

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES HUMAINES,
SOCIALES ET EDUCATIVES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES DE L'EDUCATION
ET DE L'INGENIERIE EDUCATIVE

DEPARTEMENT DE DIDACTIQUE DES
DISCIPLINES



THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

POST GRADUATE SCHOOL FOR HUMAN,
SOCIAL AND EDUCATIONAL SCIENCES

DOCTORAL UNIT OF RESEARCH AND
TRAINING IN SCIENCE OF EDUCATION AND
EDUCATIONAL ENGINEERING

DEPARTMENT OF DIDACTIC DISCIPLINES

**ÉTUDE DIDACTIQUE ET ÉPISTEMOLOGIQUE DES
OBSTACLES QUI ÉMERGENT CHEZ LES ÉLÈVES AU
COURS DES ACTIVITES DE DEVELOPPEMENT ET DE
REDUCTION DES POLYNOMES AU COLLEGE

PROPOSITION D'UN DISPOSITIF POUR LEUR
FRANCHISSEMENT**

Thèse de Doctorat/Ph.D. en Didactique des Disciplines

Spécialité : Didactique des Mathématiques



Présentée par :

Frédéric NODJINAÏBEYE

Titulaire d'un Master en Didactique des Mathématiques

Matricule : 16X3335

Membres du jury :

Président :	Nicola Gabriel ANDJIGA, Professeur	Université de Yaoundé I
Rapporteurs :	DIFFO LAMBO Lawrence, Professeur	Université de Yaoundé I
	SADJA KAM Judith, Maître de Conférences	Université de Yaoundé I
Membres :	LELE Célestin, Professeur	Université de Dschang
	CIAKE CIAKE Fidèle, Maître de Conférences	Université de Yaoundé I

Septembre 2025

*À mon feu père NODJINAÏBEYE TARO Mathias
et à ma feu mère DEDA Victorine*

Remerciements

Je remercie Monsieur DIFFO LAMBO Lawrence, Professeur titulaire, pour avoir encadré cette thèse. Je lui suis reconnaissant pour l'attention et le temps qu'il m'a accordé malgré son agenda chargé. Je lui exprime ma profonde gratitude pour sa disponibilité et la gentillesse avec lesquelles son bureau et son salon m'étaient constamment ouverts pour l'encadrement. Sa sympathie m'a été d'une aide précieuse.

Je remercie Madame SADJA KAM Judith, Maître de conférences, pour avoir encadré cette thèse. Je lui exprime ma profonde gratitude pour la promptitude et la gentillesse avec lesquelles elle m'a accueilli chez elle pendant mes séjours d'encadrement à Yaoundé. Son oreille attentive m'a permis d'aller au bout de mes réflexions et cela fut très apprécié.

Je remercie sincèrement toute l'équipe enseignante du Département de Didactique des Disciplines de la Faculté des Sciences de l'Education de l'Université de Yaoundé I, notamment la cheffe de Département, la Professeure NKECK BIDIAS Renée Solange, pour la formation de qualité dont j'ai bénéficié.

Je tiens à remercier l'ensemble des équipes des didacticiens de la Faculté des Sciences de l'Education de l'Université de Yaoundé I pour l'intérêt montré non seulement pour mon travail lors des présentations faites pendant les séminaires, mais aussi pour l'aide morale dont j'ai bénéficié.

J'exprime également ma reconnaissance au Docteur TCHONANG Patrick pour les conseils et orientations.

Je tiens à remercier toute ma famille. Je pense à mes tantes MADJIMBAYE KODIMBAYE Constance et DANKOULA Ramatou ; à ma grand-mère LARIBA Thérèse et à mon oncle DJIMASNGAR TARO qui m'ont apporté leur soutien sur tous les plans. Je n'oublie pas mes cadets et frères pour leurs soutiens multiformes.

Je remercie mon épouse Léonce RONE SANA pour son soutien et la confiance dont elle a témoigné à mon égard.

Je remercie le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique du Tchad pour m'avoir accordé une autorisation d'étude à titre exceptionnel.

Je remercie l'administration du Collège Evangélique pour avoir permis que mes expérimentations soient faites avec les élèves de leur établissement. Aux enseignants KOUBSO Bernard et NAININGA Blanchard ainsi qu'aux élèves qui ont participé aux expérimentations,

je leur dis merci. À l'ensemble de l'équipe enseignante dudit collège qui m'a toujours bien accueilli, je tiens à dire merci.

Je remercie Monsieur MAHAMAT Alexis, Monsieur BBEI KERTEMAR Gérard et Monsieur NANSIRONGARTI MABAÏGUEDEM Aristide pour avoir accepté de relire ma thèse.

Je remercie tous mes camarades étudiants en didactique des disciplines, particulièrement ceux en didactique des mathématiques pour les collaborations conviviales.

Je remercie tous ceux que je n'ai pas cités et qui, de près ou de loin, m'ont aidé à réaliser ce travail.

Sigles, acronymes, abréviations

CE 2 : Cours Élémentaire deuxième année

CIAM : Collection Inter-Africaine de Mathématiques

CNC : Centre National des Curricula

DPENPC : Délégation Régionale de l'Education Nationale et de la Promotion Civique pour la commune de N'Djamena

HG : Hypothèse Générale

HR : Hypothèse de Recherche

OG : Objectif Général

OR : Objectif de Recherche

QR : Question de Recherche

QP : Question Principale

SESM : Stratégies et Erreurs dans les Mathématiques de l'enseignement Secondaire

TAD : Théorie Anthropologique du Didactique

TCC : Théorie des Champs Conceptuels

TD : Transposition Didactique

UMons : Université de Mons

VD : Variable Dépendante

VI : Variable Indépendante

Liste des tableaux

Tableau 1: Erreurs classiques et leurs interprétations possibles (Almahmoud, 2019, p.88) ...	39
Tableau 2: Exemple de tâche, de type de tâche et de genre de tâche.....	52
Tableau 3: Exemple de tâche, de type de tâche, de genre de tâche et de technique	53
Tableau 4: Exemple de tâche, de type de tâche, de genre de tâche, de technique et de technologie.....	54
Tableau 5: Tableau synoptique	64
Tableau 6: Distribution des réponses des élèves à l'expression $A=5+(x-3)$	143
Tableau 7: Distribution des réponses des élèves à l'expression $B=5-(x+3)$	145
Tableau 8: Distribution des élèves à l'expression $C=3-(x-(5+x))$	146
Tableau 9: Distribution des réponses des élèves à l'expression $D=(4x-3)^2$	149
Tableau 10: Distribution des réponses des élèves à l'expression $E=(2x+9)(2x-9)$	151
Tableau 11: Distribution des réponses des élèves à l'expression $F=(11x+2)^2$	153
Tableau 12: Distribution des réponses des élèves à l'expression $G=(-7x+2)^2$	155
Tableau 13: Distribution des réponses des élèves à l'expression $H=-3x(x^2-2)$	159
Tableau 14: Distribution des réponses des élèves à l'expression $I=(9a+b)\times 2$	161
Tableau 15: Distribution des réponses des élèves à l'expression $J=-(2x-3)(2x+3)$	163
Tableau 16: Distribution des réponses des élèves à l'expression $K=(a-1)(a^2-2a+1)$	165
Tableau 17: Distribution des réponses des élèves à l'expression $A=2x+(x-3)$	169
Tableau 18: Distribution des réponses des élèves à l'expression $B=\frac{1}{6}-(x-\frac{5}{2})$	170
Tableau 19: Distribution des élèves à l'expression $C=-5-(x-(9-x))$	172
Tableau 20: Distribution des réponses des élèves à l'expression $D=(\frac{2}{3}x-3)^2$	174
Tableau 21: Distribution des réponses des élèves à l'expression $E=(11x-11)(11x+11)$	176
Tableau 22: Distribution des réponses des élèves à l'expression $F=(7+4x)^2$	178
Tableau 23: Distribution des réponses des élèves à l'expression $G=(-5x-2)^2$	180
Tableau 24: Distribution des réponses des élèves à l'expression $H=-2x^3(x^3-2)$	183
Tableau 25: Distribution des réponses des élèves à l'expression $I=(x+9y)\times \frac{2}{3}y$	185
Tableau 26: Distribution des réponses des élèves à l'expression $J=-(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$...	187
Tableau 27: Distribution des réponses des élèves à l'expression $K=(b^2-2b+1)(b-2)$	189
Tableau 28: Distribution des réponses des élèves sur l'identification des termes d'une expression	234
Tableau 29 : Distribution des réponses des élèves sur l'identification des facteurs d'une expression	234
Tableau 30: Distribution des réponses des élèves au deuxième item	235
Tableau 31 : Distribution des réponses des élèves au troisième item	236
Tableau 32: Distribution des réponses au quatrième item.....	237
Tableau 33: Distribution des réponses des élèves au cinquième item	238
Tableau 34: Distribution des réponses des élèves à l'expression $A=3a\times 4a^2$	240
Tableau 35: Distribution des réponses des élèves à l'expression $B=2x+x$	240
Tableau 36: Distribution des réponses des élèves à l'expression $C=7+(x-5)$	240

Tableau 37: Distribution des réponses des élèves à l'expression $D=x-(2x-5)$	241
Tableau 38: Distribution des réponses des élèves à l'expression $E=2+(-2x+5)$	242
Tableau 39: Distribution des réponses des élèves à l'expression $F=x+2+(7-3x)$	242
Tableau 40: Distribution des réponses des élèves à l'expression $G=2x-(x+(-2x+3))$	243
Tableau 41: Distribution des réponses des élèves à l'expression $H=2x(x-2)$	245
Tableau 42: Distribution des réponses des élèves à l'expression $I=(-4x+2)\times 3x$	245
Tableau 43: Distribution des réponses des élèves à l'expression $J=(3x+2)(5-x)$	246
Tableau 44: Distribution des réponses des élèves à l'expression $K=(2 + x)^2$	246
Tableau 45: Distribution des réponses des élèves à l'expression $L=(x - 3)^2$	247
Tableau 46: Distribution des réponses des élèves à l'expression $M=(-5x - 1)^2$	247
Tableau 47: Distribution des réponses des élèves à l'expression $N=-(x-1)(x+1)$	248
Tableau 48: Distribution des réponses des élèves à l'expression $A=5+(x-3)$ des activités du post-test, groupe expérimental	249
Tableau 49: Distribution des réponses des élèves à l'expression $B=5-(x+3)$ des activités du post-test, groupe expérimental	250
Tableau 50: Distribution des élèves à l'expression $C=3-(x-(5+x))$ des activités du post-test, groupe expérimental	250
Tableau 51: Distribution des réponses des élèves à l'expression $D=(4x - 3)^2$ des activités du post-test, groupe expérimental.	252
Tableau 52: Distribution des réponses des élèves à l'expression $E=(2x+9)(2x-9)$ des activités du post-test, groupe expérimental	252
Tableau 53: Distribution des réponses des élèves à l'expression $F=(11x + 2)^2$ des activités du post-test, groupe expérimental	253
Tableau 54: Distribution des réponses des élèves à l'expression $G=(-7x + 2)^2$ des activités du post-test, groupe expérimental	254
Tableau 55: Distribution des réponses des élèves à l'expression $H = -3x(x^2 - 2)$ des activités du post-test, groupe expérimental.....	255
Tableau 56: Distribution des réponses des élèves à l'expression $I=(9a+b)\times 2$ des activités du post-test, groupe expérimental	256
Tableau 57: Distribution des réponses des élèves à l'expression $J=-(2x-3)(2x+3)$ des activités du post-test, groupe expérimental	256
Tableau 58: Distribution des réponses des élèves à l'expression $K=(a - 1)(a^2 - 2a + 1)$	257
Tableau 59: Distribution des réponses des élèves à l'expression $A=5+(x-3)$ des activités du post-test, groupe témoin.....	259
Tableau 60: Distribution des réponses des élèves à l'expression $B=5-(x+3)$ des activités du post-test, groupe témoin.....	261
Tableau 61: Distribution des élèves à l'expression $C=3-(x-(5+x))$ des activités du post-test, groupe témoin.....	262
Tableau 62: Distribution des réponses des élèves à l'expression $D=(4x - 3)^2$ des activités du post-test, groupe témoin.....	264
Tableau 63: Distribution des réponses des élèves à l'expression $E=(2x+9)(2x-9)$ des activités du post-test, groupe témoin.....	265

Tableau 64: Distribution des réponses des élèves à l'expression $F=(11x + 2)^2$ des activités du post-test, groupe témoin.....	266
Tableau 65: Distribution des réponses des élèves à l'expression $G=(-7x + 2)^2$ des activités du post-test, groupe témoin.....	266
Tableau 66: Distribution des réponses des élèves à l'expression $H=-3x(x^2-2)$ des activités du post-test, groupe témoin.....	267
Tableau 67: Distribution des réponses des élèves à l'expression $I=(9a+b)\times 2$ des activités du post-test, groupe témoin.....	268
Tableau 68: Distribution des réponses des élèves à l'expression $J=-(2x-3)(2x+3)$ des activités du post-test, groupe témoin.....	269
Tableau 69: Distribution des réponses des élèves à l'expression $K=(a - 1)(a^2 - 2a + 1)$ des activités du post-test, groupe témoin.....	270
Tableau 70: Tableau de distribution des pourcentages des réponses correctes du groupe expérimental et du groupe témoin, selon les items	272

Liste des figures

Figure 1: Articulation possible entre systèmes de nombres et techniques de calcul autour de la multiplication (Constantin, 2018, p.14).....	9
Figure 2: Institution du calcul numérique et littéral (Blaquière, 1770, p.27)	13
Figure 3: Processus de la transposition didactique.....	57
Figure 4: Règle, manuel C4, p.123.....	70
Figure 5: Propriétés, manuel C4, p.132	70
Figure 6: Exemple, manuel C4, p.132	71
Figure 7: Exemple, manuel C4, p.138	71
Figure 8: Propriété des identités remarquables, manuel C4, p.138.....	72
Figure 9: Utiliser une formule pour calculer, manuel C4, p.131	72
Figure 10: Remarque, manuel C4, p.130	73
Figure 11: Exemple résolu, manuel C4, p.133.....	73
Figure 12: Exemple, manuel C4, p.132	74
Figure 13: Exemple, manuel C4, p.132	74
Figure 14: Exemple, manuel C4, p.133	75
Figure 15: Définition, manuel C4, p.134.....	75
Figure 16: Propriété, manuel C4, p.135.....	76
Figure 17: Propriété, manuel C4, p.135.....	76
Figure 18: Programme de calcul d'un nombre, manuel C4, p.130	77
Figure 19: Règles de priorité, manuel C4, p.137.....	77
Figure 20: Exemple, manuel C4, p.133	78
Figure 21: Exemple, manuel C4, p.134	78
Figure 22: Propriété, manuel C4, p.134.....	79
Figure 23: Exemple résolu, manuel C4, p.134.....	79
Figure 24: Exemple résolu, manuel C4, p.134.....	79
Figure 25: Exemple résolu, manuel C4, p.138.....	80
Figure 26: Exemple résolu portant sur le développement des produits remarquables, manuel C4, p.138.....	80
Figure 27: Exercice 11, manuel C4, p.141.....	82
Figure 28: Exercice 25, manuel C4, p.143.....	83
Figure 29: Exercice 28, manuel C4, p.143.....	83
Figure 30: Règle de priorité, manuel C3, p.123	86

Figure 31: Propriétés, manuel C3, p.123	86
Figure 32: Exemple, manuel C3, p.123	87
Figure 33: Exemple, manuel C3, p.126	87
Figure 34: Propriété, manuel C3, p.123.....	87
Figure 35: Présentation de la notion de monôme, manuel C3, p.126.....	87
Figure 36: Exemple, manuel C3, p.126	88
Figure 37: Nombres opposé, manuel C3, p.125.....	88
Figure 38: Propriété, manuel C3, p.123.....	89
Figure 39: Exemple, manuel C3, p.123	89
Figure 40: Exemple résolu, manuel C3, p.126.....	90
Figure 41: Exemple résolu, manuel C3, p.126.....	90
Figure 42: Exercice 4, manuel C3, p.128.....	91
Figure 43: Exercice 5, manuel C3, p.128.....	91
Figure 44: Exercice 13, manuel C3, p. 129.....	92
Figure 45: Trace écrite d'un élève de Monsieur K.....	97
Figure 46: Trace écrite d'un élève de Monsieur B.	101

Sommaire

Remerciements.....	ii
Sigles, acronymes, abréviations	iv
Liste des tableaux	v
Liste des figures	vii
Sommaire	x
Résumé	xv
Abstract.....	xvi
Introduction et problématique	1
PREMIERE PARTIE.....	6
Chapitre 1 : Etude épistémologique du concept de polynôme	7
Introduction.....	7
1.1. La construction du concept de polynôme.....	7
1.3. Notion de polynôme dans les programmes du collège	9
1.4. Le traitement des expressions algébriques	10
1.5. Le symbolisme mathématique.....	11
Conclusion du chapitre 1	14
Chapitre 2 : Revue de littérature.....	15
Introduction.....	15
2.1. Définition des concepts clés.....	15
2.1.1 La notion d'obstacle.....	15
2.1.2. Le concept d'objectif-obstacle	18
2.1.3. Polynômes	19
2.1.4. Les concepts de développement et de réduction	20
2.2. Revue de littérature.....	22
2.2.1. Le passage du calcul arithmétique au calcul algébrique	22
2.2.2. Erreurs des élèves et obstacles	34
Conclusion du chapitre 2	48
Chapitre 3 : Cadres théoriques de la recherche	50
Introduction.....	50

3.1. La théorie anthropologique du didactique (TAD)	50
3.1.1. Le concept de praxéologie.....	50
3.1.2. Tâche, type de tâches et genre de tâche	51
3.1.3. La technique	52
3.1.4. La technologie	54
3.1.5. La théorie.....	56
3.1.6. La transposition didactique	56
3.2. Théorie des champs conceptuels (TCC)	58
3.2.1. Schèmes.....	59
3.2.2. Le schème du développement d'une expression	60
3.2.3. Le schème de la réduction.....	61
3.2.4. Invariants opératoires.....	61
3.3. Opérationnalisation des variables.....	63
Conclusion du chapitre 3	67
Chapitre 4 : Analyse des manuels et des pratiques de classe relative aux activités de développement et de réduction des polynômes	68
Introduction.....	68
4.1. Analyse des manuels.....	68
4.1.1. Analyse du manuel de la classe de 4 ^{ème}	69
4.1.2. Analyse du manuel de la classe de 3 ^{ème}	85
4.2. Analyse des pratiques de classe.....	93
4.2.1. La séquence observée de Monsieur K., classe de 4 ^{ème} A.....	94
4.2.2. La séquence observée de Monsieur B., classe de 3 ^{ème} A.....	98
Conclusion du chapitre 4	102
DEUXIEME PARTIE	105
Chapitre 5 : Méthodologie de la recherche	106
Introduction.....	106
5.1. Type de recherche.....	106
5.2. Lieu d'étude.....	107
5.3. Population et corpus de l'étude	107
5.4. Outils d'expérimentation.....	109
5.4.1. Grille d'observations des classes	109
5.4.2. Questionnaires	110

5.4.3. Entretien d'explicitation.....	111
5.4.4. Dispositif de franchissement des obstacles : ingénierie didactique.....	111
5.5. Phases de l'ingénierie didactique	112
5.5.1. Les analyses préalables	112
5.5.2. La conception et l'analyse <i>a priori</i> de situations didactiques	112
5.5.3. L'expérimentation.....	113
5.5.4. L'analyse <i>a posteriori</i> et validation.....	113
5.6. Présentation du dispositif	113
5.7. Traitement et analyse des données	114
Conclusion du chapitre 5	114
Chapitre 6 : Première expérimentation : identification des obstacles didactiques et épistémologiques	115
Introduction.....	115
6.1. Analyse <i>a priori</i> des exercices des questionnaires	115
6.1.1. Analyse <i>a priori</i> des exercices du questionnaire adressé aux élèves de 4 ^{ème}	116
6.1.2. Analyse <i>a priori</i> des exercices du questionnaire adressé aux élèves de 3 ^{ème}	130
6.2. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves aux questionnaires.....	142
6.2.1. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves de la classe de 4 ^{ème}	142
6.2.1.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou du signe " - "	142
6.2.1.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables	148
6.2.1.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques	158
6.2.2. Synthèse de l'analyse des réponses des élèves de 4 ^{ème}	167
6.2.3. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves de 3 ^{ème}	168
6.2.3.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou du signe " - "	168
6.2.3.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables	174
6.2.3.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques	183
6.2.4. Synthèse de l'analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves de 3 ^{ème}	190
6.3. Regard croisé des réponses des élèves de 4 ^{ème} et 3 ^{ème}	191
6.4. Analyse de l'entretien d'explicitation avec les élèves	193
6.5. Obstacles épistémologiques et didactiques identifiés.....	197
6.5.1. Obstacles épistémologiques	197

6.5.2. Obstacles didactiques.....	199
Conclusion du chapitre 6	199
Chapitre 7 : Deuxième expérimentation : proposition et expérimentation du dispositif de franchissement	202
Introduction	202
7.1. Conception et analyse <i>a priori</i> du dispositif de franchissement	202
7.1.1. Conception du dispositif	202
7.1.2	Dispositif de franchissement proposé 203
7.1.3.	Présentation de la séquence d'enseignement 213
7.1.4. L'analyse <i>a priori</i> des activités	216
7.2. Expérimentation, analyse <i>a posteriori</i>	233
7.2.1. Réponses des élèves aux activités préparatoires.....	233
7.2.1.1. Réponses des élèves au premier item.....	233
7.2.1.2. Réponses des élèves au deuxième item.....	235
7.2.1.3. Réponses des élèves au troisième item	236
7.2.1.4. Réponses des élèves au quatrième item	237
7.2.1.5. Réponses des élèves au cinquième item.....	238
7.2.2. Conclusion de l'analyse des activités préparatoires	239
7.2.3. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves aux activités proposées à la suite des éléments du cours	239
7.2.3.1. Activité centrée sur la réduction d'une somme algébrique ou d'un produit de monômes	239
7.2.3.2. Activité centrée sur le développement et la réduction des expressions algébriques	244
7.3. Evaluation du dispositif (post-test).....	248
7.3.1. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves ayant été soumis au dispositif (groupe expérimental)	248
7.3.1.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " et du signe " – "	248
7.3.1.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables	251
7.3.1.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques	255
7.3.2. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves de la classe de 4 ^{ème} n'ayant pas été soumis au dispositif (groupe témoin)	258

7.3.2.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " et du signe " – "	258
7.3.2.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables	263
7.3.2.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques	267
7.3.3. Croisement de l'analyse des réponses des élèves du groupe expérimental avec ceux du groupe témoin.....	271
Conclusion du chapitre 7	272
Conclusion générale et perspectives.....	273
Analyse épistémologique.....	273
Quelques résultats antérieurs	274
Cadres théoriques	274
Comment les concepts de développement et de réduction sont abordés dans les manuels et en situation de classe ?	275
Les expérimentations.....	276
Perspectives de recherche	278
Références bibliographiques	280
Annexes.....	290
Annexe 1 : Autorisation de recherche	i
Annexe 2 : Formulaire de consentement	ii
Annexe 3 : Questionnaires (tests).....	iii
Annexe 4 : Grille d'analyse des manuels	v
Annexe 5 : Grille d'observation.....	vi
Annexe 6 : Grille d'analyse de l'entretien d'explicitation.....	vii
Annexe 7 : Contenus des programmes tchadiens de Mathématiques pour les classes de 4 ^{ème} et 3 ^{ème}	x

Résumé

Le calcul algébrique est vu de deux points de vue par les chercheurs. D'une part, il est considéré comme un prolongement de l'arithmétique et d'autre part, il se construit en rupture avec l'arithmétique. C'est la raison pour laquelle, et en accord avec ces points de vue, on observe beaucoup de difficultés d'apprentissage du calcul littéral chez les élèves de 4^{ème} et de 3^{ème} dont l'âge varie de 12 à 16 ans. La thèse que nous soutenons est que l'identification des obstacles épistémologiques et didactiques suivie d'un travail qui s'appuie sur ces obstacles, en prenant en compte les aspects sémantique et syntaxique des énoncés, peut amener les élèves à dépasser ceux-ci. Pour cela, à partir d'un test auquel nous avons soumis les élèves et d'un entretien avec ces derniers, nous avons identifié quelques obstacles émanant des invariants opératoires identifiés, dans le cadre de la théorie des champs conceptuels. Nous avons, également, convoqué la théorie anthropologique du didactique à partir de laquelle nous avons effectué une analyse des manuels et des pratiques de classes, du point de vue de la praxéologie et de la transposition didactique. Les résultats des analyses ont montré, par exemple, que la représentation réductrice de l'égalité comme une annonce de résultat dans le calcul numérique et du signe " + " placé entre deux nombres comme signe d'une opération amène les élèves à réduire le résultat à un nombre en additionnant des monômes ou en assemblant des monômes non semblables. De même, le fait que les élèves associent la suppression des parenthèses à l'application de la distributivité les amène à distribuer un monôme aux termes d'une somme délimitée par des parenthèses, dans une somme algébrique. Les résultats de l'expérimentation du dispositif de franchissement proposé montrent que les difficultés d'apprentissage sont moins fréquentes chez les élèves du groupe expérimental que chez ceux du groupe témoin.

Mots clés : Epistémologie, didactique, obstacles, développement, réduction, polynômes, dispositif

Abstract

Algebraic calculation is viewed from two points of view by researchers. On the one hand, it is considered an extension of arithmetic, on the other hand it is constructed in a break with arithmetic. This is the reason why, and in accordance with these points of view, we observe many difficulties in learning literal calculation among students in 4th and 3rd grade whose age varies from 12 to 16 years. The thesis we support is that the identification of epistemological and didactic obstacles followed by work based on these obstacles, and taking into account the semantic and syntactic aspects of the statements, can lead students to overcome them. For this, based on a test to which we submitted the students and an interview with them, we identified some obstacles emanating from the operational invariants identified, within the framework of the theory of conceptual fields. We also called upon the anthropological theory of didactics from which we carried out an analysis of textbooks and classroom practices, from the point of view of praxeology and didactic transposition. The results of the analyses showed, for example, that the reductive representation of equality as an announcement of a result in numerical calculation and of the "+" sign placed between two numbers as a sign of an operation leads students to reduce the result to a number by adding monomials or by assembling dissimilar monomials. Similarly, the fact that students associate the removal of parentheses with the application of distributive property leads them to distribute a monomial under the terms of a sum delimited by parentheses, in an algebraic sum. The results of the experiment with the proposed crossing device show that learning difficulties are less frequent among students in the experimental group than among those in the control group.

Keywords : Epistemology, didactics, obstacles, development, reduction, polynomials, device

Introduction et problématique

Notre étude s'inscrit dans le champ de la didactique de l'Algèbre. Nous nous intéressons notamment au calcul algébrique.

Le calcul algébrique constitue l'entrée dans l'Algèbre. Dans le calcul algébrique, l'élève est amené, entre autres, à développer, réduire et factoriser les expressions algébriques. Il sert également comme outil de modélisation. Le calcul algébrique participe au développement de la pensée algébrique qui, d'après Kieran (1996), se construit, se développe et se manifeste essentiellement à travers les activités de généralisation, de transformation d'expressions symboliques et les activités globales de méta niveau.

Au Tchad, comme dans la plupart des pays d'Afrique francophone, les programmes ou les curricula de Mathématiques de l'enseignement secondaire (premier cycle) prescrivent le calcul littéral (polynômes), et ceci, généralement à partir de la classe de 4^{ème}. Cela est constaté dans les programmes tchadiens de Mathématiques de 1984, 1989, 1997, puis de 2008. En classe de 3^{ème}, il y a un approfondissement du calcul littéral. Ces prescriptions institutionnelles se justifient par l'importance de ce concept dans le cursus scolaire. En effet, les polynômes permettent de modéliser des phénomènes physiques par exemple et aident à la résolution des problèmes en mathématiques. Ces polynômes doivent être exploités ou utilisés à partir d'opérations de développement et de réduction, ce qui demande une bonne maîtrise de ces activités par les élèves d'abord à un niveau élémentaire, puis probablement à un niveau plus élevé. On peut développer le polynôme à une indéterminée complexe $P(z) = (z - 1)(z^2 + 2z + 2)$; on peut modéliser l'équation d'une trajectoire parabolique par un polynôme de degré 2.

Notre travail qui porte sur le calcul algébrique est principalement centré sur les activités de transformation d'expressions symboliques, notamment les activités de développement et de réduction des polynômes en classes de 4^{ème} et de 3^{ème}. Il s'agit des polynômes à une variable ou une indéterminée.

Le choix de ces classes se justifie par le fait qu'au Tchad, comme dans la plupart des autres pays, selon les programmes officiels de ces pays, l'enseignement et l'apprentissage du calcul littéral, notamment le développement et la réduction des expressions algébriques commencent en classe de 4^{ème} et s'accompagne de beaucoup de difficultés.

Notre étude se situe dans le contexte tchadien où le Français et l'Arabe sont les deux langues officielles. Nous nous intéressons exclusivement aux enseignements dispensés dans la langue française.

L'importance d'une étude sur les obstacles qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes s'est dégagée chez nous, suite à notre expérience professionnelle dans l'enseignement des Mathématiques au secondaire et à notre stage en deuxième année de Master. Cette étude est également motivée par la pluralité de recherches en didactique de l'Algèbre.

Notons qu'en Mathématiques, un obstacle est une connaissance valide dans un certain domaine non vide, mais c'est une connaissance inadéquate, qui empêche la mise en place ou la compréhension d'une autre connaissance, elle, adéquate (Brousseau, 2000). Pour Bachelard (1947), c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Elle se construit « contre une autre » et l'identification des obstacles permet de repérer les difficultés inévitables, parce que constitutives du développement de la connaissance.

De notre expérience professionnelle, les élèves du collège éprouvent des difficultés dans l'effectuation du calcul algébrique, notamment dans les activités de développement et de réduction.

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous présentons quelques difficultés récurrentes :

- La difficile gestion des parenthèses : nous constatons que lorsque les élèves réduisent une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " − ", ils suppriment les parenthèses et font une distribution partielle du signe " − " à un seul des termes contenus dans les parenthèses. De plus, lorsqu'il s'agit de développer un produit de sommes algébriques, certains élèves suppriment les parenthèses en remplaçant le " × " élidé par le signe " + ". Par exemple :

$2 - (x + 3) = 2 - x + 3$; $(x + 2)(x + 5) = x + 2 + x + 5$. Ces difficultés sont attestées par Almahoud (2019) qui évoque les erreurs

$-(a + b) = -a + b$; $a(b + c) = ab + c$. Il explique ces erreurs par une sorte de « distributivité langagière ». Pour lui, cette erreur aurait des racines dans l'aspect linguistique ;

- Le statut de l'égalité et du signe " + " : dans les activités de développement et de réduction, les élèves considèrent l'égalité comme une annonce du résultat et l'addition comme indiquant une opération à effectuer. Par exemple

$2 + (x + 3) = 2 + x + 3 = 5 + x = 5x$. Dans cette perspective, Booth et Chelsea (1984) constatent, chez certains élèves, les erreurs comme $3n + 4 = 7n$. Ils ont, également, constaté qu'un élève peut écrire n^3 ou $3n$ comme réponse à $n + 3$.

- La généralisation du contexte d'application de certaines propriétés mathématiques. Les élèves généralisent la propriété de puissance $(ab)^n = a^n b^n$ pour obtenir, par exemple, $(x + 4)^3 = x^3 + 4^3$. Pour Almahmoud (2019), une telle erreur relève de la généralisation de la propriété de la distributivité des puissances sur un produit. Les élèves pensent que les expressions $a^2 + b^2$ et $(a + b)^2$ ont la même dénotation.

Ces difficultés sont abondamment abordées par bien d'autres auteurs tels que Grugeon-Allys et Pilet (2017), Hassayoune (2021), Tremblay, Polotskaia et Passaro (2021), l'équipe de recherche de l'Université de Mons (2019), Astolfi (1992) et Oudrhiri (2016) dont nous ferons la revue des travaux dans le deuxième chapitre de ce travail.

Les problématiques soulevées par ces auteurs sont présentes aujourd'hui, en contexte tchadien. De ce fait, nous faisons l'hypothèse que les difficultés rencontrées par les élèves sont dues à la présence des obstacles didactiques et épistémologiques.

Tous ces constats nous amènent à la question de recherche suivante :

Comment l'identification des obstacles didactiques et épistémologiques qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes peut-elle servir de levier au dépassement de ceux-ci ?

Cela nous amène à scinder notre question de recherche en trois sous-questions.

Q1 : Quelle transposition didactique est faite du point de vue des manuels et en situations de classe ?

Q2 : Quels obstacles didactiques et épistémologiques émergent des productions des élèves sur le développement et la réduction des polynômes ?

Q3 : En quoi l'articulation sémantique-syntaxique et la prise en compte des obstacles identifiés peuvent-ils aider à franchir les obstacles qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes ?

En guise de réponse provisoire à notre question principale, nous faisons l'hypothèse suivante : ***Une transposition didactique des concepts de développement et de réduction des polynômes qui s'appuie sur la notion d'objectif-obstacle et un travail de clarification sur l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique, dans le traitement des expressions algébriques, peuvent contribuer à dépasser les obstacles identifiés chez les élèves.***

De manière spécifique, nous faisons les hypothèses suivantes :

H1 : Une analyse des productions des élèves, des manuels et des situations de classe peut permettre l'identification des obstacles.

H2 : L'articulation sémantique-syntaxique dans le traitement des expressions littérales permet une clarification des opérations de développement et réduction des polynômes et peut constituer une stratégie pouvant permettre de franchir les obstacles identifiés.

Pour ce qui est de l'objectif général, la présente étude vise à ***identifier les obstacles didactiques et épistémologiques qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes et à proposer un dispositif en vue de leur dépassement***. Cet objectif général se décline en deux objectifs spécifiques.

OS1 : Identifier des obstacles didactiques et épistémologiques à partir de l'analyse des productions des élèves, des manuels et des situations de classe.

OS2 : Mettre sur pied un dispositif d'apprentissage articulant les aspects sémantiques et syntaxiques et qui prend en compte les obstacles identifiés.

Notre travail comporte deux parties : la partie théorique et la partie expérimentale.

La partie théorique comprend quatre chapitres.

Nous conduisons, dans le premier chapitre, une étude épistémologique du concept de polynôme. Nous présentons l'évolution et la construction du concept de polynôme, la nature épistémologique du concept de polynôme, le traitement des expressions algébriques et le symbolisme mathématique.

Le deuxième chapitre est consacré à la revue de littérature. Ce chapitre nous permet de situer nos recherches par rapport aux travaux antérieurs. La définition des concepts sera présentée, également, dans ce chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les cadres théoriques de notre étude composés de la théorie anthropologique du didactique (TAD) et de la théorie des champs conceptuels (TCC).

La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992, 1999) nous permet de regarder comment s'organise l'élaboration des savoirs liés au développement et à la réduction des polynômes. Elle permet, également, d'analyser l'activité de l'élève et l'activité mathématique de l'enseignant. L'analyse des activités en termes de praxéologie participe à l'analyse de la transposition qui est faite des objets de savoir.

La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, p.135) nous permet d'analyser la variabilité des familles de situations ; elle donne des outils d'analyse du fonctionnement cognitif des élèves par l'identification et l'analyse des invariants.

Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse des manuels et des pratiques de classe relatives aux activités de développement et de réduction des polynômes. Nous avons analysé les manuels de Mathématiques de 4^{ème} et de 3^{ème} de la Collection Inter-Africaine de mathématiques (CIAM) et des séquences d'enseignement.

La partie expérimentale de notre travail comporte trois chapitres.

Dans le cinquième chapitre, nous présentons la **méthodologie** que nous avons élaborée pour notre étude.

Le sixième chapitre présente la **première expérimentation** ayant permis d'identifier les obstacles didactiques et épistémologiques qui émergent chez les élèves des classes de 4^{ème} et 3^{ème} au cours des activités de développement et de réduction des polynômes.

Le septième chapitre présente la **seconde expérimentation** qui porte sur la mise en place du dispositif de franchissement des obstacles identifiés. Ce dispositif est axé sur les aspects sémantique et syntaxique. Il est expérimenté auprès des élèves de 4^{ème}.

Nous concluons notre étude par une synthèse des résultats obtenus et par quelques perspectives.

Première partie

Chapitre 1 : Etude épistémologique du concept de polynôme

Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons une étude épistémologique du concept de polynôme.

Nous limiterons cette étude à la construction du concept de polynôme, à sa nature épistémologique, au traitement des expressions algébriques et au symbolisme mathématique.

1.1. La construction du concept de polynôme

Les polynômes sont écrits sous la forme suivante :

$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des réels ou des complexes.

Il convient de noter que l'histoire des polynômes est inséparable de l'histoire de l'Algèbre.

1.1.1. L'algèbre littérale de Viète

Viète (1540-1603) est le premier à faciliter la recherche de l'inconnue au moyen des symboles. En effet, il crée un calcul portant uniquement sur des lettres.

Si Viète crée un tel langage, ce n'est pas pour formaliser l'écriture mais, pour se donner de nouveaux outils pour résoudre les problèmes. Pour Viète, lorsque les élèves de 3^{ème} découvrent l'équation $y = mx + p$, ils se demandent quel est le statut de chacune des lettres utilisées.

L'idée principale de Viète est la généralisation de l'utilisation de la lettre pour désigner des quantités aussi bien connues qu'inconnues.

1.1.2. Le langage algébrique chez Diophante

Pour désigner le carré, le cube, ..., Diophane, cité par Radford (1992), introduit certains symboles. Il utilise le symbole ζ pour désigner l'arithme. Notons que pour Diophane, un arithme est un nombre.

Pour représenter les nombres invariants déterminés, il utilise la notation grecque. Par exemple :

α désigne 1, β désigne 2, γ désigne 3, θ désigne 9,

ι désigne 10, κ désigne 20, λ désigne 30, q désigne 90,

Il va construire un langage (avec une syntaxe bien définie) à l'aide de ces symboles. Dans le langage algébrique de Diophane, le monôme $3x^2$ correspond à $\Delta^y\gamma$. De même, $4x^5$ correspond à $\Delta K^y\delta$, alors que $33x$ correspond à $\zeta\lambda\gamma$. Dans le langage algébrique de Diophane, les expressions se forment par juxtaposition. Ainsi, l'expression

$\Delta K^y\delta K^y\epsilon\Delta^y\kappa\zeta\lambda\gamma M\eta$ correspond à $4x^5 + 5x^3 + 20x^2 + 33x + 8$.

Au regard des notations $\Delta K^y\delta K^y\epsilon\Delta^y\kappa\zeta\lambda\gamma M\eta$ et $4x^5 + 5x^3 + 20x^2 + 33x + 8$, nous constatons que le langage utilisé n'est le même que celui utilisé de nos jours.

1.2. Les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des opérations sur les polynômes

Le caractère formalisateur des opérations sur les polynômes réside dans le traitement en termes d'axiomatique formelle.

Les programmes d'études des niveaux 4^{ème} et 3^{ème} spécifient le formalisme algébrique en mentionnant, par exemple, la propriété de distributivité. Cependant, ils n'explicitent pas la distributivité. Ce choix institutionnel peut être source d'obstacle lié au formalisme.

La propriété de distributivité présente les aspects unificateur et généralisateur du calcul littéral.

Selon Constantin (2018, p.14), la distributivité orchestre un double mouvement de généralisation : unifiant des techniques de calcul mental et posé de multiplications tout en les justifiant lorsqu'elle devient un objet d'étude au collège ; elle s'étend des nombres entiers aux nombres décimaux. Une extension du côté des polynômes émerge implicitement au travers des généralisations des usages de la propriété à des expressions symboliques algébriques, ce que Constantin (2018, p.14) résume par la figure ci-dessous qui illustre une organisation possible de l'articulation entre construction de techniques de calcul et construction de systèmes de nombres.

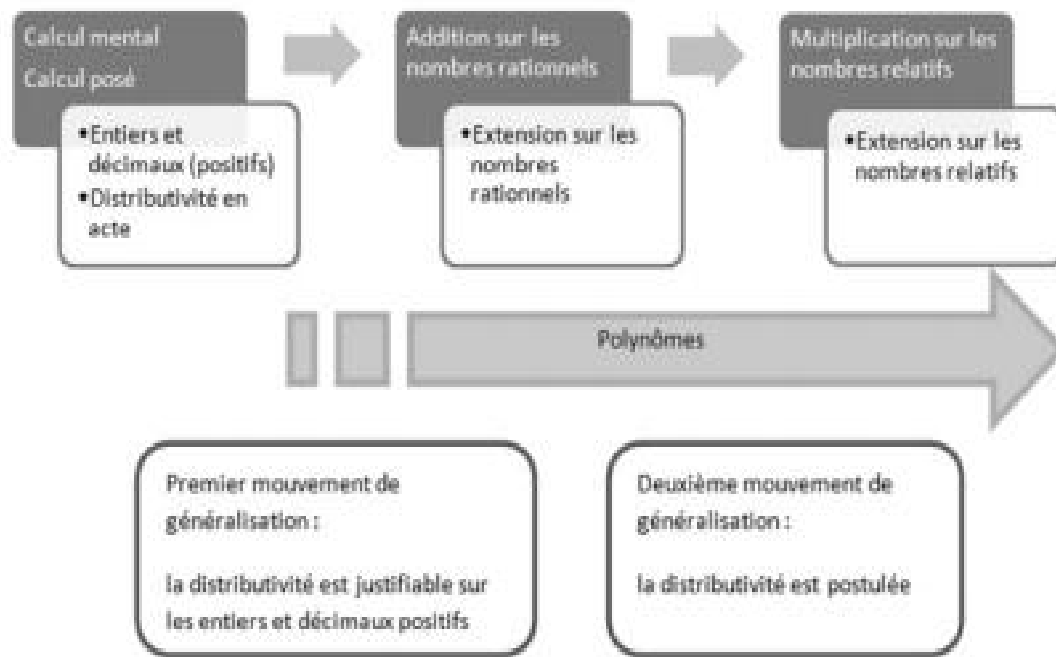


Figure 1: Articulation possible entre systèmes de nombres et techniques de calcul autour de la multiplication (Constantin, 2018, p.14)

Selon Robert (1998) cité par Constantin (2018), la notion des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur (FUG) permet d'envisager la distributivité au regard d'un domaine d'étude plus large, à la fois numérique et algébrique.

1.3. Notion de polynôme dans les programmes du collège

Le concept de polynôme est un concept central dans l'enseignement de l'algèbre. Dans la plupart des systèmes éducatifs, le concept de polynôme est introduit au collège à travers le calcul littéral. Selon les systèmes éducatifs, le concept de polynôme est prescrit dans les programmes d'études à partir de la classe de 5^{ème} ou 4^{ème}.

Au Tchad, le calcul littéral, notamment le développement et la réduction, commence à partir de la classe de 4^{ème}.

Au Cameroun, par exemple, dans la section francophone de l'enseignement général, le calcul littéral, notamment le développement et la réduction, commence à partir de la classe 4^{ème}.

Dans la suite de ce chapitre, les termes « calcul littéral » et « calcul algébrique » sont considérés comme synonymes.

1.4. Le traitement des expressions algébriques

1.4.1. Deux aspects des expressions algébriques : procédural et structural

Dans le traitement des expressions algébriques, deux aspects sont à prendre en compte. Il s'agit de l'aspect procédural et de l'aspect structural.

L'aspect procédural réfère à un processus de calcul pour substituer une valeur numérique à la variable. Par exemple, l'expression $x^2 + 3x + 7$ signifie « prendre le carré d'un nombre, ajouter le triple du nombre et lui ajouter 7 ».

L'aspect structural réfère à un objet sur lequel on réalise des opérations. Par exemple, l'expression $x^2 + 3x + 5$ correspond à un trinôme de degré 2. Ici, la somme du carré d'un nombre x , de son triple et de 5 objets que l'on peut additionner, multiplier, dériver, etc. Dans ce cas, il est indispensable de partir de la structure de l'expression.

Dans le cadre de notre étude, nous allons nous intéresser à ces deux aspects.

1.4.2. La dimension sémiotique du travail algébrique

Au-delà du travail sur les écritures algébriques, l'enseignement a aussi pour enjeu d'amener les élèves à développer en parallèle d'autres représentations des expressions algébriques (schémas de calcul, programmes de calcul, figures géométriques d'une grandeur donnée). Il s'agit de la dimension sémiotique du travail algébrique (Duval, 1996) qui intervient lors du contrôle de la formation, de la transformation des écritures dans le registre des écritures algébriques et la mise en relation des écritures algébriques avec des représentations dans d'autres registres sémiotiques (langage naturel, représentations graphiques, etc.).

Pour Duval (1988), un des obstacles rencontrés par de nombreux élèves dans leur apprentissage des mathématiques tient au fait que l'équivalence référentielle l'emporte sur la congruence sémantique, alors que le fonctionnement de la pensée suit, en priorité, la congruence sémantique. La substitution d'une expression relevant d'un réseau sémantique à une expression d'un autre réseau sémantique apparaît parfois comme un saut difficilement franchissable. De même, il évoque que le passage d'un énoncé du discours naturel à une expression écrite symboliquement avec des variables, des symboles de relation, ou d'opération, constitue pour beaucoup d'élèves un fossé difficilement franchissable. Ainsi, nous pensons que dans le calcul littéral, si le lien entre les énoncés des propriétés en langage naturel et mixte n'est pas bien établi, cela créera un fossé difficilement franchissable par les élèves lors des activités de développement et de réduction. Par exemple, le passage des règles de suppression des parenthèses dans une somme algébrique comportant des parenthèses aux propriétés

$a + (b + c) = a + b + c$ et $a - (b + c) = a - b - c$ doit être établi de sorte à ne pas constituer un fossé difficilement franchissable par les élèves.

1.5. Le symbolisme mathématique

1.5.1. La variation du statut de la lettre

La lettre change de statut selon le contexte, selon les activités. La lettre n'a pas le même statut, par exemple, dans le calcul littéral et dans les équations. Dans le calcul littéral, elle représente n'importe quel nombre alors que dans les équations elle est une inconnue. Pour Descartes, cité par Serfati (1998), la lettre a deux statuts :

- les lettres désignent des « données ¹ » ;
- les lettres désignent des inconnues.

Les lettres sont utilisées, en Arithmétique, pour désigner :

- des mesures. Par exemple trois mètres est noté 3 m ;
- des étiquettes comme par exemple 3 m pour dire 3 mobylettes.

Les différents statuts de la lettre sont détaillés dans la revue de littérature au chapitre 2.

Nous pensons que cette variation de statut peut être une source de difficultés pour les élèves, notamment dans les activités de développement et de réduction des polynômes.

1.5.2. Signification du signe " $=$ "

Dans le calcul numérique, le signe " $=$ " a, généralement, le statut d'annonce de résultat. Par exemple pour le calcul $4 + 5 = \dots$. Ici, le signe " $=$ " indique le résultat de la somme de 4 et de 5.

Dans le calcul algébrique, le signe " $=$ " a, généralement le statut d'équivalence. Par exemple, dans l'égalité $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, il indique une égalité pour toutes les valeurs de x ; c'est donc le statut d'équivalence.

Cette variation de statut du signe " $=$ " peut amener les élèves, dans les activités de développement et de réduction, à considérer l'égalité comme annonce de résultat.

1.5.3. Ambiguïté du signe " $-$ "

La signification du signe " $-$ " présente une certaine complexité avec l'introduction des nombres négatifs et la soustraction des nombres relatifs.

Le signe " $-$ " est :

- prédicatoire d'un nombre (par exemple (-2)) ;

¹ Les données dont des nombres.

- opérateur de la soustraction ;
- l'opposé d'un nombre : l'opposé de x est noté $-x$.

Le lien entre les trois significations n'est pas évident pour les élèves.

Le calcul algébrique introduit à partir de la classe de 4^{ème} s'appuie sur le calcul numérique. Or, les sommes algébriques ne sont pas bien assimilées dans les classes antérieures. De ce fait, les élèves présentent généralement des carences à ce niveau en classe de 4^{ème}. Raison pour laquelle il est important de réinvestir le calcul numérique avec des nombres relatifs en classe de 5^{ème} puis en classe de 4^{ème}.

Exemples : calculer $A = -2 + 5 - (-5) - 7$ puis, plus tard, réduire

$$B = -7b + 2a - 3a + 5b + 3.$$

1.5.4. Le signe " + "

En arithmétique, un signe opératoire indique un calcul à effectuer. En algèbre, une expression algébrique ayant le statut de résultat peut conserver un signe opératoire et rester non évaluée, comme $x + 3$. Pour certains élèves, cette rupture avec les pratiques arithmétiques constitue un obstacle durable. Ils refusent d'accepter qu'une expression algébrique ayant statut de résultat conserve un signe opératoire : on peut trouver alors l'expression $x + 3$ transformée en $3x$ ou $x3$. Cette difficulté, identifiée par de nombreux chercheurs, est nommée le dilemme *process-product* par Davis (1975) et Collis (1974).

1.5.5. Le signe " × "

Le signe " × " indique la multiplication. La conception intuitive de la multiplication est l'addition itérée. Une autre conception de la multiplication est celle d'une relation de correspondance invariante entre deux quantités (schéma de correspondance ou rapport entre deux quantités). Bryant, Evans et Bell (2010), cités par Neagoy, Rivier, Scheibling-Sève, Sensevy et Thevenot (2022), remarquent que le schéma de correspondance est également acquis intuitivement par les enfants avant l'enseignement des multiplications.

Park et Nunes (2001), cités par Neagoy, Rivier, Scheibling-Sève, Sensevy et Thevenot (2022), constatent que le concept de multiplication est mieux saisi par les élèves en leur faisant travailler le schéma de correspondance plutôt qu'en leur faisant travailler l'addition répétée. Nous pensons qu'une présentation du concept de multiplication par un schéma de correspondance favorise l'appréhension du sens et de la propriété de commutativité de la multiplication.

Le signe " $\times$ " pose des difficultés aux élèves. Pour l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (2005), certains lycéens éprouvent des difficultés à entrer dans les procédures de dénombrements qui relèvent de la multiplication. Pour Arhel, Cabassut, Petit et Roussignol (2005), une introduction ambiguë du signe " $\times$ " n'aide pas les élèves à installer le sens de la multiplication, puis les sens de ce signe, et crée des blocages qui perdurent.

1.5.6. Les parenthèses

Les parenthèses sont des délimitateurs. Elles servent à constituer de nouvelles unités de signification. Par exemple, l'expression $a + b$ est une somme algébrique tandis que l'expression $(a + b)$ est un terme constitué par la somme algébrique de a et de b .

Selon Legrand (1928), si trop de nos élèves de 4^{ème} s'embrouillent dans le maniement des parenthèses, ne leur jetons pas la pierre : elles ont mis un temps considérable avant de s'imposer comme un instrument d'usage courant. Lorsqu'un calcul amenait à grouper des termes pour opérer sur eux en bloc, chacun y allait de sa notation : souvent une barre au-dessus du bloc, des parenthèses à l'occasion, et aussi un point, une virgule ou deux points avant et/ou après le bloc. Ce fut l'exemple de Leibniz, de Bernoulli et d'Euler qui lança définitivement les parenthèses. Mais à la fin du XVIII^e siècle, elles n'avaient pas encore l'exclusivité (figure ci-dessous).

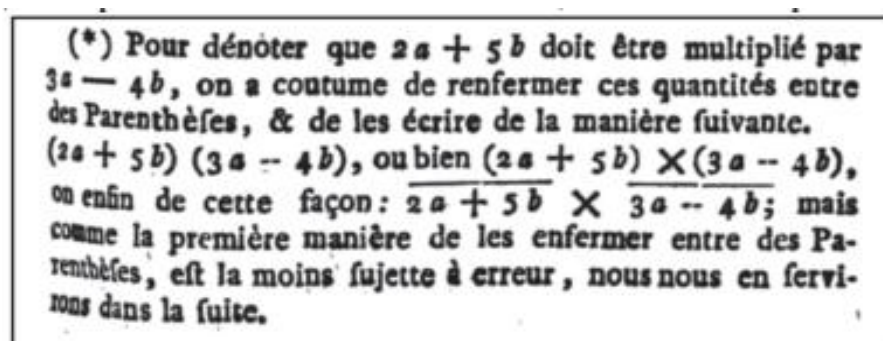


Figure 2: Institution du calcul numérique et littéral (Blaquièr, 1770, p.27)

Conclusion du chapitre 1

L'étude épistémologique du concept de polynôme nous a permis de comprendre l'évolution et la construction du concept de polynôme, la nature épistémologique de ce concept, le traitement des expressions algébriques et la complexité du symbolisme mathématique.

Premièrement, cette étude épistémologique nous a permis de reconnaître le concept de polynôme comme un concept de nature épistémologique.

Deuxièmement, elle nous a permis de comprendre les difficultés d'enseignement ou d'apprentissage du calcul littéral qui sont repérées et d'en proposer des stratégies de dépassement de celles-ci. Le caractère formalisateur des opérations sur les polynômes réside dans le traitement en termes d'axiomatique formelle. Les aspects unificateur et généralisateur que présente la propriété de distributivité permettent d'envisager une organisation curriculaire et une élaboration des manuels fondées par ces spécificités.

Troisièmement, nous allons nous intéresser, dans nos analyses, aux aspects structural et procédural du calcul algébrique. Nous constatons que, dans le traitement des expressions algébriques, l'aspect structural est très souvent négligé. Nous pensons qu'une articulation de ces deux aspects permettra d'optimiser les apprentissages du calcul littéral.

Quatrièmement, nous allons prendre en compte la dimension sémiotique du travail algébrique, dans nos analyses. Nous pensons que dans le calcul littéral, si le lien entre les énoncés des propriétés en langage naturel et mixte n'est pas bien établi, cela créera un fossé difficilement franchissable par les élèves lors des activités de développement et de réduction.

Enfin, cette étude nous a permis de prendre en compte la complexité du symbolisme mathématique, notamment la variation des statuts des objets mathématiques.

Le chapitre qui suit sera consacré à la recension des travaux antérieurs, en passant par la définition des concepts.

Chapitre 2 : Revue de littérature

Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons la recension des recherches qui abordent les difficultés d'apprentissage et d'enseignement de l'algèbre élémentaire, notamment le calcul algébrique. Des travaux antérieurs ont mis en exergue les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage du calcul algébrique.

Dans ce chapitre, nous présenterons, d'abord, la définition des concepts clés. Il s'agit des concepts suivants : obstacle, objectif-obstacle, développement et réduction. Ensuite, nous présenterons une revue de certains travaux auxquels nous nous référons pour notre étude.

2.1. Définition des concepts clés

2.1.1 La notion d'obstacle

Selon *Le Petit Larousse illustré* (2016), un obstacle est ce qui empêche d'avancer, ce qui s'oppose à la marche.

Selon Bachelard (1947, p.13), quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. Aussi dit-il qu'un obstacle, au gré de l'épistémologue, c'est une contre-pensée. Toujours selon Bachelard (1947, p.13), dans la formation d'un esprit scientifique, le premier obstacle, c'est l'expérience première, c'est l'expérience placée avant et au-dessus de la critique qui, elle, est nécessairement un élément intégrant de l'esprit scientifique.

Duroux (1982) propose, non pas une définition, mais des caractéristiques des obstacles :

- i) Un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.
- ii) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré.
- iii) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.

iv) De plus cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse (ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de Piaget). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir.

v) Après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre.

À partir de ces conditions données par Duroux, nous pouvons définir un obstacle comme une connaissance qui produit des réponses adaptées dans un certain contexte fréquemment rencontré, engendre des réponses fausses hors de ce contexte, résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure et continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre, après la prise de conscience de son inexactitude.

Brousseau (1989), en s'inspirant des travaux de Bachelard (1938), met bien en évidence qu'un obstacle peut être une connaissance, une conception et pas nécessairement une difficulté ou seulement un manque de connaissance. Cette connaissance produit alors des réponses adaptées au contexte et éventuellement des réponses fausses dans un contexte différent. De plus cette connaissance semble aussi résister aux contradictions auxquelles elle peut être confrontée et apparaît ainsi plus fiable et plus durable. Brousseau (2003), pour sa part, insiste sur le fait qu'en dehors du domaine de validité, l'apprenant utilise « les connaissances obstacles » sans être conscient. Toujours, selon Brousseau (2003) :

« un obstacle est composé d'un ensemble de connaissances qui s'expliquent, s'appuient, s'épaulent mutuellement, de sorte qu'un obstacle "résiste" à des contradictions ou à des explications partielles. Même après qu'on a repéré, dénoncé et rejeté une erreur due à un obstacle, celle-ci peut réapparaître inopinément, à la faveur d'une tâche un peu complexe ou d'une baisse de vigilance, par l'action des parties de l'obstacle non éradiquées. »

En mathématiques, Brousseau (2000) définit un obstacle comme une connaissance valide dans un certain domaine non vide, mais c'est une connaissance inadéquate, qui empêche la mise en place ou la compréhension d'une autre connaissance, elle, adéquate. C'est cette définition que nous adoptons pour notre travail.

En didactique des mathématiques, un obstacle, selon Brousseau, se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes. Ces erreurs ne sont pas forcément explicitables. Il arrive qu'elles ne disparaissent pas radicalement, d'un seul coup, qu'elles résistent, qu'elles persistent puis resurgissent, se manifestent longtemps après que le sujet ait rejeté le modèle defectueux de son

système cognitif conscient. Pour Brousseau, en mathématiques, l'erreur relève de la variation ou de la différence entre une assertion reconnue comme vraie par rapport à une autre qui n'est pas en phase avec cette dernière. En d'autres termes, c'est le positionnement d'une déclaration par rapport à une autre qui a un caractère normatif. Elle met en place, dans un contexte, deux assertions qui sont données l'une pour vraie de façon formelle et l'autre pour fausse. Celle qui est fausse renvoie à une erreur par rapport à celle reconnue vraie.

Brousseau (1983) distingue trois types d'obstacles :

- **les obstacles épistémologiques** : liés au savoir et à la construction des connaissances.

Afin d'identifier les obstacles épistémologiques, il faut, selon Brousseau :

- trouver des erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour des conceptions,
- trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques, et
- confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique (Brousseau cité par Artigue, 1991, p.259).

Bachelard (1938), durant la première moitié du XXe siècle, évoque le terme d'obstacle épistémologique pour expliciter les difficultés de développement des fonctions psychiques lors de la construction de connaissances scientifiques. Il étudie et identifie d'ailleurs un certain nombre d'obstacles entravant l'apprentissage dans le domaine des sciences physiques que l'on retrouve régulièrement dans d'autres champs didactiques en formation professionnelle comme l'utilisation abusive des images familières, l'usage de l'expérience première ou encore la notion restrictive de connaissance unitaire. Pour Bachelard (1947), la notion d'obstacle épistémologique peut être étudiée dans le développement historique de la pensée scientifique et dans la pratique de l'éducation.

- **les obstacles didactiques** : liés aux connaissances résultant d'une transposition didactique. Ils semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif ;
- **les obstacles ontogéniques** : liés à l'âge, à la neurophysiologie et au développement physiologique de l'apprenant.

Puisque nous ne nous intéressons qu'aux obstacles épistémologiques et didactiques, dans notre travail, nous donnons quelques exemples de ces deux types d'obstacles.

Exemple d'obstacle épistémologique : la représentation réductrice de l'égalité comme une annonce de résultat dans le calcul numérique amène les élèves à réduire le résultat à un seul terme, dans la réduction d'une somme algébrique.

Exemple d'obstacle didactique : $(2x)^2 = 2x^2$ ou $(2x)^2 = 4x$. La représentation que les élèves ont du calcul de puissance à base numérique peut amener ces derniers à faire de telles productions.

2.1.2. Le concept d'objectif-obstacle

Le concept d'objectif-obstacle est proposé par Martinand (1984). Pour Martinand (1986), ce concept, s'efforce, comme son nom l'indique, de faire interagir des travaux et réflexions, souvent divergents, qui ont été conduits, les uns sur les objectifs pédagogiques, les autres sur les représentations des élèves, sans jamais se citer mutuellement.

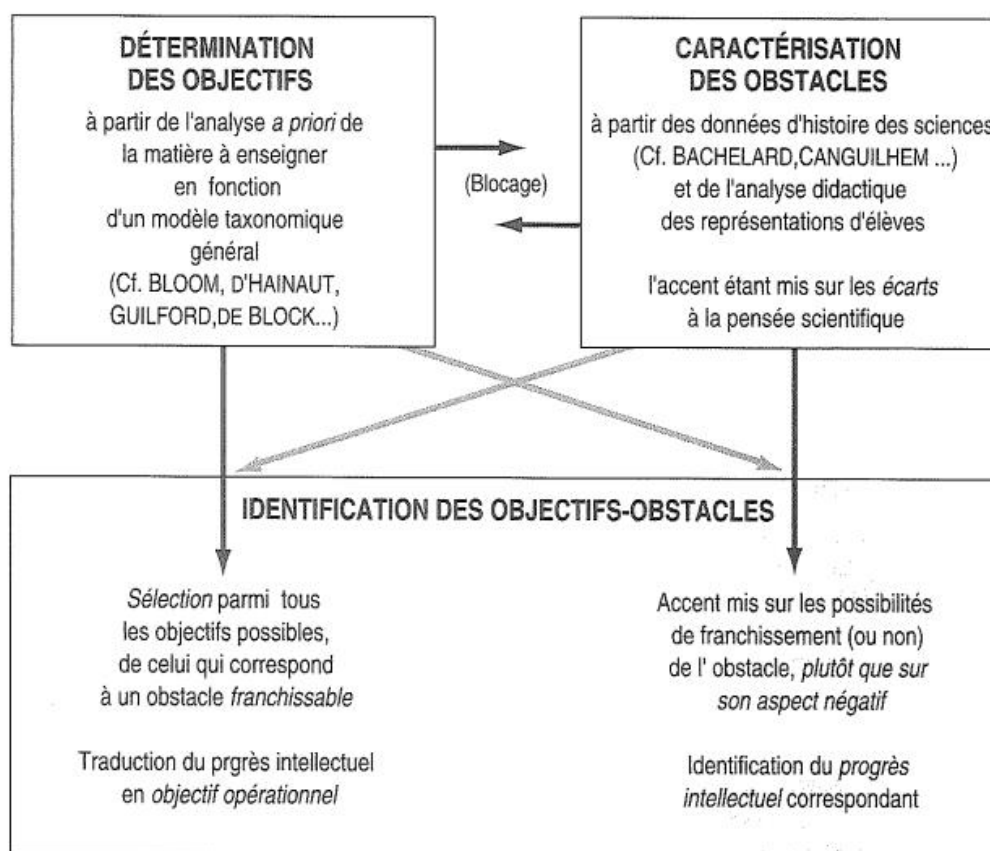
Selon Martinand (1986), l'objectif-obstacle est un terme utilisé pour répondre à la question du « quoi » enseigner face aux obstacles conceptuels mis en évidence dans la construction des connaissances disciplinaires.

Pour Astolfi et al. (2008, p.128), le concept d'objectif obstacle se situe dans une conception constructiviste de l'apprentissage, par la prise en compte des structures cognitives des apprenants, en accordant un statut positif à l'erreur, combinée avec une analyse de la structure des concepts enseignés, et permettant de caractériser autrement les objectifs, au service d'une pédagogie de réussite. Dans la formation des enseignants, l'introduction du concept d'objectif-obstacle implique donc un changement de point de vue sur les erreurs des élèves, pour concevoir les obstacles comme des points d'appui dans la fabrication de situations didactiques.

« Martinand insiste sur le fait que si les obstacles ont une signification profonde par rapport aux apprentissages à réussir, ce sont bien eux qu'il faut mettre au centre pour définir les véritables objectifs. Une chose est de définir les objectifs à partir de la seule analyse des programmes et contenus (ce que fait la pédagogie par objectifs), autre chose est de faire du franchissement d'un obstacle l'objectif vraiment recherché. Dans la mesure, dit-il, où ces obstacles ont une signification épistémologique profonde, ils fournissent la clé pour formuler les buts les plus essentiels de l'éducation. Autrement dit, il s'agit d'exprimer les objectifs en termes d'obstacles franchissables, car parmi la diversité des objectifs possibles, les objectifs intéressants sont les objectifs obstacles. Il lui paraît ainsi légitime de faire de leur franchissement les vrais objectifs conceptuels.

La schématisation proposée ci-dessous résume cette mise en relation dialectique des objectifs et des obstacles et, surtout, cette façon de faire des obstacles repérés comme franchissable un critère essentiel de sélection parmi la diversité des objectifs possibles. Si l'on considère l'obstacle comme ce qui empêche l'atteinte de l'objectif visé, alors on reste « bloqué ». Comment le champion de saut en hauteur franchirait-il le fil, s'il se le représentait comme ce qui lui barre le passage vers l'autre côté ? Si au contraire, on examine ceux qui paraissent franchissables, pour

qu'on organise effectivement l'apprentissage autour de leur dépassement, on leur confère une fonction beaucoup plus dynamique et stimulante, qui renouvelle notre façon de voir les objectifs d'enseignement. » (Astolfi et al., 2008, p.125).



Source : Astolfi et al. (2008, p.126)

La schématisation proposée par Astolfi et al. (2008, p.126) montre que pour identifier des objectifs-obstacles, il faut déterminer des objectifs à partir de l'analyse *a priori* de la matière à enseigner et caractériser des obstacles à partir des données d'histoire des sciences et de l'analyse didactique des représentations d'élèves.

2.1.3. Polynômes

Dans le cadre notre étude, il s'agit des polynômes à une variables ou des polynômes à une indéterminée.

Définition 1

Un polynôme à coefficient dans $\mathbb{k}$, $\mathbb{k}$ désignant un corps quelconque, est une expression de la forme :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ étant des éléments de $\mathbb{k}$.

Remarque : En algèbre, le terme de polynôme formel, ou simplement polynôme, est le nom générique donné aux éléments d'une structure construite à partir d'un ensemble de nombres. Par exemple, $P: X \mapsto X^2 - 3X + 2$. La lettre X ne désigne plus un élément variant dans $\mathbb{R}$ mais sert seulement à repérer les coefficients du polynôme, on dit que X est une indéterminée.

Définition 2

Une fonction $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynômiale s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (*)$$

Les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les coefficients de la fonction polynômiale P .

Exemple : Plusieurs fonctions déjà rencontrées sont des fonctions polynômiales :

- la fonction $x \mapsto 0$ appelée la fonction nulle ;
- les fonctions constantes ;
- les fonctions affines ;
- les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$;
- la fonction $x \mapsto x^3$.

Au collège, la notion de polynôme n'est pas définie comme nous l'avons fait dans la définition 1 ; le polynôme est défini à partir de monômes. Un monôme de la variable x est une expression de la forme ax^n où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. a est appelé le coefficient et n est appelé le degré du monôme.

Dans le manuel de Mathématiques de 4^e de la collection Bréal, nous trouvons la définition suivante : un polynôme est un monôme ou une somme de monômes. Un polynôme réduit est un polynôme dont les monômes de la forme ax^n où $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ sont non semblables.

Dans le manuel de Mathématiques de 3^e de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques, on trouve la définition suivante : un polynôme est une somme algébrique de monômes.

Dans le cadre de notre travail, la définition que nous retenons pour le concept de polynôme est celle selon laquelle un polynôme est un monôme ou une somme de monômes.

2.1.4. Les concepts de développement et de réduction

2.1.4.1. Développer une expression algébrique

Selon Deledicq et Missenard (2004), développer une expression, c'est l'écrire comme une somme.

Pour le manuel de mathématiques de la classe de 4^{ème} de la collection *Bréal* (2007), développer une expression algébrique consiste à transformer un produit de facteurs en une somme de monômes. Dans le cadre de notre étude, c'est cette définition que nous adoptons.

Le développement d'une expression mobilise la distributivité de la multiplication. C'est cette règle qui permet de transformer un produit de sommes algébriques en une somme algébrique de termes.

Ainsi, on a les règles suivantes :

- $a(b + c) = ab + ac$ et $(b + c)a = ab + ac$. Ici, un premier facteur est un monôme et un autre, une somme algébrique de deux termes. Cette règle est la principale.
- $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = (ac + ad) + (bc + bd)$. Ici, les deux facteurs sont des sommes algébriques.

Exemples :

- $2x(x - 1) = 2x^2 - 2x$
- $(2 + x)(x - 1) = 2x - 2 + x^2 - x$

Pour ce cas, par exemple, on peut appliquer la distributivité :

$(2 + x)(x - 1) = (2 + x)x - (2 + x) = x(2 + x) - (2 + x)$ avec application de la commutativité de la multiplication, puis écrire $x(2 + x) - (2 + x) = 2x + x^2 - 2 - x = x^2 + x - 2$

- $5xy(x^2 + 4y - 2) = 5x^2y + 20xy^2 - 10xy$.

2.1.4.2. Réduire une expression algébrique

Dans le manuel de Mathématiques de 4^e de la *Collection Inter-Africaine de Mathématiques*, on trouve la définition suivante : réduire une somme, c'est la transformer en une somme ayant moins de termes. C'est cette définition que nous retenons pour notre travail.

Exemples :

- $x + 4 + 6x - 8 = x(1 + 6) + 4 - 8$
 $= 7x - 4$
- $5x^2 + 3x^2 - x + 2x - 2 = x^2(5 + 3) + x(-1 + 2) - 2$
 $= 7x^2 + x - 2$

2.2. Revue de littérature

2.2.1. Le passage du calcul arithmétique au calcul algébrique

2.2.1.1. Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre ? (Grugeon-Allys et Pilet, 2017)

Les résultats que nous présentons proviennent de l'article intitulé

« *Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre ?* »

L'article est publié en 2017 dans la revue *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, pp.106-130.

La problématique soulevée par cet article porte sur l'identification des types de connaissances et de raisonnements arithmétiques pouvant faciliter ou pas l'entrée dans l'algèbre.

L'intérêt de cet article pour notre travail vient de ce que les auteurs y proposent des pistes de négociation pour amener les élèves à dépasser les obstacles qui émergent au cours des activités de développement et de réduction des polynômes.

Les auteurs articulent leur travail autour de quatre points principaux :

- les points de vue sur la transition entre l'arithmétique et l'algèbre ;
- les critères pour l'analyse de l'activité arithmétique avant l'entrée dans l'algèbre ;
- les praxéologies pour analyser l'activité arithmétique des élèves avant l'entrée dans l'algèbre ;
- des évaluations avant l'entrée dans l'algèbre en début de 5^e.

Dans le cadre de notre étude, seuls les deux premiers points nous intéressent.

2.2.1.1.1. Continuité ou discontinuité : deux points de vue sur la transition entre l'arithmétique et l'algèbre

Les auteurs ont relevé deux points de vue relatifs aux travaux sur la transition entre l'arithmétique et l'algèbre : l'algèbre se construit en rupture avec l'arithmétique, et la transition doit être négociée dès l'école primaire.

Pour ce qui est du premier point de vue, certains travaux soutiennent une discontinuité entre l'arithmétique et l'algèbre (Grugeon, 1997). Vergnaud (1988) parle de double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. La première rupture concerne le raisonnement pour résoudre les problèmes. Nous partageons ce point de vue, car le

raisonnement arithmétique porte sur des nombres que l'élève maîtrise alors que le raisonnement algébrique est abstrait. Le raisonnement algébrique participe de la modélisation qui est une compétence à travailler en mathématiques. Dans les activités de développement et de réduction, les caractères procédural et structural des expressions doivent être pris en compte. Cela peut se constater à travers le programme de calcul. La seconde rupture concerne l'évolution des statuts des objets. C'est le cas du statut du signe d'égalité comme annonce du résultat et comme équivalence. Les auteurs relèvent qu'en arithmétique, le signe d'égalité est majoritairement utilisé comme annonce de résultat pour effectuer les calculs (souvent de gauche à droite), alors que le traitement des expressions algébriques repose sur le statut d'équivalence de l'égalité. Les auteurs notent que de plus, contrairement aux habitudes de calcul en arithmétique sur les expressions numériques, une expression algébrique peut conserver un signe opératoire après sa réduction. C'est le cas de l'expression $x + 1$ obtenue après réduction d'une autre expression. Pour les auteurs, cet obstacle est identifié par de nombreux chercheurs comme le dilemme *process-product* (Davis, 1975 dans Kieran, 1992) ou *l'acceptance of lack of closure* (Collis, 1974 in Kieran, 1992).

Nous ne partageons pas entièrement l'idée selon laquelle le signe d'égalité est seulement utilisé pour annoncer un résultat, car dans le calcul numérique, il y a des situations où l'égalité est utilisée comme équivalence. Au primaire tout comme en début du secondaire, l'égalité est aussi utilisée pour communiquer la décomposition d'un nombre (par exemple $400 = 4 \times 100$) et pour signifier que deux écritures représentent un même nombre (par exemple $1 + \frac{2}{5} = 2 - \frac{3}{5}$). L'utilisation de l'égalité à ces deux fins peut être une piste de négociation pour passer de l'arithmétique à l'algèbre.

