

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

UNIVERSITÉ DE YAOUNDE 1

CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN
SCIENCES TECHNOLOGIE ET
GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN
PHYSIQUE ET APPLICATIONS

FACULTE DES SCIENCES



REPUBLIC OF CAMEROON

UNIVERSITY OF YAOUNDE 1

POST GRADUATE SCHOOL OF
SCIENCES, TECHNOLOGY
GEOSCIENCES

DOCTORAL RESEARCH UNIT AND
TRAINING IN PHYSICS AND
APPLICATIONS

FACULTY OF SCIENCES

CONTROLE DES VIBRATIONS D'UN MODELE COUPLE VEHICULE SIEGE HUMAIN UTILISANT UNE RIGIDITE QUASI-NULLE COMME ISOLATEUR DE VIBRATIONS

Mémoire rédigé et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de
MASTER II en Physique option Mécanique et Système Complexe (MSC)

Par :

NKOUAKEP SIME Jovanie Jordane

Licenciée en physique

Option : Mécanique Fondamentale et Système Complexe

Matricule

17Y429

Sous la supervision de :

NANA NBENJO Blaise Roméo

Professeur

Université de Yaoundé I

Année académique : 2022

Dédicace

Je dédie ce mémoire à

” Ma **famille**”

Remerciements

*J*e rends grâce à Dieu tout puissant de m'avoir permis de parachever ce travail dans la paix et la santé.

*J'*adresse aussi mes vifs et sincères remerciements à tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidé et m'ont soutenu dans la réalisation de ce travail.

Je pense particulièrement à :

♡ *M*on directeur de mémoire le Pr. **NANA NBENDJO Blaise Roméo**, Professeur, pour la confiance placée en ma modeste personne en acceptant de diriger mes travaux, la pertinence du thème proposé et le soutien sans faille accordé pendant la rédaction de ce mémoire. Avec vous, je me suis sentie fortement soutenue ; de part la confiance faite et par l'amour du travail que vous m'avez inculqués durant les cours du cycle Master ; et au cours de nos multiples discussions. J'ai appris énormément à vos côtés. Monsieur, je vous témoigne par ces mots mon profond respect et toute ma gratitude.

♡ *M*es **enseignants de l'Université de Yaoundé I**, en particulier ceux du Département de Physique, Faculté des Sciences pour ma formation académique et sociale.

♡ *A*u doctorant **NGOUNOU Armel Martial**, pour son soutien, son encadrement, son accompagnement, sa disponibilité, ses échanges et ses conseils.

Celui-là qui m'a consacré beaucoup de son temps, afin d'éclaircir les zones d'ombre que je rencontrais dans ce travail, et qui m'a également permis de découvrir de nouvelles formulations dans la notion de simulations numériques ainsi que les logiciels utiles à l'élaboration de ce travail. Il a été un bon guide pour la réussite de ce travail. Recevez ici, Monsieur, l'expression de ma gratitude.

♡ *Au* Doctorant **YOUTH A Octave** pour son accompagnement, ses conseils et son aide dans réalisation de cet ouvrage. Retrouvez ici Monsieur, l'expression de ma parfaite reconnaissance.

♡ *Aux* Aînés académiques **KAMMI Romaric, NGASSA Joselin, KANNA Sonnia, TCHINDA Boris, DONGMO Lowis, ATONLEU Delaure** pour leur aide multiforme dans la réalisation de ce document.

♡ *Aux* honorables membres du jury qui auront la tâche d'apprécier et de délibérer. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements et de mon profond respect.

♡ *Ma* famille pour leurs soutiens moraux, financiers et matériels qu'elle a eu à faire jusqu'ici pour ma réussite académique. Je pense particulièrement à : mon papa **SIME Abel**, ma maman **DJAMPOU Henriette**, ma tante **ma-man Appoline**, mon oncle **papa KOUATCHO**, mes frères et sœur **GANDJO Frank, TCHOUPA Corinne, POSSI Arthur**, mes cousins et cousines **tantine Laurence, tantine Carine et Stéphane**.

♡ *M*es camarades de promotion pour leur formidable esprit d'équipe. Je pense particulièrement à **KAMDEM Junior**, **NOUBASSE Marie**, **FOTAM Alex**, **NGODIE Joachim**, **KAMGA Lionnel** **ESUBA Busquet**, **ABA'A EKOTO** et **TETO Joel**.

♡ *M*es amis **KAMGA Romaric**, **NDONTSOP Cabrel**, **KAMDEM Junior**, **AFANE Cyrille** et **AMOUGOU Martin** pour leur soutien moral indéfectible lors de la rédaction de ce mémoire.

♡ *Q*ue tous ceux dont les noms ne sont pas mentionnés et qui de quelque manière que ce soit, ont contribué à la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé	vii
Abstract	viii
Table des figures	x
Liste des tableaux	xi
Liste des abréviations	xii
Introduction générale	1
1 Revue de la Littérature	4
1.1 Introduction	4
1.2 Généralités sur les QZS	4
1.2.1 Historique	4
1.2.2 Fonctionnement	5
1.3 Modèles d'isolateurs de vibrations QZS	6
1.4 Domaines d'applications	10
1.5 Conclusion	11
2 Méthodologie, Modèles Mathématiques et Résultats analytiques.	12
2.1 Introduction	12
2.2 Présentation du modèle physique	13
2.3 Modélisation mathématique du système étudié.	14

2.3.1	Mise en équation	14
2.3.2	Expression de la force associée au QZS	16
2.3.3	Adimensionnement des équations	19
2.4	Solution analytique approximée et analyse de sa stabilité	20
2.4.1	Détermination de la solution analytique approximée	20
2.4.2	Analyse de la stabilité des solutions	24
2.4.3	Méthode numérique : Méthode de Newton Leipnik	27
2.5	Transmissibilité de la force sous excitation harmonique	29
2.6	Conclusion	30
3	Résultats et Discussions	31
3.1	Introduction	31
3.2	Comparaison entre les résultats analytiques et les résultats numériques	31
3.3	Influence des paramètres de notre système sur la dynamique de la structure à contrôler	33
3.3.1	Étude de l'effet de la viscosité	33
3.3.2	Étude de l'effet de l'ordre fractionnaire	34
3.3.3	Étude de l'effet du terme non-linéaire	37
3.3.4	Effet du coefficient linéaire du QZS	38
3.4	Comparaison des performances avec d'autres modèles	39
3.5	Conclusion	41
	Conclusion et perspectives	42
	Bibliographie	43

Résumé

La réduction des vibrations des infrastructures est nécessaire pour assurer non seulement leur durée de vie, mais également la sécurité des utilisateurs. Plusieurs études exploitant l'effet de la rigidité quasi-nulle via un agencement de ressorts et d'amortisseurs pour atténuer les vibrations ont déjà été réalisées. À cet effet, ce travail analyse l'utilisation de la rigidité quasi-nulle associée à un amortisseur exhibant l'effet mémoire caractérisé ici par l'ordre fractionnaire, dans le but de réduire les vibrations d'un véhicule lors des traversées des dos d'ânes. Tout d'abord, les équations du mouvement du système sont retrouvées. Puis la solution analytique régissant le déplacement de la structure primaire dans le domaine fréquentiel est obtenue grâce à la méthode de la moyenne. Enfin, en utilisant la méthode de Newton Leibnik pour la résolution numérique, nous avons pu montrer la similitude entre les résultats analytiques et numériques. L'influence de quelques paramètres du système à savoir l'ordre fractionnaire, le coefficient de non-linéarité, le coefficient linéaire et l'amplitude de dos d'âne a été étudiée. Les résultats obtenus sont utilisés pour la simulation. Comparé à d'autres modèles classiques, notre absorbeur de vibration révèle une amélioration en terme de confort des passagers de 10% pour le profil d'une route avec dos-d'âne. De plus, l'isolateur proposé peut supporter de grandes amplitudes d'excitation avec une grande plage d'efficacité pour l'isolation des vibrations.

Mots clés : suspension, véhicule, optimisation, vibration, rigidité quasi-nulle, ordre fractionnaire.

Abstract

Reducing the vibrations of infrastructures is necessary to ensure not only their safety but also that of their users. Several studies exploiting the effect of almost zero stiffness via an arrangement of springs and dampers to attenuate vibrations have already been carried out. To this end, this work analyzes the use of quasi-zero stiffness associated with a nonlinear damper (QZS-NLD) in a vehicle suspension for vibration suppression. First, the equations of motion of the system are found. Then the analytical solution governing the displacement of the primary structure (quarter of the vehicle) in the frequency domain is obtained using the average method. Finally, by using Newton Leibnik's method for the numerical resolution, we were able to show the similarity between the analytical and numerical results. A graphical optimization method by studying the influence of the parameters of our model is carried out. The results obtained are used for the simulation. Compared to other conventional models, our vibration absorber reveals an improvement in passenger comfort of 10% for the profile of a road with a speed bump. In addition, the isolator offers can withstand a large amplitude of excitation in the effective vibration isolation range.

Keywords : suspension, vehicle, optimization, vibration, Quasi-Zero Stiffness, fractionnar order

Table des figures

1.1	principe d'obtention de la rigidité quasi-nulle	5
1.2	schéma d'un isolateur de vibration à QZS possédant 3 degrés de liberté [13] . .	6
1.3	schéma d'un isolateur de vibration à QZS possédant 3 degrés de liberté [4] . . .	7
1.4	représentation schématique d'un modèle dynamique QZS [5]	8
1.5	isolateur de vibration à QZS basé sur l'inertier [7]	9
1.6	isolateur de vibration à QZS basé sur un amortisseur magnéto-rhéologique [8] .	10
1.7	Modélisation d'un pont utilisant la rigidité quasi-nulle comme isolateur de vi- bration [5]	11
2.1	Absorbeur de vibration d'un quart de véhicule.	13
2.2	dos d'ânes	14
2.3	Représentation du dispositif générant la rigidité quasi-nulle.	16
2.4	Influence des termes linéaire et non-linéaire sur l'effet de rigidité quasi-nulle : (a)cas linéaire (b)cas non-linéaire.	18
3.1	Comparaison des résultats analytiques et numériques : (a) Fréquence-amplitude (b) Fréquence-force transmise.	32
	(a)	32
	(b)	32
3.2	Effet de la viscosité sur les courbes : (a) Fréquence-amplitude (b) Fréquence- force transmise.	33
	(a)	33
	(b)	33
3.3	Effet de l'ordre fractionnaire sur les courbes :(a) Fréquence-amplitude (b) Fréquence- force transmise.	35
	(a)	35
	(b)	35

3.4	Courbes d'amplitude en fonction de l'ordre fractionnaire pour différentes valeurs de ω avec les valeurs des paramètres du Tableau (3.1).	36
3.5	Influence du terme non linéaire sur les courbes : (a) Fréquence-force transmise	
	(b) Fréquence-amplitude	37
	(a)	37
	(b)	37
3.6	Influence du coefficient linéaire du QZS sur les courbes : (a) Fréquence-amplitude	
	(b) Fréquence-force transmise avec les valeurs des paramètres du Tableau (3.1).	38
	(a)	38
	(b)	38
3.7	Courbes des amplitudes et des forces transmissent en fonction de la fréquence avec et sans présence de l'ordre fractionnaire pour des paramètres de $K_{NL} = 6$;	
	$K_L = 600$; $\alpha = 0.7$ et $c = 500$	40
	(a)	40
	(b)	40

Liste des tableaux

2.1	Caractéristique du dos d'âne	16
3.1	Paramètres du QZS.	32

Liste des abréviations

QZS : Quasi-Zero-Stiffness (en français : Rigidité quasi-nulle)

T-QZS : Traditionnels Quasi-Zero-Stiffness

QZS-ANL : Rigidité Quasi-Nulle avec Amortisseur Non Linéaire

A-B-M : Adams Bashforth Moulton

RK4 : Runge Kutta d'ordre 4

Introduction générale

Des vibrations excessives dans les structures mécaniques nuisent généralement à leur sécurité, leurs performances et leur durée de vie. Pour réduire ces vibrations excessives, des modèles de dispositifs de suppression des vibrations sont couramment développés. À cet effet, l'absorbeur de vibration à rigidité quasi-nulle (QZS)[1] constitué de deux ressorts inclinés et d'un ressort vertical, tous à raideur linéaire l'ensemble fixé sur une structure pour réduire ses vibrations a été conçu en fonction de la charge dynamique de la structure [2]-[4]. Dans la littérature, plusieurs techniques de contrôle utilisant la rigidité quasi-nulle ont été étudiées. Nous constatons que les isolateurs de vibrations traditionnels (T-QZSs) utilisent généralement un amortissement linéaire [5], ce qui rend difficile l'obtention de bonnes performances d'isolation à la fois aux basses et hautes fréquences. De plus, les isolateurs T-QZSs présentent de mauvaises performances d'isolation comparé aux amortisseurs linéaires pour de grandes amplitudes d'excitation. Avec l'augmentation de la demande des performances pour la réduction des vibrations, il est difficile pour les isolateurs T-QZSs de répondre à la demande croissante des pratiques d'ingénierie. L'introduction des amortisseurs non-linéaires reliés au sol dans les isolateurs de vibrations QZSs [9]-[12] a sans aucun doute, contribué à améliorer les performances de contrôle en terme d'élargissement de la bande de fréquence de réduction des vibrations de la structure primaire. C'est ainsi que Kovacic et al [15]-[16] ont étudié le

comportement dynamique non-linéaire d'un isolateur QZS et ont mis en évidence l'effet positif de la non-linéarité dans la dynamique des structures pour contrôler les vibrations. Xu et al.[17] ont établi un modèle de QZS constitué de quatre ressorts inclinés de raideur négative et d'un ressort vertical de raideur positive, permettant de générer une bande de fréquence d'isolement plus grande que celle obtenue avec deux ressorts inclinés ; sans oublier la stabilité sans faille dudit système venant ainsi répondre au problème de saut d'amplitude lié à l'utilisation des QZSs.

