Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE DE COCODY

République de Côte d'Ivoire
Union-Discipline-Travail

N^{O} d'ordre : 365 / 2002

THESE

Présentée à l'UFR de Mathématiques et Informatique
pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT

Spécialité : **Mathématiques Pures**
Option : **Algèbre Commutative**

par

Abdoulaye ASSANE

Filtrations, Nature asymptotique de la largeur analytique, Conjecture de Okon

Soutenue le 31 juillet 2002

devant le Jury composé de :

Président : Saliou TOURE, Professeur à l'Université de Cocody

Examinateurs : Nouzha El YACOUBI, Professeur à l'Université de Rabat
Daouda SANGARE, Professeur à l'Université d'Abobo-Adjamé
Akry KOULIBALY, Professeur à l'Université de Bobo-Dioulasso
Emile KOUA KONIN, Maître de Conférences à l'Université de Cocody
Philippe AYEGNON, Maître de Conférences à l'ENS d'Abidjan

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Daouda SANGARE qui m'a proposé ce sujet dont il a constamment suivi l'évolution avec intérêt. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour les nombreux documents précieux qu'il a bien voulu mettre à ma disposition.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur Emile KOUA KONIN, Directeur de l'UFR-MI de l'Université de Cocody, d'avoir voulu s'intéresser à ce travail en acceptant la co-direction avec le Professeur Daouda SANGARE. Malgré ses nombreuses charges administratives, j'ai trouvé auprès de lui une disponibilité constante. Ses suggestions très précieuses m'ont permis de mener à bien cette thèse.

Je suis grandement redevable à Monsieur Philippe AYEGNON, Maître de Conférence à l'ENS d'Abidjan, qui a participé activement à l'élaboration de ce travail. Je le remercie vivement pour ses encouragements, ses conseils éclairés et son soutien permanent.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Saliou TOURE qui me fait l'honneur de présider le Jury.

Je suis très heureux d'avoir comme membres rapporteurs du Jury le Professeur Nouzha El YACOUBI de l'Université de Rabat, Maroc et le Professeur Akry KOULIBALY, Recteur de l'Université de Bobo-Dioulasso, Burkina Faso. Je les remercie pour leur grande disponibilité.

J'exprime d'abord ma grande reconnaissance à Monsieur Youssouf DIAGANA, Maître Assistant à l'Université d'Abobo-Adjamé qui a mis le document sous sa forme définitive après de nombreuses et longues séances de travail. Mes remerciements vont ensuite à Messieurs BIO Salifou, Damase KAMANO, Pascal TOGBE, Paul REY et Yoro GOZO tous membres du séminaire d'Algèbre de l'Université d'Abobo-Adjamé dirigé par le Professeur Daouda SANGARE.

Je remercie Mademoiselle Jocelyne Andrée ANGORAN et Monsieur Frederic KOUAME qui ont assuré la pénible tâche dactylographique de cette thèse.

Enfin je n'oublie pas Monsieur Adou N'CHO responsable de la bibliothèque de l'UFR-MI.

Introduction

Le concept de largeur analytique a été introduite par Northcott et Rees [10] de la manière suivante :

Soit I un idéal d'un anneau local nœthérien $(A, \mathfrak{M})$. La fonction φ_I : $n \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\dfrac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}\right)$ est polynomiale. La largeur analytique de I est définie par le nombre noté $\lambda(I) = 1 + d^\circ\varphi_I$, où $d^\circ\varphi_I$ est le degré du polynôme associé à φ_I. L'intérêt de ce nombre est dû aux nombreuses caractérisations qui ont été obtenues en relation avec plusieurs notions importantes de l'Algèbre Commutative. En remplaçant la suite $(I^n)_{n\geq 0}$ par une filtration $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la définition de $\lambda(I)$, se pose alors naturellement le problème de la généralisation aux filtrations de la notion de largeur analytique. Ce travail est en grande partie consacré à l'étude du comportement asymptotique de la fonction φ_f : $n \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ où $f = (I_n)$ est une filtration généralement nœthérienne sur l'anneau local $(A, \mathfrak{M})$. Plusieurs auteurs ont abordé la question de diverses manières :

D'abord J.S.Okon [11] utilise une caractérisation de $\lambda(I)$ pour définir la largeur analytique d'une filtration nœthérienne $f = (I_n)$ sur $(A, \mathfrak{M})$ en posant :

$$\ell(f) = \dim \frac{\Re(A, f)}{(u, \mathfrak{M})\,\Re(A, f)} \quad \text{où} \quad \Re(A, f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n X^n, \ X \text{ est une}$$

Indéterminée et $u = 1/X$.

Ensuite H. Dichi, Y. Diagana et D. Sangaré [4] utilisent la nature asymptotique de la fonction : $\varphi_f : n \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$.

Ils ont été confrontés à la question suivante : la fonction φ_f est-elle polynomiale ? Dans le cas où la réponse est positive, le degré de φ_f servira à définir la largeur analytique de f comme cela a été fait dans le cas des idéaux. Ils ont montré que la réponse est négative pour certaines filtrations nœthériennes. Au chapitre 1 de ce travail, nous rappelons quelques définitions et résultats qui ont pour objectif d'en faciliter une lecture indépendante. Au chapitre 2 nous donnons une réponse positive à la question (Théorèmes 2.3.2 et 2.3.4) pour des classes plus restreintes de filtrations nœthériennes, à savoir les filtrations I - bonnes et les filtrations fortement nœthériennes.

On sait d'après H. Dichi et D.Sangaré [5] que si f est nœthérienne, alors la fonction φ_f est quasi-polynomiale, nous déterminons (Proposition 2.4.3) sa période ainsi que le degré de chacun des polynômes associés.

Dans l'exemple 2.4.6, nous construisons une filtration A.P pour laquelle la fonction φ_f n'est pas quasi-polynomiale, donc pour ce type de filtration, on ne peut pas définir la largeur analytique à partir du concept de degré. Ceci nous amène à généraliser (définition 2.4.7) la notion de largeur analytique à une filtration quelconque.

Dans le chapitre 3, nous abordons la conjecture de J.S. Okon, posée dans [11] remarque 2.7 de la manière suivante : soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien. Pour toute filtration nœthérienne $f = (I_n)$ sur A, a-t-on

$$\gamma(f) = \gamma(I_n), \ \forall n \geq 1, \ \text{où } \gamma(f) = \dim \frac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)} \ ?$$

On sait (voir [6] Exemple 4.5 et Corollaire 5.8) que la réponse à cette question est négative en général pour les filtrations nœthériennes et qu'elle est positive pour les filtrations I−bonnes. Nous donnons une réponse négative à la question dans le cas des filtrations fortement nœthériennes (contre-exemple 3.2.9).

Chapitre I

Généralités

1 - 1 Dimension de Krull d'un module et longueur

1 - 1 - 1 Définition

Un idéal propre P de A est dit premier si $\forall x, y \in A$ la relation $xy \in P$ implique que $x \in P$ ou $y \in P$.

L'ensemble des idéaux premiers de A, noté $Spec(A)$ est appelé spectre de A.

Soit $P \in Spec(A)$; une chaîne d'idéaux premiers de A de longueur n et d'extrémité P, est une suite croissante d'idéaux premiers :

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \cdots \subset P_n = P.$$

On appelle hauteur de P et l'on note $ht(P)$, la longueur maximale des chaines d'idéaux premiers sur A d'extrémité P.

Pour un idéal quelconque I de A, la hauteur de I est définie par :

$$ht(I) = \inf\{ht(P),\ P \text{ idéal premier de } A \text{ contenant } I\}.$$

L'altitude de I est définie par :

$$alt(I) = \sup\{ht(P),\ P \text{ idéal premier minimal sur } I\}.$$

Un idéal premier contenant I est dit minimal sur I, s'il n'est strictement contenu dans aucun autre idéal premier contenant I.

1 - 1 - 2 Définition

La dimension de Krull d'un anneau A est définie par la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers sur A : $\dim A = \max_{P \in Spec(A)} ht(P)$.

Exemples

(i) Si k est un corps, $\dim k = 0$.

(ii) Tout anneau principal qui n'est pas un corps est de dimension 1 ($\dim \mathbb{Z} = 1$).

(iii) Soit k un corps, l'anneau des polynômes $k[X_1, ..., X_n]$ est de dimension n, la chaine d'idéaux premiers de longueur maximale considérée étant:

$$(0) \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \subset .... \subset (X_1, ..., X_n).$$

Si I est un idéal de A, la cohauteur de I est définie par :

$$coht(I) = \dim(A/I).$$

1 - 1 - 3 Définition

Un idéal propre de A qui n'est contenu dans aucun autre idéal propre de A est dit maximal. Un anneau local $(A, \mathfrak{M})$ est un anneau A qui n'a qu'un seul idéal maximal $\mathfrak{M}$.

Pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ d'un anneau A, l'anneau quotient $A/\mathfrak{M}$ est un corps, appelé corps résiduel de A.

1 - 1 - 4 Définition

Pour tout $A-$module M, l'ensemble $\{a \in A,\ aM = (0)\}$ est un idéal de A appelé annulateur de M, noté $Ann(M)$. La dimention de Krull de M est par difinition la dimension de Krull de l'anneau quotient $A/Ann(M)$.

Un élément $a \in A$ est dit diviseur de zéro dans M s'il existe $x \in M$, $x \neq 0$ tel que $ax = 0$. On notera $Z(M)$ l'ensemble des diviseurs de zéro de M.

1 - 1 - 5 Définition

Une famille $(x_1, x_2, \dots, x_{n, \dots})$ d'éléments de M est dite genératrice de M sur A, si tout élément de M est combinaison linéaire finie à coefficients dans A, des éléments $x_1, x_{2,} \cdots x_n \cdots$ On dit que M est un A module de type fini s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

Dans un anneau local, tous les systèmes minimaux d'éléments générateurs d'un module M de type fini, ont le même nombre d'éléments : $\mu(M)$ appelé nombre minimum d'éléments générateurs de M.

Un $A-$module M est dit nœthérien (respectivement artinien) si toute suite croissante (respectivement décroissante) de sous-modules de M est stationnaire. M est nœthérien équivaut à tout sous-module de M est de type fini.
Un anneau A est dit nœthérien, s'il est nœthérien en tant que $A-$module. On notera que tout module de type fini sur un anneau nœthérien est nœthérien et tout quotient d'un module nœthérien est nœthérien.

1 - 1 - 6 Définition

Une suite de composition de Jordan Hölder de longueur n sur un $A-$module M est une suite strictement décroissante de sous-modules de

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = (0)$$

telle qu'il n'existe pas de sous-module N de M vérifiant

$$M_i \supsetneq N \supsetneq M_{i+1} \text{ pour un } i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

Toutes les chaines de composition de Jordan Hölder sur M (si elles existent) ont la même longueur, appelée longueur de M sur A, noté $\ell_A(M)$. Si M n'a pas de chaine de composition Jordan Hölder, on pose $\ell_A(M) = +\infty$. Un $A-$module M est de longueur finie si et seulement s'il est nœthérien et artinien. Si A est nœthérien, alors la longueur de M est finie si et seulement si $\dim M = 0$.

<u>Exemples</u> :

(i) $\ell(M) = 0 \Longleftrightarrow M = (0)$

(ii) M est simple si et seulement si $\ell(M) = 1$ (M est dit simple s'il n'a pas de sous-modules propres).

(iii) pour tout espace vectoriel E sur un corps k, $\ell_k(E) = \dim_k(E)$

(iv) pour tout sous-module N de M, $\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N)$, plus généralement pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow M_{n \longrightarrow 0} \quad \text{de } A\text{-modules, on a :}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \; \ell(M_i) = 0.$$

Si $(A, \mathfrak{M})$ est un anneau local, alors $A/\mathfrak{M}$ est un corps, pour tout $A-$module M, $\dfrac{M}{\mathfrak{M}\, M}$ est un $A/\mathfrak{M}-$espace vectoriel. Si M est de type fini, alors :

$$\ell_A\left(\frac{M}{\mathfrak{M}\, M}\right) = \ell_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{M}{\mathfrak{M}\, M}\right) = \mu(M) \quad (*)$$

qui est le nombre minimum d'éléments générateurs de M sur A.

La formule $(*)$ sera très souvent utilisée dans ce travail dans le cas particulier où $M = I_n$ est un idéal de l'anneau local nœthérien $(A, \mathfrak{M})$ et où $n \in \mathbb{N}^*$.

1 - 2 Filtrations sur un anneau et sur un module

1 - 2 - 1 Définition

Soit A un anneau commutatif unitaire. une filtration sur A est une famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A tels que :
(i) $I_0 = A$, (ii) $I_{n+1} \subset I_n \forall n \in \mathbb{Z}$, (iii) $I_p I_q \subset I_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$.

Exemples

Si I est un idéal de A, la famille $f_I = (I^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $I^n = A\ \forall n \leq 0$, est une filtration sur A, appelée filtration $I-$adique. Si $f = (I_n)$ est une filtration sur A alors pour tout réel strictement positif λ, la famille $f^{(\lambda)} = \left(I_{\{n\lambda\}}\right)$ est une filtration sur A, où $\{n\lambda\}$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $n\lambda$. Si p est un entier, alors $f^{(p)} = (I_{np})_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $f = (I_n)$ est une filtration de A, alors $\sqrt{I_n} = \sqrt{I_1} \forall n \geq 1$ et $ht(I_n) = ht(I_1)\ \forall n \geq 1$. En effet, $I_1^n \subset I_n \subset I_1$ donc

$$\sqrt{I_1^n} \subset \sqrt{I_n} \subset \sqrt{I_1} = \sqrt{I_1^n} \quad \text{alors} \quad \sqrt{I_n} = \sqrt{I_1}.$$

$$ht(I_1) = \inf\{ht(P) : P \in V(I)\} \quad \text{où } V(I) = \{P \in Spec(A) : I \subset P\}.$$

Comme $I_n \subset I_1$, on a : $V(I_1) \subset V(I_n)$. Puisque $I_1^n \subset I_n$, alors $V(I_n) \subset V(I_1^n) = V(I_1)$. Ainsi $V(I_n) = V(I_1)$ d'où $ht(I_n) = ht(I_1)$.

L'ensemble des filtrations sur A est ordonné par la relation :
$(I_n) = f \leq g = (J_n)$ si $I_n \subset J_n\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Soit I un idéal d'un anneau A. Une filtration $f = (I_n)$ sur A est dite I–bonne si

(i) $I\,I_n \subset I_{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $I\,I_n = I_{n+1}\ \ \forall n >> 0$ c'est à dire pour tout n assez grand.

Une filtration $g = (J_n)$ sur A est dite f–bonne si $f \leq g$ et s'il existe un entier N tel que :

$$J_n = \sum_{P=1}^{N} I_{n-p}.J_p \quad \forall\, n \geq N.$$

Une filtration sur un A–module M est une famille $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-modules de M tels que : $M_0 = M$ et $M_{n+1} \subset M_n, \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Une filtration $f = (I_n)$ sur A est dite compatible avec une filtration (M_n) sur M, si $I_pM_q \subset M_{p+q}, \ \ \forall p, q \in \mathbb{Z}$.

Exemples

(i) Si (M_n) est une filtration sur M et N un sous-module de M, alors : $(N \cap M_n)$ est une filtration sur N et $\left(\dfrac{N + M_n}{N}\right)$ est une filtration sur M/N.

(ii) Si I est un idéal, la filtration I -adique de M est définie par : (I^nM).

(iii) Une filtration (M_n) sur un A–module M est dite I–bonne si :
$IM_n \subset M_{n+1}, \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$ et $\ \ I\,M_n = M_{n+1}, \forall n >> 0$.

(iv) Une filtration (M_n) sur M est dite f–bonne ($f = (I_n)$ une filtration sur A) s'il existe un entier N tel que : $\quad M_n = \sum_{P=1}^{N} I_{n-p}M_p.$

1 - 2 - 2 Anneaux gradués

Un anneau A est dit gradué s'il existe une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-groupes de A vérifiant :

(*i*) $A_n\, A_m \subset A_{n+m}\ \forall n, m \in \mathbb{Z}$

(*ii*) $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n.$

Un élément x de A qui est dans A_k est dit homogène de degré k.

L'élément unité de A appartient à A_0, qui est donc un sous-anneau de A. Chaque A_n est un A_0−module et A est une A_0−algèbre.

Soit $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ un anneau gradué.

Un A−module gradué est un A−module M pour lequel il existe une famille $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-groupes de M tels que :

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n \text{ et } A_pM_q \subseteq M_{p+q}, \ \forall p,q \in \mathbb{Z}.$$

Soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ un anneau gradué, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est nœthérien

(ii) A_0 est nœthérien et A est une A_0−algèbre de type fini.

<u>Exemple</u>

Soit A un anneau. L'anneau des polynômes à n indéterminées : $B = A[X_1, ..., X_n]$ est un anneau gradué par : $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$, où B_n est l'ensemble des polynômes homogènes de degré n complété par zéro.

1 - 2 - 3 Anneaux de Rees d'une filtration

Si $f = (I_n)$ est une filtration sur A, J un idéal de A, X une indéterminée, on **définit les anneaux gradués suivants :**

$$R(A,f) = \bigoplus_{n\geq 0} I_nX^n,\ \Re(A,f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_nX^n,\ (I_n = A, \text{ si } n \leq 0)$$

Un élément de $R(A,f)$ (respectivement de $\Re(A,f)$) s'écrit: $z = \sum_{n=p}^{q} a_nX^n$ avec $a_n \in I_n$, $p,q \in \mathbb{N}$ (respectivement $\mathbb{Z}$).

$$G_f(A) = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{I_n}{I_{n+1}},\ G_f(A,J) = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{I_n}{JI_n} \simeq \frac{R(A,f)}{JR(A,f)}.$$

$R(A,f)$ et $\Re(A,f)$ sont respectivement appelés l' anneau de Rees et l'anneau de Rees généralisé de f.

La multiplication dans $G_f(A)$ (respectivement $G_f(A, J)$) est définie par :

Pour $a \in I_n$ et $b \in I_p$ on pose : $(a + I_{n+1})(b + I_{p+1}) = ab + I_{n+p+1}$ (respectivement $(a + JI_n)(b + JI_p) = ab + JI_{n+p}$).

1 - 2 - 4 Filtrations nœthériennes

La filtration $f = (I_n)$ est dite nœthérienne sur un anneau nœthérien A, si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée (voir [3])

(i) $R(A, f)$ est nœthérien

(ii) $\Re(A, f)$ est nœthérien

(iii) $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_{nk} = I_k^n, \quad \forall n \geq 0$

(iv) $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_{m+j} = I_m I_j, \quad \forall j \geq m$.

$f = (I_n)$ est dite fortement nœthérienne sur un anneau nœthérien A, s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_{n+m} = I_n I_m \, \forall n, m \geq k$.

La filtration $f = (I_n)$ est dite $A.P$ (c'est à dire approximable par des puissances d'idéaux), si pour tout entier n, il existe un entier k_n tel que
$\forall m \in \mathbb{N} \; I_{k_n m} \subset I_n^m$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1$.

Dans un anneau nœthérien, nous avons la classification suivante des filtrations classiques (voir 6.2.8 de [14]).

$$\begin{array}{ccc} I - \text{adique} \Longrightarrow & I - \text{bonne} & \\ & \Downarrow & \\ & \text{fortement nœthérienne} & \\ & \Downarrow & \\ & \text{nœthérienne} & \Longrightarrow \; \mathrm{A \cdot P} \end{array}$$

1 - 2 - 5 Définition

Soit $f = (I_n)$ une filtration sur un anneau A, compatible avec une filtration $\phi = (M_n)$ sur un A−module M, alors :

$G_\phi(M) = \bigoplus\limits_{n\geq 0} \dfrac{M_n}{M_{n+1}}$ est un $G_f(A)$−module gradué.

La multiplication est définie par : $\forall p, q \in \mathbb{N},\ \forall a \in I_p,\ x \in M_q$

$$(a + I_{p+1})(x + M_{q+1}) = ax + M_{p+q+1}.$$

1 - 2 - 6 Cas particuliers:

Si I est un idéal de A et si $f = f_I = (I^n)$ est la filtration I−adique alors on note : $R(A, I) = R(A, f_I)$, $\Re(A, I) = \Re(A, f_I)$, $G_I(A) = G_{f_I}(A)$ et $G_I(A, J) = G_{f_I}(A, J)$ pour tout idéal J de A.

1 - 2 - 7 Filtrations entières sur une autre

Un élément x d'un anneau A est dit entier sur une filtration $f = (I_n)$ de A, s'il satisfait une équation de la forme: $x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_j x^{m-j} + \cdots + a_m = 0$ où $m \in \mathbb{N}$, $a_j \in I_j$, $0 \leq j \leq m$. Un idéal J est dit entier sur $f = (I_n)$ si tout élément de J est entier sur f.

Une filtration $g = (J_n)$ est dite entière sur $f = (I_n)$ si pour tout entier $n \geq 1$, J_n est entier sur $f^{(n)}$.

$g = (J_n)$ est dite fortement entière sur f si $f \leq g$ et si $R(A, g)$ est un $R(A, f)$−module de type fini.

