RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

****

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ 1

Faculté des Sciences

****

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES ET GEOSCIENCES

****

UNITÉ DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE, BIOINFORMATIQUE ET APPLICATIONS

REPUBLIC OF CAMEROUN

Peace-Work-Fatherland

****

UNIVERSITY OF YAOUNDE 1

Faculty of Sciences

****

POSTGRADUATE SCHOOL FOR SCIENCE, TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

****

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING UNIT FOR MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, BIOCOMPUTING AND APPLICATIONS

HOMOGÉNÉISATION PÉRIODIQUE D'UN PROBLÈME NON LINÉAIRE ET NON MONOTONE

Mémoire de fin de cycle Master en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques et Applications fondamentales

Option : Analyse Numérique

Rédigé par :

TAGNI Jordan DE KENANG

Licencié en Mathématiques

Matricule

17G2974

Président du jury :

Pr NOUNDJEU Pierre

Maitre de Conférence

Sous l'encadrement de :

Dr DOUANLA Hermann

Chargé de cours

Faculté des Sciences – Université de Yaoundé I

Examinateur du jury:

Pr MBEHOU Mohamed

Maitre de Conférence

ANNEE ACADEMIQUE 2023-2024

Homogénéisation périodique d'un problème non linéaire et non monotone

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse et Applications

Par

TAGNI Jordan DE KENANG

Matricule : 17G2974

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de

Dr DOUANLA Hermann

Chargé De Cours

Université de Yaoundé I

Année académique : 2022-2023

✠ Dédicace ✠

À mes parents Mr KENANG Clotaire et Mme KENANG Charlotte qui n'ont ménagé aucun effort dans l'aboutissement de ce que je suis aujourd'hui. J'aimerais que ce travail leur fasse honneur et qu'ils soient fiers de moi.

✠ Remerciements ✠

Je remercie tout d'abord Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur Dr Hermann Douanla pour avoir accepté de diriger ce travail. Son soutien, ses compétences et sa clairvoyance m'ont été d'une aide inestimable. Lors de la rédaction de ce mémoire, il a orienté mon travail en me proposant des pistes de recherche tout en me laissant une grande liberté dans ma volonté d'explorer certains aspects. Il a toujours été disponible pour me donner des conseils, pour relire et corriger ce manuscrit.

Veuillez trouver ici l'expression de mon grand respect et ma profonde admiration pour toute votre qualité scientifique et humaine.

J'exprime aussi ma reconnaissance à tous les enseignants du département de Mathématiques de l'Université de Yaoundé 1 et à toute l'équipe des formateurs du master Mathématiques et Applications qui ont assuré une formation solide et efficace pour nous étudiants, *à* toute l'équipe du laboratoire d'analyse pour leurs conseils, leur accompagnement et leurs suggestions. J'espère que mon travail sera à la hauteur des exigences formulées pour cette formation.

En fin, un merci tout particulier à ma famille sans qui je n'aurais pu mener ce projet à bien : à mes parents, pour leur soutien et leur amour sans faille tout au long de ces années, à mon très cher grand-frère Ronel, qui a toujours été là et qui occupe une place particulière dans ma vie ; à toute ma grande famille pour le soutien qu'elle a eu à m'apporter pour ma réussite académique. À mes promotionaires ainsi que tous les autres camarades de cette université pour leur présence dans les moments difficiles et les excellents moments que j'ai passés avec eux tout au long de cette formation. Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail. Aux nombreuses autres personnes que j'omets involontairement et qui de près ou de loin ont contribué à la production de ce travail, je leur adresse toute ma reconnaissance.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent mémoire constitue un travail original du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

TAGNI Jordan DE KENANG .

✠ Résumé ✠

Le but de la théorie de l'homogénéisation est d'obtenir les propriétés macroscopiques des milieux hétérogènes en prenant en compte leurs caractéristiques microscopiques. Dans le présent travail, nous étudions l'homogénéisation périodique d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire et non-monotone. En utilisant la méthode de la convergence à deux échelles, nous obtenons, après passage à la limite dans la formulation variationnelle équivalente, le problème macroscopique (problème homogénéisé) similaire au problème initial : une équation aux dérivées partielles non-linéaire et non-monotone.

Termes clés : *Homogénéisation, homogénéisation périodique, formulation variationnelle, convergence à deux-échelles, opérateur non-linéaire, opérateur non-monotone, problème homogénéisé, problème microscopique, problème macroscopique.*

✠ Abstract ✠

The aim of homogenization theory is to describe the macroscopics properties of heterogeneous media by means of their microscopics characteristics. Here, we study in a periodic setting, the homogenization of a partial differential equation with non-linear and non-monotone operator. Using the Two-scale covergence method, we obtain after passing to the limit in the equivalent variationnal equation, the macroscopic (homogenized) problem which is similar to the initial problem : a partial differential equation with non-linear and non-monotone operator.

Keys words : *Homogenization, periodic homogenization, variationnal equation, Two-scale convergence, non linear non monotone operator, homogenized problem, microscopic problem, macroscopic problem.*

✠ Table des matières ✠

✠ Introduction générale. ✠

Le présent travail porte sur l'homogénéisation périodique d'un problème non linéaire et non monotone. L'homogénéisation est un domaine de recherche en analyse qui étudie les propriétés macroscopiques d'un matériau ou d'un système, en prenant en compte les caractéristiques microscopiques de ses constituants. En ce sens, l'homogénéisation périodique suppose tout simplement que le matériau en question a des propriétés de périodicité. En d'autres termes, l'homogénéisation étudie le comportement asymptotique des EDP (Équations aux Dérivées Partielles) dont les coefficients varient en fonction d'un paramètre ε (représentant la taille des hétérogénéités) lorsque ce dernier tend vers 0.

Les EDP non linéaires et non-monotones modélisent de nombreux phénomènes liés à la mécanique des milieux continus, la physique des matériaux, la mécanique des fluides et bien d'autres encore. En raison des fortes oscillations des coefficients, dues à l'hétérogénéité du milieu, leur résolution numérique (par différences finies ou par éléments finis par exemple) est souvent très couteuse voir impossible ; non pas en raison des algorithmes peu élaborés, mais en raison par exemple d'un trop grand besoin de puissance de calcul. Ainsi, la théorie de l'homogénéisation offre une approche pertinente pour étudier ces systèmes complexes en simplifiant leur analyse grâce à une représentation macroscopique. Une introduction plus détaillée à l'homogénéisation mathématique des équations aux dérivées partielles se trouve par exemple dans [8, 10]. Il existe cependant plusieurs méthodes d'homogénéisation des équations aux dérivées partielles parmi lesquelles, la méthode du développement asymptotique couplée avec les fonctions test oscillantes de Tartar, la méthode de la $\Gamma-$convergence, la méthode de la G-convergence (ou de la H-convergence), et la méthode de la convergence à deux-échelles (ou de la Σ-convergence). Dans ce travail nous utiliserons la méthode de la convergence à deux échelles introduite en 1989 par Gabriel Nguetseng [16] et développée plus tard par Grégoire Allaire [3].

L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'homogénéisation de l'équation aux dérivées partielles suivante qui modélise un phénomène de convection-diffusion ou simplement de diffusion de la chaleur lorsque a_0 est nul.

$$\begin{cases} a_0\left(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon(x), Du_\varepsilon(x)\right) - div\, a\left(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon(x), Du_\varepsilon(x)\right) = f(x) \quad p.p\ x \quad dans \quad \Omega; \\ u_\varepsilon \ \in \ W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{1}$$

où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$, f in élément de $W^{-1,q}(\Omega)$, ε un réel strictement positif, a_0 et a des fonctions de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^N$ respectivement, et vérifiant des hypothèses que nous préciserons dans la suite.

La suite de ce document est structurée en trois chapitres suivie d'une conclusion générale. Dans le premier chapitre, après présentation de quelques rappels et résultats d'analyse fonctionnelle, nous prouvons l'existence (pour chaque $\varepsilon \geq 0$) d'une solution faible du problème (1). Dans le chapitre deux, nous présentons la notion de fonctions périodiques et la méthode de la convergence à deux échelles. Nous terminons par le troisième chapitre où nous étudions l'homogénéisation proprement dite du problème (1) en utilisant la méthode de la convergence à deux échelles ; de façon précise, nous montrons que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\geq 0}$ (où u_ε est solution du $\varepsilon-$problème (1)), possède une sous-suite qui converge quand ε tend vers 0 vers une solution du problème qui sera dit homogénéisé et du même type que le $\varepsilon-$problème initial.

⋆ ⋆ Chapitre Un ⋆ ⋆

EXISTENCE D'UNE SOLUTION FAIBLE DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, après quelques rappels d'analyse fonctionnelle ([5, 6, 9, 13, 14]), nécessaires dans la suite, nous posons notre $\varepsilon-$problème et prouvons qu'il admet (au-moins une) solution.

1.1 Rappels généraux d'analyse fonctionnelle

Soient $N \geq 1$ un entier, p et q deux réels, $1 \leq p, q < +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Nous allons définir les espaces $W^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,q}(\Omega)$ et rappeler quelques résultats sur ces espaces.

Définition 1. *On appelle $W^{1,p}(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, de puissance p-ème intégrable et dont toutes les dérivées partielles faibles sont des (classes de) fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable.*

L'application $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ définie de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \left(u \in W^{1,p}(\Omega)\right), \tag{1.1}$$

est une norme sur $W^{1,p}(\Omega)$ et définit la topologie naturelle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$; il est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Définition 2. *Soient $1 < p, q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On désigne par $W^{-1,q}(\Omega)$ le dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Remarque 1. Puisque $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ à image dense, nous avons $W^{-1,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 3. *On dit que Ω est un ouvert de classe C^1 si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^N$ et un C^1–difféomorphisme $G = (G^1, \ldots, G^N)$ de Q sur U tels que*

$G(Q_+) = \Omega \cap U,\ G(Q_0) = \partial\Omega \cap U$ *avec* $G^j \in \mathcal{D}^1(\bar{Q})$ *et* $(G^j)^{-1} \in \mathcal{D}^1(\bar{U}),\ j = 1, \ldots, N$*; où,*

$$\mathbb{R}^N_+ = \left\{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^N, y_N > 0\right\};$$
$$Q = \left\{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^N, |y'| < 1 \ et\ -1 < y_N < 1\right\};$$

et

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^N_+,$$
$$Q_0 = \left\{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^N, |y'| < 1 \ et\ y_N = 0\right\}.$$

Théorème 2 (Rellich-Kondrachov). *Soient Ω un ouvert borné et p un réel, $1 \leq p < +\infty$. L'injection $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte ; on note souvent $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$. Si Ω est en plus de classe C^1, on a aussi $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.*

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ sur le bord de Ω. Pour résoudre le problème des valeurs prises par ces fonctions au bord de Ω, nous disposons du théorème de trace suivant.