En plus des ressorts inclinés, de nombreux autres types de structures ont été conçus pour générer la rigidité quasi-nulle. Lan et al.[9] ont utilisé des ressorts horizontaux au lieu de ressorts inclinés. Liu et al.[10] ont proposé un isolateur QZS utilisant une poutre déformée d'Euler comme élément de rigidité négative. Niu et al.[11] ont rapporté une conception théorique et ont effectué une analyse caractéristique sur l'isolateur QZS basé sur un ressort à disque comme élément de rigidité négative. Zhou et al. [18]-[19] ont conçu un mécanisme à galets de came pour obtenir les caractéristiques QZSs de l'isolateur de vibrations. Ils ont conçu une tige QZS compacte et étendu. Inspiré par la forme des membres des animaux, Zeng et al.[20] ont proposé un isolateur QZS avec une structure de ressorts de torsion pliée. De plus, les ressorts magnétiques ont été étudiés par de nombreux chercheurs[21]-[24] et ont été utilisés pour réaliser la rigidité quasi-nulle.

Cependant, certains problèmes persistent. Si l'amortissement est augmenté pour supprimer la transmissibilité à proximité de la fréquence de résonance, la transmissibilité à haute fréquence augmente également, ce qui rend difficile l'obtention de bonnes performances d'isolation à la fois aux basses et aux hautes fréquences. De plus, la rigidité de durcissement des isolateurs QZSs détériorera

les performances d'isolation des vibrations du système sous une grande amplitude d'excitation. Pour résoudre ces problèmes et améliorer encore les performances d'isolation des vibrations des systèmes à QZS, notre travail propose un isolateur QZS avec un amortisseur non-linéaire exhibant un comportement suivant un ordre fractionnaire. Inspirés du modèle de suspension de véhicule, nous allons appliquer notre contrôle sur le siège d'un véhicule afin de minimiser l'amplitude des excitations dues à la route.

Ce document est organisé comme suit : le chapitre un présente une brève revue de la littérature sur les isolateurs à QZS. Dans le chapitre deux, la modélisation mathématique de l'isolateur à QZS-ANL proposé est présentée. En utilisant la méthode de la moyenne, la solution analytique est trouvée. Dans le chapitre trois, une similarité entre les résultats analytiques et les résultats numériques est démontrée. Pour minimiser le facteur d'amplitude maximale du système primaire sous excitation de force harmonique, l'effet des différents paramètres de l'isolateur de vibration à QZS-ANL est étudié. Après cela, les performances de contrôle du QZS-ANL proposé sont comparées à celles d'autres isolateurs à QZS dans le domaine fréquentiel. Enfin quelques conclusions sont tirées de ces résultats.

Revue de la Littérature

1.1 Introduction

Les vibrations présentent dans la plupart des constructions mécaniques, sont en générale source d'inconfort pour les utilisateurs et même de destruction de ces structures mécaniques. Elles doivent être contrôlées ou fortement réduites. Pour cette raison, le contrôle de vibrations est devenu depuis des années un enjeu majeur pour les chercheurs. Afin de développer des techniques efficaces pour la résolution de ces problèmes, les chercheurs mettent sur pied de jour en jour des dispositifs permettant de contrôler ces vibrations. C'est la raison pour laquelle des dispositifs de contrôle à rigidité quasi-nulle ont été conçus. Dans ce chapitre nous allons d'abord montrer l'évolution et le mode de fonctionnement des dispositifs QZS, ensuite nous allons lister les modèles rencontrés dans la littérature et enfin nous allons donner les domaines d'applications de ces dispositifs de contrôle de vibrations.

1.2 Généralités sur les QZS

1.2.1 Historique

Le concept de rigidité quasi-nulle a été proposé pour la première fois par **Molyneux en 1957** [1]; et le premier livre sur l'isolateur de vibration à rigidité quasi-nulle a été publié par **Alabuzhev en 1989** [2]. Après des décennies de développement, la partie à rigidité négative de l'isolateur de vibrations à rigidité

quasi-nulle a été conçue principalement sous la forme d'une structure mécanique, d'une structure à aimant permanent, d'une structure électromagnétique, d'une structure pneumatique, etc. À l'heure actuelle, la recherche sur l'isolateur de vibrations à rigidité quasi-nulle est au stade expérimental [3].

1.2.2 Fonctionnement

D'une manière générale, les isolateurs de vibrations QZS sont utilisés pour le contrôle de vibrations à basse fréquence pouvant aller jusqu'aux fréquences inférieures à $20\mu\text{Hz}$ [2]. Les isolateurs QZS sont composés d'un élément élastique porteur de charge et offrant une rigidité positive appelé correcteur de rigidité. L'élément élastique porteur de charge est généralement un ressort vertical. Une fois qu'il est soumis à la masse principale dite masse primaire, il est comprimé et atteint sa position d'équilibre statique (voir Figure 1.1). À cet instant la raideur positive du ressort vertical est exactement équilibrée par la raideur négative fournie par les correcteurs de raideur. Les isolateurs à rigidité quasi-nulle qu'on rencontre dans la littérature, se distinguent généralement par leur correcteur de raideur permettant plus ou moins d'atteindre des meilleures performances d'isolement. Le principe pour aboutir à une rigidité quasi-nulle et ramener le système à l'état d'équilibre est le suivant :

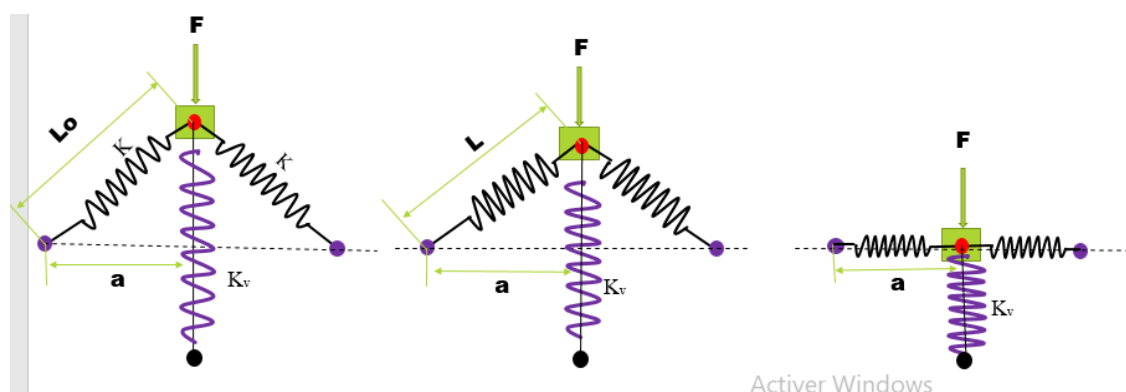


FIGURE 1.1 – principe d'obtention de la rigidité quasi-nulle

1.3 Modèles d'isolateurs de vibrations QZS

- En 2012 A.Carrella , MJ Brennan , T.P. Waters ont proposé un isolateur de vibration à QZS composé de deux ressort obliques de raideurs négatives et d'un ressort verticale de raideur positive et d'un amortisseur linéaire.

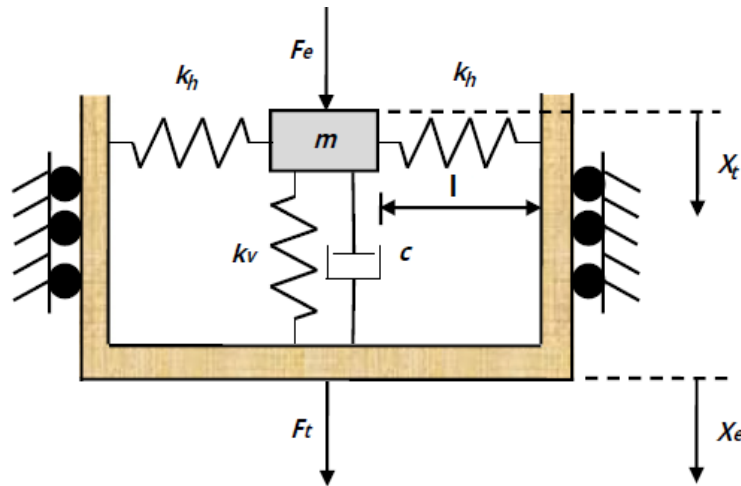


FIGURE 1.2 – schéma d'un isolateur de vibration à QZS possédant 3 degrés de liberté [13]

Idéalement, un isolateur de vibrations doit avoir une rigidité statique élevée, pour supporter des charges statiques sans déplacement trop important, et en même temps, une rigidité dynamique faible afin que la fréquence propre du système soit la plus faible possible, ce qui se traduira par une zone d'isolement accru. Ces deux effets s'excluent mutuellement dans les isolateurs linéaires mais peuvent être surmontés si des isolateurs non-linéaires correctement configurés sont utilisés. C'est ainsi que Carella [13] propose un isolateur non-linéaire comprenant trois ressorts, dont deux sont configurés pour réduire la raideur dynamique de l'isolateur. Le comportement dynamique de l'isolateur est étudié en utilisant la transmissibilité de la force et du déplacement, qui sont dérivées en modélisant le système dynamique comme un système à un seul degré de liberté tel que représenté par la Figure 1.2.

- En 2018 Young Wang , Shunming , Chun Cheng ont proposé un isolateur de vibration à QZS composé d'un ressort vertical relié à une paire de ressorts linéaires horizontale à rigidité négative possédant 3 degrés de liberté.

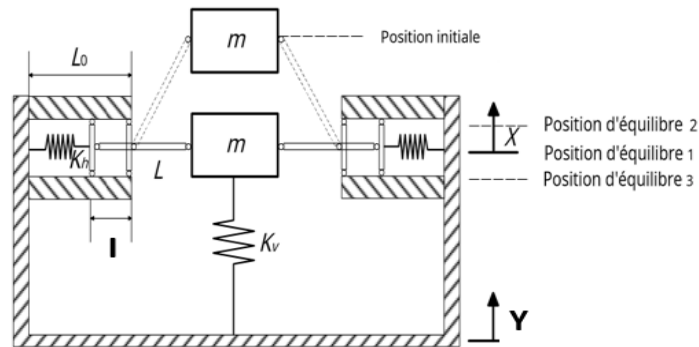


FIGURE 1.3 – schéma d'un isolateur de vibration à QZS possédant 3 degrés de liberté [4]

Le dispositif ainsi obtenu est soumis à un chargement de masse m qui permet au système d'atteindre un état d'équilibre.

Ils comparent les performances de ce dispositif à celui d'un absorbeur de vibration linéaire. Il en ressort que, **ce modèle a cet particularité de s'adapter à la masse du chargement.** Si la masse est supérieure (ou inférieure) à la masse prévue pour ramener le système à la position d'équilibre statique, le système se met dans un nouvel état d'équilibre. Dans ce cas, les résultats des courbes force-déplacement et rigidité-déplacement présentent le même comportement pour chaque position d'équilibre. Raison pour laquelle il est bénéfique pour les véhicules.

- En 2020 H.Sonfack Bouna, BR Nana Nbandjo et P.Wofo ont présenté un isolateur de vibration à rigidité quasi-nulle en utilisant une paire de ressorts inclinées de raideur négative et un ressort vertical de raideur positive (voir Figure 1.3) .

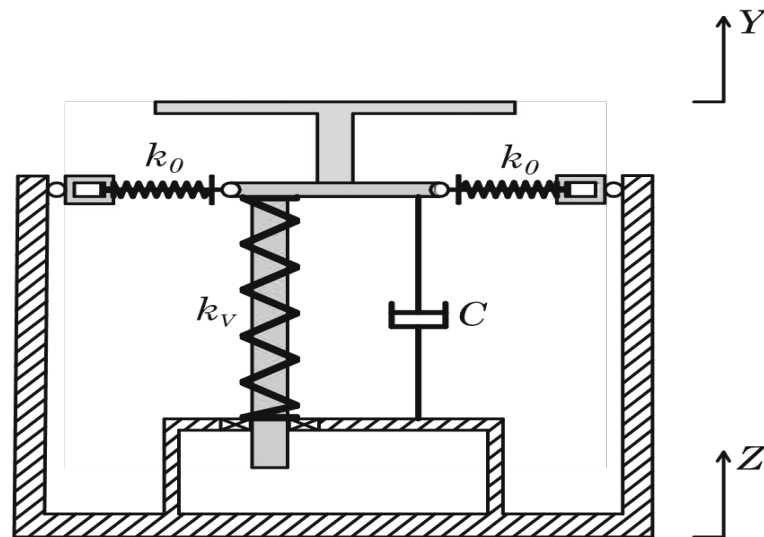


FIGURE 1.4 – représentation schématique d'un modèle dynamique QZS [5]

Le dispositif ainsi obtenu a été utilisé pour le contrôle visco-élastique d'un pont assimilable à une poutre.

Ils ont montré qu'en prenant λ^1 égal à 1, on obtient une position d'équilibre statique avec un chargement adéquat. L'étude numérique a permis de montrer au travers des courbes, que la transmissibilité absolue du mouvement² est très faible dans la zone où les déplacements génèrent une rigidité quasi-nulle, sauf dans le cas de résonance.

- En 2020 Young Wang, Hao Xuan Li, Chun Cheng, Gu Ding ont proposé un isolateur de vibrations à rigidité quasi-nulle basé sur un inerter (élément mécanique à deux bornes dont l'accélération relative entre ces deux bornes est proportionnelle à la force appliquée sur les bornes) tel que présenté à la figure 1.4 pour améliorer les performances dynamiques du QZS.

