

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

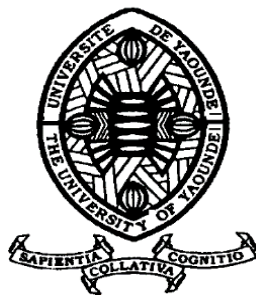
Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN
SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN
PHYSIQUE ET APPLICATIONS



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF PHYSICS

POSTGRADUATE SCHOOL OF
SCIENCES, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCES

DOCTORAL RESEARCH UNIT FOR
PHYSICS AND APPLICATIONS

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique

Applied Mechanics and hydraulics Laboratory

DYNAMIQUE D'UN FLUIDE VISQUEUX ENTRE DEUX DISQUES IMPERMEABLES EN EXTENSION

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master de Physique

Parcours :

Mécanique Appliquée

Par :

KOUNA NOAH Fabrice Joël

Matricule : 19D2356

Licencié en Physique

Sous la Co-direction de :

ELLA ENY Gérémio

Chargé de Cours

Université des Sciences et Techniques de Masuku
(Gabon)

HONA Jacques

Professeur

Université de Yaoundé I



Année 2024

DEDICACES

A

Mon père géniteur NOAH ASSE Barthelemy (en mémoire)

Mon père tuteur AMIA MOUNAMBA Gérard

Ma mère génitrice BILOA MARIE Clémentine

Ma mère tutrice OMBEDE MIMFEGUE Hedwige Thérèse épouse AMIA
MOUNAMBA

Mes frères et sœurs

Mon homonyme KOUNA ASSE Nathalie

Mes cousins et cousines

Mes neveux et nièces

REMERCIEMENTS

Je remercie profondément le DIEU TOUT PUISSANT, créateur du ciel et de la terre pour la grâce, la santé, la volonté et la sagesse qu'il m'a accordée, afin de pouvoir exécuter ce travail.

L'élaboration du présent travail a requis le soutien de nombreuses personnes sans lesquelles l'accès aux ressources nécessaires n'aurait pas été possible. Par conséquent, j'ai eu recours à un énorme soutien. J'exprime ma profonde gratitude au Pr. HONA Jacques, Professeur à l'Université de Yaoundé 1, Chef de Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique qui a dirigé ce travail de mémoire de Master 2. Son Soutien multiforme, sa disponibilité et ses conseils judicieux m'ont permis de travailler dans des conditions idoines. Pour tout dire, il a été pour moi un exemple idéal à suivre et je lui en suis entièrement reconnaissant. Je remercie aussi Dr. ELLA ENY Gérémino, Charger de Cours à l'Université des Sciences et Techniques de Masuku (GABON) Faculté des Sciences au Département de Physique.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de consacrer leur temps précieux pour examiner ce travail. Je pense particulièrement au Pr. NDJAKA Jean-Marie Bienvenu, Pr. HONA Jacques, Dr. ELLA ENY Gérémino, Pr. MBONO SAMBA Yves Maître de Conférence.

Mes remerciements vont également à l'endroit de tous les enseignants du Département de Physique qui sont intervenus dans ma formation par leurs unités d'Enseignement respectives.

Je remercie mes camarades de promotion pour l'assistance mutuelle pendant les moments difficiles passés ensemble et les relations cordiales que nous avons entretenues jusque-là.

Je dis merci à toute ma famille pour le soutien permanent et multiforme, en pensant particulièrement à mes parents et grands-parents. Ainsi que M. AMIA MOUNAMBA Gérard.

Enfin, je dis merci à tous ceux ou celles que je ne peux citer ici et qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DE MATIERE

DEDICACES	i
REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DE MATIERE.....	v
LISTE DES FIGURES.....	vi
LISTE DES SYMBOLES	vii
RESUME	viii
ABSTRACT	ix
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : RAPPEL THEORIQUE DE LA MECANIQUE DES MILIEU CONTINUE	1
<i>I.1 LOI DE CONSERVATION DE LA MASSE</i>	<i>7</i>
I.1.1 Tenseur des taux de déformations	7
I.1.2 Enoncé du principe de conservation de la masse	9
I.1.3 Equation de continuité	9
<i>I.2 LOI DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT</i>	<i>11</i>
I.2.1 Force de contact	11
I.2.3 Loi de comportement	13
I.2.4 Enoncé du principe de la conservation de la quantité de mouvement .	13
I.2.5 Equations de Navier-Stokes	15
CHAPITRE II : EQUATIONS DU PROBLEME ET METHODE DE RESOLUTION	17
<i>II.1) GEOMETRIE DU PROBLEME.....</i>	<i>18</i>
II.1.1) Description du domaine d'étude	18
<i>II.2) ESQUISSE DU PROFIL DES VITESSES DANS LES DIRECTIONS DU PLAN</i>	<i>19</i>
II.2.1) Profil des vitesses transversal	19
II.2.2) Profil des vitesses longitudinal	20
	iv

<i>II.3) CONDITIONS D'ETUDE</i>	<i>20</i>
<i>II.4) EQUATIONS DU PROBLEME</i>	<i>21</i>
<i>II.5) FORMULATION ADIMENSIONNELLE DES EQUATIONS.....</i>	<i>22</i>
<i>II.6) PARAMETRES D'ANALYSE</i>	<i>25</i>
<i>II.7) APPROCHE ANALYTIQUE</i>	<i>26</i>
II.7.1) Expression analytique du paramètre de pression.....	26
II.7.2) Expression analytique du coefficient de frottement	28
<i>II.8) PRESENTATION DE LA METHODE DE RESOLUTION DU PROBLEME</i>	<i>29</i>
CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION.....	31
<i>III.1) PROFIL DES VITESSES LONGITUDINAL.....</i>	<i>32</i>
III.1.1) Cas du Reynolds constant avec un γ qui varie	32
III.1.2) Cas du paramètre γ constant avec un Reynolds qui varie.....	34
<i>III.2) PROFIL DES VITESSES RADIAL.....</i>	<i>35</i>
III.2.1) Cas du Reynolds constant avec un γ qui varie.....	35
III.2.2) Cas du paramètre γ fixe avec différentes valeurs du nombre de Reynolds.....	36
<i>III.3) PRESSION ENTRE LES DEUX DISQUES.....</i>	<i>37</i>
III.3.1) Cas du nombre de Reynolds fixe avec différentes valeurs de γ	37
III.3.2) Cas où le paramètre γ est constant et pour différentes valeurs du Reynolds.....	38
<i>III.4) SYNTHESE.....</i>	<i>39</i>
CONCLUSION GENERALE	41
REFERENCES	43

LISTE DES FIGURES

Figure1 : Portion de fluide (D) délimitée par une surface (s)	12
Figure 3 : Esquisse du profil de vitesse transversal	19
Figure 4 : Esquisse du profil des vitesses longitudinales.....	20
Figure 5 : Distribution des vitesses de la composante azimutale du champ des vitesses pour différentes valeurs du rapport des vitesses des disques avec un nombre de Reynolds constant.	32
Figure 6 : Distribution des vitesses de la composante azimutale du champ des vitesses pour différentes valeurs du nombre de Reynolds avec un rapport des vitesses des disques constants	34
Figure 7 : Distribution des vitesses de la composante radiale du champ des vitesses pour différentes valeurs du rapport des vitesses des disques avec un nombre de Reynolds constant.....	35
Figure 10 : distribution de la pression pour différentes valeurs du nombre de Reynolds avec un rapport des vitesses des disques constants.....	38

LISTE DES SYMBOLES

$\bar{\bar{\epsilon}}$: Tenseur des taux de déformations d'ordre 2 ;

ρ : Masse volumique ;

$\bar{\bar{\sigma}}$: Tenseur d'ordre 2 des contraintes ;

μ : Viscosité dynamique du fluide ;

η : Variable adimensionnelle ;

ϑ : Viscosité cinématique ;

β : Paramètre de pression ;

γ : Paramètre qui rend compte des variations relatives des vitesses des deux disques ;

P : Pression statique ;

m : Masse ;

R_e : Nombre de Reynolds ;

$\vec{n}$: Vecteur unitaire sortant ;

$\vec{D}$: Vecteur vitesse de déformation ;

RESUME

La dynamique d'un fluide visqueux entre deux disques imperméables en extension est étudiée avec les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques. Le problème à résoudre est obtenu en utilisant la méthode des solutions semblables. L'équation du problème est résolue numériquement en utilisant la méthode de Tir et l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre. L'analyse du comportement numérique des solutions trouvées est gouvernée par le nombre de Reynolds et le paramètre sans dimension γ qui rend compte du rapport des vitesses des deux disques en mouvement. Pour les faibles nombres de Reynolds, le profil des vitesses radiales est parabolique, ce qui est caractéristique de l'écoulement rampant. Pour $\gamma = 1$, les vitesses radiales des deux disques sont d'égale importance et le profil des vitesses radiales présente une parabole admettant un centre de symétrie. Par ailleurs, un écoulement de type couche limite apparaît avec les grands nombres de Reynolds. La pression dans le domaine de l'écoulement décroît avec le nombre de Reynolds lorsque les vitesses de déplacement des deux disques sont égales.

ABSTRACT

The dynamics of a viscous fluid between two stretchable discs of infinite radius is studied by using the Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates. The problem to solve is obtained by applying the similarity method. The equation of the problem is numerically solved by means of the shooting method and the fourth-order Runge-Kutta algorithm. The analysis of the numerical behavior of the solution obtained is governed by the Reynolds numbers and the dimensional parameter γ which denotes the velocity ratio of the expansion movements of the discs. For small Reynolds numbers, the velocity profile in the radial direction is parabolic; this behavior characterizes a creeping flow. For $\gamma = 1$, the radial velocity of the two discs are equal and the velocity profile in the radial direction is a parabola admitting a Centre of symmetry. On the other hand, a flow of boundary layer type appears for large Reynolds numbers. The pressure in the flow domain decreases with increasing Reynolds number when the displacement velocities of the two discs are equal.

INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement d'un fluide entre deux disques imperméables est très observé dans le milieu industriel. Cependant, dans l'optique de mieux comprendre les usages pratiques, la théorie est une étape incontournable. Il s'agit dans notre travail d'une étude théorique du comportement dynamique d'un écoulement de fluide visqueux.

Avant de s'intéresser à notre étude, parlons d'abord des principes de l'étude des écoulements de fluide visqueux. Sur le plan macroscopique, rappelons qu'un fluide est un milieu matériel, continu, déformable et qui peut s'écouler. Un fluide est un liquide ou un gaz. Le liquide ne peut occuper qu'un volume bien déterminé, ou du moins ce volume ne peut varier que très peu, et seulement sous l'action de fortes pressions ou de températures. Le gaz occupe toujours le volume maximal du domaine où il se trouve, on dit qu'il est expansible. Un écoulement est l'état d'un fluide en mouvement. Pour étudier théoriquement ce mouvement, on procède souvent à la modélisation, c'est-à-dire à l'analyse du comportement de certaines grandeurs associées à l'écoulement comme le champ de vitesse, la température, la pression et la masse volumique. Cette analyse est généralement facilitée par des nombres sans dimension qui régissent l'écoulement. L'ordre de grandeur de ces nombres sans dimension permet de définir le régime de l'écoulement. C'est le cas du nombre de Reynolds qui exprime la comparaison des effets d'inertie aux effets de viscosité du fluide. C'est ainsi qu'on peut avoir le régime laminaire pour des faibles valeurs du Reynolds et le régime turbulent pour des grandes valeurs.