Nous partageons le point de vue des auteurs sur le statut du signe " $+$ ", car dans le calcul arithmétique, le résultat d'une opération, notamment l'addition, est un nombre alors que dans le calcul algébrique, le résultat du développement ou de la réduction d'une expression peut être un monôme ou une somme des monômes non semblables. Ainsi, la considération du signe " $+$ " comme indication d'une opération à effectuer pose effectivement des difficultés aux collégiens dans les activités de réduction des polynômes. Nous pensons que si le signe " $+$ " est considéré comme « coordination »² dans le cas des monômes non semblables, cela pourrait aider à mieux appréhender ou négocier ce changement de statut. Dans le cadre de nos expérimentations, nous allons mettre en exergue ce statut.

² Considérer le signe " $+$ " comme « coordination », c'est le considérer comme opératoire non évalué, par exemple dans l'expression $x + 2$.

Pour ce qui est du point de vue selon lequel la transition doit être négociée dès l'école primaire, les auteurs parlent du courant Early Algebra³ qui permet le développement de la pensée algébrique. Radford (2014) définit la pensée algébrique en situation de résolution de problèmes à partir de trois caractéristiques⁴, résumées ainsi par Kieran et al. (2016):

- (a) indeterminacy : unknown numbers are involved in the given problem,
 - (b) denotation : the indeterminate numbers are named or symbolized in various ways such as with gestures, words, alphanumeric signs, or some combination of these, and
 - (c) analyticity : the indeterminate quantities are treated as if they were known numbers
- (Kieran et al., 2016, p. 5).

Ces caractéristiques de la pensée algébrique sont aussi mobilisées dans les activités de développement et de réduction. Dans ces activités, l'analyticité qui repose sur la déduction des résultats à partir des propriétés en s'appuyant sur le raisonnement arithmétique est très utile car certaines propriétés arithmétiques peuvent être généralisées au calcul algébrique, d'autres ne peuvent pas l'être. Pour ce qui est du courant Early Algebra selon lequel la transition entre l'arithmétique et l'algèbre doit être négociée dès l'école primaire, nous nous inscrivons dans cette logique, mais nous pensons que certains statuts des objets mathématiques ne doivent pas être introduits à l'école primaire, compte tenu du développement cognitif de l'élève qui ne lui permet pas de manipuler tous les différents statuts, à l'exemple des différents statuts de la lettre. Les statuts à l'école primaire sont variables mais non explicités. Par exemple " J'ai deux carrés et je dois en calculer la surface" : $S=C \times C$. Ici, la lettre C a le statut de marque place et de variable.

³ Le courant Early Algebra est né dans les années 2000 avec une volonté de rendre accessible à de jeunes élèves (6 à 12 ans) certains aspects de l'activité algébrique pour développer ce que les chercheurs de ce courant désignent sous le nom de « pensée algébrique » (Kieran et al., 2016).

⁴ a) indeterminacy : l'indétermination renvoie aux nombres inconnus qui sont impliqués dans le problème donné
b)denotation: la dénotation renvoie aux nombres qui sont nommés ou symbolisés de diverses manières
c) analyticity: l'analyticité repose sur la déduction des résultats à partir des propriétés

2.2.1.1.2. Critères pour l'analyse de l'activité arithmétique avant l'entrée dans l'algèbre

À la suite d'une expérimentation, les auteurs ont dégagé les critères permettant l'analyse des erreurs :

- le statut de l'égalité. Les auteurs mentionnent que le signe d'égalité peut désigner soit l'annonce d'un résultat, soit une relation d'équivalence. L'égalité peut aussi indiquer les étapes d'un programme de calcul et peut conduire à des écritures incorrectes, à l'exemple de l'écriture $50-24=26+12=38$ qui ne respecte pas la symétrie et la transitivité de l'égalité ;
- la dénotation des expressions et leur réécriture à partir des propriétés des opérations. Selon les auteurs, les expressions numériques $47+14$, $47+3+11$, $50+11$ mettent en jeu des signes différents, mais réfèrent à un même nombre (61), la même dénotation. Ainsi, nous pensons que la dénotation peut aider les élèves à contrôler leurs résultats. En effet, en faisant des instanciations des lettres de variables, les élèves peuvent se rendre compte de la fausseté de leur réponse du fait qu'elles n'ont pas la même valeur. Ainsi, celui qui écrit $2x - x + 1 + 3 = x + 4 = 4x$, par instanciation de x par 2 obtient d'un côté 6 et de l'autre 8 ;
- les caractères procédural et structural d'une expression. Les auteurs mettent en exergue les caractères procédural et structural d'une expression algébrique. Selon eux, les notions mathématiques abstraites peuvent être conçues de deux façons différentes : comme des processus (procédural) ou comme des objets (structural), ces deux caractères cohabitent lors de l'activité mathématique. Par exemple, en ce qui concerne le calcul de l'expression numérique $2 \times 4 + 5$, deux représentations du calcul sont envisageables, l'une qui privilégie le caractère structural de l'expression $2 \times 4 + 5 = 8 + 5 = 13$ appuyé sur les priorités opératoires, l'autre le caractère procédural $2 \times 4 = 8$; $8 + 5 = 13$.

Conclusion

Les auteurs ont mis l'accent sur les enjeux du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Pour eux, l'algèbre se construit en rupture avec l'arithmétique, et la transition doit être négociée dès l'école primaire. Ils nous fournissent des pistes pour l'élaboration d'un dispositif de franchissement des obstacles. En effet, le travail sur le développement et la réduction des polynômes doit prendre en compte :

- la dénotation des écritures des polynômes ;
- le statut de l'égalité qui peut être variable mais dans des exercices de transformation ;
- la cohabitation des caractères procédural et structural des expressions algébriques. Les élèves doivent pouvoir identifier la structure des expressions et de plus, connaître les règles et les propriétés de calcul.

2.2.1.2. Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien (Hassayoune, 2021)

Les résultats que nous présentons proviennent de l'article intitulé « *Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien* ».

L'article est publié en 2021 dans la *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, p.5-50.

La problématique soulevée par l'auteure porte sur l'introduction de l'algèbre comme arithmétique généralisée. En effet, l'auteure relève que plusieurs professeurs du début de l'enseignement secondaire tunisien se focalisent sur le calcul algébrique formel hors contexte et ne se préoccupent pas davantage du développement du raisonnement algébrique, malgré l'adoption par le système éducatif tunisien d'une démarche didactique de résolution de problèmes.

L'objet de cet article est de caractériser l'activité algébrique à la fois sur les plans épistémologique et conceptuel, et de concevoir et mettre en œuvre des situations didactiques susceptibles de favoriser son développement à l'entrée au lycée tunisien.

Notre intérêt pour cet article vient du fait que l'auteure propose une alternative didactique à ce qui est ordinairement proposé dans le manuel scolaire et dans les cours des enseignants en vue de favoriser un apprentissage spécifique pour une meilleure transition de l'arithmétique à l'algèbre.

L'article comporte deux parties : la première partie est consacrée à l'examen de ce que les didacticiens de l'algèbre entendent par « activité algébrique » en vue d'en préciser les

conditions, les contextes et les supports de développement chez les élèves du début de l'enseignement secondaire tunisien (15-16 ans). La seconde partie propose une alternative didactique à ce qui est ordinairement proposé dans le manuel scolaire et dans les cours des enseignants permettant de favoriser un apprentissage de l'algèbre porteur de sens et de raison d'être pour les objets mathématiques manipulés. Pour notre travail, nous ne nous intéresserons qu'à la rupture épistémologique entre l'activité arithmétique et l'activité algébrique, et à certains résultats issus des expérimentations de l'auteure.

2.2.1.2.1. La rupture entre l'activité arithmétique et l'activité algébrique

Selon l'auteure, malgré la ressemblance des signes opératoires et des domaines de fonctionnement des deux processus arithmétique et algébrique, ceux-ci sont en réalité totalement différents en termes d'outils et de raisonnements mathématiques.

L'auteure partage le point de vue de Marchand et Bednarz (2000) selon lequel, pour une meilleure transition de l'arithmétique à l'algèbre, les élèves ont besoin d'un apprentissage spécifique qui les amène progressivement à acquérir les nouvelles aptitudes méthodologiques et techniques propres à l'activité algébrique. En effet, pour Marchand et Bednarz (2000), même dans le cas où les élèves sont aptes à résoudre des problèmes arithmétiques, ils ont tendance à rencontrer des difficultés inhérentes au mode de traitement algébrique : analyse, choix des inconnues, symbolisation, modélisation algébrique des situations, etc. Pour l'auteure, cet état de fait est dû principalement à l'introduction tardive du raisonnement algébrique dans le cursus scolaire tunisien : la modélisation algébrique des situations et la résolution de problèmes par la voie de leur mise en équations ne sont abordées qu'à la fin de la 9^e année de l'enseignement de base (14-15 ans).

Nous partageons les points de vue de ces auteurs selon lesquels pour une meilleure transition de l'arithmétique à l'algèbre, les élèves ont besoin d'un apprentissage spécifique. Dans cette perspective, nous pensons que dans les activités de développement et de réduction des polynômes, un dispositif d'enseignement prenant en compte les aspects sémantiques et syntaxiques dans le traitement des polynômes pourrait aider à franchir les obstacles. Quant à l'introduction tardive du raisonnement algébrique dans le cursus scolaire tunisien évoqué par l'auteure, c'est le même constat également au Tchad où le calcul littéral est introduit pour la première fois en classe de 4^{ème}. Cependant, nous pensons que si la transition entre l'arithmétique et l'algèbre est bien négociée, les obstacles pourront être franchis, considérant que certains objets mathématiques sont abordés à l'école élémentaire mais avec un autre statut.

Pour aider les élèves à surmonter l'obstacle épistémologique engendré par la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre, plusieurs auteurs (Kieran, 1996, 2004 ; Vergnaud, 1988) proposent de les amener à :

- se focaliser sur la nature et les propriétés des relations et pas simplement sur les calculs numériques ;
- saisir le sens des nombres et des opérations ;
- donner de l'importance à la modélisation algébrique des problèmes en plus de leurs solutions ;
- distinguer les différents statuts des lettres, selon les contextes et les usages : inconnues, variables, indéterminées ou paramètres ;
- accepter des expressions littérales comme réponses à certains problèmes ;
- considérer le signe « = » en tant que signe annonçant une équivalence entre deux expressions.

2.2.1.2.2. Expérimentations

En s'inscrivant dans l'optique didactique de résolution de problèmes et en tenant compte des résultats de ses investigations épistémologiques et conceptuelles, l'auteure a élaboré un « Document-ressource » constitué d'un corpus de dix situations didactiques en vue de le mettre à la disposition des enseignants. L'analyse des productions écrites des élèves (réalisées à la maison) issues du corpus montre que la majorité d'entre eux (80 %) se sont engagés dans la résolution du problème, mais rares sont ceux (10 %) qui ont efficacement traité le problème proposé. Certains élèves (20 %) procèdent par essais et erreurs, en considérant des cas particuliers ou en donnant une valeur numérique au paramètre.

La procédure utilisée par les élèves (20 %) nous intéresse particulièrement, car elle peut aider à vérifier si la forme développée et réduite d'un polynôme est correcte en donnant des valeurs numériques aux lettres considérées. Par exemple, pour vérifier si l'égalité $4x - 3x + 3 + 1 = x + 4$ est correcte, on peut donner des valeurs à x dans les deux membres.

Conclusion

Les résultats que nous avons présentés problématisent la difficile négociation de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. Selon l'auteure, dans la résolution des problèmes, certains élèves procèdent par essais et erreurs en considérant des cas particuliers ou en donnant une valeur numérique au paramètre.

Nous allons nous servir de cet article pour négocier l'entrée dans l'algèbre au collège à travers un dispositif focalisé sur :

- la nature et les propriétés des relations (nombre, lettre, objet) ;
- le sens des nombres et des opérations (arithmétique, algébrique) ;
- les différents statuts des lettres (étiquette, variable, nombre généralisée,...) ;
- les différents statuts de l'égalité (égalité, équivalence).

2.2.1.3. Le statut de la lettre (Equipe de recherche UMons, 2019)

L'article que nous présentons est intitulé

« *Le statut de la lettre* »

Il a été publié par l'Université de Mons et repéré à

<file:///D:/Ma%20th%C3%A8se/Documents%20types%20par%20chapitre/Etude%20%C3%A9pist%C3%A9mologique/fiche-statutlettre-1.pdf>.

La problématique soulevée par ces chercheurs porte sur les enjeux de la variabilité du statut de la lettre selon les situations.

Les auteurs de cet article partent de la présentation des différents statuts de la lettre aux obstacles liés à l'introduction de la lettre pour proposer des pistes pour surmonter ces derniers.

Nous faisons l'hypothèse que la variabilité du statut de la lettre peut constituer un obstacle dans les activités de développement et de réduction.

2.2.1.3.1. Les différents statuts de la lettre

L'équipe de recherche UMons (2019) présente la variabilité du statut de la lettre selon les ordres d'enseignement. Pour cette équipe, à l'école élémentaire, la lettre possède le statut d'étiquette. En effet, elle est utilisée pour symboliser des unités (h, m...), pour désigner un objet précis (un point A, le nombre π ...) ou encore pour désigner une grandeur ou une mesure dans une formule. À partir de l'enseignement secondaire, la lettre acquiert de nouveaux statuts restant souvent implicites pour l'élève et qui varient en fonction de la tâche qui lui sera demandée. Au sein de certaines activités proposées, les lettres peuvent même combiner plusieurs statuts :

- le statut de variable quand elle est utilisée pour produire une formule ;
- le statut d'inconnue quand elle est utilisée pour résoudre un problème ;
- le statut d'indéterminée lorsqu'elle revêt un caractère universel (Exemple : écriture d'identités telles que « $a + (b + c) = (a + b) + c$ ») ;
- le statut de paramètre, bien que ce soit plus rare au premier degré, quand elle représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres ayant d'autres statuts (Exemple : Lorsqu'on annonce les formes d'équations du premier degré telles que « $ax + b = c$ »).

Notons que dans les activités de développement et de réduction, la lettre a un statut d'indéterminée ou représente n'importe quel nombre. Ce changement de statut doit être pris en compte.

2.2.1.3.2. Les obstacles liés à l'introduction de la lettre

Les auteurs ont relevé quelques obstacles liés à l'introduction de la lettre à savoir :

- donner le statut adapté à la lettre et le dépasser. Il s'agit d'amener les élèves à dépasser le statut de la lettre (lettre-étiquette) accordé à l'école primaire qui est problématique pour l'entrée dans l'algèbre (Hinault & Chenevotot (2012), cités par l'équipe de recherche UMonS (2019)). Les auteurs évoquent une similarité des statuts de la lettre présentés ci-dessus à ceux identifiés par Kieran (1992, cité par Pilet, 2012) :

La lettre évaluée	La lettre est assimilée à une valeur numérique dès le début
La lettre non prise en considération	La lettre est ignorée ou aucun sens n'est donné à sa présence
La lettre représentant un objet concret	La lettre est considérée comme l'abréviation d'un objet concret
La lettre représentant une inconnue	La lettre est considérée comme un nombre particulier mais inconnu
La lettre représentant un nombre généralisé	La lettre est considérée comme un représentant de plusieurs valeurs
La lettre représentant une variable	La lettre est considérée comme un représentant d'un ensemble de valeurs non spécifiées et il existe une relation systématique entre deux tels ensembles de valeurs.

Figure 4 : Les statuts de la lettre (Kieran, 1992)

- passer d'une démarche arithmétique à une démarche algébrique. Les auteurs justifient cela, d'une part, par la variation du sens du raisonnement et d'autre part, par le fait que la structure des expressions algébriques est différente de celles arithmétiques.
- considérer une expression littérale en tant que nombre. En effet, selon les auteurs, les expressions algébriques sont utilisées pour traduire un programme de calcul, mais aussi pour décrire des nombres. Ils justifient cela par les aspects « procédural » qui consiste à envisager l'expression comme un ensemble d'opérations à réaliser sur un nombre et « structural » qui considère l'expression comme le moyen de caractériser la forme générale d'un nombre.
- considérer l'algèbre en tant qu'outil. Pour les auteurs, si l'enseignement de l'algèbre est introduit au secondaire, c'est notamment pour apprendre aux élèves à résoudre des problèmes, à généraliser ou encore à démontrer.

Nous faisons l'hypothèse que ces obstacles évoqués par les auteurs peuvent être identifiés également dans les activités de développement et de réduction des polynômes.

Conclusion

Les auteurs de cet article ont présenté les différents statuts de la lettre et identifié quelques obstacles liés à l'introduction de l'algèbre. Ils nous fournissent des pistes pour l'élaboration du dispositif de franchissement. En effet, le travail sur le développement et la réduction des polynômes doit prendre en compte :

- le statut donné à la lettre ;
- les aspects procédural et structural des expressions algébriques.

2.2.1.4. Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire (Tremblay, Polotskaia et Passaro, 2021)

L'article que nous présentons est intitulé

« Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire ».

Cet article a été publié dans le volume 2 de la *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, p.78-109.

La problématique de cet article vise à soulever des questions sur l’usage des lettres à la fois comme outil mathématique et comme outil d’apprentissage.

Dans cet article, les auteurs cherchent à mieux comprendre certains enjeux de l’usage du symbolisme littéral dans l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques au primaire. Selon ces auteurs, la question de l’utilisation de lettres lors de l’apprentissage des mathématiques au primaire est controversée dans la littérature.

Notre intérêt pour cet article vient du fait qu’il aborde les différents statuts de la lettre en mathématiques. Le changement du statut de la lettre selon le contexte ou selon l’activité mathématique cause, parfois, des difficultés aux élèves.

Les auteurs articulent leur article autour de trois points à savoir :

- la lettre en mathématiques : usages, interprétations et dénominations ;
- la pensée algébrique avant la lettre ;
- la lettre comme outil de développement de la pensée algébrique.

Pour notre étude, nous ne nous intéresserons qu’au premier point.

2.2.1.4.1. La lettre en mathématiques : usages, interprétations et dénominations

Les auteurs relèvent les différents statuts de la lettre en mathématiques.

2.2.1.4.1.1. Différents usages de la lettre en mathématiques au primaire et au secondaire

Selon les auteurs, lors de l’introduction de l’algèbre au secondaire, on a tendance à penser que les élèves n’ont jamais utilisé des lettres en mathématiques. Et pourtant, en arithmétique, les lettres u , d et c sont utilisées pour désigner respectivement les unités, les dizaines et les centaines dans un nombre exprimé en base dix. Dans ce contexte, une expression comme $2c + 3d + 5u$ pourra être utilisée comme décomposition du nombre 235, et les lettres peuvent être vues comme des étiquettes qui remplacent les mots unité, dizaine et centaine ou comme des constantes ($u = 1$, $d = 10$ et $c = 100$). Les auteurs se demandent, dans le contexte québécois où l’enseignement de l’algèbre n’est pas au programme du primaire, quel sens les enseignants et les élèves attribuent aux lettres utilisées.

D’après les expériences et observations des matériels didactiques faites par les auteurs, le contexte d’enseignement au primaire au Québec peut souvent induire une interprétation de la lettre comme une étiquette remplaçant un mot au détriment d’une

interprétation de la lettre comme représentation d'une quantité ou d'un nombre. Par ailleurs, au secondaire, la lettre est utilisée en mathématiques à différents usages, elle ne représente pas nécessairement une quantité indéterminée. Par exemple, on utilise les lettres pour désigner les unités de mesure, comme au primaire, et on les utilise pour représenter des constantes absolues comme π ou e . À cela s'ajoute l'usage algébrique de la lettre dans différents contextes, et donc, en association avec différents concepts et interprétations.

Nous partageons ce point de vue des auteurs et pensons que l'introduction de l'algèbre, notamment les activités de développement et de réduction des polynômes en classe de 4^{ème}, en contexte tchadien, devrait s'appuyer sur les représentations que les élèves ont de la lettre, compte tenu de leurs acquis du primaire à la classe de 5^{ème}.

2.2.1.4.1.2. Les différents rôles de la lettre en algèbre

Les auteurs soulignent que la lettre n'est pas utilisée de la même manière lorsqu'on généralise une propriété, une relation ou une situation de régularité, lorsqu'on prouve un énoncé ou lorsqu'on modélise une situation de variation. D'un côté, la lettre désignera souvent une quantité, un nombre et non un objet ou une qualité. Cette quantité ou ce nombre sera aussi forcément indéterminé dans la situation donnée. Ainsi, si on sait que $a = 3$ et qu'on doit calculer $2a + 7$, on n'est pas face à une tâche nécessitant une pensée algébrique puisque a désigne un nombre connu. D'un autre côté, la signification accordée à la lettre sera différente selon l'activité algébrique mise en œuvre. Par exemple, dans la généralisation de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition $a(b + c) = ab + ac$, les lettres représentent n'importe quel nombre, on peut dire qu'elles ont le sens de nombres généralisés (Philipp, 1992, cité par Tremblay, Polotskaia et Passaro (2021)). Alors que dans la résolution de l'équation $2x + 3 = x - 12$, la lettre x représente un nombre précis que l'on cherche à déterminer ; on peut dire que x est une inconnue.

2.2.1.4.2. Difficultés avec l'interprétation et l'usage de la lettre

Les auteurs ont relevé trois sources de difficulté en lien avec l'usage ou l'interprétation de la lettre :

- 1) le fait que la lettre puisse représenter autre chose qu'un nombre ou une quantité (exemple : abréviation de mots, objet, constante) ;
- 2) l'usage abusif du mot « variable » qui ne permet pas de différencier les rôles des quantités derrière les lettres dans une situation ;

- 3) les cas particuliers de résolution d'équations dans lesquels il y a une infinité de solutions ou pas de solutions.

Pour les auteurs, les sources de difficulté qu'ils rappellent viennent appuyer le constat de nombreux chercheurs : apprendre à utiliser le symbolisme algébrique adéquatement implique d'une part, de penser algébriquement dans une variété de contextes d'usage de l'algèbre, et d'autre part, d'interpréter correctement la lettre dans chacun de ces contextes.

Nous partageons les sources de difficulté liée à l'usage ou à l'interprétation de la lettre. Toutefois, nous allons chercher à comprendre si le passage des autres statuts de la lettre à celui de la lettre comme un nombre quelconque, dans les activités de développement, peut constituer un obstacle épistémologique.

Conclusion

Les auteurs de cet article ont mis en exergue les enjeux d'apprentissage et d'enseignement du symbolisme littéral. Selon eux, le symbolisme littéral prend un sens différent selon les contextes et les usages algébriques associés. La variété de contextes, les multiples sens et interprétations, les ambiguïtés de dénomination de la lettre, etc. révèlent la complexité de l'apprentissage.

Pour notre travail, nous allons nous servir des différents statuts de la lettre pour analyser les productions des élèves.

2.2.2. Erreurs des élèves et obstacles

2.2.2.1. Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire (Booth et Chelsea, 1984)

L'article que nous présentons est intitulé

« *Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire* »

L'article a été publié en 1984 dans la revue *petit x*, p.5-17.

La problématique soulevée par les auteurs porte sur les causes des erreurs des élèves en algèbre élémentaire.

Cet article décrit les résultats des travaux réalisés dans le cadre du projet Stratégies et Erreurs dans les Mathématiques Secondaires (SESM) en étudiant les erreurs courantes en algèbre élémentaire relevées par ledit projet. Il décrit, notamment deux types d'erreurs.

Notre intérêt pour cet article est que les élèves éprouvent des difficultés à interpréter les lettres, à comprendre les notations et les conventions dans les activités de développement et de réduction des polynômes.

Les auteurs articulent leur article autour de deux points :

- la signification des lettres ;
- la compréhension des notations et des conventions.

2.2.2.1.1. La signification des lettres

Les auteurs ont noté deux principales difficultés au sujet de la signification des lettres. Premièrement, les élèves ont du mal à savoir si les lettres représentent des nombres ou des objets. Deuxièmement, lorsqu'ils pensent qu'il s'agit bien d'un nombre, ils croient généralement qu'il a une valeur définie (comme dans $x + 3 = 5$) plutôt qu'un ensemble de valeurs possibles (comme dans $x + y = y + x$).

Pour ce qui est de la lettre en tant qu'objet, selon les auteurs, certains enfants interprètent « $6a$ » comme « six « a » » (qui n'est pas la même chose que 6 fois a) ou «6 ananas». Lorsqu'ils ont à répondre à des questions telles que « simplifier $3x + ay + 2x$ », les enfants, la plupart du temps, ne se préoccupent pas de la signification des lettres. Une grande partie d'élèves interrogés a utilisé la règle suivante, même quand ils étaient capables de dire que les lettres représentent des nombres. L'utilisation de $5y$ pour représenter 5 yachts ou de $6a$ pour 6 ananas a été assez générale. Il est tentant, selon les auteurs, de suggérer qu'une des difficultés que les enfants ont avec la signification de $\times$ est qu'ils ont du mal à trouver beaucoup de mots commençant par « $\times$ » ...

Quant à la signification selon laquelle la lettre ne représente qu'une seule valeur, les auteurs ont montré que certains élèves possèdent leurs propres règles pour décider quel est le chiffre qu'une lettre représente.

Selon ces auteurs, après les interviews avec les élèves, il apparaît clairement que la plupart des idées que les élèves ont au sujet des lettres ne sont pas dépourvues de logique. Beaucoup de manuels présentent des règles du genre $S = L \times l$ que les enfants traduisent par « surface = Longueur multipliée par largeur ». Il n'est donc, peut-être, pas surprenant que les enfants traduisent $5y$ par «5 yachts». De plus, les lettres sont utilisées en arithmétique tout comme en algèbre, mais là $6m$ signifie «6 mètres» et non «6 fois le nombre représenté par m ». Si nous voulons aider les enfants à atteindre une meilleure compréhension de l'utilisation des

lettres en algèbre, il est, peut-être, utile de voir tous les cas où les lettres sont employées, distinguant en particulier l'utilisation des lettres en algèbre et en arithmétique.

De plus, les auteurs suggèrent qu'il faut encourager les enfants à réfléchir sur la signification des expressions mathématiques qu'ils rencontrent. Des expressions telle que $3x + 8y + 2x$ sont dénuées de sens et tendent à être résolues incorrectement à moins que l'enfant ne comprenne à la fois la signification de termes comme « $3x$ » et le fait que les lettres peuvent représenter des valeurs différentes dans certains cas. L'utilisation de l'analogie avec des objets (3 pommes + 8 bananes + 2 pommes) est rarement un succès et peut encourager la confusion objet/nombre décrite plus haut (dans les interviews, les enfants qui utilisaient cette analogie avaient autant de chance de donner la mauvaise réponse que la bonne).

Nous partageons les points de vue de ces auteurs sur la signification de la lettre. L'omission du signe " $\times$ " dans les notations algébriques peut amener les élèves à représenter les lettres par les objets. Considérer la lettre comme objet, dans les activités de réduction, peut constituer une source d'erreur.

2.2.2.1.2. La compréhension des notations et des conventions

Les auteurs ont noté deux difficultés. Premièrement, l'enfant peut écrire n^3 ou $3n$ comme réponse pour $n + 3$. Deuxièmement, beaucoup d'élèves n'utilisent pas les parenthèses pour indiquer l'ordre dans lequel des opérations différentes doivent être effectuées. Selon les auteurs, pour certains enfants, écrire « $3n$ » pour « $3 + n$ » semble refléter directement leur vue de l'addition en tant qu'un assemblage de deux collections ou mesures. Cette erreur ne semble pas simplement être le résultat d'une confusion avec la notation qui est enseignée pour le produit 3 fois n , car on suppose que les élèves qui n'ont pas encore appris l'algèbre ne soupçonnent pas l'existence de cette source de confusion ; ils ont pourtant eux aussi tendance à écrire $3n$ au lieu de $3 + n$.

Aussi, remarquent-ils, ce qui pousse les élèves à effectuer une somme algébrique de cette façon vient également du fait qu'apparemment ils considèrent qu'une formule telle que « $3 + n$ » n'est pas une réponse valable parce qu'elle « vous dit d'additionner alors que vous n'avez pourtant pas encore additionné ». Pour ces enfants, le résultat d'une addition doit être un terme unique qui est généralement le terme réunion (voir aussi plus haut le paragraphe concernant la signification des lettres).

Nous pensons, comme les auteurs, que considérer l'addition comme indication d'une opération à faire peut amener les apprenants à assembler les termes dans les activités de réduction.

Concernant l'utilisation des parenthèses, les auteurs mentionnent que bien souvent, les élèves ne voient pas le besoin d'utiliser des parenthèses, donc ne s'en servent pas. Dans le cas d'un problème arithmétique avec plusieurs opérations différentes, les élèves croient que les calculs doivent s'effectuer de gauche à droite (donc que les parenthèses ne seraient pas nécessaires pour préciser cela), ou simplement savent quelle opération doit être effectuée en premier (et là encore il n'est pas besoin de parenthèses). En arithmétique, savoir quelle opération effectuer en premier lieu est généralement suffisant pour obtenir une réponse correcte alors qu'en algèbre l'omission des parenthèses aboutit le plus souvent à une mauvaise réponse. Omettre les parenthèses entraîne quelque fois d'autres erreurs. Par exemple, ayant écrit $e + 2 \times 5$ pour la surface du rectangle mesurant 5 sur $e + 2$, certains élèves simplifient ensuite cela en $e2 \times 5$ qui devient donc $5e2$ ou $10e$, et en viennent à observer que l'on aurait pu multiplier les nombres d'abord, donnant $e + 10$ ou $10e$, ce qui leur permettrait une vérification facile.

Nous partageons l'avis des auteurs selon lequel l'omission des parenthèses peut aboutir à une mauvaise réponse. Toutefois, il convient de noter, également, que même lorsqu'il y a des parenthèses, et dans une distributivité à droite, les élèves ont de la peine à développer une expression algébrique.

Conclusion

Les auteurs de cet article évoquent la signification de la lettre et la compréhension des notations et des conventions. En effet, les auteurs relèvent que les élèves ont du mal à savoir si les lettres représentent des nombres ou des objets. Les élèves peuvent écrire n^3 ou $3n$ comme réponse pour $n + 3$. Les élèves pensent que le résultat d'une addition doit être un terme unique.

Cet article nous fournit des éléments pouvant permettre de comprendre la signification que les élèves donnent à la lettre dans les expressions algébriques, le sens que les élèves donnent à l'addition.

2.2.2.2. Le traitement des erreurs des élèves dans la formation des enseignants de mathématiques du second degré (Almahmoud, 2019)

Les résultats que nous présentons proviennent de la thèse de Doctorat de Almahmoud Mohamed intitulée

« Le traitement des erreurs des élèves dans la formation des enseignants de mathématiques du second degré ».

Cette thèse est réalisée à l'université de Nantes et soutenue en 2019 à l'université de Nantes.

La problématique de cette thèse porte sur les effets de la formation sur les pratiques des futurs enseignants pour la question de l'erreur.

Cette thèse fait un état des lieux de la manière dont sont formés les futurs enseignants et des stratégies à mettre en œuvre pour favoriser le traitement des erreurs d'élèves chez les enseignants formés.

Notre intérêt pour cette thèse vient du fait qu'elle aborde les erreurs classiques des élèves en algèbre.

Almahmoud organise sa thèse autour de deux parties avec neuf chapitres. Dans le cadre de notre travail, nous ne nous intéresserons qu'au chapitre 3 portant sur les erreurs des élèves, notamment les difficultés et erreurs en mathématiques (algèbre).

2.2.2.2.1. Difficultés et erreurs classiques en algèbre

L'auteur met en exergue les difficultés et les erreurs des élèves en algèbre. Il ne s'agit pas d'une liste exhaustive des erreurs, mais d'une liste des erreurs les plus fréquentes et connues dans le domaine de l'algèbre.

L'auteur souligne certaines erreurs classiques, à travers le tableau suivant.

Tableau 1: Erreurs classiques et leurs interprétations possibles (Almahmoud, 2019, p.88)

	Erreurs classiques	Interprétations possibles	Références
1	$-(a + b) = -a + b$ $a(b + c) = ab + c$ $a(bc) = ab.ac$ $(a \pm b)^n = a^n \pm b^n$ $\sqrt[n]{a \pm b} = \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ $a^{n+m} = a^n + a^m$ $a^{nm} = a^n a^m$ $(2a + a + 3 = 3a + 3)$ $\Leftrightarrow (2a + a \times 2 = 3a \times 2)$	Défaut dans la distributivité - Généralisation abusive de règle de distributivité - La coordination des constituants	(Drouhard, Sackur, Maurel & Pécal (1997) ; Drouhard (1992) ; Kirshner (1990) ; Matz (1980) ; Payne & Squibb (1990) ; Schwartzman (1997))
2	$2a + 5b = 7ab$ $39x - 4 = 35x$ $4n + 3 = 7n$ $1 + 3x^2 = (1 + 3)x^2 = (1 + 3x)^2$	Difficile transition entre l'arithmétique et l'algèbre - Réduction ou restriction du sens de variable - Annonce d'un résultat	(Davis (1975) ; Drouhard (1992) ; Vergnaud (1988))
3	$x^2 = 2x$ $x + 3 = 3x$ $(3x^2)^2 = 3x^4$ $2yz - 2y = z$	Dilemme processus-product Absence de marque explicite ($\times$ ou $\pm$)	(Douady (1994) ; Kirshner (1989))
4	$3x + 5x = 19 \Leftrightarrow x + x = 19 - 3 - 5$ $\Leftrightarrow 2x = 11 \Leftrightarrow x = 11 - 2 = 9$	Adaptation et concaténation	Sleeman (1984)

À travers ce tableau, l'auteur a listé les erreurs classiques, a donné leurs interprétations possibles, avec références à l'appui. Pour notre travail, nous nous intéressons aux lignes 1, 2 et 3.

Ces trois types d'erreurs évoquées par l'auteur sont fréquents chez les élèves du collège. L'auteur a interprété ces erreurs par un défaut dans la distributivité (généralisation abusive de la règle de distributivité, la coordination des constituants), la difficile transition entre l'arithmétique et l'algèbre (la réduction ou restriction du sens de variable, l'annonce d'un résultat), le dilemme processus-produit.

2.2.2.2.2. Défaut dans la distributivité

Selon l'auteur, plusieurs éléments ou facteurs peuvent s'associer pour interpréter les erreurs dues à un défaut dans la distributivité. Ces erreurs peuvent avoir une nature linguistique dite de « la coordination des constituants ⁵ ». L'auteur cite Ruwet (1968) pour qui il y a une sorte de distributivité dans les « propriétés » linguistiques. Aussi, dit-il que si nous regardons les deux phrases ci-dessous, nous constatons que la première est dérivée de la seconde.

a. J'ai rencontré Pierre et Paul au cinéma.

b. J'ai rencontré Pierre au cinéma et j'ai rencontré Paul au cinéma.

(Ruwet, 1968, p. 209)

Source : Almahmoud (2019, p.89)

D'après l'auteur, la phrase (b) peut être également écrite de la manière suivante :

J'ai rencontré [Pierre et Paul au cinéma].

Almahmoud cite Kirshner (1985) pour qui il y a une sorte de « distributivité langagière » dans cette phrase. Par exemple, l'erreur « $-(x + 5) = -x + 5$ » aurait des racines plus profondes dans l'aspect linguistique que celui mathématique, parce que tout simplement l'apprentissage de la langue précède celui des mathématiques et qu'on s'appuie sur le langage pour s'approprier n'importe quelle matière.

Aussi, il existe une interprétation linguistique dite « syntaxique » qui fait surface. En effet les élèves s'intéressent à la forme syntaxique de l'expression algébrique plutôt qu'à ses propriétés mathématiques (Kirshner, 1985). Par exemple, les deux expressions $(a + b)^n$ et $(ab)^n$ ont le même nombre de lettres et de termes, les élèves se réfèrent à une stratégie utilisée en numérique pour comparer des nombres, celle de « correspondance terme à terme », ils pensent à tort que ces écritures ont la même dénotation, donc la même forme syntaxique

⁵ La coordination des constituants est considérée comme une forme réduite de la coordination des phrases (Kühner & Stegmann, 1912)

(Arzarelo, Bazzini, & Chiappini, 2001 ; Serfati, 2005). C'est pourquoi les élèves ont tendance à traiter les deux expressions de la même façon.

Selon l'auteur, les élèves ne sont pas censés interpréter ou avoir le sens de la puissance. Ils considèrent $(a + b)^2$, par exemple, comme un produit de $(a + b)(a + b)$, le sens de l'exponentiation n'est pas approprié chez les élèves comme une multiplication répétée.

L'auteur partage le point de vue de Kirshner (1985) selon lequel les compétences mathématiques développées lors de l'apprentissage du calcul algébrique ne sont pas étroitement liées à ce que les enseignants envisagent, il y a une sorte de curriculum caché⁶. De même, l'auteur partage le point de vue de Schwartzman (1977) et de Sleeman (1984) selon lequel un élément dit mathématique se cache derrière ce type d'erreurs. Il s'agit de la généralisation des règles ou des propriétés mises en œuvre dans un domaine mathématique sur un autre. Par exemple, écrire $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ est une erreur très fréquente chez les élèves en collège ; ils confondent $(a \cdot b)^2$ et $(a + b)^2$. De ce fait, ils généralisent la propriété de « la distributivité des puissances sur un produit » en faisant « la distributivité des puissances sur une somme ».

Aussi, dit-il, comprendre des écritures revient donc à prendre à la fois en compte leur syntaxe, leur dénotation, leur sens, leur interprétation. Les expressions $(x - 1)^2$ et $x^2 - 2x + 1$ ont la même dénotation, mais n'ont pas le même sens tout comme $\frac{4}{2} = \sqrt{4} = 1 + 1$; elles appartiennent à plusieurs registres (Drouhard, 1992). Les élèves pensent que $a^2 + b^2$ est une autre dénotation de $(a + b)^2$, tout simplement parce que cette expression ou forme peut avoir plusieurs dénotations comme $(a + b)(a + b)$ ou $a^2 + 2ab + b^2$ (Drouhard et al., 1997 ; Drouhard, 1992).

L'auteur souligne, en revanche, que pour certains élèves, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ et, $(a - b)^2 = a^2 - b^2$. Or, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ n'est pas généralisé dans le cas $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b)$. La simple justification est que pour les élèves $a^2 + b^2 \neq a^2 - b^2$. Par exemple, lorsqu'on dit que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, on constate que les deux côtés de deux égalités ne sont pas égaux par correspondance terme à terme $((a + b)^2 \neq (a - b)^2$ et $a^2 + b^2 \neq a^2 - b^2$). D'ailleurs, l'apprentissage de $(a + b)^2$ précède celui de $a^2 - b^2$, alors que la règle erronée est déjà installée chez les élèves.

Nous partageons les interprétations données par l'auteur aux erreurs de la première ligne. Plus spécifiquement, pour l'erreur $(a \mp b)^n = a^n \mp b^n$, nous pouvons l'interpréter

⁶ Le curriculum caché, c'est la part des apprentissages qui n'apparaît pas programmée par l'institution scolaire, du moins pas explicitement (« Perrenoud - Curriculum : le formel, le réel, le caché », s. d.)

également par la généralisation du contexte d'application des propriétés de linéarité ($f(a + b) = f(a) + f(b)$) et de puissance $(ab)^n = a^n b^n$.

2.2.2.2.3. Difficile transition entre arithmétique et algèbre

Selon l'auteur, l'introduction de l'algèbre en général et du calcul littéral en particulier reste problématique à la fois pour les élèves et pour les enseignants. D'une part, certains élèves ne peuvent comprendre ce nouveau savoir et, d'autre part, les enseignants se trouvent en difficulté pour le leur transmettre facilement. Dans ce contexte, la difficile transition du concret à l'abstrait pourrait traduire généralement cette problématique. Or, il existe de multiples facteurs qui se cachent derrière la difficulté de l'apprentissage ou de l'enseignement de l'algèbre.

L'auteur tente de focaliser le regard sur les difficultés et les erreurs dans le domaine de l'algèbre en général et du calcul littéral en particulier en s'appuyant sur des travaux menés par Vergnaud (1988) sur l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre, parce qu'il y a des fausses continuités et des discontinuités entre les deux domaines. Selon l'auteur, plusieurs niveaux d'interprétation peuvent se chevaucher pour expliquer l'origine d'une certaine erreur.

Toujours selon l'auteur, l'arithmétique élémentaire semble simple et accessible pour une bonne part des élèves en début de collège. Cependant, l'algèbre réunit les quantités déterminées (connues) et indéterminées (inconnues) qui peuvent être une espèce de perturbation pour les élèves, notamment si on ne comprend pas la signification des lettres. Par exemple, pour certains élèves, « 3b » signifie trois bananes : une sorte de réduction de sens ou dispositif. Il ajoute que certains manuels induisent les élèves en erreur lorsqu'ils introduisent la formule de l'aire du rectangle de la manière suivante : $A = L \times l$ (L : longueur, l : largeur). Bien qu'il y ait une certaine analogie entre l'arithmétique et l'algèbre (divers points communs : égalité, utilisation des parenthèses, symboles opératoires, etc.), le passage persiste et apparaît difficile chez certains élèves jusqu'à un stade tardif dans le processus d'apprentissage scolaire.

En revanche, l'auteur se dit ne pas être convaincu de l'usage du terme « rupture ». On peut parler de fausses continuités ou de discontinuités, autrement dit, d'une rupture partielle et provisoire. Par exemple, on ne peut évoquer une rupture entre les nombres entiers et les nombres décimaux, il y a certainement une discontinuité ou fausse continuité, mais pas de rupture complète entre arithmétique et algèbre.

Nous partageons le point de vue de l'auteur sur les erreurs dues à la difficile transition entre arithmétique et algèbre.

Conclusion

Dans la partie de cette thèse que nous avons présentée, l'auteur focalise son regard sur les difficultés et les erreurs dans le domaine de l'algèbre en général et du calcul littéral en particulier. Il met en exergue les erreurs classiques des élèves telles que :

$$-(a + b) = -a + b ; a(b + c) = ab + c ; (a \mp b)^n = a^n \mp b^n ; 2a + 5b = 7ab ;$$

$39x - 4 = 35x$; $4n + 3 = 7n$; $x + 3 = 3x$. L'auteur interprète ces erreurs par un défaut dans la distributivité (généralisation abusive de la règle de distributivité, la coordination des constituants), la difficile transition entre l'arithmétique et l'algèbre (la réduction ou restriction du sens de variable, l'annonce d'un résultat), le dilemme processus-product.

Pour nos expérimentations, nous allons proposer des items pouvant nous permettre de repérer éventuellement les erreurs évoquées.

2.2.2.3. Quelques exemples d'obstacles pour la construction du savoir en mathématiques (Oudrhiri, 2016)

L'article que nous présentons est intitulé

« *Quelques exemples d'obstacles pour la construction du savoir en mathématiques* ».

L'article dont nous proposons de faire la revue est publié dans la *revue spécialisée à comité de lecture de la faculté des Sciences de l'Education* (ATTADRISS) de l'Université Mohamed V de Rabat, à la Faculté des Sciences de l'Education, n°8-Nouvelle série.

La problématique soulevée par l'auteur porte sur le fait que l'enseignant a du mal à comprendre pourquoi les élèves ne comprennent pas ou retombent dans leurs travers peu de temps après le cours, malgré tous ses efforts de démonstration et d'exemples concrets.

Cet article relève des exemples d'erreurs récurrentes en algèbre et géométrie, montre qu'elles se regroupent autour des conceptions, ensuite les met en rapport avec des obstacles dans l'histoire des Mathématiques.

L'auteur est parti de l'expérimentation pour identifier les obstacles.

2.2.2.3.1. Expérimentation

Pour identifier des obstacles, l'auteur a soumis 85 élèves de 3^{ème} année du collège à un test, après que ceux-ci aient suivi des cours et des travaux dirigés en rapport avec ces notions. Le test est composé de trois items dont deux portent sur les identités remarquables et un sur la

reconnaissance des triangles et parallélogrammes particuliers. Pour notre étude, nous ne nous intéresserons qu'aux items suivants :

a) Développer et simplifier :

1. $(x + 3)^2$;
2. $(x + 4)^3$;
3. $(x + y + 3)^2$.

b) Développer et simplifier :

1. $(x + \frac{3}{2})^2$;
2. $(y + 0,3)^2$;
3. $(2,5x + \frac{4}{5})^2$.

2.2.2.3.2. Résultats et analyse des productions

Après dépouillement des productions, l'auteur a relevé les fausses réponses suivantes :

Pour l'item a)

$$(x + 3)^2 = x^2 + 3^2$$

$$(x + 4)^3 = x^3 + 4^3$$

$$(x + 4)^3 = x^3 + 12x + 4^3$$

$$(x + y + 3)^2 = x^2 + y^2 + 3^2$$

$$(x + y + 3)^2 = x^2 + y^2 + 3^2 + 6xy$$

Pour l'item b)

$$(x + \frac{3}{2})^2 = x^2 + (\frac{3}{2})^2$$

$$(y + 0,3)^2 = y^2 + (0,3)^3$$

$$(2,5x + \frac{4}{5})^2 = (2,5x)^2 + (\frac{4}{5})^2$$

Comme explication aux réponses de l'item a), l'auteur évoque l'obstacle dû à la « linéarité ». En effet, nous disons, à travers ces réponses, que les élèves ont généralisé la propriété de puissance $(ab)^n = a^n b^n$ pour obtenir, par exemple, $(x + 4)^3 = x^3 + 4^3$.

Pour l'item b), l'auteur explique ces réponses par un obstacle dû à la connaissance des nombres. Pour la réponse $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{2}$, l'auteur l'explique par le fait que les élèves pensent qu'une fraction n'est pas un nombre ou une opération « à faire », car ils ne voient pas une division. L'obstacle qui ressort de cette erreur est l'obstacle de la partition.

Nous faisons l'hypothèse que la mauvaise interprétation du sens de la fraction peut constituer un obstacle dans le développement et la réduction des polynômes dont les coefficients des monômes appartiennent à $\mathbb{Q}$.

Conclusion

Le traitement des items proposés aux élèves a permis à l'auteur d'identifier quelques obstacles pour la construction du savoir mathématique. À la suite des items portant sur le développement des identités remarquables proposés aux élèves, l'auteur a identifié les obstacles dus à la connaissance des nombres et ceux dus à la linéarité.

L'auteur mentionne que le traitement didactique des obstacles est d'autant plus délicat qu'il peut sembler exister autant de conceptions que d'élèves. Il n'y a pas de solution universelle et, selon la nature et l'importance de l'obstacle, l'enseignement peut les ignorer, les dénoncer ou faire buter les étudiants sur la difficulté.

Nous allons nous servir de ces résultats pour proposer, lors de nos expérimentations, des solutions pouvant aider à franchir des obstacles qui émergent au cours des activités de développement et de réduction des polynômes, à travers le dispositif.

2.2.2.4. Apprendre par franchissement d'obstacles (Astolfi, 1992)

Les résultats que nous présentons sont issus de l'article intitulé

« **Apprendre par franchissement d'obstacles** ».

L'article a été publié en 1992 dans la revue *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle*, n°5, pp.103-116.

La problématique de cet article porte sur l'idée de savoir comment l'on peut dépasser la simple « prise en compte positive » de l'erreur et concevoir les obstacles comme de véritables outils didactiques au service de l'apprentissage.

Cet article mène une réflexion sur le concept d'objectif-obstacle.

L'intérêt de cet article pour notre travail vient de ce que l'auteur met en exergue l'importance de l'objectif-obstacle pour la construction des séquences d'enseignement orientées par le franchissement d'un obstacle.

L'auteur articule son article autour de trois points principaux :

- un nouveau statut de l'erreur ;
- les procédures d'évitement conceptuel ;
- la notion d'objectif-obstacle.

Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes intéressé aux premier et troisième points.

2.2.2.4.1. Un nouveau statut de l'erreur

Astolfi (1992) mentionne que le foisonnement de travaux a contribué à la modification du statut didactique de l'erreur, et au développement de modèles constructivistes de l'apprentissage. Il cite le document officiel français relatif à la mise en place des cycles à l'école primaire qui précise que «l'erreur devient l'outil privilégié du maître pour recenser les lacunes ou les faiblesses, pour explorer les démarches d'apprentissage, pour élaborer et mettre en œuvre les réponses appropriées ».

Pour expliquer les origines possibles des erreurs, l'auteur évoque les représentations comme système explicatif, fonctionnel pour l'élève et comme indices d'obstacles sous-jacents.

Au sujet des représentations comme système explicatif, fonctionnel pour l'élève, l'auteur fait savoir que la représentation va au-delà de l'erreur, puisqu'elle s'est constituée le plus souvent comme un système explicatif pour l'élèves, construit de longue date, et qui s'avère fonctionnel pour lui. Parlant des représentations comme indices d'obstacles sous-jacents, l'auteur, pour expliquer la complexité des représentations, évoque le double statut de ces dernières : de distance avec le savoir savant (c'est leur côté «erreur»), et de système éprouvé d'explication pour le sujet (c'est leur côté «modèle»).

De plus, l'auteur note que de nombreuses observations font apparaître les éléments suivants :

« si les représentations subsistent si longtemps, c'est souvent parce que les obstacles auxquels elles renvoient sont contournés, plus que travaillés, par les apprentissages scolaires. De surcroît, il apparaît que de nombreux obstacles se présentent comme des constructions didactiques (largement involontaires évidemment), lesquelles correspondent à ce que les élèves ont cru pouvoir inférer à partir des situations d'enseignement qu'on leur a proposées. » Astolfi (1992).

Nous partageons ces propos de l'auteur, car dans le cadre de notre étude, pour faire dépasser les obstacles didactiques et épistémologiques qui émergent au cours des activités de développement et de réduction des polynômes, il faut d'abord les identifier.

2.2.2.4.2. La notion d'objectif-obstacle

L'auteur partage avec Martinand (2012) pour qui, si les obstacles rencontrés ont une signification profonde par rapport aux apprentissages à réussir, ce sont bien eux qu'il faut mettre au centre pour définir les véritables objectifs. Une chose est de définir les objectifs à partir de

la seule analyse des programmes et contenus (ce que fait la pédagogie par objectifs), autre chose est de faire du franchissement d'un obstacle, l'objectif vraiment recherché :

« Dans la mesure où ces obstacles ont une signification épistémologique profonde, je crois qu'ils fournissent la clé pour formuler les buts les plus essentiels d'une éducation scientifique. Autrement dit, il s'agit d'exprimer les objectifs en termes d'obstacles franchissables, car parmi la diversité des objectifs possibles, les objectifs intéressants sont les objectifs-obstacles. (...) Il nous paraît légitime de faire de leur franchissement les vrais objectifs conceptuels (...).

L'ambition pratique est donc de fournir aux maîtres, avec une liste d'obstacles à franchir par les élèves, la description des buts des activités, afin permettre d'orienter les interventions pédagogiques et l'évaluation. » (Martinand, 2012).

De surcroît, l'auteur note que l'identification des obstacles constitue une question centrale. Cette identification nécessite que l'on approfondisse l'analyse de la matière enseignée, et parallèlement, que l'on conduise des observations de classe pour voir fonctionner les obstacles repérés, pour en préciser la nature, pour percevoir d'autres, etc. L'analyse des obstacles reste largement empirique, même si elle doit s'efforcer de prendre appui sur une étude épistémologique rationnelle (Astolfi, 1992). Nous n'adhérons pas entièrement à ce point de vue de l'auteur. Certes, pour l'identification des obstacles, il faut analyser les matières à enseigner et conduire des observations de classe, mais nous pensons que, en plus de cela, pour certaines disciplines comme les Mathématiques qui traitent essentiellement sur des concepts, il convient de commencer l'analyse par une étude épistémologique des concepts.

Pour mettre en exergue l'importance des objectifs-obstacles, Astolfi (1992) retient trois fonctions didactiques que peut assurer un objectif-obstacle :

- la gestion curriculaire à long terme. Une même notion peut être examinée du point de vue de la diversité des obstacles qui s'opposent à sa construction. Ces obstacles peuvent être hiérarchisés et modélisés d'une manière qui oriente une construction curriculaire à long terme ;
- l'outil de régulation des interventions du maître au cours des séquences. Pour Martinand, il ne s'agit pas de construire une séquence autour du dépassement d'un obstacle prédéterminé, mais d'utiliser ce concept pour réguler les curricula scientifiques ouverts, qui sont la règle à l'école élémentaire ;
- la construction d'une séquence autour du franchissement d'un obstacle.

Conclusion

Cet article nous fournit, dans le cadre de notre étude, la démarche qui consiste à partir des représentations des élèves pour identifier des obstacles qui émergent chez ceux-ci au cours des activités de développement et de réduction des polynômes, puis définir des objectifs-obstacles pour construire des séquences d'enseignement et d'apprentissage orientées par le franchissement des obstacles. En effet, le concept d'objectif-obstacle nous permet d'orienter notre dispositif de franchissement vers le dépassement des obstacles identifiés

Conclusion du chapitre 2

Dans ce chapitre, nous avons défini les concepts clés et avons présenté les erreurs commises par les élèves dans l'effectuation du calcul algébrique et les obstacles relevés par de nombreux auteurs.

Les travaux que nous avons présentés montrent que le passage du calcul numérique au calcul algébrique constitue une difficulté aux élèves du collège. Grugeon-Allys et Pilet (2017) montrent que l'algèbre se construit en rupture avec l'arithmétique, et la transition doit être négociée dès l'école primaire. Hassayoune (2021) parle de la difficile négociation de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. L'équipe de recherche UMons (2019), quant à elle, présente les différents statuts de la lettre et identifie quelques obstacles liés à l'introduction de l'algèbre. Dans la même perspective, Tremblay, Polotskaia et Passaro (2021) évoquent la variété de contextes, les multiples sens et interprétations, les ambiguïtés de dénomination de la lettre qui rendent complexe l'apprentissage.

De même, les auteurs présentent des erreurs que les élèves commettent dans l'apprentissage du calcul algébrique. Pour Booth et Chelsea (1984), la signification de la lettre et la compréhension des notations et des conventions constituent des causes des erreurs des élèves en algèbre élémentaire. Almahmoud (2019) explique les erreurs des élèves en algèbre par un défaut dans la distributivité et la difficile transition entre l'arithmétique et l'algèbre.

Ces résultats nous fournissent des pistes pour élaborer nos outils d'expérimentation (les tests, les entretiens, les grilles d'analyse). Ils nous fournissent également des éléments pour nos analyses et nos expérimentations. Nous allons nous servir des aspects tels que :

- la nature et les propriétés des relations (nombre, lettre, objet) ;
- le sens des nombres et des opérations (arithmétique, algébrique) ;
- les différents statuts des lettres (étiquette, variable, nombre généralisée,...) ;
- les différents statuts de l'égalité (égalité, équivalence) ;

- les aspects procédural et structural des expressions algébriques ;
- la variation du sens du raisonnement dans le langage algébrique ;
- le sens du signe " $\times$ ".

Le chapitre suivant est consacré aux cadres théoriques de l'étude.

Chapitre 3 : Cadres théoriques de la recherche

Introduction

Pour identifier les obstacles épistémologiques et didactiques qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes, nous avons choisi la théorie anthropologique du didactique et la théorie des champs conceptuels, comme cadres théoriques.

Dans ce chapitre, nous présenterons les deux cadres théoriques dans lesquels nous conduisons notre travail et nous montrons leur pertinence pour notre problématique. Ces cadres participent à la construction de la méthodologie de l'étude et constituent des outils d'analyse des résultats.

3.1. La théorie anthropologique du didactique (TAD)

La théorie anthropologique du didactique (TAD) est une théorie didactique mise sur pied par Yves Chevallard autour des années 1999, en « extension » à la théorie de la transposition didactique sur laquelle nous reviendrons plus loin. Cette théorie a pour objet l'analyse de l'activité mathématique en s'appuyant sur la notion de praxéologie.

Chevallard (1999, p. 223) justifie le caractère « anthropologique » de cette théorie du fait que l'activité *mathématique*, et donc l'activité d'*étude* en mathématiques, se situe *dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales*. Il énonce comme postulat de la TAD : « toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T au moyen d'une technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, de la produire, de la justifier. La technologie est à son tour justifiable par une théorie Θ ».

3.1.1. Le concept de praxéologie

À la racine de la notion de praxéologie se trouve les notions solidaires de tâche t , et de type de tâches T . Quand une tâche t relève d'un type de tâches T , on écrira : $t \in T$.

Le mot praxéologie renvoie au quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$ où T désigne un type de tâches, τ une technique utilisée pour accomplir ou réaliser les tâches propres au type de tâches T . Ainsi, l'auteur nomme le couple $[T/\tau]$, le bloc pratico-technique, la *praxis*, ou encore le savoir-faire (les tâches et les techniques).

Au sein d'une institution donnée, toute activité humaine n'est jamais isolée, elle est accompagnée d'un « discours raisonné » qui tente d'en rendre raison. Ce discours est porté par le couple $[\theta/\Theta]$, où θ désigne une technologie, c'est-à-dire un discours rationnel (*logos*) sur la technique et Θ , la théorie sur laquelle s'appuie cette technologie. Ce couple est appelé bloc technologico-théorique. Il est, d'après l'auteur, le savoir qui justifie l'activité.

La notion de praxéologie comporte quatre composantes essentielles qui se distinguent par leur niveau de généralité, et que nous explicitons dans la suite.

3.1.2. Tâche, type de tâches et genre de tâche

Pour Chevallard (1999, p. 224), la notion de tâche employée, ici, est plus large que celle du français courant : se gratter la joue, marcher du divan jusqu'au buffet, et même sourire à quelqu'un, sont ainsi des tâches. Il s'agit là d'une mise en pratique particulièrement simple du « principe anthropologique ». Une tâche relève d'un type de tâche, à savoir une typologie d'opérations mathématiques finalisées à un but précis (résultat).

En effet, Bosch et al. (1999) soulignent que le niveau de type de tâches est précisé selon le point de vue adopté :

« Le problème de la délimitation des tâches dans une pratique institutionnelle donnée reste ouvert et variera selon que l'on adopte le point de vue de l'institution où se déroulera la pratique ou bien celui d'une institution extérieure d'où l'on observe l'activité pour décrire dans un but précis. » (Bosch et al, 1999, p. 84).

Chevallard fait la distinction entre la notion de tâche, de type de tâche et de genre de tâches. La notion de type de tâches s'exprime par un verbe et suppose un objet relativement précis. Le genre de tâches fait appel à un déterminatif. Concrètement, un genre de tâches n'existe que sous la forme de différents types de tâches, dont le contenu est plus étroitement spécifié.

Tableau 2 : Exemple de tâche, de type de tâche et de genre de tâche

Tâches	Types de tâche	Genres de tâche
Développer les expressions $2(x - 1)$ $3x(x + 2)$	$T_{DP-mon\hat{o}me \times som}$: Développer un produit dont un facteur est un monôme.	Développer
Développer l'expression $(2x - 5)(x + 1)$	$T_{DP-som \times som}$: Développer un produit dont les facteurs sont des sommes algébriques.	
Réduire l'expression $2x + 5x + 3 + x - 1$	$T_{RS-mon+mon}$: Réduire une somme algébrique ne contenant pas de parenthèses.	Réduire
Réduire les expressions $3 + (x + 2)$ $3 - (x + 2)$	$T_{RS-mon+som}$: Réduire une somme algébrique contenant des parenthèses.	

3.1.3. La technique

Chevallard (1999, p. 225) définit une technique relative à un type de tâches T comme étant « une manière d'accomplir, de réaliser les tâches $t \in T$ », c'est-à-dire, une manière de faire pour réaliser la tâche. En une institution donnée, pour un même type de tâches, il existe généralement une seule technique, mais il peut exister un ensemble de techniques institutionnellement reconnues, comme il peut exister une même technique pour des types de tâches différents.

Une technique τ – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie $P(\tau)$ des tâches du type T auxquelles elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique : elle tend à échouer sur $T \setminus P(\tau)$, de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T ». C'est le cas de la règle de suppression des parenthèses qui est généralement donnée en situation de classe : « lorsqu'il y a le signe " – " devant une parenthèse, lorsqu'on l'enlève, les signes de termes à l'intérieur de la parenthèse changent ». Cette règle ne fonctionne que lorsqu'il n'y a pas de parenthèses imbriquées. Ce cas de figure ne rentre pas dans la portée de la technique énoncée.

Une technique τ n'est pas nécessairement de nature algorithmique ou quasi algorithmique ; il n'en est ainsi que dans de trop rares cas.

Par exemple, la technique de réduction de la somme $4x^2 + x^2$ n'est pas algorithmique. Alors que la technique de réduction de la somme $5 - (x - (2x - 3))$ peut l'être. En effet, pour cette somme, la technique algorithmique consiste à commencer à calculer les expressions dans les parenthèses les plus internes en appliquant la règle de priorité. Signalons que la réduction de cette somme peut aussi être faite par une technique non algorithmique.

C'est ainsi que, dans une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion des techniques alternatives possibles qui peuvent exister effectivement, mais alors dans d'autres institutions.

Pour préciser notre propos, reprenons les exemples précédents que nous allons compléter en indiquant les techniques relatives aux types de tâches identifiées.

Tableau 3 : Exemple de tâche, de type de tâche, de genre de tâche et de technique

Tâches	Types de tâche	Genres de tâche	Technique
Développer les expressions $2(x - 1)$ $3x(x + 2)$	$T_{DP-monôme \times som}$: Développer un produit dont un facteur est un monôme.	Développer	- Multiplier 2 par x et par (-1), puis faire la somme des produits obtenus. - Multiplier $3x$ par x, puis par 2, et faire la somme.
Développer l'expression $(2x - 5)(x + 1)$	$T_{DP-som \times som}$: Développer un produit dont les facteurs sont des sommes algébriques.		Multiplier $2x$ par x et par 1, puis (-5) par x et par 1, et faire la somme algébrique.
Réduire l'expression $2x + 5x + 3 + x - 1$	$T_{RS-mon+mon}$: Réduire une somme algébrique ne contenant pas de parenthèses.	Réduire	Regrouper les monômes de même degré, puis faire la somme.
Réduire les expressions $3 + (x + 2)$ $3 - (x + 2)$	$T_{RS-mon+som}$: Réduire une somme algébrique contenant des parenthèses.		- Supprimer les parenthèses, puis utiliser la technique précédente. - Supprimer les parenthèses en « distribuant » le signe " - " à x et à 2, puis utiliser la technique précédente.

3.1.4. La technologie

Chevallard (1999, p. 226) entend par technologie qu'il note θ , un discours rationnel – *le logos* – sur la technique, discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique τ , en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T , c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu.

Toujours selon Chevallard (1999, p. 226), dans une institution I , quel que soit le type de tâches T , la technique τ relative à T est toujours accompagnée d'au moins un embryon ou, plus souvent encore, d'un vestige de technologie θ . En nombre de cas, même, certains éléments technologiques sont intégrés dans la technique.

Aussi, dit-il, qu'une autre fonction de la technologie est d'expliquer, de rendre intelligible et d'éclairer la technique. De ce point de vue, en mathématiques, la fonction de justification l'emporte traditionnellement, par le biais de l'exigence démonstrative, sur la fonction d'explication.

Comme exemple, reprenons le tableau précédent et complétons la colonne des technologies qui justifient ces techniques.

Tableau 4 : Exemple de tâche, de type de tâche, de genre de tâche, de technique et de technologie

Tâches	Types de tâche	Genres de tâche	Technique	Technologie
Développer les expressions $2(x - 1)$ $3x(x + 2)$	$T_{DP-mon\hat{o}me \times som}$: Développer un produit dont un facteur est un monôme.	Développer	- Multiplier 2 par x et par (-1), puis faire la somme des produits obtenus. - Multiplier $3x$ par x, puis par 2, et faire la somme.	Distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction
Développer l'expression $(2x - 5)(x + 1)$	$T_{DP-som \times som}$: Développer un produit dont les facteurs sont des sommes algébriques.		Multiplier $2x$ par x et par 1, puis (-5) par x et par 1, et faire la somme algébrique.	
Réduire l'expression $2x + 5x + 3 + x - 1$	$T_{RS-mon+mon}$: Réduire une somme algébrique ne contenant pas de parenthèses.	Réduire	Regrouper les monômes de même degré, puis faire la somme.	Règle d'addition des nombres entiers relatifs
Réduire les expressions $3 + (x + 2)$ $3 - (x + 2)$	$T_{RS-mon+som}$: Réduire une somme algébrique contenant des parenthèses.		- Supprimer les parenthèses, puis utiliser la technique précédente. - Supprimer les parenthèses en « distribuant » le signe " - " à x et à 2, puis utiliser la technique précédente.	Règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + " ou " - ".

3.1.5. La théorie

Pour Chevallard (1999, p. 226) :

« le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la théorie, Θ , laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique. En tout domaine, la nature de la théorie peut fluctuer, et de fait, fluctue historiquement. Comme il en va en matière technique ou technologique, il y a ici un progrès théorique, qui conduit en général à substituer aux évidences « métaphysiques » des énoncés théoriques positifs ».

La théorie qui sous-tend les activités de développement et de réduction est la théorie de l'algèbre élémentaire.

Dans le cadre de notre travail, l'utilisation de la praxéologie nous permet d'analyser les activités proposées par l'enseignant, le rapport institutionnel, le rapport des élèves et des enseignants à l'objet. L'analyse des activités en termes de praxéologie participe de l'analyse de la transposition qui est faite des objets de savoir.

3.1.6. La transposition didactique

Chevallard a introduit la théorie de la transposition didactique dans la communauté française des didacticiens des mathématiques au tout début des années 1980. La problématique de la transposition didactique s'est développée à propos de l'enseignement général du second degré, en partant d'une discipline *a priori* bien particulière (les mathématiques), examinée en une période critique de son histoire de discipline enseignée (la réforme des mathématiques modernes).

Ainsi, Chevallard (1985) définit la transposition didactique (TD) comme suit :

« Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit [...] un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique ».

La transposition didactique consiste en la transformation et l'adaptation des connaissances produites par la communauté scientifique pour les rendre aptes à être utilisées comme objets d'apprentissage.

Chevallard définit la transposition didactique en deux étapes : la transposition externe et la transposition interne. Il dit que la transposition didactique peut ainsi être représentée selon le schéma suivant :

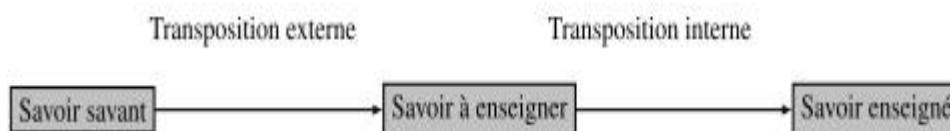


Figure 3: Processus de la transposition didactique

La transposition externe consiste en la transformation du savoir savant en savoir à enseigner. Par « savoirs savants », on entend « un corpus qui s’enrichit sans cesse de connaissances nouvelles, reconnues comme pertinentes et valides par la communauté scientifique spécialisée. (...) le savoir savant est essentiellement le produit de chercheurs reconnus par leurs pairs, par l’université. Ce sont eux qui l’évaluent » (Le Pellec, 1991, p. 40, cité par Clerc, Minder et Roduit, 2006). Les « savoirs à enseigner » sont des savoirs « qui sont décrits, précisés, dans l’ensemble des textes « officiels » (programmes, instructions officielles, commentaires...) ; ces textes définissent des contenus, des normes, des méthodes » (Audigier, 1988)

La transposition interne consiste en la transformation du savoir à enseigner en savoir enseigné. Les « savoirs enseignés » sont des savoirs que l’enseignant a construits et qu’il mettra en œuvre dans la classe. Ce sont eux qui sont énoncés pendant les heures de cours.

Dans les activités de développement et de réduction, le savoir de référence est la théorie de l’algèbre élémentaire.

Dans le cadre de notre travail, la théorie anthropologique du didactique nous permet, d’une part, de décrire les rapports institutionnels et personnels aux activités de développement et de réduction et, d’autre part, d’étudier la transposition didactique qui est faite dans les manuels et en situation de classe, en lien avec les activités de développement et de réduction des polynômes.

La TAD permet de modéliser l’ensemble des connaissances des apprenants, qu’elles soient conformes ou non conformes à celles attendues par l’institution scolaire. Cependant, les éléments de la TAD ne permettent pas de percevoir les opérations cognitives qui sont effectuées par les élèves dans les activités de développement et de réduction des polynômes. Nous pensons que la prise en compte des opérations cognitives des élèves dans les activités de développement et de réduction est importante pour comprendre le fonctionnement cognitif de ces derniers. De ce fait, nous nous servons de la théorie des champs conceptuels comme cadre théorique pour l’analyse de ces opérations.

3.2. Théorie des champs conceptuels (TCC)

La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, p.135) est une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques.

Selon l'auteur, la principale finalité de la TCC est de fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances, chez les enfants et les adolescents, en entendant par « connaissances » aussi bien les savoir-faire que les savoirs exprimés.

La signification que Vergnaud donne aux connaissances comme savoir-faire et savoirs exprimés nous intéresse puisque dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons aux connaissances en calcul littéral, notamment les activités de développement et de réduction. Par ailleurs, l'utilisation des concepts qui font l'objet d'un enseignement ne doit pas se limiter à un type de situation. Un concept doit être mis en œuvre dans son champ conceptuel. Pour Vergnaud (1990), un champ conceptuel est « un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter ».

Nous présentons dans les paragraphes suivants, quelques situations qui mettent en évidence la complexité des activités de développement et de réduction des polynômes. Cela nous permet de soutenir l'idée selon laquelle l'apprentissage du développement et de la réduction des polynômes relève de l'acquisition des compétences complexes, ce qui motive le choix du cadre des champs conceptuels pour notre recherche. En effet, la complexité des opérations de réduction et de développement peut s'expliquer par la gestion des signes et des opérateurs.

Pour développer un produit dont un facteur est un monôme ou pour développer un produit dont les facteurs sont des sommes algébriques, le traitement des expressions n'est pas le même. Pour développer des expressions algébriques, il faut identifier la structure de ces expressions. Par exemple, les polynômes $4x(x + 3)$ et $(3x - 5)(2x + 7)$ sont de structures différentes. Pour développer le polynôme $4x(x + 3)$, il faut identifier l'expression à la forme $a(b + c)$, puis appliquer la distributivité. De même, pour développer le polynôme $(3x - 5)(2x + 7)$, il faut identifier l'expression à la forme $(a + b)(c + d)$, puis appliquer la distributivité.

Pour réduire une somme algébrique ne contenant pas de parenthèses ou une somme algébrique contenant des parenthèses, les techniques ne sont pas les mêmes. Par exemple, pour réduire l'expression $4x + 2x - 3 + x - 7$, il faut regrouper les monômes de même degré, puis faire la somme. De même, pour réduire, par exemple, l'expression $3 - (x + 5)$, il faut reconnaître que l'expression est de la forme $a - (b + c)$, puis supprimer les parenthèses en « distribuant » le signe " - " à x et à 5, avant de faire la somme.

Dans le cadre de notre travail, deux éléments-clés de la théorie des champs conceptuels sont convoqués : schème et invariants opératoires.

3.2.1. Schèmes

Selon Vergnaud (1990, p.136), un « schème » est l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée. C'est « une fonction qui prend ses valeurs d'entrée dans un espace temporalisé à n dimensions et qui produit ses valeurs de sortie dans un espace également temporalisé à n' dimensions : n et n' étant très grands. » (Vergnaud, 2001, p.4, cité par Njomgang Ngansop, 2013, p. 35).

En accord avec Piaget, l'auteur soutient que ce sont les schèmes qui sont au centre du processus d'adaptation des structures cognitives : l'assimilation et l'accommodation.

Guiet-Silvain (2011), propose une synthèse de la notion de schème en huit points :

« A-Le schème est une entité cognitive qui génère l'activité du sujet : aussi bien l'activité comportementale (les gestes, les regards, les verbalisations, etc.) que l'activité cognitive qui lui est sous-jacente (la perception et la prise d'information, le raisonnement, l'adaptation, le contrôle méta-cognitif, etc.). Le schème a donc pour fonction d'engendrer les deux registres fondamentaux de l'activité : la pensée et la conduite qu'elle engendre.

B - Le schème est une totalité cognitive structurée. L'activité cognitive et gestuelle qu'il engendre n'est pas chaotique : il coordonne les différents registres et les différents types d'activité (gestes / verbalisations / raisonnement / prise d'information / etc.). Le schème a donc pour rôle d'agencement cohérent de l'activité.

C - Le noyau dur du schème est la conceptualisation. La conceptualisation est une forme particulière et fondamentale d'activité. C'est cette composante centrale qui donne au schème son caractère structurant et intégrateur de l'activité cognitive et gestuelle.

D - Le schème n'est pas l'activité, il en est l'organisation sous-jacente. Il n'est pas une succession temporelle déterminée de comportements (activité comportementale) ni une suite figée d'opérations de pensée (activité cognitive). Le schème est donc l'organisation stable d'activités cognitives et gestuelles qui, elles, peuvent être variables en fonction des caractéristiques de la situation.

E - Le schème est fondamentalement dynamique.

F – Le schème est relatif à une classe de situations. Il n'est pas une entité universelle ou tout du moins, son universalité est relative : le schème s'applique à un ensemble limité de situations, un type de situation défini. Autrement dit, le sujet développe autant de schèmes que de classes de situations auxquelles il est confronté : à chaque catégorie de tâches à réaliser ou d'action à conduire correspond un schème (voir plusieurs).

