

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GÉOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE

B.P.812 Yaoundé,
Tel/Fax. :(237)22.23.44.96



REPUBLIQUE OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

CENTER FOR RESEARCH AND DOCTORAL
TRAINING IN SCIENCE, TECHNOLOGY, AND
GEOSCIENCES

THE DOCTORAL RESEARCH AND TRAINING
UNIT

B.P.812 Yaounde,
Tel/Fax. :(237)22.23.44.96

ON THE OPTIMAL INVESTMENT – CONSUMPTION-INSURANCE STRATEGY IN CONTINUOUS TIME MODEL WITH PARTIAL INFORMATION

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER en Mathématiques

Option: PROBABILITES, STATISTIQUES ET FINANCES.

Par

BETEL Fabien

Matricule : 21T2935

Licencié en Mathématiques

Sous la Direction du

Dr. WOUNDJIAGUE Apollinaire

Chargé de cours



Année académique 2023-2024

**ON THE OPTIMAL INVESTMENT - CONSUMPTION -
INSURANCE STRATEGY IN CONTINUOUS TIME MODEL
WITH PARTIAL INFORMATION**

Mémoire rédigé et soutenu en vue de l'obtention du Diplôme de
Master en Mathématiques

Option: Probabilités, Statistiques et Finances

Par:

BETEL Fabien

Titulaire d'une licence en Mathématiques

Matricule

21T2935

Sous la direction de

Dr. WOUNDJIAGUE Apollinaire

Chargé de cours

Année académique: 2023-2024

Dédicace

Ce mémoire est dédié à
famille BETEL .

Remerciements

Ce mémoire représente l'accomplissement de cinq années de formations. Cette œuvre d'édification n'aurait pas pu être faite sans le soutien matériel, moral de certaines personnes à qui je tiens à adresser tous mes remerciements. Il s'agit de:

♠ Mon **Dieu** tout puissant pour toutes ses grâces, sa miséricorde et le courage qu'il m'offre afin de surmonter toutes les difficultés.

♠ Mon encadreur **Dr. WOUNDJIAGUE Apollinaire** pour sa disponibilité tout au long de la rédaction de ce travail, pour ses multiples remarques, suggestions et conseils tant sur le plan humain que scientifique.

♠ **Pr AYISSI Raoul**, Chef du Département de Mathématiques, enseignant à l'université de Yaoundé 1, Directeur Polytechnique de Yaoundé; ses encouragements et surtout ses conseils avisés reçus ont grandement contribué à la réussite de ma recherche.

♠ Tous les enseignants de la faculté des sciences de l'université de Yaoundé 1, en particulier les enseignants de la spécialité **Probabilités-Statistiques-Finances** pour le savoir qu'ils m'ont transmis.

♠ Tous mes camarades de promotion notamment:

– **MOUNPAIN Ouzerou, NOUTEMGNING YIMELE Ulrich Brice, DONGMON Mauricelle, KAMDJE Junior, FOGNE Aurel, NJAPNDOUNKE MESMER Dalida, IMLAY Dean, PETNGA T. Francky Roosevelt, KAMGA Arnauld, MAKPUNE N.A Wilfried, MELONG Estelle, NGUEYA Lorita, MENO Loïse** pour votre amitié, votre aide et les souvenirs précieux que nous avons partagés. Je vous souhaite tout le meilleur pour l'avenir.

♠ A l'Université de Yaoundé 1 pour son immense hospitalité intellectuelle.

♠ A tous mes proches et ainsi qu'à tous mes amis(**BOULOTIGAM Arnaud, YANGABBE Juste, DJEGUEDEM Tresor, D.Hippolyte, Dawe Siguy, Josué le Pierre, Ndossangar, Djonfabé Edmond, Edom, Tamibé, B. Medard, MOFFO KENMO Romuald**) pour leurs divers conseils et soutiens.

♠ Je ne saurai terminer sans adresser des remerciements spéciaux à:

– Mes parents: mon père défunt **BETEL Aaron** (il me disait souvent: « Mon fils, la réussite sourit à ceux qui travaillent. Si tu souhaites atteindre tes objectifs, persévère toujours et ne te décourage

jamais. L'échec n'est pas une fin en soi, mais une opportunité d'apprendre et de progresser »), et à ma mère Mme **NEKOUANODJI Orpha** (qui avait l'habitude de me dire à chaque fois: « Fils, va et revenir comme tu as été ») pour la tendresse qu'ils ont su me donner, pour leur soutien financier et moral;

– A mes tantes Mme **maman Makodjibeye Celestine, D. Charlotte, Daoudou Marlise, Denenadji Marceline** pour leurs soutiens et encouragement.

– A mes petites sœurs **Yvette, Blanche, Chanceline, Triphène, Stella** et mes petits frères **Désiré, John Peter, Léo, Thierry Henry** pour leur confiance, leurs sacrifices et leurs soutiens pendant toutes ces années et en particulier les moments moroses.

– A mes cousines **Fatou Ruth, Nemadjilem, Sephora, Clémence, Florence, Clarisse, N.Bénédicte** et cousins **Ndossangar, Ignance, Ndoular Josué, J. Claude, Innoncent** pour leurs soutiens et encouragement.

– A mes oncles **Djessandjim Ndoular, Daoudou Benjamin, Mbaimoundou** pour leurs conseils et encouragements.

♠ À tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail, qu'ils reçoivent ici l'expression de ma profonde considération.

Déclaration sur l'honneur

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

BETEL Fabien

Résumé

Ce mémoire traite le problème de contrôle stochastique optimal d'investissement, de consommation, et d'assurance pour un consommateur dans un marché incomplet. Pour cela, on utilise un modèle de facteur stochastique qui prend en compte les rendements des actifs risqués et les facteurs économiques sous-jacents. Notre modèle repose sur les équations différentielles stochastiques linéaires qui décrivent l'évolution des facteurs économiques. Cependant, le consommateur ne dispose que d'une information partielle sur ces facteurs et doit se fier à l'information passée sur les rendements des actifs risqués. Ce problème est formulé comme un problème de contrôle stochastique avec information partielle. Ce problème est résolu en appliquant le principe de la programmation dynamique. Nous déterminons une équation Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et deux équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR). Cette approche nous permet d'obtenir une solution explicite. Enfin, le théorème de vérification est démontré et nous construisons la stratégie optimale d'investissement, de consommation, d'assurance dans le problème du consommateur. Au terme de ce mémoire, nous envisagerons faire l'étude entre la corrélation des actifs risqués et le processus de facteur stochastique dans le problème du consommateur avec l'information partielle.

Mots clés: Contrôle optimal stochastique, investissement, consommation, assurance, actifs risqués, modèle de facteur stochastique, équation HJB, EDSR.

Abstract

This paper addresses the problem of optimal stochastic control of investment, consumption, and insurance for a consumer in an incomplete market. To do this, we use a stochastic factor model that takes into account the returns of risky assets and underlying economic factors. Our model relies on linear stochastic differential equation that describe the evolution of these economic factors. However, the consumer only has partial information about these factors and must rely on past information about the returns of risky assets. This problem is formulated as a stochastic control problem with partial information. This problem is resolved by applying the dynamic programming principle. We determine a Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation and two backward stochastic differential equations (BSDEs). This approach allows us to obtain an explicit solution. Finally, the verification theorem is demonstrated, and we construct the optimal strategy for investment, consumption, and insurance for the consumer. In conclusion of this paper, we will study the correlation between risky assets and the stochastic factor process in the problem of the consumer with partial information.

Keywords: Optimal stochastic control, investment, consumption, insurance, risky assets, stochastic factor model, HJB equation, BSDE.

Contents

Dédicace	1
Remerciements	2
Déclaration sur l'honneur	4
Résumé	5
Abstract	6
contenus du travail	8
Introduction	9
1 Présentation sommaire du calcul stochastique	11
1.1 Processus stochastique: voir [23]	11
1.2 Temps d'arrêt: voir [11]	14
1.3 Espérance conditionnelle	15
1.4 Martingale: voir [23]	16
1.5 Mouvement brownien: voir [11]	17
1.6 Intégrale stochastique et formule d'Itô	17
1.6.1 Propriétés de l'intégrale stochastique	17
1.6.2 Processus d'Itô:	18
1.7 Variation quadratique: voir [11]	21
1.7.1 Propriétés de la variation quadratique:	21
1.8 Équation différentielle stochastique (EDS): voir [11]	22
1.8.1 Solutions forte et faible:	23
1.8.2 Existence et unicité de la solution forte	23
1.8.3 Générateur d'une diffusion: voir [11]	25
1.9 Théorème de Girsanov: voir [17, 28]	27

2 Généralités sur les Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSRs) et théorie du contrôle optimal stochastique	29
2.1 Généralités sur les Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR)	29
2.1.1 Existence et unicité de solution de l'EDSR voir [21]	30
2.1.2 EDSR linéaires voir [21]	32
2.2 Théorie du contrôle optimal stochastique:	33
2.2.1 Contrôle optimal:	33
2.2.2 Le contrôle stochastique:	33
3 Prise en compte de l'information partielle dans les stratégies optimales d'investissement, de consommation et d'assurance dans le problème du consommateur	35
3.1 Présentation du marché financier, et du marché des assurances	35
3.1.1 Présentation du marché financier	35
3.1.2 Présentation du marché des assurances	36
3.2 Présentation du processus de richesse	38
3.3 Filtre de Kalman, Processus d'Innovation et le Nouveau processus de richesse	39
3.3.1 Filtre de Kalman et Processus d'Innovation	39
3.3.2 Nouveau processus de la richesse	49
3.4 Modélisation du problème du consommateur sous l'information partielle	50
3.4.1 Formulation du problème	50
3.5 Résolution du problème	52
3.5.1 Combinaison de l'équation HJB et deux EDSRs	53
3.5.2 Solution générale	56
3.6 Théorème de vérification	64
3.6.1 Problème d'optimisation du portefeuille sensible au risque	64
3.6.2 Théorème de vérification pour $\gamma \in]0, 1[$	71
3.6.3 Théorème de vérification pour $\gamma \in]-\infty, 0[$	73
Conclusion	75

Introduction

Dans les marchés financiers actuels, caractérisés par l'incertitude et la complexité, les consommateurs doivent prendre des décisions stratégiques pour optimiser leur patrimoine et minimiser les risques. Le problème d'investissement, de consommation et d'assurance est un défi majeur, notamment lorsqu'il faut tenir en compte de la durée de vie aléatoire et de possibilité de décès prématuré.

Ce travail se penche sur la situation d'un consommateur qui doit choisir comment allouer son revenu entre des investissements sans risques et des actifs risqués, tout en définissant son niveau de consommation et en souscrivant une assurance-vie, le tout en présence d'une information incomplète sur l'état du marché. L'information partielle signifie que les stratégies d'investissement, de consommation et d'assurance sont supposées être sélectionnées en utilisant uniquement l'information passée des actifs risqués sans utiliser celle des processus de facteur stochastique.

L'objectif est de trouver des stratégies optimales qui maximisent l'espérance de l'utilité de la consommation de la richesse à la retraite et de la prestation d'assurance en cas de décès prématuré. Le défi réside dans la prise en compte de l'information partielle et de la corrélation entre les actifs risqués. Divers modèles quantitatifs ont été proposés pour modéliser et analyser ce type de problème.

[18] a mis l'accent sur les décisions optimales de consommation et d'investissement, mais n'a pas pris en compte l'assurance-vie. Ces deux approches ont été combinées par [25] qui a examiné un problème d'assurance-vie, de consommation et d'investissement sur le cycle de vie déterministe dans un modèle à temps continu. Il supposait que la durée de vie d'un consommateur (salarié) est une variable aléatoire bornée. [20] a résolu le travail de [25] dans le cas d'une durée de vie non bornée. [12] a traité le cadre qui prend en compte un processus de revenu stochastique. [4] a étudié la contrepartie de [20] avec des multiples actifs risqués. [26] a combiné le travail de [4] à un cadre plus général de diffusions en appliquant une combinaison de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et d'une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR, en abrégé). [26] a fourni des solutions explicites au problème avec revenu stochastique (voir section 5.1 de [26]), une mortalité stochastique (voir section 5.2 de [26]), et un modèle à facteur stochastique gaussien linéaire (voir section 5.3 de [26]). [6] a généralisé [26] à un modèle de diffusion avec sauts. Il s'ensuit que [2, 3, 5, 22, 24] ont étudié les problèmes d'optimisations de l'investissement sur des modèles linéaires gaussiens avec information partielle. [8] a étendu ces travaux au problème d'optimisation de l'investissement et de con-

sommatation. Récemment [7] a résolu le problème d'investissement, de consommation et d'assurance en utilisant une approche de contrôle stochastique dans laquelle il a appliqué une combinaison de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et deux équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) avec des paramètres aléatoires et non forcément bornées. L'objectif de ce mémoire, est de réviser les articles relatifs au sujet, où seront détaillées les preuves importantes. Les démonstrations des résultats obtenus seront faites afin de fournir un rapport d'étude compréhensible du sujet et produit une extension vers des problématiques inexplorées.

Ce mémoire est subdivisé en trois chapitres. Dans le premier, présentation sommaire du calcul stochastique. Dans le deuxième chapitre, les méthodes de résolution des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) et la notion sur la théorie du contrôle optimal stochastique sont proposées et ce mémoire se termine en proposant un cadre prise en compte de l'information partielle dans les stratégies optimales d'investissement, de consommation et d'assurance dans le problème du consommateur, plusieurs actifs risqués dans un marché incomplet, le filtre de Kalman, par combinaison de deux équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) et de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman par l'approche de la programmation dynamique. Les résultats de ce mémoire soulèvent des questions intéressantes pour des recherches futures.

Présentation sommaire du calcul stochastique

Le but de ce chapitre est de donner des définitions de base et des résultats principaux pour utiliser aux prochains chapitres de ce mémoire voir [11, 17, 23, 28].

1.1 Processus stochastique: voir [23]

Définition 1

Soit T un ensemble d'indices non vide. On appelle processus stochastique une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ indexée par T .

Si $T \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus est à temps discret.

Si $T \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus est à temps continu.

Définition 2

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de parties Ω . On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu (sur Ω) si:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. pour tout ensemble $A \in \mathcal{F}$, on a $\bar{A} \in \mathcal{F}$, où $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω (stabilité par passage au complémentaire).
3. pour toute $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω satisfaisant $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ (stabilité par union dénombrable).

Dans la suite de ce mémoire, l'espace de probabilité sur lequel les variables aléatoires (v.a) sont définies est noté $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 3

Étant donnée une variable aléatoire (v.a) X à valeurs dans un espace métrique $(E, \mathcal{E})$, on appelle tribu engendrée par X , et on note $\sigma(X)$, la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par l'ensemble des images réciproques de X . Autrement dit,

$$\sigma(X) := \sigma\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\}.$$

Définition 4

Une suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est appelée une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots \subset \mathcal{F}.$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est alors appelé un espace de probabilité filtré.

Définition 5

La filtration naturelle d'un processus $(X_t)_{t \in T}$ est $\mathcal{F}_t^X$ telle que

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_i; 0 \leq i \leq t).$$

Définition 6

Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si, pour tout t , X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Définition 7

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit mesurable si l'application suivante est mesurable:

$$X : \begin{cases} (\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, \omega) \mapsto X_t(\omega). \end{cases}$$

Définition 8

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit progressif (ou progressivement mesurable) si pour tout $t \geq 0$, l'application suivante est mesurable:

$$X : \begin{cases} ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow \mathbb{R}, \\ (s, \omega) \mapsto X_s(\omega). \end{cases}$$

Définition 9

On dit qu'un processus est prévisible (pour la filtration $\mathcal{F}_t$) si X_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable et X_t est $\mathcal{F}_{t-1}$ -mesurable pour chaque $t > 0$.

Définition 10

Un processus $(X_t)_t$ est dit à trajectoires continues (ou simplement processus continu) si

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; t \mapsto X_t(\omega)\}) = 1.$$

Définition 11

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in \pi}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dira que $\mathcal{F}_t$ satisfait aux conditions habituelles si, et seulement si

1. $\mathcal{F}_0$ contient tous les $\mathbb{P}$ -négligeables de $\mathcal{F}$.
2. Si $\pi = \mathbb{R}^+$ ou $[0, T]$ alors $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite; c'est-à-dire

$$\forall t \in \pi, \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

Définition 12

Un processus à variation bornée $A = (A_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté dont toute les trajectoires sont à variation bornée.

1.2 Temps d'arrêt: voir [11]

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \pi}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré dans les conditions habituelles.

Définition 1

Un **temps d'arrêt** par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \pi}$ est une v.a $T : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$ (respectivement $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ si $\pi = \mathbb{N}$) telle que

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega, T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2

Soit T un $(\mathcal{F}_t)_t$ temps d'arrêt.

1. On appelle **tribu des événements antérieurs** à T et on note $\mathcal{F}_T$ la tribu définie par

$$\mathcal{F}_T = \{H \in \mathcal{F} \mid H \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in \pi\}.$$

2. On appelle **filtration arrêtée** la filtration $(\mathcal{F}_{T \wedge t})_{t \in \pi}$.

En particulier, on a $\mathcal{F}_{T \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \pi$.

1.3 Espérance conditionnelle

Définition 1

Soient $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et deux variables aléatoires $X, Y \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on a quelques propriétés de l'espérance conditionnelle:

1. Linéarité: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et si $X, Y \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}[(\alpha X + \beta Y)|\mathcal{G}] = \alpha \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + \beta \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}),$$

2. La monotonie: Si $X, Y \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}),$$

3. Si X est $\mathcal{G}$ -mesurable alors:

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}),$$

4. Si X est indépendant à $\mathcal{G}$ alors:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X),$$

5. Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ alors:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_1).$$

1.4 Martingale: voir [23]

Définition 1

Un processus $(X_t)_t$ à valeurs réelles est dit une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ si:

1. Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

2. Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable.

3. Pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s. \quad p.s.$$

Le processus $(X_t)_t$ est dit:

4. une surmartingale s'il vérifie (1), (2) et de plus si pour $s \leq t$:

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s \quad p.s.;$$

5. une sous-martingale s'il vérifie (1), (2) et de plus si pour $s \leq t$:

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s \quad p.s.$$

Définition 2

Un processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est appelé une **martingale locale** s'il s'écrit $M_t = M_0 + N_t$ où M_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ -mesurable et $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté à trajectoire continue avec $N_0 = 0$ et tel qu'il existe une suite croissante $(T_n)_{n \geq 0}$ de temps d'arrêt avec $T_n \nearrow +\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ le processus arrêté N^{T_n} est une martingale uniformément intégrable.

Lorsque $M_0 = 0$, on parle de martingale locale issue de 0.

Définition 3

Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une **semi martingale à trajectoires continues** s'il s'écrit sous la forme $X_t = X_0 + M_t + A_t$ où M_t est une martingale locale (issue de 0) et $(A_t)_t$ est un processus à variation bornée.

1.5 Mouvement brownien: voir [11]

Définition 1

On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles tel que:

- (i) La fonction $t \rightarrow B_t(\omega)$ est continue $\mathbb{P}$. p.s.
- (ii) Pour tout $s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ suit la loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

Remarque 1.5.1. Un mouvement brownien est dit géométrique s'il est de la forme

$$X(t) = x \exp(rt + \sigma B_t), \quad \text{avec} \quad X_0 = x.$$

Proposition 1

Si B est un mouvement brownien, et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle, alors les processus B_t , $B_t^2 - t$, $\exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ sont des $\mathcal{F}_t$ -martingales.

1.6 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Il s'agit d'une intégrale de la forme:

$$\int_0^t X(s)dB_s,$$

où $(B_t)_t$ est un mouvement brownien standard et $(X_t)_t$ est un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité.

1.6.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ et $(X_t)_t, (Y_t)_t$ deux processus stochastiques. On a:

$$1. \text{ Linéarité: } \int_0^t (\lambda X + \beta Y)(s)dB_s = \lambda \int_0^t X(s)dB_s + \beta \int_0^t Y(s)dB_s.$$

$$2. \text{ Additivité: } 0 \leq s < t < v \leq T,$$

$$\int_s^t X(u)dB_u = \int_s^v X(u)dB_u + \int_v^t X(u)dB_u.$$

3. Pour un temps d'arrêt τ ,

$$\int_0^{\tau \wedge t} Y(s) dB_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} Y(s) dB_s.$$

4. si $\int_0^t \mathbb{E}[X^2(s)] ds < \infty$, alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s) dB_s\right] = 0$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X(s) dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)^2 ds\right] = \int_0^t X(s)^2 ds \quad (\text{Isométrie d'Itô}).$$

5. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X(s) dB_s\right)\left(\int_0^t Y(s) dB_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s) Y(s) ds\right] = \int_0^t X(s) Y(s) ds.$

1.6.2 Processus d'Itô:

En finance, on utilise souvent des processus d'Itô comme semimartingales continues pour modéliser la dynamique des prix d'actifs risques.

Définition 1

Soit $B = (B_1, \dots, B_n)$ un mouvement brownien n -dimensionnel sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$. On appelle processus d'Itô, un processus $X = (X_1, \dots, X_m)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ tel que l'on ait p.s. :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

c'est-à dire

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t a_s^i ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t \sigma_s^{ik} dB_s^k$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable, $a = (a^1, \dots, a^m)$, et $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^m) = (\sigma^{ik})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n}$ sont des processus progressifs à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{m \times n}$ tels que $a^i \in L^1$ et $\sigma^i \in L^2$, c'est à dire

$$\int_0^t |a_s| ds < \infty; \quad \int_0^t |\sigma_s|^2 ds < \infty \quad p.s.$$

Théorème 1 (Formule d'Itô)

Soit g une fonction continûment différentiable deux fois et $(B_t)_t$ un mouvement brownien standard.

On pose:

$$\text{pour tout } t \in [0, T], \quad X_t = X_0 + \int_0^t a_s(X_s)ds + \int_0^t \sigma_s(X_s)dB_s.$$

Pour tout $t \in [0, T]$, on a:

$$\begin{aligned} d(g_t(X_t)) = & \left[\left(\frac{\partial g_t(X_t)}{\partial t} + \sigma_t(X_t) \frac{\partial g_t(X_t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma_t(X_t)^2 \frac{\partial^2 g_t(X_t)}{\partial x^2} \right] dt \\ & + \sigma_t(X_t) \frac{\partial g_t(X_t)}{\partial x} dB_t. \end{aligned}$$

Exemple 1.6.1. Prenons

$$dY_t = bY_t dB_t, \text{ et } g(Y_t) = \ln(Y_t)$$

où $(B_t)_t$ est un mouvement Wiener.

On a donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x} &= \frac{1}{x} \\ \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

D'après la formule d'Itô, on a:

$$\begin{aligned} d(g(Y_t)) &= \left[0 + 0 + \frac{1}{2} Y_t^2 \left(-\frac{b^2}{Y_t^2} \right) \right] dt + bY_t \frac{1}{Y_t} dB_t \\ &= -\frac{b^2}{2} dt + b dB_t. \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient:

$$Y_t = Y_0 \exp \left(bB_t - \frac{b^2}{2} t \right).$$

Théorème 2 (Formule d'Itô dans le cas multidimensionnelle)

La formule d'Itô dans le cas multidimensionnelle s'écrit de la forme:

$$g_t(X_t) = g_0(X_0) + \int_0^t \left[\left(\frac{\partial g_s(X_s)}{\partial s} + \sigma_s^* \frac{\partial g_s(X_s)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma_s^* \frac{\partial^2 g_s(X_s)}{\partial x^2} \sigma_s \right) \right] ds \\ + \int_0^t \sigma_s^* \frac{\partial g_s(X_s)}{\partial x} dB_s$$

où σ_t, B_t sont des matrices.

Proposition 1

Si $(X_t)_t$ et $(Z_t)_t$ sont deux processus d'Itô, alors:

$$X_t Z_t = X_0 Z_0 + \int_0^t X_s dZ_s + \int_0^t Z_s dX_s + \langle X, Z \rangle_t$$

où $\langle X, Z \rangle_t$ est nul si X ou Z est à variation finie.

Proof. Appliquons la formule d'Itô à $G(x, y) = xy$ qui est de classe C^2 en x, y et noter que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) &= y, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = x, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = 1. \end{aligned}$$

En particulier si $X = Z$ on obtient:

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X, X \rangle_t.$$

□

Remarque 1.6.1. Si $X = M$, alors c'est une martingale locale. On sait que $M^2 + \langle M, M \rangle$ est une martingale locale par définition du crochet. Donc la formule précédente montre que cette martingale locale est en faite:

$$M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s.$$

1.7 Variation quadratique: voir [11]

Soient $X = (X_t)_t$ et $Y = (Y_t)_t$ deux martingales locales continues. Pour tout t et toute suite de subdivisions $\pi_n = (0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k(n)}^n = t)$ de $[0, t]$ de pas $|\pi_n| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, on pose

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k(n)} (X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n})(Y_{t_j^n} - Y_{t_{j-1}^n}),$$

où $\langle X, Y \rangle_t$ ou $[X, Y]_t$ est appelé la *covariation quadratique* de X et Y .

On définit ainsi la *variation quadratique* d'une martingale $X = (X_t)_t$ par:

$$\langle X \rangle_t = [X]_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k(n)} (X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n})^2$$

Dans le cas d'un mouvement brownien standard, $\langle B \rangle_t = [B]_t = t$.

1.7.1 Propriétés de la variation quadratique:

Soient M, N et H des martingales locales continues. On a:

1. $\langle M, N \rangle_t = \langle N, M \rangle_t$;
2. $\langle M + H, N \rangle_t = \langle M, N \rangle_t + \langle H, N \rangle_t$;
3. $\langle N + N_0, H \rangle_t = \langle N, H \rangle_t$;
4. Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors: $\langle aM, bN \rangle_t = ab \langle M, N \rangle_t$;
5. Si τ est le temps d'arrêt, alors: $\langle M^\tau, N^\tau \rangle_t = \langle M, N \rangle_{\tau \wedge t}$.

1.8 Équation différentielle stochastique (EDS): voir [11]

Définition 1

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme intégrale :

Cas homogène

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t r^i(X_s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(X_s)dB_s^j,$$

Cas non homogène

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t r^i(s, X_s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(s, X_s)dB_s^j,$$

où $i = 1, \dots, m$, $B = (B^1, \dots, B^n)$ est un mouvement brownien de dimension n , et l'application $\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x))$ est une matrice $n \times m$. Ainsi $X = (X^1, \dots, X^m)$, $B = (B^1, \dots, B^n)$ et $r = (r^1, \dots, r^m)$ sont respectivement les matrices $m \times 1$, $n \times 1$ et $m \times 1$. On peut alors écrire l'équation vectorielle:

$$X_t = X_0 + \int_0^t r(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

ou sous la forme différentielle:

l'application suivante est mesurable:

$$\begin{cases} dX_t = r(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x, \end{cases}$$

telle que $r : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelé drift et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ est appelé terme de diffusion (sont mesurables).

1.8.1 Solutions forte et faible:

Définition 2

Étant donnés $B = (B_t)$ un $\mathcal{F}_t$ -Mouvement Brownien, Y un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$ indépendant de B , r et σ des fonctions mesurables localement bornées.

On appelle **solution forte de l'EDS homogène**

$$X_t = Y + \int_0^t r(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \quad (1.8.1)$$

ou **de l'EDS non homogène**

$$X_t = Y + \int_0^t r(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad (1.8.2)$$

le triplet $(X, B, \mathcal{F})$ où

1. X est $\mathcal{F}_t^{Y,B}$ -adaptée, $\mathcal{F}_t^{Y,B}$ est la filtration brownienne de B augmentée de la tribu engendrée par Y ;
2. (X, B) vérifie (1.8.1) ou (1.8.2).

Définition 3

Étant donnés r et σ des fonctions mesurables localement bornées. On appelle solution faible de l'EDS (1.8.1) ou (1.8.2) la donnée d'un triplet (X, B) , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_t)$ où:

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, et $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration de cet espace.
2. B est un mouvement brownien, tel que (B_t) est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)$.
3. (X_t) est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$.
4. (X, B) vérifie (1.8.1) ou (1.8.2).

1.8.2 Existence et unicité de la solution forte

On va donner un critère d'existence et d'unicité pour les solutions (fortes) de (1.8.1) ou (1.8.2).

Théorème 1 (Existence et unicité: cas homogène)

On suppose que les coefficients de (1.8.1) vérifient: pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$ il existe $K < \infty$ tel que

1. Condition de Lipschitz

$$|r_i(x) - r_i(y)| + |\sigma_{i,j}(x) - \sigma_{i,j}(y)| \leq K \|x - y\|.$$

2. Croissance linéaire

$$|r_i(x)| + |\sigma_{i,j}(x)| \leq K(1 + \|x\|)$$

alors l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t r(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s$$

admet une solution forte, unique trajectoriellement.

Théorème 2 (Existence et unicité: cas non homogène)

On suppose que les coefficients de (1.8.2) vérifient: pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $0 < T < \infty$, $\exists K_T > 0$, $\forall t \in [0, T]$,

$$\max(|r_i(t, 0)|; |\sigma_{i,j}(t, 0)|) \leq K_T$$

1. Condition de Lipschitz

$$|r_i(t, x) - r_i(t, y)| + |\sigma_{i,j}(t, x) - \sigma_{i,j}(t, y)| \leq K_T \|x - y\|.$$

2. Croissance linéaire

$$|r_i(t, x)| + |\sigma_{i,j}(t, x)| \leq K_T(1 + \|x\|)$$

alors l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t r(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

admet une solution forte, unique trajectoriellement.

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte, nous aurons besoin d'un lemme qui joue un rôle très important dans l'EDS:

Lemme 1.8.1 (de Gronwall (1877-1932)). Soit f une fonction borélienne telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$f(t) \leq \lambda(t) + \alpha \int_0^t f(s) ds$$

où $\lambda(\cdot)$ est une fonction intégrable sur $[0, t]$ et $\alpha \geq 0$.

Alors $\forall t \in [0, T]$

$$f(t) \leq \lambda(t) + \alpha \int_0^t \lambda(s) \exp(\alpha(t-s)) ds.$$

En particulier si $\lambda(\cdot) \equiv \lambda$ est constante $\lambda(\cdot) \equiv \lambda$ est constante

$$f(t) \leq \lambda(1 + \exp(\alpha t)).$$

Proof. voir [11]

□

1.8.3 Générateur d'une diffusion: voir [11]

Diffusion homogène:

Soit l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = h(X_t)dt + g(X_t)dB_t \\ X_0 = x, \end{cases} \quad (1.8.3)$$

où h et g vérifient les conditions habituelles d'existence et d'unicité.

Définition 4

A l'EDS (1.8.3) on associe l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L} : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$$

défini par:

$$\mathcal{L}v(x) := h(x)v'(x) + \frac{1}{2}g^2(x)v''(x)$$

pour tout $v \in C^2(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. $\mathcal{L}$ est appelé générateur de la diffusion homogène $(X_t)_{t \in [0, T]}$ solution de (1.8.3).

Exemple 1.8.1. Black et Scholles: Le générateur associé à la diffusion solution de

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t$$

avec $X_0 = x_0$ est donné par:

$$\mathcal{L}v(x) = rxv'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''(x)$$

pour tout $v \in C^2(\mathbb{R})$.

Proposition 1

Le générateur $\mathcal{L}$ est caractérisé par $(X_t)_{t \in [0, T]}$. De plus si $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est solution de (1.8.3).

1. Pour tout $v \in C^2(\mathbb{R})$,

$$v(X_t) - \int_0^t \mathcal{L}v(X_s) ds$$

est une martingale locale.

2. Pour tout $v \in C^2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1}{t} (v(X_t) - v(x_0)) \right] = \mathcal{L}v(x_0)$$

- 3.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1}{t} (X_t - x_0) \right] = h(x_0) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1}{t} (X_t - x_0)^2 \right] = g^2(x_0)$$

Proof. voir [11]

□

Diffusion non homogène:

Pour la diffusion non homogène, on a des résultats similaires

Définition 5

Soit $t > 0$ fixé. A l'EDS (1.8.2) on associe l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_t : C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \rightarrow C^{0,0}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ défini par:

$$\mathcal{L}_t v(t, x) := h(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} g^2(t, x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)$$

pour tout $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. La famille d'opérateur $(\mathcal{L}_t)_{t \in [0, T]}$ est appelé générateur de la diffusion $(X_t)_{t \in [0, T]}$ solution de (1.8.2).

On énonce de la même manière que la **proposition 1**.

Proposition 2

La générateur $(\mathcal{L}_t)_{t \in [0, T]}$ caractérise la diffusion $(X_t)_{t \in [0, T]}$. De plus si $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est solution de (1.8.2) et $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ alors

$$M_t = v(t, x) - \int_0^t \left[\frac{\partial v}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{L}_s v(s, X_s) \right] ds$$

est une martingale locale.

Remarque 1.8.1. 1. Si on suppose $v \in C^{1,2}$ à dérivée en x bornée alors M_t est une martingale.

2. Si l'on choisit v de façon à ce que $\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}_t v \equiv 0$ on obtient que $v(t, X_t)$ est une martingale (locale)

Théorème 1 (Formule de Feynman-Kac)

Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable à support compact, et soit $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée inférieurement.

La fonction

$$q(t, x) = \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^t u(X_s) ds} \Phi(X_t) \right]$$

satisfait le problème aux valeurs initiales

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t}(t, x) &= (\mathcal{L}q)(t, x) - \Phi(x)u(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ q(0, x) &= \Phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

1.9 Théorème de Girsanov: voir [17, 28]**Définition 1**

Deux mesures de probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ construites sur le même espace probablisable $(\Omega, \mathcal{F})$ sont dites équivalentes si elles ont le même ensemble d'événements impossible, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(H) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(H) = 0, \quad H \in \mathcal{F}.$$

Théorème 2 (Théorème de Radon-Nikodym:)

Étant donné deux mesures de probabilité équivalentes $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ construites sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives telle que

$$\mathbb{Q}(H) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z\mathbf{1}_H).$$

Cette variable aléatoire Z est souvent notée $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Théorème 3 (Théorème de Cameron-Martin-Girsanov:)

Soit $\lambda = \{\lambda(t) : t \in [0, T]\}$, un processus $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible tel que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left\{\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \lambda_t^2 dt\right)\right\} < \infty.$$

Il existe une mesure $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que:

1. $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$.
2. $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \lambda_t dB_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda_t^2 dt\right)$.
3. Le processus $B^{\mathbb{Q}} = \{B_t^{\mathbb{Q}} : t \in [0, T]\}$ défini par

$$B_t^{\mathbb{Q}} = B_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \lambda_s ds$$

est un $((\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{Q})$ -mouvement brownien.

Remarque 1.9.1. La condition $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left\{\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \lambda_t^2 dt\right)\right\} < \infty$ est une condition suffisante mais non nécessaire. Elle est connue sous l'appellation **de condition de Novikov**.

Généralités sur les Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSRs) et théorie du contrôle optimal stochastique

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'équation différentielle stochastique rétrograde qui sera utilisée dans la suite de ce mémoire.

2.1 Généralités sur les Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ un mouvement Brownien standard n -dimensionnel défini sur cet espace. On notera $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ la filtration naturelle de B .

Dans cette partie on travaillera sur deux espaces de processus:

- $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^m)$ est l'espace vectoriel formé par les processus Y progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, tels que

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^m)}^2 = \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \right) < \infty.$$

- $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n})$ est l'espace vectoriel formé par les processus Z , progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n}$, tel que

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt \right] < \infty,$$

T est en horizon fini.

2.1.1 Existence et unicité de solution de l'EDSR voir [21]

Définition 1

L'Équation Différentielle Stochastique Rétrograde (EDSR) est une équation qui s'écrit sous la forme différentielle:

$$dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad t \in [0, T]$$

$$Y_T = \xi,$$

ou sous la forme d'intégrale:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad t \in [0, T]$$

$$Y_T = \xi, \quad (3.0.1)$$

où $(B_t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement brownien n -dimensionnels défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$; ξ est la condition terminale, qui est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ -mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et d'autre part, le générateur f , fonction aléatoire défini sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m \times n})$, $\mathcal{P}$ désignant la tribu des événements prévisibles.

