

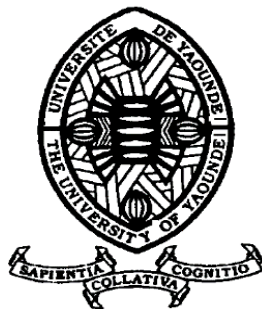
REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES
ET GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN PHYSIQUE ET
APPLICATIONS



REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCES

DEPARTMENT OF PHYSICS

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCES,
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

DOCTORAL RESEARCH UNIT FOR PHYSICS
AND APPLICATIONS

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET D'HYDRAULIQUE

COUCHE LIMITE LAMINAIRE SUR UNE PLAQUE PLANE AVEC ASPIRATION PARIÉTALE

**Mémoire présenté en Vue de l'obtention du Diplôme de
Master en science Physique**

Option:

MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Par:

NDASSI LIJE DUBRIL SIMPHORIEN

Titulaire de la Licence de Physique

Matricule : **20Q2413**

Sous la direction de:

Dr. LAMARA Maurice, PhD

Chargé de Cours

Faculté des Sciences, Université de
Yaoundé I

ANNÉE ACADÉMIQUE 2025



Présenté et Soutenu par :

NDASSI LIJE DUBRIL SIMPHORIEN

Le : Vendredi 07, Novembre 2025.

JURY DE SOUTENANCE :

Président

Pr. PEMHA Elkana, HDR

Professeur Titulaire des Universités, Génie Mécanique,
Mécanique des Fluides Appliquée,
Docteur en Mécanique Appliquée de l'Ecole Centrale de Lyon,
Université de Yaoundé I.

Examineur

Pr. NGO NYOBE Elisabeth, PhD

Professeur Titulaire de Génie Mécanique,
École Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé,
Université de Yaoundé I.

Rapporteur

Dr. LAMARA Maurice, PhD

Docteur, Chargé de Cours,
Université de Yaoundé I.

ANNÉE ACADÉMIQUE : 2025

DÉDICACES

Ce mémoire est dédié à ma mère, Mme PEPEMSSE Edwige ainsi qu'à toute ma famille.

REMERCIEMENTS

La rédaction de ce mémoire de Master 2 a requis la participation et le soutien de plusieurs personnes et personnalités à qui je tiens à témoigner ma reconnaissance.

J'exprime ma profonde gratitude et mes sincères remerciements au Dr. LAMARA Maurice, Chargé des Cours de la Faculté des Sciences à l'Université de Yaoundé I pour avoir dirigé ce travail, pour son temps qu'il a mis à ma disposition, ses encouragements et ses conseils.

Je remercie le Professeur NGO NYOBE Elisabeth pour les méthodes numériques telles que la méthode de Tir et celle de Runge Kutta et bien d'autres, dont elle a pris soins de nous enseigner.

Mes remerciements vont également tout droit au Pr. HONA Jacques, chef du Laboratoire, Professeur de l'université de Yaoundé I qui m'a permis d'intégrer le Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique, ainsi que pour son soutien, ses encouragements et son encadrement tout au long de mon cursus jusqu'à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie le Pr. PEMHA Elkana d'avoir créé ce Laboratoire. Je remercie également tous les enseignants du département de Physique qui sont intervenus tout au long de ma formation.

Je remercie particulièrement Wilfred Leclair BESSEM, Doctorant au Laboratoire de Mécanique Modélisation et Procédés propre de Marseille en France pour toutes l'aides qu'il m'a apporté ainsi que ses conseils et son soutien.

Je dis également un grand merci à Orlane ZANG, doctorante à l'université de Picardie Jules Verne de France pour son aide précieuse, son soutien, ses conseils et sa bienveillance à mon égard.

Je remercie ma mère PEPEMSSE Edwige celle à qui je dois tout sur cette terre pour son amour, ses encouragements, son soutien financier, ses bénédictions, pour

ne citer que ceux-ci. J'exprime en plus cette gratitude à Mme TCHEMTCHOUA Hortense celle qui à mes yeux est comme une seconde mère pour ses précieux conseils, encouragements, le soutien sous toutes ses formes ; les mots ne peuvent suffire pour dire à quel point je lui suis reconnaissant.

Je dis merci à mes camarades de promotion, aux aînés de spécialités, à mes amis en particulier, MASSO Jacky, TAMEKO Asnelle, NDE Valdes, AMBOMO Philippe, TCHIMASSOUM Arnold, EBOH Joyss, YAMI Ornella, TIEPMA Katriona, NDOFEU Meredith, NJOCK NJAP Jérémie, Edith ASSENA, ... pour leurs conseils, soutiens et aides qu'ils ont apportés au moment opportun.

Cette occasion me permet d'adresser un grand merci à Mme YEATEBINHA Mayelle Gwladys et Mme WEGANG Blandine qui n'ont jamais cessé de me soutenir et encourager. Qu'elles trouvent ici ma reconnaissance la plus profonde.

Je remercie également ceux qui, de prêt ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire. Je suis fier d'avoir pu compter sur le soutien de tant de personnes talentueuses et dévouées à cet effet.

TABLE DES MATIERES

DÉDICACES.....	i
REMERCIEMENTS	ii
TABLE DES MATIERES	iv
LISTES DES FIGURES.....	vi
LISTES DES SYMBOLES.....	viii
RESUME.....	x
ABSTRACT	xi
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I : REVUE DE LA LITTÉRATURE	5
I.1. DESCRIPTION QUANTITATIVE ET QUALITATIVE DES	6
ECOULEMENTS	6
I.1.1. Clarification des concepts	6
I.1.2. Propriétés physiques des fluides	7
I.1.3. Régime d'écoulement : expérience de Reynolds	10
I.2. ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MÉCANIQUE	12
DES FLUIDES.....	12
I.2.1. Équation de conservation de la masse.....	12
I.2.2. Équation de conservation de la quantité de mouvement.....	14
I.3. ÉTAT DE L'ART	25
CHAPITRE II :MATÉRIELS ET MÉTHODES.....	29
II.1. Description du problème étudié.....	30
II.2. Formulation mathématique du problème	31
II.2.1. Hypothèses	31

II.2.2. Équation de la couche limite laminaire	31
II.2.3. Conditions aux limites.....	33
II.2.4. Grandeurs caractéristiques de la couche limite.....	34
II.2.5. Forme adimensionnée des équations de la couche limite	35
II.3. Méthodes de résolution de l'équation du problème	37
II.3.1. Méthodes des solutions semblables ou Méthode différentielle	37
II.3.2. Méthode intégrale de Bianchini	41
II.4. Méthode de Tir	46
II.4.1. Principe de la méthode	46
II.4.2. Algorithme de Newton Raphson	47
II.4.3. Algorithme de Runge Kutta	48
CHAPITRE III : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS.....	50
III.1. MÉTHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES.....	51
III.1.1. Cas d'une plaque plane imperméable.....	51
III.1.2. Cas d'une plaque plane poreuse	55
III.2. MÉTHODE INTÉGRALE DE BIANCHINI.....	59
III.2.1. Cas d'une plaque plane imperméable.....	59
III.2.2. Cas d'une plaque plane poreuse	60
CONCLUSION	62
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	64
ANNEXE.....	67

LISTES DES FIGURES

Figure.1.1. Ecoulement entre deux plaques : Expérience de Couette.....	9
Figure 1.2. Écoulement Laminaire.....	11
Figure 1.3. Écoulement Turbulent.....	11
Figure.1.4 : Illustration du principe de conservation de la masse.....	12
Figure.1.5 : Portion du fluide (D) délimité par une surface S	15
Figure.1.6 : Coupure fictive de la portion de fluide (D).	15
Figure.1.7 : distribution de la contrainte sur un domaine de forme tétraédrique.	17
Figure.1.8 : distribution de la contrainte sur la 1 ^{ère} surface du tétraédrique	17
Figure.1.9 : distribution de la contrainte sur la 2 ^{ème} surface du tétraédrique	17
Figure.1.10 : distribution de la contrainte sur la 3 ^{ème} surface du tétraédrique	17
Figure.2.1 : couche limite dynamique sur une plaque plane imperméable.....	30
Figure.2.2 : couche limite dynamique sur une plaque plane poreuse	31
Figure.3.1-a. Variation de la Fonction de courant adimensionnelle	52
Figure.3.1-b. Variation de la Fonction de Vitesse adimensionnelle.	52
Figure.3.1-c. Variation de la Cisaillement Pariétale.	53
Figure.3.2. Variation de l'épaisseur de la couche limite le long de la plaque. ...	54
Figure.3.3-a. Variation de la Fonction de courant adimensionnelle sur une plaque plane poreuse.	55
Figure.3.3-b. Variation de la Vitesse adimensionnelle sur une plaque plane poreuse.....	56
Figure.3.3-c. Variation de la Contrainte de Cisaillement Pariétale sur une plaque plane poreuse.	56
Figure.3.4-a. Comparaison de la fonction de courant avec et sans aspiration. ...	57
Figure.3.4.-b Comparaison des profils Vitesse adimensionnelle avec et sans aspiration.	58

Figure.3.4. Comparaison la contrainte de Cisaillement Pariétale avec et sans aspiration.	58
Figure.3.5. Comparaison de l'épaisseur de la couche limite avec et sans aspiration.	59
Figure.3.6. Validation de la loi de Bianchini de la vitesse sans aspiration par le profil numérique de Blasius.	60
Figure.3.7. Validation de la loi de Bianchini de la vitesse avec aspiration sans facteur correctif par le profil numérique de Blasius.	61
Figure.3.8. Validation de la loi de Bianchini de la vitesse avec aspiration et avec facteur correctif ($\beta = 0.7$) par le profil numérique de Blasius.	61

LISTES DES SYMBOLES

Symboles	Représentations	Unités
ρ	Masse volumique	kg / m^3
dm	Élément de Masse	kg
$dV, d\tau$	Volume élémentaire	m^3
d	Densité	$/$
χ	Coefficient de compressibilité isotherme	$/$
α	Coefficient de dilatation	$/$
T	Température	$^{\circ}K$
P	Pression	P_a
F	Force	N
μ	Viscosité dynamique	$kg \cdot m^{-1} \cdot s$
S, dS	Surface, surface élémentaire	m^2
ν	Viscosité cinématique	m^2 / s
f	Fonction de courant adimensionnelle	$/$
f'	Vitesse adimensionnelle	$/$
f''	Contrainte de cisaillement adimensionnelle	$/$
L	Longueur caractéristique	m
t	Temps	s
U_e	Vitesse caractéristique	m / s
V_a	Vitesse de transfert de masse	m / s
u	Composante de la vitesse suivant x	m / s
v	Composante de la vitesse suivant y	m / s
x, y	Coordonnées cartésiennes	$/$
δ	Épaisseur de la couche limite dynamique	m
δ_1	Épaisseur de déplacement	m

Listes des Symboles

δ_2	Épaisseur de la quantité de mouvement	m
ψ	Fonction de courant	$/$
τ_p	Contrainte de cisaillement pariétale	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
C_f	Coefficient de frottement	$/$
σ	Tenseur des contraintes	$/$
η	Variable des similarités	$/$
H	Facteur de forme	$/$
$\mathbf{f}$	Densité massique des forces extérieures	$/$
i, j, k, l	Indice itératif	$/$
R_e	Nombre de Reynolds	$/$
ε	Tenseur des taux de déformation	$/$

RESUME

Ce travail m'a permis d'étudier l'écoulement laminaire d'un fluide sur une plaque plane poreuse et horizontale avec aspiration à travers la paroi. Pour se faire, nous avons utilisé les équations de Navier-Stokes simplifiées pour obtenir l'équation de la couche limite ou encore équation de Prandtl. Pour résoudre cette équation, nous avons utilisé deux méthodes dont la première est la méthode des solutions semblable, qui consiste à transformer l'équation de la couche limite en une équation différentielle ordinaire d'ordre trois ou encore équation de Blasius tout en sachant qu'il existe une vitesse d'aspiration V_a à la paroi, et la seconde méthode est une méthode intégrale dite de Bianchini qui est une méthode analytique approximative faisant intervenir les fonctions Lambert et Erreur pour caractériser les profils de la couche limite avec aspiration et même dans le cas sans aspiration. La méthode de résolution numérique utilisée est la méthode de Tir basée sur les schémas numériques de Runge Kutta et Newton-Raphson. L'analyse montre que l'épaisseur de la couche limite, le profil de vitesse, la fonction de courant ainsi que la contrainte de cisaillement à la paroi sont affectées par l'aspiration. Les résultats obtenus montrent que l'aspiration a un effet similaire à celui d'un gradient de pression favorable ; ils montrent également que la méthode approximative de Bianchini présente l'avantage d'une bonne approximation des profils numériques face à la méthode de Blasius.

Mots clés : couche limite, aspiration, fonction Lambert, fonction Erreur, porosité.

ABSTRACT

This work allowed us to study the laminar flow of a fluid on a porous and horizontal flat plate with suction through the wall. To do this, we used the simplified Navier-Stokes equations to obtain the boundary layer equation or Prandtl equation. To solve this equation, we used two methods, the first is similar solutions method which consists of transforming the boundary layer equation to an ordinary differential equation of order three or Blasius equation while knowing that there is a suction velocity V_a , at the wall, and the second method is an integral method called Bianchini which is an approximate analytical method involving the Lambert and Error functions to characterize the boundary layer profiles with suction and even in the case without suction. The numerical resolution method used is the shooting method based on the numerical schemes of Runge Kutta and Newton-Raphson. The analysis shows that the boundary layer thickness, the velocity profile, the stream function as well as the wall shear stress are affected by suction. The results obtained show that suction has an effect similar to that of a favorable pressure gradient ; they also show that the approximate Bianchini method has the advantage of a good approximation of the numerical profiles compared to the Blasius method.

Keywords : Boundary Layer, Suction, Lambert function, Error function, porosity.

INTRODUCTION

La mécanique des fluides est une branche de la physique qui étudie les propriétés et les comportements des fluides (liquide, gaz) en mouvement ou au repos. Elle s'intéresse à la description et à la prédiction des écoulements de fluides, ainsi qu'aux forces et aux interactions qui agissent sur les fluides et les objets qui les entourent. Un fluide quant à lui est un milieu matériel continu essentiellement déformable et susceptible de s'écouler. L'étude de celui-ci permet de résoudre de nombreux problèmes liés aux écoulements notamment, en océanographie pour prédire les conditions climatiques et comprendre leurs impacts, dans l'industrie du pétrole et gaz pour la conception des pipelines, des pompes et des systèmes de transport des hydrocarbures, en Aéronautique pour comprendre les écoulements autour des obstacles (ailes d'avion, fusées, etc...), et bien d'autres domaines.

Nous mettrons donc un accent particulier sur les écoulements autour des obstacles où une étude approfondie de celui-ci remonte depuis le 18^e siècle avec **Jean le Rond d'Alembert** qui stipule que « Dans un écoulement non visqueux, aucune trainée n'est prédite sur un corps en mouvement. » ce qui est en contradiction avec les lois physiques (les corps lors de leurs déplacements dans un fluide rencontrent certaines résistances). Mais en 1904, le mathématicien Ludwig Prandtl démontre que malgré une viscosité très faible, les écoulements autour des obstacles génèrent une trainée importante, car pour ce type de fluide, la vitesse reprend rapidement sa valeur extérieure, conférant à la fine zone près de la paroi un rôle majeur dans la génération des forces de frottement ; cette zone est alors appelée Couche Limite. À partir de là, les études menées sur celle-ci ont permis de pallier à de nombreux problèmes majeurs que rencontre la société et son application majeure a été accentuée dans les domaines tels que l'industrie de l'automobile, l'aéronautique pour optimiser la forme des voitures, bateaux, ailes d'avion, de façon à ce que ceux-ci puissent avoir certaine résistance à la trainée lors de leur déplacement.

Dès lors, de nombreuses études ont été menées sur la couche limite autour de ces profils (plaques, sphères) dans le but de contrôler cette zone ; c'est ainsi qu'à

partir des équations de Prandtl qui ont été résolus en 1908 par son étudiant en thèse **Heinrich Blasius** qui a pu donner la solution analytique simplifiée pour un écoulement laminaire stationnaire d'un fluide newtonien incompressible sur une plaque plane imperméable (sans porosité), aujourd'hui connu sous le nom de **solution de Blasius**. Après cela, les avancées majeures ont été menées sur la couche limite laminaire parmi laquelle nous avons la multi-perforation de la plaque (plaque poreuse). Celle-ci a permis d'observer le comportement de la couche limite après injection (**soufflage**) ou **aspiration** du fluide à travers les parois de la plaque. Lors de notre étude, nous travaillerons sur le cas de l'aspiration. L'intérêt de celle-ci est de retarder la transition vers la turbulence, réduire la trainée et augmenter la portance (éviter le décrochage). D'où l'objet de notre étude sur le thème « **couche limite laminaire sur une plaque plane avec aspiration pariétale** ».

Les études menées sur la couche limite avec aspiration pariétale ont permis de soulever deux (02) cas de figure à savoir : l'**aspiration Non uniforme et Uniforme**. Face à ceci, nous pouvons nous demander quel est l'effet de l'aspiration sur l'écoulement d'un fluide autour d'une paroi poreuse ?