Théorème 3. *Soient Ω un ouvert borné de classe C^1 et $1 \leq p < +\infty$. Il existe une unique application linéaire continue $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ qui prolonge l'application de restriction $u \mapsto u_{|\partial\Omega}$ définie sur le sous espace dense $C^1(\overline{\Omega})$.*

Remarque 2. L'application (appelée **application trace**) définie au théorème précédent n'est pas surjective. Son image est notée $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. On a la formule d'intégration par parties suivante :

$$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega) \qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v) n_i d\sigma,\ i = 1, \ldots, N$$

où n_i est la i-ème composante du vecteur normal unitaire externe à Ω et $d\sigma$ la mesure surfacique sur $\partial\Omega$. Cette formule est aussi appelée **formule de Green.**

Théorème 4 (Inégalités de Poincaré). *Soient Ω un ouvert borné dans au moins une direction et $p \in \mathbb{R},\ 1 < p < +\infty$. Il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que :*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)^N}, \quad \forall u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Proposition 1. *Soient Ω un ouvert borné dans au moins une direction et p l'application de $W^{1,p}_0(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :*

$$p(u) = ||Du||_{L^p(\Omega)^N}, \quad u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Alors p est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Nous rappelons à présent quelques résultats importants sur la notion de convergence faible dans un espace de Banach. Soit E un espace de Banach réel et E' son dual topologique.

Définition 4. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E converge faiblement vers x dans E si et seulement si pour tout $x' \in E'$ on a $\langle x', x_n\rangle \longrightarrow \langle x', x\rangle$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Cette convergence est notée par $x_n \rightharpoonup x$ dans $E-$faible.*

Définition 5. *Une suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E' converge faiblement vers x' dans E' si et seulement si pour tout $x \in E$ on a $\langle x'_n, x\rangle \longrightarrow \langle x', x\rangle$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Cette convergence est notée par $x'_n \rightharpoonup x'$ dans $E'-$ faible $*$.*

Théorème 5 (Banach-Aloaglu). *Soit E un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie duale faible (toplogie $E'-$faible $*$).*

Preuve. Voir [5 page 42]. ■

Soit J l'application de E dans E'' qui à x associe $J(x)$, avec $J(x)$ tel que pour tout $f \in E'$, $\langle J(x), f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}$. L'application J est injective et est appelée **injection canonique** de E dans E''.

Définition 6. *L'espace de Banach E est dit réflexif si l'injection canonique J de E dans E'' est surjective.*

Théorème 6 (Banach-Kakutani). *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si la boule unité fermée de E est compacte pour la topologie faible.*

Preuve. Voir [5, page 44]. ■

Proposition 2. *Soit E un espace de Banach réflexif. Alors toute suite bornée de E admet une sous-suite qui converge faiblement dans E.*

Soient E un espace de Banach réel réflexif, A un opérateur défini de E dans E'. Nous avons les définitions suivantes :

Définition 7.

*a) L'opérateur A est dit **monotone** si*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in E;$$

*b) L'opérateur A **est dit strictement monotone** si*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \forall u, v \in E, u \neq v.$$

Définition 8. *L'opérateur A est dit* ***hémicontinu*** *si pour tout $u, v \in E$, $A(u+tv)$ converge vers Au dans E' pour la topologie duale faible lorsque t tend vers 0.*

Définition 9. *L'opérateur A est dit* ***coercif*** *si*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty, u \in E} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

Le théorème que nous allons énoncer ci-dessous se trouve dans [5, page 88].

Théorème 7 (Browder, Minty (1963)). *Soient E un espace de Banach réel réflexif et $A : E \to E'$ un opérateur strictement monotone, hémicontinu et coercif. Pour toute forme linéaire b continue sur E, l'équation $Au = b$ admet une unique solution.*

Lemme 1 (Inégalité de Hölder inverse, *voir [13, page 191]***).** *Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré tel que $\mu(E) > 0$. Soit $p, q \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f et g ($g(x) \neq 0$ pour presque tout $x \in E$) sont deux fonctions mesurables sur E, alors :*

$$\int_E |fg| d\mu \geq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Définition 10. *Soient U, V et W des ouverts et ou produits d'ouverts de $\mathbb{R}^N$. Soit f une fonction de $U \times V$ dans W qui à (x, y) associe $f(x, y)$. La fonction f est dite de* ***Caratheodory*** *si :*

i) pour tout $y \in V$, la fonction qui à x associe $f(x, y)$ est mesurable de U dans W ;

ii) pour tout $x \in U$, la fonction qui à y associe $f(x, y)$ est continue de V dans W.

1.2 Rappels de quelques résultats importants sur les opérateurs pseudo monotones

Soient E un espace de Banach réel réflexif et A un opérateur défini de E dans E'. Les résultats suivants se trouvent dans [6, 14].

Définition 11 (Opérateur **de type (M)**)**.** *On dit que A est de type (M) ou a la Propriété (M) si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ qui converge faiblement vers u, on a $(A(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers χ dans E'−faible ∗ et $\limsup \langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \chi, u\rangle$ implique $\chi = A(u)$.*

Nous présentons maintenant un résultat du type **Browder-Minty** :

Proposition 3 (**Voir [14, page 171]**). *Soient E un espace de Banach réel réflexif et $A : E \to E'$ un opérateur borné, de type (M), hémicontinu et coercif. Alors pour tout $b \in E'$ il existe $u \in E$ tel que l'équation $Au = b$ admet au-moins une solution.*

Définition 12 (Opérateur **Pseudo monotone**). *On dit que A est pseudo-monotone si :*

a) A est borné ;

b) Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ une suite qui converge faiblement vers u, si $\limsup \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ alors,

$$\liminf \langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle \quad \forall v \in E. \tag{1.2}$$

Proposition 4. *On a les implications suivantes :*

« A borné, hémicontinue, monotone » $\Longrightarrow$ « A pseudo-monotone » $\Longrightarrow$ « A est du type (M) ».

Preuve. On suppose A borné, hémicontinue, monotone.

Première implication : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et u comme dans les hypothèse de b) de la Définition 12. Comme A est monotone, on a :

$$\langle A(u_n), u_n - u\rangle \geq \langle A(u), u_n - u\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0;$$

donc

$$\langle A(u_n), u_n - u\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.3}$$

Soit maintenant $v \in E$. Posons $w = u + \theta(v - u)$, $\theta \in]0, 1[$; on a :

$$\langle A(u_n) - A(w), u_n - w\rangle \geq 0\,,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\theta \langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq &(\theta - 1)\langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle A(w), u_n - u\rangle \\ &- \theta\langle A(w), v - u\rangle\end{aligned}$$

et avec (1.3) on aboutit à :

$$\theta \liminf \langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq -\theta\langle A(w), v - u\rangle\,;$$

d'où, multipliant par $\frac{1}{\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\liminf \langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(w), u - v\rangle, \\ &\qquad w = (1-\theta)u + \theta v, \forall \theta \in]0, 1[\ .\end{aligned} \tag{1.4}$$

Faisant $\theta \to 0$ dans (1.4) et utilisant l'hémicontinuité de A on obtient bien (1.2).

Deuxieme implication : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et u dans E tels que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $E-$faible, $(A(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers χ dans $E'-$faible$*$ et

$$\limsup \langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \chi, u\rangle .$$

Alors :

$$\limsup \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0;$$

mais de (1.2), pour $v \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\langle A(u), u - v\rangle &\leq \liminf \langle A(u_n), u_n - v\rangle \\ &\leq \limsup \langle A(u_n), u_n - v\rangle \\ &\leq \limsup \langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle \chi, u - v\rangle ;\end{aligned}$$

d'où

$$\langle A(u), u - v\rangle \leq \langle \chi, u - v\rangle \quad \forall v \in E.$$

Pour $w \in E$ fixé, prenant $v = u \pm w$ dans la dernière inégalité on a bien $\chi = A(u)$. ■

Théorème 8. *Soit A de E dans E' un opérateur pseudo-monotone et coercif. Alors pour tout b dans E' l'équation $Au = b$ admet au-moins une solution.*

Preuve. Elle découle des *Proposition* 3 et 4 ■

Définition 13 (Opérateur **de type Calcul des variations**). *On dit que A est du type « Calcul des Variations » s'il est borné et si l'on peut le représenter par :*

$$A(v) = B(v, v)$$

Où $(u, v) \longmapsto B(u, v)$ est un opérateur de $E \times E$ dans E' vérifiant les propriétés suivantes :

i) Pour tout u dans E, l'application $v \longmapsto B(u, v)$ (notée $B(u, \cdot)$) est monotone, hémicontinue et bornée de E dans E'.

ii) Pour tout v dans E, l'application $u \longmapsto B(u, v)$ (notée $B(\cdot, v)$) est hémicontinue et bornée de E dans E'.

iii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge faiblement vers u, on a $(< B(u_n, u_n) - B(u_n, u) \, , \, u_n - u >)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (quand n tend vers $+\infty$) entraine que pour tout v dans E, $(B(u_n, v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B(u, v)$ dans $E'-$faible.

iv) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers u dans $E-$faible, si pour $v \in E$, $(B(u_n, v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers χ dans $E'-$faible alors $(< B(u_n, v), u_n >)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $< \chi, u >$.