1. le rapport de raideurs entre le ressort vertical et oblique

2. rapport entre l'amplitude de vibrations de la structure primaire avec contrôle et celle sans contrôle

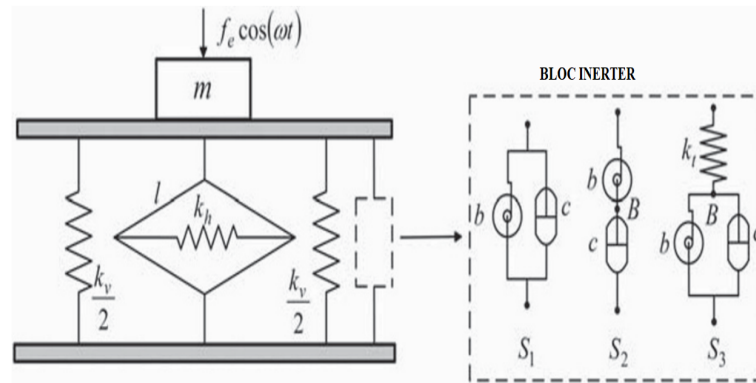


FIGURE 1.5 – isolateur de vibration à QZS basé sur l’inerter [7]

Il combine la rigidité non linéaire supérieure caractéristique de l’isolateur de vibration QZS et l’effet de grossissement de masse bénéfique de l’inerter. La structure en forme de losange est utilisée comme structure de rigidité négative ; un ressort est ajouté avec l’inerter et l’amortisseur pour construire un nouvel isolateur dont l’inerter et l’amortisseur sont d’abord connecté en parallèle puis connectés en série avec le ressort supplémentaire : il s’agit d’une connexion mixte. Ce système permet d’obtenir **une bande de fréquence d’isolement plus large et un taux d’atténuation de la transmissibilité de force haute fréquence plus rapide que celui des QZS simples.**

- **En 2021 Shaohua Li, Guizhen feng, et Quan Zhao** ont conçu un isolateur semi-actif de vibration à rigidité quasi-nulle avec un amortisseur magnéto-rhéologique mis en parallèle avec le ressort vertical de raideur positive.

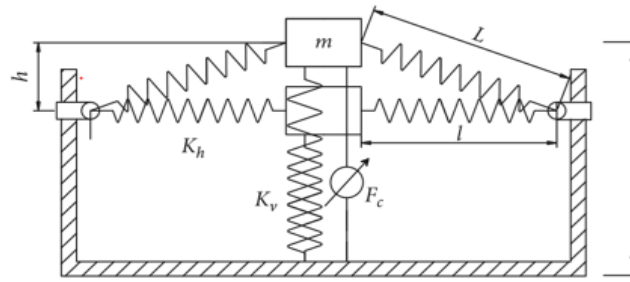


FIGURE 1.6 – isolateur de vibration à QZS basé sur un amortisseur magnéto-rhéologique [8]

Ce système a cette particularité d’être plus efficace aux excitations aléatoires (tels que les chocs, les vibrations stochastiques) par rapport aux systèmes passifs à QZS qui ne sont qu’efficaces sous excitations harmoniques.

1.4 Domaines d’applications

Les absorbeurs de vibrations sont utiles pour tout système mécanique présentant des vibrations indésirables. Pour ce qui est des modèles passifs à rigidité quasi-nulle, ils sont très adaptés à des structures présentant une non-linéarité dans leur mouvement d’ensemble et une basse fréquence de vibration. Parmi ces structures mécaniques on peut citer :

- ✓ **les véhicules** : les vibrations à basse fréquence affectent sérieusement la santé humaine et réduisent l’efficacité du travail. L’absorbeur de vibration à QZS peut être utilisé pour atténuer les vibrations transmises par la route aux passagers et améliorer le confort de conduite.
- ✓ **les ponts** : ces dernières années, l’isolation de vibration à base de QZS est devenue une technique de contrôle de plus en plus appliquée pour protéger les ponts contre les charges sévères. Cette méthode consiste à placer le dispositif entre la source de vibration et le pilier que l’on veut isoler comme le montre la modélisation suivante proposée dans [5].

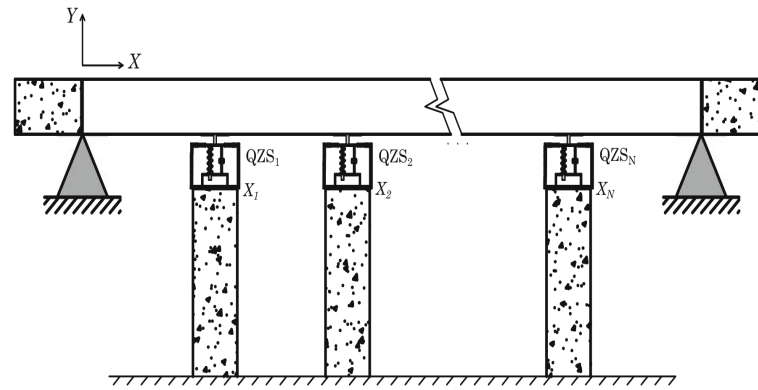


FIGURE 1.7 – Modélisation d'un pont utilisant la rigidité quasi-nulle comme isolateur de vibration [5]

- ✓ **les bâtiments** : on peut utiliser les QZS pour isoler un bâtiment de secousses telles que les ondes dues aux excitations de la route, des mouvements des plaques de l'écorce terrestre...

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les QZSs dans leurs généralités avec quelques modèles de QZS et leurs particularités. Il en ressort que nous pouvons appliquer le principe de QZS sur divers systèmes mécaniques de contrôle de vibration afin d'améliorer les performances de ceux-ci. Dans le chapitre suivant, nous ferons une modélisation mathématique d'un isolateur de vibration à QZS comme contrôle de vibration d'un quart de véhicule ; puis nous ferons ressortir l'influence de quelques paramètres du QZS sur la dynamique de la structure.

Méthodologie, Modèles Mathématiques et Résultats analytiques.

2.1 Introduction

Le contrôle des vibrations des structures rigides est d'une importance capitale, car il nous permet de prédire le comportement dynamique de ces structures. Comme structure rigide, nous pouvons citer entre autre les bâtiments, les bateaux et les voitures. Dans le soucis d'améliorer le confort des véhicules, nous allons nous intéresser au contrôle de vibrations d'un quart de véhicule en utilisant la rigidité quasi-nulle comme isolateur de vibrations. Dans ce chapitre, nous allons d'abord faire une modélisation de notre système QZS avec amortisseur délivrant une force à l'ordre fractionnaire ; par la suite nous présenterons les équations vibrationnelles de notre système, ensuite nous allons retrouver les équations d'amplitudes et enfin déterminer la transmissibilité absolue des forces.

2.2 Présentation du modèle physique

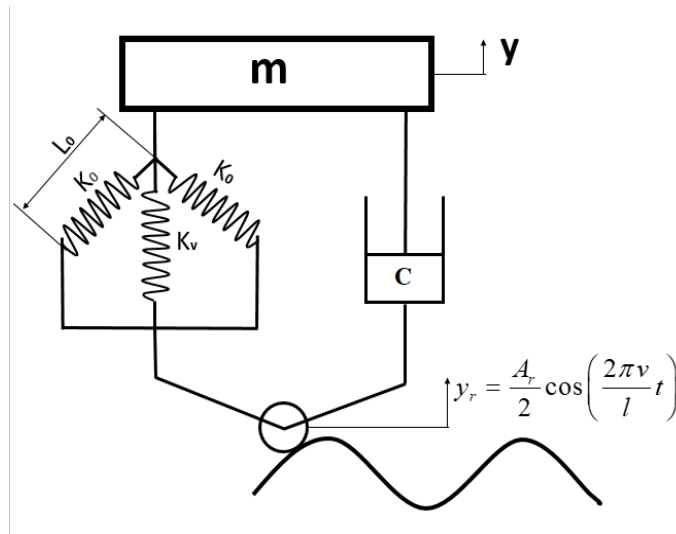


FIGURE 2.1 – Absorbeur de vibration d'un quart de véhicule.

La Figure 2.1 présente le modèle d'un absorbeur de vibration à rigidité quasi-nulle, isolant un quart de véhicule de masse m , des excitations provenant de la route. Ce système est constitué d'un ressort vertical à raideur linéaire K_v , de deux ressorts obliques linéaires et identiques de raideur négative K_0 et de longueur initiale L_0 . Un amortisseur délivrant une force de frottement d'ordre fractionnaire α . L'amortisseur et le ressort vertical sont liés à la masse et se reposent sur la roue du véhicule tandis que les ressorts obliques sont liés, à la masse et prennent attache à la carrosserie du véhicule. L'action du poids du véhicule crée un déplacement vers le bas des ressorts du système; et lorsque cette action est appropriée, les ressorts sont comprimés de la position initial sans charge à la position d'équilibre avec charge. Cette position d'équilibre correspond à une position où les ressorts initialement obliques sont comprimés en position horizontale et la raideur positive du ressort vertical s'annule avec la raideur négative des ressorts horizontaux et on obtient à cet instant un système possédant une raideur nulle.

2.3 Modélisation mathématique du système étudié.

2.3.1 Mise en équation

En considérant les paramètres suivants : K_{QZS} la constante de raideur de l'association des 3 ressorts ; c le coefficient de viscosité de l'amortisseur ; α l'ordre fractionnaire :

La relation fondamentale de la dynamique, l'équation du mouvement de la masse m est donnée par :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow K_{QZS}(z - z_r) + cD^\alpha(z - z_r) = m\ddot{z} \quad (2.1)$$

où $K_{QZS}(z - z_r)$ représente la force générée par les ressorts oscillants au voisinage de leurs positions d'équilibre ; $cD^\alpha(z - z_r)$ la force de frottement délivré par l'amortisseur ; z le déplacement de la masse ; z_r le déplacement de la roue.

Expression de z_r ; le déplacement de la roue dû à l'excitation de la route

Pour trouver l'expression de z_r , nous allons assimiler les dos d'ânes de la route à un profil sinusoïdale. La figure ci-dessus montre l'évolution des dos d'ânes dans le plan $(x; z)$.

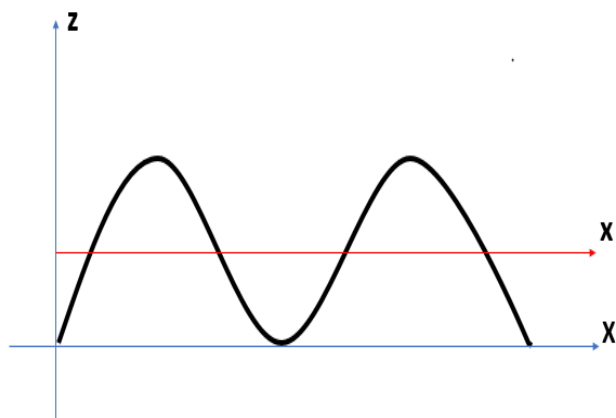


FIGURE 2.2 – dos d'ânes

La roue se déplaçant à vitesse v , nous allons considérer qu'elle heurte un dos

d'âne de longueur l et d'amplitude A_r , le déplacement de la roue z_r sur la dos d'âne peut s'exprimer dans le repère (x,z) sous la forme :

$$z_r = Z_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + Z_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

Avec l la période spatiale de notre fonction sinusoidale. En utilisant les conditions aux limites définies par $z(0) = -\frac{A_r}{2}$ et $z\left(\frac{l}{4}\right) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} Z_1 = -\frac{A_r}{2} \\ Z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_r = -\frac{A_r}{2} \cos \frac{2\pi x}{l} \quad (2.2)$$

À présent nous allons donner l'expression de z_r dans le repère $(x'z')$ image de (xz) par translation de vecteur $\frac{A_r}{2} \vec{k}$.

En tenant compte du vecteur de translation, $z_r = \frac{A_r}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\right)$ tout le long de la bosse c'est à dire $0 \leq x \leq l$.

Si $x \geq l$ alors $z_r = 0$. D'où le système :

$$z_r = \begin{cases} \frac{A_r}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)\right) & 0 \leq x \leq l \\ 0 & x \geq l \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{Or } \begin{cases} 0 \leq x \leq l \\ x \geq l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{x}{v} \leq \frac{l}{v} \\ \frac{x}{v} \geq \frac{l}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{l}{v} \\ t \geq \frac{l}{v} \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'obtenir le système suivant :

$$z_r = \begin{cases} \frac{A_r}{2} (1 - \cos(\frac{2\pi v}{l}t)) & 0 \leq t \leq \frac{l}{v} \\ 0 & t \geq \frac{l}{v} \end{cases} \quad (2.4)$$

Ce dernier système d'équations traduit le déplacement de la roue sur le dos d'âne en fonction du temps ; avec les caractéristiques du dos d'ânes données par le tableau suivant :

TABLE 2.1 – Caractéristique du dos d'âne

grandeurs physiques	symboles	valeurs
Amplitude du dos d'âne	A_R	$0.1m$
Longueur du dos d'âne	l	$2.0m$
Vitesse du véhicule	v	$1m/s$

2.3.2 Expression de la force associée au QZS

Soit la Figure 2.3 représentée ci-dessous .

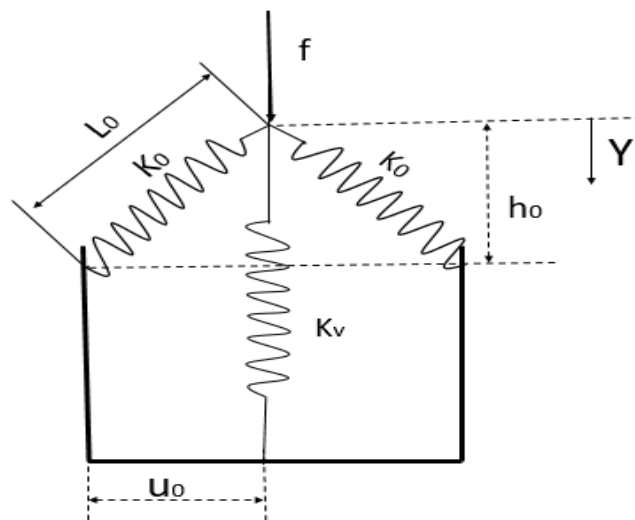


FIGURE 2.3 – Représentation du dispositif générant la rigidité quasi-nulle.

