

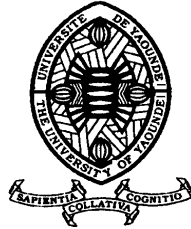
RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix - Travail - Patrie

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace - Work - Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF PHYSICS

ÉCOULEMENT DE SUCCION DANS UN CANAL RECTANGULAIRE POREUX

Mémoire présente en vue d'obtention du diplôme de Master Recherche
en Physique

Parcours : :
Mécanique Appliquée

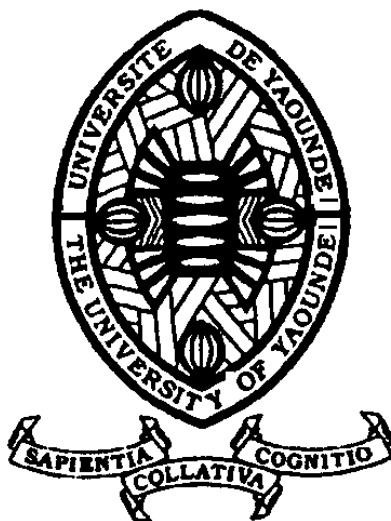
par :
DONGMO AZEMFACK ARIANNE

MATRICULE :
18T2301

Sous la Co-Direction de : *Pr. HONA Jacques*
(Professeur, Université de yaounde 1
et du *Pr. MARTIN NDI AZASE*
(Maitre de conférence, Université de yaounde 1



**Année Académique :
2023 / 2024**



Université de Yaoundé 1
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

ÉCOULEMENT DE SUCCION DANS UN CANAL
RECTANGULAIRE POREUX

par :

DONGMO AZEMFACK ARIANNE

MATRICULE :

18T2301

Sous la Co-Direction de : **Pr. HONA Jacques**
(Professeur, Université de yaounde 1
et du **Pr. MARTIN NDI AZASE**
(Maitre de conférence, Université de yaounde 1

Année Académique :

2023 / 2024

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour à :

Celle qui m'a donné la vie, cette déesse de douceur toujours prête à dire
que tout ira bien, cette maman, qui partage avec nous les joies et les peines avec
tout son cœur, Maman ATSAPDJOU Pauline ma mère ;

Mon support dans ma vie qui m'a appris, m'a encouragé et m'a dirigé
vers la gloire, Papa DONGMO Albert mon père ;

Toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours uni-
versitaire

REMERCIEMENTS

Je remercie profondément le DIEU tout puissant, créateur du ciel et de la terre pour la grâce, la santé, la volonté et la sagesse qu'il m'a accordé afin de pouvoir exécuter ce travail.

L'élaboration du présent travail a requis le soutien de nombreuses personnes sans lesquelles l'accès aux ressources nécessaires n'aurait pas été possible. Par conséquent, j'ai eu recours à un énorme soutien.

J'exprime ma profonde gratitude a Monsieur MARTIN NDI AZESE assistant professor au Texas Tech. University, et particulièrement au Pr. HONA Jacques, Professeur à l'Université de Yaoundé 1 qui a dirigé ce travail de mémoire de Master 2. Son Soutien multiforme, sa disponibilité et ses conseils judicieux m'ont permis de travailler dans des conditions idoines. Pour tout dire, il a été pour moi un exemple idéal à suivre et je lui en suis entièrement reconnaissante.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de consacrer leur temps précieux pour examiner ce travail Notamment l'examineur Pr MBONO SAMBA Yves, Maître de conférence a l'Université de Yaoundé 1, le président du jury ND-JAKA Jean-Marie Bienvenu, professeur Université de Yaoundé 1 ,les rapporteurs HONA Jacques ,professeur UY1 et NDI AZESE Martin Assistant professor, Texas Tech University, USA.

Mes remerciements vont également à l'endroit de tous l'ensemble du corps professoral du Département de Physique, dont les enseignements ont été d'une valeur inestimable tout au long de ma formation. Je remercie également mes camarades de

promotion et amis pour leur soutien constant et indéfectible. Une mention spéciale à Fodouop Leonel, Eyong Tambi et Mughe Godlove, dont l'aide précieuse a été essentielle à la réalisation de ce travail.

Je dis merci à toute ma famille pour le soutien permanent et multiforme, en pensant particulièrement à mes parents. En fin, je dis merci à tous ceux ou celles dont je ne peux citer nommément ici, qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES SYMBOLES	vii
1 REVUE DE LA LITTERATURE	4
1.1 INTRODUCTION	4
1.2 DEFINITIONS ET CONCEPT DE BASE DES FLUIDES	5
1.2.1 Définition	5
1.2.2 Propriétés des Fluides	5
1.2.3 Régime d'écoulement - Expérience de Reynold	8
1.3 EQUATION FONDAMENTALE DE LA MECANIQUE DES FLUIDES VISQUEUX	11
1.3.1 Loi de Conservation de la Masse	11
1.3.2 Conservation de la quantite de Mouvement	14
1.3.3 Equations de Navier Stockes	18
1.3.4 Etat de l'art	20
2 POSITION DU PROBLEME ET METHODE DE RESOLUTION	26
2.1 PRÉSENTATION DU DOMAINE GEOMETRIQUE DE L'ÉCOU- LEMENT	26
2.1.1 Hypothèses simplificatrices	27
2.2 ÉQUATION DU PROBLÈME	27
2.2.1 Conditions aux limites	28
2.2.2 Formulation adimensionnelle des équations du problème	29
2.3 FONCTION DE COURANT	30

2.3.1	Existence de la Fonction de courant	30
2.3.2	Equation de Vorticité	31
2.4	MÉTHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES	32
2.4.1	Nouvelle expression de la fonction de courant	32
2.4.2	Obtention de l'équation différentielle ordinaire	33
2.5	METHODE DE TIR	34
3	RESULTATS ET DISCUSSION	37
3.1	FONCTION DE COURANT EN 3D DANS LE CAS DE L'ASPIRA- TION SANS MOUVEMENT DES PLAQUES	37
3.2	LIGNE DE COURANT	39
3.3	PROFIL DE VITESSE TRANSVERSAL	40
3.4	PROFIL DE VITESSE LONGITUDINALE	41
3.5	FONCTION DE COURANT PAR UNITE DE LONGUEUR	42

LISTE DES FIGURES

1.1	Écoulement de Couette plan [1]	6
1.2	Expérience de Reynold	9
1.3	Écoulement Laminaire	9
1.4	Profil de Vitesse en Laminaire	10
1.5	EcoulementTurbulent	10
1.6	Profil de Vitesse en turbulent	10
1.7	Principe de conservation de la masse	13
1.8	Domaine de fluide (D) délimité par une surface (S)	15
2.1	Écoulement entre deux plaque parallèles poreuses	27
3.1	Fonction de courant en 3D	38
3.2	Ligne de Courant	39
3.3	Profil de Vitesse transversale	41
3.4	Profil de Vitesse Longitudinale	42
3.5	Fonction de courant par unité de longueur	43

LISTE DES SYMBOLES

1. R_e : Nombre de Reynold
2. ν : viscosité cinématique
3. $\bar{\bar{\epsilon}}$: Tenseur des taux de déformation
4. ρ : Masse volumique
5. P : pression
6. $\bar{\bar{\sigma}}$: Tenseur des contraintes
7. η : Viscosité de dilatation du fluide
8. δ : Symbole de Chronecker
9. μ : Viscosité dynamique du fluide
10. ψ : Fonction de courant
11. D_h :Diamètre hydraulique
12. h :Largeur du Canal
13. ω :Vorticite
14. f :Fonction de courant par unité de longueur

RÉSUMÉ

Cette étude examine l'écoulement d'un fluide en mouvement entre deux parois poreuses, un sujet d'importance dans les domaines de l'hydrodynamique et des procédés d'ingénierie. Pour analyser cet écoulement, nous avons d'abord appliqué le principe de conservation de la masse, ce qui a conduit à l'établissement de l'équation de continuité. Parallèlement, le principe de conservation de la quantité de mouvement a permis de dériver les équations de Navier-Stokes, qui décrivent le comportement dynamique du fluide. Étant donné que le fluide considéré est incompressible, nous avons ensuite introduit la fonction de courant, ce qui s'est révélé avantageux ; en effet, cette approche simplifie le système d'équations en réduisant le nombre d'équations à résoudre de trois à une seule, connue sous le nom d'équation de vorticité. Par la suite, nous avons appliqué la méthode des solutions semblables pour modéliser l'écoulement, transformant ainsi le problème original en un problème aux limites défini sur deux bornes, ce qui facilite la résolution. Pour trouver la solution de ce problème aux limites, nous avons utilisé la méthode de Tir, combinée avec Runge-Kutta d'ordre quatre ; cette approche numérique a été mise en œuvre à l'aide du logiciel MATLAB, qui offre des outils efficaces pour le calcul et la simulation. En somme, cette étude fournit une analyse détaillée de l'écoulement d'un fluide entre parois poreuses, en utilisant des principes fondamentaux de la dynamique des fluides et des méthodes numériques avancées pour obtenir des résultats précis.

Mots clés : Parois poreuses, Navier-Stokes, fonction de courant, équation de vorticité, méthode des solutions semblables, méthode de Tir, lignes de courant.

ABSTRACT

The study examines the flow of a moving fluid between two porous walls, a topic of importance in the fields of hydrodynamics and process engineering. To analyze this flow, we first applied the principle of mass conservation, leading to the establishment of the continuity equation. In parallel, the principle of conservation of momentum was used to derive the Navier-Stokes equations, which describe the dynamic behavior of the fluid. Given that the fluid under consideration is incompressible, we then introduced the current function, which proved advantageous; indeed, this approach simplifies the system of equations by reducing the number of equations to be solved from three to just one, known as the vorticity equation. We then applied the method of similar solutions to model the flow, transforming the original problem into a boundary problem defined on two bounds, making it easier to solve. To find the solution to this boundary problem, we used the Tir method, combined with the fourth-order Runge-Kutta algorithm; this numerical approach was implemented using MATLAB software, which offers efficient tools for computation and simulation. In sum, this study provides a detailed analysis of fluid flow between porous walls, using fundamental principles of fluid dynamics.

Keywords : Porous walls, Navier-Stokes equations, current function, vorticity equation, similar solution method, Tir method, streamlines.

.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les écoulements de fluides à l'intérieure d'une parois poreuse sont des phénomènes omniprésents dans la nature et les systèmes industriels. Par exemple, dans le domaine biomédical, la compréhension de l'écoulement de fluides à l'intérieure d'une parois poreuse est essentielle pour plusieurs applications parmi lesquelles nous pouvons prendre le cas de la dialyse rénale . Dans l'industrie, les processus de filtration et de séparation reposent sur des principes similaires d'écoulement à l'intérieure d'une parois poreuse.

Ce mémoire se concentre sur l'analyse de l'écoulement de succion dans un canal rectangulaire poreux, un phénomène pertinent pour de nombreuses applications industrielles et environnementales. L'étude des écoulements de succion dans des canaux poreux est particulièrement importante pour la conception de systèmes de filtration efficaces. La succion, ou l'extraction de fluide à travers les parois poreuses, peut être utilisée pour contrôler la distribution de la vitesse et de la pression dans le canal, optimisant ainsi la performance du système. De plus, la compréhension de ces écoulements peut aider à prévenir des problèmes tels que le colmatage des filtres et à améliorer la durabilité des systèmes de filtration.

L'objectif principal de cette étude est de développer une modélisation théorique robuste de cet écoulement, en utilisant les équations de Navier-Stokes et en intégrant les concepts de fonction de courant et de vorticité.

La méthodologie adoptée combine des approches analytiques et numériques pour résoudre les équations différentielles complexes qui décrivent l'écoulement. En particulier, la méthode des solutions semblables et la méthode de tir, couplée à l'algorithme

de Runge-Kutta, sont utilisées pour obtenir des solutions précises et détaillées. Les résultats de cette étude fourniront des insights précieux sur les mécanismes physiques qui régissent l'écoulement de succion dans des canaux poreux, et permettront d'identifier les paramètres clés qui influencent ce phénomène. Ces connaissances pourront être appliquées pour améliorer la conception et l'efficacité des systèmes de filtration et de drainage, ainsi que pour d'autres applications pratiques.