1 - 3 Fonctions de Hilbert des modules gradués [6]

1 - 3 - 1 Définition

Soit $A = \bigoplus\limits_{n\geq 0} A_n$ un anneau gradué nœthérien de la forme $A = A_0[x_1, \cdots, x_r]$ où chaque x_i est homogène de degré $k_i \geq 1$, $M = \bigoplus\limits_{n\geq 0} M_n$ un A−module gradué de type fini, alors chaque M_n est un A_0−module de type fini.
Supposons que A_0 soit artinien, alors la longueur $\ell_{A_0}(M_n)$ est finie.
On peut donc définir la fonction $H(M, \text{-}) : n \longmapsto \ell_{A_0}(M_n)$, appelée fonction de Hilbert de M.

1 - 3 - 2 Fonctions polynomiales - Fonctions quasi-polynomiales

Soit un entier $d \geq -1$, une fonction $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est dite polynomiale de degré d s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré d tel que $\varphi(n) = P(n) \quad \forall n >> 0$.

Le polynôme nul est par convention de degré -1.

La fonction φ est dite quasi-polynomiale de période $k \in \mathbb{N}^*$ et de degré d s'il existe une famille $F = (F_0, F_1, \cdots, F_{k-1})$ de polynômes $F_j \in \mathbb{Q}[X]$ tels que :

(i) $\varphi(n) = F_j(n)$ si $n >> 0$ et $n \equiv j[k]$ $0 \leq j \leq k-1$

(ii) $\max\limits_{0 \leq j \leq k-1} (\deg F_j) = d.$

1 - 3 - 3 Fonctions additives

Soit $A = \bigoplus\limits_{n \geq 0} A_n$ un anneau gradué. Une fonction λ sur la catégorie des A_0-modules de type fini, est dite additive si pour toute suite exacte de A_0-modules :

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0, \quad \text{on a : } \lambda(M_2) = \lambda(M_1) + \lambda(M_3).$$

Dans ces conditions, pour toute suite exacte de A_0-modules :

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0, \quad \text{on a : } \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \lambda(M_k) = 0.$$

Soit $A = \bigoplus\limits_{n \geq 0} A_n$ un anneau gradué nœthérien, alors A_0 est nœthérien et A est un A_0-algèbre de type fini. On suppose que A est engendré par des éléments homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_r$ avec $d^\circ x_i = n_i$, $1 \leq i \leq r$. Soit $M = \bigoplus\limits_{n \geq 0} M_n$ un A-module gradué de type fini, alors chaque M_n est un A_0-module de type fini. On a le résultat suivant :

1 - 3 - 4 Théorème (Hilbert-Serre) 4.1.3 de [14]

Sous les hypothèses précédentes, pour toute fonction additive λ sur la catégorie des A_0-modules de type fini, la série de Poincaré $P(M,t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \lambda(M_n) t^n$

est une fonction rationnelle de la forme : $P(M,t) = \dfrac{f(t)}{\prod_{i=1}^{r}(1-t^{n_i})}$ *où* $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$. *L'ordre du pôle de* $P(M,t)$ *en* $t = 1$ *est noté* $\theta(M)$.

1 - 3 - 5 Corollaire 4.1.4 de [14]

Soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ *un anneau gradué nœthérien de la forme* $A = A_0[x_1, \cdots, x_r]$ *où chaque* x_i *est homogène de degré* 1. $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ *un* A*−module gradué de type fini, alors pour toute fonction additive sur la catégorie des* A_0*−modules de type fini, la fonction :* $n \longmapsto \lambda(M_n)$ *est polynomiale de degré* $\theta(M) - 1$.
Ce corollaire permet de déduire le théorème de Hilbert suivant :

1 - 3 - 6 Théorème de Hilbert 3.3 de [6]

Soient $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ *un anneau gradué nœthérien de la forme* $A = A_0[x_1, \cdots, x_r]$ *où chaque* x_i *est homogène de degré* 1, $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ *un* A*−module gradué de type fini, de dimension de Krull* d. *Supposons que* A_0 *soit artinien et local, alors la fonction de Hilbert* $H(M, -)$ *est polynomiale de degré* $d - 1$.

1 - 3 - 7 Remarque 3.4 de [6]

Le théorème de Hilbert n'est plus vrai s'il existe un x_i parmi les éléments générateurs de A sur A_0 qui soit de degré $k_i \geq 2$.
En effet, considérons : $A = k[X^d]$, où k est un corps et $d \geq 2$, un entier naturel. Soit $B = k[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans k. B est un anneau gradué par :

$B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ où B_n est l'ensemble des polynômes homogènes de degré n, complété par zéro, alors $A = k[X^d]$ est un sous-anneau gradué de B par : $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ avec $A_n = A \cap B_n$, on a :

$$A_n = \begin{cases} B_n \text{ si } n \equiv 0[d] \\ (0) \text{ sinon} \end{cases}$$

ainsi

$$\ell_k(A_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv 0[d] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases},$$

il est évident que la fonction $n \longmapsto \ell_k(A_n)$ ne peut être représentée par un polynôme. Cependant elle est quasi-polynomiale et plus généralement nous avons le résultat suivant :

1 - 3 - 8 Théorème de Hilbert généralisé 2.7 de [5]

Soient $A = \underset{n\geq 0}{\oplus} A_n$ un anneau gradué nœthérien de dimension de Krull finie, de la forme $A = A_0[x_1, \cdots, x_n]$, où chaque x_i est homogène de degré $k_i \geq 1$; $M = \underset{n\geq 0}{\oplus} M_n$ un $A-$module gradué de type fini de dimension d. On suppose A_0 artinien et on pose $k =$ p.p.c.m $(k_1, \cdots, k_n)$ alors :

(i) $H(M, -)$ est quasi-polynomiale de période k et de degré $d - 1$.

(ii) Si $F = (F_0, F_1, \cdots F_{k-1})$ est le quasi-polynôme associé à $H(M, -)$ alors :

$$d^0 F_0 = \max_{0\leq i\leq k-1} d^0 F_i = d - 1.$$

1 - 3 - 9 Théorème 4.3 de [6]

Soient A un anneau nœthérien de dimension finie, J un idéal de A et $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A. On suppose que $\frac{A}{J}$ est artinien. Alors la fonction :

$$n \longmapsto \ell_A\left(\frac{I_n}{JI_n}\right) \text{ est quasi-polynomiale de degré } \dim \frac{R(A,f)}{JR(A,f)} - 1.$$

Chapitre II

Nature asymptotique de la largeur analytique des filtrations $I-$bonnes et fortement nœthériennes

2 - 1 Largeur analytique des idéaux

2 - 1 - 1 Définition

Soient $(A,\mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, I un idéal de A. On considère l'anneau gradué $S = \underset{n\geq 0}{\oplus} \frac{I^n}{\mathfrak{M}I^n} = \underset{n\geq 0}{\oplus} S_n$ avec $S_n = \frac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}$.
On a $S_0 = A/\mathfrak{M}$, $S = S_0[t_1, \cdots t_n]$, où t_i est un élément homogène de degré 1. Alors le théorème de Hilbert (1.3.6) montre que la fonction

$$\varphi_I : n \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\frac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}\right) = \ell_{A/\mathfrak{M}} \left(\frac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}\right) \text{ est polynomiale.}$$

La largeur analytique de I est définie par le nombre $\lambda(I) = 1 + d^o\varphi_I$.

2 - 1 - 2 Caractérisation

D'après [10] si $A/\mathfrak{M}$ est un corps infini alors :

(i) $ht(I) \leq \lambda(I) \leq \mu(I)$, $\mu(I)$ est le nombre minimum d'éléments générateurs de I.

(ii) $\lambda(I) = \mu(J)$ où J est une réduction minimale de I.(On dit qu'un idéal J est une réduction d'un idéal I si $J \subset I$ et $I^{n+1} = JI^n$, $\forall n >> 0$)

(iii) $\lambda(I) =$ nombre maximum d'éléments analytiquement indépendants dans I. (Des éléments a_1, a_2, $\cdots a_n$ de I sont dits analytiquement indépendants dans I si pour tout polynôme homogène de degré p, $F \in A[X_1, \cdots, X_n]$, la condition : $F(a_1, a_2, \cdots a_n) \in I^p\mathfrak{M}$ implique que tous les coefficients de F sont dans $\mathfrak{M}$).

Sans aucune condition sur $A/\mathfrak{M}$ on a :

$$\text{(iv)} \qquad \lambda(I) = \dim \frac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)} = \dim \frac{\Re(A,I)}{(u,\mathfrak{M})\Re(A,I)}$$

$$\text{(v)} \quad \lambda(I) = \deg tr_{A/\mathfrak{M}} \left(\frac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)} \right) = \text{degré de transcendance sur } A/\mathfrak{M}$$

de l'anneau $\dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)}$ (le degré de transcendance d'un anneau A sur un anneau B est le nombre maximun d'éléments de A qui sont algébriquement indépendants dans B).

2 - 2 Généralisation aux filtrations

2 - 2 - 1 Définition

La première extension aux filtrations de la largeur analytique vient de J. S. Okon [11] qui utilise la caractérisation *(iv)* précédente, pour définir la largeur analytique d'une filtration nœthérienne $f = (I_n)$ sur $(A, \mathfrak{M})$ par :

$$\ell(f) = \dim \frac{\Re(A,f)}{(u,\mathfrak{M})\Re(A,f)}.$$

D'autres concepts de la largeur analytique d'une filtration ont été donnés par H. Dichi, Y. Diagana et D. Sangaré [4], en associant à chaque couple (J, f) composé d'un idéal J et d'une filtration f de A, les trois nombres suivants :

$$\gamma_J(f) = \dim \frac{R(A,f)}{JR(A,f)},$$

$$\lambda_J(f) = \dim \frac{\Re(A,f)}{(u,J)\Re(A,f)} \quad \text{et}$$

$$\tau_J(f) = \deg tr_{A/J} \frac{R(A,f)}{JR(A,f)}.$$

Rappelons les résultats des propositions 2.4 et 2.12 de [4].

2 - 2 - 2 Théorème [4]

Soit $f = (I_n)$ une filtration sur un anneau A et J un idéal de A, alors :

(i) *pour tout entier $p \geq 1$,*

$$\gamma_J(f^{(p)}) = \gamma_J(f); \ \lambda_J(f^{(p)}) = \lambda_J(f).$$

(ii) *en particulier pour un idéal I de A et un entier $p \geq 1$,*

$$\gamma_J(I^p) = \gamma_J(I); \;\; \lambda_J(I^p) = \lambda_J(I).$$

(iii) *si f et A sont nœthériens, alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\gamma_J(f) = \gamma_J(I_{nk}); \;\; \lambda_J(f) = \lambda_J(I_{nk}).$$

Si de plus $J \supset I_1$, alors $\lambda_J(f) = \gamma_J(f)$.

(iv) *si f et A sont nœthériens et $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A contenant I_1, alors*

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(f) = \lambda_{\mathfrak{M}}(f) = \tau_{\mathfrak{M}}(f).$$

2 - 2 - 3 Théorème 5.6 de [6]
Soit $f \leq g$ deux filtrations sur un anneau A et J un idéal de A, on suppose que g est entière sur f, alors :

(i) $\gamma_J(g) = \gamma_J(f)$; $\lambda_J(g) = \lambda_J(f)$.

(ii) *Si de plus A et g sont nœthériens, alors f est nœthérienne et si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal, alors $\tau_{\mathfrak{M}}(g) = \tau_{\mathfrak{M}}(f)$.*

2 - 3 Nature asymptotique de la largeur analytique

Ces différentes définitions (citées plus haut) de la largeur analytique ne tiennent pas compte du comportement asymptotique de la fonction :

$\varphi_f : n \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n} \right)$ comme dans le cas des idéaux.

Cette observation a amené H. Dichi, Y. Diagana et D. Sangaré [4] à poser la question de savoir si φ_f est polynomiale ou quasi-polynomiale afin d'utiliser son degré pour définir la largeur analytique de f. Or il existe au moins une filtration nœthérienne comme l'indique la remarque 0 - 3 suivante de [4], pour laquelle φ_f n'est pas polynomiale.

2 - 3 - 1 Remarque

Soit $A = k[[X,Y]]$, où k est un corps. $\mathfrak{M} = (X,Y)$ l'idéal maximal de A. On considère la filtration $f = (I_n)$ définie par $I_{2n-1} = I_{2n} = \mathfrak{M}^n$ pour tout entier $n \geq 1$. Alors f est nœthérienne et on a :

$$\varphi_f(2n) = \varphi_f(2n-1) = n+1.$$

La fonction φ_f ainsi définie n'est pas polynomiale.
Cependant si f est I−bonne, nous allons montrer que φ_f est polynomiale.

2 - 3 - 2 Théorème

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœtherien, I un idéal de A et $f = (I_n)$ une filtration I−bonne sur A. Alors la fonction : $\varphi_f : n \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M} I_n}\right)$ est polynomiale de degré $\dim \dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}\, R(A,f)} - 1.$

Preuve

I est un idéal de A qui est nœthérien donc la filtration I−adique $f_I = (I^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nœthérienne. Par conséquent $R(A,I) = \underset{n \geq 0}{\oplus} I^n X^n$ est nœthérien et donc l'anneau quotient $\dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)}$ aussi.

Si $I = (a_1, \cdots, a_n)$, alors $R(A,I) = A[a_1 X, \cdots, a_n X]$ et

$$\begin{aligned}
\frac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)} &= A/\mathfrak{M}[a_1X + \mathfrak{M}R(A,I), \cdots, a_nX + \mathfrak{M}R(A,I)] \\
&= A/\mathfrak{M}[a_1X + \mathfrak{M}I\,X, \cdots, a_nX + \mathfrak{M}I\,X] \\
&\simeq A/\mathfrak{M}[a_1 + \mathfrak{M}I, \cdots, a_n + \mathfrak{M}I] \quad \text{(voir 5.3.4 de [14])}
\end{aligned}$$

alors $\dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)} = \underset{n \geq 0}{\oplus} \dfrac{I^n}{\mathfrak{M}\, I^n}$ est un anneau gradué nœthérien engendré sur son groupe homogène de degré zéro qui est $A/\mathfrak{M}$ par des éléments homogènes de degré 1.

$f = (I_n)$ est I−bonne sur l'anneau nœthérien A. Alors d'après [7] Corollaire 3.6, f est fortement entière sur la filtration I−adique. Ceci signifie que $R(A,f) = \underset{n \geq 0}{\oplus} I^n X^n$ est un $R(A,I)$−module de type fini. On munit $\dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)} = \underset{n \geq 0}{\oplus} \dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}$ d'une structure de $\dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)} = \underset{n \geq 0}{\oplus} \dfrac{I^n}{\mathfrak{M}\, I^n}$−module de la manière suivante $\forall\ a_p \in I^p, b_q \in I_q$ on pose

$$(a_p + \mathfrak{M}\, I^p)(b_q + \mathfrak{M} I_q) = a_p\, b_q + \mathfrak{M} I_{p+q}.$$

Cette définition de la multiplication est indépendante des représentants choisis : en effet soient $a'_p \in I^p$, $b'_q \in I_q$ tels que :

$$a_p - a'_p \in \mathfrak{M} I^p \text{ et } b_q - b'_q \in \mathfrak{M} I_q$$

$$\begin{array}{ll} \text{alors} & a_p b_q - a'_p b'_q = a_p(b_q - b'_q) + b'_q(a_p - a'_q) \\ \text{or} & a_p(b_q - b'_q) \in I^p \mathfrak{M} I_q \subset \mathfrak{M} I_{p+q} \\ \text{et} & b'_q(a_p - a'_p) \in I_q \mathfrak{M} I^p \subset \mathfrak{M}\, I_{p+q} \\ \text{donc} & a_p b_q - a'_p b'_q \in \mathfrak{M}\, I_{p+q}. \end{array}$$

D'une façon générale si $\alpha \in R(A, I)$ et $x \in R(A, f)$, alors on pose : $(\alpha + \mathfrak{M}\, R(A, I))(x + \mathfrak{M}\, R(A, f)) = \alpha x + \mathfrak{M}\, R(A, f)$. Si $b_1, \ldots, b_s$ sont les éléments générateurs de $R(A, f)$ sur $R(A, I)$ alors $b_1 + \mathfrak{M} R(A, f), \ldots,$ $b_s + \mathfrak{M}\, R(A, f)$ engendrent $\dfrac{R(A, f)}{\mathfrak{M} R(A, f)}$ en tant que $\dfrac{R(A, I)}{\mathfrak{M} R(A, I)}$−module. En effet, si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \alpha_i b_i \in R(A, f), \alpha_i \in R(A, I)$ alors

$$\sum_{i=1}^{s} (\alpha_i + \mathfrak{M} R(A, I))(b_i + \mathfrak{M} R(A, f)) = \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i b_i\right) + \mathfrak{M} R(A, f) = x + \mathfrak{M} R(A, f).$$

Ainsi $\dfrac{R(A, f)}{\mathfrak{M} R(A, f)} = \displaystyle\bigoplus_{n \geq 0} \dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}$ est un $\dfrac{R(A, I)}{\mathfrak{M} R(A, I)}$ -module gradué de type fini et de dimension finie, puisque la dimension de A est finie en tant que anneau local nœthérien et que $\dim \dfrac{R(A, f)}{\mathfrak{M} R(A, f)} \leq \dim R(A, f) \leq 1 + \dim A$ (4.4.12 de [2]).

En application du théorème de Hilbert (1.3.6) avec $\dfrac{R(A, I)}{\mathfrak{M} R(A, I)} = \displaystyle\bigoplus_{n \geq 0} \dfrac{I^n}{\mathfrak{M}\, I^n}$ pour anneau gradué et $\dfrac{R(A, f)}{\mathfrak{M} R(A, f)} = \displaystyle\bigoplus_{n \geq 0} \dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}$ pour module gradué, on déduit que la fonction $\varphi_f : n \longmapsto \ell_{A/\mathfrak{M}} \left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}\right) = \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M} I_n}\right)$ est polynomiale de degré $\dim_B \dfrac{R(A, f)}{\mathfrak{M} R(A, f)} - 1$, où $B = \dfrac{R(A, I)}{\mathfrak{M} R(A, I)}$.

On a
$$Ann_B\left(\frac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}\right)=\frac{R(A,I)\cap\mathfrak{M}R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,I)}$$
et
$$\frac{\dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)}}{\dfrac{R(A,I)\cap\mathfrak{M}R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,I)}}\simeq\frac{R(A,I)}{R(A,I)\cap\mathfrak{M}R(A,f)}$$
donc
$$\dim_B\frac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}=\dim\frac{R(A,I)}{R(A,I)\cap\mathfrak{M}R(A,f)}.$$
Comme f est $I-$bonne, alors $R(A,f)$ est entier sur $R(A,I)$, donc $\dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}$ est entier sur $\dfrac{R(A,I)}{R(A,I)\cap\mathfrak{M}R(A,f)}$, ainsi
$\dim\dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}=\dim\dfrac{R(A,I)}{R(A,I)\cap\mathfrak{M}R(A,f)}=\dim_B\dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}$, donc

Exemple d'application du théorème 2 - 3 - 2

Soit $A=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. A est un anneau local nœthérien d'idéal maximal $\mathfrak{M}=2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On a $\mathfrak{M}^2=(0)$. Soit $f=(I_n)$ avec $I_0=A$, $I_1=I_2=\mathfrak{M}$ et $I_n=(0)$ $\forall n\geq 3$. Alors f est une filtration $\mathfrak{M}-$bonne qui n'est pas adique et on a :
$$\varphi_f(n)=0\ \forall n\geq 3.$$

2 - 3 - 3 Remarque :

Dans [1], nous avons montré que $\deg(\varphi_f)=\deg(\varphi_I)$ pour toute filtration $I-$bonne f. Donc $\deg(\varphi_f)$ ne dépend pas de la filtration $I-$bonne f.

Dans ce qui suit, nous étudions la nature asymptotique de la fonction φ_f pour les filtrations fortement nœthériennes. Nous avons le résultat suivant :

2 - 3 - 4 Théorème

Soient $(A,\mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f=(I_n)$ une filtration fortement nœthérienne sur A. Alors la fonction :
$\varphi_f : n\longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ *est polynomiale de degré* $\dim\dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}-1$.

On aura besoin du lemme suivant :

2 - 3 - 5 Lemme

Deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ qui coïncident en une infinité de points sont égaux.

Preuve

Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ vérifiant les hypothèses du lemme. Posons $d = d^0(P-Q)$. Si $P-Q \neq 0$, alors $P-Q$ n'a au plus que d racines. Or les racines de $P-Q$ sont les x_i tels que $P(x_i) = Q(x_i)$, qui sont en nombre infini par hypothèse, donc $P-Q=0$, d'où $P=Q$.