Le but de ce mémoire est d'étudier le contrôle de la couche limite par aspiration non uniforme du fluide à travers les parois d'une plaque plane poreuse sans gradient de pression. Ce travail consistera à déterminer la distribution de vitesse, la contrainte de cisaillement pariétale lors de l'aspiration dans la couche limite laminaire, ainsi que l'impact de cette aspiration sur l'épaisseur de la couche limite.

Pour atteindre notre objectif, nous allons présenter en chapitre 1 la revue de littérature dans laquelle nous présenterons les concepts fondamentaux et les équations générales de la mécanique des fluides, ... ensuite en chapitre 2 intitulé matériels et méthodes dans laquelle nous mettrons en lumière les différentes méthodes utilisées tout en faisant une étude comparative entre celles-ci, le

chapitre 3 sera réservé à la présentation des résultats obtenus avec leurs interprétations. Nous terminons donc notre mémoire par une conclusion qui résume les différents résultats obtenus ainsi que les perspectives adoptées.

CHAPITRE I

REVUE DE LA LITTÉRATURE

I.1. DESCRIPTION QUANTITATIVE ET QUALITATIVE DES ÉCOULEMENTS

I.1.1. Clarification des concepts

Dans le but de comprendre et de modéliser les phénomènes complexes qui régissent les mouvements des fluides, une classification des différents types d'écoulements nous est nécessaire. Ainsi, dans le concept de couche limite, la définition de ceux-ci devient cruciale. Nous avons donc entre autres :

a. Écoulements externes et internes

Les écoulements **externes** représentent tous les écoulements autour d'un objet (ailes, plaques, sphères, etc...). Tandis que les écoulements **internes** se font à l'intérieur d'une conduite et sont limités par des parois fixes ou mobiles [8]. Un exemple illustratif de ces différents écoulements sont respectivement les écoulements autour d'une plaque et l'écoulement de poiseuille.

b. Écoulements incompressibles et compressibles

Un écoulement est dit **incompressible** lorsque tout au long de son mouvement, la variation de la pression au sein du fluide n'influence pas sa masse volumique. Ainsi, la masse volumique ne dépend que de la température [8].

Un écoulement est dit compressible lorsque la masse volumique du fluide varie de manière significative en réponse aux changements de pression [8].

c. Écoulements stationnaires et instationnaires

Un écoulement est **stationnaire** (ou permanent) si le champ des vitesses des fluides ne dépend pas explicitement du temps. Dans ce cas, les lignes de courant restent des courbes fixes et invariables dans le temps et restent alors confondues aux trajectoires des particules de fluides [2].

Un écoulement est dit **instationnaire** ou transitoire lorsque le champ des vitesses des fluides dépend explicitement du temps.

d. Écoulement bidimensionnel et unidimensionnel

Un écoulement bidimensionnel est un écoulement pour lequel toutes les variables caractéristiques du fluide (vitesse, pression, etc.) ne varient significativement que selon deux directions spatiales. Alors que, pour un écoulement unidimensionnel toutes ces variables ne varient que suivant une direction spatiale.

I.1.2. Propriétés physiques des fluides

a. Masse volumique

Considérons un milieu continu fluide à l'intérieur d'un volume V , et soit dV un volume élémentaire défini autour d'un point M du volume V . Désignons par dm la masse de fluide contenue dans le volume dV .

La masse volumique ρ d'un fluide est le rapport de sa masse et de son volume. Elle correspond aux nombres de molécules contenues dans le volume [3]. Elle s'exprime en kg/m^3 dans le système international des unités (SI), elle est donnée par la relation :

$$\rho = \frac{dm}{dV} ; \quad (I.1)$$

ainsi, la densité d'un fluide est une grandeur sans unité définie telle que :

$$d = \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{reference}}} . \quad (I.2)$$

b. Compressibilité

La propriété physique qui permet de faire la différence entre un liquide et un gaz est la **compressibilité**. Un liquide est un fluide occupant un volume déterminé, ou du moins ce volume ne peut varier que très peu, et seulement sous l'action de

fortes variations de pression ou de température [3]. Un gaz, au contraire, occupe toujours le volume maximal qui lui est offert : c'est un fluide essentiellement compressible (ou expansible). Donc, La compressibilité traduit la diminution de volume en réponse à un accroissement de pression [3]. Pour quantifier cet effet on introduit le **coefficient de compressibilité isotherme** défini par :

$$\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T. \quad (\text{I.3})$$

c. Coefficient de dilatation

Il représente la variation du volume ou de la masse volumique d'un fluide sous l'effet de la température. Ainsi, on peut définir un **coefficient de dilatation thermique** qui exprime la variation relative du volume correspondant à une augmentation de la température. Noté α , elle est donnée par la relation :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P. \quad (\text{I.4})$$

d. Viscosité

La viscosité d'un fluide est caractérisée par la résistance qu'opposent les molécules à une force tendant à les déplacer au sein du liquide. C'est la propriété, résistance à l'écoulement qui l'empêche de s'écouler dans une canalisation ou de s'étaler sur une surface. Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue. Pour un liquide, la viscosité tend généralement à diminuer lorsque la température augmente. Elle caractérise l'aptitude d'un fluide à s'écouler. On distingue donc la **viscosité dynamique** et la **viscosité cinématique**.

i. Viscosité dynamique

C'est la propriété du fluide qui exprime sa résistance à la force tangentielle, cette propriété est due à l'interaction entre les molécules du fluide. Ainsi, Sous l'effet des forces d'interaction entre les particules de fluide et celles de la paroi, chaque

particule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse. Si on considère un fluide visqueux placé entre deux plaques P_1 et P_2 , tel que la plaque P_1 est fixe et la plaque P_2 est animée d'une vitesse V_2 [14]. Les deux couches de fluide adjacentes distantes de ΔZ (figure.1.1). La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit, ΔV à leur surface (S) et inversement proportionnelle à ΔZ :

Le facteur de proportionnalité μ est le **coefficient de viscosité dynamique du fluide** tel que :

$$F = \mu S \frac{\Delta V}{\Delta Z}. \quad (I.5)$$

Dans le système international d'unité, elle s'exprime en $(P_a \cdot s)$ ou en poiseuille (PI)

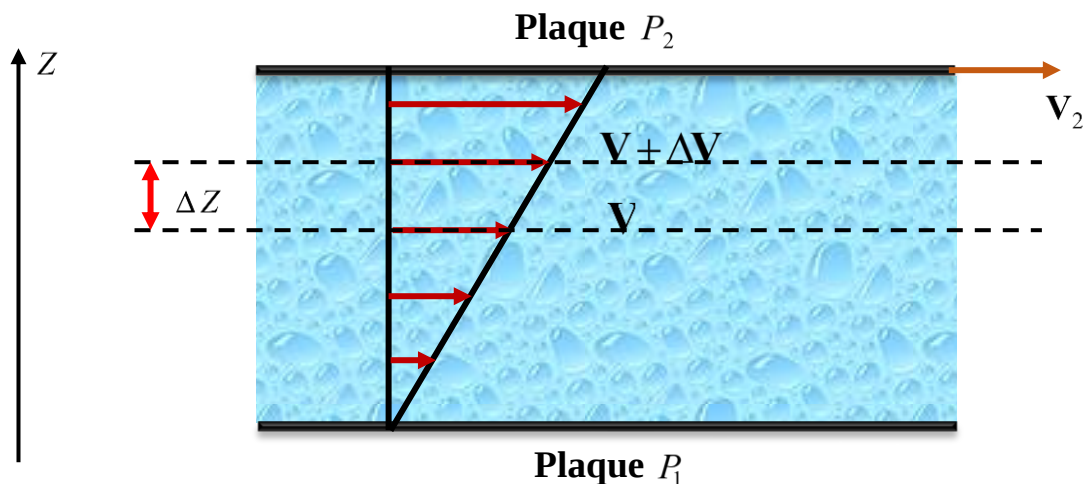


Figure.1.1. Ecoulement entre deux plaques : Expérience de Couette

ii. Viscosité cinématique

La viscosité cinématique quantifie la facilité d'un fluide à s'écouler sous l'influence de la gravité, c'est-à-dire sa capacité à se répandre. Elle s'exprime en m^2/s et est donnée par la relation suivante :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (I.6)$$

I.1.3. Régime d'écoulement : expérience de Reynolds

Les expériences réalisées par **Osborne Reynolds** en 1883 lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique circulaire dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de trois régimes d'écoulement : **le régime laminaire, turbulent et transitoire [9]**.

En utilisant des fluides divers, c'est-à-dire, de viscosités différentes, et en faisant varier la vitesse du fluide et le diamètre de la conduite, nous pouvons montrer que le paramètre qui permet de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds** donné par :

$$R_e = \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de viscosité}} = \frac{VD}{\nu} \quad \text{Ou encore} \quad R_e = \frac{\rho VD}{\mu}, \quad (I.7)$$

où :

ρ = masse volumique du fluide,

V = vitesse moyenne du fluide,

D = diamètre de la conduite,

μ = viscosité dynamique,

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = viscosité cinématique.

L'expérience de Reynolds montre que pour une canalisation circulaire,

- Si $R_e < 2000$ le régime est laminaire,
- Si $2000 < R_e < 3000$ le régime est transitoire,
- Si $R_e > 3000$ le régime est Turbulent.

a. Régime Laminaire

On dit qu'un écoulement est **laminaire** lorsque le mouvement des particules de fluides se fait de façon régulier et ordonné [2].

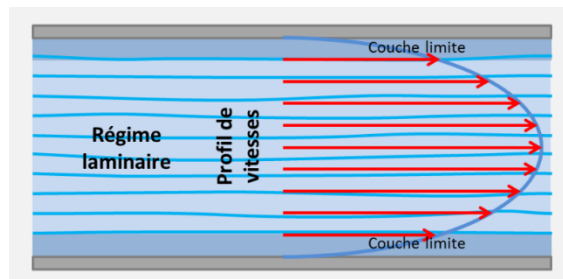


Figure 1.2. Écoulement Laminaire

b. Régime Turbulent

On dit qu'un écoulement est **Turbulent** lorsque le déplacement des particules de fluide est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide (l'écoulement est dit désordonné) [7].

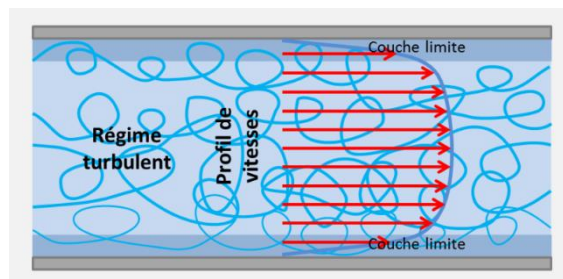


Figure 1.3. Écoulement Turbulent

c. Régime Transitoire

Le régime **transitoire** ou **intermédiaire** quant à lui représente le régime de transition entre le régime laminaire et le régime turbulent.

I.2. ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

Les équations fondamentales de la mécanique des fluides s'appuient sur trois principes à savoir : **le principe de conservation de la masse**, **le principe de conservation de la quantité de mouvement** et **le principe de conservation de l'énergie**. Notre problème ne faisant pas intervenir la chaleur ou l'énergie, nous utiliserons uniquement les deux premiers principes mentionnés ci-dessus.

I.2.1. Équation de conservation de la masse

a. Énoncé du principe

Soit m la masse du fluide contenue dans le domaine (D) à l'instant t . Le principe de conservation de la conservation de masse stipule que :

« Quel que soit le domaine (D) de fluide délimité par une surface fermée, entièrement contenu dans le fluide que l'on suit dans son mouvement, la dérivée par rapport au temps de la masse contenu dans le domaine (D) est égale à zéro. »

La figure.1.4 ci-dessous représente le principe de conservation de la masse et se traduit par l'expression suivante :

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (\text{I.8})$$

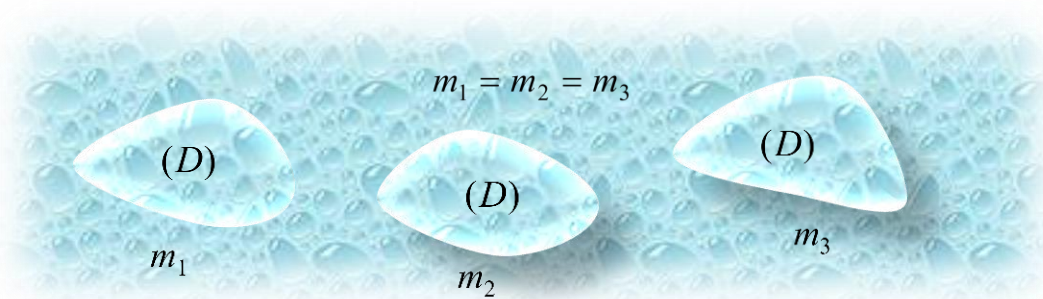


Figure.1.4 : Illustration du principe de conservation de la masse

b. Équation de continuité

En tout point du domaine (D) , et à tout instant, la masse spécifique $\rho(M, t)$ du fluide existe telle que :

$$m = \iiint_D \rho(M, t) dv. \quad (I.9)$$

En introduisant l'équation (I.9) dans la relation (I.8), on obtient :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_D \left(\frac{d\rho}{dt} dv + \rho \frac{d(dv)}{dt} \right) = 0. \quad (I.10)$$

Lorsqu'on suit le domaine (D) dans son mouvement, l'élément de volume dv varie en fonction du temps car il subit la dilatation volumique. On démontre que le taux de dilatation volumique est donné par la relation :

$$\frac{d(dv)}{dt} = \text{div} \mathbf{V} dv. \quad (I.11)$$

En introduisant cette relation (I.11) dans (I.10), on obtient :

$$\iiint_D \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{V} \right) dv = 0. \quad (I.12)$$

Le domaine (D) étant arbitrairement choisit, et la relation (I.12) étant vérifiée pour tout domaine (D) de fluide, on obtient nécessairement l'équation suivante appelée **équation locale de la conservation de masse** :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{V} = 0, \quad (I.13)$$

où le terme $d\rho/dt$ représente la dérivée particulaire de la masse volumique. Elle est définie par :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} \rho. \quad (I.14)$$

En introduisant l'expression (I.14) dans l'équation (I.13) et en développant, nous obtenons l'équation ci-dessous appelée **équation de continuité** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (\text{I.15})$$

Cette équation est valable si au sein du domaine (D) , il n'existe pas de source de masse ou de puit de masse.

Pour un écoulement permanent et incompressible en transformation isotherme, l'équation (I.15) devient :

$$\text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (\text{I.16})$$

I.2.2. Équation de conservation de la quantité de mouvement

a. Énoncé du principe

« Quel que soit le domaine (D) du fluide que l'on suit dans son mouvement, la dérivée par rapport au temps du tenseur cinématique est égale au tenseur des efforts extérieurs appliqués à (D) dans un référentiel galiléen. », c'est-à-dire :

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (\text{I.17})$$

Dans (I.17), $\mathbf{C}$ représente le tenseur cinématique et est défini tel que :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} = \iiint_D \rho \mathbf{V} d\tau \\ \mathbf{M}_0 = \iiint_D \mathbf{OM} \wedge \mathbf{V} d\tau \end{bmatrix}. \quad (\text{I.18})$$

Considérons une surface fictive (S) au sein du fluide, séparant deux domaines (D) et (D') comme le montre la figure.1.5 ci-dessous. Les particules de fluide se trouvant dans le domaine (D') exercent sur la particule de fluide du domaine (D) une force de surface encore appelée force de contact $d\mathbf{F}_s$.

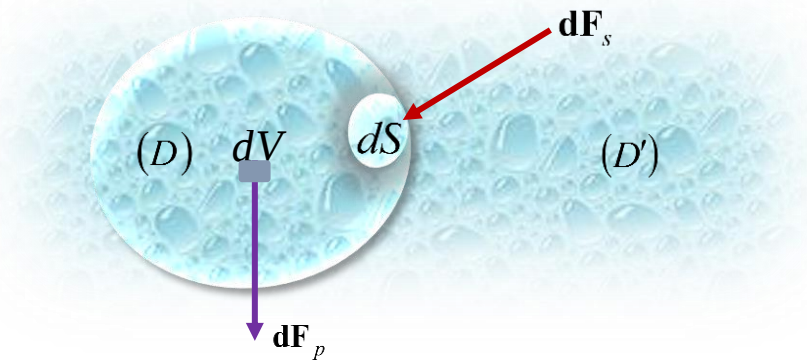


Figure.1.5 : Portion du fluide (D) délimité par une surface S .

De plus, il existe des forces s'exerçant à distance sur tout point M du fluide proportionnel à son volume désignant ainsi la force volumique ou encore la densité de force par unité de volume notée $\mathbf{f}$ [1]. Ainsi donc, cette force à distance que subit une particule de fluide est telle que :

$$\mathbf{dF}_p = \rho \mathbf{f} d\tau \quad (\text{I.19})$$

Afin d'analyser les actions mécaniques exercées sur la portion de fluide isolée, nous effectuons une coupure fictive à travers celle-ci, ce qui nous permet de faire apparaître les tenseurs des efforts (voir figure.1.6). Ainsi, les forces surfaciques peuvent alors être définie par :

$$\mathbf{dF}_s = \mathbf{T}(M) dS \quad (\text{I.20})$$

Où $\mathbf{T}(M)$ est appelé tension ou contrainte au point M , et $\mathbf{F}$ la force de contact

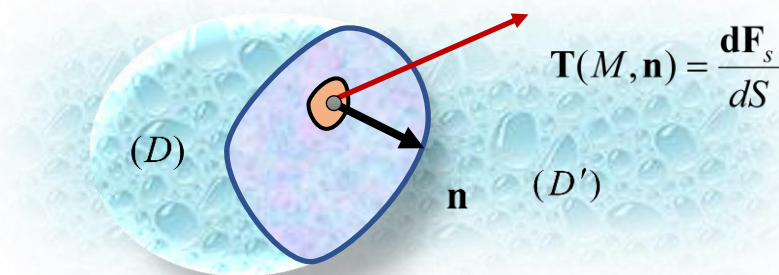


Figure.1.6 : Coupure fictive de la portion de fluide (D) .