G – Chaque sujet développe des schèmes différents en fonction des situations auxquelles il doit faire face. On note cependant que des schèmes peuvent être proches voire similaires ; cela, étant donné que beaucoup de sujets sont confrontés à des situations semblables et y répondent, pour des raisons d'influence et de médiation culturelle, en construisant le même type de schèmes.

H – Le schème est avant tout un outil cognitif permettant d'agir efficacement. C'est afin que son action soit opératoire et fonctionnelle (efficace) que le sujet construit des schèmes. »

Lorsqu'un schème se révèle inefficace dans certaines situations, il peut y avoir soit changement de schème soit modification de schème. Par exemple, pour réduire une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " – ", on utilise, généralement, la règle suivante : *On peut supprimer un couple de parenthèses précédé du signe " – ", à condition de changer les signes de chacun des termes de la somme algébrique qui était écrite entre ces parenthèses.* Cette règle se révèle inefficace lorsqu'il s'agit de réduire une somme comportant des parenthèses redondantes ou imbriquées.

3.2.2. Le schème du développement d'une expression

Le schème du développement d'une expression consiste à passer d'un produit à une somme.

Prenons un exemple de schème associé aux activités de développement :

Activité : Développer les produits :

- $3(x - 2)$
- $(x + 4)(x - 5)$

Dans la première tâche, on peut appliquer la distributivité en multipliant 3 par x et par 2, puis faire la somme algébrique. En effet, la distributivité s'applique pour les termes x et 2. C'est la propriété $a(b - c) = ab - ac$ énoncée dans les manuels qui est appliquée. On peut, également, transformer l'expression $3(x - 2)$ en $3(x + (-2))$ et multiplier 3 par x et par (-2) , puis faire la somme algébrique.

Pour la seconde tâche, on peut avoir deux manières de procéder :

- multiplier, d'abord, $(x + 4)$ par x et $(x + 4)$ par (-5) , puis faire la somme algébrique. Ensuite, multiplier x par x , x par 4, x par (-5) , 4 par (-5) , puis

faire la somme algébrique. Ici, le facteur $(x + 4)$ est considéré, dans ce cas, comme un terme, mais cela demande de l'élève une certaine dextérité, car on lui apprend surtout à appliquer les propriétés. Ce schème est très peu probable d'apparaître chez les élèves.

- prendre chaque terme dans l'une des deux sommes algébriques, les multiplier par chacun des termes de l'autre somme algébrique, puis faire la somme.

3.2.3. Le schème de la réduction

Le schème de la réduction consiste à passer d'une somme de plusieurs termes à une somme constituée de moins de termes.

Prenons un exemple de schème associé aux activités de réduction :

Activité : Réduire les expressions littérales suivantes :

- $3 + (x + 5)$
- $2 - (x + 4)$
- $x^2 + x + 3 + 2x^2 - 1$

- Pour réduire la première tâche, la manière de faire est unique : supprimer les parenthèses puis faire la somme des deux monômes de degré 0. On a :

$$\begin{aligned} 3 + (x + 5) &= 3 + x + 5 \\ &= 8 + x \end{aligned}$$

- De même, pour la deuxième tâche, la manière de faire est unique : supprimer les parenthèses en distribuant le signe " – " à x et à 4, puis faire la somme des deux monômes de degré 0. On a :

$$\begin{aligned} 2 - (x + 4) &= 2 - x - 4 \\ &= -x - 2 \end{aligned}$$

- Pour réduire la troisième tâche, la manière de faire est, également, unique : regrouper les monômes de même degré, puis faire la somme. On a :

$$\begin{aligned} x^2 + x + 3 + 2x^2 - 1 &= x^2 + 2x^2 + x + 3 - 1 \\ &= 3x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

3.2.4. Invariants opératoires

Les invariants opératoires pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents à la situation. Les invariants opératoires, (Vergnaud, 1990), permettent de comprendre le chemin largement non linéaire et discontinu de la conceptualisation.

Pour Vergnaud (1995), les principaux invariants opératoires sont de deux types : théorème-en-acte et concept-en-acte.

Les théorèmes-en-acte et les concepts-en-acte sont la composante épistémique des schèmes, et ne sont, généralement, pas l'objet d'une formulation explicite dans le processus de conceptualisation, comme c'est le cas des théorèmes et des concepts. Vergnaud le précise lorsqu'il dit :

« Les concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement, on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : proposition, fonctions propositionnelles, objets-arguments. » (Vergnaud, 1991, p.145, cité par Njomgang Ngansop, 2013, p. 36)

3.2.4.1. Théorème-en-acte

Les théorèmes-en-acte sont des invariants de type « propositions » : ils sont susceptibles d'être vrais ou faux.

Exemple

Le théorème-en-acte pour la réduction de la somme $2 - (x + 4)$ s'énonce comme suit : *On peut supprimer un couple de parenthèses précédé du signe " - " , à condition de changer les signes de chacun des termes de la somme qui était écrite entre ces parenthèses.* Ce théorème-en-acte a un domaine de validité : c'est dans le cas où on n'a pas de parenthèses internes. Lorsqu'on est en situation des parenthèses imbriquées ou redondantes, à l'exemple de l'expression $2 - (3x - (x + 4))$, ce théorème semble inefficace ; il faut donc une adaptation.

3.2.4.2. Concept-en-acte

Les concepts-en-acte sont les invariants de type « fonction propositionnelle » : ils ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions. Ils sont tenus comme pertinents pour la prise d'informations.

Exemple

Le signe " + " est considéré comme opératoire. Ce concept-en-acte a un domaine de validité : c'est dans le cas du calcul numérique. Dans la réduction d'une somme algébrique, le signe " + " peut ne pas être opératoire. Par exemple, dans l'expression $x + 3$, le signe " + " n'est pas opératoire, donc on ne peut pas réduire cette expression.

La TCC nous permet de construire des familles de situations et d'identifier des schèmes qui sont mis en œuvre par les élèves en vue d'apporter de remédiation. Elle nous permet, également, de regarder le fonctionnement cognitif de l'élève.

3.3. Opérationnalisation des variables

Dans cette section, il est question d'opérationnaliser les variables.

Donner la définition opérationnelle des variables, c'est donc décrire un ensemble d'opérations pratiques de repérage que n'importe qui pourra mettre en œuvre pour introduire les différentes modalités d'une variable indépendante (VI) ou pour mesurer la valeur d'une variable dépendante (VD). Les définitions des variables sont alors des définitions théoriques, c'est-à-dire abstraites par rapport à un dispositif empirique nécessairement singulier (Rouquette et Guimelli, 1979, p.17).

L'opérationnalisation des variables de notre sujet est présentée dans le tableau synoptique suivant.

Tableau 5 : Tableau synoptique

Sujet	Questions de recherche	Hypothèses de recherche	Objectifs de recherche	Variables	Indicateurs
<i>Etude didactique et épistémologique des obstacles qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes au collège. Proposition d'un dispositif pour leur franchissement.</i>	QP : Comment l'identification des obstacles didactiques et épistémologiques qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes peut-elle servir de levier au dépassement de ceux-ci ?	HG : Une transposition didactique des concepts de développement et de réduction des polynômes qui s'appuie sur la notion d'objectif-obstacle et un travail de clarification sur l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique, dans le traitement des expressions algébriques, peuvent contribuer à dépasser les obstacles identifiés chez les élèves.	OG : Identifier les obstacles didactiques et épistémologiques qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes et à proposer un dispositif en vue de leur dépassement.	VI : Obstacles VD : Développement et réduction	Erreurs ; choix du système éducatif ; technique ; technologie. Expressions équivalentes ; suppressions des parenthèses ; formes simples ; identité remarquables.

	QR1 : Quelle transposition didactique est faite du point de vue des manuels et en situations de classe ?	HR1 : Une analyse des productions des élèves, des manuels et des situations de classe peut permettre l'identification des obstacles.	OR1 : Identifier des obstacles didactiques et épistémologiques à partir de l'analyse des productions des élèves, des manuels et des situations de classe.	VI1 : Productions des élèves et contenus des manuels.	Erreurs ; règles ; définitions ; propriétés ; activités ; exercices.
	QR2 : Quels obstacles didactiques et épistémologiques émergent des productions des élèves sur le développement et la réduction des polynômes ?				

	QR3 : En quoi l'articulation sémantique-syntaxique et la prise en compte des obstacles identifiés peuvent-ils aider à franchir les obstacles qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes ?	HR2 : L'articulation sémantique-syntaxique dans le traitement des expressions littérales permet une clarification des opérations de développement et réduction des polynômes et peut constituer une stratégie pouvant permettre de franchir les obstacles identifiés.	OR2 : Mettre sur pied un dispositif d'apprentissage articulant les aspects sémantiques et syntaxiques et qui prend en compte les obstacles identifiés.	VI2 : Articulation sémantique-syntaxique.	Interprétations ; raisonnements ; transformations ; énoncés des règles ou des propriétés.
--	---	---	--	---	--

Conclusion du chapitre 3

La théorie anthropologique du didactique nous permet de décrire les rapports institutionnels et personnels aux activités de développement et de réduction. De même, elle nous permet de regarder comment s'organise l'élaboration des savoirs liés au développement et à la réduction des polynômes. La praxéologie permet, également, d'analyser l'activité de l'élève et l'activité mathématique de l'enseignant. L'analyse des activités en termes de praxéologie participe à l'analyse de la transposition qui est faite des objets de savoir

La théorie des champs conceptuels nous permet de construire des familles de situations et d'identifier des schèmes qui sont mis en œuvre par les élèves en vue d'apporter de remédiation. De plus, elle nous permet de regarder le fonctionnement cognitif de l'élève.

L'analyse des manuels et des pratiques de classe relatives aux activités de développement et de réduction des polynômes sera faite dans le chapitre suivant.

Chapitre 4 : Analyse des manuels et des pratiques de classe relative aux activités de développement et de réduction des polynômes

Introduction

Ce chapitre vise à mettre en lumière les éléments de la transposition didactique mis en place dans les manuels et dans les pratiques de classe, relativement aux activités de développement et de réduction des polynômes. Cela nous permet de répondre à l'une de nos questions de recherche que nous rappelons : *Quelle transposition didactique est faite du point de vue des manuels et en situations de classe ?*

L'analyse des manuels scolaires nous permet, également, d'identifier le type d'enseignement proposé concernant le développement et la réduction des polynômes, et de mettre en perspective les résultats avec les difficultés identifiées dans les différents travaux de recherche et d'analyser le rapport institutionnel au calcul littéral.

L'analyse des pratiques de classe permet de regarder le rapport personnel des enseignants au calcul littéral et les choix didactiques faits par ces derniers.

Ces analyses, celle des manuels et celle des pratiques de classe, permettent d'identifier les obstacles et de pouvoir les inférer.

4.1. Analyse des manuels

Cette analyse porte sur deux manuels de Mathématiques utilisés au Tchad par les enseignants et les élèves dont un de niveau 4^{ème} et un autre de niveau 3^{ème}. Notre analyse ne portera que sur les chapitres du calcul littéral, notamment des parties de ces chapitres qui traitent du développement et de la réduction des polynômes. Pour ce faire, nous proposons d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

- comment les concepts de développement et de réduction sont abordés dans ces manuels ?
- quelles sont les difficultés qui peuvent émerger des approches utilisées par les auteurs pour présenter ces concepts ?
- les approches utilisées peuvent-elles générer des obstacles chez les apprenants ?

Pour répondre à ces trois questions, nous allons étudier les aspects suivants :

- le langage utilisé pour formuler les énoncés : courant ou naturel, formel, mixte ;
- le statut de l'égalité dans les énoncés : annonce de résultat, équivalence, identité ;
- le statut de la lettre dans les énoncés : variable, inconnue, d'indéterminée, paramètre ;
- le statut du signe " + " dans les énoncés : opératoire, prédicatoire ;
- le statut du signe " – " dans les énoncés : opératoire, prédicatoire, marque de l'opposé ;
- la distributivité : admise, contextualisée ;
- le type de parenthèses utilisées : simples, imbriquées ;
- le caractère des expressions : structural, procédural ;
- les situations d'apprentissage proposées : concernant les situations proposées, outre les critères énoncés ci-dessus, nous regarderons les tâches et les types de tâches, les techniques utilisées pour les traiter et éventuellement si les technologies sont évoquées. Nous regarderons également si les éléments théoriques permettent aux élèves de traiter aisément ces situations.

4.1.1. Analyse du manuel de la classe de 4^{ème}

Ce manuel que nous analysons appartient à la Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM), parution 1995. Il est intitulé *4^e MATHEMATIQUES*.

Dans la suite de notre analyse, nous allons utiliser la codification suivante pour désigner ce manuel : C4.

Le manuel C4 contient au total 15 chapitres. Le chapitre qui porte sur le *Calcul littéral* est le 10^{ème} chapitre du manuel et le premier de la partie « Activités numériques ». Il va de la page 129 à la page 144, le cours va de la page 129 à 140 et les exercices, de 141 à 144. Il représente ainsi 13 % du manuel.

Le cours regroupe les activités introductives, les définitions, les propriétés, les règles, les exemples d'application des règles ou des propriétés et des exercices de type application selon la classification de la taxonomie de Bloom. La partie qui porte sur les exercices se trouve en fin de chapitre.

Le cours comprend quatre paragraphes respectivement intitulés :

1. Expressions littérales
2. Sommes algébriques

3. Produits et puissances
4. Calcul littéral

Le premier paragraphe est consacré à l'introduction du calcul littéral à partir des schémas de calcul et l'interprétation des formules par une phrase. Le deuxième introduit la notion de réduction de sommes. Dans le troisième paragraphe, sont abordés la réduction et le développement d'un produit, et le dernier paragraphe est une mise en commun des deux paragraphes précédents pour parler du calcul littéral, en général.

4.1.1.1. Le langage utilisé

Dans la grande majorité des énoncés des propriétés, le langage utilisé est le langage mixte, c'est-à-dire, un mélange de langage naturel et de langage formel.

Les règles sont exclusivement données en langage naturel. Ces règles donnent des indications sur l'organisation des calculs, les règles de priorité dans les opérations. Les figures 4 et 5 présentent des exemples.

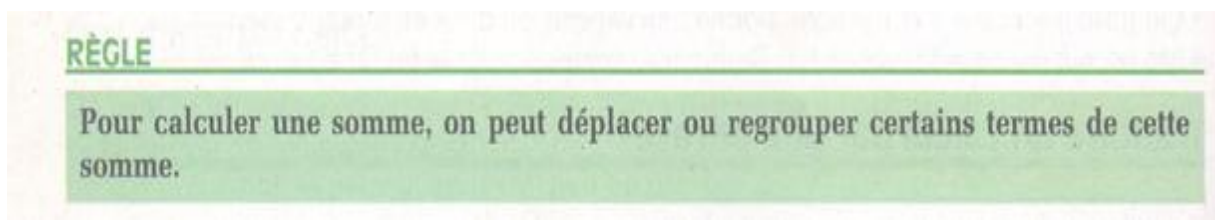


Figure 4 : Règle, manuel C4, p. 123

Cette règle est énoncée en langage naturel.

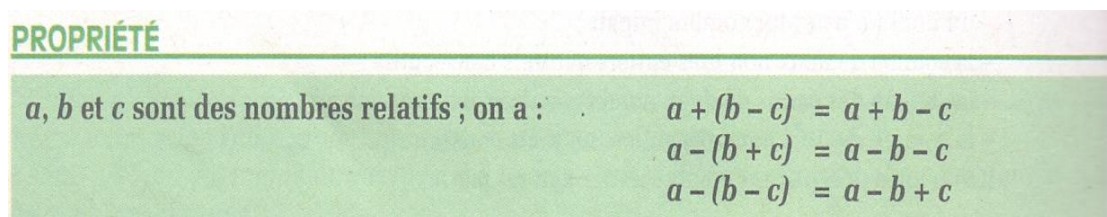


Figure 5 : Propriétés, manuel C4, p. 132

Cette propriété est énoncée en langage mixte. Nous pensons que, comme le calcul littéral est introduit pour la première fois en classe de 4^{ème}, il convient de traduire la propriété en langage courant en énonçant la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + " ou " - ", dans une somme algébrique. En effet, le langage naturel va permettre de clarifier la propriété.

4.1.1.2. Le statut de l'égalité

Nous rencontrons dans le chapitre du calcul littéral plusieurs statuts de l'égalité : l'égalité comme identité, comme équivalence ou comme annonce de résultat.

- **Egalité comme identité**

La figure suivante présente un exemple où l'égalité est utilisée comme identité.

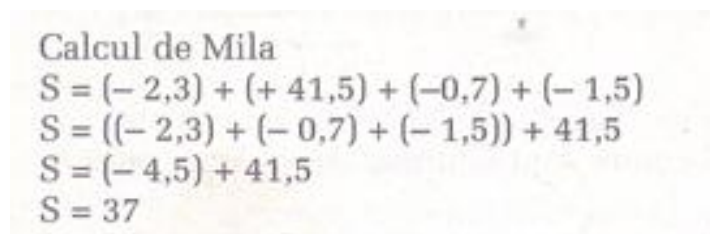

$$\begin{aligned} \text{Calcul de Mila} \\ S &= (-2,3) + (+41,5) + (-0,7) + (-1,5) \\ S &= ((-2,3) + (-0,7) + (-1,5)) + 41,5 \\ S &= (-4,5) + 41,5 \\ S &= 37 \end{aligned}$$

Figure 6 : Exemple, manuel C4, p. 132

Dans ce calcul, l'égalité a le statut d'identité. En effet, toutes les expressions qui sont à droite de l'égalité sont égales à S. La somme S est donnée et il s'agit pour Mila de la calculer. Dans les différentes étapes, les expressions à droite de l'égalité représentent le même nombre que 37. Ici également, l'égalité a le statut d'annonce de résultat.

- **Egalité comme équivalence**

Nous présentons un exemple d'activité où l'égalité est utilisée comme équivalence.

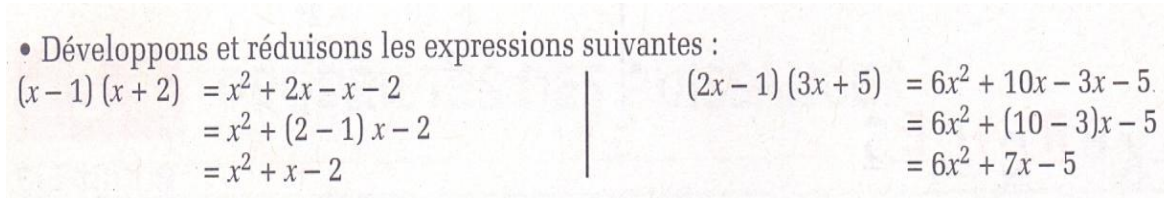

$$\begin{array}{l|l} \bullet \text{ Développons et réduisons les expressions suivantes :} & \\ (x-1)(x+2) = x^2 + 2x - x - 2 & (2x-1)(3x+5) = 6x^2 + 10x - 3x - 5 \\ = x^2 + (2-1)x - 2 & = 6x^2 + (10-3)x - 5 \\ = x^2 + x - 2 & = 6x^2 + 7x - 5 \end{array}$$

Figure 7 : Exemple, manuel C4, p. 138

Dans cet exemple portant sur le calcul algébrique, l'égalité a le statut d'équivalence. Dans les deux premières lignes, de chaque expression, l'égalité a le statut d'équivalence. Les expressions $(x-1)(x+2)$ et $x^2 + x - 2$ ont la même dénotation. Il en est de même pour les expressions $(2x-1)(3x+5)$ et $6x^2 + 7x - 5$.

Il faut noter que, contrairement au calcul numérique où le résultat est réduit à un nombre, le résultat, ici, est une formule ou encore une expression littérale. Cette formule ou expression littérale doit avoir la même dénotation que l'expression initiale.

Un moyen de contrôler le résultat est de faire des instanciations de la lettre x par un ou deux éléments de l'univers du discours.

Nous notons également que dans les propriétés qui sont énoncées, l'égalité a le statut d'équivalence, à l'exemple de la propriété suivante.

PROPRIÉTÉS

a et b sont des nombres relatifs ; on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Figure 8 : Propriété des identités remarquables, manuel C4, p. 138

Un travail sur le statut de l'égalité comme équivalence peut s'appuyer sur ces propriétés. En effet, la représentation réductrice de l'égalité comme une annonce de résultat peut être déstabilisée par de tels résultats.

4.1.1.3. Le statut de la lettre

Dans ce chapitre, nous avons rencontré l'usage de la lettre comme marque place ou comme variable. La figure suivante présente un exemple.

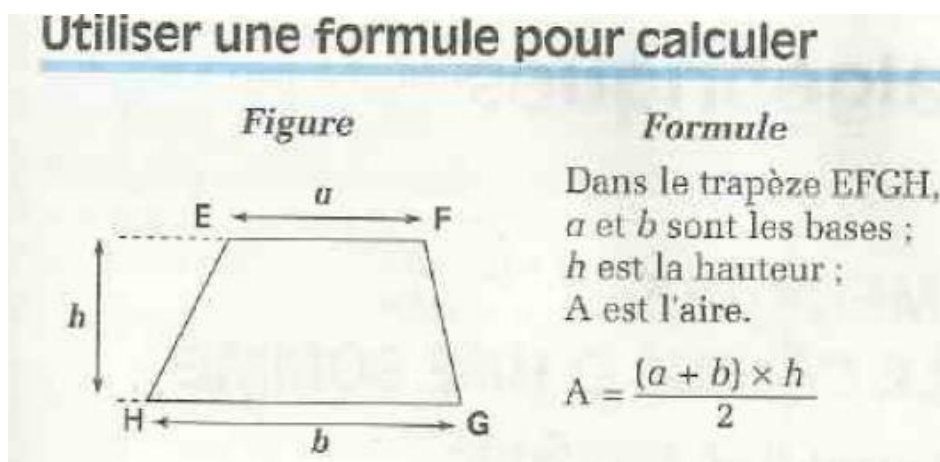


Figure 9 : Utiliser une formule pour calculer, manuel C4, p. 131

Si nous nous référons à cette figure, les lettres a , b et h sont des éléments singuliers sur la figure et des génériques du point de vue de la logique, dans la formule ; elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$. Il est important de noter que les lettres ont dans ces formules le statut de marque place. De plus, les lettres a , b et h utilisées ont, également, le statut de variable puisqu'elles sont utilisées pour produire une formule.

Nous notons que dans les expressions littérales, les lettres semblent avoir un statut prédominant de variable. En effet, dans la remarque présentée par les auteurs à la page 130, il est écrit :

• Pour obtenir la *valeur numérique* d'une expression littérale, on remplace ses lettres par les nombres donnés.

Figure 10 : Remarque, manuel C4, p. 130

Cet énoncé laisse penser qu'une expression littérale n'a qu'une valeur numérique du fait qu'il est écrit « la valeur numérique », ce qui n'est pas le cas.

Les enjeux de cette variation du statut de la lettre sont évoqués par les auteurs tels que Njomgang (2013), l'équipe de recherche de l'Université de Mons (2019), Kieran (1992, cité par Pilet, 2012).

4.1.1.4. Le statut du signe " + "

Dans le chapitre du calcul littéral, on rencontre différents statuts du signe " + " : opératoire, prédicatoire, opératoire non évalué. Le statut du signe " + " varie selon qu'on est dans le calcul numérique ou dans le calcul algébrique. Les figures suivantes présentent des illustrations.

Calcul de Mila

$$\begin{aligned} S &= (-2,3) + (+41,5) + (-0,7) + (-1,5) \\ S &= ((-2,3) + (-0,7) + (-1,5)) + 41,5 \\ S &= (-4,5) + 41,5 \\ S &= 37 \end{aligned}$$

Lorsqu'on considère ce calcul de Mila, le signe " + " est présenté à la fois comme opératoire et comme prédicatoire : au début du calcul de Mila $(-2,3) + (+41,5)$, le " + " qui sépare les deux termes est opératoire, alors que le signe " + " devant 41,3 est prédicatoire.

Pour effectuer ce calcul numérique, l'élève aura besoin de connaître les règles d'addition des nombres décimaux relatifs enseignées dans les classes inférieures. Ce calcul numérique peut servir de levier pour négocier la transition arithmétique-algèbre.

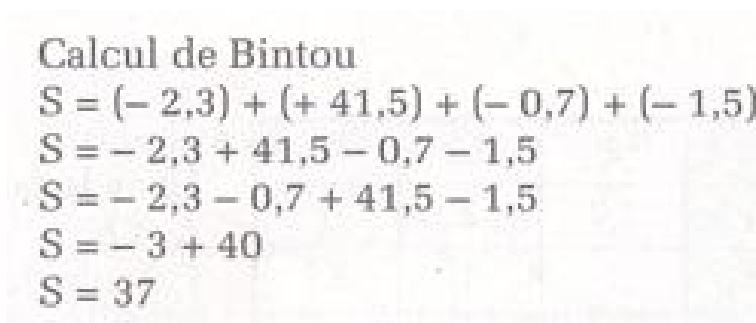
$$\begin{aligned} a - (b - 3,2) + 4,5 &= a - b + 3,2 + 4,5 \\ &= a - b + 7,7 \end{aligned}$$

Figure 11 : Exemple résolu, manuel C4, p. 133

Dans ce calcul algébrique, le statut du signe " + " situé entre 3,2 et 4,5 est opératoire et celui qui est situé à la première ligne entre b et 3,2, puis à la deuxième ligne entre b et 7,7 il est opératoire non évalué. La représentation du signe " + " placé entre deux nombres (a et b étant désignés comme des nombres) comme signe d'une opération amène les apprenants à lui donner le statut opératoire et de ce fait, combiné à la représentation que ces derniers ont de l'égalité comme annonce du résultat, ils additionnent des monômes non semblables, à l'exemple de la production $2x + 3 = 5x$.

4.1.1.5. Le statut du signe " – "

On rencontre différents statuts du signe " – " dans le chapitre du calcul littéral. Il est utilisé comme signe opératoire, comme signe prédicatoire, comme signe opératoire non évalué ou comme marque de l'opposé d'un nombre. Cependant le statut du signe " – " comme marque de l'opposé d'un nombre n'est pas explicité dans le manuel. Nous présentons quelques utilisations à travers les figures 12 et 13.



Calcul de Bintou

$$S = (-2,3) + (+41,5) + (-0,7) + (-1,5)$$

$$S = -2,3 + 41,5 - 0,7 - 1,5$$

$$S = -2,3 - 0,7 + 41,5 - 1,5$$

$$S = -3 + 40$$

$$S = 37$$

Figure 12 : Exemple, manuel C4, p. 132

Dans ce calcul, le signe " – " a le statut prédicatoire. Dans la première ligne, le signe " – " devant 0,7 et 1,5 a le statut prédicatoire. Il en est de même pour le signe " – " devant 2,3, à la deuxième ligne.

Dans une remarque faite à la page 134 du manuel, les auteurs précisent que le signe " – " devant un produit de monômes de degré différent de zéro n'indique pas un nombre négatif. La figure suivante présente cette remarque.

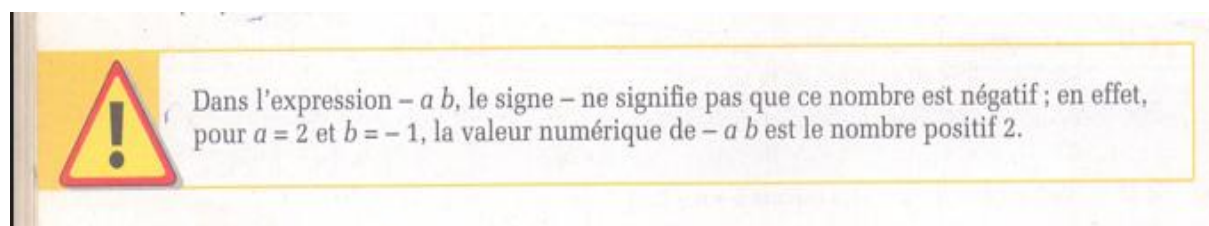
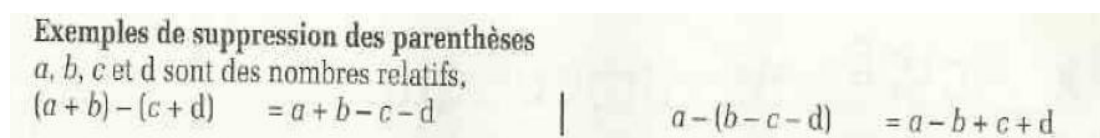


Figure 13 : Exemple, manuel C4, p. 132

Nous pensons que cette remarque est importante, aussi bien pour le produit que pour toute autre expression littérale. En effet, l'introduction du signe " – " dans les classes inférieures comme prédicatoire amène les élèves à construire cet obstacle épistémologique selon lequel le signe " – " est la marque d'une quantité négative. Cet obstacle peut être dépassé en travaillant avec les expressions simples et complexes d'un point de vue sémantique. C'est par exemple le cas de l'expression $x + 1$ ou des expressions plus complexes contenant des parenthèses. Il s'agira de travailler sur les valeurs numériques des expressions et sur les expressions complexes.

4.1.1.6. Le type de parenthèses utilisées

Les parenthèses sont des délimitateurs. Dans le chapitre du calcul littéral, les parenthèses utilisées dans les énoncés sont les parenthèses simples. Les parenthèses imbriquées sont absentes dans les énoncés. La figure suivante présente des exemples.



Exemples de suppression des parenthèses
 a, b, c et d sont des nombres relatifs,
 $(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$ | $a - (b - c - d) = a - b + c + d$

Figure 14 : Exemple, manuel C4, p. 133

Dans ces exemples, qui sont plutôt des propriétés, les parenthèses servent à constituer des nouvelles unités de signification. Pour l'expression $(a + b) - (c + d)$, les termes $(a + b)$ et $(c + d)$ sont constitués par les sommes respectives de a et de b , puis de c et de d . Pour l'expression $a - (b - c - d)$, le terme $(b - c - d)$ est constitué par les sommes de b , de c et de d . Pour réduire ces expressions, il faudrait que l'élève puisse reconnaître les expressions comme une différence de deux termes. Il sera difficile, pour l'élève, de reconnaître que les expressions $(a + b)$, $(c + d)$ et $(b - c - d)$ constituent des termes.

4.1.1.7. L'utilisation de la distributivité

Dans les énoncés, la distributivité est admise. Cependant, elle est contextualisée. Les figures 15 et 16 présentent les énoncés illustratifs.



Développer un produit, c'est l'écrire sous forme d'une somme.

Figure 15 : Définition, manuel C4, p. 134

Nous pensons que l'application systématique de cette définition peut amener les élèves à passer d'un produit dont les facteurs sont des sommes algébriques à une somme des facteurs, à l'exemple de $(x + 2)(3x + 8) = x + 2 + 3x + 8$.

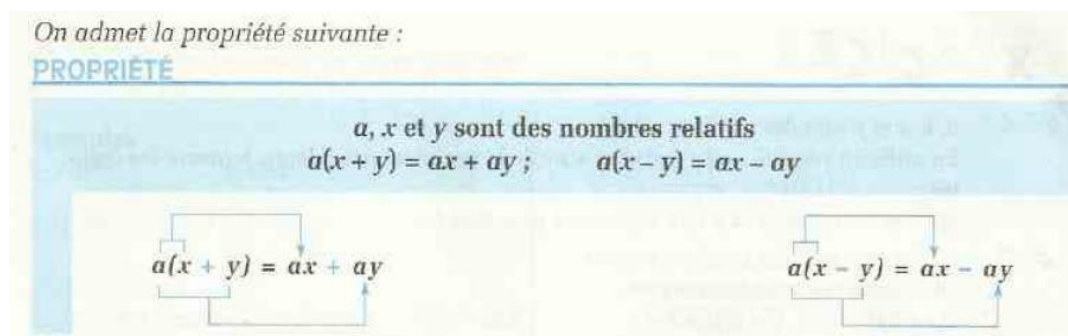


Figure 16 : Propriété, manuel C4, p. 135

D'après cette propriété, la distributivité est admise, contextualisée et un schéma de calcul est proposé. Mais avant l'énoncé de cette propriété, une activité appuyée par des images heuristiques et permettant de retrouver les écritures est proposée aux lecteurs. Dans cet énoncé, la distributivité n'est présentée qu'à gauche. Il convient de présenter également la distributivité à droite.

Une propriété plus complexe utilisant la distributivité est donnée à la page 135. La figure suivante présente cette propriété.

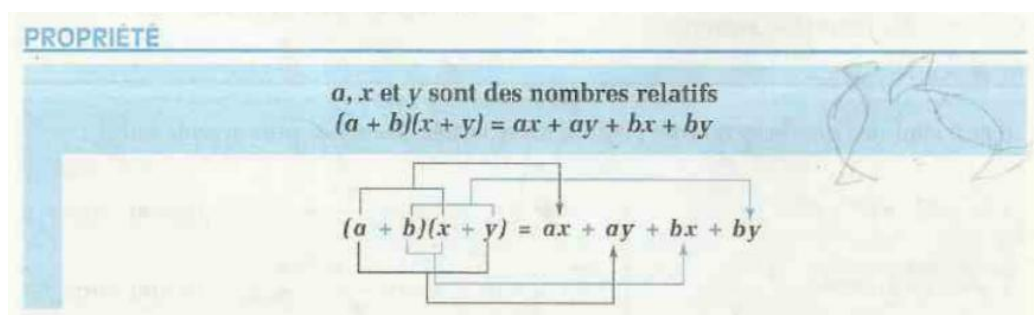


Figure 17 : Propriété, manuel C4, p. 135

Tout comme la propriété précédente, un schéma heuristique est proposé pour permettre à l'élève de visualiser et construire la propriété. Cette propriété est énoncée avec des flèches à l'appui, pour décrire le processus de développement. De notre point de vue, ce schéma est lourd et touffu à visualiser. Ici, également, il convient de présenter également la distributivité à droite.

4.1.1.8. Le caractère des expressions algébriques

Dans le chapitre du calcul littéral, il y a une mise en avant de l'aspect structural dans les énoncés. L'aspect procédural apparaît dans l'organisation du calcul et dans les règles de priorité. Les figures 18 et 19 présentent deux exemples.

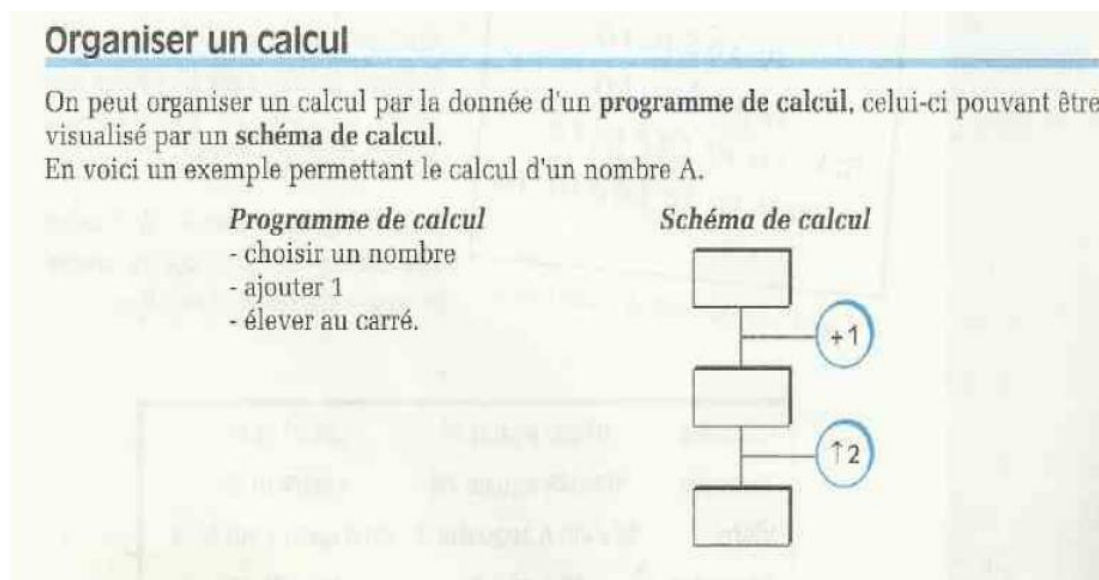


Figure 18 : Programme de calcul d'un nombre, manuel C4, p. 130

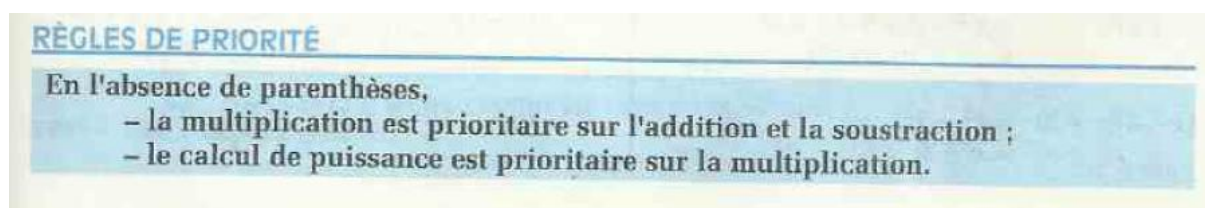


Figure 19 : Règles de priorité, manuel C4, p. 137

A travers ces deux figures, c'est l'aspect procédural du calcul algébrique qui est mis en exergue. Dans les énoncés des propriétés, par exemple, sur la suppression des parenthèses dans une somme algébrique et sur les produits remarquables (figure 5 et figure 8), c'est l'aspect structural qui est mis en avant. En effet, les énoncés de ces propriétés ne sont pas suivis des démonstrations.

4.1.1.9. Exemples résolus dans la partie « cours »

En ce qui concerne la réduction de sommes algébriques, la figure suivante présente des exemples.

$ \begin{aligned} 5,2 - (a - 3,2) &= 5,2 - a + 3,2 \\ &= (5,2 + 3,2) - a \\ &= 8,4 - a \\ (a - 2,5) - (b - 0,5) &= a - 2,5 - b + 0,5 \\ &= a - b - 2 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} (5 - a) - (2 - a) &= 5 - a - 2 + a \\ &= (5 - 2) - (a - a) \\ &= 3 \\ a - (b - 3,2) + 4,5 &= a - b + 3,2 + 4,5 \\ &= a - b + 7,7 \end{aligned} $
--	--

Figure 20 : Exemple, manuel C4, p. 133

Dans la résolution de ces exemples, les techniques utilisées par les auteurs sont la suppression des parenthèses et le regroupement des termes semblables. Les technologies mises en œuvre sont les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition.

Pour traiter ces exemples, l'élève a besoin de connaître la propriété de suppression des parenthèses dans une somme algébrique. Sur les quatre expressions, seule l'expression $5,2 - (a - 3,2)$ est une application directe du cours. Pour les autres expressions, il faut être à mesure de reconnaître la structure de l'expression et faire des identifications.

Pour le calcul des produits et des puissances, trois exemples traitant de la réduction et du développement des produits sont proposés dans le manuel. L'exemple suivant présente un exemple de réduction des produits de monômes.

$$\begin{aligned}
 (-2 \ a) (7 \ b) &= -(2 \times 7) (a \ b) \\
 &= -14 \ a \ b \\
 (-3 \ a) (-2 \ b) &= (3 \times 2) (a \ b) \\
 &= 6 \ a \ b
 \end{aligned}$$

Figure 21 : Exemple, manuel C4, p. 134

La réduction de tels produits peut aider à réussir le développement des produits de sommes algébriques.

La technique utilisée dans la réduction de ces produits est la multiplication des constantes entre elles et des lettres entre elles. La technologie justificative de cette technique est l'utilisation des propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication.

Nous notons que cet exemple n'est pas précédé de la définition de « réduire un produit », notamment un produit de monômes, mais plutôt par la propriété suivante :

Réduire un produit

a et b sont des nombres relatifs.

$$(-a) b = -a b$$

$$a (-b) = -a b$$

$$(-a) (-b) = a b$$

$$-(-a) b = a b$$

Figure 22 : Propriété, manuel C4, p. 134

Nous pensons que présenter cette propriété et l'appliquer à travers l'exemple précédent n'est pas suffisant. Il faut définir ce que c'est « réduire un produit de monômes ».

Pour le développement d'un produit, les exemples résolus suivants sont présentés.

Exemples

x et y sont des nombres relatifs

$$2(x+3) = 2x+6$$

$$x(2-y) = 2x-xy$$

$$\begin{aligned} -5x(1-2y) &= -5x \times 1 - (-5x)(2y) \\ &= -5x + 10xy \end{aligned}$$

Figure 23 : Exemple résolu, manuel C4, p. 134

Les deux premières expressions de cet exemple sont des applications directes des propriétés du cours. La troisième expression n'en est pas une. Pour la réduire, il faut considérer l'expression $-5x$ comme un facteur.

Les techniques utilisées pour développer ces trois expressions consistent à multiplier le premier facteur par chacun des termes du second facteur. La technologie mise en œuvre est la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction.

Exemples

a et b sont des nombres relatifs

$$(a+4)(b+3) = ab+3a+4b+12$$

$$(a+2)(b-1) = ab-a+2b-2$$

$$(a+4)(2b+3) = 2ab+3a+8b+12$$

$$(a-2)(b-5) = ab-5a-2b+10$$

$$(-a+4)(b-3) = -ab+3a+4b-12$$

$$(-4a+1)(2b-5) = -8ab+20a+2b-5$$

Figure 24 : Exemple résolu, manuel C4, p. 134

Parmi ces expressions, certaines sont des applications directes du cours, d'autres nécessitent des transformations, surtout pour la classe de 4^{ème} où l'on aborde des activités de développement pour la première fois.

Le jeu des signes est assez complexe lorsque le signe "-" figure dans les écritures et demande tout de même que cela soit clarifié chez les apprenants. À ce niveau, il faut vraiment montrer aux élèves comment faire le jeu avec les signes, car c'est le plus difficile.

Pour le développement de ces expressions, les techniques utilisées pour développer ces trois expressions consistent à multiplier chacun des termes du premier facteur par chacun des termes du second facteur. La technologie mise en œuvre est la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction.

Nous pensons que pour développer, par exemple, l'expression $(-4a + 1)(2b - 5)$, on pourrait écrire $(-4a + 1)(2b - 5) = ((-4a) + 1)(2b - 5) = -8ab + 20a + 2b - 5$ ou $(-4a + 1)(2b - 5) = (1 - 4a)(2b - 5) = 2b - 5 - 8ab + 20a$.

Concernant le calcul littéral, deux exemples résolus sont proposés et traitent du développement et de la réduction des expressions. Nous présentons ces exemples.

• Développons et réduisons les expressions suivantes :

$\begin{aligned}(x-1)(x+2) &= x^2 + 2x - x - 2 \\ &= x^2 + (2-1)x - 2 \\ &= x^2 + x - 2\end{aligned}$	$\begin{aligned}(2x-1)(3x+5) &= 6x^2 + 10x - 3x - 5 \\ &= 6x^2 + (10-3)x - 5 \\ &= 6x^2 + 7x - 5\end{aligned}$
---	--

Figure 25 : Exemple résolu, manuel C4, p. 138

Exemples :

$\begin{aligned}(x+5)^2 &= x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2 \\ &= x^2 + 10x + 25\end{aligned}$ $\begin{aligned}(x-3)(x+3) &= x^2 - 3^2 \\ &= x^2 - 9\end{aligned}$	$\begin{aligned}(7-x)^2 &= 7^2 - 2 \times 7 \times x + x^2 \\ &= 49 - 14x + x^2\end{aligned}$ $\begin{aligned}(-2-x)(-2+x) &= (-2)^2 - x^2 \\ &= 4 - x^2\end{aligned}$
---	--

Figure 26 : Exemple résolu portant sur le développement des produits remarquables, manuel C4, p. 138

Pour l'exemple de la figure 25, les structures de ces expressions sont similaires à celles de l'exemple de la figure 24. Ainsi, nous pensons que les élèves éprouveront moins de difficultés à développer et à réduire ces expressions, s'ils ont compris les exemples précédents.

La technique utilisée, pour le développement de ces deux expressions, consiste à multiplier chacun des termes du premier facteur par chacun des termes du second facteur. Pour la réduction, la technique utilisée consiste à regrouper les termes semblables. Les technologies

mises en œuvre sont la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction, et la mise en évidence d'un facteur commun.

Pour l'exemple de la figure 26, c'est essentiellement l'application directe des propriétés des identités remarquables. Même la structure de l'expression $(-2 - x)(-2 - x)$ n'est pas prise en compte par les propriétés du cours, puisque la propriété est énoncée à partir des nombres entiers relatifs. La technique utilisée, ici, est l'identification des termes de la somme. La technologie mise en œuvre est la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction.

4.1.1.10. Exercices proposés en fin de chapitre

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux exercices non résolus proposés en fin de chapitre et portant sur les quatre paragraphes développés dans ce chapitre que nous rappelons : expressions littérales, sommes algébriques, produits et puissances, calcul littéral. Les approfondissements sont des activités dont la résolution mobilise les différentes notions évoquées dans les paragraphes et leur articulation.

Expressions littérales

Les exercices de cette partie portent sur l'introduction du calcul littéral à partir des schémas de calcul et l'interprétation des formules par une phrase. Sept exercices sont proposés. Les quatre premiers exercices mettent en avant l'aspect sémantique dans le traitement des expressions littérales. Ils permettent de donner du sens à l'expression littérale. Les exercices 1 et 2 portent sur l'identification des formules de calcul du périmètre des objets géométriques tels que le triangle, le trapèze, le carré, le rectangle et le cercle, et le calcul de leur périmètre pour des valeurs données. Les exercices 3 et 4 portent sur l'identification des formules de calcul de l'aire des figures géométriques comme le triangle, du trapèze, du carré, du rectangle et du cercle, et le calcul de l'aire de ces figures pour des valeurs données. Les exercices 5, 6 et 7 sont des situations complexes consistant à écrire des formules.

Sommes algébriques

Quatre exercices sur le calcul des sommes algébriques sont proposés en fin de chapitre (les exercices 8, 9, 10 et 11). Pour les exercices 8, 9 et 10, il est question de calculer, de manière performante, des sommes. L'exercice 11 porte sur la réduction d'une somme algébrique comportant une lettre. La figure suivante présente cet exercice.

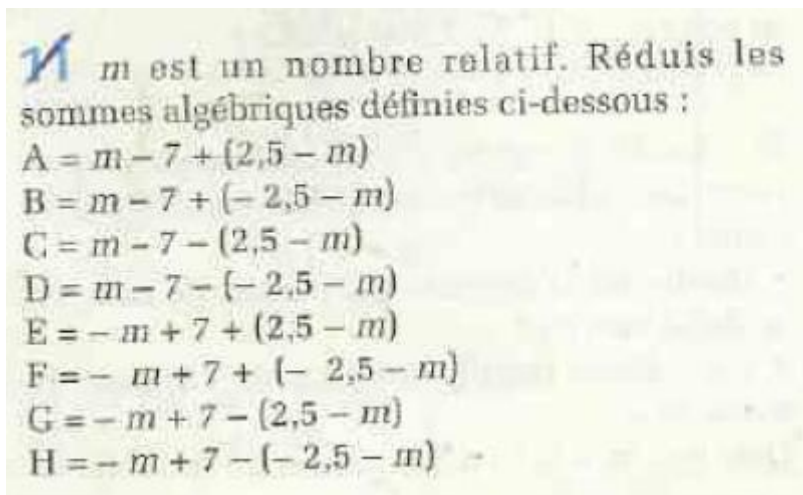


Figure 27 : Exercice 11, manuel C4, p. 141

Cet exercice n'est pas une application directe des propriétés proposées dans le cours. Dans le cours, les premiers termes de la somme sont des monômes alors qu'ici, les premiers termes sont des sommes algébriques. Dans l'exemple précédent, on a des formes où les premiers termes sont des sommes algébriques mais ils sont délimités par les parenthèses, ce qui n'est pas le cas dans cet exercice.

Produits et puissances

Parmi les exercices proposés en fin de chapitre dans la partie produits et puissances, trois exercices portent sur la réduction et le développement des produits. Les expressions proposées dans ces exercices ont presque la même structure que ceux proposés en exemples résolus.

Calcul littéral

Parmi les exercices proposés en fin de chapitre, 10 exercices (de 18 à 27) portent sur le calcul littéral. En ce qui concerne notamment les exercices traitant du développement et de la réduction des expressions algébriques, les structures des expressions proposées sont majoritairement soit des applications du cours, soit prises en compte par les exemples résolus. Les figures suivantes présentent quelques exercices dont le développement et la réduction des expressions nécessitent des transformations ou des adaptations de la part des élèves.

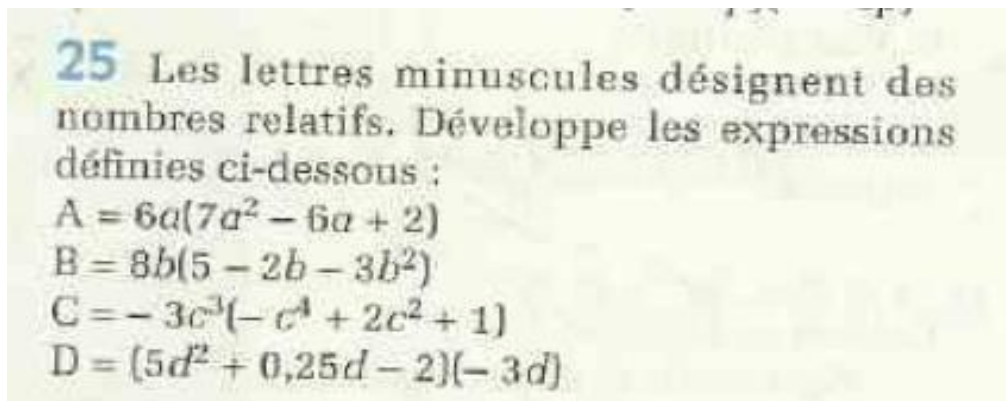


Figure 28 : Exercice 25, manuel C4, p. 143

Dans cet exercice, à l'expression D, on présente la distributivité à droite alors que dans les énoncés des propriétés et des exemples résolus, on n'a présenté que la distributivité à gauche. De plus, l'un des facteurs de chaque expression est un trinôme.

Exercices d'approfondissement

Les auteurs du manuel ont classifié les exercices proposés en fin de chapitre selon la taxonomie de Bloom en présentant des exercices d'approfondissement. Les exercices d'approfondissement sont des exercices complexes. Treize exercices sont proposés dans cette partie. Parmi ces exercices, l'exercice 28 ci-dessous porte sur le développement et la réduction des expressions.

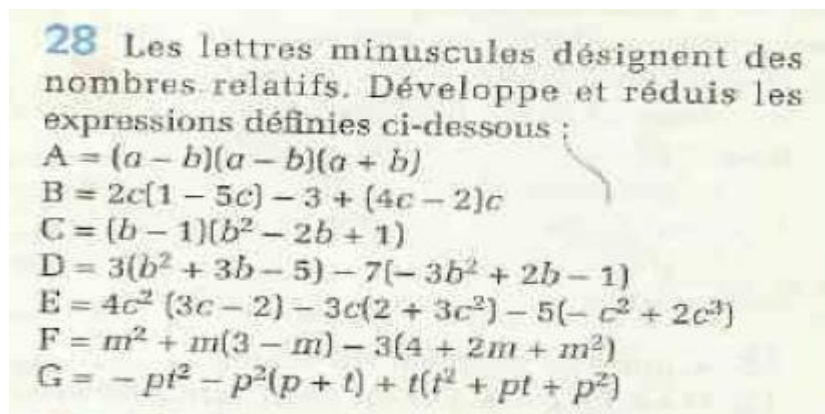


Figure 29 : Exercice 28, manuel C4, p. 143

Dans cet exercice, les activités sont assez complexes et les règles de calcul ne peuvent pas être appliquées directement. On a des exercices du niveau analyse selon la taxonomie de Bloom. En effet :

- L'expression A est le produit de trois facteurs. Il faut donc que l'élève puisse utiliser l'associativité de la multiplication, ce qui n'est pas présentée dans la partie "cours".

- L'expression B est une somme algébrique de trois termes dont deux sont des produits de deux facteurs. Le développement du dernier terme demande que l'élève sache utiliser la distributivité à droite, ce qui n'a pas été énoncé en cours.
- Les expressions D, E, F et G sont des sommes algébriques dont certains termes sont des produits. Le développement de ces expressions va donc exiger que l'élève puisse reconnaître la structure des expressions pour appliquer les règles appropriées. Une activité dans cette perspective est proposée à la page 139 du manuel, il s'agit de reconnaître des sommes algébriques et des produits. Une difficulté dans ces activités de développement est que certains facteurs sont des sommes algébriques de trois termes. Nous ne retrouvons pas de tels exercices dans les exemples traités.

4.1.1.11. Synthèse de l'analyse du manuel de la classe de 4^{ème}

Notre analyse s'est intéressée au calcul littéral. Pour cette analyse, nous retenons les points suivants :

- le langage utilisé dans la grande majorité des énoncés des propriétés est le langage mixte, c'est-à-dire, un mélange de langage naturel et de langage formel. Les règles sont exclusivement données en langage naturel ;
- l'égalité est utilisée dans les énoncés comme identité, comme équivalence ou comme annonce de résultat ;
- les lettres sont utilisées comme marque place ou comme une variable ;
- le signe " + " est utilisé comme opérateur, comme prédicatoire, comme opérateur non évalué ;
- le signe " – " est utilisé comme opérateur, comme prédicatoire, comme opérateur non évalué ou comme marque de l'opposé d'un nombre. Cependant le statut du signe " – " comme marque de l'opposé d'un nombre n'est pas explicité dans les manuels ;
- la distributivité est admise. Cependant, elle est contextualisée. De plus, c'est seulement la distributivité à gauche qui est présentée ;
- il y a une mise en avant de l'aspect structural des expressions algébriques dans les énoncés. L'aspect procédural des expressions n'apparaît que dans l'organisation du calcul et dans les règles ;

- le type de parenthèses utilisées : les parenthèses utilisées dans les énoncés sont les parenthèses simples. Les parenthèses imbriquées sont absentes dans les énoncés ;
- des exemples résolus et des exercices sont proposés dans le manuel C4. Pour la plupart des exemples résolus, les techniques sont utilisées, de même que les technologies sont mises en œuvre. Cependant, pour certains exemples résolus, les techniques utilisées ne sont pas explicitées. De plus, pour les exemples dont les structures des expressions ne sont pas des applications directes du cours, les auteurs du manuel ne présentent pas les transformations, en guise de techniques, pour faciliter l'application des propriétés ou règles, à l'exemple de la réduction de l'expression $a - (b - c - d)$. Pour les exercices proposés en fin de chapitre, notons que la plupart des structures des expressions proposées dans ces exercices ont la même structure que ceux proposés en exemples résolus. Pour certains exercices, les éléments du cours tout comme les exemples résolus ne sont pas suffisants pour les traiter ; il faut l'accompagnement d'un enseignant.

4.1.2. Analyse du manuel de la classe de 3^{ème}

Ce manuel appartient à la Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM), parution 1996. Il est intitulé *3^e MATHEMATIQUES*.

Dans la suite de notre analyse, nous allons utiliser la codification suivante pour désigner le manuel : C3.

Sa première parution date de 1995.

Le manuel C3 contient au total 16 chapitres. Le chapitre qui porte sur le *Calcul littéral* est le 10^{ème} chapitre du manuel et le premier de la partie « Activités numériques ». Il va de la page 119 à la page 130, le cours va de la page 120 à 127 et les exercices, de 128 à 130. Il représente ainsi 10 % du manuel.

Le cours regroupe les activités introductives, les définitions, les propriétés, les règles, les exemples d'application des règles ou des propriétés et des exercices de type application selon la classification de la taxonomie de Bloom. La partie qui porte sur les exercices se trouve en fin de chapitre. Ce cours est un approfondissement du calcul littéral étudié en classe de 4^{ème}.

Le cours comprend trois paragraphes respectivement intitulés :

1. Quotients
2. Calcul littéral

3. Exemples d'expressions littérales

Le premier paragraphe est consacré à la présentation des quotients égaux et aux opérations sur les quotients. Le deuxième présente les propriétés de puissance et du calcul algébrique. Le dernier paragraphe aborde la notion de polynôme et des fractions rationnelles.

4.1.2.1. Le langage utilisé

Comme pour le manuel C4, la majorité des énoncés proposés dans le manuel C3 sont présentées dans un langage mixte.

Les règles sont essentiellement données en langage naturel. Les propriétés sont énoncées exclusivement en langage mixte. Les figures suivantes présentent des exemples.

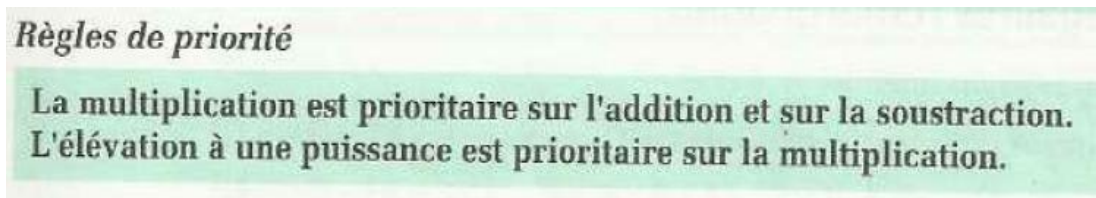


Figure 30 : Règle de priorité, manuel C3, p. 123

Cette règle est énoncée en langage naturel. Le langage naturel permet de clarifier la propriété.

<i>a et b sont des nombres ; on a</i>	$a + (b - c)$	$=$	$a + b - c$
	$a - (b + c)$	$=$	$a - b - c$
	$a - (b - c)$	$=$	$a - b + c$

Figure 31: Propriétés, manuel C3, p.123

Cette propriété est énoncée en langage mixte.

4.1.2.2. Le statut de l'égalité

Dans le chapitre calcul littéral, nous rencontrons plusieurs statuts de l'égalité. L'égalité est utilisée comme équivalence ou comme annonce de résultat. La figure 32 en est une illustration.

Exemple 2

• Développons et réduisons les expressions littérales P , Q et R :

$P = (12a + 17)^2$	$Q = \left(\frac{7a}{2} - 5\right)^2$	$R = (13x - 15)(13x + 15)$
$P = (12a)^2 + 2 \times 12a \times 17 + (17)^2$	$Q = \left(\frac{7a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{7a}{2}\right) \times 5 + (5)^2$	$R = (13x)^2 - (15)^2$
$P = 144a^2 + 408a + 289$	$Q = \frac{49a^2}{4} - 35a + 25$	$R = 169x^2 - 225$

Figure 32 : Exemple, manuel C3, p. 123

Dans ces calculs, l'égalité a le statut d'équivalence.

$$\text{On a : } 7x^2 \times 5x^4 = (7 \times 5) x^2 \times x^4 = 35x^{2+4} = 35x^6$$

Figure 33 : Exemple, manuel C3, p. 126

Dans cet exemple, l'égalité a le statut d'équivalence et d'annonce de résultat.

4.1.2.3. Le statut de la lettre

Dans le manuel C3, nous rencontrons dans des énoncés où la lettre est utilisée comme marque place ou comme variable. Les figures 34 et 35 présentent des illustrations.

Égalités remarquables

a et b sont des nombres ; on a	$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
	$(a - b)^2$	=	$a^2 - 2ab + b^2$
	$(a + b)(a - b)$	=	$a^2 - b^2$

Figure 34 : Propriété, manuel C3, p. 123

Dans cette propriété les lettres a et b sont utilisées comme marque place. Il convient de noter que pour développer les expressions à l'exemple de $(-3x - 5)^2$, il faut pouvoir identifier le terme $-3x$ à la lettre a .

Présentation

coefficient	→	$5x^2$	←	degré	On considère l'expression littérale : $5x^2$; c'est un monôme en x , 5 est le coefficient du monôme, 2 est le degré du monôme.
		$\underbrace{\hspace{1cm}}$			
		monôme en x			

Figure 35 : Présentation de la notion de monôme, manuel C3, p. 126

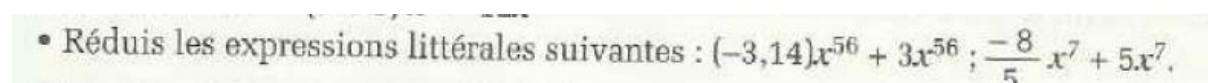
Dans cette présentation, la lettre x représente une variable.

4.1.2.4. Le statut du signe " + "

On rencontre le signe " + " dans le chapitre du calcul littéral. Il est utilisé comme opérateur, prédicatoire, opérateur non évalué. Pour le cas où le signe " + " est utilisé comme opérateur non évalué, nous pouvons le constater dans l'expression P de la figure 32.

4.1.2.5. Le statut du signe " – "

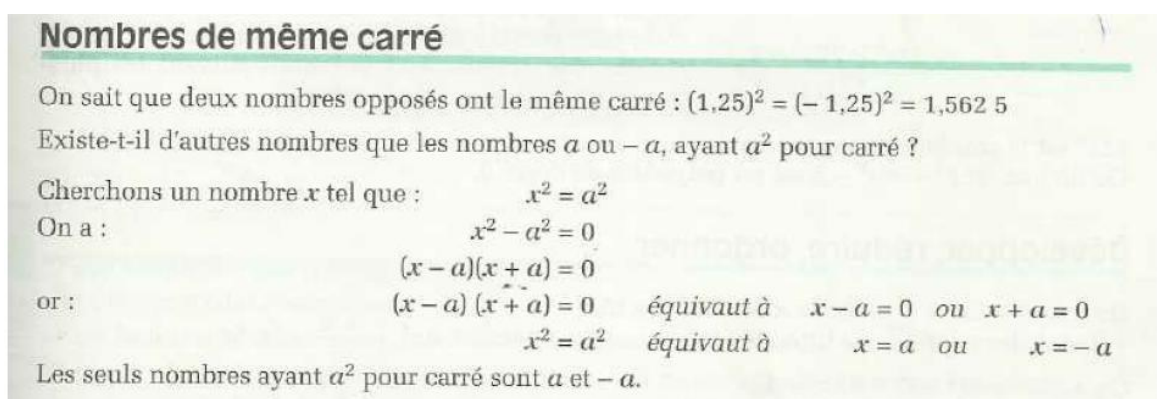
Nous retrouvons dans le chapitre du calcul littéral différents statuts du signe " – " : il est utilisé comme opérateur, comme prédicatoire, comme opérateur non évalué ou comme marque de l'opposé d'un nombre. Les figures suivantes présentent des exemples.



• Réduis les expressions littérales suivantes : $(-3,14)x^{56} + 3x^{56}$; $-\frac{8}{5}x^7 + 5x^7$.

Figure 36 : Exemple, manuel C3, p. 126

Le signe " – " devant 3,14 est prédicatoire.



Nombres de même carré

On sait que deux nombres opposés ont le même carré : $(1,25)^2 = (-1,25)^2 = 1,5625$

Existe-t-il d'autres nombres que les nombres a ou $-a$, ayant a^2 pour carré ?

Cherchons un nombre x tel que : $x^2 = a^2$

On a : $x^2 - a^2 = 0$
 $(x - a)(x + a) = 0$

or : $(x - a)(x + a) = 0$ équivaut à $x - a = 0$ ou $x + a = 0$
 $x^2 = a^2$ équivaut à $x = a$ ou $x = -a$

Les seuls nombres ayant a^2 pour carré sont a et $-a$.

Figure 37 : Nombres opposés, manuel C3, p. 125

Dans la première ligne, dans l'écriture $(-1,25)^2$, le signe " – " est prédicatoire. Dans la forme factorisée $(x - a)(x + a)$, il est opérateur. Il indique l'opposé de a dans l'égalité $x = -a$.

4.1.2.6. Le type de parenthèses utilisées

Dans le chapitre du calcul littéral, les parenthèses utilisées dans les énoncés sont les parenthèses simples. Les parenthèses imbriquées sont absentes dans les énoncées.

4.1.2.7. L'utilisation de la distributivité

La distributivité est admise, dans les énoncés. La figure suivante présente une illustration.

$x, y \text{ et } z \text{ sont des nombres ; on a}$

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$x(y - z) = xy - xz$$

Figure 38 : Propriété, manuel C3, p. 123

Contrairement au manuel C4, un schéma de calcul n'est pas proposé dans la présentation de la propriété. Ainsi, la distributivité n'est pas contextualisée et n'est présentée qu'à gauche. Il convient de la présenter également à droite.

4.1.2.8. Le caractère des expressions algébriques

Dans le chapitre du calcul littéral, il y a une mise en avant de l'aspect structural dans les énoncés. Comme illustration, la propriété de la figure 31 est une illustration.

Comme nous l'avons dit pour le manuel C4, il convient également d'articuler les aspects procédural et structural des expressions.

4.1.2.9. Exemples résolus dans la partie « cours »

Deux exemples résolus portant sur le développement et la réduction des expressions algébriques sont proposés. La figure suivante présente un exemple.

Exemple 1

• Développons et réduisons l'expression A : $A = (2a - 6)(3 - 4a) + 7a^2$ $A = 6a - 8a^2 - 18 + 24a + 7a^2$ $A = 7a^2 - 8a^2 + 24a + 6a - 18$ $A = -a^2 + 30a - 18$	• Calculons sa valeur numérique pour $a = -4$: $A = -a^2 + 30a - 18$ $A = -(-4)^2 + 30 \times (-4) - 18$ $A = -16 + (-120) - 18$ $A = -154$
--	---

Figure 39 : Exemple, manuel C3, p. 123

Pour cet exemple, la technique utilisée pour le développement consiste à multiplier chacun des termes du premier facteur par chacun des termes du second facteur, puis faire la somme. Pour la réduction, la technique utilisée consiste à regrouper les termes semblables. Les technologies mises en œuvre sont la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction, et la commutativité de l'addition.

Pour développer cette expression, l'élève aura besoin de considérer $2a$ comme a et $4a$ comme b avant d'appliquer la propriété énoncée au cours. De plus, à partir de l'expression A , les auteurs ont calculé la valeur numérique de celle-ci, pour $a = -4$. Même si les auteurs du manuel n'ont pas fait cette remarque, ce calcul montre que les deux expressions ont la même dénotation. Nous pensons que cette vérification doit être faite de façon systématique par les

élèves en calculant la valeur numérique des expressions algébriques obtenues dans des activités de développement et de réduction de ces expressions. Cela servira comme moyen de contrôle sémantique de la validité des opérations.

Trois autres exemples traitant de la réduction des sommes et des produits sont proposés. Les figures suivantes en présentent deux.

$$\text{On a : } 7x^2 + 5x^2 = (7 + 5) x^2 = 12x^2$$

Figure 40 : Exemple résolu, manuel C3, p. 126

$$\begin{aligned} \text{On a : } 5x + 6x^3 - 1 - 7x + 12x^3 - 14x^3 - 6x + 5 &= (6x^3 + 12x^3 - 14x^3) + (5x - 7x - 6x) + (-1 + 5) \\ &= 4x^3 - 8x + 4 \end{aligned}$$

Figure 41 : Exemple résolu, manuel C3, p. 126

Pour déduire ces sommes, il suffit d'utiliser les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition.

Dans la résolution de ces exemples, la technique utilisée est le regroupement des termes semblables. La technologie justificative de cette technique est l'application des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition.

4.1.2.10. Exercices proposés en fin de chapitre

Comme pour l'analyse du manuel C4, nous nous intéressons à l'analyse des exercices proposés en fin de chapitre portant sur les trois paragraphes développés dans ce chapitre que nous rappelons : quotients, calcul littéral et exemples d'expressions littérales

Quotients

Deux exercices portant sur les quotients (1 et 2) sont proposés. L'exercice 1 porte sur la détermination de la valeur de l'inconnue dans deux quotients égaux. L'exercice 2 porte sur les opérations (additions, multiplication et division) sur les fractions. Notons que, même si des exemples résolus ne sont pas présentés pour traiter ces exercices, les élèves auront besoin d'appliquer les propriétés énoncées au cours. Nous pensons que si l'exercice 2 est traité correctement par les élèves, cela peut faciliter le développement et la réduction des polynômes dont les monômes ont les coefficients appartenant à $\mathbb{Q}$.

Calcul littéral

Huit autres exercices portant sur le calcul des sommes algébriques sont proposés (3 à 10). Parmi ces exercices, les exercices 4, 5 et 6 portent sur le développement et la réduction des expressions algébriques. Présentons quelques-uns de ces exercices.

4 a désigne un nombre .
1) Développe, puis réduis :
 $A = (3a - 2)(4a + 1) - 5a^2$
 $B = (-2a + 3)(5a - 7) + 10a^2$
 $C = (-a - 6)(-3a + 8) - 2a^2 + 48$
 $D = -(-4a - 1)(-2a + 9) + 6a^2 - 8$
2) Calcule la valeur numérique de A, B, C et D pour $a = -2$.

Figure 42 : Exercice 4, manuel C3, p. 128

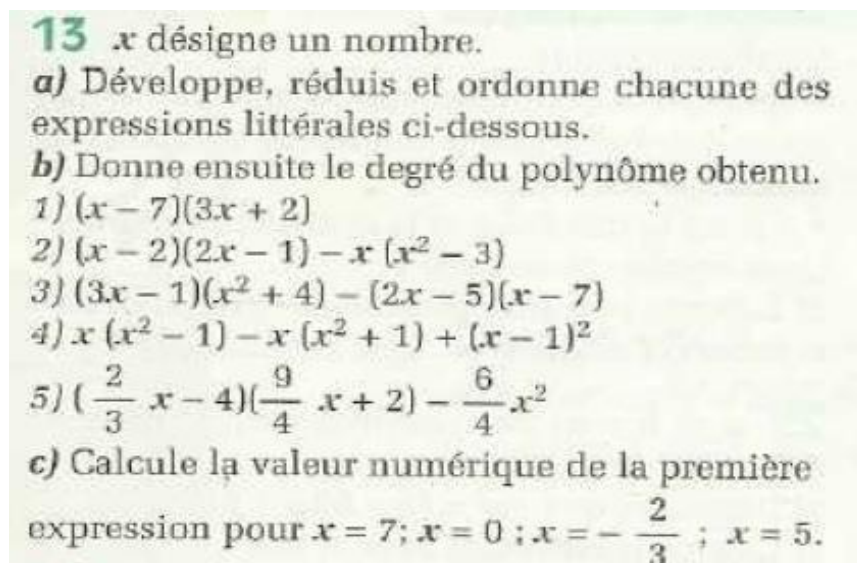
5 a désigne un nombre .
1) Développe, puis réduis :
 $A = (3a - 5)^2$ | $C = (4a - \frac{5}{2})^2$
 $B = (-2a - 4)^2$ | $D = -(2a - 3)(2a + 3)$
2) Calcule la valeur numérique de A, B, C et D pour $a = -3$.

Figure 43 : Exercice 5, manuel C3, p. 128

Ces deux exercices ne sont pas des applications directes du cours ; ils présentent des expressions un peu complexes dont le développement et la réduction demandent des adaptations de la part des élèves. Nous pensons que si les élèves ont compris les exemples résolus et mobilisent les éléments du cours, ils pourront développer et réduire la plupart de ces expressions. Par contre, pour l'expression D, de telles structures ne sont pas présentées dans les propriétés du cours ni dans les exemples résolus. Rappelons que dans le cours, le statut du signe " - " comme marque de l'opposé d'une expression n'est pas explicité. Pour développer et réduire ces deux expressions, il convient de considérer le signe " - " devant les produits de sommes comme indiquant l'opposé de ces produits.

Exemples d'expressions littérales

Quatre exercices (11 à 14) portant sur les expressions littérales sont proposés. Parmi ces exercices, trois portent sur le développement, la réduction et l'ordonnement des expressions littérales. Les exercices 11 et 12 sont similaires à ceux proposés dans le paragraphe portant sur le calcul littéral. L'exercice 13 suivant est différent des autres et présente des expressions complexes.



13 x désigne un nombre.

a) Développe, réduis et ordonne chacune des expressions littérales ci-dessous.

b) Donne ensuite le degré du polynôme obtenu.

- 1) $(x - 7)(3x + 2)$
- 2) $(x - 2)(2x - 1) - x(x^2 - 3)$
- 3) $(3x - 1)(x^2 + 4) - (2x - 5)(x - 7)$
- 4) $x(x^2 - 1) - x(x^2 + 1) + (x - 1)^2$
- 5) $(\frac{2}{3}x - 4)(\frac{9}{4}x + 2) - \frac{6}{4}x^2$

c) Calcule la valeur numérique de la première expression pour $x = 7$; $x = 0$; $x = -\frac{2}{3}$; $x = 5$.

Figure 44 : Exercice 13, manuel C3, p. 129

Pour développer ces expressions, surtout les deux dernières, il faut bien identifier les termes de l'expression et les facteurs de ces termes. De plus, il faut mobiliser les propriétés des opérations sur les fractions et des produits remarquables.

Exercices d'approfondissement et de recherche

Dix-sept exercices sont proposés dans cette partie. Tous ces exercices sont des situations complexes.