Preuve du théorème 2.3. 4

$f = (I_n)$ étant fortement nœthérienne, alors $f^{(n)} = (I_{np})_p = (I_n^p)_p = f_{I_n}$ $\forall n >> 0$, où f_{I_n} est la filtration I_n-adique, donc d'après le théorème 2.3.2 la fonction $\varphi_{f^{(n)}} \; : \; p \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\dfrac{I_{np}}{\mathfrak{M} I_{np}} \right)$ est polynomiale. Soit P_n son polynôme associé, alors $d^\circ P_n = \dim \dfrac{R(A, f^{(n)})}{\mathfrak{M} R(A, f^{(n)})} - 1 = \dim \dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M} R(A,f)} - 1$ (voir 5.5 de [5])

Ainsi $d^\circ P_n$ ne dépend pas de n et tous les P_n ont le même degré d pour $n >> 0$. On peut alors écrire $P_n(X) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_{n,i} X^i$ où $\alpha_{n,i} \in \mathbb{Q}$.

Soient $n, k >> 0, \;\; s \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} P_n(ks) &= \sum_{i=0}^{d} \alpha_{n,i} (ks)^i \\ &= \varphi_{f^{(n)}}(ks) \\ &= \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\frac{I_{nks}}{\mathfrak{M}\, I_{nks}} \right) \\ &= \varphi_{f^{(k)}}(ns) \\ &= P_k(ns) \\ &= \sum_{i=0}^{d} \alpha_{k,i} (ns)^i \end{aligned}$$

où $\alpha_{k,i} \in \mathbb{Q}$, sont les coefficients de P_k. Ainsi $\sum_{i=0}^{d} (\alpha_{n,i} k^i) s^i = \sum_{i=0}^{d} (\alpha_{k,i} n^i) s^i$.

En fixant n et k on a l'égalité de deux polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$ à savoir $\sum_{i=0}^{d}(\alpha_{n,i}k^i)X^i$ et $\sum_{i=0}^{d}(\alpha_{k,i}n^i)X^i$ en tout point $s \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme 2.3.5, ces deux polynômes sont égaux. Par conséquent les coefficients de leurs monômes de même degré sont deux à deux égaux, donc :

$$\begin{aligned} \alpha_{n,i}\, k^i &= \alpha_{k,i} n^i\ , \quad i = 0, 1, \ldots d \\ \text{soit} \quad \frac{\alpha_{n,i}}{n^i} &= \frac{\alpha_{\,k,i}}{k^i} \end{aligned}$$

Ce rapport est donc indépendant des entiers n et k.

Posons $\alpha_i = \frac{\alpha_{n,i}}{n^i}$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i X^i$ on a :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \sum_{i=0}^{d} \alpha_i n^i X^i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \alpha_i (nX)^i \\ &= P(nX) \ (*) \quad \forall n >> 0 \end{aligned}$$

Pour tout $n, k >> 0$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_f(nk) = &\ \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_{nk}}{\mathfrak{M} I_{nk}}\right) \\ = &\ \varphi_{f(n)}(k) \\ = &\ P_n(k) \\ = &\ P(nk) \text{ (d'après *)}. \end{aligned}$$

Ainsi φ_f coïncide avec le polynôme P sur les entiers de la forme nk avec $n, k >> 0$.

$f = (I_n)$ étant fortement nœthérienne, donc nœthérienne, φ_f est quasi-polynomiale d'après 1.3.9.

Il existe alors k polynômes $F_0, F_1, \cdots, F_{k-1} \in \mathbb{Q}[X]$ tels que :

$$\varphi_f(nk + j) = F_j(nk + j) \ \ 0 \leq j \leq k - 1 \forall n >> 0.$$

Pour tout $n,\ s >> 0$ et $j = 0, 1, \cdots, k-1$ on a :

$$\begin{aligned}
P((sk+j)(nk+1)) &= \varphi_f((sk+j)(nk+1)) \\
&= \varphi_f(snk^2 + sk + jnk + j) \\
&= \varphi_f((snk + s + jn)k + j) \\
&= F_j((snk + s + jn)k + j) \\
&= F_j((sk+j)(nk+1)).
\end{aligned}$$

Ainsi P et F_j sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui coïncident en une infinité de points.
Alors d'après le lemme 2.3.5, $P = F_j$ pour $0 \leq j \leq k-1$ donc
$P = F_0 = F_1 = \cdots = F_{k-1}$.

On en déduit que φ_f est polynomiale de polynôme associé P.
Le théorème 2.3.4 nous permet d'étendre aux filtrations fortement nœthériennes la notion de largeur analytique au sens de Northcott et Rees.

2 - 3 - 6 Définition

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien. $f = (I_n)$ une filtration fortement nœthérienne sur A. On appelle largeur analytique de f le nombre

$$\gamma(f) = 1 + d^\circ\varphi_f \text{ où } \varphi_f : n \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right).$$

2 - 3 - 7 Remarque

Comme $d^\circ\varphi_f = \dim \dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)} - 1$, on a : $\gamma(f) = d^\circ\varphi_f + 1 = \dim \dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}$.

On obtient la généralisation aux filtrations de la caractérisation 2.1.2 (iv) de la largeur analytique des idéaux.

2 - 4 Fonctions quasi-polynomiales de Samuel-Hilbert

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A.

D'après le théorème 1.3.2 la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}\right)$ est quasi-polynomiale.
Nous allons apporter des résultats complémentaires à ce théorème en précisant

la période de ce quasi-polynôme, ainsi que le degré de chacun des polynômes qui le constituent.

On pose $R(M,I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n M$ le module de Rees du module M relativement à un idéal I.

2 - 4 - 1 Lemme

Soient $(A,\mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, I un idéal de A, M un $A-$module de type fini. Alors la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}\, I^nM}\right)$ est polynomiale de degré $\dim_B \dfrac{R(M,I)}{\mathfrak{M}R(M,I)} - 1$, où $B = \dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)}$.

Preuve

Notons d'abords que $\ell_A\left(\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}\, I^nM}\right) = \dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}}\left(\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}\, I^nM}\right) = \mu(I^nM)$ qui est fini puisque I^nM est un module de type fini sur l'anneau local $(A,\mathfrak{M})$ (voir 5.3.1 et 5.3.4 de [14]).

A est un anneau nœthérien, M un $A-$module de type fini, alors $R(M,I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^nM$ est un $R(A,I)-$module de type fini (voir 2.4 de [14]).
Nous pouvons construire sur $\dfrac{R(M,I)}{\mathfrak{M}R(M,I)} = \bigoplus_{n\geq 0}\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}\, I^nM}$ une structure de $\dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)} = \bigoplus_{n\geq 0}\dfrac{I^n}{\mathfrak{M}\, I^n}-$module de type fini. Or $\dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)}$ est un anneau gradué nœthérien engendré par des éléments homogènes de degré 1 sur son groupe homogène de degré zéro qui est $A/\mathfrak{M}$ (voir 3.4 de [6]).
Ainsi, d'après le théorème de Hilbert 1.3.6, la fonction :

$n \longmapsto \ell_{A/\mathfrak{M}}\left(\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}\, I^nM}\right) = \ell_A\left(\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}\, I^nM}\right)$ est polynomiale de degré $\dim_B \dfrac{R(M,I)}{\mathfrak{M}R(M,I)} - 1$.

2 - 4 - 2 Définition

Soit $f = (I_n)$ une filtration neothérienne sur A. On appelle rang de f le nombre :

$$k = \inf\{s \in \mathbb{N}^* \,/\, I_{n+s} = I_s\, I_n\, \forall n \geq s\}.$$

Si $k = rang(f)$, alors $I_{nk} = I_k^n \ \forall \ n \geq 0$

2 - 4 - 3 Proposition

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A de rang k. Alors :

(i) La fonction $\varphi_f : n \mapsto \ell_A \left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M} I_n} \right)$ est quasi-polynomiale de période k.

(ii) Si $(F_0, F_1, \cdots, F_{k-1})$ est le quasi-polynôme associé à φ_f, alors :

$$d^\circ F_i = \dim_B \frac{R(I_{k+i}, I_k)}{\mathfrak{M} R(I_{k+i}, I_k)} - 1 \textit{ avec } B = \frac{R(A, I_k)}{\mathfrak{M} R(A, I_k)},$$

où I_{k+i} est considéré comme un $A-$module.

Preuve

$f = (I_n)$ est une filtration nœthérienne de rang k, alors $\forall n \geq k, \ \ I_{n+k} = I_n I_k$, ainsi $I_{nk+i} = I_k^{n-1} I_{k+i} \ \ \forall n \geq 1, \ \ 0 \leq i \leq k-1$

donc $\ell_A \left(\dfrac{I_{nk+i}}{\mathfrak{M} I_{nk+i}} \right) = \ell_A \left(\dfrac{I_k^{n-1} I_{k+i}}{\mathfrak{M} \, I_k^{n-1} I_{k+i}} \right)$.

En posant $M = I_{k+i}$ et $I = I_k$ dans le lemme 2.4.1 précédent, on déduit que la fonction

$n \longmapsto \ell_A \left(\dfrac{I_{nk+i}}{\mathfrak{M} I_{nk+i}} \right)$ est polynomiale de degré $\dim_B \dfrac{R(I_{k+i}, I_k)}{\mathfrak{M} R(I_{k+i}, I_k)} - 1$ où $B = \dfrac{R(A, I_k)}{\mathfrak{M} R(A, I_k)}$.

Soit P_i le polynôme associé à cette fonction, posons $F_i(X) = P_i \left(\dfrac{X - i}{k} \right)$ $0 \leq i \leq k-1$.

Pour tout $n >> 0$ tel que $n \equiv i[k]$, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que :

$$
\begin{aligned}
n &= ks+i \qquad\qquad 0 \leq i \leq k-1 \\
\ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) &= \ell_A\left(\frac{I_{ks+i}}{\mathfrak{M}I_{ks+i}}\right) \\
&= P_i(s) \\
&= P_i\left(\frac{n-i}{k}\right) \\
&= F_i(n).
\end{aligned}
$$

Ce qui prouve que la fonction $\varphi_f : n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}\right)$ est quasi -polynomiale de période k.

On a : $d^\circ F_i = d^\circ P_i = \dim_B \dfrac{R(I_{k+i}, I_k)}{\mathfrak{M}R(I_{k+i}, I_k)} - 1.$

2 - 4 - 4 Remarque

Dans le théorème 1.3.9, la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}\right)$ n'est pas nécessairement quasi-polynomiale si la filtration $f = (I_n)$ n'est pas nœthérienne, comme l'indique l'exemple suivant :

<u>**Exemple**</u> 2.3 de [12]

Soit $A = \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{X^2} = \mathbb{Z}[x]$ avec $x^2 = 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$
e_n = \begin{cases} \dfrac{2}{3}(2^{2k-2}-1)+r+1 & \text{si } n = 2^{2k-1}+r\,,\ 0 \leq r < 2^{2k-1} \\[2ex] \dfrac{2}{3}(2^{2k}-1) & \text{si } n = 2^{2k}+r,\ 0 \leq r < 2^{2k} \end{cases}
$$

On pose $I_n = (2^n, 2^{e_n}x)$, alors $f = (I_n)$ est une filtration sur A, de cohauteur nulle, d'altitude $s = 1$ et telle que : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{s\,!}{n^s}\ell_A\left(\dfrac{A}{I_n}\right)$ n'existe pas. Ainsi d'après 6.3.8 de [14], la filtration $f = (I_n)$ n'est pas $A.P$ donc elle n'est pas nœthérienne puisque l'anneau A est nœthérien.

Posons $\mathfrak{M} = (3, x)$, $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de A, donc $A/\mathfrak{M}$ est un corps donc artinien.

On a $\mathfrak{M}\, I_n = (3 \cdot 2^n, 3 \cdot 2^{e_n}, 2^n x)$. En considérant la suite de Jordan suivante :

$I_n = (2^n, 2^{e_n}x) \supset (2^n, 2^{e_n+1}x) \supset \cdots \supset (2^n, 2^n x) \supset (2^n, 3\cdot 2^{e_n}x, 2^n x) \supset (3\cdot 2^n, 3\cdot 2^{e_n}x, 2^n x) = \mathfrak{M}\, I_n$

On déduit que $\ell_A\left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}\right) = n - e_n + 2.$

On suppose que $\varphi_f : n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}\right)$ est quasi-polynomiale, alors il existe un entier s tel que la fonction $ns \longmapsto \varphi_f(ns)$ soit polynomiale. Deux cas peuvent se présenter pour s.

<u>1er cas</u> : $s = 2^{2k-1} + r$ avec $0 \leq r < 2^{2k-1}$

a) Si $n = 2^{2k'}$ alors $ns = 2^{2(k+k')-1} + r\cdot 2^{2k'}$ avec $0 \leq r\cdot 2^{2k'} < 2^{(2k+k')-1}$

$$
\begin{aligned}
\text{ainsi} \qquad e_{ns} &= \frac{2}{3}\left(2^{2(k+k')-2} - 1\right) + r\cdot 2^{2k'} + 1\\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}n(s-r) - 1\right] + nr + 1\\
&= \frac{1}{3}ns + \frac{2}{3}nr + \frac{1}{3}\\
\varphi_f(ns) &= \ell_A\left(\frac{I_{ns}}{\mathfrak{M}\, I_{ns}}\right)\\
&= ns - e_{ns} + 2\\
&= ns - \frac{1}{3}ns - \frac{2}{3}nr - \frac{1}{3} + 2\\
&= \frac{2}{3}ns - \frac{2}{3}nr + \frac{5}{3}\\
&= ns\left(\frac{2}{3} - \frac{2\,r}{3\,s}\right) + \frac{5}{3}\\
&= P(ns) \text{ avec } P(X) = aX + b \in \mathbb{Q}[X] \text{ avec}\\
a &= \frac{2}{3} - \frac{2\,r}{3\,s},\ b = 5/3
\end{aligned}
$$

b) Si $n = 2^{2k'-1}$ $ns = 2^{2(k+k'-1)} + r\cdot 2^{2k'-1}$, $0 \leq r\cdot 2^{2k'-1} < 2^{2(k+k'-1)}$.

Alors $e_{ns} = \frac{2}{3}(2^{2(k+k'-1)} - 1)$

$$\begin{aligned}
e_{ns} &= \frac{2}{3}[n(s-r)-1] \\
&= \frac{2}{3}ns - \frac{2}{3}nr - \frac{2}{3} \\
\varphi_f(ns) &= \frac{1}{3}ns + \frac{2}{3}nr + \frac{8}{3} \\
&= ns\left(\frac{1}{3} + \frac{2\,r}{3\,s}\right) + \frac{8}{3} \\
&= Q(ns) \text{ avec } Q(X) = a'X + b' \in \mathbb{Q}[X] \text{ avec}
\end{aligned}$$

$$a' = \frac{1}{3} + \frac{2\,r}{3\,s} \text{ et } b' = \frac{8}{3}.$$

Or si la fonction $ns \longmapsto \varphi_f(ns)$ était polynomiale, elle ne pourrait être représentée que par un seul polynôme; comme $P \neq Q$, cette fonction n'est pas polynomiale pour cet entier s.

<u>**2e cas**</u> : $s = 2^{2k} + r$ avec $0 \leq r < 2^{2k}$

a) si $n = 2^{2k'}$ comme précédemment, on montre que :

$$\begin{aligned}
\varphi_f(ns) &= ns\left(\frac{1}{3} + \frac{2\,r}{3\,s}\right) + \frac{8}{3} \\
&= Q(ns) \\
\text{b) si } n &= 2^{2k'-1} \\
\varphi_f(ns) &= ns\left(\frac{2}{3} + \frac{2\,r}{3\,s}\right) + \frac{5}{3} = P(ns)
\end{aligned}$$

ainsi pour tout entier s, la fonction : $ns \longmapsto \ell_A\left(\frac{I_{ns}}{\mathfrak{M}\,I_{ns}}\right)$ n'est pas polynomiale, donc la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}\,I_n}\right)$ ne peut être quasi-polyomiale.

2 - 4 - 5 Remarque

La filtration non nœthérienne étudiée dans l'exemple précédent, n'est pas non plus $A.P$, donc le problème de la nature asymptotique de la fonction φ_f

reste posé pour ce type de filtration. Dans l'exemple suivant nous verrons que φ_f n'est pas nécessairement quasi-polynomiale pour les filtrations $A.P$.

2 - 4 - 6 Exemple

Soit $A = k[[X,Y]]$, où k est un corps et $\mathfrak{M} = (X,Y)$ l'idéal maximal de A.

Soit $f = (I_n)$ la filtration $\mathfrak{M}$-adique définie par $I_n = \mathfrak{M}^n$, $\forall n \geq 0$, et $\lambda > 1$ un irrationel. Considérons la filtration $f^{(\lambda)} = (J_n)$, où $J_n = I_{\{n\lambda\}}$. Montrons que $f^{(\lambda)}$ est une filtration $A.P$, pour laquelle la fonction $\varphi_{f^{(\lambda)}}$ n'est pas quasi-polynomiale.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $n\lambda \leq \{n\lambda\} < n\lambda + 1 < n\lambda + \lambda$

$\forall s \in \mathbb{N}^*$, on a : $n\lambda s \leq \{n\lambda\}s < n\lambda s + \lambda s$

donc $\{n\lambda\}s \leq \{n\lambda s + \lambda s\}$ alors $\mathfrak{M}^{\{(n+1)s\lambda\}} \subset \mathfrak{M}^{\{n\lambda\}s}$, soit $J_{(n+1)s} \subset J_n^s$.

Ainsi pour tout entier n, il existe un entier $k_n = n + 1$ tel que $\forall s \in \mathbb{N}$: $J_{k_n s} \subset J_n^s$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1$, ce qui prouve que la filtration $f^{(\lambda)}$ est $A.P$.

$\forall n \geq 1$, $\varphi_f(n) = n + 1$, donc $\varphi_{f^{(\lambda)}}(n) = \{n\lambda\} + 1$.

Si la fonction $\varphi_{f^{(\lambda)}}$ était quasi-polynomiale, alors il existerait un entier $k \geq 1$ tel que la fonction $nk \longmapsto \varphi_{f^{(\lambda)}}(nk)$ soit polynomiale. Comme $\varphi_{f^{(\lambda)}}(nk) = \{nk\lambda\} + 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{nk}\varphi_{f^{(\lambda)}}(nk) = \lambda$; donc si la fonction $nk \longmapsto \varphi_{f^{(\lambda)}}(nk)$ est polynomiale, alors le degré du polynôme associé est égal à 1. On aurait donc :

$$\varphi_{f^{(\lambda)}}(nk) = nk\lambda + b, \; b \in \mathbb{Q} \; \forall n >> 0.$$

Comme $\varphi_{f^{(\lambda)}}(nk)$ est un entier naturel, λ est nécessairement un rationnel, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc la fonction $nk \longmapsto \varphi_{f^{(\lambda)}}(nk)$ n'est pas polynomiale et la fonction $\varphi_{f^{(\lambda)}}$ n'est pas quasi-polynomiale.

La remarque 2.4.5 montre qu'on ne peut définir la largeur analytique d'une filtration $A.P$, $f = (I_n)$ par le degré de φ_f, car cette fonction n'est pas polynomiale ni même quasi-polynomiale. Nous proposons dans la définition suivante, une extension de la largeur analytique à une filtration quelconque sur un anneau local nœthérien.

2 - 4 - 7 Définition

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration sur A. On définit la largeur analytique de f par :

$$\gamma(f) = \inf\left\{ r \in \mathbb{N} / \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^r} \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = 0 \right\}.$$

Il faut rappeler que Rees (voir [13] page 21) a introduit une définition analogue mais uniquement dans le cas des filtrations nœthériennes. Si la fonction φ_f est quasi-polynomiale, on voit qu'avec la définition précédente $\gamma(f) = d^\circ\varphi_f + 1$, on retrouve ainsi la définition classique.

2 - 4 - 8 Définiton

Soit $f = (I_n)$ une filtration sur un anneau A. $\forall n \geq 1$, on a :

$$I_1^n \subseteq I_n \subseteq I_1 \text{ donc } \dim\ A/I_1 \leq \dim\ A/I_n \leq \dim\ A/I_1^n = \dim\ A/I_1.$$

Alors dim $A/I_1 = \dim\ A/I_n$ d'où $coht\ I_1 = coht\ I_n$.

Par définition $coht\ f = coht\ I_1$.

Le problème immédiat qui se pose est celui de l'existence de $\gamma(f)$.

Nous avons le résultat suivant :

2 - 4 - 9 Proposition

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration sur A de cohauteur nulle. Alors $\gamma(f)$ existe.

Preuve

D'après [14] théorème 6.3.8, le nombre : $e_f(A) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{s!}{n^s}\ell_A\left(\dfrac{A}{I_n}\right)$ existe dans $\mathbb{R}$, où $s = alt(I_1)$. En considérant la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M}I_n} \longrightarrow \frac{A}{I_n} \longrightarrow 0, \quad \text{on a :}$$

$$\ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right) - \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right).$$

La suite exacte $0 \longrightarrow \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n} \longrightarrow \dfrac{A}{\mathfrak{M}I_n} \longrightarrow \dfrac{A}{\mathfrak{M}} \longrightarrow 0$, permet d'écrire que

$$\ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right) = \ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n}\right) + \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}}\right).$$

D'après [14] Théorème 6.3.8, le nombre

$$e_f(\mathfrak{M}) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{s!}{n^s}\ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n}\right)$$

existe dans $\mathbb{R}$. Donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^s}\ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ existe dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^s}\ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Comme $\ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = \dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$, on a :

$$\gamma(f) = \inf\left\{r \in \mathbb{N},\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^r}\dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = 0\right\} \quad \text{existe.}$$

Soit $f = (I_n)$ une filtration sur un anneau A et J un idéal de A, alors :

Pour tout entier $p \geq 1$, $\gamma_J(f^{(p)}) = \gamma_J(f)$, où $\gamma_J(f) = \dim \frac{R(A,f)}{JR(A,f)}$.