Cette figure présentent un agencement de deux ressorts obliques de raideurs négatives issus d'une pré-compression et un ressort vertical de raideur positive. Nous obtenons à l'équilibre, la force $\mathbf{f}$ représentant dans ce cas de figure, le poids de l'ensemble du système *passager + siége* et dont l'expression est donnée par : $f = f_v + f_0$ où

$f_v = k_v Y_0$ représente la contribution du ressort vertical et

$f_0 = 2k_0(h_0 - Y_0) \left(\frac{L_0}{\sqrt{u_0^2 + (h_0 - Y_0)^2}} - 1 \right)$ représente la contribution des ressorts obliques.

Y_0 la compression du ressort vertical de la position initial à la position d'équilibre.

À l'équilibre, les ressorts obliques se retrouvent dans le plan horizontal et à cet instant, la force du chargement est définie par :

$$f = k_v Y - 2k_0 Y \left(\frac{L_0}{\sqrt{u_0^2 + Y^2}} - 1 \right) + k_v h_0 \quad \text{avec} \quad Y = h_0 - Y_0 \quad (2.5)$$

Pour une meilleure analyse, les paramètres non-dimensionnels sont introduits :

$$y = Y/L_0 \quad u = u_0/L_0 \quad h = h_0/L_0 \quad \lambda = k_0/k_v$$

et l'on peut écrire la force addimensionnée du chargement sous la forme :

$$F = y + 2\lambda y \left(1 - \frac{a^2}{(u^2 + y^2)^{3/2}} \right); \quad (2.6)$$

et la raideur équivalente associée

$$K = 1 + 2\lambda \left(1 - \frac{u^2}{(u^2 + y^2)^{3/2}} \right) \quad (2.7)$$

En posant $K = 0$, la condition de rigidité nulle est définie par :

$$\lambda_{QZS} = \frac{u}{2(1 - u)} = \frac{\cos \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)} \quad (2.8)$$

Pour de faible déplacement du système, nous pouvons appliquer à la force $F(y)$

le développement en série de Taylor définie par :

$$F(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^n(0)}{n} y^n \quad (2.9)$$

donc l'expression de notre force F au 3^{ème} ordre, se réduire à :

$$F(y) \simeq k_L y + k_{NL} y^3 \quad (2.10)$$

Soit la Figure 2.4 représentant la force $F(y)$ pour différentes valeurs de K_L et K_{NL} .

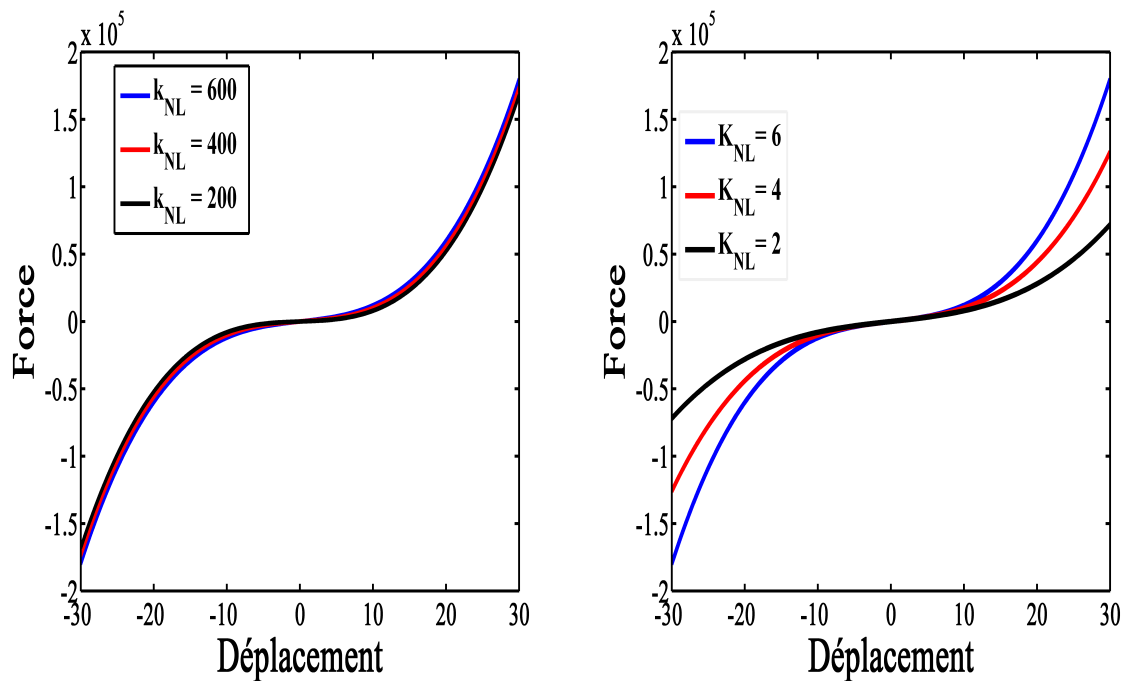


FIGURE 2.4 – Influence des termes linéaire et non-linéaire sur l'effet de rigidité quasi-nulle : (a)cas linéaire (b)cas non-linéaire.

Cette figure met en évidence la plage de compression ou d'élongation de l'association de ressorts qui permet d'obtenir une force quasi-nulle et par conséquent une rigidité quasi-nulle.

Ainsi, dans une plage de déplacement convenable, nous pouvons différentier l'équation (2.10) par rapport à y et obtenir l'expression de la rigidité quai-nulle définie par la relation suivante :

$$K(y) = k_L + k_{NL}y^2 \quad (2.11)$$

Dans l'équation (2.1) qui régit de la relation fondamentale de la dynamique, nous effectuons un changement de variable en posant $y = z - z_r$ et nous remplaçons z_r par son expression retrouvée en (2.4) pour obtenir l'équation (2.12).

$$\ddot{y} + \frac{k_{QZS}}{m}y + \frac{c}{m}D^\alpha y = \frac{2\pi^2 v^2}{l^2} A_r \cos\left(\frac{2\pi v}{l}t\right) \quad (2.12)$$

en remplaçant K_{QZS} par son expression trouvée en (2.11) nous obtenons l'équation (2.13)

$$\ddot{y} + \frac{k_L}{m}y + \frac{k_{NL}}{m}y^3 + \frac{c}{m}D^\alpha y = \frac{2\pi^2 v^2}{l^2} A_r \cos\left(\frac{2\pi v}{l}t\right) \quad (2.13)$$

cette dernière équation est une équation différentiel non-linéaire du second ordre avec second membre.

2.3.3 Adimensionnement des équations

Pour adimensionner l'équations (2.12), posons :

$$x = \frac{y}{l_0} \text{ et } \tau = \frac{t}{T_0} \quad (2.14)$$

Où l_0 est la longueur de référence de l'allongement des ressorts et T_0 est un temps de référence.

Les équations vibrationnelles adimensionnées du système à rigidité quasi-nulle s'écrivent alors comme suit :

$$\ddot{x} + \frac{k_L}{m}T_0^2 x + \frac{k_{NL}l_0^2}{m}T_0^2 x^3 + \frac{cl_0T_0^{2-\alpha}}{m}D^\alpha x = \frac{2\pi^2 A_r T_0^2 v^2}{l^2 l_0} \cos\left(\frac{2\pi v}{l}T_0\tau\right) \quad (2.15)$$

Ce qui nous amène à écrire que :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + bx^3 + \eta D^\alpha x = f \cos \omega t \quad (2.16)$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{k_L}{m} T_0^2 ; \quad b = \frac{k_{NL} l_0^2}{m} T_0^2 ; \quad \eta = \frac{c l_0 T_0^{2-\alpha}}{m} ; \quad f = \frac{2\pi^2 A_r T_0^2 v^2}{l^2 l_0} \text{ et } \omega = \frac{2\pi v}{l} T_0$$

L'équation (2.16) représente l'équation (2.12) additionné.

2.4 Solution analytique approximée et analyse de sa stabilité

2.4.1 Détermination de la solution analytique approximée

Ici nous utilisons la méthode de la moyenne pour déterminer les solutions analytiques. Pour cela, nous posons :

$$x(\tau) = A(\tau) \cos(\omega\tau + \varphi(\tau)) \quad (2.17)$$

et

$$\dot{x}(\tau) = \dot{A}(\tau) \cos(\omega\tau + \varphi(\tau)) - A(\tau) (\omega + \dot{\varphi}(\tau)) \sin(\omega\tau + \varphi(\tau)) \quad (2.18)$$

où A est l'amplitude d'oscillations de la structure et φ est la phase.

En remplaçant les équations (2.17) et (2.18) dans l'équation (2.16) et après quelques manipulations mathématiques, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \dot{A} \cos(\omega\tau + \varphi) - A(\tau) \dot{\varphi} \sin(\omega\tau + \varphi) = 0 \\ \dot{A} \sin(\omega\tau + \varphi) - A\dot{\varphi} \cos(\omega\tau + \varphi) = -\frac{1}{\omega} F(t, x, \dot{x}) \end{cases} \quad (2.19)$$

La résolution du système (2.19) avec comme inconnu $\dot{A}$ et $A\dot{\varphi}$ conduit à l'obtention de l'équation (2.20)

$$\dot{A} = -\frac{1}{\omega} (F_1 + F_2) \sin(\omega\tau + \varphi) \text{ et } A\dot{\varphi} = -\frac{1}{\omega} (F_1 + F_2) \cos(\omega\tau + \varphi) \quad (2.20)$$

où F_1 représente la partie périodique de la fonction F et F_2 la partie apériodique.

dique de la même fonction. Par application de la méthode de la moyenne [12] calculons la moyenne de $\dot{A}$ et $A\dot{\varphi}$:

soient

$$\langle \dot{A} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{1}{\omega} (F_1 + F_2) \sin \theta d\theta \quad \langle A\dot{\varphi} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{1}{\omega} (F_1 + F_2) \cos \theta d\theta$$

avec $\theta = \omega\tau + \varphi$

$$F_1(t, x) = f \cos(\theta - \varphi) + \sigma A \cos \theta - \frac{bA^3}{4} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta) \quad F_2(t, x) = -\eta D^\alpha (A \cos \theta)$$

Dans le but de déterminer l'expression de la partie apériodique, nous utiliserons la méthode de Caputo.

Dérivation d'ordre arbitraire au sens de Caputo

Dans le cas d'un indice α arbitraire, mais choisi entre 0 et 1 ; la définition de la dérivation d'ordre α au sens de Caputo utilise explicitement les propriétés de fonctions spéciales telles que la fonction Γ définie à la relation suivante par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} du$$

Cette fonction est telle que $\Gamma(n+1) = n!$ pour n étant un nombre entier naturel. Ainsi nous avons la dérivée au sens de Caputo définie par :

$$D^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{du}{d\theta} \frac{1}{(t-\theta)^\alpha} d\theta \quad (2.21)$$

Nous allons calculer la moyenne de la partie apériodique en utilisant la méthode définie ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha (F_2 \sin \theta) \rangle_\theta &= \langle \eta D^\alpha (A \cos \theta) \sin \theta \rangle \\
&= -\frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_0^s \frac{\sin(\omega r + \varphi)}{(s-r)^\alpha} dr \right] \sin(\omega s + \varphi) ds \\
&= -\frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\int_0^s \frac{\cos(\omega u)}{u^\alpha} du \right) \frac{1 - \cos(2\omega s + 2\varphi)}{2} \right] ds \\
&\quad + \frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\int_0^s \frac{\sin(\omega u)}{u^\alpha} du \right) \frac{\sin(2\omega s + 2\varphi)}{2} \right] ds \\
&= -\frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{2\omega s - \sin(2\omega s + 2\varphi)}{4\omega} \int_0^s \frac{\cos(\omega u)}{u^\alpha} du \right) \\
&\quad + \frac{A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{2\omega s - \sin(2\omega s + 2\varphi) \cos(\omega s)}{4\omega} \frac{1}{s^\alpha} \right] ds \\
&\quad - \frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{\cos(2\omega s + 2\varphi)}{4\omega} \int_0^s \frac{\sin(\omega u)}{u^\alpha} du \right) \\
&\quad + \frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\cos(2\omega s + 2\varphi) \sin(\omega s)}{4\omega} \frac{1}{s^\alpha} \right] ds
\end{aligned}$$

$$\langle D^\alpha (F_2 \sin \theta) \rangle = \frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} (M_1 - M_2 + M_3 - M_4)$$

avec

$$\begin{aligned}
M_1 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{2\omega T - \sin(2\omega T + 2\varphi)}{4\omega} \int_0^T \frac{\cos(\omega u)}{u^\alpha} du \right) \\
M_1 &= \frac{\omega^{1-\alpha} \Gamma(1-\alpha)}{2} \sin \frac{\alpha\pi}{2} . \\
M_2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{2\omega s - \sin(2\omega s + 2\varphi) \cos(\omega s)}{4\omega} \frac{1}{s^\alpha} \right] ds = 0 \\
M_3 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{\cos(2\omega T + 2\varphi)}{4\omega} \int_0^T \frac{\sin(\omega u)}{u^\alpha} du \right) = 0 \\
M_4 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\cos(2\omega s + 2\varphi) \sin(\omega s)}{4\omega} \frac{1}{s^\alpha} \right] ds = 0
\end{aligned}$$

$$\langle D^\alpha (F_2 \sin \theta) \rangle = -\frac{\eta A \omega^\alpha}{2} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha (F_2 \cos \theta) \rangle_\theta &= \langle \eta D^\alpha (A \cos \theta) \cos \theta \rangle \\
&= -\frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_0^s \frac{\sin(\omega r + \varphi)}{(s-r)^\alpha} dr \right] \cos(\omega s + \varphi) ds \\
&= \frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\int_0^s \frac{\sin(\omega u)}{u^\alpha} du \right) \frac{1 + \cos(2\omega s + 2\varphi)}{2} \right] ds \\
&\quad - \frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\int_0^s \frac{\cos(\omega u)}{u^\alpha} du \right) \frac{\sin(2\omega s + 2\varphi)}{2} \right] ds \\
&= \frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{2\omega s - \sin(2\omega s + 2\varphi)}{4\omega} \int_0^s \frac{\sin(\omega u)}{u^\alpha} du \right) \\
&\quad - \frac{A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{2\omega s - \sin(2\omega s + 2\varphi)}{4\omega} \frac{\sin(\omega s)}{s^\alpha} \right] ds \\
&\quad + \frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{\cos(2\omega s + 2\varphi)}{4\omega} \int_0^s \frac{\cos(\omega u)}{u^\alpha} du \right) \\
&\quad - \frac{\eta A \omega}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\cos(2\omega s + 2\varphi)}{4\omega} \frac{\cos(\omega s)}{s^\alpha} \right] ds \\
\langle D^\alpha (F_2 \sin \theta) \rangle &= \frac{\eta A \omega^\alpha}{2} \cos \frac{\alpha \pi}{2}.
\end{aligned}$$

en introduisant ce calcul dans l'expression de $\langle \dot{A} \rangle$ et $\langle A \dot{\varphi} \rangle$ nous obtenons le système 2.23

