

es-06802



N° d'ordre : 211/94

THÈSE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

par

Kinvi KANGNI

**TRANSFORMATION DE FOURIER
ET REPRESENTATION UNITAIRE
SPHERIQUES DE TYPE δ**

Soutenue le 17 novembre 1994 devant la Commission d'examen :

COMPOSITION DE JURY

Président :	DAOUDA SANGARE	Professeur à l'Université d'Abidjan
Examineurs	SALIOU TOURE	Professeur à l'Université d'Abidjan
	KOULIBALY AKRY	Professeur à l'Université de Ouaga
	PIERRE NEZIT	Professeur à l'Université d'Abidjan
	ETIENNE DESQUITH	Maitre de Conférences à l'Université d'Abidjan

SOMMAIRE

	Pages
INTRODUCTION :.....	2
CHAPITRE I Préliminaires :.....	5
§ I-I Notations- Rappels :.....	5
§ I-II Représentation induite :.....	9
§ I-III Fonction trace sphérique de type δ :.....	13
CHAPITRE II Transformation de Fourier sphérique de type δ :.....	20
§ II-I Fonction sphérique de type δ :.....	20
§ II-II Transformation de Fourier sphérique de type δ :.....	25
§ II-III Applications aux groupes produits semi-directs :.....	37
CHAPITRE III Représentation unitaire irréductible sphérique de type δ :.....	43
§ III-I Construction d'une représentation unitaire induite des produits semi-directs :.....	43
§ III-II Applications au groupe de Poincaré et au groupe des déplacements du plan euclidien :.....	51
§ III-III Représentation unitaire irréductible sphérique de type δ :.....	55
BIBLIOGRAPHIE :.....	65

INTRODUCTION

Plusieurs auteurs ont étudié la transformation de Fourier sphérique, les représentations induites sur les groupes produits semi-directs relativement à un homomorphisme particulier et les représentations unitaires sphériques des groupes localement compacts. On peut citer par exemple A. O. Barut [1], J. Dieudonné [5], J. Faraut [7], G. W. Mackey [9] et [10], G. Warner [18] et A. Wawrzynczyk [20].

Le présent travail a pour objet de trouver une généralisation de ces différentes théories suivant une classe δ de représentations unitaires irréductibles d'un groupe compact.

Dans le chapitre I, nous rappelons certains résultats connus sur les fonctions zonales sphériques, les représentations induites et les fonctions traces sphériques de type δ .

Dans le chapitre II, nous identifions l'ensemble $X_m(\mathcal{K}_\delta^{\natural}(G))$ des représentations irréductibles de dimension finie m de l'algèbre de convolution $\mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$ et l'ensemble $S_\delta^m(G)$ des fonctions sphériques de type δ et de hauteur m ; ce qui nous permettra de définir la transformation de Fourier sphérique de type δ comme la transformation de Gelfand généralisée associée à l'algèbre non commutative $\mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$. Si la classe des représentations unitaires irréductibles δ du sous-groupe compact K de G est triviale, on retrouve la transformation de Fourier sphérique usuelle.

Le paragraphe II-III est consacré à l'application au groupe produit semi-direct $G = A \times_{\alpha} K$ où α est l'homomorphisme correspondant.

Le chapitre III traite essentiellement de la construction d'une représentation induite, d'une représentation de 1-cocycle à gauche du groupe $G = A \times_{\alpha} K$ et de leurs applications ; on y étudie aussi les représentations unitaires sphériques de type δ , généralisant ainsi les représentations unitaires sphériques.

Dans le paragraphe III-III, nous prouvons que toute représentation unitaire irréductible admettant un vecteur K - δ -invariant non nul est sphérique de type δ . Cette démonstration a été faite par A. Wawrzynczyk [20] dans le cas particulier où δ est triviale et de dimension 1.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma très profonde gratitude au Professeur Saliou TOURE, mon Directeur de Thèse, de m'avoir initié à l'analyse harmonique. Sa disponibilité et son aide, malgré un emploi du temps très chargé, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je suis très reconnaissant au Professeur Daouda SANGARE qui a accepté de présider le jury.

Je remercie vivement les Professeurs Akry KOULIBALY et Pierre NEZIT d'avoir accepté de faire partie du jury ainsi que le Maître de conférences Etienne DESQUITH, de s'être intéressé à ce travail et d'avoir accepté de se joindre au jury.

Mes remerciements vont également à mes amis Philippe AYEGNON et Ibrahim FOFANA pour leurs conseils et suggestions, à ma mère, mes frères et sœurs pour leur soutien moral et à tous ceux qui, de près ou de loin m'ont aidé dans l'accomplissement de cette tâche.

Enfin, je n'oublie pas ma toute dévouée Léa, mon épouse, pour son assistance à tout instant.

Monsieur N'Cho ADOU a bien voulu assurer la frappe du manuscrit, je lui exprime ici toute ma gratitude.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons les résultats et les définitions qui seront fréquemment utilisés dans la suite de ce travail.

§ I-I) NOTATIONS - RAPPELS

1) Intégration

Soient G un groupe topologique localement compact et K un compact de G . On note $\mathcal{K}(G, K)$ l'espace des fonctions complexes continues sur G à support contenu dans K . $\mathcal{K}(G, K)$, muni de la topologie de la convergence uniforme, est un espace de Banach.

$$\text{Posons : } \mathcal{K}(G) = \bigcup_{K \subset G} \mathcal{K}(G, K).$$

Si μ est une mesure de Radon sur G , la valeur de μ au point $f \in \mathcal{K}(G)$ et le support de μ sont respectivement notés $\mu(f)$ ou $\int_G f(x) d\mu(x)$ et $\text{supp}(\mu)$.

$M(G)$ désignera l'espace vectoriel des mesures de Radon sur G , $M^1(G)$ le sous-espace vectoriel formé des mesures bornées sur G et si K est un sous-groupe compact de G alors $\mathcal{K}^*(G)$ est l'espace des fonctions $f \in \mathcal{K}(G)$ qui sont biinvariantes par K (i.e. $f(k_1 x k_2) = f(x) \quad \forall k_1, k_2 \in K \text{ et } x \in G$).

Soit $\mu \in M(G)$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Banach $L^p(G, \mu) = L^p(G)$ ont la signification habituelle et leurs normes sont définies comme on sait par:

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{\infty} = \text{ess. sup}_{x \in G} |f(x)| \quad \text{si } p = \infty$$

Pour toute fonction complexe f définie sur G , on pose

$$\check{f}(x) = f(x^{-1}) ; \quad \tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

$${}_s f(x) = f(s^{-1}x) \quad \text{et} \quad f_s(x) = f(xs) \quad \text{quels que soient } s, x \in G.$$

Soit μ une mesure de Haar à gauche sur G . Cette mesure que nous noterons souvent dx , est unique à un facteur constant près.

La mesure de Dirac au point $a \in G$ est notée ε_a .

Le module de G , noté Δ_G est défini par la formule :

$$\int_G f(xs^{-1}) d\mu(x) = \Delta_G(s) \int_G f(x) d\mu(x)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$.

Si une mesure μ et une fonction f sur G sont convolables, on définit la convolée de μ et de f en posant

$$\mu * f(x) = \int_G f(y^{-1}x) d\mu(y)$$

$$f * \mu(x) = \int_G f(xy^{-1}) \Delta_G(y^{-1}) d\mu(y)$$

Si $\mu \in M^1(G)$ et si $f \in L^p(G)$ $1 \leq p \leq \infty$ alors

$$\mu * L^p(G) \subset L^p(G). \quad \text{En particulier, on a : } f * \varepsilon_a(x) = f(xa^{-1}) \Delta_G(a^{-1}).$$

Le groupe G est dit unimodulaire si $\Delta_G(s) = 1$ pour tout $s \in G$.

Soit H un sous-groupe fermé de G et G/H l'ensemble des classes à gauche

$\dot{x} = xH$. Muni de la topologie quotient, G/H est un espace topologique localement compact et G opère continûment et transitivement à gauche dans G/H par l'application $(g, \dot{x}) \longmapsto g\dot{x} = (gx)H$ où $g \in G$, $\dot{x} \in G/H$.

L'espace G/H , muni de cette opération est appelé espace homogène des classes à gauche modulo H (l'espace homogène des classes à droite modulo H sera noté $H\backslash G$).

Définition I-I-1 : Une mesure positive λ sur G/H est dite quasi-invariante si pour tout $g \in G$; la mesure $g\lambda$ est équivalente à λ .

Remarque I-I-2 : Pour qu'il existe sur G/H une mesure positive non nulle invariante par G , il faut et il suffit que : $\Delta_G(h) = \Delta_H(h) \quad \forall h \in H$.

Soit E un espace vectoriel complexe.

Une fonction ω de $G \times G/H$ à valeurs dans $\text{Aut } E$ est un 1-cocycle à gauche, si ω vérifie les relations suivantes :

- 1) $\omega(e, \dot{x}) = 1_E$
- 2) $\omega(st, \dot{x}) = \omega(s, t\dot{x}) \omega(t, \dot{x}) \quad \forall s, t \in G \text{ et } \dot{x} \in G/H$.

2) Transformation de Fourier sphérique

Soit A une algèbre normée involutive commutative.

On appelle spectre de A et on note $X(A)$, l'ensemble des caractères de A .

Pour tout $x \in A$, la transformée de Gelfand de x est l'application notée $\mathcal{G}x$ de $X(A)$ dans \mathbb{C} définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}x : X(A) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \chi(x) \end{aligned}$$

L'homomorphisme $x \longmapsto \mathcal{G}x$ de A dans $\mathbb{C}^{X(A)}$ est appelé la transformation de Gelfand associée à l'algèbre A .

Soient G un groupe localement compact et K un sous-groupe

compact de G tels que (G, K) soit une paire de Gelfand (i.e. l'algèbre de convolution $\mathcal{K}^{\sharp}(G)$ est commutative).

Définition I-I-3 : Une fonction sphérique (ou zonale sphérique) sur G relativement à K est une fonction φ continue sur G biinvariante par K , telle que l'application $f \mapsto \chi(f) = \int_G f(x) \varphi(x^{-1}) dx$ soit un caractère de l'algèbre de convolution $\mathcal{K}^{\sharp}(G)$.

Proposition I-I-4 : Soit φ une fonction continue sur G , biinvariante par K et non identiquement nulle. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) φ est une fonction sphérique relativement à K
- b) $\forall x, y \in G, \int_K \varphi(xky) dk = \varphi(x)\varphi(y)$ où dk désigne la mesure de Haar normalisée du sous-groupe K .
- c) $\varphi(e) = 1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{K}^{\sharp}(G)$ il existe un nombre λ_f tel que $f * \varphi = \lambda_f \varphi$. (Voir [5] Prop. 22-6-7 pour une démonstration).

Notons $S(G/K)$ l'espace des fonctions sphériques bornées sur G relativement au sous groupe compact K . On montre que si $\varphi \in S(G/K)$ l'application $f \mapsto \chi_{\varphi}(f) = \int_G f(x) \varphi(x^{-1}) dx$ est un caractère de $\mathcal{K}^{\sharp}(G)$ et tout caractère de $\mathcal{K}^{\sharp}(G)$ est de cette forme (cf. [7] ch. IV), par conséquent $S(G/K)$ peut s'identifier à $X(\mathcal{K}^{\sharp}(G))$. Ainsi on a :

$$\begin{array}{ccc}
 X(\mathcal{K}^{\sharp}(G)) & \xrightarrow{\mathcal{G}f} & \mathbb{C} \\
 \searrow F & & \nearrow \mathfrak{F}f \\
 & S(G/K) &
 \end{array}$$

et $\mathcal{F} f \circ F = \mathcal{G} f$.

La transformée de Guelfand d'un élément f de $\mathcal{K}^{\dagger}(G)$ peut donc être identifiée à la fonction complexe $\mathcal{F} f$ définie sur $S(G/K)$ par $\mathcal{F} f(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})dx$.

$\mathcal{F} f$ est appelée la transformée de Fourier sphérique de la fonction f et l'application $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F} f$ de $\mathcal{K}^{\dagger}(G)$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(S(G/K))$ est appelée la transformation de Fourier sphérique. C'est encore la transformation de Guelfand associée à l'algèbre commutative $\mathcal{K}^{\dagger}(G)$.

§ I-II) REPRESENTATION INDUITE

Définition I-II-1 : Soient G un groupe topologique et E un espace de Banach complexe. On appelle représentation continue de G dans E , un morphisme $g \mapsto U_g$ de G dans le groupe $GL(E)$ des automorphismes de E tel que l'application $g \mapsto U_g v$ de G dans E soit continue pour tout $v \in E$.

La dimension de E s'appelle dimension (ou degré) de U et se note $\dim U$. Une représentation U est dite triviale si U_g est l'application identique 1_E pour tout $g \in G$.

Nous renvoyons à A.O. BARUT [1], à F. I. MAUTNER [11] et à S. TOURE [16] pour une étude détaillée des représentations des groupes.

La notion de représentation induite, due à G. MACKEY, permet de construire les représentations d'un groupe à partir de celles de certains de ses sous-groupes. (A. WEIL a développé le cas des groupes compacts et G. FROBENIUS celui des groupes finis).

Dans ce paragraphe, nous donnons une méthode de construction d'une représentation unitaire induite d'un groupe localement compact et séparable G

Soit K un sous-groupe fermé de G , L une représentation unitaire de K dans un espace de Hilbert \mathfrak{H} et μ une mesure quasi-invariante sur l'espace homogène $X = K \backslash G = \{Kg, g \in G\}$. Considérons l'ensemble \mathfrak{H}^L de toutes les fonctions u sur G à valeurs dans \mathfrak{H} et vérifiant les conditions suivantes :

a) L'application $g \longmapsto (u(g), v)$ est mesurable ($\forall v \in \mathfrak{H}$).

b) $u(kg) = L_k u(g) \quad \forall k \in K, g \in G$.

c) $\int_X \|u(g)\|^2 d\mu(\dot{g}) < \infty$; $\dot{g} = Kg$ et $\|\cdot\|$ est la norme de l'espace de Hilbert \mathfrak{H} .

On montre (cf. [10]) que l'espace \mathfrak{H}^L est isomorphe à l'espace $L^2(X, \mu, \mathfrak{H})$ des fonctions de carré μ -intégrable sur X à valeurs dans \mathfrak{H} et que cet isomorphisme est donné par la formule : $u(g) = L_{k_g} \tilde{u}(\dot{g})$ où k_g est le facteur de g dans la décomposition de Mackey ($g = k_g s_g$).

On rappelle que la forme hermitienne définie positive sur \mathfrak{H}^L est donnée par la formule : $(u_1, u_2)_{\mathfrak{H}^L} = \int_X (u_1(g), u_2(g))_{\mathfrak{H}} d\mu(\dot{g})$

Proposition I-II-2 : L'application $g_0 \longmapsto U_{g_0}^L$ définie par

$$U_{g_0}^L u(g) = [\rho_{g_0}(g)]^{1/2} u(gg_0) \quad \text{où} \quad \rho_{g_0}(g) = \frac{d\mu(\dot{g}g_0)}{d\mu(\dot{g})} \quad \text{est la dérivée}$$

de Radon-Nikodym de la mesure quasi-invariante μ de X , est une représentation unitaire de G dans \mathfrak{H}^L . (cf. [1] ch. 16 lemme 2).

C'est la représentation de G induite par L . On la note $\text{Ind}_{K \uparrow G}(L)$.

\cup^L est appelée représentation monomiale si L est de dimension 1.

La proposition suivante permet de justifier l'existence des fonctions non identiquement nulles et vérifiant les conditions a) b) et c).

Proposition I-II-3 : Soit w une fonction continue de G dans \mathfrak{K} et à support compact. La fonction \hat{w} définie par :

$$\hat{w}(g) = \int_K L_k^{-1} w(kg) dk \quad \text{où } dk$$

est la mesure de Haar sur K , est une fonction continue sur G et appartenant à \mathfrak{K}^L .

Preuve : La fonction w étant continue sur G et à support compact D , est donc uniformément continue ie pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact V de e (e élément neutre de G) tel que si $g_1^{-1}g_2 \in V$ alors $\|w(g_1) - w(g_2)\| \leq \varepsilon$.