En utilisant la définition 2.4.7, nous avons la généralisation suivante de ce résultat :

2 - 4 - 10 Proposition

Soient $(A,\mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A. Alors pour tout réel $\lambda > 0$ on a

$$\gamma(f^{(\lambda)}) = \gamma(f).$$

Preuve Comme f est nœthérienne, on a :

$$\dim \frac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)} = \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^r}\dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = 0\right\}.$$

1) Si $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^*$, alors $f^{(\lambda)}$ est nœthérienne.

En effet, si on pose $J_n = I_{\{n\lambda\}}$ et $k = rang(f)$, on aura :

$$J_{nkq} = I_{nkp} = I_{kp}^n = J_{kq}^n \quad \text{ainsi}$$

$$\gamma(f^{(\lambda)}) = \gamma(J_{kq}) = \gamma(I_{kp}) = \gamma(f)$$

2) Si λ est irrationnel alors

$$\gamma(f^{(\lambda)}) = \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^r}\dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_{\{n\lambda\}}}{\mathfrak{M}I_{\{n\lambda\}}}\right) = 0\right\}$$

$$\leq \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^r}\dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = 0\right\} = \gamma(f).$$

a) Si $0 < \lambda < 1$, alors $\dfrac{1}{\lambda} > 1$ et pour tout entier $p \geq 1$ on peut trouver un entier n tel que :

$$\frac{kp}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} < n < \frac{kp}{\lambda} \text{ où } k = rang(f).$$

Il suffit de prendre $n = \left[\dfrac{kp}{\lambda}\right]$; ainsi, $kp - 1 < n\lambda < kp$, donc $\{n\lambda\} = kp$ et

$$\gamma(f^{(\lambda)}) = \inf\left\{r \in \mathbb{N} / \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^r} \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_{\{n\lambda\}}}{\mathfrak{M}I_{\{n\lambda\}}}\right) = 0\right\}$$

$$\geq \inf\left\{r \in \mathbb{N} / \lim_{p \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\left[\dfrac{kp}{\lambda}\right]^r} \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_{kp}}{\mathfrak{M}I_{kp}}\right) = 0\right\} = \gamma(f^{(k)}) = \gamma(f)$$

$$\text{d'où} \qquad \gamma(f^{(\lambda)}) = \gamma(f).$$

b) Si $1 < \lambda$, alors $0 < \lambda - [\lambda] < 1$ et $\dfrac{1}{\lambda - [\lambda]} > 1$.

Posons $s = \left[\dfrac{1}{\lambda - [\lambda]}\right]$ alors $s(\lambda - [\lambda]) < 1$.

Soit $p \geq 1$, on peut trouver un entier n tel que

$$\frac{p}{\lambda - [\lambda]} - \frac{1}{s(\lambda - [\lambda])} < n < \frac{p}{\lambda - [\lambda]};$$

on prend $n = \left[\dfrac{p}{\lambda - [\lambda]}\right]$. On a $ps - 1 < ns(\lambda - [\lambda]) < ps$

$$ps - 1 < ns\lambda - ns[\lambda] < ps \qquad \text{donc}$$

$$\{ns\lambda - ns[\lambda]\} = ps \qquad \text{et} \qquad \{ns\lambda\} = s(p + n[\lambda]).$$

$$\text{On a : } \gamma(f^{\{\lambda\}}) \geq \inf\left\{r \in \mathbb{N} / \lim_{p \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\left[\dfrac{p}{\lambda - [\lambda]}\right]^r} \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_{sp'}}{\mathfrak{M}I_{sp'}}\right) = 0\right\}$$

$$= \inf\left\{r \in \mathbb{N} / \lim_{q \longrightarrow +\infty} \frac{1}{q^r} \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_{sq}}{\mathfrak{M}I_{sq}}\right) = 0\right\} = \gamma(f^{(s)}) = \gamma(f)$$

$$\text{avec} \qquad p' = p + [\lambda]\left[\frac{p}{\lambda - [\lambda]}\right].$$

D'où $\gamma(f^{(\lambda)}) = \gamma(f)$.

Chapitre III

Conjecture de Okon et filtrations fortement nœthériennes

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A. On définit la largeur analytique de f par $\gamma(f) = \dim \dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}$.

Si I est un idéal de A et $f_I = (I^n)_{n\geq 0}$, on note $\gamma(I) = \gamma(f_I)$. J.S.Okon a posé le problème suivant dans [11] remarque 2.7 : Pour toute filtration nœthérienne $f = (I_n)$, a-t-on $\gamma(f) = \gamma(I_n)$ $\forall n \geq 1$?

Il existe des filtrations nœthériennes (voir [6] exemple 5.4) pour lesquelles la réponse est négative. Cependant H. Dichi et D. Sangaré ont montré qu'il existe une classe de filtrations nœthériennes contenant les filtrations $I-$bonnes pour lesquelles la réponse est positive (voir [6] Corollaire 5.9). Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous allons donner d'autres classes de filtrations nœthériennes qui vérifient la conjecture de Okon, et dans le deuxième paragraphe nous présenterons un contre-exemple dans le cas des filtrations fortement nœthériennes.

3 - 1 Fonctions de Hilbert - Samuel

3 - 1 - 1 Théorème (Samuel) 4.2.4 de [14]

Soient A un anneau nœthérien, I un idéal de A, M un $A-$module de type fini, (M_n) une filtration $I-$bonne sur M. On suppose que $\dfrac{M}{IM}$ est de longueur finie. Alors :

(i) La fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{M}{M_n}\right)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à $\mu(I)$, où $\mu(I)$ est le nombre minimum d'éléments générateurs de I.

(ii) Le degré et le coefficient dominant du polynôme associé à cette fonction ne dépendent que de M et I, et non de la filtration $I-$bonne (M_n).

3 - 1 - 2 Définition

Le polynôme associé à la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{M}{I^nM}\right)$ est appelé polynôme de Hilbert - Samuel de M relativement à I.

3 - 1 - 3 Remarque 4.2.5 de [14]

Si la filtration (M_n) n'est pas $I-$bonne, alors la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{M}{M_n}\right)$ n'est pas nécessairement polynomiale. En effet, considérons l'anneau des polynômes $A = k[X]$, où k est un corps. Soit $f = (I_n)$ la filtration définie par :

$$I_n = \begin{cases} \left(X^{\frac{n}{2}}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(X^{\frac{n+1}{2}}\right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On a :

$$\ell_A\left(\frac{(X^n)}{(X^{(n+1)})}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{(X)}\right) = 1 \text{ et } \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

alors la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right)$ ne peut être polynomiale.

Le Théorème de Samuel 3.1.1 a été généralisé de la manière suivante :

3 - 1 - 4 Théorème (Samuel) généralisé 3.4 de [5]

Soient A un anneau nœthérien de dimension finie, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A, M un $A-$module de type fini, (M_n) une filtration $f-$bonne sur M. On suppose que $\frac{M}{I_1M}$ est de longueur finie. Alors :

(i) Les fonctions $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)$ et $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{M}{M_n}\right)$ sont quasi-polynomiales.

(ii) Le degré et le coefficient dominant du quasi-polynôme associé à la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{M}{M_n}\right)$ *ne dépendent que de* M *et de* f *et non de la filtration* $f-$*bonne* (M_n).

Si la filtration f est fortement nœthérienne, on obtient des fonctions polynomiales (voir le Théorème 3.1.6 ci-dessous.)

3 - 1 - 5 Définition

Soient A un anneau, M un $A-$module. Le support de M est défini par l'ensemble : $Supp(M) = \{P \in Spec(A)$ tel que le module de fraction $S^{-1}M \neq 0$, où $S = A \setminus P\}$.

Soit I un idéal de A, on pose $V(I) = \{P \in Spec(A) : I \subseteq P\}$.

Nous avons les résultats suivants (3.3. de [14]) :

1) Si M est de type fini, alors $Supp(M) = V(AnnM)$

2) Si M est de type fini et I un idéal de A, alors

$$Supp\,(M/IM) = V(I) \cap Supp(M)$$

3) Si M est de type fini et si A est nœthérien, alors on a les équivalences suivantes :

(i) M est de longueur finie

(ii) $Supp(M) \subseteq Max(A)$

(iii) $\dim \dfrac{A}{Ann(M)} = 0.$

3 - 1 - 6 Théorème

Soient A *un anneau nœthérien de dimension finie,* $f = (I_n)$ *une filtration fortement nœthérienne sur* A, M *un* $A-$*module de type fini. On suppose que* $\dfrac{M}{I_1M}$ *est de longueur finie. Alors les fonctions* $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{M}{I_nM}\right)$ *et*

$n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{I_nM}{I_{n+1}M}\right)$ *sont polynomiales.*

Preuve

On a :

$Supp\,(M/I_nM) = V(I_n) \cap Supp(M) = V(I_1) \cap Supp(M) = Supp\,(M/I_1M) \subseteq Max(A)$; donc M/I_nM est de longueur finie.

On a :

$$\ell_A\left(\frac{I_nM}{I_{n+1}M}\right) \leq \ell_A\left(\frac{M}{I_{n+1}M}\right)$$

donc $\ell_A\left(\dfrac{I_nM}{I_{n+1}M}\right)$ est finie.

Comme $f = (I_n)$ est fortement nœthérienne, on a : $\forall n >> 0,\ \forall p \geq 0$, $I_{np} = I_n^p$ donc $f^{(n)} = f_{I_n}$ la filtration I_n-adique.

Alors la fonction $\phi_{f^{(n)}} : p \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{M}{I_{np}M}\right) = \ell_A\left(\dfrac{M}{I_n^pM}\right)$ est polynomiale d'après le théorème de Samuel 3.1.1. Soit P_n le polynôme associé à $\phi_{f^{(n)}}$, alors $\forall m, n >> 0$, $\forall s \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} P_n(ms) &= \phi_{f^{(n)}}(ms) = \ell_A\left(\frac{M}{I_{nms}M}\right) \\ &= \phi_{f^{(m)}}(ns) \\ &= P_m(ns) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité implique que P_n et P_m ont le même degré. En utilisant les techniques de démonstration du théorème 2.3.4, on obtient un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\forall n >> 0$, $P_n(X) = P(nX)$. Comme $f = (I_n)$ est fortement nœthérienne donc nœthérienne, le théorème de Samuel généralisé 3.1.4 montre que la fonction $\phi_f : n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{M}{I_nM}\right)$ est quasi-polynomiale. Soit $n, s >> 0$, on a

$$\begin{aligned} \phi_f(ns) &= \phi_{f^{(n)}}(s) \\ &= P_n(s) \\ &= P(ns) \end{aligned}$$

Par des techniques analogues à celles utilisées dans la preuve du Théorème 2.3.4, on déduit que la fonction $n \longmapsto \phi_f(n) = \ell_A\left(\dfrac{M}{I_nM}\right)$ est polynomiale.

En considérant la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{I_nM}{I_{n+1}M} \longrightarrow \frac{M}{I_{n+1}M} \longrightarrow \frac{M}{I_nM} \longrightarrow 0,$$

on a

$$\ell_A\left(\frac{I_nM}{I_{n+1}M}\right) = \ell_A\left(\frac{M}{I_{n+1}M}\right) - \ell_A\left(\frac{M}{I_nM}\right) = \phi_f(n+1) - \phi_f(n).$$

Or la fonction ϕ_f est polynomiale, donc la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{I_nM}{I_{n+1}M}\right)$ est également polynomiale.

3 - 1 - 7 Corollaire

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration fortement nœthérienne sur A. On suppose que $coht\ f = 0$.
Alors les fonctions $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ et $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{A}{I_n}\right)$ sont polynomiales.

De plus les polynômes associés à ces deux fonctions ont le même degré et le même coefficient dominant.

Preuve

On a : $\dim \dfrac{A}{I_1} = coht(I_1) = coht(f) = 0$; donc $\ell_A\left(\dfrac{A}{I_1}\right)$ est finie.

Par conséquent $Supp\left(\dfrac{A}{I_1}\right) = V(I_1) \subseteq Max(A)$. On a :

$Supp\,(M/I_1M) = V(I_1) \cap Supp(M) \subseteq V(I_1) \subseteq Max(A)$ donc $\ell_A\left(\dfrac{M}{I_1M}\right)$ est finie pour tout $A-$module M de type fini.

En prenant $M = A$ dans le Théorème 3.1.7, on déduit que la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{A}{I_n}\right)$ est polynomiale. De même en prenant $M = \mathfrak{M}$, la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ est polynomiale. Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M}I_n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M}} \longrightarrow 0.$$

On a

$$\ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right)=\ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n}\right)+\ \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}}\right).$$

Comme $n \longmapsto \ \ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ est polynomiale, la fonction $n \longmapsto \ \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ est polynomiale. Puisque f est fortement nœthérienne, alors il existe un entier $k \geq 1$, tel que :

$\forall n \geq k,\ I_{n+k} = I_n I_k$. $(A, \mathfrak{M})$ étant local, alors $I_k \subset \mathfrak{M}$.

Ainsi, $I_n I_k = I_{n+k} \subset \mathfrak{M}I_n \subset I_n$ donc

$$\ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right)\leq \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right)\leq\ \ell_A\left(\frac{A}{I_{n+k}}\right).$$

Cette double inégalité montre que les polynômes associés aux fonctions $n \longmapsto \ \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right)$ et $n \longmapsto \ \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ ont le même degré et le même coefficient dominant.

3 - 1 - 8 Définition

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local, I un idéal de A. On dit que I est un idéal de définition s'il existe un entier $\nu \geq 1$ tel que : $\mathfrak{M}^\nu \subset I \subset \mathfrak{M}$.

Donc dans un anneau local nœthérien d'idéal maximal $\mathfrak{M}$, I est un idéal de définition si et seulement si I est $\mathfrak{M}-$primaire.

I est dit de classe principale si $ht(I) = \mu(I)$.

3 - 1 - 9 Proposition

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration sur A.

On suppose que coht $f = 0$ et $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ infini, alors :

(i) $\forall n \geq 1,\ ht(I_1) \leq \gamma(I_n) \leq \mu(I_1)$.

(ii) si f est nœthérienne, alors : $ht(I_1) \leq \gamma(f) \leq \mu(I_1)$.

(iii) si f est nœthérienne et I_1 de classe principale, alors f vérifie la conjecture de Okon.

Preuve

(i) $\forall n, j \geq 1$, considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{I_j^n}{\mathfrak{M}I_j^n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M}I_j^n} \longrightarrow \frac{A}{I_j^n} \longrightarrow 0.$$

On a

$$\ell_A\left(\frac{I_j^n}{\mathfrak{M}I_j^n}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_j^n}\right) - \ell_A\left(\frac{A}{I_j^n}\right).$$

Le corollaire 3.1.6 appliqué à la filtration I_j-adique, montre que les fonctions $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{A}{\mathfrak{M}I_j^n}\right)$ et $\psi_{I_j} : n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{A}{I_j^n}\right)$ sont polynomiales et ont le même degré et le même coefficient dominant. De l'égalité précédente, on déduit que $d^\circ\varphi_{I_j} \leq d^\circ\psi_{I_j} - 1$, où

$$\varphi_{I_j} : n \longmapsto \ell_A\left(\frac{I_j^n}{\mathfrak{M}I_j^n}\right).$$

Or $\gamma(I_j) = d^\circ\varphi_{I_j} + 1$, donc $\gamma(I_j) \leq d^\circ\psi_{I_j}$.

$\forall j \geq 1$, on a $I_1^j \subset I_j$, alors $\forall n, j \geq 1$, $\mathfrak{M}I_1^{jn} \subset \mathfrak{M}I_j^n$, donc

$$\ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_j^n}\right) \leq \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_1^{jn}}\right).$$

Par conséquent $d^\circ\psi_{I_j} \leq d^\circ\psi_{I_1}$.

$$\text{Ainsi } \gamma(I_j) \leq d^\circ\psi_{I_j} \leq d^\circ\psi_{I_1}.$$

D'après le théorème de Samuel 3.1.1, $d^\circ\psi_{I_1} \leq \mu(I_1)$.

$$\text{Donc } \gamma(I_j) \leq \mu(I_1) \quad \forall j \geq 1.$$

D'après 2.1.2 (i), $ht(I_j) \leq \gamma(I_j)$; or $ht(I_j) = ht(I_1)$,

$$\text{donc } ht(I_1) \leq \gamma(I_j) \leq \mu(I_1).$$

(ii) si $f = (I_n)$ est nœthérienne, alors il existe un entier $k \geq 1$ (voir 2.2.2) tel que :

$\gamma(f) = \gamma(I_{nk})$ $\forall n \geq 1$, alors (i) permet d'écrire : $ht(I_1) \leq \gamma(f) \leq \mu(I_1)$.

(iii) si I_1 est un idéal de classe principal alors $ht(I_1) = \mu(I_1)$ et si de plus f est nœthérienne, (i) et (ii) montrent que $\gamma(f) = \gamma(I_n)$ $\forall n \geq 1$, ce qui signifie que f vérifie la conjecture de Okon.

3 - 1 - 10 Proposition

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien et $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A. On suppose que I_1 est un idéal de définition.

Alors f vérifie la conjecture de Okon.

Preuve

Comme I_1 est un idéal de définition, il existe un entier $\nu \geq 1$ tel que :

$\mathfrak{M}^\nu \subset I_1 \subset \mathfrak{M}$. Alors $\mathfrak{M}^{\nu n} \subset I_1^n \subset I_n \subset \mathfrak{M}$ $\forall n \geq 1$, ce qui prouve que I_n est aussi un idéal de définition, alors d'après 5.3.4 de [14], $ht(I_n) = \gamma(I_n)$ $\forall n \geq 1$, or $ht(I_n) = ht(I_1)$ donc $\gamma(I_n) = ht(I_1)$ $\forall n \geq 1$. Comme f est nœthérienne, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\gamma(f) = \gamma(I_k)$, alors $\gamma(f) = \gamma(I_n)$ $\forall n \geq 1$, donc la conjecture de Okon est vérifiée.

3 - 2 Contre-exemple à la conjecture de Okon

Nous montrons à présent que la conjecture de Okon n'est pas vérifiée pour les filtrations fortement nœthériennes en général. La démonstration se fera en deux étapes. Nous allons d'abord montrer que la filtration nœthérienne qui a servi de contre-exmple (5.4 de [6]), n'est pas fortement nœthérienne, ensuite nous donnerons un contre-exemple pour ce type de filtration.

3 - 2 - 1 Puissance symbolique d'un idéal premier

Soit P un idéal premier d'un anneau A. Si P n'est pas maximal, alors P^n n'est pas nécessairement primaire pour $n \geq 2$. Par contre l'idéal $P^n A_P$ est PA_P-primaire, où $A_P = S^{-1}A$ est l'anneau des fractions de A associé à $S = A \setminus P$.

Si on note i_A^P le morphisme de A sur A_P défini par : $i_A^P(a) = \dfrac{a}{1}$, alors l'idéal $\left(i_A^P\right)^{-1}(P^n A_P)$ est $P-$primaire pour tout entier $n \geq 1$. Cet idéal est appelé la puissance symbolique $n^{\text{ième}}$ de P et noté $P^{(n)}$.

Si A est intègre, alors $P^{(n)} = P^n A_P \cap A = \{z \in A \ / \ \exists\, y \notin P \text{ et } zy \in P^n\}$.

3 - 2 - 2 Définition

Soit M un A−module. Une suite $a_1, a_2, ..., a_n$ d'éléments de A est appelée M−suite sur A si :

(i) $(a_1, ..., a_n)M \neq M$.

(ii) $a_1 \notin Z(M)$ et $a_{i+1} \notin Z\left(\dfrac{M}{(a_1, a_2, ..., a_i)M}\right) \quad 1 \leq i \leq n-1$.

Si l'anneau A est nœthérien, alors toute M−suite sur A, peut s'étendre en une M−suite de longueur maximale. Si de plus, I est un idéal propre de A, deux M−suites maximales contenues dans I ont nécessairement la même longueur (voir [8]), appelée profondeur de I sur M et notée $prof(I, M)$.

Si $(A, \mathfrak{M})$ est un anneau local, on note $prof(A) = prof(\mathfrak{M}, A)$, appelé profondeur de A. En général $\dim(A) \geq prof(A)$.

Si $\dim(A) = prof(A)$, on dit que A est un anneau de Cohen-Macaulay.

3 - 2 - 3 Définition

Soit A un anneau. Une suite $a_1, a_2, ..., a_n$ d'éléments de A est appelée d−suite si :

(i) Aucun a_i n'est dans l'idéal engendré par le reste des a_j.

(ii) $\forall k \geq i+1, \ \forall i \geq 0 \ \ ((a_1, ..., a_i) : a_{i+1}a_k) = ((a_1, ..., a_i) : a_k)$.