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{f}{2\omega} \sin \varphi - \frac{\eta A \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha \\ A \dot{\varphi} = -\frac{f}{2\omega} \cos \varphi - \frac{A}{2\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{3bA^3}{8\omega} + \frac{\eta A \omega^{\alpha-1}}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha \end{cases} \quad (2.23)$$

En travaillant dans l'état stationnaire, nous pouvons poser $\dot{A} = 0$ et $A \dot{\varphi} = 0$ et obtenir :

$$\begin{cases} f \sin \varphi = -\eta A \omega^\alpha \sin \frac{\pi}{2} \alpha \\ f \cos \varphi = -A(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{3}{4} b A^3 + \eta A \omega^\alpha \cos \frac{\pi}{2} \alpha \end{cases} \quad (2.24)$$

En élevant au carrée chaque membre du système d'équation (2.24) et en

sommant membre à membre, on obtient l'équation (2.25) suivante :

$$f^2 = (\eta A \omega^\alpha \sin \frac{\pi}{2} \alpha)^2 + (-A(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{3}{4} b A^3 + \eta A \omega^\alpha \cos \frac{\pi}{2} \alpha)^2 \quad (2.25)$$

Cette dernière équation représente l'équation d'amplitude du système.

2.4.2 Analyse de la stabilité des solutions

Dans cette partie, nous allons utiliser la méthode d'Andronov et Witt [29] pour étudier la stabilité de notre système. Pour cela nous allons suivre les étapes définies ci dessous :

- **Perturbation du système au voisinage du régime stationnaire**

Pertuber les amplitudes et le déphasage en posant $A = A_0 + \Delta A$ et $\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi$ après avoir introduit dans le système d'équation (??) et en considérant les dérivées nulles à l'état stationnaires, nous obtenons le système d'équations (2.26)

$$\begin{cases} \Delta \dot{A} = -\frac{f}{2\omega} \cos \varphi \Delta \varphi - \frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha \Delta A \\ A_0 \Delta \dot{\varphi} = \frac{f}{2\omega} \sin \varphi \Delta \varphi - \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{2\omega} \Delta A + \frac{9bA_0^2}{8\omega} \Delta A + \frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha \Delta A \end{cases} \quad (2.26)$$

- **Expression des composantes sinusoïdales :**

Cherchons à présent les expressions de $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ à partir des équations à l'état stationnaire. À l'état stationnaire nous avons :

$$\begin{cases} \dot{A} = 0 \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{f}{2\omega} \sin \varphi - \frac{\eta A \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha = 0 \\ -\frac{f}{2\omega} \cos \varphi - \frac{A}{2\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{3bA^3}{8\omega} + \frac{\eta A \omega^{\alpha-1}}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha = 0 \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir après calculs, les expressions de $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$

données par le système suivant.

$$\begin{cases} \frac{f}{2\omega} \sin \varphi = -\frac{\eta A \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha \\ \frac{f}{2\omega} \cos \varphi = -\frac{A}{2\omega}(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{3bA^3}{8\omega} + \frac{\eta A \omega^{\alpha-1}}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha \end{cases} \quad (2.27)$$

- Écrivons à présent le système perturbé indépendamment de $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$
En remplaçant $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ par leurs expressions tirées en (2.27), on obtient le système (2.28) suivant :

$$\begin{cases} \Delta \dot{A} = -\frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha \Delta A + \left(\frac{A}{2\omega}(\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{3bA^3}{8\omega} - \frac{\eta A \omega^{\alpha-1}}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha \right) \Delta \varphi \\ \Delta \dot{\varphi} = \left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{2\omega A_0} \Delta A + \frac{9bA_0^2}{8\omega} + \frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2A_0} \cos \frac{\pi}{2} \alpha \right) \Delta A + \left(-\frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha \right) \Delta \varphi \end{cases} \quad (2.28)$$

- Ressortons à présent la matrice jacobienne associée à notre système.

Le système (2.28) permet d'obtenir l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{A} \\ \Delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha & \frac{A_0}{2\omega}(\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{3bA_0^3}{8\omega} - \frac{\eta A_0 \omega^{\alpha-1}}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha \\ \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{2\omega A_0} + \frac{9bA_0}{8\omega} + \frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2A_0} \cos \frac{\pi}{2} \alpha & -\frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta A \\ \Delta \varphi \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Ainsi la matrice jacobienne est définie par :

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha & \frac{A_0}{2\omega}(\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{3bA_0^3}{8\omega} - \frac{\eta A_0 \omega^{\alpha-1}}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha \\ \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{2\omega A_0} + \frac{9bA_0}{8\omega} + \frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2A_0} \cos \frac{\pi}{2} \alpha & -\frac{\eta \omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2} \alpha \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

- Détermination de l'équation caractéristique du système. Soit $\det(J - \Lambda I) = 0$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient après calculs l'équation suivante :

$$\Lambda^2 + \left(\eta\omega^{\alpha-1} \sin \frac{\pi}{2}\alpha\right) \Lambda + \left(\frac{\eta\omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2}\alpha\right)^2 + \frac{1}{4\omega^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{9bA_0^2}{4} + \eta\omega^\alpha \cos \frac{\pi}{2}\alpha\right) \left((\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{3bA_0^2}{4} - \eta\omega^\alpha \cos \frac{\pi}{2}\alpha\right) = 0 \quad (2.31)$$

cette équation définit l'équation caractéristique de notre système.

Critère de Routh-Hurwitz

Soit le vecteur constant $(A_0; \varphi_0)$ une solution en régime permanent du système (2.23) et soit la matrice J le jacobien évalué en $(A_0; \varphi_0)$.

- 1** Si les n valeurs propres de la matrice jacobienne J ont des parties réelles inférieures à zéro, alors la solution stationnaire $(A_0; \varphi_0)$ est stable.
- 2** Si au moins une des n valeurs propres de la matrice jacobienne J a une partie réelle supérieure à zéro, alors la solution stationnaire $(A_0; \varphi_0)$ est instable.

Généralement, la détermination des valeurs propres de l'équations caractéristiques est difficile. Ceci nous amène à utiliser le critère de Routh-Hurwitz [30].

Condition de stabilité

$$\left(\eta\omega^{\alpha-1} \sin \frac{\pi}{2}\alpha\right) > 0 \text{ toujours respecté car } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ donc } \sin \frac{\pi}{2}\alpha > 0$$

et

$$\left(\frac{\eta\omega^{\alpha-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2}\alpha\right)^2 + \frac{1}{4\omega^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{9bA_0^2}{4} + \eta\omega^\alpha \cos \frac{\pi}{2}\alpha\right) \left((\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{3bA_0^2}{4} - \eta\omega^\alpha \cos \frac{\pi}{2}\alpha\right) > 0$$

Dans le but de valider les résultats analytiques de notre système, nous passerons dans le paragraphe suivant à la résolution de notre système par les méthodes numériques.

2.4.3 Méthode numérique : Méthode de Newton Leibnik

Pour résoudre une équation différentielle fractionnaire, il faut approximer l'opérateur dérivé correspondant, ce qui signifie inclure des informations sur les états précédents du système (ce que l'on appelle l'effet mémoire). Pour les solutions numériques des équations aux dérivées fractionnaires, les schémas prédicteurs-correcteurs de Newton-Leibnik et le A-B-M [25]-[26] sont les plus utilisés. En conséquence, une attention particulière sera portée sur ces deux méthodes numériques.

Premièrement, une méthode basée sur le schéma prédicteur-correcteur de type A-B-M convient à la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo car elle ne nécessite que les conditions initiales et pour une fonction inconnue, elle a une signification physique claire. La méthode est basée sur le fait que l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} D_t^q Y(t) = \frac{d^q Y(t)}{dt^q} = F(t, Y(t)) \\ Y^{(k)}(0) = Y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2.32)$$

est équivalente à l'équation de Volterra

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{[q]-1} Y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} F(\tau, Y(\tau)) d\tau \quad (2.33)$$

En discrétisant l'équation (2.33) de Volterra pour un maillage uniforme $t_n = nh$ ($n = 0, 1, \dots, N$) et en utilisant le principe de mémoire courte (fixe ou logarithmique) [25]-[27], on obtient une approximation numérique proche de la vraie solution $Y(t_n)$ de l'équation différentielle fractionnaire tout en préservant l'ordre de précision. Supposons que l'on ait calculé les approximations $Y_h(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ et que l'on veuille obtenir $Y_h(t_{n+1})$ au moyen de l'équation :

$$Y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} Y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} F[t_{n+1}, Y_h^p(t_{n+1})] + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} \sum_{k=0}^{m-1} a_{j,n+1} F[t_j, Y_n(t_j)] \quad (2.34)$$

où

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{q+1} - (n-1)(n+1)^q & \text{si } j = 0 \\ (n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} + 2(n-j+1)^{q+1} & \text{si } 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{si } j = n+1 \end{cases} \quad (2.35)$$

L'approximation préliminaire $Y_h^p(t_{n+1})$ est appelée prédicteur et elle est donnée par

$$Y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} Y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} F[t_j, Y_n(t_j)] \quad (2.36)$$

où

$$b_{j,n+1} = \frac{h^p}{q} [(n+1-j)^q - (n-j)^q] h \quad (2.37)$$

Deuxièmement, une méthode basée sur l'algorithme de Newton-Leipnik convient pour la dérivée d'ordre fractionnaire de Grunwald-Letnikov. Cette approche est basée sur le fait que pour une large classe de fonctions, trois définitions sont données : Celles de Grunwald-Letnikov, Riemman-Liouville et Caputo et sont équivalentes. Dans ce cas, la relation à l'approximation numérique explicite de q^{ime} dérivée aux points kh , ($k = 1, 2, \dots$) a la forme suivante [27] :

$$L_{m/h} D_{tk}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \quad (2.38)$$

où L_m est la « longueur mémoire », $t_k = kh$, h est le pas de temps de calcul

Selon le principe de la mémoire courte [25]-[27], la longueur de la mémoire système peut être considérablement réduite dans l'algorithme numérique pour

obtenir des résultats fiables. Par conséquent, solution numérique générale de l'équation différentielle fractionnaire suivante $D_t^q Y(t) = F(t, X(t))$ peut être exprimé comme

$$Y(t_k) = F(t_0, Y(t_0)) h^q - \sum_{j=1}^k c_j^{(q)} Y(t_{k-j}) \quad (2.39)$$

avec les coefficients $c_j^{(q)}$ satisfaisant les relations de récurrences suivantes :

$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)} \quad (2.40)$$

Dans l'équation (2.39), le terme mémoire s'exprime par la somme. Comme le montre l'article [28], les deux méthodes numériques mentionnées dans le domaine temporel (Newton-Liepnik et A-B-M) ont approximativement le même ordre de précision et une bonne correspondance des solutions numériques. Comme cette dernière méthode est facile à coder, nous l'utiliserons dans le chapitre suivant pour approximer les solutions numériques de l'équations aux dérivées d'ordres fractionnaires décrivant notre modèles.