4.1.2.11. Synthèse de l'analyse des manuels C3

De l'analyse du chapitre portant sur le calcul littéral, il ressort les points suivants :

- le langage utilisé dans les énoncés des règles est essentiellement naturel. Les propriétés sont énoncées exclusivement en langage mixte.
- l'égalité est utilisée dans les énoncés comme identité, comme équivalence ou comme annonce de résultat ;
- les lettres sont utilisées comme marque place ou comme variable ;

- le signe " + " est utilisé comme opératoire, comme prédicatoire, comme opératoire non évalué ;
- le signe " – " est utilisé comme opératoire, comme prédicatoire, comme opératoire non évalué ou comme marque de l'opposé d'un nombre. Cependant le statut du signe " – " comme marque de l'opposé d'un nombre n'est pas explicité dans le manuel ;
- le type de parenthèses utilisées : les parenthèses utilisées dans les énoncés sont les parenthèses simples. Les parenthèses imbriquées sont absentes dans les énoncés ;
- la distributivité est admise, dans les énoncés. De même, elle n'est pas contextualisée. De plus, c'est seulement la distributivité à gauche qui est présentée ;
- il y a une mise en avant de l'aspect structural des expressions algébriques dans les énoncés ;
- les exemples résolus et des exercices sont proposés dans le manuel C3. Pour la plupart des exemples résolus, les techniques sont utilisées, de même que les technologies sont mises en œuvre. Cependant, pour certains exemples résolus, les techniques utilisées ne sont pas explicitées.

4.2. Analyse des pratiques de classe

Cette analyse porte sur les séquences d'enseignement du calcul littéral de deux enseignants de Mathématiques d'un lycée de N'Djamena : Monsieur K. et Monsieur B., qui ont respectivement la charge des classes de 4^{ème} et 3^{ème}, au titre de l'année scolaire 2021-2022. Pour cette analyse, nous nous proposons d'apporter des éléments de réponses aux questions suivantes :

- comment les concepts de développement et de réduction sont abordés par les enseignants en situation de classe ?
- quelles sont les difficultés qui peuvent émerger des approches utilisées par les enseignants pour aborder ces concepts ?
- les approches utilisées par les enseignants peuvent-elles générer des obstacles chez les apprenants ?
- les enseignants prennent-ils en charge les erreurs des élèves ?

Pour répondre à ces quatre questions qui sont intimement liées, nous allons nous appuyer sur la grille d'analyse des manuels en y rajoutant des éléments relatifs à la prise en charge ou non des erreurs des élèves par les enseignants.

4.2.1. La séquence observée de Monsieur K., classe de 4^{ème} A

Le chapitre qui traite du calcul littéral en classe de 4^{ème} est déroulé en 4 séances de 120 minutes par Monsieur K..

4.2.1.1. Le langage utilisé

Dans le cours de Monsieur K., les énoncés sont présentés dans un langage mixte, c'est-à-dire courant et formel. Nous présentons un énoncé présenté dans un langage mixte.

Propriété :

a, b et c sont des nombres relatifs. On a :

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Comme le calcul littéral est introduit pour la première fois en classe de 4^{ème}, nous pensons qu'il convient de traduire la propriété en langage courant en énonçant la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + " ou " - ", dans une somme algébrique.

4.2.1.2. Le statut de l'égalité

Nous rencontrons, dans le cours de Monsieur K., trois statuts de l'égalité. Il est utilisé comme annonce de résultat, comme équivalence et comme identité. Cependant, Monsieur K. n'a pas fait remarquer aux élèves que le résultat dans un calcul numérique est, souvent, un terme, alors que le résultat dans la réduction d'une somme algébrique peut être un terme ou une somme algébrique.

4.2.1.3. Le statut de la lettre

Dans les énoncés proposés par Monsieur K., nous constatons l'usage de la lettre comme nombre généralisé. Nous présentons un exemple de propriété où la lettre est un nombre généralisé.

Propriété :

a, b et k sont des nombres relatifs. On a :

$$k(a + b) = ka + kb \quad (a + b)k = ka + kb$$

$$k(a - b) = ka - kb \quad (a - b)k = ka - kb$$

4.2.1.4. Le statut du signe " + "

Dans les activités proposées aux élèves et résolues en classe, nous constatons trois statuts du signe " + " : opératoire, prédicatoire, opératoire non évalué. Dans le calcul numérique, il est présenté à la fois comme opératoire et comme prédicatoire. Dans le calcul algébrique, il est tantôt opératoire, tantôt opératoire non évalué. L'enseignant n'a pas attiré l'attention des élèves sur le fait que le signe " + " entre deux termes non semblables est opératoire non évalué.

4.2.1.5. Le statut du signe " - "

Nous rencontrons différents statuts du signe " - " dans le cours déroulé par Monsieur K.. Il est utilisé comme opératoire, comme prédicatoire ou comme opératoire non évalué. Le statut du signe " - " comme indiquant l'opposé d'un nombre n'est pas commenté par l'enseignant, lors des activités.

4.2.1.6. Le type de parenthèses utilisées

Dans la présentation des énoncés des propriétés et dans la résolution des activités, Monsieur K. ne présente que des parenthèses simples. Les parenthèses imbriquées sont absentes dans les énoncées.

4.2.1.7. L'utilisation de la distributivité

Dans le cours déroulé par Monsieur K., la distributivité n'est pas explicitée dans les énoncés portant sur le développement d'un produit. Cependant, elle est contextualisée.

4.2.1.8. Le caractère procédural et structural

Dans le cours déroulé par Monsieur K., il y a une mise en avant de l'aspect structural. L'aspect procédural n'apparaît que dans l'organisation de calcul.

4.2.1.9. Exemples résolus

Lors du déroulement de son cours, Monsieur K. a proposé des exemples qui sont résolus en classe. Ainsi, cinq exemples traitant du développement et de la réduction sont proposés par Monsieur K..

Les tâches données sont : « réduire un produit » et « réduire une somme », « développer des produits » et « développer et réduire une expression ». Nous présentons quelques énoncés de ces exemples.

Exemple 1 : réduction les expressions suivantes :

- $m + 7a + (2,5 - m)$
- $m + 7a - (2,5 - m)$
- $a - (b + c - 3) + 4$

Exemple 2 : développons les expressions suivantes :

- $2(x^2 + 4) + 2m(2x - 1)$
- $(x + 1)(x + 2)$
- $(2x - 5)(7 - x)$

Exemple 3 : développons les expressions suivantes :

- $(x + 3)^2$
- $(y + 1)^2$
- $(x - 4)^2$
- $(t - 10)^2$
- $(x - 2)(x + 2)$
- $(x + 10)(x - 10)$

Ces exemples sont essentiellement des applications directes du cours. C'est la troisième expression du premier exemple qui présente une forme non présentée dans les propriétés énoncées aux cours.

4.2.1.10. Exercices proposés en fin de chapitre et résolus en classe

Quatre exercices sont proposés, en fin de chapitre, par Monsieur K. et résolus en classe avec les élèves. Nous présentons un exemple d'exercice où est donnée la tâche « réduire des expressions algébriques ».

Vendredi, 07 Mai 2021

Exercice

Préparez les sommes décrites ci-dessous

$$A = 1,5b - 3,7b + 2,5b$$

$$= 1,5b + 2,5b - 3,7b$$

$$A = 0,3b$$

$$B = 7,2m - 4,9m - 0,7m + 0,8m$$

$$= 7,2m + 0,8m - 4,9m - 0,7m$$

$$B = 8m$$

$$C = 3,4x - 2,7x + 0,6x - 1,2x + 0,5x$$

$$= (3,4x + 0,6x + 0,5x - 2,7x - 1,2x)x$$

$$C = 0,5x$$

$$D = 8a - 1,5b + 0,5a - 0,3b + 7$$

$$= 8a + 0,5a - 1,5b - 0,3b + 7$$

$$D = 8,5a - 1,8b + 7$$

$$E = 1,4z - 3,2z - 0,8z + 0,6z + 9$$

$$= (1,4 + 0,6 - 3,2 - 0,8)z + 9$$

$$E = 2z + 9$$

$$F = 11a^2 - 9a + 16a - 2a^2 + 1$$

$$= 10a^2 - 2a^2 - 9a + 16a + 1$$

$$F = 8a^2 + 7a + 1$$

$$G = 4,5a^2 + 3,9b^2 - 4,3b^2 + 5,5a^2$$

Figure 45 : Trace écrite d'un élève de Monsieur K.

4.2.1.11. Prise en charge ou non des erreurs des élèves par Monsieur K.

Nous constatons que Monsieur K. interprète et exploite rarement les erreurs des élèves. De plus, il n'a pas introduit un concept par erreur ; il n'a pas discuté avec les élèves sur leurs erreurs.

4.2.2. La séquence observée de Monsieur B., classe de 3^{ème} A

Le chapitre qui traite du calcul littéral en classe de 4^{ème} est déroulé en 3 séances de 120 minutes par Monsieur B.

4.2.2.1. Le langage utilisé

Comme pour Monsieur K., dans le cours de Monsieur B., le langage utilisé est le langage mixte. La propriété suivante constitue un exemple.

Propriété

Soient a et b des nombres relatifs, on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

4.2.2.2. Le statut de l'égalité

Nous rencontrons dans le cours de Monsieur B. deux statuts de l'égalité : il est utilisé comme annonce de résultat ou comme équivalence. Cependant, comme Monsieur K., Monsieur B. n'a pas fait remarquer aux élèves que le résultat dans un calcul numérique est, souvent, un terme, alors que le résultat dans la réduction d'une somme algébrique peut être un terme ou une somme algébrique.

4.2.2.3. Le statut de la lettre

Dans les énoncés proposés par Monsieur B., nous rencontrons l'usage de la lettre comme nombre généralisé et comme variable. Nous présentons un exemple.

Définition :

Un monôme est une expression littérale de la forme ax^n .

a est appelé coefficient, n le degré et x la variable.

Dans cette définition, seul le statut de la lettre x est explicité ; celui des lettres a et n n'est pas explicité.

4.2.2.4. Le statut du signe " + "

Dans les énoncés proposés aux élèves par Monsieur B., nous rencontrons trois usages du signe " + ". Il est utilisé comme opérateur, comme prédicatoire, comme opérateur non évalué. L'enseignant n'a pas attiré l'attention des élèves sur le fait que le signe " + " entre deux termes non semblables est opérateur non évalué.

4.2.2.5. Le statut du signe " - "

Dans le cours déroulé par Monsieur B., on rencontre différents statuts du signe " - ". Il est utilisé comme signe opérateur, comme signe prédicatoire, comme opérateur non évalué ou

comme indiquant l'opposé d'un nombre. Notons que le statut du signe " – " comme indiquant l'opposé d'un nombre n'est pas commenté par l'enseignant lors des activités.

4.2.2.6. Le type de parenthèses utilisées

Dans la présentation des énoncés des propriétés et dans la résolution des activités, Monsieur B. ne présente que des parenthèses simples. Les parenthèses imbriquées sont absentes dans les énoncées.

4.2.2.7. L'utilisation de la distributivité

La distributivité est admise dans les énoncés proposés par Monsieur B.. Elle est contextualisée. Cependant, elle n'est présentée qu'à gauche.

4.2.2.8. Le caractère procédural et structural

Dans les énoncés proposés par Monsieur B., il y a une mise en avant de l'aspect structural. Nous présentons un exemple.

Propriété :

Quels que soient les nombres a, b et c , on a :

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Nous faisons l'hypothèse que cette mise en avant de l'aspect structural peut être source de difficultés chez les élèves.

4.2.2.9. Les situations d'apprentissage proposées

Monsieur B. a proposé des exemples et des exercices qui sont résolus en classe avec les élèves.

Exemples résolus

Trois exemples résolus traitant du développement et de la réduction sont proposés par Monsieur B..

Les tâches données par Monsieur B. sont : « réduire un produit » et « réduire une somme », « développer des produits » et « développer et réduire une expression ». Nous présentons les énoncés des exemples.

Exemple 1 : Réduisons les produits suivants :

$$A = 2x \times 3y \times 4x^2$$

$$B = x^2 \times 4y \times 6y \times 7x^2 \times 3x^5$$

Exemple 2 : Réduisons les sommes suivantes :

$$3x + (2x + 5)$$

$$2 - (4x + 7)$$

$$5 - (4x - 5 + 2x + 10)$$

Exemple 3 : Développons les expressions suivantes :

a) $2x(3x + 1)$

b) $(2x + 4)(3x + 1)$

c) $(1 - 2x)(3x + 10)$

d) $x(x + 4)(2x + 4)$

Ces exemples sont, en majorité, des applications directes du cours. La particularité constatée réside au niveau de la troisième expression du deuxième exemple où la somme contenue dans les parenthèses est composée de quatre termes. Lors du développement de cette expression, Monsieur B. a rappelé l'égalité $a - (b - c) = a - b + c$ et a écrit : $5 - (4x - 5 + 2x + 10) = 5 - 4x + 5 - 2x - 10$.

Exercices proposés en fin du chapitre et résolus en classe

Un exercice est proposé par Monsieur B. et résolu en classe avec les élèves. Nous présentons cet exercice où est donnée la tâche « réduire et réduire des expressions ».

Exercice d'application
Développer et réduire les expressions
suivantes.

$$B = 7x(x-1)(x+1) - 5x(x+1)^2$$

$$C = (4x+5)^2 - (3x-1)^2$$

$$D = \left(\frac{2x+5}{3}\right)\left(\frac{2x-5}{3}\right) + \frac{1}{9}x^2$$

Solution.

$$A = 4 - x^2 - 2(x-2)(2x+1)$$

$$= 4 - x^2 - 2(2x^2 + x - 4x - 2)$$

$$= 4 - x^2 - 4x^2 - 2x + 8x + 4$$

$$= -5x^2 + 6x + 8$$

$$A = -5x^2 + 6x + 8$$

$$B = 7x(x-1)(x+1) - 5x(x+1)^2$$

$$= 7x(x^2 - 1) - 5x(x^2 + 2x + 1)$$

$$= 7x(x^2 - 1) - 5x(x^2 + 2x + 1)$$

$$= 7x^3 - 7x - 5x^3 - 10x^2 - 5x$$

$$= 2x^3 - 10x^2 - 12x$$

$$B = 2x^3 - 10x^2 - 12x$$

$$C = (4x+5)^2 - (3x-1)^2$$

$$= (4x)^2 + 2 \times 4x \times 5 + 5^2 - (3x)^2 - 2 \times 3x \times (-1) + (-1)^2$$

$$= 16x^2 + 40x + 25 - (9x^2 - 6x + 1)$$

$$= 16x^2 + 40x + 25 - 9x^2 + 6x - 1$$

$$C = 7x^2 + 46x + 24$$

$$D = \left(\frac{2x+5}{3}\right)\left(\frac{2x-5}{3}\right) + \frac{1}{9}x^2$$

$$= \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}x^2$$

$$= \frac{4}{9}x^2 - \frac{25}{9} + \frac{1}{9}x^2$$

Figure 46 : Trace écrite d'un élève de Monsieur B.

Nous constatons que cet exercice proposé et résolu par Monsieur B. n'est pas une application directe du cours. Cet exercice est un peu plus complexe que les exemples.

4.2.2.10. Prise en charge des erreurs des élèves par Monsieur B.

Aussi, constatons-nous que Monsieur B. interprète et exploite rarement les erreurs des élèves. De plus, il n'a pas introduit un concept par erreur et n'a pas discuté avec les élèves sur leurs erreurs.

4.2.2.11. Synthèse de l'analyse des pratiques de classe

Les observations des séquences d'enseignement du calcul littéral par les enseignants de Mathématiques, Monsieur K. et Monsieur B. nous ont permis de dégager les points suivants :

- le langage utilisé par les enseignants dans la présentation des énoncés est un langage mixte ;

- l'égalité est utilisée comme annonce de résultat, comme équivalence ou comme identité, dans le calcul numérique et dans le calcul algébrique ;
- dans les énoncés proposés par les enseignants, les lettres représentent soit un nombre généralisé soit une variable ;
- le signe " + " est utilisé comme opérateur, comme prédicatoire, comme opérateur non évalué ;
- le signe " – " est utilisé comme signe opérateur, comme signe prédicatoire, comme signe opérateur non évalué ou comme l'opposé d'un nombre négatif ;
- les parenthèses : les enseignants observés n'ont utilisées que les parenthèses simples dans les énoncés. Les parenthèses imbriquées sont absentes dans les énoncés ;
- la distributivité est admise, dans les énoncés proposés par les enseignants. Elle est contextualisée par Monsieur K. et présentée à droite et à gauche par Monsieur B. ;
- il y a une mise en avant de l'aspect structural dans la présentation des énoncés des propriétés par les enseignants ;
- les situations proposées par les enseignants prennent en compte une variété de tâches et de types de tâches. Monsieur K. a donné les tâches suivantes : « réduire un produit », « réduire une somme », « développer des produits » et « développer et réduire une expression ». Monsieur B., quant à lui, a donné toutes les tâches données par Monsieur K. plus la tâche « développer, réduire et ordonner une expression » ;
- les enseignants interprètent et exploitent rarement les erreurs des élèves. De plus, ils n'introduisent jamais un concept par erreur et discutent rarement avec les élèves sur leurs erreurs.

Conclusion du chapitre 4

Dans ce chapitre, nous avons analysé le manuel de mathématiques de 4^{ème} et celui de 3^{ème}, tous deux de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques. Nous avons, également, analysé les pratiques de classe de deux enseignants de Mathématiques. Les analyses sont orientées vers les aspects suivants :

- le langage utilisé pour formuler les énoncés ;
- le statut de l'égalité dans les énoncés ;

- le statut de la lettre dans les énoncés ;
- le statut du signe " + " dans les énoncés ;
- le statut du signe " – " dans les énoncés ;
- l'utilisation de la distributivité ;
- le type de parenthèses utilisées ;
- le caractère des expressions.

Il ressort de ces analyses que :

- le langage utilisé dans la majorité des énoncés est le langage mixte, c'est-à-dire un mélange de langage naturel et de langage formel. Cela est constaté dans les manuels et dans les pratiques de classe ;
- l'égalité est utilisée dans les énoncés comme identité, comme équivalence ou comme annonce de résultat. Ce constat est le même dans les manuels et dans les pratiques de classe ;
- les lettres sont utilisées comme marque place ou comme une variable. Cela est constaté dans les manuels et dans les pratiques de classe ;
- le signe " + " est utilisé comme opératoire, comme prédicatoire, comme opératoire non évalué. Cela est constaté dans les manuels et dans les pratiques de classe ;
- le signe " – " est utilisé comme opératoire, comme prédicatoire, comme opératoire non évalué ou comme marque de l'opposé d'un nombre. Cependant le statut du signe " – " comme marque de l'opposé d'un nombre n'est pas explicité. Ce constat est le même dans les manuels et dans les pratiques de classe ;
- la distributivité est admise dans les manuels et dans les pratiques de classe. Cependant, elle est contextualisée par Monsieur K. et présentée à gauche et à droite par Monsieur B. ;
- il y a une mise en avant de l'aspect structural des expressions algébriques dans les énoncés. L'aspect procédural des expressions n'apparaît que dans l'organisation du calcul et dans les règles. Ce constat est le même dans les manuels et dans les pratiques de classe ;
- le type de parenthèses utilisées : dans les manuels tout comme dans les pratiques de classe, les parenthèses utilisées dans les énoncés sont les parenthèses simples. Les parenthèses imbriquées sont absentes dans les énoncées ;

- des exemples résolus et des exercices sont proposés dans les manuels et par les enseignants. Pour la plupart des exemples résolus, les techniques sont utilisées, de même que les technologies sont mises en œuvre. Cependant, pour certains exemples résolus, les techniques utilisées ne sont pas explicitées. De plus, pour les exemples dont les structures des expressions ne sont pas des applications directes du cours, les auteurs du manuel ne présentent pas transformations, en guise de techniques, pour faciliter l'application des propriétés ou règles. Pour certains exercices proposés en fin de chapitre, les éléments du cours tout comme les exemples résolus ne sont pas suffisants pour les traiter ; il faut l'accompagnement d'un enseignant ;
- les enseignants interprètent et exploitent rarement les erreurs des élèves. De plus, ils n'introduisent jamais un concept par erreur et discutent rarement avec les élèves sur leurs erreurs.

Ces analyses nous ont permis d'apporter des éléments de réponse à l'une de nos questions de recherche que nous rappelons : *Quelle transposition didactique est faite du point de vue des manuels et en situations de classe ?*

Les éléments de la transposition didactique identifiés, à l'issue des analyses, sont susceptibles de constituer des obstacles à l'apprentissage du calcul littéral.

Nous faisons l'hypothèse que ces aspects identifiés expliqueraient les obstacles qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des expressions algébriques.

La partie qui suit sera consacrée au cadre expérimental. Dans le chapitre suivant, premier chapitre de la partie expérimentale, nous présenterons la méthodologie utilisée pour l'étude.

Deuxième partie

Chapitre 5 : Méthodologie de la recherche

Introduction

Ce chapitre a pour objet de décrire la méthodologie élaborée pour notre étude.

Dans ce chapitre, nous commençons par préciser le type de recherche utilisé. Ensuite, nous décrivons le lieu de l'étude. Enfin, nous présentons la population et le corpus de l'étude, les outils d'expérimentation, ainsi que la méthode de traitement et d'analyse des données.

Dans le cadre de nos expérimentations, nous utilisons, comme outils, les questionnaires, la grille d'observations, le guide d'entretien d'explicitation et le dispositif de franchissement des obstacles. Les questionnaires sont adressés aux élèves des classes de 4^{ème} et de 3^{ème} pour les pré-tests et pour le post-test. Les pré-tests visent à identifier *a priori* les obstacles épistémologiques et didactiques qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes. Le post-test vise à rendre compte de l'évolution des apprentissages des élèves qui ont participé au dispositif de franchissement et ceux du groupe témoin. Un entretien d'explicitation est fait avec les élèves de 4^{ème} dont les productions sont analysées aux pré-tests. L'entretien d'explicitation est une technique d'aide à la verbalisation *a posteriori* des tâches réalisées par ces élèves. Il a été demandé aux élèves d'apporter des explications à leurs productions, notamment sur les productions comportant des erreurs. Le dispositif vise à aider les élèves à franchir les obstacles que nous avons identifiés. Ce dispositif est expérimenté auprès de 9 élèves d'une classe de 4^{ème}.

5.1. Type de recherche

Le devis de notre recherche est qualitatif. Cette approche qualitative nous permet de recueillir un grand nombre d'informations.

La démarche adoptée est hypothético-déductive. A partir des travaux antérieurs sur le calcul algébrique, nous avons émis des hypothèses sur l'existence des obstacles épistémologiques et didactiques.

Cette étude s'appuie sur la méthodologie de l'ingénierie didactique. L'ingénierie didactique, vue par Artigue (1988) comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des « réalisations didactiques » en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. La méthodologie d'ingénierie didactique se caractérise aussi, par rapport à d'autres types de

recherche basés sur des expérimentations en classe, par le registre dans lequel elle se situe et les modes de validation qui lui sont associés. Brousseau (2013) définit ainsi l'ingénierie didactique :

« L'ingénierie didactique s'occupe de créer des modèles consistants et pertinents et de réaliser des dispositifs d'enseignement d'une connaissance précise, destinés à décrire ou à prévoir, et à expliquer les événements observables d'un épisode d'enseignement déterminé (situations ou curriculum) observé ou envisagé :

- observé, afin de recueillir les informations qui permettront d'en rendre compte, d'expliquer a posteriori son déroulement et ses résultats, et de permettre sa reproduction
- envisagé, afin de déterminer les conditions reproductibles (réalisables et communicables) de son déroulement et de ses résultats observables.

L'étude de la consistance et de la pertinence de ces modèles renvoie à un examen critique de tous les concepts relatifs à l'enseignement, à l'apprentissage et à la constitution même de la matière enseignée. »

Le dispositif de franchissement proposé est élaboré dans le cadre d'une ingénierie didactique que nous expliciterons plus loin.

5.2. Lieu d'étude

Cette étude est menée dans le contexte du Tchad, un pays situé en Afrique Centrale. Les premières langues de scolarisation au Tchad sont le Français et l'Arabe. Notons que le Tchad est une ancienne colonie Française. La Délégation Provinciale de l'Education Nationale et de la Promotion Civique pour la commune de N'Djamena (DPENPC) est celle qui est retenue pour cette recherche. Ce choix est justifié, de notre point de vue, par le fait que la ville N'Djamena réunit les conditions pour une bonne recherche en didactique des mathématiques qui sont, entre autres : la diversité des apprenants (on y retrouve les apprenants provenant de toutes les provinces du pays), la présence régulière des enseignants dans les salles de classes et l'accompagnement dont bénéficient ces enseignants, en matière de formation continue.

5.3. Population et corpus de l'étude

Dans le cadre de notre travail, la population d'étude est constituée des élèves de 4^{ème} et de 3^{ème} dont l'âge varie entre 12 et 16 ans, et des enseignants de mathématiques intervenant dans ces classes.

Le corpus de cette recherche est constitué des manuels scolaires de Mathématiques des classes de 4^{ème} et de 3^{ème}, des copies des élèves, des vidéos et des enregistrements audios.

Pour ce qui est de l'échantillonnage, dans le cadre d'une recherche qualitative, il se fait dans un but délibéré ou unitaire. Le chercheur sélectionne les sites et les participants en fonction de leurs capacités à éclairer le phénomène étudié. La logique de la solution est basée sur un choix des participants ou des cas riches en informations pour l'étude détaillée et approfondie des phénomènes. Dans une recherche qualitative, il n'existe pas de règles fixes concernant les tailles de l'échantillon ou le nombre de participants (Gado, 2016).

Ainsi, notre échantillon se présente comme suit :

- 54 élèves d'une classe de 4^{ème} et 42 élèves d'une classe de 3^{ème} pour les pré-tests (ces élèves sont ceux qui étaient présents les jours des pré-tests). Nous faisons des pré-tests en 4^{ème} et en 3^{ème} pour deux raisons principales : la première réside dans le fait que le calcul littéral, notamment le développement et la réduction des polynômes se fait en 4^{ème} et en 3^{ème} avec presque les mêmes propriétés et règles (voir le chapitre 4) ; la seconde raison réside dans le fait que, dans notre étude, nous voulons prendre en compte le caractère résistant des obstacles ;
- 18 élèves d'une autre classe de 4^{ème} de 46 élèves pour l'expérimentation du dispositif de franchissement. Parmi ces 18 élèves, 9 élèves constituent le groupe expérimental et 9 autres constituent le groupe témoin. Pour former ces groupes, nous avons fait un échantillonnage systématique en nous servant de la liste des élèves de la classe où chaque élève est numéroté de 1 jusqu'à 46. Nous nous sommes limité à trois classes comme échantillon, parce que notre étude est qualitative. En effet, travailler avec plus de trois classes ne nous apportera pas d'information supplémentaire. De surcroit, puisqu'il fallait veiller à l'homogénéité des groupes classes, nous ne pouvions pas mener notre étude dans des établissements différents ;
- 10 élèves de 4^{ème} pour l'entretien d'explicitation. Ces élèves sont ceux de la classe de 4^{ème} où nous avons fait les pré-tests. Ils sont choisis parmi les élèves dont les productions comportaient beaucoup d'erreurs ;
- 2 enseignants de Mathématiques. Les deux enseignants choisis sont ceux qui ont la charge des classes où nous avons fait les expérimentations ;
- 2 manuels de Mathématiques. Ce corpus est constitué de deux manuels de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM) : le manuel de 4^{ème} et le manuel de 3^{ème}. Ce choix se justifie par plusieurs raisons. Premièrement, ces

manuels sont en accord avec les programmes de mathématiques au Tchad. Deuxièmement, ils sont conçus pour 20 pays⁷. Troisièmement, ces manuels ont fait l'objet de plusieurs révisions pendant deux décennies et la plupart des participants à notre étude l'utilisent.

5.4. Outils d'expérimentation

Pour notre étude, les expérimentations sont faites grâce aux outils suivants : grille d'observation des séances d'enseignement, guide d'entretien d'explicitation, questionnaires (tests) et dispositif de franchissement des obstacles.

Nous présentons ci-dessous les différents outils que nous avons utilisés pour nos expérimentations.

5.4.1. Grille d'observations des classes

Les observations des séances d'enseignement des leçons sur le développement et la réduction des polynômes constituent une méthode de prise d'informations de ce qui se passe réellement en classe. Pour Mimché (2012, p.34), l'observation est une méthode d'étude des modes de vie des populations permettant de saisir son déroulement, les significations des conduites et leurs enjeux. Les données d'observations sont souvent utilisées pour compléter les données issues des autres techniques de recueil des données (entretiens, questionnaires, etc.).

Il faut noter que pendant les observations directes faites, la grille d'observations est remplie, en même temps que les séances sont filmées à l'aide d'une caméra manipulée par une tierce personne. Les vidéos réalisées ont été visualisées après les observations, en vue de compléter les informations recueillies dans la grille.

L'enquête par des observations directes des séances d'enseignement du calcul littéral consiste à :

- regarder comment les concepts de développement et de réduction sont abordés par les enseignants ;
- repérer les difficultés qui peuvent émerger des approches utilisées par les enseignants pour présenter ces concepts ;

⁷ Benin, Bourkina Faso, Burundi, Cameroun, Centrafrique, Comores, Congo, Côte d'Ivoire, Djibouti, Gabon, Guinée, Madagascar, Mali, Mauritanie, Niger, Rwanda, Sénégal, Tchad, Togo et Zaïre

- repérer les différents types de tâches liés aux activités de développement et de réduction des polynômes proposés par les enseignants, les techniques et les technologies associées à ces tâches ;
- regarder si les enseignants prennent en charge les erreurs des élèves.

Pour cela, nous avons étudié les aspects suivants :

- le langage utilisé pour formuler les énoncés : courant ou naturel, formel, mixte ;
- le statut de l'égalité dans les énoncés : annonce de résultat, équivalence, identité ;
- le statut de la lettre dans les énoncés : variable, inconnue, d'indéterminée, paramètre, marque place ;
- le statut du signe " + " dans les énoncés : opératoire, prédicatoire ;
- le statut du signe " – " dans les énoncés : opératoire, prédicatoire, marque de l'opposé ;
- la distributivité : admise, contextualisée ;
- le type des parenthèses (simples, imbriquées) ;
- le caractère des expressions : structural, procédural.

5.4.2. Questionnaires

Pour nos expérimentations, nous avons élaboré deux questionnaires pour les niveaux respectifs 4^{ème} et 3^{ème}. Ces questionnaires sont utilisés pour les pré-tests et le post-test. Rappelons que les pré-tests visent à identifier, *a priori*, les obstacles épistémologiques et didactiques qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes. Le post-test vise à rendre compte de l'évolution des apprentissages des élèves qui ont participé au dispositif de franchissement et ceux du groupe témoin.

Le pré-test en classe de 4^{ème} a eu lieu au mois de mai 2022. En classe de 3^{ème}, le pré-test a eu lieu au mois de mars 2022. Il convient de noter que ces périodes sont directement liées aux fiches de programmations annuelles des enseignants de Mathématiques intervenant dans les classes retenues pour nos pré-tests. Notons que ces pré-tests ont eu lieu après les leçons sur le développement et la réduction des polynômes.

Nous présentons les deux questionnaires.

Les questionnaires adressés aux élèves de 4^{ème} et de 3^{ème} comportent chacun trois exercices.

Dans les premiers exercices, nous proposons trois items qui nous permettent de regarder comment les élèves procèdent à la réduction de sommes algébriques contenant des parenthèses. Les deuxièmes exercices comportent quatre items. Ces items portent sur le cas particulier du développement d'une expression algébrique à l'aide des identités remarquables. Dans les troisièmes exercices, nous proposons quatre items portant sur le développement et la réduction des expressions algébriques.

Ces exercices seront présentés dans les détails au sixième chapitre dans les analyses *a priori*.

5.4.3. Entretien d'explicitation

L'entretien d'explicitation a consisté à demander aux élèves d'apporter des explications à quelques productions, notamment aux productions comportant des erreurs, à la suite de l'analyse des résultats des pré-tests. C'est une technique d'aide à la verbalisation *a posteriori* des tâches réalisées par ces élèves. Pour Vermersch (1990, p. 228), l'entretien d'explicitation est une technique d'aide à la verbalisation ou, plus précisément, une technique de « verbalisation consécutive assistée ».

Pour notre étude, l'entretien a duré 1h 20mn et a été enregistré.

Les productions ayant fait l'objet des entretiens sont au nombre de neuf. Elles sont choisies parmi les productions comportant les erreurs les plus fréquentes.

Ces productions seront présentées au sixième chapitre.

5.4.4. Dispositif de franchissement des obstacles : ingénierie didactique

Dans l'optique d'aider les élèves à franchir les obstacles que nous avons identifiés, nous proposons un dispositif. Ce dispositif est expérimenté auprès de 9 élèves d'une classe de 4^{ème}, au titre de l'année scolaire 2022-2023. Nous nous sommes limité au niveau 4^{ème}, parce que nous pensons qu'expérimenter le dispositif auprès des élèves de 3^{ème} ne nous apportera pas d'information supplémentaire. L'expérimentation est faite en six séances (11 h 30 minutes). Les trois premières séances, à raison de 2 h par séance, sont consacrées à la présentation et à la résolution des activités préparatoires en groupes, à la présentation des éléments de cours. Ces trois premières séances sont dirigées par nous-même, avec l'assistance de l'enseignant de Mathématiques de la classe, Monsieur K.. La quatrième séance, de 2 h, est consacrée à la mise en activité des élèves en groupes pour la résolution des deux activités proposées à la suite des

éléments de cours. La cinquième séance, de 2 h, est consacrée à la plénière pendant laquelle un représentant de chaque groupe passe au tableau, présente et explique le résultat du travail de son groupe. Notons que la présentation du travail de chaque groupe fait l'objet des discussions, des commentaires et de remédiation. La dernière séance, de 90 minutes, est consacrée à l'évaluation du dispositif. L'évaluation consiste à soumettre aux élèves du groupe expérimental et du groupe témoin le même test soumis aux élèves lors du pré-test.

Le dispositif est proposé dans le cadre d'une ingénierie didactique dont il convient de présenter les différentes phases, selon Artigue (1990).

5.5. Phases de l'ingénierie didactique

L'ingénierie didactique comporte quatre phases (Artigue, 1990) : les analyses préalables, la conception et l'analyse *a priori* des situations didactiques, l'expérimentation, et l'analyse *a posteriori* et évaluation.

5.5.1. Les analyses préalables

D'après l'auteure, les analyses préalables sont destinées à faire émerger les connaissances liées au domaine étudié afin de préparer la phase de conception qui suivra. Ces analyses préalables concernent :

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement que nous avons effectuée dans le premier chapitre ;
- l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets. Cette analyse a été faite à partir de l'analyse des manuels et des pratiques de classes ;
- l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et des obstacles qui marquent leur évolution. Cette analyse est faite à la suite des pré-tests auxquels les élèves ont été soumis ;
- l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective présentée au septième chapitre ;
- et bien sûr en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche.

5.5.2. La conception et l'analyse *a priori* de situations didactiques

Dans cette deuxième phase, le chercheur prend la décision d'agir sur un certain nombre de variables du système non fixées par les contraintes : variables de commande dont il suppose

qu'elles sont des variables pertinentes par rapport au problème étudié. Il semble utile, pour faciliter l'analyse d'une ingénierie, de distinguer deux types de variables de commande : des variables macro-didactiques ou globales qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie, les variables micro-didactiques ou locales qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie, c'est-à-dire l'organisation d'une séance ou d'une phase, les unes et les autres pouvant être elles-mêmes des variables d'ordre général ou des variables dépendantes du contenu didactique dont l'enseignement est visé.

Nous développerons plus largement les conditions de conception du dispositif de franchissement présenté ci-dessus.

5.5.3. L'expérimentation

Cette phase permet un recueil de données éclairant l'objet de recherche. Cette phase est réalisée à travers l'expérimentation du dispositif de franchissement présentée ci-dessus.

5.5.4. L'analyse *a posteriori* et validation

« Elle s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation : observations réalisées des séances d'enseignement, mais aussi productions des élèves en classe et hors classe. Ces données sont souvent complétées par des données obtenues par l'utilisation de méthodologies externes, questionnaires, entretiens individuels ou en petits groupes, réalisés à divers moments de l'enseignement ou à son issue. C'est sur la confrontation des deux analyses : analyse *a priori* et analyse *a posteriori* que se fonde essentiellement la validation des hypothèses engagées dans la recherche » (Artigue, 1988).

5.6. Présentation du dispositif

Le dispositif comporte deux parties.

La première partie est constituée des activités préparatoires et des éléments de cours. Les activités préparatoires sont organisées autour des prérequis nécessaires pour comprendre le cours. Elles comportent cinq items portant sur l'identification des termes dans une somme et des facteurs dans un produit, les règles de priorités, les propriétés d'addition des nombres décimaux relatifs, le calcul de puissances et le calcul des produits de sommes. Les éléments de cours portent sur la réduction et le développement des expressions algébriques. Pour la réduction, il s'agit de la réduction d'une somme et de la réduction d'un produit ; sont présentés le vocabulaire, des règles, des définitions, des remarques et des propriétés. Pour le

développement, il s'agit du développement d'un produit, avec le cas particulier des identités remarquables. Comme pour la réduction, les paragraphes portant sur le développement présentent le vocabulaire, des définitions, des remarques et des propriétés.

La deuxième partie est constituée de deux activités de mise en situation des élèves. Dans la première activité, nous proposons sept items portant sur la réduction d'un produit de monômes et la réduction d'une somme algébrique. La deuxième activité comporte six items portant sur le développement et la réduction des expressions algébriques.

Les activités préparatoires et de mise en situation seront présentées dans les détails au septième chapitre, dans les analyses *a priori*.

5.7. Traitement et analyse des données

En amont à l'analyse des résultats, nous avons fait la transcription suivie de la lecture critique. Cela a conduit à l'élaboration des grilles d'analyse.

Pour l'analyse des données, nous avons fait l'analyse de contenu. Il faut noter que lors des analyses, nous avons présenté des verbatim ou des synthèses des propos des répondants. Pour les questionnaires, nous avons fait l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*.

Conclusion du chapitre 5

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthodologie élaborée pour notre étude. Aussi, avons-nous présenté et justifié notre lieu d'étude, notre population et corpus d'étude, les outils d'expérimentation et la méthode de traitement et d'analyse des données.

La méthodologie utilisée pour notre étude s'appuie sur la méthodologie de l'ingénierie didactique qui comporte quatre phases (Artigue, 1990) : les analyses préalables, la conception et l'analyse *a priori* des situations didactiques, l'expérimentation, et l'analyse *a posteriori* et évaluation.

Cette méthodologie est particulière, compte tenu de la pluralité des outils de collecte des données : questionnaires, guide d'entretien, grille d'observation, grille d'analyse des manuels et dispositif de franchissement. Ainsi, les variables de notre recherche sont nombreuses. Les croisements de ces variables peuvent nous rassurer sur la fiabilité de nos analyses et de notre conclusion.

Le chapitre suivant présente les résultats obtenus à l'issue de l'analyse des productions des élèves.

Chapitre 6 : Première expérimentation : identification des obstacles didactiques et épistémologiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons, d'abord, les analyses *a priori* des exercices des questionnaires adressés aux élèves de 4^{ème} et de 3^{ème}. Les analyses *a priori* des exercices sont précédées des présentations de ces exercices. Les objectifs de chaque exercice sont définis ainsi que les variables didactiques sont déterminées. Ensuite, les réponses des élèves aux items contenus dans ces exercices font l'objet des analyses *a posteriori*. Enfin, nous présentons les résultats de l'entretien d'explicitation adressé aux élèves.

Ces analyses conduisent à l'identification des obstacles, notamment didactiques et épistémologiques qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction. L'identification des obstacles passe par le repérage des erreurs.

6.1. Analyse *a priori* des exercices des questionnaires

L'objectif de l'analyse *a priori* est donc de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens.

Nous dirons, comme Charnay et Mante (2016), que l'analyse *a priori* des exercices de mathématiques (activités de développement et de réduction) permet « d'anticiper ce que les élèves vont dire ou faire face à ces activités ». Plus précisément, l'analyse *a priori* prend appui sur trois questionnements :

- quelles procédures correctes les élèves peuvent-ils utiliser pour résoudre la tâche ?
- quelles erreurs les élèves risquent-ils de faire ? Quels obstacles peuvent-ils rencontrer ?
- de quelle façon les élèves vont-ils pouvoir investir les éléments de savoirs visés ?

Nous présentons les analyses *a priori* des questionnaires que nous avons proposés pour nos expérimentations.

6.1.1. Analyse *a priori* des exercices du questionnaire adressé aux élèves de 4^{ème}

Exercice 1

Réduis les sommes algébriques suivantes :

$$A = 5 + (x - 3)$$

$$B = 5 - (x + 3)$$

$$C = 3 - (x - (5 + x))$$

✓ Présentation de l'exercice

L'objectif de cet exercice est de regarder comment les élèves procèdent pour réduire des sommes algébriques comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou " - ".

Les deux premiers items sont des expressions simples, connues des élèves et pour lesquelles, ces derniers ne pourraient *a priori* rencontrer des difficultés majeures. La troisième expression est une tâche un peu plus complexe, du fait de la présence des parenthèses imbriquées.

L'item $A = 5 + (x - 3)$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est une constante et l'autre, une expression littérale délimitée par des parenthèses. Il s'agit d'une activité qui ne pourrait *a priori* poser aucun problème chez les élèves, car la suppression des parenthèses se ferait sans effet sur l'écriture de la somme. Elle a la même dénotation que $5 + x - 3$.

L'item $B = 5 - (x + 3)$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est une constante et l'autre une expression littérale délimitée par des parenthèses précédées du signe " - ". La propriété à convoquer est celle donnée dans le cours :

Propriété

a, b et c sont des nombres relatifs. On a :

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Ainsi, nous pensons que les élèves sont outillés pour faire cet exercice.

L'item $C = 3 - (x - (5 + x))$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est une constante et l'autre, une expression algébrique délimitée par les parenthèses précédées du signe " - " à l'intérieur desquelles se trouve une somme algébrique constituée d'un monôme et une somme délimitée par les parenthèses. Ici, il y a la présence des parenthèses imbriquées. Pour réduire cette expression, le schème de la suppression de parenthèses précédées du signe " - " apparaît inefficace. En appliquant directement la propriété précédente, les élèves auraient de

difficulté à obtenir la réponse juste, puisque cette forme n'est pas prise en compte par les propriétés présentées aux élèves. Pour réduire correctement cette expression, il faut appliquer la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " – " en commençant par les parenthèses internes.

✓ **Analyse *a priori* de l'exercice**

Les trois items ont été choisis en jouant sur les variables didactiques suivantes :

- signe avant la parenthèse entrante (signe " + " ou " – ") ;
- type de parenthèses (parenthèses imbriquées ou parenthèses simples).

Les réponses attendues pour cet exercice sont :

• **Pour l'expression $A = 5 + (x - 3)$:**

- $A = 5 + (x - 3)$
 $= 5 + x - 3$
 $= x + 2.$

$$E_1A_1: A = x + 2$$

C'est la réponse correcte. La propriété de suppression des parenthèses précédées du signe " + " est bien appliquée et la réduction est faite correctement ;

- $A = 5 + (x - 3)$
 $= 5 + x - 3$
 $= x + 2$
 $= 2x$

$$E_1A_2: A = 2x$$

Cette réponse est fausse. Ici, l'égalité est considérée comme une annonce du résultat et l'addition comme opératoire.

Dans les manuels tout comme dans les cours déroulés par les enseignants, l'égalité est utilisée dans les énoncés comme identité, comme équivalence et comme annonce de résultat ; le signe " + " est utilisé comme opératoire, comme prédicatoire, comme ni opératoire ni prédicatoire.

L'utilisation de l'égalité comme une annonce de résultat est abordée par Grugeon-Allys et Pilet (2017) pour qui, en arithmétique, le signe d'égalité est majoritairement utilisé comme annonce de résultat pour effectuer les calculs (souvent de gauche à droite), alors que le traitement des expressions algébriques repose sur le statut d'équivalence de l'égalité. Ces auteurs expliquent cet usage par un obstacle relevant du dilemme *process-product* (Davis, 1975

dans Kieran, 1992) ou l'*acceptance of lack of closure* (Collis, 1974 dans Kieran, 1992). Dans la même perspective, Booth et Chelsea (1984) ont noté que pour certains enfants, écrire « $2x$ » pour « $x + 2$ » semble refléter directement leur vue de l'addition en tant qu'un assemblage de deux collections ou mesures. Pour ces enfants, le résultat d'une addition doit être un terme unique qui est généralement le terme réunion. L'équipe de recherche de l'Université de Mons (2019) explique cela par la variation du sens du raisonnement dans le langage algébrique. Almahmoud (2019), Grugeon-Allys et Pilet (2017) interprètent cette réponse par le sens donné à l'égalité comme annonce du résultat.

$$\begin{aligned} - \quad A &= 5 + (x - 3) \\ &= 5 - 3x \\ &= 2x \\ E_1A_3: A &= 2x \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Ici, l'égalité est considérée comme une annonce du résultat avec mise en avant de l'aspect procédural en utilisant la priorité de l'opération entre parenthèses. Les arguments donnés par Almahmoud (2019), Grugeon-Allys et Pilet (2017) pour expliquer la réponse E_1A_2 est valable pour la réponse E_1A_3 . L'équipe de recherche de l'Université de Mons (2019) justifie cette réponse d'une part, par la variation du sens du raisonnement et, d'autre part, par le fait que la structure des expressions algébriques est différente de celles arithmétiques.

$$\begin{aligned} - \quad A &= 5 + (x - 3) \\ &= 5 + x - 3 \\ &= 6x - 3 \\ &= 3x \\ E_1A_4: A &= 3x \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. L'égalité est considérée comme une annonce du résultat et l'addition et la soustraction comme opératoire.

En plus de l'argument donné précédemment par Grugeon-Allys et Pilet (2017), Almahmoud (2019) explique de deux façons une telle production. Premièrement, par le fait que l'égalité soit considérée comme une annonce de résultat. Deuxièmement, par l'origine en chimie ; le fait d'ajouter l'oxygène au carbone donne CO_2 qui constitue un seul objet, alors la conjonction (+) et (et) joue un rôle primordial dans le processus ayant conduit à cette réponse.

$$\begin{aligned} - \quad A &= 5 + (x - 3) \\ &= 5x - 15 \end{aligned}$$

$$E_1A_5: A = 5x - 15$$

Cette réponse est fausse. Il y a un glissement du contexte d'application de la distributivité.

Almahmoud (2019) explique une telle réponse par un défaut dans la distributivité (généralisation abusive de la règle de distributivité).

– Sans réponse

• **Pour l'expression $B = 5 - (x + 3)$:**

$$\begin{aligned} - \quad B &= 5 - (x + 3) \\ &= 5 - x - 3 \\ &= 2 - x \end{aligned}$$

$$E_1B_1: B = 2 - x$$

C'est la réponse correcte. La règle de suppression des parenthèses précédées du signe « – » est bien appliquée et la réduction est faite correctement ;

$$\begin{aligned} - \quad B &= 5 - (x + 3) \\ &= 5 - x + 3 \\ &= 8 - x \end{aligned}$$

$$E_1B_2: B = 8 - x$$

Cette réponse est fausse. La règle suppression des parenthèses précédées du signe " – " n'est pas appliquée correctement. Par ailleurs, la non considération du signe " – " comme marque de l'opposé peut expliquer une telle réponse.

Dans les manuels ainsi que dans les cours déroulés par les enseignants, le signe " – " est utilisé comme signe opératoire, comme signe prédicatoire. Le statut du signe " – " n'est pas explicité devant les parenthèses comportant une somme algébrique. Almahmoud (2019) explique une telle production par une sorte « distributivité langagière » ;

$$\begin{aligned} - \quad B &= 5 - (x + 3) \\ &= 5 - x - 3 \\ &= 5 - 4x \end{aligned}$$

$$E_1B_3: B = 5 - 4x$$

La règle de suppression des parenthèses précédées du signe " – " est correctement appliquée, mais il y a une mise en avant de l'aspect procédural avec l'utilisation des règles de

l'addition des nombres décimaux relatifs de même signe au calcul littéral. Cette réponse est fausse.

Booth et Chelsea (1984) relèvent que, bien souvent, les enfants ne voient pas le besoin d'utiliser des parenthèses, donc ils ne s'en servent pas ;

$$\begin{aligned} - \quad B &= 5 - (x + 3) \\ &= -5x + 15 \end{aligned}$$

$$E_1B_4: B = -5x + 15$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_1A_5 restent valables pour cette réponse ;

– Sans réponse.

- **Pour l'expression $C = 3 - (x - (5 + x))$:**

$$\begin{aligned} - \quad C &= 3 - (x - (5 + x)) \\ &= 3 - x + 5 + x \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$E_1C_1: C = 8$$

Cette réponse est correcte. Les parenthèses imbriquées sont bien gérées. Il en est de même que pour les signes ;

$$\begin{aligned} - \quad C &= 3 - (x - (5 + x)) \\ &= -3x - 15 + 3x \\ &= -15 \end{aligned}$$

$$E_1C_2: C = -15$$

Cette réponse est fausse. Les explications données aux réponses E_1A_4 et E_1B_3 restent valables pour cette réponse.

$$\begin{aligned} - \quad C &= 3 - (x - (5 + x)) \\ &= 3 - x - 5 - x \\ &= -2 - 2x \end{aligned}$$

$$E_1C_3: C = -2 - 2x$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_1B_2 restent valables pour cette réponse E_1C_3 ;

$$\begin{aligned}
- \quad C &= 3 - (x - (5 + x)) \\
&= 3 - x - 5 + x \\
&= -2
\end{aligned}$$

$$E_1 C_4: C = -2$$

Cette réponse également est fausse. Les explications données à la réponse $E_1 B_3$ restent valables pour cette réponse $E_1 C_4$;

– Sans réponse.

Exercice 2

Donne les différentes formes des identités remarquables, identifie celle qui correspond à chacune des expressions suivantes, puis développe ces expressions en utilisant ces identités.

$$D = (4x - 3)^2 ;$$

$$E = (2x + 9)(2x - 9);$$

$$F = (11x + 2)^2 ;$$

$$G = (-7x + 2)^2.$$

✓ Présentation de l'exercice

Cet exercice vise à évaluer la capacité des élèves à donner directement la forme développée et réduite d'un produit de sommes ayant la forme d'une identité remarquable. Il vise, également, à évaluer la capacité des élèves à reconnaître des expressions qui ont la forme des identités remarquables. Cela passe par l'identification des termes.

Les expressions D, E et F sont des identités remarquables classiques connues des élèves et pour lesquelles ces derniers ne pourraient *a priori* rencontrer des difficultés majeures.

L'item $D = (4x - 3)^2$ est une expression de la forme $(a - b)^2$. C'est le carré de la différence de deux termes. Puisque toute différence est une somme, on peut transformer l'expression $D = (4x - 3)^2$ en somme, $D = (4x - 3)^2 = (4x + (-3))^2$, et appliquer la propriété $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Généralement cette transformation n'est pas faite par les enseignants dans les salles de classe ainsi que dans les manuels. Ainsi, les expressions $(4x - 3)^2$ et $(4x + (-3))^2$ ont la même dénotation.

L'item $E = (2x + 9)(2x - 9)$ est une expression de la forme $(a + b)(a - b)$. C'est le produit de la somme de deux nombres par leur différence.

L'item $F = (11x + 2)^2$ est une expression qui a la forme $(a + b)^2$ avec

$a = 11x$ et $b = 2$. C'est le carré d'une somme de deux nombres. L'expression

$(a + b)^2$ n'a pas la même dénotation que l'expression $(ab)^2$. Il se peut que les élèves les considèrent comme deux expressions de même dénotation et distribuent l'exposant aux termes de la somme.

L'item $G = (-7x + 2)^2$ peut être vu de deux manières. Il peut être vu comme une expression qui a la forme $(a + b)^2$ avec $a = -7x$ et $b = 2$. C'est le carré d'une somme. En effet, $(-7x + 2)^2 = ((-7x) + 2)^2$. L'item peut aussi être vu comme l'expression de la forme $(-a + b)^2 = (b - a)^2$ où $a = 2$ et $b = -7x$, c'est le carré d'une différence. Cette deuxième manière, c'est-à-dire considérer l'item comme carré d'une différence risque de ne pas apparaître chez les élèves (commutativité de l'addition). Généralement, dans les salles de classe, les enseignants donnent des exemples où le coefficient du premier monôme de la somme est positif et celui du second négatif pour présenter le carré d'une différence.

✓ **Analyse a priori de l'exercice**

Nous avons choisi ces quatre items en jouant sur la variable didactique suivante : la forme de l'identité remarquable.

Les réponses attendues sont :

- **Pour l'expression $D = (4x - 3)^2$:**

$$\begin{aligned} - \quad D &= (4x - 3)^2 \\ &= 16x^2 - 24x + 9 \end{aligned}$$

$$E_2D_1: D = 16x^2 - 24x + 9$$

C'est la réponse correcte. L'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, c'est-à-dire *le carré d'une différence de deux nombres est égal à la somme de leurs carrés diminuée de leur double produit*, est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned} - \quad D &= (4x - 3)^2 \\ &= 16x^2 - 9 \\ E_2D_2: D &= 16x^2 - 9 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Il y a généralisation du contexte d'application de la règle $(ab)^2 = a^2b^2$. Certains élèves pensent que les expressions $(ab)^2$ et $(a + b)^2$ ont la même dénotation.

Une explication à une telle réponse est donnée par Oudrhiri (2016) qui parle d'obstacle dû à la « linéarité » et à la connaissance des nombres. Pour Almahoud (2019), il s'agit d'une

généralisation des règles ou des propriétés mathématiques mises en œuvre dans un domaine mathématique sur un autre :

$$\begin{aligned}
 - \quad D &= (4x - 3)^2 \\
 &= (4x + (-3))^2 \\
 &= 16x^2 + 9 \\
 E_2D_3: D &= 16x^2 + 9
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_2D_2 restent valables pour cette réponse ;

$$\begin{aligned}
 - \quad D &= (4x - 3)^2 \\
 &= 4x^2 - 9 \\
 E_2D_4: D &= 4x^2 - 9
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_2D_2 et E_2D_3 restent valables pour cette réponse ;

$$\begin{aligned}
 - \quad D &= (4x - 3)^2 \\
 &= 16x^2 + 24x - 9 \\
 E_2D_5: D &= 16x^2 + 24x - 9
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Cette réponse peut s'expliquer par la mauvaise identification des termes des identités remarquables. Elle peut, également, s'expliquer par la mise en avant de l'aspect structural dans l'utilisation des identités remarquables.

L'équipe de recherche de l'Université de Mons (2019) explique cela par la considération d'une expression littérale en tant que nombre. Pour eux, les expressions algébriques sont utilisées dans une prise en compte des aspects « procédural » et « structural » ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $E = (2x + 9)(2x - 9)$:**

$$\begin{aligned}
 - \quad E &= (2x + 9)(2x - 9) \\
 &= 4x^2 - 81. \\
 E_2E_1: E &= 4x^2 - 81
 \end{aligned}$$

Cette réponse est correcte. L'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, c'est-à-dire *le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leur carré* est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned}
 - \quad E &= (2x + 9)(2x - 9) \\
 &= 4x^2 - 18
 \end{aligned}$$

$$E_2E_2: D = 4x^2 - 18$$

Il y a un glissement des nombres en position de puissance vers la position de coefficients. Cette réponse est fausse ;

$$\begin{aligned}
 - \quad E &= (2x + 9)(2x - 9) \\
 &= 2x + 9 + 2x - 9 \\
 &= 4x
 \end{aligned}$$

$$E_2E_3: D = 4x$$

Cette réponse est fausse. L'élision du signe " $\times$ " peut amener les élèves à transformer le produit en somme.

Pour Booth et Chelsea (1984), les élèves éprouvent des difficultés à comprendre la signification de $\times$;

– Sans réponse.

- **Pour l'expression $F = (11x + 2)^2$:**

$$\begin{aligned}
 - \quad F &= (11x + 2)^2 \\
 &= 121x^2 + 44x + 4
 \end{aligned}$$

$$E_2F_1: F = 121x^2 + 44x + 4$$

Cette réponse est correcte. L'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, c'est-à-dire la règle selon laquelle le carré d'une somme de deux nombres est égal à la somme de leurs carrés augmentée de leur double produit est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned}
 - \quad F &= (11x + 2)^2 \\
 &= 11x^2 + 44x + 4
 \end{aligned}$$

$$E_2F_2: F = 11x^2 + 44x + 4$$

Cette réponse est fausse. Il y a un glissement du calcul de puissance de base constituée d'un nombre au produit d'un nombre par une lettre. Il y a une restriction de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$. Une telle réponse peut être expliquée par la mauvaise interprétation de la lettre.

Booth et Chelsea (1984) évoquent que les élèves ont du mal à savoir si les lettres représentent des nombres ou des objets. L'équipe de recherche de l'Université de Mons (2019) évoque la difficulté des élèves à donner le statut adapté à la lettre et le dépasser ;

$$\begin{aligned}
 - \quad F &= (11x + 2)^2 \\
 &= 121x^2 + 4 \\
 E_2F_3: F &= 121x^2 + 4
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Les explications données aux réponses E_2D_2 , E_2D_3 et E_2D_4 restent valables pour cette réponse ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $G = (-7x + 2)^2$:**

$$\begin{aligned}
 - \quad G &= (-7x + 2)^2 \\
 &= ((-7x) + 2)^2 \\
 &= 49x^2 - 28x + 4 \\
 E_2G_1: G &= 49x^2 - 28x + 4
 \end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. En transformant l'expression $(-7x + 2)^2$ en $((-7x) + 2)^2$, cela devient le carré d'une somme de deux nombres, on obtient la réponse précédente.

$$\begin{aligned}
 - \quad G &= (-7x + 2)^2 \\
 &= (2 - 7x)^2 \\
 &= 4 - 28x + 49x^2 \\
 E_2G_2: G &= 4 - 28x + 49x^2
 \end{aligned}$$

Cette réponse est, également, correcte. En commutant $-7x$ et 2 , on obtient, $2 - 7x$, et donc $(-7x + 2)^2 = (2 - 7x)^2$;

$$\begin{aligned}
 - \quad G &= (-7x + 2)^2 \\
 &= (-(7x + 2))^2 \\
 &= (7x + 2)^2 \\
 &= 49x^2 + 28x + 4 \\
 E_2G_3: G &= 49x^2 + 28x + 4
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Il y a généralisation de la règle de calcul de $(-1)^n$ au calcul de puissance d'une somme algébrique comportant un signe " - " ;

– Sans réponse.

Exercice 3

Développe et réduis les expressions suivantes. L'ordonnement après développement et réduction n'est pas important :

$$H = -3x(x^2 - 2)$$

$$I = (9a + b) \times 2$$

$$J = -(2x - 3)(2x + 3)$$

$$K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$$

✓ Présentation de l'exercice

L'objectif de cet exercice est de regarder comment les élèves :

- développent un produit de sommes algébriques ;
- réagissent face au signe " – " devant un produit de sommes algébriques.

L'item $H = -3x(x^2 - 2)$ est un produit de deux facteurs dont le premier est un monôme de degré 1 comportant le signe " – ", et l'autre, une somme algébrique de degré 2. Il s'agit de la distributivité à gauche. C'est un type de tâche qui ne devait pas, *a priori*, poser des problèmes chez les élèves, car c'est la distributivité simple. Toutefois, la distribution du monôme $-3x$ aux monômes x^2 et -2 peut constituer une difficulté pour les élèves, à cause du signe " – ".

L'item $I = (9a + b) \times 2$ est un produit de deux facteurs dont le premier est une somme algébrique de degré 1, et le second est une constante. Ici, pour développer cette expression, l'élève doit appliquer la distributivité. L'objectif de cet item est de regarder comment l'élève fera pour développer cette expression. Généralement, dans les salles de classe, les enseignants présentent les propriétés et exemples de la distributivité à gauche. Cette pratique fera que les élèves auront de la peine à développer cette expression. Il est possible que les élèves puissent élever l'expression $(9a + b)$ à la puissance 2.

L'item $J = -(2x - 3)(2x + 3)$ est le produit de la différence de deux termes par leur somme précédé du signe " – ". Pour développer cette expression, l'élève doit appliquer l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, en considérant le signe " – " comme indiquant l'opposé de $(2x - 3)(2x + 3)$. La difficulté vient du fait que l'expression comporte le signe " – ". Généralement, dans les salles de classe les enseignants présentent des propriétés où le produit de facteurs n'est pas précédé du signe " – ".

L'item $K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$ est un produit de deux sommes algébriques dont la première est un polynôme de degré 1, et le second, un polynôme de degré 2. Pour développer l'expression, l'élève doit appliquer la distributivité. La difficulté sera d'appliquer correctement la distributivité. Habituellement, les enseignants présentent aux élèves des produits des polynômes de degré 1. Ici, le fait que le second facteur soit un trinôme, il se peut que les élèves éprouvent des difficultés à développer cette expression. Même si les élèves développent

correctement cette expression, le fait de réduire, c'est-à-dire passer de six monômes à quatre monômes peut, constituer une difficulté pour eux.

✓ **Analyse a priori de l'exercice**

Les quatre items ont été choisis en jouant sur la variable didactique suivante : la forme des facteurs (monôme avec signe " – " ou signe " + ", somme algébrique de monômes, nombre de facteurs).

Les réponses attendues sont :

• **Pour l'expression $H = -3x(x^2 - 2)$:**

$$\begin{aligned} - H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^3 + 6x \end{aligned}$$

$$E_3H_1: H = -3x^3 + 6x$$

Cette réponse est correcte. Le premier facteur $-3x$ a été bien distribué à chacun des termes du second facteur, avec une prise en compte du signe " – ";

$$\begin{aligned} - H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^3 - 2 \end{aligned}$$

$$E_3H_2: H = -3x^3 - 2$$

Cette réponse est fausse. L'usage erroné de la distributivité peut conduire à une telle réponse. Le monôme $-3x$ n'a été distribué qu'au premier terme x^2 .

Les interprétations faites par Almahmoud (2019) pour expliquer la réponse E_1B_3 par une sorte de « distributivité langagière » restent valables pour cette réponse E_3H_2 ;

$$\begin{aligned} - H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^3 - 6x \end{aligned}$$

$$E_3H_3: H = -3x^3 - 6x$$

Cette réponse s'explique, également, par un usage erroné de la distributivité. Elle est fausse. Le monôme $-3x$ pas été distribué au second terme du second facteur avec une prise en compte du signe " – ".

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $I = (9a + b) \times 2$:**

$$\begin{aligned} - I &= (9a + b) \times 2 \\ &= 18a + 2b \end{aligned}$$

$$E_3I_1: I = 18a + 2b$$

C'est la réponse correcte. La règle de distributivité est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned} - \quad I &= (9a + b) \times 2 \\ &= 9a + 2b \end{aligned}$$

$$E_3I_2: I = 9a + 2b$$

C'est une réponse fausse. Il y a une distributivité partielle du second facteur.

Les interprétations faites par Almahmoud (2019) pour expliquer la réponse E_2H_3 par une sorte de « distributivité langagière » restent valables pour cette réponse E_3I_2 ;

$$\begin{aligned} - \quad I &= (9a + b) \times 2 \\ &= (9a + b)(9a + b) \\ &= 81a^2 + 18ab + b^2 \end{aligned}$$

$$E_3I_3: I = 81a^2 + 18ab + b^2$$

Cette réponse est fausse. La distributivité à droite du nombre est assimilée à une élévation de la quantité à la puissance. Ici, 2 est passé de la position de facteur à la position de puissance. L'ordre de lecture de cette expression (de gauche à droite) peut conduire à cette réponse où le second facteur, monôme, n'est distribué seulement qu'au second terme du premier facteur.

Pour Booth et Chelsea (1984), les enfants croient que les calculs doivent s'effectuer de gauche à droite (donc que les parenthèses ne seraient pas nécessaires pour préciser cela), ou simplement savent quelle opération doit être effectuée en premier (et là encore il n'est pas besoin de parenthèses) ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $J = -(2x - 3)(2x + 3)$:**

$$\begin{aligned} - \quad J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= -4x^2 + 9 \end{aligned}$$

$$E_3J_1: J = -4x^2 + 9$$

C'est la réponse correcte. L'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ est appliquée correctement, avec une prise en compte du signe " - " devant le produit ;

$$\begin{aligned} - \quad J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= -4x^2 - 9 \end{aligned}$$

$$E_3J_2: J = -4x^2 - 9$$

L'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ est appliquée correctement mais, le signe " - " devant le produit $(2x - 3)(2x + 3)$ n'est pas considéré comme indiquant l'opposé de ce produit . C'est donc une réponse fausse ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$:**

$$\begin{aligned} - K &= (a - 1)(a^2 - 2a + 1) \\ &= a^3 - 2a^2 + a - a^2 + 2a - 1 \\ &= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \\ E_3K_1: K &= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. La règle de distributivité est appliquée correctement. Les termes du premier facteur sont distribués correctement sur les trois termes du second facteur. La réduction, après développement de l'expression, est faite correctement ;

$$\begin{aligned} - K &= (a - 1)(a^2 - 2a + 1) \\ &= a^3 - 2a^2 + a - a^2 + 2a - 1 \\ &= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \\ &= a^3 - 1 \\ E_3K_2: K &= a^3 - 1 \end{aligned}$$

Il y a généralisation du contexte d'application de la propriété $-a + a = 0$. Cette réponse est fausse.

Almahmoud (2019) explique cela par la généralisation des règles ou des propriétés mises en œuvre dans un domaine mathématique sur un autre ;

$$\begin{aligned} - K &= (a - 1)(a^2 - 2a + 1) \\ &= a^3 - 2a^2 + a - a^2 + 2a - 0 \\ &= a^3 - 3a^2 + 3a \\ E_3K_3: K &= a^3 - 3a^2 + 3a \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Il y a un glissement des opérations de calcul du produit de deux nombres opposés au calcul de la somme de deux nombres opposés, c'est-à-dire la règle de l'addition de deux nombres décimaux relatifs de signes contraire est confondue à celle de la multiplication de deux nombres décimaux relatifs de signes contraires.

Les explications données par Almahmoud (2019) à la réponse E_3K_2 restent valables pour la réponse E_3K_3 ;

– Sans réponse.

6.1.2. Analyse *a priori* des exercices du questionnaire adressé aux élèves de 3^{ème}

Pour l'analyse *a priori* des trois exercices adressés aux élèves de 3^{ème}, nous ne reprenons plus les explications apportées par les auteurs déjà cités dans l'analyse *a priori* des exercices destinés aux élèves de 4^{ème}. Nous ne citerons que des auteurs ayant donné des explications autres que celles susmentionnées.

Exercice 1

Réduis les expressions suivantes :

$$A = 2x + (x - 3)$$

$$B = \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2})$$

$$C = -5 - (x - (9 - x))$$

✓ Présentation de l'exercice

L'objectif de cet exercice est le même que celui de l'exercice 1 proposé pour le test en classe de 4^{ème}. Il est question de regarder comment les élèves procèdent pour réduire des sommes algébriques comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou " - ".

La différence avec l'exercice 1 adressé aux élèves de la classe de 4^{ème} réside au niveau de l'expression B où les coefficients des monômes sont des réels.

L'item $A = 2x + (x - 3)$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est un monôme de degré 1 et l'autre, une expression littérale délimitée par des parenthèses. Il s'agit d'une activité qui ne pourrait *a priori* poser aucun problème chez les élèves, car la suppression des parenthèses se ferait sans effet sur l'écriture de la somme. Elle a la même dénotation que $2x + x - 3$.

L'item $B = \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2})$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est une constante et l'autre une expression littérale délimitée par des parenthèses précédées du signe " - ". La propriété permettant de réduire cette expression est présentée dans les manuels et est enseignée dans les salles de classe. De même, les opérations sur les fractions ne sont pas nouvelles pour un élève de 3^{ème}.

L'item $C = -5 - (x - (9 - x))$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est une constante et l'autre, une expression algébrique délimitée par les parenthèses précédées du signe " - " à l'intérieur desquelles se trouve une somme algébrique constituée d'un monôme et une somme délimitée par les parenthèses. Ici, il y a la présence des parenthèses imbriquées.

Pour faire une réduction correcte de cette expression, il faut appliquer la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " – " en commençant par les parenthèses internes.

✓ **Analyse *a priori* de l'exercice**

Les trois items ont été choisis en jouant sur les variables didactiques suivantes :

- signe avant la parenthèse entrante (signe " + " ou " – ");
- type de parenthèses (parenthèses imbriquées ou parenthèses simples).

Les réponses attendues sont :

• **Pour l'expression $A = 2x + (x - 3)$:**

$$\begin{aligned} - \quad A &= 2x + (x - 3) \\ &= 2x + x - 3 \\ &= 3x - 3 \\ E_1A_1: A &= 3x - 3 \end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. La règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + " est bien appliquée et la réduction est faite correctement ;

$$\begin{aligned} - \quad A &= 2x + (x - 3) \\ &= 2x + x - 3 \\ &= 3x - 3 \\ &= 0 \\ E_1A_2: A &= 0 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. L'égalité est considérée comme une annonce du résultat avec mis en avant de l'aspect procédural.

Les arguments donnés par Almahmoud (2019), Grugeon-Allys et Pilet (2017) pour expliquer la réponse E_1A_4 du questionnaire adressé aux élèves de la classe 4^{ème} restent valables pour la réponse précédente.

$$\begin{aligned} - \quad A &= 2x + (x - 3) \\ &= 2x + x - 3 \\ &= 2x^2 - 3 \\ E_1A_3: A &= 2x^2 - 3 \end{aligned}$$

Il y a un glissement de règle de calcul d'une somme algébrique au produit de monômes. C'est une réponse fausse ;

- Sans réponse.

- Pour l'expression $B = \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2})$:

$$\begin{aligned}
 - \quad B &= \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2}) \\
 &= \frac{1}{6} - x + \frac{5}{2} \\
 &= -x + \frac{1 + 15}{6} \\
 &= -x + \frac{16}{6} \\
 &= -x + \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

$$E_1B_1: B = -x + \frac{8}{3}$$

C'est une réponse correcte. La règle de suppression des parenthèses précédées du signe " - " est appliquée correctement et la réduction est faite correctement ;

$$\begin{aligned}
 - \quad B &= \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2}) \\
 &= \frac{1}{6} - x + \frac{5}{2} \\
 &= -x + \frac{2 + 30}{12} \\
 &= -x + \frac{32}{12}
 \end{aligned}$$

$$E_1B_2: B = -x + \frac{32}{12}$$

Cette réponse est juste, pour la rendre simple, il suffit de simplifier la fraction $\frac{32}{12}$;

$$\begin{aligned}
 - \quad B &= \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2}) \\
 &= \frac{1}{6} - x - \frac{5}{2} \\
 &= -x + \frac{2 - 30}{12} \\
 &= -x - \frac{28}{12} \\
 &= -x - \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

$$E_1B_3: B = -x - \frac{7}{3}$$

Cette réponse est fausse. Les explications données pour la réponse E_1B_3 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour cette réponse. Cette réponse est fausse ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $C = -5 - (x - (9 - x))$:**

$$- C = -5 - (x - (9 - x))$$

$$= -5 - x + 9 - x$$

$$= -2x + 4$$

$$E_1C_1: C = -2x + 4$$

C'est la réponse juste. Les parenthèses imbriquées sont bien gérées, de même que les signes ;

$$- C = -5 - (x - (9 - x))$$

$$= -5 - x - 9 + x$$

$$= -14$$

$$E_1C_2: C = -14$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_1C_3 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour la réponse E_1C_2 .

$$- C = -5 - (x - (9 - x))$$

$$= 5x + 45 - 5x$$

$$= 45$$

$$E_1C_3: C = 45$$

Cette réponse est fausse. Ici également, les explications données à la réponse E_1C_2 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour la réponse E_1C_3 .

– Sans réponse.

Exercice 2

Donne les différentes formes des identités remarquables, identifie celle qui correspond à chacune des expressions suivantes, puis développe ces expressions en utilisant ces identités.

$$D = \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 ;$$

$$E = (11x - 11)(11x + 11);$$

$$F = (7 + 4x)^2 ;$$

$$G = (-5x - 2)^2.$$

✓ Présentation de l'exercice

Comme pour la 4^{ème}, cet exercice vise à évaluer la capacité des élèves de 3^{ème} à donner directement la forme développée et réduite d'un polynôme ayant la forme d'une identité remarquable sans utiliser la distributivité. Il vise, également, à évaluer la capacité des élèves à reconnaître des expressions qui ont la forme des identités remarquables. Cela passe par l'identification des termes.

Les expressions D, E et F sont des identités remarquables classiques connues des élèves et pour lesquelles, ces derniers ne pourraient pas *a priori* rencontrer des difficultés majeures. Par contre, l'item G est une tâche un peu complexe à cause du signe " – " devant les deux monômes de la somme.

L'item $D = (\frac{2}{3}x - 3)^2$ est une expression de la forme $(a - b)^2$. C'est le carré d'une différence de deux termes. Puisque toute différence est une somme, on peut transformer l'expression $D = (\frac{2}{3}x - 3)^2$ en somme, $D = (\frac{2}{3}x - 3)^2 = (\frac{2}{3}x + (-3))^2$, et appliquer la propriété $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Généralement cette transformation n'est pas faite par les enseignants dans les salles de classe. Ainsi, les expressions $(\frac{2}{3}x - 3)^2$ et $(\frac{2}{3}x + (-3))^2$ ont la même dénotation.