Soient $g_0 \in G$ et $g \in g_0 V$.

$$\begin{aligned} \|\hat{w}(g) - \hat{w}(g_0)\| &= \left\| \int_K (L_k^{-1} w(kg) - L_k^{-1} w(kg_0)) dk \right\| \\ &= \left\| \int_{K \cap DV^{-1}g_0^{-1}} L_k^{-1} (w(kg) - w(kg_0)) dk \right\| \\ &\leq \int_{K \cap DV^{-1}g_0^{-1}} \|w(kg) - w(kg_0)\| dk \\ &\leq \varepsilon \text{mes}(K \cap DV^{-1}g_0^{-1}) \end{aligned}$$

et \hat{w} est continue sur G . D'autre part, pour tout élément k_0 de K on a

$$\hat{w}(k_0 g) = \int_K L_k^{-1} w(kk_0 g) dk = \int_K L_{k k_0}^{-1} w(k'g) dk' = L_{k_0} \hat{w}(g)$$

et si $g \notin KD$, $\hat{w}(g) = 0$ par conséquent $\hat{w} \in \mathfrak{H}^L$.

C.Q.F.D.

Considérons une application $g \longmapsto B_g$ de G dans l'ensemble des opérateurs unitaires de \mathfrak{H} et qui vérifie les conditions suivantes :

- 1) $B_{kg} = L_k B_g \quad \forall k \in K, g \in G.$
- 2) L'application $g \longmapsto B_g$ est faiblement mesurable.

Soit s_g l'unique élément de G tel que $Kg = K k_g s_g = K s_g$ et $k_{s_g g_0}$ le facteur de la décomposition de Mackey de $s_g g_0$.

La proposition suivante permet de définir directement la représentation

$g \rightarrow U_g^L$ sur l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu, \mathfrak{H})$.

Proposition I-II-4 : Soit K un sous-groupe fermé de G et L une représentation unitaire de K dans \mathfrak{H} . L'application $g_0 \rightarrow \tilde{U}_{g_0}^L$ définie par :

$\tilde{U}_{g_0}^L \tilde{u}(\dot{g}) = \rho_{g_0}^{1/2}(g) B_g^{-1} B_{g g_0} \tilde{u}(\dot{g} g_0)$ est une représentation de G dans $L^2(X, \mu, \mathfrak{H})$.

Si $B_g = L_{k_g}$ et $\dot{g} = x$ alors $\tilde{U}_{g_0}^L \tilde{u}(x) = \left[\frac{d\mu(xg_0)}{d\mu(x)} \right]^{1/2} L_{k_{s_g g_0}} \tilde{u}(xg_0)$.

cf [1] ch. 16 prop. 5 pour une démonstration.

Remarque I-II-5 : Considérons l'espace $\hat{X} = G/K$ des classes à gauche suivant K . L'espace $\hat{\mathfrak{H}}^L$ de la représentation \hat{U}^L est tel que :

$u(gk) = L_k^{-1} u(g) \quad \forall u \in \hat{\mathfrak{H}}^L$ et $\hat{U}_{g_0}^L u(g) = \hat{\rho}_{g_0}^{1/2}(g) u(g_0^{-1} g)$ où

$\hat{\rho}_{g_0}(g) = \frac{d\mu(g_0^{-1} \dot{g})}{d\mu(\dot{g})}$ et l'action de $\hat{U}_{g_0}^L$ sur $L^2(\hat{X}, \mu, \mathfrak{K})$ est donnée par la formule : $\hat{U}_{g_0}^L u(\dot{g}) = \rho_{g_0}^{1/2}(g) \hat{B}_g^{-1} \hat{B}_{g_0^{-1}g} u(g_0^{-1} \dot{g})$ ou encore

$$\hat{U}_{g_0}^L u(x) = \left(\frac{d\mu(g_0^{-1}x)}{d\mu(x)} \right)^{1/2} L_{kg_0^{-1}sg}^{-1} u(g_0^{-1}x)$$
 où $g \longrightarrow \hat{B}_g$ est tel que $\hat{B}_{kg} = L_{k^{-1}} \hat{B}_g$ et $g \longrightarrow \hat{B}_g$ est faiblement mesurable.

Soit T un opérateur linéaire continu sur \mathfrak{K} .

Définition I-II-6 : L'opérateur T est dite traçable si pour toute base hilbertienne (e_j) de \mathfrak{K} , la série numérique $\sum (Te_j, e_j)$ est absolument convergente et sa somme est indépendante du choix de la base (e_j) . Le nombre $\sum (Te_j, e_j)$ est appelé trace de T et est noté $\text{Tr}(T)$.

Nous allons rappeler un théorème fondamental pour la construction du caractère des représentations induites en dimension quelconque.

Théorème I-II-7 : Soit $\mathfrak{K} = L^2(X, \mu)$ et T un opérateur traçable défini par le noyau continu $h : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors la fonction $x \longmapsto h(x, x)$ est intégrable et $\text{Tr}(T) = \int_X h(x, x) dx$. (cf. [7] ch.IV).

§ I-III FONCTION TRACE SPHÉRIQUE DE TYPE δ

Soient G un groupe localement compact unimodulaire, K un sous-groupe compact de G , \hat{K} l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de K .

Pour toute classe δ de \hat{K} , notons ξ_δ le caractère de δ , $d(\delta)$ le degré de δ et $\mathfrak{x}_\delta = d(\delta) \xi_\delta$. Si $\overset{\vee}{\delta}$ est la classe des représentations contragrédientes

de δ dans \hat{K} , on a $\bar{\chi}_\delta = \chi_\delta^\vee$ et on vérifie aisément grâce à la relation d'orthogonalité de Schur (cf. [12] §4 Th 2-2). que : $\chi_\delta^\vee * \chi_\delta^\vee = \chi_\delta^\vee$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$, on pose :

$$\delta f(x) = \bar{\chi}_\delta * f(x) = \int_K \chi_\delta(k) f(kx) dk$$

$$f_\delta(x) = f * \chi_\delta(x) = \int_K \chi_\delta(k^{-1}) f(xk) dk$$

(où dk est la mesure de Haar normalisée sur K).

et $\mathcal{K}_\delta(G) = \{f \in \mathcal{K}(G) , f = \delta f = f_\delta\}$.

On montre que $\mathcal{K}_\delta(G)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{K}(G)$ et que l'application $f \mapsto \bar{\chi}_\delta * f * \bar{\chi}_\delta$ est une projection de $\mathcal{K}(G)$ sur $\mathcal{K}_\delta(G)$.

Soit U une représentation de Banach de G sur E , on pose $P(\delta) = U(\bar{\chi}_\delta)$ et $E(\delta) = P(\delta) E$.

Si $g = \bar{\chi}_\delta * f * \bar{\chi}_\delta$ on a $P(\delta) U(f) P(\delta) = U(g) \quad \forall f \in \mathcal{K}(G)$, ainsi $E(\delta)$ est stable pour $U(f)$ ($f \in \mathcal{K}_\delta(G)$) et en notant $U_\delta(f)$ la restriction de $U(f)$ à $E(\delta)$, on obtient une représentation $f \mapsto U_\delta(f)$ de $\mathcal{K}_\delta(G)$ sur $E(\delta)$.

Soit $\mathcal{J}_c(G)$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{K}(G)$ qui sont centrales par K (i.e. $f(kx) = f(xk) \quad \forall k \in K$ et $x \in G$).

$\mathcal{J}_c(G)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{K}(G)$ et l'application $f \mapsto f_K$, avec $f_K(x) = \int_K f(kxk^{-1}) dk$, est une projection de $\mathcal{K}(G)$ sur $\mathcal{J}_c(G)$.

Pour deux éléments $f, g \in \mathcal{K}(G)$, on a les propriétés suivantes :

$$(f_K * g)_K = f_K * g_K = (f * g)_K$$

et $(\bar{\alpha}_\delta * f)_K = \bar{\alpha}_\delta * f_K, (f * \bar{\alpha}_\delta)_K = f_K * \bar{\alpha}_\delta.$

Posons $\mathfrak{K}_\delta(G) \cap \mathfrak{A}_c(G) = \mathfrak{K}_\delta^\sharp(G).$

$\mathfrak{K}_\delta^\sharp(G)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{K}(G)$ et l'application $f \mapsto \bar{\alpha}_\delta * f_K$ est une projection de $\mathfrak{K}(G)$ sur $\mathfrak{K}_\delta^\sharp(G)$. (Cette algèbre non commutative $\mathfrak{K}_\delta^\sharp(G)$ a été définie par G. Warner dans [18]).

Remarque I-III-1 : Si δ est une classe de représentations triviales de dimension 1 de K , tout élément de $\mathfrak{K}_\delta^\sharp(G)$ est biinvariante par K . L'algèbre $\mathfrak{K}_\delta^\sharp(G)$ s'identifie donc à l'algèbre $\mathfrak{K}^\sharp(G)$.

Proposition I-III-2 : Soit K un sous-groupe compact de G et U une représentation de Banach topologiquement irréductible de G sur E . Alors l'ensemble des opérateurs $U_\delta(f), f \in \mathfrak{K}_\delta^\sharp(G)$ est le centralisateur de la représentation $k \mapsto U_\delta(k)$ de K sur $E(\delta)$.
cf. [18] Prop. 4.5.1.7 pour une démonstration.

Remarque I-III-3 : Si la représentation $k \mapsto U_\delta(k)$ de K sur $E(\delta)$ se décompose en m représentations irréductibles équivalentes, on montre que le centralisateur est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{M}_m(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre m . Par conséquent, d'après la proposition précédente, il existe un isomorphisme $U_\delta(f) \mapsto u_\delta(f)$ de l'algèbre $\{U_\delta(f), f \in \mathfrak{K}_\delta^\sharp(G)\}$ sur $\mathbf{M}_m(\mathbb{C})$ où $f \mapsto u_\delta(f)$ est une représentation irréductible de dimension m de $\mathfrak{K}_\delta^\sharp(G)$ avec $\text{tr}(U_\delta(f)) = d(\delta) \text{tr}(u_\delta(f)). \quad \forall f \in \mathfrak{K}_\delta^\sharp(G).$

Définition I-III-4 : Une paire de représentations $u = (u_1, u_2)$ est une représentation double de K sur un espace de Banach E si E est un K -module de Banach à gauche relativement à u_1 et un K -module de Banach à droite relativement à u_2 tel que :

$$u_1(k)(x u_2(k)) = (u_1(k)x)u_2(k) \quad \forall x \in E \text{ et } k \in K.$$

Définition I-III-5 : Soit $u = (u_1, u_2)$ une représentation double de K sur un espace de Banach de dimension finie E . Une fonction φ est dite u -sphérique si φ est une fonction continue de G sur E telle que :

$$\varphi(k_1 x k_2) = u_1(k_1) \varphi(x) u_2(k_2) \quad \forall k_1, k_2 \in K \quad x \in G.$$

Soit u_δ^\vee une représentation unitaire irréductible de K dans la classe duale δ^\vee sur un espace E_δ^\vee . Pour tout endomorphisme T de E_δ^\vee , on définit le nombre suivant $\sigma(T) = d(\delta^\vee) \text{tr}(T)$. On montre que pour tout

$$T \in F_\delta^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_\delta^\vee, E_\delta^\vee) \text{ on a : } T = \int_K u_\delta^\vee(k^{-1}) \sigma(u_\delta^\vee(k)T) dk.$$

Proposition I-III-6 : L'algèbre $\mathcal{K}_\delta^\sharp(G)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{U}_{c,\delta}(G)$ des fonctions continues à support compact ψ de G dans $F_\delta^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_\delta, E_\delta)$ et qui vérifient la relation :

$$\psi(k_1 x k_2) = u_\delta^\vee(k_1) \psi(x) u_\delta^\vee(k_2)$$

Preuve : Soit $f \in \mathcal{K}_\delta^\sharp(G)$. Posons $\psi_f^\delta(x) = \int_K u_\delta^\vee(k^{-1}) f(kx) dk$. On montre facilement que $\psi_f^\delta \in \mathcal{U}_{c,\delta}(G)$. L'application $f \mapsto \psi_f^\delta$ est injective. En effet :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{K}_\delta^*(G), \quad f(x) = \bar{\chi}_\delta * f(x) &= \int_K \chi_\delta(k) f(k^{-1}x) dk \\ &= \int_K \sigma(u_\delta(k^{-1}) f(kx)) dk = \sigma(\psi_f^\delta(x)) \end{aligned}$$

$f \mapsto \psi_f^\delta$ est surjective. En effet : Soit $\psi \in \mathcal{U}_{c,\delta}(G)$. Posons $f(x) = \sigma(\psi(x))$

$$\begin{aligned} f(kx k^{-1}) &= \sigma(\psi(kx k^{-1})) = \sigma(u_\delta(k) \psi(x) u_\delta(k^{-1})) \\ &= \sigma(\psi(x)) = f(x) \quad \text{donc} \quad f \in \mathcal{J}_c(G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \bar{\chi}_\delta * f(x) &= \int_K \bar{\chi}_\delta(k) f(k^{-1}x) dk = d(\delta) \int_K \chi_\delta(k) \text{tr}(\psi(k^{-1}x)) dk \\ &= d(\delta) \int_K \text{tr}(u_\delta(k)) \sigma(\psi(k^{-1}x)) dk \\ &= d(\delta) \int_K \text{tr}(u_\delta(k)) \sigma(u_\delta(k^{-1}) \psi(x)) dk \\ &= d(\delta) \text{tr}(\psi(x)) = f(x) \quad \text{donc} \quad f \in \mathcal{K}_\delta^*(G). \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\psi_f^\delta = \psi$ et $f \mapsto \psi_f^\delta$ est surjective. D'autre part :

$$\begin{aligned} \psi_f^\delta * \psi_g^\delta(x) &= \int_G \psi_f^\delta(xy) \psi_g^\delta(y^{-1}) d(y) \\ &= \int_G \left(\int_K u_\delta(k_1^{-1}) f(k_1xy) dk_1 \right) \left(\int_K u_\delta(k_2^{-1}) g(k_2y^{-1}) dk_2 \right) dy \\ &= \int_G \int_K \int_K u_\delta(k_1^{-1}k_2^{-1}) f(k_1xy) g(k_2y^{-1}) dk_1 dk_2 dy \\ &= \int_K \int_G \int_K u_\delta(k_1^{-1}k_2^{-1}) f(k_1xy k_2) g(y^{-1}) dk_1 dk_2 dy \\ &= \int_K \int_G u_\delta(k^{-1}) f(kxy) g(y^{-1}) dy dk = \int_K u_\delta(k^{-1}) f * g(kx) dk \\ &= \psi_{f*g}^\delta(x) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

On considère une représentation de Banach irréductible U de G sur E .

Définition I-III-7 Soit $\delta \in \hat{K}$. La fonction ψ_{δ}^U sur G définie par:

$\psi_{\delta}^U(x) = \text{tr}(P(\delta) U(x) P(\delta))$ est appelée fonction trace sphérique de type δ correspondant à la représentation U .

Si δ est contenue m fois dans la restriction de U à K alors ψ_{δ}^U est dite de hauteur m et est notée $ht \psi_{\delta}^U = (U/K : \delta)$.

Proposition I-III-8 : Soit ψ_{δ}^U une fonction trace sphérique sur G de type δ . Alors :

$$(i) \quad \psi_{\delta}^U(kx k^{-1}) = \psi_{\delta}^U(x) \quad \forall x \in G, k \in K.$$

$$(ii) \quad \chi_{\delta} * \psi_{\delta}^U(x) = \psi_{\delta}^U * \chi_{\delta}(x) = \psi_{\delta}^U(x) \quad \forall x \in G.$$

cf. [19] Prop. 6.1.1.1. pour une démonstration.

Proposition I-III-9 : Soit ψ une fonction quasi-bornée sur G . La fonction ψ est proportionnelle à une fonction trace sphérique de hauteur 1 si et seulement si

$$\psi(1) \int_K \psi(kx k^{-1}y) dk = \psi(x) \psi(y) \quad \forall x, y \in G.$$

On pourra retrouver une démonstration dans G. Warner [19] Th. 6.1.1.7

Définition I-III-10 : Une semi-norme ρ sur G est une fonction positive semi-continue inférieurement et bornée sur tout compact de G telle que:

$$\rho(xy) \leq \rho(x) \rho(y) \quad \forall x, y \in G.$$

Remarque I-III-11 : Soit ρ une semi-norme sur G . On désigne par ${}_{\rho}\mathcal{K}(G)$ l'algèbre de Banach complétée de l'algèbre $\mathcal{K}(G)$ obtenue à partir de la ρ -norme $\| \cdot \|_{\rho}$ définie par : $\| f \|_{\rho} = \int_G \| f(x) \| \rho(x) dx \quad \forall f \in \mathcal{K}(G)$.

