

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



REPUBLIC DU CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

APPROXIMATION NUMÉRIQUE AU SENS FAIBLE D'UNE ÉQUATION AUX DERIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUE ÉVOLUTIVE AVEC BRUIT MULTIPLICATIF

**Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en
Mathématiques**

Spécialité : **Analyse et applications**

Option : **Analyse Numérique**

Par

TSANGUEU KANA Francine Aurore

Matricule : **18B2575**

Licenciée en Mathématiques

Sous la Direction du

Pr. MBEHOU Mohamed

Maître de Conférences

Université de Yaoundé I



Année académique 2023-2024

♠ Dédicace ♠

À mes parents M. TSANGUEU SILATSA Blaise et Mme. TSANGUEU née TSOPFACK KANA
Edwige qui m'ont toujours soutenue et encouragée dans tout ce que j'ai entrepris, je souhaite
que ce travail vous rende fiers.

♠ Remerciements ♠

Je remercie tout d'abord Dieu tout puissant qui m'a accordée sa grâce et la force de terminer ce travail.

Je remercie chaleureusement mon encadreur Pr. MBEHOU Mohamed pour avoir accepté de diriger ce travail et de guider mes premiers pas dans la recherche. Son soutien, sa disponibilité et ses conseils m'ont été d'une aide inestimable.

Je tiens également à remercier le corps enseignant du département de Mathématiques de l'Université de Yaoundé I pour leurs enseignements de qualité, en particulier Pr. AYISSI Raoul, chef du département de mathématiques pour toute son aide et ses conseils, et Dr. TETSADJIO Erick pour ses conseils et son appui dans l'élaboration de ce travail.

Un merci particulier à ma famille, ma principale source de joie et de réconfort : À mes parents pour leur encadrement et tous les sacrifices qu'ils font au quotidien pour moi, à mes frères TSANGUEU Junior, KANA Wilfried, MEDJOM Hydrick, TSOBGNY Salomon, NGNIZECKO Yvalain, DJIENGO Gabriel et KANA Arthur pour le soutien et le réconfort apportés durant la rédaction de ce document.

Mes remerciements vont également à :

- Mon ami WEMBE Tibaut pour son aide inestimable, ses conseils et son soutien. Je ne te dirai jamais assez merci.
- Mes promotionnaires et camarades de cette université pour leur soutien moral, les membres du séminaire d'analyse numérique pour leur apport dans l'élaboration de ce travail.
- Mes amis de longue date ENGUENE Laetitia, TSAMPI Augusta, KUISSU Paloma, KOUEMEKO Charly, TEGUEM Michèle, FEZE Farhel, MFONZIE Mounir et KAMGA Loic pour le soutien moral ainsi que toutes les joies et peines partagées.
- Mes amis FOUDJIN Karlane, GUIFFO Pascal et ZEGOU Roy pour le soutien moral, les bons moments passés ensemble ainsi que l'aide dans l'élaboration de ce travail.
- Toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à la réussite de ce travail.

♠ Déclaration sur l'honneur ♠

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

TSANGUEU KANA Francine Aurore

♠ Résumé ♠

Ce travail est consacré à l'approximation numérique des solutions faibles des équations aux dérivées partielles stochastiques, dirigées par un bruit gaussien multiplicatif à valeurs dans un espace de Hilbert. L'existence et l'unicité d'une solution intégrale est établie sous certaines conditions. Une discrétisation en espace en utilisant la méthode des éléments finis de Galerkin et en temps en utilisant la méthode de Euler-Maruyama est présentée suivie de l'étude de la stabilité et de la convergence du schéma numérique obtenu. Un exemple de résolution numérique d'une équation de réaction-diffusion stochastique est proposé.

Mots clés : Équation aux dérivées partielles stochastiques, bruit gaussien, Q -processus de Wiener, solution faible, éléments finis de Galerkin, méthode de Euler-Maruyama.

♠ Abstract ♠

This work is devoted to the numerical approximation of weak solutions of stochastic partial differential equations, driven by a multiplicative gaussian noise with values in a Hilbert space. The existence and uniqueness of a mild solution is established under some conditions. A space-time discretization using the Galerkin finite element method in time and the Euler-Maruyama method in space is presented, followed by the study of the properties (stability and convergence) of the numerical scheme obtained. An example of numerical resolution of a reaction-diffusion stochastic equation is proposed.

Keywords : Stochastic partial differential equation, gaussian noise, Q -Wiener process, weak solution, Galerkin finite element method, Euler-Maruyama method.

♠ Table des matières ♠

Dédicace	i
Remerciements	ii
Déclaration sur l'honneur	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Introduction	1
1 NOTIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES	3
1.1 Notions d'analyse linéaire	3
1.1.1 Puissances d'un opérateur linéaire	4
1.2 Semi-groupes d'opérateurs linéaires	4
1.3 Notions d'analyse stochastique	5
1.3.1 Processus de Wiener à valeurs dans un espace de Hilbert	6
1.3.2 Construction de l'intégrale stochastique et ses propriétés	8
1.4 Analyse numérique des équations déterministes	9
1.4.1 Opérateurs de projection	9
1.4.2 Estimation de l'erreur pour la discrétisation spatio-temporelle	10
1.5 Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDP stochastique	12
2 SCHÉMA D'EULER-MARUYAMA ET MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FI-	
NIS	17
2.1 Discrétisation du système	17
2.1.1 Discrétisation en espace	18
2.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret	18

2.2.1	Introduction de la méthode Euler-Maruyama	20
2.2.2	Discrétisation en temps	21
2.3	Étude de la stabilité	22
2.4	Étude de la convergence	24
3	SIMULATIONS NUMÉRIQUES	31
3.1	Existence et unicité	31
3.2	Discrétisation	32
3.2.1	Maillage du domaine	32
3.2.2	Problème discret	32
3.2.3	Représentation de la solution et étude du degré de convergence	36
	Conclusion	38
	Bibliographie	39
	Annexe	41
3.3	code pour approximer le bruit en dimension 1	41
3.4	Code principal	42
3.5	Code pour calculer les matrices locales	43
3.6	Code pour calculer les matrices du second membre	43

♠ Introduction ♠

Les équations aux dérivées partielles stochastiques constituent un domaine de recherche essentiel dans les sciences appliquées, offrant un cadre puissant pour modéliser des phénomènes complexes soumis à des fluctuations aléatoires. Leurs champs d'application s'étendent à divers domaines tels que la biologie, la physique des particules, la modélisation des phénomènes de diffusion dans les milieux hétérogènes, la dynamique des populations sous l'influence de facteurs aléatoires, et la finance pour la valorisation des options et la gestion des risques. Dès le milieu du 20^e siècle, plusieurs chercheurs tels que E. Pardoux et S. Larsson se sont intéressés à l'étude des équations différentielles stochastiques dans [15] et [19], et au fil du temps cette étude est passée de la théorie à la pratique avec l'approximation numérique d'équations modélisant des phénomènes physiques aléatoires comme dans [11] et [20]. Dans ce mémoire, nous nous intéressons particulièrement à l'approximation numérique au sens faible des EDP stochastiques paraboliques avec bruit multiplicatif de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{A}u &= f(u) + G(u) \frac{dW(t)}{dt} \quad \text{dans} \quad (0, T) \times D \times \Omega \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad \text{dans} \quad D \times \Omega \end{aligned}$$

avec conditions aux bords de Dirichlet ou de Neumann, où :

- D est un domaine de $\mathbb{R}^n$,
- $H = L^2(D)$,
- l'opérateur différentiel $\mathcal{A}$ donné est par $\mathcal{A}u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$,
- $(W(t), t \in [0, T])$ est un Q -processus de Wiener à valeurs dans H ,
- $f : H \rightarrow H$,
- $G : H \rightarrow L_0^2$,
- u_0 une valeur aléatoire à valeurs dans H .

Ce problème est équivalent au problème suivant dont l'étude fera l'objet de notre travail

$$\begin{aligned} du &= [-\mathcal{A}u + f(u)]dt + G(u)dW(t) \quad \text{dans} \quad [0, T] \times H \times \Omega \\ u(0) &= u_0 \quad \text{dans} \quad H \times \Omega \end{aligned}$$

où A est l'opérateur linéaire associé à l'opérateur différentiel $\mathcal{A}$.

Étant donné qu'il n'est pas toujours possible de trouver les solutions exactes de ce problème, nous allons nous tourner vers les méthodes numériques pour approximer ses solutions faibles avec la méthode de Galerkin en espace et la méthode semi-implicite de Euler-Maruyama en temps. Dans ce travail, il est donc question d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution intégrale de notre problème, de proposer un schéma numérique, puis d'étudier sa convergence et sa stabilité, et enfin de faire une simulation numérique avec un exemple concret. Pour y parvenir, nous organiserons notre travail comme suit :

Au chapitre un, nous rappellerons les notions et les résultats préliminaires qui seront d'une grande aide pour notre travail et prouverons l'existence et l'unicité d'une solution intégrale de notre problème.

Au chapitre deux, nous présenterons un schéma numérique pour l'approximation de notre problème et nous étudierons ses propriétés.

Au chapitre trois, nous donnerons un exemple concret en approximant numériquement la solution de l'équation de réaction diffusion stochastique.

NOTIONS ET RÉSULTATS

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous introduisons les outils théoriques et théorèmes que nous utiliserons dans la suite de notre travail.

1.1 Notions d'analyse linéaire

Théorème 1.1.1 : (*Théorème du point fixe*) Soit Y un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Considérons une application $\mathcal{J} : Y \rightarrow Y$ telle qu'il existe $\mu \in]0, 1[$ vérifiant :

$$\|\mathcal{J}u - \mathcal{J}v\| \leq \mu \|u - v\|, \quad \text{pour tout } u, v \in Y$$

. Alors $\mathcal{J}$ admet un unique point fixe dans Y , c'est à dire un unique $u \in Y$ tel que $\mathcal{J}u = u$.

Définition 1.1.2 (Espaces L^p) : Soit $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$.

(i) Soit D un domaine. L'espace $L^p(D)$ est l'ensemble des fonctions Borel mesurables $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\int_D |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Dans ce cas, $\|u\|_{L^p(D)} := (\int_D |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.

(ii) Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^p(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$ -mesurables $u : X \rightarrow Y$ telles que :

$$\int_X \|u(x)\|_Y^p d\mu(x) < +\infty.$$

Dans ce cas, $\|u\|_{L^p(X, Y)} := (\int_X \|u(x)\|_Y^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$.

Lemme 1.1.3 : $L^p(X, Y)$ est un espace de Banach, pour $1 \leq p < \infty$.

1.2. Semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.1.1 Puissances d'un opérateur linéaire

Tout au long de cette partie, considérons $(H, (\cdot, \cdot))$ un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire.

Hypothèse 1.1.4 : *A admet une base orthonormale de fonctions propres $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ de valeurs propres $\lambda_j > 0$ telles que $\lambda_{j+1} \geq \lambda_j$.*

Tout au long de cette partie, nous supposons l'hypothèse 1.1.4 vérifiée.

Lemme 1.1.5 : *[2, P25] L'opérateur A est auto-adjoint. C'est à dire $(Au, v) = (u, Av)$ pour tout $u, v \in \mathcal{D}(A)$.*

Définition 1.1.6 : *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'opérateur $A^\alpha : \mathcal{D}(A^\alpha) \longrightarrow H$ est défini par :*

$$A^\alpha u := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha u_j \phi_j, \quad \text{pour} \quad u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \phi_j, \quad u_j = (u, \phi_j) \in \mathbb{R},$$

avec $\mathcal{D}(A^\alpha)$ l'ensemble des $u \in H$ tels que $A^\alpha u \in H$.

Théorème 1.1.7 : *[2, P25] Le domaine $\mathcal{D}(A^\alpha)$ est un espace de Hilbert pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, de produit scalaire $(u, v)_\alpha := (A^\alpha u, A^\alpha v)$ et de norme $\|u\|_\alpha := \|A^\alpha u\|$.*

Énonçons quelques propriétés importantes de $\mathcal{D}(A^\alpha)$.

Lemme 1.1.8 : *[2, P26] On a :*

- (i) $\|u\|_0 = \|u\|$ pour tout $u \in \mathcal{D}(A^0) = H$.
- (ii) $(u, v)_{1/2} = (A^{1/2}u, A^{1/2}v) = (Au, v)$ pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v \in \mathcal{D}(A^{1/2})$.
 $(u, v) = (A^{1/2}u, A^{-1/2}v)$ pour tout $u \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ et $v \in \mathcal{D}(A)$.
- (iii) Pour $\alpha > 0$, $\|u\|_\alpha \geq \lambda_1^\alpha \|u\|$, pour tout $u \in \mathcal{D}(A^\alpha) \subset H$.
- (iv) Pour $\alpha < 0$, $H \subset \mathcal{D}(A^\alpha)$ et $A^\alpha \in \mathcal{L}(H)$ avec $\|A^\alpha\|_{\mathcal{L}(H)} = \lambda_1^\alpha$.

1.2 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Tout au long de cette partie, $(X, \|\cdot\|)$ dénote un espace de Banach et $(H, (\cdot, \cdot))$ un espace de Hilbert.

Définition 1.2.1 (Semi-groupe) : *On appelle semi-groupe (fortement) continu sur H toute application $S : [0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(H)$ telle que :*

- (i) $S(t+s) = S(t)S(s) \quad \forall t, s \geq 0$.
- (ii) $S(0) = Id_H$.

1.3. Notions d'analyse stochastique

(iii) Pour tout $x \in H$, l'application $t \mapsto S(t)x$ est continue de $[0, +\infty[$ dans H

On dit que S est un semi-groupe de contraction si en outre

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

Définition 1.2.2 (Générateur infinitésimal) : Soit S un semi-groupe de contraction sur H .