L'écoulement du fluide est influencé par les frontières du domaine dans lequel il est contenu. Ces frontières qui sont des contraintes spatiales à l'écoulement sont appelées conditions aux limites. Lorsque les contraintes sont liées au temps du début du mouvement on parle de conditions initiales. L'écoulement du fluide peut donc être étudié dans le temps et dans l'espace. Dans

le cas où le temps n'influence pas le mouvement, on dit que l'écoulement est permanent. Il est dit non permanent dans le cas contraire.

En général, il existe trois types de régimes d'écoulements, notamment les régimes turbulents, laminaires et rampants. La turbulence désigne l'état de l'écoulement d'un fluide, liquide ou gaz, dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire c'est-à-dire que la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Si le Nombre de Reynolds est élevé (typiquement supérieur à 4000), l'écoulement est généralement turbulent. Un écoulement est dit régulier lorsqu'il se développe en régime laminaire c'est-à-dire quand l'ensemble du fluide s'écoule plus ou moins dans la même direction sans que les différences locales se contrarient par opposition au régime turbulent, fait de tourbillons qui se contrarient mutuellement. L'écoulement laminaire est généralement celui qui est recherché lorsqu'on veut faire circuler un fluide dans une conduite, car dans ce contexte, il y'a moins de perte de charge. De plus si le Nombre de Reynolds est faible (typiquement inférieur à 2000 pour un écoulement dans un tuyau), l'écoulement est généralement laminaire. Le régime rampant est le troisième type d'écoulement qui est fortement laminaire. L'écoulement rampant ou fortement laminaire encore appelé écoulement de stockes apparaît lorsqu'un fluide visqueux s'écoule lentement à cause de la domination des forces de viscosité sur les forces d'inertie.

Pour le sujet qui nous concerne, l'écoulement a lieu dans un domaine cylindrique limité par deux disques identiques parallèles, de rayon plus grand que la distance qui les sépare. Le disque inférieur se trouve à l'origine du repère ($z = 0$) et le disque supérieur se trouve à une distance ($z = d$) ; le problème présente donc une symétrie cylindrique. L'étude du comportement dynamique d'un fluide

visqueux et incompressible entre deux disques en extension a des applications dans les industries plastiques et métalliques[1–3]. Le problème d'un écoulement de fluide entre deux parois a déjà été abordé par beaucoup de scientifiques[4–8]. Le cas des parois circulaires est traité dans notre étude.

Pour faciliter la compréhension de notre travail, ce mémoire est subdivisé en trois parties. Le premier chapitre dont l'intérêt est de présenter les principes qui sont les fondements des équations utilisées, contient les équations générales de la dynamique des fluides visqueux et les étapes conduisant à leurs démonstrations. Le deuxième chapitre présente la géométrie du problème qui est la base de la formulation des équations qui régissent l'écoulement entre les deux disques imperméables en mouvement. Dans ce chapitre, nous décrivons aussi la méthode de résolution des équations du problème. Le troisième chapitre est réservé aux résultats et à la discussion. Notre mémoire finit par une conclusion qui contient la synthèse des résultats trouvés.

CHAPITRE I : RAPPEL THEORIQUE DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUES

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui étudie le comportement des fluides (liquides et gaz) en mouvement ou au repos, en analysant les forces qui régissent leur déformation. Elle s'appuie sur des concepts comme la viscosité, la densité, la pression et la tension superficielle pour comprendre les phénomènes d'écoulement, de flottabilité, de turbulence, et de résistance. Les équations de Navier-Stokes et de Bernoulli sont fondamentales pour la modélisation des écoulements, permettant l'étude d'applications variées allant de l'aérodynamique et l'hydraulique à la biomécanique et la météorologie. En somme, la mécanique des fluides offre un cadre pour prédire et contrôler le mouvement et l'interaction des fluides dans divers systèmes et environnements.

Dans ce chapitre, il est question de rappeler les principales notions et lois importantes de la mécanique des fluides. Nous pouvons définir le fluide comme un milieu matériel sans rigidité et essentiellement déformable. Il est formé de molécules dont les distances relatives peuvent varier indéfiniment. Bien que la structure de la matière soit lacunaire (contient du vide), on suppose sur le plan macroscopique que le fluide est un milieu continu formé de particules qui se tiennent les unes aux autres. Une particule de fluide étant considérée comme un ensemble de molécules voisines suffisamment petites pour être ponctuelles et suffisamment grandes pour occuper un volume élémentaire dv . Le fluide soumis à notre étude est un fluide newtonien. Ainsi le tenseur de contrainte est un tenseur d'ordre 2 qui représente l'état de contrainte à un point spécifique à l'intérieur d'un matériau. Il décrit comment les forces internes, causées par les charges appliquées, se distribuent au sein de ce matériau. Ce tenseur est essentiel pour comprendre et analyser les déformations et les ruptures des matériaux. De plus, il est important de noter que le tenseur de contrainte est invariant par rapport au temps, ainsi qu'aux mouvements de translation et de rotation de la zone considérée. Cela signifie que les valeurs des composantes du tenseur restent constantes, quelles que soient les conditions de mouvement de l'élément de

matériau observé cette propriété en fait un outil fiable pour l'analyse des comportements mécaniques des matériaux dans diverses situations de charge. Par conséquent, il vérifie les hypothèses suivantes [9]:

- Le fluide est entièrement dénué d'élasticité et n'a aucune mémoire du passé.
- Un même état de contrainte conduit à un même état de déformations. Autrement dit, le tenseur des contraintes ne dépend pas explicitement des coordonnées locales.
- Le fluide est isotrope, c'est-à-dire que les contraintes et les déformations n'ont pas de direction privilégiée dans le fluide.

I.1 LOI DE CONSERVATION DE LA MASSE

I.1.1 Tenseur des taux de déformations qui est une matrice carrée

Soit M et M' deux points infiniment voisins pris dans un fluide en mouvement, les vitesses du fluide aux points M et M' sont liées par la relation suivante [10 – 11] :

$$\vec{V}(M') = \vec{V}(M) + \frac{1}{2} \overrightarrow{rotV} \wedge \overrightarrow{MM'} + \vec{D}(M) \quad (I.1)$$

Où $\vec{V}(M)$ est le vecteur vitesse au point M,

$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rotV}(M)$ Est le vecteur tourbillon,

$2\vec{\Omega} = \overrightarrow{rotV}(M) = \vec{\omega}$ représente la vorticité du fluide au point M,

$\vec{D}(M)$ est le vecteur vitesse de déformation du fluide au point M ; Il est lié au vecteur $\overrightarrow{MM'}$ par la relation suivante :

$$\vec{D}(M) = \vec{\varepsilon}(M) \cdot \overrightarrow{MM'} \quad (I.2)$$

Où $\bar{\varepsilon}$ est le tenseur d'ordre 2 des taux de déformation qui est un tenseur d'ordre 2 est une matrice carré et dont les composantes sont définies à partir des gradients de vitesse. On a :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad \text{Où } i, j=1,2,3$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \frac{\nabla \bar{U} + \nabla^T \bar{U}}{2} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & \frac{U_{1,2} + U_{2,1}}{2} & \frac{U_{1,3} + U_{3,1}}{2} \\ \frac{U_{1,2} + U_{2,1}}{2} & U_{2,2} & \frac{U_{2,3} + U_{3,2}}{2} \\ \frac{U_{1,3} + U_{3,1}}{2} & \frac{U_{2,3} + U_{3,2}}{2} & U_{3,3} \end{bmatrix} \quad (\text{I. 3})$$

Cette dernière façon d'écrire $\bar{\varepsilon}$ est le tenseur des taux de déformation est une matrice carré. Pour $i = j$, on a le taux de dilatation linéaire d'un élément de longueur parallèle à l'axe i à l'instant t et c'est la trace du tenseur $\bar{\varepsilon}$, ε_{ij} ($i=j$) = ε_{ii} ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$) et pour $i \neq j$, on a le taux de dilatation angulaire d'un angle droit dont les côtés sont parallèles aux axes M_i et M_j . La divergence du vecteur vitesse représente le taux de dilatation volumique par unité de temps subie par un élément de volume dv , ce qui se traduit par :

$$\text{div} \bar{V} = \frac{1}{dt} \left(\frac{dv' - dv}{dv} \right) \quad (\text{I.4})$$

ou

$$\text{div} \bar{V} . dt = \left(\frac{dv' - dv}{dv} \right) \quad (\text{I.4})$$

I.1.2 Enoncé du principe de conservation de la masse

Quel que soit le domaine (D) de fluide limité par une surface fermée (s) et entièrement contenu dans le fluide, la masse de fluide contenue dans (D) reste constante quand on suit le domaine (D) dans son mouvement.

I.1.3 Equation de continuité

Soit un volume de fluide contenue dans le domaine (D) et dv le volume élémentaire pris autour d'une particule fluide contenant le point M à l'instant t. La masse de fluide contenue dans le domaine (D) est donnée par :

$$m = \text{constante} \quad m = \iiint dm$$

$$m = \iiint_{(D)} \rho(M, t) dv \quad (I.5)$$

où $\rho(M, t)$ est la masse volumique du fluide.

D'après le principe de conservation de la masse, la masse m reste constante au cours du temps. Donc sa dérivée par rapport au temps s'annule ; il en ressort que :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{(D)} \rho(M, t) dv = 0 \quad (I.6)$$

Compréhension du théorème de transport de Reynolds

Le théorème de transport de Reynolds relie le changement d'une quantité dans un volume de contrôle à son flux à travers la surface. Il s'exprime comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi(M, t) dv = \int_{v(t)} \frac{\partial \phi(M, t)}{\partial t} dv + \int_{s(t)} \phi(M, t) \vec{V} \cdot \vec{n} ds \quad (I.7)$$

Où :

- $v(t)$ est le volume de contrôle,
- $s(t)$ est la surface de ce volume,
- $\phi(M, t)$ est une fonction scalaire (dans notre cas, la densité $\rho(M, t)$),
- $\vec{V}$ est le champ de vitesse,
- $\vec{n}$ est le vecteur normal a la surface.

Application au cas de la masse

pour la conservation de la masse, on prend $\phi(M, t) = \rho(M, t)$. L'application du

théorème nous donne :
$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho(M, t) dv = \int_{v(t)} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} dv + \int_{s(t)} \rho(M, t) \vec{V} \cdot \vec{n} ds$$

Interprétation des termes

- Terme à gauche : charge de masse totale dans le volume de contrôle.
- Premier terme à droite : charge de masse à l'intérieur du volume.
- Second terme à droite : Flux de masse à travers la surface du volume.