Connaissant toutes les forces qui agissent sur les particules de fluide, on peut définir le torseur des forces comme suit :

$$\mathbf{F}_{ext} = \left[\begin{array}{l} \mathbf{R}_{ext} = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\tau + \oiint_S \mathbf{T} dS \\ \mathbf{M}_{ext} = \iiint_D \rho \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f} d\tau + \oiint_S \mathbf{OM} \wedge \mathbf{T} dS \end{array} \right]. \quad (I.21)$$

En introduisant dans l'équation (I.17), les expressions (I.18) et (I.21), on obtient les équations suivantes :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho \mathbf{V} d\tau = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\tau + \oiint_S \mathbf{T} dS, \quad (I.22)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho \mathbf{OM} \wedge \mathbf{V} d\tau = \iiint_D \rho \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f} d\tau + \oiint_S \mathbf{OM} \wedge \mathbf{T} dS. \quad (I.23)$$

L'équation (I.23) nous permettant de montrer que les tenseurs des contraintes sont symétriques, l'équation de conservation de la quantité de mouvement se résume à l'équation (I.22) suivante :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\tau = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\tau + \oiint_S \mathbf{T} dS. \quad (I.24)$$

b. Tenseurs de contraintes

Considérons une surface élémentaire dS au sein du fluide, défini par son vecteur normal, $\mathbf{n}$ et notons par $\mathbf{T}(M)dS$ la résultante des forces exercées par le fluide se trouvant d'un côté de la surface sur le fluide se trouvant de l'autre côté. Par convention, $\mathbf{T}$ est la contrainte exercée par le fluide vers lequel pointe la normale $\mathbf{n}$. Isolons dans un fluide en mouvement une portion de fluide sous la forme d'un tétraèdre (voir figure.1.7). Au lieu des forces superficielles, sur les faces du tétraèdre figurent les vecteurs des contraintes dirigées arbitrairement par rapport aux faces correspondantes [1]. De même, sur les 3 autres faces du tétraèdre

s'exercent également des contraintes dirigées suivant les normales $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. La 1^{ère} surface est par portée $\mathbf{e}_1$, la 2^{ème} par $\mathbf{e}_2$ et la 3^{ème} par $\mathbf{e}_3$. Nous aurons alors $\mathbf{T}(M, -\mathbf{e}_1) = \mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}(M, -\mathbf{e}_2) = \mathbf{T}_2$ et $\mathbf{T}(M, -\mathbf{e}_3) = \mathbf{T}_3$ comme représenter sur les figures ci-dessous.

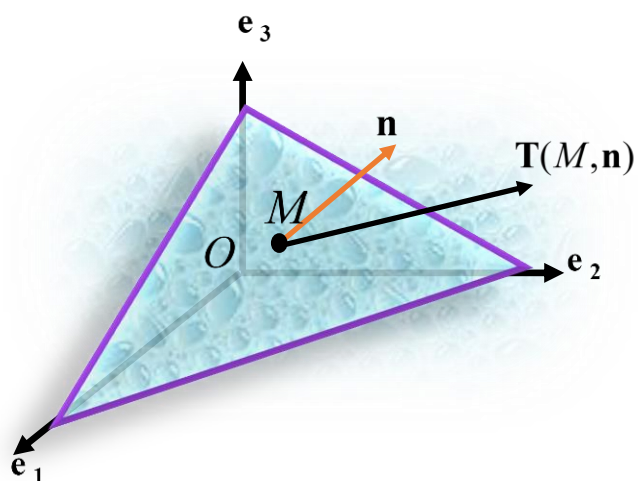


Figure.1.7 : distribution de la contrainte sur un domaine de forme tétraédrique.

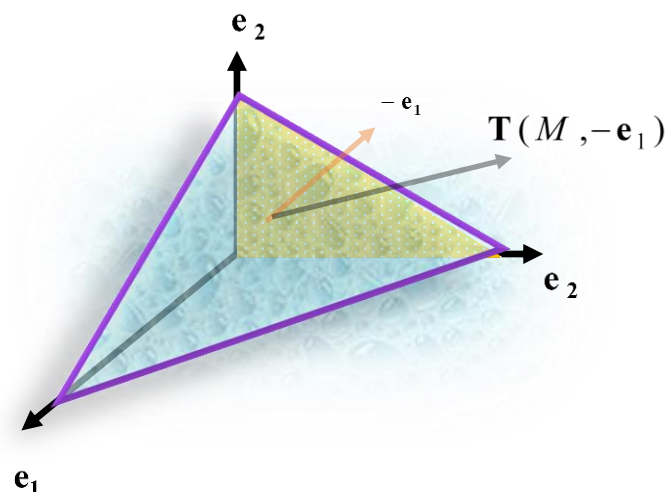


Figure.1.8 : distribution de la contrainte sur la 1^{ère} surface du tétraédrique

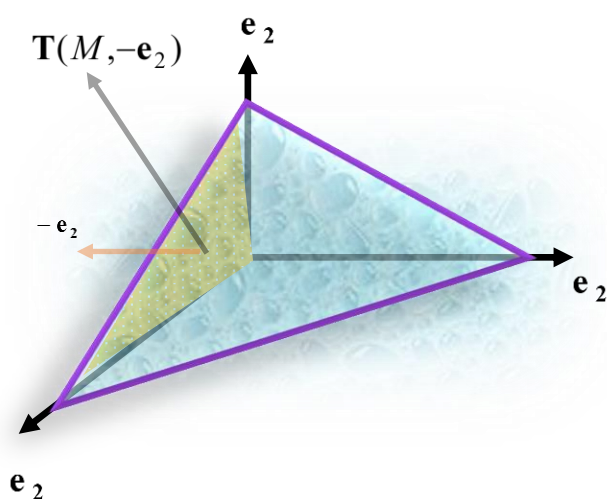


Figure.1.9 : distribution de la contrainte sur la 2^{ème} surface du tétraédrique

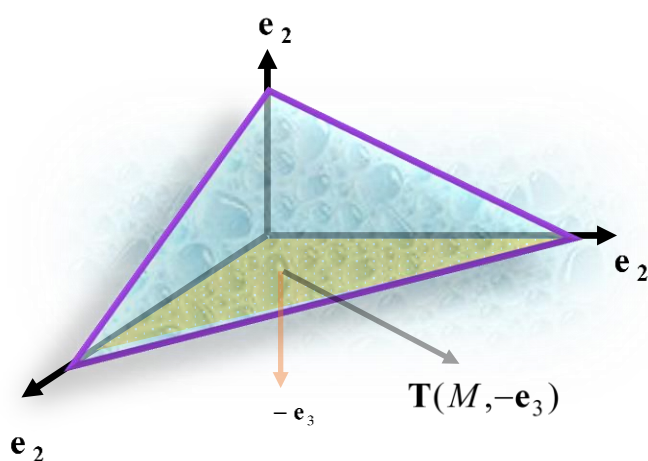


Figure.1.10 : distribution de la contrainte sur la 3^{ème} surface du tétraédrique

Comme le montre les figures (1.7 à 1.10) ci-dessus, les trois faces du trièdre ont pour vecteurs normales les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ et la quatrième face a pour normale $\mathbf{n}$ ainsi, la résultante des forces de surface sur le tétraèdre est :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS - T_1 \cdot \mathbf{e}_1 dS_1 - T_2 \cdot \mathbf{e}_2 dS_2 - T_3 \cdot \mathbf{e}_3 dS_3 = \mathbf{0}. \quad (\text{I.25})$$

En faisant la projection orthogonale de $\mathbf{dS}$ suivant les directions $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, nous obtenons les surfaces élémentaires dS_1, dS_2, dS_3 suivantes :

$$\begin{aligned} dS_1 &= \mathbf{dS} \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) dS \\ dS_2 &= \mathbf{dS} \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) dS \\ dS_3 &= \mathbf{dS} \cdot \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) dS \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

Posons ensuite :

$$\begin{aligned} n_1 &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) \\ n_2 &= (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}), \\ n_3 &= (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

tel que, $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3$.

Ainsi, en remplaçant les expressions (I.26) et (I.27) dans l'expression (I.25) et en simplifiant, nous pouvons réécrire la résultante des forces de surface comme suit :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 n_1 + \mathbf{T}_2 n_2 + \mathbf{T}_3 n_3. \quad (\text{I.28})$$

Nous pouvons encore réécrire l'équation (I.28) de façon plus générale sous la forme suivante :

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{T}_k n_k. \quad (\text{I.29})$$

Sur les faces $k = 1, 2, 3$ du tétraèdre, on peut écrire les $\mathbf{T}_k$ sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}_2 &= \sigma_{21} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 + \sigma_{23} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}_3 &= \sigma_{31} \mathbf{e}_1 + \sigma_{32} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

De manière générale, les expressions (I.30) peuvent s'écrire comme suit :

$$\mathbf{T}_k = \sum_{j=1}^3 \sigma_{kj} \mathbf{e}_j, \quad (\text{I.31})$$

où σ_{kj} représente la contrainte sur l'élément de surface de normale $\mathbf{n}_k$

En remplaçant l'équation (I.31) dans l'équation (I.29), tout en tenant compte du fait que le tenseur de contraintes étant symétrique, c'est-à-dire $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$, on obtient :

$$\mathbf{T} = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \sigma_{jk} n_k \right) \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 T_j \mathbf{e}_j, \quad (\text{I.32})$$

où,

$$T_j = \sum_{k=1}^3 \sigma_{jk} n_k. \quad (\text{I.33})$$

Partant de l'expression (I.33), nous obtenons la contrainte $\mathbf{T}$ telle que :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.34})$$

De façon plus générale, l'expression (I.34) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{T} = \overline{\sigma} \mathbf{n}. \quad (\text{I.35})$$

c. Équation de Cauchy

Rappelons tout d'abord l'équation de conservation de la quantité de mouvement (I.22) donnée ci-haut :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\tau = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\tau + \oint_S \mathbf{T} dS. \quad (\text{I.36})$$

Introduisons l'expression (I.35) dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\tau = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\tau + \iint_S \bar{\bar{\sigma}} \mathbf{n} . \quad (\text{I.37})$$

En appliquant le théorème de Green Ostrogradsky, nous aboutissons à :

$$\iint_S \bar{\bar{\sigma}} \mathbf{n} = \iiint_D \text{div} \bar{\bar{\sigma}} d\tau . \quad (\text{I.38})$$

En introduisant l'équation (I.38) dans (I.37) nous avons :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\tau = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\tau + \iiint_D \text{div} \bar{\bar{\sigma}} d\tau . \quad (\text{I.39})$$

Peu importe le domaine (D) du fluide, l'équation (I.39) devient :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \text{div} \bar{\bar{\sigma}} . \quad (\text{I.40})$$

Cette équation est dite **équation de Cauchy**. Elle est valable quel que soit le fluide, qu'il soit newtonien ou non newtonien.

En notation indicielle, elle s'écrit de la manière suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + \mathbf{V}_j \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} . \quad (\text{I.41})$$

d. Équation de la dynamique des fluides Newtoniens : équation de Navier-Stokes

i. Relation contrainte déformation : Loi de comportement

Généralement, on admet que pour des fluides dites de stokes, pour lesquels le tenseur des contraintes de viscosité s'exprime uniquement en fonction du tenseur des taux de déformations, les contraintes de viscosité s'annulant ainsi avec le tenseur des taux de déformation, plusieurs hypothèses sont émises notamment :

- **Hypothèses de Stokes**

Hypothèse 1 : le tenseur des contraintes est une fonction continue du tenseur de taux de déformation et de l'état thermodynamique locale (pression, température) du fluide.

Hypothèse 2 : le fluide est entièrement dénué d'élasticité ; de manière générale, nous pouvons dire qu'il n'a aucune mémoire du passé.

Hypothèse 3 : un même état de contrainte conduit à un même état de déformation en tout point du fluide (le fluide est homogène). Ainsi, le tenseur des contraintes ne dépend pas explicitement de la position des coordonnées locales.

Hypothèse 4 : le fluide est dit isotrope c'est-à-dire que les relations entre les contraintes et les déformations n'ont pas de direction privilégiée.

- **Hypothèses de Newton**

Selon Newton, les fluides newtoniens sont des fluides de stokes isotropes ou les contraintes de viscosité sont les fonctions linéaires des tenseurs de taux de déformation. On peut donc à partir de là, écrire que :

$$\sigma_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \alpha_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{I.42})$$

Où les α_{ijkl} représentant les éléments d'un tenseur d'ordre 4.

Les tenseurs étant symétrique, c'est-à-dire $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, nous pouvons projeter l'expression (I.42) dans les directions principales comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & a_{11} + \alpha_{1111}\varepsilon_{11} + \alpha_{1122}\varepsilon_{22} + \alpha_{1133}\varepsilon_{33} + (\alpha_{1112} + \alpha_{1121})\varepsilon_{12} + \\ & (\alpha_{1123} + \alpha_{1132})\varepsilon_{23} + (\alpha_{1113} + \alpha_{1131})\varepsilon_{13} \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

Dans le but de simplifier cette équation, posons :

$$\begin{aligned} a &= a_{11}, \quad b = \alpha_{1111}, \quad c = \alpha_{1133}, \quad c' = \alpha_{1122}, \\ e &= \alpha_{1123} + \alpha_{1132}, \quad d = \alpha_{1112} + \alpha_{1121}, \quad d' = \alpha_{1113} + \alpha_{1131} \end{aligned} \quad (I.44)$$

Le fluide étant isotrope, les relations entre les contraintes et les déformations n'ont pas de direction privilégiée. Ainsi, $c = c'$, $d = d'$.

Ceci dit, en remplaçant les expressions (I.44) dans l'égalité (I.43) nous obtenons :

$$\sigma_{11} = a + b\varepsilon_{11} + (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})c + e\varepsilon_{23} + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13})d \quad (I.45)$$

Également par isotropie, nous pouvons écrire la relation contrainte-déformation suivant les directions 2 et 3 par permutation d'indice de la manière suivante :

$$\sigma_{22} = a + b\varepsilon_{22} + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33})c + e\varepsilon_{13} + (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23})d \quad (I.46)$$

$$\sigma_{33} = a + b\varepsilon_{33} + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})c + e\varepsilon_{12} + (\varepsilon_{32} + \varepsilon_{31})d \quad (I.47)$$

Nous pouvons donc réécrire la relation contraintes déformation (I.45) en introduisant la trace de la matrice des taux de déformations. Nous aurons alors :

$$\sigma_{11} = a + (b - c)\varepsilon_{11} + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})c + e\varepsilon_{23} + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13})d \quad (I.48)$$

La trace du tenseur des taux de déformations étant la divergence c'est à dire que :

$\text{div}\mathbf{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, et en l'introduisant dans l'équation (I.48), on obtient :

$$\sigma_{11} = a + (b - c)\varepsilon_{11} + c\text{div}\mathbf{V} + e\varepsilon_{23} + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13})d \quad (I.49)$$

Les déformations $\varepsilon_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. D'après Stokes, dans un fluide visqueux, les contraintes de cisaillement s'annulent avec la déformation $\sigma_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

L'expression (I.49) devient alors :

$$\sigma_{11} = a + (b - c)\varepsilon_{11} + c\text{div}\mathbf{V} \quad (I.50)$$

Ainsi, par isotropie, on peut écrire la relation finale pour les 3 directions de la manière générale suivante :

$$\sigma_{ij} = a + (b - c)\varepsilon_{ij} + c \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (\text{I.51})$$

Pour que les contraintes σ_{ij} s'annulent avec les déformations, on introduit dans la relation contrainte déformation le symbole de Kronecker (δ_{ij}) . De l'équation (I.51), nous obtenons de manière générale :

$$\bar{\bar{\sigma}} = (a + c \operatorname{div} \mathbf{V}) \bar{\bar{I}} + (b - c) \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{I.52})$$

Dans l'expression ci-dessus, c représente la viscosité de dilatation volumique notée η . L'expérience sur la mesure de la viscosité montre que les termes $b - c$ représentent le double de la viscosité dynamique. Pour un fluide réel au repos, seul règne les contraintes normales c'est-à-dire $\bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{\bar{I}}$, donc $a = -p$. On obtient alors la loi de comportement des fluides newtoniens ainsi qu'il suit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = (-p + \eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{I.53})$$

De manière générale, nous avons :

$$\sigma_{ij} = (-p + \eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{I.54})$$

À partir de l'expression (I.46), nous obtenons la relation de Stokes suivante :

$$3\eta + 2\mu = 0 \quad (\text{I.55})$$

ii. Équation de Navier-Stokes

En introduisant la loi de comportement (I.53) dans l'équation de Cauchy, nous obtenons :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div}(-p + \eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \bar{\bar{I}} + \operatorname{div}(2\mu \bar{\bar{\varepsilon}}) \quad (\text{I.56})$$

En utilisant les identités vectorielles sur la divergence et en développant, on obtient :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \mathbf{grad}(\eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \bar{\bar{I}} + 2 \operatorname{div}(\mu \bar{\bar{\varepsilon}}) \quad (I.57)$$

Avec,

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\mathbf{grad} \mathbf{V}} + {}^t \overline{\mathbf{grad} \mathbf{V}} \right) \quad (I.58)$$

Ainsi donc, en remplaçant l'expression (I.58) dans l'égalité (I.57), nous obtenons :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \mathbf{grad}) \mathbf{V} \right) = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + (\mu + \eta) \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{V}) + \mu \Delta \mathbf{V} \quad (I.59)$$

Cette équation est alors appelée **équations de Navier Stokes** où ses termes sont tels que :

- $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \mathbf{grad}) \mathbf{V} \right)$ Représente les forces d'inertie
- $\rho \mathbf{f}$ Représente les forces de volume
- $\mathbf{grad} p$ Représente les forces de pression
- $(\mu + \eta) \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{V}) + \mu \Delta \mathbf{V}$ Représente les forces de viscosité

Pour un fluide supposé parfait, l'équation de Navier Stokes se résume à **l'équation d'Euler** ci-dessous :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \mathbf{grad}) \mathbf{V} \right) = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p \quad (I.60)$$

I.3. ÉTAT DE L'ART

Dans cette partie, nous allons présenter de façon chronologique les travaux effectués sur le concept de couche limite laminaire. Les études incluses dans cette partie sont de nature expérimentales et théoriques avec toute sorte de méthode ayant pour but la résolution des problèmes de la couche limite sur une plaque plans avec aspiration et ou soufflage. Parmi ces travaux, nous avons énuméré ceux-ci :

LUDWIG PRANDTL (1904), fondateur de la théorie de la couche limite, il postule que pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, les effets de la viscosité sont confinés dans une fine couche adjacente à la surface d'un corps : la **couche limite**. À l'extérieur de cette couche, l'écoulement peut être considéré comme celui d'un fluide parfait. Cette simplification a permis de résoudre les équations de Navier-Stokes (simplifiées en équations de la couche limite) et de prédire la traînée de friction et le phénomène de **décollement** [13].