Pour faciliter la compréhension de notre travail, cette étude sera divisée en trois chapitres, suivis d'une conclusion. Le premier chapitre abordera les concepts fondamentaux de la mécanique des fluides visqueux. Le deuxième chapitre se concentrera sur la description du problème et la méthode de résolution utilisée. Enfin, le troisième chapitre présentera et analysera les résultats numériques obtenus.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTERATURE

1.1 INTRODUCTION

La mécanique des fluides est une discipline de la physique qui analyse le comportement des fluides en mouvement et au repos. Les fluides sont des substances capables de modifier leur forme et leur volume en réponse aux forces appliquées. Pour comprendre et anticiper leur comportement, il est crucial de disposer d'un cadre théorique solide. Ainsi, des équations en mécanique des fluides ont été élaborées pour décrire les lois physiques qui régissent le mouvement des fluides.

En mécanique des milieux continus, un fluide est considéré comme un milieu matériel dont les propriétés sont constantes en tout point. Le comportement d'un fluide est régi par trois lois de conservation fondamentales à savoir la loi de conservation de la masse, la loi de conservation de la quantité de mouvement et la loi de conservation de l'énergie. Ces trois lois de conservation, combinées à des équations d'état spécifiques au fluide considéré permettent de décrire et de prédire le comportement des fluides dans une grande variété de situations.

Une particule de fluide est considérée comme un groupe de molécules voisines suffisamment petites pour être traitées comme des points, mais suffisamment grandes pour occuper un volume élémentaire. Le fluide examiné dans cette étude est un fluide newtonien, ce qui implique qu'il respecte les hypothèses suivantes :

- - Ce fluide ne présente aucune élasticité et n'a pas de mémoire des états précédents.
- - Un même état de contrainte entraînera un état de déformation identique, ce

qui signifie que le tenseur des contraintes ne dépend pas explicitement des coordonnées locales.

- - Le fluide est isotrope, ce qui implique que les contraintes et les déformations ne présentent pas de direction préférentielle.

1.2 DEFINITIONS ET CONCEPT DE BASE DES FLUIDES

1.2.1 Définition

Le fluide est un milieu matériel sans rigidité et essentiellement déformable. Il est formé de molécules dont les distances relatives peuvent varier indéfiniment, contrairement aux corps solide dont les distances moyennes entre les molécules restent presque constantes. Un fluide est visqueux lorsqu'il possède la caractéristique de s'opposer à toute action qui tend à déformer un quelconque élément de volume d'un domaine (D) considéré de celui-ci.

1.2.2 Propriétés des Fluides

a) Viscosité

La viscosité est une propriété des fluides réels qui peut se définir comme étant la résistance qu'oppose un fluide à sa mise en mouvement. Cette résistance correspond aussi à une perte d'énergie cinétique qui sera dissipée sous forme de chaleur dans le fluide. Plus un fluide est visqueux, plus sa capacité à se déplacer sera faible et plus il dissipera de l'énergie du fait de son mouvement.

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes des fluides, elle est due à l'interaction entre les molécules des fluides et se subdivise en deux à savoir : la viscosité dynamique et la viscosité cinématique

- **La viscosité dynamique** : également appelée viscosité absolue, est une mesure de la résistance interne d'un fluide à l'écoulement. elle exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque. En d'autres termes, elle quantifie la force de frottement interne qui s'oppose au mouvement relatif des couches de fluide adjacentes.

La figure ci dessous est une illustration de l'écoulement de couette plan.

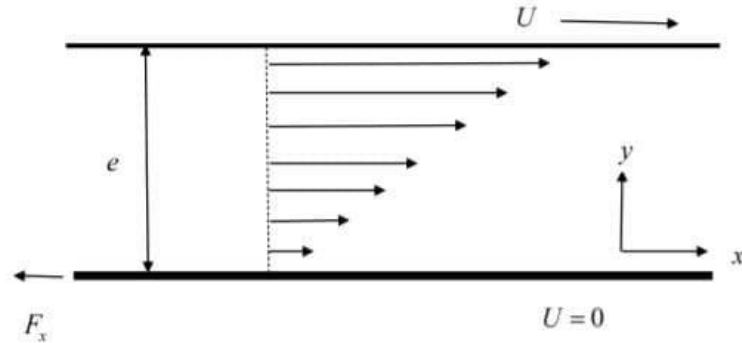


FIGURE 1.1 – Écoulement de Couette plan [1]

La viscosité peut se mesurer par l'expérience de couette. Considérons deux plaques parallèles, la plaque inférieure immobile et la plaque supérieure se déplaçant à la vitesse U . On peut ainsi mesurer la force F_x , nécessaire pour maintenir la paroi inférieure fixe en fonction de la vitesse de la plaque supérieure.

On observe expérimentalement que la force rapportée à la surface de la plaque est proportionnelle au rapport de la vitesse d'avance et de l'épaisseur de l'écoulement. Cette constante de proportionnalité μ est le paramètre qui traduit l'existence d'efforts tangentiels dans les liquides en mouvement.

Ainsi, pour cet écoulement, on a :

$$F_x = \mu S \frac{U}{e} \quad (1.1)$$

Cette force est la résultante des forces de frottements visqueux

Où :

- F est la force de frottement,
- μ est la viscosité dynamique
- S est la surface de contact entre les couches de fluide
- U est la vitesse de déplacement de la plaque supérieure,
- e est l'épaisseur de l'écoulement.

La viscosité dynamique est exprimée en pascal-seconde ($Pa \cdot s$) dans le Système international d'unités (SI).

➤ **Viscosité cinématique** : c'est une propriété des fluides qui caractérise la résistance à l'écoulement sous l'effet de la gravité. Elle est définie

comme le rapport entre la viscosité dynamique μ et la densité ρ du fluide. Mathématiquement, elle s'exprime par la relation suivante :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.2)$$

Ou :

- ν est la viscosité cinématique
- μ est la viscosité dynamique,
- ρ est la densité du fluide.

La viscosité cinématique mesure la capacité d'un fluide à s'écouler sous l'effet de la gravité, indépendamment de la force appliquée. Elle est souvent utilisée pour décrire le comportement des fluides dans des conditions où les forces de gravité jouent un rôle significatif. L'unité de la viscosité cinématique est le stokes (St), mais elle est souvent exprimée en centistokes (cSt) dans les applications pratiques.

Un fait intéressant est que la viscosité cinématique d'un fluide diminue généralement avec l'augmentation de la température. Cela signifie que les fluides deviennent moins résistants à l'écoulement à des températures plus élevées.

✧ Masse et Poids Volumique

La masse volumique, également appelée densité, est une grandeur physique qui caractérise la masse d'une substance par unité de volume. Elle est définie par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m}{v} \quad (1.3)$$

- ρ est la masse volumique
- m est la masse de la substance,
- V est le volume occupé par cette masse.

La masse volumique est exprimée en kilogrammes par mètre cube (kg/m^3) dans le Système international d'unités (SI) Elle est une propriété importante des matériaux, car elle permet de déterminer combien de matière est contenue dans un certain volume.

Le poids volumique représente la force de gravité qui agit sur une masse

par unité de volume, et est donnée par la relation suivante :

$$\varpi = \frac{mg}{v} \quad (1.4)$$

➤ Comportement des fluides

- **Les fluides Newtoniens et non-Newtoniens :** Un fluide est dit Newtonien lorsque la loi de comportement entre la contrainte notée $\bar{\sigma}$ et le tenseur des taux de déformation $\bar{\varepsilon}$ est une fonction linéaire avec pour coefficient de proportionnalité constante la viscosité. Ces notions seront détaillées dans la suite de ce travail. Un fluide non-newtonien a cette particularité d'avoir une viscosité qui peut varier en fonction de la contrainte mécanique appliquée au fluide, ou bien du temps d'application de la force au fluide.
- **Les Fluides parfaits et les fluides réels :** Un fluide est dit parfait lorsque son mouvement est décrit sans prendre en compte les forces de frottement, ce qui est fait pour rendre les calculs un peu plus simples. C'est donc un fluide pour lequel les forces de contact sont toujours normales aux éléments de surface. Contrairement aux fluides réels pour lesquels les forces de frottement tangentielles ne sont pas négligées.
- **Les Fluides Compressible et Incompressible :** Un fluide est dit incompressible quand le volume de ce dernier occupé par une masse ne varie pas en fonction de la pression exercée, sa masse volumique est la même en tout point. Alors que la masse volumique varie dans le cas des fluides compressibles. Les liquides sont des fluides peu compressibles ou incompressibles et les gaz des fluides très compressibles[2].

1.2.3 Régime d'écoulement - Expérience de Reynold

L'expérience de Reynolds consiste à injecter un liquide coloré dans une masse de fluide en mouvement dans un tube en verre. L'intérêt de cette expérience est de caractériser le niveau de stabilité de l'écoulement

(a) Dispositif Expérimentale

Les expériences réalisées par Osborne Reynolds montrent que le niveau de stabilité d'un écoulement est défini par un nombre sans dimension noté «

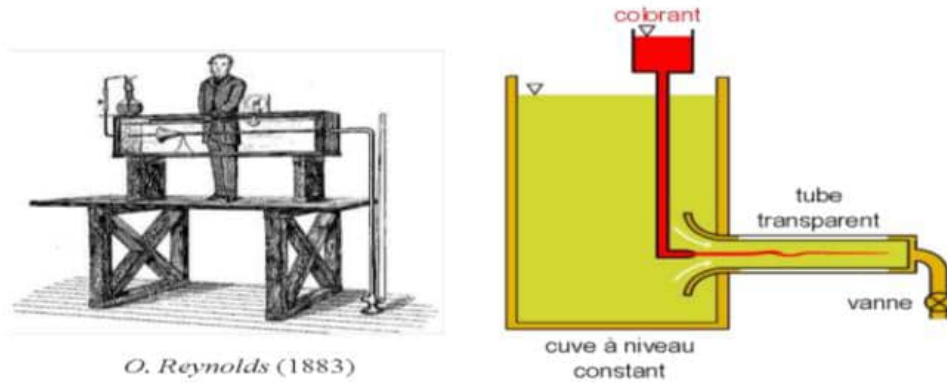


FIGURE 1.2 – Expérience de Reynold

R_e » appelé nombre de Reynolds. Il est le rapport des forces d'inerties sur les forces de viscosité exprimé par [3] :

$$R_e = \frac{\rho V_m D_h}{\mu} = \frac{V_m D_h}{\nu} \quad (1.5)$$

Ainsi deux grands régimes se distinguent en fonction de ce dernier :

- (b) **Le régime laminaire** : Ici les forces de viscosité dominent sur les forces d'inertie et le nombre de Reynolds $R_e < 2000$. La vitesse des particules est faible et distribuée de façon parabolique, les lignes de courant sont régulières, parallèles aux parois de la conduite. La vitesse critique pour laquelle nous sommes à la limite du régime laminaire est :

$$V_c = \frac{2000}{D_h} \nu \quad (1.6)$$



FIGURE 1.3 – Écoulement Laminaire

- (c) **Le régime turbulent** : contrairement au régime laminaire, dans le régime turbulent les directions des particules se déplacent en tourbillons dont la

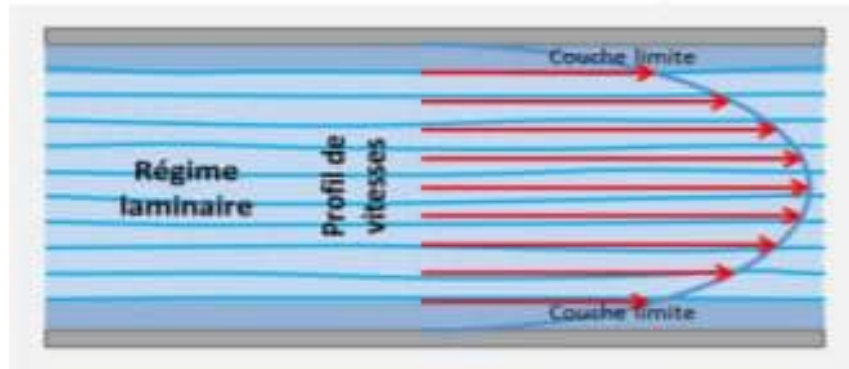


FIGURE 1.4 – Profil de Vitesse en Laminaire

taille, la localisation et l'orientation varient constamment de manière désordonnée. Ils apparaissent lorsque la vitesse est importante par rapport aux forces de viscosité et correspond aux valeurs de $Re > 3000$.