Utilisation du théorème de Gauss

Pour relier le flux de masse a la divergence, on applique le théorème de Gauss :

$$\int_{s(t)} \rho(M, t) \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_{v(t)} \nabla \cdot (\rho(M, t) \vec{V}) dv \quad (I.8)$$

Equation de conservation de la masse

En substituant ce résultat dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_v \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} dv + \int_v \nabla \cdot (\rho(M, t) \vec{V}) dv &= 0 \\ \int_v \left(\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(M, t) \vec{V}) \right) dv &= 0 \end{aligned}$$

Le domaine (D) étant arbitrairement choisi et la relation ci-dessus étant vraie pour tout domaine (D), on a nécessairement :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(M,t) \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{I.9})$$

La relation (I.9) est appelée équation de continuité. Pour les fluides incompressibles (fluides pour lesquels la masse volumique $\rho(P,t)$ varie très faiblement avec la pression). Et en situation isotherme, $\rho = \rho_0$ cette équation (I.9) devient :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{I.10})$$

En utilisant le champ de vitesse $\vec{V}$ de composante : U_r , U_θ et U_z , l'équation de continuité en coordonnée cylindrique s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r U_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.11})$$

I.2 LOI DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

I.2.1 Force de contact

On appelle force de contact sur une portion de fluide (D) limité par une surface (s), la force exercée par le fluide extérieur à (D) sur le fluide intérieur à (D) à de $\vec{T} \cdot ds$ par élément de surface ds prit sur (s) telle que $d\vec{F} = \vec{T}(M) \cdot ds$ où

- $\vec{F}$ est la force de contact sur ds ;
- $\vec{T}(M)$ est appelée tension ou contrainte au point M

La figure1 ci- dessous illustre une particule fluide (D) sur laquelle est appliquée la force de contact $\vec{T} \cdot ds$ sur l'élément de surface (ds) .

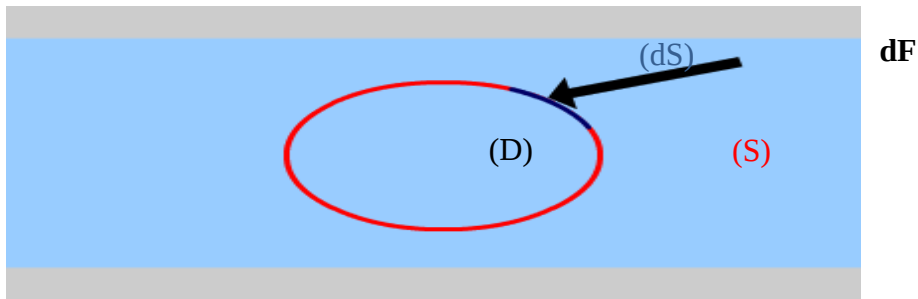


Figure1 : Portion de fluide (D) délimitée par une surface (s)

La contrainte $\vec{T}$ contient une composante normale ou contrainte normale à ds et une composante parallèle ou contrainte tangentielle à ds (ou contrainte de glissement ou contrainte de cisaillement) et est égale à : $\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_i$

I.2.2 tenseur des contraintes

La contrainte est une force de contact par unité de surface. Pour un fluide visqueux la force de contact est la résultante des viscosités qui s'opposent à la déformation et les forces de pression étudiées ; lorsque le fluide est en équilibre, ceci nous permet de déduire deux types de contraintes : la contrainte tangentielle et la contrainte normale. Le fluide soumis à notre étude est un fluide newtonien par conséquent les hypothèses suivantes sont respectées :

- La distribution des contraintes $\vec{T}(M)$ en tout point M du fluide est totalement déterminée dès que l'on connaît les contraintes s'exerçant sur trois éléments de surface ds_1, ds_2 et ds_3 formant un trièdre tri-rectangle ayant pour origine le point M.

- Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ au point M est un tenseur symétrique. On démontre[9] que la contrainte $\vec{T}(M)$ prise au point M au fluide est liée à la normale par la relation :

$$\vec{T}(M) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} \quad (I.12)$$

avec $\vec{n}$ un vecteur normal sortant

Où $\bar{\bar{\sigma}}$ est le tenseur d'ordre deux des contraintes. La contrainte suivant l'axe n_j appliqué sur la surface ds_k de normale n_k .

- Pour $i=j$, σ_{ij} est appelée contrainte normale
- Pour $i \neq j$, σ_{ij} est appelée contrainte tangentielle

I.2.3 Loi de comportement

La relation entre la contrainte et la déformation donnée par la loi de comportement dans un fluide newtonien s'écrit [9] :

$$\bar{\bar{\sigma}} = (-p + \eta \text{div} \vec{V}) \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (I.13)$$

Où P est la pression statique et δ_{ij} le symbole de Kronecker

$$\begin{aligned} - \delta_{ij} &= 1, \text{ si } i=j & - \delta_{ij} &= 0, \text{ si } i \neq j \end{aligned}$$

μ et η sont deux paramètres caractérisant les propriétés visqueuses des fluides ;

- μ étant la viscosité de cisaillement ou dynamique
- η la viscosité de dilatation

I.2.4 Enoncé du principe de la conservation de la quantité de mouvement

Quel que soit le domaine (D) du fluide que l'on suit dans son mouvement, la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement est égale au torseur des forces extérieures appliquées au domaine (D) [12 – 13].

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad (I.14)$$

L'égalité entre les deux torseurs précédents équivaut à l'égalité entre les moments résultants.

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \begin{cases} \frac{d\vec{R}}{dt} = \iiint_{(D)} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv \\ \frac{d\vec{M}_o}{dt} = \iiint_{(D)} \frac{d(\vec{OM} \wedge \vec{V})}{dt} dv \end{cases} \quad (I.15)$$

$$\vec{R}_{ext} = \begin{cases} \vec{R}_{ext} = \iiint_{(D)} \rho \vec{F} dv + \iint_{(s)} \vec{\sigma} n ds \\ \vec{M}_{ext} = \iiint_{(D)} \rho \vec{OM} \wedge \vec{F} dv + \iint_{(s)} (\vec{\sigma} n) \wedge \vec{OM} ds \end{cases} \quad (I.16)$$

On montre que la deuxième égalité n'apporte aucune information supplémentaire pour terminer le champ de vitesse du fluide, car elle aboutit à la symétrie du tenseur des contraintes. Donc seule la première égalité est intéressante. On a :

$$\iiint_{(D)} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint_{(D)} \rho \vec{F} dv + \iint_{(s)} \vec{\sigma} n ds \quad (I.17)$$

Où $\rho \vec{F} dv$ est la résultante des forces de masse sur la particule fluide de masse dm , les forces de masse sont les forces qui sont proportionnelles à la masse et qui sont dues à l'existence d'un ou plusieurs champs de forces dans le domaine où se trouve le fluide. En utilisant le théorème d'OSTROGRADSKI, on a :

$$\iint_{(s)} \vec{\sigma} n ds = \iiint_{(D)} \text{div} \vec{\sigma} dv \quad (I.18)$$

La relation (I.17) devient :

$$\iiint_{(D)} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint_{(D)} \rho \vec{F} dv + \iiint_{(D)} \vec{\sigma} \cdot d\vec{v} \quad (I.19)$$

$$\text{Soit } \iiint_{(D)} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint_{(D)} (\rho \vec{F} + \text{div} \vec{\sigma}) dv \quad (I.20)$$

Le domaine (D) pouvant être quelconque, on aboutit à l'équation locale de la quantité de mouvement.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} + \text{div} \vec{\sigma} \quad (I.21)$$

En notation indicielle, elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho F_i + \sigma_{ij,j} \quad (I.22)$$

L'équation (I.21) est appelée relation de Cauchy ; Cette relation est valable quelle que soit le fluide qu'il soit newtonien ou pas.

Un fluide est dit newtonien lorsque le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire du tenseur des déformations. Ce modèle est très satisfaisant pour la plupart des fluides usuels dans des conditions standard [14].

I.2.5 Equations de Navier-Stokes

En appliquant l'opérateur divergence sur la relation (I.13), on obtient

$$\text{div} \vec{\sigma} = -\vec{\text{grad}} \rho + \vec{\text{grad}}(\eta \text{div} \vec{V}) + 2\mu \text{div} \vec{\varepsilon} + 2\vec{\varepsilon} \text{grad} \vec{V} \quad (I.23)$$

En tenant compte des propriétés de la divergence l'équation (I.23) devient :

$$\text{div} \vec{\sigma} = -\vec{\text{grad}} \rho + \vec{\text{grad}}(\eta \text{div} \vec{V}) + 2\vec{\varepsilon} \text{div} \vec{V} \quad (I.24)$$

En substituant (I.24) dans (I.21) on obtient :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{grad} P + \overrightarrow{grad}(\eta \text{div} \vec{V}) + 2\bar{\bar{\varepsilon}} \text{div} \vec{V} \quad (\text{I.25})$$

Où $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est le tenseur d'ordre 2 des taux de déformation, et est lié au gradient de vitesse par la relation

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \frac{\nabla \vec{U} + \nabla^T \vec{U}}{2} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & \frac{U_{1,2} + U_{2,1}}{2} & \frac{U_{1,3} + U_{3,1}}{2} \\ \frac{U_{1,2} + U_{2,1}}{2} & U_{2,2} & \frac{U_{2,3} + U_{3,2}}{2} \\ \frac{U_{1,3} + U_{3,1}}{2} & \frac{U_{2,3} + U_{3,2}}{2} & U_{3,3} \end{bmatrix} \quad (\text{I.26})$$

En substituant la relation (I.26) dans l'équation (I.25), on obtient de nouvelles équations appelées équation de Navier Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\vec{V}.grad} \vec{V} \right) = \rho \vec{F} - \overrightarrow{grad} P + (\mu + \eta) \overrightarrow{grad}(\text{div} \vec{V}) + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{I.27})$$

$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\vec{V}.grad} \vec{V} \right)$ représente la résultante des forces d'inerties

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ et $(\overrightarrow{\vec{V}.grad} \vec{V})$ représente respectivement l'accélération locale et l'accélération convective

$\rho \vec{F}$ est la résultante des forces de volumes

$\overrightarrow{grad} P$ est la résultante des forces de pressions ou gradient de la pression.

$(\mu + \eta)\overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{V})$ représente le terme qui rend compte des forces de viscosités
 $\Delta\vec{V}$ désigne le LAPLACIEN du champ de vitesses

En projetant la relation (I.28) respectivement suivant les axes $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{U_\theta^2}{r} \right) \\ &= \rho F_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.27.a})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{U_r U_\theta}{r} \right) \\ &= \rho F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.27.b})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = \rho F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.27.c})$$

CHAPITRE II : EQUATIONS DU PROBLEME ET METHODE DE RESOLUTION

Les équations de Navier-stockes associées à l'équation de continuité sont indispensable dans la recherche de la description du mouvement d'un fluide visqueux. Dans ce chapitre, nous allons présenter l'équation de continuité et les équations de Navier-Stockes relatives au domaine d'étude dont la géométrie est cylindrique et par la suite décrire la méthode de résolution de ces équations.

II.1) GEOMETRIE DU PROBLEME

II.1.1) Description du domaine d'étude

Les deux disques de notre système d'étude se déplacent parallèlement à leur propre plan. Nous travaillons en coordonnées cylindriques.

