

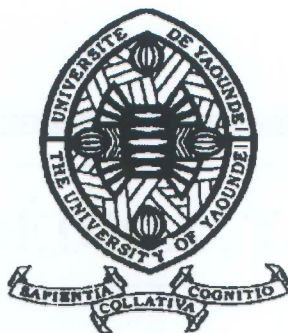
RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTÉ DE SCIÈCE

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF PHYSICS

INSTABILITÉ DE BÉNARD-MARANGONI DANS UNE SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de MASTER II

Présenté Par :

TSAFACK TATSAGOUM ALEX JUNIOR

Matricule : 15Y932

Licencié en PHYSIQUE

Sous la direction du :

Pr. NGO NYOBE ELISABETH

Maitre de conférences/ Université de Yaoundé I

Spécialité : MÉCANIQUE DES SYSTÈMES COMPLEXES

Option : MÉCANIQUE DES FLUIDES ET HYDRAULIQUE

Année Académique 2020-2021



INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le contexte énergétique mondial actuel, l'optimisation de la consommation énergétique devient une priorité. La compréhension des phénomènes physiques qui sont à l'œuvre dans divers procédés industriels est nécessaire. Ainsi, le transfert de la chaleur et de la matière restent des phénomènes complexes très présents dans le quotidien. La convection thermique naturelle dans un fluide fascine encore les scientifiques. Ici, il s'agit d'étudier un phénomène dit « dissipatif ». En transportant de la chaleur par le mouvement d'un fluide entre deux milieux, ce mode de transfert permet d'échanger la chaleur de manière plus importante que ne le permet la conduction.

Un cas particulier de convection thermique est la convection de Bernard-Marangoni ; elle correspond à la situation où un volume de fluide est confiné dans une enceinte. Aux frontières, le fluide est limité par des parois rigides chaudes, partant des conditions initiales thermique, le fluide est stable, au repos, et ne coule pas. En absence de la gravité le fluide est chauffé d'une paroi à l'autre, cette configuration est instable, en raison de la variation de la tension superficielle au niveau de l'interface entre le fluide et la paroi la moins chaude : c'est l'effet Marangoni [1]. Cette variation de la tension superficielle est engendrée par la différence de température entre les différentes parois.

Il faut rappeler ici que, même si la convection en tant que processus de transfert de chaleur avait été découverte par Rumford en 1797, sa véritable compréhension ne date que du début du XXe siècle. Les études expérimentales de Bénard en 1900-1901[1] sur une couche fluide à l'air libre, bien que construites de sorte que les phénomènes observés soient liés à la tension superficielle et non à de la convection thermique, ont donné lieu aux premières théories de la convection, telle que celle de

Boussinesq en 1903, et complété par Marangoni en 1916. Marangoni a montré que la convection ne pouvait survenir dans un fluide que si le rapport entre le gradient de la tension superficielle et les effets dissipatifs (viscosité et diffusion thermique) dépassait une certaine valeur critique [2,3]. Ce rapport entre le gradient de tension superficielle et les effets dissipatifs (viscosité et la diffusion thermique) est défini par le nombre dit de Marangoni, qui doit dépasser une certaine valeur critique pour que la convection survienne.

En raison du faible nombre de paramètres de contrôle, la convection de Bernard-Marangoni a fait l'objet de nombreux travaux tant d'un point de vue expérimental que sur le plan théorique. L'importance de ce phénomène a donné lieu à plusieurs recherches ayant pour but de le comprendre et de l'exploiter ; dans le cadre d'études fondamentales ou appliquées, ces recherches admettent des développements extrêmement larges et intéressants pour un fluide se trouvant entre deux sphères. La géométrie sphérique présente ici un grand intérêt particulier dans les problèmes de stockage de l'énergie, due au fait que le rapport de surface sur le volume est minimal. Elle présente également une grande importance dans la technologie des réacteurs nucléaires ou la conception des cabines spatiales, ou tous autres problèmes pour lequel les transferts thermiques sont élevés. Il est nécessaire dans tous les cas de parvenir à une meilleure prédiction des instabilités au sein du système. C'est dans le but de répondre à cette question que le présent travail porte sur l'instabilité de Bernard-Marangoni dans une géométrie sphérique. Nous nous intéressons particulièrement à rechercher le nombre de Marangoni critique pour lesquels le système à considéré n'est plus stable.

Pour mener à bien notre travail, ce manuscrit se compose de trois chapitres. Le premier chapitre présente les généralités sur l'instabilité de Bernard-Marangoni, le deuxième chapitre est consacré à la présentation du modèle mathématique du phénomène étudié suivi d'une description des méthodes de résolutions, et enfin le troisième chapitre est réservé à la présentation des résultats numérique de notre étude.

CHAPITRE 1 : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION

Lorsqu'un fluide au repos est soumis à un gradient de température, elle est sujette à de nombreux phénomènes qui peuvent être produites soit par les forces de flottabilités soit par une variation de la tension superficielle en fonction de la température ou par ces deux effets conjugués. Dans la littérature ces deux phénomènes sont désignés comme instabilités de Rayleigh - Bernard – Marangoni, dans notre travail nous nous intéressons uniquement à l'instabilité de Bernard-Marangoni, il sera donc question dans ce chapitre de présenter dans un premier temps les différents phénomènes physique permettant la compréhension de l'instabilité de Bernard-Marangoni, et dans un second temps de donner les raisons pour lesquels l'étude est faite dans une sphère.

1 –1 Définition et caractéristique d'un fluide

Pour le physicien versé vers la thermodynamique, un fluide est un corps simple, composé d'un ensemble d'atomes ou molécules identique en phase liquide ou gazeuse, pour le mécanicien une définition empirique du fluide est quelque chose qui peut s'écouler. Le fluide est donc un milieu matériel sans rigidité et essentiellement déformable. Il est formé de molécules donc les distances peuvent varier indéfiniment. Bien que la structure de la matière soit lacunaire, on suppose sur le plan macroscopique que le fluide est un milieu continu formé de particule qui tiennent les unes les autres, cette continuité du milieu fluide est caractérisée par plusieurs grandeurs physiques à savoir :

- **La masse volumique**

Soit une particule fluide centrée sur un point P de masse dm et de volume dv , alors la masse volumique (ρ) est définie par le rapport : $\rho = \frac{dm}{dv}$

Si la masse volumique d'un fluide est constante alors il est dit incompressible, à l'inverse, si celle-ci varie, le fluide est compressible.

- **Densité**

La densité d'un corps notée (d) est le rapport de sa masse volumique à la masse volumique d'un corps de référence : pour les liquides et les solides c'est l'eau pur et pour les gaz c'est l'air.

$$d = \frac{\rho_{corps}}{\rho_{ref}}, \text{ la densité est un nombre sans dimension.}$$

- **La viscosité dynamique (μ)**

Encore appelé viscosité de cisaillement elle traduit la résistance à l'écoulement du fluide. L'un des facteurs influençant la viscosité est la température, quand la température augmente, la viscosité diminue pour les liquides mais augmente pour les gaz.

1-2- fluides parfaits et réels

a) fluide parfait

On dit d'un fluide qu'il est parfait s'il n'a pas de viscosité. Il s'écoule sans mouvement interne (donc sans perte d'énergie mécanique ou perte de charge). C'est un modèle idéal qui permet une étude simplifiée du phénomène d'écoulement (il n'existe pas dans la nature).

b) fluide réels

Dans un fluide réel en écoulement, il existe des frottements internes entre les différentes couches de fluide (au niveau des parois de canalisation) opposées au sens de déplacement de l'écoulement. Les frottements entraînent la production de chaleur correspondant à une perte d'énergie pour le fluide. Ce qui se traduit par le phénomène

de viscosité qui est à l'origine de la perte d'énergie mécanique (non conservation de l'énergie mécanique) d'un fluide en mouvement. En fonction du mouvement, les fluides réels se classent en deux catégories à savoir :

- les fluides newtoniens : la viscosité dynamique est indépendante de la contrainte mécanique qu'on lui applique.
- les fluides non-newtoniens : leur viscosité changent sous l'effet des contraintes mécaniques.

1–3 Phénomènes physique étudiés

1-3 –1 la capillarité

La capillarité est le mécanisme physico-chimique d'origine moléculaire responsable de la forme sphérique des liquides en absence de la gravité. Elle agit à l'interface entre deux liquides non miscibles, entre un liquide et un gaz. Les premiers travaux concernant la capillarité sont apparus au début du XIXe siècle avec deux scientifiques : pierre Simon de Laplace et Thomas Young. Pour mieux comprendre le phénomène de capillarité nous définissons divers concept lié à ce phénomène à savoir : la tension superficielle, loi de Laplace,

a) Tension superficielle

De nombreux faits expérimentaux et observation courantes ne peuvent pas être interprétés avec les outils (forces, énergies), citons par exemple :

- Si l'on pose une aiguille d'acier à la surface de l'eau, celle-ci peut flotter et ne pas couler, pourtant la masse volumique de l'acier est 7 fois supérieure à celle de l'eau
- Certains insectes marchent sur l'eau
- L'eau remonte le long des tiges des plantes sans que celles-ci soient munies de pompes.



Figure 1-1 : Différents exemples quotidiens dans lesquels la capillarité joue un rôle important.

Tous ses phénomènes sont dus à la tension superficielle, cette tension superficielle est propre aux liquides et va se manifester au niveau des interfaces de ceux-ci. On peut ainsi avoir l'impression que la surface des liquides se comporte comme une membrane élastique. De plus si nous considérons un liquide au repos, à l'intérieur de ce liquide les molécules sont soumises à des forces cohésives qui s'équilibrent entre elles donnant une résultante de forces nulles. Par contre, dans le cas où l'interface est limitée par une interface, comme représenté à la figure (1-2), une partie de ces interfaces n'est plus présente, cela engendre d'une part une résultante de forces non nulles sur les molécules de l'interface dirigés vers l'intérieur du liquides et d'autre part une augmentation de l'énergie du système. Ce surplus d'énergie entre l'énergie d'interaction des molécules à l'interfaces et celle des molécules dans le liquide est appelé énergie de surface. La tension de surface (γ) est définie comme la force par unité de longueur exercée par une interface. Lorsque l'interface est isotherme, elle a la même valeur en tous points de l'interface et s'exprime dans le système international en N/m.

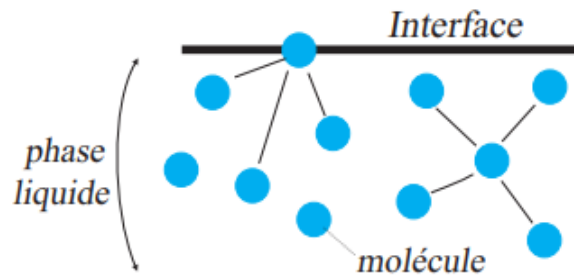


Figure 1-2 : Énergie d'interactions entre les molécules dans une phase liquide et celles de l'interface.

b) loi de Laplace

Une première conséquence de l'existence de la tension superficielle est qu'il existera une différence de pression de part et d'autre d'une interface fluide. La loi de Laplace permet ainsi de caractériser ce fait, lorsque l'interface entre deux milieux est courbée, il se produit une surpression du côté concave de l'interface à cause de la tension de surface. Cette discontinuité de pression de part et d'autre de l'interface est appelé pression capillaire noté ΔP et donné mathématiquement par la loi de Laplace qui s'écrit :

$$\Delta P = P_2 - P_1 = -2\gamma f, \quad (1-1)$$

avec f la courbure moyenne de l'interface (comptée positivement dans notre cas), ou P_1 est la pression du côté convexe et P_2 la pression du côté concave comme schématisé à la figure (1-3).