Proposition 5. *Tout opérateur A du type Calcul des Variations est pseudo-monotone.*

Preuve. Soit A un opérateur du type Calcul des Variations (A vérifie les hypothèses $i) - iv)$ de la Définition 13). Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers u dans $E-$faible et telle que :

$$\limsup \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0. \tag{1.5}$$

a) On va d'abord montrer qu'il existe une sous-suite $(u_k)_k$ de $(u_n)_n$ telle que :

$$X_k = \langle A(u_k, u_k) - A(u_k, u), u_k - u\rangle \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.6}$$

En effet, d'après $i)$, $(A(u_n, u))_n$ est bornée dans E' ; donc il existe $(u_k)_k$ sous-suite de $(u_n)_n$ et $\chi \in E'$ tels que : $(A(u_k, u))_k$ converge vers χ dans $E'-$faible$*$. Ainsi, de $iv)$, on a, lorsque $k \longrightarrow +\infty$,

$$\langle A(u_k, u), u_k\rangle \longrightarrow \langle \chi, u\rangle ;$$

donc, pour $k \longrightarrow +\infty$,

$$\langle A(u_k, u), u_k - u\rangle \longrightarrow 0;$$

et avec (1.5), il vient que $\limsup X_k \leq 0$. Mais, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A(u_k, \cdot)$ est monotone (d'après $i)$) ; donc $X_k \geq 0$ pour tout k, et par suite on a (1.6).

La limite en (1.6) est indépendante de la sous-suite $(u_k)_k$; donc (1.6) reste vraie pour la suite $(u_n)_n$ entière. On vient donc de montrer que $(u_n)_n$ et u vérifient les hypothèses de $iii)$.

b) On utilise alors $iii)$ et on écrit :

$$A(u_n, v) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A(u, v) \quad \text{dans } E' - \text{faible} *, \quad \forall v \in E \tag{1.7}$$

et avec $iv)$, on obtient :

$$\langle A(u_n, v), u_n - u\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall v \in E; \tag{1.8}$$

et comme $X_n \geq 0$, on a (se souvenir que pour $w \in E,\ A(w, w) \equiv A(w)$) :

$$\langle A(u_n), u_n - u\rangle \geq \langle A(u_n, u), u_n - u\rangle ,$$

ce qui d'après (1.8) entraine :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle \geq 0;$$

et qui, avec (1.5), conduit à :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle = 0. \tag{1.9}$$

c) Posons : $w = (1-\theta)u + \theta v,\ \theta$ dans $]0, 1[$, et $v \in E$. Puisque $A(u_n, \cdot)$ est monotone pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\langle A(u_n) - A(u_n, w), u_n - w\rangle \geq 0;$$

c'est-à-dire :

$$\theta \langle A(u_n), u - v\rangle \geq -\langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle A(u_n, w), u_n - u\rangle + \theta \langle A(u_n, w), u - v\rangle \,;$$

et en utilisant (1.9),(1.8) et (1.7), on en déduit

$$\theta \liminf \langle A(u_n), u - v\rangle \geq \theta \langle A(u, w), u - v\rangle \,.$$

En multipliant cette dernière inégalité par $\frac{1}{\theta}$, puis faisant $\theta \to 0$, on obtient (1.2) par hémicontinuité de $A(u, \cdot)$. ■

Corollaire 1. *Soit A de E dans E' un opérateur coercif du type Calcul des Variations. Alors A est surjectif ; c'est-à-dire pour tout b dans E' il existe $u \in E$ tel que $Au = b$.*

Preuve. Découle immédiatement de la *Proposition* 5 et du *Théorème* 8. ■

1.3 Position et résolution du problème

Soit $1 < p < +\infty$. Soient les fonctions a de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ qui à (y, λ, ξ) associe $a(y, \lambda, \xi)$ et a_0 de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ qui à (y, λ, ξ) associe $a_0(y, \lambda, \xi)$ qui satisfont les conditions suivantes :

$(p1)$ Pour tout $(\lambda, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, les fonctions $a(\cdot, \lambda, \xi)$ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ qui à y associe $a(y, \lambda, \xi)$ et $a_0(\cdot, \lambda, \xi)$ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $a_0(y, \lambda, \xi)$ sont mesurables,

$(p2)$ $a(y, \lambda, 0) = 0$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il existe quatre constantes c_0, c_1, c_2, c_3 telles que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$

$$(a(y, \lambda, \xi) - a(y, \lambda, \xi')) \cdot (\xi - \xi') \geq c_0 \left(1 + |\lambda| + |\xi| + |\xi'|\right)^{p-\delta} |\xi - \xi'|^{\delta}, \tag{$p3$}$$

$$a_0(y, \lambda, \xi)\lambda \geq 0, \tag{$p4$}$$

$$|a(y, \lambda, \xi)| + |a_0(y, \lambda, \xi)| \leq c_1 \left(1 + |\lambda|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right), \tag{$p5$}$$

$$|a(y, \lambda, \xi) - a(y, \lambda, \xi')| + |a_0(y, \lambda, \xi) - a_0(y, \lambda, \xi')|, \leq c_2 \left(1 + |\lambda| + |\xi| + |\xi'|\right)^{p-1-\alpha} |\xi - \xi'|^{\alpha} \tag{$p6$}$$

$$|a(y, \lambda, \xi) - a(y, \lambda', \xi)| + |a_0(y, \lambda, \xi) - a_0(y, \lambda', \xi)|; \leq c_3 \left(1 + |\lambda| + |\lambda'| + |\xi|\right)^{p-1-\alpha} |\lambda - \lambda'|^{\alpha} \tag{$p7$}$$

pour tout $\lambda,\ \lambda' \in \mathbb{R}$ et tout $\xi,\ \xi' \in \mathbb{R}^N$, où $0 < \alpha \leq min(1, p-1)$ et $\delta \geq max(2, p)$.

Remarque 3. Par les propriétés $(p6)$ et $(p7)$ ci-dessus, on montre que si la suite $((\lambda_n, \xi_n))_n$ converge vers (λ, ξ) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ alors pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, les suites $(a_0(y, \lambda_n, \xi_n))_n$ et $(a(y, \lambda_n, \xi_n))_n$ convergent respectivement dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^N$ vers $a_0(y, \lambda, \xi)$ et $a(y, \lambda, \xi)$. Ce qui signifie que pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, les applications $(\lambda, \xi) \longmapsto a_0(y, \lambda, \xi)$ et $(\lambda, \xi) \longmapsto a(y, \lambda, \xi)$ sont continues de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ respectivement.

Remarque 4. La *Remarque* 3 et la propriété à $(p1)$ montre alors que les fonctions a et a_0 sont de carathéodory sur leurs domaines respectifs.

Pour $(u,v) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^N$, $(1 < p < +\infty)$ et pour $\varepsilon > 0$, nous désignerons par $a^\varepsilon(\cdot,u,v)$ (respectivement $a_0^\varepsilon(\cdot,u,v)$), la fonction $x \longmapsto a\left(\frac{x}{\varepsilon}, u(x), v(x)\right)$ $\left(\text{respectivement } x \longmapsto a_0\left(\frac{x}{\varepsilon}, u(x), v(x)\right)\right)$ de Ω dans $\mathbb{R}^N$ (respectivement Ω dans $\mathbb{R}$). On a les deux résultats suivants qui se trouvent dans [21, page 1611].

Lemme 2. *Pour* $(u,v) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^N$, $1 < p < +\infty$ *et pour* $\varepsilon > 0$, $a^\varepsilon(\cdot,u,v)$ *(respectivement* $a_0^\varepsilon(\cdot,u,v)$ *) est un élément de* $L^q(\Omega)^N$ *(respectivement* $L^q(\Omega)$ *) ;* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Corollaire 2. *Pour* $u,\ v \in W^{1,p}(\Omega)$*, on a :*

$$||a^\varepsilon(\cdot,u,Du)||_{L^q(\Omega)^N} + \left\|a_0^\varepsilon(\cdot,u,Du)\right\|_{L^q(\Omega)} \le c_1'\left(1 + ||u||^{p-1}_{L^p(\Omega)} + ||Du||^{p-1}_{L^p(\Omega)^N}\right), \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} &||a^\varepsilon(\cdot,u,Du) - a^\varepsilon(\cdot,u,Dv)||_{L^q(\Omega)^N} + \left\|a_0^\varepsilon(\cdot,u,Du) - a_0^\varepsilon(\cdot,u,Dv)\right\|_{L^q(\Omega)^N}, \\ &\qquad \le 2c_2\,||1 + |u| + |Du| + |Dv|||^{p-1-\alpha}_{L^p(\Omega)^N}\,||Du - Dv||^{\alpha}_{L^p(\Omega)^N} \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} &||a^\varepsilon(\cdot,u,Du) - a^\varepsilon(\cdot,v,Du)||_{L^q(\Omega)^N} + \left\|a_0^\varepsilon(\cdot,u,Du) - a_0^\varepsilon(\cdot,v,Du)\right\|_{L^q(\Omega)} \\ &\qquad \le 2c_3\,||1 + |u| + |v| + |Du|||^{p-1-\alpha}_{L^p(\Omega)}\,||u - v||^{\alpha}_{L^p(\Omega)^N}\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in W^{-1,q}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} a_0^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) - div\, a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) = f \quad dans \quad \Omega; \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{1.13}$$

La *Remarque* 4 et le *Corollaire* 2 montrent alors que le membre de gauche de (1.13) est bien défini pour $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous donnons à présent la formulation faible du problème (1.13) que nous résolvons grâce au *Corollaire* 1.