On montre que le produit de convolution est continu pour cette norme $\| \cdot \|_{\rho}$ et on définit comme précédemment les sous-algèbres ${}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}^{\dagger}(G)$ et ${}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$ de l'algèbre ${}_{\rho}\mathcal{K}(G)$.

CHAPITRE II

TRANSFORMATION DE FOURIER SPHERIQUE DE TYPE δ

Soient G un groupe localement compact unimodulaire et K un sous-groupe compact de G .

Dans ce chapitre, nous trouvons une généralisation de la transformation de Fourier sphérique que nous appelons la transformation de Fourier sphérique de type δ . Cette transformation est obtenue après avoir défini une transformation de Guelfand associée à l'algèbre non commutative $\mathcal{K}_\delta^*(G)$ (transformation de Guelfand généralisée) et établi une correspondance biunivoque entre les espaces $X_m(\mathcal{K}_\delta^*(G))$ et $S_\delta^m(G)$. Dans le paragraphe II-III, nous étudions les applications au groupe produit semi-direct $G = A \times_\alpha K$ d'un groupe localement compact abélien A et d'un groupe compact K relativement à un homomorphisme α .

§ II-I FONCTION SPHERIQUE DE TYPE δ

Définition II-I-1 : Une fonction f sur G à valeurs dans un espace de Banach est dite quasi-bornée s'il existe une semi-norme ρ sur G telle que :

$$\sup_{x \in G} \frac{\|f(x)\|}{\rho(x)} < \infty$$

Définition II-I-2 : Soit $\delta \in \hat{K}$. Une fonction sphérique ϕ (sur G) de type δ est une fonction continue quasi-bornée sur G à valeurs dans $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)$, (E étant un espace vectoriel de dimension finie)

telle que :

$$(i) \quad \phi(kx k^{-1}) = \phi(x). \quad (x \in G, k \in K)$$

$$(ii) \quad \chi_\delta * \phi = \phi = \phi * \chi_\delta$$

(iii) L'application $u_\phi : f \mapsto \phi(f) = \int_G f(x) \phi(x) dx$ est une représentation irréductible de l'algèbre $\mathcal{K}_\delta^*(G)$.

(La représentation u_ϕ est continue pour la norme $\| \cdot \|_\rho$).

Deux fonctions sphériques ϕ_i ($i = 1, 2$) de type δ à valeurs dans $\text{Hom}_\mathbb{C}(E_i, E_i)$

sont équivalentes s'il existe une bijection linéaire $Q : E_1 \rightarrow E_2$ telle que

$$\phi_2(x) = Q \phi_1(x) Q^{-1} \quad (\forall x \in G).$$

Remarque II-I-3 : Si δ est une classe triviale de dimension 1 de K , les fonctions sphériques de type δ s'identifient aux fonctions zonales sphériques.

Proposition II-I-4 : Soit ϕ une fonction continue quasi-bornée sur G à valeurs dans $\text{Hom}_\mathbb{C}(E, E)$ telle que $\phi_K = \phi$ et $\chi_\delta * \phi = \phi$.

La fonction ϕ est sphérique de type δ si et seulement si :

$$\int_K \phi(kx k^{-1}y) dk = \phi(x) \phi(y) \quad \forall x, y \in G.$$

Preuve Soit ϕ une fonction sphérique de type δ . Comme pour tout $f \in \mathcal{K}(G)$,

$$\phi_K(f) = \phi(f_K) \text{ et } \chi_\delta * \phi(f) = \int f * \chi_\delta * \phi(1) = \phi(\bar{\chi}_\delta * f) \text{ on a :}$$

$$\forall g \in \mathcal{K}(G), \quad \phi(f_K * g) = \phi((f_K * g)_K) = \phi(f_K * g_K)$$

$$= \phi(\bar{\chi}_\delta * f_K * g_K * \bar{\chi}_\delta) = u_\phi(\bar{\chi}_\delta * f_K * g_K * \bar{\chi}_\delta)$$

$$= u_\phi(\bar{\chi}_\delta * f_K) u_\phi(g_K * \bar{\chi}_\delta) = \phi(f) \phi(g).$$

Et comme $\mathcal{K}(G)$ est dense dans $M_c(G)$ on a

$\forall \mu, \nu \in M_c(G) : \phi(\mu_K * \nu) = \phi(\mu) \phi(\nu)$ et en posant $\mu = \varepsilon_x$ et $\nu = \varepsilon_y$ on a :

$$\int_K \phi(kx k^{-1}y) dk = \phi(x) \phi(y) \quad \text{car } (\varepsilon_x)_K * \varepsilon_y(\phi) = (\varepsilon_x)_K (\phi_y) = (\phi_y)_K(x).$$

Réciproquement si $\int_K \phi(kx k^{-1}y) dk = \phi(x) \phi(y)$ l'application

$f \mapsto \int_G f(x) \phi(x) dx$ est une représentation irréductible de $\mathcal{K}_\delta^\sharp(G)$

(cf. [19] Prop. 6-1-1) et par conséquent ϕ est sphérique de type δ .

C.Q.F.D.

Nous allons montrer que l'existence d'une fonction sphérique de type δ sur G de hauteur non nulle est toujours liée à l'existence d'une représentation de Banach irréductible du groupe G .

Proposition II-I-5 : Si U est une représentation irréductible de Banach de G dans un espace E telle que δ soit contenue dans la

restriction de U à K , alors il existe une fonction ϕ_δ^U définie sur G , sphérique de type δ .

La fonction ϕ_δ^U est dite associée à la représentation U .

Preuve Soit l'algèbre $I(\delta) = \mathfrak{C}(K) * \bar{\mathcal{X}}_\delta = \{f * \bar{\mathcal{X}}_\delta, f \in \mathfrak{C}(K)\}$ qu'on identi-

fie à l'algèbre $\mathbb{M}_{d(\delta)}(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre $d(\delta)$ à coefficients

complexes. L'application bilinéaire $(\phi, f) \mapsto \phi * f$ de $I(\delta) \times \mathcal{K}_\delta^\sharp(G)$ dans

$\mathcal{K}(G)$ induit une unique application linéaire du produit tensoriel

$I(\delta) \otimes \mathcal{K}_\delta^\sharp(G)$ dans $\mathcal{K}(G)$, lequel produit tensoriel est isomorphe à la sous-

algèbre $\mathcal{K}_\delta(G)$ de $\mathcal{K}(G)$ (voir [18] Prop. 4.5.1.8). Si u_δ est une représentation irréductible de $\mathcal{K}_\delta^*(G)$ et si $1_{d(\delta)}$ est la représentation triviale de l'algèbre $I(\delta)$ alors $1_{d(\delta)} \otimes u_\delta$ est une représentation irréductible de $I(\delta) \otimes \mathcal{K}_\delta^*(G)$ et réciproquement. Ceci permet d'identifier l'espace $E(\delta)$ au produit tensoriel d'un K -module \mathfrak{E}_δ et de l'espace E_δ des représentations irréductibles $f \rightarrow u_\delta(f)$ de $\mathcal{K}_\delta^*(G)$ et par conséquent les endomorphismes $U_\delta(f)$ et $1 \otimes u_\delta(f)$ pour tout $f \in \mathcal{K}_\delta^*(G)$ grâce au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{E}_\delta \otimes E_\delta & \xrightarrow{1 \otimes u_\delta(f)} & \mathfrak{E}_\delta \otimes E_\delta \\ \downarrow \} & & \downarrow \} \\ E(\delta) & \xrightarrow{U_\delta(f)} & E(\delta) \end{array}$$

Soit ψ_δ^U la fonction u_{U_δ} -sphérique sur G donnée par la formule :

$$\psi_\delta^U(x) = P(\delta) U(x) P(\delta).$$

Posons $\psi_{\delta,K}^U(x) = \int_K U_\delta(k) \psi_\delta^U(x) U_\delta(k^{-1}) dk$.

Comme $\psi_{\delta,K}^U(x)$ commute avec $U_\delta(k)$ ($\forall k \in K$),

alors $\psi_{\delta,K}^U(x) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E(\delta), E(\delta))$ (d'après I-III-2) et il existe une fonction quasi-bornée ϕ_δ^U sur G à valeurs dans $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_\delta; E_\delta)$ telle que

$\psi_{\delta,K}^U(x) = 1 \otimes \phi_\delta^U(x)$ et qui vérifie les relations suivantes :

$$\phi_{\delta}^U(kx k^{-1}) = \phi_{\delta}^U(x) \quad \text{et} \quad \chi_{\delta} * \phi_{\delta}^U = \phi_{\delta}^U.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \text{i) } \forall x \in G, \quad k \in G, \quad 1 \otimes \phi_{\delta}^U(kx k^{-1}) &= \psi_{\delta, K}^U(kx k^{-1}) \\ &= \int_K U_{\delta}(k') \psi_{\delta}^U(kx k^{-1}) U_{\delta}(k'^{-1}) dk' \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad \psi_{\delta}^U(kx k^{-1}) = U_{\delta}(k) \psi_{\delta}^U(x) U_{\delta}(k^{-1})$$

$$\text{donc} \quad 1 \otimes \phi_{\delta}^U(kx k^{-1}) = \psi_{\delta, K}^U(x) = 1 \otimes \phi_{\delta}^U(x) \quad \text{et} \quad \phi_{\delta}^U(kx k^{-1}) = \phi_{\delta}^U(x).$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \forall x \in G, \quad 1 \otimes (\chi_{\delta} * \phi_{\delta}^U)(x) &= 1 \otimes \int_K \chi_{\delta}(k) \phi_{\delta}^U(k^{-1}x) dk \\ &= \int_K \chi_{\delta}(k) \psi_{\delta, K}^U(k^{-1}x) dk \\ &= \int_K \chi_{\delta}(k) U_{\delta}(k^{-1}) \psi_{\delta, K}^U(x) dk \\ &= \psi_{\delta, K}^U(x) \int_K \chi_{\delta}(k) (1 \otimes u_{\delta}(k^{-1})) dk \\ &= \psi_{\delta, K}^U(x) [1 \otimes \int_K \sigma(u_{\delta}(k)) u_{\delta}(k^{-1}) dk] \\ &= \psi_{\delta, K}^U(x) = 1 \otimes \phi_{\delta}^U(x) \end{aligned}$$

et $\chi_{\delta} * \phi_{\delta}^U = \phi_{\delta}^U$. D'autre part si $f \in \mathcal{K}_{\delta}^*(G)$ on a :

$$\begin{aligned} 1 \otimes \int_G f(x) \phi_{\delta}^U(x) dx &= \int_G f(x) (1 \otimes \phi_{\delta}^U(x)) dx = \int_G f(x) \psi_{\delta, K}^U(x) dx \\ &= \int_G \int_K f(x) \psi_{\delta}^U(kxk^{-1}) dk dx \\ &= P(\delta) \left(\int_G f(x) U(x) dx \right) P(\delta) = U(\bar{\chi}_{\delta} * f * \bar{\chi}_{\delta}) \\ &= U_{\delta}(f) = 1 \otimes u_{\delta}(f). \end{aligned}$$

Ainsi $u_{\delta}(f) = \int_G f(x) \phi_{\delta}^U(x) dx$, par conséquent ϕ_{δ}^U est sphérique de type δ

et $\psi_{\delta}^U : x \mapsto d(\delta) \operatorname{tr}(\phi_{\delta}^U(x))$ est la fonction trace sphérique de type δ correspondante.

C.Q.F.D.

§ II-II TRANSFORMATION DE FOURIER SPHERIQUE DE TYPE δ

Soit \mathcal{A} une algèbre normée involutive complexe et $X_m(\mathcal{A})$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de \mathcal{A} de dimension finie m .

Définition II-II-1 : Pour tout élément f de \mathcal{A} , nous appelons transformée de Guelfand généralisée de f , l'application notée $\mathcal{G}f$ de $X_m(\mathcal{A})$ dans l'algèbre $M_m(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre m définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}f : X_m(\mathcal{A}) &\longrightarrow M_m(\mathbb{C}) \\ u &\longmapsto u(f) \end{aligned}$$

L'homomorphisme $f \mapsto \mathcal{G}f$ de \mathcal{A} dans $M_m(\mathbb{C})^{X_m(\mathcal{A})}$ est appelé la transformation de Guelfand généralisée associée à l'algèbre \mathcal{A} .

Si l'algèbre \mathcal{A} est commutative, les représentations unitaires irréductibles de \mathcal{A} sont de dimension 1, donc s'identifient aux caractères de \mathcal{A} et on retrouve la définition de la transformation de Guelfand usuelle.

Soit $S_{\delta}^m(G)$ l'ensemble des fonctions sphériques de type δ sur G de hauteur m . Nous allons montrer que si ϕ est une fonction de $S_{\delta}^m(G)$, il existe une représentation $u_{\delta}^{\phi} \in X_m(\mathcal{K}_{\delta}^{\natural}(G))$ telle que $u_{\delta}^{\phi}(f) = \int_G f(x) \phi(x) dx$ et réciproquement. Ce qui permettra d'identifier les espaces $S_{\delta}^m(G)$ et $X_m(\mathcal{K}_{\delta}^{\natural}(G))$ et ensuite définir la transformation de Fourier sphérique de type δ .

Définition II-II-2 : Un idéal à gauche J dans une algèbre associative \mathcal{A} est dit régulier s'il existe un élément $u \in \mathcal{A}$ tel que $xu \equiv x \pmod{J}$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

Lemme II-II-3 : Soit ρ une semi-norme sur G , I un idéal à gauche régulier maximal dans l'algèbre ${}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$ et $J = \{f \in {}_{\rho}\mathcal{K}(G), \bar{x}_{\delta} * g * f * \bar{x}_{\delta} \in I, \forall g \in {}_{\rho}\mathcal{K}(G)\}$. J est un idéal à gauche régulier maximal dans ${}_{\rho}\mathcal{K}(G)$, $I = J \cap {}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$ et $f * \bar{x}_{\delta} \equiv f \pmod{J} \forall f \in {}_{\rho}\mathcal{K}(G)$.

Preuve : J est un idéal à gauche dans ${}_{\rho}\mathcal{K}(G)$ (évident). Comme I est régulier, il existe $u \in {}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$ tel que $k * u \equiv k \pmod{I} \forall k \in {}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$.

$$\begin{aligned} \forall f, g \in {}_{\rho}\mathcal{K}(G), \quad \bar{x}_{\delta} * g * (f * u - f) * \bar{x}_{\delta} &= \bar{x}_{\delta} * g * f * u * \bar{x}_{\delta} - \bar{x}_{\delta} * g * f * \bar{x}_{\delta} \\ &= h * u - h \quad \text{où} \end{aligned}$$

$h = \bar{x}_{\delta} * g * f * \bar{x}_{\delta} \in {}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$ donc $f * u - f \in J$ et par conséquent J est régulier. Comme $\bar{x}_{\delta} * g * (f * \bar{x}_{\delta} - f) * \bar{x}_{\delta} = 0$ alors $f * \bar{x}_{\delta} - f \in J$ et $f * \bar{x}_{\delta} \equiv f \pmod{J}$. Montrons que $I = J \cap {}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$.

Comme I est un idéal maximal dans ${}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$ il suffit de montrer que $J \cap {}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$ est non triviale et contenant I .

$J \cap {}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G) \neq {}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$ car $u \notin J$ sinon pour tout $f \in {}_{\rho}\mathcal{K}(G)$, $f * u \in J$ et $f = (-f * u + f) + f * u \in J$ ie $J = {}_{\rho}\mathcal{K}(G)$ (contradiction) et si $f \in I$ on a : $\bar{x}_{\delta} * g * f * \bar{x}_{\delta} = \bar{x}_{\delta} * g * \bar{x}_{\delta} * f \in I \quad (\forall g \in {}_{\rho}\mathcal{K}(G))$ alors $f \in J$ ainsi donc $I \subset J$, par conséquent $I = J \cap {}_{\rho}\mathcal{K}_{\delta}(G)$. Montrons que J est maximal.

Soit J' un idéal à gauche contenant J et tel que $J' \neq {}_{\rho} \mathcal{K}(G)$. D'après le même raisonnement que précédemment $I = J' \cap {}_{\rho} \mathcal{K}_{\delta}(G)$.