On appelle générateur infinitésimal de S l'opérateur linéaire de H dans H de domaine

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in H : \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{S(\epsilon)x - x}{\epsilon} \text{ existe dans } H \right\}$$

tel que $Ax = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{S(\epsilon)x - x}{\epsilon}$, $x \in \mathcal{D}(A)$.

Définition 1.2.3 (exponentiel) : Supposons 1.1.4. Alors,

pour $t \geq 0$, l'exponentiel de $-tA$ est donné par :

$$E(t) = e^{-tA} := \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} (u, \phi_j) \phi_j.$$

Lemme 1.2.4 : [2, P.101] Supposons 1.1.4. Alors, $E(t) = e^{-tA}$ est un semi-groupe fortement continu sur H de générateur infinitésimal $-A$.

Lemme 1.2.5 : [2, P100 – P103], [14] Supposons 1.1.4. Alors :

(i) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, on a $A^\alpha E(t)u = E(t)A^\alpha u$, pour tout $t \geq 0$.

(ii) Pour tout $\alpha \geq 0$, il existe une constante $K = K(\alpha) > 0$ telle que :

$$\|A^\alpha E(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq K t^{-\alpha}, \quad t \geq 0.$$

(iii) Pour $\alpha \in [0, 1]$, il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\|A^\alpha (I - E(t))\|_{\mathcal{L}(H)} \leq t^\alpha.$$

(iv) Pour $\alpha \in [0, 1]$, il existe $K > 0$ tel que :

$$\int_{t_1}^{t_2} \|A^{\frac{\alpha}{2}} E(t_2 - s)x\|^2 ds \leq K(t_2 - t_1)^{1-\alpha} \|x\|^2, \quad \text{pour tout } x \in H, \quad 0 \leq t_1 < t_2.$$

(v) Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ il existe $K > 0$ tel que :

$$\left\| A^\alpha \int_{t_1}^{t_2} E(t_2 - s)x ds \right\| \leq K(t_2 - t_1)^{1-\alpha} \|x\|, \quad \text{pour tout } x \in H, \quad 0 \leq t_1 < t_2.$$

1.3 Notions d'analyse stochastique

Dans la suite de notre travail, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1.3.1 Processus de Wiener à valeurs dans un espace de Hilbert

Soient $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ et $(U, (\cdot, \cdot)_U)$ deux espaces de Hilbert séparables. On munit U et H de leurs tribus boréliennes notées $\mathcal{B}(U)$ et $\mathcal{B}(H)$ respectivement.

Définition 1.3.1 : Soient $T \in \mathcal{L}(U, H)$ et $\{\chi_j : j \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormée de U . On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \|T\chi_j\|_H^2 < +\infty.$$

On note $\mathcal{L}_2(U, H)$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de U dans H .

Définition 1.3.2 : Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ et $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormée de H . On définit

$$\text{tr}T = \sum_{j \in \mathbb{N}} (T\phi_j, \phi_j)_H$$

On dit que T est un opérateur de trace finie si $\text{tr}T$ est fini.

Remarque 1.3.3 : [12, appendice B]

1. Les définitions précédentes ne dépendent pas des bases de U et H choisies.
2. Muni du produit scalaire donné par

$$(T, S)_{\mathcal{L}_2(U, H)} := \sum_{j \in \mathbb{N}} (T\chi_j, S\chi_j)_H, \quad T, S \in \mathcal{L}_2(U, H).$$

$\mathcal{L}_2(U, H)$ est un espace de Hilbert séparable.

Proposition 1.3.4 : [6, Théorème VI.9] Si $Q \in \mathcal{L}(U)$ est positif et symétrique, alors il existe un unique opérateur $Q^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(U)$ positif et symétrique tel que $Q^{\frac{1}{2}} \circ Q^{\frac{1}{2}} = Q$.

Si de plus, $\text{tr}Q < +\infty$, on a : $Q^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(U)$, $\|Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2(U, H)}^2 = \text{tr}Q$ et $L \circ Q^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_2(U, H)$ pour tout $L \in \mathcal{L}_2(U, H)$.

Définition 1.3.5 : Une mesure μ sur $(U, \mathcal{B}(U))$ est gaussienne si

$$\widehat{\mu}(u) := \int_U \exp^{i(u, v)_U} \mu(dv) = \exp^{i(m, v)_U - \frac{1}{2}(Qu, u)_U}, \quad u \in U,$$

où $m \in U$ et $Q \in \mathcal{L}(U)$ est positive, symétrique et de trace finie.

Le vecteur m est appelé moyenne de μ et l'opérateur Q est appelé covariance de μ .

Remarque 1.3.6 : Soit X une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire ils existent $m \in U$ et Q un opérateur linéaire continu sur U qui est aussi positif, symétrique et de trace finie tels que $\mathbb{P} \circ X^{-1} \sim \mathcal{N}(m, Q)$, alors $(X, u)_U$ suit une loi normale pour tout $u \in U$ et on a :

- $\mathbb{E}((X, u)_U) = (m, u)_U$ pour tout $u \in U$;
- $\mathbb{E}((X - m, u)_U \cdot (X - m, v)_U) = (Qu, v)_U$ pour tout $u, v \in U$;
- $\mathbb{E}(\|X - m\|_U^2) = \text{tr } Q$.

Soient $Q \in \mathcal{L}(U)$ positive, symétrique et de trace finie et $T > 0$.

Définition 1.3.7 : Un processus stochastique $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans U sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un Q -processus de Wiener si :

- $W(0) = 0$,
- W est à trajectoires continues $\mathbb{P}$ -ps,
- W est à incréments indépendants, c'est-à-dire les variables aléatoires

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

sont indépendantes pour $0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq T, n \in \mathbb{N}$,

- les incréments suivent des lois gaussiennes

$$\mathbb{P} \circ (W(t) - W(s))^{-1} \sim \mathcal{N}(0, (t - s)Q)$$

pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.

Définition 1.3.8 : Une filtration sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ croissante au sens de l'inclusion c'est-à-dire, pour tous $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

Définition 1.3.9 : Un Q -processus de Wiener $\{W(t), t \in [0, T]\}$ est appelé Q -processus de Wiener par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$ si :

- $W(t)$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté pour tout $t \in [0, T]$,
- $W(t) - W(s)$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.

Définition 1.3.10 : Un Q -processus de Wiener $\{W(t), t \in [0, T]\}$ est dit prévisible s'il existe une famille de processus $\mathcal{F}_t$ -adaptés et à trajectoires continues à gauche $\{W_n(t), t \in [0, T]\}_{n \geq 0}$ telle que $W_n(t) \rightarrow W(t)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ pour tout $t \in [0, T]$.

Hypothèse 1.3.11 : $Q \in \mathcal{L}(U)$ est symétrique, défini positif et à trace finie. De plus, Q admet une base orthonormée $\{\chi_j : j \in \mathbb{N}\}$ de U comme fonctions propres, de valeurs propres associées $q_j \geq 0$ telles que $\sum_{j \in \mathbb{N}} q_j < +\infty$

Théorème 1.3.12 : [2, P437-P438] Supposons que l'hypothèse 1.3.11 soit satisfaite. Alors, $W(t)$ est un Q -processus de Wiener si et seulement si :

$$W(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t), \quad ps \tag{1.1}$$

où $\beta_j(t)$ sont des $\mathcal{F}_t$ -mouvements browniens i.i.d et cette série converge dans $L^2(\Omega, U)$. Plus encore, la série (1.1) converge dans $L^2(\Omega, C([0, T], U))$ pour tout $T > 0$.

1.3.2 Construction de l'intégrale stochastique et ses propriétés

Dans cette partie, nous allons définir $\int_0^t B(s)dW(s)$ où $W(s)$ est un Q -processus de Wiener à valeurs dans un espace de Hilbert U , Q vérifiant l'hypothèse 1.3.11.

Définition 1.3.13 : Soit $U_0 := \{Q^{1/2}u : u \in U\}$. L_0^2 est l'ensemble des opérateurs linéaires $B : U_0 \longrightarrow H$ tels que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|BQ^{1/2}\chi_j\|^2 < +\infty,$$

où $\{\chi_j : j \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormée de U .

Proposition 1.3.14 : On a :

L_0^2 est un espace de Banach de norme

$$\|B\|_{L_0^2} := \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \|BQ^{1/2}\chi_j\|^2 \right)^{1/2} = \|BQ^{1/2}\|_{\mathcal{L}_2(U,H)}, \quad B \in L_0^2. \quad (1.2)$$

(ii) Comme Q est inversible, $U_0 = \mathcal{D}(Q^{-1/2})$ est un espace de Hilbert. L_0^2 est donc l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt $\mathcal{L}_2(U_0, H)$ de U_0 dans H .

Remarque 1.3.15 : Pour pouvoir définir l'intégrale stochastique $\int_0^t B(s)dW(s)$, il faut que $W(t)$ soit $\mathcal{F}_t$ -adapté et le processus $\{B(t), t \in [0, T]\}$ à valeurs dans L_0^2 doit être prévisible. Ceci est vrai si pour une base orthonormée $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ de H , les processus à valeurs réelles $(B(t)Q^{1/2}\chi_j, \phi_k)$ sont prévisibles pour tout $j, k \in \mathbb{N}$.

Construisons à présent notre intégrale. D'après (1.1), $W(t)$ s'écrit sous la forme

$$W(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t). \text{ Soit } J \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Posons } W^J(t) = \sum_{j=1}^J \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t)$$

L'intégrale

$$\int_0^t B(s)dW^J(s) = \sum_{j=1}^J \int_0^t B(s) \sqrt{q_j} \chi_j d\beta_j(t)$$

est bien définie et on montre que sa limite quand $J \rightarrow +\infty$ existe dans $L^2(\Omega, H)$ et définit notre l'intégrale stochastique donnée par

$$\int_0^t B(s)dW(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t B(s) \sqrt{q_j} \chi_j d\beta_j(t). \quad (1.3)$$

Théorème 1.3.16 (Isométrie d'Itô) : [2, P445-P446] Supposons que $\{B(t) : t \in [0, T]\}$ est un processus prévisible à valeurs dans L_0^2 tel que

$$\int_0^T \mathbb{E}[\|B\|_{L_0^2}^2] ds < \infty$$

Pour $t \in [0, T]$, (1.3) est bien définie dans $L^2(\Omega, H)$ et on a

$$\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^t B(s) dW(s) \right\|^2 \right] = \int_0^t \mathbb{E} [\|B\|_{L_0^2}^2] ds. \quad (1.4)$$

Notation 1.3.17 : Dans la suite de notre travail, nous noterons pour tout $r \in \mathbb{R}$ l'ensemble $H^r := \mathcal{D}(A^{r/2})$, de norme associée $\|u\|_r := \|A^{\frac{r}{2}} u\|$

1.4 Analyse numérique des équations déterministes

Dans cette partie, nous citons quelques estimations d'erreur bien connues de la méthode des éléments finis pour la discrétisation des problèmes paraboliques déterministes de la forme :

$$\begin{cases} du(t) = -Au(t)dt & t \in [0, T], \\ u(0) = x, \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x \in H^{-1}$. On montre que la solution de (1.5) est dans H^1 . Soit $\mathcal{T}_h$ une partition quasi-uniforme de D , de taille maximale h . Sur $\mathcal{T}_h$ on construit un espace d'élément fini $V_h \subset H^1$ constitué de polynômes continus par morceaux de degré $r \geq 1$ sur $\mathcal{T}_h$.

Considérons la forme bilinéaire a associée à A donnée par :

$$a(u, v) = (Au, v), \quad \forall u, v \in H^1 \quad (1.6)$$

1.4.1 Opérateurs de projection

Avant de commencer notre estimation, nous allons définir quelques opérateurs de projection qui nous seront utiles pour la suite de notre travail.

Définition 1.4.1 : On définit l'*opérateur elliptique discret* $A_h : V_h \longrightarrow V_h$ par :

$$(A_h x_h, y_h) = a(x_h, y_h) = (A^{1/2} x_h, A^{1/2} y_h), \quad \forall x_h, y_h \in V_h.$$

Définition 1.4.2 : On définit l'*opérateur de projection de Ritz* $R_h : H^1 \longrightarrow V_h$ par :

$$a(R_h x, y_h) = a(x, y_h), \quad \forall x \in H^1, \quad \forall y_h \in V_h.$$

Définition 1.4.3 : On définit l'*opérateur de projection orthogonale* $P_h : H \longrightarrow V_h$ par :

$$(P_h x, y_h) = (x, y_h), \quad \forall y_h \in V_h, \quad \forall x \in H.$$

Lemme 1.4.4 : ([8], [5]) Les opérateurs A_h, P_h et R_h vérifient les propriétés suivantes :

1. L'opérateur A_h est auto-adjoint et défini positif sur V_h . Et par suite $-A_h$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur V_h , donné par $E_h(t) = e^{-tA_h}$.