HEINRICH BLASIUS (1908), dans sa thèse, il résolut mathématiquement le problème fondamental de la couche limite laminaire sur une plaque plane. Sa solution autosimilaire obtenue via une transformation astucieuse des équations de Prandtl ou équation de la couche limite, établit le profil universel de vitesse indépendant de la position. Il quantifia précisément l'épaisseur de la couche limite (croissance proportionnelle à la racine carrée de la distance) et la contrainte pariétale, démontrant leur dépendance au nombre de Reynolds. Ces travaux fournirent les premières prédictions quantitatives du frottement fluide sur surfaces lisses, devenant indispensables pour calculer la traînée aérodynamique [10].

THEODOR VON KARMAN (1921), cet auteur développa l'équation intégrale de la couche limite, révolutionnant l'analyse des écoulements complexes. Cette approche unifiée (valable pour les régimes laminaire et turbulent) liait la contrainte pariétale aux grandeurs globales via la conservation de la quantité de mouvement. Sa méthode évitait la résolution fastidieuse des équations locales en ne nécessitant qu'une estimation du profil de vitesse. Appliquée aux corps 3D comme les dirigeables, elle permit de prédire le point de décollement et d'optimiser leur forme. Il introduisit aussi les concepts d'épaisseur de déplacement (correction de masse) et d'épaisseur de quantité de mouvement, devenus fondamentaux en aérodynamique. Son travail inspira les premières simulations numériques dans les années 1950 et reste au cœur des logiciels modernes de CFD (Computational Fluid Dynamics) pour la conception aérospatiale et automobile [12].

HUGH B. FREEMAN (année 1930), Ingénieur à la NACA (ancêtre de la NASA), il réalisa les premières mesures quantitatives des couches limites turbulentes sur corps 3D lors d'essais en soufflerie sur le dirigeable **Akron**. Ses données révélèrent un épaississement accéléré comparé aux plaques planes, avec une sensibilité inattendue aux perturbations de surface. Il formula des corrélations pratiques pour l'épaisseur de couche limite et le coefficient de frottement, intégrant l'effet du diamètre maximal des corps. Freeman démontra expérimentalement que la transition laminaire-turbulent survenait plus tôt que prévu sur les formes épaisses, expliquant les écarts entre théorie et réalité. Ces résultats permirent de recalibrer les modèles théoriques et guidèrent l'optimisation aérodynamique des avions emblématiques comme le DC-3, réduisant leur traînée de 25%. [16]

DONALD COLES (1956), cet auteur révolutionna la modélisation des couches limites turbulentes avec son "profil de loi de paroi". En analysant des données expérimentales, il découvrit que les profils de vitesse présentaient une universalité remarquable malgré les gradients de pression. Son modèle combinait une loi logarithmique près de la paroi et une "fonction de déficit" décrivant la région externe, intégrant un terme correctif pour les pressions adverses. Cette avancée permit de prédire précisément le décollement sur les ailes courbées et les corps non profilés. Les travaux de Coles devinrent la référence pour valider les simulations LES (Large Eddy Simulation) et les mesures en soufflerie. Ils ouvrirent la voie aux systèmes de contrôle actif comme l'injection/succion pariétale, aujourd'hui utilisés sur les avions de ligne pour réduire la consommation de carburant. [15]

ROY et al (1998), Ces auteurs ont effectué une analyse pour étudier l'influence de l'injection (aspiration) de fente non uniforme dans un écoulement laminaire permanent incompressible de type couche limite dans un canal divergent avec une vitesse décroissante de façon exponentielle en dehors de la couche limite. Les solutions non similaires à l'entrée du canal, aux bords de la fente et au point de séparation sont surmontées en appliquant un schéma implicite de différences finies avec la technique de quasi-linéarisation et le choix approprié de pas le long de la direction de l'écoulement. Ils ont observé que la séparation peut être retardée par l'aspiration non uniforme de fente et également en déplaçant la fente en aval mais l'injection donne un effet inverse. [6]

MAROM et al (2001), Ce travail présente une étude expérimentale en cours visant à développer une compréhension fondamentale des mécanismes de contrôle des débits d'aspiration et de soufflage oscillatoire (SaOB) et fournit une base de

données pour la validation des codes de CFD pour des écoulements instationnaires complexes avec systèmes de contrôle actif. Des études expérimentales ont été menées sur l'aspiration régulière seule, à partir d'un seul trou jusqu'à plusieurs trous et sur les actionneurs SaOB ; et sur le soufflage pulsé seul lors de l'interaction externe avec une couche limite laminaire sans gradient de pression. L'expérience utilise des mesures à fil chaud effectuées dans une soufflerie de couche limite laminaire avec aspiration régulière et soufflage pulsé à partir d'un seul actionneur. Les expériences d'aspiration montrent que la géométrie et la configuration des trous d'aspiration sont un facteur important dans la détermination de la structure et de la stabilité du champ d'écoulement de la couche laminaire en aval. Mesures des jets de soufflage oscillatoires (sans aspiration) interagir avec une couche limite laminaire démontre que cette méthode de contrôle produit des structures instables qui peuvent être utilisées comme outil efficace de séparation des couches de limites. [6]

BOUREHLA et al (2005), Dans cet article, le profil analytique de couche limite au-dessus d'une plaque plane avec aspiration pariétale est obtenu conjointement par résolution numérique du problème de Blasius et analytique par la méthode intégrale approximative de Bianchini. Les lois obtenues dans le cas d'une aspiration uniforme ou non sont exprimées respectivement par les fonctions Lambert ou Erreur. Elles présentent une bonne approximation des profils numériques ou expérimentaux. Ce résultat permet de dégager l'expression analytique de diverses grandeurs caractéristiques de la couche limite et représente, de ce fait, une donnée nécessaire à la modélisation des effets d'aspiration pour le contrôle de la couche limite. [7]

CHAPITRE II

MATÉRIELS ET MÉTHODES

II.1. Description du problème étudié

Considérons une plaque plane horizontale imperméable (figure 2.1) ou poreuse (figure 2.2) de longueur L , autour de laquelle s'écoule un fluide incompressible de vitesse U_e , parallèle à celle-ci. Près de la paroi, il se forme deux régions, une région (région interne) appelée couche limite dynamique, où les effets de la viscosité dominent sur l'inertie du fluide et une autre région (région externe) où le fluide est considéré comme parfait.

Notre étude représentée par les figures (2.1 et 2.2) se fera dans un repère cartésien, sur le plan (Oxy) , où x représente la direction longitudinale et y la direction transversale de l'écoulement.

Pour une plaque plane poreuse, le fluide est aspiré à travers celle-ci avec une vitesse transversale d'aspiration notée $V_a < 0$, pouvant être uniforme ou non uniforme. La vitesse d'aspiration uniforme est notée V_{au} et celle de l'aspiration non uniforme V_{anu} .

- **Fluide**
- **Plaque plane**

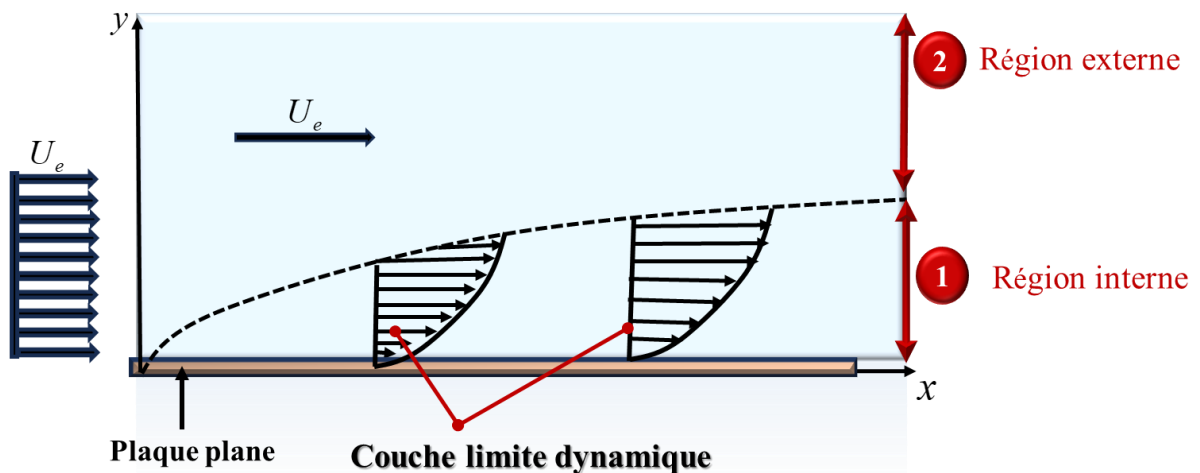


Figure.2.1 : couche limite dynamique sur une plaque plane imperméable.

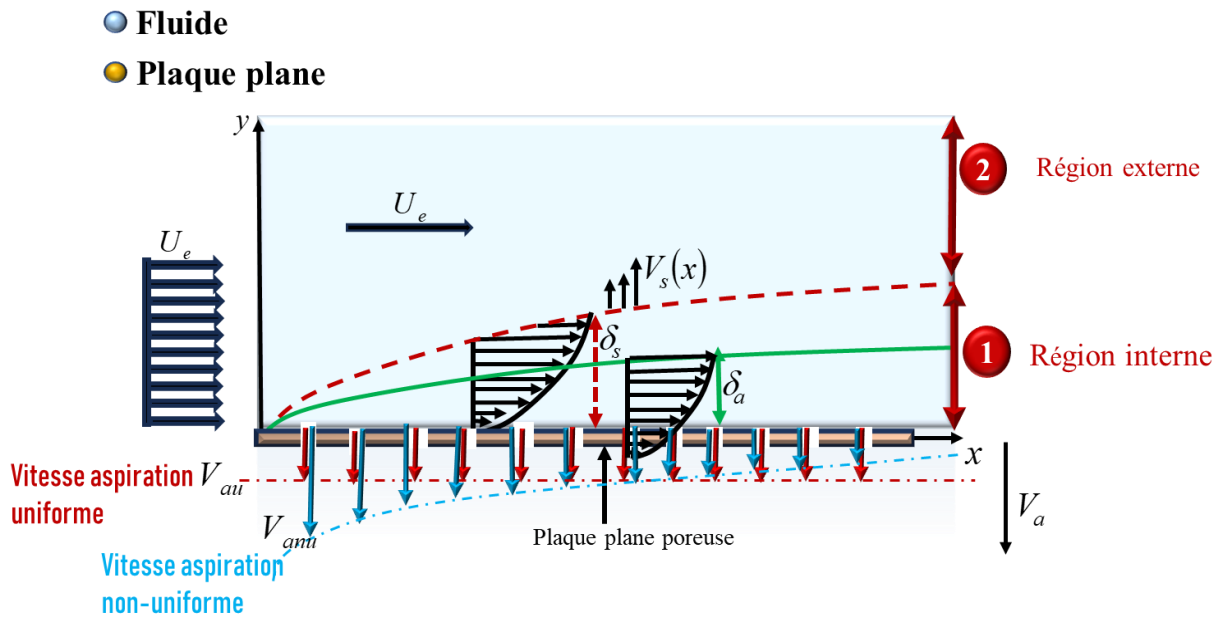


Figure.2.2 : couche limite dynamique sur une plaque plane poreuse

II.2. Formulation mathématique du problème

II.2.1. Hypothèses

La résolution des problèmes de mécanique des fluides en particulier ceux des couches limites passe par l'utilisation des équations de Navier-Stokes. Celles-ci étant difficiles à résoudre dans son entièreté, nécessite l'utilisation des hypothèses simplificatrices à savoir :

- L'Écoulement est considéré comme incompressible ;
- L'écoulement est permanent ;
- La pesanteur n'influence pas sur l'écoulement ;
- L'écoulement est plan.

II.2.2. Équation de la couche limite laminaire

Tout d'abord, résumons les principales hypothèses déjà fixées ci-haut sur l'écoulement considéré. Pour un écoulement laminaire, permanent, incompressible, bidimensionnel, la pesanteur n'influençant pas sur l'écoulement, les équations de continuité et de Navier-Stokes peuvent s'écrire comme suit :

- Équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1})$$

- Équations de Navier-stokes simplifiées

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

À l'intérieur de la couche limite, nous constatons que la vitesse transversale du fluide varie faiblement par rapport à la vitesse longitudinale ($v \ll u$), car l'écoulement se fait suivant x . De même, les variations suivant x sont très faibles devant les variations suivant y ($\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$) dû aux forces de viscosité [5]. On obtient ainsi les « hypothèses de la couche limite ou hypothèses de Prandtl » suivantes :

$$\begin{aligned} v &\ll u \\ \frac{\partial v}{\partial x} &\ll \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

En comparant les deux termes de l'équation (II.6) et en appliquant les hypothèses (II.7) à cette équation, nous constatons que le deuxième terme de celle-ci est négligeable devant le premier. On obtient l'équation de Navier-stokes simplifiée suivante :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.4})$$

Sur une plaque plane, la pression est constante le long de celle-ci ; car à l'extérieur de la couche limite, le fluide est supposé idéal et non perturbé par les effets visqueux. Ainsi, en appliquant le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant proche de la plaque, entre deux points x_1 et x_2 pris respectivement à l'extérieur et à l'intérieur de la couche limite, $p_1 + p_2 = cste$. La vitesse étant constante à l'extérieur, nous avons $p_1 = \rho U_e^2 / 2$. Par conséquent, la pression à l'intérieure de la couche limite est $p = p_2 = cste$. Donc, la variation de la pression le long de la plaque est nulle c'est-à-dire $\partial p / \partial x = 0$. Les équations de Navier-stokes et de continuité ainsi simplifiées modélisent l'écoulement de fluide dans la couche limite et sont appelées « **équations de la couche limite** » ou « **équations de Prandtl** ». Elles s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (II.5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (II.6)$$

II.2.3. Conditions aux limites

Pour décrire correctement le comportement de la couche limite laminaire se développant le long d'une plaque plane, il est essentiel d'imposer les conditions aux limites adaptées aux caractéristiques physiques de l'écoulement.

- La condition d'adhérence sur la paroi c'est-à-dire pour $y = 0$,

$$u = 0, \quad v = V_a ; \quad (II.7)$$

Pour une plaque imperméable c'est-à-dire, $V_a = 0$ nous obtenons la condition de non glissement telle que :

$$u = v = 0 . \quad (II.8)$$

Pour une plaque poreuse, dans le cas d'une aspiration uniforme, le fluide est aspiré à travers la plaque à des vitesses constantes c'est-à-dire, $V_a = -V_{au}$ et pour une as-

piration non uniforme, la vitesse du fluide est de la forme suivante :

$$V_a = -\frac{c}{\sqrt{x}}, \quad (\text{II.9})$$

où c est une constante à déterminer.