Proposition 6. *Pour* $\varepsilon > 0$*, la formulation faible du problème* (1.13) *est :*

$$\begin{cases} trouver\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)\,; \\ \langle A_\varepsilon u_\varepsilon, v\rangle = \langle b, v\rangle\,; \\ pour\ tout\ v \in W^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{1.14}$$

Où, pour tout $w, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle A_\varepsilon w, v\rangle = \int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot,w,Dw)\,v\,dx + \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot,w,Dw)\cdot Dv\,dx\,;$$

$$et \quad \langle b, v\rangle = \int_\Omega f v\,dx\,.$$

Preuve. Soit u_ε solution de (1.13) ; on a :

$$a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)(x) - div\, a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)(x) = f(x) \quad p.p\ x \in \Omega\,.$$

En multipliant cette égalité par $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\,\varphi\,dx - \int_\Omega div\ [a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)]\,\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx;$$

c'est-à-dire :

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\,\varphi\,dx\ - \int_\Omega div\,[a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\varphi]\,dx + \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\cdot D\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx.$$

Mais d'après la formule de Stokes on a :

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega div\ [a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\,\varphi]\ dx &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}[a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\,\varphi]\ dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\,\varphi\,n_i\,d\sigma \\
&= 0 \qquad\qquad (car\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega))\,.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\,\varphi\,dx\ + \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\cdot D\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx\,.$$

Et il suit que

$$\langle A_\varepsilon u_\varepsilon, \varphi\rangle = \langle b, \varphi\rangle\,, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

De plus, par le *Corollaire* 2, on montre aisément que les applications définies de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi \longmapsto \int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\,\varphi\,dx$, $\varphi \longmapsto \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\cdot D\varphi\,dx$ et $\varphi \longmapsto \int_\Omega f\varphi\,dx$ sont continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $W^{1,p}(\Omega)$. On déduit par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ que :

$$\langle A_\varepsilon u_\varepsilon, v\rangle = \langle b, v\rangle\,, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Réciproquement, on suppose $\langle A_\varepsilon u_\varepsilon, v\rangle = \langle b, v\rangle$, pour tout v dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors cette égalité est vraie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En remontant les égalités précédentes, on est conduit à :

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\,\varphi\,dx\ - \int_\Omega div\,[a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)]\cdot D\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

D'où on a $a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)(x) - div\ (a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon))(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$. Ainsi il y a équivalence entre (1.13) et (1.14). ■

Proposition 7. *Soit $\varepsilon > 0$. L'opérateur A_ε envoie $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$ et $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Il est évident que $A_\varepsilon w$ est une forme linéaire sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour la continuité, soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
|\langle A_\varepsilon w, v\rangle| &= \left|\int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\, v\, dx + \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\cdot Dv\, dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |a_0^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\, v|\, dx + \int_\Omega |a^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\cdot Dv|\, dx \\
&\leq \int_\Omega |a_0^\varepsilon(\cdot, w, Dw)|\, |v|\, dx + \int_\Omega |a^\varepsilon(\cdot, w, Dw)|\, |Dv|\, dx \\
&\leq \|a_0^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\|_{L^q(\Omega)}\, \|v\|_{L^p(\Omega)} + \|a^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\|_{L^q(\Omega)}\, \|Dv\|_{L^p(\Omega)^N} \\
&\leq \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \left(\|a_0^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\|_{L^q(\Omega)} + \|a^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\|_{L^q(\Omega)^N}\right).
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\|a_0^\varepsilon(., w, Dw)\|_{L^q(\Omega)}^q &\leq c_1 \int_\Omega (1 + |w|^{p-1} + |Dw|^{p-1})^q\, dx \quad \text{d'après (p5)} \\
&\leq 3^q c_1 \left(|\Omega| + \int_\Omega |w|^p\, dx + \int_\Omega |Dw|^p\, dx\right) \\
&\leq 3^q c_1 \left(|\Omega| + \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p\right);
\end{aligned}$$

donc

$$\|a_0^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\|_{L^q(\Omega)} \leq c_1' \left(|\Omega| + \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p\right)^{1/q}.$$

De même on a

$$\|a^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\|_{L^q(\Omega)^N} \leq c_1' \left(|\Omega| + \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p\right)^{1/q}. \tag{1.15}$$

Ainsi,

$$|\langle A_\varepsilon w, v\rangle| \leq c\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \quad \left(\text{où } c = 2c_1' \left(|\Omega| + \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p\right)^{1/q}\right); \tag{1.16}$$

d'où $A_\varepsilon w \in W^{-1,q}(\Omega)$. ■

Remarque 5. Notons que (1.16) montre aussi que A_ε est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.

Proposition 8. *Soit $\varepsilon > 0$. L'opérateur A_ε est coercif.*

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$ et $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle A_\varepsilon w, w\rangle &= \int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\, w\, dx + \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\cdot Dw\, dx \\
&\geq \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot, w, Dw)\cdot Dw\, dx && \text{d'après (p4)} \\
&\geq c_0 \int_\Omega (1 + |w| + |Dw|)^{p-\delta}\, |Dw|^\delta\, dx && \text{d'après (p3)} \\
&\geq c_0\, \|1 + |w| + |Dw|\,\|_{L^p(\Omega)}^{p-\delta} \|Dw\|_{L^p(\Omega)}^\delta,
\end{aligned}$$

où la dernière minoration est due à l'inégalité de Hölder inverse (*Lemme* 1) avec pour exposants $\frac{p}{p-\delta}$ et $\frac{p}{\delta}$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\langle A_\varepsilon w, w\rangle &\geq c_0 \left(\|1\|_{L^p(\Omega)} + \|w\|_{L^p(\Omega)} + \|Dw\|_{L^p(\Omega)^N}\right)^{p-\delta} \|Dw\|^\delta_{L^p(\Omega)} \\
&= c_0 \left(\|1\|_{L^p(\Omega)} + \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^{p-\delta} \|w\|^\delta_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&= c_0 \left(\|1\|_{L^p(\Omega)} + \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)^{p} \left(\frac{\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{\|1\|_{L^p(\Omega)} + \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}\right)^\delta .
\end{aligned}
$$

On a alors $\frac{\langle A_\varepsilon w, w\rangle}{\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ lorsque $\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow +\infty$, et donc A_ε est coercif. ■

Dans la suite nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3. *Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers u dans $L^p(\Omega)$; alors :*

$$
\forall v \in W^{1,p}(\Omega) \quad \begin{cases} a_0^\varepsilon(\cdot, u_n, Dv) \longrightarrow a_0^\varepsilon(\cdot, u, Dv) & \textit{quand } n \longrightarrow +\infty\,,\ \textit{dans } L^q(\Omega)\,; \\ a^\varepsilon(\cdot, u_n, Dv) \longrightarrow a^\varepsilon(\cdot, u, Dv) & \textit{quand } n \longrightarrow +\infty\,,\ \textit{dans} L^q(\Omega)^N\,. \end{cases}
$$

Preuve. Soient u et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans le *Lemme* ; alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$. Prenons $K > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq K$.

Pour $v \in W^{1,p}(\Omega)$ on a :

$$
\begin{aligned}
&\|a^\varepsilon(\cdot, u_n, Dv) - a^\varepsilon(\cdot, u, Dv)\|^q_{L^q(\Omega)} \\
&\qquad \leq c_3 \int_\Omega (1 + |u_n(x)| + |u(x)| + |Dv(x)|)^{(p-1-\alpha)q} |u_n(x) - u(x)|^{q\alpha}\, dx \quad (p7) \\
&\qquad \leq c_3 \|1 + |u_n| + |u| + |Dv|\,\|^{(p-1-\alpha)q}_{L^p(\Omega)} \|u_n - u\|^{q\alpha}_{L^p(\Omega)} \\
&\qquad \leq c_3 \left(\|1\|_{L^p(\Omega)} + \|u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Dv\|_{L^p(\Omega)^N}\right)^{(p-1-\alpha)q} \|u_n - u\|^{q\alpha}_{L^p(\Omega)} \\
&\qquad \leq c_3 \left(\|1\|_{L^p(\Omega)} + K + \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Dv\|_{L^p(\Omega)^N}\right)^{(p-1-\alpha)q} \|u_n - u\|^{q\alpha}_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|a^\varepsilon(\cdot, u_n, Dv) - a^\varepsilon(\cdot, u, Dv)\|_{L^q(\Omega)} \leq c\, \|u_n - u\|^\alpha_{L^p(\Omega)}, \tag{1.17}
$$

où

$$
c = c_3^{\frac{1}{q}} \left(\|1\|_{L^p(\Omega)} + K + \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Dv\|_{L^p(\Omega)^N}\right)^{p-1-\alpha} .
$$

Mais par hypothèse

$$
\|u_\lambda - u\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.
$$

D'où

$$
\|a^\varepsilon(x, u_n, Dv) - a^\varepsilon(\cdot, u, Dv)\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.
$$

On montre de la même façon que

$$
\|a_0^\varepsilon(\cdot, u_\lambda, Dv) - a_0^\varepsilon(\cdot, u, Dv)\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty;
$$

d'où le Lemme. ∎

Lemme 4. *Soient $g \in L^p(\Omega), (p \geq 1)$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ une suite bornée dans $L^p(\Omega)$. Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout sur Ω vers g alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $L^p(\Omega)$-faible.*

Preuve. Soit $f \in L^q(\Omega), (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Posons $u_n = g_n f$ *et* $u = gf$. On a bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers u. Comme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, prenons $C > 0$ tel que ; $\|g_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n(x)| dx &= \int_\Omega |g_n(x)|\,|f(x)|\,dx \\ &\leq \|g_n\|_{L^p(\Omega)}\,\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^q(\Omega)}|\Omega| \ < \infty;\end{aligned}$$

et par le théorème de convergence dominée il vient que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n(x)f(x)\,dx = \int_\Omega g(x)f(x)\,dx. \ \blacksquare$$

Lemme 5. *Soient $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$-faible. On pose*

$$F_n = (a^\varepsilon(\cdot, u_n, Du_n) - a^\varepsilon(\cdot, u_n, Du)) \cdot (Du_n - Du).$$

Si

$$\int_\Omega F_n(x)\,dx \longrightarrow 0 \quad \textit{quand } n \longrightarrow +\infty, \tag{1.18}$$

alors

$$a^\varepsilon(\cdot, u_n, Du_n) \longrightarrow a^\varepsilon(\cdot, u, Du) \quad \textit{quand } n \longrightarrow +\infty \quad \textit{dans } L^q(\Omega) - \textit{faible}. \tag{1.19}$$

Preuve. Soient $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)-$faible. Du *Théorème* 2, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^p(\Omega)$; ainsi, avec (1.18) il vient que de toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver un ensemble $Z \subset \Omega$ de mesure nulle tels que :

$$\forall x \notin Z \quad \begin{cases} F_{k_n}(x) \longrightarrow 0 & \text{quand } n \longrightarrow +\infty \\ u_{k_n}(x) \longrightarrow u(x) & \text{quand } n \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

Soit $x \notin Z$; on a

$$\xi^* = \lim_{n\to+\infty} Du_{k_n} < \infty.$$

En effet, d'après (p3),

$$|F_{k_n}(x)| \geq c_0\,(1 + |u_{k_n}(x)| + |Du_{k_n}(x)| + |Du|\,)^{p-\delta}\ |Du_{k_n} - Du|^\delta;$$

et le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers $+\infty$ si $\xi^* = \infty$; ce qui signifie dans ce cas que pour n tendant vers $+\infty$ on aura : $0 \geq +\infty$; ce qui est absurde. Nécessairement $\xi^* < \infty$.