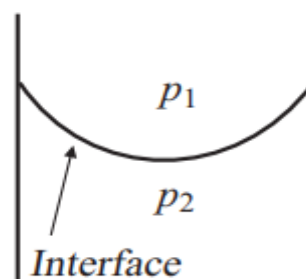
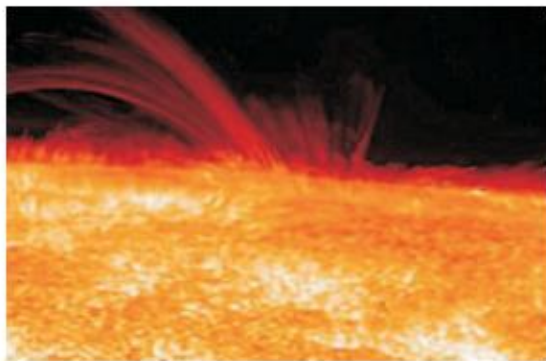


Figure 1-3 : Schéma de deux milieux séparés par une interface courbe avec P_1 la pression du côté convexe et P_2 la pression du côté concave.

1-3-2- La thermoconvection

Lorsqu'un fluide isotherme est en écoulement, il met en jeux des forces de pressions et de frottement qui peuvent se traduire partiellement de manière visuelle ou sensitive. Si l'écoulement est anisotherme, le mouvement s'accompagne d'un transfert de chaleur [4]: il s'agit de la "convection thermique" ou "thermoconvection". La convection est donc un mode de transport d'énergie dans lequel la chaleur est entraînée par le mouvement d'un fluide. On distingue deux types de convection : la convection naturelle qui est occasionnée par la poussée d'Archimède, et la convection forcée qui est due à une force extérieure (pompe, ventilateur, gradient naturel de pression...), lorsque les causes mécaniques et thermiques coexistent, on est en régime de convection mixte. La convection intervient dans de nombreux phénomènes naturels. À titre illustratif, nous pouvons citer la circulation océanique ; les mouvements convectifs à la surface du soleil qui résultent de l'interaction entre les gaz ionisés et le champ magnétique (voir figure 1.3(a)) ; les masses d'air dans l'atmosphère chauffées par le soleil (voir figure 1.3(b)). Ces différents exemples montrent la convection à grande échelle.



(a) Convection à la surface du Soleil.

(b) Présence de la convection dans l'atmosphère.

Figure 1-3 : Exemples de mouvements de convection à grande échelle.

Depuis un siècle, de nombreuses recherches sont effectuées sur les cellules de convection thermique dans les films liquides de faible épaisseur. L'étude de celles-ci, appelée problème de Bénard où instabilité de Bernard, en l'honneur de Henri Bénard qui les observe pour la première fois en 1900, est à la base de nombreuses découvertes

scientifiques. Bénard étudie une couche de fluide visqueux incompressible de quelques millimètres d'épaisseur chauffée. La surface inférieure de cette nappe de liquide repose sur une plaque horizontale, elle même déposée sur un mur métallique épais à faces parallèles et traversé par un flux de chaleur uniforme. La surface supérieure du fluide est libre et à une température maintenue constante. En fonction du flux de chaleur imposé et de la viscosité du liquide, Bénard distingue trois types de régimes d'écoulement [5] :

- Le régime des tourbillons en bandes : qui est stable pour des faibles flux de chaleur
- Le régime des tourbillons cellulaires ou des cellules de Bénard : qui est stable pour des flux de chaleur moyens et des liquides de viscosité moyenne.
- le régime des tourbillons-chenilles : qui est le plus instable. Il n'est observable que pendant quelques secondes et uniquement pour des grands flux de chaleur et pour des liquides de faible viscosité.

Reproduisant la même expérience, mais en plaçant une plaque rigide au-dessus du fluide, des structures convectives formées de rouleaux cylindriques sont mises en évidence, comme illustrées à la figure (1-4). Des cellules formées de prismes verticaux à base hexagonale peuvent également être générées entre deux plaques rigides.

La conclusion de ces observations est que, lorsqu'un film liquide est déposé sur une paroi chauffée, un mouvement de convection peut apparaître tous à ce que l'interface soit déformable ou non. Le liquide chaud monte jusqu'à la surface supérieure, s'écoule le long de celle-ci, ensuite se refroidit et redescend le long des bords, jusqu'à la plaque inférieure où il est réchauffé, et le cycle recommence. Ces cellules convectives sont soit formées de prismes verticaux à base hexagonale soit de rouleaux cylindriques.

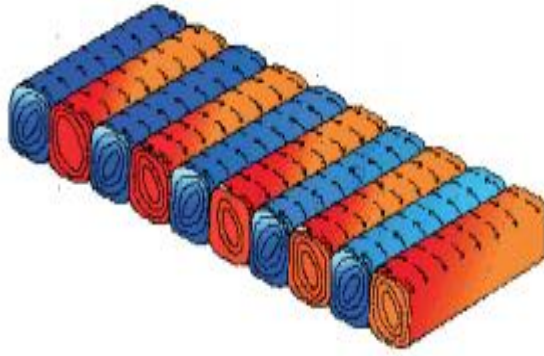


Figure 1-4 : Cellules de convections formant les rouleaux cylindriques.

D'un point de vu pratique, le plus important en thermoconvection est le calcul des flux de chaleur qui transitent entre les fluides et les parois solides. A cet égard, l'existence de la couche limite dynamique, et en particulier la condition de vitesse nulle à la paroi (pour une surface imperméable) font qu'au voisinage de celle-ci c'est la conduction qui est dominante. La densité de flux de chaleur à la surface se calcule à partir de la loi de fourrier :

$$\varphi = -k \overrightarrow{\text{grad}} T, \quad \text{en (W/m}^2\text{)} \quad (1-2)$$

où k désigne la conductivité thermique du fluide.

Selon les conditions aux limites, le résultat peut être multiforme. Par commodité et pour faire apparaître explicitement deux températures significatives du transfert (T_2 à la paroi et T_1 dans le fluide) on 'a pris depuis longtemps l'habitude d'écrire [*]:

$$\varphi = h (T_2 - T_1), \quad (\text{avec } h > 0) \quad (1-3)$$

on introduit ainsi un paramètre auxiliaire h , homogène à la conductance thermique, qui est appelé coefficient de convection où coefficient d'échange thermique et s'exprime en $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$.

1-3-3 L'effet Marangoni : description du phénomène

De nombreuses études et expériences ont démontré que les instabilités de Bénard sont également liées à un autre mécanisme : la variation de la tension superficielle avec la température [4,5,6]. Ce phénomène est appelé effet Marangoni, en référence à Matteo Marangoni. Le mécanisme physique à la base de l'effet Marangoni est illustré à la figure (1-5). Celle-ci représente une couche de liquide chauffée par le bas, qui est en contact avec une phase gazeuse. Supposons qu'une petite perturbation élève la température au point A par rapport à celle au point B. Il s'ensuit un gradient de tension de surface, qui se traduit par un mouvement du fluide de A vers B. Suite au principe de conservation de la masse, le fluide situé près de la plaque chauffée est alors animé d'un mouvement vertical. Mais, comme ce fluide est plus chaud, il accentue davantage le gradient thermique entre les points A et B, perpétuant ainsi la circulation du fluide, et créant un mouvement convectif. Lorsque l'effet Marangoni est dû à une perturbation aléatoire, celle-ci ne s'amplifie que si l'état de repos est instable. Dans ce cas, l'écoulement est dit de type micro convectif. Dans le cas où le gradient de tension interfaciale résulte d'une asymétrie géométrique du système, d'une asymétrie de distribution de chaleur dans le système ou d'une asymétrie dans la répartition de la masse à l'interface, l'écoulement de Marangoni est dit de type macro convectif.

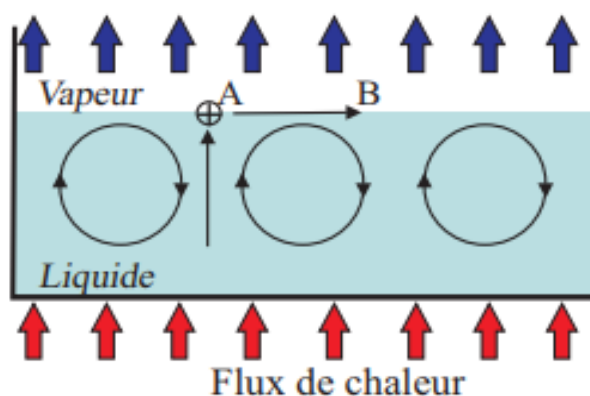


Figure 1-5 : Convection de Marangoni : principe du mécanisme.

1-3-4 Instabilités interfaciales dues à la thermocapillarité

Depuis le milieu du XX^e siècle, de nombreuses études ont été menées sur la stabilité des écoulements convectifs d'origine thermocapillaire. Une publication clé sur ce sujet est celle écrite par Pearson en 1958 [3 ;4 ;5]. Dans ce dernier, Pearson étudie le transfert de chaleur dans une couche de liquide infinie, homogène, d'épaisseur constante, bornée supérieurement par un gaz et inférieurement par une paroi chauffée. Il suppose que l'interface est plane et indéformable, et il néglige la gravité. La phase liquide est modélisée grâce aux équations classiques de la mécanique des fluides, tandis que la phase gazeuse est incluse dans le modèle à travers une condition aux limites à l'interface liquide-gaz, dans laquelle intervient un coefficient de transfert constant, le nombre de Biot symbolisé généralement par Bi . Ce nombre compare la résistance thermique de conduction à l'intérieur d'un corps et la résistance thermique de convection à la surface de ce corps. Il est défini comme :

$$Bi = \frac{hL}{k}, \quad (1-3)$$

avec h le coefficient de transfert de chaleur, L la longueur caractéristique et k la conductivité thermique du corps.

L'effet du gradient de tension de surface apparaît à travers la condition de conservation de la quantité de mouvement à l'interface, et est caractérisé par un nombre adimensionnel, dit nombre de Marangoni (Ma). Celui-ci est défini par le rapport entre le gradient de la tension superficielle et les effets dissipatifs (viscosité et diffusion thermique), à savoir :

$$Ma = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{L \Delta T}{\alpha \mu} \quad (1-4)$$

où $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$ représente la dépendance de la tension de surface à la température, α la diffusivité thermique du liquide, μ la viscosité dynamique du liquide, ΔT et L respectivement une différence de température caractéristique et une longueur caractéristique.

Dans le domaine de la physique non-linéaire et de la thermodynamique, les

analyses de stabilité sont courantes. Elles consistent à perturber un état de référence d'un système physique, et à étudier l'évolution temporelle des perturbations. Soit celles-ci s'atténuent dans le temps, et le système est dit stable, soit elles s'amplifient, et le système est alors instable. Sur base d'une telle étude, Pearson détermine l'existence d'un seuil critique, qu'il quantifie par un nombre de Marangoni critique (Ma_c), à partir duquel la couche de liquide devient instable en raison du mouvement convectif de Marangoni qui apparaît spontanément.