FIGURE 1.5 – Ecoulement Turbulent

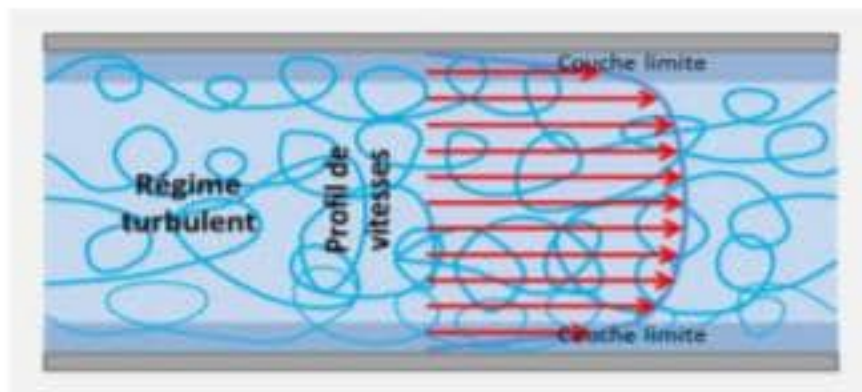


FIGURE 1.6 – Profil de Vitesse en turbulent

1.3 EQUATION FONDAMENTALE DE LA MECANIQUE DES FLUIDES VISQUEUX

Les équations fondamentales de la mécanique des fluides expriment le principe de la conservation de la masse à travers l'équation de continuité et le principe de conservation de la quantité de mouvement à travers les équations de Navier Stokes.

1.3.1 Loi de Conservation de la Masse

Tenseur des taux de déformations

Soit M et M' Deux points infiniment voisins pris dans un fluide en mouvement, les vitesses du fluide aux points M et M' sont liées par la relation suivante[4][5] :

$$\vec{V}(M') = \vec{V}(M) + \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{V} \wedge \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{D}(M) \quad (1.7)$$

Où

- ⋃ $\vec{V}(M)$: Vecteur vitesse au point M
- ⋃ $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{V}(M)$: Vecteur Tourbillon,
- ⋃ $2\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot} \vec{V}(M) = \vec{\omega}$: Vorticite du fluide au point M ,
- ⋃ $\overrightarrow{D}(M)$ Vecteur vitesse de déformation du fluide au point M ; Il est lié au vecteur $\overrightarrow{MM'}$ par la relation suivante :

$$\overrightarrow{D}(M) = \bar{\bar{\varepsilon}}(M) \cdot \overrightarrow{MM'}$$

(1.8)

Où $\bar{\bar{\varepsilon}}$ le tenseur des taux de déformation dont les composantes sont données par la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

L'écriture tensorielle de l'expression ci-dessus est la suivante :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{grad} \vec{V} + \overrightarrow{grad} \vec{V}^{(t)}) \quad (1.9)$$

Le taux de dilatation linéaire d'un élément de longueur i est la composante ε_{ii} du tenseur des taux de déformation, alors que le taux de dilatation angulaire d'un angle droit dont les côtés sont parallèles aux axes i et j est donné par ε_{ij} lorsque $i \neq j$.

La divergence du champ de vitesse $\vec{V}$ d'un point à l'instant t est un invariant qui est la trace du tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$. On montre que c'est aussi le taux de dilatation volumique relative de la particule de fluide et est exprimée par l'équation :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{dt} \left(\frac{dv' - dv}{dv} \right)$$

Où

$$\text{div} \vec{V} dt = \left(\frac{dv' - dv}{dv} \right) \quad (1.10)$$

Où dv et dv' représentent les éléments de volume pris autour des particules voisines M et M' .

Enonce du principe de conservation de la masse

Quel que soit le domaine (D) du fluide limité par une surface fermée (S) et entièrement contenu dans le fluide que l'on suit son mouvement au cours du temps, sa masse reste constante quand on suit le fluide dans son mouvement. Le schéma de la figure 1.7 montre un domaine (D) du fluide évoluant dans le temps [6].

Equation de continuité

Soit un volume de fluide contenu dans le domaine (D) et dv le volume élémentaire pris autour d'une particule fluide contenant le point M à l'instant t . La masse de fluide contenue dans le domaine (D) est donnée par [7] :

$$m = \iiint_{(D)} \rho(M, t) dv \quad (1.11)$$

En appliquant le principe de conservation de la masse, on a :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{(D)} \rho(M, t) dv = 0 \quad (1.12)$$

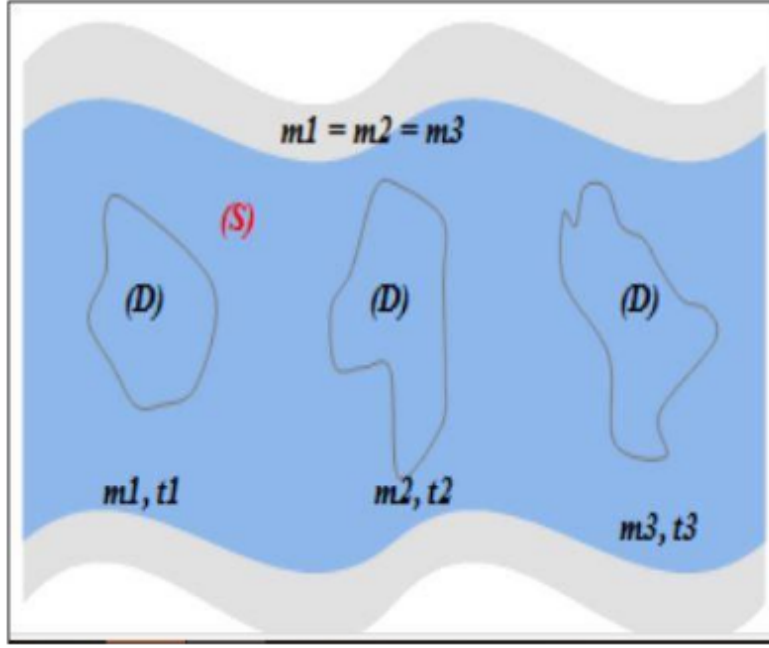


FIGURE 1.7 – Principe de conservation de la masse

La dérivée particulaire est définie par :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \quad (1.13)$$

En utilisant la relation entre le taux de dilatation cubique et la divergence du champ de vectrice vitesse donnée en 1.10, la nouvelle forme de l'équation 1.12 est :

$$\iiint_{(D)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{V} \right) dv = 0 \quad (1.14)$$

L'équation de continuité en l'absence de source et de puits se déduit de l'équation 1.14 et on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.15)$$

Pour les fluides incompressibles (fluides pour lesquels la masse volumique $\rho(P, t)$ varie très faiblement avec la pression). Et en situation isotherme, $\rho = \rho_0$ cette équation 1.15 devient :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (1.16)$$

Cette équation est appelée équation de continuité elle montre que le champ de vitesse est à flux conservatif (pour un fluide incompressible).

1.3.2 Conservation de la quantité de Mouvement

Enonce de la conservation de la quantité de mouvement

Ce principe s'énonce comme suit : Quel que soit le domaine (D) du fluide que l'on suit dans son mouvement dans son référentiel supposé galiléen, la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement au domaine (D) est égale au torseur des forces extérieures au domaine. Ce pendant avant de donner l'expression de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, il est important de rappeler les notions de forces de contact, les tenseurs des contraintes, et de la loi de comportement

Forces de masse et de contact

Les forces de masse sont des forces proportionnelles à la masse et exercées sur chaque élément de volume. Elles proviennent de l'existence d'un ou de plusieurs champs de forces présents dans le domaine occupé par le fluide. Une force de masse sur une particule de fluide de masse dm est donnée par :

$$\vec{F} dm = \rho \vec{F} dv$$

Comme force de volume on peut avoir : (Le poids, les forces d'inertie, les forces magnétiques)

On appelle force de contact sur le domaine (D), la force exercée par le fluide extérieur au domaine sur le fluide intérieur au domaine et qui s'applique sur la surface (S) tel que chaque élément de fluide subisse une force de contact sur dS et définie par :

$$d\vec{f} = \vec{T}(M)dS \quad (1.17)$$

Où

$\vec{T}(M)$ est le vecteur contrainte au point M du fluide.

La figure 1.8 illustre une particule fluide (D) sur laquelle est appliquée la force de contact $\vec{T}.dS$ sur l'élément de surface (ds).

Le vecteur contrainte $\vec{T}$ contient une composante normale ou contrainte normale à ds et une composante parallèle ou contrainte tangentielle à ds (ou contrainte de glissement ou contrainte de cisaillement) et est égale à $\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_i$

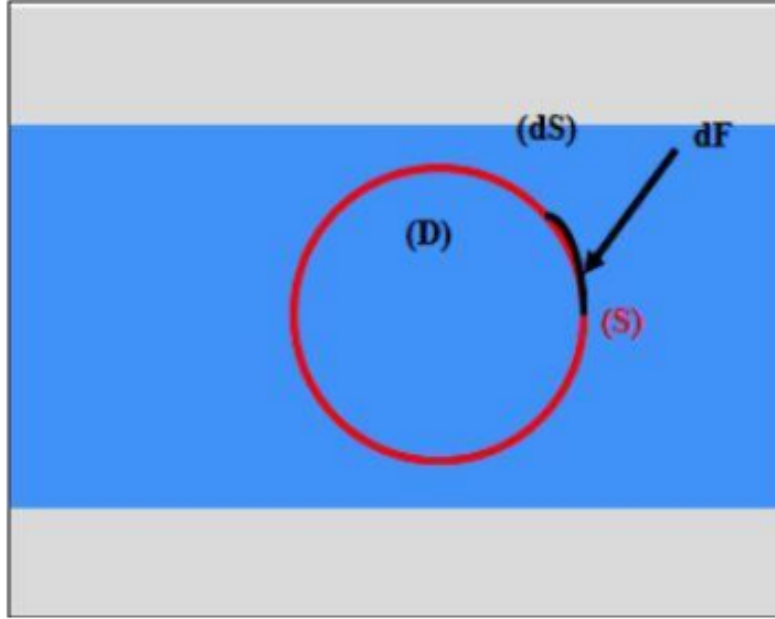


FIGURE 1.8 – Domaine de fluide (D) délimité par une surface (S)

Tenseur des contraintes

Le vecteur contrainte $\vec{T}$ est une force de contact par unité de surface. Pour un fluide visqueux la force de contact est la résultante des viscosités qui s'opposent à la déformation et les forces de pression étudiées ; lorsque le fluide est en équilibre, ceci nous permet de déduire deux types de contraintes : la contrainte tangentielle et la contrainte normale. Le fluide soumis à notre étude est un fluide newtonien par conséquent les hypothèses suivantes sont respectées :

- Le fait de connaître le tenseur de contrainte au point M nous permet d'écrire suivant les directions souhaitées le vecteur contrainte, ou $\vec{n}$ est un vecteur normal sortant a la surface qui limite le volume infinitésimal contenant le point M.

- Le tenseur de contrainte $\bar{\sigma}$ au point M est un tenseur symétrique. En outre pour connaître $\vec{T}(M)$ il suffit de connaître les contraintes sur chaque élément de surface, de plus on a la relation :

$$\vec{T}(M) = \sum_{k=1}^3 \bar{\sigma}_k(M) n_k$$

$\bar{\sigma}_k$ est la contrainte sur l'élément de surface dS_k admettant pour normale n_k .

La j-ième composante de la contrainte $\vec{T}$ dans la base orthonormée $(\vec{x}_j)$ notée

$\vec{T}_j$ est donnée par :

$$T_j = \sum_{k=1}^3 \sigma_{kj} n_k \quad (1.18)$$

Les quantités σ_{kj} fixant les contraintes T_j au point M sont les composantes d'un tenseur de second ordre appelé tenseur de contrainte et noté $\bar{\sigma}$. C'est un tenseur symétrique, c'est-à-dire $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$

σ_{kj} Peut être interprété comme étant la contrainte dirigée suivant $\vec{x}_j$ et appliquée à l'élément de surface de normale $\vec{x}_k$.

Pour $k = j$, σ_{jj} représente les contraintes normales et lorsque $k \neq j$, représente les contraintes tangentielles.