L'item $E = (11x - 11)(11x + 11)$ est une expression qui a la forme $(a + b)(a - b)$. C'est le produit de la somme de deux nombres par leur différence.

L'item $F = (7 + 4x)^2$ est une expression de la forme $(a + b)^2$ avec $a = 7$ et $b = 4x$.

C'est le carré d'une somme de deux nombres. L'expression $(a + b)^2$ n'a pas la même dénotation que l'expression $(ab)^2$. Il se peut que les élèves les considèrent comme deux expressions de même dénotation et distribuent l'exposant aux termes de la somme.

L'item $G = (-5x - 2)^2$ peut être vu de quatre manières. Il peut être vu comme une expression de la forme $(a + b)^2$ avec $a = -5x$ et $b = -2$. C'est le carré d'une somme ; en effet, $(-5x - 2)^2 = ((-5x) + (-2))^2$. Il peut aussi être vu comme $(-(a + b))^2 = (a + b)^2$; c'est donc le carré d'une somme. L'item peut aussi être vu comme l'expression de la forme $(-a - b)^2 = ((-a) - b)^2$ où $a = 5x$ et $b = 2$, c'est le carré d'une différence. Cet item peut aussi être vu comme l'expression de la forme $(a - b)^2$ où $a = -5x$ et $b = 2$, c'est le carré d'une différence. Ces différentes transformations de l'expression $(-5x - 2)^2$ risquent de ne pas apparaître chez les élèves. Généralement, dans les salles de

classe, les enseignants donnent des exemples où les identités remarquables sont classiques, c'est-à-dire les formes des expressions D, E et F.

✓ **Analyse a priori de l'exercice**

Ces items sont choisis en jouant sur la variable didactique suivante : la forme de l'identité remarquable.

Les réponses attendues sont :

- **Pour l'expression $D = \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2$:**

$$\begin{aligned} - D &= \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}x^2 - 4x + 9 \end{aligned}$$

$$E_2D_1: D = \frac{4}{9}x^2 - 4x + 9$$

C'est la réponse correcte. L'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, c'est-à-dire *le carré d'une différence de deux nombres est égal à la somme de leurs carrés diminuée de leur double produit* est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned} - D &= \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 \\ &= \frac{4}{3}x^2 - 9 \end{aligned}$$

$$E_2D_2: D = \frac{4}{3}x^2 - 9$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_2D_2 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour cette réponse ;

$$\begin{aligned} - D &= \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{3}x + (-3)\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}x^2 + 9 \end{aligned}$$

$$E_2D_3: D = \frac{4}{9}x^2 + 9$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse précédente E_2D_2 restent valables pour cette réponse E_2D_3 ;

$$\begin{aligned}
 - \quad D &= D = \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 \\
 &= \frac{4}{9}x^2 + 4x - 9
 \end{aligned}$$

$$E_2D_4: D = \frac{4}{9}x^2 + 4x - 9$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_2D_5 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour cette réponse ;

– Sans réponse.

- **Pour l'expression $E = (11x - 11)(11x + 11)$:**

$$\begin{aligned}
 - \quad E &= (11x - 11)(11x + 11) \\
 &= 121x^2 - 121
 \end{aligned}$$

$$E_2E_1: D = 121x^2 - 121$$

C'est la réponse correcte. L'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, c'est-à-dire *le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leur carré* est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned}
 - \quad E &= (11x - 11)(11x + 11) \\
 &= 22x^2 - 22
 \end{aligned}$$

$$E_2E_2: E = 22x^2 - 22$$

Il y a un glissement des nombres en position de puissance vers la position de coefficients. Cette réponse est fausse.

$$\begin{aligned}
 - \quad E &= (11x - 11)(11x + 11) \\
 &= 121x^2
 \end{aligned}$$

$$E_2E_3: E = 121x^2$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_2E_3 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour cette réponse ;

– Sans réponse.

- **Pour l'expression $F = (7 + 4x)^2$:**

$$\begin{aligned}
 - \quad F &= (7 + 4x)^2 \\
 &= 49 + 56x + 16x^2
 \end{aligned}$$

$$E_2F_1: F = 49 + 56x + 16x^2$$

Cette réponse est correcte. L'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, c'est-à-dire *le carré d'une somme de deux nombres est égal à la somme de leurs carrés augmentée de leur double produit* est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned}
 - \quad F &= (7 + 4x)^2 \\
 &= 49 + 56x + 4x^2 \\
 E_2F_2: F &= 49 + 56x + 4x^2
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_2F_2 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour cette réponse ;

$$\begin{aligned}
 - \quad F &= (7 + 4x)^2 \\
 &= 49 + 16x^2 \\
 E_2F_3: F &= 49 + 16x^2
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Les explications données aux réponses précédentes E_2D_2, E_2D_3 et E_2D_4 restent valables pour cette réponse ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $G = (-5x - 2)^2$:**

$$\begin{aligned}
 - \quad G &= (-5x - 2)^2 \\
 &= -(5x + 2)^2 \\
 &= (5x + 2)^2 \\
 &= 25x^2 + 20x + 4 \\
 E_2G_1: G &= 25x^2 + 20x + 4
 \end{aligned}$$

Cette réponse est correcte. En transformant l'expression $(-5x - 2)^2$ en $-(5x + 2)^2$, cela devient le carré d'une somme de deux nombres et on obtient la réponse précédente.

$$\begin{aligned}
 - \quad G &= (-5x - 2)^2 \\
 &= ((-5x) + (-2))^2 \\
 &= 25x^2 + 20x + 4 \\
 E_2G_2: G &= 25x^2 + 20x + 4
 \end{aligned}$$

Cette réponse est aussi correcte. En transformant l'expression $(-5x - 2)^2$ en $((-5x) + (-2))^2$ cela devient le carré d'une somme de deux nombres et on obtient la réponse précédente ;

$$\begin{aligned}
 - \quad G &= (-5x - 2)^2 \\
 &= ((-5x) - 2)^2 \\
 &= 25x^2 + 20x + 4 \\
 E_2G_3: G &= 25x^2 + 20x + 4
 \end{aligned}$$

Cette réponse est également correcte. En transformant l'expression $(-5x - 2)^2$ en $((-5x) - 2)^2$ cela devient le carré d'une différence de deux nombres et on obtient la réponse précédente ;

$$\begin{aligned} - \quad G &= (-5x - 2)^2 \\ &= (-5x - 2)^2 \\ &= -25x^2 - 20x - 4 \end{aligned}$$

$$E_2G_4: G = -25x^2 - 20x - 4$$

La non-maîtrise de la propriété de calcul de $(-1)^n$ selon que n soit pair ou impair peut conduire à une telle réponse. Cette réponse est fausse ;

– Sans réponse.

Exercice 3

Développe et réduis les expressions suivantes. L'ordonnement après développement et réduction n'est pas important :

$$H = -2x^3(x^3 - 2)$$

$$I = (x + 9y) \times \frac{2}{3}y$$

$$J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$K = (b^2 - 2b + 1)(b - 2)$$

✓ Présentation de l'exercice

L'objectif de cet exercice est de regarder comment les élèves :

- développent un produit de sommes algébriques ;
- réagissent face au signe " – " devant un produit de sommes algébriques.

La différence de cet exercice avec celui de la classe de 4^{ème} réside au niveau des coefficients des monômes qui sont des réels.

L'item $H = -2x^3(x^3 - 2)$ est un produit de deux facteurs dont le premier est un monôme de degré 3 comportant le signe " – ", et l'autre, une somme algébrique de degré 3. Il s'agit d'appliquer la distributivité. La distribution du monôme $-2x^3$ aux monômes x^3 et -2 peut constituer une difficulté pour les élèves, à cause du signe " – " et des exposants des monômes.

L'item $I = (x + 9y) \times \frac{2}{3}y$ est un produit de deux facteurs dont le premier est une somme algébrique de degré 1, et le second est un monôme de degré 1. L'objectif de cet item est de regarder comment l'élève va développer cette expression. Généralement, dans les salles de

classe, les enseignants présentent les propriétés et exemples de la distributivité à gauche. Même s'ils présentent des exemples de distributivité à droite, c'est avec les monômes à coefficients entiers naturels. Cette pratique fera que les élèves auront de la peine à distribuer correctement le monôme $\frac{2}{3}y$.

L'item $J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ est le produit de la différence de deux termes par leur somme précédé du signe " - ". Pour développer cette expression, l'élève doit appliquer l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, en considérant le signe " - " comme indiquant l'opposé de $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$. La difficulté vient du fait que l'expression comporte le signe " - " et des radicaux. Généralement, dans les salles de classe les enseignants présentent des propriétés où le produit de facteurs n'est pas précédé du signe " - ".

L'item $K = (b^2 - 2b + 1)(b - 2)$ est un produit de deux sommes algébriques dont la première est un polynôme de degré 2, et le second, un polynôme de degré 1. Pour développer l'expression, l'élève doit appliquer la distributivité. La difficulté sera d'appliquer la distributivité. Habituellement, les enseignants présentent aux élèves des produits des polynômes de degré 1. Ici, le fait que le second facteur soit un trinôme, il se peut que les élèves éprouvent des difficultés à développer cette expression. Même si les élèves développent correctement cette expression, le fait de réduire, c'est-à-dire passer de six monômes à quatre monômes peut constituer une difficulté pour eux.

✓ Analyse a priori de l'exercice

Les quatre items ont été choisis en jouant sur la variable didactique suivante : la forme des facteurs (monôme avec signe " - " ou signe " + ", somme algébrique de monômes, nombre de facteurs).

Les réponses attendues sont :

- Pour l'expression $H = -2x^3(x^3 - 2)$:

$$\begin{aligned} - H &= -2x^3(x^3 - 2) \\ &= -2x^6 + 4x^3 \end{aligned}$$

$$E_3H_1: H = -2x^6 + 4x^3$$

Cette réponse est correcte. Le premier facteur $-2x^3$ a été bien distribué à chacun des termes du second facteur, avec une prise en compte du signe " - ";

$$\begin{aligned}
- \quad H &= -2x^3(x^3 - 2) \\
&= -2x^6 - 2 \\
E_3H_2: H &= -2x^6 - 2
\end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_3H_2 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour cette réponse ;

$$\begin{aligned}
- \quad H &= -2x^3(x^3 - 2) \\
&= -2x^6 - 4x^3 \\
E_3H_3: H &= -2x^6 - 4x^3
\end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_3H_3 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour cette réponse ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $I = (x + 9y) \times \frac{2}{3}y$**

$$\begin{aligned}
- \quad I &= (x + 9y) \times \frac{2}{3}y \\
&= \frac{2}{3}xy + 6y^2 \\
E_3I_1: I &= \frac{2}{3}xy + 6y^2
\end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. La règle de distributivité est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned}
- \quad I &= (x + 9y) \times \frac{2}{3}y \\
&= \frac{2}{3}xy + \frac{18}{3}y^2 \\
E_3I_2: I &= \frac{2}{3}xy + \frac{18}{3}y^2
\end{aligned}$$

C'est également la réponse correcte puisque les fractions $\frac{18}{3}$ et 6 sont égales ;

$$\begin{aligned}
- \quad I &= (x + 9y) \times \frac{2}{3}y \\
&= x + \frac{18}{3}y^2 \\
E_3I_3: I &= x + \frac{18}{3}y^2
\end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_3I_2 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour cette réponse ;

– Sans réponse.

- **Pour l'expression $J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$:**

$$- J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$= -x^2 + 3$$

$$E_3J_1: J = -x^2 + 3$$

C'est la réponse correcte. L'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ est appliquée correctement, avec une prise en compte du signe " - " devant le produit ;

$$- J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$= -x^2 + \sqrt{9}$$

$$E_3J_2: J = -x^2 + \sqrt{9}$$

Cette réponse également est juste. Il suffit d'appliquer la propriété $\sqrt{a^2} = a$ (pour a réel positif) ;

$$- J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$= x^2 - 3$$

$$E_3J_3: J = x^2 - 3$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse E_3J_2 du pré-test destiné aux élèves de la classe de 4^{ème} restent valables pour cette réponse ;

- Sans réponse.

- **Pour l'expression $K = (b^2 - 2b + 1)(b - 2)$:**

$$- K = (b^2 - 2b + 1)(b - 2)$$

$$= b^3 - 2b^2 - 2b^2 + 4b + b - 2$$

$$= b^3 - 4b^2 + 5b - 2$$

$$E_3K_1: K = b^3 - 4b^2 + 5b - 2$$

C'est la réponse correcte. La règle de distributivité est appliquée correctement. Les termes du premier facteur sont distribués correctement sur les trois termes du second facteur. La réduction, après développement de l'expression, est faite correctement ;

$$- K = (b^2 - 2b + 1)(b - 2)$$

$$= b^3 - 2b^2 - 2b^2 + 4b + b - 2$$

$$= b^3 + b - 2$$

$$E_3K_2: K = b^3 + b - 2$$

Cette réponse est fausse. Il y a généralisation du contexte d'application de la propriété $-a + a = 0$;

- Sans réponse.

6.2. Analyse *a posteriori* des réponses des élèves aux questionnaires

Nous présentons les analyses *a posteriori* des réponses des élèves de 4^{ème} et de 3^{ème} aux questionnaires.

6.2.1. Analyse *a posteriori* des réponses des élèves de la classe de 4ème

6.2.1.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou du signe " – "

Exercice 1

Réduis les expressions suivantes :

$$A = 5 + (x - 3)$$

$$B = 5 - (x + 3)$$

$$C = 3 - (x - (5 + x))$$

Tableau 6 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $A = 5 + (x - 3)$

	$E_1A_1: A = x + 2$	$E_1A_2: A$ $= 5 + x - 3$ $= x + 2 = 2x$	$E_1A_3: A$ $= 5 + x - 3$ $= 5x - 3$	$E_1A_4: A$ $= 5 + x - 3$ $= 5x - 3$ $= 2x$	$E_1A_5: A$ $= 5 - 3x$	$E_1A_6: A$ $= 5x - 15$	$E_1A_7: A$ $= 5x - 15$ $= -10x$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	2E4 ⁸ , 3E4, 10E4, 11 E4, 12 E4, 13 E4, 14 E4, 16 E4, 17 E4, 18E4, 19 E4, 22 E4, 24 E4, 26 E4, 27 E4, 28 E4, 31 E4, 37 E4, 39 E4, 41 E4, 51 E4	3 E4, 20 E4, 15 E4	29 E4, 36 E4, 50 E4	29 E4	7E4	1 E4, 6 E4, 23E4, 32E4, 33E4, 38E4, 42 E4, 43E4, 44E4, 45E4, 46E4, 53E4	30 E4, 34 E4, 49 E4, 52 E4	4 E4, 5 E4, 8 E4, 9E4, 21 E4, 40 E4, 41 E4, ,48 E4, 54 E4	25 E4
Effectif	21	03	03	01	01	12	04	09	01
Fréquence	39 %	06 %	06 %	02 %	02 %	22 %	07 %	17 %	2 %

⁸ E4 signifie élève de la 4^{ème}

Les résultats que nous obtenons montrent que 21 élèves, soit 39 %, donnent une réponse correcte.

3 élèves donnent une réponse de la catégorie *considération du signe " + " comme opératoire* (réponse $A = 5 + x - 3 = 5x - 3$).

3 autres élèves donnent une réponse de la catégorie *considération du signe " + " comme opératoire et de l'égalité comme annonce de résultat* (réponse $A = 5 + x - 3 = x + 2 = 2x$).

L'élève 29E4 considère les signes " + " et " - " comme opératoires (réponse $A = 5 + x - 3 = 5x - 3 = 2x$), c'est-à-dire que la présence de ces signes indique qu'il doit effectuer les opérations et obtenir un résultat. L'élève 7E4 considère le signe " - " comme opératoire avec mise en avant de la priorité de l'opération entre parenthèses (réponse $A = 5 - 3x$).

12 élèves donnent une réponse de la catégorie *glissement de la distributivité* (réponse $A = 5x - 15$). On retrouve ce raisonnement dans 4 réponses ($A = 5x - 15 = -10x$). Ces réponses montrent que l'égalité a, en plus d'être une équivalence, un statut d'annonce de résultat. Il y a un glissement de la somme en un produit de facteurs.

9 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces réponses, on trouve 5 élèves (21 E4, 40 E4, 40 E4, 41 E4, 48 E4) qui donnent des réponses relevant d'un glissement de la distributivité. En associant les 5 élèves aux 16 élèves (réponses $A = 5x - 15$ et $A = 5x - 15 = -10x$), on a 21 élèves qui font un glissement de la distributivité.

Les difficultés que nous relevons, à travers ces réponses à l'item A, montrent que les élèves considèrent les signes " + " et " - " comme opératoires. De plus, ils considèrent l'égalité comme annonce de résultat et font un glissement de la distributivité, c'est-à-dire ils ont des difficultés à identifier la structure d'une somme algébrique et appliquent la distributivité lors de la réduction de cette somme.

Ces difficultés nous amène à faire l'hypothèse selon laquelle la présence des parenthèses dans une somme algébrique amène les élèves à appliquer la distributivité lors de la réduction de cette somme. Autrement dit, la structure des expressions algébriques n'est pas prise en compte par les élèves.

Deux problèmes émergent : le sens des parenthèses et l'identification des structures des expressions algébriques

Tableau 7 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $B = 5 - (x + 3)$

	$E_1B_1: B$ $= 2 - x$	$E_1B_2: B$ $= 8 - x$	$E_1B_3: B$ $= -5x + 15$	$E_1B_4: B$ $= 5x - 15$	$E_1B_5: B$ $= 5x + 15$	$E_1B_6: B$ $= -5x - 15$	$E_1B_7: B$ $= 5 + 15x$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3 E4, 11 E4, 13 E4, 18 E4, 19 E4, 24 E4, 26 E4, 27 E4, 28 E4, 37 E4	2 E4, 8 E4, 12 E4, 15 E4, 16 E4, 17 E4, 31 E4, 38 E4, 39 E4, 54 E4	6 E4, 52 E4	1 E4, 40 E4, 41 E4, 53 E4	33 E4	23 E4, 32 E4, 42 E4, 44 E4, 45 E4, 46 E4	30 E4, 34 E4, 43 E4	4 E4, 5 E4, 9 E4, 10 E4, 14 E4, 20 E4, 21 E4, 22 E4, 25 E4, 29 E4, 35 E4, 36 E4, 47 E4, 48 E4, 49 E4, 50 E4, 51 E4	7 E4
Effectif	10	10	02	04	01	06	03	17	01
Fréquence	19 %	19 %	04 %	07 %	02 %	11 %	06 %	31 %	2 %

19 % des élèves donnent la réponse correcte (réponse $B = 2 - x$).

19 % des élèves donnent une réponse ($B = 8 - x$) de la catégorie *considération du signe " - " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme*. En effet, les élèves ne considèrent pas le signe " - " devant une somme comme marque de l'opposé de la somme. Ainsi, il y a un traitement indifférencié du signe " - " devant les parenthèses.

16 élèves sur 54 donnent des réponses de la catégorie *glissement de la distributivité* (réponses $E_1B_3, E_1B_4, E_1B_5, E_1B_6, E_1B_7$).

31 % des élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces réponses, on trouve 5 élèves (4 E4, 14 E4, 20 E4, 47 E4 et 50 E4) qui commencent la réduction de l'expression B en considérant le signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme. En associant les 5 élèves aux 10 élèves qui donnent la réponse $B = 8 - x$, on a 15 élèves qui ne considèrent pas le signe " – " devant la somme comme marque de l'opposé de la somme. De même, parmi les élèves de la catégorie *autres réponses*, 3 autres élèves (21 E4, 25 E4 et 49 E4) font un glissement de la distributivité, en distribuant la constante 5 à l'un des termes de la somme $x + 3$ délimitée par les parenthèses. Cela fait passer le nombre d'élèves ayant fait un glissement de la distributivité à 19.

Il ressort de l'analyse de l'item B que les élèves font un glissement de la distributivité, d'une part, et ont des difficultés à interpréter le signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé de cette somme, d'autre part.

Tableau 8 : Distribution des élèves à l'expression $C = 3 - (x - (5 + x))$

	$E_1C_1: C = 8$	$E_1C_2: C = -15$	$E_1C_3: C = -2 - 2x$	$E_1C_4: C = -2$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3 E4, 10 E4, 13 E4, 14 E4, 18 E4, 19 E4, 26 E4, 37 E4, 48 E4	23 E4, 29 E4, 32 E4, 40 E4, 41 E4, 42 E4, 44 E4, 53 E4	4 E4, 11 E4, 36 E4, 38 E4, 39 E4, 47 E4, 50 E4	9 E4, 12 E4, 15 E4, 16 E4, 20 E4, 25 E4, 28 E4	1 E4, 2 E4, 5 E4, 6 E4, 8 E4, 17 E4, 21 E4, 22 E4, 24 E4, 27 E4, 30 E4, 31 E4, 34 E4, 35 E4, 45 E4, 46 E4, 49 E4, 52 E4	7 E4, 33 E4, 43 E4, 51 E4, 54 E4
Effectif	09	08	07	07	18	05
Fréquence	17 %	15 %	13 %	13 %	33 %	09 %

Pour cet item, 17 % des élèves donnent la réponse correcte.

15 % des élèves donnent une réponse de la catégorie *glissement de la distributivité*.

13 % des élèves donnent une réponse ($C = -2$) de la catégorie *la considération du signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme*. De même, 13 % des élèves considèrent le signe " – " devant les parenthèses

externes, dans l'expression $C = 3 - (x - (5 + x))$, comme l'opposé seulement du premier terme de la somme délimitée par les grandes parenthèses. Ainsi, 14 élèves sur 54 (réponses $C = -2 - 2x$, $C = -2$) ne considèrent pas le signe " - " devant une somme algébrique comme marque de l'opposé de la somme.

33 % des élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ceux-ci, 7 élèves (1 E4, 6 E4, 30 E4, 34 E4, 45 E4, 46 E4, 52 E4,) qui donnent des réponses relevant d'un glissement de la distributivité. En associant les 7 élèves aux 8 élèves (réponse $C = -15$), nous avons 15 élèves qui font un glissement de la distributivité.

A partir des différentes réponses à l'item C, nous constatons que les élèves font un glissement du contexte d'application de la distributivité en transformant une somme en un produit de facteurs. De plus, ils ont de la peine à interpréter le statut du signe " - " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme l'opposé de cette somme. En effet, ils considèrent le signe " - " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 1

L'exercice 1 a été proposé aux élèves dans l'objectif de regarder comment ceux-ci procèdent pour réduire des sommes algébriques comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou " - ". Cet exercice nous a permis de relever les éléments suivants :

- le contexte d'application de la distributivité : les élèves généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique. Cela est constaté dans la réduction des trois items de l'exercice ;
- le statut de l'égalité : la représentation réductrice de l'égalité comme une annonce de résultat dans le calcul numérique amène les élèves à réduire le résultat à un terme ;
- les statuts des signes " + " et " - " : les élèves utilisent d'addition et la soustraction comme opératoires, c'est-à-dire, pour eux, la présence de ces signes indique qu'ils doivent effectuer les opérations et obtenir un résultat. De plus, ils considèrent le signe " - " devant une somme algébrique comme marque de l'opposé du premier terme de la somme. Cette difficulté est constatée dans la réduction des expressions B et C ;

- les structures des expressions algébriques : les élèves éprouvent des difficultés à distinguer les termes des facteurs.

Si nous désignons par A, B et C les ensembles des élèves qui ont donné les réponses correctes respectivement aux items $A = 5 + (x - 3)$, $B = 5 - (x + 3)$,

$C = 3 - (x - (5 + x))$, nous avons :

$A = \{2E4, 3E4, 10E4, 11E4, 12E4, 13E4, 14E4, 16E4, 17E4, 18E4, 19E4, 22E4, 24E4, 26E4, 27E4, 28E4, 31E4, 37E4, 39E4, 41E4, 51E4\}$

$B = \{3E4, 11E4, 13E4, 18E4, 19E4, 24E4, 26E4, 27E4, 28E4, 37E4\}$

$C = \{2E4, 3E4, 8E4, 10E4, 13E4, 14E4, 17E4, 18E4, 19E4, 26E4, 37E4, 48E4\}$

$A \cap B \cap C = \{3E4, 13E4, 18E4, 19E4, 26E4, 37E4\}$

$Card(A \cap B \cap C) = 6$

Ces résultats montrent que, sur 54 élèves soumis au pré-test, 6 élèves donnent les réponses correctes à l'exercice 1. Cela montre que les élèves éprouvent des difficultés à réduire des sommes algébriques comportant des parenthèses précédées du signe "+" ou

" - ".

Nous faisons l'hypothèse que ces difficultés proviennent des enseignements que les élèves ont reçus en classe et de la manière dont le calcul littéral est présenté dans les manuels.

Nous pensons qu'un travail axé sur ces aspects avec les élèves pourrait les aider à dépasser les obstacles qui sous-tendent ces difficultés.

6.2.1.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables

Exercice 2

Donne les différentes formes des identités remarquables, identifie celle qui correspond à chacune des expressions suivantes, puis développe ces expressions en utilisant ces identités.

$$D = (4x - 3)^2 ;$$

$$E = (2x + 9)(2x - 9);$$

$$F = (11x + 2)^2 ;$$

$$G = (-7x + 2)^2.$$

Tableau 9 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $D = (4x - 3)^2$

	$E_2D_1: D$ $= 16x^2$ $- 24x + 9$	$E_2D_2: D$ $= 16x^2$ $- 9$	$E_2D_3: D$ $= 16x^2$ $- 24x - 9$	$E_2D_4: D$ $= 16x^2$ $+ 24x + 9$	$E_2D_5: D$ $= 16x$ $- 24x + 9$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	2 E4, 8 E4, 10 E4, 11 E4, 13 E4, 18 E4, 24 E4, 28 E4, 33 E4, 37 E4, 44 E4, 45 E4, 46 E4, 48 E4	3 E4, 4 E4, 11 E4, 12 E4, 14 E4, 15 E4, 16 E4, 17 E4, 21 E4, 22 E4, 39 E4, 41 E4, 42 E4, 43 E4, 51 E4	22 E4, 32 E4, 47 E4	4 E4, 31 E, 50 E4, 54 E4	38 E4	5 E4, 6 EA, 7 E4, 9 E4, 20 E4, 25 E4, 29 E4, 30 E4, 34 E, 36 E4, 52 E4, 53 E4	19 E4, 26 E4, 27 E4, 35 E4, 49 E4
Effectif	14	15	03	04	01	12	05
Fréquence	26 %	28 %	06 %	07 %	02 %	22 %	09 %

14 élèves donnent la réponse correcte.

15 élèves donnent une réponse de la catégorie *généralisation du contexte d'application de la propriété* $(ab)^n = a^n b^n$ (réponse $D = 16x^2 - 9$). En effet, les élèves considèrent le carré d'une différence de termes comme la différence de leur carré, en extrapolant les contextes d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$. De même, les élèves considèrent les expressions $(4x - 3)^2$ et $(4x - 3)(4x + 3)$ comme ayant la même dénotation.

8 élèves proposent des réponses de la catégorie *mauvaise identification des termes des identités remarquables*. En effet, dans le développement des identités remarquables, les élèves n'identifient pas correctement les termes au point de permuter les signes des termes. Les élèves 22 E4, 32 E4, 47 E4 proposent la réponse $D = 16x^2 - 24x - 9$; les élèves 4 E4, 31 E4, 50 E4,

54 E4 proposent la réponse $D = 16x^2 + 24x + 9$; l'élève 38 E4 identifie correctement les signes des termes, mais fait une distribution partielle de l'exposant du monôme $4x$ en proposant la réponse $D = 16x - 24x + 9$.

12 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ceux-ci, 9 élèves (5 E4, 6 E4, 7 E4, 20 E4, 34 E4, 36 E4, 52 E4, 53 E4) proposent des réponses de la catégorie *mauvaise identification des termes des identités remarquables*. Présentons quelques-unes de ces réponses relevant de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

L'élève 5 E4 écrit :

$$\begin{aligned} D &= (4x - 3)^2 \\ &= 8x + 12x + 12x + 9 \\ &= 8x + 14x + 9 \\ &= 22x + 9 \end{aligned}$$

Cette expression correspond à l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Cet élève fait une mauvaise identification du premier terme combinée aux signes de ces termes. Cette difficulté peut s'expliquer par le fait que dans la propriété, le premier terme de la différence est un monôme de coefficient 1 et dans l'expression à développer, le premier terme de la différence est un monôme de coefficient différent de 1.

L'élève 6 E4 écrit :

$$\begin{aligned} D &= (4x - 3)^2 \\ &= 16x - 12x - 12x - 9 \\ &= 16x - 9 - 24x \\ &= 24x - 16x - 9 \\ &= 8x - 9 \end{aligned}$$

Comme l'élève 5 E4, cet élève fait également une mauvaise identification du premier terme combinée aux signes de ces termes.

Il ressort des réponses proposées par les élèves à l'item D que ces derniers éprouvent des difficultés relevant de la mauvaise identification des termes des identités remarquables, de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

Tableau 10 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $F = (11x + 2)^2$

	$E_2E_1: E = 4x^2 - 81$	$E_2E_2: E = 4x - 81$	$E_2E_3: E = 2x^2 - 81$	$E_2E_4: E = 4x^2 + 36x - 81$	$E_2E_5: E = 4x^2 - 36x - 81$	$E_2E_6: E = 4x^2 + 36x + 81$	$E_2E_7: E = 4x^2$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	2 E4, 3 E4, 8 E4, 10 E4, 11 E4, 12 E4, 13 E4, 17 E4, 18 E4, 24 E4, 27 E4, 28 E4, 33 E4, 37 E4, 41 E4, 42 E4, 43 E4, 44 E4, 45 E4, 48 E4, 54 E4	5 E4, 25 E4, 29 E4, 32 E4, 38 E4, 53 E4	9 E4, 36 E4	15 E4, 20 E4	4 E4, 16 E4,	1 E4, 31 E4	23 E4	6 E4, 7 E4, 21 E4, 30 E4, 34 E4, 40 E4, 46 E4, 47 E4, 51 E4, 52 E4	14 E4, 19 E4, 22 E4, 26 E4, 35 E4, 39 E4, 49 E4, 50 E4
Effectif	21	06	02	02	02	02	01	10	08
Fréquence	39 %	11 %	04 %	04 %	04 %	04 %	02 %	19 %	15 %

21 des élèves donnent la réponse correcte.

8 élèves (5 E4, 25 E4, 29 E4, 32 E4, 38 E4, 53 E4 et 9 E4, 36 E4) donnent une réponse relevant de la catégorie *non-maîtrise de la propriété* $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$. En effet, dans le calcul de puissances dont la base est numérico-littérale, les élèves n'arrivent pas à distribuer l'exposant au nombre et à la lettre : ils le distribuent soit à la lettre, soit au nombre.

6 élèves (4 E4, 16 E4, 15 E4, 20 E4, 1 E4, 31 E4) donnent des réponses de la catégorie *mauvaise identification des termes des identités remarquables*. En effet, les élèves proposent des réponses $E = 4x^2 + 36x - 81$, $E = 4x^2 - 36x - 81$, $E = 4x^2 + 36x - 81$, au lieu de $E = 4x^2 - 81$.

10 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces réponses, la plupart relèvent de la *mauvaise identification des termes des identités remarquables*. Présentons quelques-unes de ces réponses relevant de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

L'élève 52 E4 écrit :

$$\begin{aligned} E &= (2x + 9)(2x - 9) \\ &= 4x + 18x + 18x - 81 \\ &= 36x - 81 \end{aligned}$$

Cette expression correspond à l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Cet élève confond cette identité à l'identité $(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. À cela s'ajoute la non maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

L'élève 47 E4 écrit :

$$\begin{aligned} E &= (2x + 9)(2x - 9) \\ &= 4x + 18x + 18x - 81 \\ &= 22x + 18x - 81 \\ &= 22x + 40x - 81 \\ &= 62x - 81 \end{aligned}$$

Comme l'élève 52 E4, cet élève confond l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ à l'identité $(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. De même, il ne maîtrise pas la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

Les réponses à l'item E montrent que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ et de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

Tableau 11 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $F=(11x + 2)^2$

	$E_2F_1:F$ $= 121x^2$ $+ 44x + 4$	$E_2F_2:F$ $= 11x^2$ $+ 44x + 4$	$E_2F_3:F$ $= 121x^2$ $+ 4$	$E_2F_4:F$ $= 121x$ $+ 44x + 4$	$E_2F_5:F$ $= 22x$ $+ 44x + 4$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	11 E4, 12 E4, 13 E4, 18 E4, 23 E4, 24 E4, 28 E4, 31 E4, 33 E4, 37 E4, 44 E4, 45 E4, 46 E4, 48 E4, 52 E4	9 E4	1 E4, 3 E4, 14 E4, 15 E4, 21 E4, 22 E4, 35 E4, 41 E4	32 E4, 34 E4, 38 E4, 53 E4	5 E4	16 E4, 17 E4, 25 E4, 27 E4, 29 E4, 30 E4, 36 E4, 40E4, 42 E4, 43 E4, 47 E4, 51 E4	2 E4, 4 E4, 6 E4, 7 E4, 8 E4, 10 E4, 19 E4, 20 E4, 26 E4, 39 E4, 49 E4, 50 E4, 54 E4
Effectif	15	01	08	04	01	12	13
Fréquence	28 %	02 %	15 %	07 %	02 %	22 %	24 %

28 % des élèves donnent la réponse correcte.

15 % des élèves donnent une réponse de la catégorie *généralisation du contexte d'application de la propriété* $(ab)^n = a^n b^n$. En effet, les élèves considèrent le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes, en extrapolant les contextes d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

6 élèves (9 E4, 32 E4, 34 E4, 38 E4, 53 E4, 5 E4) donnent des réponses (réponses $F = 11x^2 + 44x + 4$; $F = 121x + 44x + 4$; $F = 22x + 44x + 4$) relevant de la catégorie *non-maîtrise de la propriété* $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

22% des élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces autres réponses, la plupart relèvent de la mauvaise identification des termes des identités remarquables. Présentons quelques-unes de ces réponses :

- l'élève 17 E4 écrit :

$$\begin{aligned} F &= (11x + 2)^2 \\ &= 121x^2 + 14x - 14x - 4 \\ &= 121x - 4 \end{aligned}$$

Cet élève applique bien la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$, mais il fait une mauvaise identification des signes des termes, notamment des signes des deux derniers termes.

- l'élève 43 E4 écrit :

$$\begin{aligned} F &= (11x + 2)^2 \\ &= 121x - 22x + 22x - 4 \\ &= 121x - 4 \end{aligned}$$

Cet élève ne maîtrise pas la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$. À cela s'ajoute une mauvaise identification des signes des termes.

- l'élève 16 E4 écrit :

$$\begin{aligned} F &= (11x + 2)^2 \\ &= (11x + 2)(11x - 2) \\ &= 121x^2 - 4 \end{aligned}$$

Cet élève ne maîtrise pas la propriété $a^n = a \times a \dots \times a$, en transformant le carré d'une somme en produit de la somme de ces termes par leur différence.

- L'élève 25 E4 écrit :

$$\begin{aligned} F &= (11x + 2)^2 \\ &= 11x + 2 + 11x + 2 \\ &= 11x + 11x + 2 + 2 \\ &= 22x + 4 \end{aligned}$$

Cet élève fait une mauvaise identification des termes combinée à la non maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

L'analyse des réponses à l'expression F montre que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application des propriétés de puissance et de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

Tableau 12 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $G = (-7x + 2)^2$

	$E_2G_1: G$ $= 49x^2$ $- 28x + 4$	$E_2G_2: G$ $= -49x$ $+ 4$	$E_2G_3: G$ $= -7x^2$ $+ 4$	$E_2G_4: G$ $= 49x$ $- 28x + 4$	$E_2G_5: G$ $= -49x^2$ $- 28x + 4$	$E_2G_6: G$ $= -49x^2$ $- 28x + 4$	$E_2G_7: G$ $= 49x^2 + 28x$ $+ 4$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	11 E4, 12 E4, 13 E4, 24 E4, 28 E4, 33 E4, 37 E4, 45 E4	1E4, 34 E4, 41E4	3 E4, 9 E4, 21 E4, 35 E4	5 E4, 44 E4	6 E4, 23 E4, 53 E4	16 E4, 17 E4, 27 E4, 42 E4, 43 E4	48 E4, 52 E4	25 E4, 29 E4, 30 E4, 31 E4, 32 E4, 36 E4, 38 E4, 40E4, 46 E4, 47 E4, 51 E4	2 E4, 4 E4, 7 E4, 8 E4, 10 E4, 14 E4, 15 E4, 18 E4, 19 E4, 20 E4, 22 E4, 26 E4, 39 E4, 49 E4, 50 E4, 54 E4
Effectif	08	03	04	02	03	05	02	11	16
Fréquence	15 %	06 %	07 %	04 %	06 %	09 %	04 %	20 %	30 %

8 élèves donnent la réponse correcte.

7 élèves donnent des réponses de la catégorie *généralisation du contexte d'application de propriété* $(ab)^n = a^n b^n$ (les réponses $G = -49x + 4$ et $G = -7x^2 + 4$).

12 élèves donnent des réponses de la catégorie *mauvaise identification des termes des identités remarquables* (les réponses $G = 49x - 28x + 4$; $G = -49x^2 - 28x + 4$; $G = 49x^2 + 28x + 4$). En effet, les élèves n'identifient pas l'expression $(-7x + 2)^2$ au carré d'une somme.

11 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. La plupart de ces réponses relèvent de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

L'élève 25 E4 supprime les parenthèses en multipliant les facteurs ; il y a un glissement des règles de réduction du produit de monômes au développement d'un produit de sommes algébriques. En effet, il écrit :

$$\begin{aligned} G &= (-7x + 2)^2 \\ &= -7x + 2 \times -7x + 2 \\ &= -7x + 2 \end{aligned}$$

16 élèves ne parviennent pas à donner une réponse à l'item. Ce nombre élevé d'élèves par rapport à toutes les catégories définies nous amène à faire l'hypothèse selon laquelle lorsque la structure d'une expression donnée dans une tâche n'est pas identique à celle proposée au cours, les élèves éprouvent des difficultés à faire des transformations ou des identifications.

Il ressort de l'analyse des réponses des élèves à l'item G que ces derniers éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application des propriétés de puissance, de la mauvaise identification des termes des identités remarquables. De plus, lors que la structure de l'identité remarquable n'est pas identique à celle proposée dans les propriétés énoncées au cours, notamment dans le cas du carré d'une somme où le premier terme comporte le signe " - ", les élèves ne parviennent pas à identifier les termes.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 2

L'exercice 2 proposé aux élèves vise à évaluer la capacité des élèves à donner directement la forme développée et réduite d'un produit de sommes ayant la forme d'une identité remarquable. Cela passe par l'identification des termes.

L'analyse des réponses des élèves à cet exercice nous a permis de relever les éléments suivants :

- le contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$: les élèves généralisent le contexte d'application de la propriété : $(ab)^n = a^n b^n$. En effet, ils considèrent le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes ou le carré de la différence de termes comme la différence de leur carré ;
- l'identification des termes des identités remarquables : dans le développement des identités remarquables, les élèves font une mauvaise identification des termes au point de permuter les signes de ces termes ;
- la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$: dans le calcul de puissances dont la base est numérique-littérale, les élèves n'arrivent pas à distribuer l'exposant au nombre et à la lettre : ils le distribuent soit à la lettre, soit au nombre ;
- la réduction des monômes et développement de produits : il y a un glissement des règles de réduction du produit de monômes au développement d'un produit de sommes algébriques. En effet, ils suppriment les parenthèses en multipliant les facteurs ;
- les structures des expressions : lorsque la structure de l'identité remarquable n'est pas identique à celle proposée dans les propriétés énoncées au cours, les élèves ne parviennent pas à identifier les termes ou à faire des transformations.

Si nous désignons par D, E, F et G les ensembles des élèves qui ont donné les réponses correctes respectivement aux items $D = (4x - 3)^2$, $E = (2x + 9)(2x - 9)$, $F = (11x + 2)^2$, $G = (-7x + 2)^2$, nous avons :

$D = \{2 \text{ E4}, 8 \text{ E4}, 10 \text{ E4}, 11 \text{ E4}, 13 \text{ E4}, 18 \text{ E4}, 24 \text{ E4}, 28 \text{ E4}, 33 \text{ E4}, 37 \text{ E4}, 44 \text{ E4}, 45 \text{ E4}, 46 \text{ E4}, 48 \text{ E4}\}$

$E = \{2 \text{ E4}, 3 \text{ E4}, 8 \text{ E4}, 10 \text{ E4}, 11 \text{ E4}, 12 \text{ E4}, 13 \text{ E4}, 17 \text{ E4}, 18 \text{ E4}, 24 \text{ E4}, 27 \text{ E4}, 28 \text{ E4}, 33 \text{ E4}, 37 \text{ E4}, 41 \text{ E4}, 42 \text{ E4}, 43 \text{ E4}, 44 \text{ E4}, 45 \text{ E4}, 48 \text{ E4}, 54 \text{ E4}\}$

$F = \{11 \text{ E4}, 12 \text{ E4}, 13 \text{ E4}, 18 \text{ E4}, 23 \text{ E4}, 24 \text{ E4}, 28 \text{ E4}, 31 \text{ E4}, 33 \text{ E4}, 37 \text{ E4}, 44 \text{ E4}, 45 \text{ E4}, 46 \text{ E4}, 48 \text{ E4}, 52 \text{ E4}\}$

$G = \{11 \text{ E4}, 12 \text{ E4}, 13 \text{ E4}, 24 \text{ E4}, 28 \text{ E4}, 33 \text{ E4}, 37 \text{ E4}, 45 \text{ E4}\}$

$D \cap E \cap F \cap G = \{11 \text{ E4}, 13 \text{ E4}, 24 \text{ E4}, 28 \text{ E4}, 33 \text{ E4}, 37 \text{ E4}, 45 \text{ E4}\}$

$\text{Card}(D \cap E \cap F \cap G) = 7$

Il ressort de ces résultats que seulement 7 élèves sur 54 élèves soumis au pré-test donnent les réponses correctes aux items de l'exercice 2. Cela montre que les élèves éprouvent des difficultés à développer les identités remarquables.

Nous pensons que l'apprentissage des identités remarquables s'appuyant sur l'articulation entre les aspects procédural et structural, surtout lorsqu'elles sont présentées pour la première fois aux élèves, pourrait aider ces derniers à dépasser les obstacles qui sous-tendent ces difficultés susmentionnées.

6.2.1.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques

Exercice 3

Développe et réduis les expressions suivantes. L'ordonnement après développement et réduction n'est pas important :

$$H = -3x(x^2 - 2)$$

$$I = (9a + b) \times 2$$

$$J = -(2x - 3)(2x + 3)$$

$$K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$$

Tableau 13 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $H = -3x(x^2 - 2)$

	$E_3H_1: H = -3x^3 + 6x$	$E_3H_2: H = -3x^3 - 6x$	$E_3H_3: H = -3x + 6$	$E_3H_4: H = -3x^3 + 6$	$E_3H_5: H = -3x + x^2 - 2$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1 E4, 3 E4, 4 E4, 9 E4, 11 E4, 12 E4, 13 E4, 14 E4, 16 E4, 18 E4, 19 E4, 22 E4, 23 E4, 24 E4, 25 E4, 26 E4, 27 E4, 28 E4, 29 E4, 31 E4, 32 E4, 33 E4, 37 E4, 42 E4, 43 E4, 45 E4, 46 E4, 47 E4, 50 E4, 54 E4	6 E4, 39 E4, 53 E4	5 E4, 38 E4	7 E4, 15 E4, 48 E4	10 E4, 39 E4	8 E4, 17 E4, 20 E4, 21 E4, 30 E4, 34 E4, 35 E4, 41 E4, 44 E4, 52 E4	2 E4, 36 E4, 40 E4, 51 E4
Effectif	30	03	02	03	02	10	04
Fréquence	56 %	06 %	04 %	06 %	04 %	19 %	07 %

Plus de la moitié des élèves donnent la réponse correcte.

8 élèves proposent des réponses de la catégorie *défaut dans la distributivité* (réponses $H = -3x^3 - 6x$; $H = -3x + 6x$; $H = -3x^3 + 6$). En effet, les élèves appliquent partiellement la distributivité, dans le développement d'un produit de sommes.

11 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Plus de la moitié de ces réponses s'expliquent par un défaut dans la distributivité. Présentons quelques-unes de ces réponses relevant d'un défaut dans la distributivité.

L'élève 17 E4 écrit :

$$\begin{aligned} H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^2 - 6x \end{aligned}$$

L'élève 20 E4 écrit :

$$\begin{aligned} H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^2 - 6 \end{aligned}$$

L'élève 41 E4 écrit :

$$\begin{aligned} H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^3 - 6 \end{aligned}$$

L'élève 44 E4 écrit :

$$\begin{aligned} H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^3 - 6x^2 \end{aligned}$$

Les difficultés qu'éprouvent les élèves dans le développement d'un produit de sommes algébriques dont un facteur est un monôme sont dues à un défaut dans la distributivité.

Tableau 14 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $I = (9a + b) \times 2$

	$E_3I_1: I = 18a + 2b$	$E_3I_2: I = 9a + 2b$	$E_3I_3: I = 18ab$	$E_3I_4: I = 18a + b$	$E_3I_5: I = 18ab + 2b$	$E_3I_6: I = 20ab$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1 E4, 2 E4, 3 E4, 4 E4, 11 E4, 12 E4, 13 E4, 16 E4, 18 E4, 19 E4, 20 E4, 21 E4, 23 E4, 24 E4, 26 E4, 27 E4, 28 E4, 31 E4, 32 E4, 34 E4, 35 E4, 36 E4, 37 E4, 38 E4, 39 E4, 42 E4, 44 E4, 45 E4, 46 E4, 48 E4, 49 E4, 54 E4	5 E4, 7 E4, 10 E4	8 E4, 9 E4, 14 E4, 17 E4, 33 E4, 51 E4	6 E4	25 E4	52 E4	15 E4, 22 E4, 29 E4, 30 E4, 40 E4, 43 E4, 47 E4	41 E4, 50 E4, 53 E4
Effectif	32	03	06	01	01	01	07	03
Fréquence	59 %	06 %	11 %	02 %	02 %	02 %	13 %	06 %

Plus de la moitié, soit 59 %, des élèves donnent la réponse correcte.

11 % des élèves donnent une réponse de la catégorie *utilisation du signe " + " comme opératoire*. En effet, les élèves considèrent le signe " + " qui sépare la somme délimitée par les parenthèses comme indication de l'assemblage des termes.

2 autres élèves proposent, également, des réponses de la catégorie *utilisation du signe " + " comme opératoire* (réponses $I = 18ab + 2b$; $I = 20ab$).

4 élèves proposent des réponses de la catégorie *défaut dans la distributivité*
($I = 9a + 2b$; $I = 18a + b$).

7 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses relèvent, pour la plupart des cas, d'un défaut dans la distributivité. Présentons quelques-unes de ces réponses :

L'élève 15 E4 écrit :

$$\begin{aligned} I &= (9a + b) \times 2 \\ &= 9ab + 18a + 2b \\ &= 9ab + 20ab \\ &= 29ab \end{aligned}$$

L'élève 22 E4 écrit :

$$\begin{aligned} I &= (9a + b) \times 2 \\ &= 18a - 2b \end{aligned}$$

L'élève 29 E4 écrit :

$$\begin{aligned} I &= (9a + b) \times 2 \\ &= 9ab + 18a \times 2b \end{aligned}$$

L'élève 40 E4 écrit :

$$\begin{aligned} I &= (9a + b) \times 2 \\ &= 9ab + 18a \\ &= 9a \times b + 9a \times 2 \\ &= 9ab + 18a \end{aligned}$$

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item I que les difficultés des élèves sont dues à l'utilisation du signe " + " comme opérateur et à un défaut dans la distributivité.

Tableau 15 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $J = -(2x - 3)(2x + 3)$

	$E_3J_1: J$ $= -4x^2 + 9$	$E_3J_2: J$ $= -4x^2 - 9$	$E_3J_3: J$ $= 4x^2 - 9$	$E_3J_4: J$ $= -4x + 9$	$E_3J_5: J$ $= 4x^2 - 12x + 9$	$E_3J_6: J$ $= -4x^2 + 12x - 9$	$E_3J_7: J$ $= -4x^2 - 12x - 9$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1 E4, 3 E4, 4 E4, 11 E4, 13 E4, 17 E4, 118 E4, 31 E4, 39 E4, 50 E4, 52 E4, 54 E4	5 E4, 12 E, 24 E4, 28 E4, 37 E4, 53 E4	27 E4, 35 E4, 41 E4, 48 E4	19 E4, 26 E4	22 E4, 33 E4, 43 E4, 51 E4	42 E4, 44 E4	23 E4, 45 E4, 46 E4	2 E4, 6 E4, 8 E4, 9 E4, 10 E4, 15 E4, 20 E4, 21 E4, 25 E4, 29 E4, 30 E4, 32 E4, 34 E4, 38 E4, 40 E4, 47 E4	14 E4, 16 E4, 49 E4
Effectif	12	06	04	02	04	02	03	17	04
Fréquence	22 %	11 %	07 %	04 %	07 %	04 %	06 %	31 %	07 %

22 % des élèves donnent la réponse correcte.

10 des élèves donnent une réponse de la catégorie *utilisation du signe " - " devant un produit de sommes algébriques comme n'indiquant pas l'opposé de la somme* (réponses $J = -4x^2 - 9$; $J = 4x^2 - 9$). En effet, lorsqu'il s'agit de développer un produit de sommes algébriques précédé du signe " - ", les élèves ne considèrent pas le signe " - " comme marque de l'opposé du produit de ces sommes. Cela les amène à ne pas identifier correctement les signes des monômes obtenus après développement.

9 élèves proposent des réponses de la catégorie *mauvaise identification des termes des identités remarquables* (réponses $J = 4x^2 - 12x + 9$; $J = -4x^2 + 12x - 9$; $J = -4x^2 - 12x - 9$).

17 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. La plupart de ces réponses relèvent de la mauvaise identification des termes des identités remarquables. Présentons quelques-unes de ces réponses.

L'élève 7 EA écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= -4x - 6x - 6x - 6 \\ &= -10x - 6x - 6 \\ &= -16x - 6 \end{aligned}$$

L'élève 9 E4 écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= -2x^2 - 6x - -6x - -9 \\ &= -2x^2 - 9 \end{aligned}$$

L'élève 15 E4 écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= 4x^2 - 6x - 6x - 9 \\ &= 4x^2 - 12x - 9 \end{aligned}$$

Les réponses proposées à l'item J montrent que les élèves éprouvent des difficultés à développer un produit des sommes algébriques précédé du signe " - ". Ils ne considèrent pas le signe " - " devant un produit de sommes algébriques comme marque de l'opposé de ce produit.

Tableau 16 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $K=(a-1)(a^2-2a+1)$

	$E_3K_1:K$ $= a^3 - 3a^2 + 3a - 1$	$E_3K_1:K =$ $a^3 - 3a^2 + 3a$	$E_3K_1:K$ $= 4a - 2a^2 - 1$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	37 E4, 48 E4	23 E4, 4 E4	13 E4, 45 E4	1 E4, 2 E4, 3 E4, 4 E4, 5 E4, 8 E4, 9 E4, 11 E4, 12 E4, 14 E4, 15 E4, 17 E4, 18 E4, 19 E4, 21 E4, 22 E4, 24 E4, 25 E4, 26 E4, 27 E4, 28 E4, 29 E4, 30 E4, 32 E4, 33 E4, 34 E4, 35 E4, 38 E4, 40 E4, 41 E4, 42 E4, 44 E4, 46 E4, 47 E4, 49 E4, 52 E4, 53 E4, 54 E4	6 E4, 7 E4, 10 E4, 16 E4, 20 E4, 31 E4, 36 E4, 39 E4, 50 E4, 51 E4
Effectif	02	02	02	37	10
Fréquence	04 %	04 %	04 %	69 %	19 %

4 élèves seulement proposent la réponse correcte.

Plus de la moitié des élèves ne donnent pas la réponse correcte. Parmi ces réponses non correctes, certaines relèvent de la non maîtrise des propriétés de puissances (élèves 5 E4, 11 E4, 13 E4, 15 E4, 33 E4, 38 E4, 41 E4, 42 E4, 44 E4, 45 E4). D'autres réponses relèvent de la non maîtrise des règles de signes (élèves 1 E4, 9 E4, 18 E4, 19 E4, 26 E4, 40 E4, 47 E4). D'autres encore relèvent d'un défaut dans la distributivité (élèves 2 E4, 23 E4, 43 E4).

10 élèves ne parviennent pas à proposer une réponse à l'item K.

L'analyse des réponses à l'item K nous amène à faire l'hypothèse selon laquelle lorsqu'il s'agit de développer un produit de sommes algébriques dont un facteur est un binôme et l'autre, un trinôme, les élèves éprouvent des difficultés.

Un travail de transformation et d'identification avec les élèves semble nécessaire pour les aider à développer et à réduire des expressions dont les structures ne sont pas des applications directes du cours.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 3

Nous avons proposé l'exercice 3 aux élèves dans l'objectif de regarder comment ces derniers développent un produit de sommes algébriques et réagissent face au signe " – " devant un produit de sommes algébriques.

L'analyse des réponses des élèves à cet exercice nous a permis de relever les éléments suivants :

- la distributivité : dans le développement des produits de sommes algébriques, les élèves font un défaut dans la distributivité. En effet, les élèves appliquent partiellement la distributivité, dans le développement d'un produit de sommes ;
- les statuts des signes " + " et " – " : les élèves utilisent les signes " + " et " – " comme opérateurs. Le signe " + " placé entre deux nombres comme signe d'une opération amène les élèves à lui donner le statut opératoire et de ce fait, combiné à la représentation que ces derniers ont de l'égalité comme annonce du résultat, ils additionnent ou assemblent des monômes non semblables. De même, les élèves éprouvent des difficultés à développer un produit des sommes algébriques précédé du signe " – " ; les élèves ne considèrent pas le signe " – " devant un produit de sommes algébrique comme marque de l'opposé du produit ;
- la réduction des monômes et développement de produits : il y a un glissement des règles de réduction du produit de monômes au développement d'un produit de sommes algébriques. En effet, ils suppriment les parenthèses en multipliant les facteurs ;
- les structures des expressions algébriques présentées dans les tâches demandées aux élèves : lorsque la structure d'une expression ne ressemble pas directement à celle présentée dans les énoncés de propriétés ou règles énoncées habituellement, les élèves éprouvent des difficultés à réaliser la tâche.

Si nous désignons par H, I, J et K les ensembles des élèves qui ont donné les réponses correctes respectivement aux items $H = -3x(x^2 - 2)$, $I = (9a + b) \times 2$,

$J = -(2x - 3)(2x + 3)$, $K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$, nous avons :

$H = \{1 E4, 3 E4, 4 E4, 9 E4, 11 E4, 12 E4, 13 E4, 14 E4, 16 E4, 18 E4, 19 E4, 22 E4, 23 E4, 24 E4, 25 E4, 26 E4, 27 E4, 28 E4, 29 E4, 31 E4, 32 E, 33 E4, 37 E4, 42 E4, 43 E4, 45 E4, 46 E4, 47 E4, 50 E4, 54 E4\}$

$I = \{1 E4, 2 E4, 3 E4, 4 E4, 11 E4, 12 E4, 13 E4, 16 E4, 18 E4, 19 E4, 20 E4, 21 E4, 23 E4, 24 E4, 26 E4, 27 E4, 28 E4, 31 E4, 32 E4, 34 E4, 35 E4, 36 E4, 37 E4, 38 E4, 39 E4, 42 E4, 44 E4, 45 E4, 46 E4, 48 E4, 49 E4, 54 E4\}$

$J = \{1 E4, 3 E4, 4 E4, 11 E4, 13 E4, 17 E4, 18 E4, 31 E4, 39 E4, 50 E4, 52 E4, 54 E4\}$

$K = \{37 E4, 48 E4\}$

$H \cap I \cap J \cap K = \{ \}$

Au regard de ces résultats, aucun élève sur les 54 donne la réponse correcte aux quatre items de l'exercice 3. Cela montre que les élèves éprouvent des difficultés à développer un produit de sommes algébriques. Cependant, les résultats $H \cap I \cap J = \{1 E4, 3 E4, 4 E4, 11 E4, 13 E4, 18 E4, 31 E4, 54 E4\}$ et $Card(H \cap I \cap J) = 8$ montrent que lorsque les facteurs sont des monômes ou des binômes, le cas des items H, I et J, 8 élèves donnent des réponses correctes. Il en ressort que les élèves éprouvent énormément des difficultés à développer un produit dont un facteur est un trinôme.

Ainsi, un travail de transformation et d'identification des termes avec les élèves semble nécessaire pour le développement et la réduction des expressions dont les structures ne sont pas des applications directes du cours.

6.2.2. Synthèse de l'analyse des réponses des élèves de 4^{ème}

À l'issue de l'analyse des réponses des élèves de 4^{ème}, nous retenons les éléments suivants :

- la distributivité : il y a d'une part, un glissement de la distributivité, et d'autre part, un défaut dans la distributivité ;
- les statuts des signes " + " et " – " : les élèves utilisent les signes " + " et " – " comme opératoires, c'est-à-dire, pour eux, la présence de ces signes indique qu'ils doivent effectuer les opérations et obtenir un résultat. De plus, ils considèrent le signe " – " devant une somme comme marque de l'opposé du premier terme de la somme. De même, les élèves éprouvent des difficultés à développer un produit des

- sommes algébriques précédé du signe " – " ; ils ne considèrent pas le signe " – " devant un produit de sommes algébriques comme marque de l'opposé du produit ;
- le statut de l'égalité : les élèves considèrent l'égalité comme annonce de résultat dans le calcul numérique ;
 - l'identification des termes des identités remarquables : dans le développement des identités remarquables, les élèves font une mauvaise identification des termes au point de permuter les signes de ces termes ;
 - la non-maîtrise de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$: dans le calcul de puissances dont la base est numérico-littérale, les élèves n'arrivent pas à distribuer l'exposant au nombre et à la lettre : ils le distribuent soit à la lettre, soit au nombre ;
 - la réduction des monômes et développement de produits : il y a un glissement des règles de réduction du produit de monômes au développement d'un produit de sommes algébriques ;
 - les structures des expressions algébriques : les élèves éprouvent des difficultés à distinguer les termes des facteurs. De même, lorsque, dans une tâche, la structure d'une expression ne ressemble pas directement à celle présentée dans les énoncés de propriétés ou règles énoncées habituellement, les élèves éprouvent des difficultés à réaliser cette tâche.

Notons que le croisement des réponses des élèves aux trois exercices du pré-test en 4^{ème} montre qu'aucun sur les 54 ne donne la réponse correcte à tous les items.

6.2.3. Analyse *a posteriori* des réponses des élèves de 3ème

6.2.3.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou du signe " – "

Exercice 1

Réduis les expressions suivantes :

$$A = 2x + (x - 3)$$

$$B = \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2})$$

$$C = -5 - (x - (9 - x))$$

Tableau 17 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $A = 2x + (x - 3)$

	$E_1A_1: A = 3x - 3$	$E_1A_2: A = 2x^2 - 6x$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	2E3 ⁹ , 3E3, 5E3, 6E3, 7E3, 8E3, 9E3, 10E3, 13E3, 14E3, 16E3, 17E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 23E3, 24E3, 25E3, 26E3, 27E3, 28E3B, 29E3, 30E3, 32E3, 33E3, 34E3, 35E3, 36E3, 37E3, 38E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3	12E3, 15E3, 22E3	1E3, 4E3, 11E3, 31E3	
Effectif	35	03	04	00
Fréquence	83 %	07 %	10 %	00 %

Les résultats que nous obtenons montrent que 35 élèves, soit 83 % donnent la réponse correcte.

3 élèves donnent une réponse de la catégorie *glissement de la distributivité* (réponse $A = 2x^2 - 6x$). Cette réponse nous amène à faire l'hypothèse que la présence des parenthèses dans une somme algébrique amène les élèves à appliquer la distributivité lors de la réduction de cette somme. De ce fait, la structure des expressions algébriques n'est pas maîtrisée par les élèves.

4 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Par exemple, l'élève 1E3B écrit :

$$\begin{aligned}
 A &= 2x + (x - 3) \\
 &= 2x + x - 3 \\
 &= 3x + 3 \\
 &= 6x
 \end{aligned}$$

Cet élève a bien débuté, mais il a fini par obtenir une réponse incorrecte. Cette réponse s'explique par le fait que l'élève a, d'une part, confondu la propriété de commutativité à la propriété de transposition d'un terme dans une égalité. En effet, l'élève change le signe du nombre 3 par son opposé, et d'autre part, considère le signe " + " comme opérateur.

⁹ E3 signifie élève de 3^{ème}

La difficulté majeure que nous relevons à travers ces réponses est que les élèves font un glissement de la distributivité.

Tableau 18 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $B = \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2})$

	$E_1B_1: B$ $= -x + \frac{8}{3}$	$E_1B_2: B$ $= -x + \frac{16}{6}$	$E_1B_3: B$ $= -\frac{1}{6}x + \frac{5}{12}$	$E_1B_4: B$ $= \frac{1}{6} - x - \frac{5}{2}$ $= \frac{7}{3} - x$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3, 6E3, 9E3, 13E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 24E3, 37E3, 39E3, 40E3, 41E3	10E3, 23E3, 27E3	12E3, 15E3	7E3, 30E3, 33E3	1E3, 2E3, 5E3, 8E3, 11E3, 14E3, 16E3, 17E3, 22E3, 25E3, 26E3, 35E3, 36E3, 38E3, 31E3, 42E3	4E3, 28E3, 29E3, 32E3, 34E3
Effectif	13	03	02	03	16	05
Fréquence	31 %	07 %	05 %	07 %	38 %	12 %

31 % des élèves donnent la réponse correcte (réponse $B = -x + \frac{8}{3}$).

07 % des élèves donnent une réponse correcte, mais pas simplifiée (réponse $B = -x + \frac{16}{6}$).

07 % des élèves donnent une réponse de la catégorie *glissement de la distributivité* ($B = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{12}$).

38 % des élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces réponses, nous trouvons 9 élèves (1E3, 8E3, 14E3, 16E3, 17E3, 26E3, 35E3, 36E3, 42E3) qui

donnent des réponses relevant de la considération du signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme. En effet, certains élèves ne considèrent pas le signe " – " devant la somme comme marque de l'opposé de la somme. Par exemple, l'élève 8E3B écrit :

$$\begin{aligned}
 - \quad B &= \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2}) \\
 &= \frac{1}{6} - x - \frac{5}{2} \\
 &= \frac{4}{-4} - x \\
 &= -1 - x
 \end{aligned}$$

D'autres élèves donnent des réponses de la catégorie *non maîtrise des règles d'opération sur les fractions* (5E3, 22E3, 38E3). Par exemple :

– l'élève 5E3 écrit :

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2}) \\
 &= \frac{1}{6} - x + \frac{5}{2} \\
 &= -x + \frac{5 \times 3}{2 \times 3} \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{15}{6} - x
 \end{aligned}$$

– l'élève 38E3 écrit :

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2}) \\
 &= \frac{1}{6} - x + \frac{5}{2} \\
 &= -x + \frac{2+30}{12} \\
 &= -x + \frac{16}{4} \\
 &= -x + 4
 \end{aligned}$$

Pour l'item B, il ressort de l'analyse des réponses des élèves que ces derniers font un glissement de la distributivité, n'interprètent pas le signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme. De même, ils ne maîtrisent pas les règles d'opérations sur les fractions.

Tableau 19 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $C = -5 - (x - (9 - x))$

	$E_1 C_1: C$ $= -2x + 4$	$E_1 C_2: C$ $= -14$	$E_1 C_3: C = 45$	$E_1 C_4: C$ $= -2x - 14$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3, 5E3, 6E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 23E3, 24E3, 25E3, 27E3, 38E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3	32E3, 35E3, 37E3	12E3, 15E3	7E3, 8E3, 14E3, 17E3, 34E3, 36E3	2E3, 9E3, 11E3, 13E3, 16E3, 22E3, 26E3, 28E3, 31E3	1E3, 4E3, 10E3, 29E3, 30E3, 33E3
Effectif	16	03	02	06	09	06
Fréquence	38 %	07 %	05 %	14 %	21 %	14 %

Pour cet item, 38 % des élèves donnent la réponse correcte.

5 % des élèves donnent une réponse de la catégorie *glissement de la distributivité*.

7 % des élèves donnent la réponse ($C = -2$) de la catégorie *la considération du signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme*. De même, 14 % des élèves considèrent le signe " – " devant les parenthèses externes, dans l'expression $C = -5 - (x - (9 - x))$, comme l'opposé seulement du premier terme de la somme délimitée par les grandes parenthèses. Ainsi 9 élèves sur 42 (réponses $C = -14$; $C = -2x - 14$) ne considèrent pas le signe " – " devant une somme algébrique comme marque de l'opposé de la somme.

21 % des élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ceux-ci, les élèves 2E3, 9E3, 31E3 et 13E3 font un glissement de la distributivité en distribuant la constance -5 à un des termes de la somme délimitée par les parenthèses externes. L'élève 22E3 a bien commencé mais a commis une erreur par la suite. En effet, il écrit :

$$\begin{aligned}
 C &= -5 - (x - (9 - x)) \\
 &= -5 - x + 9 - x \\
 &= -x - x - 5 + 9 \\
 &= -x^2 + 4
 \end{aligned}$$

Il ressort de l'analyse des réponses des élèves à l'item C que ces derniers font un glissement de la distributivité en transformant une somme algébrique en un produit. De plus, ils ont de la peine à interpréter le statut du signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme l'opposé de cette somme.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 1

L'analyse des réponses des élèves à cet exercice nous a permis de relever les éléments suivants :

- le contexte d'application de la distributivité : les élèves généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique. Cela est constaté dans la réduction des trois items de l'exercice ;
- le statut du signe " – " : les élèves considèrent le signe " – " comme opératoire, c'est-à-dire, pour eux, la présence de ce signe indique qu'ils doivent effectuer les opérations et obtenir un résultat. De plus, ils ne considèrent pas le signe " – " devant la somme comme marque de l'opposé de la somme. Cette difficulté est constatée dans la réduction des expressions B et C ;
- les structures des expressions algébriques : les élèves éprouvent des difficultés à distinguer les termes des facteurs.

En désignant par A, B et C les ensembles des élèves qui ont donné les réponses correctes respectivement aux items $A = 2x + (x - 3)$, $B = \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2})$,

$C = -5 - (x - (9 - x))$, on a :

$A = \{2E3, 3E3, 5E3, 6E3, 7E3, 8E3, 9E3, 10E3, 13E3, 14E3, 16E3B, 17E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 23E3, 24E3, 25E3, 26E3, 27E3, 28E3, 29E3, 30E3, 32E3, 33E3, 34E3B, 35E3, 36E3, 37E3, 38E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3\}$

$B = \{3E3, 6E3, 9E3, 13E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 24E3, 37E3, 39E3, 40E3, 41E3, 10E3, 23E3, 27E3\}$

$C = \{3E3, 5E3, 6E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 23E3, 24E3, 25E3, 27E3, 38E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3\}$

$A \cap B \cap C = \{3E3, 6E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 24E3, 27E3, 39E3, 40E3, 41E3B\}$

$Card(A \cap B \cap C) = 11$

Ces résultats montrent que, sur 42 élèves soumis au pré-test, 11 élèves donnent les réponses correctes à l'exercice 1. Cela montre également que les élèves de 3^{ème} éprouvent des difficultés à réduire des sommes algébriques comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou " - ".

Comme nous l'avons dit pour le premier exercice de la classe de 4^{ème}, nous pensons qu'un travail avec les élèves axé sur les aspects susmentionnés pourrait les aider à dépasser les obstacles qui sous-tendent ces difficultés.

6.2.3.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables

Exercice 2

Donne les différentes formes des identités remarquables, identifie celle qui correspond à chacune des expressions suivantes, puis développe ces expressions en utilisant ces identités.

$$D = \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 ;$$

$$E = (11x - 11)(11x + 11);$$

$$F = (7 + 4x)^2 ;$$

$$G = (-5x - 2)^2.$$

Tableau 20 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $D = \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2$

	$E_2D_1: D$ $= \frac{4}{9}x^2 - 4x + 9$	$E_2D_2: D$ $= \frac{4}{9}x^2 - \frac{12}{3}x + 9$	$E_2D_3: D$ $= \frac{4}{9}x^2 - 9$	$E_24: D$ $= \frac{4}{9}x^2 + 4x - 9$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3, 13E3, 31E3, 40E3, 41E3, 42E3	16E3, 20E3, 21E3, 23E3, 24E3, 25E3, 26E3, 37E3, 39E3	2E3, 5E3, 6E3, 15E3, 22E3, 30E3, 32E3, 33E3, 39E3	9E3	1E3, 4E3, 7E3, 8E3, 10E3, 11E3, 14E3, 17E3, 18E3, 19E3, 34E3, 35E3, 36E3	12E3, 27E3, 28E3, 29E3
Effectif	06	09	09	01	13	04
Fréquence	14 %	21 %	21 %	02 %	31 %	10 %

6 élèves donnent la réponse correcte.

9 élèves donnent la réponse correcte, mais non simplifiée (réponse

$$D = \frac{4}{9}x^2 - \frac{12}{3}x + 9).$$

9 élèves donnent des réponses de la catégorie *généralisation du contexte d'application de la propriété* $(ab)^n = a^n b^n$ (réponse $D = \frac{4}{9}x^2 - 9$).

L'élève 9E3B propose la réponse (réponse $D = \frac{4}{9}x^2 + 4x - 9$) de la catégorie *mauvaise identification des termes des identités remarquables*. En effet, dans le développement des identités remarquables, les élèves n'identifient pas correctement les termes.

13 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ceux-ci, les élèves 1E3B et 8E3B proposent des réponses relevant de la transformation du produit de deux sommes en somme de ces sommes. Les 11E3, 14E3, 17E3 et 35E3 font une mauvaise identification des termes des identités remarquables. Par exemple, l'élève 35E3 écrit :

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 \\ &= \frac{2}{3}x^2 - \frac{6}{3}x - \frac{6}{3}x + 9 \\ &= \frac{2}{3}x^2 + 9 \end{aligned}$$

Les élèves 10E3, 18E3, 19E3, 34E3 et 36E3 donnent des réponses de la catégorie *non maîtrise des règles d'opération sur les fractions*. Par exemple :

– l'élève 10E3 écrit :

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}x^2 - \frac{6}{3}x - \frac{6}{3}x + 9 \\ &= \frac{4}{9}x^2 - \frac{-18-18}{9}x + 9 \\ &= \frac{4}{9}x^2 - \frac{44}{9}x + 9 \end{aligned}$$

– l'élève 18E3 écrit :

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}x^2 - \frac{6}{3}x - \frac{6}{3}x + 9 \\ &= \frac{4}{9}x^2 - \frac{12}{9}x + 9 \end{aligned}$$

Il ressort de l'analyse des réponses proposées par les élèves à l'item D que ces derniers éprouvent des difficultés relevant de la mauvaise identification des termes des identités remarquables, de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$ et de la transformation du produit de deux sommes en somme de ces sommes.

Tableau 21 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $E = (11x - 11)(11x + 11)$

	$E_2E_1 : E$ $= 121x^2 - 121$	$E_2E_2 : E$ $= 22x^2 - 22$	$E_2E_3 : E$ $= 11x^2 - 121$	$E_2E_4 : E$ $= 121x - 121$	$E_2E_5 : E$ $= 22x$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3, 5E3, 7E3, 9E3, 13E3, 15E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 23E3, 25E3, 30E3, 31E3, 36E3, 37E3, 38E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3	10E3, 33E3	22E3, 28E3, 29E3, 32E3, 34E3, 35E3,	11E3, 12E3	8E3	1E3, 2E3, 14E3, 17E3, 24E3, 26E3	4E3, 6E3, 16E3, 27E3
Effectif	21	02	06	02	01	06	04
Fréquence	50 %	05 %	14 %	05 %	02 %	14 %	01 %

La moitié des élèves donnent la réponse correcte.

10 élèves donnent des réponses relevant de la catégorie *non-maîtrise de la propriété* $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ (réponses $E = 22x^2 - 22$, $E = 11x^2 - 121$, $E = 121x - 121$). En effet, dans le calcul de puissances dont la base est numérico-littérale, les élèves n'arrivent pas à distribuer l'exposant au nombre et à la lettre : ils le distribuent soit à la lettre, soit au nombre.

L'élève 8E3 donne la réponse de la catégorie *transformation du produit de deux sommes en somme de ces sommes*. En effet, il écrit :

$$\begin{aligned}
 E &= (11x - 11)(11x + 11) \\
 &= 11x - 11 + 11x + 11 \\
 &= 22x
 \end{aligned}$$

6 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces réponses, certaines relèvent de la mauvaise identification des termes ou de la confusion des identités remarquables. D'autres réponses relèvent de la considération des signes " + " et " – " comme opérateurs et de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$. Présentons quelques-unes de ces réponses :

– L'élève 1E3 écrit :

$$\begin{aligned} E &= (11x - 11)(11x + 11) \\ &= (x) + (11x + 11) \\ &= (x + 22x) \\ &= 23x \end{aligned}$$

Cet élève considère les signes " + " et " – " comme opérateurs.