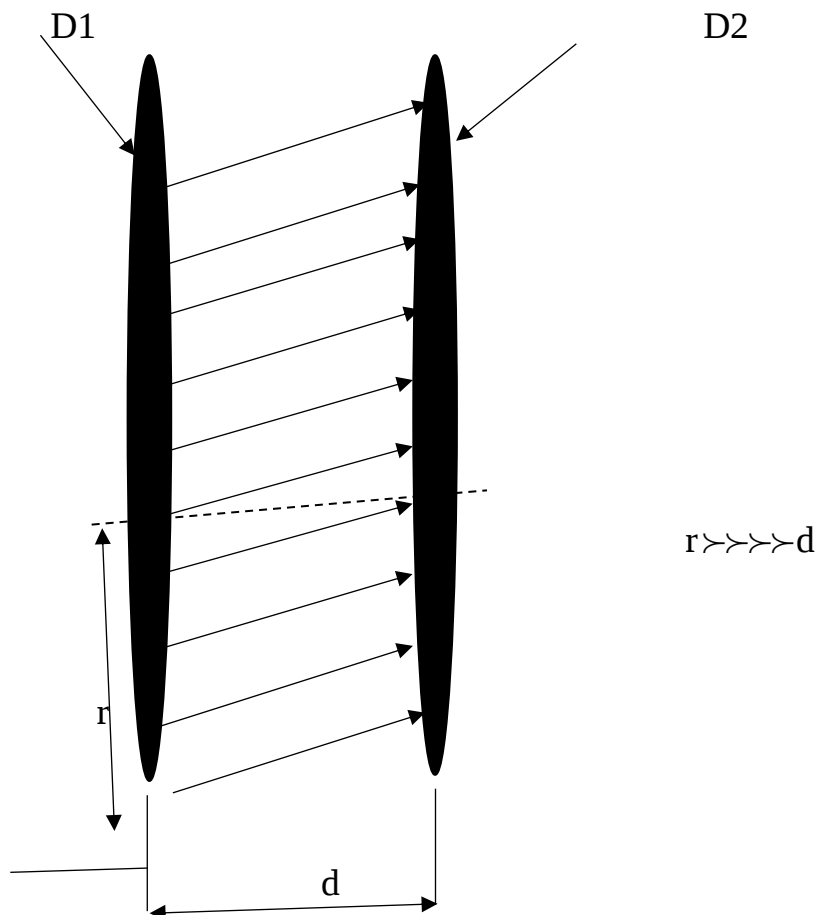


Figure 2 : Schéma de deux disques infinis, coaxiaux, rigides et imperméables qui s'étirent dans la direction radiale la distance d entre les deux restant fixes.

II.2) ESQUISSE DU PROFIL DES VITESSES DANS LES DIRECTIONS DU PLAN

Le profil des vitesses est la configuration des lignes de courant dans l'écoulement. Les lignes de courant étant les courbes tangentes en chaque point et à chaque instant au vecteur champ de vitesse $\vec{V}$. Le champ de vitesse du problème présente un profil transversal et un profil longitudinal.

II.2.1) Profil des vitesses transversal

Suivant le plan de coupe transversal, nous présentons à travers la figure3 le profil des vitesses suivant une direction transversale de l'écoulement. En effet la figure3 illustre le flux des lignes de courants sur la surface intérieure de chaque disque. Les flèches noires et oranges représentent respectivement les lignes de champ pour le cas d'un fluide allant du bas vers le haut et lorsque celui-ci descend, Ce profil est dû à la composante U_r du champ des vitesses.

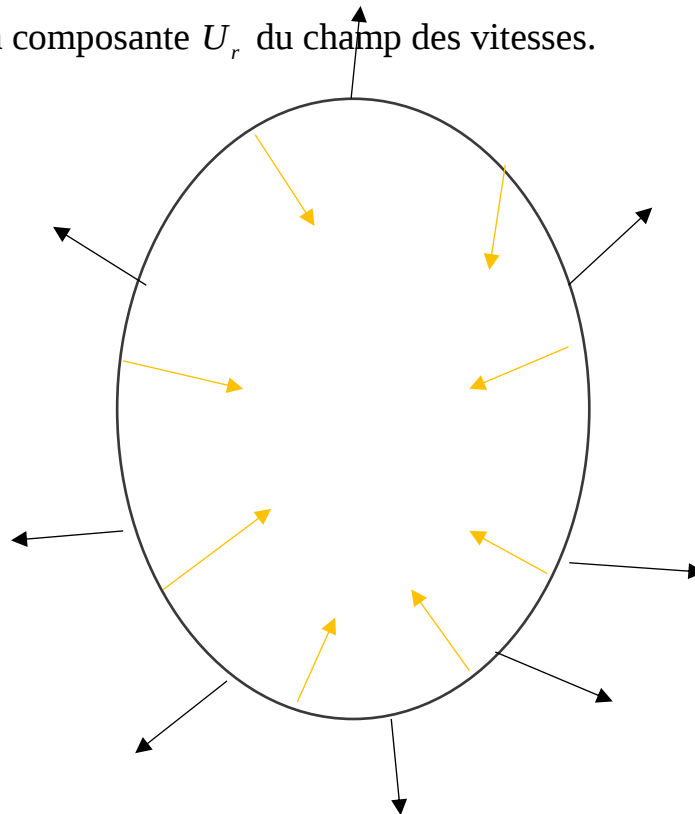


Figure 3 : Esquisse du profil de vitesse transversal

II.2.2) Profil des vitesses longitudinal

Suivant le plan de coupe longitudinal de l'écoulement, nous présentons le profil des vitesses longitudinal à travers la figure 4. Ce profil des vitesses présente des lignes de champs dans un régime rampant, suivant l'axe (oz) dues à la composante U_z et le flux des lignes de champ entre deux disques le long de l'espace.

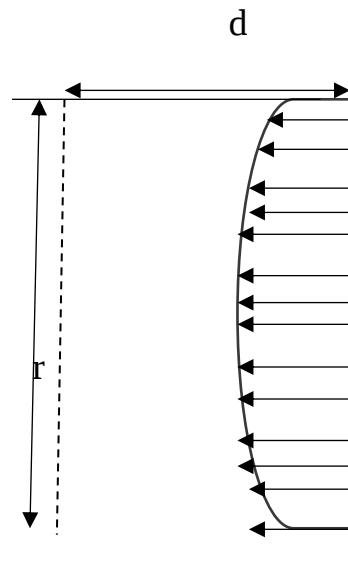


Figure 4 : Esquisse du profil des vitesses longitudinales

II.3) CONDITIONS D'ETUDE

Afin d'aborder les équations régissant notre problème dont la géométrie est cylindrique, les explications suivantes nous permettent de développer les conditions d'études du problème.

- ♦ L'écoulement est supposé permanent (la dérivée explicite du champ des vitesses par rapport au temps est nulle)
- ♦ Le fluide est incompressible (la masse volumique ρ est constante quelle que soit le temps t)
- ♦ Les disques sont infinis (pas d'effet de bords)

♦ L'écoulement est axisymétrique (toutes les particules fluides symétriques par rapport à l'axe principal des disques se comportent de façon identique sur le plan de la physique macroscopique. Ainsi, si nous généralisons cette considération dans tout le domaine de fluide, nous déduirons que les variations du champ des vitesses par rapport à la coordonnée ortho-radiale seront nulles ; de plus les variations de la composante ortho-radiale du champ des vitesses par rapport aux coordonnées radiale, ortho-radiale et azimutale sont toutes nulles)

♦ Pas de forces de volumes (le terme $\rho \vec{F}$ des équations de Navier-stokes découlant du principe de la conservation de la quantité de mouvement est nul)

♦ Disques imperméables (en $z=0$, $U_z = 0$ et en $z=d$, $U_z = 0$)

II.4) EQUATIONS DU PROBLEME

Après l'application des hypothèses de simplification ci-dessus évoqués, la modélisation de notre problème est donnée par les équations réduites suivantes :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} - \frac{U_r}{r^2} \right) \quad (\text{II.2})$$

$$U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.3})$$

En $z = 0$, $U_z = 0$ et en $z = d$, $U_z = 0$ également

Où l'équation de continuité (II.1) traduit la conservation de la masse et les équations de Navier-Stokes (II.2) - (II.3) traduisent respectivement la conservation de la quantité de mouvement radiale et la conservation de la quantité de mouvement azimutale. Dans ces équations r et z sont un système de coordonnées

cylindrique, U_r et U_z sont des composantes du champ de vitesses respectivement suivant la coordonnée radiale et azimutale, P est le champ de pression ; la masse volumique ρ et le coefficient de viscosité cinématique ν sont des propriétés constantes du fluide.

Les équations (II.1) – (II.3) constituent un système d'équations aux dérivées partielles couplées et non linéaires dont la recherche de solution exacte est un problème d'actualité.

II.5) FORMULATION ADIMENSIONNELLE DES EQUATIONS

Considérons le changement de variable suivant :

$$U_r = rEF(\eta), U_z = dEH(\eta) \quad \text{et} \quad P = \rho E \nu \left(P(\eta) + \frac{1}{4} \beta \frac{r^2}{d^2} \right) \quad (\text{II.4})$$

Où η est la variable de similitude ($\eta = \frac{z}{d}$), E est le paramètre correspondant à la force d'étirement du disque. Il a pour unité l'inverse de la seconde $\left(\frac{1}{S}\right)$, β est un paramètre de pression sans unité, ν est le coefficient de viscosité cinématique du fluide, elle peut encore s'écrire de la manière suivante : $\left(\nu = \frac{\mu}{\rho}\right)$ où μ est la viscosité dynamique du fluide. Dans la suite de cette partie il sera question de répondre à l'interrogation suivante : Que deviennent les équations (II.1) – (II.3) si nous substituons les composants du champ de vitesses et la pression par leurs valeurs respectives données par la relation (II.4) ?