- La condition à la frontière de la couche limite c est à dire pour $y = \infty$,

$$u = U_e. \quad (\text{II.10})$$

II.2.4. Grandeurs caractéristiques de la couche limite

a. Épaisseur de la couche limite

C'est la distance entre la surface de la plaque et le point où la vitesse du fluide dans la couche limite correspond à 99% de la vitesse de l'écoulement du fluide libre. Elle est généralement notée δ telle que :

$$\frac{u(x, y = \delta)}{U_e} = 0.99, \quad (\text{II.11})$$

avec,

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}. \quad (\text{II.12})$$

b. Épaisseur de déplacement

C'est la distance dont il faudrait déplacer la paroi vers l'extérieur pour que le débit volumique du fluide parfait soit égal au débit volumique réel du fluide visqueux à l'extérieur de la Couche limite. Elle est notée δ_1 telle que :

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy. \quad (\text{II.13})$$

c. Épaisseur de la quantité de mouvement

C'est la distance dont il faudrait déplacer la paroi vers l'extérieur pour que la quantité de mouvement du fluide parfait soit égale à la quantité de mouvement

réelle du fluide visqueux à l'extérieur de la Couche limite. Elle est notée δ_2 telle que :

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy. \quad (\text{II.14})$$

À partir de l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de la quantité de mouvement nous pouvons définir un facteur $H = \delta_1/\delta_2$ appelé **facteur de forme** qui permet de décrire l'évolution de la couche limite.

d. Contrainte de Cisaillement pariétale

C'est la contrainte notée τ_p qui permet de quantifier les forces de friction à l'interface entre le fluide et la paroi solide (plaque plane) au sein de la couche limite telle que :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (\text{II.15})$$

À partir de cette contrainte, nous pouvons obtenir le coefficient de cisaillement pariétale C_f tel que :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} ; \quad (\text{II.16})$$

où $\rho U_e^2/2$ est appelé **pression dynamique au sein du fluide**.

II.2.5. Forme adimensionnée des équations de la couche limite

À ce point de raisonnement, il est intéressant de généraliser la démarche en présentant les équations de la couche limite sous forme adimensionnée. Ainsi, tout en choisissant comme grandeurs de référence L qui représente la longueur de la plaque et U_e la vitesse de l'écoulement libre comme mentionnée auparavant, on définit les variables adimensionnelles si dessous :

$$u = u^* U_e, \quad v = v^* U_e, \quad x = x^* L, \quad y = y^* L. \quad (\text{II.17})$$

En remplaçant ces expressions dans les équations (II.9) et (II.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0, \\ u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= \frac{1}{R_{e_L}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

où $R_{e_L} = U_e L / \nu$ représente le nombre de Reynolds.

Cependant, si on se place à une abscisse x quelconque, on peut toujours considérer que la plaque s'arrête à ce niveau et que sa longueur est x . L'épaisseur de la couche limite $\delta(x)$ n'en est évidemment pas affectée. Aussi, avec un abus d'écriture, on définit le « **nombre de Reynolds local** R_{e_x} [5] » par :

$$R_{e_x} = \frac{U_e x}{\nu}. \quad (\text{II.19})$$

Les grandeurs du système d'équations (II.18) étant sans dimension, nous pouvons aisément revenir aux grandeurs dimensionnelles. Nous aurons donc notre équation sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{R_{e_x}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

II.3. Méthodes de résolution de l'équation du problème

II.3.1. Méthodes des solutions semblables ou Méthode différentielle

En général, les solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires telles que les équations de couche limite (II.10), sont extrêmement difficile à obtenir. Cependant, en 1908, en appliquant une transformation des coordonnées et un changement de variables, Blasius proposa des équations simplifiées pour l'écoulement dans la couche limite [10].

L'écoulement étant plan et incompressible, la fonction de courant existe et elle est liée aux composantes du vecteur vitesse par les relations :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} . \quad (\text{II.21})$$

À partir des équations (II.22), nous avons $d\psi = -vdx + udy \approx udy$ car $v \ll u$

En intégrant cette équation, nous obtenons :

$$\psi = \int_0^y u(x, y) dy . \quad (\text{II.22})$$

Dans le but de faciliter la résolution de notre équation, introduisons une variable d'autosimilarité η qui nous permettra de transformer un problème à deux variables en un problème à une seule variable tel que :

$$u = U_e g(\eta), \quad (\text{II.23})$$

avec,

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} . \quad (\text{II.24})$$

En introduisant ces changements de variable dans l'équation (II.22) et en développant, nous obtenons la fonction de courant ψ sous la forme :

$$\psi = U_e \delta f(\eta) ; \quad (\text{II.25})$$

Où, $f(\eta) = \int_0^\delta g(\eta) d\eta$ Représente la **fonction de courant adimensionnelle**.

La première équation du système (II.13) étant satisfaite, nous devons résoudre l'équation suivante :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.26})$$

Il faut dans ce cas déterminer en fonction de η les expressions de u , v , $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$ ainsi que $\partial^2 u / \partial y^2$.

En utilisant l'équation (II.23), nous obtenons l'expression de u sous la forme

$$u = U_e f'(\eta) \quad (\text{II.27})$$

avec $f'(\eta) = df/d\eta = g(\eta)$ qui représente la **vitesse adimensionnelle**.

Les expressions de u et ψ en fonction de η nous permettent d'obtenir les expressions des autres grandeurs suivantes :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = U_e \frac{d\delta}{dx} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) ; \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -U_e \frac{\eta}{\delta} \frac{d\delta}{dx} f''(\eta) ; \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_e}{\delta} f''(\eta) ; \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_e}{\delta^2} f'''(\eta) . \quad (\text{II.31})$$

En remplaçant les équations (II.28) à (II.31) dans l'équation (II.26) et en développant, nous obtenons l'équation suivante :

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0. \quad (\text{II.32})$$

Cette équation est appelée **équation de Blasius**. La résolution de cette équation nous permet d'obtenir la solution exacte aux problèmes de couches limites laminaires sur une plaque plane sans gradient de pression.

a. Cas d'une plaque plane imperméable

Les conditions aux limites de la couche limite sur une plaque imperméable décrites précédemment peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} y=0 &\Rightarrow \eta=0 & f(0) &= f'(0)=0, \\ y=\infty &\Rightarrow \eta=\infty & f'(\infty) &=1. \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Ainsi, sur une plaque plane imperméable, l'équation du problème devient :

$$\begin{aligned} f''' + \frac{1}{2} f f'' &= 0 \\ f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f'(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

En tenant compte des hypothèses mentionnées ci-haut, la contrainte de cisaillement pariétale (II.15), s'écrit comme suit :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (\text{II.35})$$

D'après l'équation (II.30), cette contrainte peut prendre la forme suivante :

$$\tau_p = \mu \frac{U_e}{\delta} f''(\eta). \quad (\text{II.36})$$

Ainsi, $f''(\eta)$ représente **la contrainte de cisaillement pariétale**.

b. Cas d'une plaque plane poreuse

Dans le cas d'une plaque plane poreuse, l'équation de la couche limite de Blasius reste la même. Mais pour éviter la confusion entre ces deux cas, nous réécrivons

les conditions aux limites en remplaçant f par f_{anu} et la variable d'autosimilarité par η_a . Ainsi, nous aurons :

$$\text{à } y=0, \quad \eta_a = 0 \Leftrightarrow f'_{anu}(0) = 0. \quad (\text{II.37})$$

D'après l'équation (II.28) nous avons :

$$V_a = v = U_e \frac{d\delta}{dx} (\eta_a f'_{anu}(\eta_a) - f_{anu}(\eta_a)). \quad (\text{II.38})$$

Pour une aspiration non uniforme, la vitesse transversale d'aspiration peut encore s'écrire comme suit :

$$V_a = v = -\frac{c}{\sqrt{x}}. \quad (\text{II.39})$$

Ainsi, en remplaçant l'expression (II.39) dans (II.38), nous obtenons l'égalité suivante :

$$U_e \frac{d\delta}{dx} (\eta f'_{anu}(\eta) - f_{anu}(\eta)) = -\frac{c}{\sqrt{x}}. \quad (\text{II.40})$$

Nous aurons donc à $y=0$ respectivement à $y=\infty$:

$$\begin{aligned} f_{anu}(0) &= \frac{1}{U_e} \frac{c}{\sqrt{x}} \frac{dx}{d\delta} \neq 0 \\ f'_{anu}(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Donc, la solution de Blasius et les conditions aux limites pour une aspiration est la suivante :

$$\begin{aligned} f''' + \frac{1}{2} f f'' &= 0 \\ f_{anu}(0) &\neq 0 \\ f'_{anu}(0) &= 0 \\ f'_{anu}(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

D'après les conditions aux limites de l'équation (II.42), nous constatons que notre problème est dit **problème mal posé** car n'ayant pas de précision sur $f_{anu}(0)$, le nombre de conditions aux limites ne correspond pas à l'ordre (ordre 3) de notre

équation différentielle. Pour avoir les informations là-dessus, nous partirons de l'hypothèse où la vitesse transversale d'aspiration V_a correspond à la vitesse transversale à la frontière de la couche limite sans aspiration que nous avons appelée $V_s(x)$ voir figure.2.2, soit :

$$U_e \frac{d\delta}{dx} (\eta_a f'_{anu}(\eta_a) - f_{anu}(\eta_a)) = -U_e \frac{d\delta}{dx} (\eta f'(\eta_\delta) - f(\eta_\delta)), \quad (\text{II.43})$$

Où η_δ est la valeur de η à la frontière de la couche limite sans aspiration.

En développant l'égalité (II.43), nous obtenons à $\eta_a = 0$:

$$f_{anu}(0) = -f(\eta_\delta) + \eta_\delta f'(\eta_\delta). \quad (\text{II.44})$$

Ayant la condition sur $F(0)$ tel que le montre l'égalité (II.44), il en résulte un problème bien posé pour la plaque plane avec aspiration non uniforme.

La résolution numérique des équations de Blasius avec et sans aspiration avec le logiciel Matlab nous permet d'obtenir les résultats escomptés (profil de vitesse, profil de la contrainte de cisaillement pariétale, etc...). Ceci dit, nous pouvons envisager d'utiliser une autre méthode de résolution des équations de Prandtl pour pallier aux problèmes de couche limite laminaire sur une plaque plane avec ou sans aspiration.

II.3.2. Méthode intégrale de Bianchini

La méthode intégrale de Bianchini est une méthode approximative valable pour la résolution des équations de la couche limite avec ou sans aspiration. Elle présente l'avantage de s'affranchir au besoin de condition de similitude sur V_a . Les équations de base sont celles de Prandtl (II.5) et (II.6).

L'hypothèse de base de cette méthode est de poser le profil de vitesse sous la forme suivante [7] :

$$\frac{u}{U_e} = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{h(x)}\right). \quad (\text{II.45})$$

Où $h(x)$ est la fonction échelle qui est l'inconnue à déterminer et erf la fonction erreur. Cette fonction erreur présente l'avantage d'une bonne approximation de la solution exacte de Blasius sans aspiration, d'où son utilisation [7].

À partir des équations de Prandtl, en les intégrant par rapport à y de 0 à δ , l'équation (II.6) devient :

$$\int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy, \quad (\text{II.46})$$

Or nous savons que :

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial uv}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (\text{II.47})$$

D'après l'équation de continuité (II.5), nous avons :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (\text{II.48})$$

En remplaçant dans l'équation (II.46) les équations (II.47) et (II.48), tout en appliquant les conditions aux limites (II.1) et (II.2), nous obtenons :

$$\int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \nu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \right]. \quad (\text{II.49})$$

À la frontière de la couche limite, la vitesse de celle-ci tend vers U_e donc

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\infty} = 0.$$

L'équation (II.49) devient alors :

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy = -v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (\text{II.50})$$

De même, en intégrant l'équation de continuité dans le même domaine, nous obtenons :

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy = V_a. \quad (\text{II.51})$$

Car d'après les conditions aux limites, $[v(x,y)]_0^\delta = -V_a$

En multipliant l'équation (II.51) par la vitesse de l'écoulement libre du fluide U_e et en faisant une soustraction avec l'équation (II.50), tout en multipliant et en divisant par U_e^2 , nous aboutissons à l'équation intégrale suivante :

$$U_e^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy - U_e V_a = v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (\text{II.52})$$

En appliquant l'hypothèse (II.45) à l'équation (II.52), tout en posant :

$$z = \frac{y}{h(x)}, \quad (\text{II.53})$$

Nous obtenons l'équation suivante :

$$U_e \frac{d}{dx} \int_0^\delta \text{erf}(z)(1 - \text{erf}(z))h(x)dz - V_a = \frac{v}{h(x)} \left(\frac{d\text{erf}(z)}{dz} \right)_{z=0}. \quad (\text{II.54})$$

En Posant $\alpha_2 = \int_0^\delta \text{erf}(z)(1 - \text{erf}(z))dz$ et $\alpha_3 = \frac{d\text{erf}(z)}{dz} \Big|_{z=0}$, l'équation (II.54)

devient alors :

$$U_e \alpha_2 \frac{dh(x)}{dx} - V_a = \frac{v \alpha_3}{h(x)}. \quad (\text{II.55})$$

Ainsi, à $x=0$ et à $y=0$,

$$h(0)=0. \quad (\text{II.56})$$

D'après la propriété de la fonction erreur et après calcul, $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\pi}}$ et $\alpha_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

La résolution analytique de l'équation (II.55) avec la condition (II.56) dépend fortement de la valeur de V_a . Ainsi, pour $V_a = 0$, nous revenons sur le cas de l'étude de la couche limite sur une plaque plane imperméable (sans aspiration) et pour $V_a = -c/\sqrt{x}$ au cas avec une aspiration non uniforme.

a. Cas sans aspiration ($V_a = 0$)

En remplaçant dans l'équation (II.50) la valeur de V_a , nous avons :

$$U_e \alpha_2 \frac{dh(x)}{dx} = \frac{\nu \alpha_3}{h(x)}. \quad (\text{II.57})$$

Nous obtenons la solution de $h(x)$ suivante :

$$h(x) = 2\sqrt{1+\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}. \quad (\text{II.58})$$

En remplaçant cette valeur de $h(x)$ dans l'expression du profil de vitesse (II.45), nous obtenons :

$$\frac{u}{U_e} = \text{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}} \right) \quad \text{Or, } \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} \text{ et } \eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (\text{II.59})$$

En développant et en réduisant l'expression ci-dessus, nous obtenons alors le profil de vitesse pour une plaque plane imperméable sous la forme suivante :

$$\frac{u}{U_e} = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{3}\eta\right). \quad (\text{II.60})$$

b. Cas avec aspiration non uniforme $\left(V_a = -\frac{c}{\sqrt{x}}\right)$

Dans le cas d'une aspiration non uniforme, l'équation (II.55) devient :

$$U_e \alpha_2 \frac{dh(x)}{dx} + \frac{c}{\sqrt{x}} = \frac{\nu \alpha_3}{h(x)}. \quad (\text{II.61})$$

L'une des solutions de cette équation différentielle non linéaire est de la forme :

$$h(x) = k\sqrt{x}, \quad (\text{II.62})$$

Où k est à déterminer.

En introduisant l'expression (II.62) dans l'équation (II.61), nous obtenons l'équation du second degré ci-dessous à résoudre :

$$U_e \alpha_2 k^2 + 2ck - 2\nu \alpha_3 = 0. \quad (\text{II.63})$$

La résolution de celle-ci nous permet d'obtenir les solutions suivantes :

$$k_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2\nu U_e \alpha_2 \alpha_3}}{U_e \alpha_2}. \quad (\text{II.64})$$

D'après l'égalité (II.40), $V_a = -\frac{c}{\sqrt{x}} = -U_e \frac{d\delta}{dx} f_{anu}(0)$, avec $\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{\frac{\nu}{U_e}}$, nous

obtenons donc :

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{\nu U_e} f_{anu}(0). \quad (\text{II.65})$$

En remplaçant l'égalité (II.65) dans l'expression positive de (II.64), nous obtenons donc :

$$k = \sqrt{\frac{\nu}{U_e}} d. \quad (\text{II.66})$$

Avec,

$$d = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}-1} \left[-\frac{1}{2} f_{anu}(0) + \sqrt{\frac{1}{4} f_{anu}^2(0) + \frac{4}{\pi} (\sqrt{2}-1)} \right]. \quad (\text{II.67})$$

Ayant les expressions (II.66) et (II.67), la solution de l'équation (II.61) peut se réécrire comme suit :

$$h(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} d = \delta(x) d. \quad (\text{II.68})$$

Ainsi, le profil de vitesse pour une aspiration non uniforme devient alors :

$$\frac{u}{U_e} = \text{erf}\left(\frac{1}{d} \eta\right). \quad (\text{II.69})$$

II.4. Méthode de Tir

Ayant déterminé les solutions de chaque méthode, nous procéderons par la suite aux résolutions numériques des celles-ci avec la méthode de résolution numérique de Runge Kutta d'ordre 4 (RK4) pour obtenir les solutions de Blasius. Cependant, elle permet de résoudre numériquement les problèmes à valeurs initiales. Dans notre cas, nous obtenons des problèmes aux conditions aux limites. Ainsi, pour résoudre numériquement notre problème, nous allons utiliser une méthode dite de **Tir** pour pallier à ce problème.

II.4.1. Principe de la méthode

La méthode de Tir plus connue sous le nom de **shooting method** est une méthode de résolution numérique qui nous permet de transformer un problème de conditions aux limites en deux points en un problème aux conditions initiales [4].