Soit $f \in J'$, $f * \bar{\alpha}_{\delta} - f \in J \subset J' \Rightarrow f * \bar{\alpha}_{\delta} \in J'$

$$\Rightarrow \bar{\alpha}_{\delta} * g * f * \bar{\alpha}_{\delta} \in J'$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha}_{\delta} * g * f * \bar{\alpha}_{\delta} \in J' \cap {}_{\rho} \mathcal{K}_{\delta}(G) = I$$

$$\Rightarrow f \in J.$$

C.Q.F.D.

Lemme II-II-4 : Soit une fonction continue ψ sur G telle que $\psi = \psi_K$, $\alpha_{\delta} * \psi = \psi$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \psi(f * g) = \psi(g * f) \quad \forall f, g \in \mathcal{K}_{\delta}^{\dagger}(G)$$

$$(ii) \quad \overset{\vee}{f} * \psi = \psi * \overset{\vee}{f} \quad \forall f \in \mathcal{K}_{\delta}^{\dagger}(G)$$

Preuve : On sait que : $\psi(f) = \overset{\vee}{f} * \psi(1) = \psi * \overset{\vee}{f}(1) \quad \forall f \in \mathcal{K}(G)$

$$(i) \quad \Leftrightarrow (f * g)^{\vee} * \psi(1) = \psi * (g * f)^{\vee}(1)$$

$$\Leftrightarrow \overset{\vee}{g} * \overset{\vee}{f} * \psi(1) = \psi * \overset{\vee}{f} * \overset{\vee}{g}(1)$$

$$\Leftrightarrow \overset{\vee}{f} * \psi(g) = \psi * \overset{\vee}{f}(g). \quad \forall f, g \in \mathcal{K}_{\delta}^{\dagger}(G).$$

C.Q.F.D.

Lemme II-II-5 : Soit une fonction continue ψ sur G telle que $\psi = \psi_K$, $\alpha_{\delta} * \psi = \psi$. Soit ρ une semi-norme sur G telle que $|\psi(x)| \leq M\rho(x) \quad \forall x \in G$ ($M > 0$), ${}_{\rho} \mathcal{K}(G)$ l'algèbre de Banach correspondant à ρ . S'il existe une représentation irréductible de dimen-

sion finie u_δ de $\mathcal{K}_\delta(G)$ telle que :

$$\psi(f) = d(\delta) \operatorname{tr}(u_\delta(f)) \quad \forall f \in \mathcal{K}_\delta^\dagger(G). \quad \text{Alors :}$$

$$(i) \quad \overset{\vee}{f} * \psi = \psi * \overset{\vee}{f} \quad \forall f \in {}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$$

(ii) $I_\psi = \{f \in {}_\rho \mathcal{K}_\delta(G), \overset{\vee}{f} * \psi = 0\}$ est un idéal bilatère régulier de ${}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$.

$$(iii) \quad f \in I_\psi \cap \mathcal{K}_\delta(G) \Leftrightarrow u_\delta(f) = 0.$$

Preuve : (i) Si $\psi(f) = d(\delta) \operatorname{Tr}(u_\delta(f))$ on a $\psi(f * g) = \psi(g * f) \quad \forall f, g \in \mathcal{K}_\delta^\dagger(G)$ et $\overset{\vee}{f} * \psi = \psi * \overset{\vee}{f} \quad \forall f \in \mathcal{K}_\delta^\dagger(G)$ (d'après II-II-4). Comme $\mathcal{K}(G)$ est dense

dans ${}_\rho \mathcal{K}(G)$ et que l'application $f \mapsto \bar{x}_\delta * f_K$ est une projection continue de

${}_\rho \mathcal{K}(G)$ sur ${}_\rho \mathcal{K}_\delta^\dagger(G)$ alors $\mathcal{K}_\delta^\dagger(G)$ est dense dans ${}_\rho \mathcal{K}_\delta^\dagger(G)$ et $\overset{\vee}{f} * \psi = \psi * \overset{\vee}{f}$

$\forall f \in {}_\rho \mathcal{K}_\delta^\dagger(G)$. L'égalité demeure si on remplace f par $\varepsilon_k * f$ ($k \in K$) car

$\{\varepsilon_k * f; f \in {}_\rho \mathcal{K}_\delta^\dagger(G)\}$ est total dans ${}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$. (cf. [18] Th. 4.5.1.11).

(ii) La relation (i) et l'égalité $(f * g)^\vee = g^\vee * f^\vee$ permettent d'affirmer que

I_ψ est un idéal bilatère de ${}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$. Montrons que I_ψ est régulier.

Prenons $u \in \mathcal{K}_\delta^\dagger(G)$ tel que $u_\delta(u)$ soit l'opérateur identique dans l'espace de

la représentation u_δ . Ainsi on a : $\psi * \overset{\vee}{u} = \overset{\vee}{u} * \psi = \psi$ et si $f \in {}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$

$$\text{alors} \quad (f * u - f)^\vee * \psi = \overset{\vee}{u} * \overset{\vee}{f} * \psi - \overset{\vee}{f} * \psi = \overset{\vee}{u} * \psi * \overset{\vee}{f} - \overset{\vee}{f} * \psi$$

$$= \psi * \overset{\vee}{f} - \overset{\vee}{f} * \psi = 0.$$

Par conséquent $f * u \equiv f \text{ mod } I_\psi$.

$$(iii) \quad f \in I_\psi \cap \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G) \Rightarrow \overset{\vee}{f} * \psi = 0 \Rightarrow \overset{\vee}{g} * \overset{\vee}{f} * \psi(1) = 0 \Rightarrow \psi(f * g) = 0.$$

$$\Rightarrow \text{tr}(u_\delta(f) u_\delta(g)) = 0 \quad \forall g \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$$

$$\Rightarrow u_\delta(f) = 0. \text{ La réciproque est évidente}$$

C.Q.F.D.

Théorème II-II-6 : Soit ψ une fonction continue quasi-bornée sur G telle que $\psi_K = \psi$ et $\chi_\delta * \psi = \psi$.

ψ est une fonction trace sphérique de type δ et de hauteur m si et seulement si, il existe une représentation irréductible u_δ de dimension m de $\mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$ telle que :

$$\psi(f) = \int_G f(x) \psi(x) dx = d(\delta) \text{tr}(u_\delta(f)) \quad \forall f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$$

Preuve : Soit $\overset{U}{\psi}_\delta$ une fonction trace sphérique de type δ et de hauteur m correspondant à la représentation de Banach U de G . D'après I-III-3, il existe un isomorphisme $F : U_\delta(f) \longmapsto u_\delta(f)$ de $\{U_\delta(f), f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)\}$ sur $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ où u_δ est une représentation irréductible de dimension finie m de l'algèbre $\mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$ avec $\text{tr}(U_\delta(f)) = d(\delta) \text{tr}(u_\delta(f)) \quad \forall f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$

$$\begin{aligned} \text{et } \overset{U}{\psi}_\delta(f) &= \text{tr}(P(\delta) U(f) P(\delta)) = \text{tr}(U_\delta(f)) \\ &= d(\delta) \text{tr}(u_\delta(f)) \quad \forall f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G). \end{aligned}$$

Réciproquement, soient I une extension maximale régulière de I_ψ

(lemme II-II-5) dans ${}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$ et $J = \{ f \in {}_\rho \mathcal{K}(G), \bar{\chi}_\delta * g * f * \bar{\chi}_\delta \in I,$

$\forall g \in {}_\rho \mathcal{K}(G)\}$. Considérons la représentation de Banach irréductible U de G

sur $E = {}_\rho \mathcal{K}(G)/J$. La représentation $f \mapsto U_I(f)$ de ${}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$ sur ${}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)/I$ est

équivalente à la représentation $f \mapsto U_\delta(f)$ de ${}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$ sur $E(\delta)$. En effet : la

projection $P(\delta)$ est définie par : $P(\delta)(f + J) = U(\bar{\chi}_\delta)(f + J) = \bar{\chi}_\delta * f + J$. D'autre

part $f * \bar{\chi}_\delta \equiv f \pmod{J} \quad \forall f \in {}_\rho \mathcal{K}(G)$. Donc $f \mapsto f + J$ est un homomorphisme

de ${}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$ sur $E(\delta)$ et comme $I = J \cap {}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$ alors $U_I \approx U_\delta$.

Soit ψ_δ^U la fonction trace sphérique de type δ correspondant à la repré-

sentation U de G sur E , on a $\psi_\delta^U(f) = \text{tr}(U_\delta(f)) = \text{tr}(U_I(f)) \quad \forall f \in {}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$. En

outre, comme I_ψ est un idéal bilatère de ${}_\rho \mathcal{K}_\delta(G)$, on a pour tout élément

$f \in I_\psi \cap \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$, $U_I(f) = 0$ (cf. II-II-5).

Soit n la hauteur de ψ_δ^U , il existe une représentation irréductible de dimen-

sion n , $f \mapsto v_\delta(f)$ de $\mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$ telle que $\psi_\delta^U(f) = d(\delta) \text{tr}(v_\delta(f)) \quad \forall f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$

d'autre part

$$\forall f \in I_\psi \cap \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G) \Leftrightarrow u_\delta(f) = 0 \Rightarrow U_I(f) = 0 \Rightarrow v_\delta(f) = 0 \text{ par conséquent}$$

$u_\delta \approx v_\delta$ alors $m = n$, (ie $\text{ht } \psi_\delta^U = \text{ht } \psi$) et

$$\psi(f) = d(\delta) \text{tr}(u_\delta(f)) = d(\delta) \text{tr}(v_\delta(f)) = \psi_\delta^U(f) \text{ donc } \psi = \psi_\delta^U.$$

C.Q.F.D.

Corollaire II-II-7 : Soit ψ une fonction continue quasi-bornée sur G . Si ψ est proportionnelle à une fonction trace sphérique de type δ de hauteur 1 alors :

$$\psi(1)f * \psi = d(\delta) \operatorname{tr}(u_\delta(\overset{y}{f})) \psi \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{K}_\delta^h(G).$$

Preuve : $\forall f \in \mathcal{K}_\delta^h(G)$,

$$\begin{aligned} f * \psi(x) &= \int_G f(y) \psi(y^{-1}x) dy = \int_K dk \int_G f(ky^{-1}k^{-1}) \psi(ky k^{-1}x) dy \\ &= \int_G \left(\int_K \psi(ky k^{-1}x) dk \right) f(y^{-1}) dy \\ &= \frac{1}{\psi(1)} \int_G \psi(y) \psi(x) f(y^{-1}) dy \quad (\text{d'après I-III-9}) \\ &= \frac{\psi(x)}{\psi(1)} d(\delta) \operatorname{tr}(u_\delta(\overset{y}{f})). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Corollaire II-II-8 : Soit φ une fonction continue quasi-bornée de G dans $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie telle que $\varphi_K = \varphi$ et $\mathcal{X}_\delta * \varphi = \varphi$.

φ est sphérique de type δ si et seulement si pour toute fonction $f \in \mathcal{K}_\delta^h(G)$, il existe un endomorphisme $u_\delta(f)$ de E_δ tel que

$$f * \varphi = u_\delta(\overset{y}{f}). \varphi.$$

Preuve : Supposons que φ est sphérique de type δ .

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{K}_\delta^h(G), \quad f * \varphi(x) &= \int_G f(y) \varphi(y^{-1}x) dy = \int_K dk \int_G f(y) \varphi(y^{-1}x) dy \\ &= \int_G \int_K f(ky^{-1}k^{-1}) \varphi(ky k^{-1}x) dy dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_G f(y^{-1}) \varphi(y) \varphi(x) dy = \varphi(x) \int_G \overset{v}{f}(y) \varphi(y) dy \\
&= \varphi(x) u_\delta(\overset{v}{f})
\end{aligned}$$

Réciproquement supposons que pour tout élément f de $\mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$, $f * \varphi = u_\delta(\overset{v}{f}) \cdot \varphi$.

$$\begin{aligned}
f * \varphi(x) &= \int f(y) \varphi(y^{-1}x) dy = \int_G \int_K f(ky^{-1}k^{-1}) \varphi(ky k^{-1}x) dy dk \\
&= \int_G \int_K f(y^{-1}) \varphi(ky k^{-1}x) dy dk
\end{aligned}$$

$$u_\delta(\overset{v}{f}) \varphi(x) = \varphi(x) \int f(y^{-1}) \varphi(y) dy$$

$$f * \varphi(x) - u_\delta(\overset{v}{f}) \varphi(x) = \int_G f(y^{-1}) [\varphi(x) \varphi(y) - \int_K \varphi(ky k^{-1}x) dk] dy = 0 \quad \forall f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G),$$

donc $\int_K \varphi(ky k^{-1}x) dk = \varphi(x) \varphi(y)$ et la fonction φ est sphérique de type δ .

C.Q.F.D.

Ce corollaire II-II-8 donne une généralisation d'une propriété fondamentale des fonctions zonales sphériques (proposition I-I-4).

Théorème II-II-9 : Soit ϕ une fonction continue quasi-bornée sur G à valeurs dans $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)$.

La fonction ϕ est sphérique de type δ et de hauteur m si et seulement s'il existe une représentation irréductible u_δ^ϕ de $\mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$ de dimension m telle que $u_\delta^\phi(f) = \phi(f) \quad \forall f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$.

Preuve : Si ϕ est sphérique de type δ et de hauteur m , alors la fonction ψ définie sur G par : $\psi(x) = d(\delta) \text{Tr}(\phi(x))$ est trace sphérique de type δ .

En effet : Soit U la représentation de Banach topologiquement irréductible correspondante à ϕ . D'après la proposition (II-I-5), il existe une fonction

$$\psi_{\delta, K}^U \text{ définie sur } G \text{ telle que } \psi_{\delta, K}^U(x) = 1 \otimes \phi_{\delta}^U(x)$$

et $\text{Tr}(P(\delta) \int_K U(kx k^{-1}) dk P(\delta)) = d(\delta) \text{Tr}(\phi_{\delta}^U(x))$ (cf. [6] Prop. 13.11.4),

donc $\text{Tr}(P(\delta) U_K(x) P(\delta)) = d(\delta) \text{Tr}(\phi_{\delta}^{U_K}(x)) = \psi(x)$. Par conséquent ψ est trace sphérique de type δ de hauteur m relativement à la représentation U_K , ainsi donc d'après (II-II-6) il existe une représentation unitaire irréductible u_{δ}^{ϕ} de $\mathcal{K}_{\delta}^{\dagger}(G)$ de dimension m telle que:

$\psi(f) = d(\delta) \text{Tr}(u_{\delta}^{\phi}(f))$ et $u_{\delta}^{\phi}(f) = \phi(f) \forall f \in \mathcal{K}_{\delta}^{\dagger}(G)$. Réciproquement s'il existe

une représentation irréductible u_{δ}^{ϕ} de $\mathcal{K}_{\delta}^{\dagger}(G)$ de dimension m telle que

$u_{\delta}^{\phi}(f) = \phi(f)$, d'après le théorème (II-II-6), il existe une fonction trace

sphérique de type δ et de hauteur m telle que $\psi(f) = d(\delta) \text{Tr}(u_{\delta}^{\phi}(f))$. Soit U la

représentation topologiquement irréductible de G associée à ψ .

D'après II-I-5, il existe une fonction sphérique ϕ_{δ}^U de type δ telle que

$$u_{\delta}^{\phi}(f) = \int_G f(x) \phi_{\delta}^U(x) dx.$$

C.Q.F.D.

Le théorème II-II-9 permet d'identifier les espaces $X_m(\mathcal{K}_{\delta}^{\dagger}(G))$ et $S_{\delta}^m(G)$.