1-4 Analyse de la stabilité de Bernard-Marangoni

Selon le concept qu'on relie essentiellement à la stabilité, on peut donner plusieurs définitions à celle-ci. Néanmoins, si on se réfère à l'idée générale et intuitive que sous-entend la stabilité d'un mouvement, on peut dire simplement que si un corps initialement en équilibre mécanique, subit une perturbation de façon artificielle le portant à un état d'hors équilibre, la perturbation s'amortit et le mouvement résultant tend à disparaître au bout d'un certain temps, et revenir vers ou tout au moins rester proche de l'état stable : un tel cas est qualifié d'un équilibre stable. La stabilité selon Liapounov [*] est définie par rapport aux type de perturbations et des données initiales du système. Cependant on peut aller plus loin dans cette définition et lier la stabilité à deux paramètres essentiels à savoir l'état initial et la classe de perturbation qu'on considère, ce qui est tout à fait conforme avec la définition de Liapounov. Ainsi un mouvement peut être dans deux cas extrême, stable globalement ou instable localement, quelle que soit la perturbation, comme il peut être dans des cas intermédiaires, stable vis-à-vis de perturbations infinitésimales mais instable vis-à-vis de perturbation d'amplitude finie ou même pour une amplitude qui s'amplifie. Avant Liapounov le problème de stabilité étaient habituellement résolus en linéarisant les équations différentielles et en négligeant tout ce qui était d'ordre supérieur.

En mécanique des fluides le problème de stabilité est compliqué de par la caractéristiques du fluide et de l'écoulement, qui sont répartie entre deux champs , scalaire et vectoriel, définis dans un domaine dépendant essentiellement du temps. Autrement dit, il y'a absence de la stabilité (apparition d'instabilité) lorsque l'équilibre

existant entre les différentes forces agissantes au sein du fluide est rompu. Les forces à considérer sont :

- l'inertie,
- les forces visqueuses,
- les forces extérieures : poussée d'Archimède, force centrifuge et tension superficielle.

La viscosité joue souvent un rôle stabilisant (effets dissipatifs d'énergie), parfois déstabilisant, alors que l'accélération est en général un facteur stabilisant, la décélération étant plutôt déstabilisante. En Hydrodynamique l'étude de la stabilité a pour but non seulement de décrire précisément les différentes classes de solutions possibles correspondant aux perturbations considérées, mais également de prévoir les valeurs critiques des paramètres régissant le phénomène d'instabilité.

1-5 Influence de la géométrie du récipient l'instabilité de Bernard-Marangoni

Des études expérimentales sur la convection de Bernard-Marangoni ont été entreprises pour comprendre les mécanismes responsables des phénomènes d'instabilités, Koshmeider et al.[*] ont par exemple mis en évidence l'influence de la géométrie du récipient ainsi que le rapport de forme du récipient sur le nombre de cellules convectives obtenus et leurs formes, Hoefsloot et Hoogstraten [3] ont eux étudié l'influence des nombres de Biot et de Prandtl sur la convection de Bernard-Marangoni dans des récipients sphériques. D'autres travaux numériques ont été élaborés pour étudier ces phénomènes, on citera à titre d'exemples les travaux de Medale et al.[7] et ceux de Huhman et al.[8]. Pour toutes ces études faites concernant ce sujet, plusieurs facteurs tels que la géométrie des cavités et les propriétés physiques du fluide influent sur l'écoulement. Puisque le nombre de Marangoni est directement lié à une longueur caractéristique du récipient, il est donc nécessaire de bien définir la géométrie de celle-ci. Dans notre travail la convection de Bernard –Marangoni est étudié entre deux sphères concentriques portées à des températures différentes.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les généralités sur l'instabilité de Bernard-Marangoni et l'intérêt pour lesquels il est nécessaire de choisir une cavité au sein duquel le fluide s'écoule. Ce qui nous a permis de mieux appréhender le concept d'instabilité de Bernard-Marangoni, dans le prochain chapitre il sera question pour nous d'établir les équations modélisant cette instabilité entre deux sphères concentriques.

CHAPITRE 2 : MATERIELS ET METHODES

INTRODUCTION

Suite aux généralités sur l'instabilité de Bernard-Marangoni, ce chapitre fait l'objet du matériel et des méthodes nécessaires pour notre étude. Nous allons dans un premier temps modéliser l'instabilité de Bernard –Marangoni entre deux sphères concentriques et en suite, présenter les méthodes analytiques et numériques nécessaire à la résolution de celle-ci.

2- 1 – Position du problème

L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'instabilité de Bernard-Marangoni entre deux sphères concentriques. Nous considérons, plus exactement une couche de fluide comprise entre deux sphères concentriques, le rayon de la sphère intérieure à la température T_1 sera noté R_1 , celui de la sphère extérieure à la température T_2 sera noté $R_2 = R_1 + \Delta R$, ou $\Delta R = d$ représente l'épaisseur de la couche. La géométrie du système peut être caractérisée par le facteur de forme $A = \frac{R_2}{R_1}$. On choisira comme repère le système de coordonnées sphérique (r, θ, φ) sachant que $r \in [R_1; R_2]$.

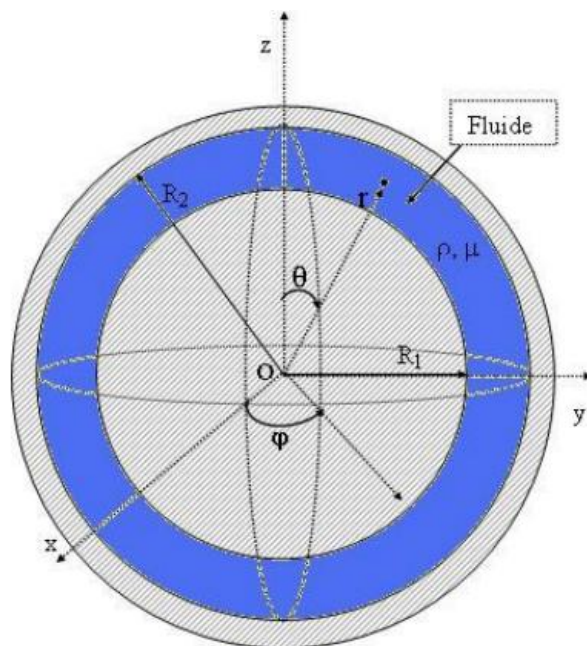
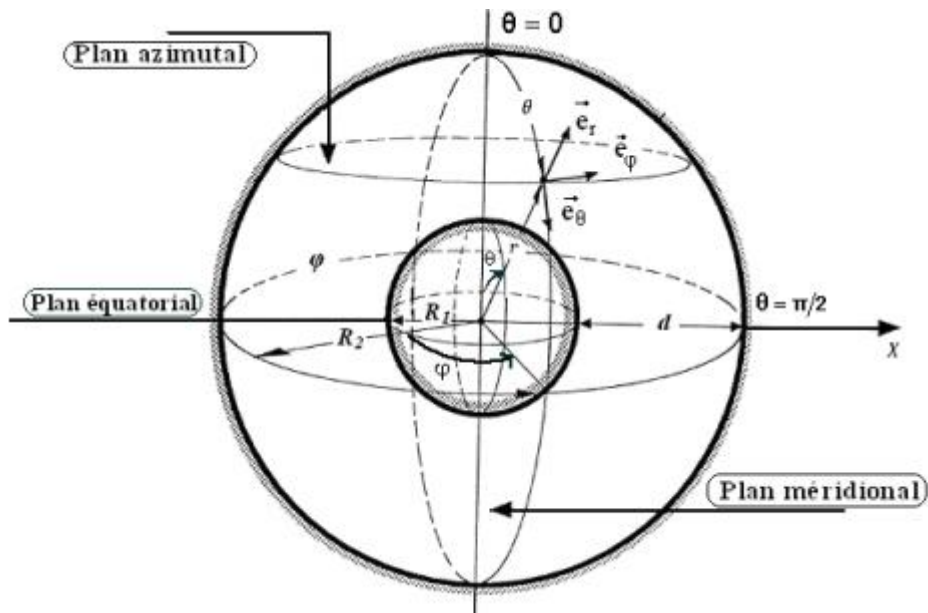


Figure 2.1- Système d'écoulement sphérique [9]

2 – 2 Lois de conservation

L'objectif de ce paragraphe est de présenter le système d'équation qui modélise notre problème physique. Ces équations expriment les lois de conservation de masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Pour cela, nous rappelons la définition de

la dérivée particulière qui s'écrit comme la somme de la dérivée temporelle et de la dérivée convective qui caractérise le transport de gradient de la variable par la vitesse :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} V \quad (2-1)$$

2 – 2 - 1 Conservation de la masse / continuité

Le principe physique stipule que (hormis pour les réactions nucléaires), la masse de la matière se conserve. Par conséquent un volume fixe dans l'espace peut accumuler de la matière ou en échanger avec l'extérieur mais par en créer ni en détruire. L'équation de masse d'un fluide ne comportant ni terme source, ni terme puits d'une masse (m) de fluide contenu dans un volume V s'écrit :

$$m = \iiint \rho(M, t) dV; \quad (2-2)$$

où ρ représente la masse volumique.

En effectuant le bilan de masses à travers une surface (S) limitant le volume V :

$$dm = -(\iint \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dS) dt; \quad (2-3)$$

avec $\vec{U}$ le vecteur vitesse et $\vec{n}$ la normale à la surface.

La conservation de masse dit : la variation de masse des volumes par unité de temps est égale aux masses entrantes dans V (à travers S) par la même unité de temps. Elle se traduit par la relation mathématique définir par :

$$\frac{d}{dt} (\iiint_V \rho dV) = -(\iint_S \vec{U} \cdot \vec{n} dS) dt; \quad (2-4)$$

à partir du théorème de Green- Ostrogradski (permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume), il vient que la relation (2-4) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (\iiint_V \rho dV) = - \iiint_V \text{div} (\rho \vec{U}) dV; \quad (2-5)$$

le volume de contrôle V étant fixe l'équation (2-5) s'écrit :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{U}) \right) dV = 0. \quad (2-6)$$

L'équation (2-6) étant valable quelque soit le volume V , on en déduit l'équation de continuité qui est l'équation locale valable en tout point du fluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{U}) = 0, \quad (2-7)$$

On peut retrouver des expressions de ces équations (2-7) dans des cas particuliers :

- Pour un écoulement permanent : pas de variation explicite avec le temps,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

- Pour un écoulement incompressible : le volume de chaque particule de fluide reste constant au cours de son mouvement.

Partant de ses deux cas particuliers ; la relation (2-7) devient :

$$\text{div} \vec{U} = 0 \quad (2-8)$$

2 - 2 – 2 conservations de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement stipule que toute force subie par le fluide correspond à un accroissement de sa quantité de mouvement, et toute force subie par le fluide correspond à une diminution de celle-ci. Au cours du mouvement du fluide, le domaine va changer de position, de forme, de dimension, mais restera constitué des particules fluides (il n'échange pas de masse avec le reste du fluide).

L'équation de conservation de la quantité de mouvement traduit ainsi l'équilibre entre la somme des forces extérieures qui exercent une influence sur le fluide et le taux de variation de la quantité de mouvement du fluide de masse m (principe fondamentale de la dynamique).

$$\frac{d}{dt}(m \vec{U}) = \sum \vec{F}_{ext} \quad (2-9)$$

La résultante des quantités de mouvement par unités de volume ρu est : $\iiint_V \rho \vec{U} dV$;

où $\vec{U}$ est la vitesse d'un point matériel (particule fluide) par rapport au référentiel fixe.

On démontre finalement que la variation dans le temps de la résultante des quantités de

mouvement ρu par unité de volume est égale à la résultante des quantités d'accélération $\frac{d(\rho \vec{U})}{dt}$ par unité de volume, il vient que:

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho U dV \right) = \iiint_V \frac{d(\rho U)}{dt} dV. \quad (2-10)$$

D'autre part le recensement des forces exercées sur V, nous permet de distinguer :

- Les forces de volumes : elle correspond à la densité des forces par unités de volume exercées par le champ de gravité $\vec{g}$ dont la résultante (poids) sur V vaut : $\iiint_V \rho \vec{g} dV$.