Lors de la résolution des équations de Prandtl, nous aboutissons à une équation différentielle ordinaire de troisième ordre accompagnée de trois conditions aux

limites. La méthode de tir comme nous l'avons mentionnée ci-haut nous permet de transformer ces conditions aux limites en conditions initiales. Pour ce faire, nous aurons besoin de trois conditions initiales pour obtenir un problème bien posé ; c'est à dire déterminer les conditions en 0 de f , f' et f'' . Cependant, les conditions aux limites de l'équation de notre problème nous apportent des informations sur deux de ces conditions initiales notamment sur $f(0)$ et $f'(0)$. Il ne nous reste plus qu'à déterminer la condition sur $f''(0)$. L'idée pour compléter le problème est de poser la condition manquante c'est-à-dire $f''(0) = a$; avec a à déterminer.

Le processus de détermination de cette valeur passe par une fonction F dépendante de a qui respecte la condition à l'infini ($f'(\infty) = 1$) nommée **fonction coût** tel que :

$$F(a) = (f'(\infty, a) - 1)^2. \quad (\text{II.70})$$

Ainsi, en utilisant l'algorithme de Newton Raphson par exemple, nous pouvons minimiser la fonction (II.70) et ainsi obtenir la valeur de a manquante.

II.4.2. Algorithme de Newton Raphson

L'algorithme de Newton Raphson est une méthode numérique utilisée pour déterminer les racines d'une fonction.

Son application à notre problème permet de déterminer la solution de l'équation (II.70) tel que :

$$F(a) = 0. \quad (\text{II.71})$$

Cet algorithme repose sur l'approximation de Taylor pour trouver la solution de l'équation (II.71), son algorithme est :

$$F(a) + \delta a F'(a) = 0. \quad (\text{II.72})$$

Cette méthode est utilisée ici parmi tant d'autres car elle présente l'avantage d'une convergence rapide ainsi que des résultats précis de la racine de notre fonction.

Une fois la valeur de a trouvée, nous utiliserons l'algorithme de RK4 pour la résolution numérique des équations de la couche limite de Blasius.

II.4.3. Algorithme de Runge Kutta

a. Description de l'algorithme

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 est une méthode numérique utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires ; cependant, elle ne s'applique directement qu'aux équations différentielles de premier ordre [4]. C'est pourquoi, pour pouvoir appliquer l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 à notre problème, il devient indispensable d'effectuer des changements de variable.

b. Changements de variables

Dans le but d'appliquer l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4, nous devons effectuer, comme mentionné plus haut, des changements de variable pour l'équation du problème (II.35 et II.43). Pour cela, Posons :

$$\begin{aligned}f &= y_1 \\f' &= y_1' = y_2 \\f'' &= y_2' = y_3 \\f''' &= y_3' = -\frac{1}{2}y_1y_3\end{aligned}\tag{II.74}$$

Nous pouvons encore réécrire ces changements de variable sous la forme suivante :

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\eta} = F(\eta, \mathbf{Y}).\tag{II.75}$$

Avec,

$$\mathbf{Y} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ et } F(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -\frac{1}{2}y_1y_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.76})$$

Les conditions initiales avec ou sans aspiration s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, \\ y_3(0) &= a. \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

Le système étant désormais de premier ordre, nous pouvons à présent dérouler l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 ci-dessous sur l'équation (II.75) pour obtenir la solution numérique de notre problème.

$$\begin{aligned} k_1 &= hF(\eta_i, y_i) \\ k_2 &= hF\left(\eta_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hF\left(\eta_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hF(\eta_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4) \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

CHAPITRE III

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats de l'étude numérique de la couche limite se développant sur une plaque plane horizontale sans gradient de pression avec aspiration, ainsi qu'une étude comparative entre les profils numériques de Blasius et la nouvelle approximation de Bianchini. Les différentes méthodes numériques utilisées se feront dans le logiciel Matlab.

Ce chapitre sera structuré autour de deux grandes parties notamment sur les résultats et discussions de la méthode des solutions semblables et la méthode intégrale de Bianchini.

III.1. MÉTHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES

III.1.1. Cas d'une plaque plane imperméable

La résolution numérique de l'équation de Blasius (II.35) conjointe à la méthode de tir et celle de Runge Kutta d'ordre 4 comme mentionnées ci-haut nous permet d'obtenir les solutions de notre équation. Rappelons tout d'abord que dans cette équation, f , f' et f'' représentent respectivement la fonction de courant, la vitesse adimensionnelle et la contrainte de cisaillement pariétale adimensionnelle. Rappelons également que la méthode de Tir nous fournit la condition manquante $f''(0)=0.33205733$ [11].

Ainsi, en utilisant le logiciel Matlab, nous obtenons les différents profils de vitesse, de la fonction de courant, de la contrainte de cisaillement pariétale en fonction de η comme représenté sur les figures (figure.3.1-a ; figure.3.1-b ; figure.3.1-c) ci-dessous ainsi que les valeurs en annexe.

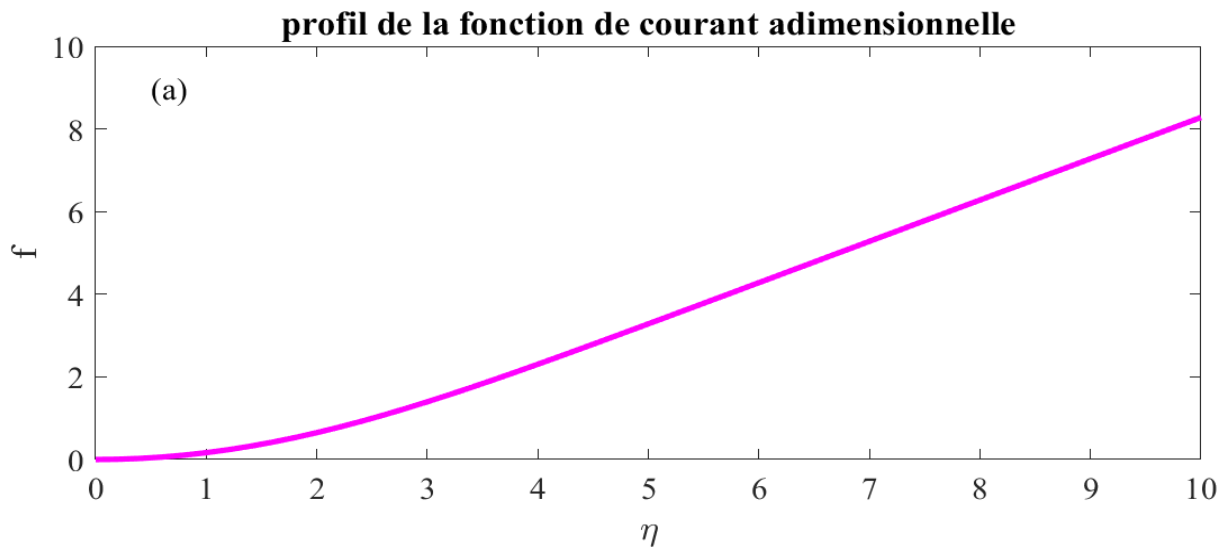


Figure.3.1-a. Variation de la Fonction de courant adimensionnelle

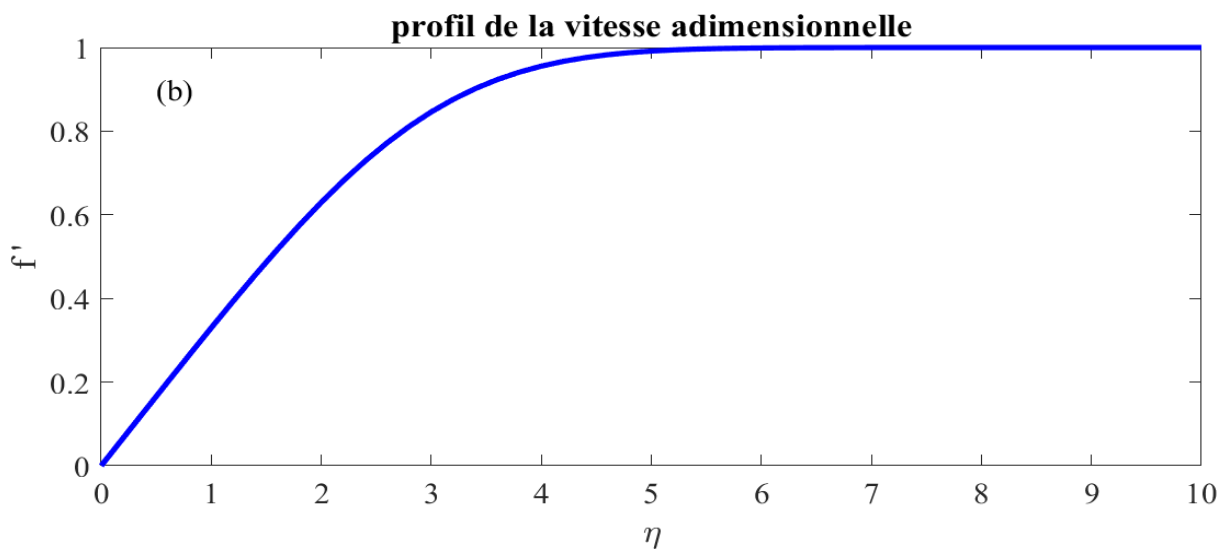


Figure.3.1-b. Variation de la Fonction de Vitesse adimensionnelle.

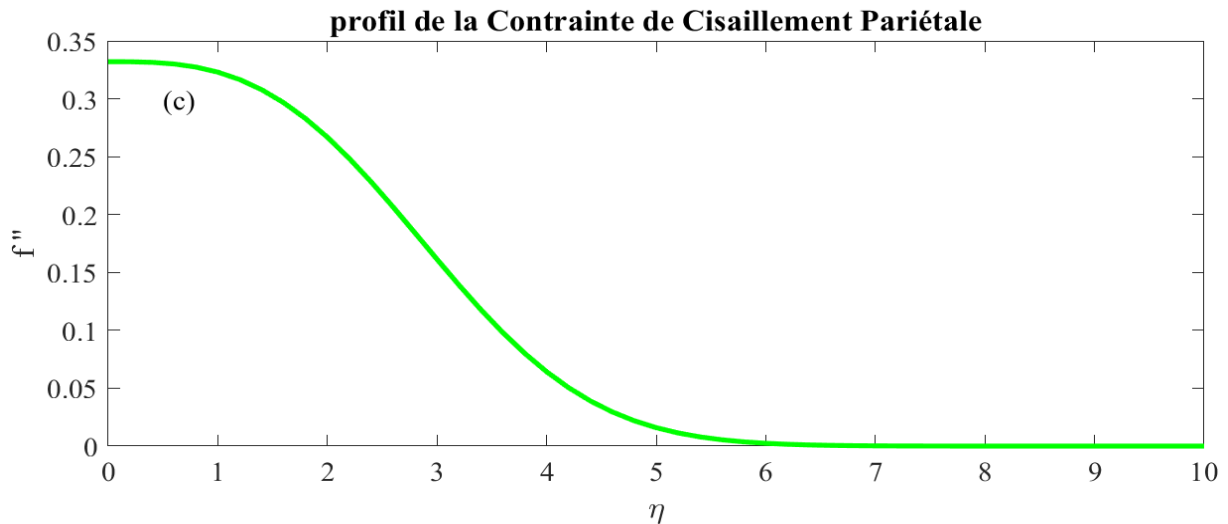


Figure.3.1-c. Variation de la Cisaillement Pariétale.

Ayant les valeurs de f et ses dérivées de la couche limite sur une plaque plane imperméable (Voir annexe), nous constatons que la vitesse dans la couche limite correspond à 99% de la vitesse de l'écoulement du fluide libre à $\eta = 5$.

Ainsi, d'après les résultats mentionnés dans le tableau 1 de l'annexe, nous avons :

$$\frac{u}{U_e} = 0.991540 . \quad (\text{III.1})$$

Ce résultat nous permet de calculer certaines grandeurs de la couche limite tels que l'épaisseur de la couche limite, la contrainte pariétale, pour ne s'intéresser qu'à ceux-ci.

Donc pour $\eta = 5$, on a :

$$y = \delta . \quad (\text{III.2})$$

Or,

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{x} \sqrt{R_{e_x}} \quad (\text{III.3})$$

Ce qui implique que,

$$\delta(x) = \frac{5x}{\sqrt{R_{e_x}}} . \quad (\text{III.4})$$

Rappelons que $Re_x = \frac{U_e x}{\nu}$ représente le nombre de Reynolds local.

De même, la contrainte de cisaillement pariétale est donnée par :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{Re_x}} f''(0). \quad (III.5)$$

Ou encore

$$\tau_p = 0.33205 \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{Re_x}}. \quad (III.6)$$

L'équations (III.4) nous permet donc d'observer les variations de l'épaisseur de la couche limite le long d'une plaque plane poreuse pour différentes valeurs du nombre de Reynolds (Voir figure.3.2) ci-dessous.

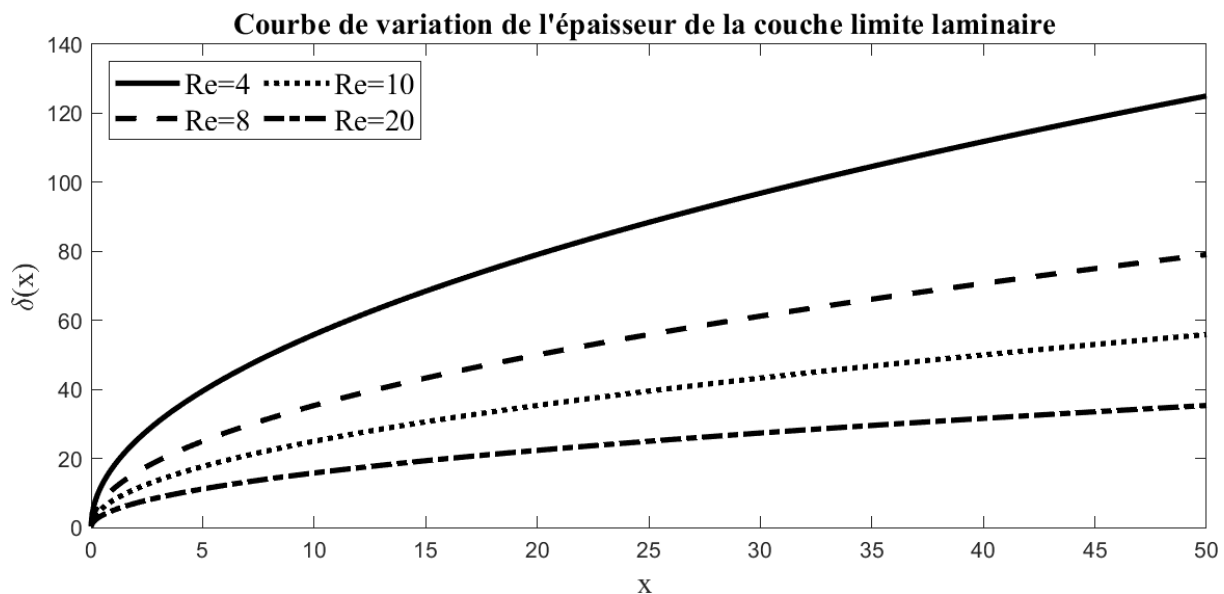


Figure.3.2. Variation de l'épaisseur de la couche limite le long de la plaque.

Cette figure montre que, pour un nombre de Reynolds élevé, nous avons une diminution de l'épaisseur de la couche limite due au fait que les termes d'inerties dans la couche limite dominant sur les termes de viscosité, ainsi les frottements entre les particules de fluides sont moins importants ; et inversement.

Pour de très grand nombre de Reynolds, le **décollement de la couche limite** peut survenir en raison de gradient de pression adverse entrainant des perturbations dans la couche limite et des transitions vers la turbulence.

III.1.2. Cas d'une plaque plane poreuse

Dans le cas d'une plaque plane poreuse, la résolution numérique de l'équation (II.37) avec les conditions aux limites (II.38) et (II.40) nous permet également d'obtenir grâce à la méthode de Tir, la condition initiale manquante $f''_{anu}(0)=1.022839$. Sachant que grâce aux résultats de Blasius sur une plaque plane imperméable, nous avons pu obtenir $f_{anu}(0)=1.6744$. Ainsi, la résolution de l'équation du problème par la méthode de Runge Kutta nous permet également d'obtenir f_{anu} et ses dérivées (Voir figure.3.3-a, figure.3.3-b, figure.3.3-c).

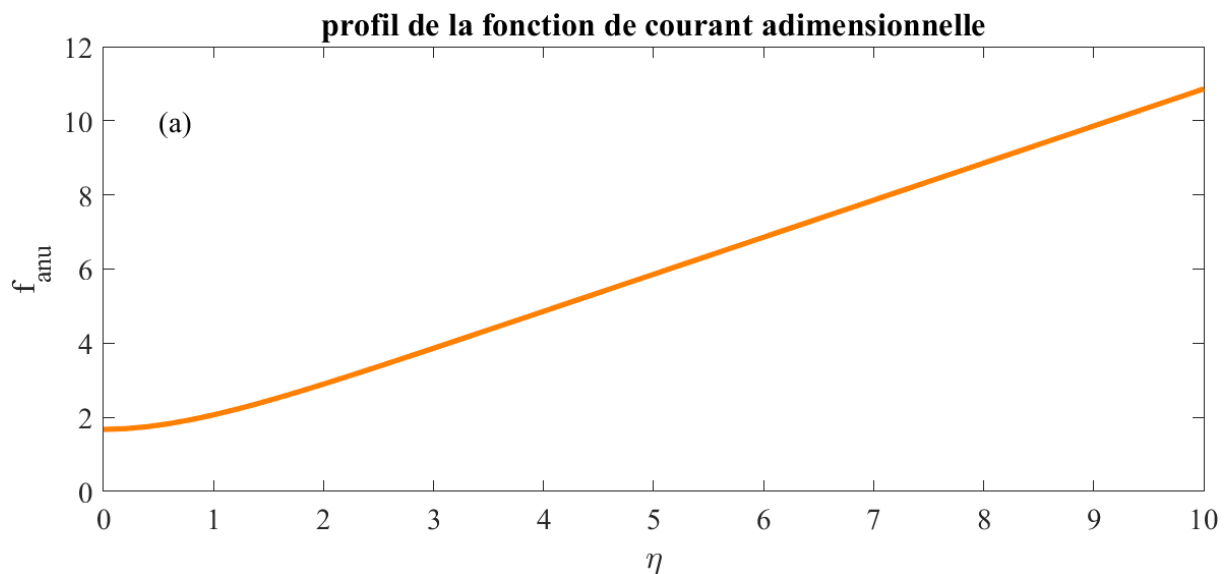


Figure.3.3-a. Variation de la Fonction de courant adimensionnelle sur une plaque plane poreuse.