Sachant que : $\frac{\partial H(\eta)}{\partial z} = \frac{\partial H(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{d} \frac{\partial H(\eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{d} H'(\eta)$, et en remplaçant chaque terme par son expression dans les équations (II.1), (II.2) et (II.3) on obtient les équations suivantes :

$$H'(\eta) = -2F(\eta) \quad (II.5)$$

$$rE(F^2(\eta) + H(\eta)F'(\eta)) = \frac{\nu\beta r}{2d^2} + \frac{\nu F''(\eta)}{d^2} \quad (II.6)$$

$$dEH(\eta)H'(\eta) = -\frac{\nu}{d}P'(\eta) + \frac{\nu H''(\eta)}{d} \quad (II.7)$$

(II.5) est l'équation de continuité

(II.6), l'équation de conservation de la quantité de mouvement radiale

(II.7), l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale

Posons un R tel que, $R = \frac{Ed^2}{\nu}$ et introduisons R respectivement dans les relations

(II.6) - (II.7) nous obtenons respectivement les relations (II.8) et (II.9) suivantes :

$$F''(\eta) - \frac{\beta}{2} = R(F^2(\eta) + F'(\eta)H(\eta)) \quad (II.8)$$

$$P'(\eta) = 2RF(\eta)H(\eta) - 2F'(\eta) \quad (II.9)$$

Les relations (II.5), (II.8) et (II.9) sont les équations sans dimension où le rapport R du nombre de REYNOLDS est ici une grandeur adimensionnelle. Les conditions du système de ces trois équations sont :

$$F(0)=1 ; H(0) = H(1) = 0 ; F(1)=\gamma \text{ et } P = 0 \quad (II.10)$$

En substituant l'équation (II.5) dans l'équation (II.8) on a :

$$H'''(\eta) + \beta - RH(\eta)H''(\eta) + \frac{RH'^2}{2} = 0 \quad (II.11)$$

Une équation plus simple peut être obtenue comme suit :

$$H'''' - RHH''' = 0 \quad (II.12)$$

Le terme de pression peut être obtenu par une simple intégration avec

$$P(\eta) = 2 - \frac{RH^2}{2} + H' \quad (\text{II.13})$$

Ceci nous permet de passer d'un problème aux équations différentielles partielles non linéaires à un problème aux équations différentielles ordinaires non linéaire, avec comme données du problème les conditions suivantes :

$$H(0) = H(1) = 0, H'(0) = -2, H'(1) = -2\gamma, H'''(0) = -\beta - 2R, P(1) = 2 - 2\gamma \quad (\text{II.14})$$

$F(0) = 0$ et $H(0) = 0$ nous permettent d'écrire $U_{r(z=0)} = rE$ et $U_{z(z=0)} = 0$

$F(1) = \gamma$, $H(1) = 0$, ceci implique $U_{r(z=D)} = rE\gamma$ et $U_{z(z=0)} = 0$

Il vient :

$$\frac{U_{r(z=D)}}{U_{r(z=0)}} = \gamma \quad (\text{II.15})$$

Ayant obtenu ces équations différentielles ordinaires, nous avons à résoudre une relation entre une fonction inconnue à une variable et ses dérivées ; C'est le cas de la relation (II.12). Connaissant la solution de celle-ci, nous pourrions nous prononcer sur le comportement de la pression adimensionnelle P , La fonction F et sur les différents profils du champ des vitesses.

Précisons que la relation (II.12) est une équation différentielle d'ordre 4 et non linéaire. La non linéarité est caractérisée dans cette équation par le terme $RH(\eta)H'''(\eta)$. Les conditions de résolutions données montrent clairement que nous avons un problème à conditions aux limites. La résolution d'un tel problème peut se faire soit par les méthodes analytiques, soit par les méthodes numériques. Nous allons dans ce cas utiliser la méthode de tir et l'algorithme de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 pour résoudre l'équation (II.12).

II.6) PARAMETRES D'ANALYSE

Après la résolution des équations régissant le comportement dynamique d'un fluide visqueux entre deux plaques rectangulaires en mouvement, les fonctions inconnues $U_r, U_z, F, HetP$ donnent quantitativement une vue sur le phénomène étudié ; mais, ils existent d'autres paramètres qui peuvent attribuer aux solutions plus de clarté quantitativement et qualitativement en facilitant l'analyse du phénomène étudié. Quelques paramètres dont la nature peut différer (critère adimensionnel, fonction mathématique...) sont utilisés dans cette études pour rendre plus limpide le regard physique du problème.

→ La variable adimensionnelle η

Elle joue un rôle non seulement dans l'adimensionnalisation des équations mais elle nous permet également de connaître la position suivant l'axe z où nous nous trouvons dans l'écoulement par rapport à chaque disque. On a : $\eta = \frac{z}{d}$ et $0 \leq \eta \leq 1$; Pour $\eta = 0$, nous sommes au niveau du disque inférieur en $z=0$ et pour $\eta = 1$, nous sommes au niveau du disque supérieur en $z=d$. Rappelons qu'en ces deux positions, la composante U_z du champ de vitesse est nulle car les disques sont imperméables et rigides.

→ Le paramètre γ

C'est un paramètre sans dimension qui caractérise les variations relatives des vitesses du disque D_2 situé en $z=d$ par rapport à celles du disque D_1 situé en $z=0$. Lorsque z prend les valeurs 0 et d , nous avons les cas suivants : en faisant respectivement le rapport de la composante radiale du champ des vitesses du disque supérieur sur celle du champ des vitesses du disque inférieur, nous obtenons : le paramètre de pression β ; c'est un paramètre sans dimension qui nous

permet de comprendre l'effet de la variation du REYNOLDS et du paramètre γ pour différentes valeurs de η sur la pression.

II.7) APPROCHE ANALYTIQUE

II.7.1) Expression analytique du paramètre de pression

Pour les faibles REYNOLDS, effectuons le développement de TAYLOR à l'ordre un de la solution de l'équation (II.12) au voisinage de l'état $R \rightarrow 0$. On obtient $H(\eta)$ la solution sous la forme suivante :

$$H(\eta) = H_0(\eta) + RH_1(\eta) \quad (\text{II.16})$$

En substituant $H(\eta)$ dans la relation (II.12) par sa valeur ci-dessus nous obtenons l'expression suivante :

$$H_0''''(\eta) + RH_1''''(\eta) - R(H_0(\eta) + RH_1(\eta))(H_0'''(\eta) + RH_1'''(\eta)) = 0 \quad (\text{II.17})$$

Après le développement de cette relation nous avons à l'ordre zéro

$$H_0''''(\eta) = 0 \quad (\text{II.18})$$

A l'ordre un on a :

$$H_1''''(\eta) - H_0(\eta)H_0'''(\eta) = 0 \quad (\text{II.19})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} H_0(\eta) = H_1(1) = 0, H_0'(0) = -2, H_0'(1) = -2\gamma \\ H_1(0) = H_1(1) = 0, H_1'(1) = 0, H_1'(0) = 0, H_1'(1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Nous pouvons alors écrire la relation suivante :

$$H_0(\eta) = \frac{a}{6}\eta^3 + \frac{b}{2}\eta^2 + c\eta + d \quad (\text{II.21})$$

Où a, b, c, d sont des constantes. En utilisant les conditions données par l'équation (II.20), nous déduisons les valeurs respectives des constantes a, b, c et d .

$$a = -12 - 12\gamma, b = 8 + 4\gamma, c = -2, d = 0 \quad (\text{II.22})$$

L'expression de H_0 devient :

$$H_0(\eta) = -(2 + 2\gamma)\eta^3 + (4 + 2\gamma)\eta^2 - 2\eta \quad (\text{II.23})$$

* Détermination de la fonction H_1

En développant le produit $H_0 H_0'''$ et en intégrant dans la relation (II.19), nous obtenons l'expression suivante :

$$H_1(\eta) = \frac{1}{35}(1 + \gamma)^2 \eta^7 - \frac{2}{30}(2 + \gamma)(1 + \gamma)\eta^6 + \frac{1}{5}(1 + \gamma)\eta^5 + \frac{a'}{6}\eta^3 + \frac{b'}{2}\eta^2 + c'\eta + d' \quad (\text{II.24})$$

Où a', b', c' et d' sont des constantes d'intégration

En utilisant les conditions aux limites de la relation (II.19) nous obtenons un système liant les constantes ci-dessus entre elles, après résolution de celui-ci nous avons :

$$a' = -\frac{6}{105}(22 + 9\gamma - 13\gamma^2), \quad b' = \frac{6}{105}(4 + \gamma - 3\gamma^2), \quad c' = 0, \quad d' = 0 \quad (\text{II.25})$$

Ainsi la fonction H_1 peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$H_1(\eta) = \frac{1}{105} \left((3 + 6\gamma + 3\gamma^2)\eta^7 + (-14 - 21\gamma - 7\gamma^2)\eta^6 + (21 + 21\gamma)\eta^5 + (-22 - 9\gamma + 13\gamma^2)\eta^3 + (12 + 3\gamma - 9\gamma^2)\eta^2 \right) \quad (\text{II.26})$$

Pour les petites valeurs du REYNOLDS $R_e \ll 0$, nous avons :

$$H(\eta) = H_0(\eta) + RH_1(\eta)$$

$$H(\eta) = -(2 + 2\gamma)\eta^3 + (4 + 2\gamma)\eta^2 - 2\eta + \frac{R_e}{105} \left((12 + 3\gamma - 9\gamma^2)\eta^2 + (-22 - 9\gamma + 13\gamma^2)\eta^3 + (21 + 21\gamma)\eta^5 + (-14 - 21\gamma - 7\gamma^2)\eta^6 + (3 + 6\gamma + 3\gamma^2)\eta^7 \right) \quad (II.27)$$

Sachant que $H'''(0) = -\beta - 2R$ nous déduisons β :

$$\beta = (12 + 12\gamma) - \frac{6R_e}{105} (13 - 9\gamma + 13\gamma^2) \quad (II.28)$$

Ainsi, nous avons ci-dessus la relation (II.28) qui est l'expression analytique liant le paramètre de pression au rapport des champs de vitesses du disque supérieur Sur celui du disque inférieur et au nombre de REYNOLDS pour les faibles valeurs de REYNOLDS. Pour chaque valeur de γ , le REYNOLDS étant fixé nous avons la valeur correspondante de β pour chaque valeur du R_e . γ étant fixé nous avons la valeur correspondante de β .

II.7.2) Expression analytique du coefficient de frottement

Le coefficient de frottement $H''(0)$ qui, est donné ici pour les faibles valeurs de REYNOLDS nous permet de comprendre que l'écoulement est fonction des variations des paramètres R_e et γ . Son expression est la suivante :

$$H''(0) = (8 + 4\gamma) + \frac{2R_e}{35} (4 + \gamma - 3\gamma^2) \quad (II.29)$$

Pour les petites valeurs du nombre de REYNOLDS, nous avons montré comment nous pouvons avoir les valeurs de β et $H''(0)$. Cependant nous rappelons que cette méthode analytique ne résout pas le problème posé du paragraphe (II.5.1) ; C'est juste un moyen analytique d'avoir β et $H''(0)$ en fonction de γ et du REYNOLDS pour les petites valeurs du nombre de REYNOLDS. Lorsque le

REYNOLDS prend les valeurs beaucoup plus importantes il est difficile d'avoir les relations analytiques comme au paragraphe (II.6.1) mais il est possible d'approcher les valeurs numériques de ces deux grandeurs analytiquement pour le cas

$\gamma = 0.05$ et $1[15 - 16]$. Mais ceci n'est pas l'objet de notre étude.

II.8) PRESENTATION DE LA METHODE DE RESOLUTION DU PROBLEME

La mécanique des fluides possède plusieurs méthodes de résolution des problèmes et ont chacune un certain nombre d'avantages et d'inconvénients. Dans le cadre de ce travail de mémoire (écoulement d'un fluide visqueux entre deux plateaux circulaires en extension), compte tenu du fait que nous avons un problème aux conditions aux limites, nous avons utilisé deux méthodes. La première appelée méthode de tir utilisée pour les problèmes aux valeurs aux limites non linéaires ; il s'agit de transformer un problème aux valeurs aux limites en un problème aux valeurs initiales, nous l'avons donc utilisée ici pour ramener notre problème des valeurs aux valeurs initiales. La deuxième appelée méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre quatre étant simple à programmer, assez stable pour les fonctions courantes en physique sur le plan de l'analyse numérique et ne nécessitant pas autre chose que la connaissance des valeurs initiales est choisie pour la résolution du problème aux valeurs initiales obtenu. Nous avons représenté les courbes des valeurs numériques obtenues à l'aide du logiciel MATLAB.

CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION

Les résultats numériques présentés dans ce chapitre sont des résultats des fonctions adimensionnelles H , F et P obtenus pour un écoulement dynamique d'un fluide visqueux entre deux disques en mouvement pour les cas suivants :

- Le Reynolds est fixé à la valeur 2, nous faisons varier le rapport γ .
- Le rapport γ fixé à la valeur 1, nous faisons varier le nombre de Reynolds.

Pour faciliter l'analyse, ces résultats numériques sont présentés graphiquement ; C'est ainsi que nous aurons pour chaque cas présenté ci-dessus le profil des vitesses longitudinal, le profil des vitesses radial et la pression.

III.1) PROFIL DES VITESSES LONGITUDINAL

III.1.1) Cas du Reynolds constant avec un γ qui varie

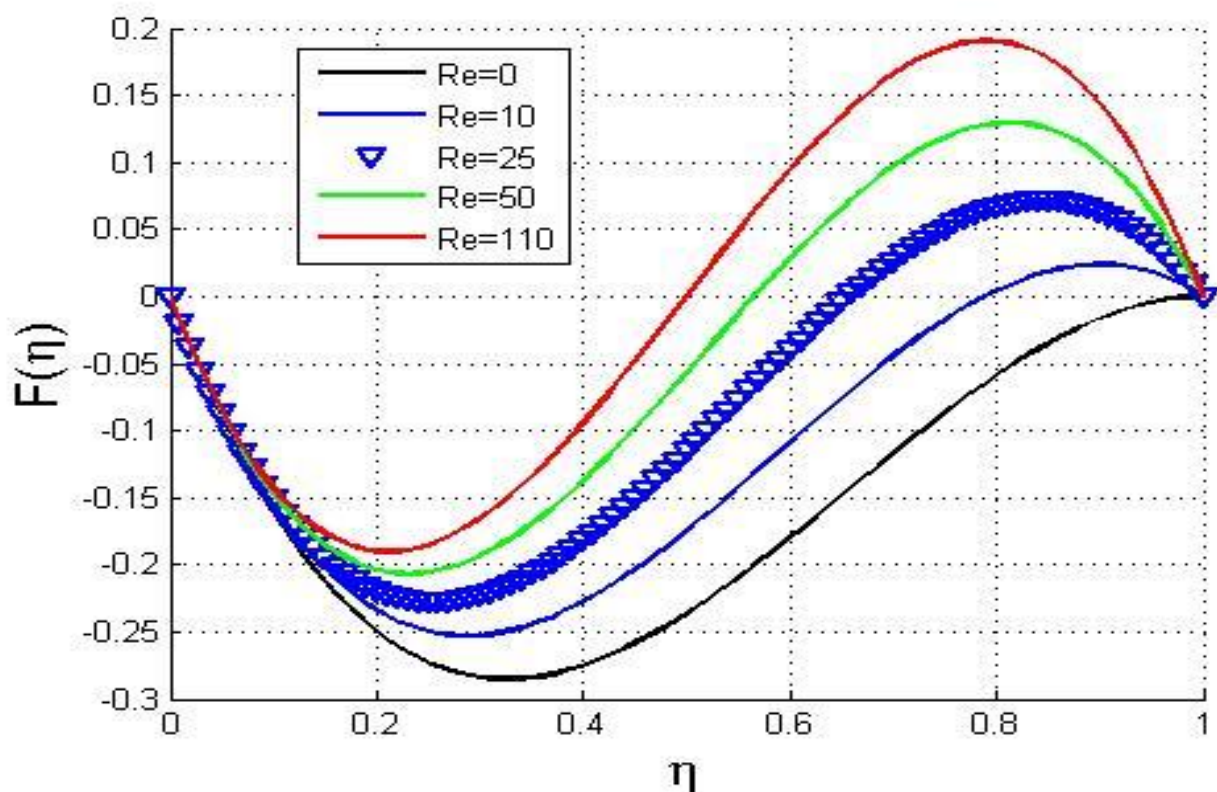


Figure 5 : Distribution des vitesses de la composante azimutale du champ des vitesses pour différentes valeurs du rapport des vitesses des disques avec un Reynolds constant.

Pour le Reynolds fixé ($R_e=2.0$) et pour différentes valeurs de γ nous avons obtenu ci-dessus la distribution des vitesses de la composante adimensionnelle azimutale du champ des vitesses. Les observations faites sont les suivantes :

-Pour $\gamma=0.00$, le disque D_2 a une vitesse radiale nulle alors que la vitesse radiale du disque D_1 est constant ; Le mouvement relatif du disque D_1 est faible devant les forces de viscosités du fluide. Notons que, la couche fluide située sur un disque a la même vitesse que celui-ci (condition d'adhérence fluide visqueux), elle communique le mouvement à celle qui la suit et ainsi de suite. Les effets de cisaillement causés par la viscosité du fluide sont prédominants et la conséquence est que l'écoulement s'effectue pratiquement en sens opposé au déplacement du disque inférieur. Pour $\gamma = 0.25; \gamma = 0.50; \gamma = 0.75$ l'effet du disque devient considérable par rapport à la viscosité du fluide. Cet antagonisme des effets des disques et de viscosité donne naissance à une inversion de l'écoulement. Pour $\gamma = 1$, l'écoulement est symétrique par rapport au point de coordonnées (0.5,0.0). Les mouvements des disques sont d'égales importances, l'écoulement présente une symétrie. Les courbes étant paraboliques l'écoulement est fortement laminaire donc rampant.

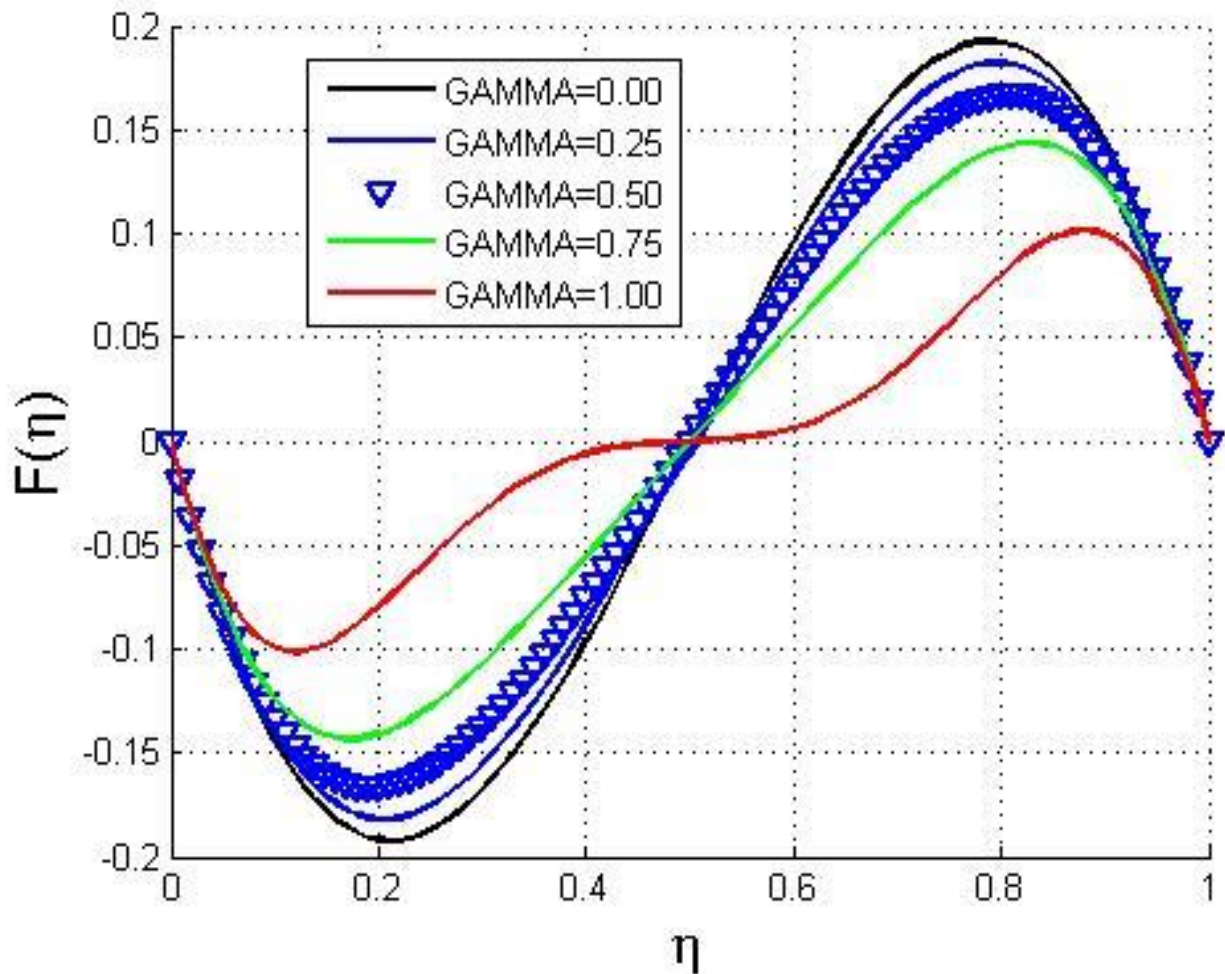
III.1.2) Cas du paramètre γ constant avec un Reynolds qui varie

Figure 6 : Distribution des vitesses de la composante azimutale du champ des vitesses pour différentes valeurs du Reynolds avec un rapport des vitesses des disques constants

La figure ci- dessus représente la distribution des vitesses dans la direction azimutale pour les différentes valeurs du nombre de Reynolds avec $\gamma = 1$.

Nous pouvons constater au regard du graphe que les disques ont des mouvements d'égales importance car les courbes sont symétriques au point d'inflexion de l'écoulement qui a pour coordonnées (0.5 ,0.0). Nous notons la diminution progressive de l'amplitude de l'écoulement proportionnellement à la variation du Reynolds mais la symétrie de l'écoulement pour chaque cas n'est pas modifiée.

La prépondérance de l'écoulement inverse est observée et les particules fluides reviennent progressivement dans la direction longitudinale. Les courbes sont paraboliques, nous avons dans ce cas un écoulement rampant.