Vectoriellement on en déduit l'expression suivante :

$$\vec{T} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}$$

Loi de comportement

La relation entre la contrainte et la déformation donnée par la loi de comportement dans un fluide newtonien s'écrit[8] :

$$\sigma_{jk} = (-P + \eta \text{div} \vec{V}) \delta_{jk} + 2\mu \varepsilon_{jk} \quad (1.19)$$

Sous forme vectorielle cette relation devient :

$$\bar{\sigma} = (-P + \eta \text{div} \vec{V}) \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} \quad (1.20)$$

Où

$\succ P$ est la pression statique (indépendante de la direction en un point donne)

$\succ \delta_{jk}$ Le symbole de Kronecker

$\delta_{jk} = 1$ si $i=j$, et 0 si $i \neq j$

μ et η sont deux paramètres caractérisant les propriétés visqueuses des fluides ;

μ étant la viscosité de cisaillement ou dynamique

η la viscosité de dilatation

Enonce du principe de la conservation de la quantité de mouvement

Quel que soit le domaine (D) du fluide que l'on suit dans son mouvement, la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement est égale au torseur des forces extérieures appliquées au domaine (D)[9]

$$\frac{dc}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Il y'a donc égalité entre les résultantes générales et les moments résultants des deux torseurs. L'énoncé ci-dessus peut se traduire par la relation :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(D)} \vec{V} dm \right) = \iiint_{(D)} \vec{F} dm + \oint \vec{T} dS \quad (1.21)$$

Relation de Cauchy

Les relations de Cauchy caractérisent tous les types de fluides, newtoniens ou non. Développons l'équation 1.21 dans le but d'obtenir des relations de Cauchy.

La masse élémentaire dm étant une constante, on a :

$$\iiint_{(D)} \frac{d\vec{V}}{dt} dm = \iiint_{(D)} \vec{F} dm + \oint_S \vec{T} dS \quad (1.22)$$

Sachant que $dm = \rho d\vec{V}$ et en projetant suivant le vecteur $\vec{x}_j$ d'une base cartésienne orthonormée directe, on obtient :

$$\iiint_{(D)} \rho \frac{dU_j}{dt} dv = \iiint_{(D)} \rho F_j dv + \oint_{(S)} T_j dS \quad (1.23)$$

Transformons l'intégrale surfacique $\oint_{(S)} T_j dS$ en une intégrale volumique. Tout d'abord en remplaçant T_j par son expression en 1.18, on a :

$$\oint_{(S)} T_j dS = \oint_{(S)} \vec{\sigma}_j \cdot \vec{n} dS \quad (1.24)$$

Après application du théorème de Green-Ostrogradsky autour de la surface fermée (S) sur l'équation 1.24, l'équation 1.23 devient :

$$\iiint_{(D)} \rho \frac{dU_j}{dt} dv = \iiint_{(D)} \rho F_j dv + \iiint_{(D)} \text{div}(\vec{\sigma}_j) dv \quad (1.25)$$

Ce résultat est vérifié pour tout domaine choisi (D) du fluide. Ce qui permet d'aboutir aux relations de Cauchy :

$$\rho \frac{dU_j}{dt} = \rho F_j + \text{div}(\vec{\sigma}_j) \quad (1.26)$$

$j = 1, 2, 3$

En utilisant la dérivée Lagrangienne définie en 1.13 et d'après la notation d'Einstein, la nouvelle forme des équations de Cauchy est donnée par :

$$\rho\left(\frac{\partial U_j}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right) = \rho F_j + \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} \quad (1.27)$$

$j = 1, 2, 3$

Pour avoir l'écriture vectorielle des relations de Cauchy, il suffit de remarquer que le deuxième terme du second membre de cette équation correspond à la divergence du tenseur des contraintes. Et à partir de là, on trouve que :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}}) \cdot \vec{V}\right) = \rho \vec{F} + \text{div} \vec{\sigma} \quad (1.28)$$

1.3.3 Equations de Navier Stokes

Les équations de Navier-Stokes, telles que nous les connaissons, sont valables uniquement pour une catégorie spécifique de fluides appelée fluide newtoniens. Ces fluides se caractérisent par une relation simple et linéaire entre le tenseur de contraintes (qui représente les forces internes dans le fluide) et le tenseur des taux de déformation (qui mesure la vitesse à laquelle le fluide se déforme). Ces fluides particuliers respectent la loi de comportement qui donne une relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des taux de déformation, définie par [7] :

$$\vec{\sigma} = (-P + \eta \text{div} \vec{V}) \vec{I} + 2\mu \vec{\varepsilon} \quad (1.29)$$

En remplaçant dans l'équation (I.22) les termes $\vec{\sigma}$ et $\vec{\varepsilon}$ par leurs expressions, on obtient :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}}) \cdot \vec{V}\right) = \rho \vec{F} + \text{div}((-P + \eta \text{div} \vec{V}) \vec{I} + \mu(\overline{\text{grad}} \vec{V} + \overline{\text{grad}} \vec{V}^t)) \quad (1.30)$$

Ensuite, après développement on trouve la forme générale des équations de Navier-Stokes qui est la suivante :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}}) \cdot \vec{V}\right) = \rho \vec{F} - \overline{\text{grad}}(P) + \text{grad}(\eta \text{div} \vec{V}) + \text{div}(\mu \overline{\text{grad}} \vec{V}) + \text{div}(\mu \overline{\text{grad}} \vec{V}^t) \quad (1.31)$$

$\succ \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}}) \cdot \vec{V}\right)$: représente les forces d'inerties

-
- $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ et $(\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{V}$: représente respectivement l'accélération locale et l'accélération convective
 - $\rho \vec{F}$: représente Les forces de masse
 - $-\overline{\text{grad}}(P)$: représente la résultante des forces de pressions ou gradient de la pression.
 - $\text{grad}(\eta \text{div} \vec{V}) + \text{div}(\mu \overline{\text{grad}} \vec{V}) + \text{div}(\mu \overline{\text{grad}} \vec{V}^t)$: représente les forces de viscosités
 - η et μ sont des constantes

Pour les fluides incompressibles en transformation isotherme ou de faibles variations de masse volumique.

$$\text{div} \vec{V} = 0$$

De plus ν et μ sont des constantes liées par la relation $\mu = \rho \nu$

Les équations de Navier-Stokes pour des fluides se réduisent alors à :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{V} \right) = \rho \vec{F} - \overline{\text{grad}}(P) + \mu \Delta \vec{V} \quad (1.32)$$

Où Δ représente l'opérateur Laplacien.

En considérant que dans la relation 1.32 obtenue ci-dessus le premier terme de gauche (forces d'inertie) peut se mettre sous la forme suivante, quel que soit le système de coordonné (coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques), on a.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{V} \right) = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right] \quad (1.33)$$

Par ailleurs en insérant cette relation dans l'équation 1.32, On obtient une nouvelle forme des équations de Navier-Stokes quelques que soit le système de coordonnées :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}}(P) + \mu \Delta \vec{V} \quad (1.34)$$

Si on néglige l'action du poids en supposant que le mouvement du fluide a lieu dans une direction orthogonale que celle du poids alors les forces de masse seront alors négligeables et la relation 1.34 devient :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}}(P) + \mu \Delta \vec{V} \quad (1.35)$$

Ces équations de Navier-Stokes peuvent être détaillées dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques pour un champ de vitesse $\vec{V}$. Dans le système

de coordonnées cartésiennes, les composantes du champ de vitesse sont V_x, V_y, V_z sur les axes (x,y,z) on a alors :

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.38)$$

1.3.4 Etat de l'art

L'étude de l'écoulement de succion dans un canal rectangulaire poreux est un domaine de recherche important en mécanique des fluides, avec des applications dans divers domaines tels que la filtration, le drainage, et la microfluidique.

La recherche est liée directement à l'évolution de la technologie ;et c'est ce qui pousse les chercheurs à avancer dans des cas très compliqués et d'actualité susceptibles d'être traités à l'aide d'un outil informatique très puissant et avec des moyens expérimentaux les plus sophistiqués et les plus performants. Afin d'élargir nos connaissances dans ce domaine, nous avons fait la lecture des auteurs qui se résume comme suit :

En 1953 Berman a été l'un des premiers à étudier l'écoulement laminaire dans des canaux avec des parois poreuses. Il a proposé un modèle unidimensionnel pour déterminer l'écoulement laminaire d'un fluide dans un canal poreux avec succion ou injection des parois. Ce modèle est basé sur l'intégration des équations de Navier-Stokes en utilisant des solutions analytiques pour les champs de vitesse et de pression locaux obtenues à partir des développements asymptotiques à faible nombre de Reynolds de filtration, il permet d'étudier l'effet des conditions aux limites non uniformes et l'influence des caractéristiques géométriques hétérogènes sur l'hétérogénéité de la structure de l'écoulement du fluide. Les solutions analytiques montrent une bonne concordance avec les solutions numériques pour différents paramètres de succion et d'injection. Le modèle unidimensionnel est capable de prédire les variations de la vitesse et de la pression dans des systèmes multi-canaux complexes. Il permet également de préserver les termes inertiels qui peuvent affecter les conditions

de succion des parois et la distribution spatiale de la couche de particules en croissance à la paroi, mais il peut être limité par les hypothèses de succion ou d'injection uniformes et peut ne pas capturer tous les détails des phénomènes non linéaires dans des configurations avec des conditions aux limites non uniformes ou des géométries complexes.

En 1955 Sellars a étendu les travaux de Berman en considérant des nombres de Reynolds élevés. L'article propose un modèle qui est basé sur l'intégration des équations de Navier-Stokes en utilisant des solutions analytiques pour les champs de vitesse et de pression locaux obtenues à partir des développements asymptotiques à faible nombre de Reynolds de filtration, ce modèle permet d'étudier l'effet des conditions aux limites non uniformes et l'influence des caractéristiques géométriques hétérogènes sur l'hétérogénéité de la structure de l'écoulement du fluide. Les solutions analytiques montrent une bonne concordance avec les solutions numériques pour différents paramètres de succion et d'injection. L'avantage ici est que le modèle unidimensionnel est capable de prédire les variations de la vitesse et de la pression dans des systèmes multi-canaux complexes. Il permet également de préserver les termes inertiels qui peuvent affecter les conditions de succion des parois et la distribution spatiale de la couche de particules en croissance à la paroi. Mais il peut être limité par les hypothèses de succion ou d'injection uniformes et peut ne pas capturer tous les détails des phénomènes non linéaires dans des configurations avec des conditions aux limites non uniformes ou des géométries complexes.[10]

En 1965 Terrill et Shrestha ont étudié l'écoulement laminaire à travers des parois poreuses parallèles avec des perméabilités différentes. L'article propose un modèle unidimensionnel pour déterminer l'écoulement laminaire d'un fluide dans un canal poreux avec succion ou injection des parois. Ce modèle est basé sur l'intégration des équations de Navier-Stokes en utilisant des solutions analytiques pour les champs de vitesse et de pression locaux obtenues à partir des développements asymptotiques à faible nombre de Reynolds de filtration, il permet d'étudier l'effet des conditions aux limites non uniformes et l'influence des caractéristiques géométriques hétérogènes sur l'hétérogénéité de la structure de l'écoulement du fluide. Le modèle unidimensionnel est capable de prédire les variations de la vitesse et de la pression dans des systèmes multi-canaux complexes. Il permet également de préserver les termes inertiels qui peuvent affecter les conditions de succion des parois et la distribution spatiale de la couche de particules en croissance à la paroi, mais il peut être limité par les hypothèses de succion ou d'injection uniformes et peut ne pas capturer tous les détails des phénomènes non linéaires dans des configurations

avec des conditions aux limites non uniformes ou des géométries complexes. [11]

En 1956 Yuan a étendu le problème de l'écoulement laminaire bidimensionnel en régime permanent dans des canaux à parois poreuses à des vitesses de succion ou d'injection modérées à élevées aux parois. L'article propose un modèle unidimensionnel pour déterminer l'écoulement laminaire d'un fluide dans un canal poreux avec succion ou injection des parois. Ce modèle est basé sur l'intégration des équations de Navier-Stokes en utilisant des solutions analytiques pour les champs de vitesse et de pression locaux obtenues à partir des développements asymptotiques à faible nombre de Reynolds de filtration. Ce modèle permet d'étudier l'effet des conditions aux limites non uniformes et l'influence des caractéristiques géométriques hétérogènes sur l'hétérogénéité de la structure de l'écoulement du fluide. Le modèle unidimensionnel est capable de prédire les variations de la vitesse et de la pression dans des systèmes multi-canaux complexes. Il permet également de préserver les termes inertiels qui peuvent affecter les conditions de succion des parois et la distribution spatiale de la couche de particules en croissance à la paroi, mais il peut être limité par les hypothèses de succion ou d'injection uniformes et peut ne pas capturer tous les détails des phénomènes non linéaires dans des configurations avec des conditions aux limites non uniformes ou des géométries complexes. [12]