On est conduit à :

$$\begin{cases} u_{k_n}(x) \longrightarrow u(x) \\ Du_{k_n}(x) \longrightarrow \xi^* \\ F_{k_n}(x) \longrightarrow 0 \end{cases} \qquad \text{quand } n \longrightarrow +\infty;$$

et avec la *Remarque* 3 on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} F_{k_n}(x) &= \lim_{n\to+\infty} (a^\varepsilon(\cdot, u_{k_n}, Du_{k_n})(x) - a^\varepsilon(\cdot, u_{k_n}, Du))(x) \cdot (Du_{k_n} - Du)(x) \\ &= (a^\varepsilon(x, u(x), \xi^*) - a^\varepsilon(x, u(x), Du(x)) \cdot (\xi^* - Du(x)). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(a^\varepsilon(x, u(x), \xi^*) - a^\varepsilon(x, u(x), Du(x)) \cdot (\xi^* - Du(x)) = 0,$$

et de $(p3)$ il vient que $Du(x) = \xi^*$.

On a donc montré que $(a^\varepsilon(\cdot, u_{k_n}, Du_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers $a^\varepsilon(\cdot, u, Du)$. Mais d'après (1.15) avec $w = u_{k_n}$, on a $(a^\varepsilon(\cdot, u_{k_n}, Du_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $L^q(\Omega)^N$ (car $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $W^{1,p}(\Omega)$-faible, donc y est bornée) ; d'où $(a^\varepsilon(\cdot, u_{k_n}, Du_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a^\varepsilon(\cdot, u, Du)$ dans $L^q(\Omega)^N$-faible, d'après le *Lemme* 4 . Cette limite étant indépendante de toute suite extraite, on a bien (1.19) et donc la preuve du Lemme. ■

Proposition 9. *Soit $\varepsilon > 0$. L'opérateur A_ε est du type Calcul des Variations.*

Preuve. Pour $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ on pose

$$< T_\varepsilon(u, v), w >= \int_\Omega a_0^\varepsilon(x, u, Du)\, w\, dx + \int_\Omega a^\varepsilon(x, u, Dv) Dw\, dx \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ceci définit un opérateur de $T_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ de $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$. On a en plus :

$$T_\varepsilon(u, u) = A_\varepsilon(u) \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Il reste à montrer que T_ε vérifie les hypothèses i)-iv) de la *Définition* 13.

Vérification de i) : On montre comme dans la preuve de la *Proposition* 7 que T_ε envoie effectivement $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$, avec, pour $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &| < T_\varepsilon(u, v), w > | \leq c\, \|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \qquad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \text{où} \qquad & c = c_1' \left((|\Omega| + \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)})^{\frac{1}{q}} + (|\Omega| + \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)})^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

Soit maintenant u_0 dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour v et w dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ tels que $v \neq w$ on a :

$$\begin{aligned}
< T_\varepsilon(u_0, v) - T_\varepsilon(u_0, w), v - w > &= \int_\Omega (a^\varepsilon(x, u_0, Dv) - a^\varepsilon(x, u_0, Dw)) \cdot D(v - w)\, dx \\
&\geq c_0 \int_\Omega (1 + |u_0| + |Dv| + |Dw|)^{p-\delta} |D(v - w)|^\delta\, dx \\
&\geq c_0 \,||1 + |u_0| + |Dv| + |Dw|\,||^{p-\delta}_{L^p(\Omega)} \,||D(v - w)||^\delta_{L^p(\Omega)^N} \\
&= c_0 \,||1 + |u_0| + |Dv| + |Dw|\,||^{p-\delta}_{L^p(\Omega)} \,||(v - w)||^\delta_{W_0^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

la dernière minoration étant obtenue par l'inégalité de Hölder inverse. Ainsi,

$$\langle T_\varepsilon(u_0, v) - T_\varepsilon(u_0, w), v - w\rangle > 0\,;$$

donc $T_\varepsilon(u_0, .)$ est strictement monotone. D'autre part, pour $t > 0$ et u, v et w dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&| < T_\varepsilon(u_0, u + tv) - T_\varepsilon(u_0, u), w > | \\
&\quad = \left| \int_\Omega [a^\varepsilon(x, u_0, D(u + tv)) - a^\varepsilon(x, u_0, Du)] \cdot Dw\, dx \right| \\
&\quad \leq \int_\Omega |a^\varepsilon(x, u_0, D(u + tv)) - a^\varepsilon(x, u_0, Du)|\, |Dw|\, dx \\
&\quad \leq c_2 \int_\Omega (1 + |u_0| + |Du + tDv| + |Du|)^{p-1-\alpha} |t|^\alpha |Dv|^\alpha |Dw|\, dx \\
&\quad \leq c_2\, |t|^\alpha \int_\Omega |g|^{p-1-\alpha} |g|^\alpha |Dw|\, dx, \qquad g = 1 + |u_0| + (1 + t)|Dv| + 2|Du| \\
&\quad = c_2\, |t|^\alpha \int_\Omega |g|^{p-1} |Dw|\, dx \\
&\quad \leq c_2 |t|^\alpha \,||Dw||_{L^p(\Omega)^N} ||g||^{p-1}_{L^p(\Omega)} \\
&\quad \leq c_2 |t|^\alpha \left(||1||_{L^p(\Omega)} + ||u_0||_{L^p(\Omega)} + (1 + t)||Dv||_{L^p(\Omega)^N} + 2||Du||_{L^p(\Omega)^N} \right)^{p-1} ||Dw||_{L^p(\Omega)^N}.
\end{aligned}$$

Il en ressort que $| < T_\varepsilon(u_0, u + tv) - T_\varepsilon(u_0, u), w > | \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow 0$, c'est-à-dire que $T_\varepsilon(u_0, \cdot)$ est hémicontinue. On a donc *i)*.

Vérification de *ii*) **:** On montre de façon similaire que pour tout v dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $T_\varepsilon(\cdot, v)$ est hémicontinue et bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$; ce qui donne *ii)*.

Vérification de *iii*) **:** Avec les notations du *Lemme* 5, nous avons :

$$< T_\varepsilon(u_\lambda, u_\lambda) - T_\varepsilon(u_\lambda, u), u_\lambda - u > = \int_\Omega F_\lambda(x)\, dx;$$

et sous les hypothèses de *iii)* on a ((1.19)). Mais $(a_0(\cdot, u_\lambda, Dv))_{\lambda \geq 0}$ converge dans $L^q(\Omega)$-faible (et même fort) vers $a_0(\cdot, u, Dv)$. Donc

$$\forall v, w \in W_0^{1,p}(\Omega),\; < T_\varepsilon(u_n, v), w > \longrightarrow < T_\varepsilon(u, v), w > \;\text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty\,.$$

D'où pour tout v dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $(T_\varepsilon(u_n,v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T_\varepsilon(u,v)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)-$faible$*$; ce qui est bien *iii)*.

Vérification de iv) : Soient $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\chi \in W^{-1,q}(\Omega)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ une suite qui converge faiblement vers u tels que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $(T_\varepsilon(u_n,v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers χ dans $W^{-1,q}(\Omega)-$faible$*$. Comme $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers u dans $L^p(\Omega)$; et en se servant du *Lemme* 3, pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $(a^\varepsilon(x,u_n,Dv))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^q(\Omega)$ vers $a^\varepsilon(x,u,Dv)$. Il s'en suit que :

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \int_\Omega a^\varepsilon(x,u_n,Dv)\cdot Du_n\,dx \longrightarrow \int_\Omega a^\varepsilon(x,u,Dv)\cdot Du\,dx \quad \text{lorsque } n \to +\infty\,.$$

Par ailleurs,

$$\left|\int_\Omega a_0^\varepsilon(x,u_n,Du_n)\,(u_n-u)\,dx\right| \le C\,\|u_n-u\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

Donc

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(x,u_n,Du_n)\,(u_n-u)\,dx \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty\,. \tag{1.20}$$

Mais pour $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(x,u_n,Du_n)\,u\,dx \ = \ < T_\varepsilon(u_n,v),u > - \int_\Omega a^\varepsilon(x,u_n,Dv)\cdot Du\,dx\,.$$

Et donc par hypothèse on a :

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(x,u_n,Du_n)\,u\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < \chi,u > - \int_\Omega a^\varepsilon(x,u,Dv)\cdot Du\,dx\,.$$

Ce qui, avec (1.20) donne :

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(x,u_n,Du_n)\,u_n\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < \chi,u > - \int_\Omega a^\varepsilon(x,u,Dv)\cdot Du\,dx\,.$$

Puisque

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad < T_\varepsilon(u_n,v),u_n >= \int_\Omega a_0^\varepsilon(x,u_n,Du_n)\,u_n\,dx + \int_\Omega a^\varepsilon(x,u_n,Dv)\cdot Du_n\,dx\,,$$

on a finalement :

$$< T_\varepsilon(u_n,v),u_n > \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} < \chi,u >, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Ce qui montre *iv)* et achève la preuve de la *Proposition* 9 . ∎

Proposition 10. *Pour chaque ε>0, le problème* (1.13) *admet au moins une solution dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. Soit ε>0. L'opérateur A_ε est coercif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$ et du type « Calcul Des Variations ». De plus, il est facile de montrer que $b \in W^{-1,q}(\Omega)$. Ainsi, on déduit du *Corollaire* 1 que le problème (1.14) admet au-moins une solution $u_\varepsilon \in E$. Mais d'après la Proposition 1.3.1 le problème (1.14) est équivalent au problème (1.13) ; d'où le résultat. ■

Chapitre Deux

CONVERGENCE MULTI-ÉCHELLE

Dans ce chapitre, nous définissons d'abord la notion de fonction périodique, ensuite nous présentons quelques espaces de fonctions périodiques, puis nous introduisons la notion de convergence à deux échelles ainsi que ses principaux résultats de compacité [2, 3, 4, 8, 10, 18,]. Dans la suite, sauf mention contraire, $Y = (0, 1)^N$ est le cube unité de $\mathbb{R}^N$.