Dans ce qui va suivre nous allons supposer que nous sommes en apesanteur, on négligera les forces de volumes.

- Les forces de surfaces : qui sont transmises par le fluide extérieur au domaine en tout point M de la surface de contact S limitant ce domaine, on en distingue deux
 - La densité des forces par unité de surface est : $-P\vec{n}$, dont la résultante des forces de pressions. Dans cette expression P désigne la pression, $\vec{n}$ la normale à la surface au point considérée.
 - Les forces de frottement de viscosité : due au fait que les particules sont en mouvement relatif, ce qui génère des forces de frottements.

Ces forces de frottement de viscosité se trouvent exprimées dans le tenseur de contraintes $\bar{\bar{T}} \cdot \vec{n}$ donc la résultante est : $\iint_S \bar{\bar{T}} \cdot \vec{n} dS$.

Le tenseur de contraintes $\bar{\bar{T}}$ se compose du tenseur des forces normales (pression) et du tenseur des forces tangentielles (viscosité).

$$\bar{\bar{T}} = -P \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{T}}'; \quad (2-11)$$

où $\bar{\bar{I}}$ représente la matrice unité, $\bar{\bar{T}}'$ le tenseur des forces de viscosité, donné par :

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{T}}' = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{r\varphi} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta\varphi} \\ \tau_{\varphi r} & \tau_{\varphi\theta} & \tau_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}.$$

On peut donc réécrire la relation (2-9) par :

$$\frac{d}{dt}(m \vec{U}) = \sum \vec{F}_{ext} \rightarrow \iiint_V \frac{d(\rho \vec{U})}{dt} dV = \iint_S \vec{T} \cdot \vec{n} dS; \quad (2-12)$$

le théorème de Green-Ostrograski permet d'écrire la relation (2-12) comme étant :

$$\iiint_V \frac{d(\rho \vec{U})}{dt} dV = \iiint_V \overrightarrow{div}(\vec{T}) dV; \quad (2-13)$$

on en déduit l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d(\rho \vec{U})}{dt} = \overrightarrow{div}(\vec{T}); \quad (2-14)$$

$$\text{or } \overrightarrow{div}(\vec{T}) = -\overrightarrow{div}(P\vec{I}) + \overrightarrow{div}(\vec{T}') = -\overrightarrow{grad}(P) + \overrightarrow{div}(2\mu\vec{D}), \quad (2-15)$$

où μ qui représente la viscosité et $\vec{D}$ le tenseurs taux de déformation.

Pour un fluide newtonien, les composantes du tenseur des contraintes de viscosité $\vec{T}'$ dépendent linéairement des composantes du tenseurs de taux de déformation $\vec{D}$.

$$\vec{T}' = 2\mu \vec{D}; \quad (2-16)$$

$$\text{avec } \vec{D} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{grad}(\vec{U}) + \overrightarrow{grad}^T(\vec{U}))$$

on'a ainsi :

$$\overrightarrow{div}(\vec{D}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{div}(\overrightarrow{grad}(\vec{U}) + \overrightarrow{grad}^T(\vec{U})) = \frac{1}{2}[\nabla^2 U + \overrightarrow{grad}(div(U))]. \quad (2-17)$$

En combinant (2-14) et (2-17), on obtient l'équation fondamentale de la dynamique pour un fluide newtonien, tout en considérant que la viscosité de dilatation est nulle ($\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, d'après l'hypothèse de stokes) il vient que :

$$\frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} + (\nabla \rho \vec{U}) \cdot \vec{U} = -\vec{\nabla} P + \mu [\vec{\nabla} U + \vec{\nabla} (div(\vec{U}))]. \quad (2-18)$$

Pour un fluide incompressible, $\rho = cte$, ce qui impliquerait que $div(\vec{U}) = 0$, on obtient l'équation dite de Navier-Stokes en apesanteur donné par :

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho (\nabla \vec{U}) \cdot \vec{U} = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 U; \quad (2-19)$$

Dans l'équation (2-19), le terme de gauche de l'égalité représente l'accélération totale, composée de la somme de l'accélération convective et de l'accélération locale. Les termes de droites de l'égalité sont les forces extérieures en absence de l'apesanteur appliquée sur l'élément de volume, il s'agit respectivement de la force de pression et des forces visqueuses.

2 - 2 – 3 conservations de l'énergie

La mécanique des fluides est étroitement associée à la thermique, puisque les frottements visqueux engendrent des variations d'énergie interne (E) et conduisent à une variation locale de la température du fluide, donc modifient son mouvement. Le premier principe de la thermodynamique montre que la dérivée temporelle $\frac{dE}{dt}$ de l'énergie totale est égale à la somme de la puissance des forces extérieures et de la puissance calorifique reçue (par la surface S ou produite par unité de temps et de volume), soit :

$$\frac{dE}{dt} = P_{\text{force exterieure}} + P_{\text{calorifique}} . \quad (2-20)$$

Dans le cas où la puissance calorifique est uniquement due au phénomène de conduction on montre que :

$$P_{\text{calorifique}} = \iiint_V \text{div} (k \overrightarrow{\text{grad}} T) dV, \quad (2-21)$$

où k représente la conductivité thermique.

Par ailleurs l'énergie totale (E) est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :

$$E = E_{\text{interne}} + E_{\text{cinetique}} , \quad (2-22)$$

on peut donc écrire :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_{\text{interne}}}{dt} + \frac{dE_{\text{cinetique}}}{dt}, \quad (2-23)$$

$$\text{or } \frac{dE_{\text{cinétique}}}{dt} = P_{\text{force de volume}} + P_{\text{force surface}} + P_{\text{interieure}} ; \quad (2-24)$$

$$\text{avec } P_{\text{interieure}} = P_{\text{force de frottement}} + P_{\text{pression}} ;$$

où $P_{\text{pression}} = \iiint_V (P \operatorname{div} \vec{U}) dV$, $P_{\text{force de frottement}} = - \iiint_V \varnothing dV$, $\varnothing$ la fonction de dissipation.

En faisant la soustraction membre à membre de (2-20) et (2-24) on obtient :

$$\frac{dE_{\text{interne}}}{dt} = -P_{\text{interieure}} + P_{\text{calorifique}} ; \quad (2-25)$$

on'a donc :

$$\frac{dE_{\text{interne}}}{dt} = \iiint_V \operatorname{div} (k \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) dV - \iiint_V (P \operatorname{div} \vec{U}) dV + \iiint_V \varnothing dV. \quad (2-26)$$

Soit e l'énergie interne par unité de masse dans le domaine (D) fluide, c'est-à-dire :

$$E_{\text{interne}} = \iiint_D e dm; \quad (2-27)$$

Par la suite :

$$\frac{dE_{\text{interne}}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D e dm = \iiint_D \left(\frac{de}{dt} \right) dm = \iiint_D \rho \frac{de}{dt} dV; \quad (2-28)$$

pour un fluide incompressible, la variation de l'énergie interne s'écrit :

$$E_{\text{interne}} = C dT; \quad (2-29)$$

où C désigne la chaleur massique.

D'autre part, la divergence de la vitesse étant nulle, la puissance des forces de pression l'est aussi. Nous considérons de même qu'il y'a pas dissipation de l'énergie interne, donc la puissance des forces visqueuses est nul, l'équation (2-26) s'écrit :

$$C \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} (k \overrightarrow{\operatorname{grad} T}); \quad (2-30)$$

où encore :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T; \quad (2-31)$$

le coefficient α appelé diffusivité thermique défini par $\alpha = \frac{k}{\rho c}$.

Il est important de mentionner que la grande diffusivité thermique correspond à une grande conductivité et à faible inertie thermique mesurée par ρC . le transport de chaleur est assuré par convection au travers du terme $\vec{U} \cdot \vec{\nabla} T$ et par diffusion travers $\alpha \nabla^2 T$.

2 – 3 conditions aux limites du problème

Dans cette partie nous nous proposons de donner les conditions aux limites nécessaires à l'étude de notre système tel que décrit précédemment. Sur la sphère intérieure de rayon R_1 on a comme conditions aux limites suivantes :

- Condition d'adhérence du fluide : $U = \frac{\partial U}{\partial r} = 0$;
- Pour un fluide initialement au repos, nous supposons que la température de la sphère de rayon R_1 est constante et obéir à la loi : $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$

Pour ce qui est de la sphère de rayon R_2 :

- On suppose la sphère de rayon R_2 fixe : $U = 0$;
- Les conditions habituelle de continuité et tangentielle obéir à la loi de refroidissement de newton à savoir [2] :

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T(r, \theta, \varphi) - T_1), \quad (2-32)$$

où k est la conductivité thermique du fluide, h le coefficient de transfert de chaleur entre la surface libre du fluide et le milieu extérieure, n est la normale à la surface libre.

- A l'interface, nous supposons qu'il y'a équilibre entre les composantes tangentielles et de la contrainte visqueuse et les composantes transversales du gradient de tension superficiels [2,5,9]:

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} ; \tau_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}; \quad (2-33)$$

2 – 4 Mise sous forme adimensionnelle

Le but de cette partie est de rendre les équations de conservations (2-8), (2-19), (2-31) et les conditions aux limites (2-32), (2-33) sans dimensions. Pour y parvenir, nous allons tous d'abord définir des échelles caractéristiques à savoir :

- L'échelle de longueur est $\Delta R = R_2 - R_1$,
- L'échelle de temps est le temps caractéristique de la diffusion de la chaleur, soit $\frac{\Delta R}{k}$,
- L'échelle de vitesse est le ratio des deux échelles précédentes soit $\frac{k}{\Delta R}$,
- L'échelle de pression est $\rho_0 U^2$ soit $\rho_0 \cdot \frac{k^2}{\Delta R^2}$,
- L'échelle de température est $\Delta T = T_2 - T_1$;

Grace à cela, on peut définir des grandeurs sans dimension suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \alpha \frac{t}{\Delta R^2} \\ \vec{r}' = \frac{\vec{r}}{\Delta R} \\ \vec{U}' = k \frac{\vec{U}}{\Delta R} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} T' = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \\ P' = \Delta R^2 \cdot \frac{P}{\rho_0 \alpha^2} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla'^* = \frac{\nabla^*}{1/\Delta R} \\ \Delta'^* = \frac{\Delta^*}{1/\Delta R^2} \\ \partial_{t'}^* = \frac{\partial_{t'}^*}{\Delta R^2/\alpha} \end{array} \right. ;$$

Les changements de variables dans les équations (2-8), (2-19), (2-31), (2-32) et (2-33) suivie de l'utilisation de la nouvelle forme des opérateurs différentiels et de leur linéarité, conduit aux équations suivante :

- La conservation de masse : $div' \vec{U}' = 0$ (2-34)
- La conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{U}'}{\partial t'} = -\vec{\nabla}' P' + pr \cdot \Delta' \vec{U}' \quad (2-35)$$

où pr est un paramètre adimensionnels qui s'exprime par $pr = \frac{\mu}{\rho_0 \alpha}$; appelé nombre de Prandtl qui permet de comparer la rapidité des phénomènes thermique et des phénomènes hydrodynamiques dans le fluide.