Définition 2

Un couple (ξ, f) est appelé **condition terminale** et **générateur**, si les conditions suivantes sont satisfaites:

- $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T; \mathbb{R}^m)$;
- $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tel que:
 1. $f(t, \cdot, y, z)$ noté pour simplifier $f(t, y, z)$ est progressif pour tous y, z ;
 2. $f(t, 0, 0) \in \mathcal{M}^2$, c'est-à-dire

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 dt \right] < \infty;$$

3. f satisfait une condition de Lipschitz uniforme: il existe une constante positive C_f telle que pour tous y, y', z, z' ,

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq C_f(|y - y'| + |z - z'|).$$

Définition 3

Une solution de l'EDSR (3.0.1) est un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t \in [0, T]}$ vérifiant :

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{m \times n}$;
2. $\mathbb{P}.p.s.$, $\int_0^T \{|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\} ds < \infty$;
3. $\mathbb{P}.p.s.$, on a:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad t \in [0, T]$$

Remarque 2.1.1. L'intégrale de l'équation (3.0.1) étant bien définie et Y est une semi martingale, et comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est déterministe.

Lemme 2.1.1. Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T; \mathbb{R}^m)$ et $f \in \mathcal{M}^2$. L'EDSR (3.0.1) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$.

Proof. Ce lemme est un cas particulier du **théorème 5.2.1** dans [13]. Nous omettons la preuve. $\square$

Proposition 1

Soit (Y, Z) le couple de la solution de l'EDSR (3.0.1) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T . On suppose que ξ est $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable et que $f(t, y, z) = 0$ dès que $t \geq \tau$. Alors

$$Y_t = Y_{t \wedge \tau} \text{ et } Z_t = 0, \text{ si } t \geq \tau.$$

Proof. On a $\mathbb{P}.p.s.$,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad t \in [0, T]$$

et donc, pour $t = \tau$, comme $f(t, y, z) = 0$ dès que $t \geq \tau$,

$$\begin{aligned} Y_\tau &= \xi + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_\tau^T Z_s dB_s \\ &= \xi - \int_\tau^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

Il vient alors que $Y_\tau = \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_\tau] = \xi$ et par la suite $\int_\tau^T Z_s dB_s = 0$ d'où on tire que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T \|Z_s\|^2 ds\right] = 0,$$

et finalement que $Z_s \mathbf{1}_{s \geq \tau} = 0$.

Il s'en suit immédiatement que si $t \geq \tau$ alors $Y_t = Y_\tau$, puisque par hypothèse,

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_\tau^T Z_s dB_s = Y_t + 0 + 0$$

□

Notons que dans le cas où ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle:

$$dY_t = f(t, Y_t, 0)dt, \quad Y_T = \xi$$

2.1.2 EDSR linéaires voir [21]

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au cas particulier l'étude des EDSR linéaires pour lesquels nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

Définition 4

On suppose que $C_f = 1$ ce qui implique que Y est un réel et Z est une matrice de taille $1 \times n$. On considère une EDSR unidimensionnelle de la forme:

$$dY_t = (G_t Y_t + Z_t H_t + K_t)dt - Z_t dB_t, \quad Y_T = \xi \quad (3.0.2),$$

où G, H sont des processus à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$, progressivement mesurable et borné et soient $(K_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ -mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles. Ainsi l'EDSR (3.0.2) est appelée l'EDSR linéaire.

Proposition 2

L'EDSR (3.0.2) admet une unique solution qui vérifie:

$$\forall t \in [0, T], \quad \Gamma_t Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E} \left(\Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s K_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right), \quad (3.0.3)$$

avec, pour tout $t \in [0, T]$;

$$\Gamma_t = e^{\int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |H_s|^2 ds + \int_0^t G_s ds}.$$

Proof. voir [21]

On remarque que le processus Γ vérifie:

$$d\Gamma_t = \Gamma_t (G_t dt + H_t dB_t), \quad \Gamma_0 = 1.$$

D'autre part comme G est borné, l'inégalité de Doob montre que Γ appartient à $\mathcal{S}^2$. En suite, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y, Z) à l'EDSR linéaire; en posant $f(t, y, z) = G_t y + H_t z + K_t$, et de vérifier que les conditions de la **définition 2** sont satisfaites. D'une part, par la formule d'Itô à $\Gamma_t Y_t$, on obtient:

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle \Gamma, Y \rangle_t \\ &= -\Gamma_t K_t dt + \Gamma_t Z_t dB_t + \Gamma_t Y_t H_t dB_t, \end{aligned}$$

ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s K_s ds$ est une martingale locale qui en fait fait une martingale car $(K_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$. Par la suite,

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s K_s ds = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E} \left(\Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s K_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

□

2.2 Théorie du contrôle optimal stochastique:

2.2.1 Contrôle optimal:

Dans cette partie, nous rappelons quelques définitions que nous allons utiliser dans le chapitre suivant.

Définition 1

Le **contrôle optimal** est un domaine d'optimisation qui consiste à la recherche de stratégie qui minimise ou maximise une fonction objective (fonction de coût) J sur l'ensemble du contrôle admissible.

Définition 2

Le **contrôle admissible** est tout processus $(v_t)_{t \in [0, T]}$ mesurable et $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeurs dans un borélien $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

On note: $\{V_{ad} = v : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \text{ tel que } v \text{ est mesurable et } \mathcal{F}_t\text{-adapté}\}$

2.2.2 Le contrôle stochastique:

Le contrôle stochastique est caractérisé par:

- **L'état du système:** décrit l'ensemble des variables qui caractérisent le système à tout instant qui peut être discret ou continu, et de l'intervalle de variation du temps peut être fini ou infini.

Exemple 2.2.1. : Dans un modèle économique, *l'état* pourrait représenter les niveaux de production, des stock, ou d'autres indicateurs économiques qui changent au fil du temps en raison de la demande de coût, etc.

- **Contrôle:** La dynamique X_t de l'état du système est influencée par un contrôle qui peut être modéliser dans le cas déterministe par une fonction mesurable v_t , et dans le cas stochastique par un processus (v_t) , dont la valeur peut être décidée, c'est-à-dire un contrôle est un processus (v_t) adapté par rapport à certaine filtration et prend ses valeurs dans un espace de contrôle V .
- **Critère de performance:** L'objectif de ce critère est de minimiser ou maximiser sur les contrôles une fonctionnelle $J(x, v)$ appelée fonction de coût.

Dans le cas stochastique la fonctionnelle J peut prendre les formes :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, x(t), v(t))dt + g(x(T))\right],$$

en horizon fini $T < \infty$.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t, x(t), v(t))dt\right],$$

en horizon infini.

où $\mathbb{E}$ est l'espérance mathématique définie en $\mathbb{P}$, f est la fonction de coût intégral, g est le coût final et α est un coefficient d'actualisation, et la fonction valeur est définie comme suit:

$$U = \inf_v J$$

Prise en compte de l'information partielle dans les stratégies optimales d'investissement, de consommation et d'assurance dans le problème du consommateur

3.1 Présentation du marché financier, et du marché des assurances

3.1.1 Présentation du marché financier

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W := \{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et $W(t) = (W_t^k; k = 1, \dots, (n + m))$ un mouvement Brownien standard $n + m$ - dimensionnel défini sur cet espace.

On considère un marché financier composé d'un actif sans risque, qu'on appelle *obligation* et de m actifs risqués appelés *actions*. On suppose que le processus de prix d'un actif sans risque K_t^0 et le processus de prix des actifs risqués $K := (K_t^1, \dots, K_t^m)^*$ sont régis par les équations suivantes :

$$dK_t^0 = K_t^0 r(t) dt, \quad K_0^0 = k^0 \quad (3.1)$$

$$dK_t^i = K_t^i (\alpha + HV_t)^i dt + K_t^i \sum_{k=1}^{n+m} \Sigma_k^i dW_t^k, \quad K_0^i = K^i \quad (3.2)$$

$$dV_t = (b + NV_t) dt + \Pi dW_t; \quad V_0 = v \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Où

$r(t)$ est le taux d'intérêt de l'actif sans risque qui est une fonction déterministe de t et positif;

$V(t)$ est le processus stochastique n -dimensionnel et qui affecte les taux d'intérêts sans actifs $r(t)$, le drift $(\alpha + HV_t)$ de prix $K(t)$ et la matrice de volatilité Σ de prix $K(t)$;

Σ, Π sont respectivement des fonctions à valeurs matricielles respectivement dans $m \times (n + m)$, $n \times (n + m)$;

et $\alpha \in \mathbb{R}^m, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad H \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad N \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dans ce mémoire, on désigne par Σ la matrice de covariance des actifs risqués (Σ_k^i) , avec $i = 1, \dots, m$; et $k = 1, \dots, (n + m)$.

On a les hypothèses suivantes:

- $(r(t))_{t \in [0, T]}$ est un processus $\mathbb{F}^W$ -adapté et positif.
- On note

$$(\mathbf{L}) : \Sigma \Sigma^* > 0,$$

où $(.)^*$ désigne la transposée d'un vecteur ou d'une matrice et

$$\mathcal{G}_t = \sigma(K(u); u \leq t).$$

- $(V_t)_{t \in [0, T]}$ est un processus $\mathbb{F}^W$ -adapté et positif.

Comme on a exactement m actifs risqués dirigés par $n + m$ mouvements browniens indépendants alors le marché est incomplet.

Proof. La preuve est similaire à celle dans [13] que nous omettons. □

3.1.2 Présentation du marché des assurances

Soit $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que le salarié est en vie à $t = 0$ et que sa durée de vie est une variable aléatoire non négative τ définie sur cet espace. Soit $\eta(t)$ la force de mortalité à l'instant t , $\mathbb{F}$ -adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et définie par:

$$\eta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}\{t \leq \tau < t + \Delta t\}}{\Delta t}.$$

La probabilité de survie du salarié est définie par:

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &:= \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{G}_t) \\ &= e^{-\int_0^t \eta(s) ds}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La densité de probabilité de survie de l'état de santé du salarié est:

$$f(t) = \eta(t) e^{-\int_0^t \eta(s) ds}. \quad (3.5)$$

Proof. On a:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}.$$

Or

$$\begin{aligned}\bar{F}(t) &:= \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{G}_t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\tau \leq t | \mathcal{G}_t) \\ &= 1 - F(t),\end{aligned}$$

alors

$$F(t) = 1 - \bar{F}(t).$$

En dérivant par rapport au temps t , on a alors:

$$\frac{dF(t)}{dt} = -\frac{d\bar{F}(t)}{dt}.$$

Ainsi

$$f(t) = -(-\eta(t))e^{-\int_0^t \eta(s)ds}.$$

D'où

$$f(t) = \eta(t)e^{-\int_0^t \eta(s)ds}.$$

□

On suppose qu'il existe un marché financier et un marché d'assurance où l'assurance temporaire décès est négociée continuellement. Le salarié est donc prêt à payer une prime $\kappa(t)$ à l'instant t pour le contrat d'assurance-vie et que la compagnie d'assurance paiera $\frac{\kappa(t)}{\lambda(t)}$ à son bénéficiaire s'il décède de manière prématuré avant la retraite en T .

On fera **les hypothèses** suivantes:

- $(\lambda(t))_{t \in [0, T]}$ est le processus $\mathbb{F}$ -adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et qui représente le ratio-prime-assurance.
- Le salarié a un revenu continu positif $\mu(t)$ sur la période $[0, \tau \wedge T]$, c'est-à-dire que le revenu prendra fin soit par le décès, soit par la retraite selon la première éventualité. T désigne un point fixe dans le futur que l'on considère comme la date de départ à la retraite du salarié et τ est une variable aléatoire représentant la date de décès.
- $X(t) = X^{\xi, \xi, \kappa}(t)$ est la richesse totale du salarié à l'instant t , fonction de la stratégie d'investissement, de consommation et du montant des primes d'assurances.

- $\frac{\kappa(t)}{\lambda(t)}$ est la prestation d'assurance versée par la compagnie d'assurance à son bénéficiaire.
- Si le salarié décède à un instant $t \in [0, T]$, le legs à son bénéficiaire est donné par:

$$i(t) := X(t) + \frac{\kappa(t)}{\lambda(t)}$$

3.2 Présentation du processus de richesse

Définition 1

On définit $\mathcal{H}_T$ l'espace des stratégies d'investissement, de consommation et d'assurance par:

$$\mathcal{H}_T := \left\{ (\zeta(t), \xi(t), \kappa(t))_{t \in [0, T]}, \quad (\zeta(t), \xi(t), \kappa(t)) \text{ est un processus stochastique} \right. \\ \left. \mathcal{G}_t - \text{progressivement mesurable à valeurs dans } \mathbb{R}^m \times [0; \infty[\times \mathbb{R} \text{ tel que} \right. \\ \left. \int_0^T |\zeta(t)|^2 dt < \infty; \int_0^T \xi(t) dt < \infty; \int_0^T |\kappa(t)| dt < \infty \text{ p.s.} \right\}.$$

Effectuons sous les hypothèses du marché:

(S₁) : Les actions peuvent être fractionnées et vendues à tout moment.

(S₂) : Il n'y a ni impôt, ni frais de transaction, ni restriction sur la vente à découvert.

En supposant que le processus de la richesse $(X(t))_{t \in [0, T]}$ du salarié à partir du capital initial x_0 est gouverné par l'EDS:

$$dX^{\zeta, \xi, \kappa}(t) = \left\{ X^{\zeta, \xi, \kappa}(t)r(t) + X^{\zeta, \xi, \kappa}(t)\zeta_t^*(\alpha + HV_t - \mathbf{1}r(t)) - \xi(t) - \kappa(t) + \mu(t) \right\} dt \\ + X^{\zeta, \xi, \kappa}(t)\zeta^*(t)\Sigma dW_t, \quad X^{\zeta, \xi, \kappa}(0) = x_0, \quad \forall t \in [0, \tau \wedge T] \quad (3.6)$$

avec

- $\zeta^i(t)$ la proportion de la richesse du salarié à l'instant t investie dans la i -ème action risquée K^i , $\forall i = 1, \dots, m$; avec $\zeta(t) = (\zeta^1(t), \dots, \zeta^m(t))^*$.
- Le processus $(\kappa(t))_{t \in [0, T]}$ est le taux de paiement de la prime d'assurance et est un $\mathcal{G}_t$ -prévisible c'est-à-dire $(\kappa(t))_{t \in [0, T]}$ est mesurable par rapport à la plus petite σ -algèbre sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ que tous les processus continus et adaptés sont mesurables.

Proof. Pour tout instant t , l'investisseur investit dans ces deux actifs avec une proportion de sa richesse $\zeta(t)$ dans l'actif risqué et donc $1 - \zeta^*(t) \times \mathbf{1}$ dans l'actif sans risque. où $\sum_{i=1}^m \zeta^i(t) \neq 1$ et

$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^*$.

Son processus de richesse évolue selon l'équation:

$$dX^{\zeta, \xi, \kappa}(t) = (1 - \zeta^*(t) \times \mathbf{1}) X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) \frac{dK_t^o}{K_t^o} + X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) \sum_{i=1}^m \zeta^i(t) \frac{dK_t^i}{K_t^i} - \xi(t)dt - \kappa(t)dt + \mu(t)dt.$$

Or d'après (3.1) et (3.2), on a:

$$\begin{aligned} dX^{\zeta, \xi, \kappa}(t) &= (1 - \zeta^*(t) \mathbf{1}) X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) r(t)dt + X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) \sum_{i=1}^m \zeta^i(t) \left((\alpha + HV_t)^i dt + \sum_{k=1}^{n+m} \Sigma_k^i dW_t^k \right) \\ &\quad - \xi(t)dt - \kappa(t)dt + \mu(t)dt \\ &= X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) \left((1 - \zeta^*(t) \mathbf{1}) r(t) + \sum_{i=1}^m \zeta^i(t) (\alpha + HV_t)^i \right) dt \\ &\quad + X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) \sum_{i=1}^m \zeta^i(t) \sum_{k=1}^{n+m} \Sigma_k^i dW_t^k - \xi(t)dt - \kappa(t)dt + \mu(t)dt. \end{aligned}$$

Le portefeuille étant auto-finançant, la variation de la richesse ne dépend que de la variation des prix des actifs risqués et sans risques. Ainsi en passant par la forme matricielle, on obtient

$$\begin{aligned} dX^{\zeta, \xi, \kappa}(t) &= \left\{ X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) r(t) + X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) \zeta_t^* (\alpha + HV_t - \mathbf{1} r(t)) - \xi(t) - \kappa(t) + \mu(t) \right\} dt \\ &\quad + X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) \zeta_t^* \Sigma dW_t, \quad X^{\zeta, \xi, \kappa}(0) = x_0, \quad \forall t \in [0, \tau \wedge T]. \end{aligned}$$

□

3.3 Filtre de Kalman, Processus d'Innovation et le Nouveau processus de richesse

Le filtre de Kalman et le processus d'Innovation sont des outils importants utilisés pour estimer l'état d'un système dynamique en présence d'information partielle. Dans le contexte du problème du consommateur sous information partielle, ces outils permettent de modéliser l'évolution de la richesse du consommateur en tenant compte de l'incertitude et du manque d'information.

3.3.1 Filtre de Kalman et Processus d'Innovation

Soit $(Z_t)_t$ un processus défini par:

$$Z_t^i := \ln K_t^i, \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ avec } Z_t = (Z_t^1, \dots, Z_t^m).$$

On considère l'équation différentielle stochastique:

$$dZ_t = (d + HV_t)dt + \Sigma dW_t \quad (3.7)$$

où Z est sa solution et

$$d = (d^i), \text{ où } d^i = \alpha^i - \frac{1}{2}(\Sigma\Sigma^*)^{ii}.$$

Définition 1

On définit le filtre de Kalman $\hat{V}_t$ de V_t par:

$$\hat{V}_t := \mathbb{E}[V_t | \mathcal{G}_t]$$

et se lit l'estimateur de V_t étant l'information $\mathcal{G}_t$.