– L'élève 14E3 écrit :

$$\begin{aligned} E &= (11x - 11)(11x + 11) \\ &= 121x^2 - 121x - 121x - 121 \\ &= 121x^2 - 242x - 121 \end{aligned}$$

Cet élève confond l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ à l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Les réponses à l'item E montrent que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la non-maîtrise de la propriété de puissance $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ et de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

Tableau 22 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $F = (7 + 4x)^2$

	$E_2F_1: F$ $= 49 + 56x$ $+ 16x^2$	$E_2F_2: F$ $= 8x + 14$	$E_2F_3: F$ $= 14$ $+ 4x^2$	$E_2F_4: F$ $= 49$ $+ 16x^2$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3B, 5E3B, 9E3B, 10E3B, 15E3B, 16E3B, 17E3B, 18E3B, 19E3B, 20E3B, 21E3B, 22E3B, 23E3B, 25E3B, 28E3B, 29E3B, 33E3B, 34E3B, 37E3B, 38E3B, 39E3B, 40E3B, 41E3B, 42E3B	2E3B, 8E3B	32E3B, 35E3B	14E3B, 30E3B	1E3B, 4E3B, 6E3B, 7E3B, 11E3B, 12E3B, 13E3B, 24E3B, 26E3B, 31E3B, 36E3B	27E3B
Effectif	24	02	02	02	11	01
Fréquence	57 %	05 %	05 %	05 %	26 %	02 %

Plus de la moitié des élèves donnent la réponse correcte.

4 élèves donnent des réponses de la catégorie *généralisation du contexte d'application de la propriété* $(ab)^n = a^n b^n$ (réponses $F = 14 + 4x^2$ et $F = 49 + 16x^2$).

2 élèves donnent des réponses de la catégorie *transformation du produit de deux sommes en somme de ces sommes* (réponse $F = 8x + 14$).

11 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. La plupart de ces réponses relèvent de la mauvaise identification des termes des identités remarquables. Quelques réponses relèvent de la non maîtrise des propriétés de puissances et de la considération du signe " + " comme opérateur. Présentons quelques-unes de ces réponses.

– L'élève 6E3 écrit :

$$\begin{aligned} F &= (7 + 4x)^2 \\ &= 7^2 + 2(7 + 4x) + (4x)^2 \\ &= 49 + 14 + 8x + 16x \end{aligned}$$

Cet élève fait une mauvaise identification de termes de l'identité

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

– L'élève 6E3 écrit :

$$\begin{aligned} F &= (7 + 4x)^2 \\ &= (7 + 4x)(7 + 4x) \\ &= 11x + 11x \\ &= 22x \end{aligned}$$

Cet élève considère le signe " + " comme opératoire.

L'analyse des réponses des élèves à l'expression F montre que ces derniers éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application des propriétés de puissance, de la transformation du produit de deux sommes en somme de ces somme, de la considération du signe " + " comme opératoire et à la non-maîtrise de la propriété

$$ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}.$$

Tableau 23 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $G = (-5x - 2)^2$

	$E_2 G_1 : G$ $= 25x^2$ $+ 20x + 4$	$E_2 G_2 : G$ $= -10x$ $- 4$	$E_2 G_3 : G$ $= -7x^2$ $+ 4$	$E_2 G_4 : G$ $= 25x^2$ $+ 4$	$E_2 G_5 : G$ $= 10x^2$ $+ 20x$ $+ 4$	$E_2 G_6 : G$ $= 25x$ $+ 20x$ $+ 4$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3, 6E3, 16E3, 17E3, 18E3, 20E3, 21E3, 22E3, 23E3, 25E3, 26E3, 29E3, 33E3, 34E3, 36E3, 37E3, 38E3, 39E3, 40E3, 42E3	3E3, 8E3	13E3	14E3, 28E3, 30E3	10E3	11E3	1E3, 4E3, 5E3, 7E3, 9E3, 12E3, 15E3, 19E3, 24E3, 31E3, 41E3	27E3, 32E3, 35E3
Effectif	20	02	01	03	01	01	11	03
Fréquence	48 %	05 %	02 %	07 %	02 %	02 %	26 %	07 %

Près de la moitié des élèves donnent la réponse correcte.

3 élèves donnent des réponses de la catégorie *généralisation du contexte d'application de propriété* $(ab)^n = a^n b^n$ (réponse $G = 25x^2 + 4$).

2 élèves donnent des réponses de la catégorie *non-maîtrise de la propriété* $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ (réponses $G = 10x^2 + 20x + 4$, $G = 25x + 20x + 4$).

11 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. La plupart de ces réponses s'expliquent par la mauvaise identification des termes des identités remarquables. Quelques réponses relèvent de la considération des signes " + " et " - " comme opérateurs. Présentons quelques-unes de ces réponses.

– L'élève 4E3 écrit :

$$\begin{aligned}
 G &= (-5x - 2)^2 \\
 &= (-5x - 2)(-5x - 2) \\
 &= -3x + 3x \\
 &= -6x
 \end{aligned}$$

Cet élève considère le signe " - " comme opérateur.

- L'élève 7E3 écrit :

$$\begin{aligned} G &= (-5x - 2)^2 \\ &= (-5x - 2)(-5x - 2) \\ &= 25x^2 + 10x + 10x + 4 \\ &= 25x^2 + 14x \end{aligned}$$

Cet élève a bien commencé le développement, mais considère, ensuite, le signe " + " comme opératoire.

- L'élève 9E3 écrit :

$$\begin{aligned} G &= (-5x - 2)^2 \\ &= (-5x)^2 - 2 \times -5x \times 2 - 4 \\ &= -25x^2 - (-20x) - 4 \\ &= -25x^2 - 4 \end{aligned}$$

Cet élève identifie l'expression $(-5x - 2)^2$ à $(a - b)^2$ avec $a = -5x$, mais fait une mauvaise identification des termes.

Il ressort de l'analyse des réponses des élèves à l'item G que ces derniers éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$, de la non-maîtrise de la propriété de puissance $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ et de la mauvaise identification des termes des identités remarquables. De plus, la présence du signe

" - " devant les deux termes cause des difficultés aux élèves.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 2

L'analyse des réponses des élèves à l'exercice 2 nous a permis de relever les éléments suivants :

- le contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$: les élèves généralisent le contexte d'application de cette propriété.
- l'identification des termes des identités remarquables : dans le développement des identités remarquables, les élèves font une mauvaise identification des termes ;
- la non-maîtrise de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$: dans le calcul de puissances dont la base est numérico-littérale, les élèves distribuent l'exposant soit à la lettre, soit au nombre ;

- la réduction des monômes et développement de produits : il y a un glissement des règles de réduction du produit de monômes au développement d'un produit de sommes algébriques ;
- les structures des expressions : lorsque la structure de l'identité remarquable n'est pas identique à celle proposée dans les propriétés énoncées au cours, les élèves éprouvent des difficultés à identifier les termes ou à faire des transformations.

Si nous désignons par D, E, F et G les ensembles des élèves qui ont donné les réponses correctes respectivement aux items $D = (\frac{2}{3}x - 3)^2$, $E = (11x - 11)(11x + 11)$, $F = (7 + 4x)^2$, $G = (-5x - 2)^2$, nous avons :

$D = \{3E3, 13E3, 31E3, 40E3, 41E3, 42E3, 16E3, 20E3, 21E3, 23E3, 24E3, 25E3, 26E3, 37E3, 39E3\}$

$E = \{3E3, 5E3, 7E3, 9E3, 13E3, 15E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 23E3, 25E3, 30E3B, 31E3, 36E3, 37E3, 38E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3\}$

$F = \{3E3, 5E3, 9E3, 10E3, 15E3, 16E3, 17E3, 18E3, 19E3, 20E3, 21E3, 22E3, 23E3B, 25E3, 28E3, 29E3, 33E3, 34E3, 37E3, 38E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3\}$

$G = \{3E3, 6E3, 16E3, 17E3, 18E3, 20E3, 21E3, 22E3, 23E3, 25E3, 26E3, 29E3, 33E3, 34E3, 36E3, 37E3, 38E3, 39E3, 40E3, 42E3\}$

$D \cap E \cap F \cap G = \{3E3, 20E3, 21E3, 23E3, 25E3, 37E3, 39E3\}$

$Card(D \cap E \cap F \cap G) = 7$

7 élèves seulement sur 42 élèves soumis au pré-test donnent les réponses correctes aux items de l'exercice 2. Cela montre que les élèves éprouvent des difficultés à utiliser des identités remarquables.

Ainsi, comme nous l'avons souligné pour l'exercice 2 de la classe de 4^{ème}, nous pensons que l'apprentissage des identités remarquables s'appuyant sur l'articulation entre les aspects procédural et structural pourrait aider ces derniers à dépasser les obstacles qui sous-tendent ces difficultés susmentionnées.

6.2.3.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques

Exercice 3

Développe et réduis les expressions suivantes. L'ordonnement après développement et réduction n'est pas important.

$$H = -2x^3(x^3 - 2)$$

$$I = (x + 9y) \times \frac{2}{3}y$$

$$J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$K = (b^2 - 2b + 1)(b - 2)$$

Tableau 24 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $H = -2x^3(x^3 - 2)$

	$E_3H_1: H = -2x^6 + 4x^3$	$E_3H_2: H = -2x^6 - 2$	$E_3H_3: H = -2x^6 - 4x^3$	$E_3H_4: H = -2x^3 + x^3 - 2$	$E_3H_5: H = -2x^9 + 4x^3$	$E_3H_6: H = -2x^6 + 4$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3, 7E3, 19E3, 30E3, 31E3, 33E3, 37E3, 39E3, 42E3	14E3	11E3, 26E3	1E3, 2E3, 24E3	4E3, 5E3, 15E3, 17E3, 18E3, 20E3, 21E3, 25E3, 27E3, 28E3, 29E3, 34E3, 35E3, 36E3, 38E3, 40E3, 41E3	10E3	9E3, 12E3, 13E3, 16E3, 23E3	6E3, 8E3, 22E3, 32E3
Effectif	09	01	02	03	17	01	05	04
Fréquence	21 %	02 %	05 %	07 %	40 %	02 %	12 %	10 %

9 élèves donnent la réponse correcte.

4 élèves proposent les réponses de la catégorie *défaut dans la distributivité* (réponses $H = -2x^6 - 2$; $H = -2x^6 - 4x^3$; $H = -2x^6 + 4$).

17 élèves proposent les réponses de la catégorie *non-maîtrise de la propriété* $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ (réponse $H = -2x^9 + 4x^3$). En effet, pour les élèves, $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n \times n}$.

3 élèves donnent des réponses de la catégorie *transformation du produit de deux sommes en somme de ces sommes* (réponse $H = -2x^3 + x^3 - 2$)

5 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses s'expliquent soit par un défaut dans la distributivité, soit par la non maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$, soit par la considération des signes " + " et " - " comme opérateurs. Présentons quelques-unes de ces réponses :

– L'élève 9E3 écrit :

$$\begin{aligned} H &= -2x^3(x^3 - 2) \\ &= -2x^6 + 4x^3 \\ &= (-2 + 4)x^{6 \times 3} \\ &= -6x^{18} \end{aligned}$$

Cet élève a bien développé, mais n'a pas obtenu la réponse correcte, en considérant le signe " + " comme opérateur.

– L'élève 13E3 écrit :

$$\begin{aligned} H &= -2x^3(x^3 - 2) \\ &= -2x^9 - 2x^3 \\ &= -2(x^3 - x)^3 \\ &= -(x^9 + x^3) \end{aligned}$$

Cette réponse relève de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

– L'élève 23E3 écrit :

$$\begin{aligned} H &= -2x^3(x^3 - 2) \\ &= -2x^6 + x^3 \\ &= 2x^3(-x^3 + 1) \end{aligned}$$

Cette réponse relève également de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

Les difficultés qu'éprouvent les élèves dans le développement d'un produit de sommes algébriques dont un facteur est un monôme relèvent d'un défaut dans la distributivité, de la non-

maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ et de la transformation du produit de deux sommes en somme de ces sommes.

Tableau 25 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $I = (x + 9y) \times \frac{2}{3}y$

	$E_3I_1: I$ $= \frac{2}{3}xy$ $+ 6y^2$	$E_3I_2: I$ $= \frac{2}{3}xy$ $+ \frac{18}{3}y^2$	$E_3I_3: I$ $= x$ $+ \frac{18}{3}y^2$	$E_3I_4: I$ $= \frac{2}{3}xy$ $+ \frac{27}{3}y^2$	$E_3I_5: I$ $= \frac{2}{3}xy$ $+ 9y$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3, 6E3, 18E3, 23E3, 27E3, 28E3, 37E3, 41E3	2E3, 4E3, 11E3, 16E3, 19E3, 20E3, 21E3, 25E3, 26E3, 29E3, 39E3	1E3, 9E3, 30E3, 33E3, 36E3, 40E3	5E3B, 12E3, 15E3	24E3	8E3, 13E3, 17E3, 38E3, 42E3	7E3, 10E3, 14E3, 22E3, 31E3, 32E3, 34E3, 35E3
Effectif	08	11	06	03	01	05	08
Fréquence	19 %	26 %	14 %	07 %	02 %	12 %	19 %

19 % des élèves donnent la réponse correcte.

26 % des élèves donnent une réponse correcte, mais non simplifiée.

7 élèves donnent une réponse de la catégorie *défaut dans la distributivité* (réponses $I = x + \frac{18}{3}y^2$; $I = \frac{2}{3}xy + 9y$).

2 élèves proposent également des réponses de la catégorie *utilisation du signe " + "* comme opératoire (réponses $I = 18ab + 2b$; $I = 20ab$).

3 élèves proposent des réponses de la catégorie *non maîtrise des règles d'opérations sur les fractions* (réponse $I = \frac{2}{3}xy + \frac{27}{3}y^2$). En effet, ces élèves ne maîtrisent pas la propriété de calcul du produit de deux fractions.

5 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses s'expliquent soit par un défaut de simplification, soit par un défaut dans la distributivité, soit

par la non maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$. Présentons quelques-unes de ces réponses.

– L'élève 8E3 écrit :

$$\begin{aligned} I &= (x + 9y) \times \frac{2}{3}y \\ &= \frac{2}{3}y(x + 9y) \\ &= \frac{2}{3}xy + \frac{18}{3}y^2 \\ &= \frac{2+18}{3}xy \\ &= \frac{20}{3}xy \\ &= 6xy \end{aligned}$$

Cet élève a bien développé, mais a obtenu une réponse incorrecte en considérant l'addition comme opératoire.

– L'élève 13E3 écrit :

$$\begin{aligned} I &= (x + 9y) \times \frac{2}{3}y \\ &= x \times \frac{2}{3}y + \left(9 \times \frac{2}{3}\right)y \\ &= \frac{2}{3}xy + 3 \times 2y \\ &= \frac{2}{3}xy + 6y \end{aligned}$$

Cet élève a distribué partiellement le facteur y aux termes de la somme contenue dans les parenthèses.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item I que les difficultés des élèves sont dues à l'utilisation du signe " + " comme opératoire, à un défaut dans la distributivité et à la non maîtrise des règles d'opérations sur les fractions.

Tableau 26 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

	$E_3J_1:J$ $= -x^2 + 3$	$E_3J_2:J$ $= -x^2 + \sqrt{9}$	$E_3J_3:J$ $= x^2 - 3$	$E_3J_4:J$ $= -x^2 + 2x\sqrt{3} - 3$	$E_3J_5:J$ $= 4-x^2 + 2x\sqrt{3} + 3$	$E_3J_6:J$ $= -x^2 - 3$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3, 9E3, 10E3, 13E3, 14E3, 18E3, 19E3, 23E3, 25E3, 27E3, 30E3, 31E3, 37E3, 38E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3	7E3, 36E3	5 E3, 15 E3, 22 E3, 26 E3, E3, 28E3	4 E3, 11E3, 17 E3	16 E3	6E3, 8E3, 12 E3, 29 E3, 34E3	20 E3, 21 EB, 24 E3, 32 E3, 33E3	1 E3, 2 E3, 35 E3
Effectif	18	02	05	03	01	05	05	03
Fréquence	43 %	05 %	12 %	07 %	02 %	12 %	12 %	07 %

43 % des élèves donnent la réponse correcte.

5 % des élèves donnent une réponse correcte, mais non simplifiée (réponse $J = -x^2 + \sqrt{9}$).

10 des élèves donnent des réponses de la catégorie *utilisation du signe " – " devant un produit de sommes algébriques comme n'indiquant pas l'opposé de la somme* (réponses $J = x^2 - 3$; $J = 4-x^2 + 2x\sqrt{3} + 3$).

4 élèves proposent des réponses de la catégorie *mauvaise identification des termes des identités remarquables* (les réponses $J = -x^2 + 2x\sqrt{3} - 3$; $J = 4-x^2 + 2x\sqrt{3} + 3$).

5 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses s'expliquent soit par la mauvaise identification des termes des identités remarquables, soit par l'utilisation du signe " – " devant un produit de sommes algébriques comme n'indiquant pas l'opposé de la somme, soit par la transformation du produit de deux sommes en somme de ces sommes. Présentons quelques-unes de ces réponses :

- l'élève 33 E3 écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \\ &= -(x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3}x - \sqrt{3^2}) \\ &= -(x^2 - 3) \\ &= x^2 + 3 \end{aligned}$$

Cette réponse s'explique par l'utilisation du signe " – " devant un produit de somme algébrique comme n'indiquant pas l'opposé du produit.

- l'élève 20 E3 écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \\ &= x - \sqrt{3} + x - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{3} \\ &= (-1 - 1)\sqrt{3} \\ &= -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Cette réponse s'explique par la transformation du produit de deux sommes en somme de ces sommes.

- l'élève 24 E3 écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \\ &= x^2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - x \\ &= x^2 + +x \end{aligned}$$

Cet élève a fait une mauvaise identification des termes de l'identité remarquable.

Les réponses proposées à l'item J montrent que les élèves éprouvent des difficultés à développer un produit des sommes algébriques précédé du signe " – ". Ils ne considèrent pas le signe " – " devant un produit de sommes algébriques comme marque de l'opposé de ce produit. De plus, certains élèves ont de la peine à identifier les termes des identités remarquables. D'autres élèves font un glissement de la distributivité en transformant un produit de deux sommes en somme de ces sommes.

Tableau 27 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $K = (b^2 - 2b + 1)(b - 2)$

	$E_3K_1: K = b^3 - 4b^2 + 5b - 2$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E3, 8E3, 10E3, 13E3, 15E3, 20E3, 21E3, 23E3, 25E3, 27E3, 34E3, 36E3, 37E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3	1E3, 4E3, 5E3, 9E3, 11E3, 12E3, 14E3, 17E3, 19E3, 22E3, 26E3, 28E3, 29E3, 30E3, 31E3, 32E3, 33E3, 35E3, 38E3	2E3, 7E3, 24E3
Effectif	19	20	03
Fréquence	45 %	48 %	07 %

45 % des élèves donnent la réponse correcte.

Près de la moitié des élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces réponses, la plupart s'explique par la non maîtrise des propriétés de puissances. D'autres réponses s'expliquent par la non maîtrise des règles de signes, par un défaut dans la distributivité, par la non maîtrise des propriétés des règles d'addition dans $\mathbb{Z}$.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 3

L'analyse des réponses des élèves à l'exercice 3 nous a permis de relever les éléments suivants :

- la distributivité : dans le développement des produits de sommes algébriques, les élèves font un défaut dans la distributivité ;
- les statuts des signes " + " et " – " : les élèves utilisent les signes " + " et " – " comme opérateurs. De même, ils éprouvent des difficultés à développer un produit des sommes algébriques précédé du signe. En effet, ils ne considèrent pas le signe " – " devant un produit de sommes algébrique comme marque de l'opposé du produit ;
- les propriétés de puissances : les élèves ne maîtrisent pas la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$;
- les opérations sur les fractions : les élèves ne maîtrisent pas les règles d'opérations sur les fractions ;
- la réduction des monômes et développement de produits : il y a un glissement des règles de réduction du produit de monômes au développement d'un produit de sommes algébriques.

En désignant par H, I, J et K les ensembles des élèves qui ont donné les réponses correctes respectivement aux items $H = -2x^3(x^3 - 2)$, $I = (x + 9y) \times \frac{2}{3}y$

, $J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$, $K = (b^2 - 2b + 1)(b - 2)$, on a :

$H = \{3E3, 7E3, 19E3, 30E3, 31E3, 33E3, 37E3, 39E3, 42E3\}$

$I = \{3E3, 6E3, 18E3, 23E3, 27E3, 28E3, 37E3, 41E3, 2E3, 4E3, 11E3, 16E3, 19E3, 20E3, 21E3, 25E3, 26E3, 29E3, 39E3\}$

$J = \{3E3, 9E3, 10E3, 13E3, 14E3, 18E3, 19E3, 23E3, 25E3, 27E3, 30E3, 31E3, 37E3, 38E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3, 7E3, 36E3\}$

$K = \{3E3, 8E3, 10E3, 13E3, 15E3, 20E3, 21E3, 23E3, 25E3, 27E3, 34E3, 36E3, 37E3, 39E3, 40E3, 41E3, 42E3\}$

$H \cap I \cap J \cap K = \{3E3, 37E3, 39E3\}$

$H \cap I \cap J = \{3E3, 37E3, 39E3\}$

$Card(H \cap I \cap J \cap K) = 3$ et $Card(H \cap I \cap J) = 3$

Au regard de ces résultats, trois élèves donnent la réponse correcte aux quatre items de l'exercice 3. Ainsi, les élèves de 3^{ème} éprouvent également des difficultés à développer et à réduire des expressions algébriques.

6.2.4. Synthèse de l'analyse a posteriori des réponses des élèves de 3ème

L'analyse des réponses des élèves de 3^{ème} nous a permis de relever les éléments suivants :

- la distributivité : il y a d'une part, un glissement de la distributivité, et d'autre part, un défaut dans la distributivité ;
- les statuts des signes " + " et " - " : les élèves utilisent les signes " + " et " - " comme opérateurs, c'est-à-dire, pour eux, la présence de ces signes indique qu'ils doivent effectuer les opérations et obtenir un résultat. De plus, ils considèrent le signe " - " devant une somme comme marque de l'opposé du premier terme de la somme. De même, ils ne considèrent pas le signe " - " devant un produit de sommes algébriques comme marque de l'opposé du produit ;

- le statut de l'égalité : la représentation réductrice de l'égalité comme une annonce de résultat dans le calcul numérique amène les élèves à réduire le résultat à un seul terme ;
- l'identification des termes des identités remarquables : dans le développement des identités remarquables, les élèves font une mauvaise identification des termes au point de permuter les signes de ces termes ;
- la non-maîtrise de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$: dans le calcul de puissances dont la base est numérico-littérale, les élèves n'arrivent pas à distribuer l'exposant au nombre et à la lettre : ils le distribuent soit à la lettre, soit au nombre ;
- la réduction des monômes et développement de produits : il y a un glissement des règles de réduction du produit de monômes au développement d'un produit de sommes algébriques. En effet, ils suppriment les parenthèses en multipliant les facteurs.
- les structures des expressions algébriques : les élèves éprouvent des difficultés à distinguer les termes des facteurs. De plus, lorsque, dans une tâche, la structure d'une expression ne ressemble pas directement à celle présentée dans les énoncés de propriétés ou règles énoncées habituellement, les élèves éprouvent des difficultés à réaliser la tâche.

Il convient de noter que le croisement des réponses des élèves aux trois exercices du pré-test en 3^{ème} montre que 2 élèves sur les 42 donnent la réponse correcte à tous les items.

6.3. Regard croisé des réponses des élèves de 4^{ème} et 3^{ème}

À l'issue des analyses *a posteriori* des réponses des élèves de 4^{ème} et de 3^{ème} aux pré-tests, nous avons identifié les éléments communs suivants :

- la distributivité : il y a d'une part, un glissement de la distributivité, et d'autre part, un défaut dans la distributivité :
 - pour ce qui est du glissement de la distributivité, il y a la généralisation du contexte d'application de la distributivité. En effet, les élèves généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique. Oudrhiri (2016) parle d'un obstacle dû à la « linéarité » et à la connaissance des nombres. Pour Almahoud (2019), il s'agit de la généralisation des règles ou des propriétés mises en œuvre dans un domaine mathématique sur un autre ;

- quant au défaut dans la distributivité, dans le développement des produits de sommes algébriques, les élèves font une distribution partielle. En effet, les élèves appliquent partiellement la distributivité, dans le développement d'un produit de sommes.
- les statuts des signes " + " et " – " : les élèves utilisent les signes " + " et " – " comme opératoires, c'est-à-dire, pour eux, la présence de ces signes indique qu'ils doivent effectuer les opérations et obtenir un résultat. Ainsi, le signe " + " placé entre deux nombres comme signe d'une opération amène les élèves à lui donner le statut opératoire et de ce fait, combiné à la représentation que ces derniers ont de l'égalité comme annonce du résultat, ils additionnent ou assemblent des monômes non semblables. De plus, ils considèrent le signe " – " devant une somme comme marque de l'opposé du premier terme de la somme. De même, les élèves éprouvent des difficultés à développer un produit des sommes algébriques précédé du signe " – " ; ils ne considèrent pas le signe " – " devant un produit de sommes algébriques comme marque de l'opposé du produit ;
- le statut de l'égalité : les élèves considèrent l'égalité comme annonce de résultat dans le calcul numérique. Grugeon-Allys et Pilet (2017) soulignent qu'en arithmétique, le signe d'égalité est majoritairement utilisé comme annonce de résultat pour effectuer les calculs (souvent de gauche à droite), alors que le traitement des expressions algébriques repose sur le statut d'équivalence de l'égalité ;
- l'identification des termes des identités remarquables : dans le développement des identités remarquables, les élèves font une mauvaise identification des termes au point de permuter les signes de ces termes. L'équipe de recherche de l'Université de Mons (2019) explique cela par la considération d'une expression littérale en tant que nombre ;
- la non-maîtrise de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$: dans le calcul de puissances dont la base est numérico-littérale, les élèves n'arrivent pas à distribuer l'exposant au nombre et à la lettre : ils le distribuent soit à la lettre, soit au nombre. Booth et Chelsea (1984) expliquent cela par le fait que les élèves ont du mal à savoir si les lettres représentent des nombres ou des objets ;
- la réduction des monômes et développement de produits : il y a un glissement des règles de réduction du produit de monômes au développement d'un produit de

sommes algébriques. En effet, ils suppriment les parenthèses en multipliant les facteurs ;

- les structures des expressions algébriques : les élèves éprouvent des difficultés à distinguer les termes des facteurs. De même, lorsque, dans une tâche, la structure d’une expression ne ressemble pas directement à celle présentée dans les énoncés de propriétés ou règles énoncées habituellement, les élèves éprouvent des difficultés à réaliser la tâche.

Au regard des analyses *a posteriori* des réponses des élèves des classes de 4^{ème} et de 3^{ème}, nous constatons que les résultats des élèves de la classe de 3^{ème} sont meilleurs que ceux des élèves de la classe de 4^{ème}, pour les mêmes objectifs. Cela pourrait être dû à un entraînement plus long dans le calcul algébrique. Cependant, nous constatons que l’aspect structural du calcul algébrique n’est pas maîtrisé par les élèves de la classe de 4^{ème} et par les élèves de la classe de 3^{ème}.

De plus, le croisement des réponses des élèves aux trois exercices des pré-tests en 4^{ème} et en 3^{ème} montre qu’aucun élève de 4^{ème} sur les 54 donne la réponse correcte à tous les items, et 2 élèves de 3^{ème} sur les 42 donnent la réponse correcte à tous les items.

Nous faisons l’hypothèse que les difficultés identifiées proviennent des enseignements que les élèves ont reçus en classe et de la manière dont le calcul littéral est présenté dans les manuels.

6.4. Analyse de l’entretien d’explicitation avec les élèves

Rappelons que les entretiens d’explicitation ont porté sur quelques productions comportant les erreurs les plus fréquentes identifiées à l’issue des pré-tests.

Nous présentons les explications (verbatim) données par des élèves à quelques-unes de leurs productions :

- Pour la production

$$\begin{aligned} I &= (9a + b) \times 2 \\ &= 9ab \times 2 \\ &= 18ab, \end{aligned}$$

les explications suivantes sont données :

- **8E4** : J’ai ajouté ce qui est entre parenthèses en faisant $a + b$ qui donne ab . J’ai multiplié $9ab$ par 2, ce qui donne $18ab$.
- **9E4** : J’ai calculé $a + b$, ça donne ab , j’ai supprimé les parenthèses en multipliant par 2.

- **14E4** : J'ai additionné a et b et j'ai cassé les parenthèses.
- **17E4** : J'ai additionné a et b et j'ai multiplié par 2.

Pour ces explications données, les élèves ont mis en avant la priorité de l'opération entre parenthèses en combinant les termes $9a$ et b , et obtiennent $9ab$. Ici, le signe " + " est considéré comme indiquant l'assemblage ou le regroupement des termes.

– Pour la production

$$\begin{aligned} A &= 5 + (x - 3) \\ &= 5 + x - 3 \\ &= 5 - 3 + x \\ &= 2 + x \\ &= 2x, \end{aligned}$$

les explications données sont les suivantes :

- **20E4** : Après avoir supprimé les parenthèses, j'ai regroupé les inconnues à part et les chiffres à part ; j'ai additionné $2 + x$ qui donne $2x$.
- **15E4** : J'ai cassé les parenthèses, j'ai soustrait 5 moins qui donne 2 et $2 + x$ donne $2x$.
- **29E4** : J'ai cassé les parenthèses et j'ai ramené x pour additionner les chiffres $5-3$ qui donne 2, $2 + x$ donne $2x$.

Ces explications montrent que les élèves éprouvent moins de difficultés à réduire une somme comportant des parenthèses précédées du signe " + ". C'est le statut du signe " + " dans une somme de deux monômes non semblables qui n'est appréhendé par ces élèves. Ils généralisent le contexte d'utilisation du signe " + " comme opérateur dans le calcul numérique au calcul algébrique, notamment dans le cas de l'addition des deux monômes non semblables. De plus, pour ces élèves, l'addition de deux nombres doit aboutir à un seul terme ; cela les amène à assembler ou à regrouper les termes, dans une somme de deux monômes non semblables. A cette représentation, s'ajoute également la considération de l'égalité comme annonce de résultat.

– Pour la production :

$$\begin{aligned} B &= 5 - (x + 3) \\ &= 5 - 4x \\ &= 1x, \end{aligned}$$

les explications suivantes sont données :

- **5E4** : J'ai additionné $x + 3$, ce qui donne $4x$; j'ai soustrait $5 - 4x$, j'ai trouvé $1x$.
- **14E4** : J'ai additionné $3 + x$ qui est égal à $4x$, j'ai ramené le 5 ; $5 - 4x$ donne $1x$.
- **20E4** : J'ai fait $3 + 1$ qui donne $4x$; j'ai fait $5 - 4x$, ce qui donne $1x$.

À travers ces explications, les élèves ont mis en avant la priorité de l'opération entre parenthèses en combinant les termes x et 3 , et en considérant le signe " + " comme opératoire ; c'est ce qui a conduit à la réponse $4x$. Ensuite, le passage de $5 - 4x$ à $1x$ s'explique par la considération du signe " - " comme opératoire. Ainsi, pour ces élèves, l'addition ou la soustraction de deux nombres doit aboutir à un seul terme.

– Pour la production

$$\begin{aligned} I &= (9a + b) \times 2 \\ &= 18a + 2b \\ &= 20ab, \end{aligned}$$

les explications données sont les suivantes :

- **52E4 :** J'ai pris 2 j'ai multiplié par $9a$ et par b . J'ai trouvé $18a + 2b$, je les ai additionnés pour trouver $20ab$.

Ici, le développement est bien fait. C'est la considération du signe " + " comme opératoire et comme marque d'assemblage qui explique le passage de $18a + 2b$ à $20ab$. En effet, l'élève a additionné les nombres entre eux et a assemblé les lettres.

– Pour la production

$$\begin{aligned} B &= 5 - (x + 3) \\ &= 5 - x + 3 \\ &= 5 + 3 - x \\ &= 8 - x, \end{aligned}$$

les explications données sont :

- **2E4 :** J'ai cassé les parenthèses et j'ai trouvé $5 - x + 3$. J'ai regroupé les termes sans x et j'ai $8 - x$.
- **12E4 :** J'ai supprimé les parenthèses. J'ai regroupé les termes sans x et j'ai $8 - x$.

Ces explications montrent que les élèves ôtent les parenthèses sans prendre en compte le signe " - " devant ces parenthèses. Ils considèrent que les expressions $5 - (x + 3)$ et $5 - x + 3$ ont la même dénotation. Ainsi, le signe " - " devant la somme algébrique délimitée par des parenthèses est considéré comme l'opposé du premier terme de la somme.

– Pour la production

$$\begin{aligned} K &= (a - 1)(a^2 - 2a + 1) = a - 1 \times a^2 - 2a + 1 \\ &= 1a \times 2a^2 + 1 \\ &= 2a^2 + 1 \\ &= 3a^2, \end{aligned}$$

les explications données sont les suivantes :

- **1E4** : J'ai cassé les parenthèses et j'ai gardé le signe fois parce que les parenthèses représentent fois, puis j'ai calculé.
- **3E4** : Comme entre parenthèses c'est la multiplication, j'ai cassé les parenthèses et j'ai multiplié les deux.

Pour ces élèves, supprimer les parenthèses revient à multiplier. En effet, ces élèves suppriment les parenthèses en multipliant les sommes sans appliquer la distributivité.

– Pour la production

$$\begin{aligned}H &= -3x(x^2 - 2) \\&= -3x + x^2 - 2 \\&= -2x^2 - 2,\end{aligned}$$

les explications données sont :

- **39E4** : J'ai cassé les parenthèses, j'ai ramené les chiffres vers le bas, j'ai additionné $3x$ et x^2 pour trouvé $-2x^2 - 2$
- **10E4** : J'ai cassé la parenthèse et j'ai regroupé les termes en x et les termes sans x . J'ai pris $-3x + x^2$, j'ai additionné : $- \times + = -$, donc j'ai soustrait et j'ai trouvé $-2x^2 - 2$

Ces explications montrent que les élèves ôtent les parenthèses sans prendre en compte le signe " $\times$ " éliminé entre les sommes. Ils considèrent que les expressions $-3x(x^2 - 2)$ et $-3x + x^2 - 2$ ont la même dénotation. Ainsi, ces élèves suppriment les parenthèses en additionnant les facteurs sans appliquer la distributivité. Cela montre que le contexte d'application de la distributivité n'est pas appréhendé par ces élèves.

– Pour la production

$$D = (4x - 3)^2 = 16x^2 - 9,$$

les explications données sont les suivantes :

- **11 E4**: J'ai mis le 2 sur $4x$ et sur 3.
- **14 E4**: J'ai partagé 2 à $4x$ et à 3.

Ici, dans le calcul du carré d'une différence de deux termes, les élèves distribuent l'exposant aux termes de la somme alors qu'il fallait appliquer la distributivité en transformant le carré de la différence en produit ou appliquer l'identité remarquable

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Ainsi, ces élèves généralisent le contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

– Pour la production

$$A = 5 + (x - 3) = 5x - 15,$$

les explications données sont les suivantes :

- **1E4:** J'ai développé: 5 fois x qui est égal à $5x$ et 5 fois 3 qui est égal à 15.
- **32 E4:** J'ai multiplié 5 par x et 5 par 3.

Pour ces élèves, supprimer les parenthèses revient à multiplier. Ainsi, ils font un glissement de la distributivité en généralisant le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique. Ces élèves pensent que les expressions $5 + (x - 3)$ et $5(x - 3)$ ont la même dénotation.

Toutes ces explications ont permis d'extérioriser les théorèmes-en-acte et des concepts-en-acte suivants :

- le signe " $+$ " est considéré comme opératoire, comme marque d'assemblage ou de regroupement ;
- le signe " $-$ " est considéré comme opératoire ;
- la lettre x est considérée comme une inconnue ;
- dans la réduction d'une somme de deux monômes de degrés différents, c'est le monôme de plus haut degré qui emporte (exemple $-3x + x^2 = -2x^2$) ;
- la suppression des parenthèses renvoie à la multiplication.

6.5. Obstacles épistémologiques et didactiques identifiés

Rappelons que dans le cadre de notre travail, nous ne nous intéressons qu'aux obstacles épistémologiques et didactiques qui émergent au cours des activités de développement et de réduction des polynômes. De même, avant de présenter les obstacles épistémologiques que nous avons identifiés, il convient de rappeler la définition d'un obstacle et les caractéristiques d'un obstacle épistémologique et d'un obstacle didactique. Brousseau (2000) définit un obstacle, en Mathématiques, comme une connaissance valide dans un certain domaine non vide, mais c'est une connaissance inadéquate, qui empêche la mise en place ou la compréhension d'une autre connaissance, elle, adéquate. Les obstacles épistémologiques sont liés au savoir et à la construction des connaissances ; les obstacles didactiques sont liés aux connaissances résultant d'une transposition didactique (Brousseau, 1983).

6.5.1. Obstacles épistémologiques

- La représentation réductrice de l'égalité comme une annonce de résultat dans le calcul numérique et du signe " $+$ " placé entre deux nombres comme signe d'une

opération amène les élèves à réduire le résultat à un nombre en additionnant des monômes ou en assemblant des monômes non semblables. Dans les calculs numériques, notamment les calculs dans $\mathbb{N}, \mathbb{D}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, le résultat est nombre, alors que dans le calcul algébrique, le résultat est un terme ou encore une expression littérale. Par exemple, les élèves écrivent :

$$5 + (x - 3) = 5 + x - 3$$

$$= 5x + 3$$

ou

$$5 + (x - 3) = 5 + x - 3$$

$$= 2 + x$$

$$= 2x$$

- La représentation réductrice du signe " - " comme prédictoire dans le calcul numérique amène les élèves à considérer le signe " - " devant une somme algébrique comme celui du premier terme de la somme. Dans le calcul numérique, le signe " - " devant un nombre est prédictoire (marque d'un nombre négatif) alors que dans le calcul algébrique, devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses ou devant un produit de sommes algébriques, le signe " - " est la marque de l'opposé de cette somme. Comme exemple, les élèves écrivent :

$$-(x + 3) = -x + 3$$

- La représentation que les élèves ont du signe " × " comme marque de multiplication des facteurs amène ces derniers à multiplier les facteurs dans un produit de sommes algébriques. Cette propriété qui consiste à multiplier les facteurs n'est valable que dans la réduction des produits des monômes. Dans la réduction d'un produit de monômes, les facteurs sont des monômes, alors que dans le développement d'un produit de sommes algébriques, un facteur au moins est une somme algébrique délimitée par des parenthèses. Les élèves écrivent, par exemple :

$$(-7x + 2)^2 = (-7x + 2)(-7x + 2)$$

$$= -7x + 2 \times -7x + 2$$

$$= -7x + 2$$

6.5.2. Obstacles didactiques

- Le fait que les auteurs des manuels ou les enseignants mettent en avant l'aspect structural des expressions dans le calcul algébrique, notamment dans la présentation des produits remarquables, amène, par exemple, les élèves à considérer le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes ou le carré de la différence de termes comme la différence de leur carré, en extrapolant les contextes d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.
Les élèves écrivent, par exemple : $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ou $(a - b)^2 = a^2 - b^2$
- Le fait de présenter, dans les manuels et en situation de classe, les propriétés dans un langage essentiellement mixte amène les élèves à ne pas bien comprendre les structures des expressions algébriques. Ils confondent les termes aux facteurs.
- Le fait que les élèves associent la suppression des parenthèses à l'application de la distributivité les amène à distribuer un monôme aux termes d'une somme délimitée par des parenthèses, dans une somme algébrique. Autrement dit, la suppression des parenthèses indique l'application de la distributivité. En guise d'exemple, les élèves écrivent : $5 + (x - 3) = 5x - 15$.

Conclusion du chapitre 6

Les pré-tests et les entretiens d'explicitation ont permis de mettre en évidence les difficultés des élèves à effectuer le calcul littéral, notamment à développer et à réduire les expressions algébriques. Nous avons dégagé les résultats suivants :

- la distributivité : il y a, d'une part, un glissement de la distributivité, et d'autre part, un défaut dans la distributivité ;
- les statuts des signes " + " et " - " : les élèves utilisent les signes " + " et " - " comme opérateurs. Les élèves ne considèrent pas le signe " - " devant la somme comme marque de l'opposé de la somme. De même, les élèves ne considèrent pas le signe " - " devant un produit de sommes algébriques comme marque de l'opposé du produit ;
- le statut de l'égalité : les élèves considèrent l'égalité comme annonce de résultat dans le calcul numérique ;

- le contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$: les élèves généralisent le contexte d'application de cette propriété. En effet, ils considèrent le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes ou le carré de la différence de termes comme la différence de leur carré ;
- l'identification des termes des identités remarquables : dans le développement des identités remarquables, les élèves font une mauvaise identification des termes au point de permuter les signes des termes ;
- la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$: dans le calcul de puissances dont la base est numérique-littérale, les élèves n'arrivent pas à distribuer l'exposant au nombre et à la lettre : ils le distribuent soit à la lettre, soit au nombre.
- la réduction des monômes et développement de produits : il y a un glissement des règles de réduction du produit de monômes au développement d'un produit de sommes algébriques. En effet, les élèves suppriment les parenthèses en multipliant les facteurs ;
- la structure des expressions algébriques : les élèves éprouvent des difficultés à distinguer les termes des facteurs. De plus, lorsque, dans une tâche, la structure d'une expression ne ressemble pas directement à celle présentée dans les énoncés de propriétés ou règles énoncées habituellement, les élèves éprouvent des difficultés à réaliser la tâche, à l'exemple des expressions $C = 3 - (x - (5 + x))$ et $J = -(2x - 3)(2x + 3)$

Le croisement des réponses des élèves aux trois exercices des pré-tests en 4^{ème} et en 3^{ème} montre qu'aucun élève de 4^{ème} sur les 54 donne la réponse correcte à tous les items, et 2 élèves de 3^{ème} sur les 42 donnent la réponse correcte à tous les items.

À l'issue des analyses *a posteriori* des réponses des élèves de 3^{ème}, nous constatons que les résultats des élèves de 3^{ème} sont mieux par rapport à ceux des élèves de 4^{ème}, pour les mêmes objectifs. De plus, nous constatons que l'aspect structural du calcul algébrique n'est pas maîtrisé par les élèves de 4^{ème} et par les élèves de 3^{ème}.

Les explications données par les élèves à l'entretien d'explicitation nous ont permis d'extérioriser les théorèmes-en-acte et des concepts-en-acte suivants :

- le signe " + " est considéré comme opératoire, comme marque d'assemblage ou de regroupement ;
- le signe " - " est considéré comme opératoire ;
- la lettre x est considérée comme une inconnue ;

- dans la réduction d'une somme de deux monômes de degrés différents, c'est le monôme de plus haut degré qui emporte (exemple $-3x + x^2 = -2x^2$) ;
- la suppression des parenthèses renvoie à la multiplication.

Ces résultats nous ont permis d'identifier des obstacles didactiques et épistémologiques qui émergent chez les élèves au cours des activités de développement et de réduction des polynômes.

Le chapitre qui suit sera consacré à la l'expérimentation du dispositif de franchissement des obstacles identifiés.

Chapitre 7 : Deuxième expérimentation : proposition et expérimentation du dispositif de franchissement

Introduction

Dans le chapitre 6, première expérimentation, nous avons identifié les obstacles épistémologiques et didactiques qui émergent chez les élèves des classes de 4^{ème} et de 3^{ème} au cours des activités de développement et de réduction des polynômes. Cela nous a permis de répondre à l'une de nos questions de recherche que nous rappelons : *Quels obstacles didactiques et épistémologiques émergent des productions des élèves en situation de résolution de problèmes de développement et de réduction des polynômes ?*

Cette deuxième expérimentation permet d'évaluer notre hypothèse principale que nous rappelons : *Une transposition didactique des concepts de développement et de réduction des polynômes qui s'appuie sur la notion d'objectif-obstacle et un travail de clarification sur l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique, dans le traitement des expressions algébriques, peuvent contribuer à dépasser les obstacles identifiés chez les élèves.*

Dans le présent chapitre, nous présentons notre dispositif selon les différentes phases de l'ingénierie didactiques présentées au cinquième chapitre. Comme la première phase, celle des analyses préalables, est déjà effectuée dans les chapitres précédents, nous ne nous intéresserons qu'aux trois dernières phases : la conception et l'analyse *a priori* de situations didactiques, l'expérimentation, l'analyse *a posteriori* et validation.

7.1. Conception et analyse *a priori* du dispositif de franchissement

7.1.1. Conception du dispositif

Le dispositif conçu s'appuie sur les obstacles que nous avons identifiés (voir chapitre 6). Notons que le dispositif est axé sur les aspects sémantiques et syntaxiques du calcul littéral. De plus, le dispositif prend en compte les aspects suivants :

- **la structure des expressions algébriques** : amener les élèves à identifier les termes et les facteurs, puis à les distinguer ;
- **le langage utilisé pour formuler les énoncés** : le langage utilisé dans les énoncés est soit le langage courant, soit le langage mixte ;

- **le statut de l'égalité dans les énoncés** : l'égalité est présentée comme annonce de résultat, comme équivalence, comme identité, selon le contexte (activités préparatoires et activités de mise en situation) ;
- **le statut de la lettre dans les énoncés** : la lettre est présentée dans les énoncés et dans les activités de développement et de réduction comme marque place, c'est-à-dire représentant n'importe quel nombre ;
- **le statut du signe " + " dans les énoncés** : le signe " + " est utilisé comme opératoire dans le calcul numérique et dans la réduction des monômes semblables, et comme opératoire non évalué dans les expressions où les monômes ne sont pas semblables ;
- **le statut du signe " – " dans les énoncés** : le signe " – " est utilisé comme opératoire dans le calcul numérique et dans la réduction des monômes semblables, et comme opératoire non évalué dans les expressions où les monômes ne sont pas semblables. De plus, le signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses est présenté comme marque de l'opposé de cette somme. Il en est de même pour le signe " – " devant un produit de sommes algébrique qui est présenté comme marque de l'opposé de ce produit ;
- **le caractère des expressions** : le dispositif fait une articulation entre les aspects structural et procédural, à travers la résolution des activités.

7.1.2 Dispositif de franchissement proposé

Première partie : éléments du cours

Activités préparatoires (contrôle de pré-requis)

1) a) Pour chacune des sommes algébriques suivantes, identifiez les termes :

$$3 + 4,5 ; 6,2 - 3 ; 8 - 4,5 + 7 ; P = c + c + c + c \text{ (Périmètre du carré)}$$

b) Pour chacun des produits suivants, identifiez les facteurs : $4 \times 2,3$;

$$A = L \times l \text{ (L'aire du rectangle)}.$$

2) Calculez : $a = 18 + (7 + 2)$; $b = 18 - (7 + 2)$.

3) Calculez : $(+7,5) + (+2,3)$; $(+7,5) - (+2,3)$; $(+2,3) - (+7,5)$.

4) Complétez : $a^1 = \dots$; $2^2 = \dots$; $3^2 = \dots$; $(2 + 3)^2 = \dots$; $a^2 \times a^3 = \dots$.

5) Calculez de deux manières : $a = (5,7 + 4,3) \times 2,5$; $b = 5 \times (15 + 3,5)$.

I. Réduction

1. Réduction d'une somme

Vocabulaire

Les expressions suivantes sont des sommes algébriques :

$$A = 2x + x, B = x + 2, C = 7 + (x - 5) \text{ et } D = x - (2x - 5).$$

Chacune des quatre expressions est composée de deux termes.

Pour les expressions C et D, les deuxièmes termes sont délimités par les parenthèses.

Les deux termes de l'expression A sont semblables.

Les termes de l'expression B ne sont pas semblables.

Les deux termes des expressions C et D ne sont pas semblables.

Les écritures $2x$ ou x signifient $2 \times x$ ou $1 \times x$.

La lettre x utilisée dans ces expressions représente n'importe quel nombre.

Lorsqu'une expression comporte des termes qui sont semblables, à l'exemple de ceux de l'expression A, on peut la réduire.

Définition

Réduire une somme algébrique, c'est réduire le nombre d'opérations en utilisant la distributivité de la multiplication et en simplifiant.

Si nous revenons aux expressions du vocabulaire, nous avons dit que l'expression A peut être réduite, on a :

$$\begin{aligned} A &= 2x + x \\ &= (2 + 1)x \\ &= 3x \end{aligned}$$

D'où, $A = 3x$ (forme réduite)

Peut-on dire $2x + x = 2x^2$ ou $2x + x = 3x^2$?

Non ! Car si on remplace x par une valeur choisie, par exemple $x = 2$, on obtient :

– pour $2x + x = 2x^2$, on a : $2 \times 2 + 2 = 6$ alors que $2 \times 2^2 = 6$; $6 \neq 8$ donc $2x + x \neq 2x^2$;

– pour $2x + x = 3x^2$, on a : $2 \times 2 + 2 = 6$ alors que $3 \times 2^2 = 12$; $6 \neq 12$ donc $2x + x \neq 3x^2$.

Règle 1

Pour réduire une somme, on peut utiliser les propriétés de commutativité ou de l'associativité de l'addition.

En effet, pour tous nombres relatifs a, b et c , on a :

- $a + b = b + a$ (on dit que l'addition est commutative)
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (on dit que l'addition est associative)

Règle 2

- Lorsque dans une somme algébrique, des parenthèses sont précédées du signe "+", on supprime les parenthèses tout en conservant le signe de chacun des termes contenus dans ces parenthèses.
- Lorsque dans une somme algébrique, des parenthèses sont précédées du signe "-", on supprime les parenthèses tout en changeant le signe de chacun des termes contenus dans ces parenthèses en son opposé. Le signe "-" devant les parenthèses indique l'opposé de la somme contenue dans ces parenthèses.

Propriétés

Quels que soient les nombres relatifs a, b et c , on a :

- 1) $a + (b + c) = a + b + c$
- 2) $a + (b - c) = a + b - c$
- 3) $a - (b + c) = a - b - c$
- 4) $a - (b - c) = a - b + c$

Remarque : dans les propriétés précédentes, notons que les entiers relatifs a, b et c peuvent être des expressions. On peut rencontrer des expressions algébriques telles que

$$A = 2 + (-2x + 5), B = x + 2 + (2 - 3x), C = x + (x + (-2x + 3)).$$

Pour l'expression $A = 2 + (-2x + 5)$, par identification à la propriété

$$a + (b + c) = a + b + c, \text{ on a : } a = 2, b = -2x \text{ et } c = 5.$$

Pour l'expression $B = x + 2 + (2 - 3x)$, par identification à la propriété

$$a + (b - c) = a + b - c, \text{ on a : } a = x + 2, b = 2 \text{ et } c = 3x.$$

Pour l'expression $C = 2x + (x + (-2x + 3))$, par identification à la propriété

$$a + (b + c) = a + b + c, \text{ on a : } a = 2x, b = x \text{ et } c = (-2x + 3).$$

N.B : Pour réduire une somme comportant des parenthèses imbriquées, il convient de commencer par les parenthèses internes.

2. Réduction d'un produit

Définition

Réduire un produit de facteurs, c'est réduire le nombre de facteurs en appliquant les règles de commutativité ou d'associativité de la multiplication ou de puissance.

II. Développement

Vocabulaire

Les expressions suivantes sont des produits :

$$D = (3a) \times (4a^2)$$

$$E = 2x(x - 2)$$

$$F = (3x + 2)(5 - x)$$

Chacune des trois expressions est un produit de deux facteurs ($3a$ et $4a^2$ pour l'expression D ; $2x$ et $(x - 2)$ pour l'expression E ; $(3x + 2)$ et $(5 - x)$ pour l'expression F).

Les facteurs de l'expression D sont constitués d'un seul terme.

Les facteurs de l'expression E sont constitués d'un terme et d'une somme algébrique.

Les facteurs de l'expression F sont constitués des sommes algébriques délimitées par des parenthèses.

Les lettres a et x utilisées dans ces expressions représentent n'importe quel nombre.

Dans un produit, lorsque l'un au moins des facteurs du produit est une somme algébrique délimitée par des parenthèses, on peut développer ce produit.

1. Développer un produit

Définition

Développer un produit de facteurs, c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique en utilisant la distributivité de la multiplication et en simplifiant.

Règle

Pour développer un produit :

- on détermine son signe ;
- on peut commuter ou associer certains facteurs avant de calculer le produit de leurs distances à zéro.

Propriétés de puissances

a et b sont des nombres relatifs ; n et m deux entiers naturels plus grands que 1.

- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $ax^n \times bx^m = (a \times b)x^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- Si n est pair, alors $(-a)^n = a^n$
- Si n est impair, alors $(-a)^n = -a^n$

Propriétés

Quels que soient les nombres relatifs a, b, c et d , on a :

- 1) $a(b + c) = ab + ac$ et $(b + c)a = ab + ac$
- 2) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Remarques

- 1) $a(b + c) \neq a + (b + c)$ et $(a + b)(c + d) \neq (a + b) + (c + d)$
- 2) Si un produit de sommes algébriques est précédé du signe " − ", il faut le considérer comme l'opposé du produit. Ainsi, il convient de développer le produit avant de distribuer le signe " − " à chaque terme obtenu, après développement.

2. Cas particuliers : les produits remarquables

Propriétés

Quels que soient les nombres relatifs a et b on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (le carré de la somme de deux termes)}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ (le carré de la différence de deux termes)}$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{ (le produit de la somme de deux nombres par leur différence)}$$

Remarque : $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ et $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$

Deuxième partie : mise en situation d'apprentissage

Activité 1

Réduisez les expressions algébriques suivantes :

$$A = 3a \times 4a^2$$

$$D = x - (2x - 5)$$

$$B = 2x + x$$

$$E = 2 + (-2x + 5),$$

$$C = 7 + (x - 5)$$

$$F = x + 2 + (7 - 3x)$$

$$G = 2x - (x + (-2x + 3))$$

Activité 2

Développez et réduisez les expressions algébriques suivantes :

$$H = 2x(x - 2)$$

$$L = (x - 3)^2$$

$$I = (-4x + 2) \times 3x$$

$$M = (-5x - 1)^2$$

$$J = (3x + 2)(5 - x)$$

$$N = -(x - 1)(x + 1)$$

$$K = (2 + x)^2$$

Résolution des activités avec les élèves après qu'ils aient présenté les résultats des travaux de groupe

Activité 1

Réduisons les expressions algébriques suivantes :

$$A = 3a \times 4a^2$$

$$= (3 \times 4)a \times a^2$$

$$= (3 \times 4)a^{1+2}$$

$$= 12a^3$$

$$A = 12a^3$$

$$B = 2x + x$$

$$= (2 + 1)x$$

$$= 3x$$

$$B = 3x$$

Pour se rassurer de la réponse $B = 3x$, on peut faire la vérification suivante en attribuant par exemple à x la valeur 3. On aura, pour $B = 2x + x$, $B = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$ et pour

$B = 3x$, $B = 3 \times 3 = 9$. Ainsi, la réponse obtenue est correcte.

$$C = 7 + (x - 5)$$

$$= 7 + x - 5$$

$$= 7 - 5 + x$$

$$= 2 + x$$

$$C = 2 + x$$

Peut-on écrire $C = 2 + x = 2x$ ou $2 + x = 3x$? Non car les termes x et 2 de l'expression C ne sont pas semblables. De plus, si on remplace x par une valeur choisie, par exemple $x = 3$, on obtient :

- pour $2 + x = 2x$, on a : $2 + 3 = 5$ alors que $2 \times 3 = 6$; $5 \neq 6$ donc $2 + x \neq 2x$;
- pour $2 + x = 3x$, on a : $2 + 3 = 5$ alors que $3 \times 3 = 9$; $5 \neq 9$ donc $2 + x \neq 3x$.

Ainsi, on ne peut pas réduire l'expression $C = 2 + x$.

$$D = x - (2x - 5)$$

$$= x - 2x + 5$$

$$= (1 - 2)x + 5$$

$$= -x + 5$$

$$D = -x + 5$$

$$E = 2 + (-2x + 5)$$

$$= 2 - 2x + 5$$

$$= -2x + 5 + 2$$

$$= -2x + 7$$

$$E = -2x + 7$$

$$F = x + 2 + (7 - 3x)$$

$$= x + 2 + 7 - 3x$$

$$= x - 3x + 2 + 7$$

$$= (1 - 3)x + 7 + 2$$

$$= -2x + 9$$

$$F = -2x + 9$$

$$G = 2x - (x + (-2x + 3))$$

$$= 2x - (x - 2x + 3)$$

$$= 2x - x + 2x - 3$$

$$= (2 - 1 + 2)x - 3$$

$$= 3x - 3$$

$$G = 3x - 3$$

Activité 2

Développons et réduisons les expressions algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}H &= 2x(x - 2) \\&= 2x \times x - 2 \times 2x \\&= 2x^2 - 4x\end{aligned}$$

$$H = 2x^2 - 4x$$

$$\begin{aligned}I &= (-4x + 2) \times 3x \\&= -4x \times 3x + 2 \times 3x \\&= -12x^2 + 6x\end{aligned}$$

$$I = -12x^2 + 6x$$

$$\begin{aligned}J &= (3x + 2)(5 - x) \\&= 3x(5 - x) + 2(5 - x) \\&= 3x \times 5 - 3x^2 + 2 \times 5 - 2x \\&= 15x - 3x^2 + 10 - 2x \\&= -3x^2 + 15x - 2x + 10 \\&= -3x^2 + (15 - 2)x + 10 \\&= -3x^2 + 13x + 10\end{aligned}$$

$$J = -3x^2 + 13x + 10$$

Attention : on ne pas réduire l'expression $J = -3x^2 + 13x + 10$. Dans cette expression, on a deux termes en x , mais les exposants ne sont pas les mêmes.

$K = (2 + x)^2$ C'est la forme $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2$ et $b = x$.

On a :

$$K = (2 + x)^2$$

$$= 4 + 4x + x^2$$

$$K = 4 + 4x + x^2$$

$$L = (x - 3)^2 \quad \text{C'est la forme } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ avec } a = x \text{ et } b = 3.$$

On a :

$$L = (x - 3)^2$$

$$= x^2 - 6x + 9$$

$$L = x^2 - 6x + 9$$

$$M = (-5x - 1)^2 \quad \text{C'est la forme } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ avec } a = -5x \text{ et } b = 1.$$

On a :

$$M = (-5x - 1)^2$$

$$= 25x^2 + 10x + 1$$

$$M = 25x^2 + 10x + 1$$

$$\text{C'est aussi la forme } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ avec } a = -5x \text{ et } b = -1.$$

On a :

$$M = (-5x - 1)^2$$

$$= ((-5x) + (-1))^2$$

$$= 25x^2 + 10x + 1$$

$$M = 25x^2 + 10x + 1$$

$$N = -(x - 1)(x + 1)$$

$$= -((x - 1)(x + 1))$$

$$= -(x^2 - 1)$$

$$= -x^2 + 1$$

$$N = -x^2 + 1$$

7.1.3. Présentation de la séquence d'enseignement

Nous présentons la séquence d'enseignement que nous avons faite dans le cadre de l'expérimentation du dispositif.

Notre séquence d'enseignement comporte deux parties : éléments de cours et mise en situations des élèves.

Dans la première partie, nous avons travaillé sur la réduction des sommes algébriques, et sur le développement et la réduction des expressions algébriques. Notons que ce travail est précédé des activités préparatoires portant sur le calcul numérique.

En ce qui concerne la réduction des sommes algébriques, nous avons, d'abord, amené les élèves à reconnaître la structure d'une somme algébrique, à identifier les termes d'une somme algébrique, à travers des exemples d'expressions. Ensuite, nous avons proposé la définition de ce que c'est réduire une somme et de ce que c'est réduire un produit. Enfin, nous avons présenté des règles portant sur les propriétés de commutativité et de l'associativité de l'addition, sur la suppression des parenthèses dans une somme algébrique, et les propriétés de réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses.

Présentons un extrait de la séquence sur la réduction des sommes algébriques. Nous avons abordé la réduction d'une somme à partir d'un vocabulaire. Puisque les résultats de l'analyse des productions des élèves ont montré que ces derniers éprouvent des difficultés à reconnaître la structure d'une somme et à identifier les termes, nous avons commencé par le vocabulaire. En effet, nous avons présenté quelques expressions à l'exemple des expressions $A = 2x + x$ et $C = 7 + (x - 5)$. Pour ces expressions, nous avons amené les élèves à reconnaître la structure de ces sommes algébriques puis à identifier les termes de chaque expression. En amont à la définition du concept de réduction, nous avons fait comprendre aux élèves que lorsqu'une expression comporte des termes qui sont semblables, à l'exemple de l'expression A, on peut la réduire ou la simplifier. Après cela, nous avons présenté la définition de ce que c'est réduire une somme. Après avoir défini le concept de réduction, nous avons présenté des règles et des propriétés qui sont consignées dans le dispositif.

Pour ce qui est du développement et la réduction des expressions algébriques, nous avons commencé par le vocabulaire qui a consisté à amener les élèves à reconnaître la structure d'un produit et à identifier les facteurs d'un produit. Cela est suivi de la présentation de la

définition du concept de développement, de la présentation des règles et des propriétés. Pour la reconnaissance de la structure d'un produit et l'identification des facteurs, nous sommes servi des expressions $D = (3a) \times (4a^2)$, $E = 2x(x - 2)$ et $F = (3x + 2)(5 - x)$.

Dans la seconde partie, nous avons mis les élèves en situation. Pendant la résolution des exercices, après la mise en situation des élèves en trois groupes, un représentant de chaque groupe passe au tableau et présente les résultats du groupe. Ces présentations sont suivies des discussions. À la suite des discussions, les élèves font une autocorrection. Présentons quelques exemples d'expressions ayant fait l'objet de discussion avec les explications données aux productions suivies des autocorrections :

– **Pour la production (du groupe 3) :**

$$C = 7 + (x - 5)$$

$$= 7x - 35,$$

un représentant du groupe explique en ces termes : on a pris 7, on a multiplié x ; on a pris 7, on a multiplié par 5 ; ça donné $7x - 35$.

Après cette explication donnée par le représentant du groupe, ce dernier s'est rendu compte que leur réponse est fausse et a fait l'autocorrection, en donnant la réponse correcte suivante :

$$C = 7 + (x - 5)$$

$$= 7 + x - 5$$

$$= 2 + x.$$

– **Pour la production (du groupe 2) :**

$$D = x - (2x - 5)$$

$$= 2x^2 - 5x,$$

un représentant du groupe explique en ces termes : on a pris x , on a multiplié avec $2x$; on a pris x , on a multiplié avec 5 ; on a obtenu $2x^2 - 5x$.

Après cette explication donnée par le représentant du groupe, ce dernier s'est rendu compte que leur réponse est fausse et a fait l'autocorrection, en proposant la réponse suivante :

$$\begin{aligned} D &= x - (2x - 5) \\ &= x - 2x + 5 \\ &= x - 7x. \end{aligned}$$

Constatant que cette réponse donnée par leur représentant n'est pas correcte, un autre membre du même groupe est passé au tableau et a donné la réponse suivante, celle correcte :

$$\begin{aligned} D &= x - (2x - 5) \\ &= x - 2x + 5 \\ &= (1 - 2)x + 5 \\ &= -x + 5. \end{aligned}$$

– **Pour la production (du groupe 1) :**

$$\begin{aligned} H &= 2x(x - 2) \\ &= 2x^2 - 4x \\ &= 6x, \end{aligned}$$

un représentant du groupe explique en ces termes : on a fait $2x$ fois x pour avoir $2x^2 - 4x$; on a fait 2 plus 4 égal à 6 et on a $6x$.

Après cette explication donnée par le représentant du groupe, ce dernier s'est rendu compte que leur réponse est fausse et a fait l'autocorrection, en disant qu'on doit s'arrêter à :

$$H = 2x^2 - 4x.$$

Notons qu'à chaque fois que les groupes rectifient leurs erreurs et donnent les réponses correctes, nous intervenons pour faire des commentaires et justifier les réponses correctes. Par ailleurs, nous apportons des explications à des réponses erronées.

Dans l'optique de déconstruire les schèmes qui étaient déjà constitués chez les élèves, nous avons créé des conflits en convoquant l'aspect sémantique, c'est-à-dire pour des productions erronées et pour des productions correctes, nous avons demandé aux élèves d'attribuer une valeur numérique à la lettre. Après ces extanciations, les élèves se rendent compte que leur production est erronée.

Nous présentons ci-dessous, le dispositif conçu.

7.1.4. L'analyse *a priori* des activités

L'analyse *a priori* de notre dispositif est un travail d'hypothèses orientées vers (Charnay, 2003) :

- les démarches, les stratégies, les raisonnements, les procédures, les solutions que l'élève peut mettre en œuvre dans la situation qui lui est proposée compte tenu de ses connaissances supposées : peut-il s'engager dans le problème ? a-t-il des critères pour savoir s'il a réussi ou non ?
- les difficultés qu'il peut rencontrer et les erreurs qu'il peut commettre : en particulier, la situation permet-elle à l'élève d'engager ses conceptions erronées ?
- l'étude des variables didactiques de la situation et les effets sur le travail de l'élève des modifications que l'enseignant peut apporter à la situation : en particulier, la notion ou la procédure visée est-elle l'outil le plus approprié pour résoudre le problème posé ?
- l'étude des variables pédagogiques, liées à des choix d'organisation de la classe ou d'interventions de la part de l'enseignant, et de leurs effets sur le travail des élèves: en particulier, quelles sont les organisations ou les interventions qui feraient obstacle au travail souhaité de l'élève ?

Cette analyse *a priori* porte sur les activités préparatoires et les deux activités proposées à la suite des éléments du cours.

7.1.4.1. L'analyse *a priori* des activités préparatoires

Activités préparatoires

1) a) Pour chacune des sommes algébriques suivantes, identifiez les termes :

$$3 + 4,5 ; 6,2 - 3 ; 8 - 4,5 + 7 ; P = c + c + c + c \text{ (Périmètre du carré)}$$

b) Pour chacun des produits suivants, identifiez les facteurs : $4 \times 2,3$;

$$A = L \times l \text{ (L'aire du rectangle).}$$

2) Calculez : $a = 18 + (7 + 2)$; $b = 18 - (7 + 2)$.

3) Calculez : $(+7,5) + (+2,3)$; $(+7,5) - (+2,3)$; $(+2,3) - (+7,5)$.

4) Complétez : $a^1 = \dots$; $2^2 = \dots$; $3^2 = \dots$; $(2 + 3)^2 = \dots$; $a^2 \times a^3 = \dots$.

5) Calculez de deux manières : $a = (5,7 + 4,3) \times 2,5$; $b = 5 \times (15 + 3,5)$.

✓ Présentation des activités préparatoires

L'objectif de ces activités consiste à vérifier si les élèves sont capables de :

- identifier les termes dans une somme et les facteurs dans un produit ;
- appliquer les règles de priorité ;
- utiliser les propriétés sur l'addition des nombres décimaux relatifs ;
- faire le calcul de puissances dont les bases sont des nombres entiers ;
- calculer un produit.

L'item 1) comporte des sommes numériques de 2, 3, 4 termes et deux produits de deux facteurs.

L'item 2) est constitué d'une somme numérique de deux termes dont l'une est délimitée par des parenthèses précédées du signe "+" et d'une somme numérique de deux termes dont l'une est délimitée par des parenthèses précédées du signe "-".

L'item 3) porte sur l'addition des nombres décimaux relatifs de même signe et de signes contraires.

L'item 4) porte sur les propriétés de puissances.

L'item 5) est constitué des produits de facteurs dont l'un est un terme et l'autre, une somme numériques délimitée par des parenthèses. Une expression présente la distributivité à gauche, et une autre présente la distributivité à droite.

✓ Analyse *a priori* des activités préparatoires

Les cinq items ont été choisis en jouant sur les variables didactiques suivantes :

- signe devant la parenthèse entrante (signe "+" ou "-"), dans une somme numérique;

- présence des parenthèses dans une somme numérique ;
- structure de l'expression : somme de termes, produit de facteurs.

Les réponses attendues sont :

• **Pour l'item 1) :**

Pour 1)a) :

Pour $3 + 4,5$,

- Les termes de l'expression $3 + 4,5$ sont 3 et 4,5. C'est la réponse correcte ;
- Sans réponse.

Pour $6,2 - 3$,

- Les termes de l'expression $6,2 - 3$ sont 6,2 et 3. C'est la réponse correcte ;
- Sans réponse.

Pour $8 - 4,5 + 7$,

- Les termes de l'expression $8 - 4,5 + 7$ sont 8 ; $-4,5$ et 7. C'est la réponse correcte ;
- Sans réponse.

Pour $P = c + c + c + c$,

- Les termes de l'expression $P = c + c + c + c$ sont c, c, c et c . C'est la réponse correcte ;
- Sans réponse.

Pour 1)b) :

Pour $4 \times 2,3$,

- Les facteurs de l'expression $4 \times 2,3$ sont 4 et 2,3. C'est la réponse correcte ;
- Sans réponse.

Pour $A = L \times l$

- Les facteurs de l'expression $A = L \times l$ sont L et l . C'est la réponse correcte ;
- Sans réponse.

- **Pour l'item 2) :**

Pour l'expression $a = 18 + (7 + 2)$

$$\begin{aligned} - \quad a &= 18 + (7 + 2) \\ &= 18 + 9 \\ &= 27 \end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. Cette réponse est obtenue en utilisant la règle de priorité de l'opération entre parenthèses ;

$$\begin{aligned} - \quad a &= 18 + (7 + 2) \\ &= 18 + 7 + 2 \\ &= 18 + 9 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Cette réponse également est correcte. Elle est obtenue en utilisant la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + " ;

$$\begin{aligned} - \quad a &= 18 + (7 + 2) \\ &= 18 \times 7 + 18 \times 2 \\ &= 126 + 36 \\ &= 162 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Il y a un glissement du contexte d'application de la distributivité ;

– Sans réponse.

Pour l'expression $b = 18 - (7 + 2)$.

$$\begin{aligned} - \quad b &= 18 - (7 + 2) \\ &= 18 - 9 \\ &= 9 \end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. Cette réponse est obtenue en utilisant la règle de priorité de l'opération entre parenthèses ;

$$\begin{aligned} - \quad b &= 18 - (7 + 2) \\ &= 18 - 7 - 2 \\ &= 18 - 9 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Cette réponse également est correcte. Elle est obtenue en utilisant la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + " ;

$$\begin{aligned}
- \quad b &= 18 - (7 + 2) \\
&= 18 - 7 + 2 \\
&= 18 + 2 - 7 \\
&= 20 - 7 \\
&= 13
\end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. La règle suppression des parenthèses précédées du signe " – " n'est pas appliquée correctement. En effet, le signe " – " devant la somme délimitée par les parenthèses est considéré comme signe du premier terme de cette somme ;

$$\begin{aligned}
- \quad b &= 18 - (7 + 2) \\
&= -18 \times 7 - 18 \times 2 \\
&= 126 - 36 \\
&= 90
\end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Il y a également un glissement du contexte d'application de la distributivité ;

– Sans réponse.

• **Pour l'item 3) :**

Pour l'expression $(+7,5) + (+2,3)$

$$- \quad (+7,5) + (+2,3) = (+9,8)$$

C'est la réponse correcte. Elle est obtenue en utilisant la règle d'addition des nombres décimaux relatifs de même signe (positif) ;

– Sans réponse.

Pour l'expression $(+7,5) - (+2,3)$

$$\begin{aligned}
- \quad (+7,5) - (+2,3) &= 7,5 - 2,3 \\
&= 5,2
\end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. Cette réponse est obtenue en considérant le signe " – " devant la parenthèse comme marque de l'opposé du terme contenu dans les parenthèses ;

– Sans réponse.

Pour l'expression $(+2,3) - (+7,5)$

$$\begin{aligned}
- \quad (+2,3) - (+7,5) &= 2,3 - 7,5 \\
&= -5,2
\end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. Cette réponse est obtenue en considérant le signe " – " devant la parenthèse comme marque de l'opposé du terme contenu dans les parenthèses ;

- Sans réponse.

- **Pour l’item 4) :**

Pour l’expression $a^1 = \dots$

- $a^1 = a$

C’est la réponse correcte. Le cas particulier du calcul de puissance où tout nombre à la puissance 1 est égal à lui-même est appliqué correctement ;

- Sans réponse.

Pour l’expression $2^2 = \dots$

- $2^2 = 2 \times 2$
 $= 4$

C’est la réponse correcte. La propriété $a^n = a \times a \dots \times a$ est appliquée correctement ;

- Sans réponse.

Pour l’expression $3^2 = \dots$

- $3^2 = 3 \times 3$
 $= 9$

C’est la réponse correcte. La propriété $a^n = a \times a \dots \times a$ est appliquée correctement ;

- $3^2 = 2 \times 3$
 $= 6$

Cette réponse est fausse. La propriété $a^n = a \times a \dots \times a$ n’est pas bien comprise. Ici, le calcul de puissance est assimilé à la multiplication de l’exposant par la base. Ainsi, il y a un glissement des nombres en position de puissance vers la position de coefficient ;

- Sans réponse.