2. $\|A_h^{1/2}u_h\|^2 = a(u_h, u_h) = \|A_h^{1/2}u_h\|^2 = \|u_h\|_1^2, \quad \forall u_h \in V_h.$

3. Pour l'opérateur R_h , sous les hypothèses de régularité du maillage $\mathcal{T}_h$, on a :

$$\|R_h u - u\| + h\|R_h u - u\|_1 \leq Ch^s \|u\|_s, \quad \forall u \in H^s, \quad 1 \leq s \leq 2.$$

4. Pour l'opérateur P_h , sous les hypothèses de régularité du maillage $\mathcal{T}_h$, on a :

$$\|P_h u - u\| \leq Ch^s \|u\|_s, \quad \forall u \in H^s, \quad 0 \leq s \leq 2,$$

$$\|P_h u\|_1 \leq C\|u\|_1, \quad \forall u \in H^1.$$

1.4.2 Estimation de l'erreur pour la discrétisation spatio-temporelle

Dans cette sous-section, nous considérons une discrétisation en temps et en espace de (1.5). Nous avons choisi d'utiliser une combinaison du schéma de Galerkin et du schéma d'Euler implicite. Le schéma de discrétisation totale est donné par

$$\begin{cases} u_h^n + kA_h u_h^n = u_h^{n-1}, & n = 1, 2, \dots, N_h, \\ u_h^0 = P_h x, \end{cases}$$

où $k \in]0, 1]$ représente l'intervalle de temps fixé et $u_h^n \in V_h$ l'approximation de $u_h(t_n)$ au temps $t_n = nk$. Ce schéma peut aussi être représenté comme suit

$$u_h^n = (I + kA_h)^{-n} P_h x, \quad n = 0, \dots, N_h. \quad (1.7)$$

- Considérons la fonction rationnelle suivante :

$$R(z) = \frac{1}{1+z}, \quad \text{pour } z \in \mathbb{R}, \quad z \neq -1.$$

L'opérateur linéaire $R(kA_h)$ est défini par

$$R(kA_h)x = \sum_{m=1}^{N_h} R(k\lambda_{h,m})(x, \varphi_{h,m})\varphi_{h,m},$$

où $(\lambda_{h,m})_{m=1}^{N_h}$ sont les valeurs propres positives de $A_h : V_h \rightarrow V_h$ de fonctions propres orthonormales $(\varphi_{h,m})_{m=1}^{N_h} \in V_h$ et $\dim(V_h) = N_h$. Avec cette notation, (1.7) peut s'écrire

$$u_h^n = R(kA_h)^n P_h x, \quad n = 0, \dots, N_h.$$

- Pour tout $t \geq 0$, soit l'opérateur $E_{kh}(t)$ défini par

$$E_{kh}(t) := R(kA_h)^n, \quad \text{si } t \in [t_{j-1}, t_j[\quad \text{pour } n = 1, \dots, N_h.$$

Lemme 1.4.5 : [8, P.12] On a :

(i) Soit $0 \leq \rho \leq 1$. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|A_h^\rho R(kA_h)^n x_h\| \leq Ct_n^{-\rho} \|x_h\|, \quad \text{pour tout } n = 1, \dots, N_h \quad x_h \in V_h.$$

(ii) L'opérateur d'erreur E_{kh} vérifie

$$\|E_{kh}(t)x\| \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|x\|_{-1}, \quad \text{pour tout } x \in H^{-1}, t > 0, h, k \in]0, 1].$$

L'erreur entre l'approximation discrète u_h^n et la solution $u(t_n)$ est donnée par

$$e_n = (Ekh(t)P_h - E(t))x.$$

• Définissons l'opérateur d'erreur par :

$$F_{kh}(t) := E_{kh}(t)P_h - E(t).$$

Il vérifie les lemmes suivants :

Lemme 1.4.6 : [8, P.13] L'opérateur d'erreur F_{kh} vérifie les inégalités suivantes :

(i) Soit $0 \leq \nu \leq \mu \leq 2$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|F_{kh}(t)x\| \leq C(h^\mu + k^{\frac{\mu}{2}})t^{-\frac{\mu-\nu}{2}} \|x\|_\nu, \quad \text{pour tout } x \in H^\nu, t > 0, h, k \in]0, 1].$$

(ii) Soit $0 \leq \rho \leq 1$. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|F_{kh}(t)x\| \leq Ct^{-\frac{\rho}{2}} \|x\|_{-\rho}, \quad \text{pour tout } x \in H^{-\rho}, t > 0, h, k \in]0, 1].$$

(iii) Soit $0 \leq \rho \leq 1$. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|F_{kh}(t)x\| \leq C(h^{2-\rho} + k^{\frac{2-\rho}{2}})t^{-1} \|x\|_{-\rho}, \quad \text{pour tout } x \in H^{-\rho}, t > 0, h, k \in]0, 1].$$

Lemme 1.4.7 : [8, P.15] Soit $0 \leq \rho \leq 1$.

(i) Il existe $C > 0$ tel que

$$\left\| \int_0^t F_{kh}(s)x ds \right\| \leq C(h^{2-\rho} + k^{\frac{2-\rho}{2}})t^{-1} \|x\|_{-\rho},$$

pour tout $x \in H^{-\rho}, t > 0, h, k \in]0, 1]$.

(ii) Il existe $C > 0$ tel que

$$\left(\left\| \int_0^t F_{kh}(s)x ds \right\| \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(h^{1+\rho} + k^{\frac{1+\rho}{2}})t^{-1} \|x\|_\rho,$$

pour tout $x \in H^{-\rho}, t > 0, h, k \in]0, 1]$.

1.5 Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDP stochastique

Dans cette partie, nous énonçons et prouvons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution pour le problème suivant :

$$du = [-Au + f(u)]dt + G(u)dW(t) \quad \text{dans } [0, T] \times H \times \Omega, \quad (1.8)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } H \times \Omega, \quad (1.9)$$

où $H = L^2(D)$ avec D un domaine à bord régulier de $\mathbb{R}^n$, $-A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est le générateur d'un semi-groupe de contraction $E(t) = e^{-tA}$, $\{W(t), t \in [0, T]\}$ est un Q -processus de Wiener à valeurs dans H défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$, avec Q un opérateur de trace finie sur H et $f : H \rightarrow H$, $G : H \rightarrow L_0^2$.

Définition 1.5.1 (Solution forte) : *Un processus prévisible à valeurs dans H $\{u(t) : t \in [0, T]\}$ est appelé **solution forte** de (1.8)-(1.9) si :*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t [-Au(s) + f(u(s))]ds + \int_0^t G(u(s))dW(s) \quad \forall t \in [0, T]$$

Définition 1.5.2 (Solution faible) : *Un processus prévisible à valeurs dans H $\{u(t) : t \in [0, T]\}$ est appelé **solution faible** de (1.8)-(1.9) si pour tout $\phi \in H$:*

$$(u(t), \phi) = (u_0, \phi) + \int_0^t [-(Au(s), \phi) + (f(u(s)), \phi)]ds + \int_0^t (G(u(s))dW(s), \phi) \quad \forall t \in [0, T]$$

où d'après (1.3), on a :

$$\int_0^t (G(u(s))dW(s), \phi) := \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (G(u(s))\sqrt{q_j}\chi_j, \phi)d\beta_j(s)$$

Définition 1.5.3 (Solution intégrale) : *Un processus prévisible à valeurs dans H $\{u(t) : t \in [0, T]\}$ est appelé **solution intégrale** de (1.8) si :*

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)f(u(s))ds + \int_0^t E(t-s)G(u(s))dW(s) \quad \forall t \in [0, T]$$

Nous allons à présent prouver l'existence et l'unicité d'une solution intégrale à notre problème, puis étudier la régularité de la solution obtenue en temps et en espace.

Hypothèse 1.5.4 (Condition de Lipschitz sur G) : *Il existe $r \in [0, 1]$ et $L > 0$ tels que :*

$$\|A^{\frac{r}{2}}G(u)\|_{L_0^2} \leq L(1 + \|u\|), \quad \forall u \in H,$$

$$\|(G(u_1) - G(u_2))\|_{L_0^2} \leq L\|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in H.$$

Hypothèse 1.5.5 (Condition de Lipschitz sur f) : Il existe $L > 0$ tel que :

$$\|(f(u_1) - f(u_2))\| \leq L\|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in H.$$

Lemme 1.5.6 : Supposons que f vérifie l'hypothèse 1.5.5. Alors il existe $L > 0$ tel que :

$$(i) \|f(u)\| \leq L(1 + \|u\|), \quad \forall u \in H.$$

$$(ii) \|f(u)\|_{-1+r} \leq L(1 + \|u\|), \quad \forall u \in H.$$

Lemme 1.5.7 : Supposons que G vérifie l'hypothèse 1.5.4. Alors il existe $L > 0$ tel que :

$$(i) \|G(u)\|_{L_0^2} \leq L(1 + \|u\|), \quad \forall u \in H.$$

$$(ii) \|A^{\frac{r}{2}}G(u)\|_{L_0^2} \leq L(1 + \|u\|_r), \quad \forall u \in H^r.$$

Définition 1.5.8 (Nemytskii f) : Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. La fonction de Nemytskii $f : H = L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ est définie par :

$$f(u)(x) := F(u(x)), \quad \forall u \in L^2(D), x \in D.$$

Définition 1.5.9 (Nemytskii G) : Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. La fonction de Nemytskii $G : H = L^2(D) \rightarrow L_0^2$ est définie par :

$$(G(u)\chi)(x) := g(u(x))\chi(x), \quad \forall u, \chi \in H, x \in D.$$

Lemme 1.5.10 : Si les fonctions f et G sont des fonctions de Nemytskii telles que définies plus haut, alors elles vérifient les hypothèses 1.5.5 et 1.5.4 et par suite les lemmes 1.5.6 et 1.5.7.

Les lemmes suivants nous aiderons dans la preuve des résultats d'existence et d'unicité.

Lemme 1.5.11 : Si $u \in L^2(\Omega, H)$, alors

$$\|E(t)u\|_{L^2(\Omega, H)} \leq \|E(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \|u\|_{L^2(\Omega, H)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega, H)}. \quad (1.10)$$

Et si $B \in L^2(\Omega, L_0^2)$ et $L \in \mathcal{L}(H)$, on a :

$$\|LB\|_{L^2(\Omega, L_0^2)}^2 \leq \|L\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \mathbb{E}[\|B\|_{L_0^2}^2]. \quad (1.11)$$

Preuve : La première inégalité (1.10) découle de la continuité du semi-groupe $E(t)$ de H dans H , et la seconde du fait que $\|E(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ car $E(t)$ est un semi-groupe de contraction.

Soit $B \in L^2(\Omega, L_0^2)$ et $L \in \mathcal{L}(H)$. On a :

$$\begin{aligned} \|LB\|_{L_0^2}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \|LBQ^{1/2}\chi_j\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|L\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|BQ^{1/2}\chi_j\|^2 \\ &= \|L\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|BQ^{1/2}\chi_j\|^2 \\ &= \|L\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|B\|_{L_0^2}^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|LB\|_{L^2(\Omega, L_0^2)}^2 &= \mathbb{E}[\|LB\|_{L_0^2}^2] \\ &\leq \|L\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \mathbb{E}[\|B\|_{L_0^2}^2].\end{aligned}$$

■

Lemme 1.5.12 (Inégalité de Gronwall) : *Supposons que $z(t)$ satisfasse :*

$$0 \leq z(t) \leq a + \int_0^t b(s)z(s)ds, \quad t \geq 0,$$

pour $a \geq 0$ et une fonction intégrable positive $b(s)$. Alors :

$$z(t) \leq ae^{B(t)}, \quad \text{où } B(t) := \int_0^t b(s)ds.$$

Théorème 1.5.13 (Théorème général) : *Supposons que $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, H)$. Supposons aussi que A satisfasse l'hypothèse 1.1.4, f l'hypothèse 1.5.5 et G l'hypothèse 1.5.4. Alors il existe une unique solution intégrale $u(t)$ sur $[0, T]$ à l'équation (1.8)-(1.9). De plus, il existe une constante $K > 0$ telle que :*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\Omega, H)} \leq K(1 + \|u_0\|_{L^2(\Omega, H)}). \quad (1.12)$$

Preuve : Soit $\mathcal{H}_{2,T}$ l'espace de Banach des processus prévisibles $\{u(t) : t \in [0, T]\}$ de norme $\|u(t)\| := \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\Omega, H)}$. Pour $u \in \mathcal{H}_{2,T}$, posons :

$$(\mathcal{J}u)(t) := E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)f(u(s))ds + \int_0^t E(t-s)G(u(s))dW(s).$$

Un point fixe de $\mathcal{J}$ est solution intégrale de l'équation (1.8). Pour montrer l'existence et l'unicité du point fixe, nous allons montrer que $\mathcal{J}$ est une application contractante de $\mathcal{H}_{2,T}$ dans $\mathcal{H}_{2,T}$ et appliquer le théorème du point fixe.

- Premièrement, nous montrons que $\mathcal{J}$ est à valeurs dans $\mathcal{H}_{2,T}$. $\mathcal{J}u(t)$ est un processus prévisible car u_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable et l'intégrale stochastique est un processus prévisible d'après le théorème 1.3.16. À présent, montrons que $\|\mathcal{J}u(t)\|_{\mathcal{H}_{2,T}} < \infty$

D'après le l'inégalité (1.10), on a :

$$\|E(t)u_0\|_{L^2(\Omega, H)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega, H)}.$$

De plus, d'après (1.10) et le lemme 1.5.6 on a :

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t E(t-s)f(u(s))ds \right\|_{L^2(\Omega, H)} &\leq \int_0^t \|E(t-s)f(u(s))\|_{L^2(\Omega, H)}ds \\ &\leq \int_0^t \|f(u(s))\|_{L^2(\Omega, H)}ds \\ &\leq \int_0^t L(1 + \|u(s)\|_{L^2(\Omega, H)})ds.\end{aligned}$$

D'après l'isométrie d'Itô, l'inégalité 1.11 avec $L = E(t-s)$ et le lemme 1.5.7 on a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t E(t-s)G(u(s))dW(s) \right\|_{L^2(\Omega, H)}^2 &= \int_0^t \mathbb{E}[\|E(t-s)G(u(s))\|_{L_0^2}^2]ds \\ &\leq \int_0^t \mathbb{E}[\|G(u(s))\|_{L_0^2}^2]ds \\ &\leq TL^2(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|_{L^2(\Omega, H)})^2. \end{aligned}$$

Donc, pour $u \in \mathcal{H}_{2,T}$, $(\mathcal{J}u)$ est uniformément borné pour $t \in [0, T]$ dans $L^2(\Omega, H)$ et $\|\mathcal{J}u\|_{\mathcal{H}_{2,T}} < \infty$.