Équations du filtre de Kalman: Voir [1]

Équations du filtre de Kalman est un ensemble d'équations récursives qui fournissent une estimation optimale de l'état d'un système dynamique se basant sur une série de mesures bruitées. L'algorithme se divise en deux phases principales: prédiction et mise à jour.

Équation de prédiction:

$$dV_t = (b + NV_t)dt + \Pi dW_t; \quad V_0 = v \in \mathbb{R}^n.$$

Équation d'observation:

$$dK_t^i = K_t^i(\alpha + HV_t)^i dt + K_t^i \sum_{k=1}^{n+m} \Sigma_k^i dW_t^k, \quad K_0^i = k^i.$$

Définition 2

On définit le processus d'innovation I_t par:

$$I_t := \int_0^t (dZ_u - (d + H\hat{V}_u)du). \quad (3.8)$$

Lemme 3.3.1. *Le processus d'innovation I_t est un processus de $\mathcal{G}_t$ -Wiener avec matrice de covariance $\Sigma\Sigma^*$.*

Proof. voir [8]

On applique l'approche de la proposition 1.2.3 [19].

Pour $s \leq t$, nous avons:

$$\mathbb{E}[I_t - I_s | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}\left[Z_t - Z_s - \int_s^t (d + H\hat{V}_u)du | \mathcal{G}_s\right]$$

Or d'après (3.1) :

$$dZ_t = (d + HV_t)dt + \Sigma dW_t$$

donc

$$Z_t = \int_0^t \left((d + HV_u)du + \Sigma dW_u \right)$$

donc

$$Z_t - Z_s = \int_s^t \left((d + HV_u)du + \Sigma dW_u \right)$$

Ainsi, on obtient:

$$\mathbb{E}[I_t - I_s | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \Sigma dW_u + \int_s^t (d + HV_u)du - \int_s^t (d + H\hat{V}_u)du | \mathcal{G}_s\right]$$

donc,

$$\mathbb{E}[I_t - I_s | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_s^t \Sigma dW_u | \mathcal{F}_s\right] + \int_s^t H(V_u - \mathbb{E}[V_u | \mathcal{G}_u])du | \mathcal{G}_s\right].$$

Or

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \Sigma dW_u | \mathcal{F}_s\right] = \int_s^t \Sigma \mathbb{E}[dW_u | \mathcal{F}_s] = 0$$

et

$$\mathbb{E}(V_u - \mathbb{E}[V_u | \mathcal{G}_u]) = \mathbb{E}[V_u] - \mathbb{E}[V_u] = 0$$

D'où

$$\mathbb{E}[I_t - I_s | \mathcal{G}_s] = 0.$$

En utilisant la différentielle stochastique, on obtient:

$$d(I_t - I_s)(I_t - I_s)^* = (I_t - I_s)d(I_t - I_s)^* + d(I_t - I_s)(I_t - I_s)^* + \Sigma \Sigma^* du.$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I_t - I_s)(I_t - I_s)^* | \mathcal{G}_s] &= \int_s^t \Sigma \Sigma^* du \\ &= \Sigma \Sigma^* (t - s). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.2. *Le filtre de Kalman est solution de l'Équation Différentielle Stochastique:*

$$d\hat{V}_t = (b + N\hat{V}_t)dt + \Pi(\Lambda_t)dI_t; \quad \hat{V}_0 = v, \quad (3.9)$$

où

$\Pi(\Lambda_t)$ est défini par:

$$\Pi(\Lambda_t) := (\Lambda_t H^* + \Pi \Sigma^*)(\Sigma \Sigma^*)^{-1} \quad (3.10)$$

et

$$\Lambda_t = \mathbb{E}[(V_t - \hat{V}_t)(V_t - \hat{V}_t)^* | \mathcal{G}_t]$$

est solution de l'équation de Riccati:

$$\dot{\Lambda}_t + (\Lambda_t H^* + \Pi \Sigma^*)(\Sigma \Sigma^*)^{-1}(\Lambda_t H + \Pi^* \Sigma) - \Pi \Pi^* - \Lambda_t N - \Lambda_t N^* = 0, \quad \Lambda_0 = 0, \quad (3.11)$$

avec

$$\dot{\Lambda}_t = \frac{d\Lambda_t}{dt}$$

Proof. Nous allons utiliser l'approche du théorème 22.1.9 dans [25] défini par:

$$\begin{aligned} M_t &:= \hat{V}_t - \hat{V}_0 - \int_0^t \mathbb{E}[b + NV_u | \mathcal{G}_u] du \\ &= \hat{V}_t - v - \int_0^t (b + N \mathbb{E}[V_u | \mathcal{G}_u]) du \\ &= \hat{V}_t - v - \int_0^t (b + N \hat{V}_u) du \quad (3.2.1). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{V}_t - \hat{V}_s | \mathcal{G}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[V_t | \mathcal{G}_t] - \mathbb{E}[V_s | \mathcal{G}_s] | \mathcal{G}_s] \\ &= \mathbb{E}[V_t - V_s | \mathcal{G}_s] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_s^t (b + NV_u) du + \int_s^t \Lambda dW_u | \mathcal{G}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_s^t (b + N \mathbb{E}[V_u | \mathcal{G}_u]) du + \mathbb{E}\left[\int_s^t \Pi dW_u | \mathcal{F}_s\right] | \mathcal{G}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_s^t (b + N \hat{V}_u) du | \mathcal{G}_s\right], \end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \Pi dW_u | \mathcal{F}_s\right] = 0,$$

car $(W_t)_t$ est un mouvement Brownien standard et que M_t est une $\mathcal{G}_t$ -martingale. Cependant, il existe un processus $\theta_t \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$ $\mathcal{G}_t$ -progressivement tel que :

$$M_t := \int_s^t \theta_u d\rho_u$$

où ρ_t est défini par :

$$\rho_t := \Sigma^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} I_t.$$

D'après (3.2.1), on a :

$$\int_s^t \theta_u d\rho_u = \hat{V}_t - v - \int_0^t (b + N\hat{V}_u) du$$

donc,

$$\hat{V}_t = v + \int_0^t (b + N\hat{V}_u) du + \int_s^t \theta_u d\rho_u.$$

Donc

$$d\hat{V}_t = (b + N\hat{V}_t) dt + \theta_t d\rho_t \quad (3.2.2).$$

En utilisant

$$dV_t = (b + NV_t) dt + \Pi dW_t,$$

$$dZ^* = (d + HV_t)^* dt + (\Sigma dW_t)^*.$$

On obtient

$$d(V_t Z_t^*) = dV_t Z_t^* + V_t dZ_t^* + d[V, Z^*]_t.$$

Donc

$$\begin{aligned} d(V_t Z_t^*) &= \left[(b + NV_t) dt + \Pi Z_t^* dW_t \right] Z_t^* \\ &\quad + V_t \left[(d + HV_t)^* dt + (\Sigma dW_t)^* \right] + \Pi \Sigma^* dt. \end{aligned}$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} d(V_t Z_t^*) &= \left\{ (b + NV_t) Z_t^* + V_t (d + HN_t)^* + \Pi \Sigma^* \right\} dt \\ &\quad + \Pi Z_t^* dW_t + V_t (\Sigma dW_t)^*. \end{aligned}$$

Ainsi $d(V_t Z_t^*)$ s'écrit sous la forme :

$$d(V_t Z_t^*) = A_t dt + dB_t.$$

C'est un problème d'optimisation d'investissement et de consommation où

$$A_t := \int_0^t \left\{ (b + NV_u)Z_u^* + V_u(d + HV_u)^* + \Pi\Sigma^* \right\} du$$

$$B_t := \int_0^t \left\{ (\Pi dW_u)Z_u^* + V_u(\Sigma dW_u)^* \right\}$$

Notons que $(B_t)_t$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale locale.

En utilisant le résultat similaire comme dans le lemme(3.1),

$$V_t Z_t - \int_0^t \hat{A}_u du$$

est $\mathcal{G}_t$ -martingale. En d'autres termes, puisque Z_t est $\mathcal{G}_t$ -mesurable,

$$\hat{V}_t Z_t - \int_0^t \hat{A}_u du$$

est une $\mathcal{G}_t$ -martingale (3.2.3).

D'autre part, en utilisant (3.2.2) et en appliquant

$$dZ_t = (d + H\hat{V}_t)^* dt + (\Sigma d\rho_t)^*,$$

on obtient:

$$\hat{V}_t Z_t - \int_0^t \left\{ \hat{V}_u(d + H\hat{V}_u)^* + (b + N\hat{V}_u)Z_u^* + \beta_u \Sigma^* \right\} du \quad (3.2.4)$$

est également $\mathcal{G}_t$ -martingale. Puisque les deux décompositions (3.2.3) et (3.2.4) de la semi martingale $\hat{V}_t Z_t$ doivent être les mêmes.

On a

$$(3.2.3): \hat{V}_t Z_t - \int_0^t \hat{A}_u du$$

or

$$A_t := \int_0^t \left\{ (b + NV_u)Z_u^* + V_u(d + HV_u)^* + \Pi\Sigma^* \right\} du$$

$$= \int_0^t \left\{ bZ_u^* + NV_u Z_u^* V_u d + H^* V_u V_u^* + \Pi\Sigma^* \right\} du$$

alors

$$\hat{A}_t = \int_0^t \left\{ bZ_u^* + N\hat{V}_u Z_u^* + \hat{V}_u d + H^* \widehat{V}_u V_u^* + \Pi\Sigma^* \right\} du$$

Donc en égalisant, on a:

$$(3.2.4) = (3.2.3) \text{ c'est-à-dire}$$

$$\hat{V}_t(d + H\hat{V}_t)^* + (b + N\hat{V}_t)Z_t^* + \theta_t \Sigma^* = bZ_t^* + N\hat{V}_t Z_t^* + \hat{V}_t d + H^* \widehat{V}_t V_t^* + \Pi\Sigma^*$$

En développant membre à membre de cette égalité puis en réduisant, on obtient:

$$\beta_t \Sigma^* + \hat{V}_t d + \hat{V}_t \hat{V}_t^* H^* = \hat{V}_t d + V_t \hat{V}_t^* H^* + \Pi \Sigma^*.$$

Ainsi

$$\theta_t \Sigma^* = \widehat{V_t V_t^*} H^* - \hat{V}_t \hat{V}_t^* H^* + \Pi \Sigma^*$$

c'est-à dire

$$\theta_t \Sigma^* := \Lambda_t H^* + \Pi \Sigma^* \quad (3.2.5)$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= \widehat{V_t V_t^*} H^* - \hat{V}_t \hat{V}_t^* H^* \\ &= \mathbb{E}[(V_t - \hat{V}_t)(V_t - \hat{V}_t)^* | \mathcal{G}_t]. \end{aligned}$$

Il s'en suit, pour (3.2.2) et (3.2.5), on a:

(3.2.2):

$$d\hat{V}_t = (b + N\hat{V}_t)dt + \theta_t d\rho_t$$

or

$$\rho_t := \Sigma^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} I_t.$$

Donc

$$d\hat{V}_t = (b + N\hat{V}_t)dt + \theta_t \Sigma^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} dI_t.$$

Or en (3.2.5), on avait

$$\theta_t \Sigma^* := \Lambda_t H^* + \Pi \Sigma^*.$$

Alors

$$d\hat{V}_t = (b + N\hat{V}_t)dt + (\Lambda_t H^* + \Pi \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} dI_t.$$

Or

$$\Pi(\Lambda_t) := (\Lambda_t H^* + \Pi \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1}.$$

D'où

$$d\hat{V}_t = (b + N\hat{V}_t)dt + \Pi(\Lambda_t) dI_t, \quad \hat{V}_0 = v \quad (3.9).$$

Nous avons également que:

$$\Lambda_t := \mathbb{E}[(V_t - \hat{V}_t)(V_t - \hat{V}_t)^* | \mathcal{G}_t]. \quad (3.2.6)$$

Puisque V_t et $\hat{V}_t$ sont des processus gaussiens, cependant $V_t - \hat{V}_t$ est indépendant de $\mathcal{G}_t$. En utilisant,

$$\begin{cases} (3.3) : dV_t = (b + NV_t)dt + \Pi dW_t; \\ (3.9) : d\hat{V}_t = (b + N\hat{V}_t)dt + \Pi(\Lambda_t)dI_t \\ (3.12) : dI_t = H(V_t - \hat{V}_t)dt + \Sigma dW_t, \end{cases}$$

nous aurons:

$$d(V_t - \hat{V}_t) = (N - \Pi(\Lambda_t))(V_t - \hat{V}_t)dt + (\Pi - \Pi(\Lambda_t)\Sigma)dW_t.$$

En effet, on a:

$$d\hat{V}_t = (b + N\hat{V}_t)dt + \Pi(\Lambda_t)(H(V_t - \hat{V}_t)dt + \Sigma dW_t).$$

Ce qui entraîne alors que:

$$dV_t - d\hat{V}_t = (b + NV_t)dt + \Pi dW_t - (b + N\hat{V}_t)dt - \Pi(\Lambda_t)(H(V_t - \hat{V}_t)dt + \Sigma dW_t),$$

donc

$$d(V_t - \hat{V}_t) = N(V_t - \hat{V}_t)dt + \Pi dW_t - \Pi(\Lambda_t)\Sigma dW_t - \Pi(\Lambda_t)H(V_t - \hat{V}_t)dt.$$

D'où

$$d(V_t - \hat{V}_t) = (N - \Pi(\Lambda_t)H)(V_t - \hat{V}_t)dt + (\Pi - \Pi(\Lambda_t)\Sigma)dW_t.$$

Il s'en suit,

$$\begin{aligned} d(V_t - \hat{V}_t)(V_t - \hat{V}_t)^* &= (\Pi - \Pi(\Lambda_t)\Sigma)(\Pi - \Pi(\Lambda_t)\Sigma)^* dt \\ &\quad + (V_t - \hat{V}_t) \left\{ (N - \Pi(\Lambda_t)H)(V_t - \hat{V}_t)dt + (\Pi - \Pi(\Lambda_t)\Sigma)dW_t \right\}^* \\ &\quad + \left\{ (N - \Pi(\Lambda_t)H)(V_t - \hat{V}_t)dt + (\Pi - \Pi(\Lambda_t)\Sigma)dW_t \right\} (V_t - \hat{V}_t)^*. \end{aligned}$$

En intégrant ce résultat sur $[0, t]$ et en prenant l'espérance des deux côtés, on obtient:

$$\begin{aligned} (V_t - \hat{V}_t)(V_t - \hat{V}_t)^* &= \int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u))(\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)^* du + \int_0^t (V - \Pi(\Lambda_u)H)^*(V_u - \hat{V}_u)(V_u - \hat{V}_u)^* du \\ &\quad + \int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)^*(V_u - \hat{V}_u)dW_u^* + \int_0^t (N - \Pi(\Lambda_u)H)(V_u - \hat{V}_u)(V_u - \hat{V}_u)^* du \\ &\quad + \int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)(V_u - \hat{V}_u)^* dW_u. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Lambda_t &= \mathbb{E}[(V_t - \hat{V}_t)(V_t - \hat{V}_t)^* | \mathcal{G}_t] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u))(\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)^* du + \int_0^t (N - \Pi(\Lambda_u)H)^*(V_u - \hat{V}_u)(V_u - \hat{V}_u)^* du \right. \\
&\quad + \int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)^*(V_u - \hat{V}_u)dW_u^* + \int_0^t (N - \Pi(\Lambda_u)H)(V_u - \hat{V}_u)(V_u - \hat{V}_u)^* du \\
&\quad \left. + \int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)(V_u - \hat{V}_u)^* dW_u | \mathcal{G}_t \right].
\end{aligned}$$

Comme l'espérance est linéaire, alors:

$$\begin{aligned}
\Lambda_t &= \int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u))(\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)^* du + \int_0^t (N - \Pi(\Lambda_u)H)^* \mathbb{E}[(V_u - \hat{V}_u)(V_u - \hat{V}_u)^* | \mathcal{G}_t] du \\
&\quad + \int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)^* \mathbb{E}[(V_u - \mathbb{E}[V_u | \mathcal{G}_u])dW_u^* | \mathcal{G}_t] + \int_0^t (N - \Pi(\Lambda_u)H) \mathbb{E}[(V_u - \hat{V}_u)(V_u - \hat{V}_u)^* | \mathcal{G}_t] du \\
&\quad + \int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma) \mathbb{E}[(V_u - \mathbb{E}[V_u | \mathcal{G}_u])^* dW_u | \mathcal{G}_t].
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{E}[(V_u - \mathbb{E}[V_u | \mathcal{G}_u])dW_u^* | \mathcal{G}_t] = 0$$

et

$$\mathbb{E}[(V_t - \hat{V}_t)(V_t - \hat{V}_t)^* | \mathcal{G}_t] = \Lambda_t.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Lambda_t &= \int_0^t (\Pi - \Pi(\Lambda_u))(\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)^* du \\
&\quad + \int_0^t (N - \Pi(\Lambda_u)H)^* \Lambda_u du \\
&\quad + \int_0^t (N - \Pi(\Lambda_u)H) \Lambda_u du.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\Lambda_t = \int_0^t \{ (\Pi - \Pi(\Lambda_u))(\Pi - \Pi(\Lambda_u)\Sigma)^* + (N - \Pi(\Lambda_u)H)^* \Lambda_u + (N - \Pi(\Lambda_u)H) \Lambda_u \} du.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\Lambda_t &= \int_0^t \{ \Pi\Pi^* - \Pi\Pi(\Lambda_u)^*\Sigma^* - \Pi^*\Pi(\Lambda_u)\Sigma + \Pi(\Lambda_u)\Pi(\Lambda_u)^*\Sigma\Sigma^* + \Lambda_u N^* - \Pi(\Lambda_u)^* \Lambda_u H^* + \Lambda_u N \\
&\quad - \Pi(\Lambda_u)H \Lambda_u \} du.
\end{aligned}$$