3 - 2 - 4 Définition

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments d'un anneau A tels que $x_i \in P^{(k_i)} \backslash P^{(k_i+1)}$, $k_i \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i \leq n$, P un idéal premier de A. On dit que la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est P−bonne s'il existe $r_1, r_2, \ldots, r_n \in A \backslash P$ tels que $r_i x_i \in P^{k_i}$ et $(r_1x_1)^*, \cdots, (r_nx_n)^*$ est une G−suite où $G = \bigoplus_{n \geq 0} \dfrac{P^n}{P^{n+1}}$ et $(r_ix_i)^*$ est la classe de r_ix_i dans G. Retenons que si

$(r_1x_1)^*, \cdots, (r_nx_n)^*$ est une G−suite, alors $r_1x_1, \cdots, r_nx_n$ et $x_1, \ldots x_2, \ldots x_n$ sont des A−suites. Si la suite $x_1, x_2, \ldots x_n$ est P−bonne alors : $x_1^{m_1}, \cdots, x_n^{m_n}$ est aussi P−bonne $\forall m_i \geq 1$, $1 \leq i \leq n$ (voir 1 de [9]).

3 - 2 - 5 Lemme 1.3 de [9]

Soient A un anneau local de Cohen Macaulay, P un idéal premier de A, x, y des éléments de A constituant une suite $P-$bonne . On suppose que $x \in P^{(n)} - P^{(n+1)}$ et $y \in P^{(k)} - P^{(k+1)}$, $n,\ k \in \mathbb{N}$ et $P^n \subset (x, y)$, alors $\forall m \geq 0$: $P^{(n+km)} = xP^{(km)} + y^{m+1}P^{(n-k)}$.

Considérons le contre-exemple à la conjecture de Okon dans le cas où la filtration est nœthérienne (5.4 de [6]).

Soient $A = k[[X, Y, Z]]$, où k est un corps, P l'idéal premier de A défini par la courbe monomiale $X = t^3$, $Y = t^4$, $Z = t^5$.
Alors d'après [9] Proposition 2.2, $f = (p^{(n)})_{n \geq 0}$ est une filtration nœthérienne sur A. On se propose de montrer que f n'est pas fortement nœthérienne.

On pose $a = Z^2 - X^2Y$, $b = X^3 - YZ$ et $c = Y^2 - XZ$; P est engendré par (a, b, c).

a, b, c est une $d-$suite d'après 2. 2 (ii) de [9] et il existe $d \in P^{(2)} \backslash P^{(3)}$ tels que d, c soit $P-$bonne et $P^2 \subseteq (d, c)$. Nous avons les résultats suivants :

3 - 2 - 6 Lemme

Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, on a :

(i) $P^{(2s)} = (P^{(2)})^s$

(ii) $P^{(2s+1)} = P \cdot P^{(2s)}$

(iii) $P^{(4s+1)} = d^{2s}P + c^2 \cdot P^{(4s-1)}$

(iv) $P^2 \subsetneqq P^{(2)}$

Preuve

(i) Par récurrence sur s. On applique le lemme 3.2.5 précédent avec $x = d$, $y = c$, $n = 2$, $k = 1$, et $m = 2$; on obtient

$$P^{(4)} = P^{(2+2)} = d \cdot P^{(2)} + c^3 \cdot P, \quad \text{or } d \in p^{(2)}, \quad \text{donc } d \cdot p^{(2)} \subset (P^{(2)})^2,$$

$c \in P$, donc $c^3 \cdot P \subset P^3 \cdot P = (P^2)^2 \subset (P^{(2)})^2$.

Par conséquent $p^{(4)} \subset (P^{(2)})^2 \subset P^{(4)}$. Donc $P^{(4)} = (P^{(2)})^2$.

On suppose que $P^{(2s)} = (P^{(2)})^s$. En application du lemme 3.2.5 avec $n = 2s$, $k = 1$, $m = 2$, $x = d^s$ et $y = c$, on a :

$$P^{(2(s+1))} = P^{(2s+2)} = d^s P^{(2)} + c^3 P^{(2s-1)}.$$

Comme $d \in P^{(2)}$, on a : $d^s P^{(2)} \subset (P^{(2)})^s \cdot P^{(2)} = (P^{(2)})^{s+1}$

$c \in P$ donc $c^3 P^{(2s-1)} \subset P^3 \cdot P^{(2s-1)} \subset P^{(2s)} \cdot P^{(2)} \subset (P^{(2)})^s \cdot P^{(2)} = (P^{(2)})^{s+1}$.

Donc $P^{(2(s+1))} \subset (P^{(2)})^{s+1} \subset P^{(2(s+1))}$, d'où $P^{(2(s+1))} = (P^{(2)})^{s+1}$.

(ii) En application du lemme 3.2.5 avec $n = 2s$, $k = 1$, $m = 1$, $x = d^s$, $y = c$

on a : $P^{(2s+1)} = d^s \cdot P + c^2 \cdot P^{(2s-1)} \subset P \cdot P^{(2s)} + P \cdot P \cdot P^{(2s-1)}$ $P^{(2s+1)} \subset P \cdot P^{(2s)} \subset P^{(2s+1)}$, d'où $P^{(2s+1)} = P \cdot P^{(2s)}$.

(iii) On applique le lemme 3.2.5 avec $n = 4s$, $k = 1$, $m = 1$, $x = d^{2s}$ et $y = c$ on obtient : $P^{(4s+1)} = d^{2s} \cdot P + c^2 . P^{(4s-1)}$.

(iv) Supposons $P^{(2)} = P^2$, alors $P^{(2s)} = (P^{(2)})^s = P^{2s}$ et $P^{(2s+1)} = P \cdot P^{(2s)} = P^{2s+1}$ ce qui signifie que $\forall n \geq 0$, $P^{(n)} = P^n$, alors $(P^{(n)})_{n\geq 0}$ est la filtration P-adique. Or la filtration $P-$ *adique* vérifie la conjecture de Okon contrairement à $(P^{(n)})_{n\geq 0}$, donc $P^2 \subsetneqq P^{(2)}$.

3 - 2 - 7 Remarque

La filtration $f = (P^{(n)})$ n'est pas fortement nœthérienne.

Si $f = (P^{(n)})_{n\geq 0}$ est fortement nœthérienne alors $\forall n, m >> 0$ $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$.

Montrons que $\forall s \geq 1$, $P^{((2s+1)+(2s+1))} \neq P^{(2s+1)} \cdot P^{(2s+1)}$.

Soit $e \in P^{(2)} \setminus P^2$, alors $e \cdot d^{2s} \in P^{(2)} \cdot P^{(4s)} = P^{(4s+2)} = P^{(2s+1+2s+1)}$.

Supposons que $e.d^{2s} \in P^{(2s+1)} \cdot P^{(2s+1)}$. On a :

$$\begin{aligned} P^{(2s+1)} \cdot P^{(2s+1)} &= P \cdot P^{(2s)} \cdot P^{(2s+1)} \\ &\subset P \cdot P^{(4s+1)} \\ &\subset P(d^{2s} \cdot P + c^2 . P^{(4s-1)}) \\ &\subset d^{2s} \cdot P^2 + c^2 . P^{(4s)}. \end{aligned}$$

Alors $e \cdot d^{2s} = d^{2s} u + c^2 v$ avec $u \in P^2$ et $v \in P^{(4s)}$.

$d^{2s}(e - u) = c^2 v \in (c)$ qui est premier et comme $d \notin (c)$, on a : $e - u \in (c)$ et $e - u = c\varphi$, où $\varphi \in A$. Donc $d^{2s} c \varphi = c^2 v$; comme A intégre,

$d^{2s} \varphi = cv \in (c)$ et comme $d \notin (c)$ qui est premier, on a :

$\varphi \in (c)$. Ainsi, $\varphi = c\theta,\ \theta \in A$; donc $e - u = c^2\theta,\ \theta \in A$.

Or $c \in P$, donc $c^2\theta\ \in P^2$ et $e - u \in P^2$. Comme $u \in P^2$, on a : $e \in P^2$ ce qui est une contradiction car $e \in P^{(2)} \setminus P^2$.

Par conséquent : $e \cdot d^{2s} \notin P^{(2s+1)} \cdot P^{(2s+1)}$ d'où $P^{(2s+1+2s+1)} \neq P^{(2s+1)} \cdot P^{(2s+1)}$, alors $f = (P^{(n)})_{n \geq 0}$ n'est pas fortement nœthérienne.

3 - 2 - 8 Lemme

Soient A un anneau nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A de rang $k = \inf\{r \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+r} = I_n I_r,\ \ \forall n \geq r\}$.

Posons $J_n = \begin{cases} I_n^k & si\ \ n < k \\ \\ I_{kn} & si\ \ n \geq k \end{cases}$.

alors $g = (J_n)$ est une filtration fortement nœthérienne sur A.

Preuve

1) Montrons que $\forall\, n \geq 1, J_{n+1} \subset J_n$

(i) si $n + 1 \leq k - 1$, on a : $I_{n+1} \subset I_n$ donc $J_{n+1} = I_{n+1}^k \subset I_n^k = J_n$

(ii) si $n + 1 = k$,

$$J_{n+1} = I_{k \cdot k} = I_k^k \subset I_{k-1}^k = J_n$$

(iii) Si $n + 1 > k, J_{n+1} = I_{k\,(n+1)} \subset I_{kn} = J_n$.

2) Montrons que $\forall p, q \geq 1,\ \ J_p J_q \subset J_{p+q}$

(i) Si $p, q \leq k - 1$ et $p + q \leq k - 1$ alors

$$J_p\, J_q = I_p^k\, I_q^k = (I_p\, I_q)^k \subset I_{p+q}^k = J_{p+q}$$

(ii) Si $p, q \leq k - 1$ et $p + q > k - 1$ alors

$$J_p\, J_q = I_p^k\, I_q^k \subset I_{p+q}^k \subset I_{k(p+q)} = J_{p+q}$$

(iii) Si $p \leq k-1$ et $q \geq k$, alors :

$$J_p\,J_q = I_p^k I_{k\,q} \subset I_{kp}\,I_{kq} = I_{k\,(p+q)} = J_{p+q}$$

(iv) Si $p, q \geq k$ alors

$$J_pJ_q = I_{kp}\,I_{kq} = I_k^p\,I_k^q = I_k^{p+q} = I_{k(p+q)} = J_{p+q}.$$

Ainsi $g = (I_n)$ est une filtration sur A, le point (iv) prouve qu'elle est fortement nœthérienne.

3 - 2 - 9 Contre-exemple à la conjecture de Okon dans le cas des filtrations fortement nœthériennes

Considérons la filtrations $f = (I_n)$ où $I_n = P^{(n)}$, étudiée plus haut. On sait que f est une filtration nœthérienne de rang $k \geq 2$ et que $\gamma(f) = \gamma(I_k) = 2$. Alors que $\gamma(I_1) = 3$ (voir 5.4.4 de [6]).

Posons $J_n = \begin{cases} I_n^k & \text{si} \quad n < k \\ I_{kn} & \text{si} \quad n \geq k \end{cases}$

d'après le lemme 3.2.8 précédent, $g = (J_n)$ est une filtration fortement nœthérienne et on a :

$$\begin{array}{rcl} \gamma(g) = \gamma(J_k) & = & \gamma(I_{k \cdot k}) = \gamma(I_k) = 2 \\ \gamma(J_1) = \gamma(I_1^k) & = & \gamma(I_1) = 3 \end{array}$$

ainsi $\gamma(g) \neq \gamma(J_1)$, ce qui prouve que g ne vérifie pas la conjecture de Okon.

Conclusion

Soit $f = (I_n)$ une filtration sur un anneau local nœthérien $(A, \mathfrak{M})$. Alors les implications suivantes sont bien connues :

f $I-$adique $\Longrightarrow$ f $I-$bonne $\Longrightarrow$ f fortement nœthérienne $\Longrightarrow$ f nœthérienne $\Longrightarrow$ f A.P.

La nature asymptotique de la fonction numérique

$n \mapsto \varphi_f(n) = \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ est maintenant complètement déterminée si f est de l'un des types suivants :

$I-$adique, $I-$bonne, fortement nœthérienne ou nœthérienne .

Nous avons montré dans ce travail que φ_f est polynomiale si f est $I-$bonne, ou fortement nœthérienne. Dans [5], les auteurs ont montré que φ_f n'est pas en général polynomiale pour les filtrations nœthériennes, cependant φ_f est quasi-polynomiale pour ce type de filtrations.

Ainsi la largeur analytique des idéaux se généralise à toute filtration nœthérienne sur un anneau local nœthérien $(A, \mathfrak{M})$ à l'aide du concept de degré en posant $\gamma(f) = 1 + d^o\,\varphi_f$. Le problème reste ouvert pour les filtrations A.P qui ne sont pas nœthériennes. Pour ce type de filtrations la fonction φ_f n'est pas nécessairement quasi-polynomiale (voir exemple 2.4.6).

References

[1] A. Assane, P. Ayégnon et D. Sangaré, On the asymptotic nature of the analytic spread of I-good and strongly nœtherian filtrations, Afrika Matematika, Serie 3, vol.12 (2001), 51-60.

[2] W. Burns and J. Herzog, Cohen-Macaulay Rings, Camb. Studies in adv. math. 39 (1993)

[3] W. Bishop, J.W.Petro, L. J. Ratliff, D.E. Rush, Note on nœtherian filtrations, Comm. Algebra. 17 (2) 471 - 485 (1989)

[4] Y. Diagana, H. Dichi, D. Sangaré, Filtrations, generalized analytic independence, analytic spread, Afrika Matematika. Serie 3, vol.4 (1994)101-114.

[5] H. Dichi, D Sangaré, Hilbert functions, Hilbert Samuel quasi-polynomials with respect to f−good filtrations, multiplicities. J. Pure Applied Algebra, 138, (1999) 205-213.

[6] H. Dichi , D. Sangaré, Analytic spread of filtrations, asymptotic nature and some stability properties, Comm in Algebra, 28(7) 3115-3124 (2000).

[7] H. Dichi, D Sangaré, M. Soumaré, Filtrations, integral dependence, reduction, f-good filtrations. Comm in Algebra 20 (8) 2393-2418 (1992).

[8] H. C. Hutchins, Examples of communative rings, polygonal publishing house 80 passaic Avenue, passaic NJ 07055 USA (1981).

[9] C. Huneke, On the finite generation of symbolic blow ups, Math.Z, 179 (1982) 465-472.

[10] D. G. Northcott and D.Rees, Reduction of ideal in local rings, Proc. Camb. Philos. 50 (1954) 145 - 158.

[11] J.S. Okon, Prime divisors, analytic spread and filtrations Pacific. J. Math. 113, 2 (1984) 4 51 - 462.

[12] J. W. Petro, Concerning filtrations on commutative rings, Manuscripta Math 15, 261-274 (1975).

[13] D. Rees, Lectures on the asymptotic theory of ideals, London Math. Soc. Lecture Note Series 113 (1988).

[14] D. Sangaré, Some aspects of the asymptotic theory of ideals, cours de DEA. University of ABIDJAN (1990).

[15] Abdoulaye Assane, sur le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert du cône fibré d'une filtration fortement noethérienne et la conjecture de Okon, accepté pour publication dans Afrika Matematika, Serie 3, vol.13 (2002).

Annexe 1 : publication

A. Assane, P. Ayégnon et D. Sangaré, On the asymptotic nature of the analytic spread of I-good and strongly nœtherian filtrations, Afrika Matematika, Serie 3, vol.12 (2001), 51-60.

Afrika Matematika
Série 3. Vol. 12. pp. 51-60. 2001

On the asymptotic nature of the analytic spread of I-good and strongly noetherian filtrations

A. Assane[a] P. Ayégnon[b]
D. Sangaré[a]
[b]ENS Abidjan, 08 BP 10, Abidjan 08, Ivory Coast
[a]University of Abobo - Adjamé, UFR- SFA, Mathematics Department
22 BP 1709, Abidjan 22, Ivory Coast
e-mail : dsangarc@yahoo.fr

November 5, 2001

1 Abstract

Let (A, m, k) be a noetherian local ring with residue field k $= \frac{A}{m}$ and let I be an ideal of A. Then it is known from Northcott and Rees [N R] that the numerical function

$n \longmapsto \varphi_I\ (n) = \dim_k \left(\frac{I^n}{m I^n} \right)$ which denotes the dimension of the k-vector space $\frac{I^n}{m I^n}$ is of polynomial type. The analytic spread of the ideal I was defined by the above authors as the integer λ (I) = 1+ deg φ_I , where deg φ_I is the degree of the polynomial associated with the numerical function φ_I. Extensions of this concept to filtrations had been investigated in particular by D. Sangare [a] in previous papers. Unfortunately if f = (I_n) is a filtration on a noetherian local ring (A, m, k) then the numerical function

$n \longmapsto \varphi_f\ (n) = \dim_k \left(\frac{I_n}{m I_n} \right)$ need not be of polynomial type even for nice filtrations like noetherian filtrations. Here we show that φ_f is of polynomial type in each of the following cases :

(i) f is I - good

(ii) f is strongly noetherian

In addition, we prove that for an I- good filtration f = (I_n) on a noetherian local ring (A, m, k), the analytic spread of f which is defined as being the integer λ_m (f) = 1+ deg φ_f , where deg φ_f is the degree of the polynomial associated with the function φ_f , is equal to the analytic spread of the ideal I, hence it does not depend on the I - good filtration f.

2 Introduction

Throughout this paper, (A, m, k) will denote a given noetherian local ring with residue field k $= \frac{A}{m}$ and I a proper ideal of A.

Definition 1

Let k$\geq$ 1 and d ≥ -1 be integers and let φ : $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ be a numerical function.

(i) φ is said to be of polynomial type of degree d if there exists a polynomial P $\in \mathbb{Q}$[X] of degree d such that φ (n) = P(n) $\forall$ n $\gg 0$, which means "for all large n".

(ii) φ is called a quasi- polynomial function of period k and degree d if there exists a sequence F = (F_0, F_1, ..., F_{k-1}) of polynomials $F_j \in \mathbb{Q}$ [X] such that for j = 0, 1, ..., k-1,

(a) φ (n) = F_j (n) $\forall$ n $\gg 0$ with n $\equiv j \pmod{k}$ and

(b) Max $_{0\leq\ j\leq\ k-1}$ deg F_j = d.

F is called the quasi-polynomial associated with φ and d is called the degree of F.

Here the zero polynomial has degree -1.

Let (A, m, k) be a noetherian local ring and let I be an ideal of A, where k $= \frac{A}{m}$ is its residue field. Then the numerical function

n $\longmapsto \varphi_I$ (n) = dim $_k$ ($\frac{I^n}{m\,I^n}$) which is the dimension of the k - vector space $\frac{I^n}{m\,I^n}$ is of polynomial type, see [N R] . The analytic spread λ (I) of the ideal I was defined by the above authors as :

(1) λ (I) = 1+ deg φ_I , where deg φ_I is the degree of the polynomial associated with the numerical function φ_I.

This concept has been intensively studied since its introduction. Its success comes first of all from the various ways it can be interpreted. Let us recall some of them :

Suppose k is infinite. Then following [N R] :

(2) λ (I) = μ (J), where J is a minimal reduction of I and μ (J) the cardinal of a minimal generating set of J and

(3) λ (I) = max {r, $\exists$ a_1, a_2, ..., a_r $\in$ I which are analytically independent in I }.

Now without any condition on the cardinal of k, we have :

(4) λ (I) = dim G(A, m, I) = dim $\frac{R(A,\ I)}{m\ R(A,\ I)}$ = dim $\frac{\mathcal{R}(\mathrm{A},\ \mathrm{I})}{(u,m)\ \mathcal{R}(\mathrm{A},\ \mathrm{I})}$,

where $G(A, m, I) = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n}{m\, I^n}$ is the fiber cone of I and $R(A, I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n X^n$ (resp. $\mathcal{R}(A, I) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^n X^n$) is the Rees ring (resp. the extended Rees ring) of the ideal I and where $u = X^{-1}$.

The concept of analytic spread for an ideal has been extended in various ways to filtrations, see [D D S] and [O]. In particular it was shown in [D D S] that for a given filtration $f = (I_n)$ on a noetherian local ring (A, m, k), the numerical function

$n \longmapsto \varphi_f(n) = \dim_k \left(\frac{I_n}{m\, I_n} \right)$ need not be of polynomial type even for nice filtrations like noetherian filtrations. But as far as we know, investigations on the asymptotic behaviour of this function go back to [D S 2], where it was shown that φ_f is a quasi- polynomial function if f is noetherian.

In the present paper, we investigate the asymptotic behaviour of the numerical function φ_f when f is I- good or strongly noetherian.

In section 3 we recall some classical types of filtrations and some graded rings associated to a filtration which are used in the sequel of this paper.

In section 4, we investigate the asymptotic behaviour of the numerical function φ_f when f is an I - good filtration on a noetherian local ring (A, m, k). We show in particular that for such a type of filtrations, the associated numerical function φ_f is of polynomial type and that the analytic spread of f is equal to the analytic spread of I, so it does not depend on the I-good filtration f.

In section 5 it is shown that if $f = (I_n)$ is a stongly noetherian filtration then the numerical function

$n \longmapsto \varphi_f(n) = \dim_k \left(\frac{I_n}{m\, I_n} \right)$ is of polynomial type and that its degree is equal to $\dim \frac{R(A, f)}{m\, R(A, f)}$ -1, where $R(A, f)$ is the Rees ring of f.