Si \mathcal{G} est la transformation de Gelfand généralisée associée à $\mathcal{K}_{\delta}^{\dagger}(G)$, il existe

une application notée $\mathcal{F}f$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X_m(\mathcal{K}_\delta^*(G)) & \xrightarrow{\mathcal{G}f} & M_m(\mathbb{C}) \\
 \uparrow F & & \uparrow \mathcal{F}f \\
 & S_\delta^m(G) &
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}f \circ F = \mathcal{F}f$$

La transformée $\mathcal{G}f$ de Guelfand généralisée d'un élément f de $\mathcal{K}_\delta^*(G)$ peut donc être identifiée à la fonction $\mathcal{F}f$ définie sur $S_\delta^m(G)$ par :

$$\mathcal{F}f(\phi) = \mathcal{G}f(u_\delta^\phi) = u_\delta^\phi(f) = \int_G f(x) \phi(x) dx \quad \text{d'où la définition suivante :}$$

Définition II-II-10 : Soit f un élément de $\mathcal{K}_\delta^*(G)$. Nous appelons transformée de Fourier sphérique de type δ de la fonction f , la fonction notée $\mathcal{F}f$ définie sur $S_\delta^m(G)$ par :

$$\mathcal{F}f(\phi) = \int_G f(x) \phi(x) dx \quad \text{et la cotransformée}$$

de Fourier sphérique de type δ de la fonction f , la transformée de Fourier sphérique de type δ de la fonction $\overset{y}{f}$, autrement dit la fonction $\mathcal{F}\overset{y}{f}$, notée $\overline{\mathcal{F}}f$ définie par :

$$\overline{\mathcal{F}}f(\phi) = \int_G f(x) \phi(x^{-1}) dx = u_\delta^\phi(\overset{y}{f}).$$

L'homomorphisme $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}f$ de $\mathcal{K}_\delta^*(G)$ dans $M_m(\mathbb{C}) S_\delta^m(G)$ est

appelée la transformation de Fourier sphérique de type δ . C'est encore la transformation de Guelfand généralisée associée à l'algèbre de convolution non commutative $\mathcal{K}_\delta^*(G)$.

Si δ est une classe triviale de dimension 1 et que (G, K) est une paire de Gelfand, on retrouve la définition de la transformation de Fourier sphérique.

Proposition II-II-11 : Soient deux fonctions f et g de $\mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$. On a pour tout $\phi \in S_\delta^m(G)$ et $s \in G$.

$$(i) \quad \mathfrak{F}_s f(\phi) = \phi(s) \mathfrak{F} f(\phi)$$

$$(ii) \quad \mathfrak{F} f_s(\phi) = \phi(s^{-1}) \mathfrak{F} f(\phi)$$

$$(iii) \quad \mathfrak{F} (f * g)\phi = \mathfrak{F} f(\phi) \mathfrak{F} g(\phi)$$

Preuve : $\forall f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$, $\phi \in S_\delta^m(G)$ et $s \in G$.

$$(i) \quad \mathfrak{F}({}_s f)(\phi) = u_\delta^\phi({}_s f) = \int_G {}_s f(x) \phi(x) dx = \int_G f(s^{-1}x) \phi(x) dx \\ = \int_G \check{f}(x^{-1}s) \phi(x) dx = \phi * \check{f}(s) = u_\delta^\phi(f) \phi(s) = \phi(s) \mathfrak{F} f(\phi).$$

$$(ii) \quad \mathfrak{F}(f_s)(\phi) = \int_G f(xs) \phi(x) dx = \int_G f(x) \phi(xs^{-1}) dx \\ = \int_G f(x) \check{\phi}(sx^{-1}) dx = \check{\phi} * f(s) = \check{f} * \phi(s^{-1}) = u_\delta^\phi(f) \phi(s^{-1}) \\ = \phi(s^{-1}) \mathfrak{F} f(\phi)$$

$$(iii) \quad \forall f, g \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G), \phi \in S_\delta^m(G)$$

$$\mathfrak{F} (f * g)\phi = u_\delta^\phi(f) \cdot u_\delta^\phi(g) = \mathfrak{F} f(\phi) \cdot \mathfrak{F} g(\phi)$$

C.Q.F.D.

Proposition II-II-12 : Soient $\delta \in \hat{K}$, $f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$ et $\phi \in S_\delta^m(G)$ on a :

$$\mathfrak{F} f \left(\check{\phi} \right) = \mathfrak{F} f(\phi) = \mathfrak{F} f(\phi_\delta) \quad (1)$$

Preuve : $\forall \phi \in S_\delta^m(G)$, $\mathfrak{F} f \left(\check{\phi} \right) = \int_G f(x) \check{\phi}(x) dx = \int_G f(x) \overline{\check{\phi}} * \phi(x) dx$

$$= \int_G \int_K f(x) \check{\phi}(k) \phi(kx) dx dk$$

$$\begin{aligned}
&= \int_G \int_K f(k^{-1}x) \chi_\delta(k) \phi(x) dx dk \\
&= \int_G \chi_\delta * f(x) \phi(x) dx = \int_G f(x) \phi(x) dx = \mathcal{F} f(\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } \mathcal{F} f(\phi_\delta) &= \int_G f(x) \phi_\delta(x) dx = \int_G \int_K f(x) \chi_\delta(k^{-1}) \phi(xk) dk dx \\
&= \int_G \int_K f(x k^{-1}) \chi_\delta(k^{-1}) \phi(x) dx dk \\
&= \int_G f * \chi_\delta(x) \phi(x) dx = \int_G f(x) \phi(x) dx = \mathcal{F} f(\phi).
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

La relation (1) est toujours vérifiée même si ϕ est telle que $\chi_\delta * \phi \neq \phi$.

Définition II-II-13 : Soit μ une mesure de Radon bornée sur G .

Nous appelons transformée de Fourier sphérique de type δ de la

mesure μ , la fonction $\mathcal{F} \mu$ définie sur $S_\delta^m(G)$ par :

$$\mathcal{F} \mu(\phi) = \int_G \phi(x) d\mu(x)$$

En particulier si $\mu = \varepsilon_x$ est la mesure de Dirac au point x on a :

$$\mathcal{F} \varepsilon_x(\phi) = \phi(x) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}} \varepsilon_x(\phi) = \phi(x^{-1})$$

Proposition II-II-14 : Soient μ une mesure de Radon bornée,

$f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$ et $\phi \in S_\delta^m(G)$. On a

$$\mathcal{F}(\mu * f) \phi = u_\delta^\phi(f) \mathcal{F} \mu(\phi)$$

où u_δ^ϕ est la représentation irréductible associée à ϕ .

Preuve : $\forall f \in \mathcal{K}_\delta^{\natural}(G)$, $\phi \in S_\delta^m(G)$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(\mu * f) \phi &= \int_G \mu * f(x) \phi(x) dx = \iint_{G \times G} f(s^{-1}x) \phi(x) dx d\mu(s) \\
&= \iint_{G \times G} \check{f}(x^{-1}) \phi(sx) dx d\mu(s) \\
&= \int_G \phi * \check{f}(s) d\mu(s) = u_\delta^\phi(f) \int_G \phi(s) d\mu(s) = u_\delta^\phi(f) \mathfrak{F}\mu(\phi)
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

§ II-III APPLICATIONS AUX GROUPES PRODUITS SEMI-DIRECTS

Soit G le groupe produit semi-direct $A \times_\alpha K$. Dans ce paragraphe, nous allons définir une représentation intégrale de la fonction trace sphérique, de la fonction sphérique de type δ et de la transformée de Fourier sphérique de type δ sur G .

Proposition II-III-1 : Soit $\psi \in \mathcal{U}_{c,\delta}(G)$ et $F = \psi|_A$. Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{K}_\delta^\sharp(G)$ on a : $F_{f*g}^\delta = F_f^\delta * F_g^\delta$,

Preuve : Un élément ψ de $\mathcal{U}_{c,\delta}(G)$ est entièrement déterminé par sa restriction à A à cause de la relation : $\psi(k_1 \xi k_2) = u_\delta(k_1) \psi(\xi) u_\delta(k_2)$.

Soient $x \in G$ et $f \in \mathcal{K}_\delta^\sharp(G)$. En utilisant la relation $f(x) = \sigma(\psi_f^\delta(x))$ on a :

$$\begin{aligned}
F_{f*g}^\delta(\xi) &= \int_K u_\delta(k^{-1}) f * g(k\xi) dk \\
&= \int_K \int_K \int_A u_\delta(k^{-1}) f(k\xi \eta k') g(k'^{-1} \eta^{-1}) dk dk' d\eta \\
&= \int_A \int_K \int_K u_\delta(k^{-1}) \sigma(u_\delta(k) F_f^\delta(\xi \eta) u_\delta(k')) \times \sigma(u_\delta(k'^{-1}) F_g^\delta(\eta^{-1})) dk dk' d\eta \\
&= \int_A \int_K F_f^\delta(\xi \eta) u_\delta(k') \sigma(u_\delta(k'^{-1}) F_g^\delta(\eta^{-1})) dk' d\eta \\
&= \int_A F_f^\delta(\xi \eta) F_g^\delta(\eta^{-1}) d\eta = F_f^\delta * F_g^\delta(\xi) \quad \text{ainsi } F_{f*g}^\delta(\xi) = F_f^\delta * F_g^\delta(\xi)
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

L'espace $\mathfrak{C}_c(A, F_\delta)$ est ainsi muni d'une structure d'algèbre de convolution.

Si ρ_A est une semi-norme sur A , $\mathfrak{C}_c(A, F_\delta)$ est une algèbre normée en

posant : $\|f\|_{\rho_A} = \int_A \|f(\xi)\|_{\rho_A(\xi)} d_A(\xi)$ pour $f \in \mathfrak{C}_c(A, F_\delta)$

Remarque II-III-2 : On montre que si V est une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{U}_{c,\delta}(A)$ qui est ρ_A -continue, il existe un caractère $\chi \in X(A)$ vérifiant $|\chi(a)| \leq M\rho_A(a)$ ($M > 0$) tel que V soit équivalente à une sous représentation de la représentation : $F \mapsto \int_A \chi(a) F(a) da$ de $\mathfrak{C}_c(A, F_\delta)$. (cf. [19] prop 6-2. 1.1).

En particulier, la représentation u_δ de $\mathfrak{K}_\delta^\natural(G)$ ($\approx U_{c,\delta}(A)$) est équivalente à une sous-représentation u_χ de la représentation de dimension $d(\delta)$ définie par : $f \mapsto \int_A \chi(a) F_f^\delta(a) da$.

Lemme II-III-3 : Soit ψ une fonction trace sphérique de type δ on a :

$$(i) \quad \psi(f) = \psi(\bar{\chi}_\delta * f_K) \quad \forall f \in \mathfrak{K}(G)$$

(ii) Si la représentation u_χ est telle que :

$$u_\chi(f) = \int_A \chi(a) F_f^\delta(a) da \quad \text{alors on a}$$

$$d(\delta) \text{tr}(u_\chi(f)) = \int_A \chi(a) f(a) da \quad \forall f \in \mathfrak{K}_\delta^\natural(G) \text{ et } \chi \in X(A)$$

Preuve (i) $\forall f \in \mathfrak{K}(G)$, $\psi(\bar{\chi}_\delta * f_K) = \int_G \psi(x) \bar{\chi}_\delta * f_K(x) dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_G \int_K \psi(x) \bar{\chi}_\delta(k) f_K(k^{-1}x) dx dk \\
&= \int_G \int_K \int_K \psi(x) \bar{\chi}_\delta(k) f(k'k^{-1}x k'^{-1}) dk dk' dx \\
&= \int_G \int_K \int_K \psi(kk'^{-1}x k') \chi_\delta(k^{-1}) f(x) dx dk dk' \\
&= \int_G \int_K \chi_\delta * \psi(k'^{-1}x k') f(x) dx dk' = \int_G \int_K \psi(k'^{-1}x k') f(x) dx dk' \\
&= \int_G \psi(x) f(x) dx = \psi(f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \forall f \in \mathcal{K}_\delta^\dagger(G), \psi(f) &= d(\check{\delta}) \operatorname{tr}(u_\chi(f)) = d(\check{\delta}) \operatorname{tr}\left(\int_A \chi(a) F_f^\delta(a) da\right) \\
&= d(\check{\delta}) \operatorname{tr}\left(\int_A \int_K \chi(a) u_\delta(k^{-1}) f(ka) da dk\right) = \int_A \chi(a) \left(\int_K \chi_\delta(k^{-1}) f(ka) dk\right) da \\
&= \int_A \chi(a) \bar{\chi}_\delta * f(a) da = \int_A \chi(a) f(a) da.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Proposition II-III-4 : Si la représentation u_χ de $\mathcal{K}_\delta^\dagger(G)$ est irréductible alors :

(i) Toute fonction trace sphérique de type δ est de la forme :

$$\psi : (a, k) \mapsto \chi_\delta(k) \int_K \chi(\alpha_{k^{-1}}(a)) dk'$$

(ii) Toute fonction sphérique de type δ est de la forme

$$\phi : (a, k) \mapsto \int_K \chi(\alpha_{k^{-1}k_1}(a)) u_\delta(k_1 k^{-1} k_1^{-1}) dk_1$$

Preuve : Comme u_χ est irréductible alors il existe une fonction trace sphérique ψ de type δ telle que : $\psi(f) = d(\check{\delta}) \operatorname{tr}(u_\chi(f)) = \int_A f(a) \chi(a) da$.

$$\forall f \in \mathcal{K}(G), \psi(f) = \psi(\bar{\chi}_\delta * f_K) = \psi(f_K * \bar{\chi}_\delta)$$

$$= \int_A \int_K \int_K \chi(a) f(k'ak'^{-1}) \chi_\delta(k) dk dk' da$$

$$\begin{aligned}
&= \int_A \int_K \int_K \chi(a) \chi_\delta(k) f(\alpha_{k'}(a) k' k^{-1}) da dk dk' \\
&= \int_A \int_K \int_K \chi(\alpha_{k'^{-1}}(a)) \chi_\delta(k) f(ak) da dk dk'
\end{aligned}$$

et comme $\psi(f) = \int_G f(x) \psi(x) dx$ on a :

$$\psi(a, k) = \chi_\delta(k) \int_K \chi(\alpha_{k'^{-1}}(a)) dk'.$$

(ii) Déterminons la fonction sphérique ϕ de type δ correspondant à u_χ .

Soit $f \in \mathcal{K}(G)$ on a :

$$\begin{aligned}
\phi(f) &= \phi(\bar{\chi}_\delta * f_K) = u_\chi(\bar{\chi}_\delta * f_K) = \int_A \chi(a) F_{\bar{\chi}_\delta * f_K}^\delta(a) da \\
&= \int_A \int_K \chi(a) u_\delta(k_2^{-1}) \bar{\chi}_\delta * f_K(k_2 a) da dk_2 \\
&= \int_A \int_K \int_K \int_K \chi(a) u_\delta(k_2^{-1}) \bar{\chi}_\delta(k) f(k_1 k^{-1} k_2 a k_1^{-1}) da dk_1 dk_2 dk \\
&= \int_A \int_K \int_K \int_K \chi(a) u_\delta(k_2^{-1}) \chi_\delta(k k_2^{-1}) f(k_1 k a k_1^{-1}) da dk dk_1 dk_2 \\
&= \int_A \int_K \int_K \int_K \chi(a) u_\delta(k_2^{-1}) \chi_\delta(k k_2^{-1}) f(\alpha_{k_1 k}(a) k_1 k k_1^{-1}) da dk dk_1 dk_2 \\
&= \int_A \int_K \int_K \int_K \chi(\alpha_{(k_1 k)^{-1}}(a)) u_\delta(k_2^{-1}) \chi_\delta(k_1^{-1} k k_1 k_2^{-1}) f(ak) da dk dk_1 dk_2 \\
&= \int_G \int_K \int_K \int_K \chi(\alpha_{(k_1 k)^{-1}}(a)) u_\delta(k_2^{-1}) \sigma(u_\delta(k_1^{-1} k k_1) u_\delta(k_2)) f(ak) da dk dk_1 dk_2 \\
&= \int_A \int_K \int_K \chi(\alpha_{k^{-1} k_1}(a)) u_\delta(k_1 k^{-1} k_1^{-1}) f(ak) da dk dk_1 = \int_G f(x) \phi(x) dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent on a : $\phi(a, k) = \int_K \chi(\alpha_{k^{-1} k_1}(a)) u_\delta(k_1 k^{-1} k_1^{-1}) dk_1$

Théorème II-III-5 : Toute fonction ψ trace sphérique de type δ de hauteur m sur un groupe produit semi-direct G peut être représentée par la formule intégrale suivante :

$$\psi(a, k) = d(\delta) \sum \int_K (a_i, u_\delta(k_1) a_i) \chi(\alpha_{kk_1^{-1}}(a)) dk_1$$

où a_1, a_2, \dots, a_m est une base orthogonale d'un sous-espace minimal \mathcal{E} de E_δ .

(Ce théorème généralise la proposition précédente car la représentation u_χ peut ne pas être irréductible).