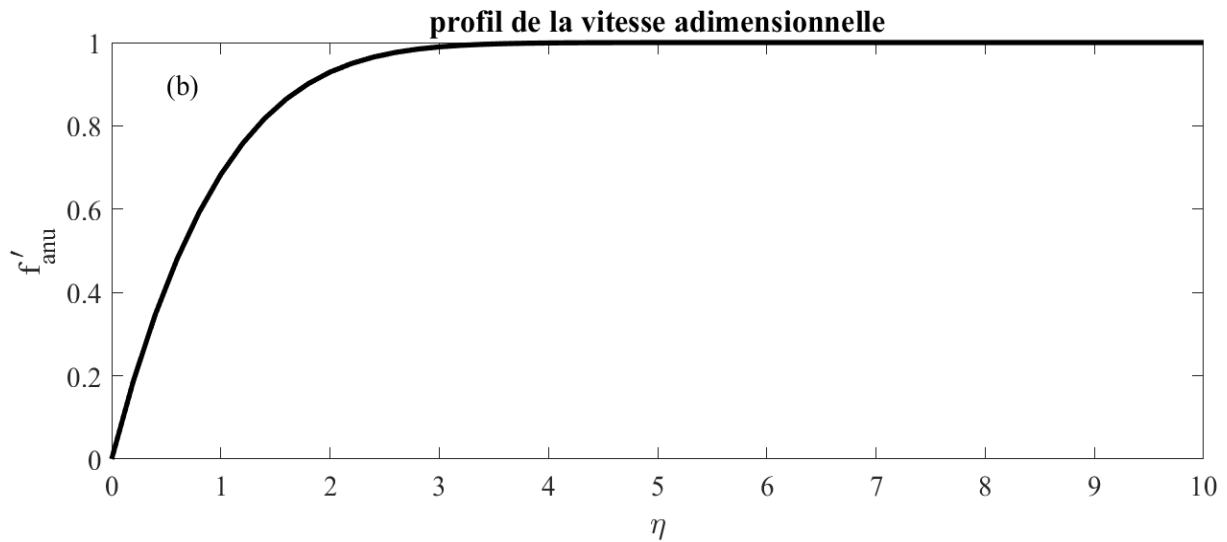


Figure.3.3-b. Variation de la Vitesse adimensionnelle sur une plaque plane poreuse.

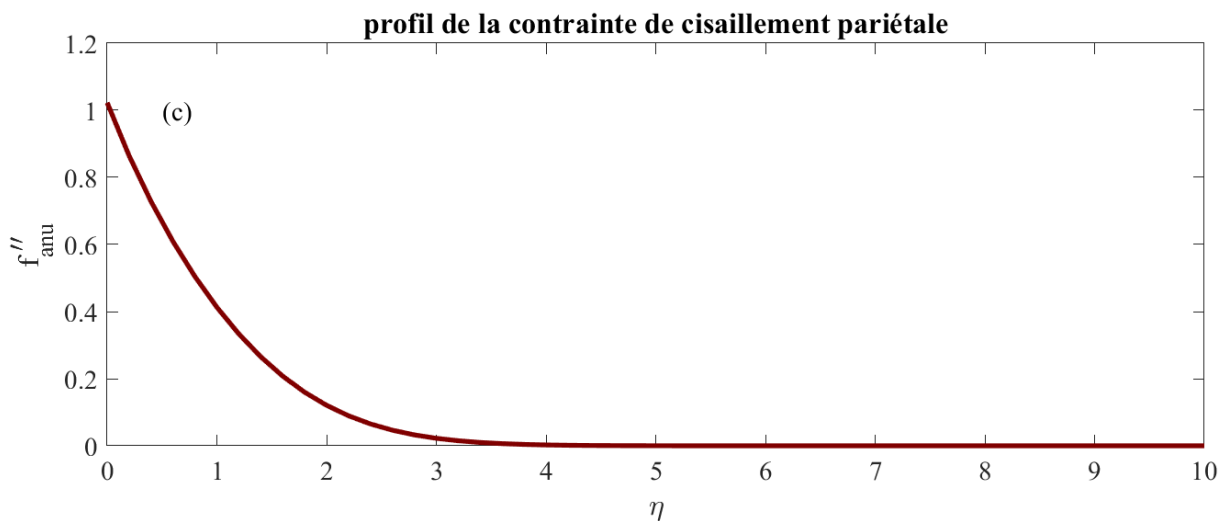


Figure.3.3-c. Variation de la Contrainte de Cisaillement Pariétale sur une plaque plane poreuse.

Dans ce cas, la vitesse du fluide au sein de la couche limite correspond à 99% de la vitesse de l'écoulement du fluide libre à $\eta = 3$.

Le tableau 2 de l'annexe montre qu'en ce point,

$$\frac{u}{U_e} = 0.98959. \quad (\text{III.7})$$

Nous constatons donc que le champ de vitesse longitudinal est identique à celui de la couche limite sur une plaque imperméable, mais cette croissance est plus rapide que celle de la couche limite sur une plaque imperméable également.

Ainsi, l'épaisseur de la couche limite s'écrit de la manière suivante :

$$\delta(x) = \frac{3x}{\sqrt{Re_x}}. \quad (III.8)$$

La contrainte de cisaillement pariétale est également donnée par :

$$\tau_p = 1.022839 \cdot \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{Re_x}}. \quad (III.9)$$

En comparant les différents profils dans la couche limite laminaire sur une plaque plane imperméable avec celle d'une plaque plane poreuse, la troisième courbe de la figure.3.4 montre que l'aspiration a un effet similaire à celui d'un gradient de pression négatif (favorable), qui permet à la contrainte de cisaillement à la paroi d'augmenter ; car les particules de fluides de faible quantité de mouvement à l'intérieur de la couche limite sont aspirées à travers la surface de la plaque, laissant ainsi leurs places aux fluides à quantité de mouvement plus élevée se trouvant à l'intérieur de la couche limite [6].

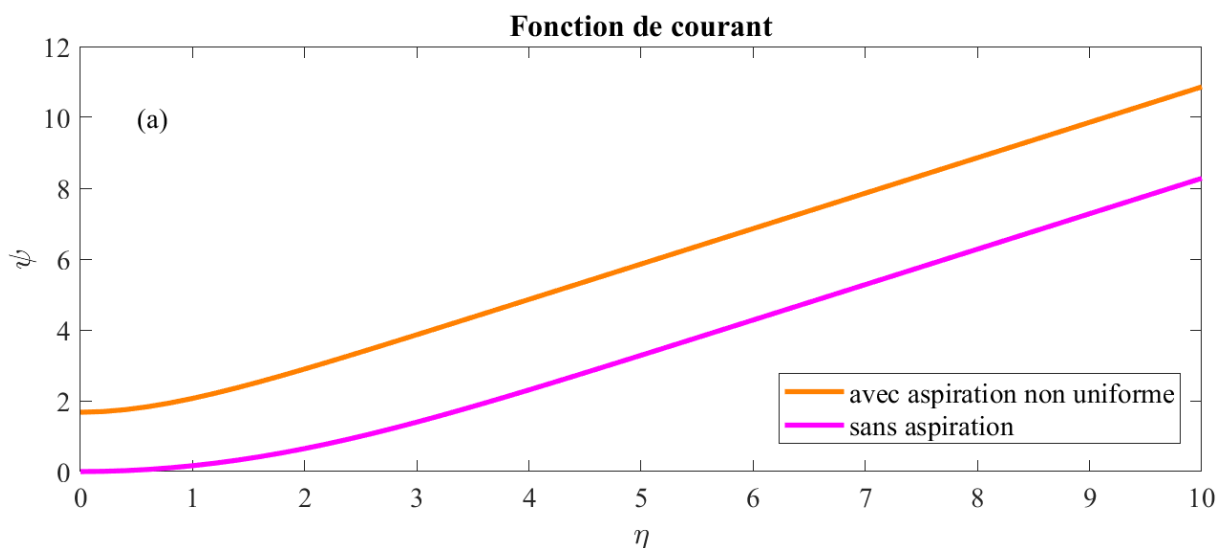


Figure.3.4-a. Comparaison de la fonction de courant avec et sans aspiration.

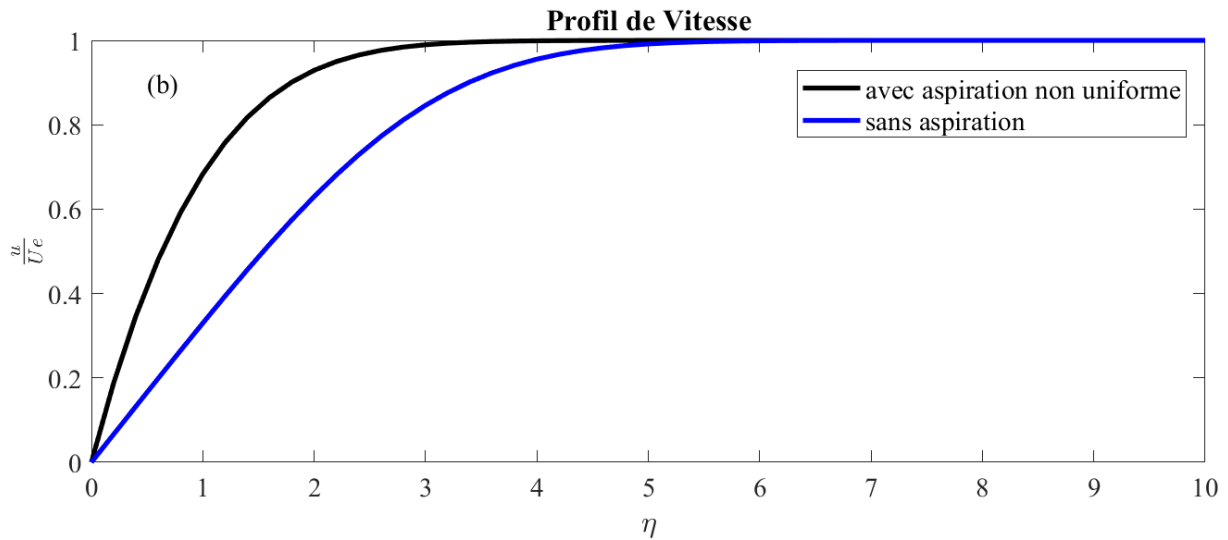


Figure.3.4.-b Comparaison des profils Vitesse adimensionnelle avec et sans aspiration.

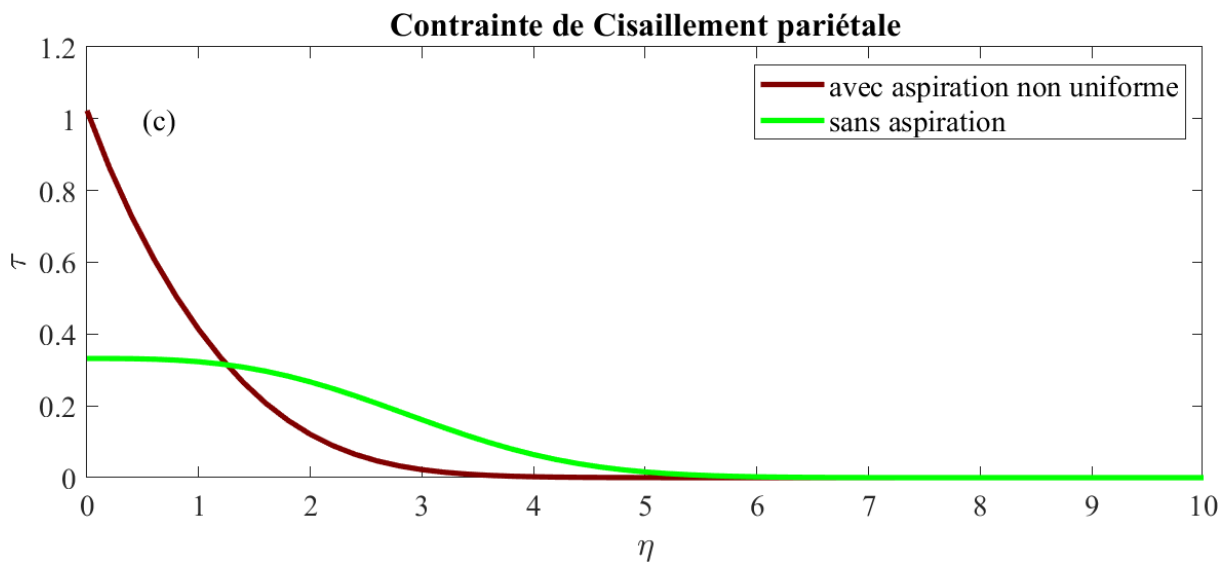


Figure.3.4. Comparaison la contrainte de Cisaillement Pariétale avec et sans aspiration.

La figure.3.5 ci-dessous montre l'influence de l'aspiration sur l'épaisseur de la couche limite. Nous constatons que cette aspiration permet de réduire cette épaisseur dès lors que la contrainte pariétale augmente.

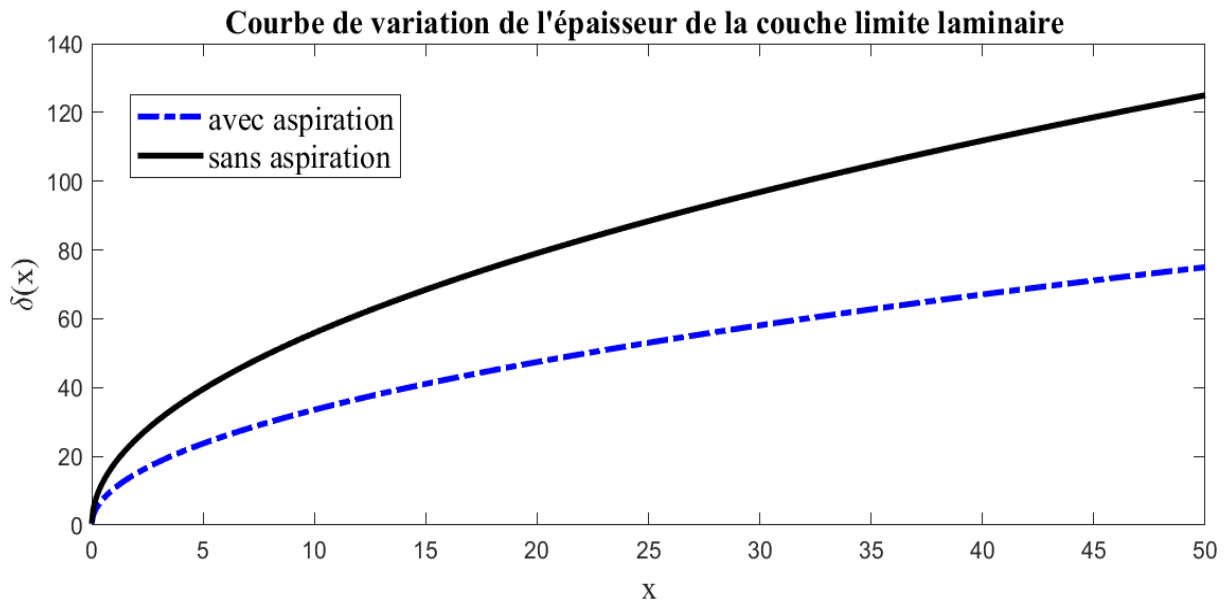


Figure.3.5. Comparaison de l'épaisseur de la couche limite avec et sans aspiration.

III.2. MÉTHODE INTÉGRALE DE BIANCHINI

Le problème de Blasius sans ou avec aspiration a été résolu comme nous l'avons vu plus haut numériquement par l'utilisation de la méthode conjointe de Tir et de Runge Kutta. Dans le même élan, Nous allons dans cette partie résoudre numériquement le problème de couche limite avec la méthode intégrale approximative de Bianchini tout en faisant une étude comparative des profils de vitesse avec la solution exacte de Blasius.

III.2.1. Cas d'une plaque plane imperméable

La figure.3.6 ci-dessous compare la méthode de Blasius avec la nouvelle approximation de Bianchini (II.55) en absence d'aspiration les profils de vitesse au sein de la couche limite. Nous constatons que cette approximation coïncide bien avec le profil numérique de Blasius sans aspiration. Ce résultat confirme bien le choix judicieux de la forme du profil $erf(z)$. Elle montre également que la fonction erreur présente l'avantage d'une bonne approximation de la solution exacte de Blasius [7].