3 Graded rings associated to filtrations

Definition 2

By a filtration on the commutative ring A we mean a family $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ of ideals of A such that $I_0 = A$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{Z}$. and $I_m I_n \subseteq I_{m+n}$ $\forall$ $m, n \in \mathbb{Z}$.

For any ideal I of A, the filtration $f_I = (I^n)$, where $I^n = A$ for all $n \leq 0$, is called the I - adic filtration.

Definition 3

Let $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ be a filtration on A.

(i) f is said to be I - good, where I is an ideal of A, if $I\, I_n \subseteq I_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$ and if $I\, I_n = I_{n+1} \forall\, n \gg 0$ which means for all large n.

(ii) f is called noetherian if its Rees ring R (A, f) which is defined below, is noetherian

(iii) f is termed AP if there exists a sequence (k_n) of positive integers with $\lim_{n \to \infty} (\frac{k_n}{n}) = 1$ such that $I_{k_n m} \subseteq I_n^m\ \forall$ m, n.

Similarly to ideals, one can associate to any filtration $f = (I_n)$ of the ring A the following graded rings :

- the fiber cone of f with respect to a given ideal J of A which is the ring $G(A, J, f) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I_n}{J\, I_n}$
- the Rees ring of f which is the ring $R(A, f) = \bigoplus_{n \geq 0} I_n X^n$.

The graded ring $Q(A, J, f) = \frac{R(A,\ f)}{J\ R(A,\ f)}$ associated with an ideal J of A will also be often used in the present paper in the case where $J = m$ is the maximal ideal of the local ring (A, m, k).

In particular if $f = f_I = (I^n)$ is the I-adic filtration, then we set
$G(A, J, f_I) = G(A, J, I)$, $R(A, f_I) = R(A, I)$ and
$Q(A, J, f_I) = Q(A, J, I)$

It should be recalled here that the multiplication of the ring G (A, J, f) is defined by linearity from the formula $\forall\, p, q \in \mathbb{N}, \forall\, a_p \in I_p, \forall\, b_q \in I_q$,
$(a_p + J\, I_q)(b_q + J\, I_q) = a_p\, b_q + J\, I_{p+q}$.

Remark 4

The ideal $J\, R(A, f) = \bigoplus_{n \geq 0} J\, I_n X^n$ of R (A, f) is a graded . So $\frac{R(A,\ f)}{J\ R(A,\ f)}$ is graded by the $\frac{I_n X^n + JR(A,\ f)}{J\ R(A,\ f)} \simeq \frac{I_n X^n}{I_n X^n \cap J\ R(A,\ f)} \simeq \frac{I_n}{J\, I_n}\ \forall\, n \geq 0$.

4 The asymptotic behaviour of φ_f for I - good filtrations.

We will start by recalling the modern version of the well known Hilbert Theorem .

Theorem 5 ***Hilbert Theorem.*** *Let $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ be a positively graded noetherian ring. Assume that A is of the form $A = A_0[x_1, ..., x_r]$, where each x_i is homogeneous of degree 1 and that A_0 is an artinian local ring . Let $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ be a finitely generated positively graded A-module of dimension d. Then the Hilbert function H (M, -) (resp. the cummulative Hilbert function H^* (M, -)) is of polynomial type of degree d - 1 (resp. d)*

We recall that under the notations and hypotheses of Theorem 5, the numerical function H (M , -) : $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ defined as

H (M, n) = ℓ_{A_0} (M_n) $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$, where ℓ_{A_0} (M_n) is the length of the A_0 -module M_n, is called the Hilbert function of M.

The cummulative Hilbert function of M is the function

n $\longmapsto$ H^* (n) = $\sum_{j \leq n}$ H (M , j).

Lemma 6 *Let $f = (I_n)$ be a filtration on A and let*

$\theta_f : R (A, f) \longrightarrow G (A, m, f)$ be defined as follows :

$\forall z = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, where $a_n \in I_n \; \forall n$, $\theta_f (z) = \sum_{n \geq 0}(a_n + m I_n)$. Then θ_f is a surjective morphism of graded rings which induces an isomorphism of graded rings $\overline{\theta_f}$: $\dfrac{R(A, f)}{m R(A, f)} \longrightarrow G (A, m, f)$.

Proof. . This follows immediately from Remark 4. We have ker θ = m R (A, f). So by the isomorphism Theorem the isomorphism $\overline{\theta_f}$ is defined as

$\overline{\theta_f}$ (z + m R (A, f)) = θ_f (z) $\forall$ z $\in$ R (A, f). It is clear that $\overline{\theta_f}$ is graded of degree 0. ■

Remark 7

Let I be an ideal of A and let f = f_I be the I-adic filtration. Put $\theta_I = \theta_f$ and $\overline{\theta_I} = \overline{\theta_f}$. Then it follows from Lemma 6 that

$\overline{\theta_I}$: $\dfrac{R(A, I)}{m R(A, I)} \longrightarrow$ G (A, m, I) is an isomorphism of graded rings .

Suppose that I $\subseteq$ I_1. Then G (A, m, f) is endowed with a structure of G (A, m, I) - module as follows :

$\forall$ p,q $\in \mathbb{N}$, $\forall\, a_p \in I^p$, $\forall\, b_q \in I_q$,

$(a_p + m I^p)$ ($b_q + m I_q$) = $a_p b_q + m I_{p+q}$.

It is easily checked that this multiplication is independent of the choice of representatives of $\dfrac{I^p}{m I^p}$ and $\dfrac{I_q}{m I_q}$.

It is then extended by linearity to G (A, m, I) $\times$ G (A, m, f).

Let us recall now the notations Q (A, m, f) = $\dfrac{R(A,\ f)}{m\ R(A,\ f)}$ and

Q (A, m, I) = $\dfrac{R(A,\ I)}{m\ R(A,\ I)}$ that we did not yet use.

$R(A,\ f)$ is obviously a graded $R(A,\ I)$ - module and Q (A, m, f) = $\dfrac{R(A,\ f)}{m\ R(A,\ f)}$ is a graded Q (A, m, I) - module. We have :

$\forall$ $\alpha \in$ R(A, I) and $\forall$ z $\in$ R(A, f), θ_f (α z) = θ_I (α) θ_f (z), hence

$\overline{\theta_f}$ (($\alpha + m\ R(A,\ I)$)($z + m\ R(A,\ f)$)) = $\overline{\theta_f}$ $(\alpha z + m\ R(A,\ f))$ =
$\overline{\theta_I}$ $(\alpha + m\ R(A,\ I)$) $\overline{\theta_f}$ $(z + m\ R(A,\ f))$

In the following Lemma it is shown among others that all I- good filtrations on a noetherian local ring (A, m) have the same analytic spread which is equal to the analytic spread of the ideal I.

Lemma 8 . *Let $f = (I_n)$ be an I-good filtration on the noetherian local ring (A, m). Then the Krull dimension of the Q (A, m, I) - module Q (A, m, f) =$\dfrac{R(A,\ f)}{m\ R(A,\ f)}$ is equal to the Krull dimension of the ring Q (A, m, f) which coincides with the analytic spread λ (I) of the ideal I.*

Proof. Q (A, m, f) is obviously a Q (A, m, I) - module and it is easily checked that the Annihilator of the Q (A, m, I) - module Q (A, m, f) is equal to $\dfrac{R(A,\ I) \cap m\ R(A,\ f)}{m\ R(A,\ I)}$. On the other hand $R(A, f)$ is integral over $R(A, I)$. Hence Q (A, m, f) is integral over $\dfrac{R(A,\ I)}{R(A,\ I) \cap m\ R(A,\ f)}$.

Therefore the Krull dimension γ_m (f) of the ring $Q(A,m,f)$ is

γ_m (f) = dim $\dfrac{R(A,\ I)}{R(A,\ I) \cap m\ R(A,\ f)}$. But the Krull dimension of the Q (A, m, I)-module Q (A, m, f) is dim ($\dfrac{Q(A,m,I)}{Ann_{Q(A,m,I)}Q(A,m,f)}$).

The rings $\dfrac{Q(A,m,I)}{Ann_{Q(A,m,I)}Q(A,m,f)}$ and $\dfrac{R(A,\ I)}{R(A,\ I) \cap m\ R(A,\ f)}$ are isomorphic. So they have the same Krull dimension which is γ_m (f) . The last part follows from the equalities γ_m (f) = γ_m (f_I) = λ (I) shown by [D S] , Theorem 5.7 ∎

Lemma 9 *Let $f = (I_n)$ be an I-good filtration on the noetherian local ring (A, m). Then $G (A, m, f)$ is a finitely generated graded $G (A, m, I)$ - module.*

Proof. There exists an integer n_0 such that $\forall\ n \geq 0$,
$I_{n_0+n} = I^n I_{n_0}$.
Therefore $\dfrac{I_{n_0+n}}{m I_{n_0+n}} = \dfrac{I^n}{m I^n} \dfrac{I_{n_0}}{m I_{n_0}}$. So G(A, m, f) is generated as G (A, m, I) - module by $\sum_{n=0}^{n=n_0} \dfrac{I_n}{m I_n}$. The conclusion follows since each ideal I_n is finitely generated. ∎

Theorem 10 *Let (A, m, k) be a noetherian local ring, I an ideal of A, $f = (I_n)$ an I-good filtration on A. Then the numerical function*
$n \longmapsto \varphi_f\ (n) = \dim_k (\dfrac{I_n}{m I_n})$ *is of polynomial type.*
Furthermore $\deg \varphi_f = \lambda (I) - 1 = \deg \varphi_I$

Proof. G (A, m, I) is a noetherian graded ring of the form G (A, m, I) $= k [t_1,...,t_r]$, where each t_i is homogeneous of degree 1. By Lemma 9, G (A, m, f) is a finitely genercrated G (A, m, I) - module. Hence by Hilbert's Theorem (Theorem 5) the numerical function
$n \longmapsto \varphi_f\ (n) = \dim_k (\dfrac{I_n}{m I_n})$ is of polynomial type of degree d-1, where d denotes the Krull dimension of the G (A, m, I) - module G (A, m, f) . It can be deduced from Remark 7 that d is equal to the Krull dimension of the Q (A, m, I) - module Q (A, m, f). The theorem follows therefore from Lemma 8. ∎

5 The asymptotic behaviour of φ_f for a strongly noetherian filtration f.

Here we need the following theorem which is part of Theorem 2.7 of [D S 1]

Theorem 11 *Let $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ be a positively graded noetherian ring of finite Krull dimension which is of the form $A = A_0[x_1,...,x_r]$, where each x_i is homogeneous of degree $k_i \geq 1$. Assume that A_0 is an artinian ring . Let $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ be a finitely generated positively graded A-module of Krull dimension d. Let $k = LCM\ (k_1, k_2\ , \ ...,\ k_r\ )$, then :*

1) The Hilbert function H (M, -) of M is a quasi-polynomial function of period k and degree d-1 and if $F = (F_0, F_1,...,F_{k-1})$ is the associated quasi-plynomial, then deg F = d-1.

2) The cummulative Hilbert function H^* (M, -) is of polynomial type of degree d . In addition, if $G = (G_0 , G_1 ,..., G_{k-1})$ denotes the quasi-polynomial associated with the function H^* (M, -), then all the polynomials G_j have the same degree which is equal to d and the same leading coefficient.

Definition 12

A filtration $f = (I_n)$ on the noetherian ring A is called strongly noetherian if there exists an integer $N \geq 1$ such that $\forall$ m, n $\in \mathbb{N}$ with $m \geq N$ and $n \geq N$, it holds $I_{m+n} = I_m I_n$. One deduces that $I_{np} = I_p{}^n$ $\forall p \geq N$ and $\forall n \geq 0$, which means that if we denote by $f^{(p)}$ the filtration $(I_{pn})_{n \geq 0}$, then $f^{(p)} = f_{I_p}$ is the I_p - adic filtration for all $p \geq N$.

It is worth noting that $\varphi_f (q r) = \varphi_{f^{(r)}} (q)$ $\forall$ q, r $\in \mathbb{N}$.

Theorem 13 *Let (A, m, k) be a noetherian local ring, $f = (I_n)$ a strongly noetherian filtration on A. Then the numerical function*

$n \longmapsto \varphi_f (n) = dim_k (\frac{I_n}{\mathrm{m} I_n})$ *is of polynomial type*

of degree $dim \frac{R(A,\ f)}{m\ R(A,\ f)}$ -1 .

Proof. Let N be an integer such that $I_{m+n} = I_m I_n$ $\forall$ m, n $\in \mathbb{N}$ with $m \geq N$ and $n \geq N$. In particular for all $q \geq N$,

$f^{(q)} = (I_{qn})_{n \geq 0} = (I_q{}^n)_{n \geq 0} = f_{I_q}$. Then following Theorem 10, $\forall q \gg 0$ the numerical function $\varphi_{f^{(q)}}$ is of polynomial type since $f^{(q)}$ is I_q - adic. Let P_q be the polynomial associated with $\varphi_{f^{(q)}}$. By Proposition 2.4 of [D D S], we have

deg $P_q = dim \frac{R(A,\ f^{(q)})}{m\ R(A,\ f^{(q)})}$ -1 $= dim \frac{R(A,\ f)}{m\ R(A,\ f)}$ -1. Hence deg P_q does not depend on q for $q \gg 0$. Set d = deg P_q $\forall$ $q \geq N$. Then P_q is of the form $P_q = \sum_{i=0}^{i=d} a_{q,i} X^i$, where $a_{q,i} \in \mathbb{Q}$ $\forall$ q, i. So $\forall q \gg 0, \forall r \gg 0$ and $\forall s \gg 0$, we have $P_q (r s) = \sum_{i=0}^{i=d} a_{q,i} (r s)^i = \varphi_{f^{(q)}} (r s) = dim_k (\frac{I_{qrs}}{m I_{qrs}}) = \varphi_{f^{(r)}} (q s) = P_r (q s) = \sum_{i=0}^{i=d} a_{r,i} (q s)^i$. It follows that

$\sum_{i=0}^{i=d} (a_{q,i} r^i) s^i = \sum_{i=0}^{i=d} (a_{r,i} q^i) s^i$ for all $s \gg 0$, hence $a_{q,i} r^i = a_{r,i} q^i$ for i = 0, 1, ..., d and $\frac{a_{q,i}}{q^i} = \frac{a_{r,i}}{r^i} = a_i$ for i = 0, 1, ..., d and $\forall q \gg 0, \forall r \gg 0$. Let P be the polynomial $P(X) = \sum_{i=0}^{i=d} a_i X^i$. Then

$P_q(X) = \sum_{i=0}^{i=d} a_i q^i X^i = P(qX)$. So for q, r $\gg 0$,

$\varphi_f (q r) = dim_k (\frac{I_{qr}}{m I_{qr}}) = \varphi_{f^{(q)}} (r)$

$= P_q(r) = P(qr)$. But, by Theorem 4.3 of [D S 2], φ_f is a quasi-polynomial function since f is strongly noetherian, hence noetherian. Let $F = (F_0, F_1, ..., F_{k-1})$ be the quasi - polynomial associated with φ_f where k is the period of φ_f. Then

$\varphi_f(qk+j) = F_j(qk+j)\ \forall q \gg 0$ and for $j = 0, 1, ..., k-1$. So if q and s are $\gg 0$, then

$P((sk+j)(qk+1)) = \varphi_f((sk+j)(qk+1)) =$

$\varphi_f((sqk+s+jq)k+j)) = F_j((sqk+s+jq)k+j) =$

$F_j((sk+j)(qk+1))$, for $j = 0, 1, ..., k-1$. The two polynomials P and F_j coincide on an infinite set of integers. So $P = F_0 = F_1 = ... = F_{k-1}$ and φ_f is of polynomial type. ■

Conclusion

Let $f = (I_n)$ be a filtration on a noetherian local ring (A, m, k). Then the following implications are well known to hold :

f I - adic $\Longrightarrow$ f I - good $\Longrightarrow$ f strongly noetherian $\Longrightarrow$ f noetherian.

As far as the asymptotic behaviour of the numerical function

$n \longmapsto \varphi_f(n) = \dim_k\left(\frac{I_n}{m I_n}\right)$ is concerned, the question has been now completly solved , at least when f is of one of the following types :

I - adic, I - good, strongly noetherian or noetherian which is the case for almost current filtrations. Actually we have shown in the present paper that φ_f is of polynomial type when f is I - good or strongly noetherian. On the other hand, in [D S 2], the authors had shown that, even though the numerical function φ_f need not be of polynomial type for a general noetherian filtration f, φ_f is nevertheless a quasi polynomial function for noetherian filtrations f. For each noetherian filtration f on a noetherian local ring (A, m, k), a concept of degree is unambigously defined for φ_f. The analytic spread of f is defined as $\lambda_m(f) = 1 + \deg \varphi_f$. This provides a good generalization of the concept of analytic spread of an ideal. The problem remains open for AP filtrations which are non noetherian.

References

[A A] Abdoulaye Assane, *Thèse de Doctorat,* 2002, Université de Cocody, Abidjan, Côte d'Ivoire

[D D S] Y. Diagana, H. Dichi and D. Sangaré, *Filtrations, Generalized analytic independence, analytic spread,* Afrika Matematika, series 3, vol.4 (1994)

[D S 1] H. Dichi, D. Sangaré, *Hilbert functions, Hilbert-Samuel quasi-polynomials with respect to f-good filtrations, multiplicities,* J. Pure Applied Algebra, 138, (1999) 205 -213

[D S 2] H. Dichi, D. Sangaré, *Analytic spread of filtrations, asymptotic nature and some stability properties,* Comm. Algebra, 28 (7), 3115 - 3124 (2000)

[N R] D. G. Northcott, D. Rees, *Reduction of ideals in a local ring,* Proc. Camb. Philos. Soc., 50 (1954), 145 - 158

[O] J. S. Okon, *Prime divisors, analytic spread and filtrations,* Pacific J. Math., 113, 2, (1984) 451 - 462

ANNEXE 2 : accepté pour publication

Abdoulaye Assane, sur le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert du cône fibré d'une filtration fortement nœthérienne et la conjecture de Okon, Afrika Matematika, Serie 3, vol.13 (2002).

Sur le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert du cône fibré d'une filtration fortement noethérienne et la conjecture de Okon

Abdoulaye ASSANE
Université d'Abobo-Adjamé, UFR - SFA
Département de Math.
Abidjan Côte d'Ivoire

May 26, 2002

1 Abstract

Let (A, $\mathfrak{M}$, k) be a noetherian local ring with residue field k = A/$\mathfrak{M}$ and let I be an ideal of A. Then the fiber cone of I with respect to $\mathfrak{M}$ is the graded ring G(A, $\mathfrak{M}$, I) = $\bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{M}\, I^n}$. This ring provides some information on the ideal I. For instance, if k is infinite, the Krull dimension of

G(A, $\mathfrak{M}$, I) is equal to the greatest number of elements of I which are analytically independent in I. Here we are rather interested in its Hilbert function φ_I : n $\longmapsto$ $\dim_k$ ($I^n/\mathfrak{M}\, I^n$) which is the size of the minimal number of generators of the ideal I^n. The analytic spread of the ideal I was defined by Northcott and Rees [NR] to be the integer $\lambda(I)$ = 1+deg φ_I. Here we extend this concept to special classes of filtrations f = (I_n), by investigating the asymptotic behaviour of the numerical function $\varphi_f : n \mapsto \ell_A(\frac{I_n}{\mathfrak{M} I_n})$. We follow the approach of D. Sangaré, Y. Diagana and H. Dichi, namely in [DDS] and [DS_2]. It is known from [DDS], [DS_2] and [AAS], that φ_f is of polynomial type if the filtration f is I-good or strongly noetherian and that φ_f is a quasi-polynomial function if f is a general noetherian filtration. The analytic spread of f is then defined as being the number $\lambda(f)$ = 1+deg φ_f. Here we give an example which shows that if f is an AP filtration which is not noetherian, then the numerical function φ_f is not necessarily a quasi-polynomial function. For such filtrations we propose a concept of analytic spread which does not take into account the degree of φ_f and which extends the former one. This paper deals also with the conjecture of Okon which compares the analytic spread of a filtration f = (I_n) with that of the ideal I_n. We prove that this conjecture is not true for general strongly noetherian filtrations.

2 Introduction

Soit (A, $\mathfrak{M}$, k) un anneau local noethérien de corps résiduel k = A/$\mathfrak{M}$ et soit I un idéal de A. Le cône fibré de I relativement à $\mathfrak{M}$ est l'anneau gradué G(A, $\mathfrak{M}$, I) = $\bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{M}\, I^n}$. Cet anneau permet d'avoir des informations sur l'idéal I. Par exemple si k est infini, alors la dimension de Krull

dim G(A, $\mathfrak{M}$, I) est le nombre maximum d'éléments de I analytiquement indépendants dans I.