Or,

$$\Pi(\Lambda_u) = (\Lambda_u H^* + \Pi \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1}$$

alors,

$$\Pi(\Lambda_u) \Pi(\Lambda_u)^* \Sigma \Sigma^* = \Pi(\Lambda_u)^* (\Lambda_u H^* + \Pi \Sigma^*).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Lambda_t = \int_0^t & \left\{ \Pi \Pi^* - \Pi(\Lambda_u) \Pi \Sigma^* - \Pi(\Lambda_u) \Pi^* \Sigma + \Pi(\Lambda_u) (\Lambda_u H^* + \Pi \Sigma^*) + \Lambda_u N^* \right. \\ & \left. + \Lambda_u N - \Pi(\Lambda_u)^* H^* \Pi_u - \Pi(\Lambda_u) \Lambda_u H \right\} du \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \Lambda_t = \int_0^t & \left\{ \Pi \Pi^* + \Pi(\Lambda_u) (-\Lambda \Sigma^* + \Lambda_u H^* + \Pi \Sigma^* - \Lambda_u H^*) \right. \\ & \left. + \Lambda_u N^* + \Pi_u N - \Pi(\Lambda_u) (\Pi^* \Sigma + \Lambda_u H) \right\} du. \text{Donc} \\ \Lambda_t = \int_0^t & \left\{ -\Pi(\Lambda_u) (\Lambda_u H + \Pi^* \Sigma) + \Pi \Pi^* + \Lambda_u N^* + \Lambda_u N \right\} du. \end{aligned}$$

Comme

$$\Pi(\Lambda_u) := (\Lambda_u H^* + \Pi \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Lambda_t = \int_0^t & \left\{ -(\Lambda_u H^* + \Pi \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (\Lambda_u H + \Pi^* \Sigma) \right. \\ & \left. + \Pi \Pi^* + \Lambda_u N + \Lambda_u N^* \right\} du. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à t, on a:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_t &= \frac{d\Lambda_t}{dt} \\ &= -(\Lambda_t H^* + \Pi \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (\Lambda_t H + \Pi^* \Sigma) \\ &\quad + \Pi \Pi^* + \Lambda_t N + \Lambda_t N^*. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient finalement

$$\dot{\Lambda}_t + (\Lambda_t H^* + \Pi \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (\Lambda_t H + \Pi^* \Sigma) - \Pi \Pi^* - \Lambda_t N - \Lambda_t N^* = 0.$$

Donc Λ_t est solution de l'équation de Riccati:

$$\dot{\Lambda}_t + (\Lambda_t H^* + \Pi \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (\Lambda_t H + \Pi^* \Sigma) - \Pi \Pi^* - \Lambda_t N - \Lambda_t N^* = 0, \quad \Lambda_0 = 0. \quad (3.11)$$

□

Démonstration de (3.12): La dérivée du processus d'innovation est:

$$dI_t = H(V_t - \hat{V}_t) + \Sigma dW_t.$$

Par définition du processus d'innovation, on a:

$$I_t = \int_0^t \{dZ_u - (d + H\hat{V}_u)du\}.$$

En dérivant par rapport au temps t , on a:

$$dI_t = dZ_t - (d + H\hat{V}_t)dt.$$

Or d'après (3.7),

$$dZ_t = (d + V_t)dt + \Sigma dW_t.$$

En remplaçant par son expression, on obtient donc:

$$\begin{aligned} dI_t &= (d + HV_t)dt + \Sigma dW_t - (d + H\hat{V}_t)dt \\ &= H(V_t - \hat{V}_t)dt + \Sigma dW_t. \end{aligned}$$

3.3.2 Nouveau processus de la richesse

Sous les hypothèses du marché et les deux lemmes, le portefeuille auto-finançant modélisé par l'équation différentielle stochastique (3.6) devient:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \{X(t)r(t) + X(t)\zeta_t^*(\alpha + H\hat{V}_t - r(t)\mathbf{1}) - \xi(t) - \kappa(t) + \mu(t)\}dt \\ &\quad + X(t)\zeta_t^*dI_t, \quad X(0) = x_0, \quad \forall t \in [0, \tau \wedge T]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Proof. D'après (3.12), en tirant ΣdW_t et en multipliant membre à membre de l'égalité par ζ_t^* , on obtient:

$$\zeta_t^* \Sigma dW_t = -\zeta_t^* H(V_t - \hat{V}_t)dt + \zeta_t^* dI_t.$$

En injectant $\zeta_t^* \Sigma dW_t$ dans (3.6), on obtient donc:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \{X(t)r(t) + X(t)\zeta_t^*(\alpha + H\hat{V}_t - r(t)\mathbf{1}) - \xi(t) - \kappa(t) + \mu(t)\}dt \\ &\quad + X(t)\zeta_t^*dI_t, \quad X(0) = x_0, \quad \forall t \in [0, \tau \wedge T]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

□

3.4 Modélisation du problème du consommateur sous l'information partielle

Dans cette partie, nous allons modéliser le problème du consommateur dans un contexte d'information incomplète. Nous allons explorer comment un salarié prend des décisions optimales d'investissement et d'assurance face à cette manque d'information.

3.4.1 Formulation du problème

On considère un problème d'optimisation d'investissement, de consommation et d'assurance dans lequel le salarié cherche à maximiser l'espérance de l'utilité de sa consommation sur $[0, \tau \wedge T]$, de l'héritage qu'il laissera s'il décède avant l'horizon T , et de sa richesse terminale $X(T)$ s'il est vivant à l'instant T . On suppose que le taux d'actualisation $\nu(t)$ (est une fonction déterministe à valeurs dans $\mathbb{R}^+$) est $\mathcal{G}_t$ -mesurable.

On considère à nouveau le problème d'optimisation de l'investissement, de consommation et d'assurance dans lequel le salarié cherche à maximiser sa fonctionnelle:

$$(\mathcal{B}) : \quad \Psi(0, x, v) := \sup_{(\zeta, \xi, \kappa) \in \mathcal{A}_T} J(0, x, v; \zeta, \xi, \kappa),$$

où $\mathcal{A}_T$ est l'espace des stratégies admissibles (ζ, ξ, κ) , et

$$J(0, x, v; \zeta, \xi, \kappa) := \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau} e^{-\int_0^t \nu(u) du} P(\xi(s)) ds + e^{-\int_0^\tau \nu(u) du} P(i(\tau)) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right. \\ \left. + e^{-\int_0^T \nu(t) dt} P(X^{\zeta, \xi, \kappa}(T)) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right].$$

Cette fonctionnelle est équivalente à maximiser la fonction:

$$J(x, v; \zeta, \xi, \kappa; T) := \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\int_0^t (\nu(s) + \eta(s)) ds} \{P(\xi(t)) + \eta(t)P(i(t))\} dt \right. \\ \left. + e^{-\int_0^T (\nu(t) + \eta(t)) dt} P(X^{\zeta, \xi, \kappa}(T)) \right]. \quad (3.14)$$

Proof. On a:

$$J(x, v; \zeta, \xi, \kappa; T) := \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau} e^{-\int_0^t \nu(u) du} P(\xi(s)) ds + e^{-\int_0^\tau \nu(u) du} P(i(\tau)) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right. \\ \left. + e^{-\int_0^T \nu(t) dt} P(X^{\zeta, \xi, \kappa}(T)) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right].$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left\{\int_0^{T \wedge \tau} e^{-\int_0^s v(u)du} P(\xi(s))ds\right\}|\mathcal{G}_T\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left\{\int_0^T e^{-\int_0^s v(u)du} P(\xi(s))\mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}}ds\right\}|\mathcal{G}_T\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^s v(u)du} P(\xi(s))\mathbb{E}\{\mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}}|\mathcal{G}_T\}ds\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^s v(u)du} P(\xi(s))\mathbb{P}\{s \leq \tau|\mathcal{G}_T\}ds\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^s v(u)du} P(\xi(s))\bar{F}(s)ds\right]; \quad (1*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^\tau v(u)du} P(i(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}|\mathcal{G}_T\right] &= \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^s v(u)du} P(i(s))\mathbf{1}_{\{s \leq T\}}|\mathcal{G}_T\right]f(s)ds \\
 &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\int_0^s v(u)du} P(i(s))\mathbf{1}_{\{s \leq T\}}f(s)ds|\mathcal{G}_T\right] \\
 &= \int_0^T e^{-\int_0^s v(u)du} P(i(s))f(s)ds, \quad (2*)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T v(u)du} P(X^{\zeta,\xi,\kappa}(T))\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}|\mathcal{G}_T\right] &= e^{-\int_0^T v(u)du} P(X^{\zeta,\xi,\kappa}(T))\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}|\mathcal{G}_T] \\
 &= e^{-\int_0^T v(u)du} P(X^{\zeta,\xi,\kappa}(T))\bar{F}(T). \quad (3*)
 \end{aligned}$$

En sommant (1*), (2*) et (3*), on obtient:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^s v(u)du} P(\xi(s))\bar{F}(s)ds + \int_0^T e^{-\int_0^s v(u)du} P(i(s))f(s)ds + e^{-\int_0^T v(u)du} P(X^{\zeta,\xi,\kappa}(T))\bar{F}(T)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^s v(u)du} (\bar{F}(s)P(\xi(s)) + f(s)P(i(s)))ds + e^{-\int_0^T v(u)du} P(X^{\zeta,\xi,\kappa}(T))\bar{F}(T)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\int_0^s v(s)+\eta(s)ds} \{P(\xi(t)) + \eta(t)P(i(t))\}dt + e^{-\int_0^T v(t)+\eta(t)dt} P(X^{\zeta,\xi,\kappa}(T))\right]. \quad \diamond
 \end{aligned}$$

□

Définition 1

L'ensemble des stratégies d'investissement, de consommation et d'assurance est noté $\bar{\mathcal{A}}_t$ et défini par:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{A}}_t &:= \{(\zeta_t, \xi_t, \kappa_t) \in \mathcal{H}_T; (3.13) \text{ a une solution unique telle que:} \\
 &\quad X^{\zeta,\xi,\kappa} + \hat{\varphi}_1(t) > 0 \quad \mathbb{P}.p.s\},
 \end{aligned}$$

où $\hat{\varphi}_1(t)$ est défini dans la suite de ce mémoire.

On note

$$\mathcal{A}_T \subset \bar{\mathcal{A}}_T \subset \mathcal{H}_T.$$

Définition 2

Une stratégie (ζ, ξ, κ) est dite admissible si elle vérifie les conditions suivantes:

1. la stratégie $(\zeta, \xi, \kappa) \in \mathcal{H}_T$,
2. la stratégie $(\zeta, \xi, \kappa) \in \bar{\mathcal{A}}_t$

Principe de la Programmation Dynamique: Si une solution optimale existe pour un problème donné sur un intervalle de temps $[t, T]$ avec une condition initiale x_0 , alors cette solution optimale reste valable même si l'on considère un sous-intervalle $[t', T]$ (où t' est un intervalle entre t et T) avec la condition initiale x_0 correspondant à l'état t' de cette date. On définit la version dynamique de la fonctionnelle à optimiser:

$$J(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) := \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s (v(u) + \eta(u)) du} \{P(\xi(s)) + \eta(s)P(i(s))\} ds + e^{-\int_t^T (v(u) + \eta(u)) du} P(X^{\zeta, \xi, \kappa}(T)) \right], \quad (3.15)$$

où $\mathbb{E}_{t,x}[\cdot]$ représente l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\cdot | X(t) = x, \mathcal{G}_t]$.

L'objectif du salarié est donc de maximiser (3.14) sur l'espace des admissibles $\mathcal{A}_T$ avec le respect de l'EDS qui gouverne sa richesse (3.13). Ainsi on définit la fonction de valeur par:

$$\Psi(t, x, v) := \sup_{(\zeta, \xi, \kappa) \in \mathcal{A}_{t,T}} J(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) = J(t, x, \tilde{\zeta}, \tilde{\xi}, \tilde{\kappa}), \quad (3.16)$$

où $\mathcal{A}_{t,T}$, est la restriction de l'espace $\mathcal{A}_T$ sur l'intervalle $[t, T]$, et $(\tilde{\zeta}, \tilde{\xi}, \tilde{\kappa})$ la stratégie optimale à déterminer dans la suite de ce mémoire. On définit également la fonction d'utilité puissance par:

$$P(x) := \begin{cases} \frac{x^\gamma}{\gamma} & si \quad x \geq 0, \\ -\infty & si \quad x < 0, \end{cases} \quad \forall \gamma \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\quad (3.17)$$

3.5 Résolution du problème

Dans cette partie, nous souhaiterons déterminer la stratégie optimale d'investissement, de consommation et d'assurance qui maximise la version dynamique (3.15) sous réserve du processus de richesse (3.13). Pour cela, nous soulignons que la fonction de valeur (3.16) est une variable aléatoire $\mathcal{G}_t$ -mesurable puisque les paramètres du modèle sont aléatoires, donc la fonction de valeur ne peut pas être déterminée à partir de l'équation aux dérivées partielles. Pour déterminer cette fonction de valeur, nous allons utiliser une combinant de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et de deux équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR).

3.5.1 Combinaison de l'équation HJB et deux EDSRs

Dans cette partie, nous explorons la combinaison de l'équation HJB avec deux EDSR pour résoudre le problème de contrôle optimal. On suppose que dans cet environnement de travail, les paramètres ne sont pas forcément bornés.

Proposition 1

On note $\mathcal{O} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une fonction $G \in C^{1,2,2,2}$ sur $\mathcal{O}$ tel que G est solution de (3.18), (3.19), (3.20) :

$$\begin{cases} -\frac{\partial G}{\partial t} + \sup_{(\zeta, \xi, \kappa) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \left\{ \mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G(t, x, \varphi_1(t), \varphi_2(t)) + P(\xi) + \eta(t)P\left(x + \frac{\kappa}{\lambda(t)}\right) \right\} = 0 \\ G(T, x, 0, 1) = P(x), \end{cases} \quad (3.18)$$

et

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \int_t^T f_1(s, \hat{V}_s, \varphi_1(s), \theta_1(s)) ds - \int_t^T \theta_1(s)^* dI_s, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} \varphi_2(t) = 1 + \int_t^T f_2(s, \hat{V}_s, \varphi_2(s), \theta_2(s)) ds - \int_t^T \theta_2(s)^* dI_s, \end{cases} \quad (3.20)$$

où

- f_1, f_2 sont des fonctions mesurables;

•

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G = & \left\{ x r(t) + x \zeta_t^* (\alpha + H v - r(t) \mathbf{1}) - \xi(t) - \kappa(t) + \mu(t) \right\} \frac{\partial G}{\partial x} + (-f_1) \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} \\ & + (-f_2) \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} + x^2 \zeta_t^* \Sigma \Sigma^* \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + x \zeta_t^* (t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} \\ & + x \zeta_t^* (t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} + \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} \\ & + \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} + \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Proof. Posons

$$B(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = e^{-\int_0^t (v(s) + \eta(s)) ds} G(t, x, \varphi_1, \varphi_2).$$

Supposons que $B(t, x, \varphi_1, \varphi_2)$ soit une martingale. comme $G \in C^{1,2,2,2}$ alors,

$$dB(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = -(\nu(t) + \eta(t))e^{-\int_0^t (\nu(s) + \eta(s))ds} G(t, x, \varphi_1, \varphi_2) dt \\ + e^{-\int_0^t (\nu(s) + \eta(s))ds} dG(t, x, \varphi_1, \varphi_2) \quad (3.22).$$

Or comme $G \in C^{1,2,2,2}$ alors d'après la formule d'Itô, on a:

$$dG(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial x} dX_t + \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} d\varphi_1(t) + \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} d\varphi_2(t) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} d[X]_t + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} d[X, \varphi_1]_t + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} d[X, \varphi_2]_t \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} d[\varphi_1]_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} d[\varphi_2]_t + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} d[\varphi_1, \varphi_2]_t. \quad (3.23)$$

Or d'après (3.6), (3.19), (3.20), on a:

$$d[X]_t = x^2 \zeta_t \zeta_t^* \Sigma \Sigma^* dt, \\ d\varphi_1(t) = -f_1 dt + \theta_1^*(t) \Sigma dW_t, \\ d\varphi_2(t) = -f_2 dt + \theta_2^*(t) \Sigma dW_t, \\ d[X, \varphi_1]_t = x \zeta^*(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* dt, \\ d[X, \varphi_2]_t = x \zeta^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* dt, \\ d[\varphi_1]_t = \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* dt, \\ d[\varphi_2]_t = \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* dt, \\ d[\varphi_1, \varphi_2]_t = \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* dt.$$

En remplaçant dans (3.23), on obtient:

$$dG(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial x} \left\{ x r(t) + x \zeta_t^* (\alpha + H v - r(t) \mathbf{1}) - \xi(t) - \kappa(t) + \mu(t) \right\} dt \\ + x \zeta^*(t) \Sigma dW_t \Big\} + \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} \left\{ -f_1 dt + \theta_1^*(t) \Sigma dW_t \right\} \\ + \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} \left\{ -f_2 dt + \theta_2^*(t) \Sigma dW_t \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} x^2 \zeta_t \zeta_t^* \Sigma \Sigma^* dt \\ + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} x \zeta^*(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* dt + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} x \zeta^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* dt \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* dt + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* dt.$$

En remplaçant ce qui précède dans (3.22), on a:

$$\begin{aligned}
 dB(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = & -(\nu(t) + \eta(t))e^{-\int_0^t (\nu(s) + \eta(s))ds} G(t, x, \varphi_1, \varphi_2) dt \\
 & + e^{-\int_0^t (\nu(s) + \eta(s))ds} \left\{ \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial x} \left\{ (xr(t) + x\zeta_t^*(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1}) - \xi(t) - \kappa(t) \right. \right. \\
 & + \mu(t) \Big\} dt + x\zeta_t^*(t)\Sigma dW_t \Big\} + \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} \left\{ -f_1 dt + \theta_1^*(t)\Sigma dW_t \right\} \\
 & + \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} \left\{ -f_2 dt + \theta_2^*(t)\Sigma dW_t \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} x^2 \zeta_t \zeta_t^* \Sigma \Sigma^* dt \\
 & + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} x \zeta_t^*(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* dt + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} x \zeta_t^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* dt \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* dt + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* dt \Big\}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 dB(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = & e^{-\int_0^t (\nu(s) + \eta(s))ds} \Big[-(\nu(t) + \eta(t))G(t, x, \varphi_1, \varphi_2) \\
 & + \frac{\partial G}{\partial t} + \left(xr(t) + x\zeta_t^*(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1}) - \xi(t) - \kappa(t) + \mu(t) \right) \frac{\partial G}{\partial x} - f_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} \\
 & - f_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} x^2 \zeta_t \zeta_t^* \Sigma \Sigma^* + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} x \zeta_t^*(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} x \zeta_t^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \Big] dt \\
 & + e^{-\int_0^t (\nu(s) + \eta(s))ds} \left[x\zeta_t^*(t)\Sigma dW_t \frac{\partial G}{\partial x} + \theta_1^*(t)\Sigma dW_t \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} + \theta_2^*(t)\Sigma dW_t \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} \right].
 \end{aligned}$$

Comme $B(t, x, \varphi_1, \varphi_2)$ est une martingale, alors:

$$\begin{aligned}
 & -(\nu(t) + \eta(t))G + \frac{\partial G}{\partial t} + \left(xr(t) + x\zeta_t^*(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1}) - \xi(t) - \kappa(t) + \mu(t) \right) \frac{\partial G}{\partial x} - f_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} \\
 & - f_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} + \frac{1}{2} x^2 \zeta_t \zeta_t^* \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + x\zeta_t^*(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} + x\zeta_t^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} \\
 & + \frac{1}{2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} + \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = 0;
 \end{aligned}$$

$$G(T, x, 0, 1) = P(x).$$

Ainsi

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} + \mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G = [\nu(t) + \eta(t)]G, \\ G(T, x, 0, 1) = P(x) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G = & \left(x r(t) + x \zeta_t^* (\alpha + H v - r(t) \mathbf{1}) - \xi(t) - \kappa(t) + \mu(t) \right) \frac{\partial G}{\partial x} - f_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} \\ & - f_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} + \frac{1}{2} x^2 \zeta_t \zeta_t^* \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + x \zeta^*(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} + x \zeta^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} \\ & + \frac{1}{2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} + \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}\end{aligned}$$

□

3.5.2 Solution générale

Détermination de contrôles optimaux $\tilde{\zeta}_t, \tilde{\xi}_t, \text{ et } \tilde{\kappa}_t$.