En 2002 Todd A. Jankowski et Joseph Majdalani explorent l'écoulement laminaire oscillatoire dans un canal rectangulaire avec succion des parois. Les auteurs, Todd A. Jankowski et Joseph Majdalani, se concentrent sur les grandes suctions imposées uniformément le long des parois perméables. L'étude vise à comprendre les perturbations de pression de faible amplitude qui produisent un champ oscillatoire. Les équations de conservation sont linéarisées et divisées en équations de premier ordre (stationnaires) et de premier ordre (dépendantes du temps). Les solutions obtenues montrent que l'augmentation de la fréquence de succion comprime la couche rotationnelle près de la paroi, et que l'effet de la succion est similaire à celui de la couche de Stokes sur des parois dures. L'avantage de la linéarisation est qu'elle permet de simplifier les équations complexes et de les rendre plus faciles à résoudre analytiquement mais sa faiblesse est qu'elle peut introduire des approximations qui ne capturent pas tous les détails des phénomènes non linéaires. De plus, cette méthode peut ne pas être applicable à des écoulements avec des conditions aux limites non uniformes ou des géométries complexes. [13]

En 2004 Laurent Oxarango, Philippe Schmitz, et Michel Quintard. proposent un modèle unidimensionnel pour déterminer l'écoulement laminaire d'un fluide dans un canal poreux avec succion ou injection des parois. Ce modèle

est basé sur l'intégration des équations de Navier-Stokes en utilisant des solutions analytiques pour les champs de vitesse et de pression locaux obtenues à partir des développements asymptotiques à faible nombre de Reynolds de filtration. Le modèle est validé pour un canal poreux unique de section rectangulaire ou circulaire avec succion uniforme ou variable des parois, puis appliqué à un système multi-canaux bidimensionnel. Les résultats montrent que Le modèle permet d'étudier l'effet des conditions aux limites non uniformes et l'influence des caractéristiques géométriques hétérogènes sur l'hétérogénéité de la structure de l'écoulement du fluide. L'avantage sur ce modèle est qu'il est capable de prédire les variations de la vitesse et de la pression dans des systèmes multi-canaux complexes. Il permet également de préserver les termes inertiels qui peuvent affecter les conditions de succion des parois et la distribution spatiale de la couche de particules en croissance à la paroi mais le modèle peut également être limité par les hypothèses de succion ou d'injection uniformes et peut ne pas capturer tous les détails des phénomènes non linéaires dans des configurations avec des conditions aux limites non uniformes ou des géométries complexes.[14]

En 2010 Saeed Dinarvand et Mohammad Mehdi Rashidi explorent l'écoulement laminaire, isotherme, incompressible et visqueux dans un domaine rectangulaire délimité par deux parois poreuses mobiles en utilisant la méthode d'analyse homotopique. La méthode d'analyse homotopique (HAM) est une technique analytique utilisée pour résoudre des équations différentielles non linéaires. Elle permet de transformer progressivement un problème difficile en un problème plus simple, elle a permis de développer des solutions analytiques pour l'écoulement de fluide visqueux dans un canal poreux avec des parois en expansion ou contraction lente. Les résultats montrent que l'augmentation du nombre de Reynolds diminue la vitesse axiale au centre du canal pendant l'expansion et l'augmente légèrement près de la surface lors de la contraction. Les solutions analytiques obtenues sont présentées sous forme de séries et leur convergence est soigneusement analysée. Les résultats montrent que la méthode de perturbation homotopique (HPM) ne donne pas de résultats précis pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds de perméation. Les résultats graphiques montrent l'influence du taux de dilatation des parois et du nombre de Reynolds de perméation sur la vitesse, la distribution de la pression normale et la contrainte de cisaillement des parois. La méthode HAM s'est avérée fiable et en bon accord avec les solutions numériques, néanmoins elle peut devenir complexe et difficile à appliquer pour des systèmes avec des conditions aux limites non uniformes ou des géométries complexes.[15]

En 2017 M. G. Sobamowo analyse l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans un canal poreux avec des parois en expansion ou contraction lente, en utilisant la méthode des paramètres de variation. La VPM est une méthode analytique approximative utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires et non linéaires. Elle diffère de la méthode de variation itérative (VIM) en ce qu'elle n'utilise pas de multiplicateurs exacts ou approximatifs, mais calcule le multiplicateur en utilisant la technique de Wronskian. Les résultats montrent que l'augmentation du nombre de Reynolds diminue la vitesse axiale au centre du canal pendant l'expansion et l'augmente légèrement près de la surface lors de la contraction. L'avantage sur cette méthode est qu'elle peut résoudre des équations non linéaires sans nécessiter de linéarisation, de discrétisation ou d'autres approximations qui pourraient entraîner des erreurs numériques importantes, mais l'inconvénient est qu'elle peut devenir complexe et difficile à appliquer pour des systèmes avec des conditions aux limites non uniformes ou des géométries complexes.[16]

En 2019 Salim Hamrelaine, Fateh Mebarek-Oudina, et Mohamed Rafik Sari explorent le flux magnétodynamique (MHD) à travers des parois poreuses non parallèles ou entre deux plaques poreuses solides se croisant à un angle. Le problème de Jeffery-Hamel décrit l'écoulement de fluide visqueux incompressible entre des parois non parallèles ou à travers des canaux convergents-divergents. L'objectif de l'étude est de découvrir le comportement d'un écoulement de fluide magnétodynamique instable dans des canaux convergents-divergents, en raison de son utilité pratique et industrielle. Les équations de base sont dérivées des équations de Navier-Stokes et de Maxwell, et une solution semi-analytique est développée en utilisant la méthode d'analyse homotopique (HAM), c'est une technique analytique utilisée pour résoudre des équations différentielles non linéaires. Elle permet de transformer progressivement un problème difficile en un problème plus simple. Une solution numérique est présentée en utilisant le schéma de Runge-Kutta. Les résultats montrent une bonne concordance entre les solutions analytiques et numériques pour différents angles, nombres de Reynolds, paramètres d'injection et nombres de Hartmann. L'augmentation du nombre de Hartmann stabilise le profil de vitesse. L'injection favorise la vitesse radiale dans les canaux divergents, tandis que la succion a l'effet inverse dans les canaux convergents. L'angle d'inclinaison affecte la vitesse, augmentant dans les canaux convergents et diminuant dans les canaux divergents. Le nombre de Reynolds a un effet contraire sur la vitesse dans les canaux convergents et divergents. Les résultats sont pertinents pour des applications telles que les générateurs MHD, les pompes, les accélérateurs, les réacteurs nucléaires et les débitmètres en

ingénierie biomédicale. La méthode d'analyse homotopique (HAM) est efficace pour résoudre des problèmes non linéaires complexes et montre une bonne concordance avec les résultats numériques.[17].

Après avoir examiné les différentes méthodes et modèles utilisés pour étudier l'écoulement de succion dans des canaux poreux, il est essentiel de choisir une approche qui offre à la fois précision et robustesse. Parmi les méthodes disponibles, la méthode de tir couplée à la méthode de Runge-Kutta se distingue par ses nombreux avantages. Elle peut gérer des conditions aux limites complexes. Elle est particulièrement efficace pour résoudre des équations différentielles ordinaires avec des conditions aux limites non triviales, elle offre une grande précision dans les solutions obtenues. La méthode de Runge-Kutta, en particulier, est connue pour sa capacité à fournir des solutions numériques précises pour des équations différentielles, peut être utilisée pour résoudre une large gamme de problèmes, y compris ceux avec des conditions aux limites non linéaires. La méthode de tir couplée à la méthode de Runge-Kutta offre une précision numérique supérieure, tandis que la HAM par exemple peut introduire des approximations qui ne capturent pas tous les détails des phénomènes non linéaires. En résumé, la méthode de tir couplée à la méthode de Runge-Kutta offre une combinaison de robustesse, de précision et de flexibilité qui la rend supérieure à d'autres méthodes analytiques et numériques pour résoudre des équations différentielles complexes avec des conditions aux limites non triviales.

Ce chapitre a jeté les bases de la mécanique des fluides en introduisant les concepts fondamentaux et les principes qui gouvernent le comportement des fluides. Nous avons défini les notions clés et exploré les lois fondamentales qui conduisent à des équations mathématiques, notamment l'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes. Ces principes serviront de point de départ pour analyser, dans le chapitre II, le cas spécifique de l'écoulement d'un fluide en mouvement entre deux plaques poreuses.

CHAPITRE 2

POSITION DU PROBLEME ET METHODE DE RESOLUTION

Après avoir introduit les équations de base de la mécanique des fluides dans le premier chapitre, ce chapitre se concentrera sur la formulation du problème et l'établissement des équations mathématiques, en s'appuyant sur les concepts abordés précédemment. Nous allons suivre plusieurs étapes, notamment la description de la géométrie du problème et des hypothèses, la formulation mathématique, ainsi que l'exposition des méthodes de résolution à la fois analytiques et numérique.

2.1 PRÉSENTATION DU DOMAINE GEOMETRIQUE DE L'ÉCOULEMENT

Le canal est composé de deux plans parallèles séparés par une distance constante égale à h , où h représente la largeur du domaine de l'écoulement. Ces deux plans rigides et de faible épaisseur sont uniformément poreux. Le mouvement qu'ils effectuent peut être dans le même sens ou dans le sens contraire à l'écoulement. La porosité du canal donne lieu au phénomène de succion au niveau des deux parois poreuses lorsque le fluide est en mouvement. La succion est le retrait du fluide hors du canal pendant l'écoulement, c'est un peu comme aspirer un liquide avec une paille : une force attire le liquide d'une zone de haute pression vers une zone de basse pression). Ce qui signifie que le champ de vitesses a deux composantes, une composante

axiale mesurée suivant l'axe longitudinal et une composante normale mesurée suivant l'axe transversal comme l'indique la Figure 2.1.

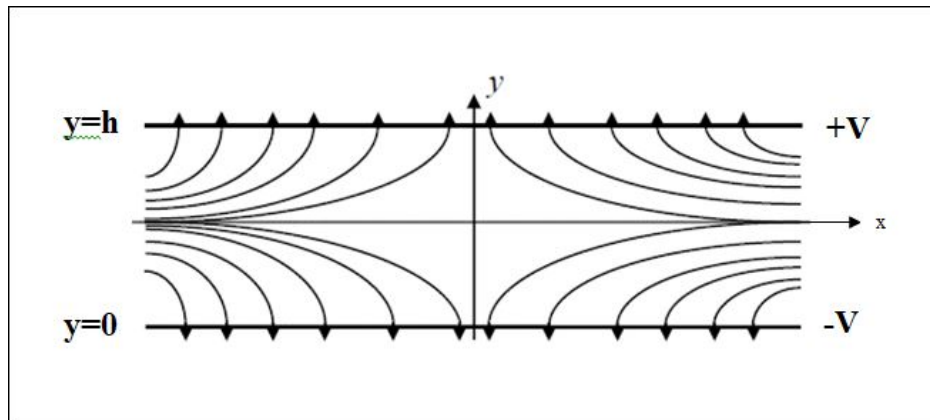


FIGURE 2.1 – Écoulement entre deux plaque parallèles poreuses

2.1.1 Hypothèses simplificatrices

Plusieurs hypothèses sont retenues dans le but de simplifier la modélisation mathématique du problème. Cet ensemble d'hypothèses provient des propriétés physiques de l'écoulement et des caractéristiques géométriques du canal. Dans la suite du travail, les hypothèses à considérer sont les suivantes :

- Le fluide est Newtonien et incompressible.
- L'épaisseur de la couche limite est mince
- L'écoulement est laminaire
- Les propriétés physiques du fluide sont constantes et uniformes, telles que la viscosité et la masse volumique.
- L'écoulement est permanent : la dérivée par rapport au temps du champ de vecteur vitesse est nulle.
- L'écoulement est bidimensionnel : il se fait dans le plan $(O x y)$ et le champ de vitesse possède deux composantes.

