37] Lejay, A. (2002) BSDE driven by dirichlet process and semi-linear parabolic PDE. Aplpplication to homogenization. *Stochastic Processes and their Applications* 97, 1-39.

[38] Lions P L and Szinitmann A S (1984) Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 37, 511-537.

[39] Meyer, P. A., Zheng, W. A. (1984) Tightness criteria for laws of semimartingales. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 20, (4), 217-248.

[40] M. N'zi ,Y.Ouknine (1997) Equations différentielles stochastiques rétrogrades multivoques. *Probability and Mathematical Statistics* , vol.17, *Fasc.2*, pp 259-275.

[41] Ouknine Y (1999) Reflected BSDE with jumps *Stochastic and Stochastic reports*, 65, 111-125.

[42] E. Pardoux, S. Peng (1990) Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *systems and control Letters*, 14, 55-61.

[43] E. Pardoux (1998) Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order in L. Decreuseufond, J. Gjerde, B. Oksendal and A.S Ustunel, Editors, *Stochastic analysis and related topics. The Geilo worksop, 1996. Birkhaüsser.*

[44] E. Pardoux (1999) BSDEs, weak convergence and homogenization of semilinear PDEs in *F. H Clarke and R. J. Stern (eds.), Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control,* 503-549. *Kluwer Academic Publishers.*

[45] E. Pardoux, S. Peng (1992) Backwrad SDE and quasilinear parabolic PDEs, in " *Stochastic partial differential equations and their applications " , B.L. Rosovskii and R. Sowers eds LNCIS* , 176, 200-217. *Springer, New York.*

[46] E. Pardoux and A. Rascanu (1998) Backward stochastic differential equations with subdifferential operator and related variational inequalities. *Stoch. Proc. Appl.*, 76, 191-215.

[47] E. Pardoux and A. Racanu (1999) backward stochastic variational inequalities. *stochastics*, 67, 159-167.

[48] Pardoux E, Peng S, Some backward SDEs with non-Lipschitz coefficients. *Proc. conf. Metz.* To appear.

[49] Pardoux E, Zhang S. (1998) Generalized BSDEs and nonlinear Neumann boundary value problems. *Proba. Theory and Rel. Fields*, 110, 535-558.

[50] Pardoux, E. (1999) Homogenization of linear and semilinear second order parabolic PDEs with periodic coefficients : A probabilist approach. *Journal of Functional Analysis* 167, 498-520.

[51] Pardoux, E, Veretennikov, A.Y. (1999) Averaging of backward SDEs with application to semi-linear PDEs. *Stochastic and Stochastic REp.*. 60, 255-270.

[52] Y. Saisho (1987) Stochastic differential equations for multidimensional domains with reflecting boundary. *Probab. Theory Rel. Fields*, 74, 455-477.

[53] Z. Zheng, D. Talay (2001) Reflected BSDEs with random terminal time and applications part I : Existence and uniqueness. Université de provence Aix marseille. *preprint.*