En partant de (3.18), en posant:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) \\ = \mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G(t, x, \varphi_1, \varphi_2) + P(\xi) + \eta(t) P\left(x + \frac{\kappa}{\lambda(t)}\right).\end{aligned}$$

Supposons que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} < 0 \text{ et } \frac{\partial^2 G}{\partial \kappa^2} < 0.$$

Ces conditions seraient vérifiées par la suite.

Les conditions du premier ordre de $\mathcal{Y}$ par rapport à (ζ, ξ, κ) , nous donne:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \zeta}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) = 0, & (1 **) \\ \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \xi}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) = 0, & (2 **) \\ \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \kappa}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) = 0, & (3 **) \end{cases}$$

Analysons (1 **):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \zeta}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) \\ = \frac{\partial \mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G}{\partial \zeta}(t, x, \varphi_1, \varphi_2) \\ = \left\{ x(\alpha + H v - r(t) \mathbf{1}) \right\} \frac{\partial G}{\partial x} + x^2 \zeta(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \\ + x \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} + x \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2},\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \zeta}(t, x; \zeta, \xi, \kappa) = 0 \\ \Rightarrow \left\{ x_t(\alpha + H v - r(t) \mathbf{1}) \right\} \frac{\partial G}{\partial x} + x^2 \zeta(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \\ + x \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} + x \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} = 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\tilde{\zeta}(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}}. \quad (3.24)$$

Analysons (2 * *):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \xi}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G}{\partial \xi}(t, x, \varphi_1, \varphi_2) + \frac{\partial P}{\partial \xi}(\xi) \\ &= -\frac{\partial G}{\partial x} + \xi_t^{\gamma-1}; \end{aligned}$$

avec

$$P(\xi(t)) = \frac{\xi_t^\gamma}{\gamma}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \xi}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) = 0, \\ & \Rightarrow -\frac{\partial G}{\partial x} + \xi_t^{\gamma-1} = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{\xi}(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = \left[\frac{\partial G}{\partial x} \right]^{-\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (3.25)$$

Analysons (3 * *):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \xi}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G}{\partial \kappa}(t, x, \varphi_1, \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[\eta(t) P\left(x + \frac{\kappa}{\lambda(t)}\right) \right] \\ &= -\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\eta(t)}{\lambda(t)} \left(x + \frac{\kappa}{\lambda(t)}\right)^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \xi}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) = 0,$$

alors

$$-\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\eta(t)}{\lambda(t)} \left(x + \frac{\kappa}{\lambda(t)}\right)^{\gamma-1} = 0.$$

D'où

$$\tilde{\kappa}(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = \lambda(t) \left[\left(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)} \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} - x \right]. \quad (3.26)$$

En remplaçant (3.24), (3.25), (3.26) dans (3.21), on obtient:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G \\
&= \left(x r(t) + x \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* (\alpha + H v - r(t) \mathbf{1}) \right. \\
&\quad - \left[\frac{\partial G}{\partial x} \right]^{-\frac{1}{1-\gamma}} - \lambda(t) \left[\left(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)} \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} - x \right] + \mu(t) \left. \right) \frac{\partial G}{\partial x} - f_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} - f_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} \\
&\quad + \frac{1}{2} x^2 \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (\mathbf{1} r(t) - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (\mathbf{1} r(t) \right. \\
&\quad - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \left. \right\} \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \\
&\quad + x \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} \\
&\quad + x \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} + \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}. \\
&\Rightarrow \mathcal{L}^{\zeta, \xi, \kappa} G \\
&= \left(x r(t) + \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* (\alpha + H v - r(t) \mathbf{1}) \right. \\
&\quad - \left[\frac{\partial G}{\partial x} \right]^{-\frac{1}{1-\gamma}} - \lambda(t) \left[\left(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)} \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} - x \right] + \mu(t) \left. \right) \frac{\partial G}{\partial x} - f_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} - f_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} \right. \\
&\quad - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \left. \right\} \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \\
&\quad + \left\{ (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* \theta_1^*(t) \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} \\
&\quad + \left\{ (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* \theta_2^*(t) \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} + \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$\mathcal{Y}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa)$ devient en partant de (3.27), (3.25), (3.26):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Y}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) \\
&= \left(x r(t) + \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* (\alpha + H v - r(t) \mathbf{1}) \right. \\
&\quad - \left[\frac{\partial G}{\partial x} \right]^{-\frac{1}{1-\gamma}} - \lambda(t) \left[\left(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)} \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} - x \right] + \mu(t) \frac{\partial G}{\partial x} - f_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} - f_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi_2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \right. \\
&\quad - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \left. \right\} \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \\
&\quad + \left\{ (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* \theta_1^*(t) \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} \\
&\quad + \left\{ (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_1^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} - \theta_2^*(t) \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} \right\}^* \theta_2^*(t) \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} + \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\
&\quad + \frac{1}{\gamma} L \left[\frac{\partial G}{\partial x} \right]^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}; \quad (3.28)
\end{aligned}$$

avec

$$L = 1 + \frac{\lambda(t)^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}}{\eta(t)^{\frac{1}{1-\gamma}}}.$$

Supposons que G est de la forme:

$$G(t, x, \varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \frac{1}{\gamma} (x + \varphi_1(t))^\gamma (\varphi_2(t))^{1-\gamma}, \quad \gamma \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[.$$

Posons:

$$G(t, x, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\gamma} (x + \varphi_1)^\gamma (\varphi_2)^{1-\gamma}, \quad \gamma \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[.$$

On a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\gamma} (x + \varphi_1(t))^\gamma (\varphi_2(t))^{1-\gamma} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x} &= (x + \varphi_1)^{\gamma-1} (\varphi_2)^{1-\gamma} \\
&= \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \varphi_1} &= (x + \varphi_1)^{\gamma-1}(\varphi_2)^{1-\gamma} \\ &= \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1}\right)^{1-\gamma}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \varphi_2} &= \frac{1-\gamma}{\gamma}(x + \varphi_1)^{\gamma-1}(\varphi_2)^{-\gamma} \\ &= \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1}\right)^{-\gamma}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial \varphi_1}\right) \\ &= (\gamma-1)(x + \varphi_1)^{\gamma-2}(\varphi_2)^{1-\gamma} \\ &= -(1-\gamma)\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1}\right)^{1-\gamma} \frac{1}{x + \varphi_1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial \varphi_2}\right) \\ &= (1-\gamma)(x + \varphi_1)^{\gamma}(\varphi_2)^{-\gamma} \\ &= (1-\gamma)\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1}\right)^{-\gamma}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial G}{\partial \varphi_2}\right) \\ &= (1-\gamma)(x + \varphi_1)^{\gamma-1}(\varphi_2)^{-\gamma} \\ &= (1-\gamma)\frac{1}{x + \varphi_1}\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1}\right)^{-\gamma}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1} \\ &= -(1-\gamma)\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1}\right)^{1-\gamma} \frac{1}{x + \varphi_1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1^2} &= -(1-\gamma)(x + \varphi_1)^{\gamma-2}(\varphi_2)^{1-\gamma} \\ &= -(1-\gamma)\frac{1}{x + \varphi_1}\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1}\right)^{1-\gamma}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_2^2} &= -(1-\gamma)(x + \varphi_1)^{\gamma}(\varphi_2)^{-\gamma-1} \\ &= -(1-\gamma)\frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1}\right)^{-\gamma}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} &= \frac{1}{\gamma-1}(x + \varphi_1). \\ \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_1}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} &= 1.\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \varphi_2}}{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}} = \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2}$$

(3.28) devient:

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) \\ = & \left(x r(t) + \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \right\}^* (\alpha \right. \\ & + H v - r(t) \mathbf{1}) - \left[\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right]^{-\frac{1}{1-\gamma}} - \lambda(t) \left[\left(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} - x \right] \\ & + \mu(t) \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} - f_1 \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} - f_2 \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{-\gamma} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \right\}^* \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} \right. \\ & - \alpha - H v) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \left. \right\} \Sigma \Sigma^* \left(-(1 - \gamma) \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \frac{1}{x + \varphi_1} \right) \\ & + \left\{ (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \right\}^* \theta_1^*(t) \left(-(1 - \gamma) \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right. \\ & \left. \frac{1}{x + \varphi_1} \right) + \left\{ (r(t) \mathbf{1} - \alpha - H v) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \right\}^* \theta_2^*(t) \left((1 - \gamma) \right. \\ & \left. \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{-\gamma} \right) + \frac{1}{2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \left(-(1 - \gamma) \frac{1}{x + \varphi_1} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right) \\ & + \frac{1}{2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \left(-(1 - \gamma) \frac{1}{\varphi_2} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{-\gamma} \right) + \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \left((1 - \gamma) \frac{1}{x + \varphi_1} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{-\gamma} \right) \\ & + \frac{1}{\gamma} L \left[\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right]^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}. \end{aligned}$$

(3.18) devient maintenant:

$$-\frac{\partial G}{\partial t} + \mathcal{Y}(t, x, v; \zeta, \xi, \kappa) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \left(xr(t) + \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - Hv) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \right\}^* (\alpha \right. \\
& + Hv - r(t) \mathbf{1}) - \left[\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right]^{-\frac{1}{1-\gamma}} - \lambda(t) \left[\left(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} - x \right] \\
& + \mu(t) \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} - f_1 \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} - f_2 \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{-\gamma} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} - \alpha - Hv) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \right\}^* \left\{ (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (r(t) \mathbf{1} \right. \\
& - \alpha - Hv) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \left. \right\} \Sigma \Sigma^* \left(-(1 - \gamma) \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \frac{1}{x + \varphi_1} \right) \\
& + \left\{ (r(t) \mathbf{1} - \alpha - Hv) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \right\}^* \theta_1^*(t) \left(-(1 - \gamma) \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right. \\
& \left. \frac{1}{x + \varphi_1} \right) + \left\{ (r(t) \mathbf{1} - \alpha - Hv) \frac{1}{\gamma - 1} (x + \varphi_1) - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \frac{(x + \varphi_1)^2}{\varphi_2} \right\}^* \theta_2^*(t) \left((1 - \gamma) \right. \\
& \left. \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{-\gamma} \right) + \frac{1}{2} \theta_1(t) \theta_1^*(t) \Sigma \Sigma^* \left(-(1 - \gamma) \frac{1}{x + \varphi_1} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right) \\
& + \frac{1}{2} \theta_2(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \left(-(1 - \gamma) \frac{1}{\varphi_2} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{-\gamma} \right) + \theta_1^*(t) \theta_2^*(t) \Sigma \Sigma^* \left((1 - \gamma) \frac{1}{x + \varphi_1} \left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{-\gamma} \right) \\
& + \frac{1}{\gamma} L \left[\left(\frac{\varphi_2}{x + \varphi_1} \right)^{1-\gamma} \right]^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -f_1\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma} - f_2\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma} \\
&\quad + \left(x(r(t) + \lambda(t)) + \mu(t)\right)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma} \\
&\quad + (\Sigma\Sigma^*)^{-1}(r(t)\mathbf{1} - \alpha - Hv)^*(r(t)\mathbf{1} - \alpha - Hv)\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}\varphi_2 \\
&\quad - (\alpha + Hv - \mathbf{1}r(t))\theta_1(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma} - (\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})\theta_2(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}(x+\varphi_1) \\
&\quad - \left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-1}L - \frac{1}{2}(\Sigma\Sigma^*)^{-1}(\mathbf{1}r(t) - \alpha - Hv)^*(r(t)\mathbf{1} - \alpha - Hv)\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}\varphi_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})\theta_1(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma} + \frac{1}{2}(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})\theta_2(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}(x+\varphi_1) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})^*\theta_1^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma} + \frac{1}{2}(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})^*\theta_2^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}(x+\varphi_1) \\
&\quad - \frac{1}{2}(1-\gamma)\Sigma\Sigma^*\theta_1(t)\theta_1^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma}(x+\varphi_1) - \frac{1}{2}(1-\gamma)\Sigma\Sigma^*\theta_1(t)\theta_2^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma} \\
&\quad - \frac{1}{2}(1-\gamma)\Sigma\Sigma^*\theta_2(t)\theta_1^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma} - \frac{1}{2}(1-\gamma)\Sigma\Sigma^*\theta_2(t)\theta_2^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}\frac{(x+\varphi_1)^2}{\varphi_2} \\
&\quad - (\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})^*\theta_1^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma} + (1-\gamma)\theta_1(t)\theta_1^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma}\frac{1}{x+\varphi_1} \\
&\quad + (1-\gamma)\theta_2(t)\theta_1^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma} + (\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})^*\theta_2^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}(x+\varphi_1) \\
&\quad - (1-\gamma)\theta_1(t)\theta_2^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma} - (1-\gamma)\theta_2(t)\theta_2^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}\frac{(x+\varphi_1)^2}{\varphi_2} \\
&\quad - \frac{1}{2}(1-\gamma)\Sigma\Sigma^*\theta_1(t)\theta_1^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma}\frac{1}{x+\varphi_1} - \frac{1}{2}(1-\gamma)\Sigma\Sigma^*\theta_2(t)\theta_2^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}\frac{1}{\varphi_2} \\
&\quad - (1-\gamma)\Sigma\Sigma^*\theta_1^*(t)\theta_2^*(t)\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}\frac{1}{x+\varphi_1} + \frac{1}{\gamma}L\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma} = 0. \\
\\
&\Rightarrow \left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma}f_1 + \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}f_2 \\
&= \left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{1-\gamma}\left[\left(x(r(t) + \lambda(t)) + \mu(t)\right) - \frac{1}{2}(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})\theta_1(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(1-\gamma)\Sigma\Sigma^*\theta_1(t)\theta_1^*(t)\left(x+\varphi_1 + \frac{1}{x+\varphi_1}\right) + (1-\gamma)\theta_1(t)\theta_1^*(t) - \frac{1}{2}(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})^*\theta_1^*(t)\right] \\
&\quad + \left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-\gamma}\left[\frac{1}{2}(\Sigma\Sigma^*)^{-1}(r(t)\mathbf{1} - \alpha - Hv)^*(r(t)\mathbf{1} - \alpha - Hv)\frac{1}{1-\gamma}\varphi_2 - \frac{1}{\gamma}L \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})\theta_2(t)(x+\varphi_1) + \frac{3}{2}(\alpha + Hv - r(t)\mathbf{1})^*\theta_2^*(t)(x+\varphi_1) \right. \\
&\quad \left. + (1-\gamma)\left(\theta_2(t)\theta_1^*(t) - \theta_2^*(t)\theta_1(t) - \frac{1}{2}\Sigma\Sigma^*\left(\theta_2(t)\theta_1^*(t) + \theta_1(t)\theta_2^*(t) + \theta_2^*(t)\theta_1^*(t)\frac{1}{x+\varphi_1}\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - (1-\gamma)\theta_2(t)\theta_2^*(t)\left(\frac{(x+\varphi_1)^2}{\varphi_2} + \frac{1}{2}\Sigma\Sigma^*\left(\frac{(x+\varphi_1)^2}{\varphi_2} + \frac{1}{\varphi_2}\right)\right) - \left(\frac{\varphi_2}{x+\varphi_1}\right)^{-1+\gamma}L\right]
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient:

$$\begin{aligned} f_1(t, \hat{V}_t, \varphi_1(t), \theta_1(t)) = & \left(x(r(t) + \lambda(t)) + \mu(t) \right) - \frac{1}{2}(\alpha + HV_t - r(t)\mathbf{1})\theta_1(t) \\ & - \frac{1}{2}(1 - \gamma)\Sigma\Sigma^*\theta_1(t)\theta_1^*(t)\left(x + \varphi_1(t) + \frac{1}{x + \varphi_1(t)}\right) + (1 - \gamma)\theta_1(t)\theta_1^*(t) \\ & - \frac{1}{2}(\alpha + HV_t - r(t)\mathbf{1})^*\theta_1^*(t); \quad (3.29) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f_2(t, \hat{V}_t, \varphi_2(t), \theta_2(t)) = & \frac{\gamma}{1 - \gamma} \left[\frac{1}{2}(\Sigma\Sigma^*)^{-1}(r(t)\mathbf{1} - \alpha - HV_t)^*(r(t)\mathbf{1} - \alpha - HV_t) \frac{1}{1 - \gamma} \varphi_2(t) \right. \\ & - \frac{1}{\gamma} L - \frac{1}{2}(\alpha + HV_t - r(t)\mathbf{1})\theta_2(t)(x + \varphi_1(t)) \\ & + \frac{3}{2}(\alpha + HV_t - r(t)\mathbf{1})^*\theta_2^*(t)(x + \varphi_1(t)) \\ & + (1 - \gamma)\left(\theta_2(t)\theta_1^*(t) - \theta_2^*(t)\theta_1(t) - \frac{1}{2}\Sigma\Sigma^*(\theta_2(t)\theta_1^*(t) + \theta_1(t)\theta_2^*(t) \right. \\ & \left. + \theta_2^*(t)\theta_1(t)\frac{1}{x + \varphi_1(t)})\right) - (1 - \gamma)\theta_2(t)\theta_2^*(t)\left(\frac{(x + \varphi_1(t))^2}{\varphi_2(t)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\Sigma\Sigma^*\left(\frac{(x + \varphi_1(t))^2}{\varphi_2(t)} + \frac{1}{\varphi_2(t)}\right)\right) - \left(\frac{\varphi_2(t)}{x + \varphi_1(t)}\right)^{-1+\gamma} L \left. \right] \quad (3.30) \end{aligned}$$

3.6 Théorème de vérification

Le théorème de vérification est un outil essentiel en contrôle optimal stochastique. Il établit un lien direct entre la solution d'une équation de HJB et la stratégie optimale du problème de contrôle.