Ici nous nous interessons plutôt à la fonction numérique

φ_I : n $\longmapsto$ $\dim_k$ ($I^n/\mathfrak{M}\, I^n$) qui mesure le nombre minimal de générateurs de l'idéal I^n. Dans [NR], Northcott et Rees ont montré que la fonction φ_I était de type polynomial, puis ils ont défini la largeur analytique de I comme étant le nombre λ(I) = 1+deg φ_I. Devant le grand succès qu'a connu ce nombre depuis son introduction, certains auteurs en ont cherché des extensions. C'est ainsi que D. Sangaré, Y. Diagana et H. Dichi ont récemment étudié les propriétés du cône fibré G(A, $\mathfrak{M}$, f) = $\bigoplus_{n\geq 0} \frac{I_n}{\mathfrak{M}\, I_n}$ de la filtration noethérienne f = (I_n) relativement à $\mathfrak{M}$ et le comportement asymptotique de la fonction $\varphi_f : n \mapsto \ell_A(\frac{I_n}{\mathfrak{M} I_n})$, ce qui leur a permis de définir un concept de largeur analytique pour les filtrations noethériennes par l'intermédiaire de la notion de degré, voir notamment [DDS] et [DS_2]. Le présent article est tiré de la thèse de doctorat de l'auteur [AA] où une étude analogue a été menée lorsque la filtration f est I-bonne ou fortement noethérienne. Il vient en complément à un article récent [AAS] également adapté de la thèse de l'auteur.

Dans la section 3 nous rappelons d'abord les théorèmes classiques de Samuel et de Hilbert et leurs généralisations récentes d'après [DS_1] et [DS_2]. Nous donnons ensuite soit des compléments aux résultats de [DS_1] et [DS_2], soit des extensions de ces résultats aux filtrations fortement noethériennes.

La section 4 est consacrée à une nouvelle extension de la largeur analytique aux filtrations qui n'utilise pas les degrés. Dans [DS_2] et [AAS] les auteurs avaient montré en particulier que la fonction $\varphi_f : n \mapsto \ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M} I_n}\right)$ était polynomiale (resp. quasi-polynomiale) lorsque la filtration f = (I_n) est I-bonne ou fortement noethérienne (resp. noethérienne). Mais jusqu'à présent rien n'avait été dit sur le comportement asymptotique de φ_f lorsque la filtration f est AP non noethérienne. On donne dans la section 4 un exemple de filtration AP telle que la fonction φ_f ne soit pas quasi-polynomiale donc pas polynomiale. Nous proposons pour ces filtrations une définition de largeur analytique qui n'utilise pas les degrés et qui coïncide avec celle définie à l'aide des degrés si la filtration est noethérienne, puis nous en donnons quelques propriétés.

Dans la section 5 nous donnons des classes de filtrations noethériennes pour lesquelles la conjecture de Okon pour la largeur analytique est vraie et nous fournissons un contre exemple qui prouve qu'elle est fausse pour les filtrations fortement noethériennes en général.

3 Fonctions de Hilbert de quelques anneaux gradués, comportement asymptotique

Nous allons commencer par rappeler les définitions suivantes nécessaires pour une lecture indépendante du présent article.

3.1

(1) Soit A un anneau commutatif unitaire. une filtration sur A est une famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A tels que :
(i) $I_0 = A$, (ii) $I_{n+1} \subset I_n \, \forall n \in Z$, (iii) $I_pI_q \subset I_{P+q}, \forall p, q \in Z$.

Si I est un idéal de A, la famille $f_I = (I^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $I^n = A \; \forall n \leq 0$, est une filtration sur A, appelée filtration $I-$adique.

Si $f = (I_n)$ est une filtration sur A alors pour tout réel strictement positif λ, la famille $f^{(\lambda)} = (I_{\{n\lambda\}})$ est une filtration sur A, où $\{n\lambda\}$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $n\lambda$. Si p est un entier, alors $f^{(p)} = (I_{np})_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Une filtration sur un $A-$module M est une famille $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-modules de M tels que : $M_0 = M$ et $M_{n+1} \subset M_n, \; \forall n \in Z$.

La filtration $f = (I_n)$ sur A est dite compatible avec la filtration (M_n) sur M, si $I_pM_q \subset M_{p+q}$, $\forall p, q \in Z$.

La filtration (M_n) sur le $A-$module M est dite $I-$bonne, où I est un idéal de A, si :
$IM_n \subset M_{n+1}, \; \forall n \in Z$ et $I \, M_n = M_{n+1}, \forall n >> 0$.

La filtration (M_n) sur M est dite $f-$bonne, où $f = (I_n)$ est une filtration sur A, si $I_pM_q \subset M_{p+q}$ $\forall p, q \in Z$ et s'il existe un entier N tel que : $M_n = \sum_{P=1}^{N} I_{n-p}M_p$.

(3) Si $f = (I_n)$ est une filtration sur A, J un idéal de A, X une indéterminée, on définit les anneaux gradués suivants :

$$R(A,f) = \underset{n\geq 0}{\oplus} I_nX^n, \quad \Re(A,f) = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} I_nX^n, \; (I_n = A, \text{ si } n \leq 0)$$

$$G_f(A) = \underset{n\geq 0}{\oplus} \frac{I_n}{I_{n+1}}, \; G_f(A, J) = \underset{n\geq 0}{\oplus} \frac{I_n}{JI_n} \backsimeq \frac{R(A,f)}{JR(A,f)}.$$

$R(A,f)$ et $\Re(A,f)$ sont respectivement appelés l'anneau de Rees et l'anneau de Rees généralisé de f et $G_f(A)$ est appelé l'anneau gradué associé à f.

Si $\phi = (M_n)$ est une filtration sur un $A-$module M, on définit le module gradué associé à ϕ en posant $G_\phi(M) = \underset{n\geq 0}{\oplus} \dfrac{M_n}{M_{n+1}}$

(4) La filtration $f = (I_n)$ est dite nœthérienne sur un anneau nœthérien A, si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée (voir [B P R R])

(i) $R(A, f)$ est nœthérien

(ii) $\mathfrak{R}(A, f)$ est nœthérien

(iii) $\exists\, k \in N^*$ tel que $I_{nk} = I_k^n, \quad \forall n \geq 0$

(iv) $\exists m \in N^*$ tel que $I_{m+j} = I_m I_j, \quad \forall j \geq m.$

Le plus petit entier m vérifiant (iv) est appelé le rang de f

$f = (I_n)$ est dite fortement nœthérienne sur un anneau nœthérien A, s'il existe un entier $k \in N^*$ tel que $I_{n+m} = I_n I_m \forall \; n, m \geq k.$
La filtration $f = (I_n)$ est dite $A.P$ (c'est à dire approximable par des puissances d'idéaux) si pour tout entier n, il existe un entier k_n tel que
$\forall m \in N, \; I_{k_n m} \subset I_n^m$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1.$

(5) Soit un entier $d \geq -1$. Une fonction $\varphi : Z \longrightarrow Z$ est dite polynomiale de degré d s'il existe un polynôme $P \in Q[X]$ de degré d tel que $\varphi(n) = P(n) \;\; \forall n >> 0.$

Le polynôme nul est par convention de degré -1.
La fonction φ est dite quasi-polynomiale de période $k \in N^*$ et de degré d s'il existe une suite $F = (F_0, F_1, \cdots, F_{k-1})$ de polynômes $F_j \in Q[X]$ tels que :

(i) $\varphi(n) = F_j(n)$ si $n >> 0$ et $n \equiv j \; [k] \;\; 0 \leq j \leq k-1$

(ii) $\max\limits_{0 \leq j \leq k-1} (\deg F_j) = d.$
Le théorème suivant de Samuel est bien connu.

3.2 Théorème de Samuel.

Soient A un anneau nœthérien, I un idéal de A, M un $A-$module de type fini, (M_n) une filtration $I-$bonne sur M. On suppose que $\dfrac{M}{IM}$ est de longueur finie. Alors :

(i) La fonction $n \longmapsto \ell_A \left(\dfrac{M}{M_n} \right)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à $\mu(I)$, où $\mu(I)$ est le nombre minimum d'éléments générateurs de I.

(ii) Le degré et le coefficient dominant du polynôme associé à cette fonction ne dépendent que de M et I, et non de la filtration $I-$bonne (M_n).

3.3 Remarque.

Si la filtration (M_n) n'est pas $I-$bonne, alors la fonction $n \longmapsto \ell_A \left(\dfrac{M}{M_n} \right)$ n'est pas nécessairement polynomiale. En effet, considérons l'anneau des polynômes $A = k[X]$, où k est un corps. Soit $f = (I_n)$

la filtration définie par :

$$I_n = \begin{cases} \left(X^{\frac{n}{2}}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(X^{\frac{n+1}{2}}\right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

On a :

$$\ell_A\left(\frac{(X^n)}{(X^{(n+1)})}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{(X)}\right) = 1 \text{ et } \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right)$ n'est pas polynomiale.

Le Théorème de Samuel a été généralisé dans [DS$_1$] de la manière suivante :

3.4 Théorème (Samuel) généralisé 3.4 de [D S $_1$].

Soient A un anneau nœthérien de dimension finie, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A, M un A−module de type fini, (M_n) une filtration f−bonne sur M. On suppose que $\frac{M}{I_1M}$ est de longueur finie. Alors :

(i) Les fonctions $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)$ et $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{M}{M_n}\right)$ sont quasi-polynomiales.

(ii) Le degré et le coefficient dominant du quasi-polynôme associé à la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{M}{M_n}\right)$ ne dépendent que de M et de f et non de la filtration f−bonne (M_n).

Dans le résultat suivant, nous proposons une généralisation du Théorème de Samuel (3.2) aux filtrations fortement nœthériennes :

3.5 Théorème.

Soient A un anneau nœthérien de dimension finie, $f = (I_n)$ une filtration fortement nœthérienne sur A, M un A−module de type fini. On suppose que $\frac{M}{I_1M}$ est de longueur finie. Alors les fonctions $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{M}{I_nM}\right)$ et $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{I_nM}{I_{n+1}M}\right)$ sont polynomiales.

Preuve.
On a :

$Supp(M/I_nM) = V(I_n) \cap Supp(M) = V(I_1) \cap Supp(M) = Supp(M/I_1M) \subseteq Max(A)$ où $Supp(M)$ désigne le support de M et $V(I)$ l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I.

Donc M/I_nM est de longueur finie.

On a :

$$\ell_A\left(\frac{I_nM}{I_{n+1}M}\right) \leq \ell_A\left(\frac{M}{I_{n+1}M}\right)$$

donc $\ell_A\left(\frac{I_nM}{I_{n+1}M}\right)$ est finie.

Comme $f = (I_n)$ est fortement nœthérienne, on a : $\forall n >> 0$, $\forall p \geq 0$, $I_{np} = I_n^p$ donc $f^{(n)} = f_{I_n}$ la filtration I_n−adique.

Alors la fonction $\phi_{f^{(n)}} : p \longmapsto \ell_A\left(\frac{M}{I_{np}M}\right) = \ell_A\left(\frac{M}{I_n^pM}\right)$ est polynomiale d'après le Théorème de Samuel 3.2. Soit P_n le polynôme associé à $\phi_{f^{(n)}}$, alors $\forall m, n >> 0$, $\forall\ s \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} P_n(ms) &= \phi_{f^{(n)}}(ms) = \ell_A\left(\frac{M}{I_{nms}M}\right) \\ &= \phi_{f^{(m)}}(ns) \\ &= P_m(ns) \end{aligned}.$$

Cette dernière égalité implique que P_n et P_m ont le même degré. En utilisant les techniques de démonstration du Théorème 13 de [A A S], on obtient un polynôme $P \in Q[X]$ tel que $\forall n >> 0$, $P_n(X) = P(nX)$. Comme $f = (I_n)$ est fortement nœthérienne donc nœthérienne, le Théorème de Samuel généralisé 3.4 montre que la fonction $\phi_f : n \longmapsto \ell_A\left(\frac{M}{I_nM}\right)$ est quasi-polynomiale. Soit $n, s >> 0$, on a :

$$\begin{aligned} \phi_f(ns) &= \phi_{f^{(n)}}(s) \\ &= P_n(s) \\ &= P(ns) \end{aligned}$$

Par des techniques analogues à celles utilisées dans la preuve du Théorème 13 de [A A S], on déduit que la fonction $n \longmapsto \phi_f(n) = \ell_A\left(\frac{M}{I_nM}\right)$ est polynomiale.

En considérant la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{I_nM}{I_{n+1}M} \longrightarrow \frac{M}{I_{n+1}M} \longrightarrow \frac{M}{I_nM} \longrightarrow 0,$$

on a :

$$\ell_A\left(\frac{I_nM}{I_{n+1}M}\right) = \ell_A\left(\frac{M}{I_{n+1}M}\right) - \ell_A\left(\frac{M}{I_nM}\right) = \phi_f(n+1) - \phi_f(n).$$

Or la fonction ϕ_f est polynomiale, donc la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{I_nM}{I_{n+1}M}\right)$ est également polynomiale.

3.6 Corollaire.

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration fortement nœthérienne sur A. On suppose que coht $f = 0$.

Alors les fonctions $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ et $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right)$ sont polynomiales.

De plus les polynômes associés à ces deux fonctions ont le même degré et le même coefficient dominant.

Preuve.

On a : $\dim \frac{A}{I_1} = coht(I_1) = coht(f) = 0$; donc $\ell_A\left(\frac{A}{I_1}\right)$ est finie. On en déduit que $\ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{I_1\mathfrak{M}}\right)$ est finie.

En prenant $M = A$ dans le Théorème 3.5, on déduit que la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right)$ est polynomiale. De même en prenant $M = \mathfrak{M}$, la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ est polynomiale. Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M}I_n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M}} \longrightarrow 0.$$

On a

$$\ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right) = \ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n}\right) + \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}}\right).$$

Comme $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ est polynomiale, la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ est polynomiale.
Puisque f est fortement nœthérienne, alors il existe un entier $k \geq 1$, tel que :
$\forall n \geq k$, $I_{n+k} = I_n I_k$. $(A, \mathfrak{M})$ étant local, alors $I_k \subset \mathfrak{M}$.
Ainsi, $I_n I_k = I_{n+k} \subset \mathfrak{M}I_n \subset I_n$ donc

$$\ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right) \leq \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right) \leq \ell_A\left(\frac{A}{I_{n+k}}\right).$$

Cette double inégalité montre que les polynômes associés aux fonctions $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right)$ et $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ ont le même degré et le même coefficient dominant.

3.7 Théorème de Hilbert 3.3 de [D S $_2$].

Soient $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ un anneau gradué nœthérien de la forme $A = A_0[x_1, \cdots, x_r]$ où chaque x_i est homogène de degré 1, $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ un $A-$module gradué de type fini, de dimension de Krull d. Supposons que A_0 soit artinien et local, alors la fonction de Hilbert $H(M, -)$ est polynomiale de degré $d - 1$.

3.8 Théorème de Hilbert généralisé 2.7 de [DS$_1$]

Soient $A = \underset{n\geq 0}{\oplus} A_n$ un anneau gradué nœthérien de dimension de Krull finie, de la forme $A = A_0[x_1, \cdots, x_n]$, où chaque x_i est homogène de degré $k_i \geq 1$; $M = \underset{n\geq 0}{\oplus} M_n$ un $A-$module gradué de type fini de dimension d. On suppose A_0 artinien et on pose $k = p.p.c.m\ (k_1, \cdots, k_n)$ alors :

(i) *$H(M, -)$ est quasi-polynomiale de période k et de degré $d-1$.*

(ii) *Si $F = (F_0, F_1, \cdots F_{k-1})$ est le quasi-polynôme associé à $H(M,-)$ alors :*

$$d^0 F_0 = \max_{0\leq i\leq k-1} d^0 F_i = d-1.$$

3.9 Théorème 4.3 de [D S $_2$].

Soient A un anneau nœthérien de dimension finie, J un idéal de A et $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A. On suppose que $\frac{A}{J}$ est artinien. Alors la fonction :

$n \longmapsto \ell_{\frac{A}{J}}\left(\frac{I_n}{JI_n}\right)$ est quasi-polynomiale de degré $\dim \frac{R(A,f)}{JR(A,f)} - 1$.

La proposition suivante apporte des résultats complémentaires au Théorème 3.9 :

3.10 Proposition.

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A de rang k. Alors :

(i) *La fonction $\varphi_f : n \mapsto \ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ est quasi-polynomiale de période k.*

(ii) *Si $(F_0, F_1, \cdots, F_{k-1})$ est le quasi-polynôme associé à φ_f, alors :*

$$d^\circ F_i = \dim_B \frac{R(I_{k+i}, I_k)}{\mathfrak{M}R(I_{k+i}, I_k)} - 1 \text{ avec } B = \frac{R(A, I_k)}{\mathfrak{M}R(A, I_k)},$$

où I_{k+i} est considéré comme un $A-$module.

Pour prouver cette proposition, nous aurons besoin du Lemme suivant :

3.11 Lemme.

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, I un idéal de A, M un $A-$module de type fini. Alors la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\frac{I^n M}{\mathfrak{M} I^n M}\right)$ est polynomiale de degré $\dim_B \frac{R(M,I)}{\mathfrak{M}R(M,I)} - 1$, où $B = \frac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)}$.

Preuve.

Notons d'abords que $\ell_A\left(\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}I^nM}\right) = \dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}}\left(\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}I^nM}\right) = \mu(I^nM)$ qui est fini puisque I^nM est un module de type fini sur l'anneau local $(A, \mathfrak{M})$.

A est un anneau nœthérien, M un $A-$module de type fini, alors $R(M,I) = \underset{n\geq 0}{\oplus} I^nM$ est un $R(A,I)-$module de type fini. Nous pouvons construire sur $\dfrac{R(M,I)}{\mathfrak{M}R(M,I)} = \underset{n\geq 0}{\oplus}\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}I^nM}$ une structure de $\dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)} = \underset{n\geq 0}{\oplus}\dfrac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}-$module de type fini. Or $\dfrac{R(A,I)}{\mathfrak{M}R(A,I)}$ est un anneau gradué nœthérien engendré par des éléments homogènes de degré 1 sur son groupe homogène de degré zéro qui est $A/\mathfrak{M}$ (voir 3.4 de [D S $_2$]).

Ainsi, d'après le Théorème de Hilbert 3.7, la fonction :

$n \longmapsto \ell_{A/\mathfrak{M}}\left(\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}I^nM}\right) = \ell_A\left(\dfrac{I^nM}{\mathfrak{M}I^nM}\right)$ est polynomiale de degré $\dim_B \dfrac{R(M,I)}{\mathfrak{M}R(M,I)} - 1$.

Preuve de la Proposition 3.10 :

$f = (I_n)$ est une filtration nœthérienne de rang k, alors $\forall n \geq k,\ I_{n+k} = I_nI_k$,

ainsi $I_{nk+i} = I_k^{n-1}I_{k+i}\ \forall n \geq 1,\ 0 \leq i \leq k-1$

donc $\ell_A\left(\dfrac{I_{nk+i}}{\mathfrak{M}I_{nk+i}}\right) = \ell_A\left(\dfrac{I_k^{n-1}I_{k+i}}{\mathfrak{M}I_k^{n-1}I_{k+i}}\right)$.

En posant $M = I_{k+i}$ et $I = I_k$ dans le lemme 3.11 précédent, on déduit que la fonction $n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{I_{nk+i}}{\mathfrak{M}I_{nk+i}}\right)$ est polynomiale de degré $\dim_B \dfrac{R(I_{k+i}, I_k)}{\mathfrak{M}R(I_{k+i}, I_k)} - 1$ où $B = \dfrac{R(A, I_k)}{\mathfrak{M}R(A, I_k)}$.

Soit P_i le polynôme associé à cette fonction, posons $F_i(X) = P_i\left(\dfrac{X-i}{k}\right)\quad 0 \leq i \leq k-1$.

Pour tout $n >> 0$ tel que $n \equiv i[k]$, il existe $s \in N$ tel que :

$$\begin{aligned} n &= ks + i \qquad\qquad 0 \leq i \leq k-1 \\ \ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) &= \ell_A\left(\frac{I_{ks+i}}{\mathfrak{M}I_{ks+i}}\right) \\ &= P_i(s) \\ &= P_i\left(\frac{n-i}{k}\right) \\ &= F_i(n). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la fonction $\varphi_f : n \longmapsto \ell_A\left(\dfrac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ est quasi -polynomiale de période k.

On a : $d^\circ F_i = d^\circ P_i = \dim_B \dfrac{R(I_{k+i}, I_k)}{\mathfrak{M}R(I_{k+i}, I_k)} - 1$.

4 Sur une extension de la largeur analytique

4.1. Largeur analytique d'un idéal

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, I un idéal de A. On considère l'anneau gradué $S = \underset{n\geq 0}{\oplus} \dfrac{I^n}{\mathfrak{M}I^n} = \underset{n\geq 0}{\oplus} S_n$ avec $S_n = \dfrac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}$.

On a $S_0 = A/\mathfrak{M}$, $S = S_0[t_1, \cdots t_n]$, où t_i est un élément homogène de degré 1. Alors le théorème de Hilbert (3.7) montre que la fonction

$\varphi_I : n \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\dfrac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}\right) = \ell_{A/\mathfrak{M}} \left(\dfrac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}\right)$ est polynomiale.

La largeur analytique de I est définie par le nombre $\lambda(I) = 1 + d^o\varphi_I$.