D'où $\mathcal{J}$ est à valeurs dans $\mathcal{H}_{2,T}$.

- À présent, montrons que $\mathcal{J}$ est contractante.

-En utilisant les propriétés de Lipschitz de f et G , on a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}u_1(t) - \mathcal{J}u_2(t)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 &\leq 2 \left\| \int_0^t E(t-s)(f(u_1(s)) - f(u_2(s)))ds \right\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \\ &\quad + 2 \left\| \int_0^t E(t-s)(G(u_1(s)) - G(u_2(s)))dW(s) \right\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \\ &\leq 2t \int_0^t L^2 \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds + 2TL^2 \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}_{2,T}}^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|\mathcal{J}u_1(t) - \mathcal{J}u_2(t)\|_{\mathcal{H}_{2,T}}^2 \leq 4TL^2 \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}_{2,T}}^2.$$

On choisit T pour que $T < 1/4L^2$, et par suite on a $\mathcal{J}$ contractante sur $[0, T]$.

En répétant la preuve sur $[0, T], [T, 2T], [2T, 3T], \dots$ on obtient une unique solution douce pour tout $t > 0$.

- Il nous reste donc à prouver (1.12). Pour cela, nous utiliserons le lemme de Gronwall. On a :

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)f(u(s))ds + \int_0^t E(t-s)G(u(s))dW(s).$$

D'après le lemme 1.5.11, on a :

$$\|E(t)u_0\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega, H)}^2.$$

D'après le lemme 1.5.11 et le lemme 1.5.6, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t E(t-s)f(u(s))ds \right\|_{L^2(\Omega, H)}^2 &\leq \int_0^t \|E(t-s)f(u(s))\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds \\ &\leq \int_0^t \|f(u(s))\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds \\ &\leq \int_0^t L^2(1 + \|u(s)\|_{L^2(\Omega, H)})^2 ds \\ &\leq L^2T + \int_0^t L^2\|u(s)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds. \end{aligned}$$

1.5. Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDP stochastique

De plus d'après le l'isométrie d'Itô, l'inégalité (1.11) avec $L = A^{-\frac{r}{2}}E(t-s)$, le iv) du lemme 1.1.8 et l'hypothèse 1.5.4 on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t E(t-s)G(u(s))dW(s) \right\|_{L^2(\Omega, H)}^2 &= \int_0^t \mathbb{E}[\|E(t-s)G(u(s))\|_{L_0^2}^2]ds \\
&= \int_0^t \mathbb{E}[\|A^{-\frac{r}{2}}E(t-s)A^{\frac{r}{2}}G(u(s))\|_{L_0^2}^2]ds \\
&\leq \int_0^t \|A^{-\frac{r}{2}}E(t-s)\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \mathbb{E}[\|A^{\frac{r}{2}}G(u_h(s))\|_{L_0^2}^2]ds \\
&\leq \lambda_1^{-r} \int_0^t \mathbb{E}[\|A^{\frac{r}{2}}G(u(s))\|_{L_0^2}^2]ds \\
&\leq \lambda_1^{-r} \int_0^t \mathbb{E}[2L^2(1 + \|u(s)\|^2)]ds \\
&\leq 2\lambda_1^{-r}L^2T + \int_0^t 2\lambda_1^{-r}L^2\|u(s)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 &\leq 2\|E(t)u_0\|_{L^2(\Omega, H)}^2 + 2\left\| \int_0^t E(t-s)f(u(s))ds \right\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \\
&\quad + 2\left\| \int_0^t E(t-s)G(u(s))dW(s) \right\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \\
&\leq C_1(1 + \|P_h u_0\|_{L^2(\Omega, H)}^2) + \int_0^t C_2\|u_h(s)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds.
\end{aligned}$$

où $C_1 = 2 + 2L^2T(1 + 2\lambda_1^{-r})$ et $C_2 = 2L^2(1 + 2\lambda_1^{-r})$.

Donc en appliquant le lemme de Gronwall avec $z(t) = \|u(t)\|_{L^2(\Omega, H)}^2$ et $a = C_1(1 + \|u_0\|_{L^2(\Omega, H)}^2)$, on a bien :

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega, H)} \leq K(1 + \|u_0\|_{L^2(\Omega, H)}), \quad t \in [0, T],$$

avec $K = \sqrt{C_1 e^{C_2 T}}$. ■

Les théorèmes suivants présentent les résultats de régularité spatiale et temporelle de notre solution intégrale. Ces théorèmes jouent un rôle très important dans l'analyse de la convergence de notre schéma numérique.

Théorème 1.5.14 (Régularité en temps) : [2] *Considérons les hypothèses du théorème 1.5.13 vérifiées et considérons $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, H^2)$. Pour $T > 0$, $\epsilon \in (0, 1+r)$ et $\theta_1 := \min\{\frac{1+r}{2} - \epsilon, \frac{1}{2}\}$, il existe $K_{RT} > 0$ tel que :*

$$\|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Omega, H)} \leq K_{RT}(t_2 - t_1)^{\theta_1}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

Théorème 1.5.15 (Régularité en espace) : [2] *Considérons les hypothèses du théorème 1.5.13 vérifiées pour $r \in [0, 1]$ et soit $u(t)$ la solution intégrale de 1.8. Si $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, H^2)$, alors $u(t) \in L^2(\Omega, H^{1+r})$ pour $t \in [0, T]$.*

SCHÉMA D'EULER-MARUYAMA ET MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Dans ce chapitre, nous faisons une discrétisation en espace par la méthode des éléments finis de Galerkin et étudions l'existence d'une solution de notre problème semi-discret, puis nous faisons une discrétisation en temps par la méthode d'Euler-Maruyama de notre problème semi-discret, et enfin nous étudions la stabilité et la convergence forte du schéma numérique obtenu.

Nous rappelons d'abord le problème :

$$du = [-Au + f(u)]dt + G(u)dW(t) \quad \text{dans} \quad [0, T] \times H \times \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans} \quad H \times \Omega, \quad (2.2)$$

où $H = L^2(D)$ avec D un domaine à bord régulier de $\mathbb{R}^n$, $-A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction $E(t) = e^{-tA}$, $\{W(t), t \in [0, T]\}$ est un Q -processus de Wiener à valeurs dans H sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$, avec Q un opérateur de trace finie sur H et $f : H \longrightarrow H$, $G : H \longrightarrow L_0^2$.

2.1 Discrétisation du système

Nous adoptons une triangulation régulière $\mathcal{T}_h$ de D d'éléments K en suivant la théorie classique de la méthode des éléments finis donnée dans ([9],[10]). Soit $h = \max_{\mathcal{T}_h} h_K$ la taille du maillage, où $h_K = \text{diam}(K)$ et V_h l'espace de dimension finie de H^1 qui se compose des polynômes continus par morceaux de degré $r \geq 1$ sur $\mathcal{T}_h$. Considérons la forme bilinéaire associée à A donnée par :

$$a(u, v) = (Au, v) = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v), \quad \forall u, v \in H^1. \quad (2.3)$$

2.1.1 Discrétisation en espace

D'après la définition de $a(.,.)$, la solution faible de notre problème est donnée par :

$$(u(t), \phi) = (u_0, \phi) - \int_0^t a(u(s), \phi) ds + \int_0^t (f(u(s)), \phi) ds + \int_0^t (G(u(s)), \phi) dW(s),$$

$$\forall \phi \in H^1, \forall t \in [0, T].$$

Ainsi, notre problème de discrétisation spatiale est donc de trouver $u_h(t) = u_h(., t)$ tel que :

$$(u_h(t), v_h) = (u_0, v_h) - \int_0^t a(u_h(s), v_h) ds + \int_0^t (f(u_h(s)), v_h) ds + \int_0^t (G(u_h(s)), v_h) dW(s),$$

$$\forall v_h \in V_h, \forall t \in [0, T].$$

D'après la définition de A_h et P_h , notre schéma de discrétisation spatiale peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} du_h(t) = [-A_h u_h(t) + P_h f(u_h(t))] dt + P_h G(u_h(t)) dW(t) & \forall t \in [0, T], \\ u_h(0) = P_h u_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret

Théorème 2.2.1 : *Supposons les hypothèses du théorème 1.5.13 vérifiées. Alors il existe une unique solution intégrale $u_h(t)$ sur $[0, T]$ au problème (2.4). De plus, il existe une constante $K > 0$ telle que :*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_h(t)\|_{L^2(\Omega, V_h)} \leq K(1 + \|P_h u_0\|_{L^2(\Omega, V_h)}). \quad (2.5)$$

Preuve : Pour cette preuve, nous procéderons de manière analogue à la preuve du théorème 1.5.13.

V_h est un espace de Hilbert pour la norme induite par H^1 car il est de dimension finie.

Soit $\mathcal{H}'_{2,T}$ l'espace de Banach des processus prévisibles $\{u_h(t) : t \in [0, T]\}$ de norme $\|u_h(t)\| := \sup_{t \in [0, T]} \|u_h(t)\|_{L^2(\Omega, V_h)}$. D'après le lemme 1.4.4, $-A_h$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur V_h , noté $E_h(t) = e^{-tA_h}$.

Pour $u_h \in \mathcal{H}'_{2,T}$, posons :

$$(\mathcal{J}u_h)(t) := E_h(t)P_h u_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h f(u_h(s)) ds + \int_0^t E_h(t-s)P_h G(u_h(s)) dW(s)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité du point fixe, nous allons montrer que $\mathcal{J}$ est une application contractante de $\mathcal{H}'_{2,T}$ dans $\mathcal{H}'_{2,T}$ et appliquer le théorème du point fixe.

- Premièrement, nous montrons que $\mathcal{J}$ est à valeurs dans $\mathcal{H}'_{2,T}$. $\mathcal{J}u_h(t)$ est un processus prévisible car $P_h u_0$ est $\mathcal{F}_0$ -mesurable et l'intégrale stochastique est un processus prévisible d'après

2.2. Existence et unicité de la solution du problème semi-discret

le théorème 1.3.16. À présent, montrons que $\|\mathcal{J}u_h(t)\|_{\mathcal{H}'_{2,T}} < \infty$.

D'après le l'inégalité (1.10), on a :

$$\|E_h(t)P_h u_0\|_{L^2(\Omega, V_h)} \leq \|P_h u_0\|_{L^2(\Omega, V_h)}.$$

De plus, d'après le lemme 1.5.6 et le lemme 1.4.4(iv)

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t E_h(t-s)P_h f(u_h(s))ds \right\|_{L^2(\Omega, V_h)} &\leq \int_0^t \|E_h(t-s)P_h f(u_h(s))\|_{L^2(\Omega, V_h)} ds \\ &\leq \int_0^t \|P_h f(u_h(s))\|_{L^2(\Omega, V_h)} ds \\ &\leq \int_0^t L(1 + \|u_h(s)\|_{L^2(\Omega, V_h)}) ds \\ &\leq TL(1 + \sup_{0 \leq s \leq T} \|u_h(s)\|_{L^2(\Omega, V_h)}). \end{aligned}$$

D'après l'isométrie d'Itô, l'inégalité 1.11 avec $L = E_h(t-s)$ et le lemme 1.5.7 on a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t E_h(t-s)P_h G(u_h(s))dW(s) \right\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 &= \int_0^t \mathbb{E}[\|E_h(t-s)P_h G(u_h(s))\|_{L_0^2}^2] ds \\ &\leq \int_0^t \mathbb{E}[\|P_h G(u_h(s))\|_{L_0^2}^2] ds \\ &\leq TL^2(1 + \sup_{0 \leq s \leq T} \|u_h(s)\|_{L^2(\Omega, V_h)})^2. \end{aligned}$$

Donc, pour $u_h \in \mathcal{H}'_{2,T}$, $(\mathcal{J}u_h)$ est uniformément borné pour $t \in [0, T]$ dans $L^2(\Omega, V_h)$ et $\|\mathcal{J}u_h\|_{\mathcal{H}_{2,T}} < \infty$.

D'où $\mathcal{J}$ est à valeurs dans $\mathcal{H}_{2,T}$.

- À présent, montrons que $\mathcal{J}$ est contractante.

-En utilisant les propriétés de Lipschitz de f et G et le lemme 1.4.4(iv), on a pour $u_h^1, u_h^2 \in \mathcal{H}'_{2,T}$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}u_h^1(t) - \mathcal{J}u_h^2(t)\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 &\leq 2 \left\| \int_0^t E_h(t-s)P_h (f(u_h^1(s)) - f(u_h^2(s))) ds \right\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 \\ &\quad + 2 \left\| \int_0^t E_h(t-s)P_h (G(u_h^1(s)) - G(u_h^2(s))) dW(s) \right\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 \\ &\leq 2t \int_0^t L^2 \|u_h^1(s) - u_h^2(s)\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 ds + 2TL^2 \|u_h^1 - u_h^2\|_{\mathcal{H}'_{2,T}}^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|\mathcal{J}u_h^1(t) - \mathcal{J}u_h^2(t)\|_{\mathcal{H}'_{2,T}}^2 \leq 4TL^2 \|u_h^1 - u_h^2\|_{\mathcal{H}'_{2,T}}^2.$$

On choisit T pour que $T < 1/4L^2$, et par suite on a $\mathcal{J}$ contractante sur $[0, T]$.

En répétant la preuve sur $[0, T], [T, 2T], [2T, 3T], \dots$ on obtient une unique solution douce pour tout $t > 0$.