- L'équation de l'énergie devient :

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + (\vec{U}' \cdot \Delta') T = \Delta' T'. \quad (2-36)$$

Les conditions aux limites adimensionnalisées sont :

- Adhérence du fluide sur la sphère intérieure et la sphère extérieure qui reste fixe est : $U' = 0$;
- La température sur la sphère intérieure est : $T' = 0$
- Les conditions de continuité et tangentielle obéissant à la loi de refroidissement de newton suivant la coordonnée radiale devient :

$$\frac{\partial T'}{\partial r} = Bi T' \quad (2-37)$$

où Bi est un paramètre adimensionnel qui s'exprime par $Bi = \frac{h \Delta R}{\alpha}$; appelé nombre de Biot qui permet de comparer les résistances thermiques au transfert thermique à l'intérieur et à la surface d'un corps.

- En utilisant les expressions de $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{r\varphi}$ en terme de composantes de vitesse du fluide et en rappelant la définition du nombre de Marangoni tel que décrit au chapitre 1, nous pouvons écrire les conditions (2-33) sous formes non dimensionnelle est :

$$\text{à } r = R_2 \text{ on'a : } \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} U_\theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r} Ma \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} U_\varphi + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r \sin \theta} Ma \frac{\partial T}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2-38)$$

où $(U_r, U_\theta, U_\varphi)$ sont les composante du vecteur vitesse en coordonnée sphérique. En raison de l'hypothèse que l'interface ne se déforme pas, nous avons $U = 0$ à $r = R_2$, l'équation (2-38) peut être réécrire :

$$\begin{cases} r \frac{\partial (U_\theta/r)}{\partial r} = \frac{1}{r} Ma \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ r \frac{\partial (U_\varphi/r)}{\partial r} = \frac{1}{r \sin \theta} Ma \frac{\partial T}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2-39)$$

En appliquant l'opérateur $r(\partial/\partial r)$ à l'équation de continuité (2-8), on obtient :

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2}{r} U_r + \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{U_\theta}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U_\varphi}{r} \right) \right] \right) = 0, \quad (2-40)$$

à l'aide des équations (2-38)-(2-40) ; on peut déduire une nouvelle condition au limites sans dimensions donné par :

$$\frac{\partial^2(r U_r)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} Ma L^2 T ; \quad (2-41)$$

avec $L^2 = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ et $Ma = -\frac{\left(\frac{dy}{dT}\right)\Delta R \cdot \Delta T}{\mu\alpha}$ représentant le nombre de Marangoni qui permet d'évaluer l'intensité du phénomène de convection à l'interface.

2-5 Approche de résolution : méthode de la théorie linéaire

Les solutions analytique exactes des équations (2-34) ;(2-35) et (2-36), sont difficiles à retrouver, cependant plusieurs méthode ont été mises au point pour obtenir des solutions approchées de ces équations dans le but d'étudier l'instabilité de Bernard- Marangoni dans une symétrie sphérique. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer entre autres la méthode des énergies ; la méthode de continuation ; la méthode variationnelle ; la méthode de la théorie linéaire. C'est cette dernière méthode que nous allons utiliser pour résoudre notre système à cause des contraintes moins élevées qu'elle pose, et surtout à cause de sa facilité d'exploitation.

2-5-1 Description et formulation de la méthode analytique

L'approche de la théorie linéaire est une méthode bien connue de la mécanique classique, utilisée dans divers contextes tout comme en mécanique des fluides précisément dans l'étude de l'instabilité. Le principe de l'approche de la théorie linéaire pour la résolution aux dérivées partielles des équations de conservation de la masse s'appuie sur deux hypothèses fondamentales, à savoir : les hypothèses de linéarité et du comportement exponentiel fonction du temps.

- Hypothèse linéaire : elle consiste à faire l'approximation qui suppose que la perturbation est infinitésimale dès lors qu'on peut négliger les termes

quadratique associées devant le mouvement principal. Cette étape d'analyse constitue la théorie linéaire de la stabilité.

- Hypothèse d'évolution temporelle : elle exprime que les composantes liées à la perturbation varient en fonction du temps sous la forme séparable

$$U(r, \theta, \varphi) = \omega(r)Y_l^m(\theta, \varphi)A(t), \quad (2-42)$$

$$T(r, \theta, \varphi) = \varepsilon(r)Y_l^m(\theta, \varphi)A(t), \quad (2-43)$$

$m, n = 1, 2, 3 \dots$ où l désigne le nombre d'onde.

Selon la loi de croissance exponentielle de $A(t)$ qui est donné par la relation :

$$A(t) = A_0 e^{\sigma t}, \quad (2-44)$$

où σ est un paramètre de stabilité (sous forme d'un complexe) qui détermine la croissance ou la décroissance dans le temps du mode, A_0 est une constante arbitraire associée à l'amplitude $A(t)$; et $Y_l^m(\theta, \varphi)$ sont des harmoniques de surfaces sphériques satisfaisant l'équation $L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1)Y_l^m(\theta, \varphi)$. Les fonctions ω et ε désignent respectivement l'amplitude de la perturbation de la vitesse et de la température.

Les hypothèses étant fixées, l'étude de la stabilité est simplifiée lorsque le système est linéaire c'est-à-dire lorsqu'il est décrit par les équations matricielles à coefficient constant. Pour avoir la matrice évoquée précédemment nous considérons que la solution des équations aux perturbations sont connue [1,5] et s'écrit comme combinaison linéaire fonction de r et l , la matrice ainsi obtenue grâce aux conditions aux limites permet d'obtenir une frontière entre les états stables et instables tout à ce que le déterminant fortement influencé par le nombre de Marangoni de cette matrice soit égale 0, ceci permet d'obtenir le nombre de Marangoni en fonction du nombre de Biot (Bi), le rayon (r) et le nombre d'onde l .

2-5-2 Application de la méthode de la théorie linéaire pour la résolution de notre système d'équation

Tous d'abord on cherche à linéariser le problème, nous analysons la stabilité linéaire de l'état de base de la manière décrite plus haut en recherchant des solutions perturbées sous la forme :

$$U' = U_0 + U_1, \quad T' = T_0 + T_1, \quad P' = P_0 + P_1, \quad \text{où } U_1 = (u_r, u_\theta, u_\varphi).$$

En substituant ces formes dans les équations (2-34)-(2-36) et en négligeant les termes du second ordre et plus dans les quantités de perturbation, nous obtenons les équations linéarisées :

- La conservation de masse : $\text{div} \overrightarrow{U}_1 = 0$ (2-45)

- La conservation de la quantité de mouvement :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_1 = \frac{1}{Pr} \nabla P_1$$
 (2-46)

- L'équation de l'énergie devient :

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) T = - \frac{dT(r)}{dr} U_r$$
 (2-47)

Pour éliminer la pression dans l'équation (2-46), on applique à cette équation deux fois le rotationnel en coordonné sphérique elle prend la forme suivante :

$$\nabla^2 \left(Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) (r U_r) = 0.$$
 (2-48)

a fin de simplifier les calculs, nous définissons un opérateur L définie par :

$$L^2 = - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$
 (2-49)

pour que l'on puisse écrire $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L^2$.

Notre motivation est de trouver une solution des équations (2-47) et (2-48) sous la forme :

$$r U_r(r, \theta, \varphi) = \omega(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{\sigma t}, \quad (2-50)$$

$$T(r, \theta, \varphi) = \varepsilon(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{\sigma t}, \quad (2-51)$$

en remplaçant (2-50), (2-51) pour $\sigma = 0$ dans les équations (2-47) et (2-48) on obtient à nouveau un autre système différentiel qui prend la forme :

- Equation de la quantité de mouvement

$$DD\omega(r) = 0, \quad (2-52)$$

- Equation de l'énergie

$$D\varepsilon(r) = \frac{\omega(r)}{r} \frac{dT(r)}{dr}, \quad (2-53)$$

avec $D = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}$.

Puisque les équations de masse ont été modifiées due au fait de la théorie de la linéarité, il en est de même pour les conditions limites. Nous nous intéressons tout d'abord aux conditions limites sur la sphère de rayon R_2 , elles prennent la forme :

$$\begin{cases} \omega(r) = 0, \\ \frac{dT(r)}{dr} = Bi T(r), \\ \frac{d^2\omega(r)}{dr^2} = Ma \frac{l(l+1)}{r} T(r), \end{cases} \quad (2-54)$$

par la suite les conditions sur la sphère de rayon R_1 viennent :

$$\begin{cases} \omega(r) = \frac{d\omega(r)}{dr} = 0, \\ \frac{dT(r)}{dr} = 0, \end{cases} \quad (2-55)$$

Pour r, R_2, l , et Bi données, les équations (2-52) et (2-53) associées aux conditions (2-54), (2-55) constituent un problème de valeurs propres pour les fonctions propres $\omega(r)$ et $\varepsilon(r)$ au valeur propre Ma . Ce problème au valeur propre a été résolu numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. La solution de (2-

52) satisfaisant aux conditions aux limites (2-55) peut être écrite comme une combinaison de deux solutions linéairement indépendantes qui est de la forme [2]:

$$\omega(r) = A_1 r^l + A_2 r^{l+2}, \quad (2-56)$$

de la même manière, la solution de l'équation (2-53) satisfaisant la condition (2-54) peut s'écrire [2] :

$$T(r) = A_1 r^{l-1} + A_2 r^{l+1} + A_3 r^{-(l+2)}. \quad (2-57)$$

où A_1 et A_2 sont des constantes.

La substitution de (2-56) et (2-57) dans les conditions aux limites (2-54) sur la sphère de rayon R_2 conduit à un ensemble de trois équations algébriques linéaires homogènes pour les constantes A_1, A_2 et A_3 . Une solution non triviale n'existe que si le déterminant des coefficients est égal à zéro, cela conduit à une équation qui est fonction du nombre de Marangoni de la forme :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_1 Ma + a_{31} & b_2 Ma + a_{32} & b_3 Ma + a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

avec,

$$a_{11} = r^l,$$

$$a_{12} = r^{l+2},$$

$$a_{21} = (l-1)r^{l-2} + Bi r^{l-1},$$

$$a_{22} = (l+1)r^l + Bi r^{l+1},$$

$$a_{23} = -(l+2)r^{-(l-2)} + Bi r^{-(l+2)},$$

$$b_1 = l r^{-(l+2)}, \quad a_{31} = l(l-1)r^{-(l-2)},$$

$$b_2 = l(l+1)r^l, \quad a_{32} = (l+1)(l+2)r^l,$$

$$b_3 = (l+1) r^{-(l+2)}, \quad a_{33} = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, le nombre de Marangoni s'écrit :

$$Ma = \frac{\alpha(l,r) + \beta(l,r)Bi}{1 + \theta(l,r)},$$

où $\alpha(l,r)$, $\beta(l,r)$ et $\theta(l,r)$ sont fonctions de l et r .

Les courbes de stabilités dans le plan (l, Ma) sur lesquelles $\sigma = 0$ sont données par $Ma = Ma(l, r, Bi)$ et correspond à la frontière de séparation des régions de modes instables avec $\Re(\sigma) > 0$ de ceux des modes stables d'apparition de la convection de Bernard-Marangoni dans la géométrie sphérique, où $\Re$ représente la partie réel du nombre complexe. Dans tout les cas considérés, la portion du plan (l, Ma) située au dessus des courbes de stabilités dans le demi-plan $Ma > 0$ et la portion située en dessous d'elles dans $Ma < 0$ correspondent respectivement à des modes instables et stables ; ce qui nous permet de calculer un nombre critique de Marangoni ($Ma_{critique} = \min(Ma)$).