2.2 ÉQUATION DU PROBLÈME

Pour étudier cet écoulement, on utilise un système de coordonnées simple, le système cartésien. Puisque le canal est formé de plaques parallèles poreuses, et en prenant

en compte les hypothèses simplificatrices, on peut considérer que l'écoulement est bidimensionnel avec un champ de vecteurs de vitesse qui inclut des composantes transversales et longitudinales, ce qui rend l'analyse plus facile. Ainsi, les équations qui décrivent le mouvement du fluide découlent des équations 1.16, 1.36 et 1.37 du chapitre précédent écrites en coordonnées cartésiennes et en régime permanent :

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}) \quad (2.2)$$

$$\rho(U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}) \quad (2.3)$$

Où ρ et μ sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide. La pression dans l'écoulement est décrite par la variable p . L'équation 2.1 est l'équation de continuité. Les équations 2.2 et 2.3 sont les équations de Navier-Stokes.

2.2.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont données dans les équations suivantes :

$$\begin{aligned} U_x &= 0, & U_y &= -V, & y &= 0 \\ U_x &= 0, & U_y &= +V, & y &= h \end{aligned} \quad (2.4)$$

La condition aux limite $U_x = 0$, $y = 0$ et $y = h$ signifie que les deux parois rectangulaire poreuses sont fixes et ne permettent pas au fluide de glisser contre elles. Et la condition aux limites $U_y = -V$ à $y = 0$ signifie que le fluide se déplace vers le bas à une vitesse constante de $-V$ à la paroi inférieure, tandis que $U_y = +V$ à $y = h$ signifie que le fluide se déplace vers le haut à une vitesse constante de $+V$ à la paroi supérieure

2.2.2 Formulation adimensionnelle des équations du problème

La formulation adimensionnelle est une technique de plus en plus utilisée dans la modélisation des écoulements de fluide dans le but de mettre en évidence les nombres et les paramètres sans dimension encore appelés nombres et paramètres de contrôle du mouvement du fluide. Pour y parvenir, il convient de définir les variables de références. Ainsi, compte tenu de la configuration géométrique de l'écoulement en étude, la largeur h représente la référence des longueurs, les vitesses sont comptées par unité de la vitesse de référence. Plus précisément, les variables sans dimension du problème sont définies comme suit :

$$\eta = \frac{x}{h}; \lambda = \frac{y}{h}; u = \frac{U_x}{V}; v = \frac{U_y}{V}; P = \frac{p}{\rho V^2}$$

L'écriture des équations du problème en termes de variables sans dimension est la suivante :

Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \lambda} = 0$$

Equations de Navier Stocke :

Cas de l'équation 2.2

$$\frac{V^2 u}{h} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V^2 v}{h} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho V^2}{\rho h} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu V}{h^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

En multipliant par h et en divisant par V^2 on a :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu}{Vh} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Or $R_e = \frac{Vh}{\nu}$ (Nombre de Reynold) On a donc,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Par analogie, l'équation (II.3) devient :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

On a donc le système :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.7)$$

Les conditions aux limites associées aux équations 2.5, 2.6 et 2.7 sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} u = 0; & v = -1; & y = 0 \\ u = 0; & v = +1; & y = 1 \end{array} \quad (2.8)$$

Ses équations de Navier-Stokes peuvent encore se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \overrightarrow{rot} V \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{grad}(P) + \frac{1}{Re} \Delta \overrightarrow{V} \quad (2.9)$$

2.3 FONCTION DE COURANT

La fonction de courant est une mesure associée au champ de vitesse et peut être définie pour divers types d'écoulements. Elle permet de représenter les lignes de courant d'un fluide, correspondant aux trajectoires des particules dans un écoulement stationnaire, comme cela est fait dans notre étude.

2.3.1 Existence de la Fonction de courant

Une ligne de courant est une courbe de l'espace décrivant le mouvement d'un fluide et qui à tout instant possède en tout point une tangente parallèle à la vitesse des particules du fluide [18]. En régime permanent les lignes de courant correspondent

aux trajectoires des particules fluides. La conséquence de l'incompressibilité du fluide est le champ de vitesses à divergence nulle comme le décrit l'équation 2.5, qui peut encore s'écrire : $\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \lambda}$. L'existence de la fonction de courant est donc justifiée. De ce fait, les composantes de vitesse peuvent être liées à la fonction de courant ψ par les relations suivantes :

$$u(\eta, \lambda) = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (2.10)$$

$$v(\eta, \lambda) = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (2.11)$$

En considérant les relations 2.10 et 2.11 l'équation de continuité est vérifiée.

2.3.2 Equation de Vorticité

La vorticité est une grandeur vectorielle qui décrit la rotation locale d'un fluide. Elle caractérise les écoulements tourbillonnaires. Un tourbillon est, en dynamique des fluides, une région d'un fluide dans laquelle l'écoulement est principalement un mouvement de rotation autour d'un axe, rectiligne ou rotation autour d'un axe, rectiligne ou incurvé. Ce type de mouvement s'appelle écoulement tourbillonnaire. On peut en observer presque à toutes les échelles depuis le tourbillon de vidange d'une baignoire jusqu'à ceux des atmosphères des planètes [19]. Elle est notée ω et définie comme le rotationnel du champ de vitesse du fluide : $\vec{\omega} = \Delta \vec{u}$

Considérons la notation vectorielle des équations de Navier-Stokes 2.6 et 2.7 où le champ des vitesses a pour expression $\vec{V}(u, v)$ qui est la suivante :

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V} = -\overrightarrow{grad}(P) + \frac{1}{R_e} \Delta \vec{V} \quad (2.12)$$

Où Δ est l'opérateur Laplacien

Ensuite appliquons le rotationnel dans les deux membres de l'équation 2.12.

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right) + \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}) = \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}(P)) + \overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{R_e} \Delta \vec{V}\right) \quad (2.13)$$

Calculons ensuite chaque terme de l'équation 2.13 :

$$\succ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V})$$

En calculant le terme $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{V} \Lambda \overrightarrow{V}$ et en remplaçant u et v avec leurs expressions on obtient :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \overrightarrow{V} \Lambda \overrightarrow{V}) = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\Delta \psi) \vec{i} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Delta \psi) \vec{j} \quad (2.14)$$

$$\succ \overrightarrow{rot}(\frac{1}{R_e} \Delta \overrightarrow{V})$$

$$\overrightarrow{rot}(\frac{1}{R_e} \Delta \overrightarrow{V}) = \frac{1}{R_e} \overrightarrow{rot}(\Delta \overrightarrow{V}) = \frac{1}{R_e} \Delta(\overrightarrow{rot} \overrightarrow{V}) \quad \text{or } \overrightarrow{rot} \overrightarrow{V} = -\Delta \psi \vec{k}$$

Ce qui donne :

$$\overrightarrow{rot}(\frac{1}{R_e} \Delta \overrightarrow{V}) = -\frac{1}{R_e} \Delta^2 \psi \vec{k} \quad (2.15)$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(\frac{V^2}{2})) = \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}(P)) = 0 \quad (2.16)$$

(Car le rotationnel d'un champ de gradient donne un champ nul)

En remplaçant les relations 2.14, 2.15 et 2.16 dans l'équation 2.13 on obtient finalement une équation appelée l'équation de vorticité donnée par la relation :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Delta \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\Delta \psi) = \frac{1}{R_e} \Delta^2 \psi \quad (2.17)$$

L'équation de vorticité 2.17 est une équation aux dérivées partielles qui représente la transformation du problème décrit par les composantes de vitesse u et v , ainsi que la pression P en un problème décrit par la seule fonction de courant ψ

2.4 MÉTHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES

2.4.1 Nouvelle expression de la fonction de courant

La méthode inverse ou des solutions semblables est une approche de plus en plus utilisée en Dynamique des Fluides qui permet de transformer une équation aux dérivées partielles décrivant un écoulement de fluide en une équation différentielle ordinaire modélisant le même problème. La recherche d'une solution exacte par la méthode inverse consiste à faire une hypothèse sur la forme générale de la fonction de courant ψ qui inclut des fonctions inconnues. Ensuite cette forme supposée de la fonction de courant est substituée dans l'équation de vorticité afin de trouver les inconnues, et l'expression de la fonction ψ est trouvée ainsi que les composantes du champ des vecteurs vitesse et du champ de pression qui sont les solutions des équations de Navier-Stokes. De ce fait, Selon l'hypothèse des solutions semblables introduite

par Berman [20] dans un repère cartésien qui stipule que « la composante de vitesse transversale V_r est indépendante de la coordonnée z », la fonction de courant adimensionnelle va dépendre de la coordonnée longitudinale et d'une fonction dépendant uniquement de la coordonnée transversale. Ainsi la nouvelle forme de la fonction de courant est :

$$\psi(\eta, \lambda) = \eta f(\lambda) \quad (2.18)$$

En utilisant les relations qui lient les composantes axiale et normale de la vitesse à la fonction de courant, on en déduit les nouvelles relations :

$$\begin{aligned} u(\eta, \lambda) &= \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \eta f^{(1)}(\lambda) \\ v(\eta, \lambda) &= -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -f(\lambda) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Où f et $f^{(1)}$ représentent la fonction de courant par unité de longueur du canal et sa dérivée première, respectivement.

2.4.2 Obtention de l'équation différentielle ordinaire

En remplaçant les expressions 2.18 et 2.4.1 dans l'équation de vorticité en 2.17, on obtient une équation différentielle ordinaire de degré 4 que vérifie la fonction de courant par unité de longueur et décrite par :

$$f^{(4)} + R_e(f^{(3)}f - f^{(1)}f^2) = 0 \quad (2.20)$$

Sous les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0; \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 1 \quad y = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0; \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -1; \quad y = 1 \text{ Soit :}$$

$$f(0) = 1; f^{(1)}(0) = 0; \quad (2.21)$$

$$f(1) = -1; f^{(1)}(1) = 0 \quad (2.22)$$

Le problème posé se résume mathématiquement à l'équation différentielle décrite par la fonction de courant par unité de longueur en 2.20 avec les conditions aux bornes inférieures et supérieures écrites en 2.21 et 2.22. Cette équation sera résolue numériquement à l'aide de la méthode des tirs.

2.5 METHODE DE TIR

En mécanique des fluides, plusieurs techniques existent pour résoudre les problèmes, chacune ayant ses propres forces et faiblesses. Pour notre étude sur l'écoulement de succion dans un canal rectangulaire poreux, qui implique des conditions aux limites spécifiques, nous avons choisi d'utiliser la méthode de tir combinée à l'algorithme de Runge-Kutta.

Cette méthode permettra de calculer numériquement la fonction de courant par unité de longueur qui est solution de l'équation 2.17 à l'aide du logiciel Matlab.

➤ Principe

Elle a pour principe de transformer un problème aux limites en un problème à conditions initiales, constitué par les conditions initiales déjà imposées par le problème et par d'autres conditions initiales dictées par la position du problème [21]. Le problème ainsi transformé est résolu numériquement à l'aide des algorithmes efficaces. Ensuite on définit une fonction coût qui est l'écart entre les résultats numériques obtenus et les résultats désirés. La solution numérique du problème aux limites est celle pour laquelle la fonction coût est minimale.