2.1 Fonctions périodiques et fondamentaux de la convergence à deux échelles

Définition 14. *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}^N$. La fonction f est dite Y-périodique si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a $f(x + k) = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^N$.*

Définition 15 (Valeur moyenne d'une fonction périodique de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$)**.**
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. La valeur moyenne de f sur Ω est le réel noté $\mathcal{M}_\Omega(f)$ et défini par $\mathcal{M}_\Omega(f) = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega f(y)dy$.

Nous introduisons à présent les espaces des fonctions périodiques utilisés fréquemment en homogénéisation périodique. Ces résultats se trouvent par exemple dans [7, page 174].

Définition 16. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On désigne par :*

- *$C_{per}(Y)$ l'espace des fonctions continues $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ et Y-périodiques ;*
- *$C^\infty_{per}(Y)$ le sous espace de $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ constitué des fonctions Y-périodiques ;*
- *$L^p_{per}(Y)$, $(p \in [1, +\infty[)$, l'espace des classes de fonctions mesurables $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et est Y-périodique.*
- *$W^{1,p}_{per}(Y)$ l'espace des fonctions de $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ qui sont Y-périodiques ;*
- *$W^{1,p}_{\#}(Y)$ le sous-ensemble de $W^{1,p}_{per}(Y)$ constitué des fonctions de valeur moyenne sur Y nulle ;*

- $L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$ *l'espace des classes de fonctions vectorielles mesurables* $u : \Omega \longrightarrow \mathrm{C}_{per}(Y)$ *telles que :*
$$\int_\Omega \left(\sup_Y |u(x)|\right)^p dx < +\infty;$$
- $L^p(\Omega; w^{1,p}_{per}(Y))$ *l'espace des classes de fonctions vectorielles mesurables* $u : \Omega \longrightarrow w^{1,p}_{per}(Y)$ *telles que :*
$$\int_\Omega \|u(x)\|^p_{w^{1,p}_{per}(Y)} dx < \infty.$$

Proposition 11. *L'application* $\|\cdot\|_{w^{1,p}_\sharp(Y)}$ *définie de* $W^{1,p}_\sharp(Y)$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\|u\|_{w^{1,p}_\sharp(Y)} = \|Du\|_{L^p(Y)}, \quad u \in W^{1,p}_\sharp(Y)$$

est une norme sur $W^{1,p}_\sharp(Y)$.

Preuve. Soit $u \in W^{1,p}_\sharp(Y)$. On a : $\|Du\|_{L^p(Y)} = 0$ équivaut à $Du = 0$. Et par suite $u = c$, ($c \in \mathbb{R}$). Mais $\frac{1}{mes(Y)} \int_Y u\, dy = 0$, il vient que $c = 0$. D'où $u = 0$. On déduit le résultat final en utilisant le fait que $\|\cdot\|_{L^p(Y)}$ est un norme sur $L^p(Y)$. ■

Nous donnons à présent quelques caractéristiques des espaces fonctionnels sus-définis.

Proposition 12 (*Voir [16, page 3]*)**.** *Une fonction* f *appartient à* $L^1\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$ *si et seulement si, il existe un sous-ensemble* E *de* Ω *de mesure nulle tel que :*

(a) *Pour tout* x *dans* $\Omega \setminus E$ *la fonction* $y \longmapsto f(x, y)$ *est continue ;*

(b) *Pour tout* x *dans* $\Omega \setminus E$ *la fonction* $y \longmapsto f(x, y)$ *est* Y*-périodique ;*

(c) *Pour tout* y *dans* Y*, la fonction* $x \longmapsto f(x, y)$ *est mesurable.*

Remarque 6. D'après (a) et (c) de la proposition précédente les fonctions f de $L^1\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$ sont de **Caratheodory** sur $\Omega \times \mathbb{R}^N$.

Théorème 9 (*Voir [8, page 33]*)**.** *Soient* $\varepsilon > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ *et* $f \in L^p_{per}(Y)$*. On considère la fonction* f^ε *de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f^\varepsilon(x) = f(\frac{x}{\varepsilon})$ *pour presque tout* x *dans* $\mathbb{R}^N$.

- *Si* $p < \infty$ *alors lorsque* ε *tend vers 0,* $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ *tend vers* $\mathcal{M}_Y(f)$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^N)$*−faible.*
- *Si* $p = \infty$*, alors lorsque* ε *tend vers 0,* $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ *tend vers* $\mathcal{M}_Y(f)$ *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^N)$*−faible* $*$.

On dit des fonctions f_ε définies au *Théorème* 9 qu'elles **oscillent rapidement** pour ε très petit.

Exemple(de fonction Y-périodique qui oscille rapidement) Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

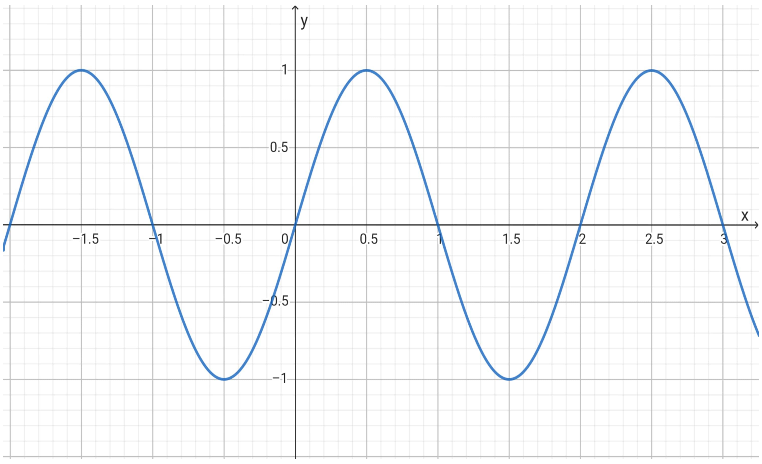
$$v(y) = cos(\pi y).$$

Pour $\varepsilon > 0$, définissons v_ε par :

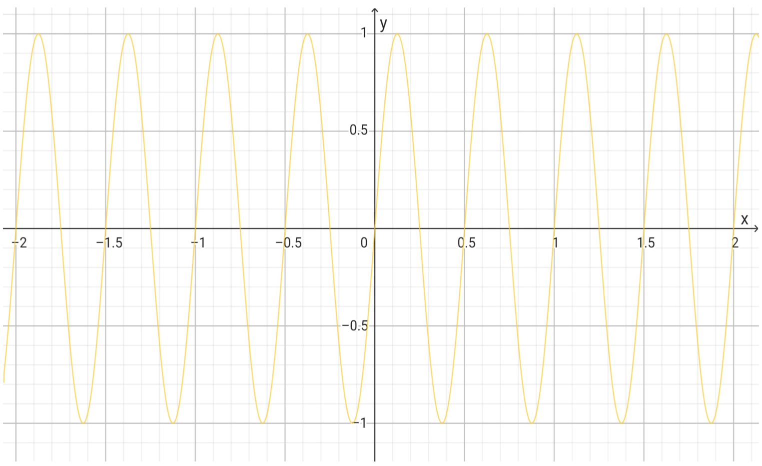
$$v_\varepsilon(x) = v(\frac{x}{\varepsilon}) = \cos\Big(\pi\frac{x}{\varepsilon}\Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $\varepsilon \in \left\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ alors pour $n = 0, 2, 4$, on a les images suivantes :

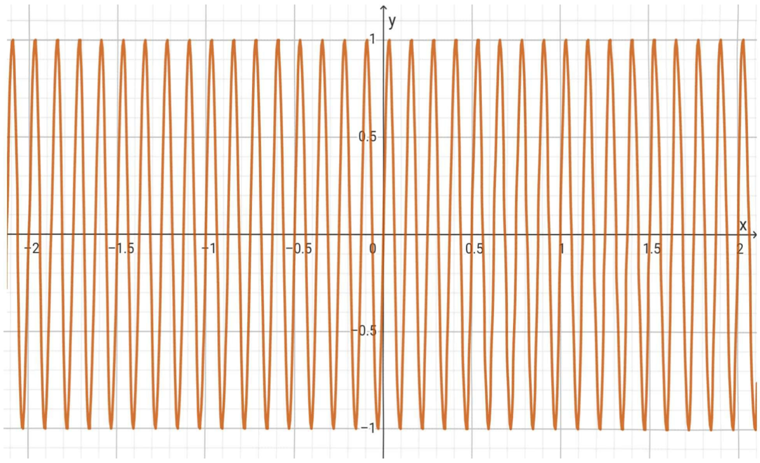
Schéma :



Courbe de v_ε pour $\varepsilon = \frac{1}{2^0}$



Courbe de v_ε pour $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$



Courbe de v_ε pour $\varepsilon = \frac{1}{2^4}$

Proposition 13. *Soit $p \in \mathbb{R}$ $1 \leq p < \infty$. L'espace $L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$ $1 \leq p < \infty$ a les propriétés suivantes :*

1) $L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$ est un espace de Banach séparable ;

2) $L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$ est dense dans $L^p(\Omega \times Y)$.

3) Pour $L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$, la fonction f^ε qui à presque tout x dans Ω associe $f^\varepsilon(x) = f(x, \frac{x}{\varepsilon})$ est mesurable sur Ω et on a :

$$\|f^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)}. \tag{2.1}$$

4) Pour $f \in L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega f^\varepsilon(x)\, dx = \int_\Omega \int_Y f(x, y)\, dy\, dx\,; \tag{2.2}$$

aussi,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |f^\varepsilon(x)|^p\, dx = \int_\Omega \int_Y |f(x, y)|^p\, dy\, dx. \tag{2.3}$$

Preuve. D'après les résultats sur les intégrales à valeurs vectorielles voir [12], $L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$, $1 \leq p < \infty$ est un espace de Banach séparable car $C_{per}(Y)$ l'est aussi ; d'où 1). La densité en 2) découle du faite que : $\mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y)) \subset L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right) \subset L^p(\Omega \times Y)$ et $\mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$ est dense dans $L^p(\Omega \times Y)$. Pour 3) et 4), nous faisons la preuve pour $p = 1$; le cas $1 < p < \infty$ se fait de façon analogue. Par la *Remarque* 6, les fonctions f de $L^1\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$ sont de Carathéodory, ce qui entraine que $x \longmapsto f(x, \frac{x}{\varepsilon})$ est mesurable sur Ω. L'inégalité (2.1) est immédiate.