2-5-2 Méthode numérique

Dans cette partie nous nous proposons de décrire les différentes méthodes qui vont nous permettre de conclure sur l'étude de la stabilité de Bernard-Marangoni dans une géométrie sphérique, pour se faire il existe plusieurs méthodes parmi lesquels la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et la méthode des Différences finis.

a) Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

C'est une méthode élaborée par Runge en 1894 et améliorée par W. Kutta vers 1901, pour la résolution des équations différentielles ordinaires de premier ordre de la forme :

$$y' = f(x, y).$$

La méthode de Runge-Kutta utilise la méthode d'intégration numérique de Simpson qui consiste à approximer par un polynôme de degré deux qui passe par les points a, b et $c = \frac{a+b}{2}$. Cette méthode permet d'obtenir :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)].$$

Il en découle que le schéma itératif de la résolution des équations différentielles () par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 est sous la forme :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4),$$

avec,

$$L_1 = h f(x_k, y_k);$$

$$L_2 = h f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{L_1}{2}\right);$$

$$L_3 = h f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{L_2}{2}\right);$$

$$L_4 = h f(x_k + h, y_k + L_3) \text{ et } h = b - a \text{ le pas.}$$

Il est important de mentionner que si l'équation différentielle à résoudre n'est pas du premier ordre on fera un changement de variable permettant d'obtenir une équation de premier ordre, par la suite on respectera le schéma itératif utilisé par la méthode de Runge-Kutta décrit précédemment.

La méthode de Runge-Kutta présente une erreur de l'ordre $O(h^5)$ et est très utilisée en méthode numérique pour la résolution des équations différentielles du fait de sa stabilité. Notons que l'exécution du programme de Runge-Kutta 4 nécessite des valeurs initiales.

b) Méthode des différences finis

La méthode consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs de différences basés sur des intervalles de temps et d'espace finis Δx et Δt , puis à résoudre les équations algébrique obtenues en tenant compte des conditions initiales et aux limites. Ainsi le domaine de variation continu du problème se trouve transformé en un ensemble finis de points (nœuds) où la solution sera recherchée. Ce domaine

discret est alors délimité par des frontières formant par conséquent un réseau de point de calcul, appelé grille de calcul.

Pour l'approximation des dérivées spatiales premières, et en négligeant l'erreur de troncature, le développement de Taylor permet de formuler les possibilités suivantes :

- Schéma décentré amont (précis au premier ordre) :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x}, \quad (2-58)$$

- Schéma décentré aval (précis au premier ordre) :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i = \frac{f_i^j - f_{i-1}^j}{\Delta x}, \quad (2-59)$$

- Schéma centré (précis au premier ordre) :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_i = \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2\Delta x}, \quad (2-60)$$

Suivant la façon de discrétisation des équations aux dérivées partielles, deux cas se distinguent pour la méthode des différences finies à savoir :

- Le schéma explicite : si les dérivées spatiales dans l'équation sont exprimées en termes de variables au temps j connu, le schéma est dit explicite. C'est-à-dire, les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné sont exprimées en fonction des caractéristique de celui-ci supposés connues à l'instant précédent, de ce fait, ce qui se passe au temps $t + \Delta t$ ne depend que du passé au temps t .
- Le schéma implicite : a l'opposé, si la caractéristique à un temps donné $t + \Delta t$ sont approchées en fonction de la solution précédente trouvée au temps t , et des valeurs recherchées au temps même du calcul, la liaison est implicite. Ceci impose la résolution simultanée des équations algébriques obtenues à chaque pas de temps.

Conclusion

Dans ce chapitre il a été question pour nous d'établir l'équation modélisant l'instabilité de Bernard-Marangoni entre deux sphères concentriques à partir des lois de conservation (conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement, conservation de l'énergie). Soucieux de la compréhension de l'étude de l'instabilité de Bernard-Marangoni en géométrie sphérique, nous avons présenté une approche de résolution analytique qui est la méthode de la théorie linéaire. Elle permet de simplifier le problème et surtout de comprendre le mode d'apparition de l'instabilité. Nous avons également présenté les méthodes numériques, notamment la méthode de Runge-Kutta et celle des différences finies qui permettra de compléter cette étude.

CHAPITRE 3 : RESULTATS ET DISCUSSION

INTRODUCTION

Ayant obtenu l'équation qui modélise l'instabilité de Bernard-Marangoni dans une géométrie sphérique, nous proposons dans ce chapitre une résolution numérique de notre système d'équation afin de retrouver les courbes de stabilité qui nous permettront ainsi de déterminer le nombre de Marangoni critique.

3-1 Résultats

Nous avons au chapitre précédent modélisé les équations de conservations de masse d'un écoulement fluide pour l'étude de l'instabilité de Bernard-Marangoni dans une géométrie sphérique, il s'agit de :

- La conservation de masse : $div \vec{U} = 0$, (3-1)
- La conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + pr. \Delta \vec{U}, \quad (3-2)$$

- L'équation de l'énergie devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \Delta) T = \Delta T, \quad (3-3)$$

auxquelles on associe les conditions aux limites suivantes :

- Adhérence du fluide sur la sphère intérieure et la sphère extérieure qui reste fixe est : $U = 0$;
- La température sur la sphère intérieure est : $T = 0$
- Les conditions de continuité et tangentielle obéissant à la loi de refroidissement de newton suivant la coordonnée radiale devient :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = Bi T \quad (3-4)$$

- Equilibre entre les composantes tangentielles, de la contrainte visqueuse et les composantes transversales du gradient de tension superficiel :

$$\frac{\partial^2(r U_r)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} Ma L^2 T ; \quad (3-5)$$

avec $L^2 = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ et Ma le nombre de Marangoni , Bi le nombre de Biot et pr le nombre de Prandtl.

Afin d'étudier l'instabilité de Bernard-Marangoni, une résolution de ses équations associés aux conditions aux limites est nécessaire. Pour cela nous avons décrit, puis appliqué la méthode de la théorie de la stabilité linéaire permettant ainsi de résoudre le problème, cette méthode donne lieu à un problème aux valeurs propres. La résolution numérique du problème aux valeurs propres à nombre de Marangoni Ma , nous avons d'abord déterminer la température du profile de base T . Si on admet que la température dépend du temps pour symétrie sphérique, nous devons résoudre l'équation de diffusion suivant [5]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (3-6)$$

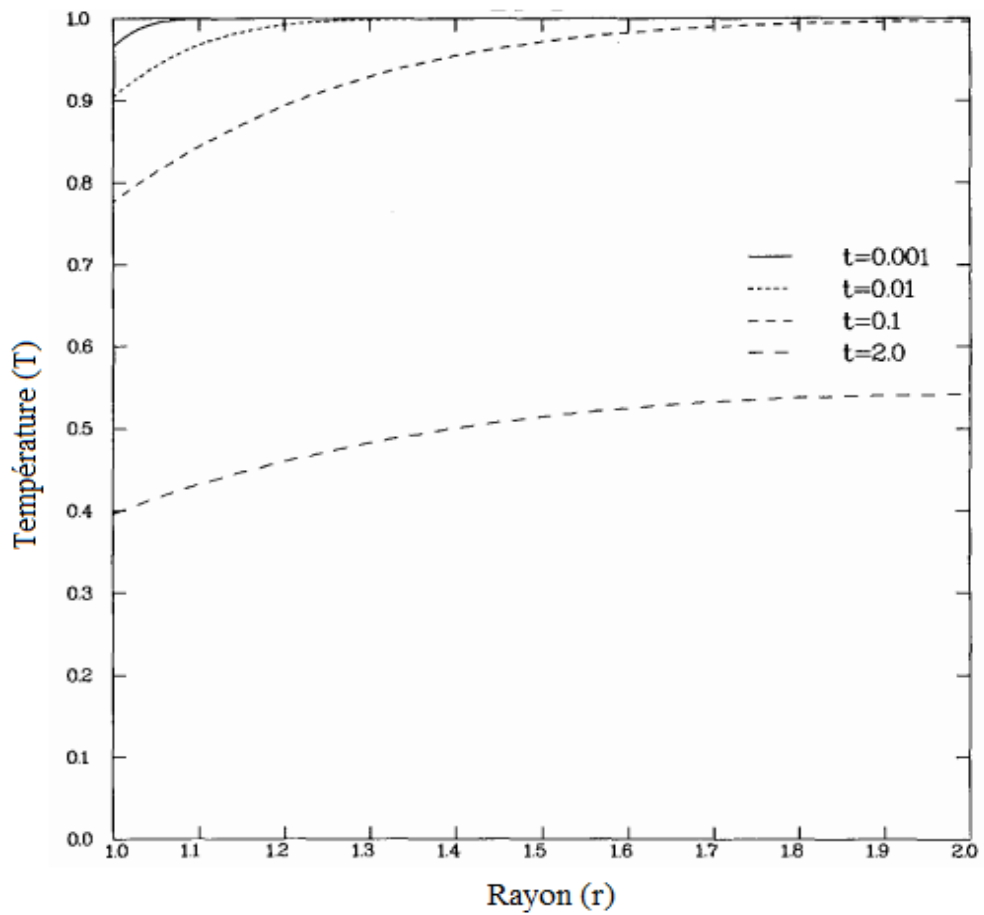
avec conditions aux limites :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ sur la sphère de rayon } R_1,$$

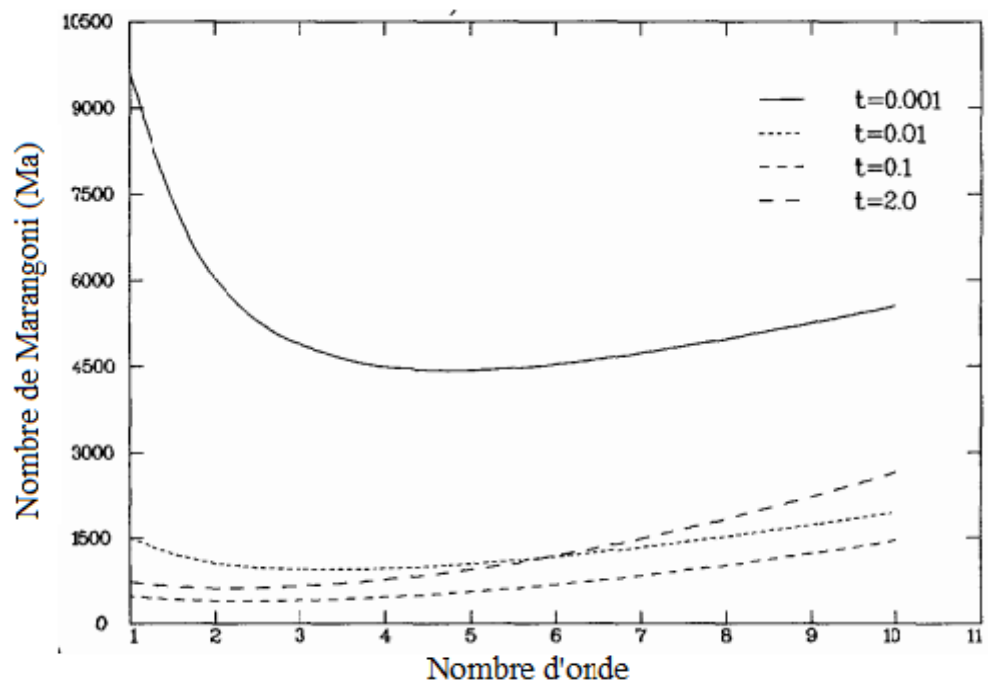
$$\frac{\partial T}{\partial r} = Bi T, \text{ sur la sphère de } R_2,$$

et pour condition initiale : $T = 1$ et $t = 0$

Dans les simulations qui vont suivre nous avons représenté le profil de température en fonction du rayon de la sphère tel que décrit à l'équation (3-6) en considérant le nombre de Biot connu. De même nous avons aussi représenté le nombre de Marangoni en fonction du nombre d'onde (l) calculés à partir du problème des valeurs propres tels que décrit au chapitre précédent. Pour une étude plus précise, nous présentons dans un tableau les nombres critique de Marangoni avec les nombres d'ondes critiques correspondants.