Preuve : Soit $\mathcal{E} \subset E_\delta$ un sous-espace minimal invariant par u_χ . La représentation $f \mapsto u_\chi(f)|_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{K}_\delta(G)$ sur \mathcal{E} est irréductible, elle définit donc une fonction trace sphérique ψ sur G de type δ . Soit a_1, \dots, a_m une base orthonormale de \mathcal{E} , $\forall f \in \mathcal{K}_\delta(G)$ on a (d'après II-III-2) :

$$\psi(f) = d(\delta) \sum \int_A \chi(a) (F_f^\delta(a) a_i, a_i) da.$$

Soit $f \in \mathcal{K}(G)$ on a :

$$F_{\bar{\chi}_\delta * f_K}^\delta(a) = \int_K \int_K \int_K u_\delta(k_1^{-1}) f(kk_2k_1ak^{-1}) \chi_\delta(k_2) dk_1 dk_2 dk.$$

Ainsi donc $\psi(f) = \psi(\bar{\chi}_\delta * f_K)$

$$= d(\delta) \sum \int_A \int_A \int_K \int_K \chi(a) (a_i, u_\delta(k_1) a_i) f(kk_2k_1ak^{-1}) \chi_\delta(k_2) dk_2 dk da dk_1$$

$$= d(\delta) \sum \int_A \int_A \int_K \int_K \chi(a) (u_\delta(kk_2) a_i, u_\delta(k_1) a_i) f(k_1ak^{-1}) \chi_\delta(k_2) dk_1 dk_2 dk da$$

$$= d(\delta) \sum \int_A \int_K \int_K \chi(a) (u_\delta(k) a_i, u_\delta(k_1) a_i) f(k_1ak^{-1}) dk_1 dk da$$

$$= d(\delta) \sum \int_A \int_K \int_K \chi(a) (u_\delta(kk_1^{-1}) a_i, a_i) f(k_1ak^{-1}) da dk_1 dk$$

$$= d(\delta) \sum \int_A \int_K \int_K \chi(a) (u_\delta(kk_1^{-1}) a_i, a_i) f(\alpha_{k_1}(a) k_1k^{-1}) dadk_1 dk$$

$$\begin{aligned}
&= d(\delta)\Sigma \int_A \int_K \int_K \chi(\alpha_{kk_1^{-1}}(a)) (u_{\delta}(k_1^{-1})a_i, a_i) f(a, k) da dk_1 dk \\
&= \int_A \int_K f(a, k) \psi(a, k) da dk \quad \text{par conséquent on a :}
\end{aligned}$$

$$\psi(a, f) = d(\delta) \Sigma \int_K (a_i, u_{\delta}(k_1)a_i) \chi(\alpha_{kk_1^{-1}}(a)) dk_1 .$$

C.Q.F.D.

Proposition II-III-6 : Si la représentation u_{χ} de $\mathcal{K}_{\delta}^{\natural}(G)$ est irréductible alors la transformée de Fourier sphérique de type δ d'une fonction $f \in \mathcal{K}_{\delta}^{\natural}(G)$ est de la forme :

$$\mathfrak{F} f(\phi) = \iiint_{A \times K \times K} f(a, k) \chi(\alpha_{k^{-1}k_1}(a)) u_{\delta}(k_1 k^{-1} k_1^{-1}) dk_1 dk da .$$

Preuve : (c'est une conséquence immédiate de la proposition II-III-4).

CHAPITRE III

REPRESENTATION UNITAIRE IRREDUCTIBLE SPHERIQUE DE TYPE δ

Dans ce chapitre, nous allons grâce à la méthode d'induction de Mackey, construire une représentation unitaire irréductible du groupe produit semi-direct $G = A \times_{\alpha} K$, définir la représentation de 1-cocycle à gauche de G , ensuite généraliser les représentations unitaires sphériques après avoir donné quelques applications au groupe de Poincaré et au groupe $M(2)$ des déplacements du plan Euclidien.

§ III-I CONSTRUCTION D'UNE REPRESENTATION UNITAIRE INDUITE DES PRODUITS SEMI-DIRECTS.

Considérons le groupe produit semi-direct $G = A \times_{\alpha} K$. L'action de K sur $X(A)$ est définie par : $(k, \chi) \mapsto k.\chi$ avec $k.\chi(a) = \chi(\alpha_k(a))$, $\forall k \in K, a \in A$ et $\chi \in X(A)$.

Fixons χ et h respectivement dans $X(A)$ et K et posons :

$\alpha_h^*(\chi)(a) = \chi(\alpha_h(a))$ et $K_{\chi} = \{h \in K, \alpha_h^*(\chi) = \chi\}$. Ainsi $\alpha_h^*(\chi) \in X(A)$ et K_{χ} est un sous-groupe fermé de K .

Nous allons, par étapes, construire une représentation unitaire induite du groupe G .

Proposition III-I-1 : Toute représentation unitaire irréductible L_{χ} de K_{χ} définit une représentation unitaire irréductible \widehat{L}_{χ} de $A \times_{\alpha} K_{\chi}$.

Preuve : Soient L_{χ} une représentation unitaire irréductible de K_{χ} et

$g = (a, h)$ un élément de $A \times_{\alpha} K_{\chi}$. Posons $\hat{L}_{\chi}(a, h) = \chi(a) L_{\chi}(h)$. L'application $(a, h) \mapsto \hat{L}_{\chi}(a, h)$ est une représentation unitaire de $A \times_{\alpha} K_{\chi}$. En effet

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\chi}(a, h) (a', h') &= \hat{L}_{\chi}(a\alpha_h(a'), hh') = \chi(a\alpha_h(a')) L_{\chi}(hh') \\ &= \chi(a) \chi(\alpha_h(a')) L_{\chi}h L_{\chi}h' = \chi(a) L_{\chi}h \chi(a') L_{\chi}h' \\ &= \hat{L}_{\chi}(a, h) \hat{L}_{\chi}(a' h') \end{aligned}$$

et $(\hat{L}_{\chi})^*(a, h) = \overline{\chi(a)} L_{\chi}^* h = \chi(a^{-1}) L_{\chi}^{-1} h = (\hat{L}_{\chi})^{-1}(a, h)$.

Ensuite comme L_{χ} est irréductible alors, il en est de même pour \hat{L}_{χ} .

C.Q.F.D.

Théorème III-I-2 : Toute représentation unitaire irréductible

\hat{L}_{χ} du sous groupe fermé $A \times_{\alpha} K_{\chi}$ de G dans un espace de Hilbert \mathfrak{H} induit une représentation unitaire irréductible $U \hat{L}_{\chi}$ de G dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} \hat{L}_{\chi}$ et est définie par :

$$U \hat{L}_{\chi} (a, k) u(k') = \chi(\alpha_{k'}(a)) K U_k^{L_{\chi}} u(k')$$

où $K U_k^{L_{\chi}}$ est une représentation de K induite par la représentation L_{χ} définie par : $K U_k^{L_{\chi}} u(k') = \rho_k^{1/2}(k') u(k' k)$.

Preuve : Soit ρ la dérivée de Radon Nikodym de la mesure quasi-invariante μ sur $A \times_{\alpha} K_{\chi} \setminus A \times_{\alpha} K$ et L_{χ} une représentation unitaire irréductible de K_{χ} sur un espace de Hilbert \mathfrak{H} .

La représentation ${}_K U^{L\chi}$ du groupe K induite par la représentation $L\chi$ est d'après (I-II-2) de la forme : ${}_K U_k^{L\chi} u(k') = \rho_k^{1/2}(k') u(k'k)$ où $u \in \mathfrak{H}^{\hat{L}\chi}$.

On rappelle que si $u \in \mathfrak{H}^{\hat{L}\chi}$ on a :

$$u((a, h)g) = \hat{L}\chi(a, h) u(g) = \chi(a) L\chi(h)u(g) \text{ pour } (a, h) \in A \times_{\alpha} K_{\chi}.$$

Si u est une fonction de $\mathfrak{H}^{\hat{L}\chi}$ sur K relativement au sous-groupe fermé K_{χ}

(ie $u(hk) = L\chi(h) u(k) \quad \forall k \in K$ et $h \in K_{\chi}$), u induit une fonction de $\mathfrak{H}^{\hat{L}\chi}$

sur G relativement au sous-groupe fermé $A \times_{\alpha} K_{\chi}$ en posant :

$$u(a, k) = \chi(a) u(k).$$

En effet : Soit $g = (a, k) \in G$ on a :

$$\begin{aligned} u((a', h)g) &= u(a'\alpha_h(a), hk) = \chi(a'\alpha_h(a)) u(hk) \\ &= \chi(a') \chi(\alpha_h(a)) L\chi(h)u(k) = \chi(a') \chi(a) L\chi(h)u(k) \\ &= \chi(a') L\chi(h) u(a, k) = \hat{L}\chi(a', h) u(a, k) = \hat{L}\chi(a', h) u(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et d'après (I-II-2) on a : } U_{(a,k)}^{\hat{L}\chi} u(g') &= \rho_g^{1/2}(g') u((a', k') (a, k)) \\ &= \rho_g^{1/2}(g') u(a' \alpha_{k'}(a), k'k) \\ &= \rho_g^{1/2}(g') \chi(a' \alpha_{k'}(a)) u(k'k) \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\rho_g(g') = \frac{d\mu((\overline{a'}, \overline{k'}) (a, k))}{d\mu((\overline{a'}, \overline{k'}))} = \frac{d\mu(\overline{k'k})}{d\mu(\overline{k'})} = \rho_k(k')$$

où $\overline{k}, \overline{k'} \in X = K_{\chi} \backslash K$ par conséquent :

$$\begin{aligned}
 U_{(a,k)}^{\hat{L}_\chi} u(k') &= \rho_k^{1/2}(k') \chi(\alpha_{k'}(a)) u(k' k) \\
 &= \chi(\alpha_{k'}(a)) K U_k^{L_\chi} u(k').
 \end{aligned}$$

Soit $R(U^{\hat{L}_\chi}, U^{\hat{L}_\chi})$ l'algèbre des opérateurs d'entrelacement de $U^{\hat{L}_\chi}$.

On a : $\dim R(U^{\hat{L}_\chi}, U^{\hat{L}_\chi}) = \dim R(\hat{L}_\chi, \hat{L}_\chi)$ (cf. [1] Ch.16).

Comme \hat{L}_χ est irréductible on a $\dim R(\hat{L}_\chi, \hat{L}_\chi) = 1$ et par conséquent $U^{\hat{L}_\chi}$ est irréductible.

CQFD.

En résumé, on peut schématiser la construction par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 L_\chi & \longrightarrow & \hat{L}_\chi & \longrightarrow & U^{\hat{L}_\chi} \\
 | & & | & & | \\
 K_\chi & \hookrightarrow & A \times_\alpha K_\chi & \hookrightarrow & A \times_\alpha K
 \end{array}$$

où les flèches (\longrightarrow) représentent les inductions i.e. on a :

$$U^{\hat{L}_\chi} = \text{Ind}_{A \times_\alpha K_\chi \uparrow A \times_\alpha K}(\hat{L}_\chi) = \text{Ind}_{A \times_\alpha K_\chi \uparrow A \times_\alpha K} \left(\text{Ind}_{K_\chi \uparrow A \times_\alpha K_\chi}(L_\chi) \right)$$

Exemple III-I-3 : Considérons l'espace homogène $X = A \times_\alpha K / A \times_\alpha K_\chi$.

Nous allons définir une action équilinéaire de G sur le fibré trivial $(X \times \mathcal{H}, X, \text{pr}_1)$. Soit $x \in X$, notons r_x un représentant de la classe x .
 $x = r_x (A \times_\alpha K_\chi)$ et $g.x = r_{g.x} (A \times_\alpha K_\chi) \quad \forall g \in G$ par conséquent il existe un élément $u(g, x) \in A \times_\alpha K_\chi$ tel que $u(g, x) = r_{g.x}^{-1} g r_x$.
 Posons $\omega(g, x) = (\hat{L}_\chi) u(g, x)$ avec $r_{g.x} u(g, x) = g r_x$ on a :

$$\begin{cases} \omega(e, x) = 1_{\mathfrak{K}} \\ \omega(gg', x) = \omega(g, g'x) \cdot \omega(g', x) \quad \forall g, g' \in G \end{cases}$$

En effet $\omega(e, x) = (\hat{L}_{\mathcal{X}})u(e, x) = 1_{\mathfrak{K}}$ et $\forall g, g' \in G$ on a :

$$\begin{aligned} \omega(gg', x) &= (\hat{L}_{\mathcal{X}})u(gg', x) = (\hat{L}_{\mathcal{X}})_{g'g'x}^{-1} gg'r_x \\ &= (\hat{L}_{\mathcal{X}})_{g'(g'x)}^{-1} gr_{g'x} \cdot (\hat{L}_{\mathcal{X}})_{g'x}^{-1} g'r_x \\ &= \omega(g, g'x) \omega(g', x). \end{aligned}$$

L'application $\omega : (g, x) \mapsto \omega(g, x)$ est alors un 1-cocycle à gauche de G à valeurs dans $\text{Aut}(\mathfrak{K})$. Cette application permet de définir une action de G sur $X \times \mathfrak{K}$ (en posant $g \cdot (x, z) = (g \cdot x, \omega(g, x) \cdot z)$) telle que G opère équilinéairement sur $X \times \mathfrak{K}$ et sur X . On déduit donc de cette action (cf. [4] § 19.1) un homomorphisme U de G dans $\text{Aut}(\mathfrak{K}^X)$ où \mathfrak{K}^X est l'espace vectoriel complexe de toutes les applications de X dans \mathfrak{K} .

$$\forall f \in \mathfrak{K}^X, \omega(g, x) f(x) = \text{pr}_2(g \cdot (x, f(x)))$$

$$= (g \cdot f)(g \cdot x) = U_g f(g \cdot x)$$

d'où $U_g f(x) = \omega(g, g^{-1}x) f(g^{-1}x)$ et comme $g = (a, k)$ avec $a \in A$ et $k \in K$

on a :

$$U(a, k) f(x) = \omega((a, k), (\alpha_{k^{-1}}(a^{-1}), k^{-1}) \cdot x) f((\alpha_{k^{-1}}(a^{-1}), k^{-1})x).$$

Cette représentation est induite par le 1-cocycle à gauche ω . Nous l'appelons alors la représentation de 1-cocycle à gauche du groupe $G = A \times_{\alpha} K$.

Le théorème suivant donne une généralisation de la construction du caractère d'une représentation induite d'un groupe produit semi-direct $G = A \times_{\alpha} K$ dans le cas où α est quelconque.

Théorème III-I-4 : Soit $U^{\hat{L}\chi}$ la représentation unitaire irréductible induite sur $G = A \times_{\alpha} K$ dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}^{\hat{L}\chi}$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{K}(G)$, $U_{\phi}^{\hat{L}\chi}$ soit traçable. Le caractère

$\chi_{U^{\hat{L}\chi}}$ de $U^{\hat{L}\chi}$ est défini par :

$$\chi_{U^{\hat{L}\chi}}(\phi) = \text{Tr}(U_{\phi}^{\hat{L}\chi}) = \int_{S_{\chi} \backslash G} h_{\phi}(\xi, \xi) d\mu_{S_{\chi} \backslash G}(\xi) \quad \text{où}$$

$S_{\chi} = A \times_{\alpha} K_{\chi}$ et h_{ϕ} le noyau correspondant à l'opérateur $U_{\phi}^{\hat{L}\chi}$

Preuve : Soient $\phi \in \mathcal{K}(G)$ et $u \in \mathfrak{H}^{\hat{L}\chi}$

$$\begin{aligned} U_{\phi}^{\hat{L}\chi} u(g') &= \int_G \phi(g) U_g^{\hat{L}\chi} u(g') d\mu_G(g) = \int_G \phi(g) \rho_g^{1/2}(g') u(g'g) d\mu_G(g) \\ &= \int_G \phi(g'^{-1}g) \rho_{g'^{-1}g}^{1/2}(g') u(g) d\mu_G(g) \end{aligned}$$

En posant $X = S_{\chi} \backslash G$ on a :

$$\begin{aligned} U_{\phi}^{\hat{L}\chi} u(g') &= \int_X d\mu_X(\bar{g}) \int_{S_{\chi}} \phi(g'^{-1}(a, h)g) \rho_{g'^{-1}(a, h)g}^{1/2}(g') u((a, h)g) d\mu_{S_{\chi}}(a, h) \\ &= \int_X d\mu_X(\bar{g}) \int_{S_{\chi}} \phi(g'^{-1}(a, h)g) \rho_{k'^{-1}hk}^{1/2}(k') \hat{L}\chi(a, h) u(g) d\mu_{S_{\chi}}(a, h) \\ &= \int_X d\mu_X(\bar{g}) \int_{S_{\chi}} \phi(g'^{-1}(a, h)g) \rho_{k'^{-1}hk}^{1/2}(k') \chi(a) L_{\chi}(h) u(g) d\mu_{S_{\chi}}(a, h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_X d\mu_X(\bar{g}) \int_{S_{\chi}} \phi(g'^{-1}(a, h)g) \rho_{k'^{-1}hk}^{1/2}(k') \chi(a) u(hg) d\mu_{S_{\chi}}(a, h) \\
&= \int_X d\mu_X(\bar{g}) \int_{S_{\chi}} \phi(g'^{-1}(a, h)h^{-1}g) \rho_{k'^{-1}hk}^{1/2}(k') \chi(a) u(g) d\mu_{S_{\chi}}(a, h) \\
&= \int_X d\mu_X(\bar{g}) \int_{S_{\chi}} \phi(g'^{-1}ag) \rho_{k'^{-1}hk}^{1/2}(k') \chi(a) u(g) d\mu_{S_{\chi}}(a, h).
\end{aligned}$$

Soit $H_{\phi}: G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(g, g') \longmapsto H_{\phi}(g, g')$$

tel que $H_{\phi}(g, g') = \int_{S_{\chi}} \phi(g'^{-1}ag) \rho_{k'^{-1}hk}^{1/2}(k') \chi(a) d\mu_{S_{\chi}}(a, h)$

et on a : $U_{\phi}^{\hat{L}_{\chi}} u(g') = \int_X H_{\phi}(g, g') u(g) d\mu_X(\bar{g})$.