- Il nous reste donc à prouver (1.12). Pour cela, nous utiliserons le lemme de Gronwall. On a :

$$u_h(t) = E_h(t)P_h u_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h f(u(s))ds + \int_0^t E_h(t-s)P_h G(u(s))dW(s).$$

D'après le lemme 1.5.11, on a :

$$\|E_h(t)P_h u_0\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 \leq \|P_h u_0\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2.$$

D'après le lemme 1.5.11 et le lemme 1.5.6, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t E_h(t-s)P_h f(u_h(s))ds \right\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 &\leq \int_0^t \|E_h(t-s)P_h f(u_h(s))\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 ds \\ &\leq \int_0^t \|P_h f(u_h(s))\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 ds \\ &\leq \int_0^t L^2(1 + \|u_h(s)\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2) ds \\ &\leq L^2 T + \int_0^t L^2 \|u_h(s)\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 ds. \end{aligned}$$

De plus d'après la l'isométrie d'Itô, l'inégalité (1.11) avec $L = A^{-\frac{r}{2}} E_h(t-s)$, le lemme 1.1.8 iv) et l'hypothèse 1.5.4 on a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t E_h(t-s)P_h G(u_h(s))dW(s) \right\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 &= \int_0^t \mathbb{E}[\|E_h(t-s)P_h G(u_h(s))\|_{L_0^2}^2] ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E}[\|A^{-\frac{r}{2}} E_h(t-s)A^{\frac{r}{2}} P_h G(u_h(s))\|_{L_0^2}^2] ds \\ &\leq \int_0^t \|A^{-\frac{r}{2}} E_h(t-s)\|_{\mathcal{L}(V_h)}^2 \mathbb{E}[\|A^{\frac{r}{2}} P_h G(u_h(s))\|_{L_0^2}^2] ds \\ &\leq \lambda_1^{-r} \int_0^t \mathbb{E}[\|A^{\frac{r}{2}} P_h G(u_h(s))\|_{L_0^2}^2] ds \\ &\leq \lambda_1^{-r} \int_0^t \mathbb{E}[2L^2(1 + \|u_h(s)\|^2)] ds \\ &\leq 2\lambda_1^{-r} L^2 T + \int_0^t 2\lambda_1^{-r} L^2 \|u_h(s)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \|u_h(t)\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 &\leq 2\|E_h(t)P_h u_0\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 + 2\left\| \int_0^t E_h(t-s)P_h f(u_h(s))ds \right\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 \\ &\quad + 2\left\| \int_0^t E_h(t-s)P_h G(u_h(s))dW(s) \right\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 \\ &\leq C_1(1 + \|P_h u_0\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2) + \int_0^t C_2 \|u_h(s)\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2 ds, \end{aligned}$$

où $C_1 = 2 + 2L^2 T(1 + 2\lambda_1^{-r})$ et $C_2 = 2L^2(1 + 2\lambda_1^{-r})$.

Donc en appliquant le lemme de Gronwall avec $z(t) = \|u_h(t)\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2$ et $a = C_1(1 + \|P_h u_0\|_{L^2(\Omega, V_h)}^2)$, on a bien :

$$\|u_h(t)\|_{L^2(\Omega, V_h)} \leq K(1 + \|P_h u_0\|_{L^2(\Omega, V_h)}), \quad t \in [0, T],$$

avec $K = \sqrt{C_1 e^{C_2 T}}$. ■

2.2.1 Introduction de la méthode Euler-Maruyama

Dans le calcul d'Itô, la **méthode Euler-Maruyama** est une méthode de solution numérique approchée d'une équation différentielle stochastique (EDS). Il s'agit d'une extension de la méthode

d'Euler pour les équations différentielles ordinaires aux équations différentielles stochastiques.

Elle porte le nom de Leonhard Euler et de Gisiro Maruyama.

Considérons l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t, \quad t \in [0, T],$$

avec la condition initiale $X_0 = x_0$, où $\{W_t, t \in [0, T]\}$ représente un processus de Wiener.

Soit $\{t_n\}_{n=0}^N$ une subdivision uniforme de l'intervalle $[0, T]$ de pas $\Delta t = \frac{T}{N}$.

1. L'**approximation d'Euler-Maruyama explicite** de la vraie solution X est le processus

Y donné par :

- $Y_0 = x_0$,
- pour $0 \leq n \leq N-1$,

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n, t_n)\Delta t + b(Y_n, t_n)\Delta W_n,$$

où $\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$.

2. L'**approximation d'Euler-Maruyama implicite** de la vraie solution X est le processus

Y donné par :

- $Y_0 = x_0$,
- pour $0 \leq n \leq N-1$,

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_{n+1}, t_{n+1})\Delta t + b(Y_{n+1}, t_{n+1})\Delta W_n,$$

où $\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$.

Remarque 2.2.2 : Étant donné que l'équation différentielle stochastique que nous étudions dans le cadre de notre est semi-linéaire et que nous voulons un bon ordre de convergence, dans le but de linéariser notre schéma numérique, nous allons utiliser l'**approximation d'Euler-Maruyama semi-implicite** qui consiste à appliquer l'approximation implicite aux termes linéaires de l'équation et l'approximation explicite aux termes non linéaires.

2.2.2 Discrétisation en temps

Soit $\{t_n\}_{n=0}^N$ une subdivision uniforme de l'intervalle $[0, T]$ de pas $\Delta t = \frac{T}{N}$. Alors, pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $t_n = n\Delta t$.

D'après (2.4), on a pour tout $v_h \in V_h$:

$$(u(t_{n+1}), v_h) = (u(t_n), v_h) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(u(s), v_h)ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(u(s)), v_h)ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (G(u(s)), v_h)dW(s).$$

2.3. Étude de la stabilité

On note par $u_h^n \in V_h$ l'approximation de $u(t_n)$ au temps t_n . En appliquant la méthode Euler-Maruyama semi-implicite, on obtient pour $n = 0, 1, \dots, N-1$:

$$(u_h^{n+1}, v_h) = (u_h^n, v_h) - \Delta t a(u_h^{n+1}, v_h) + \Delta t (f(u_h^n), v_h) + (v_h, G(u_h^n)) \Delta W_{n+1}, \quad (2.6)$$

où $\Delta W_{n+1} = W(t_{n+1}) - W(t_n)$.

D'après les définitions de A_h et P_h , le schéma numérique pour la résolution de notre problème est donc donné par :

$$\begin{cases} u_h^{n+1} = (I + \Delta t A_h)^{-1} (u_h^n + P_h f(u_h^n) \Delta t + P_h G(u_h^n) \Delta W_{n+1}) & \text{pour } n = 0, \dots, N-1, \\ u_h^0 = P_h u_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

2.3 Étude de la stabilité

Dans cette section, nous étudions la stabilité du schéma numérique obtenu après les discrétisations spatiales et temporelles de notre problème.

Théorème 2.3.1 : *Supposons toutes les hypothèses du théorème 1.5.13, alors la solution $\{u_h^n\}_{n=0}^N$ du problème semi-discret 2.7 vérifie l'inégalité :*

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \mathbb{E}[\|u_h^n\|^2] \leq K(1 + \mathbb{E}[\|u_h^0\|^2])$$

Les lemmes suivants nous seront utiles pour la preuve de la stabilité de notre schéma numérique.

Lemme 2.3.2 (Inégalité de Young) : *Pour tous réels a et b positifs, et pour tout $\epsilon > 0$, on a :*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}.$$

Lemme 2.3.3 (Lemme de Gronwall discret) : *Soient $\rho > 0$ et deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ positives telles que :*

$$a_n \leq \rho \quad \text{et} \quad a_n \leq \rho + \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_j, \quad \forall n \geq 1,$$

alors :

$$a_n \leq \rho \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j\right), \quad \forall n \geq 1.$$

Preuve : Soit $k \in \{0, \dots, N-1\}$. D'après (2.6), pour tout $v_h \in V_h$:

$$(u_h^{k+1}, v_h) = (u_h^k, v_h) - \Delta t a(u_h^{k+1}, v_h) + \Delta t (f(u_h^k), v_h) + (G(u_h^k) \Delta W_{k+1}, v_h).$$

2.3. Étude de la stabilité

Pour $v_h = u_h^{k+1} \in V_h$, on a :

$$(u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) = (u_h^k, u_h^{k+1}) - \Delta_t a(u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) + \Delta_t (f(u_h^k), u_h^{k+1}) + (G(u_h^k) \Delta W_{k+1}, u_h^{k+1}).$$

Par suite :

$$(u_h^{k+1} - u_h^k, u_h^{k+1}) + \Delta_t a(u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) = \Delta_t (f(u_h^k), u_h^{k+1}) + (G(u_h^k) \Delta W_{k+1}, u_h^{k+1}).$$

Or

$$\frac{1}{2}(u_h^{k+1} - u_h^k, u_h^{k+1}) = \frac{1}{2}(\|u_h^{k+1}\|^2 - \|u_h^k\|^2 + \|u_h^{k+1} - u_h^k\|^2),$$

et d'après le lemme 1.4.4 (ii),

$$a(u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) = \|A^{\frac{1}{2}} u_h^{k+1}\|^2.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\|u_h^{k+1}\|^2 - \|u_h^k\|^2 + \|u_h^{k+1} - u_h^k\|^2) + \Delta_t \|A^{\frac{1}{2}} u_h^{k+1}\|^2 &= \Delta_t (f(u_h^k), u_h^{k+1}) + (G(u_h^k) \Delta W_{k+1}, u_h^{k+1} - u_h^k) \\ &+ (G(u_h^k) \Delta W_{k+1}, u_h^k). \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} (G(u_h^k) \Delta W_{k+1}, u_h^{k+1} - u_h^k) &\leq \|G(u_h^k) \Delta W_{k+1}\| \cdot \|u_h^{k+1} - u_h^k\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|G(u_h^k) \Delta W_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_h^{k+1} - u_h^k\|^2 \quad (\text{d'après le lemme 2.3.2}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2}(\|u_h^{k+1}\|^2 - \|u_h^k\|^2) + \Delta_t \|A^{\frac{1}{2}} u_h^{k+1}\|^2 \leq \Delta_t (f(u_h^k), u_h^{k+1}) + (G(u_h^k) \Delta W_{k+1}, u_h^k) + \|G(u_h^k) \Delta W_{k+1}\|^2.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} (G(u_h^k) \Delta W_{k+1}, u_h^k) &\leq \|G(u_h^k) \Delta W_{k+1}\| \cdot \|u_h^k\| \\ &\leq \|G(u_h^k) \Delta W_{k+1}\|^2 + \frac{1}{4} \|u_h^k\|^2 \quad (\text{d'après le lemme 2.3.2}). \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 2.3.2 et le lemme 1.5.6 on a :

$$\begin{aligned} (f(u_h^k), u_h^{k+1}) &\leq \|f(u_h^k)\| \cdot \|u_h^{k+1}\| \\ &\leq 2\Delta_t \|f(u_h^k)\|^2 + \frac{1}{4\Delta_t} \|u_h^{k+1}\|^2 \\ &\leq 4TL^2(1 + \|u_h^k\|^2) + \frac{1}{4\Delta_t} \|u_h^{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\|u_h^{k+1}\|^2 - \|u_h^k\|^2) + \Delta_t \|A^{\frac{1}{2}} u_h^{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2}(\|u_h^k\|^2 + 4L^2(1 + \|u_h^k\|^2) + 3L^2(1 + \|u_h^k\|^2) \|\Delta W_{k+1}\|^2) \\ &\leq 5L^2(1 + \|u_h^k\|^2) + \frac{3}{4} \|G(u_h^k) \Delta W_{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

2.4. Étude de la convergence

En faisant passer l'espérance, on a :

$$\frac{1}{4}(\mathbb{E}[\|u_h^{k+1}\|^2] - \mathbb{E}[\|u_h^k\|^2]) + \Delta_t \mathbb{E}[\|A^{\frac{1}{2}} u_h^{k+1}\|^2] \leq 5TL^2(1 + \mathbb{E}[\|u_h^k\|^2]) + \frac{3}{4}\mathbb{E}[\|G(u_h^k)\Delta W_{k+1}\|^2].$$

Or d'après l'isométrie d'Itô, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|G(u_h^k)\Delta W_{k+1}\|^2] &= \mathbb{E}\left[\left\|\int_{t_k}^{t_{k+1}} G(u_h^k) dW(s)\right\|^2\right] \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}[\|G(u_h^k)\|_{L_0^2}^2] ds \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}[\|A^{-\frac{r}{2}} A^{\frac{r}{2}} G(u_h^k)\|_{L_0^2}^2] ds \\ &\leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|A^{-\frac{r}{2}}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \mathbb{E}[\|A^{\frac{r}{2}} G(u_h^k)\|_{L_0^2}^2] ds \quad (\text{d'après 1.11}) \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda_1^{-r} \mathbb{E}[\|A^{\frac{r}{2}} G(u_h^k)\|_{L_0^2}^2] ds \quad (\text{d'après le lemme 1.1.8(iv)}) \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda_1^{-r} L^2(1 + \mathbb{E}[\|u_h^k\|^2]) ds \quad (\text{d'après le lemme 1.5.7}) \\ &= \lambda_1^{-r} L_t^\Delta (1 + \mathbb{E}[\|u_h^k\|^2]) \\ &\leq \lambda_1^{-r} L^2 T (1 + \mathbb{E}[\|u_h^k\|^2]). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{4}[(1 + \mathbb{E}[\|u_h^{k+1}\|^2]) - \mathbb{E}[\|u_h^k\|^2]] + \Delta_t \mathbb{E}[\|A^{\frac{1}{2}} u_h^{k+1}\|^2] \leq \underbrace{5TL^2(1 + \lambda_1^{-r})}_{M} (1 + \mathbb{E}[\|u_h^k\|^2]).$$

En sommant cette inégalité pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, avec $n \in \{0, \dots, N\}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(1 + \mathbb{E}[\|u_h^n\|^2]) &\leq \frac{1}{4}(1 + \mathbb{E}[\|u_h^n\|^2]) + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_t \mathbb{E}[\|A^{\frac{1}{2}} u_h^{k+1}\|^2] \\ &\leq \frac{1}{4}(1 + \mathbb{E}[\|u_h^0\|^2]) + M \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \mathbb{E}[\|u_h^k\|^2]). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall discret, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|u_h^n\|^2] &\leq (1 + \mathbb{E}[\|u_h^n\|^2]) \\ &\leq K(1 + \mathbb{E}[\|u_h^0\|^2]), \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.4 Étude de la convergence

Dans cette section, nous étudions la convergence du schéma numérique 2.7 obtenu précédemment. Considérons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.4.1 : La valeur initiale $u_0 : \Omega \rightarrow H^{r+1}$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ -mesurable avec $\mathbb{E}[\|u_0\|^2] < \infty$

2.4. Étude de la convergence

Théorème 2.4.2 : *Sous les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité et l'hypothèse 2.4.1, avec $r \in [0, 1[$, il existe $C > 0$ indépendant de Δ_t et h tel que :*

$$\|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega, H)} \leq C(h^{r+1} + \Delta_t^{\frac{1}{2}}), \quad n = 1, \dots, N$$

où u représente la solution intégrale de (1.8)-(1.9) et u_h^n est donnée par 2.7.