2.5 Transmissibilité de la force sous excitation harmonique

La transmissibilité de la force est généralement utilisé comme indicateur pour évaluer les performances d'un système d'isolation des vibrations sous excitation harmonique. la transmissibilité de la force T_F est définie comme le rapport de l'amplitude de la force transmise au siège du véhicule à travers l'isolateur sur l'amplitude de la force excitatrice du à la route. La force transmise au siège du véhicule à travers l'isolateur est :

$$F_t = \frac{K_L}{m} x + \frac{K_{NL}}{m} x^3 + \frac{c}{m} D^\alpha x \quad (2.41)$$

La force excitatrice du à la route est :

$$F_e = \frac{2\pi^2 v^2}{l^2} A_r \cos\left(\frac{2\pi v}{l} t\right) \quad (2.42)$$

En utilisant la méthode de la moyenne, nous retrouvons l'amplitude de la force transmise noté A et la transmissibilité du mouvement peut s'écrire comme suite

Transmissibilité analytique des forces

F_t est obtenu en annulant la force extérieure et le terme d'inertie dans l'équation (2.16). Soit $T_f = \left(\frac{F_t}{F_e}\right)$, cette valeur étant généralement très petite, nous allons dans le but de faciliter l'étude des paramètres du systèmes poser $T = 20\log\left(\frac{F_t}{F_e}\right)$ avec T la transmissibilité exprimé en *dcibel*. Ainsi nous obtenons :

$$T = 20\log\left(\frac{F_t}{F_e}\right) = 20\log\left(\sqrt{\frac{(\eta A \omega^\alpha \sin \frac{\pi}{2} \alpha)^2 + ((\omega_0^2 - \omega^2)A + \frac{3}{4}bA^3 + \eta A \omega^\alpha \cos \frac{\pi}{2} \alpha)^2}{f^2}}\right) \quad (2.43)$$

avec

$$f = \frac{2\pi^2 v^2}{l^2} A_r$$

La transmissibilité de forces ainsi obtenue nous permettra dans la suite d'étudier le comportement dynamique de notre système.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait la modélisation mathématique de notre système, Nous avons ensuite fait une résolution analytique des équations vibrationnelles de notre système en utilisant la méthode de la moyenne. Dans le chapitre suivant, nous présenterons et discuterons les résultats obtenus.

Résultats et Discussions

3.1 Introduction

L'analyse des résultats d'optimisation occupe une place importante dans la procédure de conception des dispositifs de suppression des vibrations. Par ailleurs, l'évaluation des performances du dispositif proposé permet d'éclairer le concepteur sur la validation ou non du dispositif. Dans ce chapitre, nous présentons les résultats analytiques et numériques des travaux réalisés sur le calcul. Nous allons d'abord faire une comparaison des résultats analytiques et numériques, en suite nous montrerons l'influence de quelques paramètres du QZS sur la dynamique de la structure ; notamment son rapport de raideur, l'inclinaison des ressorts, son coefficient de dissipation ainsi que l'ordre fractionnaire. Enfin nous faisons une comparaison de notre modèle avec le modèle de QZS classique.

3.2 Comparaison entre les résultats analytiques et les résultats numériques

Pour vérifier la validité des estimations analytiques, nous comparons certains résultats analytiques avec des simulations numériques. Les paramètres physiques du quart de véhicule utilisé pour ce modèle sont donnés dans le Tableau (3.1) et nous permet d'obtenir la Figure (3.1). La Figure (3.1) représente les courbes fréquences-Amplitudes obtenues dans le cas analytique, par

la méthode de la moyenne suivie de la méthode des bisections; et dans le cas numérique, par la méthode de Newton-Leipnik appliqué à l'équation (2.16).

TABLE 3.1 – Paramètres du QZS.

grandeurs physiques	symboles	valeurs
Masse	m	645 Kg
Coefficient de frottement	c	380 N.s/m
Ordre fractionnaire	α	0.5
Coefficient linéaire de K_{QZS}	k_L	600 N/m
Coefficient non linéaire de K_{QZS}	k_{NL}	6.00 N/m ³

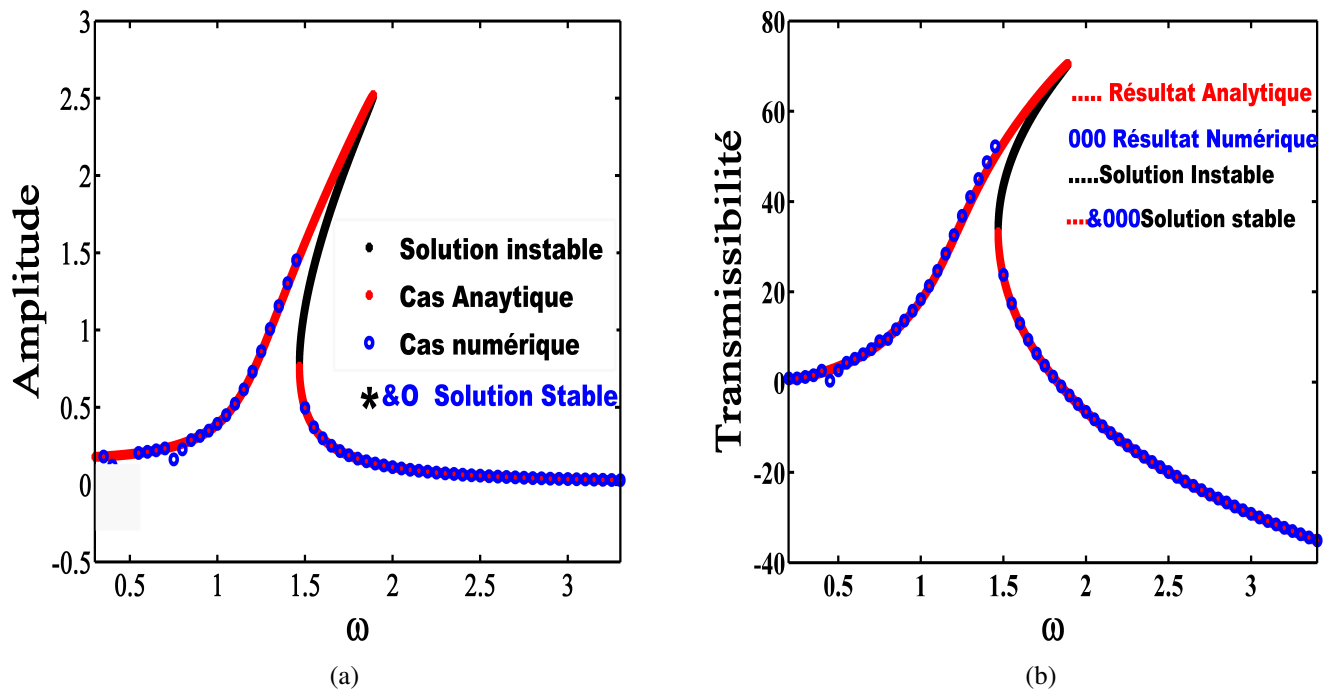


FIGURE 3.1 – Comparaison des résultats analytiques et numériques : (a) Fréquence-amplitude (b) Fréquence-force transmise.

La Figure (3.1) donne les résultats obtenus à partir de la méthode analytique et de la méthode numérique. À la Figure (3.1a), nous avons l'évolution de l'amplitude du système en fonction de la fréquence et à la Figure (3.1b), nous avons l'évolution de la force transmise en fonction de la fréquence. De

ces deux figures, nous constatons qu'il y'a un accord entre les résultats obtenus numériquement et analytiquement. Les paramètres utilisés pour ce cas de figures mettent en évidence la non-linéarité du système qui se manifeste analytiquement par un phénomène d'hystérésis et numériquement par un saut d'amplitude. Ces phénomènes traduisent l'instabilité au sein de la structure.

3.3 Influence des paramètres de notre système sur la dynamique de la structure à contrôler

3.3.1 Étude de l'effet de la viscosité

En fixant $\alpha = 0.5$; $K_L = 600$ et $K_{NL} = 6$ nous obtenons pour différentes valeurs de c le coefficient de viscosité, les représentations graphiques suivantes :

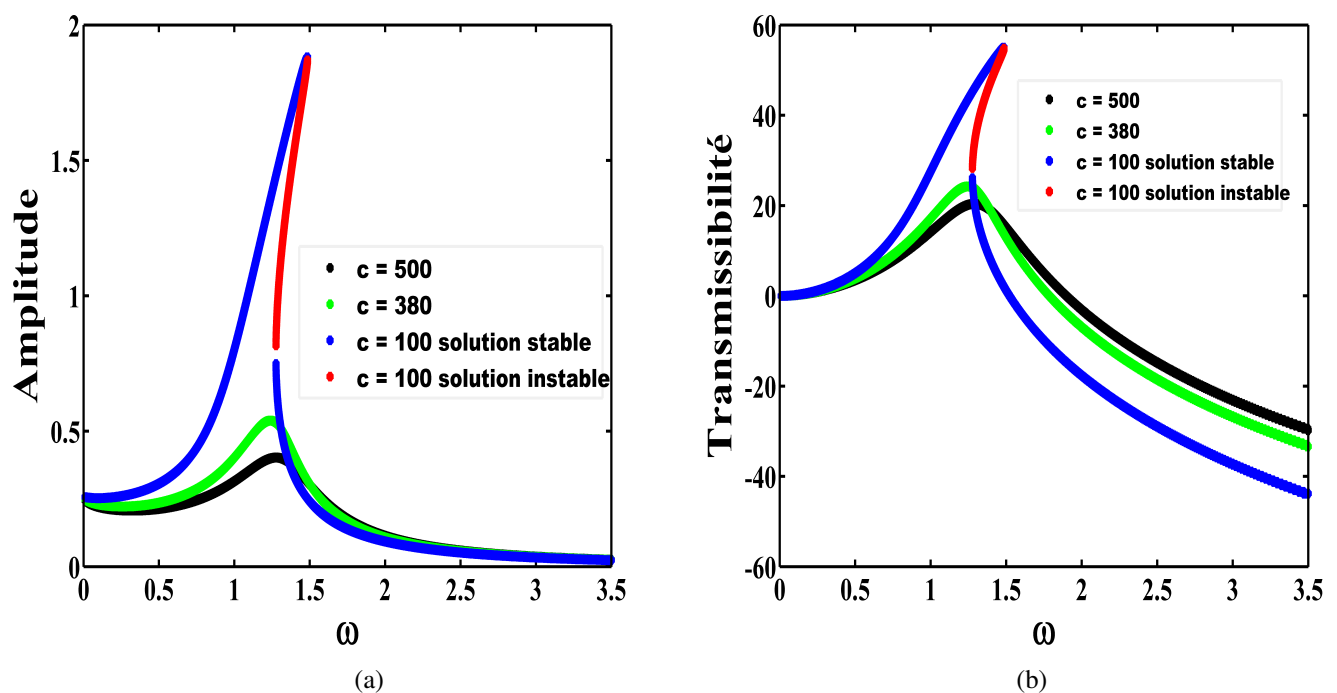


FIGURE 3.2 – Effet de la viscosité sur les courbes : (a) Fréquence-amplitude (b) Fréquence-force transmise.

La Figure (3.2a) montre l'évolution des amplitudes maximales du système sous contrôle en fonction de la fréquence ω pour différentes valeurs du coeffi-

cient de viscosité c . La Figure (3.2b) montre l'évolution de la transmissibilité de force sous contrôle en fonction de la fréquence ω pour différentes valeurs du coefficient de viscosité c . Nous constatons que l'augmentation du coefficient de viscosité diminue considérablement l'amplitude des vibrations et des forces transmises au système surtout dans la zone où les fréquences sont supérieures à $\omega = 1.5$. De plus, au fur et à mesure que le coefficient de viscosité augmente, l'amplitude des oscillations et les forces transmises diminuent faisant ainsi disparaître la zone d'instabilité sur la structure. Nous constatons également que en augmentant le coefficient de viscosité, il y'a élargissement de la bande de fréquence d'isolement. Ceci nous amène à dire que un bon choix du paramètre c pourrait nous permettre de rendre notre structure plus stable.

3.3.2 Étude de l'effet de l'ordre fractionnaire

En fixant cette fois $c = 380$; $K_L = 600K_{NL} = 6$ nous obtenons pour différentes valeurs de α l'ordre fractionnaire, les représentations graphiques suivantes :

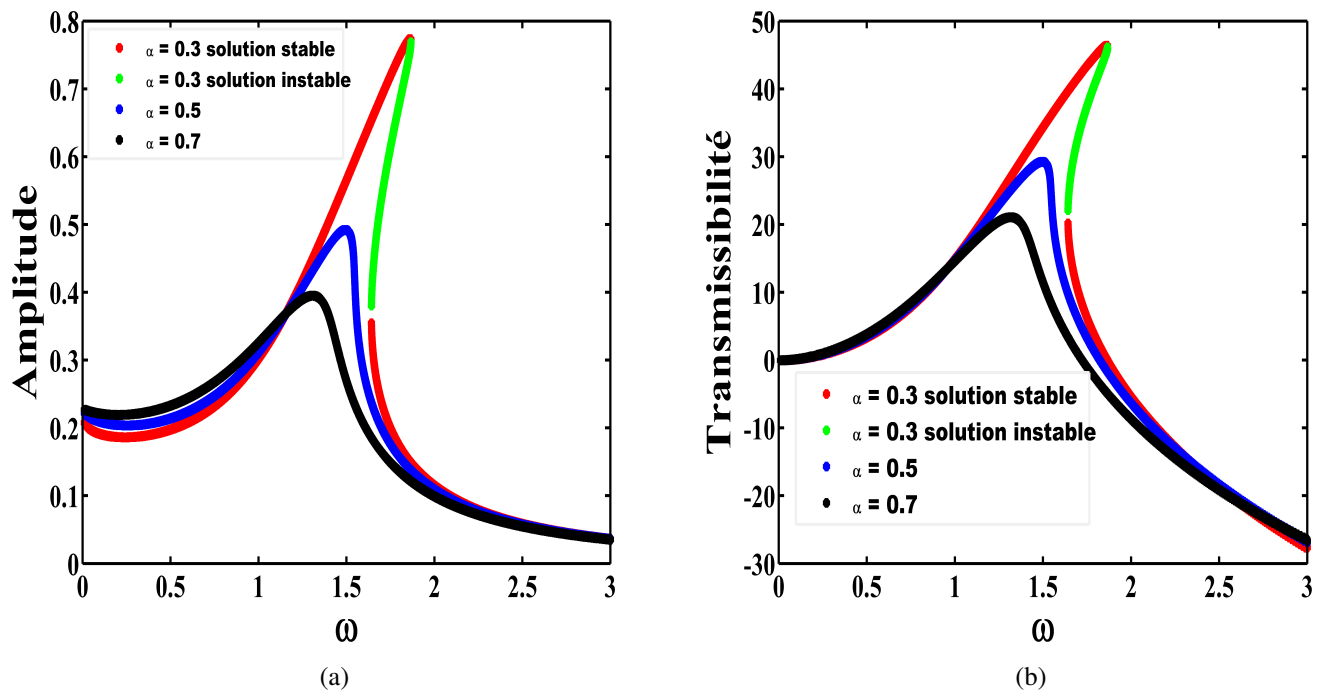


FIGURE 3.3 – Effet de l'ordre fractionnaire sur les courbes :(a) Fréquence-amplitude (b) Fréquence-force transmise.