Comme il existe un isomorphisme $S: \tilde{u} \longmapsto u$ de $L^2(X, \mu, \mathfrak{K})$ sur $\mathfrak{K}^{\hat{L}_{\chi}}$

(§ I-II) tel que $S\tilde{u}(g) = \hat{L}_{\chi}(k_g) u(g)$ où $g = k_g s_g$ est la décomposition de

Mackey de g , on a $\tilde{U}_{\phi}^{\hat{L}_{\chi}} = S^{-1} \circ U_{\phi}^{\hat{L}_{\chi}} \circ S$ d'après le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
& \tilde{U}_{\phi}^{\hat{L}_{\chi}} & \\
& \downarrow & \\
L^2(X, \mu, \mathfrak{K}) & \xrightarrow{\quad} & L^2(X, \mu, \mathfrak{K}) \\
\downarrow S & & \downarrow S \\
& U_{\phi}^{\hat{L}_{\chi}} & \\
& \downarrow & \\
\mathfrak{K}^{\hat{L}_{\chi}} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{K}^{\hat{L}_{\chi}}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
U_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}} S\tilde{u}(g') &= \int_X H_{\phi}(g, g') S\tilde{u}(g) d\mu_X(\bar{g}) = \int_X H_{\phi}(g, g') \widehat{L}_{\chi}(k_g) u(g) d\mu_X(\bar{g}) \\
&= \int_X H_{\phi}(g, g') u(k_g g) d\mu_X(\bar{g}) = \int_X H_{\phi}(k_g^{-1} g, g') u(g) d\mu_X(\bar{g}) \\
&= \int_X H_{\phi}(s_g, g') u(g) d\mu_X(\bar{g})
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}} u(g') &= \int_X H_{\phi}(s_g, g') S^{-1}u(g) d\mu_X(\bar{g}) \\
&= \int_X H_{\phi}(s_g, g') \widehat{L}_{\chi}(k_g^{-1}) \tilde{u}(g) d\mu_X(\bar{g}) \\
&= \int_X H_{\phi}(s_g, g') \tilde{u}(s_g) d\mu_X(\bar{g})
\end{aligned}$$

et

$$\tilde{U}_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}} u(s_{g'}) = \int_X H_{\phi}(s_g, s_{g'}) \tilde{u}(s_g) d\mu_X(\bar{s}_g)$$

Soit h_{ϕ} la fonction définie par : $X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(\xi, \eta) \longmapsto H_{\phi}(s_{\xi}, s_{\eta})$$

Comme $U_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}}$ est traçable, il en est de même que $\tilde{U}_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}}$ et d'après le théorème (I-II-6), la fonction $\xi \mapsto h_{\phi}(\xi, \xi)$ est intégrable et

$$\text{Tr}(U_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}}) = \int_X h_{\phi}(\xi, \xi) d\mu_X(\xi) \text{ d'où le caractère } \chi_{U_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}}} \text{ de la représentation}$$

$$U_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}} \text{ est définie par : } \chi_{U_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}}}(\phi) = \text{Tr}(U_{\phi}^{\widehat{L}_{\chi}}).$$

C.Q.F.D.

§ III-II APPLICATIONS AU GROUPE DE POINCARÉ ET AU GROUPE DES DÉPLACEMENTS DU PLAN EUCLIDIEN.

A) Représentation unitaire du groupe de Poincaré.

Soit $O(1, n)$ le groupe orthogonal des formes quadratiques

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}^{n+1}$$

Définition III-II-1 : Le groupe de Lorentz $G = SO_0(1, n)$ est la composante neutre du groupe orthogonal $O(1, n)$.

En langage matriciel

$$O(1, n) = \{g \in M_{n+1}(\mathbb{R}), {}^t g J g = J\}$$

$$\text{où } J = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et $SO_0(1, n) = \{g \in O(1, n), \det g = 1 \text{ et } g_{00} \geq 1\}$ où $g = (g_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$

Définition III-II-2 : Le groupe de Poincaré est le produit semi-direct $G = \mathbb{T} \rtimes SO_0(1, 3)$ du groupe de translation \mathbb{T} et le groupe de Lorentz $SO_0(1, 3)$.

La loi de composition dans G est définie par :

$$\forall (a, \alpha), (a', \alpha') \in G$$

$$(a, \alpha)(a', \alpha') = (a + \alpha a', \alpha \alpha').$$

Soit K le groupe produit semi-direct $\mathbb{T} \rtimes SO(3)$, L la représentation unitaire de K définie par : $k \mapsto L_k = L_{(a, r)} = \exp[i(\hat{p}|a)] D(r)$ où $\hat{p} = (m, 0, 0, 0)$ et D une représentation irréductible du groupe compact $SO(3)$.

Nous allons construire la représentation U^L du groupe de Poincaré induite par la représentation L du groupe K .

Posons $X = G/K$. D'après la décomposition de Cartan du groupe $SO_0(1, 3)$, nous avons $SO_0(1, 3) = \mathcal{P} SO(3)$ où \mathcal{P} est l'ensemble des transformations de Lorentz pures (voir [1] chap. 17) et alors :

$$X = \mathbb{T} \times SO_0(1, 3) / \mathbb{T} \times SO(3) \approx \mathcal{P} .$$

Soit $g \in SO_0(1, 3)$, $\exists \alpha_p \in \mathcal{P}$ tel que $g = \alpha_p r$ avec $r \in SO(3)$. Nous allons

définir l'opérateur $L_{k_{g_0^{-1} s_g}}^{-1}$.

$$\begin{aligned} g_0^{-1} s_g &= (a_0, \alpha_0)^{-1} (o, \alpha_p) = (-\alpha_0^{-1} a_0, \alpha_0^{-1}) (o, \alpha_p) \\ &= (-\alpha_0^{-1} a_0, \alpha_0^{-1} \alpha_p) = (o, \alpha_p) (-\alpha_p^{-1} \alpha_0^{-1} a_0, \alpha_p^{-1} \alpha_0^{-1} \alpha_p) \end{aligned}$$

par conséquent :

$$k_{g_0^{-1} s_g} = (-\alpha_p^{-1} \alpha_0^{-1} a_0, \alpha_p^{-1} \alpha_0^{-1} \alpha_p)$$

$$\begin{aligned} \text{et } L_{k_{g_0^{-1} s_g}}^{-1} &= \exp [i (\overset{\circ}{p} | \alpha_p^{-1} \alpha_0^{-1} a_0)] D (\alpha_p^{-1} \alpha_0^{-1} \alpha_p)^{-1} \\ &= \exp [i (\overset{\circ}{p} | r_\alpha^{-1} \alpha_p a_0)] D(r_\alpha) \text{ en posant } r_\alpha = \alpha_p^{-1} \alpha_0^{-1} \alpha_p \end{aligned}$$

$$\text{et donc } U_{(a_0, \alpha_0)}^L u(\alpha_p) = \exp [i (\overset{\circ}{p} | r_\alpha^{-1} \alpha_p a_0)] D(r_\alpha) u(\alpha_0^{-1} \alpha_p).$$

B) Représentation unitaire irréductible du groupe des déplacements du plan euclidien.

Définition III-II-3 : Le groupe de déplacement du plan euclidien \mathbb{R}^2 est le sous-groupe G du groupe $GL(2, \mathbb{C})$ des matrices

$$h(z, \alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{C}. \quad \text{On le note } M(2).$$

Soient la rotation $r(\alpha) : \omega \mapsto \omega e^{i\alpha}$ et la translation $t(z) : \omega \mapsto \omega + z$. En posant $h(o, \alpha) = r(\alpha)$ et $h(z, o) = t(z)$ on a les relations suivantes :

- 1) $h(z, \alpha) = t(z) r(\alpha)$
- 2) $r(\alpha) t(z) r(\alpha)^{-1} = t(r(\alpha)z)$
- 3) $h(z, \alpha)^{-1} = h(-r(-\alpha)z, -\alpha)$
- 4) $h(z, \alpha) \cdot h(\omega, \beta) = h(z + r(\alpha)\omega, \alpha + \beta)$

Ces relations sont prouvées par des calculs directs de produits de matrices.

Posons $T = \{ t(z), z \in \mathbb{C} \}$ et $K = \{ r(\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \}$, T et K sont des sous-groupes de $G = M(2)$, $T \approx \mathbb{R}^2$, $K \approx \mathbb{U}(1) \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \mathbb{T}$, $G = TK$ et $T \cap K = \{1\}$. Le groupe $M(2)$ est le groupe produit semi-direct de T et K (cf. [15] ch. IV).

Pour la construction de la représentation unitaire du groupe $M(2)$, nous allons utiliser la méthode de représentation induite par le caractère $\chi_a : t(z) \mapsto e^{i(z,a)}$ du sous-groupe T .

Comme $K \approx \mathbb{U}(1) \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $dr = d\alpha/2\pi$ est la mesure de Haar normalisée du groupe compact K . L'espace de la représentation sera l'espace de Hilbert

$$L^2(K) = L^2\left([0, 2\pi], \frac{d\alpha}{2\pi}\right) = H$$

Proposition III-II-4 : Soit $a \in \mathbb{R}^2$, il existe une représentation unitaire U^a de $M(2)$ sur H définie par :

$$(U_g^a F)(s) = e^{i(z,sa)} F(r(\alpha)^{-1}s) \quad \text{où } g = t(z) r(\alpha) = t(z)r \text{ et } F \in H.$$

Preuve : $\forall F, F' \in H$ on a :

$$(U_g^a F, U_g^a F') = \int_K F(r^{-1}s) \overline{F'(r^{-1}s)} ds = \int_K F(s) \overline{F'(s)} ds = (F, F').$$

Par conséquent U_g^a est un opérateur unitaire pour tout $g \in G$.

Si $g_i = t_i r_i$ et $t_i = t(z_i) \in T$, $r_i \in K$ ($i = 1, 2$). On a $g_1 g_2 = t(z_1 + r_1 z_2) r_1 r_2$

$$\text{Ainsi } (U_{g_1 g_2}^a)(s) = e^{i(z_1 + r_1 z_2, sa)} F(r_2^{-1} r_1^{-1} s)$$

$$= e^{i(z_1, sa)} e^{i(r_1 z_2, sa)} F(r_2^{-1} (r_1^{-1} s))$$

$$= e^{i(z_1, sa)} e^{i(z_2, r_1^{-1} sa)} F(r_2^{-1} (r_1^{-1} s)) = e^{i(z_1, sa)} (U_{g_2}^a F)(r_1^{-1} s)$$

$$= U_{g_1}^a (U_{g_2}^a F)(s) \quad \text{donc } U_{g_1 g_2}^a = U_{g_1}^a U_{g_2}^a$$

et alors U^a est une représentation unitaire de $M(2)$.

C.Q.F.D.

Proposition III-II-5 : Soit R la représentation régulière droite de K . On a :

$$R_r \circ U_g^a \circ R_r^{-1} = U_g^{ra} \quad \forall r \in K, g \in G, a \in \mathbb{R}^2.$$

En particulier si $|a| = |b|$ alors $U^a \approx U^b$

Preuve : $\forall r_0 \in K$, $g = t(z) r \in G$ et $F \in L^2(K)$ on a :

$$\begin{aligned} (R_{r_0} U_g^a R_{r_0}^{-1} F)(s) &= (U_g^a R_{r_0}^{-1} F)(sr_0) = e^{i(z_1, sr_0 a)} R_{r_0}^{-1} F(r^{-1} sr_0) \\ &= e^{i(z_1, sr_0 a)} F(r^{-1} s) \end{aligned}$$

$$= U_g^{r_0 a} F(s) \quad \text{alors} \quad R_r U_g^a R_r^{-1} = U_g^{r a}$$

Si $|a| = |b|$ alors il existe $r \in K$ tel que $b = ra$ donc $R_r U_g^a R_r^{-1} = U_g^b$

$\forall g \in G$ et comme R_r est un opérateur unitaire sur $L^2(K)$ alors U^a est équivalent à U^b .

C.Q.F.D.

Proposition III-II-6 : Si $g = t(\rho e^{i\varphi}) r(\alpha)$ alors l'opérateur unitaire

U_g^a est défini par $U_g^a F(\theta) = e^{i a \rho \cos(\varphi - \theta)} F(\theta - \alpha)$.

Preuve : Comme $(z, a) = \Re e(z\bar{a})$ on a :

$$\begin{aligned} U_g^a F(\theta) &= e^{i(z, r(\theta)a)} F(\theta - \alpha) = e^{i \Re e(a \rho e^{i(\varphi - \theta)})} F(\theta - \alpha) \\ &= e^{i a \rho \cos(\varphi - \theta)} F(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

§ III-III REPRESENTATION UNITAIRE IRREDUCTIBLE SPHERIQUE DE TYPE δ .

Dans ce paragraphe, nous allons définir et étudier une classe de représentations dépendant de δ et qui généralise les représentations unitaires sphériques.

Proposition III-III-1 : $(A \times_{\alpha} K, K)$ est une paire de Guelfand.

Preuve : L'application $\sigma : A \times_{\alpha} K \longrightarrow A \times_{\alpha} K$

$$(a, k) \longmapsto (a^{-1}, k)$$

est un automorphisme involutif de G . En effet : $\forall (a_1, k_1), (a_2, k_2) \in G$.

$$\begin{aligned} \sigma((a_1, k_1), (a_2, k_2)) &= \sigma(a_1 \alpha_{k_1}(a_2), k_1 k_2) = (a_1^{-1} \alpha_{k_1}(a_2^{-1}), k_1 k_2) \\ &= (a_1^{-1}, k_1) (a_2^{-1}, k_2) = \sigma(a_1, k_1) \sigma(a_2, k_2) \end{aligned}$$

et $\sigma \circ \sigma(a, k) = (a, k) \quad \forall (a, k) \in G$. Le sous-groupe $K_{\sigma} = \{g \in G, \sigma(g) = g\}$

s'identifie à $\{e\} \times K \cong K$. Par conséquent la paire $(A \times_{\alpha} K, K)$ est symétrique donc de Guelfand (cf. [20] ch. 5).

CQFD.

Soit U une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert H . Un vecteur u de H est K -invariant si pour tout $k \in K$, $U_k u = u$.

L'espace des vecteurs K -invariants est noté H_K .

Définition III-III-2 : La représentation unitaire U de G dans H est dite sphérique si $\dim H_K = 1$ et que tout vecteur non nul de H_K est cyclique.

A. Wawrzynczyk a montré que si (G, K) est une paire de Guelfand, toute représentation irréductible de G admettant un vecteur K -invariant est sphérique (cf. [20] Th. 5.3.1).