Preuve : Pour ce faire, nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme 2.4.3 : *[11, Lemme 7.1] Soit $C_1, C_2 \geq 0$ et soit $(\phi_n)_{n=1, \dots, N}$ une suite de termes positifs. Si $\beta \in]0, 1]$ on a :*

$$\phi_n \leq C_1 + C_2 \Delta_t \sum_{i=1}^{n-1} t_{n-i}^{-1+\beta} \phi_i \quad n = 1, \dots, N,$$

alors il existe une constante $C = C(C_2, T, \beta)$ telle que

$$\phi_n \leq CC_1 \quad n = 1, \dots, N$$

Lemme 2.4.4 : *[5, Théorème 7.8] Supposons que*

1. $(A_h)^{-1}$ est auto-adjoint, défini positif sur V_h et que son prolongement est semi-défini positif sur H .
 2. il existe $r \geq 1$ tel que $\|(A_h^{-1} - A^{-1})f\| \leq Ch^s \|f\|_{s-2}$, $2 \leq s \leq 1+r$, $f \in h^{s-2}$
 3. $u_0 \in H^{max(1+r, 2q)/2}$ et $\|u_0 - u_h^0\| \leq Ch^{1+r} \|u_0\|_{1+r}$
- alors, on a :

$$\|u_h^n - u(t_n)\| \leq C(h^{1+r} \|u_0\|_{1+r} + \Delta_t^q \|u_0\|_{2q}), \quad t_n \geq 0.$$

La solution u_h^n du schéma discret (2.7) exprimée en fonction de la fonction rationnelle $R(\Delta_t A_h)$ introduite dans les préliminaires est donnée par :

$$u_h^n = R(\Delta_t A_h)^n P_h u_0 + \Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} R(\Delta_t A_h)^{n-i} P_h f(u_h^i) + \sum_{i=0}^{n-1} R(\Delta_t A_h)^{n-i} P_h G(u_h^i) \Delta W(i+1)$$

On obtient donc pour l'erreur :

$$\begin{aligned} \|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega, H)} &\leq \underbrace{\|R(\Delta_t A_h)^n P_h u_0 - E(t_n) u_0\|_{L^2(\Omega, H)}}_I \\ &+ \underbrace{\left\| \Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} R(\Delta_t A_h)^{n-i} P_h f(u_h^i) - \int_0^{t_n} E(t_n - s) f(u(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega, H)}}_{II} \\ &+ \underbrace{\left\| \sum_{i=0}^{n-1} R(\Delta_t A_h)^{n-i} P_h G(u_h^i) \Delta W(i+1) - \int_0^{t_n} E(t_n - s) G(u(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega, H)}}_{III} \end{aligned}$$

2.4. Étude de la convergence

Le terme I est l'erreur du schéma de discrétisation de l'équation homogène $du(t) = Au(t)$, avec $u(0) = u_0$ étant une variable aléatoire. D'après l'hypothèse (2.4.1), on a $u_0(\omega) \in H^{1+r}$ pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$. Ainsi, en appliquant le lemme 2.4.4 avec $q = (1+r)/2$, on a :

$$I \leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \|A^{\frac{1+r}{2}} P_h u_0\|_{L^2(\Omega, H)}. \quad (2.8)$$

Pour minorer les 2 autres sommes, introduisons les processus suivants :

$$\begin{cases} u_{kh}(t) := u_h^{n-1}, & \text{si } t \in]t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, \dots, N, \\ u_{kh}(0) := P_h u_0. \end{cases}$$

et

$$E_{kh}(t) = R(\Delta_t A_h)^n \quad \text{si } t \in [t_{n-1}, t_n[, \quad n = 1, \dots, N.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} R(\Delta_t A_h)^{n-i} P_h f(u_h^i) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E_{kh}(t_n - s) P_h f(u_{kh}(s)) ds \\ &= \int_0^{t_n} E_{kh}(t_n - s) P_h f(u_{kh}(s)) ds. \end{aligned}$$

et de manière analogue, on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} R(\Delta_t A_h)^{n-i} P_h G(u_h^i) = \int_0^{t_n} E_{kh}(t_n - s) P_h G(u_{kh}(s)) ds.$$

On a donc d'après (2.9) :

$$\begin{aligned} II &= \left\| \int_0^{t_n} (E_{kh}(t_n - s) P_h f(u_{kh}(s))) - E(t_n - s) f(u(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega, H)} \\ &\leq \left\| \int_0^{t_n} E_{kh}(t_n - s) P_h (f(u_{kh}(s)) - f(u(s))) ds \right\|_{L^2(\Omega, H)} \\ &+ \left\| \int_0^{t_n} (E_{kh}(t_n - s) P_h - E(t_n - s)) (f(u(s)) - f(u(t_n))) ds \right\|_{L^2(\Omega, H)} \\ &+ \left\| \int_0^{t_n} (E_{kh}(t_n - s) P_h - E(t_n - s)) f(u(t_n)) ds \right\|_{L^2(\Omega, H)} \\ &=: J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

• Pour le terme J_1 , d'après le lemme 1.4.5, on a $\|E_{kh}(t) P_h x\| \leq t_i^{-\frac{1-r}{2}} \|x\|_{-1+r}$ pour tout $x \in H^{-1+r}$. En utilisant le lemme 1.5.6(ii), on a :

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_0^{t_n} \|E_{kh}(t_n - s) P_h (f(u_{kh}(s)) - f(u(s)))\|_{L^2(\Omega, H)} ds \\ &\leq C \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(s)\|_{L^2(\Omega, H)} ds \\ &\leq C \Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)} \\ &+ C \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u(t_i) - u(s)\|_{L^2(\Omega, H)} ds. \end{aligned}$$

2.4. Étude de la convergence

D'après le théorème 1.5.14 de régularité en temps de u , on a :

$$\begin{aligned}
C \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u(t_i) - u(s)\|_{L^2(\Omega, H)} ds &\leq C \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} (s - t_i)^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \frac{1}{3} C \Delta_t^{\frac{3}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \\
&= \frac{1}{3} C \Delta_t^{\frac{3}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} T^{-\frac{1-r}{2}} \\
&\leq C \Delta_t^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la majoration de J_1 est donnée par :

$$J_1 \leq C \Delta_t^{\frac{1}{2}} + C \Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}.$$

• Pour la majoration de J_2 on remarque premièrement que $F_{kh}(t) = E_{kh}(t)P_h - E(t)$. On peut donc appliquer le lemme 1.4.6(iii) avec $\rho = 1 - r$ et le théorème 1.5.14 avec $\epsilon = 0$.

$$\begin{aligned}
J_2 &= \left\| \int_0^{t_n} F_{kh}(t_n - s) (f(u(s)) - f(u(t_n))) ds \right\|_{L^2(\Omega, H)} \\
&\leq \int_0^{t_n} \|F_{kh}(t_n - s) (f(u(s)) - f(u(t_n)))\|_{L^2(\Omega, H)} ds \\
&\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \int_0^{t_n} (t_n - s)^{-1} \|f(u(s)) - f(u(t_n))\|_{L^2(\Omega, H^{-1+r})} ds \\
&\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \int_0^{t_n} (t_n - s)^{-1} \|u(s) - u(t_n)\|_{L^2(\Omega, H)} ds \\
&\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \int_0^{t_n} (t_n - s)^{-1+\frac{1}{2}} ds \\
&\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}).
\end{aligned}$$

• D'après le lemme 1.4.6 (iii) avec $\rho = 1 - r$ et le lemme 1.5.6(i), on a :

$$\begin{aligned}
J_3 &= \left\| \int_0^{t_n} F_{kh}(t_n - s) f(u(t_n)) ds \right\|_{L^2(\Omega, H)} \\
&\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \|f(u(t_n))\|_{L^2(\Omega, H^{-1+r})} \\
&\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) (1 + \sup_{s \in [0, T]} \|u(s)\|_{L^2(\Omega, H)}) \\
&\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}).
\end{aligned}$$

Donc

$$II \leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1}{2}} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}. \quad (2.9)$$

Il ne nous reste plus qu'à majorer III , qui contient les intégrales stochastiques. D'après l'isométrie

2.4. Étude de la convergence

d'Itô, on a :

$$\begin{aligned}
III &= \left(\left\| \int_0^{t_n} (E_{kh}(t_n - s)P_h G(u_{kh}(s)) - E(t_n - s)G(u(s)))ds \right\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^{t_n} \mathbb{E}[\|E_{kh}(t_n - s)P_h G(u_{kh}(s)) - E(t_n - s)G(u(s))\|_{L_0^2}^2]ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^{t_n} \mathbb{E}[\|E_{kh}(t_n - s)P_h (G(u_{kh}(s)) - G(u(s)))\|_{L_0^2}^2]ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_0^{t_n} \mathbb{E}[\|F_{kh}(t_n - s)(G(u(s)) - G(u(t_n)))\|_{L_0^2}^2]ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_0^{t_n} \mathbb{E}[\|F_{kh}(t_n - s)G(u(t_n))\|_{L_0^2}^2]ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&=: J_4 + J_5 + J_6
\end{aligned}$$

• Pour le terme J_4 , on utilise le fait que $\|E_{kh}(t)P_h x\| \leq C\|x\|$ pour tout $x \in H$ et

$\|LM\|_{L_0^2} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(H)}\|M\|_{L_0^2}$ pour tout opérateur linéaire borné $\mathcal{L} : H \rightarrow H$ et $M \in L_0^2$. On a donc

d'après 2.4.1 :

$$\begin{aligned}
J_4 &\leq \left(\int_0^{t_n} \mathbb{E}[\|E_{kh}(t_n - s)P_h\|_{\mathcal{L}(H)}\|(G(u_{kh}(s)) - G(u(s)))\|_{L_0^2}^2]ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_0^{t_n} \mathbb{E}[\|u_{kh}(s)_u(s)\|^2]ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \left(\int_0^{t_n} \|u_{kh}(s)_u(s)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(t_i) - u(s)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

D'après le théorème 1.5.14, on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(t_i) - u(s)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 ds \leq C \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i) ds \leq C \Delta_t.$$

On a donc :

$$J_4 \leq C \Delta_t^{\frac{1}{2}} + C \left(\Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

• En appliquant le lemme 1.4.6 (i) avec $\mu = 1 + r$ et $\nu = 0$ qui donne

2.4. Étude de la convergence

$\|F_{kh}(t)x\| \leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}})t^{-\frac{1+r}{2}}\|x\|$ pour tout $x \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
 J_5 &= \left(\int_0^{t_n} \mathbb{E}[\|F_{kh}(t_n - s)(G(u(s)) - G(u(t_n)))\|_{L_0^2}^2] ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \left(\int_0^{t_n} (t_n - s)^{-(1+r)} \mathbb{E}[\|G(u(s)) - G(u(t_n))\|_{L_0^2}^2] ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \left(\int_0^{t_n} (t_n - s)^{-(1+r)} \mathbb{E}[\|u(s) - u(t_n)\|^2] ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \left(\int_0^{t_n} (t_n - s)^{-r} ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}).
 \end{aligned}$$

• Pour le terme J_6 , nous allons utiliser la définition de la norme de L_0^2 . Soit donc $(\chi_m)_{m \geq 1}$ une base orthonormale de l'espace de Hilbert H . En utilisant (1.2), le lemme 1.4.7 (ii) avec $\rho = r$ et l'hypothèse 1.5.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
 J_6 &= \left(\int_0^{t_n} \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \|F_{kh}(t_n - s)G(u(t_n))Q^{\frac{1}{2}}\chi_m\|^2 \right] ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{t_n} \|F_{kh}(t_n - s)G(u(t_n))Q^{\frac{1}{2}}\chi_m\|^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \|A^{\frac{r}{2}}G(u(t_n))Q^{\frac{1}{2}}\chi_m\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) \mathbb{E}[\|A^{\frac{r}{2}}G(u(t_n))\|_{L_0^2}^2]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) (1 + \sup_{s \in [0, T]} \|A^{\frac{r}{2}}u(s)\|_{L^2(\Omega, H)}) \\
 &\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}).
 \end{aligned}$$

En somme, on a donc :

$$III \leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1}{2}} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}}) + C(\Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

D'après (2.8), (2.9) et (2.10), on a montré que :

$$\begin{aligned}
 \|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 &\leq C(h^{1+r} + \Delta_t^{\frac{1}{2}} + \Delta_t^{\frac{1+r}{2}})^2 \\
 &+ C\Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)} \\
 &+ C\Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}^2.
 \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 \Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 &= \Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{\frac{1-r}{2}} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \\
 &\leq T^{\frac{1-r}{2}} \Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}^2.
 \end{aligned}$$

2.4. Étude de la convergence

et d'après l'inégalité de Hölder discrète avec $a = \Delta_t^{\frac{1}{2}} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{4}}$ et $b = \Delta_t^{\frac{1}{2}} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{4}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)} &\leq \left(\Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{2}{r+1} T^{\frac{r+1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \|u_h^i - u(t_i)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Donc en prenant $\phi_n = \|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega, H)}^2$, on a :

$$\phi_n \leq C(h^{1+r} + \Delta^{\frac{1}{2}} + \Delta^{\frac{1+r}{2}}) + C\Delta_t \sum_{i=0}^{n-1} t_{n-i}^{-\frac{1-r}{2}} \phi_i.$$

En appliquant le lemme 2.4.3, on a donc :

$$\phi_n = \|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega, H)}^2 \leq K(h^{1+r} + \Delta^{\frac{1}{2}}).$$

SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Dans cette partie, nous donnons une solution numérique de l'équation de réaction-diffusion stochastique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + \alpha u = \sigma u \frac{dW(t)}{dt} \quad \text{dans } (0, 1) \times D \times \Omega \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \quad \text{dans } D \times \Omega \quad (3.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } (0, 1) \times \partial D \times \Omega \quad (3.3)$$

avec $D =]0, 1[\times]0, 1[$ et $\{W(t), t \in [0, T]\}$ un processus de Wiener standard à valeurs dans $H = L^2(D)$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_t, \mathbb{P})$.