Afin d'étudier l'effet de l'ordre fractionnaire sur les performances de l'isolateur de vibrations, les Figures (3.3a) et (3.3b) ont été représenté pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire. Dans cette représentation, toutes les courbes passent par un même point P d'abscisse $\omega_p = 1.1$ indépendant de l'ordre fractionnaire. En outre, l'augmentation de l'ordre fractionnaire conduit à l'élargissement de la bande de fréquence d'isolement tandis qu'une diminution de l'ordre fractionnaire permet de réduire les amplitudes de vibrations pour des fréquences inférieures à $\omega_p = 1.1$.

Cependant pour des fréquences inférieures à ω_p , les forces transmises au système augmente lorsque l'ordre fractionnaire augmente. Á titre d'illustration, la Figure (3.4a) présente l'évolution de la transmissibilité des forces en fonction de l'ordre fractionnaire pour la fréquence $\omega_p = 0.5$. Cette courbe croissante nous permet de faire un choix optimal sur la valeur de l'ordre fractionnaire pur un contrôle efficace des vibrations à base fréquence.

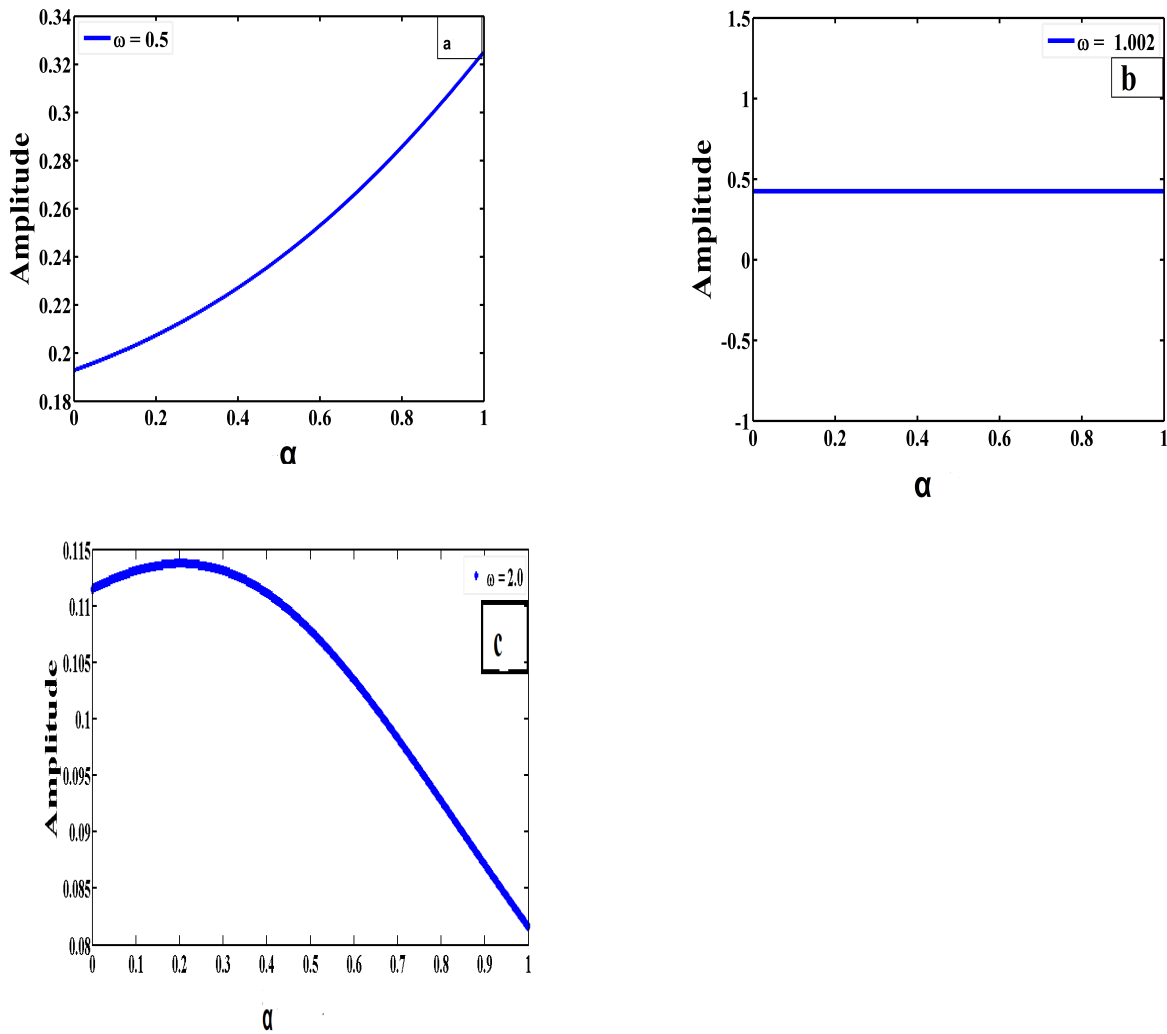


FIGURE 3.4 – Courbes d’amplitude en fonction de l’ordre fractionnaire pour différentes valeurs de ω avec les valeurs des paramètres du Tableau (3.1).

Étant donné que l’amplitude est indépendant de l’ordre fractionnaire au point fixe, il est claire que la transmissibilité au point fixe en fonction de α soit semblable à une droite horizontale telle que représenté par la Figure (3.4b).

En outre, pour des fréquences supérieure à ω_P , les forces transmises diminuent lorsque l’ordre fractionnaire diminue. À titre d’illustration, la Figure (3.4c) présente l’évolution de la transmissibilité des forces en fonction de l’ordre fractionnaire pour la fréquence $\omega = 1.5$. Cette courbe décroissante nous permet de faire un choix optimal sur la valeur de l’ordre fractionnaire pour un contrôle efficace des vibrations pour des fréquences supérieures à ω_P .

3.3.3 Étude de l'effet du terme non-linéaire

En fixant $\alpha = 0.5$; $K_L = 600$; $c = 380$ nous obtenons pour différentes valeurs de K_{NL} le coefficient de non linéarité du QZS, les représentations graphiques suivantes :

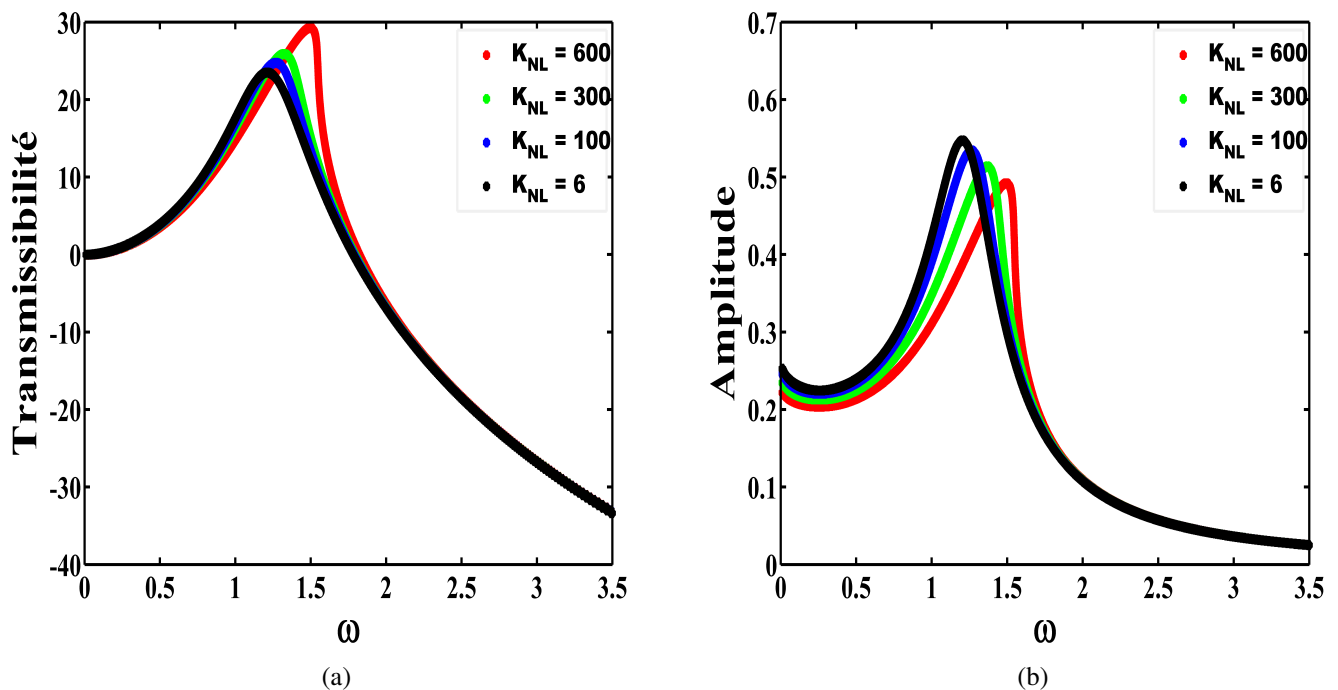


FIGURE 3.5 – Influence du terme non linéaire sur les courbes : (a) Fréquence-force transmise (b) Fréquence-amplitude .

Enfin de mettre en évidence l'influence de la non linéarité sur la réponse dynamique du quart de véhicule, nous étudions le comportement des amplitudes de vibrations et des forces transmises à la structure pour différentes valeurs du coefficient de non linéarité tel que présenté par la Figure (3.5). Le coefficient de non linéarité modifie légèrement la largeur de la bande passante mais a un effet plus important au niveau des amplitudes et des forces transmises. Comme le montre la Figure (3.5b), les forces transmises deviennent de plus en plus importantes à la résonance au fur et à mesure que l'on augmente le coefficient

de non-linéarité. Cependant, une diminution des amplitudes telle que présentée par la Figure (3.5a) est observée. Toutefois une valeur élevée du coefficient de non-linéarité produit le phénomène d'hystérésis marqué par une zone d'instabilité au niveau de la bande passante. Par mesure de sécurité la réduction de la non linéarité est bénéfique pour l'isolation des vibrations car, c'elle-ci réduit l'amplitude de vibration au niveau de la bande passante, rend le système stable malgré qu'elle augmente les forces transmises au niveau de la bande passante.

3.3.4 Effet du coefficient linéaire du QZS

En tenant bon de rappeler que toutes les courbes précédemment obtenues dérivent d'une valeur du paramètre $K_L = 600$, effectuons maintenant une variation du terme linéaire du coefficient de rigidité du QZS. En prenant les paramètres du contrôle du Tableau (3.1) on obtient la Figure (3.6) ci-dessous :

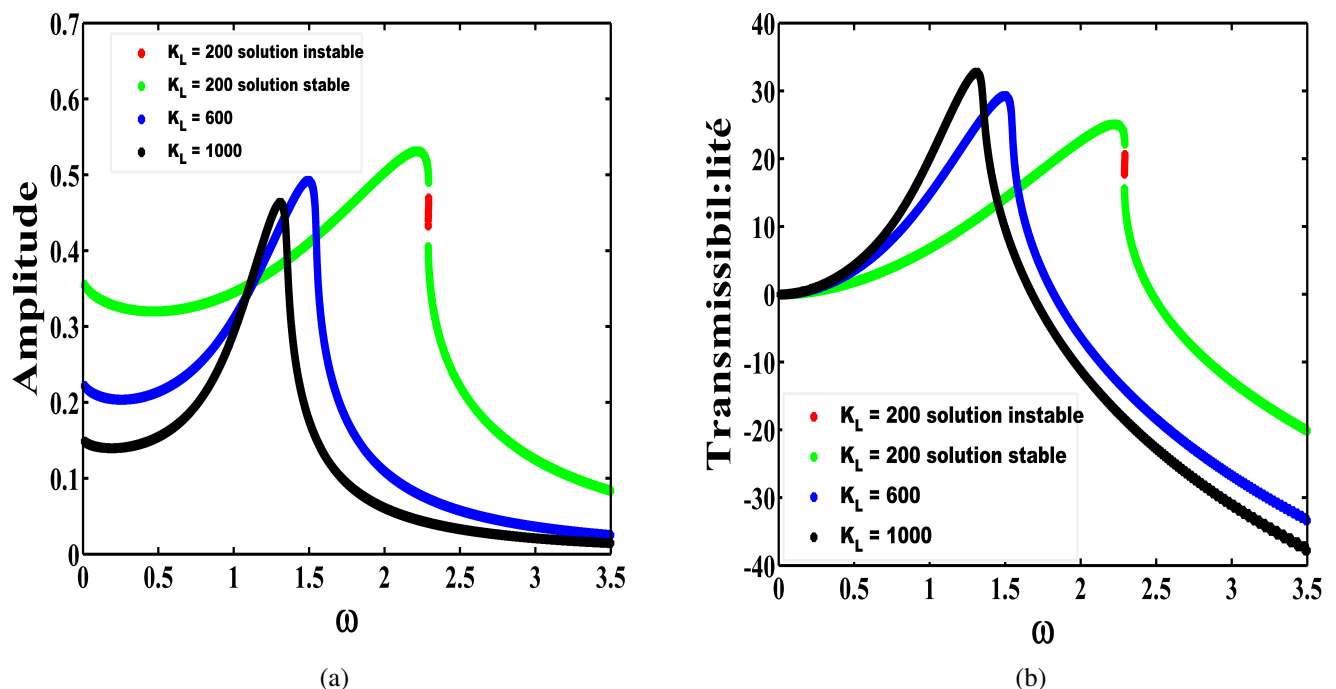


FIGURE 3.6 – Influence du coefficient linéaire du QZS sur les courbes : (a) Fréquence-amplitude (b) Fréquence-force transmise avec les valeurs des paramètres du Tableau (3.1).