Pour l’expression $(2 + 3)^2 = \dots$

- $(2 + 3)^2 = 5^2$
 $= 25$

C’est la réponse correcte. Il y a une mise en avant de la priorité de l’opération entre parenthèses ;

- $(2 + 3)^2 = (2 + 3)(2 + 3)$
 $= 5 \times 5$
 $= 25$

C’est également la réponse correcte. Ici, il y a une mise en avant de la propriété $a^n = a \times a \dots \times a$;

$$\begin{aligned}
 - \quad (2 + 3)^2 &= 2^2 + 3^2 \\
 &= 4 + 9 \\
 &= 13
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Il y a généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^2 = a^2b^2$. Certains élèves peuvent penser que les expressions $(ab)^2$ et $(a + b)^2$ ont la même dénotation ;

– Sans réponse.

Pour l'expression $a^2 \times a^3 = \dots$

$$\begin{aligned}
 - \quad a^2 \times a^3 &= a^{2+3} \\
 &= a^5
 \end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. La propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$ est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned}
 - \quad a^2 \times a^3 &= a^{2 \times 3} \\
 &= a^6
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. Il y a glissement de la propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$ vers la propriété $(a^n)^m = a^{n \times m}$;

– Sans réponse.

• **Pour l'item 5) :**

Pour l'expression $a = (5,7 + 4,3) \times 2,5$

$$\begin{aligned}
 - \quad a &= (5,7 + 4,3) \times 2,5 \\
 &= 10 \times 2,5 \\
 &= 25
 \end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. Il y a une mise en avant de la priorité de l'opération entre parenthèses ;

$$\begin{aligned}
 - \quad a &= (5,7 + 4,3) \times 2,5 \\
 &= 5,7 \times 2,5 + 4,3 \times 2,5 \\
 &= 14,25 + 10,75 \\
 &= 25
 \end{aligned}$$

Cette réponse également est correcte. Il y a application de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ;

$$\begin{aligned}
 - \quad a &= (5,7 + 4,3) \times 2,5 \\
 &= 5,7 + 4,3 \times 2,5 \\
 &= 5,7 + 10,75 \\
 &= 16,45
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. L'usage erroné de la distributivité peut conduire à une telle réponse. Le nombre 2,5 n'a été distribué qu'au terme 4,3;

– Sans réponse.

Pour l'expression $b = 5 \times (15 + 3,5)$.

$$\begin{aligned}
 - \quad b &= 5 \times (15 + 3,5) \\
 &= 5 \times 18,5 \\
 &= 92,5
 \end{aligned}$$

C'est la réponse correcte. Il y a une mise en avant de la priorité de l'opération entre parenthèses ;

$$\begin{aligned}
 - \quad b &= 5 \times (15 + 3,5) \\
 &= 5 \times 15 + 5 \times 18,5 \\
 &= 75 + 17,5 \\
 &= 92,5
 \end{aligned}$$

Cette réponse également est correcte. La propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned}
 - \quad b &= 5 \times (15 + 3,5) \\
 &= 5 \times 15 + 3,5 \\
 &= 75 + 3,5 \\
 &= 78,5
 \end{aligned}$$

Cette réponse est fausse. L'usage erroné de la distributivité peut conduire à une telle réponse. Le nombre 5 n'a été distribué qu'au terme premier terme 15 ;

– Sans réponse.

Activités proposées à la suite des éléments du cours

Activité 1

Réduisez les expressions algébriques suivantes :

$$A = 3a \times 4a^2$$

$$B = 2x + x$$

$$C = 7 + (x - 5)$$

$$D = x - (2x - 5)$$

$$E = 2 + (-2x + 5),$$

$$F = x + 2 + (7 - 3x)$$

$$G = 2x - (x + (-2x + 3))$$

✓ Présentation de l'activité 1

L'objectif de cette activité est de regarder comment les élèves procèdent pour réduire un produit de monômes ou une somme algébrique comportant des parenthèses ou non.

- L'item $A = 3a \times 4a^2$ est un produit de deux facteurs dont l'un est un monôme de degré un et l'autre, un monôme de degré 2 ; avec les coefficients des monômes différents de 1.
- L'item $B = 2x + x$ est une somme de deux monômes de degré 1. Nous pensons que la réduction de cet item ne pourrait poser aucun problème chez les élèves, à partir des éléments de cours présentés dans le dispositif.
- L'item $C = 7 + (x - 5)$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est une constante et l'autre, une expression littérale délimitée par des parenthèses.
- L'item $D = x - (2x - 5)$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est une constante et l'autre une expression littérale délimitée par des parenthèses précédées du signe " - ". La propriété de suppression de parenthèses présentée dans le dispositif est de nature à faciliter la réduction de cette expression :
- L'item $E = 2 + (-2x + 5)$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est une constante et l'autre, une expression algébrique délimitée par les parenthèses précédées du signe " + ". Comme pour l'item D, il suffit d'appliquer la propriété de suppression de parenthèses présentée dans le dispositif.
- L'item $F = x + 2 + (7 - 3x)$ est une somme algébrique de deux termes tous deux des sommes algébriques dont l'un n'est pas délimitée par les parenthèses

et l'autre, délimitée par les parenthèses précédées du signe " + ". Comme pour l'item E, il suffit d'appliquer la propriété de suppression de parenthèses présentée dans le dispositif.

- L'item $G = 2x - (x + (-2x + 3))$ est une somme algébrique de deux termes dont l'un est un monôme de degré 1 et l'autre, une expression algébrique délimitée par les parenthèses précédées du signe " - " à l'intérieur desquelles se trouve une somme algébrique constituée d'un monôme de degré 1 et une somme délimitée par les parenthèses.

✓ Analyse *a priori* de l'activité 1

Les items ont été choisis en jouant sur les variables didactiques suivantes :

- structure de l'expression : somme de termes ou produit de facteurs à réduire ;
- signe avant la parenthèse entrante (signe " + " ou " - ");
- type de parenthèses (parenthèses imbriquées ou parenthèses simples).

La mise en activité des élèves en groupes lors de la résolution des activités et la mise en commun des travaux mettent en exergue les variables pédagogiques.

Notons que cette analyse *a priori* s'appuie sur les erreurs identifiées aux pré-tests.

Les réponses attendues sont :

Pour l'expression $A = 3a \times 4a^2$:

$$\begin{aligned} - A &= 3a \times 4a^2 \\ &= (3 \times 4)a^{1+2} \\ &= 12a^3 \end{aligned}$$

$$A_1A_1^{10}: A = 12a^3$$

C'est la réponse correcte. La propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n \times n}$ est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned} - A &= 3a \times 4a^2 \\ &= (3 \times 4)a^{1 \times 2} \\ &= 12a^2 \end{aligned}$$

$$A_1A_2: A = 12a^2$$

Cette réponse est fautive. La propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n \times n}$ est confondue à la propriété $(x^n)^m = x^{n \times m}$;

- Sans réponse.

¹⁰ A_1A_1 : Activité 1 et réponse 1 à l'expression A

Pour l'expression $B = 2x + x$:

$$\begin{aligned} - \quad B &= 2x + x \\ &= 3x \end{aligned}$$

$$A_1B_1: B = 3x$$

C'est la réponse correcte. La réduction est faite correctement ;

$$\begin{aligned} - \quad B &= 2x + x \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

$$A_1B_2: B = 2x^2$$

Cette réponse est fausse. Il y a glissement de propriété du calcul de sommes algébriques au calcul du produit de monômes ;

– Sans réponse.

Pour l'expression $C = 7 + (x - 5)$:

$$\begin{aligned} - \quad C &= 7 + (x - 5) \\ &= 7 + x - 5 \\ &= 7 - 5 + x \\ &= 2 + x \end{aligned}$$

$$A_1C_1: C = 2 + x$$

C'est la réponse correcte. La propriété de suppression des parenthèses précédées du signe " + " est bien appliquée et la réduction est faite correctement ;

$$\begin{aligned} - \quad C &= 7 + (x - 5) \\ &= 7 + x - 5 \\ &= 7 - 5 + x \\ &= 2 + x \end{aligned}$$

$$A_1C_2: C = 2x$$

Cette réponse est fausse. Ici, l'égalité est considérée comme une annonce du résultat et l'addition comme opératoire ;

$$\begin{aligned} - \quad C &= 7 + (x - 5) \\ &= 7x - 35 \end{aligned}$$

$$A_1C_3: C = 7x - 35$$

Cette réponse est fausse. Il y a un glissement du contexte d'application de la distributivité ;

– Sans réponse.

Pour l'expression $D = x - (2x - 5)$:

$$\begin{aligned} - \quad D &= x - (2x - 5) \\ &= x - 2x + 5 \\ &= -x + 5 \end{aligned}$$

$$A_1D_1: D = -x + 5$$

C'est la réponse correcte. La règle de suppression des parenthèses précédées du signe « - » est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned} - \quad D &= x - (2x - 5) \\ &= x - 2x - 5 \\ &= -x - 5 \end{aligned}$$

$$A_1D_2: D = -x - 5$$

Cette réponse est fausse. La règle suppression des parenthèses précédées du signe " - " n'est pas appliquée correctement ;

$$\begin{aligned} - \quad D &= x - (2x - 5) \\ &= -2x^2 - 5x \end{aligned}$$

$$A_1D_3: D = -2x^2 - 5x$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse A_1C_3 restent valables pour cette réponse ;

- Sans réponse.

Pour l'expression $E = 2 + (-2x + 5)$:

$$\begin{aligned} - \quad E &= 2 + (-2x + 5) \\ &= 2 - 2x + 5 \\ &= -2x + 5 + 2 \\ &= -2x + 7 \end{aligned}$$

$$A_1E_1: E = -2x + 7$$

C'est la réponse correcte. La propriété de suppression des parenthèses précédées du signe " + " est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned} - \quad E &= 2 + (-2x + 5) \\ &= -4x + 10 \end{aligned}$$

$$A_1E_2: E = -4x + 10$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse A_1C_3 restent valables pour cette réponse ;

- Sans réponse.

Pour l'expression $F = x + 2 + (7 - 3x)$:

$$\begin{aligned} - \quad F &= x + 2 + (7 - 3x) \\ &= x + 2 + 7 - 3x \\ &= x - 3x + 2 + 7 \\ &= -2x + 9 \end{aligned}$$

$$A_1F_1: F = -2x + 9$$

C'est la réponse correcte. La propriété $a + (b - c) = a + b - c$ est appliquée correctement, avec identification de $x + 2$ à a ;

$$\begin{aligned} - \quad F &= x + 2 + (7 - 3x) \\ &= 7x - 3x^2 + 14 - 6x \\ &= -3x^2 + x + 14 \end{aligned}$$

$$A_1F_2: F = -3x^2 + x + 14$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse A_1C_3 restent valables pour cette réponse ;

- Sans réponse.

Pour l'expression $G = 2x - (x + (-2x + 3))$:

$$\begin{aligned} - \quad G &= 2x - (x + (-2x + 3)) \\ &= 2x - x + 2x - 3 \\ &= (2 - 1 + 2)x - 3 \\ &= 3x - 3 \end{aligned}$$

$$A_1G_1: G = 3x - 3$$

Cette réponse est correcte. Les parenthèses imbriquées sont bien gérées ;

$$\begin{aligned} - \quad G &= 2x - (x + (-2x + 3)) \\ &= 4x^2 + 6x - 2x^2 + 3 \\ &= 2x^2 + 6x + 3 \end{aligned}$$

$$A_1G_2: G = 2x^2 + 6x + 3$$

Cette réponse est fausse. Les explications données à la réponse A_1C_3 restent valables pour cette réponse ;

- Sans réponse.

Activité 2

Développez et réduisez les expressions algébriques suivantes :

$$H = 2x(x - 2)$$

$$I = (-4x + 2) \times 3x$$

$$J = (3x + 2)(5 - x)$$

$$K = (2 + x)^2$$

$$L = (x - 3)^2$$

$$M = (-5x - 1)^2$$

$$N = -(x - 1)(x + 1)$$

✓ Présentation de l'activité 2

L'objectif de cette activité est de regarder comment les élèves :

- développent un produit de sommes algébriques ;
- réagissent face au signe " – " devant un produit de sommes algébriques ;
- donnent directement la forme développée et réduite d'un produit de sommes ayant la forme d'une identité remarquable.
- L'item $H = 2x(x - 2)$ est un produit de deux facteurs dont le premier est un monôme de degré 1 et l'autre, une somme algébrique de degré 1. Il s'agit de la distributivité à gauche. C'est un type de tâche qui ne devait pas, *a priori*, poser de problèmes chez les élèves, il suffit d'appliquer la propriété du cours en multipliant le facteur $2x$ par les termes x et -2 , puis faire la somme.
- L'item $I = (-4x + 2) \times 3x$ est un produit de deux facteurs dont le premier est une somme algébrique de degré 1, et le second est un monôme de degré 1. Il s'agit de la distributivité à gauche. Il suffit d'appliquer la propriété de distributivité.
- L'item $J = (3x + 2)(5 - x)$ est le produit de deux sommes algébriques. Pour développer cette expression, il suffit d'appliquer également la propriété de distributivité.
- L'item $K = (2 + x)^2$ est une expression de la forme $(a + b)^2$ avec $a = 2$ et $b = x$. C'est le carré d'une somme de deux nombres. Il suffit d'appliquer la propriété $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ présentée dans le dispositif.
- L'item $L = (x - 3)^2$ est une expression de la forme $(a - b)^2$. C'est le carré de la différence de deux termes. Il suffit d'appliquer la propriété

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ présentée et démontrée dans le dispositif.

- L'item $M = (-5x - 1)^2$ peut être vu de trois manières. Il peut être vu comme une expression qui a la forme $(a + b)^2$ avec $a = -5x$ et $b = -1$. C'est le carré d'une somme ; en effet, $(-5x - 1)^2 = ((-5x) + (-1))^2$. Il peut aussi être vu comme $-(a + b)^2 = (a + b)^2$; c'est donc le carré d'une somme. L'item peut aussi être vu comme l'expression de la forme $(-a - b)^2 = ((-a) - b)^2$ où $a = 5x$ et $b = 1$, c'est le carré d'une différence. Ces différentes transformations de l'expression $(-5x - 1)^2$ risquent de ne pas apparaître chez les élèves. Nous pensons que les élèves pourront identifier l'identité remarquable à l'une des formes de transformations possibles pour donner la forme développée et réduite de cette expression.
- L'item $N = -(x - 1)(x + 1)$ est le produit de la différence de deux termes par leur somme précédé du signe " - ". Pour développer cette expression, l'élève doit appliquer l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, en considérant le signe " - " comme indiquant l'opposé de $(x - 1)(x + 1)$. Nous pensons qu'en considérant le signe " - " comme marque de l'opposé de $(x - 1)(x + 1)$, les élèves pourront donner la réponse correcte à cet item.

✓ **Analyse a priori de l'activité 2**

Les items ont été choisis en jouant sur les variables didactiques suivantes :

- la forme des facteurs (monôme avec signe " - " ou signe " + ", somme algébrique de monômes, nombre de facteurs) ;
- la forme de l'identité remarquable.

Comme pour l'activité 1, les variables pédagogiques sont mises en exergue dans la mise en activité des élèves en groupes et la mise en commun des travaux.

Les réponses attendues sont :

• **Pour l'expression $H = 2x(x - 2)$:**

$$\begin{aligned} - H &= 2x(x - 2) \\ &= 2x^2 - 4x \end{aligned}$$

$$A_2H_1: H = 2x^2 - 4x$$

Cette réponse est correcte. Le premier facteur $2x$ est bien distribué à chacun des termes du second facteur ;

$$\begin{aligned}
 - \quad H &= 2x(x - 2) \\
 &= 2x^2 - 2
 \end{aligned}$$

$$A_2H_2: H = 2x^2 - 2$$

Cette réponse est fausse. L'usage erroné de la distributivité peut conduire à une telle réponse. Le monôme $2x$ n'est distribué qu'au premier terme x ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $I = (-4x + 2) \times 3x$:**

$$\begin{aligned}
 - \quad I &= (-4x + 2) \times 3x \\
 &= -12x^2 + 6x
 \end{aligned}$$

$$A_2I_2: I = -12x^2 + 6x$$

C'est la réponse correcte. La règle de distributivité est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned}
 - \quad I &= (-4x + 2) \times 3x \\
 &= -4x + 6x
 \end{aligned}$$

$$A_2I_2: I = -4x + 6x$$

Cette réponse est fausse. Il y a un usage erroné de la distributivité ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $J = (3x + 2)(5 - x)$:**

$$\begin{aligned}
 - \quad J &= (3x + 2)(5 - x) \\
 &= 15x - 3x^2 + 10 - 2x \\
 &= -3x^2 + 15x - 2x + 10 \\
 &= -3x^2 + 13x + 10
 \end{aligned}$$

$$A_2J_1: J = -3x^2 + 13x + 10$$

Cette réponse est correcte. La distributivité est appliquée correctement.

$$\begin{aligned}
 - \quad J &= (3x + 2)(5 - x) \\
 &= 15x - 3x^2 + 10 - 2x \\
 &= -3x^2 + 15x - 2x + 10 \\
 &= -3x^2 + 13x + 10
 \end{aligned}$$

$$A_2J_2: J = 10x^2 + 10$$

Cette réponse est fausse. Il y a glissement de propriété du calcul de sommes algébriques au calcul du produit de monômes ;

– Sans réponse.

- **Pour l'expression $K = (2 + x)^2$:**

$$\begin{aligned} - K &= (2 + x)^2 \\ &= 4 + 4x + x^2 \end{aligned}$$

$$A_2K_1: K = 4 + 4x + x^2$$

Cette réponse est correcte. L'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned} - K &= (2 + x)^2 \\ &= 4 + x^2 \end{aligned}$$

$$A_2K_2: K = 4 + x^2$$

Cette réponse est fausse. Il y a généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^2 = a^2b^2$.

– Sans réponse.

- **Pour l'expression $L = (x - 3)^2$:**

$$\begin{aligned} - L &= (x - 3)^2 \\ &= x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

$$A_2L_1: L = 4 + x^2$$

C'est la réponse correcte. L'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ est appliquée correctement ;

$$\begin{aligned} - L &= (x - 3)^2 \\ &= x^2 - 9 \end{aligned}$$

$$A_2L_2: L = x^2 - 9$$

Cette réponse est fausse. Ici également, il y a généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^2 = a^2b^2$;

– Sans réponse.

- **Pour l'expression $M = (-5x - 1)^2$:**

$$\begin{aligned} - M &= (-5x - 1)^2 \\ &= (-(5x + 1))^2 \\ &= (5x + 1)^2 \\ &= 25x^2 + 10x + 1 \end{aligned}$$

$$A_2M_1: M = 25x^2 + 10x + 1$$

C'est la réponse correcte ;

$$\begin{aligned}
 - \quad M &= (-5x - 1)^2 \\
 &= ((-5x) - 1)^2
 \end{aligned}$$

$$A_2M_2: M = 25x^2 + 10x + 1$$

C'est aussi la réponse correcte. En transformant l'expression $(-5x - 1)^2$ en $((-5x) - 1)^2$ cela devient le carré d'une différence de deux nombres et on obtient la réponse précédente ;

– Sans réponse.

• **Pour l'expression $N = -(x - 1)(x + 1)$:**

$$\begin{aligned}
 - \quad N &= -(x - 1)(x + 1) \\
 &= -((x - 1)(x + 1)) \\
 &= -x^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$A_2N_1: N = -x^2 + 1$$

C'est la réponse correcte. L'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ est appliquée correctement, avec une prise en compte du signe " - " devant le produit.

$$\begin{aligned}
 - \quad N &= -(x - 1)(x + 1) \\
 &= -x^2 - 1
 \end{aligned}$$

$$A_2N_2: N = -x^2 - 1$$

Cette réponse est fausse. L'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ est appliquée correctement, mais le signe " - " devant le produit n'est pas considéré comme indiquant l'opposé de $(x - 1)(x + 1)$;

– Sans réponse.

7.2. Expérimentation, analyse a posteriori

7.2.1. Réponses des élèves aux activités préparatoires

La résolution des activités préparatoires est faite en groupes suivie de la mise en commun. Trois groupes de trois élèves sont formés à cet effet. Nous présentons les analyses *a posteriori* selon les items et les réponses des groupes.

7.2.1.1. Réponses des élèves au premier item

1) a) Pour chacune des sommes algébriques suivantes, identifiez les termes : $3 + 4,5$; $6,2 - 3$; $8 - 4,5 + 7$; $P = c + c + c + c$ (Périmètre du carré)

b) Pour chacun des produits suivants, identifiez les facteurs : $4 \times 2,3$; $A = L \times l$ (L'aire du rectangle).

Tableau 28 : Distribution des réponses des élèves sur l'identification des termes d'une expression

	G_1	G_2	G_3
$3 + 4,5$	Sans réponse	Sans réponse	$3 + 4,5 = 4,5 + 3$
$6,2 - 3$	Sans réponse	Sans réponse	$6,2 - 3 = 3 + 3,2 - 3$
$8 - 4,5 + 7$	Sans réponse	Sans réponse	$8 - 4,5 + 7 =$ $7 + 4,5 - 8$
$P = c + c + c + c$	Sans réponse	Sans réponse	Sans réponse

Pour toutes les expressions proposées, aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte.

Tableau 29 : Distribution des réponses des élèves sur l'identification des facteurs d'une expression

	G_1	G_2	G_3
$4 \times 2,3$	Sans réponse	Sans réponse	Sans réponse
$A = L \times l$	Sans réponse	Sans réponse	Sans réponse

Les résultats montrent qu'aucun des trois groupes ne propose une réponse.

Les réponses des élèves au premier item montrent que ces derniers éprouvent des difficultés à déterminer des termes dans une somme ou des facteurs dans un produit. Pour certains élèves, la détermination des termes renvoie à la commutativité, revient à décomposer ou à commuter les termes.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves ne savent pas ce que c'est un terme dans une somme ou un facteur dans un produit.

7.2.1.2. Réponses des élèves au deuxième item

Calculez : $a = 18 + (7 + 2)$; $b = 18 - (7 + 2)$.

Tableau 30 : Distribution des réponses des élèves au deuxième item

	G_1	G_2	G_3
$a = 18 + (7 + 2)$	$a = 18 + (7 + 2)$ $= 18 + 9$ $= 27$	a $= 18 + (7 + 2)$ $= 18 + 7 + 2$ $= 27$	$a = 18 + (7 + 2)$ $= 18 + 7 + 2$ $= 27$
$b = 18 - (7 + 2)$	$b = 18 - (7 + 2)$ $= 18 - 9$ $= 9$	$b = 18 - (7 + 2)$ $= 18 - 7 + 2$ $= 20$	$b = 18 - (7 + 2)$ $= 18 - 7 - 2$ $= 9$

Pour l'expression $a = 18 + (7 + 2)$, les résultats montrent que tous les groupes donnent la réponse correcte. Le groupe 1 obtient la réponse avec une mise en avant de la priorité de l'opération entre parenthèses. Les groupes 2 et 3 obtiennent la réponse en utilisant la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + ".

Pour l'expression $b = 18 - (7 + 2)$, les résultats montrent que 2 groupes sur 3 donnent la réponse correcte. Le groupe 1 obtient la réponse avec une mise en avant de la priorité de l'opération entre parenthèses. Le groupe 3 obtient le même résultat en utilisant la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " - ". Le groupe 2 donne une réponse fausse. Cette réponse s'explique par la non maîtrise de la règle de priorité des opérations.

Il ressort de l'analyse des réponses au deuxième item que la plupart des élèves ne maîtrisent pas la règle de priorité des opérations. En effet, ils ne savent pas que l'opération entre parenthèses est prioritaire, dans le calcul numérique.

7.2.1.3. Réponses des élèves au troisième item

Calculez : $(+7,5) + (+2,3)$; $(+7,5) - (+2,3)$; $(+2,3) - (+7,5)$.

Tableau 31 : Distribution des réponses des élèves au troisième item

	G_1	G_2	G_3
$(+7,5) + (+2,3)$	$(+7,5) + (+2,3)$ $= (+9,8)$	$(+7,5) + (+2,3)$ $= (+9,8)$	$(+7,5) + (+2,3)$ $= (+9,8)$
$(+7,5) - (+2,3)$	$(+7,5) - (+2,3)$ $= (+5,2)$	$(+7,5) - (+2,3)$ $= (+5,2)$	$(+7,5) - (+2,3)$ $= -7,5 - 2,3$ $= -9,8$
$(+2,3) - (+7,5)$	$(+2,3) - (+7,5)$ $= (+4,8)$	$(+2,3) - (+7,5)$ $= +2,3 - 7,5$ $= -6,8$	$(+2,3) - (+7,5)$ $= (-5,2)$

Pour l'expression $(+7,5) + (+2,3)$, les résultats montrent que tous les trois groupes donnent la réponse correcte. Ces résultats montrent que les élèves n'éprouvent pas de difficultés à faire l'addition des nombres décimaux relatifs positifs.

Pour l'expression $(+7,5) - (+2,3)$, les résultats montrent que 2 groupes sur 3 donnent la réponse correcte. Le groupe 3 donne une réponse fausse. Ces résultats montrent que plus de la moitié des élèves n'éprouvent pas de difficultés à faire l'addition des nombres décimaux relatifs négatifs.

Pour l'expression $(+2,3) - (+7,5)$, les résultats montrent qu'un seul groupe sur 3 donne la réponse correcte. Les groupes 1 et 2 donnent des réponses fausses.

Il ressort de l'analyse des réponses au troisième item que, globalement, les élèves éprouvent moins de difficultés à faire l'addition des nombres décimaux relatifs.

7.2.1.4. Réponses des élèves au quatrième item

Complétez : $a^1 = \dots$; $2^2 = \dots$; $3^2 = \dots$; $(2 + 3)^2 = \dots$; $a^2 \times a^3 = \dots$.

Tableau 32 : Distribution des réponses au quatrième item

	G_1	G_2	G_3
$a^1 = \dots$	$a^1 = a$	$a^1 = a$	$a^1 = a$
$2^2 = \dots$	$2^2 = 2 \times 2$	$2^2 = 4$	$2^2 = 4$
$3^2 = \dots$	$3^2 = 3 \times 3$	$3^2 = 9$	$3^2 = 9$
$(2 + 3)^2 = \dots$	$(2 + 3)^2$ $= (2 + 3)(2 + 3)$	$(2 + 3)^2 = 4 + 9$ $= 13$	$(2 + 3)^2 = 5^2$ $= 5 \times 5$ $= 25$
$a^2 \times a^3 = \dots$	$a^2 \times a^3 = a^5$	$a^2 \times a^3 = a^5$	$a^2 \times a^3 = a^5$

Pour $a^1 = \dots$, les résultats montrent que tous les trois groupes donnent la réponse correcte : $a^1 = a$.

Pour $2^2 = \dots$, les résultats montrent que 2 groupes sur 3 donnent la réponse correcte : $2^2 = 4$. Le groupe 1 donne une réponse autre que celle correcte. Il écrit : $2^2 = 2 \times 2$. Cette réponse est juste, mais n'est pas finalisée.

Pour $3^2 = \dots$, les résultats montrent que 2 groupes sur 3 donnent la réponse correcte. Le groupe 1 donne une réponse autre que celle correcte. Il écrit : $3^2 = 3 \times 3$. Cette réponse est juste, mais n'est pas finalisée.

Pour $(2 + 3)^2 = \dots$, les résultats montrent qu'aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte. Le groupe 2 écrit : $(2 + 3)^2 = 4 + 9 = 13$. La réponse donnée par ce groupe relève de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$. En effet, les élèves considèrent le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes, en extrapolant les contextes d'application de la propriété de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

Pour $a^2 \times a^3 = \dots$, les résultats montrent que tous les trois groupes donnent la réponse correcte : $a^2 \times a^3 = a^5$. Cela montre que les élèves maîtrisent la propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Il ressort de l'analyse des réponses au quatrième item que la plupart des élèves éprouvent moins de difficultés à faire le calcul de puissance à base numérique. Quelques élèves éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$. En effet, les élèves considèrent le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes, en extrapolant les contextes d'application de la propriété de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

7.2.1.5. Réponses des élèves au cinquième item

Calculez de deux manières : $a = (5,7 + 4,3) \times 2,5$; $b = 5 \times (15 + 3,5)$.

Tableau 33 : Distribution des réponses des élèves au cinquième item

	G_1	G_2	G_3
$a = (5,7 + 4,3) \times 2,5$	$a = 18 + (7 + 2)$ $= 18 + 7 + 2$ $= 27$	Sans réponse	$a = (5,7 + 4,3) \times 2,5$ $= 5,7 + 4,3 \times 2,5$ $= 10 \times 2,5$ $= 25$
$b = 5 \times (15 + 3,5)$	b $= 5 \times (15 + 3,5)$ $= 15 + 3,5$ $= 5,0 \times 5$ $= 2,50$	Sans réponse	$b = 5 \times (15 + 3,5)$ $= 5 \times 15 + 3,5$ $= 5 \times 18,5$ $= 92,5$

Pour l'expression $a = (5,7 + 4,3) \times 2,5$, les résultats montrent qu'aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte.

Pour l'expression $b = 5 \times (15 + 3,5)$, les résultats montrent qu'aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte.

Les réponses données par le groupe 3 aux deux expressions, relèvent de la non prise en compte de la structure des expressions. En effet, les élèves ne maîtrisent pas la règle de priorité des opérations.

Il ressort de l'analyse des réponses au cinquième item que les élèves ne maîtrisent pas la règle de priorité des opérations.

7.2.2. Conclusion de l'analyse des activités préparatoires

L'analyse des productions des élèves issues de la résolution des activités préparatoires nous a permis de relever les éléments suivants :

- la distributivité : dans le développement des produits de sommes algébriques, les élèves font un défaut dans la distributivité ;
- l'identification des termes ou des facteurs : les élèves éprouvent des difficultés à identifier les termes dans une somme ou les facteurs, dans un produit ;
- l'addition des nombres décimaux relatifs : les élèves maîtrisent les règles d'addition des nombres décimaux relatifs ;
- la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$: les élèves considèrent le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes, en extrapolant les contextes d'application de la propriété de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.
- le statut du signe " – " : les élèves éprouvent des difficultés à considérer le signe " – " devant un produit de sommes algébrique comme marque de l'opposé du produit ;
- règle de priorité : les élèves ne maîtrisent pas la règle de priorité des opérations.

Nous faisons l'hypothèse que ces difficultés relevant essentiellement du calcul numérique peuvent influencer sur le calcul algébrique, lors de la résolution des activités (à faire à la suite des éléments de cours) et lors du post-test.

7.2.3. Analyse *a posteriori* des réponses des élèves aux activités proposées à la suite des éléments du cours

7.2.3.1. Activité centrée sur la réduction d'une somme algébrique ou d'un produit de monômes

Activité 1

Réduisez les expressions algébriques suivantes :

$$A = 3a \times 4a^2$$

$$B = 2x + x$$

$$C = 7 + (x - 5)$$

$$D = x - (2x - 5)$$

$$E = 2 + (-2x + 5)$$

$$F = x + 2 + (7 - 3x)$$

$$G = 2x - (x + (-2x + 3))$$

Tableau 34 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $A=3a \times 4a^2$

	G_1	G_2	G_3
$A = 3a \times 4a^2$	$A = 3a \times 4a^2$ $= (3 \times 4)a^{1+2}$ $= 12a^3$	$A = 3a \times 4a^2$ $= 12a^2 \times a$ $= 12a^2$	$A = 3a \times 4a^2$ $= (3 \times 4)a^{1+2}$ $= 12a^3$

Les résultats montrent que 2 groupes (G_1, G_3) sur 3 donnent la réponse correcte.

Le groupe 2 donne une réponse autre que celle correcte. Ce groupe a bien commencé la réduction en appliquant la commutativité, mais n'a pas su appliquer la propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'expression A que la plupart des élèves éprouvent moins de difficultés à réduire un produit de monômes. Quelques élèves éprouvent des difficultés à appliquer correctement la propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Tableau 35 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $B=2x+x$

	G_1	G_2	G_3
$B = 2x + x$	$B = 2x + x$ $= 3x$	$B = 2x + x$ $= 3x$	$B = 2x + x$ $= 3x$

Tous les groupes donnent la réponse correcte à l'expression $B = 2x + x$.

Les réponses des élèves à l'item B montrent que les élèves réduisent correctement la somme de monômes semblables (de degré 1).

Tableau 36 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $C=7+(x-5)$

	G_1	G_2	G_3
$C = 7 + (x - 5)$	$C = 7 + (x - 5)$ $= 7 + x - 5$ $= (5 - 7)x$ $= 2x$	$C = 7 + (x - 5)$ $= 7x + 35$	$C = 7 + (x - 5)$ $= 7x - 35$

Les résultats montrent qu'aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte.

Les groupes 2 et 3 donnent des réponses relevant du glissement de la distributivité, c'est-à-dire les élèves généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique. Le groupe 1 commence la réduction bien en appliquant la règle de suppression des parenthèses, mais n'obtient pas la bonne réponse.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'expression C que la plupart des élèves éprouvent des difficultés à réduire une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + ". En effet, ils généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique.

Tableau 37 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $D=x-(2x-5)$

	G_1	G_2	G_3
D $= x - (2x - 5)$	$D = x - (2x - 5)$ $= x - 2x + 5$ $= (1 - 2)x + 5$ $= x + 5$	$D = x - (2x - 5)$ $= -2x^2 - 5x$	$D = x - (2x - 5)$ $= 3x + 5x$ $= +8x$

Les résultats montrent qu'aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte.

Le groupe 1 applique bien la règle de suppression des parenthèses mais ne réduit pas correctement, par la suite. La réponse finale montre que les élèves du groupe 1 ne maîtrisent pas la règle d'addition des nombres entiers relatifs de signes contraires.

Les groupes 2 et 3 donnent des réponses relevant du glissement de la distributivité, c'est-à-dire les élèves généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'expression D que la plupart des élèves éprouvent des difficultés à réduire une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " - ". En effet, les élèves ne maîtrisent pas la règle d'addition des nombres décimaux relatifs

de signes contraires et généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique.

Tableau 38 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $E=2+(-2x+5)$

	G_1	G_2	G_3
$E = 2 + (-2x + 5)$	Sans réponse	$E = 2 + (-2x + 5)$ $= -4x + 10$	$E = 2 + (-2x + 5)$ $= -4x + 10$

Les résultats montrent qu'aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte.

Le groupe 1 ne propose pas de réponse.

Les groupes 2 et 3 donnent une réponse relevant du glissement de la distributivité, c'est-à-dire les élèves généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item E que les élèves éprouvent des difficultés à réduire une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe "+". Ils généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique.

Tableau 39 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $F=x+2+(7-3x)$

	G_1	G_2	G_3
F $= x + 2 + (7 - 3x)$	F $= x + 2 + (7 - 3x)$ $= (x - 3x) + 7 + 2$ $= (1 - 3)x + 7 + 2$ $= 2x + 7 + 2$	$F = x + 2 + (7 - 3x)$ $= 7x - 3x^2 + 14$ $- 6x$ $= -3x^2 - 6x + 7x$ $+ 14$ $= -3x^2 + x + 14$	F $= x + 2 + (7 - 3x)$ $= (x + 2)(7 - 3x)$ $= 7x - 4x + 14$ $- 6x$ $= 7x - 4x - 6x$ $+ 14$

Ici également, les résultats montrent qu'aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte.

Le groupe 1 applique bien la règle de suppression des parenthèses, mais par la suite ne réduit pas correctement. La réponse finale montre que les élèves de ce groupe ne maîtrisent pas la règle d'addition des nombres décimaux relatifs de signes contraires.

Le groupe 2 donne une réponse relevant du glissement de la distributivité, c'est-à-dire les élèves généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique.

Le groupe 3 transforme la somme algébrique en produit de sommes. Nous faisons l'hypothèse que ce groupe éprouve des difficultés à distinguer les termes des facteurs.

Il ressort réponses des élèves à l'item F que ces derniers font un glissement du contexte d'application de la distributivité en transformant une somme en un produit de facteurs.

Tableau 40 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $G=2x-(x+(-2x+3))$

	G_1	G_2	G_3
G $= 2x - (x$ $+ (-2x + 3))$	$G = 2x - (x + (-2x$ $+ 3))$ $= 2x - x + 2x + 3$ $= (2 - 1 - 2)x + 3$ $= 1x + 3$	$G = 2x - (x + (-2x$ $+ 3))$ $= 4x^2 + 6x - 2x^2$ $+ 3$ $= 4x^2 - 2x^2 + 6x$ $+ 3$ $= 2x^2 + 6x - 3$	G $= 2x$ $- (x + (-2x + 3))$ $= 3x(-2x + 3)$ $= -6x + 9x$ $= +3x$

Les résultats montrent qu'aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte.

Le groupe 1 donne une réponse relevant de la considération du signe " - " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme de la somme.

Le groupe 2 fait un glissement de la distributivité.

Le groupe 3 ne maîtrise pas la règle de priorité d'opération.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item G que les élèves éprouvent des difficultés à réduire une somme algébrique comportant des parenthèses imbriquées. Ces difficultés relèvent de la considération du signe " - " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses

comme marque de l'opposé du premier terme, de la non maîtrise de la règle de priorité d'opération et du glissement de la distributivité.

Conclusion de l'analyse de l'activité 1

L'activité 1 a été proposée aux élèves dans l'objectif de regarder comment les élèves procèdent pour réduire un produit de monômes ou une somme algébrique comportant des parenthèses ou non. Cette activité a permis de relever les éléments suivants :

- le contexte d'application de la distributivité : les élèves généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique.
- la non maîtrise de la propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$;
- la non maîtrise de la règle de priorité d'opération ;
- le glissement de la distributivité : les élèves généralisent le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique ;
- la non maîtrise de la règle d'addition des nombres décimaux relatifs de signes contraires ;
- le statut du signe " – " : les élèves considèrent le signe " – " devant une somme comme marque de l'opposé du premier terme.

7.2.3.2. Activité centrée sur le développement et la réduction des expressions algébriques

Activité 2

Développez et réduisez les expressions algébriques suivantes :

$$H = 2x(x - 2)$$

$$L = (x - 3)^2$$

$$I = (-4x + 2) \times 3x$$

$$M = (-5x - 1)^2$$

$$J = (3x + 2)(5 - x)$$

$$N = -(x - 1)(x + 1)$$

$$K = (2 + x)^2$$

Tableau 41 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $H=2x(x-2)$

	G_1	G_2	G_3
$H = 2x(x - 2)$	$H = 2x(x - 2)$ $= 2x^2 - 4$ $= 6x$	$H = 2x(x - 2)$ $= 2x^2 - 4x$	$H = 2x(x - 2)$ $= 3x - 4x$ $= -1x$

Le groupe 2 donne la réponse correcte : $H = 2x^2 - 4x$.

Le groupe 1 a bien commencé, mais n'obtient pas la réponse correcte.

Le groupe 3 fait un défaut dans la distributivité.

Les difficultés qu'éprouvent les élèves dans le développement d'un produit de sommes algébriques dont un facteur est un monôme sont dues à un défaut dans la distributivité et à la considération du signe " - " comme opératoire.

Tableau 42 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $I=(-4x+2) \times 3x$

	G_1	G_2	G_3
I $= (-4x + 2) \times 3x$	$I = (-4x + 2) \times 3x$ $= -12x^2 + 6x$	$I = (-4x + 2) \times 3x$ $= -8x \times 3x$ $= -5x$	$I = (-4x + 2) \times 3x$ $= -6x \times 3x$ $= -18x$

Le groupe 1 donne la réponse correcte.

Le groupe 2 multiplie les termes du premier facteur en mettant en avant la priorité de l'opération entre parenthèses.

Le groupe 3 considère l'addition comme opératoire.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item I que les élèves considèrent le signe " + " comme opératoire.

Tableau 43 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $J=(3x+2)(5-x)$

	G_1	G_2	G_3
$J = (3x + 2)(5 - x)$	$J = (3x + 2)(5 - x)$ $= 15x - 3x^2 + 10$ $- 2x$ $= 3x^2 - 15x - 2x$ $+ 10$ $= 3x^2 - 13x + 10$	$J = (3x + 2)(5 - x)$ $= 15x - 3x + 10 - 2x$ $= 12x - 2x + 10$ $= 10x + 10$	Sans réponse

Le groupe 1 a bien commencé le développement, mais n'obtient pas la réponse correcte.

Le groupe 2 ne maîtrise pas la propriété $ax^n \times bx^m = (a \times b)x^{n+m}$.

Le groupe 3 ne propose pas de réponse.

Les réponses proposées à l'item J montrent que certains élèves éprouvent des difficultés à appliquer correctement la propriété $ax^n \times bx^m = (a \times b)x^{n+m}$. D'autres ne maîtrisent pas la propriété de commutativité.

Tableau 44 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $K=(2 + x)^2$

	G_1	G_2	G_3
$K = (2 + x)^2$	$K = (2 + x)^2$ $= 4 + 4x + x^2$	$K = (2 + x)^2$ $= x^2 + 4$	$K = (2 + x)^2$ $= x^2 + 4$ $= 4x^2 \text{ ou } x^2 4$

Le groupe 1 propose la réponse correcte.

Les groupes 2 et 3 donnent des réponses relevant de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$. Les élèves considèrent le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes, en extrapolant les contextes d'application de la propriété de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

L'analyse des réponses à l'expression K montre que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application de la propriété

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Tableau 45 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $L = (x - 3)^2$

	G_1	G_2	G_3
$L = (x - 3)^2$	$L = (x - 3)^2$ $= x^2 - 6x + 9$	$L = (x - 3)^2$ $= x^2 - 9$	$L = (x - 3)^2$ $= (x - 3)(x - 3)$ $= x^2 + 9$ $= 9x^2$

Le groupe 1 propose la réponse correcte.

Le groupe 2 donne une réponse relevant de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

Les groupe 3 applique bien la propriété de puissance en transformant le carré de la somme en produit de deux facteurs, mais fait une mauvaise identification des termes, puis considère l'addition comme opératoire.

Il ressort des réponses proposées par les élèves à l'item L que ces derniers éprouvent des difficultés relevant de la mauvaise identification des termes des identités remarquables et de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

Tableau 46 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $M = (-5x - 1)^2$

	G_1	G_2	G_3
$M = (-5x - 1)^2$	$M = (-5x - 1)^2$ $= 25x^2 + 1$	$M = (-5x - 1)^2$ $= (-5x - 1)(-5x - 1)$ $= 10x + 5x + 5 + 1$ $= 15x + 6$	$M = (-5x - 1)^2$ $= (-5x - 1)(-5x - 1)$ $= +25x + 1$ $= +26x$

Aucun des trois groupes ne donne la réponse correcte.

Le groupe 1 propose une réponse relevant de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

Le groupe 2 donne une réponse relevant d'un défaut dans la distributivité.

Le groupe 3 fait une mauvaise identification des termes.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item M que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application des propriétés de puissance, d'un défaut de la distributivité et de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

Tableau 47 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $N = -(x-1)(x+1)$

	G_1	G_2	G_3
$N = -(x - 1)(x + 1)$	$N = -(x - 1)(x + 1)$ $= x^2 - 1$	$N = -(x - 1)(x + 1)$ $= -x^2 - 1$	Sans réponse

Les groupes 1 et 2 proposent des réponses relevant de l'utilisation du signe " - " devant un produit de sommes algébriques comme n'indiquant pas l'opposé du produit. Cela les amène à ne pas identifier correctement les signes des monômes obtenus après développement.

Le groupe 3 ne propose pas de réponse.

Les réponses proposées à l'item N montrent que les élèves éprouvent des difficultés à développer un produit de sommes algébriques précédé du signe " - ".

7.3. Evaluation du dispositif (post-test)

7.3.1. Analyse *a posteriori* des réponses des élèves ayant été soumis au dispositif (groupe expérimental)

7.3.1.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " et du signe " - "

Exercice 1

Réduis les expressions suivantes :

$$A = 5 + (x - 3)$$

$$B = 5 - (x + 3)$$

$$C = 3 - (x - (5 + x))$$

Tableau 48 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $A=5+(x-3)$ des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_1A_1: A = x + 2$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	2E4GE ¹¹ , 3E4GE, 4E4GE, 5E4GE, 7E4GE, 8E4GE, 9E4GE	1E4GE, 6E4GE,	
Effectif	07	02	00
Fréquence	78 %	22 %	00 %

Les résultats que nous obtenons montrent que plus de la moitié des élèves, soit 78 %, donnent la réponse correcte.

22 % des élèves donnent des réponses autres que celle correcte. Toutefois, signalons que tous les deux élèves qui ont donné des réponses, autres que celle correcte, ont bien commencé la réduction de l'expression $A = 5 + (x - 3)$ en écrivant $A = 5 + (x - 3) = 5 + x - 3$.

Cela montre que la plupart des élèves auxquels nous avons soumis le dispositif savent que les expressions $A = 5 + (x - 3)$ et $5 + x - 3$ ont la même dénotation. Ainsi, ces élèves maîtrisent la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + ". C'est la suite de la réduction de l'expression $A = 5 + (x - 3)$ après application de la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + " qui cause des difficultés à certains élèves.

Les élèves 1E4GE et 6E4GE considèrent les signes " + " et " - " comme opératoires.

Pour l'item A, à travers ces réponses, les élèves comprennent bien la règle de suppression des parenthèses précédées du signe " + ". Cependant certains élèves, après avoir bien appliqué la règle, ont des difficultés à bien finaliser la réduction pour arriver à la réponse correcte. Certains élèves considèrent les signes " + " et " - " comme opératoires. D'autres changent les signes des termes en leur opposé lors du regroupement des termes en faisant un mauvais usage de la commutativité.

¹¹ E4GE signifie élève de 4^{ème} du groupe expérimental

Tableau 49 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $B=5-(x+3)$ des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_1B_1: B = 2 - x$	$E_1B_2: B = 8 - x$	$E_1B_3: B = 5x - 15$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1E4GE, 3E4GE, 5E4GE, 7E4GE, 8E4GE	6E4GE	2E4GE	4E4GE, 9E4GE	
Effectif	05	01	01	02	00
Fréquence	56 %	11 %	11 %	22 %	00 %

56 % des élèves donnent la réponse correcte (réponse $B = 2 - x$).

L'élève 6E4GE donne la réponse $B = 8 - x$. Cet élève considère le signe " - " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme.

L'élève 2E4GE fait un glissement de la distributivité (réponse $B = 5x - 15$) en distribuant la constante 5 à l'un des termes de la somme $x + 3$ délimitée par les parenthèses.

22 % des élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces réponses, l'élève 9E4GE considère le signe " - " devant la somme comme marque de l'opposé seulement du premier terme de la somme. L'élève 4E4GE change les signes des termes en leur opposé lors du regroupement des termes en faisant un mauvais usage de la commutativité.

Pour l'item B, il ressort de l'analyse que certains élèves font un glissement de la distributivité. D'autres ont des difficultés à interpréter le signe " - " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé de cette somme. D'autres encore considèrent la soustraction comme opératoire et font un mauvais usage de la commutativité, lors du regroupement des termes.

Tableau 50 : Distribution des élèves à l'expression $C=3-(x-(5+x))$ des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_1C_1: C = 8$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	8E4GE, 7E4GE, 9E4GE	1E4GE, 2E4GE, 3E4GE, 4E4GE, 5E4GE, 6E4GE	
Effectif	03	06	00
Fréquence	33 %	67 %	00 %

Pour cet item, 33 % des élèves donnent la réponse correcte.

67 % des élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses relèvent du glissement de la distributivité, de la considération du signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme et de l'addition comme opérateur.

À partir des différentes réponses à l'item C, il en ressort que certains élèves font un glissement du contexte d'application de distributivité en transformant une somme en un produit de facteurs. De plus, ils ont de la peine à interpréter le statut du signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme l'opposé de cette somme.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 1

L'analyse des réponses des élèves du groupe expérimental à cet exercice nous a permis de relever les éléments suivants :

- le glissement de la distributivité : les élèves font un glissement de la distributivité en généralisant le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique ;
- les statuts des signes " + " et " – " : les élèves utilisent d'addition et la soustraction comme opérateurs, c'est-à-dire, pour eux, la présence de ces signes indique qu'ils doivent effectuer les opérations et obtenir un résultat. De plus, ils ne considèrent pas le signe " – " devant la somme comme marque de l'opposé de la somme ;
- la non maîtrise de la propriété de commutativité.

7.3.1.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables

Exercice 2

Donne les différentes formes des identités remarquables, identifie celle qui correspond à chacune des expressions suivantes, puis développe ces expressions en utilisant ces identités.

$$D = (4x - 3)^2 ;$$

$$E = (2x + 9)(2x - 9);$$

$$F = (11x + 2)^2 ;$$

$$G = (-7x + 2)^2.$$

Tableau 51 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $D=(4x - 3)^2$ des activités du post-test, groupe expérimental.

	$E_2D_1: D$ $= 16x^2 - 24x + 9$	$E_2D_2: D$ $= 16x^2 - 9$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	2E4GE, 3E4GE, 5E4GE, 6E4GE, 7E4GE	8E4GE	1E4GE, 4E4GE	9E4GE
Effectif	05	01	02	01
Fréquence	56 %	11 %	22 %	11 %

5 élèves donnent la réponse correcte.

L'élève 8E4GE donne la réponse $D = 16x^2 - 9$. Cet élève considère le carré d'une différence de termes comme la différence de leur carré, en extrapolant le contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

2 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses relèvent de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

L'élève 9E4GE ne propose pas de réponse à l'item.

Il ressort des réponses proposées par les élèves à l'item D que ces derniers éprouvent des difficultés relevant de la mauvaise identification des termes des identités remarquables et de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

Tableau 52 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $E=(2x+9)(2x-9)$ des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_2E_1: E = 4x^2 - 81$	$E_2E_2: E = 4x - 81$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1E4GE, 2E4GE, 5E4GE	4E4GE	3E4GE, 6E4GE, 7E4GE, 8E4GE, 9E4GE	
Effectif	05	01	03	00
Fréquence	56 %	11 %	33 %	00 %

5 des élèves donnent la réponse correcte.

L'élève 4E4GE donne une réponse relevant de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$. En effet, dans le calcul de puissances dont la base est numérico-littérale, cet élève n'arrive pas à distribuer l'exposant au nombre et à la lettre : il le distribue seulement au nombre.

3 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses relèvent essentiellement de la mauvaise identification des termes des identités remarquables et de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

Les réponses à l'item E montrent que quelques élèves éprouvent des difficultés relevant de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ et de la mauvaise identification des termes des identités.

Tableau 53 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $F=(11x + 2)^2$ des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_2F_1: F$ $= 121x^2$ $+ 44x + 4$	$E_2F_3: F$ $= 121x^2$ $+ 4$	$E_2F_4: F$ $= 121x$ $+ 44x + 4$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	2E4GE, 4E4GE, 7E4GE, 8E4GE	5E4GE	3E4GE	1E4GE, 6E4GE	9E4GE
Effectif	04	01	01	02	01
Fréquence	44 %	11 %	11 %	22 %	11 %

44 % des élèves donnent la réponse correcte.

L'élève 5E4GE considère le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes.

L'élève 3E4GE donne une réponse relevant de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

22 % des élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces autres réponses, la plupart relève de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

L'analyse des réponses à l'item F montre que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application des propriétés de puissance, de la non-

maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ et de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

Tableau 54 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $G = (-7x + 2)^2$ des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_2G_1: G$ $= 49x^2 - 28x + 4$	$E_2G_5: G$ $= 49x^2 + 4$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	2E4GE, 7E4GE	5E4GE	1E4GE, 3E4GE, 4E4GE, 6E4GE, 8E4GE	9E4GE
Effectif	02	01	05	01
Fréquence	22 %	11 %	56 %	11 %

2 élèves donnent la réponse correcte.

L'élève 5E4GE donne une réponse de la catégorie *généralisation du contexte d'application de la propriété* $(ab)^n = a^n b^n$.

5 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. La plupart de ces réponses s'expliquent par la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

L'élève 9E4GE ne propose pas de réponse.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item G que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$ et de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 2

L'analyse des réponses des élèves du groupe expérimental à l'exercice 2 nous a permis de relever les éléments suivants :

- le contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$: les élèves généralisent le contexte d'application de cette propriété ;
- l'identification des termes des identités remarquables : dans le développement des identités remarquables, les élèves font une mauvaise identification des termes ;

- la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$: dans le calcul de puissances dont la base est numérico-littérale, les élèves n'arrivent pas à distribuer l'exposant au nombre et à la lettre : ils le distribuent soit à la lettre, soit au nombre.

7.3.1.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques

Exercice 3

Développe et réduis les expressions suivantes. L'ordonnement après développement et réduction n'est pas important :

$$H = -3x(x^2 - 2)$$

$$I = (9a + b) \times 2$$

$$J = -(2x - 3)(2x + 3)$$

$$K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$$

Tableau 55 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $H = -3x(x^2 - 2)$ des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_3H_1: H$ $= -3x^3 + 6x$	$E_3H_2: H$ $= -3x + x^2 - 2$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1E4GE, 3E4GE, 4E4GE, 7E4GE, 8E4GE	6E4GE	2E4GE, 9E4GE	5E4GE
Effectif	05	01	02	01
Fréquence	56 %	11 %	22 %	11 %

5 élèves donnent la réponse correcte.

L'élève 6E4GE transforme un produit de deux sommes en somme de ces sommes (réponse $H = -3x + x^2 - 2$).

L'élève 5E4GE ne propose pas de réponse.

2 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Deux de ces réponses s'expliquent par un défaut dans la distributivité.

Les difficultés qu'éprouvent les élèves, dans le développement de l'item H, produit de sommes algébriques dont un facteur est un monôme, sont dues à un défaut dans la distributivité.

Tableau 56 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $I=(9a+b)\times 2$ des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_3I_1: I = 18a + 2b$	$E_3I_2: I = 9a + 2b$	$E_3I_3: I = 18a + b$	Sans réponse
Elèves	2E4GE, 3E4GE, 4E4GE, 7E4GE, 8E4GE	6E4GE, 9E4GE	1E4GE	
Effectif	05	02	01	00
Fréquence	56 %	22 %	11 %	00 %

56 % des élèves donnent la réponse correcte.

2 élèves (6E4GE, 9E4GE) proposent une réponse de la catégorie *défaut dans la distributivité* (réponse $I = 9a + 2b$).

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item I que les difficultés des élèves relèvent d'un défaut dans la distributivité.

Tableau 57 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $J=-(2x-3)(2x+3)$ des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_3J_1: J = -4x^2 + 9$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1E4GE, 2E4GE, 4E4GE, 5E4GE	3E4GE, 6E4GE, 7E4GE, 8E4GE	9E4GE
Effectif	04	04	01
Fréquence	44 %	44 %	11 %

44 % des élèves donnent la réponse correcte.

4 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses relèvent essentiellement de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

Présentons deux productions parmi les trois :

- l'élève 7E4GE écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= -(4x^2 - 6x - 6x - 9) \\ &= 4x^2 + 6x + 6x - 9 \\ &= 4x^2 + 12x - 9 \end{aligned}$$

- l'élève 3E4GE écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= -4x + 6x - 6x - 9 \\ &= -4x - 6x + 6x + 9 \\ &= -2x + 6x + 9 \\ &= -8x + 9 \end{aligned}$$

Les réponses proposées à l'item J montrent que les élèves éprouvent des difficultés à considérer le signe " – " devant un produit de sommes algébriques comme indiquant l'opposé de la somme et à identifier des termes des identités remarquables.

Tableau 58 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$

des activités du post-test, groupe expérimental

	$E_3K_1: K = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E4GE	1E4GE, 2E4GE, 4E4GE, 5E4GE, 6E4GE, 7E4GE, 8E4GE, 9E4GE	
Effectif	01	08	00
Fréquence	11 %	89 %	00 %

Un seul élève donne la réponse correcte.

8 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces réponses, certaines relèvent de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$. D'autres relèvent d'un défaut dans la distributivité et de la transformation d'un produit de deux sommes en somme de ces sommes. Présentons quelques-unes de ces réponses :

- l'élève 8E4GE écrit :

$$\begin{aligned} K &= (a - 1)(a^2 - 2a + 1) \\ &= a - 1 \times a^2 - 2a + 1 \\ &= a - 1 \times 1 = a - 1 \end{aligned}$$

Cet élève supprime les parenthèses en multipliant les facteurs.

– l'élève 8E4GE écrit :

$$\begin{aligned}K &= (a - 1)(a^2 - 2a + 1) \\&= K = a - 1 + a^2 - 2a + 1 \\&= a^1 + a^2 - 2a + 1 \\&= a^3 - 2a \\&= a^1 - 1\end{aligned}$$

Cet élève transforme un produit de deux sommes en somme des facteurs.

Les réponses des élèves à l'item K montrent que les élèves éprouvent des difficultés à développer un produit de sommes algébriques dont un facteur est un binôme et l'autre, un trinôme. Ces difficultés relèvent de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$, d'un défaut dans la distributivité, de la transformation d'un produit de deux sommes en somme des facteurs.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 3

L'analyse des réponses des élèves du groupe expérimental à l'exercice 3 nous a permis de relever les éléments suivants :

- la distributivité : les élèves font un défaut dans la distributivité ;
- le statut du signe " – " : les élèves ne considèrent pas le signe " – " devant un produit de sommes algébriques comme marque de l'opposé du produit ;
- la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$;
- le glissement des règles de réduction du produit de monômes : lors du développement d'un produit de sommes algébriques, les élèves suppriment les parenthèses en multipliant les facteurs.

7.3.2. Analyse a posteriori des réponses des élèves de la classe de 4^{ème} n'ayant pas été soumis au dispositif (groupe témoin)

7.3.2.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " et du signe " – "

Exercice 1

Réduis les expressions suivantes :

$$A = 5 + (x - 3)$$

$$B = 5 - (x + 3)$$

$$C = 3 - (x - (5 + x))$$

Tableau 59 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $A=5+(x-3)$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_1A_1: A$ $= x + 2$	$E_1A_2: A$ $= 2x$	$E_1A_3: A$ $= 5x - 15$	$E_1A_4: A$ $= 5x - 15$ $= -10x$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1E4GT ¹² , 8E4GT		3E4GT, 9E4GT, 9E4GT	2E4GT	4E4GT, 5E4GT, 6E4GT	
Effectif	02	00	03	01	03	00
Fréquence	22 %	00 %	33 %	11 %	33 %	00 %

Les résultats que nous obtenons montrent que 2 élèves, soit 22 %, donnent la réponse correcte.

3 élèves donnent une réponse de la catégorie *glissement de la distributivité* (réponse $A = 5x - 15$).

¹² E4GT signifie élève de 4^{ème} du groupe témoin

3 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses relèvent d'un défaut dans la distributivité et de l'utilisation du signe " – " comme opérateur. Présentons les productions de ces élèves :

- l'élève 6E4GT écrit :

$$\begin{aligned}A &= 5 + (x - 3) \\&= 5 + (-3)x \\&= -8x\end{aligned}$$

- l'élève 4E4GT écrit:

$$\begin{aligned}A &= 5 + (x - 3) \\&= 5x + 15 \\&= 9x\end{aligned}$$

- l'élève 5E4GT écrit:

$$\begin{aligned}A &= 5 + (x - 3) \\&= 5x + 15\end{aligned}$$

Les difficultés que nous relevons, à travers les réponses à l'item A, montrent que les élèves considèrent le signe " – " comme opérateur. De plus, ils font un glissement de la distributivité.

Tableau 60 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $B=5-(x+3)$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_1B_1: B$ $= 2 - x$	$E_1B_2: B$ $= 8 - x$	$E_1B_3: B$ $= -5x + 15$	$E_1B_4: B$ $= 5x - 15$	$E_1B_5: B$ $= 5x + 15$	$E_1B_6: B$ $= -5x - 15$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves		8E4GT		5E4GT	3E4GT	7E4GT, 9E4GT	1E4GT, 2E4GT, 4E4GT, 6E4GT	
Effectif	00	01	00	01	01	02	04	00
Fréquence	00 %	11 %	22 %	11 %	11 %	22 %	44 %	00 %

Aucun élève parmi les 9 ne donne la réponse correcte.

L'élève 1E4GT donne la réponse $B = 8 - x$. Cet élève considère le signe " - " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme.

Les élèves 5E4GE, 3E4GT, 7E4GT et 9E4GT donnent des réponses relevant d'un glissement de la distributivité (réponses $B = 5x - 15$, $B = 5x + 15$, $B = -5x - 15$) en généralisant le contexte d'application de la distributivité.

4 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ces 4 réponses, l'élève 6E4GT considère le signe " – " devant la somme comme marque de l'opposé seulement du premier terme de la somme. Les trois autres élèves donnent des réponses relevant de la généralisation du contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique.

Pour l'item B, il ressort de l'analyse des réponses que certains élèves font un glissement de la distributivité. D'autres considèrent le signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme marque de l'opposé du premier terme.

Tableau 61 : Distribution des élèves à l'expression $C=3-(x-(5+x))$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_1C_1: C = 8$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves		1E4GT, 2E4GT, 3E4GT, 4E4GT, 5E4GT, 6E4GT, 7E4GT, 8E4GT, 9E4GT	
Effectif	00	09	00
Fréquence	00 %	100 %	00 %

Pour cet item, aucun élève parmi les 9 ne donne la réponse correcte.

Tous les élèves donnent les réponses de la catégorie *autres réponses*. Parmi ceux-ci, les élèves 2E4GT, 3E4GT, 4E4GT, 5E4GT, 7E4GT, 9E4GT donnent des réponses relevant d'un glissement de la distributivité. Les élèves 1E4GT, 6E4GT et 8E4GT donnent la réponse relevant de la considération du signe " – " devant les parenthèses, dans l'expression $C = 3 - (x - (5 + x))$, comme l'opposé du premier terme de la somme délimitée par les parenthèses. Présentons quelques-unes de ces réponses :

– l'élève 9E4GT écrit :

$$C = 3 - (x - (5 + x))$$

$$= -15x + 3x^2$$

– l'élève 5E4GT écrit :

$$C = 3 - (x - (5 + x))$$

$$= 3x + 15 - 32$$

– l'élève 1E4GT écrit :

$$\begin{aligned}
C &= 3 - (x - (5 + x)) \\
&= 3 - x - 5 + x \\
&= 3 - (-5) + x + x \\
&= 8 + x
\end{aligned}$$

Il ressort des différentes réponses à l'item C que les élèves font un glissement du contexte d'application de la distributivité en transformant une somme en un produit de facteurs. De plus, ils ont de la peine à interpréter le statut du signe " – " devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses comme l'opposé de cette somme.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 1

L'analyse des réponses des élèves du groupe témoin à l'exercice 1 nous a permis de relever les éléments suivants :

- glissement de la distributivité : les élèves font un glissement de la distributivité en généralisant le contexte d'application de la distributivité au calcul d'une somme algébrique.
- les statuts des signes " – " et " + " : les élèves considèrent le signe " + " comme opératoire et le signe " – " devant la somme comme l'opposé du premier terme de la somme.

7.3.2.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables

Exercice 2

Donne les différentes formes des identités remarquables, identifie celle qui correspond à chacune des expressions suivantes, puis développe ces expressions en utilisant ces identités.

$$D = (4x - 3)^2 ;$$

$$E = (2x + 9)(2x - 9);$$

$$F = (11x + 2)^2 ;$$

$$G = (-7x + 2)^2.$$

Tableau 62 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $D = (4x - 3)^2$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_2D_1: D = 16x^2 - 24x + 9$	$E_2D_2: D = 16x^2 - 9$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E4GT, 4E4GT, 7E4GT	5E4GT, 9E4GT	1E4GT, 2E4GT, 8E4GT	6E4GT
Effectif	03	02	03	01
Fréquence	33 %	22 %	33 %	11 %

3 élèves donnent la réponse correcte.

2 élèves (5E4GT, 9E4GT) donnent une réponse relevant de la catégorie *généralisation du contexte d'application de la propriété* $(ab)^n = a^n b^n$.

3 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses relèvent de la mauvaise identification des termes des identités remarquables, de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$ et de la non maîtrise de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$ (c'est-à-dire pour calculer une puissance à base numérico-littérale, certains élèves distribuent l'exposant soit au nombre, soit à la lettre). Présentons quelques-unes des réponses relevant de la mauvaise identification des termes des identités remarquables :

– l'élève 8E4GT écrit :

$$\begin{aligned}
 D &= (4x - 3)^2 \\
 &= 4x \times 4x - 4x \times 3 - 3 \times 4x + 3 \times 3 \\
 &= 16x - 12x - 12x + 9 \\
 &= 4x - 12x + 9
 \end{aligned}$$

– l'élève 1E4GT écrit :

$$\begin{aligned}
 D &= (4x - 3)^2 \\
 &= 8x^2 - 12x - 12x + 9 \\
 &= 8x^2 - 24x + 9
 \end{aligned}$$

Il ressort des réponses proposées par les élèves à l'item D que ces derniers éprouvent des difficultés relevant de la mauvaise identification des termes des identités remarquables, de

la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$ et de la non maîtrise de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.

Tableau 63 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $E=(2x+9)(2x-9)$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_2E_1: E = 4x^2 - 81$	$E_2E_2: E = 4x - 81$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1E4GT, 7E4GT	3E4GT, 9E4GT	2E4GT, 4E4GT, 5E4GT, 8E4GT,	6E4GT
Effectif	02	02	04	01
Fréquence	22 %	22 %	44 %	11 %

2 des élèves donnent la réponse correcte.

Les élèves 3E4GT, 9E4G donnent une réponse relevant de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

5 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses relèvent essentiellement de la mauvaise identification des termes des identités remarquables et de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

Les réponses à l'item E montrent que quelques élèves éprouvent des difficultés relevant de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ et de la mauvaise identification des termes des identités.

Tableau 64 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $F=(11x + 2)^2$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_2F_1: F$ $= 121x^2 + 44x + 4$	$E_2F_3: F$ $= 11x^2 + 4$	$E_2F_4: F$ $= 121x + 44x + 4$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1E4GT, 4E4GT, 7E4GT	5E4GT, 9E4GT	8E4GT	2E4GT	6E4GT, 3E4GT
Effectif	03	02	01	01	02
Fréquence	33 %	22 %	11 %	11 %	22 %

3 élèves donnent la réponse correcte.

Les élèves 5E4GT, 9E4G donnent une réponse de la catégorie *généralisation du contexte d'application de la propriété* $(ab)^n = a^n b^n$.

L'élève 8E4GT donne une réponse de la catégorie *non-maîtrise de la propriété* $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

L'analyse des réponses à l'item F montre que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$ et de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

Tableau 65 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $G=(-7x + 2)^2$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_2G_1: G$ $= 49x^2 - 28x + 4$	$E_2G_5: G$ $= 49x + 4$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	3E4GT, 7E4GT	9E4GT	1E4GT, 2E4GT, 4E4GT, 5E4GT, 8E4GT	6E4GT
Effectif	02	01	05	01
Fréquence	22 %	11 %	57 %	11 %

2 élèves donnent la réponse correcte.

L'élève 9E4GT donne une réponse de la catégorie *généralisation du contexte d'application de la propriété* $(ab)^n = a^n b^n$.

5 élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. La plupart de ces réponses s'expliquent par la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

L'élève 6E4GT ne propose pas de réponse.

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item G que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$ et de la mauvaise identification des termes des identités remarquables.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 2

Il ressort de l'analyse des réponses des élèves du groupe témoin à l'exercice 2 les éléments suivants :

- la généralisation du contexte d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$;
- la mauvaise identification des termes des identités remarquables ;
- la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

7.3.2.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques

Exercice 3

Développe et réduis les expressions suivantes. L'ordonnement après développement et réduction n'est pas important :

$$H = -3x(x^2 - 2)$$

$$I = (9a + b) \times 2$$

$$J = -(2x - 3)(2x + 3)$$

$$K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$$

Tableau 66 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $H = -3x(x^2 - 2)$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_3H_1: H$ $= -3x^3 + 6x$	$E_3H_2: H$ $= -3x^3 - 6x$	$E_3H_4: H$ $= -3x^3 + 6$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	7E4GT, 9E4GT	4E4GT, 5E4GT	1E4GT	2E4GT, 3E4GT, 6E4GT	8E4GT
Effectif	02	02	01	03	01
Fréquence	22 %	22 %	11 %	33 %	11 %

2 élèves donnent la réponse correcte.

3 élèves donnent des réponses de la catégorie *défaut dans la distributivité* (réponses $H = -3x^3 - 6x$, $H = -3x^3 + 6$).

3 autres élèves donnent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Les réponses données par chacun de ces élèves relèvent d'un défaut dans la distributivité, de la considération de l'addition comme opératoire et de la non maîtrise de la propriété de la propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$. En effet :

– l'élève 2E4GT écrit :

$$\begin{aligned} H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^4 + 6x \end{aligned}$$

– l'élève 3E4GT écrit :

$$\begin{aligned} H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^3 + 6x \\ &= 3x^4 \end{aligned}$$

– l'élève 6E4GT écrit :

$$\begin{aligned} H &= -3x(x^2 - 2) \\ &= -3x^3 - 2 \end{aligned}$$

Les difficultés qu'éprouvent les élèves dans le développement de l'item H relèvent d'un défaut dans la distributivité, de la considération de l'addition comme opératoire et de la non maîtrise de la propriété de la propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Tableau 67 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $I=(9a+b) \times 2$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_3I_1: I$ $= 18a$ $+ 2b$	$E_3I_2: I$ $= 9a$ $+ 2b$	$E_3I_3: I$ $= 18ab$	$E_3I_6: I = 20ab$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves	1E4GT, 7E4GT, 9E4GT	6E4GT, 8E4GT	5E4GT	2E4GT, 3E4GT		4E4GT
Effectif	03	02	01	02	00	01
Fréquence	33 %	22 %	11 %	22 %	00 %	11 %

3 élèves donnent la réponse correcte.

2 élèves (6E4GT, 8E4GT) proposent une réponse de la catégorie *défaut dans la distributivité* (réponse $I = 9a + 2b$).

2 autres élèves (2E4GT, 3E4GT) commencent bien le développement, mais par la suite, considèrent l'addition comme opératoire. L'élève 5E4GT donne, également, une réponse relevant de la considération de l'addition comme opératoire (réponse $I = 18ab$).

Il ressort de l'analyse des réponses à l'item I que les difficultés des élèves relèvent de l'utilisation du signe " + " comme opératoire et d'un défaut dans la distributivité.

Tableau 68 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $J = -(2x-3)(2x+3)$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_3J_1: J$ $= -4x^2 + 9$	$E_3J_2: J$ $= -4x^2 - 9$	$E_3J_3: J$ $= 4x^2 - 9$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves		1E4GT, 2E4GT, 3E4GT	7E4GT, 8E4GT	4E4GT, 5E4GT, 6E4GT, 9E4GT	
Effectif	00	03	02	04	00
Fréquence	00 %	33 %	22 %	44 %	00 %

Aucun élève ne donne la réponse correcte.

5 élèves donnent les réponses relevant de la considération du signe " – " devant un produit de somme algébrique comme n'indiquant pas l'opposé du produit (réponses $J = -4x^2 - 9$; $J = 4x^2 - 9$).

4 élèves proposent des réponses de la catégorie *autres réponses*. Ces réponses relèvent de la mauvaise identification des termes des identités remarquables, de la considération des signes " – " et " + " comme opératoires, de l'utilisation du signe " – " devant un produit de somme algébrique comme n'indiquant pas l'opposé du produit et de la non maîtrise de la propriété de la propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$. Présentons ces réponses :

- l'élève 5E4GT écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= -1x \times 5x \\ &= -6x^2 \end{aligned}$$

- l'élève 6E4GT écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= 2x \times 2x - 3 \times 2x + (-3) \times (+3) \\ &= -4x^2 - 6x - 9 \end{aligned}$$

- l'élève 4E4GT écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= -4x^2 - 6x + 6x + 9 \\ &= -10x^3 + 15x \end{aligned}$$

- l'élève 9E4GT écrit :

$$\begin{aligned} J &= -(2x - 3)(2x + 3) \\ &= (-2x)^2 - 3^2 \\ &= 4x - 9 \end{aligned}$$

Les réponses proposées à l'item J montrent que élèves éprouvent des difficultés à considérer le signe " – " devant un produit de sommes algébriques comme indiquant l'opposé de la somme, à identifier des termes des identités remarquables, à appliquer la propriété $a^n \times a^m = a^{n+m}$ dans un produit de puissances à bases numérico-littérales.

Tableau 69 : Distribution des réponses des élèves à l'expression $K=(a - 1)(a^2 - 2a + 1)$ des activités du post-test, groupe témoin

	$E_3K_1: K = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$	Autres réponses	Sans réponse
Elèves		1E4GT, 2E4GT, 4E4GT, 6E4GT, 8E4GT, 9E4GT	3E4GT, 5E4GT, 7E4GT
Effectif	00	06	03
Fréquence	00 %	67 %	33 %

Aucun élève ne donne la réponse correcte. Parmi ces réponses, autres que celle correcte, certaines relèvent de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$. D'autres relèvent d'un défaut dans la distributivité.