4.2 Largeur analytique d'une filtration

La fonction φ_I fait intervenir la filtration I−adique $f_I = (I^n)$. Si l'on remplace f_I par une filtration quelconque, alors se pose le problème de la généralisation de la notion de largeur analytique aux filtrations vu du point de vue du degré. Ce problème a été résolu pour les filtrations I−bonnes, fortement nœthériennes ou nœthériennes dans [D S 2] et [A A S] où les auteurs ont montré que la largeur analytique de la filtration f peut se définir par

$$\gamma(f) = 1 + d^o\varphi_f \text{ où } \varphi_f : n \longmapsto \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right).$$

4.3 Remarque.

Si f est une filtration A.P non nœthérienne, alors φ_f n'est plus nécessairement quasi-polynomiale comme le montre l'exemple suivant :

Soient $A = k[[X, Y]]$, où k est un corps, $\mathfrak{M} = (X, Y)$ l'idéal maximal de A.

Soit $f = (I_n)$ la filtration $\mathfrak{M}$ −adique définie par $I_n = \mathfrak{M}^n$, $\forall n \geq 0$. Pour un nombre réel irrationnel $\lambda > 1$ donné, considérons la filtration $f^{(\lambda)} = (J_n)$, où $J_n = I_{\{n\lambda\}}$. $f^{(\lambda)}$ est une filtration $A.P$, pour laquelle la fonction $\varphi_{f^{(\lambda)}}$ n'est pas quasi-polynomiale. En effet

$\forall n \in N$, on a : $n\lambda \leq \{n\lambda\} < n\lambda + 1 < n\lambda + \lambda$

$\forall s \in N^*$, on a : $n\lambda s \leq \{n\lambda\}s < n\lambda s + \lambda s$

donc $\{n\lambda\}s \leq \{n\lambda s + \lambda s\}$ alors $\mathfrak{M}^{\{(n+1)s\lambda\}} \subset \mathfrak{M}^{\{n\lambda\}s}$, soit $J_{(n+1)s} \subset J_n^s$.

Ainsi pour tout entier n, il existe un entier $k_n = n + 1$ tel que $\forall s \in N$: $J_{k_n s} \subset J_n^s$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1$, ce qui prouve que la filtration $f^{(\lambda)}$ est $A.P$.

$\forall n \geq 1$, $\varphi_f(n) = n + 1$, donc $\varphi_{f^{(\lambda)}}(n) = \{n\lambda\} + 1$.

Si la fonction $\varphi_{f^{(\lambda)}}$ était quasi-polynomiale, alors il existerait un entier $k \geq 1$ tel que la fonction $nk \longmapsto \varphi_{f^{(\lambda)}}(nk)$ soit polynomiale. Comme $\varphi_{f^{(\lambda)}}(nk) = \{nk\lambda\} + 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{nk}\varphi_{f^{(\lambda)}}(nk) = \lambda$; donc si la fonction $nk \longmapsto \varphi_{f^{(\lambda)}}(nk)$ est polynomiale, alors le degré du polynôme associé est égal à 1. On aurait donc :

$$\varphi_{f^{(\lambda)}}(nk) = nk\lambda + b, \ b \in \mathbb{Q} \ \forall n >> 0.$$

Comme $\varphi_{f(\lambda)}(nk)$ est un entier naturel, λ est nécessairement un rationnel, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc la fonction $nk \longmapsto \varphi_{f(\lambda)}(nk)$ n'est pas polynomiale et la fonction $\varphi_{f(\lambda)}$ n'est pas quasi-polynomiale.
Pour une telle fonction, on ne peut pas définir de concept de degré au sens courant du terme, donc pas de notion de largeur analytique s'exprimant à l'aide du degré. Nous proposons la définition suivante de largeur analytique qui n'utilise pas les degrés et qui est une extension de celle de Rees [Re].

4.4 Définition

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration sur A. On définit la largeur analytique de f par :

$$\gamma(f) = \inf\left\{r \in \mathbb{N} / \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^r} \dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M} I_n}\right) = 0\right\}.$$

Si la fonction φ_f est quasi-polynomiale, on voit qu'avec la définition précédente $\gamma(f) = d^\circ\varphi_f + 1$, on retrouve ainsi la définition classique.

4.5 Proposition

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien. Alors pour toute filtration AP $f = (I_n)$ sur A de cohauteur nulle, $\gamma(f)$ existe.

Preuve

D'après un résultat de Bishop ([Bi]), le nombre : $e_f(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{s!}{n^s} \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right)$ existe dans $\mathbb{R}$, où $s = alt(I_1)$. En considérant la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \frac{I_n}{\mathfrak{M} I_n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M} I_n} \longrightarrow \frac{A}{I_n} \longrightarrow 0, \quad \text{on a :}$$

$$\ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M} I_n}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M} I_n}\right) - \ell_A\left(\frac{A}{I_n}\right).$$

La suite exacte $0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M} I_n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M} I_n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M}} \longrightarrow 0$, permet d'écrire que

$$\ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M} I_n}\right) = \ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M} I_n}\right) + \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}}\right).$$

Le nombre

$$e_f(\mathfrak{M}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{s!}{n^s} \ell_A\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M} I_n}\right)$$

existe dans $\mathbb{R}$. Donc $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^s} \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M} I_n}\right)$ existe dans $\mathbb{R}$, on en déduit que

$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^s}\ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Comme $\ell_A\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = \dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right)$, on a :

$$\gamma(f) = \inf\left\{r \in \mathbb{N},\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^r}\dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = 0\right\} \quad \text{existe.}$$

Soit $f = (I_n)$ une filtration sur un anneau A et J un idéal de A, alors :

Pour tout entier $p \geq 1$, $\gamma_J(f^{(p)}) = \gamma_J(f)$, où $\gamma_J(f) = \dim \frac{R(A,f)}{JR(A,f)}$.

En utilisant la Définition 4.4, nous avons la généralisation suivante de ce résultat :

4.6 Proposition.

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A. Alors pour tout réel $\lambda > 0$ on a

$$\gamma(f^{(\lambda)}) = \gamma(f).$$

Preuve

Comme f est nœthérienne, on a :

$$\dim \frac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)} = \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^r}\dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = 0\right\}.$$

1) Si $\lambda = \frac{p}{q} \in Q_+^*$, alors $f^{(\lambda)}$ est nœthérienne.

En effet, si on pose $J_n = I_{\{n\lambda\}}$ et $k = rang(f)$, on aura :

$$J_{nkq} = I_{nkp} = I_{kp}^n = J_{kq}^n \quad \text{ainsi}$$

$$\gamma(f^{(\lambda)}) = \gamma(J_{kq}) = \gamma(I_{kp}) = \gamma(f)$$

2) Si λ est irrationnel alors

$$\gamma(f^{(\lambda)}) = \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^r}\dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_{\{n\lambda\}}}{\mathfrak{M}I_{\{n\lambda\}}}\right) = 0\right\}$$

$$\leq \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^r}\dim_{A/\mathfrak{M}}\left(\frac{I_n}{\mathfrak{M}I_n}\right) = 0\right\} = \gamma(f).$$

a) Si $0 < \lambda < 1$, alors $\frac{1}{\lambda} > 1$ et pour tout entier $p \geq 1$ on peut trouver un entier n tel que :

$$\frac{kp}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} < n < \frac{kp}{\lambda} \quad \text{où } k = rang(f).$$

Il suffit de prendre $n = \left[\dfrac{kp}{\lambda}\right]$; ainsi, $kp - 1 < n\lambda < kp$, donc $\{n\lambda\} = kp$ et

$$\gamma(f^{(\lambda)}) = \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^r} \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\frac{I_{\{n\lambda\}}}{\mathfrak{M}I_{\{n\lambda\}}}\right) = 0\right\}$$

$$\geq \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{p \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\left[\dfrac{kp}{\lambda}\right]^r} \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\frac{I_{kp}}{\mathfrak{M}I_{kp}}\right) = 0\right\} = \gamma(f^{(k)}) = \gamma(f)$$

$$\text{d'où} \qquad \gamma(f^{(\lambda)}) = \gamma(f).$$

b) Si $1 < \lambda$, alors $0 < \lambda - [\lambda] < 1$ et $\dfrac{1}{\lambda - [\lambda]} > 1$.
Posons $s = \left[\dfrac{1}{\lambda - [\lambda]}\right]$ alors $s\,(\lambda - [\lambda]) < 1$.
Soit $p \geq 1$, on peut trouver un entier n tel que

$$\frac{p}{\lambda - [\lambda]} - \frac{1}{s\,(\lambda - [\lambda])} < n < \frac{p}{\lambda - [\lambda]};$$

on prend $n = \left[\dfrac{p}{\lambda - [\lambda]}\right]$. On a $ps - 1 < ns\,(\lambda - [\lambda]) < ps$

$$ps - 1 < ns\lambda - ns[\lambda] < ps \quad \text{donc}$$

$$\{ns\lambda - ns[\lambda]\} = ps \quad \text{et} \quad \{ns\lambda\} = s\,(p + n[\lambda]).$$

$$\text{On a : } \gamma(f^{\{\lambda\}}) \geq \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{p \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\left[\dfrac{p}{\lambda - [\lambda]}\right]^r} \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\frac{I_{sp'}}{\mathfrak{M}I_{sp'}}\right) = 0\right\}$$

$$= \inf\left\{r \in \mathbb{N}/ \lim_{q \longrightarrow +\infty} \frac{1}{q^r} \dim_{A/\mathfrak{M}} \left(\frac{I_{sq}}{\mathfrak{M}I_{sq}}\right) = 0\right\} = \gamma(f^{(s)}) = \gamma(f)$$

$$\text{avec} \qquad p' = p + [\lambda]\left[\frac{p}{\lambda - [\lambda]}\right].$$

D'où $\gamma(f^{(\lambda)}) = \gamma(f)$.

5 Filtrations fortement noethériennes et conjecture de Okon.

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A. J.S.Okon définit la largeur analytique de f par $\gamma(f) = \dim \dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}$.

Si I est un idéal de A et $f_I = (I^n)_{n\geq 0}$, on note $\gamma(I) = \gamma(f_I)$.

En observant que $\gamma(f) = \gamma(I_{kn})$ $\forall n \geq 1$ où $k = rang(f)$, il a posé le problème suivant dans la Remarque 2.7 de [Ok] : Pour toute filtration nœthérienne $f = (I_n)$, a-t-on $\gamma(f) = \gamma(I_n)$ $\forall n \geq 1$?

Il existe des filtrations nœthériennes (voir [D S $_2$] exemple 5.4) pour lesquelles la réponse est négative. Cependant H. Dichi et D. Sangaré ont montré qu'il existe une classe de filtrations nœthériennes contenant les filtrations I−bonnes pour lesquelles la réponse est positive (voir [D S $_2$] Corollaire 5.9). Nous allons donner d'autres classes de filtrations nœthériennes qui vérifient la conjecture de Okon, et présenter un contre-exemple qui montre que la conjecture n'est pas vraie en général pour les filtrations fortement nœthériennes.

5.1 Définitions

Soient $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local, I un idéal de A. On dit que I est un idéal de définition s'il existe un entier $\nu \geq 1$ tel que : $\mathfrak{M}^{\nu} \subset I \subset \mathfrak{M}$.

Donc dans un anneau local nœthérien d'idéal maximal $\mathfrak{M}$, I est un idéal de définition si et seulement si I est $\mathfrak{M}$ −primaire.

I est dit de classe principale si $ht(I) = \mu(I)$.

5.2 Proposition.

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration sur A.

On suppose que coht $f = 0$ et $\dfrac{A}{\mathfrak{M}}$ infini, alors :

(i) $\forall n \geq 1$, $ht(I_1) \leq \gamma(I_n) \leq \mu(I_1)$.

(ii) si f est nœthérienne, alors : $ht(I_1) \leq \gamma(f) \leq \mu(I_1)$.

(iii) si f est nœthérienne et I_1 de classe principale, alors f vérifie la conjecture de Okon.

Preuve

(i) $\forall n, j \geq 1$, considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{I_j^n}{\mathfrak{M}I_j^n} \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{M}I_j^n} \longrightarrow \frac{A}{I_j^n} \longrightarrow 0.$$

On a

$$\ell_A\left(\frac{I_j^n}{\mathfrak{M}I_j^n}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_j^n}\right) - \ell_A\left(\frac{A}{I_j^n}\right).$$

Le corollaire 3.6 appliqué à la filtration I_j−adique, montre que les fonctions

$n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_j^n}\right)$ et $\psi_{I_j} : n \longmapsto \ell_A\left(\frac{A}{I_j^n}\right)$ sont polynomiales et ont le même degré et le même coefficient dominant. De l'égalité précédente, on déduit que $d^\circ\varphi_{I_j} \leq d^\circ\psi_{I_j} - 1$, où φ_{I_j} est la fonction

$$\varphi_{I_j} : n \longmapsto \ell_A\left(\frac{I_j^n}{\mathfrak{M}I_j^n}\right).$$

Or $\gamma(I_j) = d^\circ\varphi_{I_j} + 1$, donc $\gamma(I_j) \leq d^\circ\psi_{I_j}$.

$\forall j \geq 1$, on a $I_1^j \subset I_j$, alors $\forall n, j \geq 1$, $\mathfrak{M}I_1^{jn} \subset \mathfrak{M}I_j^n$, donc

$$\ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_j^n}\right) \leq \ell_A\left(\frac{A}{\mathfrak{M}I_1^{jn}}\right).$$

Par conséquent $d^\circ\psi_{I_j} \leq d^\circ\psi_{I_1}$.

Ainsi $\gamma(I_j) \leq d^\circ\psi_{I_j} \leq d^\circ\psi_{I_1}$.

D'après le Théorème de Samuel (3.2), $d^\circ\psi_{I_1} \leq \mu(I_1)$.

Donc $\gamma(I_j) \leq \mu(I_1)$ $\forall j \geq 1$.

D'après [N R], $ht(I_j) \leq \gamma(I_j)$; or $ht(I_j) = ht(I_1)$,

donc $ht(I_1) \leq \gamma(I_j) \leq \mu(I_1)$.

(ii) si $f = (I_n)$ est nœthérienne, alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$\gamma(f) = \gamma(I_{nk})$ $\forall n \geq 1$, alors (i) permet d'écrire : $ht(I_1) \leq \gamma(f) \leq \mu(I_1)$.

(iii) si I_1 est un idéal de classe principal alors $ht(I_1) = \mu(I_1)$ et si de plus f est nœthérienne, (i) et (ii) montrent que $\gamma(f) = \gamma(I_n)$ $\forall n \geq 1$, ce qui signifie que f vérifie la conjecture de Okon.

5.3 Proposition.

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien et $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A. On suppose que I_1 est un idéal de définition.

Alors f vérifie la conjecture de Okon.

Preuve

Comme I_1 est un idéal de définition, il existe un entier $\nu \geq 1$ tel que :

$\mathfrak{M}^{\nu} \subset I_1 \subset \mathfrak{M}$. Alors $\mathfrak{M}^{\nu n} \subset I_1^n \subset I_n \subset \mathfrak{M}$ $\forall n \geq 1$, ce qui prouve que I_n est aussi un idéal de définition, alors $ht(I_n) = \gamma(I_n)$ $\forall n \geq 1$, or $ht(I_n)$ [illegible] $ht(I_1)$ donc $\gamma(I_n)$ [illegible] Comme f est nœthérienne, il existe un entier $k \geq 1$ tel que [illegible] alors [illegible] donc la conjecture de Okon est vérifiée.

5.4 Un contre exemple

On peut à juste titre se demander si la conjecture de Okon n'est pas vraie pour les filtrations fortement noethériennes. Nous allons proposer ici un exemple de filtration fortement noethérienne sur A ne vérifiant pas la conjecture de Okon. Pour cela nous allons établir d'abord un lemme permettant de construire une filtration fortement noethérienne à partir d'une filtration noethérienne donnée.

5.4.1 Lemme.

Soient A un anneau nœthérien, $f = (I_n)$ une filtration nœthérienne sur A de rang $k = \inf\{r \in N^*,\ I_{n+r} = I_n I_r,\ \forall n \geq r\}$.

Posons $J_n = \begin{cases} I_n^k & \text{si } n < k \\ \\ I_{kn} & \text{si } n \geq k \end{cases}$.

alors $g = (J_n)$ *est une filtration fortement nœthérienne sur A.*

Preuve

1) Montrons que $\forall n \geq 1, J_{n+1} \subset J_n$

(i) Si $n+1 \leq k-1$, alors on a : $I_{n+1} \subset I_n$ donc $J_{n+1} = I_{n+1}^k \subset I_n^k \ = J_n$

(ii) si $n+1 = k$, alors $J_{n+1} = I_{k \cdot k} = I_k^k \subset I_{k-1}^k = J_n$

(iii) Si $n+1 > k$, alors $J_{n+1} = I_{k\,(n+1)} \subset I_{kn} = J_n$.

2) Montrons que $\forall p, q \geq 1,\ J_p J_q \subset J_{p+q}$

(i) Si $p, q \leq k-1$ et $p+q \leq k-1$ alors $J_p\, J_q = I_p^k\, I_q^k = (I_p\, I_q)^k \subset \ I_{p+q}^k = J_{p+q}$

(ii) Si $p, q \leq k-1$ et $p+q > k-1$ alors $J_p\, J_q = I_p^k\, I_q^k \subset I_{p+q}^k \subset I_{k(p+q)} = J_{p+q}$

(iii) Si $p \leq k-1$ et $q \geq k$, alors : $J_p\, J_q = I_p^k I_{k\,q} \subset \ I_{kp}\, I_{kq} = I_{k\,(p+q)} = J_{p+q}$

(iv) Si $p, q \geq k$ alors $J_p J_q = I_{kp}\, I_{kq} = I_k^p\, I_k^q = I_k^{p+q} = I_{k(p+q)} = J_{p+q}$.

Ainsi $g = (I_n)$ est une filtration sur A, le point (iv) prouve qu'elle est fortement nœthérienne.

5.4.2 Contre exemple

Considérons le contre-exemple suivant à la conjecture de Okon dans le cas où la filtration est nœthérienne donnée dans [D S $_2$], section 5.4 :

Soient A = k[[X, Y, Z]], où k est un corps, P l'idéal premier de A défini par la courbe monomiale $X = t^3$, $Y = t^4$, $Z = t^5$.

Alors d'après [Hu] Proposition 2.2, $f = (\mathrm{P}^{(n)})_{n\geq 0}$ est une filtration nœthérienne sur A de rang k $\geq$ 2. On a $\gamma(f) = \gamma(I_k) = 2$ tandis que $\gamma(I_1) = 3$ (voir 5.4.4 de [D S $_2$]).

Posons $J_n = \begin{cases} I_n^k & \text{si} \quad n < k \\ I_{kn} & \text{si} \quad n \geq k \end{cases}$

D'après le Lemme 5.4.1., $g = (J_n)$ est une filtration fortement nœthérienne et on a :

$$\begin{aligned} \gamma(g) = \gamma(J_k) &= \gamma(I_{k \cdot k}) &= \gamma(I_k) = 2 \\ \gamma(J_1) = \gamma(I_1^k) &= \gamma(I_1) &= 3 \end{aligned}$$

ainsi $\gamma(g) \neq \gamma(J_1)$, ce qui prouve que g ne vérifie pas la conjecture de Okon.

Références

[A A] Abdoulaye Assane, *Thèse de Doctorat*, 2002, Université de Cocody, Abidjan, Côte d'Ivoire

[A A S] A. Assane, P. Ayégnon et D. Sangaré, *On the asymptotic nature of the analytic spread of I-good and strongly nœtherian filtrations,* Afrika Matematika, Serie 3, vol.12 (2001), 51-60.

[Bi] W. Bishop, *A theory of multiplicity for multiplicative filtrations*, Journal für die reine angew. Math., 277 (1975) 8-26

[B P R R] W. Bishop, J.W.Petro, L. J. Ratliff .Jr., D.E. Rush, *Note on nœtherian filtrations*, Comm. Algebra. 17 (2) 471 - 485 (1989)

[DDS] Y. Diagana, H. Dichi, D. Sangaré, *Filtrations, Generalized analytic independence, analytic spread,* Afrika Matematika, series 3, vol.4 (1994) 101 - 114

[D S $_1$] H. Dichi, D Sangaré, *Hilbert functions, Hilbert Samuel quasi-polynomials with respect to f−good filtrations, multiplicities,* J. Pure Applied Algebra, 138, (1999) 205-213.

[D S $_2$] H. Dichi , D. Sangaré, *Analytic spread of filtrations, asymptotic nature and some stability properties,* Comm in Algebra, 28(7) 3115-3124 (2000).

[Hu] C. Huneke, *On the finite generation of symbolic blow ups*, Math.Z, 179 (1982) 465-472.

[N R] D. G. Northcott and D.Rees, *Reduction of ideal in local rings*, Proc. Camb. Philos. 50 (1954) 145 - 158.

[Ok] J.S. Okon, *Prime divisors, analytic spread and filtrations*, Pacific. J. Math. 113, 2 (1984) 4 51 - 462.

[Re] D.Rees, *Lectures on the asymptotic theory of ideals,* London Math. Soc. Lecture Note Series 113, (1988)

Sommaire