Soient $f \in L^p\left(\Omega; C_{per}(Y)\right)$ et $n \in \mathbb{N}$. Considérons la partition $(Y_i)_i$ de taille n^N de Y formée des cubes uniformes tels que :

$$\begin{cases} |Y_i \cap Y_j| = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n^N\}, i \neq j; \\ |Y_i| = \frac{1}{n^N}, \quad \forall 1 \leq i \leq n^N; \\ Y = \bigcup_{i=1}^{n^N} Y_i. \end{cases}$$

Pour $1 \leq i \leq n^N$, désignons par $\mathbb{1}_i$ la fonction indicatrice de Y_i qui par $Y-$périodicité s'étend sur $\mathbb{R}^N$ tout entier; et par y_i un élément quelconque de Y_i. Nous allons montrer que (2.2) a lieu pour les fonctions simples de la forme :

$$f_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n^N} f(x,y_i)\mathbb{1}_i(y)$$

Soit $i \in \{1; \cdots n^N\}$. On a bien $x \longmapsto f_n(x,y_i)$ dans $L^1(\Omega)$; puisque $\mathbb{1}_i \in L^1_{per}(Y)$, du *Théorème 9*, $\mathbb{1}_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)-$faible$*$ quand (ε tend vers 0) vers sa moyenne sur Y; ce qui signifie :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f_n(x, \frac{x}{\varepsilon})dx &= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{n^N} \int_\Omega f(x,y_i)\mathbb{1}_i(\frac{x}{\varepsilon})dx \\ &= \sum_{i=1}^{n^N} \int_\Omega \int_Y f(x,y_i)\mathbb{1}_i(y)dydx; \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f_n(x, \frac{x}{\varepsilon})dx = \int_\Omega \int_E f_n(x,y)dydx. \tag{2.4}$$

Mais,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega f(x,\frac{x}{\varepsilon})dx - \int_\Omega\int_Y f(x,y)dydx\right| &\leq \left|\int_\Omega f(x,\frac{x}{\varepsilon}) - f_n(x,\frac{x}{\varepsilon})dx\right| + \left|\int_\Omega f_n(x,\frac{x}{\varepsilon})dx - \int_\Omega\int_Y f_n(x,y)dydx\right| \\ &\quad + \left|\int_\Omega \int_Y f_n(x,y) - f(x,y)dydx\right|; \\ &\leq 2\int_\Omega \sup_{y\in Y} |f(x,y) - f_n(x,y)|\, dx \\ &\quad + \left|\int_\Omega f_n(x,\frac{x}{\varepsilon})dx - \int_\Omega \int_Y f_n(x,y)dydx\right|; \end{aligned}$$

ainsi, faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$ et faisant usage de (2.4), on aboutit à :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left|\int_\Omega f(x,\frac{x}{\varepsilon})dx - \int_\Omega \int_Y f(x,y)dydx\right| \leq 2\, \|f_n - f\|_{L^1(\Omega;C_{per}(Y))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On obtient donc (2.3) si on montre que $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega;C_{per}(Y))}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $y \longmapsto f(x,y)$ est continue sur Y, on a :

$$g_n(x) = \sup_{y\in Y} |f(x,y) - f_n(x,y)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{p.p } x \in \Omega\,;$$

de plus,

$$|g_n(x)| \leq 2 \sup_{y\in Y} |f(x,y)| \quad \text{p.p } x \in \Omega\,,$$

et $x \longmapsto \sup_{y\in Y} |f(x,y)|$ appartient à $L^1(\Omega)$; d'où, par le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\|f_n - f\|_{L^1(\Omega;C_{per}(Y))} = \int_\Omega \sup_{y\in Y} |f(x,y) - f_n(x,y)|\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

(2.4) s'obtient en remplaçant simplement $f(x,y)$ par $|f(x,y)|$ dans tout le processus précédent. ■

2.2 Convergence à deux échelles

2.2.1. Définition et premiers résultats

Nous donnons à présent la définition de la convergence à deux échelles que nous utiliserons et quelques résultats importants sur cette notion. Ici, sauf mention contraire, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et p et q deux réels tels que $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 17. *Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$. On dit que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge :*

– ***Faiblement à deux échelles** dans $L^p(\Omega)$ vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$ si nous avons :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\phi(x,y)\, dy\, dx\,; \tag{2.5}$$

pour tout $\phi \in L^q(\Omega; C_{per}(Y))$. Dans la suite cette convergence sera notée $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} u$.

– ***Fortement à deux échelles** dans $L^p(\Omega)$ vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$ dans $L^p(\Omega)$ si nous avons $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} u$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega\times Y)}$.*

Dans la suite, lorsqu'on dira qu'une suite converge à deux échelles, il s'agira de la convergence à deux échelles faible.

Remarque 7. Lorsqu'une suite de $L^p(\Omega)$ converge à deux échelles, on a aussi (2.5) pour tout ϕ dans $L^q_{per}(Y, C(\overline{\Omega}))$.

Preuve. Soit $\varphi \in L^q_{per}\left(Y.C(\overline{\Omega})\right)$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}\left(\Omega; C^\infty_{per}(Y)\right)$ telle que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^p(\Omega \times Y)$. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi(x,\frac{x}{\varepsilon})dx = \lim_{n\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left[\varphi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \varphi_n(x,\frac{x}{\varepsilon})\right] dx \\ + \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi_n(x,\frac{x}{\varepsilon})dx;\end{aligned} \tag{2.6}$$

mais,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi_n(x,\frac{x}{\varepsilon})dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega\int_Y u(x,y)\varphi_n(x,y)dxdy;\\ &= \int_\Omega\int_Y u(x,y)\varphi(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que le premier terme du membre de droite de (2.6) vaut 0. Or, par l'inégalité de Hölder, puisque $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left[\varphi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \varphi_n(x,\frac{x}{\varepsilon})\right] dx &\leq C\lim_{n\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\varphi_n\left(\cdot,\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) - \varphi\left(\cdot,\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^q(\Omega)};\\ &= C\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n - \varphi\|_{L^q(\Omega\times Y)}, \qquad \text{d'après (2.3), } \textit{Proposition13}\\ &= 0, \qquad \text{par hypothèse sur } (\varphi_n)_n;\end{aligned}$$

d'où la *Remarque*. ■

Proposition 14. *La limite de la convergence à deux échelles lorsqu'elle existe est unique.*

Preuve. Soient $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et $u, v \in L^p(\Omega \times Y)$ tels que $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} u$ et $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} v$ dans $L^p(\Omega)$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\,dy\,dx \quad \forall\phi \in L^q(\Omega, C_{per}(Y)).$$

De même puisque $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} v$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx = \int_\Omega\int_Y v(x,y)\phi(x,y)\,dy\,dx \quad \forall\phi \in L^q(\Omega, C_{per}(Y)).$$

On obtient alors que

$$\int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\,dy\,dx = \int_\Omega\int_Y v(x,y)\phi(x,y)\,dy\,dx \quad \forall\phi \in L^q(\Omega, C_{per}(Y));$$

ce qui entraine :

$$\int_\Omega \int_Y [u(x,y) - v(x,y)]\phi(x,y)\, dy\, dx = 0 \quad \forall \phi \in L^q(\Omega, C_{per}(Y)).$$

On peut donc écrire :

$$\int_\Omega \left[\int_Y (u(x,y) - v(x,y))\, \psi(y)\, dy \right] \varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \otimes \psi \in L^q(\Omega) \otimes C_{per}(Y);$$

c'est-à-dire pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\int_Y [u(x,y) - v(x,y)]\, \psi(y)\, dy = 0 \quad \forall \psi \in C_{per}(Y).$$

Il en ressort que pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $y \in Y$, $u(x,y) - v(x,y) = 0$; d'où $u = v$ dans $L^p(\Omega \times Y)$ et donc le résultat. ∎

Théorème 10 (Relation entre convergence forte et convergence à deux échelles).
Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ qui converge vers un élément u dans $L^p(\Omega)$. Alors $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} u$ dans $L^p(\Omega)$.

Preuve. Soit $\phi \in L^q(\Omega, C_{per}(Y))$; posons $\phi^\varepsilon(x) = \phi(x, \frac{x}{\varepsilon})$; alors on a :

$$\begin{aligned}\left| \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi^\varepsilon(x)\, dx - \int_\Omega \int_Y u(x)\phi(x,y)\, dydx \right| &\leq \left| \int_\Omega [u_\varepsilon(x) - u(x)]\phi^\varepsilon(x)\, dx \right| \\ &+ \left| \int_\Omega u(x)\phi^\varepsilon(x)\, dx - \int_\Omega \int_Y u(x)\phi(x,y)\, dydx \right| ;\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}&\left| \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi^\varepsilon(x)\, dx - \int_\Omega \int_Y u(x)\phi(x,y)\, dydx \right| \\ &\leq \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \|\phi^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} + \left| \int_\Omega u(x)\phi^\varepsilon(x)\, dx - \int_\Omega \int_Y u(x)\phi(x,y)\, dydx \right| .\end{aligned} \tag{2.7}$$

Puisque $u \in L^p(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $L^p(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers u dans $L^p(\Omega)$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après 4) de la *Proposition* 13,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \varphi_n(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega \int_Y \varphi_n(x)\phi(x,y)\, dy\, dx\, .$$

Ainsi, en faisant $n \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u(x)\phi^\varepsilon(x)\, dx = \int_\Omega \int_Y u(x)\phi(x,y)\, dy\, dx.$$

D'autre part, la suite $(\phi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée (d'après le 3) de la *Proposition* 13); alors en faisant tendre ε vers 0, le terme de droite de l'inégalité (2.7) tend vers 0. On aboutie donc à :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi^\varepsilon(x)\, dx = \int_\Omega \int_Y u(x)\phi(x,y)\, dy\, dx,$$

ce qui est le résultat escompté. ∎

Théorème 11 (Relation entre convergence faible et convergence à deux échelles). *Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles dans $L^p(\Omega)$ vers $u \in L^p(\Omega \times Y)$. Alors la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement vers v dans $L^p(\Omega)$, où pour presque tout $x \in \Omega$ on a $v(x) = \int_Y u(x,y)\, dy$.*

Preuve. Puisque $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge à deux échelles vers u, alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x)\, dx = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\phi(x)\, dy\, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega);$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x)\, dx = \int_\Omega \left(\int_Y u(x,y)\, dy \right) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