➤ Application

Pour résoudre l'équation en 2.20, on conserve la même équation ainsi que les conditions $f(0) = 1$; et $f^{(1)}(0) = 0$, et on introduit deux conditions manquantes choisies arbitrairement pour les dérivées seconde a et troisième b à la frontière initiale. Le système devient donc :

$$f^{(4)} + R_e(f^{(3)}f - f^{(1)}f^2) = 0 \quad (2.23)$$

$$f(0)=1; f^{(1)}(0) = 0 ; f^{(2)}(0) = a ; f^{(3)}(0) = b \quad (2.24)$$

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 étant simple à programmer, assez stable pour les fonctions courantes en physique sur le plan de l'analyse numérique et ne nécessitant pas autre chose que la connaissance des valeurs initiales, elle va permettre de résoudre le problème à valeurs initiales et ainsi calculer les valeurs de $f(1)$ et $f^{(1)}(1)$ qui correspondront aux valeurs choisies de a et b. Pour que les valeurs dépendantes

de a et b soient égales à celles du problème posé en (II.22), il faut définir la fonction coût J telle que :

$$j = H_1^2 + H_2^2 \quad (2.25)$$

Où H_1 et H_2 sont les composantes du vecteur H qui représente la différence entre les valeurs calculées numériquement et les conditions à la borne $\lambda = 1$. Ainsi on a :

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) + 1 \\ f^{(1)}(1) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Ensuite après définition, il faut minimiser la fonction coût. Pour cela, on applique l'algorithme de Newton-Raphson qui permet de déterminer le taux d'accroissement du vecteur ayant pour composantes a et b.

k :l'indice d'itération

H :la matrice Jacobienne non nulle

ce vecteur se détermine à partir de la relation :

$$\vec{H}^k = \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix}^k = - \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}^k \quad (2.27)$$

Il faut calculer la matrice Jacobéenne qui a pour expression :

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial a} & \frac{\partial H_1}{\partial b} \\ \frac{\partial H_2}{\partial a} & \frac{\partial H_2}{\partial b} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Pour trouver $\vec{H}$, on définit ϕ et q , les dérivées partielles d'ordre 1 de f respectivement par rapport à a et b. Les fonctions ainsi définies vérifient un ensemble d'équations et conditions aux limites. Pour la fonction ces dernières sont telles que :

$$\phi^{(4)} + R_e(\phi f^{(3)} + \phi^{(3)} f - \phi^{(1)} f^{(2)} - \phi^{(2)} f^{(1)}) \quad (2.29)$$

$$\phi(0) = 0; \phi^{(1)}(0) = 0; \phi^{(2)}(0) = 1; \phi^{(3)}(0) = 0 \quad (2.30)$$

Et pour la fonction q, elles sont données par :

$$q^{(4)} + R_e(q f^{(3)} + q^{(3)} f - q^{(1)} f^{(2)} - q^{(2)} f^{(1)}) \quad (2.31)$$

$$q(0) = 0; q^{(1)}(0) = 0; q^{(2)}(0) = 0; q^{(3)}(0) = 1 \quad (2.32)$$

Ces deux équations différentielles sont résolues grâce à l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre et les valeurs de ϕ et q à la limite $\lambda = 1$ sont trouvées, ce qui permet

de calculer la matrice Jacobienne. De tout ce qui précède, le vecteur $(\delta a, \delta b)$ est calculé à partir de la relation :

$$\begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix}^{(k)} = - \left(\begin{bmatrix} \phi(1) & q(1) \\ \phi^{(1)}(1) & q^{(1)}(1) \end{bmatrix} \right)^{(k)} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}^{(k)} \quad (2.33)$$

A chaque nouvelle itération le vecteur constitué des nouvelles valeurs de a et b est :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{(k)} \quad (2.34)$$

La condition d'arrêt est donnée pour une valeur minimale de J.

Dans ce chapitre, l'objectif était de formuler les équations du problème en fonction de la géométrie, des conditions et des hypothèses choisies, puis de décrire les méthodes de résolution pour obtenir les résultats. Cela a conduit à une équation d'ordre quatre pour f . Les résultats numériques de cette étude, réalisé grâce à la méthode de tir et à l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre, sont présentes dans le chapitre III.

CHAPITRE 3

RESULTATS ET DISCUSSION

Ce chapitre est consacré à l'analyse des résultats obtenus dans le cadre de notre étude sur l'écoulement de succion dans un canal rectangulaire poreux. L'objectif principal de cette recherche était de caractériser ce type d'écoulement en établissant une modélisation théorique basée sur les équations de Navier stokes et en décrivant l'équation de vorticité, Nous avons utilisé la méthode de tir pour tracer les courbes représentant le comportement du fluide dans le canal. Ces courbes nous offrent une représentation visuelle des dynamiques d'écoulement sous les conditions aux limites spécifiques, ou les plaques sont fixes et poreuses. Dans cette section, nous examinerons en détails ces résultats, en mettant en détail les caractéristiques des courbes et en discutant de leur signification physique. L'interprétation des courbes nous permettra de mieux comprendre les phénomènes d'écoulement au sein du canal, tout en identifiant les implications de ces résultats pour une compréhension plus approfondie des écoulements dans des milieux spécifiques.

3.1 FONCTION DE COURANT EN 3D DANS LE CAS DE L'ASPIRATION SANS MOUVEMENT DES PLAQUES

La courbe de la fonction de courant en 3D représente le champ de vitesse du fluide dans le canal rectangulaire poreux. L'axe horizontal correspond à la position le long de la largeur du canal, l'axe vertical correspond à la position le long de la hauteur du canal, et l'axe vertical à droite représente la valeur de la fonction de courant. On observe ce qui suit :

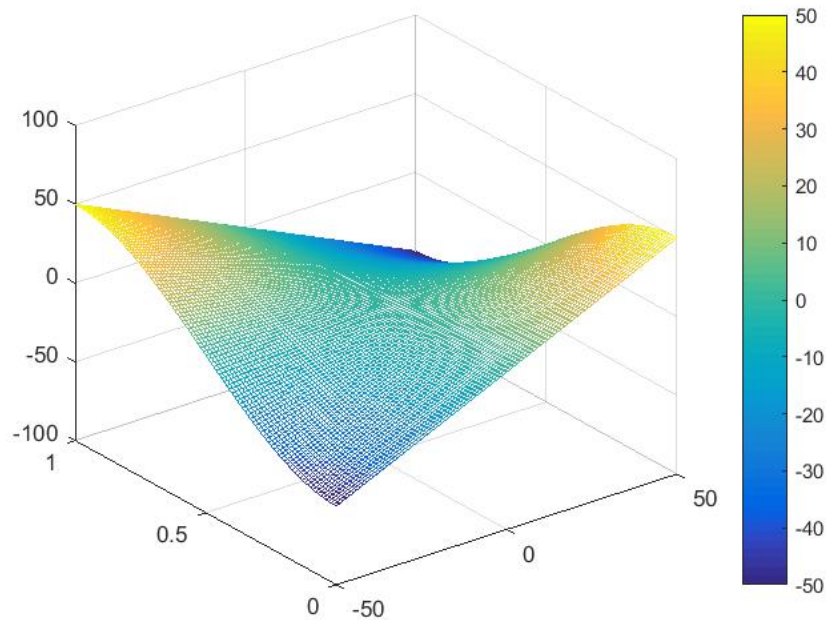


FIGURE 3.1 – Fonction de courant en 3D

- **Forme generale** : la courbe présente une forme en selle, avec une zone centrale plus élevée et des pentes inclinées vers le bas sur les côtes. Cela indique que le fluide s'écoule principalement dans la direction horizontale et que la vitesse du fluide est plus importante au centre du canal qu'à proximité des parois
- **Gradient de couleur** : la couleur de la courbe varie en fonction de la valeur de la fonction de courant. Les couleurs plus chaudes (jaune) représentent des valeurs de ψ positives, tandis que les couleurs plus froides (bleues) représentent les valeurs de ψ négatives, le gradient de couleur indique que le fluide s'écoule dans la direction opposée sur les deux côtes du canal
- **Centre du canal** : au centre du canal, la fonction de courant atteint une valeur maximale (positive ou négative) selon la direction de l'écoulement. Cette zone correspond à la zone de vitesse maximale du fluide
- **Zone de transition** : on observe une zone de transition entre le centre du canal et les parois où la fonction de courant change rapidement de valeur. Cela indique que la vitesse du fluide diminue progressivement de la zone centrale vers les parois
- **Symétrie** : la courbe de la fonction de courant semble symétrique par rapport au plan $y=0$, ce qui est cohérent avec la configuration du problème où les deux

parois du canal sont identiques

3.2 LIGNE DE COURANT

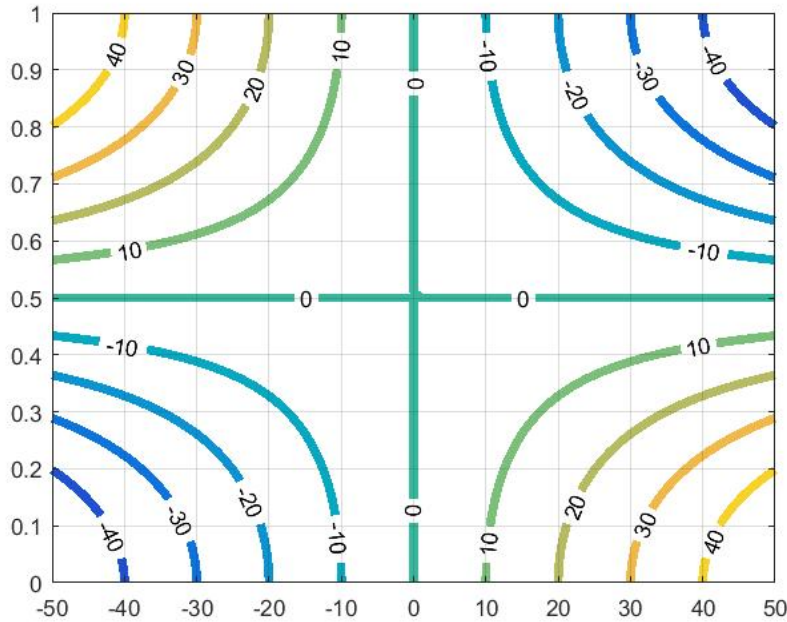


FIGURE 3.2 – Ligne de Courant

La figure représente les lignes de courants d'un écoulement de fluide dans un canal rectangulaire, chaque courbe représente une ligne de courant, le long de laquelle le fluide se déplace sans changer de direction. Déjà il faut rappeler qu'en régime permanent les lignes de courant sont équivalentes aux trajectoires. On observe ce qui suit :

- **Coordonnée** : La figure est représentée dans un système de coordonnées cartésiennes, avec l'axe horizontal correspondant à la position x et l'axe vertical correspondant à la position y
- **Ligne de courant** : Chaque courbe représente une ligne de courant, le long de laquelle le fluide se déplace. La valeur de la fonction de courant, indiquée sur chaque ligne, représente la quantité de fluide qui traverse une section donnée du canal. On constate que les lignes de courant augmentent au fur et à mesure que les particules de fluides se rapprochent de la paroi, et au milieu du canal le fluide

est immobile, il y a un certain équilibre ceci du au fait qu'au milieu du canal les particules de fluides ressentent le même effet d'aspiration mais de sens contraire de part et d'autre de la plaque .

- **Direction de l'écoulement** : Les lignes de courant courbées indiquent que le fluide s'écoule dans la direction de la courbure
- **Symetrie** La figure présente une symétrie par rapport à la ligne $y=0.5$, cela indique que l'écoulement est symétrique, ce qui est cohérent avec la configuration du canal où les deux parois sont identiques
- **Condition aux limites** : Conditions aux limites : Les lignes de courant verticales à $x=0$ et $x=1$ correspondent aux parois du canal. On peut observer que les lignes de courant sont perpendiculaires aux parois du canal, indiquant que le fluide est immobile sur ces parois.
- **Vitesse du fluide** : Les lignes de courant plus rapprochées indiquent une vitesse du fluide plus élevée, tandis que les lignes de courant plus espacées indiquent une vitesse du fluide plus faible. On peut observer que la vitesse du fluide est plus importante au centre du canal ($y=0.5$), tandis qu'elle est plus faible près des parois du canal.

3.3 PROFIL DE VITESSE TRANSVERSAL

Pour un nombre de Reynold fixe, le profil de vitesse transversale varie. On constate que le profil de vitesse transversale est nul au centre et maximale près des parois de 0 à 1. Cette vitesse est nulle au centre car la succion est exercée par les parois, les vitesses transversale au milieu s'annule par symétrie.