Cette méthode nous montre que la vitesse dans la couche limite pour une plaque plane imperméable correspond à 99% de la vitesse de l'écoulement du fluide libre approximativement à :

$$\eta = 5.66. \quad (\text{III.10})$$

Cette valeur n'est donc pas très éloignée de la solution exacte de Blasius ce qui consolide davantage cette méthode.

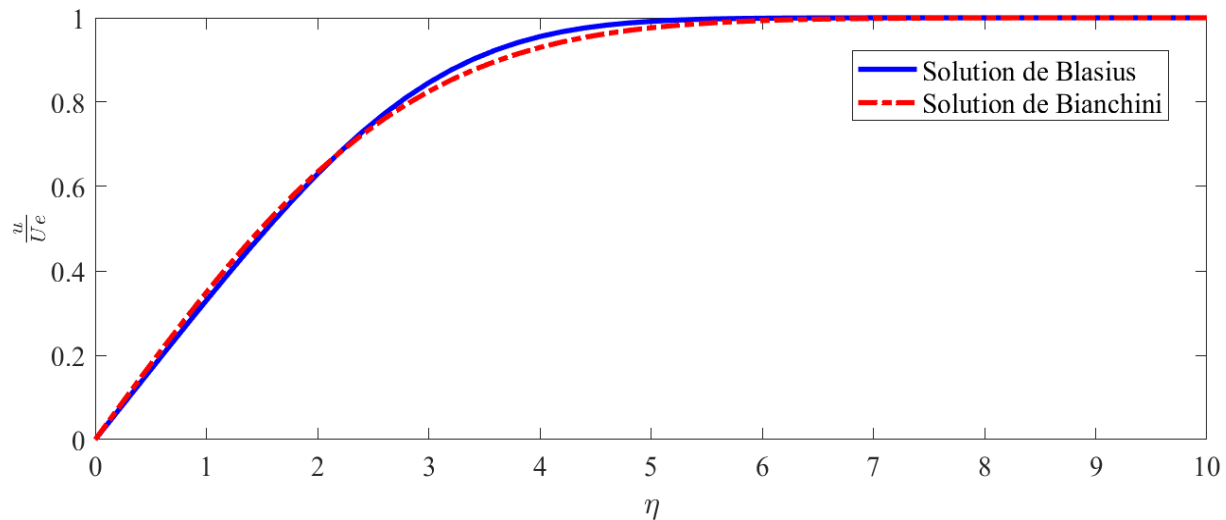


Figure.3.6. Validation de la loi de Bianchini de la vitesse sans aspiration par le profil numérique de Blasius.

III.2.2. Cas d'une plaque plane poreuse

La solution approximative de Bianchini dans le cas d'une plaque plane poreuse est également comparée au profil de vitesse de Blasius avec aspiration (figure.3.3)

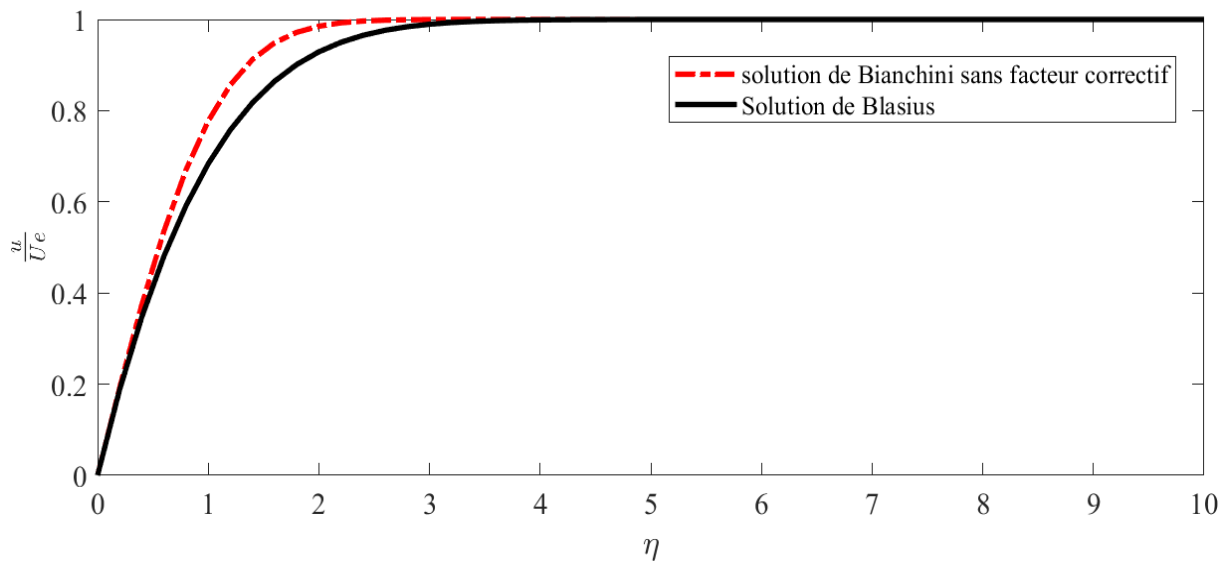


Figure.3.7. Validation de la loi de Bianchini de la vitesse avec aspiration sans facteur correctif par le profil numérique de Blasius.

Pour que la loi proposée par Bianchini se rapproche de la solution exacte de Blasius, nous pouvons prendre en compte un coefficient correctif d'aspiration $\beta = 0.7$ [7]. (Voir figure.3.8) ci-dessous.

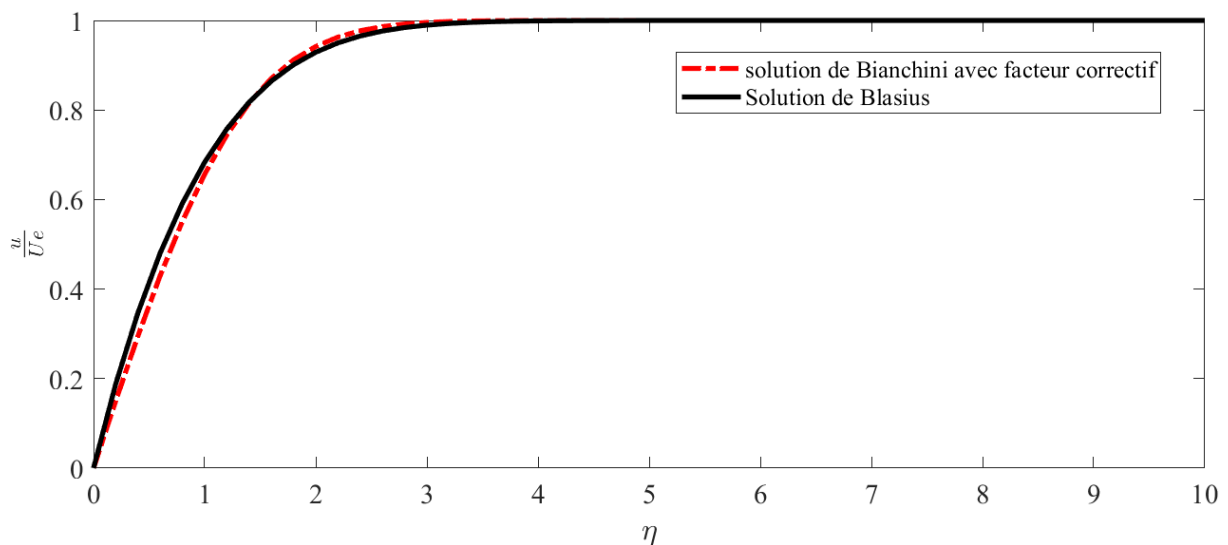


Figure.3.8. Validation de la loi de Bianchini de la vitesse avec aspiration et avec facteur correctif ($\beta = 0.7$) par le profil numérique de Blasius.

CONCLUSION

CONCLUSION

Ce travail m'a permis d'étudier numériquement ainsi qu'analytiquement le phénomène de couche limite laminaire se développant sur une plaque plane horizontale avec aspiration. En chapitre I, nous avons présenté les généralités sur la mécanique des fluides et les avancées de la couche limite. Ensuite, au chapitre 2 nous avons étudié le problème et posé les hypothèses qui nous ont permis d'obtenir les équations du problème. La résolution de ces équations a été abordée de deux manières différentes. Elle a été résolue numériquement avec les méthodes conjointe de Tir et de Runge Kutta d'ordre 4 ensuite analytiquement en utilisant une nouvelle approche de résolution approximative. Par la suite, nous avons présenté les résultats obtenus d'abord pour une plaque plane imperméable et ensuite pour une plaque poreuse tout en utilisant les différentes approches pour ces cas. Notre étude a montré l'effet de l'aspiration sur la distribution de vitesse dans la couche limite ainsi que sur certaines grandeurs caractéristiques de celle-ci. Par la suite, nous avons également pu constater que la distribution de vitesse longitudinale sur la plaque reflète bien le phénomène de couche limite qui peut être observé à l'aide des techniques de visualisation. La résolution analytique de l'équation issue de la méthode approximative de Bianchini mène à des nouvelles approximations analytiques par la fonction Lambert et Erreur des profils de la couche limite avec aspiration. Elle a été validée par une comparaison avec les profils numériques de Blasius et elle a ainsi montré la pertinence de ces approximations. De manière générale, le phénomène étudié trouve de nombreuses applications dans divers domaines de la mécanique des fluides et particulièrement en aérodynamique. Dans la perspective d'une application aérodynamique, il est intéressant d'étudier la stabilité de la couche limite sur une plaque plane poreuse.

RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

RÉFÉRENCES

- [1]. **Pemha, E.** (2023). (2024). *Cours de mécanique des fluides de quatrième année*. Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique UYI.
- [2]. **Pemha, E.** (2023). *Cours de mécanique des fluides de troisième année*. Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique UYI.
- [3]. **Meuris, C.** *Mécanique des Fluides* (Licence de Physique et Application). Saclay 91191 Gif-Sur-Yvette cedex.
- [4]. **Ngo Nyobe, E.** (2025). *Schéma aux différences finies pour la résolution numérique des EDP*. Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique UYI.
- [5]. **Jacques, P.** *Dynamique des écoulements laminaires externes*. Université de Reims.
- [6]. **Segni, K.** (2020). Couche limite laminaire sur une plaque plane avec aspiration et refoulement.
- [7]. **Bourehla, A., Khelifi, Z., & Hafien, C.** (2011, August). Approximations analytiques par les fonctions Lambert et Erreur des profils de couche limite laminaire avec aspiration uniforme ou non. In *CFM 2011-20ème Congrès Français de Mécanique*. AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc-92400 Courbevoie.
- [8]. **Berbas, M.** Couche limite dynamique sur une surface plane, contrôle de l'épaisseur et de frottement pariétal.
- [9]. **Mekherbeche, B., & Kareche, A.** *Expérience de Reynolds: Les différents types d'écoulements*. Laboratoire d'Hydraulique, Département d'Hydraulique, Faculté de Technologie, Université de Batna 2.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [10]. **Blasius, H.** (1907). *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*. Druck von BG Teubner.
- [11]. **Fédiaevski, C., Voitkounski, I., Faddéev, Y.** (1974). *Mécanique des fluides*. Éditions Mir.
- [12]. **Von Kármán, T.** (1921). Über laminare und turbulente Reibung. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1, 233-252.
- [13]. **Prandtl, L.** (1905). Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. *Verhandl. 3rd Int. Math. Kongr. Heidelberg (1904), Leipzig*.
- [14]. **Bouzerouda Mansour, D.** *Cours d'hydraulique générale* (Licence 3). Université Abderrahmane Mira - Bejaia.
- [15]. **Coles, D.** (1956). The law of the wake in the turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 1(2), 191-226.
- [16]. **Freeman, H. B.** (1933). *Force Measurements on a 1/40-scale Model of the US Airship "Akron."* (No. NACA-TR-432).

ANNEXE

ANNEXE

➤ SOLUTION EXACTE DE BLASIUS POUR LE CAS D'UNE PLAQUE PLANE IMPERMEABLE.

η	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$
0	0	0	0,332057
0,2	0,006641	0,066408	0,331984
0,4	0,02656	0,132764	0,33147
0,6	0,059735	0,198937	0,330079
0,8	0,106109	0,264709	0,327389
1	0,165572	0,32978	0,323007
1,2	0,23795	0,393776	0,316589
1,4	0,322983	0,456262	0,307865
1,6	0,420322	0,516757	0,296664
1,8	0,529519	0,574758	0,282931
2	0,650025	0,629765	0,266752
2,2	0,781194	0,68131	0,248351
2,4	0,922291	0,728981	0,228092
2,6	1,072507	0,772454	0,206455
2,8	1,230978	0,811509	0,184007
3	1,396809	0,846044	0,161361
3,2	1,569096	0,876081	0,139128
3,4	1,746951	0,90176	0,117877
3,6	1,929526	0,923329	0,098087
3,8	2,116031	0,941117	0,080127
4	2,305748	0,955517	0,064235
4,2	2,498041	0,966956	0,050521
4,4	2,692362	0,97587	0,038974
4,6	2,888249	0,982682	0,029485
4,8	3,085322	0,987788	0,021873
5	3,283275	0,991541	0,015909
5,2	3,481869	0,994244	0,011344

ANNEXE

5,4	3,68092	0,996154	0,007929
5,6	3,880292	0,997477	0,005434
5,8	4,079883	0,998375	0,00365
6	4,279622	0,998972	0,002403
6,2	4,479458	0,999362	0,001551
6,4	4,679357	0,999611	0,000982
6,6	4,879296	0,999767	0,000609
6,8	5,07926	0,999863	0,00037
7	5,279239	0,999921	0,000221
7,2	5,479227	0,999955	0,000129
7,4	5,679221	0,999975	7,39E-05
7,6	5,879217	0,999986	4,15E-05
7,8	6,079215	0,999993	2,28E-05
8	6,279214	0,999996	1,23E-05
8,2	6,479213	0,999998	6,52E-06
8,4	6,679213	0,999999	3,38E-06
8,6	6,879213	0,999999	1,72E-06
8,8	7,079212	1	8,59E-07
9	7,279212	1	4,2E-07
9,2	7,479212	1	2,02E-07
9,4	7,679212	1	9,48E-08
9,6	7,879212	1	4,37E-08
9,8	8,079212	1	1,98E-08
10	8,279212	1	8,79E-09

Tableau.1. Valeurs de f , f' , f'' en fonction de η pour le cas d'une plaque plane imperméable (solution exacte de Blasius).

➤ SOLUTION EXACTE DE BLASIUS POUR LE CAS D'UNE PLAQUE PLANE POREUSE.

η	$f_{anu}(\eta)$	$f'_{anu}(\eta)$	$f''_{anu}(\eta)$
0	1,674428	0	1,022839
0,2	1,693791	0,188325	0,864579
0,4	1,747808	0,34727	0,728094
0,6	1,831005	0,480708	0,608937
0,8	1,938607	0,591814	0,504427
1	2,066429	0,683343	0,412951
1,2	2,210809	0,757791	0,333484
1,4	2,368565	0,817483	0,265266
1,6	2,536966	0,864597	0,207586
1,8	2,713703	0,901165	0,159666
2	2,896856	0,929052	0,120617
2,2	3,08486	0,949934	0,089443
2,4	3,276463	0,96528	0,065078
2,6	3,470689	0,976345	0,046447
2,8	3,666787	0,984169	0,032509
3	3,864198	0,989595	0,02231
3,2	4,062511	0,993284	0,015012
3,4	4,261431	0,995744	0,009903
3,6	4,460752	0,997351	0,006404
3,8	4,660333	0,998381	0,004059
4	4,86008	0,999028	0,002523
4,2	5,059928	0,999426	0,001537
4,4	5,25984	0,999666	0,000918
4,6	5,459788	0,999808	0,000537
4,8	5,659759	0,999891	0,000308
5	5,859742	0,999938	0,000173
5,2	6,059733	0,999964	9,57E-05

ANNEXE

5,4	6,259727	0,999978	5,18E-05
5,6	6,459724	0,999986	2,74E-05
5,8	6,659721	0,99999	1,43E-05
6	6,85972	0,999992	7,27E-06
6,2	7,059718	0,999993	3,63E-06
6,4	7,259717	0,999994	1,78E-06
6,6	7,459715	0,999994	8,56E-07
6,8	7,659714	0,999994	4,04E-07
7	7,859713	0,999994	1,87E-07
7,2	8,059712	0,999994	8,46E-08
7,4	8,259711	0,999994	3,76E-08
7,6	8,459709	0,999994	1,64E-08
7,8	8,659708	0,999994	7,03E-09
8	8,859707	0,999994	2,96E-09
8,2	9,059706	0,999994	1,22E-09
8,4	9,259705	0,999994	4,93E-10
8,6	9,459703	0,999994	1,96E-10
8,8	9,659702	0,999994	7,65E-11
9	9,859701	0,999994	2,93E-11
9,2	10,0597	0,999994	1,1E-11
9,4	10,2597	0,999994	4,08E-12
9,6	10,4597	0,999994	1,48E-12
9,8	10,6597	0,999994	5,29E-13
10	10,85969	0,999994	1,86E-13

Tableau.2. Valeurs de f_{anu} , f'_{anu} , f''_{anu} en fonction de η pour le cas d'une plaque plane poreuse (solution exacte de Blasius).