Pour cette simulation, nous partirons de la discrétisation spatio-temporelle précédemment établie et nous utiliserons la méthode des éléments finis du type $\mathbb{P}_1$ en dimension deux.

3.1 Existence et unicité

Considérons les fonctions lipschitziennes $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = \alpha x$ et $g_1(x) = \sigma x$.

On a $H = L^2(D)$. En prenant $-A := \varepsilon \Delta$, on a $\mathcal{D}(A) = H^2(D) \cap H_0^1(D) := H^2$ et en posant $f : H \rightarrow H$ et $G : H \rightarrow L_0^2$ les fonctions de Nemytskii associées aux fonctions f_1 et g_1 respectivement, notre problème (3.1)-(3.2)-(3.3) peut s'écrire sous la forme :

$$du = [-Au + f(u)]dt + G(u)dW(t) \quad \text{dans } [0, 1] \times H \times \Omega \quad (3.4)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } H \times \Omega \quad (3.5)$$

où $u_0(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$.

On a :

- $u_0 \in \mathcal{D}(A)$
- L'opérateur $-A := \varepsilon \Delta$ vérifie l'hypothèse 1.1.4.

3.2. Discrétisation

- f vérifie l'hypothèse 1.5.5 comme fonction de Nemytskii associée à f_1
- G vérifie l'hypothèse 1.5.4 pour $r = 0$ comme fonction de Nemytskii associée à g_1 .

Donc d'après le théorème 1.5.13 notre problème (3.4)-(3.5) admet une unique solution intégrale $u(t) \in L^2(\Omega, H^1)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

3.2 Discrétisation

3.2.1 Maillage du domaine

Soit $\mathcal{T}_h$, une triangulation (au sens de Ciarlet) du domaine D , vérifiant les conditions de compatibilités suivantes :

- ▲ $\bar{D} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} (\bar{E})$;
- ▲ tout élément E de $\mathcal{T}_h$ est d'intérieur non vide ;
- ▲ $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 = \emptyset, \quad \forall E_1, E_2 \in \mathcal{T}_h, E_1 \neq E_2$;
- ▲ toute face d'un élément de $\mathcal{T}_h$ est :
 - soit une face d'un autre élément,
 - soit une partie de la frontière de D .

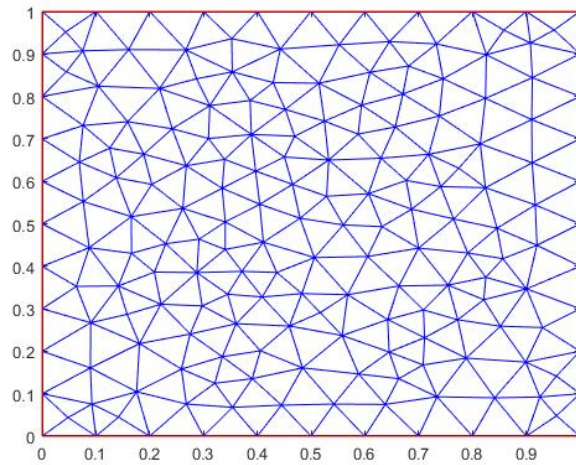


FIGURE 3.1 – Maillage du domaine D pour h=0,1.

3.2.2 Problème discret

Nous définissons l'espace :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{D}) : v_h|_E \in \mathbb{P}_1, \forall E \in \mathcal{T}_h, v_h|_{\partial D} = 0\}.$$

Désignons par $(N_i)_{i=1}^{N_h}$, l'ensemble des nœuds du maillage de $\mathcal{T}_h$ n'appartenant pas à ∂D .

3.2. Discrétisation

V_h est un espace vectoriel de dimension N_h dont une base est donnée par les fonctions $(\phi_i)_{i=1}^{N_h}$ vérifiant :

$$\phi_i(N_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, N_h.$$

Après discrétisation en espace et en temps de notre problème, on obtient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \{u_h^n\}_{n=0}^N \subset V_h \text{ telle que :} \\ (u_h^{n+1}, v_h) = (u_h^n, v_h) - \Delta_t a(u_h^{n+1}, v_h) + \Delta_t (f(u_h^n), v_h) + (v_h, G(u_h^n) \Delta W_{n+1}), \\ \text{Pour tout } v_h \in V_h, \quad n = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Comme $u_h^n \in V_h$, alors il existe $\{u_i^n\}_{i=1}^{N_h} \subset \mathbb{R}$ tel que $u_h^n = \sum_{i=1}^{N_h} u_i^n \phi_i$.

En remplaçant u_h^n par sa valeur et en prenant $v_h = \phi_j$, $j = 1, \dots, N_h$ notre problème devient donc : Pour tout $n = 0, \dots, N$,

$$\begin{cases} \text{Trouver } U^n = [u_1^n, \dots, u_{N_h}^n]^t \in \mathcal{M}_{N_h \times 1}(\mathbb{R}) \text{ tel que} \\ (M + \Delta_t R)U^{n+1} = MU^n + \Delta_t F^n + G^n \Delta W_n, \end{cases}$$

où $R = (R_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_h}$, $M = (M_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_h}$, $F^n = (F_i^n)_{1 \leq i \leq N_h}$, $G^n = (G_i^n)_{1 \leq i \leq N_h}$ et avec

$$R_{ij} = \varepsilon \int_D \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx, \quad M_{ij} = \int_D \phi_i \phi_j \, dx, \quad F_i^n = \int_D f(u_h^n) \phi_i \, dx, \quad \text{et} \quad G_i^n = \int_D G(u_h^n) \phi_i \, dx.$$

Remarque 3.2.1 : Pour le calcul des intégrales qui suivent, nous utiliserons la quadrature suivante, où E est un triangle dont les milieux des côtés sont N_4 , N_5 et N_6 .

$$\int_E p \, dE \simeq \frac{|E|}{3} [p(N_4) + p(N_5) + p(N_6)],$$

avec $|E|$ est l'aire de E . Elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à deux.

- Calcul de la matrice de rigidité R

On a :

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \varepsilon \int_D \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \varepsilon \int_E \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} R_{ij}^E. \end{aligned}$$

Donc

$$R = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} R^E \quad \text{où} \quad R^E = (R_{ij}^E)_{1 \leq i, j \leq N} \quad \text{avec} \quad R_{ij}^E = \varepsilon \int_E \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \quad i, j = 1, \dots, N_h.$$

3.2. Discrétisation

On remarque R_{ij}^E est nulle lorsque $\text{supp } \phi_i \cap E = \emptyset$ ou lorsque $\text{supp } \phi_j \cap E = \emptyset$. Ainsi par définition de ϕ_i , la matrice R^E a au plus 9 coefficients non nuls et peut s'identifier à une matrice de taille 3×3 qu'on notera toujours R^E , qui se définit par :

$$R_{ij}^E = \varepsilon \int_E \nabla \phi_i^E \cdot \nabla \phi_j^E dE, \quad i, j = 1, \dots, 3,$$

où $(\phi_i^E)_{i=1}^3$ sont les fonctions de la base de globales définies par $\phi_i^E(N_j^E) = \delta_{ij}$, pour $i, j = 1, \dots, 3$, avec $N_i^E = (x_1^i, x_2^i)$, $i = 1, 2, 3$ les nœuds sur l'élément E .

On a $\phi_i(x) = a_i + b_i x_1 + c_i x_2$ avec

$$a_i = \frac{x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j}{2|E|}, \quad b_i = \frac{x_2^j - x_2^k}{2|E|}, \quad c_i = \frac{x_1^k - x_1^j}{2|E|}$$

Le gradient de ϕ_i est donc une fonction constante $\nabla \phi_i^E = \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, 3$.

On a donc :

$$\begin{aligned} R_{ij}^E &= \varepsilon \int_E \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx \\ &= \varepsilon (b_i b_j + c_i c_j) \int_E dx \\ &= \varepsilon (b_i b_j + c_i c_j) |E|. \end{aligned}$$

Nous utiliserons par la suite un algorithme pour remplir la matrice de rigidité globale M par les matrices locales R^E .

- Calcul de la matrice de masse M

En raisonnant de manière analogue, on a $M = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} M^E$.

où M^E peut être vue comme une matrice 3×3 donnée par :

$$M_{ij}^E = \int_E \phi_i^E \phi_j^E dx = \frac{1}{12} (1 + \delta_{ij}) |E|, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

où $(\phi_i^E)_{i=1}^3$ sont les fonctions de la base de globales définies par $\phi_i^E(N_j^E) = \delta_{ij}$, pour $i, j = 1, \dots, 3$, avec $N_i^E =$, $i = 1, 2, 3$ les nœuds sur l'élément E .

on a donc :

$$M^E = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} |E|$$

Nous remplirons la matrice de masse globale M par les entrées des matrices locales M^E .

- Calcul des matrices du second membre F^n et G^n

On a :

$$F^n = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} F^{n,E} \quad \text{où} \quad F_i^{n,E} = \int_E f(u_h^n) \phi_i dx \quad i = 1, \dots, N_h.$$

3.2. Discrétisation

$F^{n,E}$ se réduit à un vecteur de taille 3×1 que l'on notera toujours $F_i^{n,E}$ donnée par

$$F^n = \int_E f(u_h^n) \phi_i dx = \sum_{j=4}^6 f(u_h^n(N_j)) \phi_i(N_j^E) \quad i = 1, 2, 3.$$

où $(\phi_i^E)_{i=1}^3$ sont les fonctions de la base de globales définies par $\phi_i^E(N_j^E) = \delta_{ij}$, pour $i, j = 1, \dots, 3$, avec $N_i^E =$, $i = 1, 2, 3$ les nœuds sur l'élément E .

On a ainsi

$$F^{n,E} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} f(u_1^n + u_2^n) + f(u_1^n + u_3^n) \\ f(u_2^n + u_1^n) + f(u_2^n + u_3^n) \\ f(u_3^n + u_1^n) + f(u_3^n + u_2^n) \end{bmatrix} |E|$$

Pour obtenir le vecteur de second membre F^n on la remplit avec les entrées des vecteurs locaux $F^{n,E}$

Remarque 3.2.2 : La matrice G^n se remplit de la même manière que la matrice F^n

- Calcul de l'incrément stochastique

Considérons la base de $L^2(D)$ formée des fonctions $\{\chi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ avec $\chi_{j,k}(x) = 2 \sin(\pi j x_1) \sin(\pi k x_2)$.

Notre opérateur Q est l'opérateur linéaire sur $L^2(D)$ de fonctions propres $\{\chi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ et de valeurs propres associées $\{q_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ données par $q_{j,k} = (j^2 + k^2)^{-(2r+1+\epsilon)}$.

En utilisant une troncature de l'expansion de Karhunen-Loève, nous approximations notre incrément stochastique comme suit :

- Pour $n \in \{0, \dots, N\}$, et $x = (x_1, x_2)$ un point de D , l'incrément stochastique ΔW_n est approximé par :

$$\Delta W_n^J(x) = 2\sqrt{\Delta t} \sum_{j,k=1}^J \sqrt{q_{j,k}} \sin(\pi j x_1) \sin(\pi k x_2) \xi_{j,k}^n,$$

où $\xi_{j,k}^n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

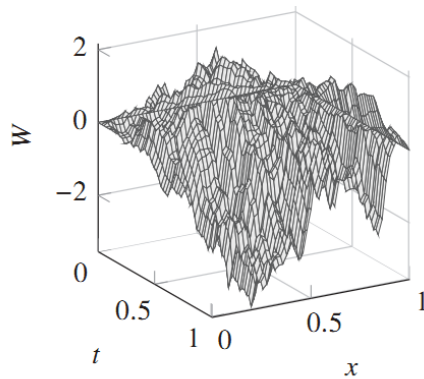


FIGURE 3.2 – Approximation du bruit en dimension 1

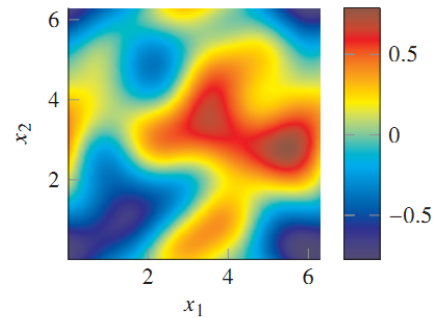


FIGURE 3.3 – Approximation du bruit en dimension 2

3.2. Discrétisation

Pour résoudre notre problème, nous calculerons ces matrices et résoudrons le système à chaque fois pour obtenir le vecteur U^n , $n = 0, \dots, N$ comme l'indique le code à l'annexe.