Proposition III-III-3 : Si U est une représentation unitaire sphérique alors la fonction φ définie sur G par $\varphi(x) = (U(x) x_0 | x_0)$ est continue, de type positif et sphérique. ($x_0 \in H_K$).

Preuve: φ est continue et de type positif (évident)

Montrons que φ est sphérique

$$\int_K \varphi(xky)dk = \int_K (U(xky)x_0 | x_0)dk = \left(\int_K (U(ky)x_0 dk | U(x^{-1}) x_0 \right).$$

Comme $\int_K U(ky)x_0 dk$ est K -invariant alors il existe un nombre complexe

$$C_y \text{ tel que } \int_K U(ky)x_0 dk = C_y x_0.$$

$$\text{Par suite } \int_K \varphi(xky)dk = C_y (x_0 | U(x^{-1}) x_0) = C_y (U(x) x_0 | x_0) = C_y \varphi(x)$$

en posant $x = e$ on a $C_y = \varphi(y)$.

D'autre part φ est biinvariante par K par conséquent φ est sphérique.

C.Q.F.D.

Par exemple, considérons le groupe $M(2)$ des déplacements du plan euclidien \mathbb{R}^2 . Nous allons déterminer l'espace H_K des vecteurs K -invariants et préciser la fonction sphérique associée à la représentation unitaire de $M(2)$ définie dans (III-II-3).

Proposition III-III-4 : Soit F un élément de $H = L^2(K)$

1) $U_r^a F = F$ pour tout $r \in K$ si et seulement si $F = C_0$ (C_0 une constante).

2) Posons $\varphi_a(g) = (U_g^a 1 | 1)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $g \in G$. Alors on a $\varphi_a(g) = J_0(a\rho)$ avec $g = t(\rho e^{i\varphi}) r(\alpha)$ et J_0 la fonction de Bessel d'ordre 0.

Preuve : 1) Comme $F \in H$, alors F peut s'écrire sous la forme

$$F = \sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n \chi_n \text{ où } \chi_n(\theta) = e^{in\theta}. \quad (\text{cf [15] Th. 4.3}).$$

$$\begin{aligned} U_{r(\alpha)}^a \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n \chi_n \right) (\theta) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n \left(U_{r(\alpha)}^a \chi_n \right) (\theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n (L_r \chi_n)(\theta) \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n \chi_n(\theta - \alpha) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n e^{i(\theta - \alpha)n} \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n e^{-in\alpha} \chi_n(\theta) \quad \text{et comme} \end{aligned}$$

$$U_{r(\alpha)}^a \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n \chi_n \right) (\theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n \chi_n(\theta) \quad \text{on a } e^{-in\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

et alors $n = 0$ par suite $F = C_0 \chi_0 = C_0$.

$$2) \quad \varphi_a \left(t(\rho e^{i\varphi}) r(\alpha) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iap \cos(\varphi - \theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iap \cos(\theta)} d\theta = J_0(ap)$$

C.Q.F.D.

Corollaire III-III-5 : Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$

U^a est équivalent à U^b si et seulement si $|a| = |b|$.

Preuve : D'après la proposition III-II-5 si $|a| = |b|$ alors $U^a \approx U^b$. Réciproquement supposons que $U^a \approx U^b$. Il existe donc un opérateur T sur H

tel que $T U_g^a = U_g^b T$ pour tout élément $g \in G$.

$U_r^b T1 = T U_r^a 1 = T1 \quad \forall r \in K$ par conséquent $T1 = C$ (C une constante).

Comme T est unitaire on a $|C| = 1$ et

$$\begin{aligned} \varphi_a(g) &= (U_g^a 1, 1) = (T U_g^a 1, T1) = (U_g^b T1, T1) = |C|^2 (U_g^b 1, 1) \\ &= \varphi_b(g) \quad \forall g \in G. \text{ Ainsi nous avons } J_0(a\rho) = J_0(b\rho) \quad \forall \rho \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{or } J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta \quad \text{donc } J_0''(0) = -1/2\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta < 0.$$

En posant $f_a(x) = J_0(ax)$ on a $f_a''(0) = a^2 J_0''(0)$ donc $a^2 J_0''(0) = b^2 J_0''(0)$ et $a^2 = b^2$ par conséquent $|a| = |b|$.

C.Q.F.D.

Dans la suite de ce paragraphe, nous généralisons l'étude des représentations unitaires sphériques pour δ non triviale.

Soit U une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert H et notons $H(\delta)$ le sous-espace $U(\bar{\chi}_\delta)H$ de H .

On pose $H_K^\delta = \{v \in H(\delta), U_\delta(k)v = \xi_\delta(k)v, \forall k \in K\}$.

Définition III-III-6 : La représentation U est dite sphérique de type δ si l'espace H_K^δ est de dimension 1 et que tout vecteur

non nul de H_K^δ est cyclique .

Nous appelons H_K^δ l'espace des vecteurs K - δ -invariants de la représentation U .

Le théorème III-III-7 ci-après fournit une généralisation d'un résultat de Wawrzynczyk ([20] Th. 5.3.1).

Théorème III-III-7 : Toute représentation unitaire irréductible U de G sur un espace de Hilbert H admettant un vecteur K - δ -invariant non nul, est une représentation sphérique de type δ .

Preuve : Si U est irréductible alors pour tout $\delta \in \hat{K}$, U_δ est irréductible. En effet : soit T un opérateur linéaire borné sur $H(\delta)$ qu'on peut étendre sur H en posant $\tilde{T}a = TP(\delta)a \quad \forall a \in H$.

Si U est irréductible, il existe une suite de fonction $f_i \in \mathcal{K}(G)$ telle que $U(f_i)$ converge simplement vers \tilde{T} . Soit $g_i = \bar{\chi}_\delta * f_i * \bar{\chi}_\delta$, $g_i \in \mathcal{K}_\delta(G)$ et $U_\delta(g_i)$ converge simplement vers T . Par conséquent U_δ est irréductible.

Le sous-espace fermé H_K^δ est stable pour les opérateurs $U_\delta(f)$ lorsque f parcourt l'algèbre $\mathcal{K}_\delta^\sharp(G)$. En effet : pour tout $k \in K$, $x \in H_K^\delta$ et $y \in H$ on a :

$$\begin{aligned} (U_\delta(k) U_\delta(f) x | y) &= \int_G f(s) (U_\delta(k) U_\delta(s) x | y) ds \\ &= \int_G f(s) (U_\delta(ks) x | y) ds = \int_G f(k^{-1}s) (U_\delta(s) x | y) ds \\ &= \int_G f(s k^{-1}) (U_\delta(s) x | y) ds = \int_G f(s) (U_\delta(s) U_\delta(k) x | y) ds \\ &= \xi_{\delta}^{\mathbf{v}}(k) \int_G f(s) (U_\delta(s) x | y) ds = \xi_{\delta}^{\mathbf{v}}(k) (U_\delta(f) x | y) \end{aligned}$$

d'où $U_\delta(k) U_\delta(f)x = \xi_{\delta}^{\mathbf{v}}(k) U_\delta(f)x$ et $U_\delta(f)x \in H_K^\delta$.

$$\text{Soit } U_{\delta}^{\mathbf{K}} : \mathfrak{K}_{\delta}^{\mathbf{K}}(G) \longrightarrow \mathfrak{E}nd(H_{\mathbf{K}}^{\delta})$$

$$f \longmapsto U_{\delta}(f)/H_{\mathbf{K}}^{\delta}.$$

Supposons que $\dim H_{\mathbf{K}}^{\delta} > 1$. Soit $H_{\mathbf{K}}^{\delta} = F_1^{\delta} \oplus F_2^{\delta}$ une décomposition de $H_{\mathbf{K}}^{\delta}$ en deux sous-espaces propres fermés invariants pour $U_{\delta}^{\mathbf{K}}$ et orthogonaux. Soit u_1 un vecteur non nul de F_1^{δ} . Considérons le plus petit sous-espace fermé H_1 de H contenant les vecteurs $U_{\delta}(f) u_1$ où f parcourt $\mathfrak{J}_c(G)$. Ce sous-espace est invariant pour U_{δ} . Montrons que H_1 est orthogonal à F_2^{δ} .

Soit u_2 un vecteur non nul de F_2^{δ} . On a :

$$U_{\delta}(k) u_1 = \xi_{\delta}(k) u_1 \quad \text{et} \quad U_{\delta}(k') u_2 = \xi_{\delta}(k') u_2 \quad \forall k, k' \in \mathbf{K}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} (U_{\delta}(f) u_1 | u_2) &= \int_G f(s) (U_{\delta}(s) u_1 | u_2) ds \\ &= \int_G \int_{\mathbf{K}} \int_{\mathbf{K}} f(s) \xi_{\delta}(k) \bar{\xi}_{\delta}(k') (U_{\delta}(s k^{-1}) u_1 | U_{\delta}(k'^{-1}) u_2) ds dk dk' \\ &= \int_G \int_{\mathbf{K}} \int_{\mathbf{K}} f(s) \xi_{\delta}(k) \bar{\xi}_{\delta}(k') (U_{\delta}(k' s k^{-1}) u_1 | u_2) ds dk dk' \\ &= \int_G \int_{\mathbf{K}} \int_{\mathbf{K}} f(k'^{-1} s k) \xi_{\delta}(k) \bar{\xi}_{\delta}(k') (U_{\delta}(s) u_1 | u_2) ds dk dk' \\ &= \int_{\mathbf{K}} \int_G \bar{\xi}_{\delta}(k') * f(s k) \xi_{\delta}(k) (U_{\delta}(s) u_1 | u_2) dk ds \\ &= \int_G \bar{\xi}_{\delta} * f * \xi_{\delta}(s) (U_{\delta}(s) u_1 | u_2) ds = (U_{\delta}(\bar{\xi}_{\delta} * f * \xi_{\delta}) u_1 | u_2) = 0 \end{aligned}$$

car $\bar{\xi}_{\delta} * f * \xi_{\delta} \in \mathfrak{K}_{\delta}^{\mathbf{K}}(G)$ pour tout $f \in \mathfrak{J}_c(G)$ et que F_1^{δ} est invariant par $U_{\delta}^{\mathbf{K}}$.

Par conséquent $H_1 \perp F_2^{\delta}$, donc distinct de H et il est aussi distinct de $\{0\}$

puisqu'il contient u_1 alors U_δ n'est pas irréductible (contradiction). Par suite $\dim H_K^\delta = 1$ et U est une représentation sphérique de type δ .

C.Q.F.D.

Proposition III-III-8 : Toute représentation unitaire U sphérique de type δ de G est irréductible.

Preuve : Soient M un sous-espace invariant fermé de H et P_M le projecteur orthogonal sur M . Pour tout $u \in H_K^\delta$, le vecteur $v = P_M u \in H_K^\delta$.

En effet, P_M commute avec U_δ donc pour $k \in K$

$$\begin{aligned} U_\delta(k)v &= U_\delta(k) P_M u = P_M U_\delta(k)u = P_M \xi_\delta(k)u \\ &= \xi_\delta(k) P_M u = \xi_\delta(k)v. \end{aligned}$$

Comme $\dim H_K^\delta = 1$ il existe un nombre complexe λ tel que $v = \lambda u$. Si $\lambda = 0$ alors $v = 0$ et $u \in M^\perp$, ainsi pour $x \in G$, $U_\delta(x)u \in M^\perp$ et comme u est cyclique on a $M^\perp = H$ et $M = \{0\}$.

Si $\lambda \neq 0$, $u = \lambda^{-1}v$, $v \in M$ donc $u \in M$ et pour tout $x \in G$, $U_\delta(x)u \in M$ et $H = M$. Par conséquent la représentation U est irréductible.

C.Q.F.D.

Nous allons déterminer les vecteurs K - δ -invariants pour la représentation induite et la représentation de 1-cocycle à gauche.

Proposition III-III-9 : Soient $G = A \times_{\alpha} K$ et $U^{\hat{L}\chi}$ la représentation induite de G dans $H^{\hat{L}\chi}$. Un vecteur u de $H^{\hat{L}\chi}$ est K - δ -invariant si et seulement si pour $k, k' \in K$

$$u_k(k') = \frac{1}{d(\delta)} \frac{\chi_{\delta}(k)}{\rho_k^{1/2}(k')} u(k')$$

Preuve : D'après la proposition III-I-2 on a

$$U_k^{\hat{L}\chi} u(k') = \rho_k^{1/2}(k') u(k') \quad \text{et si } u \in H_K^{\delta},$$

$$U_{\delta}^{\hat{L}\chi}(k)u(k') = \xi_{\delta}(k)u(k') \quad \text{et } u_k(k') = \frac{\xi_{\delta}(k)}{\rho_k^{1/2}(k')} u(k') = \frac{1}{d(\delta)} \frac{\chi_{\delta}(k)}{\rho_k^{1/2}(k')} u(k')$$

car $\chi_{\delta} = d(\delta) \xi_{\delta}$. La réciproque est évidente.

C.Q.F.D.

Proposition III-III-10 : Soient $G = A \times_{\alpha} K$ et U une représentation de 1-cocycle à gauche de G dans l'espace $H = \mathfrak{K}^X$. Le vecteur f est K - δ -invariant si et seulement si pour $k \in K$ et $x \in X$

$$\omega(k, k^{-1}x) {}_k f(x) = \frac{1}{d(\delta)} \chi_{\delta}(k) f(x) \quad \text{où } \omega \text{ est un 1-cocycle à}$$

gauche de G .

Preuve : Soit U une représentation de 1-cocycle à gauche.

$$\forall k \in K \text{ et } f \in \mathfrak{H}^X, \quad U_k f(x) = \omega(k, k^{-1}x) f(k^{-1}x).$$

$$f \in H_K^\delta \Leftrightarrow \omega(k, k^{-1}x) f(k^{-1}x) = \xi_\delta(k) f(x)$$

$$\Leftrightarrow \omega(k, k^{-1}x) {}_k f(x) = \frac{1}{d(\delta)} \chi_\delta(k) f(x). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. O. BARUT and R. RACZKA: Theory of group representations and applications, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1980.
- [2] N. BOURBAKI: Groupes et Algèbre de Lie, Elements de Math, chap. 2 et 3, Diffusion C.C.I.S, Paris, 1972.
- [3] J. DIEUDONNE : Eléments d'Analyse, Tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [4] J. DIEUDONNE : Eléments d'Analyse, Tome IV, Gauthier-Villars, Paris, 1975.
- [5] J. DIEUDONNE : Eléments d'Analyse, Tome VI, Gauthier-Villars, Paris 6^e, 1971.
- [6] J. DIXMIER : Les C*-Algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [7] J. FARAUT : Les Cours du CIMPA, Analyse Harmonique, Université de Nancy I, 1980.
- [8] A. GUICHARDET : Analyse Harmonique Commutative, Monographies Universitaires de Maths, Paris, 1968.
- [9] G. W. MACKEY : Infinite-dimensional group representations, Annals of Mathematics, Vol. 54, N°1, November 1951.
- [10] G. W. MACKEY : Induced representations of locally compact groups. Annals of Mathematics, Vol. 58, N°2, September 1953.
- [11] F. I. MAUTNER : Unitary representations of locally compact groups II. Annals of Mathematics, Vol. 52, n°3, November 1950.
- [12] F. I. MAUTNER : Unitary representations of locally compact groups I. Annals of Mathematics, Vol. 51, n°1, January 1950.
- [13] M. NAIMARK : Normed Algebras, 1959 Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, the Netherlands.

- [14] H. REITER : Classical Harmonic Analysis and locally compact groups, Oxford at the Clarendon Press, 1968.
- [15] M. SUGIURA : Unitary representation and Harmonic Analysis, Kodansha Scientific Books, 1928.
- [16] S. TOURE : Introduction à la Théorie des Représentations des Groupes Topologiques, Publications de l'IRMA, Université d'Abidjan, Mai 1991.
- [17] N. J. VILENKIN : Fonctions spéciales et Théorie de la Représentation des Groupes, Monographies Universitaires de Maths, Paris, 1969.
- [18] G. WARNER : Harmonic analysis on semi-simple Lie Group, Tome I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New-York, 1972.
- [19] G. WARNER : Harmonic Analysis on semi-simple Lie Groups, Tome II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New-York, 1972.
- [20] A. WAWRZYNCZYK : Group representations and Special Functions, D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [21] G. L. WERS-W.H. BOOTHBY : Symmetric Spaces, Department of Mathematics, Washington University ST Louis Missouri, 1972.