III.2) PROFIL DES VITESSES RADIAL

III.2.1) Cas du Reynolds constant avec un γ qui varie

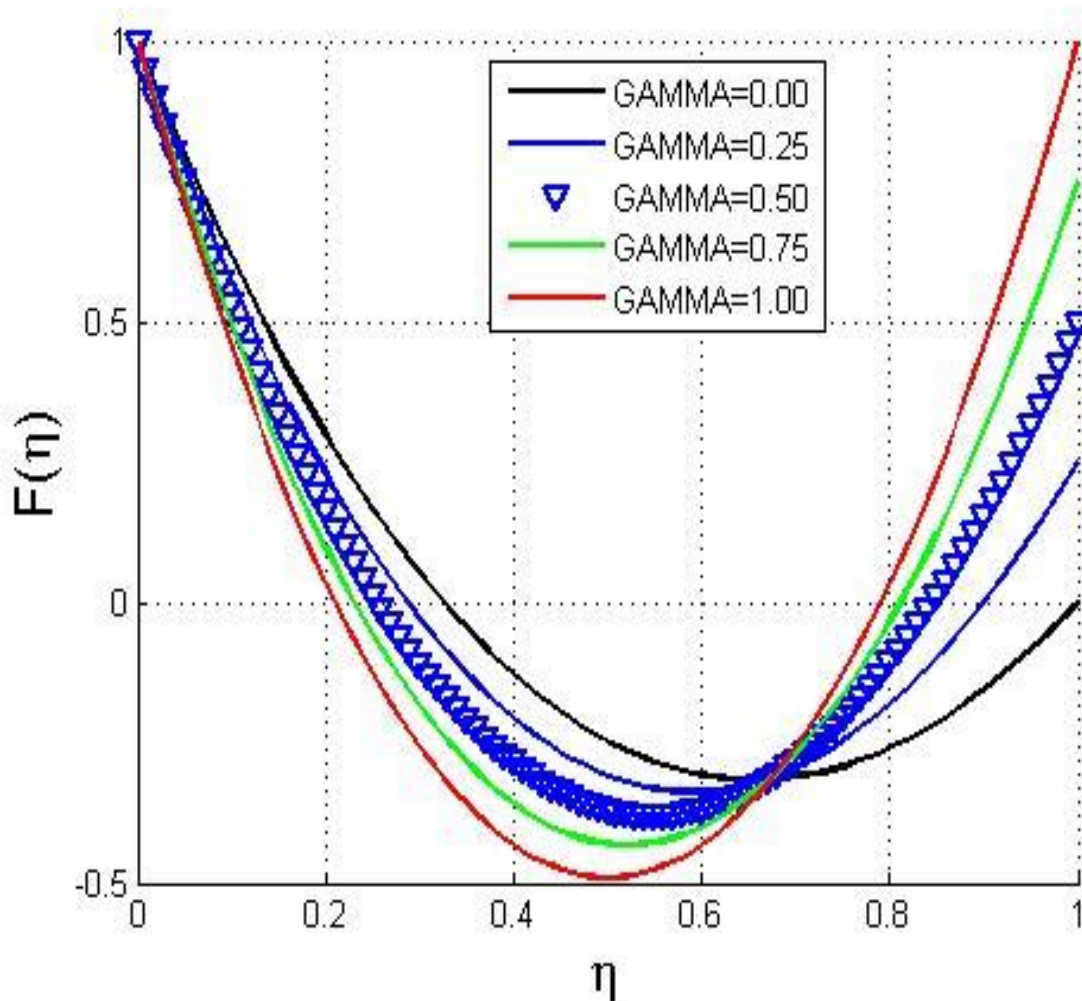


Figure 7 : Distribution des vitesses de la composante radiale du champ des vitesses pour différentes valeurs du rapport des vitesses des disques avec un Reynolds constant.

La distribution radiale des vitesses ci-dessus est obtenue pour une variation du rapport γ et pour le nombre de Reynolds fixe ($Re = 2.0$). Lorsque $\gamma = 0.00$ et sachant que le disque D_2 à une vitesse nulle dans les deux directions, pour cette valeur de γ , nous avons un écoulement asymétrique par rapport au plan perpendiculaire à la direction longitudinale passant par $\eta = 0.5$. Lorsque ce paramètre n'est plus nul mais restant inférieur à 1 le fluide est en mouvement le long des parois et la non uniformité de l'écoulement observée sur le disque D_2 tend à rendre celle-ci symétrique par rapport à la couche fluide centrale $\eta = 0.5$ visible. Il y'a augmentation de l'amplitude de l'écoulement ; celle-ci augmente proportionnellement aux variations de la vitesse radiale du disque D_2 par rapport au disque D_1 qui est constant mais supérieure à cette dernière. Il apparait donc un point de rencontre des courbes lorsque $\eta \cong 0.7$; ce point est caractéristique de la prédominance des effets des mouvements des disques sur la viscosité du fluide. Lorsque $\gamma = 1$, nous sommes en présence d'un écoulement symétrique par rapport à la couche fluide de plus grande vitesse située à $\eta = 0.5$.

III.2.2) Cas du paramètre γ fixe avec différentes valeurs du nombre de Reynolds

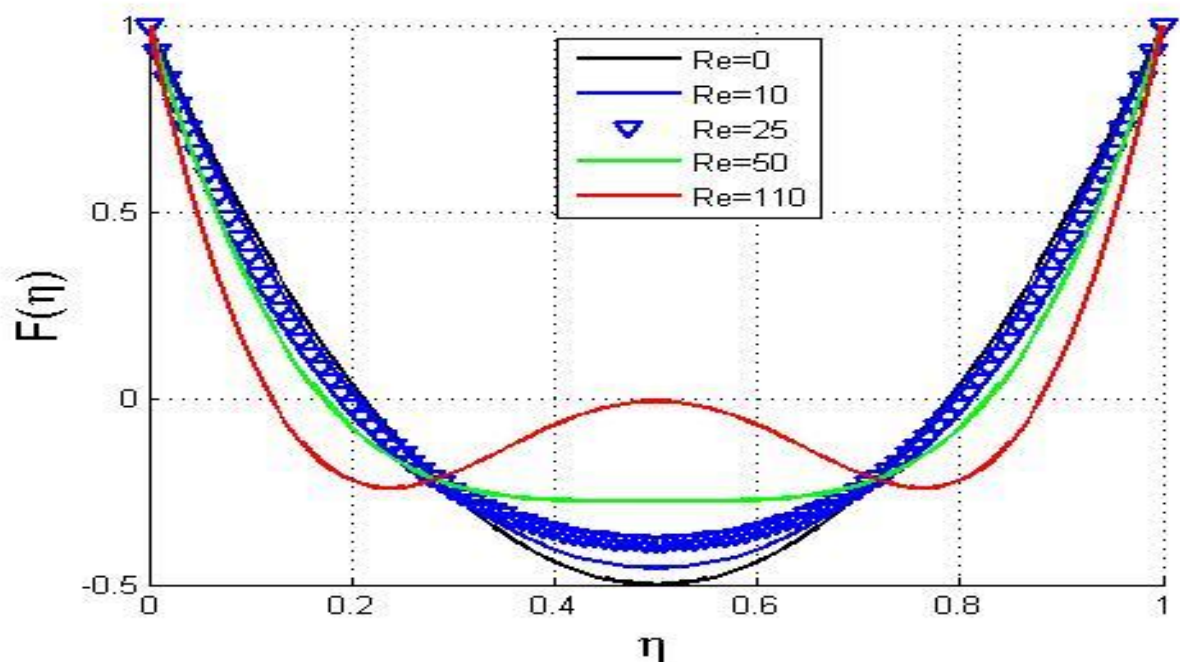


Figure 8 : Distribution des vitesses de la composante radiale du champ des vitesses pour différentes valeurs du Reynolds avec le rapport des vitesses constantes.

La distribution des vitesses radiales ci-dessus est obtenues pour différentes valeurs du Reynolds et pour le paramètre $\gamma = 1$.

Dans ce cas nous observons au regard des courbes que la symétrie est conservée mais nous notons une diminution progressive de l'amplitude de l'écoulement en fonction de l'augmentation du nombre de Reynolds ; Ceci montre que ces variations du Reynolds ont un effet contraire à celui du mouvement des disques. Les courbes obtenues sont des paraboles, donc le régime de l'écoulement est rampant.

III.3) PRESSION ENTRE LES DEUX DISQUES

III.3.1) Cas du nombre de Reynolds fixe avec différentes valeurs de γ

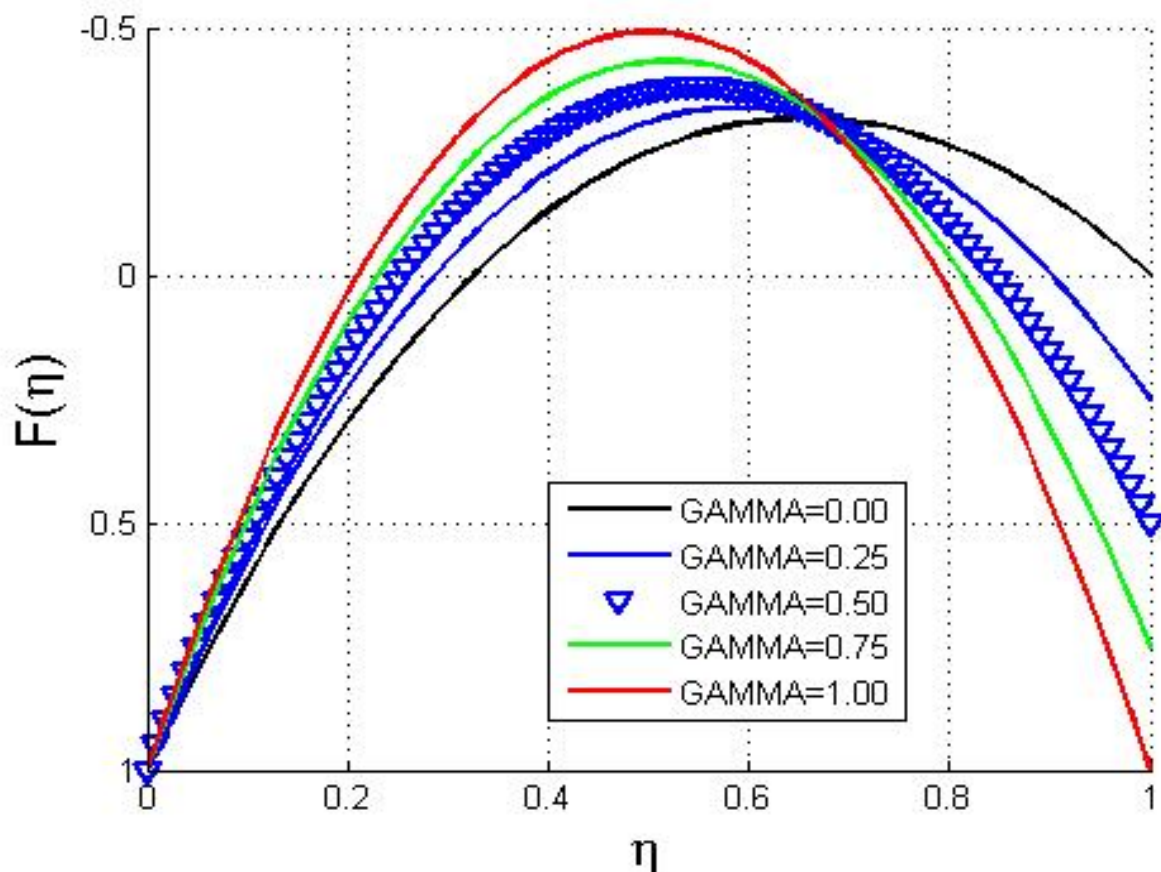


Figure 9 : Distribution de la pression pour différentes valeurs du paramètre γ avec un nombre de Reynolds constant.