L'élève 1E4GT a bien développé en appliquant correctement la distributivité, mais n'a pas pu obtenir la réponse correcte. Il écrit :

$$\begin{aligned} K &= (a - 1)(a^2 - 2a + 1) \\ &= a^3 - 2a^2 + 1a - 1a^2 + 2a - 1 \\ &= -4a^2 - 1a^3 - 1 \\ &= -3a^5 - 1 \end{aligned}$$

Les réponses des élèves à l'item K montrent que les élèves éprouvent des difficultés relevant de la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$ et d'un défaut dans la distributivité.

Conclusion de l'analyse de l'exercice 3

L'analyse des réponses des élèves du groupe témoin à l'exercice 3 nous a permis de relever les éléments suivants :

- la distributivité : les élèves font un défaut dans la distributivité ;
- les statuts des signes " + " et " – " : les élèves considèrent le signe " + " comme opératoire. De même, ils ne considèrent pas le signe " – " devant un produit de sommes algébriques comme marque de l'opposé du produit ;
- la non-maîtrise de la propriété $ax^n \times bx^n = (a \times b)x^{n+n}$.

7.3.3. Croisement de l'analyse des réponses des élèves du groupe expérimental avec ceux du groupe témoin

Il ressort du croisement des réponses des élèves du groupe expérimental avec ceux du groupe témoin que les difficultés apparaissent moins chez les élèves du groupe expérimental que chez ceux du groupe témoin. Le tableau suivant présente la distribution des pourcentages des réponses correctes, selon les groupes et selon les items.

Tableau 70 : Tableau de distribution des pourcentages des réponses correctes du groupe expérimental et du groupe témoin, selon les items

Expressions	Pourcentage de réponses correctes du groupe expérimental	Pourcentage de réponses correctes du groupe témoin
$A = 5 + (x - 3)$	78 %	22 %
$B = 5 - (x + 3)$	56 %	00 %
$C = 3 - (x - (5 + x))$	33 %	00 %
$D = (4x - 3)^2$	56 %	33 %
$E = (2x + 9)(2x - 9)$	56 %	22 %
$F = (11x + 2)^2$	44 %	33 %
$G = (-7x + 2)^2$	22 %	22 %
$H = -3x(x^2 - 2)$	56 %	22 %
$I = (9a + b) \times 2$	56 %	22 %
$J = -(2x - 3)(2x + 3)$	44 %	00 %
$K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$	11 %	00 %

Il résulte de ce tableau que le dispositif proposé améliore l'apprentissage du développement et de la réduction des polynômes. Cela révèle que le poids du dispositif n'est pas négligeable.

Conclusion du chapitre 7

Dans ce chapitre, nous avons, à partir des obstacles identifiés à l'issue de l'analyse des manuels, des pratiques de classe, des productions des élèves et des entretiens faits avec les élèves, proposé un dispositif en vue du franchissement de ceux-ci. Ce dispositif comporte deux parties : la première partie est constituée des activités préparatoires et des éléments de cours. La deuxième partie est constituée de deux activités de mise en situation des élèves. Il est soumis à 9 élèves de 4^{ème}. Ce dispositif est évalué auprès de ces 9 élèves et 9 autres élèves (groupe témoin).

Les résultats que nous avons obtenus, à l'issue de notre dispositif, montrent que les obstacles sont moins fréquents chez les élèves du groupe expérimental que chez ceux du groupe témoin. Cela suggère que l'impact du dispositif sur l'apprentissage du développement et de la réduction n'est pas négligeable.

Conclusion générale et perspectives

Notre étude a pour objectif l'identification des obstacles didactiques et épistémologiques qui émergent chez les collégiens au cours des activités de développement et de réduction des polynômes à une variable ou à une indéterminée et à proposer un dispositif en vue de leur dépassement.

Pour mener ce travail, nous avons tout d'abord mené une étude épistémologique du concept de polynôme. Cette étude nous a permis de décrire l'apport de l'analyse épistémologique à notre travail. Nous avons, ensuite, fait la revue des travaux antérieurs. Pour cette étude, nous avons utilisé, comme cadres théoriques, la théorie anthropologique du didactique et la théorie des champs conceptuels. Ces cadres nous ont permis de mieux comprendre les obstacles qui émergent au cours des activités de développement et de réduction. De plus, nous avons analysé les chapitres portant sur le calcul littéral de deux manuels de la collection Inter-Africaine de Mathématiques dont un de la classe de 4^{ème} et un autre de la classe de 3^{ème}. Nous avons, également, analysé les pratiques de classes en lien avec le développement et la réduction des polynômes. Tout cela constitue la première partie de notre étude.

Dans la seconde partie, nous avons présenté la méthodologie élaborée et ayant permis de conduire notre recherche. Ainsi, nous avons présenté et justifié notre lieu d'étude, notre population et corpus d'étude, les outils de collecte des données et la méthode de traitement et d'analyse des données. Dans les chapitres 6 et 7, nous rendons compte des expérimentations que nous avons conduites auprès des élèves de 4^{ème} et 3^{ème}. La première expérimentation nous a permis d'identifier les obstacles épistémologiques et didactiques qui émergent chez les élèves de 4^{ème} et de 3^{ème} au cours des activités de développement et de réduction des polynômes. La seconde expérimentation a consisté à tester le dispositif de franchissement des obstacles que nous avons élaboré.

Analyse épistémologique

L'étude épistémologique du concept de polynôme nous a permis de reconnaître le concept de polynôme comme un concept de nature épistémologique, de prendre en compte la complexité du symbolisme mathématique, notamment la variation des statuts des objets mathématiques. De plus, elle nous a permis de comprendre les difficultés d'enseignement ou d'apprentissage du calcul littéral qui ont été repérées et de proposer un dispositif de

franchissement de celles-ci. De même, elle a permis de prendre en compte la dimension sémiotique du travail algébrique, dans nos analyses, en faisant un lien entre les énoncés des propriétés en langage naturel et mixte.

Quelques résultats antérieurs

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la revue de littérature. Ce chapitre nous a permis de situer nos recherches par rapport aux travaux antérieurs. Ces travaux font ressortir les difficultés que les élèves rencontrent dans l'apprentissage du calcul algébrique. Parmi les raisons qui expliquent ces difficultés, nous avons relevé la difficile négociation de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre (Hassayoune, 2021) ; les discontinuités ou fausses continuités entre l'arithmétique et l'algèbre (Almahmoud, 2019) ; l'algèbre qui se construit en rupture avec l'arithmétique, et la transition doit être négociée dès l'école primaire (Grugeon-Allys et Pilet, 2017) ; les différents statuts de la lettre et les obstacles liés à l'introduction de l'algèbre (Equipe de recherche UMons, 2019) ; la variété de contextes, les multiples sens et interprétations, les ambiguïtés de dénomination de la lettre qui rendent complexe l'apprentissage (Tremblay, Polotskaia et Passaro (2021); l'importance de l'objectif-obstacle pour la construction des séquences d'enseignement orientées par le franchissement d'un obstacle (Astolfi, 1992).

Cadres théoriques

La théorie anthropologique du didactique et la transposition didactique nous ont permis, d'une part, de décrire les rapports institutionnels et personnels aux activités de développement et de réduction. De même, elles nous ont permis de regarder comment s'organise l'élaboration des savoirs liés au développement et à la réduction des polynômes. La praxéologie a permis d'analyser l'activité de l'élève et l'activité mathématique de l'enseignant.

Étant donné que les éléments de la TAD ne permettent pas de percevoir les opérations cognitives qui sont effectuées par les élèves, en situation de résolution des problèmes, la TCC nous a permis de prendre en compte des opérations cognitives des élèves dans les activités de développement et de réduction. La TCC nous a permis, également, de construire des familles de situations et d'identifier des schèmes qui sont mis en œuvre par les élèves, puis d'apporter de remédiation, à travers le dispositif de franchissement. Nous considérons que pour l'enseignement et l'apprentissage du calcul littéral, il est nécessaire de faire usage de la praxéologie, de faire une transposition prenant en compte la variabilité des statuts des objets mathématiques, d'utiliser les schèmes efficaces.

Comment les concepts de développement et de réduction sont abordés dans les manuels et en situation de classe ?

À la suite de trois chapitres, nous avons mené une analyse des manuels de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques de 4^{ème} et de 3^{ème}, et des pratiques de classe relatives aux activités de développement et de réduction des polynômes. L'atteinte de notre objectif général nécessite, en plus de l'analyse épistémologique, l'analyse des manuels et des pratiques de classe. Le but de l'analyse des manuels et des pratiques de classe était de mettre en lumière des éléments de transposition didactique mis en place dans les manuels et dans les classes, pour ce qui concerne les concepts de développement et de réduction. Ces analyses ont permis de relever les éléments suivants :

- le langage utilisé dans la grande majorité des énoncés des propriétés est le langage mixte, c'est-à-dire, un mélange de langage naturel et de langage formel. Les règles sont exclusivement données en langage naturel ;
- l'égalité est utilisée dans les énoncés comme identité, comme équivalence ou comme annonce de résultat ;
- les lettres sont utilisées comme marque place ou comme variable ;
- le signe " + " est utilisé comme opérateur, comme prédicatoire, comme opérateur non évalué ;
- le signe " – " est utilisé comme opérateur, comme prédicatoire, comme opérateur non évalué ou comme marque de l'opposé d'un nombre. Cependant, le statut du signe " – " comme marque de l'opposé d'un nombre n'est pas explicité ;
- la distributivité est admise dans les manuels et dans les pratiques de classe. Cependant, elle est contextualisée ;
- il y a une mise en avant de l'aspect structural des expressions algébriques dans les énoncés ;
- le type de parenthèses utilisées : dans les manuels tout comme dans les pratiques de classe, les parenthèses utilisées dans les énoncés sont les parenthèses simples. Les parenthèses imbriquées sont absentes dans les énoncés ;
- les enseignants interprètent et exploitent rarement les erreurs des élèves. De plus, ils n'introduisent jamais un concept par erreur et discutent rarement avec les élèves sur leurs erreurs.

Ces analyses ont permis d'apporter des éléments de réponse à l'une de nos questions de recherche que nous rappelons : *Quelle transposition didactique est faite du point de vue des manuels et en situations de classe ?*

Les expérimentations

La deuxième partie de notre travail rend compte des expérimentations que nous avons conduites en classes de 4^{ème} et de 3^{ème}. Les exercices proposés, à travers les questionnaires, ont été traités par les élèves de 4^{ème} et de 3^{ème}, lors de la première expérimentation. De même, nous avons fait des entretiens d'explicitation avec les élèves. Ces entretiens ont permis aux élèves de faire une verbalisation précise du déroulement de leur conduite. Cette première expérimentation participe, également, à l'atteinte de notre objectif général. Elle nous a permis de relever des erreurs commises par les élèves. Ces erreurs nous ont permis d'identifier les obstacles épistémologiques et didactiques qui les sous-tendent. Il s'agit de :

- **Obstacles épistémologiques**

- La représentation réductrice de l'égalité comme une annonce de résultat dans le calcul numérique et du signe " $+$ " placé entre deux nombres comme signe d'une opération amène les élèves à réduire le résultat à un nombre en additionnant des monômes ou en assemblant des monômes non semblables. Dans les calculs numériques, notamment les calculs dans $\mathbb{N}, \mathbb{D}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, le résultat est nombre, alors que dans le calcul algébrique, le résultat est un terme ou encore une expression littérale.
- La représentation réductrice du signe " $-$ " comme prédicatoire dans le calcul numérique amène les élèves à considérer le signe " $-$ " devant une somme algébrique comme celui du premier terme de la somme. Dans le calcul numérique, le signe " $-$ " devant un nombre est prédicatoire (marque d'un nombre négatif) alors que dans le calcul algébrique, devant une somme algébrique délimitée par les parenthèses ou devant un produit de sommes algébriques, le signe " $-$ " est la marque de l'opposé de cette somme.
- La représentation que les élèves ont du signe " $\times$ " comme marque de multiplication des facteurs amène ces derniers à multiplier les facteurs dans un produit de sommes algébriques. Cette propriété qui consiste à multiplier les facteurs n'est valable que dans la réduction des produits des monômes. Dans la réduction d'un produit de monômes, les facteurs sont des monômes, alors que

dans le développement d'un produit de sommes algébriques, un facteur au moins est une somme algébrique délimitée par des parenthèses.

- **Obstacles didactiques**

- Le fait que les auteurs des manuels ou les enseignants mettent en avant l'aspect structural des expressions dans le calcul algébrique, notamment dans la présentation des produits remarquables, amène, par exemple, les élèves à considérer le carré d'une somme de termes comme la somme des carrés de ces termes ou le carré de la différence de termes comme la différence de leur carré, en extrapolant les contextes d'application de la propriété $(ab)^n = a^n b^n$.
- Le fait de présenter, dans les manuels et en situation de classe, les propriétés dans un langage essentiellement mixte amène les élèves à ne pas bien comprendre les structures des expressions algébriques. Ils confondent les termes aux facteurs.
- Le fait que les élèves associent la suppression des parenthèses à l'application de la distributivité les amène à distribuer un monôme aux termes d'une somme délimitée par des parenthèses, dans une somme algébrique. Autrement dit, la suppression des parenthèses indique l'application de la distributivité.

La deuxième expérimentation a consisté à élaborer un dispositif de franchissement des obstacles épistémologiques et didactiques identifiés à l'issue de la première expérimentation. Notre objectif-obstacle était les obstacles identifiés. Le dispositif élaboré et expérimenté auprès des élèves de 4^{ème} (groupe expérimental et groupe témoin) est axé sur les aspects sémantiques et syntaxiques du calcul littéral. L'analyse des réponses des élèves du groupe expérimental et ceux du groupe témoin montre que les obstacles sont moins fréquents chez les élèves du groupe expérimental que chez ceux du groupe témoin. Cela suggère que l'impact du dispositif sur l'apprentissage du calcul littéral, plus spécifiquement du développement et de la réduction n'est pas négligeable. Cela confirme notre hypothèse principale que nous rappelons : *Une transposition didactique des concepts de développement et de réduction des polynômes qui s'appuie sur la notion d'objectif-obstacle et un travail de clarification sur l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique, dans le traitement des expressions algébriques, peuvent contribuer à dépasser les obstacles identifiés chez les élèves.*

Les résultats de notre étude viennent ainsi élargir le champ de recherche en didactique de l'algèbre, notamment dans le domaine du calcul algébrique, avec l'identification des obstacles didactiques et épistémologiques, et proposition d'un dispositif de franchissement de ces obstacles.

Il convient de noter qu'une partie de notre étude a fait l'objet d'un article intitulé *Etude de la transposition didactique du calcul littéral dans les manuels de Mathématiques* et publié à la revue LIENS (Revue de la Faculté Des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation), N°5, décembre 2023.

Perspectives de recherche

Les résultats obtenus à l'issue de notre étude nous invitent à approfondir notre travail sur les actions didactiques, dans l'optique de faciliter l'enseignement et l'apprentissage du calcul littéral, notamment le développement et la réduction des polynômes. Nous proposons quelques pistes de travail d'approfondissement.

Approfondissement du dispositif de franchissement proposé

Les résultats de nos expérimentations, en lien avec les analyses des manuels et des pratiques de classe nous ont permis d'identifier des obstacles et des situations qui pourraient être porteuses pour la prise en charge de ces obstacles. Il s'agit du dispositif didactique proposé en vue d'aider les élèves à franchir les obstacles épistémologiques et didactiques qui émergent chez les collégiens au cours de l'effectuation du calcul littéral.

Nous pensons expérimenter le dispositif auprès des élèves d'autres établissements, au Tchad et ailleurs, pour comparer les résultats des expérimentations avec ceux que nous avons obtenus dans le cadre de cette thèse. Comme notre échantillon de classes et d'élèves n'est pas représentatif, étendre l'expérimentation à d'autres classes et élèves, nous permettra d'établir des hypothèses sur lesquelles des études comparatives peuvent être faites.

Formation des enseignants

Les résultats de nos expérimentations et des travaux antérieurs montrent la nécessité de formation des enseignants à l'enseignement du calcul littéral. Nous espérons que certains de nos résultats profiteront à la formation des enseignants de Mathématiques. De même, nous pourrions nous servir de certains extraits vidéo issus de nos expérimentations pour la formation des enseignants. Il convient de former les enseignants sur comment négocier la transition arithmétique-algèbre et sur comment exploiter les erreurs des élèves dans les pratiques de classes. Les travaux de Almahmoud (2019) évoqués dans la revue de littérature montrent la

nécessité du traitement des erreurs des élèves dans la formation des enseignants de mathématiques du second degré.

Travail sur la structure des expressions et les invariants opératoires

Nous pensons travailler davantage avec les élèves sur la structure des expressions algébriques puisque que ces derniers éprouvent des difficultés à reconnaître la structure des expressions, à identifier les termes d'une somme ou les facteurs d'un produit.

De plus, nous allons continuer à pousser nos investigations dans l'optique d'amener les élèves à extérioriser davantage les théorèmes-en-acte et les concepts-en-actes qu'ils mettent en œuvre dans les activités de développement et de réduction des expressions algébriques.

Références bibliographiques

- Abdeljaouad, M. (2002). Le manuscrit mathématique de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité, Actes du 7e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes, Marrakech, 30-31.
- Abou Raad, N. (2006). *Le calcul algébrique en France et au Liban étude comparée de l'enseignement de la factorisation et des erreurs des élèves*. Thèse de doctorat, Université de Provence - Aix-Marseille I
- Abou Raad, N. & Mercier, A. (2009). Etude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(2)155–188. Repéré à <https://revue-rdm.com/2009/etude-comparee-de-l-enseignement>
- Acard, I. (2017). *L'erreur pour enseigner*. Paris : université de Paris Sorbonne
- Adihou, A. (2011). Enseignement-Apprentissage des mathématiques et souffrance à l'école. Canada : Université du Québec à Rimouski. *Les Collectifs du Cirp*, 2, 90-102
- Aguila, P., Louquet, P. & Moulia, L. (1988). *Les mathématiques en quatrième*. Paris : Armand Colin.
- Almahmoud, M. (2019). *Le traitement des erreurs des élèves dans la formation des enseignants des mathématiques du second degré*. Thèse de doctorat, Université de Nantes.
- Aloulén, M. & Pinto-Amoedo, S. (2009). *La démonstration en algèbre: ruptures et continuités dans la transition entre le collège et le lycée*. France : Université de Lion. Repréré à http://emf.unige.ch/files/4114/5330/0411/EMF2009_SP3_PresentationJeunesEnseignants.pdf.
- Alves, C., Coppe, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Dametto, S., Piolti, C. & Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *REPERES-IREM*, 92,9-30.
- APMEP (2005). 5 fois 3 est-il égal à 3×5 ? Une question qui n'a l'air de rien, qui partage les enseignants et qui nécessite plusieurs points de vue. *Bulletin Vert*, 457.
- Andriantsoa, F. (2019). *Etudes des origines des erreurs des élèves en classe de quatrième sur la factorisation*. Mémoire de Master : Université d'Antananarivo, Ecole Normale Supérieure.

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique en mathématiques. *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 5 (2), 1-22
- Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (2001). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking. *Mathematics Education Library* , 61-81).
- Astolfi, J.-P. (1992). Apprendre par franchissement d'obstacles ? *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle*, 5, 103-116
- Astolfi, J.-P & Peterfaivi, B. (1993). Obstacles et construction de situations didactiques en sciences expérimentales. *ASTER*, (16), 103-141
- Astolfi, J.-P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner*. Paris : ESF. Repéré à <http://francois.muller.free.fr/diversifier/ERREUR.htm>.
- Astolfi, J.-P., Darot, E., Ginsburger-vogel, Y. & Toussain, J. (2008). *Mots-clés de la didactique des sciences*, 121-129.
- Audren, H., Cecconi, S., Le Goff, E. & Lehours, J.-M. (2007). *Maths 4^e*. Italie : Bréal.
- Bachelard, G. (1947). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Librairie philosophique J. VRIN
- Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de doctorat : Université Paris 7 – Denis Diderot.
- Baumann, P. (2005). *Histoire des mathématiques*. Université Louis Pasteur : UFR de mathématique et d'informatique.
- Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). « *Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic* ». Dordrecht: Kluwer Academic.
- Béchain, F., Boubila, J., Meyer, H., Ouéhi, D., Renault, A., & Lafon, G. (1996). 3^e *MATHEMATIQUES*. EDICEF : Collection Inter-Africaine de Mathématiques
- Bélangier, M. (1990-1991). Les erreurs en arithmétique, un siècle de présomption américaine. *Petit x*, (26), 49-71.
- Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue Québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 38-69
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *RDM*, 19(1), 77 - 124

- Bodin, A., Bourdon, M., Boutin, B., Chemla, S., Chen, G., Romon, P., Bayer-Fluckiger, E. Chabloz, P. & Lara, T. (2016). *Cours de mathématiques première année*. Université de Lille 1 et Unisciel .
- Boissinotte, C. (2015). *Une petite histoire de la didactique de l'algèbre*. Essai, Université du Québec à Montréal.
- Booth, L. & Chelsea, C. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, (5), 5-17. Repéré à <https://gpc-maths.org/data/documents/booth5x1.pdf>.
- Brousseau, G. (1983). « Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques ». *RDM*, 4(2).
- Brousseau, G. (1989). *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques*. France : Université Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. *La pensée sauvage*, pp.115-160
- Brousseau, G. (2000). Les erreurs des élèves en mathématiques : étude dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Laboratoire DAEST université bordeaux 2, « *petit x* » (57), 5-30
- Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques : étude dans le cadre de la théorie des situations didactiques. *Petit x*, (57), pp. 5-30
- Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Education et didactique*, 5-1.
- Candy, J. (2020). *Etude de la transposition didactique du concept d'idéal : écologie des savoirs et problématique de l'entrée dans la pensée structuraliste, en France et en Suisse romande*. Thèse de doctorat, université de Montpellier.
- Caverni, J.-P. (1988). La verbalisation comme source d'observables pour l'étude du fonctionnement cognitif. *Presse Universitaire de Grenoble*, 253- 73.
- Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves. Séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris : France.
- Chaachoua, H. (2014). *Le rôle de l'analyse des manuels dans la théorie anthropologique du didactique*. Université Grenoble Alpes : CNRS
- Charnay, R. & Mante, M. (1991). De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes ... «*Grand N*» (48), 37-64.
- Charnay, R. & Mante, M. (2016). *Analyse a priori d'un exercice*. Burkina Faso : IFADEM

- Charnay, R. (2003). L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant. *Math-École*, 209, 19-26
- Charnay, R. (2018). Traitement des erreurs en mathématiques et stratégies de différenciation. *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle*, (5), 87-101
- Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné. *La Pensée Sauvage Grenoble*, 76, 89-91
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221- 266
- Clambadal, L. (1981). *Dictionnaire de Mathématiques*. Paris : Hachette.
- Clerc, J.-B., Minder, P. & Roduit, G. (2006). *La transposition didactique*. Repéré à <https://lyonelkaufmann.ch/histoire/MHS31Docs/Seance1/TranspositionDidactique.pdf>
- Clivaz, L., Duperret, J., Lescuyer, H. et Vassant, M. (2015). Dépasser les obstacles en situation d'apprentissage : projet d'un dispositif de formation continue pour formateurs en formation professionnelle. *Revue FPEQ*, (18), 101-123
- CIEAEM. (2013). L'erreur dans l'apprentissage des Mathématiques. *Petit x*, (93)
- Collis, K. (1975). A study of concrete and formal operations in school mathematics : A Piagetian viewpoint. *ACER Research series*, 95 (9).
- Constatin, C. (2021). La substitution, points de vue écologique et sémiolinguistique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 26, 157 - 194.
- Coppé, S. & Grugeon, B. (2009). Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ? Colloque de la CORFEM, France. ffhalshs-00959612f
- Coppé, S. & Grugeon-Allys, G. (2010). *Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ?* IUFM de Lyon et d'Amiens : Université Lyon 1 et Université Jules Verne de Picardie
- Coulange, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*. France : Université de Bordeaux.
- Croset, M.C & Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 36(2), 161-196.
- Davis, R. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *The*

- journal of Children's Mathematical Behaviour*, 1(3), 7-35.
- Deledicq, A. & Missenard, C. (2004). *Encyclopédie Kangourou des mathématiques au collège*. Paris : ACL-Les éditions du kangourou.
- Demonty, I. & Vlassis, J. (2016). Evaluer les connaissances pour enseigner l'algèbre élémentaire : élaboration d'un outil diagnostique. *Evaluer. Journal international de Recherche en Education et Formation*, 2(2), 45-62.
- Dorier, J.-L. (2014). Aperçu de l'histoire de la Didactique des Mathématiques Francophone. *revista do programa de pós-graduação em educação matemática da universidade federal de mato grosso do sul (UFMS)*, (7), 2359 – 2842.
- Doris, J. (2012). L'interprétation de la lettre en algèbre par des élèves du secondaire au Québec. *Canadian Journal for New Scholars in Education*, 4(1), 1-12
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7(2), 5-32. La Pensée Sauvage
- Drouhard, J.-P. (1992). *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris-Diderot.
- Duperret, J.-C. & Fenice, J.-C. (1999). *L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège*. Reims : IREM
- Duroux, A. (1982 *La valeur*). *absolue : difficultés majeures pour une notion mineure*. Publications de l'IREM de Bordeaux.
- Duval, R. (1988). Écarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruences. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg*, 1, 7-25
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.
- Duval, R. (2006). La substitution, points de vue écologique et sémiolinguistique. *Relime*, numéro spécial, 45-81
- Ferraton, G. & Chaachoua, H. (2013). *Rapport institutionnel au calcul littéral au collège. Etat des lieux et perspectives*. Grenoble: Université Joseph Fourier- MeTAH
- Flückiger, A. (2006). Formation au travail de l'erreur et didactique des mathématiques. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften*, 28 (1), 43-61
- Gibel, P. & Ennassef, M. (2012). Analyse en théorie des situations didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 17, 87 – 116.

- Grugeon, B. (2000). *Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives*. Université de Paris 7 : Equipe DIDIREM
- Grugeon-Allys, B. & Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre ? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106–130.
- Guiet-Silvain, J. (2011). Education à la santé : convergences ou émiettements ? *Carrefours de l'Education, C.R.D.P. d'Amiens*, 11-13.
- Hassayoune, S. (2021). Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 2, 3-48.
- Hauchecorne, B. (2014). *Les mots et les maths*. Dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique.
- Jonnaert, P. (1996). Apprentissages mathématiques en situation : une perspective constructiviste. *Revue des sciences de l'éducation*, 22(2), 233–252. Repérer à <https://doi.org/10.7202/031879ar>
- Jullien, V., Bras, A., Le Goff, A., & Penninckx, J. (1988). *Mathématiques 4^e*. Paris : Magnard.
- Kieran, C. (1992). The learning of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *The Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*, 390-419
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra in the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lister (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 707-762
- Kirshner, D. (1985). Linguistic and Mathematical Competence. *For the Learning of Mathematics*, 5(2), 31-33.
- Kiwan-Zacka, M. (2018). *Des pratiques d'enseignement de l'algèbre élémentaire aux apprentissages des élèves : cas des expressions algébriques en EB7 (5^e) et EB8 (4^e) au Liban*. Thèse de doctorat, Université Saint Joseph.
- Konstantinos Grivopoulos (2014). Obstacles épistémologiques et didactiques dans l'enseignement du spin électronique. *Presses universitaires de Franche-Comté*, 161-176
- Kouki, R. (2006). Equations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x* 71, 7-28.
- Kuzniak, A. (2004). *La théorie des situations didactiques de Brousseau*. Paris VII et Orléans-Tours : DIDIREM et IUFM.
- Labelle, H. (2008). *Les pratiques pédagogiques favorisant le développement de la pensée algébrique*. Mémoire de Master : Université du Québec.

- Lacroix, J.-F. (2006). *Comparaison de la réussite des élèves dans la réduction d'expressions algébriques et numériques contenant des puissances*. Mémoire de Master. Québec : Université de Montréal.
- Lalina, C. (Ed.) et al. (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Larrea, X. (2016). *Introduction à l'algèbre par des situations-problèmes*. Mémoire de Master : Haute école pédagogique du Valais.
- Legrand, P. (1928). Une histoire de notations. *APMEP*, 520, 457-520
- Le Petit Larousse illustré. (2016). Paris : Larousse
- Lopez Murillo, S. (2008). *Etude d'une pratique ordinaire face à un obstacle didactique : La correction en classe de mathématiques dans le cas de la fonction réciproque*. Thèse de doctorat université de Toulouse III – Paul Sabatier
- Marget, B. & Rampp, A. (2012). *Les vérifications dans le calcul littéral en classes de quatrième et de seconde*. Repéré à <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes/emf-2012>.
- Martinand, J.-L. (1986). *Connaître et transformer la matière*. Berne : Peter Lang.
- Mercier, A. & Buty, C. (2004). Évaluer et comprendre les effets de l'enseignement sur les apprentissages des élèves : problématiques et méthodes en didactique des mathématiques et des sciences. *Revue française de pédagogie*, 148, 47-59
- Mimché, H. (2012). *Approches qualitatives des faits de population : collecte et analyse des données qualitatives*. Yaoundé : IFORD.
- Ministère de l'Éducation Nationale (2008). *Programmes réactualisés de l'enseignement moyen*. République du Tchad
- Ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. (2016). *Mathématiques : Nombres et calculs. Eduscol : informer et accompagner les professionnels de l'éducation*. Repéré à eduscol.education.gouv.fr/ressources 2016.
- Mouhaya, R. (2007). *Etude des pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau de l'école moyenne (11-15) dans le cas de l'algèbre en France et au Liban*. Thèse de Doctorat, Université Lumière - Lyon II.
- Neagoy, M., Rivier, C., Scheibling-Sève, C., Sensevy, G. & Thevenot, C. (2022). *De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématiques*. Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse : CESEN.
- Njomgang Ngansop, J. (2013). *Enseigner les concepts de logique dans l'espace*

- mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun.* Thèse de doctorat, Université de Lyon.
- Normandeau, M.-P. (2010). *Erreurs arithmétiques des élèves et interventions de l'enseignant débutant : une analyse didactique en termes de schèmes.* Thèse de doctorat, Université de Montréal.
- Numa-Bocage, L. (2014). De l'observation des pratiques enseignantes. *Recherche en éducation*, 19, 3-6.
- Orange, C. (2010). Situations forcées, recherches didactiques et développement du métier enseignant. *Recherches en éducation*. Repéré à <http://journals.openedition.org/ree/8864>
- Oudrhiri, M. (2016). Quelques exemples d'obstacles pour la construction du savoir en mathématiques. *ATTADRISS : Revue spécialisée à comité de lecture de la faculté des Sciences de l'Education*, (8), Nouvelle série.
- Ouédraogo-Haddad, G., Beghain, F., Ouéhi, D., Renault, A., Traoré, S., Boubila, J. & Keyer, H. (1995). 4^e *MATHEMATIQUES*. EDiCEF : Collection Inter-Africaine de Mathématiques
- Perrin-Glorian, M.-J. et Moreira Baltar Bellemain, P. (2016). *L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. Mato Grosso do Sul-Brasil.* Repéré à http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/oficinas/CONFERÊNCIA%203%20-%20FRANCÊS.pdf
- Peterfalvi, B. (1997). Les obstacles et leur prise en compte didactique. *ASTER*, (24).
- Quintin, J-J. (2013). *Analyse de données qualitatives : outils de production de données qualitatives et méthodes d'analyse.* France : Université Lumière Lyon 2.
- Rabih El Mouhayar. (2007). *Etude des pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau de l'école moyenne (11-15) dans le cas de l'algèbre en France et au Liban.* Thèse de doctorat : Université lumière Lyon 2 et l'université libanaise
- Rabit, E. (2008). *Etude des pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau de l'école moyenne (11-15) ans dans le cas de l'algèbre en France et au Liban.* Thèse de doctorat, universités de Lyon et de Liban.
- Radford, L. (1992). Diphante et l'algèbre pré-symbolique. *Bulletin AMQ*.
- Radford, L.(2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, 26, 257-277.
- Régis Mili, I. (2007). *Identification d'obstacles et de difficultés inhérents à l'apprentissage de*

- l'algèbre abstraite*. Mémoire de Master : Université de Montréal.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en didactique des Mathématiques*, 2(182), 139-190.
- Rouquette, M-L & Guimelli, C. (1979). *Méthodologie expérimentale des sciences humaines*. Paris : Nathan
- Sarrazy, B. (2005). *Questions à la théorie anthropologique du didactique du point de vue de la théorie des situations et de l'anthropologie wittgensteinienne*. Université Victor Segalen Bordeaux 2 : DAEST
- Schwartzman, S. (1977). Helping students understand the distributive property. *The Mathematics Teacher*, 70(7), 594–595.
- Serfati, M. (1998). Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique. *Revue d'histoire des sciences*, 51(2-3), 237-290. Repéré à https://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1998_num_51_2_1323
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36. DOI : [10.1007/BF00302715](https://doi.org/10.1007/BF00302715)
- Simon, P. (2013). *Appropriation des représentations visuelles par une enseignante dans une séquence d'enseignement portant sur la factorisation en algèbre*. Mémoire de Maîtrise : Université du Québec.
- Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base*. Thèse de doctorat, université de Laval.
- Squalli, H. & Cotnoir, G. (2015). Analyse des scénarios d'introduction de l'algèbre dans trois nouveaux manuels québécois du premier cycle du secondaire. *Matematika Didaktika aux CRMEF*, 1, 20.
- Such, S., Borel, J.-C. (1988). *Mathématiques 4^e*. Paris: Bordas.
- Terracher, P., Vinrich, G., & Delord, R. (1989). *Mathématiques 3^e*. Paris Hachette.
- Tonnelle, J. (1979). *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA, Université d'Aix-Marseille II, Université de Bordeaux I, France.
- Tremblay, S., Polotskaia, E. & Passaro, V. (2021). Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 2, 78-109.
- Université de Mons (2019). *Le statut de la lettre*. Repéré à <file:///D:/Ma%20th%C3%A8se/Documents%20types%20par%20chapitre/Etude%20%C3%A9pist%C3%A9mologique/fiche-statutlettre-1.pdf>
- Vendeira-Marechal, C. (2012). Ce que l'analyse a priori peut révéler des pratiques

- enseignantes. *Grand N*, (89), p. 103–129.
- Vergnaud, G. (1989). *Cours : La théorie des champs conceptuel*. Université de Rennes : Département de mathématiques et informatique.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(12), 133-170.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 102(3), 133-170.
- Vergnaud, V. (2002). Piaget visité par la didactique. *Revue de l'Association pour la Recherche sur les sciences de la Cognition*, 33, 107-123
- Vermersch, P. (1991). *L'entretien d'explicitation dans la formation expérientielle organisée*. Paris : La Documentation française.
- Woillez, D. (1993). *La force de la règle*. DEA, Université de Bordeaux I

Annexes

Annexe 1 : Autorisation de recherche

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES DE
L'EDUCATION

DEPARTEMENT DE DIDACTIQUE DES
DISCIPLINES



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF EDUCATION

DEPARTMENT OF DIDACTICS

Le Doyen
The Dean

N° SPF /21/UY1/FSE/VDSSE

AUTORISATION DE RECHERCHE

Je soussigné, Professeur **BELA Cyrille Bienvenu**, Doyen de la Faculté des Sciences de l'Education de l'Université de Yaoundé I, certifie que l'étudiant **NODJINAIBEYE Frédéric** matricule **16X3335**, est inscrit en **Doctorat/Ph.D** à la Faculté des Sciences de l'Education, Département de **Didactique des Disciplines**, spécialité **DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**, option : **RECHERCHE FONDAMENTALE**.

L'intéressé doit effectuer des travaux de recherche en vue de l'obtention de son diplôme de **Doctorat/Ph.D**. Il travaille en codirection avec le **Professeur LAWRENCE DIFFO LAMBO** et le **Docteur SADJA KAM JUDITH**. Son sujet porte sur : « Etude didactique et épistémologique des obstacles liés au développement et à la réduction des polynômes au collège. Proposition d'un dispositif pour leur franchissement ».

Je vous saurai gré de bien vouloir le recevoir et mettre à sa disposition toutes les informations susceptibles de l'aider dans son travail.

En foi de quoi, cette autorisation de recherche lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit. /-

Fait à Yaoundé, le 29 JUN 2021

Pour Le Doyen et par ordre



Annexe 2 : Formulaire de consentement

Formulaire d'information et de consentement à l'intention des parents d'élèves

Dans le cadre d'un travail de thèse en Didactique des Mathématiques, nous avons fait des expérimentations portant sur le calcul littéral avec des élèves de 4^{ème} et de 3^{ème}, au titre de l'année scolaire 2021-2022. Ces expérimentations nous ont permis d'identifier des difficultés auxquelles les élèves sont confrontés lorsqu'ils font le calcul littéral.

En vue d'aider les élèves à franchir les obstacles didactiques et épistémologiques qui sous-tendent les difficultés auxquelles ces derniers sont confrontés, nous avons, après analyse des productions des élèves, proposé un dispositif de franchissement des obstacles qui sous-tendent ces difficultés. Pour évaluer l'efficacité de ce dispositif, nous allons le tester auprès des élèves de 4^{ème}.

C'est dans cette perspective, que nous venons par la présente, solliciter votre consentement pour que votre enfant le (la) nommé(e)inscrit(e) en classe de 4^{ème}, au titre de l'année scolaire 2022-2023, participe à cette expérimentation. Cette expérimentation se fera en 6 séances de 2 heures, de 14 h à 16 h.

Les données que nous allons recueillir ne seront traitées de manière entièrement confidentielle et utilisées qu'à des fins de recherche. Les résultats seront publiés dans le cadre de notre thèse, des articles scientifiques.

Si vous avez des questions concernant cette recherche, n'hésitez pas à communiquer avec nous aux coordonnées indiquées ci-dessous.

Date : 09 avril 2023

NODJINAIBEYE Frédéric

Doctorant en Didactique des Mathématiques à l'Université de Yaoundé I au Cameroun

Enseignant de Mathématiques, chef de Section Mathématiques au Centre National des Curricula du Tchad.

E-mail : fnodjinaibeye@gmail.com

Tél. : (+235) 66 69 56 76

J'ai lu et compris la lettre. J'ai compris les conditions et les bienfaits de la participation de mon enfant.

- ☐ J'accepte librement que mon enfant.....participe à ce projet de recherche cette expérimentation ;
- ☐ Je ne veux pas que mon enfantparticipe à ce projet de recherche.

Signature du parent ou du tuteur (trice)Date.....

Annexe 3 : Questionnaires (tests)

Questionnaire adressé aux élèves de 4^{ème}

Nom et prénom : _____

Année scolaire : _____

Durée : 90 mn

Exercice 1

Réduis les expressions suivantes :

$$A = 5 + (x - 3)$$

$$B = 5 - (x + 3)$$

$$C = 3 - (x - (5 + x))$$

Exercice 2

Donne les différentes formes des identités remarquables, identifie celle qui correspond à chacune des expressions suivantes, puis développe ces expressions en utilisant ces identités.

$$D = (4x - 3)^2 ;$$

$$E = (2x + 9)(2x - 9) ;$$

$$F = (11x + 2)^2 ;$$

$$G = (-7x + 2)^2$$

Exercice 3

Développe et réduis les expressions suivantes. L'ordonnement après développement et réduction n'est pas important.

$$H = -3x(x^2 - 2)$$

$$I = (9a + b) \times 2$$

$$J = -(2x - 3)(2x + 3)$$

$$K = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)$$

NB : L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée !

Questionnaire adressé aux élèves de 3^{ème}

Nom et prénom : _____

Année scolaire : _____

Durée : 90 mn

Exercice 1

Supprime les parenthèses puis réduis :

$$A = 2x + (x - 3)$$

$$B = \frac{1}{6} - (x - \frac{5}{2})$$

$$C = -5 - (x - (9 - x))$$

Exercice 2

Pour chaque expression suivante, écris l'identité remarquable qui permet de la développer, puis donne la forme réduite.

$$D = (\frac{2}{3}x - 3)^2 ;$$

$$E = (11x - 11)(11x + 11);$$

$$F = (7 + 4x)^2$$

$$G = (-5x - 2)^2$$

Exercice 3

Développe et réduis les expressions suivantes. L'ordonnement après développement et réduction n'est pas important.

$$H = -2x^3(x^3 - 2)$$

$$I = (x + 9y) \times \frac{2}{3}y$$

$$J = -(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$K = (b^2 - 2b + 1)(b - 2)$$

NB : L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée !

Annexe 4 : Grille d'analyse des manuels

Grille d'analyse des manuels

Titre du manuel	Auteur(s)	Collection	Editeur	Année d'édition	Nombre de pages	Numéro de page

Sous-thèmes	
01	Comment les concepts de développement et de réduction sont abordés dans ces manuels ?
02	Quelles sont les difficultés qui peuvent émerger des approches utilisées par les auteurs pour présenter ces concepts ?
03	Les approches utilisées peuvent-elles générer des obstacles chez les apprenants ?
04	Quels sont les différents types de tâches liés aux activités de développement et de réduction des polynômes qui sont proposés dans les manuels ?
05	Quelles sont les techniques et les technologies associées à ces tâches ?

Annexe 5 : Grille d'observation

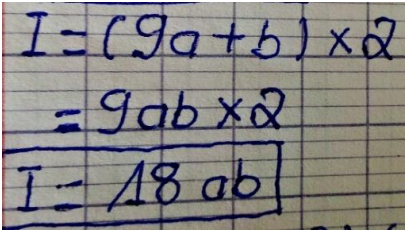
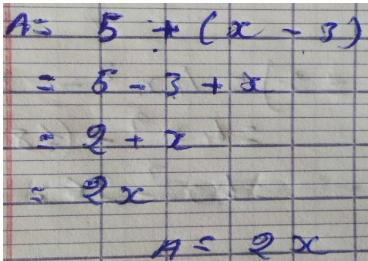
Grille d'observation de la situation d'apprentissage portant sur le calcul littéral en 4^{ème} et en 3^{ème}

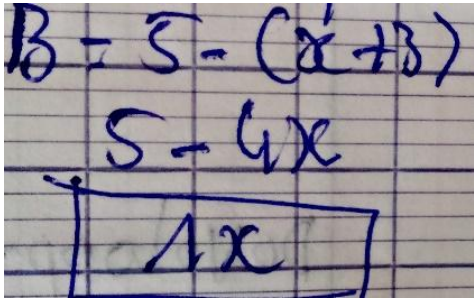
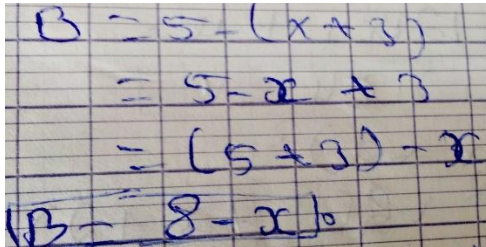
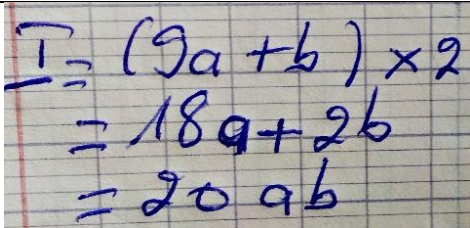
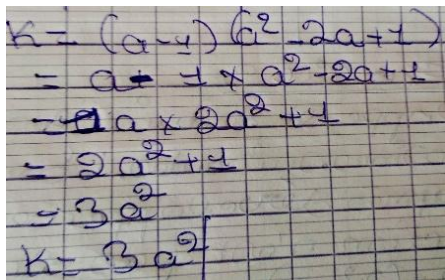
Les observations de la situation d'apprentissage portent sur l'enseignement du calcul littéral en classe de 4^{ème} et 3^{ème}. Elles ont lieu pendant l'année scolaire 2021-2022, en classe de 4^{ème} au troisième trimestre et en classe de 3^{ème} au deuxième trimestre. Ces périodes d'observations sont choisies en fonction des fiches de programmation des enseignants choisis pour notre étude. Le choix des classes de 4^{ème} et de 3^{ème} se justifie par le fait que le calcul littéral est introduit en 4^{ème} et se poursuit en 3^{ème}, comme objet d'enseignement.

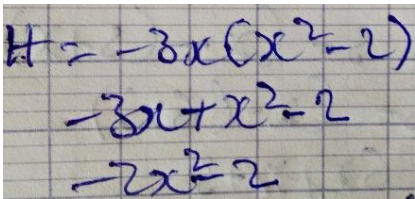
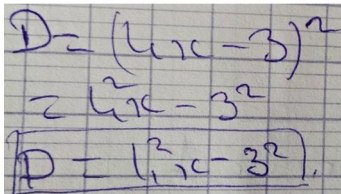
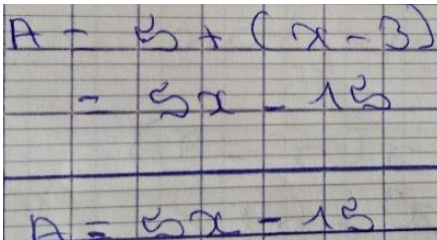
Sous-thèmes

- 1) Comment les concepts de développement et de réduction sont abordés par les enseignants, en situation de classe ?
- 2) Quelles sont les difficultés qui peuvent émerger des approches utilisées par les enseignants pour présenter ces concepts ?
- 3) Les approches utilisées peuvent-elles générer des obstacles chez les apprenants ?
- 4) Quels sont les différents types de tâches liés aux activités de développement et de réduction des polynômes proposés par les enseignants ?
- 5) Quelles sont les techniques et les technologies associées à ces tâches ?
- 6) Les enseignants prennent-ils en charge les erreurs des élèves ?

Annexe 6 : Grille d'analyse de l'entretien d'explicitation

Productions ayant fait l'objet d'explicitation	Explicitations des élèves
 Handwritten work on lined paper showing the expansion of the expression $I = (9a + b) \times 2$. The student first writes $I = (9a + b) \times 2$, then $= 9ab \times 2$, and finally $I = 18ab$ which is boxed.	• 8E4 : J'ai ajouté ce qui est entre parenthèses en faisant $a + b$ qui donne ab. J'ai multiplié $9ab$ par 2, ce qui donne $18ab$. • 9E4 : J'ai calculé $a + b$, ça donne ab, j'ai supprimé les parenthèses en multipliant par 2. • 14E4 : J'ai additionné a et b et j'ai cassé les parenthèses. • 17E4 : J'ai additionné a et b et j'ai multiplié par 2.
 Handwritten work on lined paper showing the simplification of the expression $A = 5 + (x - 3)$. The student writes $A = 5 + (x - 3)$, then $= 5 - 3 + x$, then $= 2 + x$, then $= 2x$, and finally $A = 2x$ which is boxed.	• 20E4 : Après avoir supprimé les parenthèses, j'ai regroupé les inconnues à part et les chiffres à part ; j'ai additionné $2 + x$ qui donne $2x$. • 15E4 : J'ai cassé les parenthèses, j'ai soustrait 5 moins qui donne 2 et $2 + x$ donne $2x$. • 29E4 : J'ai cassé les parenthèses et j'ai ramené x pour additionner les chiffres $5-3$ qui donne 2, $2 + x$ donne $2x$.

	• 5E4 : J'ai additionné $x + 3$, ce qui donne $4x$; j'ai soustrait $5 - 4x$, j'ai trouvé $1x$. • 14E4 : J'ai additionné $3 + x$ qui est égal à $4x$, j'ai ramené le 5; $5 - 4x$ donne $1x$. • 20E4 : J'ai fait $3 + 1$ qui donne $4x$; j'ai fait $5 - 4x$, ce qui donne $1x$.
	• 2E4 : J'ai cassé les parenthèses et j'ai trouvé $5 - x + 3$. J'ai regroupé les termes sans x et j'ai $8 - x$. • 12E4 : J'ai supprimé les parenthèses. J'ai regroupé les termes sans x et j'ai $8 - x$.
	• 52E4 : J'ai pris 2 j'ai multiplié par $9a$ et par b. J'ai trouvé $18a + 2b$, je les ai additionnés pour trouver $20ab$.
	• 1E4 : J'ai cassé les parenthèses et j'ai gardé le signe fois parce que les parenthèses représentent fois • 3E4 : Comme entre parenthèses c'est la multiplication, j'ai cassé les parenthèses et j'ai multiplié les deux

	• 39E4 : J'ai cassé les parenthèses, j'ai ramené les chiffres vers le bas, j'ai additionné $3x$ et x^2 pour trouvé $-2x^2 - 2$ • 10E4 : J'ai cassé la parenthèse et j'ai regroupé les termes en x et les termes sans x. J'ai pris $-3x + x^2$, j'ai additionné : $- \times + = -$, donc j'ai soustrait et j'ai trouvé $-2x^2 - 2$
	• 7E4 : J'ai mis le 2 sur 4 et sur 3. • 25E4 : J'ai partagé 2 à 4 et à 3
	• 11E4 : J'ai développé : 5 fois x qui est égal à $5x$ et 5 fois 3 qui est égal à 15 • 14E4 : J'ai multiplié 5 par x et 5 par 3

Annexe 7 : Contenus des programmes tchadiens de Mathématiques pour les classes de 4^{ème} et 3^{ème}

Classe de Quatrième

Objectifs

L'enseignement des mathématiques en classe de Quatrième doit permettre à l'élève de :

- consolider les savoirs et savoir-faire acquis ;
- enrichir ses connaissances de façon progressive ;
- réinvestir ses acquis dans des circonstances variées ;
- s'initier au raisonnement par des activités numériques et géométriques ;
- résoudre des problèmes concrets en utilisant des équations (mathématisation) ;
- utiliser les instruments de calcul ;
- adopter une démarche expérimentale pour résoudre un problème.

En activités numériques

- organiser et effectuer des calculs numérique et littéral ;
- organiser et traiter des données ;
- représenter les données à l'aide de diagramme ;

En activités géométriques

- acquérir des connaissances sur la configuration dans l'espace et dans le plan ;
- appliquer la notion de plan dans la construction ;
- appliquer les notions de vecteurs dans la projection ;

- utiliser l'outil vecteur dans la résolution des problèmes simples de construction ;
- présenter une figure géométrique avec un vocabulaire approprié ;
- donner une définition explicite et opératoire ;
- formuler correctement les propriétés des figures géométriques.

Contenus

En activités numériques

Arithmétique

- PPCM de deux nombres entiers naturels
- PGCD de deux nombres entiers naturels

Fraction

- Réduction des deux fractions au même dénominateur en utilisant le PPCM des dénominateurs
- Calcul et simplification de la somme ou de la différence (lorsqu'elle est possible) de deux fractions
- Quotient de deux fractions
- Fraction inverse d'une fraction non nulle
- Puissance d'une fraction

Nombres décimaux relatifs

- Écriture sous la forme : $a \cdot 10^n$ ($a \in \mathbb{I}$ et $n \in \mathbb{Z}$)
- Calcul : $a \cdot 10^n \times b \cdot 10^n$

Nombres rationnels

- Écriture
- Ensemble des nombres rationnels
- Somme et différence de deux nombres rationnels
- Produit de deux nombres rationnels
- Inverse de deux nombres rationnels
- Quotient de deux nombres rationnels
- Encadrement (approximations décimales d'un nombre rationnel positif)

Puissances

- Puissances à exposant entier naturel d'un nombre rationnel non nul
- Propriétés

Calcul sur les expressions algébriques

- Développement, réduction
- Factorisation
- Produits remarquables
- Propriétés des puissances des nombres entiers relatifs

Equation - Inéquations

- Équations dans l'ensemble des nombres rationnels du type $ax + b = c$
- Vocabulaire
- Notion d'inéquations du premier degré à une inconnue

En activités géométriques

- Cube et pavé : rappels
- Pyramide : rappels.
- Sphère : vocabulaire, volume, aire.
- Cône : réalisation d'un patron, d'un solide.
- Droites et plans : positions relatives, en s'appuyant sur les solides connus.
- Perspective cavalière : règles élémentaires, représentations de certains solides.
- Distance
- Distance d'un point à une droite ;
- Distance de deux droites parallèles ;
- Axe médian de deux droites parallèles ;
- Caractérisation de la bissectrice d'un angle ;
- Axes de symétries de deux droites sécantes.

Angles : angle au centre, mesure d'un arc de cercle.

Triangles

Droites des milieux : propriété directe et réciproque

Droites particulières : bissectrices, cercle inscrit, hauteurs, orthocentre, médianes, centre de gravité ;

Triangle rectangle : propriété de Pythagore théorème direct et réciproque, relation métrique déduite de l'aire.

Cercles

- Positions relatives d'une droite et d'un cercle
- Tangente en un point d'un cercle
- Tangentes à un cercle passant par un point donné extérieur à ce cercle

Parallélogrammes

- Parallélogrammes et outil vectoriel
- Polygones réguliers

Symétrie orthogonale – symétrie centrale

- Définition d'une application du plan dans le plan
- Tableau de correspondance
- Notation : $f(M) = M'$

Translations

- Programme de construction ;
- Translation et vecteur ;
- Conservation de l'alignement ;
- Conservation des distances ;
- Conservation des mesures d'angles ;
- Conservation de l'orthogonalité ;
- Conservation du parallélisme ;
- Image d'une droite par translation ;
- Image d'un cercle par translation.

Projection

- Définition, vocabulaire ;
- Programme de construction ;
- Projeté du milieu.

Vecteurs

- Vecteur déterminé par sa direction, son sens et sa longueur ;
- Égalité de deux vecteurs ;
- Caractérisation vectorielle d'un parallélogramme ;
- Caractérisations vectorielles du milieu d'un segment ;
- Somme de deux vecteurs ;
- Relation de Chasles ;
- Opposé d'un vecteur ;
- Vecteur nul ;

Repérage

- Repérage sur une droite graduée en liaison avec les approximations décimales d'un nombre rationnel ;
- Repérage dans le plan ;
- Abscisse et ordonnée d'un point dans un repère du plan ;
- Repère orthogonal du plan ;
- Repère orthonormé du plan.

Organisation des données

Statistiques

- Collecte, organisation et traitement de données ;
- Vocabulaire ;
- Fréquences en pourcentage ;
- Moyenne ;
- Représentation des données statistiques par des diagrammes à bandes, à bâtons, circulaires.

Classe de Troisième

Objectifs

L'enseignement des mathématiques en classe de troisième doit permettre à l'élève de :

- Consolider et réinvestir les savoirs et savoir-faire acquis dans les classes antérieures ;
- Utiliser les acquis dans des situations variées par la résolution des problèmes pratiques ;

En activités numériques

L'enseignement des activités numériques en classe de troisième doit permettre à l'élève de :

- Organiser des calculs numériques ;
- Réaliser des calculs numériques ;
- Effectuer les opérations sur les réels ;
- Effectuer des calculs numériques intégrant les activités géométriques ;
- Réaliser les opérations sur les fractions (simplifications) ;
- Résoudre les systèmes d'équations et d'inéquations en utilisant les intervalles ;
- Traduire une situation en problème en utilisant des informations ;
- Appliquer les techniques de mise en équation et de résolution des problèmes courants ;
- Organiser des données en utilisant des tableaux ou des diagrammes.

En activités géométriques

- mesurer et reporter des segments et des angles en utilisant les éléments de dessin ;
- vérifier les propriétés ;
- calculer des mesures de segments, d'angles ;
- calculer des périmètres, des aires, des volumes ;
- observer, lire et coder des figures en utilisant des codages et des informations ;
- expliquer un résultat, une méthode, un processus en utilisant une argumentation ;
- justifier une propriété de figures, reconnaître une configuration de base, construire une figure et démontrer un résultat en utilisant des définitions et des propriétés ;
- observer, décrire et construire des figures en utilisant des instruments de dessin ;
- interpréter et construire une représentation en perspective en utilisant des définitions, des propriétés et des règles.

Contenus

En activités numériques

Nombres réels

- Introduction de l'ensemble $\mathbf{R}$ des réels
- Radicaux : définition, propriétés, comparaison, opérations
- Comparaison de deux nombres réels
- Calculs approchés
- Intervalles dans $\mathbf{R}$
- Encadrement d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient
- Valeur absolue d'un nombre réel : définition, propriétés immédiates

Fonctions-applications

- Définition d'une fonction ;
- Définition d'une application ;
- Composition des applications ;
- Bijection ;
- Application réciproque.

Puissances

- Puissances à exposant entier relatif d'un rationnel, d'un réel
- Propriétés

Monômes - Polynômes

- Calcul littéral
- Notion de monôme : degré, coefficient, variable
- Notion de polynôme : degré
- Addition et multiplication des polynômes
- Fractions rationnelles : ensemble de définition de la fonction associée, simplification
- Problèmes de dénombrement

Équations - Inéquations

- Équations et inéquations du 1er degré dans $\mathbf{R}$
- Système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbf{R}$
- Équations et systèmes de deux équations du 1er degré dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$
- Inéquations et systèmes de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

En activités géométriques

Pyramide

- Rappels
- Pyramide régulière
- Aire latérale
- Hauteur, volume
- Section plane par un plan parallèle à la base
- Tronc de pyramide
- Calculs de volume, d'aire
- Propriétés de réduction

Cône

- Rappels
- Aire latérale
- Hauteur, volume
- Section plane par un plan parallèle à la base
- Tronc de cône
- Calculs de volume, d'aire
- Propriétés de réduction

Thalès

- Propriété de Thalès dans le triangle : directe, réciproque
- Conséquence et utilisation de la propriété de Thalès dans le triangle
- Triangles semblables
- Propriété de Thalès dans le cas général

Angles inscrits dans un cercle

- Définition, vocabulaire : angle inscrit, arc intercepté
- Propriété : angle au centre et angle inscrit associés
- Angles inscrits interceptant le même arc
- Angles inscrits et configuration du plan
- Polygones réguliers
- Quadrilatère inscrit dans un cercle

Trigonométrie dans le triangle rectangle

- Propriété de Pythagore : rappels
- Rapports trigonométriques usuels d'un angle aigu : cosinus, sinus, tangente
- Propriétés : calculs dans le triangle rectangle
- Lignes trigonométriques des angles :
 - o lecture de tables
 - o angles de 30° , 45° , 60°

Symétrie orthogonale - symétrie centrale - translations

- Utilisation
- Composition :
 - o de deux symétries orthogonales d'axes parallèles
 - o de deux symétries orthogonales d'axes orthogonaux
 - o de deux symétries centrales
 - o de deux translations

Rotation

- Programme de construction
- Conservation des distances
- Application à la construction de polygones réguliers

Homothétie

- Définition : centre, rapport
- Propriétés élémentaires

Vecteurs

- Rappels
- Différence de deux vecteurs
- Produit d'un vecteur par un réel : définition, propriétés
- Vecteurs colinéaires
- Vecteurs directeurs d'une droite
- Vecteurs orthogonaux

Coordonnées d'un vecteur

- Définition, calcul
- Coordonnées :
 - o d'une somme de deux vecteurs
 - o du produit d'un vecteur par un réel
- Calcul dans un repère orthonormé
 - o condition de colinéarité de deux vecteurs
 - o condition d'orthogonalité de deux vecteurs
 - o coordonnées du milieu d'un segment
 - o distance de deux points

Équations de droites

- Équations cartésiennes d'une droite
- Coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées
- Condition de parallélisme de deux droites
- Condition d'orthogonalité de deux droites (repère orthonormé)

Applications linéaires

- Définition
- Propriétés de linéarité
- Bijection
- Sens de variation
- Représentation graphique
- Coefficient directeur

Applications affines

- Définition
- Bijection
- Sens de variation
- Représentation graphique
- Exemples d'applications affines par intervalles

Statistiques

- Exemples de regroupement en classes d'égales amplitudes
- Histogramme

Méthodes d'enseignement/apprentissage en mathématiques

L'enseignement des mathématiques à l'enseignement moyen impose au professeur le choix

d'une progression permettant d'une part de consolider et compléter les acquis dans les domaines des connaissances et des méthodes de travail entamés au primaire et, d'autre part, donner aux élèves une formation devant les préparer à pour avec succès leur étude au niveau secondaire. En particulier, il s'agit d'aborder les notions essentielles du programme afin de les traiter efficacement et approfondir de façon progressive l'apprentissage de la démarche de résolution des problèmes. Autant que l'acquisition des savoirs, l'enseignement doit être basé sur des activités sous-tendues par des situations- problèmes évitant le plus possible un dogmatisme de la démarche de raisonnement scientifique.

Dans cette perspective, l'enseignement des mathématiques doit être relié celui des autres disciplines à travers l'organisation des séances de concertation entre enseignants.

Evaluation

L'évaluation des apprentissages en mathématiques doit porter les contenus en termes de savoir et savoir-faire dans le strict respect des programmes en vigueur.

Le professeur entraînera les élèves à travailler sur différents types d'exercices avec des difficultés progressives. Les évaluations des apprentissages doivent être centrées sur :

- les connaissances ayant fait l'objet de l'enseignement/apprentissage ;
- la résolution des problèmes ;
- le raisonnement et la logique ;
- les productions écrites ou orales sur les capacités attendues des élèves aussi bien dans les activités numériques que les activités géométriques.

Table des matières

Remerciements	ii
Sigles, acronymes, abréviations.....	iv
Liste des tableaux	v
Liste des figures.....	vii
Sommaire	x
Résumé.....	xv
Abstract.....	xvi
Introduction et problématique.....	1
Première partie.....	6
Chapitre 1 : Etude épistémologique du concept de polynôme.....	7
Introduction	7
1.1. La construction du concept de polynôme.....	7
1.3. Notion de polynôme dans les programmes du collège	9
1.4. Le traitement des expressions algébriques	10
1.5. Le symbolisme mathématique	11
Conclusion du chapitre 1.....	14
Chapitre 2 : Revue de littérature.....	15
Introduction	15
2.1. Définition des concepts clés	15
2.1.1 La notion d'obstacle.....	15
2.1.2. Le concept d'objectif-obstacle.....	18
2.1.3. Polynômes	19
2.1.4. Les concepts de développement et de réduction	20
2.1.4.1. Développer une expression algébrique.....	20
2.1.4.2. Réduire une expression algébrique.....	21
2.2. Revue de littérature	22
2.2.1. Le passage du calcul arithmétique au calcul algébrique.....	22
2.2.1.1. Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre ? (Grugeon-Allys et Pilet, 2017)	22
2.2.1.1.1. Continuité ou discontinuité : deux points de vue sur la transition entre l'arithmétique et l'algèbre	22
2.2.1.1.2. Critères pour l'analyse de l'activité arithmétique avant l'entrée dans l'algèbre	25
2.2.1.2. Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien (Hassayoune, 2021).....	26

2.2.1.2.1. La rupture entre l'activité arithmétique et l'activité algébrique	27
2.2.1.2.2. Expérimentations.....	28
2.2.1.3. Le statut de la lettre (Equipe de recherche UMons, 2019).....	29
2.2.1.3.1. Les différents statuts de la lettre.....	29
2.2.1.3.2. Les obstacles liés à l'introduction de la lettre	30
2.2.1.4. Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire (Tremblay, Polotskaia et Passaro, 2021)	31
2.2.1.4.1. La lettre en mathématiques : usages, interprétations et dénominations	32
2.2.1.4.1.1. Différents usages de la lettre en mathématiques au primaire et au secondaire.....	32
2.2.1.4.1.2. Les différents rôles de la lettre en algèbre.....	33
2.2.1.4.2. Difficultés avec l'interprétation et l'usage de la lettre.....	33
2.2.2. Erreurs des élèves et obstacles	34
2.2.2.1. Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire (Booth et Chelsea, 1984)	34
2.2.2.1.1. La signification des lettres	35
2.2.2.1.2. La compréhension des notations et des conventions	36
2.2.2.2. Le traitement des erreurs des élèves dans la formation des enseignants de mathématiques du second degré (Almahmoud, 2019).....	38
2.2.2.2.1. Difficultés et erreurs classiques en algèbre.....	38
2.2.2.2.2. Défaut dans la distributivité	40
2.2.2.2.3. Difficile transition entre arithmétique et algèbre.....	42
2.2.2.3. Quelques exemples d'obstacles pour la construction du savoir en mathématiques (Oudrhiri, 2016)	43
2.2.2.3.1. Expérimentation	43
2.2.2.3.2. Résultats et analyse des productions.....	44
2.2.2.4. Apprendre par franchissement d'obstacles (Astolfi, 1992)	45
2.2.2.4.1. Un nouveau statut de l'erreur	46
2.2.2.4.2. La notion d'objectif-obstacle.....	46
Conclusion du chapitre 2.....	48
Chapitre 3 : Cadres théoriques de la recherche.....	50
Introduction	50
3.1. La théorie anthropologique du didactique (TAD).....	50
3.1.1. Le concept de praxéologie	50
3.1.2. Tâche, type de tâches et genre de tâche.....	51
3.1.3. La technique.....	52
3.1.4. La technologie.....	54
3.1.5. La théorie.....	56

3.1.6. La transposition didactique.....	56
3.2. Théorie des champs conceptuels (TCC).....	58
3.2.1. Schèmes	59
3.2.2. Le schème du développement d'une expression.....	60
3.2.3. Le schème de la réduction	61
3.2.4. Invariants opératoires	61
3.2.4.1. Théorème-en-acte.....	62
3.2.4.2. Concept-en-acte.....	62
3.3. Opérationnalisation des variables	63
Conclusion du chapitre 3.....	67
Chapitre 4 : Analyse des manuels et des pratiques de classe relative aux activités de développement et de réduction des polynômes.....	68
Introduction	68
4.1. Analyse des manuels	68
4.1.1. Analyse du manuel de la classe de 4 ^{ème}	69
4.1.1.1. Le langage utilisé	70
4.1.1.2. Le statut de l'égalité	71
4.1.1.3. Le statut de la lettre	72
4.1.1.4. Le statut du signe " + "	73
4.1.1.5. Le statut du signe " – "	74
4.1.1.6. Le type de parenthèses utilisées	75
4.1.1.7. L'utilisation de la distributivité	75
4.1.1.8. Le caractère des expressions algébriques	77
4.1.1.9. Exemples résolus dans la partie « cours »	77
4.1.1.10. Exercices proposés en fin de chapitre.....	81
4.1.1.11. Synthèse de l'analyse du manuel de la classe de 4 ^{ème}	84
4.1.2. Analyse du manuel de la classe de 3 ^{ème}	85
4.1.2.1. Le langage utilisé	86
4.1.2.2. Le statut de l'égalité	86
4.1.2.3. Le statut de la lettre	87
4.1.2.4. Le statut du signe " + "	88
4.1.2.6. Le type de parenthèses utilisées	88
4.1.2.7. L'utilisation de la distributivité	88
4.1.2.8. Le caractère des expressions algébriques	89
4.1.2.9. Exemples résolus dans la partie « cours »	89
4.1.2.10. Exercices proposés en fin de chapitre.....	90

4.1.2.11. Synthèse de l'analyse des manuels C3	92
4.2. Analyse des pratiques de classe	93
4.2.1. La séquence observée de Monsieur K., classe de 4 ^{ème} A.....	94
4.2.1.1. Le langage utilisé	94
4.2.1.2. Le statut de l'égalité	94
4.2.1.3. Le statut de la lettre	94
4.2.1.4. Le statut du signe " + "	95
4.2.1.5. Le statut du signe " – "	95
4.2.1.6. Le type de parenthèses utilisées	95
4.2.1.7. L'utilisation de la distributivité	95
4.2.1.8. Le caractère procédural et structural	95
4.2.1.9. Exemples résolus.....	96
4.2.1.10. Exercices proposés en fin de chapitre et résolus en classe.....	96
4.2.1.11. Prise en charge ou non des erreurs des élèves par Monsieur K.....	97
4.2.2. La séquence observée de Monsieur B., classe de 3 ^{ème} A	97
4.2.2.1. Le langage utilisé	98
4.2.2.2. Le statut de l'égalité	98
4.2.2.3. Le statut de la lettre	98
4.2.2.4. Le statut du signe " + "	98
4.2.2.5. Le statut du signe " – "	98
4.2.2.6. Le type de parenthèses utilisées	99
4.2.2.7. L'utilisation de la distributivité	99
4.2.2.8. Le caractère procédural et structural	99
4.2.2.9. Les situations d'apprentissage proposées	99
4.2.2.10. Prise en charge des erreurs des élèves par Monsieur B.	101
4.2.2.11. Synthèse de l'analyse des pratiques de classe	101
Conclusion du chapitre 4.....	102
Deuxième partie.....	105
Chapitre 5 : Méthodologie de la recherche.....	106
Introduction	106
5.1. Type de recherche	106
5.2. Lieu d'étude.....	107
5.3. Population et corpus de l'étude.....	107
5.4. Outils d'expérimentation	109
5.4.1. Grille d'observations des classes	109
5.4.2. Questionnaires.....	110

5.4.3. Entretien d'explicitation	111
5.4.4. Dispositif de franchissement des obstacles : ingénierie didactique.....	111
5.5. Phases de l'ingénierie didactique	112
5.5.1. Les analyses préalables.....	112
5.5.2. La conception et l'analyse <i>a priori</i> de situations didactiques	112
5.5.3. L'expérimentation.....	113
5.5.4. L'analyse <i>a posteriori</i> et validation	113
5.6. Présentation du dispositif	113
5.7. Traitement et analyse des données.....	114
Conclusion du chapitre 5.....	114
Chapitre 6 : Première expérimentation : identification des obstacles didactiques et épistémologiques	115
Introduction	115
6.1. Analyse <i>a priori</i> des exercices des questionnaires.....	115
6.1.1. Analyse <i>a priori</i> des exercices du questionnaire adressé aux élèves de 4 ^{ème}	116
6.1.2. Analyse <i>a priori</i> des exercices du questionnaire adressé aux élèves de 3 ^{ème}	130
6.2. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves aux questionnaires	142
6.2.1. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves de la classe de 4 ^{ème}	142
6.2.1.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou du signe " – "	142
6.2.1.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables	148
6.2.1.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques	158
6.2.2. Synthèse de l'analyse des réponses des élèves de 4 ^{ème}	167
6.2.3. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves de 3 ^{ème}	168
6.2.3.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " ou du signe " – "	168
6.2.3.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables	174
6.2.3.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques	183
6.2.4. Synthèse de l'analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves de 3 ^{ème}	190
6.3. Regard croisé des réponses des élèves de 4 ^{ème} et 3 ^{ème}	191
6.4. Analyse de l'entretien d'explicitation avec les élèves.....	193
6.5. Obstacles épistémologiques et didactiques identifiés.....	197
6.5.1. Obstacles épistémologiques	197
6.5.2. Obstacles didactiques	199
Conclusion du chapitre 6.....	199
Chapitre 7 : Deuxième expérimentation : proposition et expérimentation du dispositif de franchissement	202

Introduction	202
7.1. Conception et analyse <i>a priori</i> du dispositif de franchissement	202
7.1.1. Conception du dispositif	202
7.1.2	Dispositif de franchissement proposé
.....	203
7.1.3.....	Présentation de la séquence d'enseignement
.....	213
7.1.4. L'analyse <i>a priori</i> des activités	216
7.2. Expérimentation, analyse <i>a posteriori</i>	233
7.2.1. Réponses des élèves aux activités préparatoires	233
7.2.1.1. Réponses des élèves au premier item	233
7.2.1.2. Réponses des élèves au deuxième item	235
7.2.1.3. Réponses des élèves au troisième item	236
7.2.1.4. Réponses des élèves au quatrième item	237
7.2.1.5. Réponses des élèves au cinquième item	238
7.2.2. Conclusion de l'analyse des activités préparatoires	239
7.2.3. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves aux activités proposées à la suite des éléments du cours.....	239
7.2.3.1. Activité centrée sur la réduction d'une somme algébrique ou d'un produit de monômes	239
7.2.3.2. Activité centrée sur le développement et la réduction des expressions algébriques	244
7.3. Evaluation du dispositif (post-test)	248
7.3.1. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves ayant été soumis au dispositif (groupe expérimental).....	248
7.3.1.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " et du signe " - "	248
7.3.1.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables	251
7.3.1.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques	255
7.3.2. Analyse <i>a posteriori</i> des réponses des élèves de la classe de 4 ^{ème} n'ayant pas été soumis au dispositif (groupe témoin)	258
7.3.2.1. Exercice centré sur la réduction d'une somme algébrique comportant des parenthèses précédées du signe " + " et du signe " - "	258
7.3.2.2. Exercices centrés sur le développement des produits remarquables	263
7.3.2.3. Exercices centrés sur le développement et la réduction des expressions algébriques	267
7.3.3. Croisement de l'analyse des réponses des élèves du groupe expérimental avec ceux du groupe témoin	271
Conclusion du chapitre 7	272
Conclusion générale et perspectives	273
Analyse épistémologique	273

Quelques résultats antérieurs	274
Cadres théoriques	274
Comment les concepts de développement et de réduction sont abordés dans les manuels et en situation de classe ?	275
Les expérimentations	276
Perspectives de recherche	278
Références bibliographiques	280
Annexes	290
Annexe 1 : Autorisation de recherche.....	i
Annexe 2 : Formulaire de consentement.....	ii
Annexe 3 : Questionnaires (tests).....	iii
Annexe 4 : Grille d'analyse des manuels	v
Annexe 5 : Grille d'observation	vi
Annexe 6 : Grille d'analyse de l'entretien d'explicitation	vii
Annexe 7 : Contenus des programmes tchadiens de Mathématiques pour les classes de 4 ^{ème} et 3 ^{ème}	x