Les Figures (3.6a) et (3.6b) montre bel et bien l'influence du terme linéaire

dans l'absorption des vibrations sur la structure primaire. Elle montre également que la diminution de K_L diminue considérablement les forces transmises au système ce qui nous amène à rechercher la raideur quasi-nulle. Cependant, une zone d'instabilité intervient lorsque nous réduisons la valeur du coefficient de raideur. Ceci montre que les valeurs idéales de K_L permettant une atténuation de vibration tout en gardant le système stable sont autour de celles considérées pour cette étude.

3.4 Comparaison des performances avec d'autres modèles

Dans cette partie, nous présentons d'une part le résultat obtenu en considérant l'effet mémoire caractérisé ici par l'ordre fractionnaire dans l'étude dynamique de notre structure primaire, d'autre part la comparaison entre les QZSs avec amortisseur linéaire et les QZSs avec amortisseur à effet mémoire.

L'introduction de la non-linéarité dans l'étude de la dynamique d'une structure étant un concept permettant d'avoir une étendue plus large sur la dynamique du mouvement de cette dernière, il a été fort pour nous de constater, qu'en introduisant la non linéarité dû à la nature du matériau dans l'étude de la dynamique de l'amortisseur, les résultats plus proches de la réalité sont retrouvés.

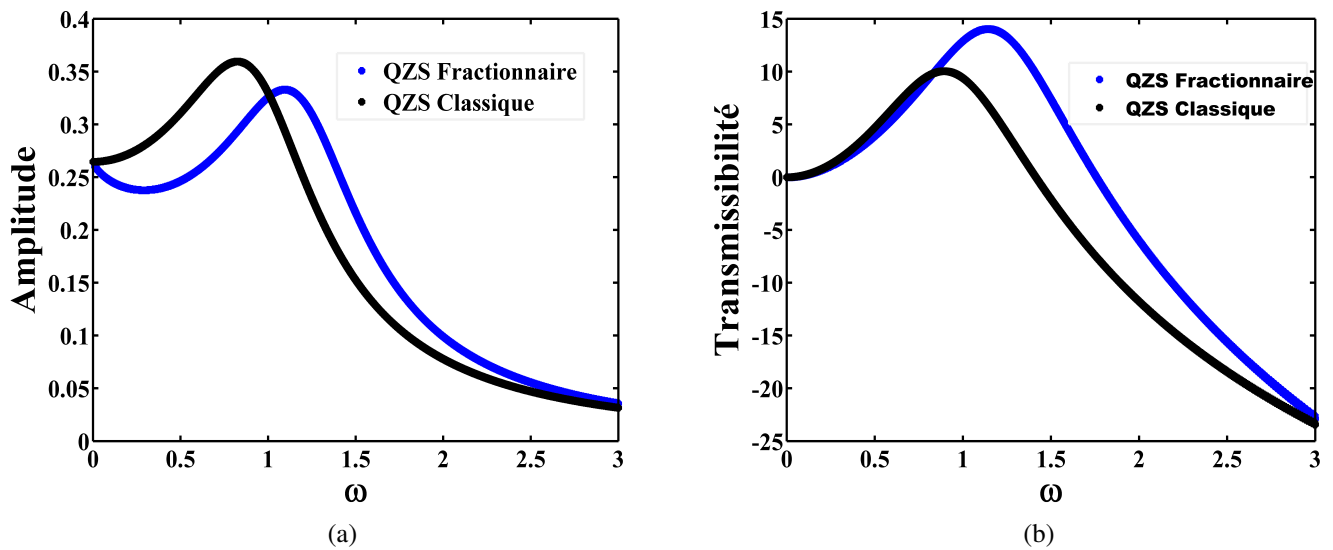


FIGURE 3.7 – Courbes des amplitudes et des forces transmissent en fonction de la fréquence avec et sans présence de l'ordre fractionnaire pour des paramètres de $K_{NL} = 6$; $K_L = 600$; $\alpha = 0.7$ et $c = 500$.

La Figure (3.7) présente une comparaison entre le modèle classique de rigidité quasi-nulle avec amortisseur linéaire et notre modèle de rigidité quasi-nulle avec amortisseur non-linéaire du à une dérivé d'ordre fractionnaire pour des même paramètre du système. Nous constatons que la non-linéarité sur la viscosité favorise la réduction des vibrations. En déplaçant la fréquence de résonance vers les zones de hautes fréquences, elle réduit les risques lié à l'utilisation de notre modèle. D'autre part, la Figure (3.7) montre une réduction du pic de déplacement vertical de la masse suspendue d'environ 10% notre modèle permet d'augmenter le confort au sein du véhicule ou il sera appliqué.

Il est à remarquer que les forces transmises au système sont plus importantes au delà $\omega = 1.1$ pour le système avec amortisseur exhibant l'ordre fractionnaire. L'ordre fractionnaire est un paramètre propre du système, sa modification agit directement sur la fréquence propre du système. Cela impacte directement sur le point de résonance qui sera atteint dans les zones de hautes fréquences rendant ainsi bénéfique l'utilisation des amortisseurs exhibant l'ordre fractionnaire pour la réduction des amplitudes et le contrôle des vibrations à basse fréquence.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, il était question pour nous en premier lieu de vérifier la validité des résultats analytiques par une simulation numérique. Par la suite, nous avons montré l'influence du choix des paramètres du QZS sur la dynamique de la structure primaire. En fin nous avons fait une comparaison entre le modèle classique et notre modèle qui met en évidence l'effet mémoire du matériau. Il en ressort de cette étude, que le choix des paramètres de contrôle est important pour l'atténuation des vibrations sur la structure primaire.

Conclusion et perspective

À propos de notre thème intitulé : contrôle des vibrations d'un modèle couplé véhicule siège humain utilisant une rigidité quasi-nulle comme isolateur de vibration, nous avons commencé par développer les éléments théoriques de base nécessaire à la compréhension du contrôle de vibration à base de la rigidité quasi-nulle. Par la suite, partant Relation Fondamentale de la Dynamique, nous avons établi l'équation régissant le mouvement du modèle couplé véhicule-siège humain avec l'hypothèse d'une dos d'âne sinusoïdale. Dans l'optique d'étudier la stabilité du système, nous avons utilisé la méthode d'Andronov et Witt pour déterminer les solutions stable. Concernant la vérification des résultats, nous avons procéder à une résolution numérique par la méthode de Newton Liebnik et analytique par la méthode de la Moyenne. l'étude de l'influence des paramètres du système tel que l'ordre fractionnaire, le coefficient de viscosité, le coefficient linéaire et non linéaire de la raideur du QZS a été mené. Des comparaisons de notre modèles avec celui d'un QZS classique a été effectué, il en ressort que la prise en compte de l'ordre fractionnaire permet d'améliorer le contrôle sur les critère tel que la réduction d'amplitude. Ainsi notre objectif qui était d'améliorer le confort des véhicules par rapport au modèle de suspension du siège en utilisant un QZS classique existant dans la littérature a été atteint. Cependant, la poursuite des études sur les absorbeurs de vibrations à rigidité quasi-nulle seront consacré à l'utilisation de l'intelligence artificielle.

Bibliographie

- [1] W.MOLYNEUX, Grande Bretagne, (1957). *Supports for vibration isolation*, Aeronautical Research council.
- [2] P.Alsbushov, *Vibration Protecting and Measuring Systems with Quasi-Zero Stiffness*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington DC, 1989.
- [3] Youliang Jiang, *design of magnetic-air hybrid quasi-zero stiffness vibration isolation system*. *Journal of sound and vibration* 477 (2020) 115346.
- [4] Young Wang, Shunming Li, *Adaptive control of a vehicule-seat-human coupled model using quasi-zero-stiffness vibration isolator as seat suspension*. *Journal of Mechanical Science and Technology* 32(7)(2018).
- [5] H.Sonfack Bouna B.R.Nana Nbandjo P.Wofo. *Isolation performance of a quasi-zero stiffness isolator in vibration isolation of a multi-span continuous beam bridge under pier base vibrating excitation*. *Nonlinear Dyn* (2020) 100 :1125-1141.
- [6] Feng Zhao. Jinchun Ji. Quantian Luo, *An improved quasi-zero stiffness isolator with two pairs of oblique springs to increase isolation frequency band*. *Nonlinear Dyn* (2021) 104 :349-365.
- [7] Young Wang, Hao-Xuan Li : *Dynamic performance analysis of a mixed-connected inerter-based quasi-zero stiffness vibration isolator* Check for updates 2020.
- [8] Shaohua, Guizhen Feng. *Design and Research of Semiactive Quasi-Zero Stiffness Vibration Isolation System for Vehicles*. Hindawi 2021.

- [9] LAN, C. C., YANG, S. A., and WU, Y. S. *Design and experiment of a compact quasi-zero-stiffness isolator capable of a wide range of loads. Journal of Sound and Vibration, 333(20), 48434858 (2014).*
- [10] LIU, X., HUANG, X., and HUA, H. *On the characteristics of a quasi-zero stiffness isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector. Journal of Sound and Vibration, 332(14), 33593376 (2013).*
- [11] NIU, F., MENG, L., WU, W., SUN, J., ZHANG, W., MENG, G., and RAO, Z. *Design and analysis of a quasi-zero stiffness isolator using a slotted conical disk spring as negative stiffness structure. Journal of Vibroengineering, 16(4), 17691785 (2014).*
- [12] ZHOU, J., WANG, X., XU, D., and BISHOP, S. *Nonlinear dynamic characteristics of a quasi-zero stiffness vibration isolator with cam-roller-spring mechanisms. Journal of Sound and Vibration, 346, 5369 (2015)*
- [13] CARRELLA, A., BRENNAN, M. J., and WATERS, T. P. *Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. Journal of Sound and Vibration, 301(3-5), 678689(2007)*
- [14] CARRELLA, A., BRENNAN, M. J., KOVACIC, I., and WATERS, T. P. *On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness. Journal of Sound and Vibration, 322(4-5), 707717 (2009).*
- [15] KOVACIC, I., BRENNAN, M. J., and WATERS, T. P. *A study of a nonlinear vibration isolator with a quasi-zero stiffness characteristic. Journal of Sound and Vibration, 315(3), 700711 (2008)*
- [16] KOVACIC, I., BRENNAN, M. J., and LINETON, B. *Effect of a static force on the dynamic behaviour of a harmonically excited quasi-zero stiffness system. Journal of Sound and Vibration, 325(4-5), 870883 (2009)*

- [17] XU, D., ZHANG, Y., ZHOU, J., and LOU, J. *On the analytical and experimental assessment of the performance of a quasi-zero-stiffness isolator. Journal of Vibration and Control*, 20(15), 23142325 (2014)
- [18] ZHOU, J., XIAO, Q., XU, D., OUYANG, H., and LI, Y. *A novel quasi-zero-stiffness strut and its applications in six-degree-of-freedom vibration isolation platform. Journal of Sound and Vibration*, 394, 5974 (2017)
- [19] ZHOU, J., XU, D., and BISHOP, S. *A torsion quasi-zero stiffness vibration isolator. Journal of Sound and Vibration*, 338, 121133 (2015)
- [20] ZENG, R., WEN, G., ZHOU, J., and ZHAO, G. *Limb-inspired bionic quasi-zero stiffness vibration isolator. Acta Mechanica Sinica*, 37(7), 11551170 (2021)
- [21] ROBERTSON, W. S., KIDNER, M. R. F., CAZZOLATO, B. S., and ZANDER, A. C. *Theoretical design parameters for a quasi-zero stiffness magnetic spring for vibration isolation. Journal of Sound and Vibration*, 326(1-2), 88103 (2009)
- [22] WU, W., CHEN, X., and SHAN, Y. *Analysis and experiment of a vibration isolator using a novel magnetic spring with negative stiffness. Journal of Sound and Vibration*, 333(13), 29582970 (2014)
- [23] XU, D., YU, Q., ZHOU, J., and BISHOP, S. R. *Theoretical and experimental analyses of a nonlinear magnetic vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. Journal of Sound and Vibration*, 332(14), 33773389 (2013)
- [24] JIANG, Y., SONG, C., DING, C., and XU, B. *Design of magnetic-air hybrid quasi-zero stiffness vibration isolation system. Journal of Sound and Vibration*, 477, 115(2020).
- [25] I. Petras, *Fractional-order Nonlinear Systems : Modeling, Analysis and Simulation. Higher Education Press Beijing*, (2011).

- [26] G. S. Ngueteu Mbouna and P. Woafo, *Dynamics and synchronization analysis of coupled fractional-order nonlinear electromechanical systems. Mech. Res. Commun.* 46, pp. 20-25 (2012).
- [27] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations. Academic Press San Diego*, (1999).
- [28] I. Petras, *Chaos in the fractional-order Volta's system : modeling and simulation. Nonlinear Dyn.* 57, pp. 157-170 (2009).
- [29] Anadronov AA, Witt A. *Towards mathematical theory of capture. Arch Electrotech* 1930; 24 : 99-110.
- [30] C. Hayashi, *Nonlinear oscillations in physical systems. McGraw-Hill New York*, (1964)