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème d'optimisation d'un portefeuille sensible au risque, où l'objectif est de maximiser l'utilité espérée de la richesse finale. Pour ce faire, nous nous appuyons sur la fonction de valeur ($\mathcal{B}$), qui représente l'utilité maximale que peut obtenir le consommateur en fonction de son niveau de richesse initiale.

Nous distinguons deux cas pour les valeurs $\gamma \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ (un paramètre qui mesure l'aversion au risque du consommateur). Ces cas font l'étude d'une analyse détaillée, avec la démonstration de théorèmes et deux lemmes similaires à ceux présentés dans [7]. Les preuves détaillées de ces résultats sont omises pour plus de concision.

3.6.1 Problème d'optimisation du portefeuille sensible au risque

C'est problème d'investissement sans la consommation et sans paiement de prime d'assurance-vie. Dans cette partie, nous allons traiter le même problème que [19], mais nous n'allons pas utiliser l'équation de Zakai comme dans [19].

Soient une stratégie $w^i(t)$ la proportion de la richesse d'un investisseur dans la i^{ieme} action risquée et $(X^w(t))_t$ le processus de richesse de l'investisseur à l'instant t pour tout w .

Alors, le processus de la richesse de l'investisseur $X^w(t)$ à partir du capital initial x_0 est gouverné par:

$$\frac{dX^w(t)}{X^w(t)} = (1 - w^*(t) \times \mathbf{1}) \frac{dK_t^o}{K_t^o} + \sum_{i=1}^m w^i(t) \frac{dK_t^i}{K_t^i}, \quad X^w(0) = x_0.$$

Ensuite, en utilisant (3.13), on obtient:

$$\frac{dX^w(t)}{X^w(t)} = w^*(t) dI_t + \{r(t) + w^*(t)(\alpha + H\hat{V}_t - r_t \mathbf{1})\} dt. \quad (3.31)$$

Où $X^w(t)$ est sa solution.

Définition 1

On note $\mathcal{A}_T^1$ l'espace des stratégies admissibles et défini par :

$$\mathcal{A}_T^1 := \left\{ (w(t))_{t \in [0, T]} \text{ est un processus stochastique} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \mathcal{G}_t - \text{progressivement mesurable à valeurs dans } \mathbb{R}^m \text{ telque} \\ \int_0^T |w(t)|^2 dt < \infty \quad \mathbb{P}p.s. \end{array} \right\}.$$

Proof. Posons

$$g(t, X^w(t)) = \ln(X^w(t)).$$

On a $g \in C^{1,2}$, alors d'après la formule d'Itô, on obtient:

$$dg(t, X^w(t)) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) d[X]_t.$$

Or

$$\begin{aligned} g(t, x) &= \ln(x) \\ \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) &= \frac{1}{x} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) &= -\frac{1}{x^2}. \\ dg(t, X^w(t)) &= \frac{1}{x}(t, x) dX(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2}(t, x) d[X]_t. \\ d[X]_t &= x^2 w(t) \Sigma \Sigma^* w^*(t) dt \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d(\ln(t, X_t^w)) &= w^*(t) dI_t - \frac{1}{2} x^2 w(t) \Sigma \Sigma^* w^*(t) dt \\ &\quad + \{r(t) + w^*(t)(\alpha + H\hat{V}_t - r_t \mathbf{1})\} dt. \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, t]$, on a:

$$\begin{aligned} \int_0^t d(\ln(u, X_u^w)) &= \int_0^t w^*(u) dI_u + \int_0^t \left(-\frac{1}{2} x^2 w(u) \Sigma \Sigma^* w^*(u) \right. \\ &\quad \left. + \{r(u) + w^*(u)(\alpha + H\hat{V}_u - r_u \mathbf{1})\} \right) du \\ \Rightarrow \ln(X_t^w) - \ln(X_0^w) &= \int_0^t w^*(u) dI_u + \int_0^t \left(-\frac{1}{2} x^2 w(u) \Sigma \Sigma^* w^*(u) \right. \\ &\quad \left. + \{r(u) + w^*(u)(\alpha + H\hat{V}_u - r_u \mathbf{1})\} \right) du \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} X_t^w &= x \exp \left\{ \int_0^t w^*(u) dI_u + \int_0^t \left(-\frac{1}{2} x^2 w(u) \Sigma \Sigma^* w^*(u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \{r(u) + w^*(u)(\alpha + H\hat{V}_u - r_u \mathbf{1})\} \right) du \right\} \quad (3.32) \end{aligned}$$

□

Remarque 3.6.1. Comme

$$\begin{aligned} X_t^w &= x \exp \left\{ \int_0^t w^*(u) dI_u + \int_0^t \left(-\frac{1}{2} x^2 w(u) \Sigma \Sigma^* w^*(u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \{r(u) + w^*(u)(\alpha + H\hat{V}_u - r_u \mathbf{1})\} \right) du \right\}, \end{aligned}$$

alors, en prenant à la puissance γ , on obtient:

$$\begin{aligned} \{X_t^w\}^\gamma &= x^\gamma \exp \left[\gamma \left\{ \int_0^t w^*(u) dI_u + \int_0^t \left(-\frac{1}{2} x^2 w(u) \Sigma \Sigma^* w^*(u) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \{r(u) + w^*(u)(\alpha + H\hat{V}_u - r_u \mathbf{1})\} \right) du \right\} \right] \\ &= x^\gamma \exp \left[\gamma \int_0^t \{y(\hat{V}_u, w(u))\} du \right] M_t^w. \quad (3.33) \end{aligned}$$

Où

$$y(\hat{V}_t, w(t)) = -\frac{1-\gamma}{2} w(t) \Sigma \Sigma^* w^*(t) + r(t) + w^*(t)(\alpha + H\hat{V}_t - r_t \mathbf{1}). \quad (3.34)$$

Et

$$M_t^w = \exp \left[\gamma \int_0^t w^*(u) dI_u - \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t w(u) \Sigma \Sigma^* w^*(u) du \right]. \quad (3.35)$$

Proposition 1 (Horizon fini)

Pour tout $t \in [0, T]$ on veut maximiser:

$$(\mathcal{R}) : \quad \Psi_1(t, x, v) := \sup_{w \in \mathcal{A}_T^1} J_1(x, v, w; T),$$

où

$$J_1(x, v, w; T) := \ln \mathbb{E} \left[\{X_t^w\}^\gamma \right]$$

sous réserve d'un processus $(\hat{V}_t)_t$ donné par:

$$d\hat{V}_t = \left(b + N\hat{V}_t + \gamma \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* w(t) \right) dt + \Pi(\Lambda_t) dI_t^w, \quad \hat{V}_0 = v. \quad (3.36)$$

Proof. En partant de (3.33) et en remplaçant par son expression, on obtient:

$$\begin{aligned} J_1(x, v, w; T) &= \ln \mathbb{E} \left[x^\gamma \exp \left[\gamma \int_0^T \{y(\hat{V}_t, w(t))\} dt \right] M_T^w \right] \\ \Rightarrow J_1(x, v, w; T) &= \ln [x^\gamma \mathbb{E}^w \exp \left[\gamma \int_0^T \{y(\hat{V}_t, w(t))\} dt \right] \mathbb{E}(M_T^w)]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_T^w) &= \mathbb{E} \left\{ \exp \left[\gamma \int_0^T w^*(t) dI_t - \frac{\gamma^2}{2} \int_0^T w(t) \Sigma \Sigma^* w^*(t) dt \right] \right\} \\ &= \exp \left[-\frac{\gamma^2}{2} \int_0^T w(t) \Sigma \Sigma^* w^*(t) dt \right] \mathbb{E} \left\{ \exp \left[\gamma \int_0^T w^*(t) dI_t \right] \right\} \\ &= \exp \left[-\frac{\gamma^2}{2} \int_0^T w(t) \Sigma \Sigma^* w^*(t) dt \right] \exp \left[\frac{\gamma^2}{2} \int_0^T w(t) \Sigma \Sigma^* w^*(t) dt \right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(M_T^w) = 1.$$

Comme w satisfait

$$\mathbb{E}(M_T^w) = 1,$$

on peut définir une mesure de probabilité $\mathbb{P}^w$ sur $(\Omega, \mathcal{G}_t)$ par

$$\frac{d\mathbb{P}^w}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}_T} = M_T^w.$$

Ensuite, sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}^w$, $\hat{V}_t$ est solution de:

$$d\hat{V}_t = \left(b + N\hat{V}_t + \gamma \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* w(t) \right) dt + \Pi(\Lambda_t) dI_t^w, \quad \hat{V}_0 = v; \quad (3.36)$$

où on utilise le théorème de Girsanov pour définir le processus $\mathbb{P}^w$ -Wiener.

$$I_t^w := I_t - \gamma \int_0^t w(u) \Sigma \Sigma^* du.$$

Ensuite, (3.37) devient:

$$\begin{aligned} J_1(x, v, w; T) &= \ln \left[x^\gamma \mathbb{E}^w \exp \left[\gamma \int_0^T \{y(\hat{V}_t, w(t))\} dt \right] \right] \\ &= \ln(x^\gamma) + \mathbb{E}^w \exp \left[\gamma \int_0^T \{y(\hat{V}_t, w(t))\} dt \right], \end{aligned} \quad (3.38)$$

où $\mathbb{E}^w$ est l'espérance par rapport à $\mathbb{P}^w$.

On conclut que $(\mathcal{B})$ peut être réduit à un problème de contrôle stochastique avec information complète, qui est le problème de la maximisation de (3.38) sous réserve d'un processus $(\hat{V}_t)$ donné par (3.36) sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P}^w)$. $\square$

Proposition 2 (Horizon infini)

Pour $0 \leq t \leq T < \infty$, on introduit les fonctions de valeur

$$\Psi(t, x, v) := \sup_{w \in \mathcal{A}_{t,T}^1} \ln \left[\mathbb{E}^w \exp \left[\gamma \int_t^T \{y(\hat{V}_u, w(u))\} du \right] \right],$$

où $\mathcal{A}_{t,T}^1$ est la restriction de $\mathcal{A}_T^1$ sur l'intervalle $[t, T]$. Ensuite, on peut dériver l'équation HJB $(\mathcal{R})$ avec la dynamique (3.36) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sup_{w \in \mathbb{R}^m} \mathcal{L}^w \Psi(t, v) = 0, \quad t \leq T, \quad \Psi(t, v) = 0; \quad (3.39)$$

où $\mathcal{L}^w \Psi(t, v)$ est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^w \Psi(t, v) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[\Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* \mathcal{D}_{\psi_1}^2 \right] + \frac{1}{2} \mathcal{D}_{\psi}^* \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* \mathcal{D}_{\psi} \\ &\quad + \left\{ b + Nv + \gamma \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* w \right\}^* \mathcal{D}_{\psi} + \gamma y(v, w) \Psi, \end{aligned} \quad (3.40)$$

où $\mathcal{D}$ est l'opérateur de la dérivée partielle.

Proof. La preuve est similaire à celle dans [20].

Soient $0 < t < T$ et $h > 0$ tels que $t + h < T$, on a:

$$\Psi(t, x, v) := \sup_{w \in \mathcal{A}_{t,t+h}^1} \ln \left[\mathbb{E}^{t,w} \exp \left(\gamma \int_t^{t+h} y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \Psi(t+h, \hat{V}_{t+h}) \right],$$

où $\hat{V}_t$ est solution de (3.36).

Supposons que $\Psi \in C^{1,2}$, alors d'après la formule d'Itô, on:

$$d\Psi(s, \hat{V}_s) = \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds + \mathcal{D}_\Psi d\hat{V}_s + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{D}_\Psi^2 d[\hat{V}]_s).$$

Or

$$d\hat{V}_t = (b + NV_t + \gamma \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* w(t)) dt + \Pi(\Lambda_t) dI_t^w$$

Alors

$$d[\hat{V}]_t = \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* dt,$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d\Psi(s, \hat{V}_s) = & \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{1}{2} \text{tr}(\Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_s)^* \mathcal{D}_\Psi^2) + \{b + N\hat{V}_s + \gamma \Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* w(s)\}^* \mathcal{D}_\Psi \right] ds \\ & + (\mathcal{D}_\Psi)^* \Pi(\Lambda_s) dI_s^w. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & d_s \left\{ \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \Psi(s, \hat{V}_s) \right\} \\ = & \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \left\{ \gamma y(\hat{V}_s, w(s)) \Psi(s, \hat{V}_s) + d\Psi(s, \hat{V}_s) \right\} \\ = & \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \left\{ \gamma y(\hat{V}_s, w(s)) \Psi(s, \hat{V}_s) + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{1}{2} \text{tr}(\Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_s)^* \mathcal{D}_\Psi^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \{b + N\hat{V}_s + \gamma \Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* w(s)\}^* \mathcal{D}_\Psi \right] ds + \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) (\mathcal{D}_\Psi)^* \Pi(\Lambda_s) dI_s^w, \right. \end{aligned}$$

avec $\hat{V}_s = v$.

En utilisant la formule de la dérivabilité, on obtient:

$$\begin{aligned} & \exp \left(\gamma \int_t^{t+h} y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \Psi(t+h, \hat{V}_{t+h}) - \Psi(t, v) \\ = & \int_t^{t+h} \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \left\{ \gamma y(\hat{V}_s, w(s)) \Psi(s, v) + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{1}{2} \text{tr}(\Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_s)^* \mathcal{D}_\Psi^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \{b + N\hat{V}_s + \gamma \Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* w(s)\}^* \mathcal{D}_\Psi \right] ds + \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) (\mathcal{D}_\Psi)^* \Pi(\Lambda_s) dI_s^w. \right. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{E}_{t,v}^w \left[\exp \left(\gamma \int_t^{t+h} y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \Psi(t+h, \hat{V}_{t+h}) \right] - \Psi(t, v)}{h} \\ = & \frac{\mathbb{E}_{t,v}^w}{h} \left[\int_t^{t+h} \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \left\{ \gamma y(\hat{V}_s, w(s)) \Psi(s, v) + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{1}{2} \text{tr}(\Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_s)^* \mathcal{D}_\Psi^2) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \{b + N\hat{V}_s + \gamma \Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* w(s)\}^* \mathcal{D}_\Psi \right] ds + \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) (\mathcal{D}_\Psi)^* \Pi(\Lambda_s) dI_s^w \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}_{t,v}^w \left[\int_t^{t+h} \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) (\mathcal{D}_\Psi)^* \Pi(\Lambda_s) dI_s^w \right] = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{E}_{t,v}^w \left[\exp \left(\gamma \int_t^{t+h} y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \Psi(t+h, \hat{V}_{t+h}) \right] - \Psi(t, v)}{h} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{t,v}^w \left[\int_t^{t+h} \exp \left(\gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \right) \left\{ \gamma y(\hat{V}_s, w(s)) \Psi(s, v) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_s)^* \mathcal{D}_\Psi^2 \right) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \left\{ b + N \hat{V}_s + \gamma \Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* w(s) \right\}^* \mathcal{D}_\Psi \right\} \right] ds \right]}{h} \end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0, on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_s)^* \mathcal{D}_\Psi^2 \right) + \left\{ b + N \hat{V}_s + \gamma \Pi(\Lambda_s) \Sigma \Sigma^* w(s) \right\}^* \mathcal{D}_\Psi \\ & + \gamma \int_t^s y(\hat{V}_u, w(u)) du \left\{ \gamma y(\hat{V}_s, w(s)) \Psi(s, v) \right\} = 0. \quad (3.41) \end{aligned}$$

Ce qui achève notre (3.39) □

Remarque 3.6.2. (3.41) est équivalente à

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* \mathcal{D}_U^2 \right) - \frac{\gamma}{2u} \mathcal{D}_U \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* (\mathcal{D}_U)^* \\ & + \left\{ b + Nv + \gamma \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* w(t) \right\}^* \mathcal{D}_U + \frac{\gamma}{1-\gamma} u^\gamma y(v, w) = 0, \quad (3.42) \end{aligned}$$

où

$$y(v, w) = -\frac{1-\gamma}{2} w \Sigma \Sigma^* w^* + r + w^* (\alpha + Hv - rI).$$