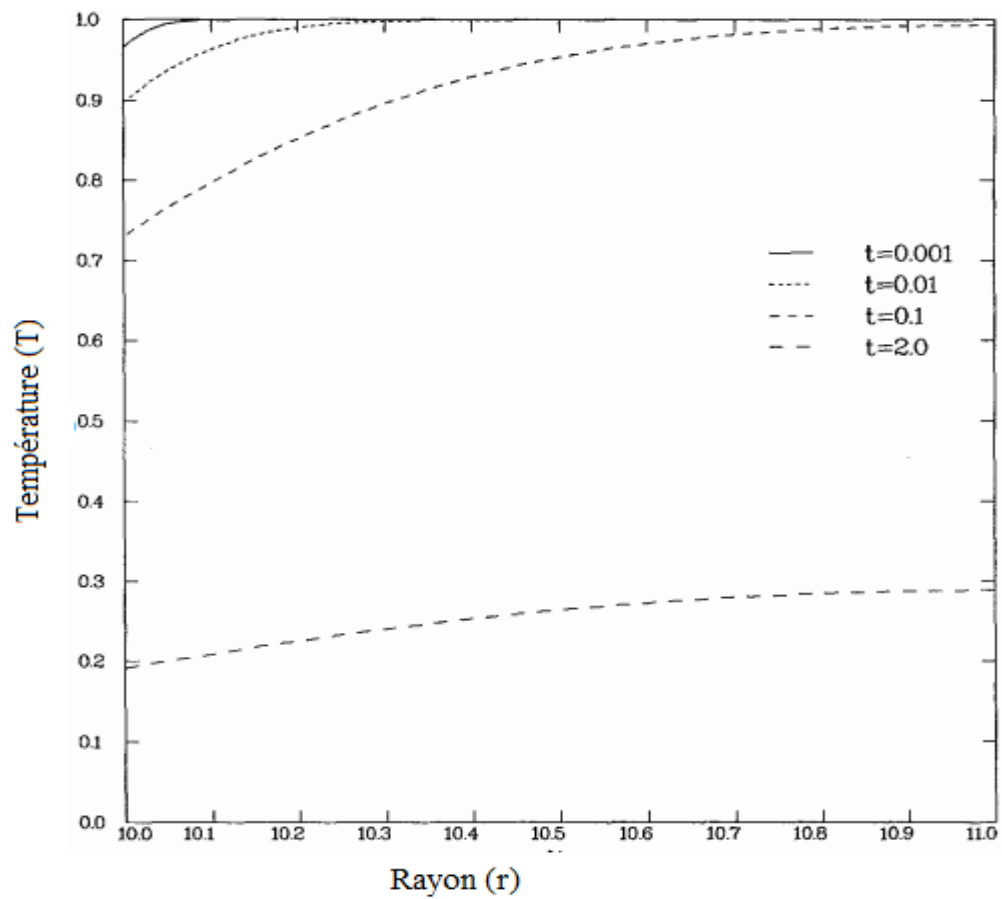


(a)

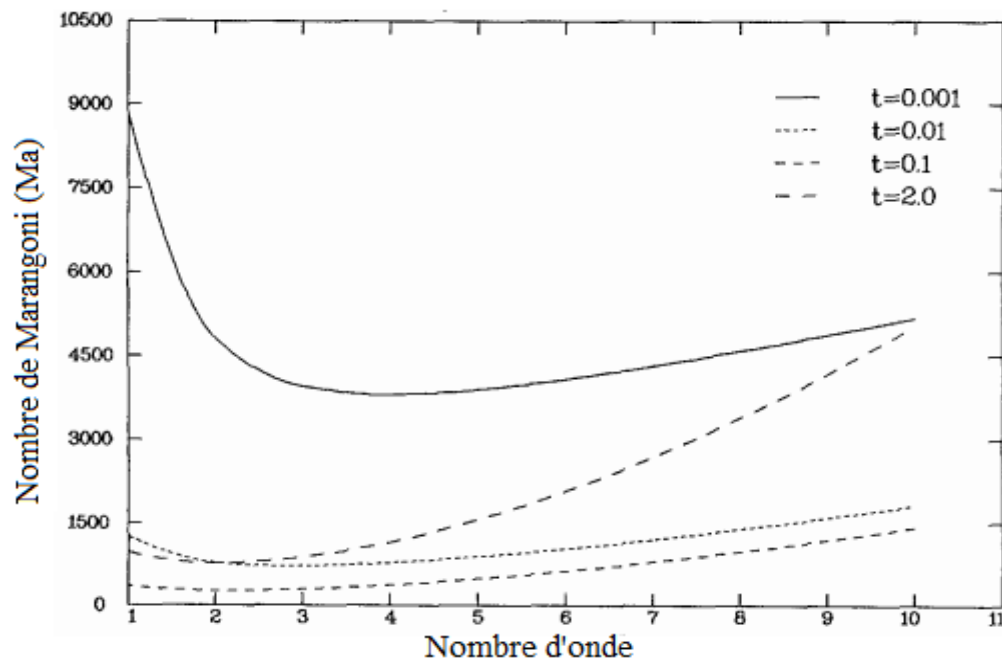


(b)

Figure 3-1 : (a) Température $T(r, t)$ en fonction de la coordonnée radiale r pour différent temps t . (b) Nombre de Marangoni Ma en fonction du nombre d'onde. Valeurs des paramètres : $Bi = 1$, $R_2 = 2$, $R_1 = 1$

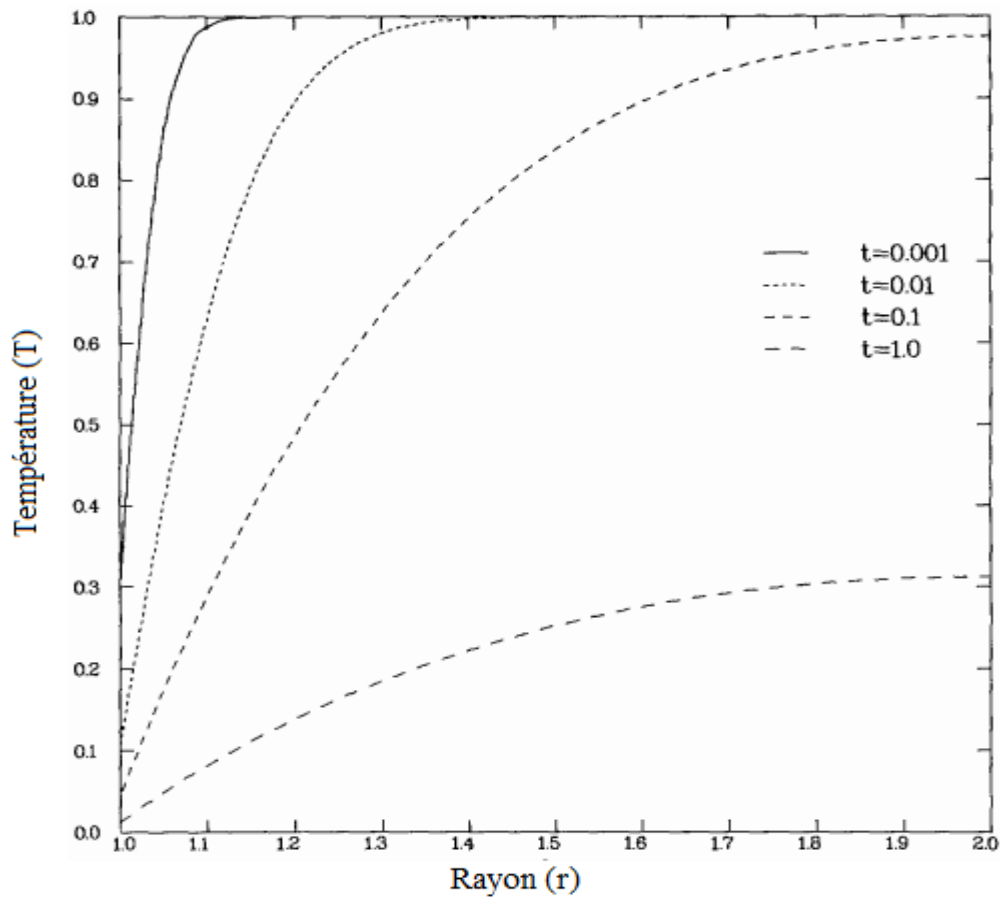


(a)

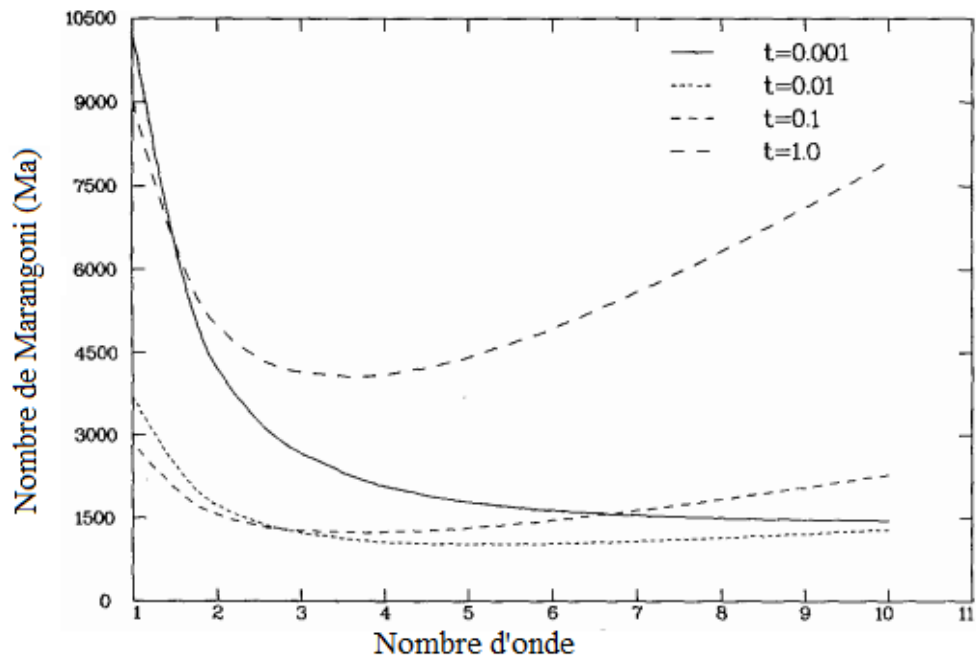


(b)

Figure 3-2 : (a) Température $T(r, t)$ en fonction de la coordonnée radiale r pour différent temps t . (b) Nombre de Marangoni Ma en fonction du nombre d'onde. Valeurs des paramètres : $Bi = 1$, $R_2 = 11$, $R_1 = 10$



(a)



(b)

Figure 3-3 : (a) Température $T(r, t)$ en fonction de la coordonnée radiale r pour différent temps t . (b) Nombre de Marangoni Ma en fonction du nombre d'onde. Valeurs des paramètres : $Bi = 60$, $R_2 = 2$, $R_1 = 1$