La figure ci-dessus est la distribution de la pression adimensionnelle pour différentes valeurs du paramètre γ lorsque le Reynolds est fixe à 2.

Dans ce cas le mouvement des disques crée des effets contraires entre les variations de la pression et les variations des différents champs des vitesses radiale et azimutale.

III.3.2) Cas où le paramètre γ est constant et pour différentes valeurs du Reynolds

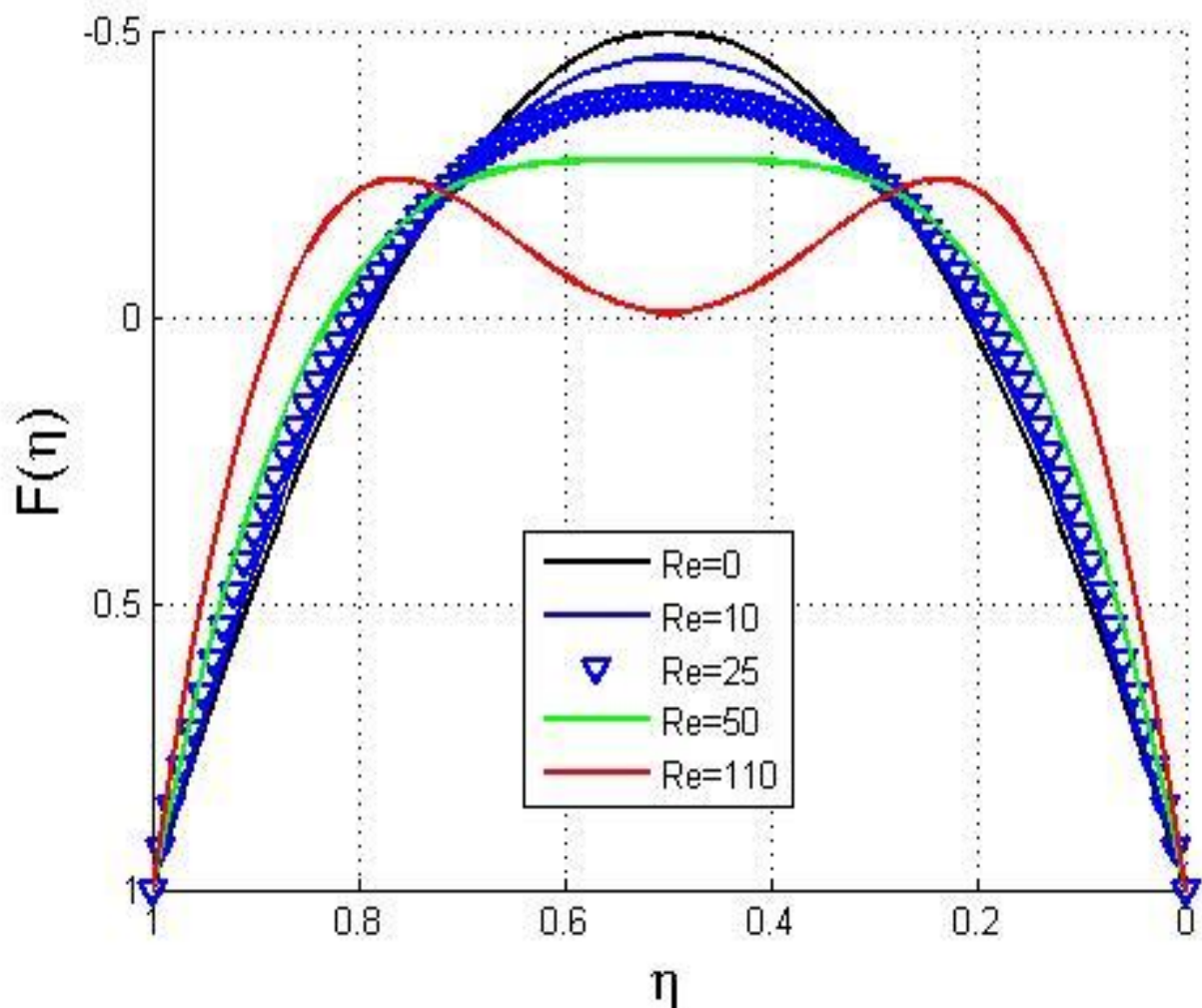


Figure 10 : distribution de la pression pour différentes valeurs du nombre de Reynolds avec un rapport des vitesses des disques constants.

Nous avons ci-dessus la distribution de la pression adimensionnelle qui rend compte de la pression réelle de façon fiable. Ces courbes sont obtenues pour différentes valeurs du nombre de Reynolds avec γ qui est fixe à 1. Nous observons que la pression augmente de façon symétrique jusqu'à une valeur maximale qui est l'amplitude de la courbe. Ce maximum est atteint à mi-parcours de la distance d qui sépare les deux disques de leur position initiale. L'amplitude diminue avec l'augmentation du Reynolds ceci montre que la pression diminue et a un comportement antagoniste à l'augmentation du Reynolds. Nous constatons également que la pression décroît dans le sens de l'écoulement dans les deux directions de l'écoulement.

III.4) SYNTHESE

Dans la première phase de discussion de ce chapitre, nous avons étudié d'une part l'influence du paramètre γ le nombre de Reynolds ayant pour valeur 2 et d'autre part, l'influence du nombre de Reynolds lorsque γ vaut 1 sur la distribution des vitesses de l'écoulement de fluide. Nous avons constaté d'une part et pour le premier cas (lorsque γ varie et $R_e=2$) en général qu'il y'a prépondérance de l'écoulement inverse due au paramètre γ et une symétrie de l'écoulement est observée dans les deux profils de vitesses et d'autre part que pour un Reynolds qui varie le paramètre γ restant fixe à 1, l'écoulement est toujours inverse dans la direction longitudinal et présente cette fois un point de concours pour toutes les courbes qui est en fait un point d'inflexion (point où on observe un changement de direction après l'écoulement). Pour chaque courbe il y'a un phénomène de décroissance de l'amplitude de l'écoulement produite par les effets du Reynolds ; Dans la direction radiale les courbes sont totalement différentes des premiers, pas d'inversion de l'écoulement, observation d'une diminution de l'amplitude des courbes proportionnellement aux variations du Reynolds ; Le

Reynolds a donc des effets contraires aux effets du paramètre γ qui caractérise le rapport des vitesses radiales des deux disques, mais les courbes maintiennent leur symétrie qui est la conséquence d'égale importance qu'à les mouvements des disques. Enfin pour le cas de la pression dans le cas de la variation du paramètre γ et du Reynolds constant, la pression est constante sur le disque D_1 et varie sur le disque D_2 en fonction du paramètre γ , les courbes présentent la même allure que le profil de vitesse radiale dans le même cas sauf que les sens de variations sont contraires à ce profil des vitesses ; c'est la preuve que la pression varie de façon contraire au sens de l'écoulement. Dans le cas d'un Reynolds variable et d'un mouvement de disque d'égale importance, l'amplitude des courbes de la pression diminue, les effets du paramètre adimensionnel donnant le rapport des vitesses des deux disques diminuent avec l'augmentation du Reynolds ; La pression décroît également dans ce cas dans le sens de l'écoulement.

CONCLUSION GENERALE

Parvenu au terme de notre étude il était question pour nous dans ce travail d'étudier le comportement dynamique d'un écoulement de fluide visqueux et axisymétrique entre deux disques en mouvement dans la direction radiale. La formulation mathématique du problème a été faite au moyen des équations de Navier-stockes et la méthode des solutions semblables. L'équation du problème est résolue avec la méthode numérique de tir et l'algorithme de RUNGE-KUTTA d'ordre quatre. Dans cette résolution nous avons utilisé le logiciel MATLAB la représentation graphique des résultats numériques obtenus. Il ressort que pour le cas de la variation du paramètre γ lorsque le Reynolds vaut 2, il y'a prépondérance de l'écoulement inverse dans les deux directions et la pression croit dans le sens opposé à l'écoulement. Lorsque les mouvements des disques sont d'égales importances, il y'a symétrie de l'écoulement. Pour le cas du nombre de Reynolds variable et le paramètre étant fixé à 1, nous avons un écoulement inverse dans la direction longitudinale ce qui n'est pas le cas dans la direction radiale. La dynamique des fluides visqueux entre deux disques imperméables en extension est un sujet riche et complexe, qui a plusieurs ouvertures vers des perspectives à savoir : Ingénierie Mécanique et Aéronautique : Conception de Roulements : les connaissances sur les fluides visqueux sont essentielles pour concevoir des roulements à billes et à rouleaux, où des lubrifiants visqueux sont souvent utilisés. Optimisation des Systèmes de Propulsion : Dans l'aéronautique, la compréhension des flux entre disques peut aider à optimiser les moteurs à turbine. Génie des Procédés : Contrôle de la Viscosité : L'étude des fluides visqueux est cruciale pour le contrôle des processus industriels impliquant des fluides, comme dans la fabrication de polymères ou d'émulsions. Mélange et Séparation : les principes de la dynamique des fluides peuvent être appliqués à la conception de réacteurs chimiques et d'appareils de séparation.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Altan, S. H. Gegel, Metal Forming Fundamentals and Applications, American Society of Metals, Metals Park, OH, 1979.
- [2] E.G. Fisher, Extrusion of Plastics, Wiley, New York, 1976.
- [3] Z. Tadmor, I. Klein, Engineering Principles of Plasticating Extrusion, Polymer Science and Engineerin Series, Van Norstand Reinhold, New York, 1970.
- [4] B.C. Sakiadis, Boundary-layer behavior on continuous solid surface: I. Boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric, AIChe j.7 (1961) 26-28.
- [5] B.C. Sakiadis, Boundary-Layer behavior on continuous solid surface: II. Boundary-layer on a continuous flat surface. AIChe j.7 (1961) 221-225.
- [6] C.Y. Wang, Exact solutions of the steady state Navier-Stockes equations, Annu. Rev. Fluid Mech. 23(1991)159-177.
- [7] L.J. Crane, Flow past a stretching plate, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) 21 (1970) 645- 647.
- [8] H.K. Kuiken, on boundary layers in fluid mechanics that decay algebraically along stretches of wall that are not vanishingly small, IMA J. Appl. Math. 27 (1981) 387-405.

- [9] R. Comolet, Mécanique Expérimentale des Fluides, Tome II : Quatrième édition revue et corrigée. Masson, 1994.
- [10] M. F. White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, (1991).
- [11] W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, E. N. Ganic, Hand Book of Heat Transfer Fundamentals McGraw Hill, 1995.
- [12] S. Candel, Mécanique des Fluides, Cours, Dunod, 1995.
- [13] P. Chassaing, Mécanique des Fluides, Eléments d'un premier parcours Cépadues Editions, 2000.
- [14] P. G. Drazing, W. H. Reid, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [15] C. Y. Wang, The three-dimensional flow due to a stretching flat surface, Phys. Fluids 27 (1984) 1915-1917.
- [16] T. Fang, Flow over a stretchable disk, Phys. Fluids 19 (2007) 12810.