Proof. On définit $U(t, v)$ par

$$\Psi(t, v) = U(t, v)^{1-\gamma}.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, v) = (1-\gamma) U^{-\gamma}(t, v) \frac{\partial U}{\partial t}(t, v), \\ & \mathcal{D}_\Psi(t, v) = (1-\gamma) U^{-\gamma}(t, v) \mathcal{D}_U(t, v), \\ & \mathcal{D}_\Psi^2(t, v) = (1-\gamma) \left[-\gamma U^{-1-\gamma}(t, v) (\mathcal{D}_U(t, v))^* \mathcal{D}_U(t, v) + U^{-\gamma}(t, v) \mathcal{D}_U^2(t, v) \right] \\ & = (1-\gamma) U^{-\gamma}(t, v) \left[-\gamma U^{-1}(t, v) (\mathcal{D}_U(t, v))^* \mathcal{D}_U(t, v) + \mathcal{D}_U^2(t, v) \right]. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.41), on obtient finalement (3.42). □

On considère l'équation non homogène de Riccati:

$$\dot{Q}(t) + Q(t) S_2(t) Q(t) + S_1(t)^* Q(t) + Q(t) S_1(t) + S_0 = 0, \quad t < s, \quad Q(s) = 0, \quad (3.43)$$

où

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* \geq 0, \\ S_1(t) &= N + \frac{\gamma}{1-\gamma} \Pi(\Lambda_t) H, \\ S_0 &= \frac{\gamma}{1-\gamma} H^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} H. \end{aligned}$$

On peut utiliser $Q(t) = Q(t, s)$ pour tout $s \in [t, T]$. $f(t) = f(t, s)$ est une solution de l'équation différentielle linéaire:

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) + \{S_1(t) + S_2(t)^* Q(t)\}^* f(t) + Q(t) b \\ + \frac{\gamma}{1-\gamma} \{H^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} + Q(t) \Pi(\Lambda_t)\} (\alpha - r(t) \mathbf{1}) = 0, \quad t < s, \quad f(s) = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

Et $i(t) = i(t, s)$ est solution de

$$\begin{aligned} \dot{i}(t) + \frac{1}{2} t r \left[\Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* Q(t) \right] + \frac{1}{2} f(t)^* \Pi(\Lambda_t) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* f(t) \\ + b^* f(t) + \gamma r(t) + \frac{\gamma}{2(1-\gamma)} \left(\alpha - r(t) \mathbf{1} + \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* \Pi(\Lambda_t)^* f(t)^* \right)^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} \\ \left(\alpha - r(t) \mathbf{1} + \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* f(t) \right) = 0, \quad t < s, \quad i(s) = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Théorème 1

Si (3.43), (3.44), (3.45) ont des solutions $Q(t)$, $f(t)$, $i(t)$, alors la stratégie $\tilde{w}(t) \in \mathcal{A}_T^1$ est donnée par:

$$\tilde{w}(t) = \frac{1}{1-\gamma} (\Sigma \Sigma^*)^{-1} \left[\alpha + H \hat{V}_t - r(t) \mathbf{1} + \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* \{f(t, T) + Q(t, T) \hat{V}_t\} \right], \quad (3.46)$$

est optimale pour $(\mathcal{R})$. De plus pour $(\mathcal{R})$, la valeur optimale est donnée par:

$$\Psi_1(t, x, v) = J_1(x, v, \tilde{w}; T) = \ln x^\gamma + \frac{1}{2} v^* Q(0; T) v + f(0; T)^* v + i(0; T), \quad (3.47)$$

où $\hat{V}_t$ est solution de (3.9).

Proof. voir théorème 3.1 dans [7]

□

3.6.2 Théorème de vérification pour $\gamma \in]0, 1[$

Théorème 1

On suppose que (Γ) et que les équations (3.43), (3.44), (3.45) ont des solutions $Q(t)$, $f(t)$, $i(t)$. On définit

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(t, x, v, \hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t, v)) &= \frac{1}{1-\gamma} (\Sigma \Sigma^*)^{-1} \left\{ \alpha + H v - r(t) \mathbf{1} \right. \\ &\quad \left. + (1-\gamma) \Sigma \Sigma^* \Pi(\Lambda_t)^* \frac{\mathcal{D}_{\hat{\varphi}_2}(t, v)}{\hat{\varphi}_2(t, v)} \right\} (x + \hat{\varphi}_1(t)), \\ \hat{\xi}(t, x, v, \hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t, v)) &= \frac{x + \hat{\varphi}_1(t)}{\hat{\varphi}_2(t, v)}, \\ \hat{\kappa}(t, x, v, \hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t, v)) &= \lambda(t) \left\{ \left(\frac{\lambda(t)}{\eta(t)} \right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} \frac{x + \hat{\varphi}_1(t)}{\hat{\varphi}_2(t, v)} - x \right\}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}(\hat{\zeta}_t, \hat{\xi}_t, \hat{\kappa}_t) &= (\hat{\zeta}(t, X^{\hat{\zeta}, \hat{\xi}, \hat{\kappa}}(t), \hat{V}_t, \hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t, v)), \hat{\xi}(X^{\hat{\zeta}, \hat{\xi}, \hat{\kappa}}(t), \hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t, v)), \\ &\quad \hat{\kappa}(t, X^{\hat{\zeta}, \hat{\xi}, \hat{\kappa}}(t), \hat{V}_t, \hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t, v))) \in \mathcal{A}_T^1, \quad (3.46)\end{aligned}$$

est une stratégie optimale pour (Γ) . De plus

$$\Psi(0, x, v) = \hat{G}(0, x, \hat{\varphi}_1(0) \hat{\varphi}_2(0, v)),$$

où

$$\hat{G}(t, x, \hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t, v)) = \frac{1}{\gamma} \left\{ x + \hat{\varphi}_1(t) \right\}^\gamma \hat{\varphi}_2(t, v)^{1-\gamma}. \quad (3.47)$$

Proof. voir [7] □

Lemme 3.6.1. *On suppose (L) et (3.30). Si (3.43), (3.44), (3.45) sont des solutions de $Q(t, s)$, $f(t, s)$, $i(t, s)$, alors l'équation différentielle stochastique rétrograde (3.20) admet une unique solution:*

$$\begin{aligned}(\hat{\varphi}_2(t), \hat{\theta}_2(t)) &= \left(\exp \left[\frac{1}{1-\gamma} \int_t^T \{ -(\eta(s) + v(s)) + \gamma \lambda(s) \} ds \right] \hat{q}(t; T, v) \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T \exp \left[\frac{1}{1-\gamma} \int_t^s \{ -(\eta(u) + v(u)) + \gamma \lambda(u) \} du \right] \hat{q}(t; T, v) S(s) ds, \right. \\ &\quad \left. \Lambda(\Pi_t)^* \mathcal{D} \hat{\varphi}_2(t) \right). \quad (3.48)\end{aligned}$$

où

$$\hat{q}(t; s, v) = \exp \left[\frac{1}{1-\gamma} \int_t^T \left\{ \frac{1}{2} v^* Q(t, s, v) v + f(t, s)^* + i(t, s) \right\} ds \right] \hat{q}(t; T, v). \quad (3.49)$$

Proof. La preuve est similaire à lemme 2.3 dans [15] □

Lemme 3.6.2. *On suppose (B) et (3.29). Alors (3.19) a une unique solution*

$$(\hat{\varphi}_1(t), \hat{\theta}_1(t)) = \left(\int_t^T \exp \left(- \int_t^s \{ r(u) + \lambda(u) \} du \right) \kappa(s) ds, 0 \right). \quad (3.50)$$

Proof. La preuve est similaire à lemme 2.2 dans [7] □

3.6.3 Théorème de vérification pour $\gamma \in]-\infty, 0[$

Dans cette partie, on va traiter le problème $(\mathcal{B})$ dans le cas $\gamma \in]-\infty, 0[$. On définit l'espace des stratégies admissibles:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T^- &= \{(\zeta, \xi, \kappa) \in \bar{\mathcal{A}}_T, |\zeta(t)| \leq \bar{\pi}(1 + |\hat{V}_t|)\{X^{\zeta, \xi, \kappa} + \hat{\varphi}_1(t)\}, \\ &\forall \mathcal{E} > 0, \text{ tel que } \xi(t) \leq \bar{\pi} \exp(\mathcal{E}(1 + |\hat{V}_t|^2))\{X^{\zeta, \xi, \kappa} + \hat{\varphi}_1(t)\}, \\ &|\kappa(t) - \lambda(t)\hat{\varphi}_1(t)| \leq \bar{\pi} \exp(\mathcal{E}(1 + |\hat{V}_t|^2))\{X^{\zeta, \xi, \kappa} + \hat{\varphi}_1(t)\}, \mathbb{P}.p.s\},\end{aligned}$$

où $\bar{\pi} = \bar{\pi}_{\mathcal{E}}$ et $\bar{\pi}$ sont des constantes dépendantes de ζ, ξ , et κ .

Théorème 1

Pour $\gamma \in]-\infty, 0[$, on suppose que **(L)**. Soient $Q(t), f(t), i(t)$ les solutions de (3.43), (3.44), (3.45) respectivement. Alors $(\hat{\zeta}_t, \hat{\xi}_t, \hat{\kappa}_t) \in \mathcal{A}_T^-$ donné par (4.2) est une stratégie optimale pour (I) . De plus ,

$$\Psi(0, x, v) = \hat{G}(0, x, \hat{\varphi}_1(0), \hat{\varphi}_2(0))$$

Proof. La preuve est similaire au théorème 4.1 dans [7] □

Le modèle présenté dans ce mémoire reposait sur l'hypothèse simplificatrice d'un taux d'intérêt sans risque constant. Cependant, dans un contexte de marché plus réaliste, ce taux est susceptible de fluctuer. Pour mieux refléter la réalité des marchés financiers, nous allons maintenant relâcher cette hypothèse et introduire donc une extension du modèle en considérant un taux d'intérêt stochastique $r(V_t, t)$, défini par les équations:

$$\begin{aligned}dK_t^0 &= K_t^0 r(V_t, t)dt, \quad K_0^0 = k^0 \\ dK_t^i &= K_t^i(\alpha + HV_t)^i dt + K_t^i \sum_{k=1}^{n+m} \Sigma_k^i(V_t, t) dW_t^k + \sum_{k=1}^{n+m} \beta_k^i(t) dB_t^k, \quad K_0^i = K^i \\ dV_t &= (b + NV_t)dt + \Pi(V_t, t)dB(t); \quad V_0 = v \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{4}$$

Où

$V(t)$ est le processus stochastique n -dimensionnel et qui affecte le taux d'intérêt sans risque $r(V_t, t)$, le

drift $G(V_t, t) = (\alpha + HV_t)$ de prix $K(t)$ et la matrice de volatilité $\Sigma(V_t, t)$ de prix $K(t)$;

$W(t) = (W_t^k; k = 1, \dots, (n+m))$ est un mouvement Brownien standard $n+m$ - dimensionnel défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$;

$B(t) = (B_t^k; k = 1, \dots, (n+m))$ est un mouvement Brownien standard $n+m$ - dimensionnel défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$;

$W(t)$ et $B(t)$ sont indépendants;

$\Sigma, \Pi, \beta = \beta_k^i(t)$ sont respectivement des fonctions à valeurs matricielles respectivement dans $m \times (n+m)$, $n \times (n+m)$, $m \times (n+m)$;

et $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dans ce cadre, le portefeuille auto-finançant $X(t) = X^{\zeta, \xi, \kappa}(t)$ du consommateur à partir du capital initial x_0 répond à la condition suivante:

$$\begin{cases} dX^{\zeta, \xi, \kappa}(t) = (1 - \zeta^*(t) \times \mathbf{1}) X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) \frac{dK_t^o}{K_t^o} + X^{\zeta, \xi, \kappa}(t) \sum_{i=1}^m \zeta^i(t) \frac{dK_t^i}{K_t^i} - \xi(t)dt - \kappa(t)dt + \mu(t)dt \\ X^{\zeta, \xi, \kappa}(0) = x_0 \quad \forall t \in [0, \tau \wedge T] \end{cases} \quad (5)$$

Le problème du consommateur est de choisir les stratégies d'investissement, de consommation et d'assurance qui maximisent sa performance fonctionnelle:

$$\Psi(0, x, v) := \sup_{(\zeta, \xi, \kappa) \in \mathcal{A}_T} J(0, x, v; \zeta, \xi, \kappa),$$

où $\mathcal{A}_T$ est l'espace des stratégies admissibles (ζ, ξ, κ) , et

$$\begin{aligned} J(0, x, v; \zeta, \xi, \kappa) := & \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau} e^{-\int_0^t v(u)du} P(\xi(s)) ds + e^{-\int_0^\tau v(u)du} P(i(\tau)) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right. \\ & \left. + e^{-\int_0^T v(t)dt} P(X^{\zeta, \xi, \kappa}(T)) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right]. \end{aligned}$$

L'objet de futures recherches reposera sur la résolution de ce problème de contrôle stochastique optimal en recherchant les stratégies d'investissement, de consommation et d'assurance en prenant en compte l'information partielle et la corrélation entre le processus de facteur stochastique et les actifs risqués.

CONCLUSION

En conclusion, ce mémoire a traité le problème optimal d'investissement, de consommation, d'assurance pour un consommateur avec des informations partielles, dans un contexte de marché incomplet et de prix des actifs risqués corrélés au processus de facteur stochastique. En appliquant le principe de la programmation dynamique, nous avons dérivé une combinaison d'équation Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et deux équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) pour résoudre ce problème. De plus, nous avons utilisé l'équation de Zakai pour dériver un filtre de Kalman qui est un filtre linéaire et le théorème de vérification a été démontré pour construire une stratégie optimale.

On peut étendre ce travail dans le cas de la prise en compte d'une corrélation entre les actifs risqués et le processus de facteur stochastique tel que ça été signalé à la fin de ce mémoire, et cela fera l'objet de futurs travaux de notre recherche.

Bibliography

- [1] Becem Saidani. Kalman discret pour l'estimation des moyennes inconnues de bruits blancs. Faculté des sciences de l'université de Sherbrooke, Québec, Canada, Juin 2012
- [2] Detemple, J.B.: Asset pricing in a production economy with incomplete information. *J.Financ.* **41**(2), 383-391 (1986).
- [3] Dokuchaev, N.: Optimal solution of investment problems via linear parabolic equations generated by Kalman filter. *SIAM. J. Cont. Optim.* **44**, 1239-1258 (2005).
- [4] Duarte,I., Pinheiro, D.,Pinto, A.A., Pliska,S.R.: Optimal life insurance purchase, consumption and investment on a financial market with multidimensional diffusive terms. *Optimization* **63**(11), 1737-1760 (2014).
- [5] Gennote, G.: Optimal portfolio choice under incomplete information. *J.Financ* **41**(3), 733-746 (1986).
- [6] Guambe,C., Kufakunnessu, R.:A note optimal investment-consumption-insurance in a Lévy market. *Insur.Math. Econ.* **65**(1), 30-36 (2015).
- [7] Hata, H.: Optimal investment-consumption-insurance with partial information. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 37(1), 309-338 (2020).
- [8] Hata,H., Shen, S.J.: An optimal consumption and investment problem with partial information. *Adv.Rep.Appl.Probab.* **50**(1), 131-153 (2008).
- [9] Hata,H.,Nagai,H.,Sheu, S.J.: An optimal consumption problem for general factor models. *SIAM J. Cont.Optim.* **56**(5), 3149-3183 (2018).
- [10] Hata,H., Sheiu, S.J.: On the Hamilton-Jacobi-Bellman equation for an optimal consumption problem: II. Verification Theorem.
- [11] Hervé Guiol: Calcul Stochastique Avancé: TIMB/TIMC-IMAG 2006.

- [12] Huang,H.,Milekovsky,M.A.: Portfolio choice and mortality-contingent claims: the general HARA case. *J.Bank.Financ.* **32**, 2444-2452 (2008).
- [13] Huy  n Pham: Optimisation et contrôle stochastique appliqu  s    la finance.
- [14] Lanker, P.: Optimal trading strategy for an investor: the case of partial information. *Stoch. Process. Appl.* **76**, 77-97 (1998).
- [15] Lipter,R.S., Shiryaev, A.N : *Statistic of Random Process*, 1. General Theory, 2nd edn. Springer,New York (2001).
- [16] Liu, J. : Portfolio selection in stochastic environments. *Rev.Financ.Stud.* **56**, 1-39 (2007).
- [17] Martin Baxter et Andrew Rennie (1996). *Financial Calculus, an introduction to derivative pricing*, Cambridge university press.
- [18] Merton, R.C. :Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model.*J.Econ. Theory* **3**, 373-413(1971).
- [19] Nagai, H.: Risk-sensitive dynamic assets management with partial information. In :Hida, T.,Karandikar, R.L., Kunita, H., Rajput, ,B.S., Watanabe, S. (eds) *Stochastics in Finite and Infinite Dimensions*, in Honor of Gopinath Kallianpur, pp. 321-339. Birkhauser, Boston (2001).
- [20] Nagai,H., Peng, S.: Risk-sensitive dynamic portfolio optimization with partial information on infinite time horizon. *Ann. Appl.Probab.* **12**(1), 173-195 (2002).
- [21] Philippe Briand:  quations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars 2001.
- [22] Pliska,S.,Ye,J.: Optimal life insurance purchase and consumption/investment under uncertain lifetime.*J.Bank.* **31**(5), 1307-1319 (2007).
- [23] *Processus stochastique*. Notes de cours, M2 Mathématiques, Universit   de Rennes1, 2022.
- [24] Putschogl, W., Sass, J.: Optimal consumption and investment under partial information. *Decis. Econ. Financ.* **31**, 137-170 (2008).
- [25] Richard, S.: Optimal consumption, portfolio and life insurance rules for an uncertain lived individual in a continuous time model *J.Financ.Ecom.***2**, 187-203 (2002).
- [26] Shen,Y., Wei, J.:Optimal investment-consumption-insurance with random parameters. *Scand. Actuar.J* **2018** (1), 37-62 (2016).
- [27] Wachter,J.A. : Portfolio and consumption decision under mean-reverting returns: an exact solution for complete markets.*J.Financ.Quant. Anal.* **37**, 63-91 (2002).

- [28] Zohar, G.: A generalized Cameron-Martin formula with applications to partial observed dynamic portfolio optimization. *Math. Financ.* **11**, 475-494 (2015).