3.2.3 Représentation de la solution et étude du degré de convergence

Pour représenter notre problème (3.1)-(3.2)-(3.3), nous le considérons avec $\varepsilon = \frac{1}{2\pi^2}$, $\alpha = 0.5$ et $\sigma = 1$.

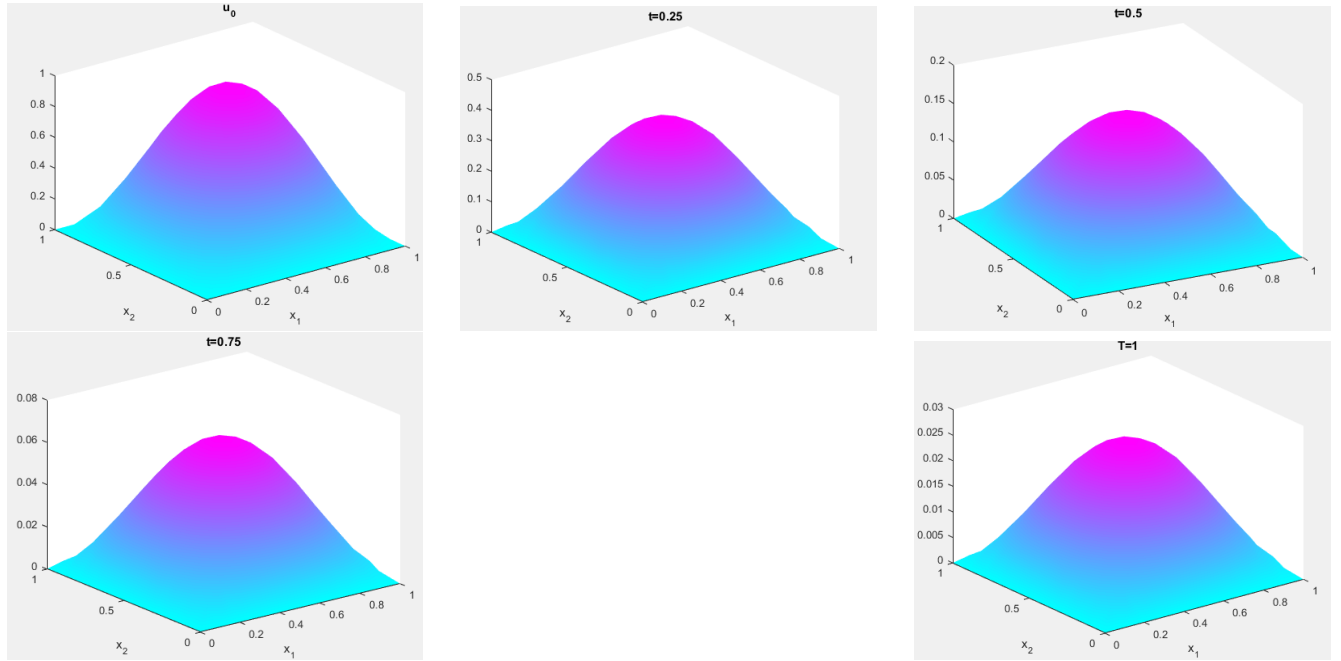


FIGURE 3.4 – La solution u_h^n à certains temps.

Sa solution exacte est donnée par $u(t, x_1, x_2) = \exp(W(t) - t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$.

Les tableaux ci-dessous représentent les résultats numériques au temps $T = 1$ pour le premier tableau et pour $h = 1/20$ pour le second tableau.

h	1/5	1/10	1/15	1/20	1/25
$\mathbb{E}[u - u_h^n ^2]^{\frac{1}{2}}$	2.29e-2	5.64e-3	2.564e-3	1.445e-3	9.431e-4

Δ_t	1/200	1/400	1/5000	1/7000	1/10000
$\mathbb{E}[u - u_h^n ^2]^{\frac{1}{2}}$	0.065	0.0271	0.0155	0.0097	0.0078

3.2. Discrétisation

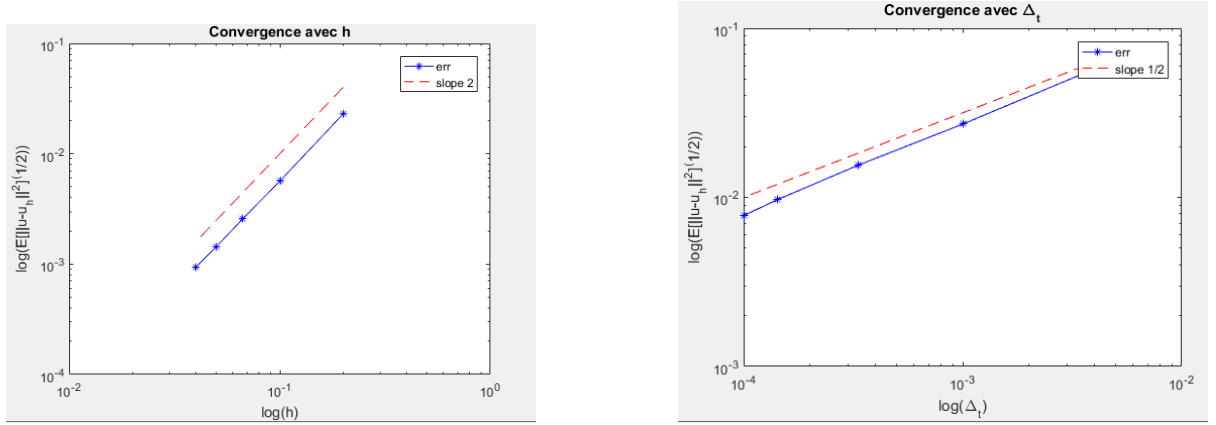


FIGURE 3.5 – Degré de convergence pour h et Δ_t respectivement.

D'après FIG. 3.5, on remarque que l'estimation de l'erreur pour la norme de $L^2(\Omega, L^2(D))$ est $\mathcal{O}(h^{r+1} + \Delta_t^2)$ avec $r = 1$, ce qui cadre bien avec notre analyse théorique.

♠ Conclusion ♠

Notre travail dans ce mémoire était de décrire et étudier l'approximation numérique au sens faible d'une équation aux dérivées partielles (EDP) stochastique évolutive avec bruit multiplicatif, une fois mise sous la forme (1.8)-(1.9). Dans la première partie, nous avons posé les bases théoriques indispensables à notre travail puis abordé l'existence et l'unicité de notre problème ainsi que les conditions sous lesquelles elle est effective. Dans la seconde partie, nous avons procédé à la discrétisation spatiale de notre problème en utilisant la méthode des éléments finis de Galerkin et à sa discrétisation temporelle par la méthode semi-implicite d'Euler-Maruyama, puis nous avons étudié la stabilité et la convergence du schéma numérique obtenu. Enfin, nous avons illustré nos résultats en résolvant numériquement l'équation de réaction diffusion stochastique.

En somme, ce mémoire a contribué à approfondir notre compréhension de l'approximation numérique des EDP stochastiques avec bruit multiplicatif. Cependant, les principales hypothèses d'existence et d'unicité d'une solution intégrale de notre problème, qui sont le fait que les fonctions f et G soient globalement lipschitziennes ne sont pas vérifiées par plusieurs équations importantes telles que les équations d'Allen-Cahn et Cahn-Hilliard stochastiques. Ainsi, il serait adéquat pour la suite de nos travaux d'étudier les EDP stochastiques dans lesquelles les fonctions f et G ne sont pas globalement lipschitziennes.

♠ Bibliographie ♠

- [1] **H. Brezis**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).
- [2] **G. J. Lord**, *An Introduction to Computational Stochastic PDEs*, Cambridge, University Press (2014).
- [3] **R. Kruse**, *Optimal error estimates for Galerkin finite element methods for stochastic PDEs with multiplicative noise*, IMA Journal of Numerical Analysis (2014).
- [4] **X. Yang, W. Zhao**, *Strong Convergence of a Fully Discrete Scheme for Multiplicative Noise Driving SPDEs with Non-Globally Lipschitz Continuous Coefficients*, Numerical mathematics-Theory methods and applications 14(4), 1085 – 1109 (2021).
- [5] **V. Thomée**, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer-Verlag (2006).
- [6] **M. Reed, B. Simon**, *Methods of modern mathematical Physics*, Vol.2, Academic, London (1975).
- [7] **M. G. Larson, F. Bengzon**, *The finite element method : theory, implementation, and applications*, Springer (2013).
- [8] **R. Kruse**, *Strong and weak approximation of semi-linear stochastic evolution equations*, Vol.2093 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, (2014).
- [9] **V. Thomée**, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer (1984).
- [10] **P. Ciarlet**, *Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland (1978).
- [11] **C. M. Elliott, S. Larsson**, *Error estimates with smooth and non smooth data for finite element method fpr the Cahn-Hilliard equation*, Math, Comp, (1992).
- [12] **W. Liu, M. Röckner**, *Stochastic Partial Differential Equations, An introduction*, Springer, First Edition (2015).
- [13] **A. Debussche**, *Weak Approximation of Stochastic Partial Differential Equations : The nonlinear case*, Math, Comp, 89 – 117 (2011).

- [14] **R. Kruse, S. Larsson**, *Optimal regularity for semilinear parabolic stochastic PDE with multiplicative noise*, Preprint (2010).
- [15] **E. Pardoux**, *Sur les équations aux dérivées partielles stochastiques de type parabolique*, Colloque en l'honneur de L. Schwartz (1985).
- [16] **E. Pardoux, D. Talay**, *Discretization and simulation of stochastic differential equations*, Springer, (1985).
- [17] **X. Wang**, *Strong convergence rates of the linear implicit Euler method for the finite element discretization of SPDEs with additive noise*, IMA (2017).
- [18] **D. Higham**, *An algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equation*, SIAM (2001).
- [19] **T. Card**, *Introduction to stochastic differential equations*, New York (1988).
- [20] **P. Kloeden, E. Platen**, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag (1999)

♠ Annexe ♠

3.3 code pour approximer le bruit en dimension 1

```
1 function dW=bruit_dim_1()
2 J=128;
3 r=1;
4 dt=0.01;
5 kappa=100;
6 jj=(1:J-1);
7 myeps=0.001;
8 root_qj=jj.^((2*r+1+myeps)/2);
9 bj=root_qj*sqrt(2*dt);
10 if (kappa==1)
11     n=randn(length(bj),1);
12 else
13     n=squeeze(sum(randn(length(bj),1,kappa),3));
14 end
15 X=bsxfun(@times,bj,n);
16 dW=dst1(X);
17 end
18 function dw=dst1(x)
19 N=length(x);
20 X=zeros(N);
21 for j=1:N
22     for k=1:N
23         X(j,k)=x(j)*sin(pi*j*k/(N+1));
24     end
25 end
26 dw=sum(X)';
27 end
```

3.4 Code principal

```
1 D= Rectg(0,0,1,1);
2 h=1/10;
3 [p,e,t]=initmesh(D, 'hmax',h);
4 pdemesh(p,e,t);
5 Dirichlet=unique([e(1,:),e(2,:)]);
6 M=100;
7 dt=1/M;
8 Np=length(p(1,:));
9 nt=length(t(1,:));
10 Masse=zeros(Np,Np);
11 Rigid=zeros(Np,Np);
12 epsilon=0.1;
13 for l=1:nt
14     somt=t(1:3,l);
15     loc2glb=t(1:3,l);
16     x=p(1,somt);
17     y=p(2,somt);
18     Ml=Masse_loc(x,y);
19     Rl=Rigid_loc(x,y,epsilon);
20     Rigid(loc2glb,loc2glb)=Rigid(loc2glb,loc2glb)+Rl;
21     Masse(loc2glb,loc2glb)=Masse(loc2glb,loc2glb)+Ml;
22 end
23 A=Masse+dt*Rigid;
24 U=zeros(Np,M+1);
25 x=p(1,:);
26 y=p(2,:);
27 alpha=0.5;
28 sigma=1;
29 u0=u_0(x,y);
30 U(:,1)=u0;
31 u_n=u0;
32 for k=1:M,
33     fu=f(u_n,alpha);
34     gu=G(u_n,sigma);
35     F=second_membre(p,t,fu);
36     Gu=second_membre(p,t,gu);
37     dWn=bruit_dim_2(Np+1,dt);
38     u_new=A\ (Masse*u_n+dt*F);
```

3.5. Code pour calculer les matrices locales

```
39     u_new(Dirichlet)=0;
40     U(:,k+1)=u_new;
41     u_n=u_new;
42 end
43 end
```

3.5 Code pour calculer les matrices locales

```
1 function R=Rigid_loc(x,y,epsilon)
2 area=polyarea(x,y);
3 b=[y(2)-y(3); y(3)-y(1);y(1)-y(2)]/2/area;
4 c=[x(3)-x(2); x(1)-x(3);x(2)-x(1)]/2/area;
5 R=(b*b'+c*c')*epsilon*area;
6 end
7 function M=Masse_loc(x,y)
8 area=polyarea(x,y);
9 M=1/12*[2 1 1; 1 2 1; 1 1 2]*area;
10 end
```

3.6 Code pour calculer les matrices du second membre

```
1 function b=second_membre(p,t,v)
2 np=size(p,2);
3 nt=size(t,2);
4 b=zeros(np,1);
5 for k=1:nt
6     loc2glb=t(1:3,k);
7     x=p(1,loc2glb);
8     y=p(1,loc2glb);
9     area=polyarea(x,y);
10    bk=v(loc2glb)/3*area;
11    b(loc2glb)=b(loc2glb)+bk;
12 end
13 end
```