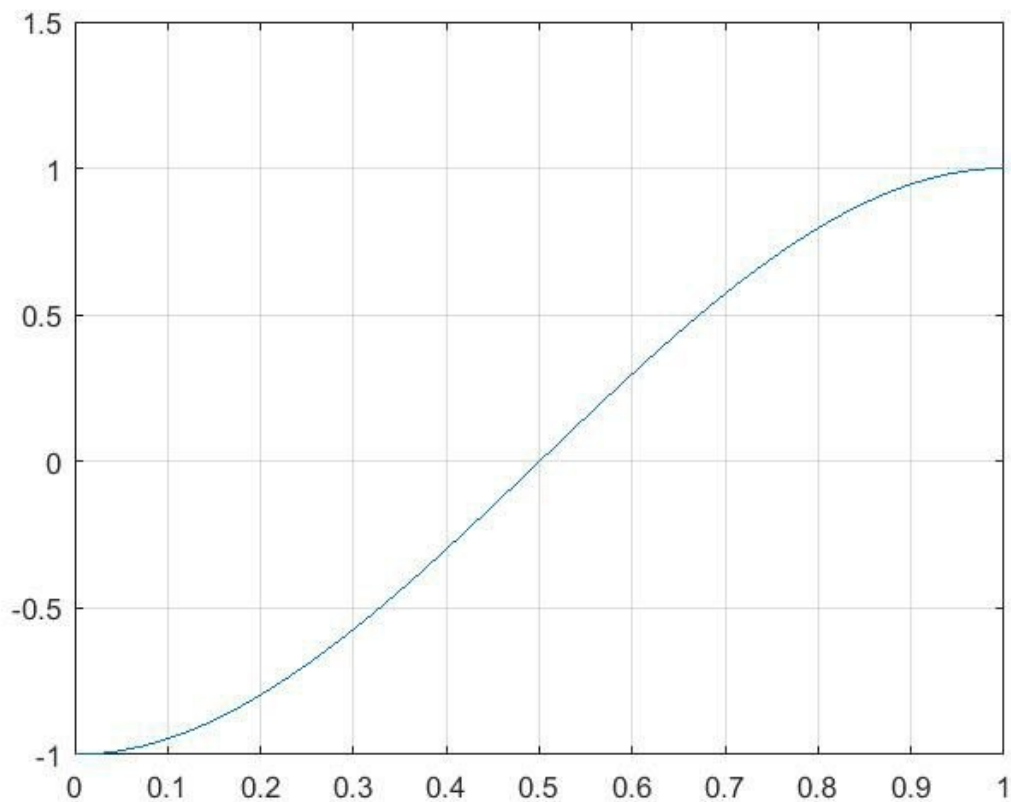


FIGURE 3.3 – Profil de Vitesse transversale

3.4 PROFIL DE VITESSE LONGITUDINALE

Pour un nombre de Reynolds Fixe, le profil de vitesse longitudinale varie. On constate que le profil de vitesse est parabolique et atteint une valeur maximale ou un peak au centre de la paroi et s'annule au niveau de la paroi. La suction exercée par la paroi a pour effet de freiner la vitesse longitudinale près de la parois en aspirant le fluide. Cela se traduit donc par une vitesse longitudinale qui s'annule aux parois du canal.

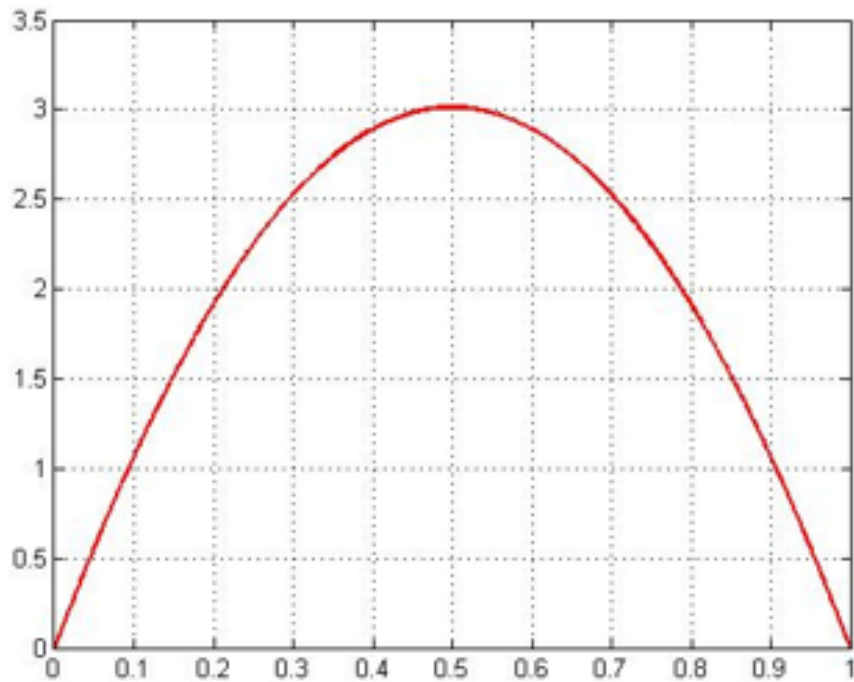


FIGURE 3.4 – Profil de Vitesse Longitudinale

3.5 FONCTION DE COURANT PAR UNITE DE LONGUEUR

La courbe représente la fonction de courant par unité de longueur, en fonction de la position dans le canal rectangulaire poreux. L'axe horizontal représente la position y , qui correspond à la hauteur du canal. L'axe vertical représente la valeur de la fonction de courant par unité de longueur, notée ψ . On observe ce qui suit :

- **Forme : generale** : La courbe présente une forme parabolique, décroissante de façon monotone de 1 à -1. Cela indique que la vitesse du fluide varie de manière continue à travers le canal, étant plus élevée près de la plaque supérieure et plus faible près de la plaque inférieure.
- **Valeur de la Fonction de courant** : La fonction de courant par unité de longueur prend des valeurs positives près de la plaque supérieure ($y=0$) et des valeurs négatives près de la plaque inférieure ($y=1$), indiquant que le fluide s'écoule dans des directions opposées le long des deux plaques.
- **Symetrie** La courbe est symétrique par rapport à la ligne $y=0.5$, indiquant que l'écoulement est symétrique par rapport au milieu du canal, comme on pouvait s'y attendre avec les conditions aux limites imposées.

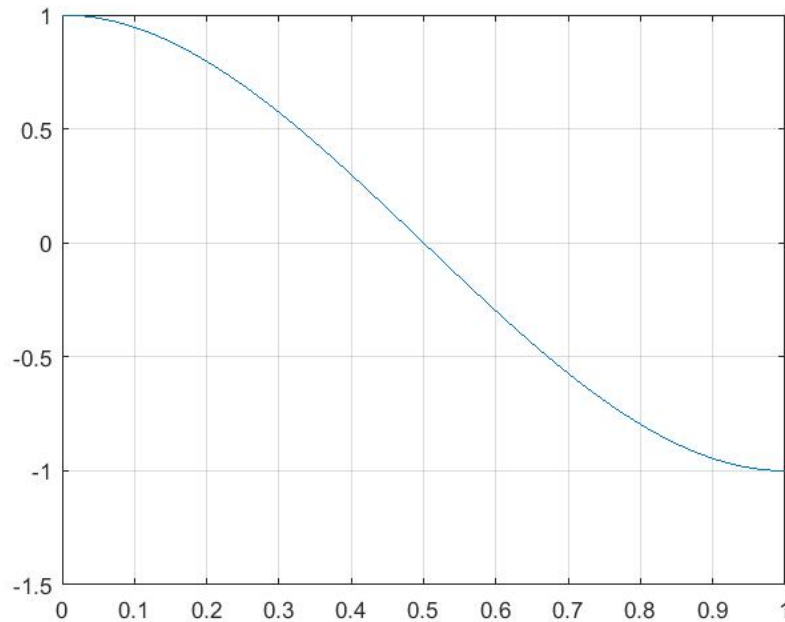


FIGURE 3.5 – Fonction de courant par unité de longueur

- **Vitesse maximale** Conditions aux limites : La vitesse du fluide est maximale près de la plaque supérieure ($y=0$), où la valeur de la fonction de courant est la plus élevée. La vitesse du fluide diminue ensuite de manière linéaire à travers le canal jusqu'à atteindre sa valeur minimale près de la plaque inférieure ($y=1$).
- **Écoulement de suction** : La forme de la courbe et le fait que la fonction de courant prend des valeurs opposées sur les deux parois du canal suggèrent que l'écoulement est un écoulement de suction, où le fluide est aspiré par les parois supérieures et inférieures du canal.

CONCLUSION ET PERSPECTIVE

La présente étude a exploré le phénomène d'écoulement de succion au sein d'un canal rectangulaire poreux. En s'appuyant sur les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, nous avons établi le système d'équations de Navier Stokes régissant cet écoulement. L'introduction des concepts de vorticité et de fonction de courant, couplée à l'hypothèse d'un fluide incompressible et d'un écoulement bidimensionnelle, a permis de formuler une équation de vorticité dépendante de la fonction de courant. La résolution de cette équation aux dérivées partielles a été effectuée en recourant à la méthode des solutions semblables, conduisant à une équation différentielle ordinaire.

Enfin la méthode de tir numérique a été utilisée pour déterminer la solution complète du problème. La combinaison de ces approches a permis d'obtenir des visualisations graphiques de la fonction de courant, des lignes de champ, et des profils de vitesses transversale et longitudinale, offrant ainsi une représentation détaillée de l'écoulement étudié.

Les résultats obtenus montrent que la vitesse du fluide varie de manière significative à travers le canal, avec une vitesse maximale au centre et une diminution progressive vers les parois pour le cas du profil de vitesse longitudinale et une vitesse nulle au centre et maximale vers les parois pour le cas du profil de vitesse transversale. La succion aux parois joue un rôle crucial dans la distribution de la vitesse, influençant directement l'efficacité de l'écoulement. Ces observations sont essentielles pour des applications pratiques telles que la filtration et séparation ou encore le refroidissement et la gestion thermique .

En outre, cette étude met en lumière l'importance de la perméabilité des parois

poreuses et de la force de succion dans la conception et l'optimisation des systèmes de filtration. Les connaissances acquises peuvent être appliquées pour améliorer la performance des dispositifs industriels et biomédicaux, en garantissant une meilleure gestion des écoulements de fluides.

Cependant, il est important de noter que cette recherche constitue une première étape dans l'exploration de ce phénomène complexe. Des études futures pourraient se concentrer sur l'influence d'autres paramètres, tels que la géométrie du canal, les propriétés du fluide, ou encore l'effet de conditions aux limites variables. De plus, l'exploration de configurations plus complexes, incluant des milieux poreux hétérogènes, pourrait offrir des perspectives nouvelles et enrichir notre compréhension des écoulements dans des systèmes poreux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Richecœur, “Mécanique des fluides- aérodynamique, éditions ellipses,,”
- [2] K. Gertsen, “Boundary layer theory,”
- [3] D. Bernardin, “Sur les solutions autosimilaires positives des équations de couche limite d’un fluide en loi de puissance quand l’écoulement extérieur est accéléré,”
- [4] J. P. R. Ouziaux, “Mécanique des fluides appliquée,” *Dunod, Université, Paris*, 1978.
- [5] W. H. R. P. G. Drazin, *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [6] P. Louis, “Mécanique des fluides à masse volumique variable, paris : Presses de l’école nationale des ponts et chaussées,”
- [7] S. Candel, *Mécanique des fluides-Cours*. Dunod,, 1995.
- [8] J.-F. Sini, “Cours de mécanique des fluides, nantes,”
- [9] F. M. White, “Viscous fluid flow second edition, island,”
- [10] J. Sellars, *Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers*. J. Appl. Phys., Vol. 26, pp. 489-490, 1955.
- [11] R. Terrill and G. Shrestha, *Laminar flow through parallel and uniformly porous walls of different permeability*,. ZAMP., Vol. 16, pp. 470-482,, 1965.
- [12] S. W. Yuan, A.B Finkelstein, *Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall*. Trans. ASME., Vol. 78, pp. 719-724,, 1956.
- [13] T. A. J. et Joseph Majdalani, “Laminar flow in a porous channel with large wall suction and a weakly oscillatory pressure,”

-
- [14] e. M. Q. Laurent Oxarango, Philippe Schmitz, “Laminar flow in channels with wall suction or injection : a new model to study multi-channel filtration systems,”
- [15] S. D. et Mohammad Mehdi Rashidi, “A reliable treatment of a homotopy analysis method for two-dimensional viscous flow in a rectangular domain bounded by two moving porous walls,”
- [16] M. G. Sobamowo, “On the analysis of laminar flow of viscous fluid through a porous channel with suction/injection at slowly expanding or contracting walls,”
- [17] e. M. R. S. Salim Hamrelaine, Fateh Mebarek-Oudina, “Analysis of mhd jeffery hamel flow with suction/injection by homotopy analysis method,”
- [18] Wikipédia, “Fonction de courant [consulté le 03 juillet 2023]. https://fr.m.wikipedia.org/wiki/fonction_de_courant,”
- [19] Wikipédia, “Tourbillon (physique) [vu le 20 juin 2023],”
- [20] A. Berman, *Laminar flow in channels with porous walls*. J. Appl. Phys., Vol. 24, pp. 1232-1235, 1953.
- [21] N. M. et al., “On the existence and determination of the incompressible laminar flow located in the polar plane of a porous annular pipe,,” *Alexandria Eng. J.*, Vol. 61, pp. 2637-2650, 2022.