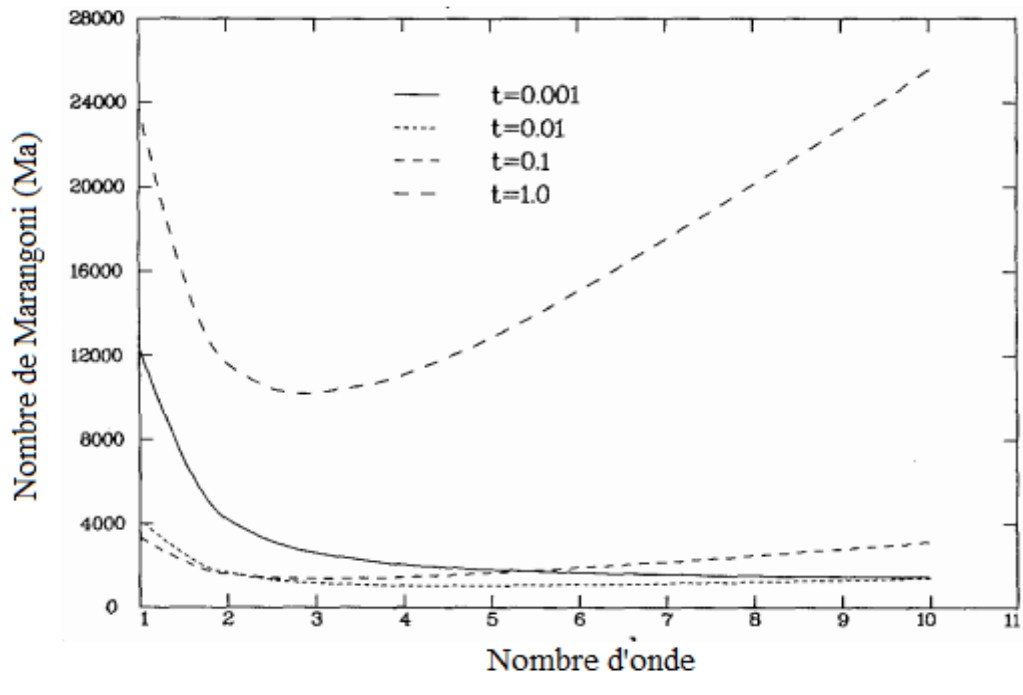
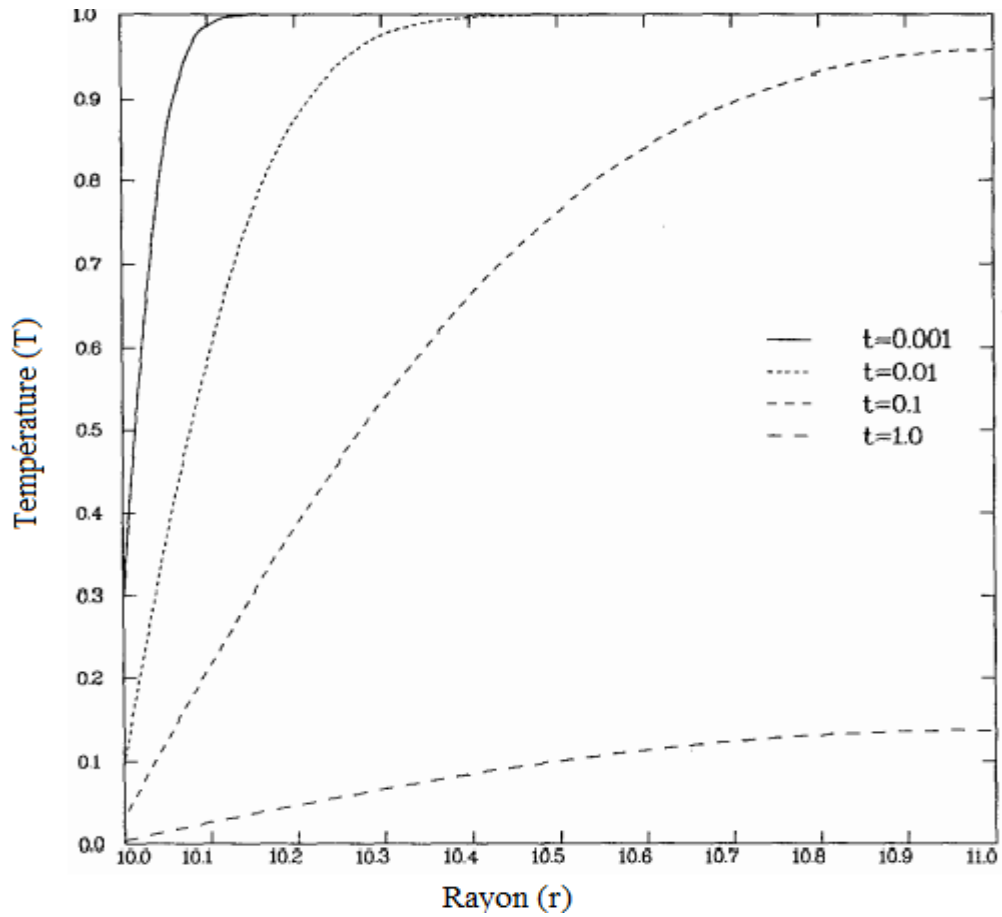


Figure 3-3 : (a) Température $T(r, t)$ en fonction de la coordonnée radiale r pour différent temps t . (b) Nombre de Marangoni Ma en fonction du nombre d'onde. Valeurs des paramètres : $Bi = 60$, $R_2 = 11$, $R_1 = 10$

$Bi = 1$					$Bi = 60$			
	$R_2 = 2$		$R_2 = 11$		$R_2 = 2$		$R_2 = 11$	
t	Ma_c	l_c	Ma_c	l_c	Ma_c	l_c	Ma_c	l_c
0.001	4425	5	3803	4	1445	11	1459	11.1
0.01	955	3	719	2.8	1024	5	1046	4.5
0.1	394	2	266	2.1	1240	4	1367	3.1
1.0					4108	4	10265	3.0
2.0	619	2	764	1.9				

Tableau 1 : Nombres de Marangoni critique et leur correspondant en nombre d'onde critique en fonction du t pour $Bi = 1; 60$.

3-2 Discussion des résultats

Des courbes obtenus précédemment, nous notons que le nombre de Marangoni est fonction du temps, elle décroît rapidement et après un certains temps augmente de nouveau comme le montre les résultats présenté dans le tableau 1 et les figures (3-1-1, 3-2-a, 3-3-a, 3-4-a). De même nous observons que le nombre de Biot pour $Bi = 1$; et $Bi = 60$, la valeur minimale de Ma est plus faible pour $R_2 = 11$ que pour $R_1 = 2$. Cela signifie que lorsque nous considérons deux systèmes avec des diamètres différents (avec le plus grand diamètre ayant un nombre de Biot plus élevé), le système avec la plus grand diamètre montrera d'abord l'instabilité de Marangoni : la courbure a alors un rôle stabilisant. Pour des nombres de Biot plus grand, le système avec le plus petit diamètre deviendra instable en premier.

De plus Le nombre d'onde critique diminue avec le temps, cela est du à l'augmentation dans le temps de la profondeur de pénétration du processus de diffusion thermique dans le fluide, n'autorisant que de petites longueurs d'onde de perturbations pour des petits temps, et de plus en plus grandes avec le temps. Le tracé de la température en fonction du rayon de courbure montre que celle-ci est une fonction croissance du rayon, cela voudrais dire que pour des systèmes de sphères

différentes, la sphère la plus grande sera portée à une température plus élevée par rapport à la plus petite.

CONCLUSION

Dans ce chapitre il était question pour nous de retrouver les courbes de stabilité de Bernard-Marangoni afin de pouvoir déterminer les valeurs critiques du nombre de Marangoni. La résolution numérique nous a permis de démontrer que l'apparition d'une instabilité de Marangoni d'un fluide placé entre deux sphères et ayant initialement une température uniforme est influencée par la courbure de l'interface. En fonction du nombre de Biot, une courbure croissante peut avoir un effet stabilisant (ou déstabilisant) dans le sens où l'instabilité s'installe plus tard (ou plus tôt). Afin d'être en mesure d'observer différents moments du début de l'instabilité, il faut réduire le nombre de Marangoni, cependant, il est très délicat de réaliser cela expérimentalement.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, il était question pour nous d'étudier l'instabilité de Bernard-Marangoni dans une symétrie sphérique, de manière précise elle avait pour but d'étudier la nature des mouvements thermoconvectifs se développant au sein d'un milieu fluide limité par deux surfaces sphériques concentriques, isothermes et imperméable. Pour y arriver, les aspects auxquels nous nous sommes intéressés sont les transferts thermiques induits par la forme de l'écoulement considéré, ceci à la fois analytique que numérique, raison pour laquelle nous avons commencé par développer les éléments théoriques de base nécessaires à la compréhension de l'instabilité de Bernard-Marangoni dans une symétrie sphérique. Par la suite nous avons établi les équations de conservations (conservations de masse, conservation de la quantité de mouvement, conservation de l'énergie) modélisant la dynamique de l'écoulement dans un tel système. Dans la même optique nous avons associé à ce problème des conditions aux limites. Après avoir adimensionné nos équations associées aux conditions aux limites, nous nous sommes proposés de résoudre le système d'équations. Pour trouver, nous avons présenté une méthode de résolution analytique à savoir la méthode de la théorie linéaire ainsi que des méthodes de résolution numérique qui sont : la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et la méthode des différences finies.

Concernant la résolution analytique nous avons pu linéariser nos équations pour avoir des équations perturbées, ceci dans le but de faciliter l'étude de l'instabilité. Les analyses numériques menées à la suite de cette étude analytique nous ont permis de retrouver les courbes de stabilité de Bernard-Marangoni pour une géométrie sphérique, ce qui nous a permis de déterminer un nombre de Marangoni critique au-delà duquel l'instabilité est produite. Il ressort de manière générale que l'apparition d'une instabilité de Marangoni d'un fluide placé entre deux sphères et ayant initialement une température uniforme est influencée par la courbure de l'interface. En fonction du

nombre de Biot, une courbure croissante peut avoir un effet stabilisant (ou déstabilisant) dans le sens où l'instabilité s'installe plus tard (ou plus tôt).

RÉFÉRENCE BIBLIOGRAPHIQUE

[1] Lichtenbelt, J.H., Drinkenburg, A.A.H. and Dijkstra, H.A.: *Marangoni convection and mass transfer from the liquid to the gas phase*, *Naturwissenschaften* 73 (1986) 356-359.

[2] Dijkstra, H.A. and Lichtenbelt, J.H.: *Mass transfer driven Marangoni convection under micro-gravity*, *Applied Microgravity Technology* 1 (1988) 180-187.

[3] Hoefsloot, H.C.J., Hoogstraten, H.W., Hoven, A. and Janssen, L.P.B.M.: *Marangoni instability in a liquid layer bounded by two coaxial cylinder surfaces*, *Applied Scientific Research* 47 (1990) 1-21.

[4] Pirotte, O. and Lebon, G.: *Surface-tension driven instability in spherical shells*, *Applied Microgravity Technology* 1 (1988) 175-179.

[5] Hoefsloot, H.C.J. and Hoogstraten, H.W.: *Marangoni instability in spherical shells*, *Applied Microgravity Technology* 2 (1989) 106-108.

[6] Chandrasekhar, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford: Clarendon Press (1961).

[7] Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications (1965).

[8] Davis, S.H.: *Thermocapillary instabilities*, *Annual Review of Fluid Mechanics* 19 (1987) 403-435.

[9] Dijkstra, H.A.: *Mass transfer-induced convection near gas-liquid interfaces*, Ph.D. Thesis, University of Groningen, The Netherlands (1988).