D'où le résultat. ∎

Théorème 12 (Relation entre convergence forte et convergence à deux échelles-forte). *Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite qui converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$. Alors la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement à deux échelles vers u dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve. D'après le *Théorème* 10, la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement à deux échelles vers u. De plus on a :

$$\left| \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} - \|u\|_{L^p(\Omega)} \right| \leq \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Il vient que $\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega \times Y)}$. D'où le résultat. ∎

On sait que si une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers un $u \in L^p(\Omega)$ alors on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}.$$

Un résultat similaire pour le cas de la convergence à deux échelles est le suivant :

Lemme 6. *Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge à deux échelles vers $u \in L^p(\Omega\times Y)$. Alors,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega\times Y)} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}.$$

Preuve. Comme $u \in L^p(\Omega)$, alors $|u|^{p-2}u \in L^q(\Omega)$. Par le 2) de la *Proposition* 13, prenons $(\phi_m)_{m\in\mathcal{N}}$ une suite de $L^q(\Omega; C_{per}(Y))$ qui converge vers $|u|^{p-2}u \in L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega \times Y)$. L'inégalité de Young ($ab \leq |a|^p/p + |b|^q/q$, $a, b \in \mathbb{R}$) entraine :

$$\int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^p \, dx \geq p \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi_m(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx - (p-1)\int_\Omega \left|\phi_m(x, \frac{x}{\varepsilon})\right|^q \, dx.$$

En passant à la limite sur ε, on a :

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)} \geq p \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi_m(x,y)\, dydx - (p-1)\int_\Omega\int_Y |\phi_m(x,y)|^q \, dydx.$$

En passant à la limite sur m, on obtient :

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)} &\geq p \int_\Omega\int_Y |u(x,y)|^p \, dydx - (p-1)\int_\Omega\int_Y |u(x,y)|^p \, dydx \\ &= \|u\|^p_{L^p(\Omega\times Y)}.\end{aligned}$$

D'où le Lemme. ■

2.2.2. Résultats principaux

Nous terminons ce chapitre par deux théorèmes fondamentaux de la convergence à deux échelles, le second étant crucial pour le processus d'homogénéisation que nous entamerons par la suite.

Théorème 13 (Compacité à deux-échelles dans $L^p(\Omega)$). *De toute suite de fonction $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée dans $L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge à deux échelles dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels strictement positifs telle que ε_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonctionnelle l_{ε_n} sur $L^q(\Omega,\, C_{per}(Y))$ par :

$$l_{\varepsilon_n}(\phi) = \int_\Omega u_{\varepsilon_n}(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx, \quad \phi \in L^q(\Omega, C_{per}(Y)).$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\left|l_{\varepsilon_n}(\phi)\right| = \left|\int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx\right| \leq \|u_{\varepsilon_n}\|_{L^p(\Omega)}\|\phi^{\varepsilon_n}\|_{L^q(\Omega)}.$$

Et comme $(u_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, alors il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varepsilon_n}\|_{L^p(\Omega)} \leq c$. De plus $\|\phi^{\varepsilon_n}\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^q(\Omega;\, C_{per}(Y))}$ (d'après la *Proposition* 13), d'où :

$$\left|l_{\varepsilon_n}(\phi)\right| \leq c\|\phi\|_{L^q(\Omega;\, C_{per}(Y))}. \tag{2.8}$$

On en déduit que l_{ε_n} est une forme linéaire continue sur $L^q\left(\Omega;\, C_{per}(Y)\right)$ et que la suite $(l_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\left[L^q\left(\Omega;\, C_{per}(Y)\right)\right]'$. D'après le *Théorème de Banach-Aloaglu*, il existe une sous-suite de $(l_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ (encore notée $(l_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dans la suite) et $l \in \left[L^q\left(\Omega;\, C_{per}(Y)\right)\right]'$ tels que :

$$\forall \phi \in L^q\left(\Omega;\, C_{per}(Y)\right), \quad l_{\varepsilon_n}(\phi) \longrightarrow l(\phi) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty\,.$$

D'autre part en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ dans (2.8), il vient que :

$$|l(\phi)| \leq c\|\phi\|_{L^q(\Omega;\, C_{per}(Y))} \quad \forall \phi \in L^q\left(\Omega;\, C_{per}(Y)\right)\,.$$

Puisque $L^q\left(\Omega;\, C_{per}(Y)\right)$ est dense dans $L^q(\Omega\times Y)$, l s'étend de façon unique à une forme linéaire continue sur $L^q(\Omega \times Y)$, (encore notée l dans la suite) et on a :

$$|l(\phi)| \leq c\|\phi\|_{L^q(\Omega\times Y)} \quad \forall \phi \in L^q(\Omega \times Y)\,.$$

Comme $l \in \left[L^q\left(\Omega;\, C_{per}(Y)\right)\right]' \cong L^p(\Omega \times Y)$, alors d'après le théorème de représentation de Riesz, la forme linéaire continue l peut être identifiée à un élément $u \in L^p(\Omega \times Y)$ et on obtient donc :

$$l(\phi) = \langle u, \phi\rangle = \int_{\Omega}\int_{Y} u(x, y)\phi(x, y)\, dydx\,,$$

pour tout $\phi \in L^q(\Omega \times Y)$; ce qui achève la preuve. ■

Théorème 14 (Compacité à deux-échelles dans $W^{1,p}(\Omega)$). *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et p un réel, $1 < p < +\infty$. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite bornée de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$) et $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_1 \in L^p\left(\Omega;\, W^{1,p}_{\sharp}(\Omega)\right)$ tels que :*

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon &\longrightarrow u_0 \qquad dans\ W^{1,p}(\Omega) - faible; && (2.9)\\
u_\varepsilon &\xrightarrow{2-s} u_0 \qquad dans\ L^p(\Omega); && (2.10)\\
Du_\varepsilon &\xrightarrow{2-s} Du_0 + D_y u_1 \quad dans\ (L^p(\Omega))^N. && (2.11)
\end{aligned}$$

La preuve se fait en utilisant le lemme suivant (voir [7, page 181]) .

Lemme 7 (de Rham). *Posons* $H = \left\{\varphi \in L^q(\Omega;\ L^q_{per}(Y)),\ div_y\varphi = 0\right\}$. *Alors*

- *L'espace* $\mathcal{D}(\Omega;\ C^\infty_{per}(Y)) \cap H$ *est dense dans* H *;*
- *l'orthogonal de* H *est donné par :* $H^\perp = \left\{D_y u,\ u \in L^p(\Omega;\ W^{1,p}(Y))\right\}$.

<u>**Preuve.**</u> (du *Théorème* 14). Puisque la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, alors, il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans la suite), telle que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement disons vers u_0 dans $W^{1,p}(\Omega)$. On a également que les suites $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(Du_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont bornées respectivement dans $L^p(\Omega)$ et dans $L^p(\Omega)^N$. On déduit de *Théorème* 13 qu'il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (également notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans la suite), des fonctions $u \in L^p(\Omega\times Y)$ et $U_0 \in L^p(\Omega\times Y)^N$ telles que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega;\ C^\infty_{per}(Y))$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega;\ C^\infty_{per}(Y))^N$ on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\,dydx$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega Du_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx = \int_\Omega\int_Y U_0(x,y)\psi(x,y)\,dydx.$$

a) **Montrons que** u **ne dépend pas de** y. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega;\ C^\infty_{per}(Y))^N$. On a :

$$\int_\Omega Du_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx = -\int_\Omega u_\varepsilon(x)div_x\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_\varepsilon(x)div_y\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx.$$

En multipliant cette égalité par ε et en faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$-\int_\Omega\int_Y u(x,y)div_y\psi(x,y)\,dydx = 0\,.$$

Ainsi

$$\int_\Omega\int_Y D_y u(x,y)\psi(x,y)\,dydx = 0 \quad \forall\psi \in \mathcal{D}(\Omega;\ C^\infty_{per}(Y))^N;$$

d'où $D_y u = 0$. Donc u ne dépend pas de y. Ainsi $u \in L^p(\Omega)$; puisque $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge à deux échelles vers u alors $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers u (car $\int_Y u(x,y)dy = u(x)$).

Comme $u_\varepsilon \longrightarrow u_0$ dans $L^p(\Omega)$ − faible , on déduit par unicité de la limite que $u = u_0$. Et par suite l'on a $u_\varepsilon \overset{2-s}{\longrightarrow} u_0$ dans $L^p(\Omega)$.

b) **Montrons qu'il existe** $u_1 \in L^p(\Omega;\ W^{1,p}_\sharp(Y))$ **tel que** $U_0 = Du_0 + D_y u_1$.

On a :

$$\int_\Omega Du_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = -\int_\Omega u_\varepsilon(x) div_x \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_\varepsilon(x) div_y \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, , dx \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y)).$$

En prenant en particulier $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y)) \cap H$ et faisant tendre $\varepsilon \to 0$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\int_\Omega \int_Y [U_0(x, y) - Du_0(x, y)] \cdot \psi(x, y) dy dx = 0. \tag{2.12}$$

On déduit par densité de $\mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y)) \cap H$ dans H que (2.12) est vrai pour tout $\psi \in H$. D'où $U_0 - Du_0 \in H^\perp$. Ainsi il existe $u_1 \in L^p(\Omega;\ W^{1,p}(Y))$ tel que $U_0 = Du_0 + D_y u_1$. Et donc on a :

$$Du_\varepsilon \overset{2-s}{\longrightarrow} Du_0 + D_y u_1 \quad \text{dans } L^p(\Omega)^N.$$

Cependant, u_1 n'est pas unique ; en effet, tout autre $u_1' \in W^{1,p}(Y)$ tel que $D_y u_1 = D_y u_1'$ vérifie la dernière limite ci-dessus. Nous choisissons l'un de ces candidats, $u_1 \in W^{1,p}(Y)$ avec la condition supplémentaire (lui rendant unique) $\mathcal{M}_Y(u_1) = 0$; c'est-à-dire $u_1 \in W^{1,p}_\sharp(Y)$; d'où le théorème. ■

★ ★ Chapitre Trois ★ ★

HOMOGÉNÉISATION DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, nous effectuons le passage à la limite dans le problème variationnel formulé au chapitre 1 en utilisant la convergence à deux échelles, pour obtenir un problème limite dit homogénéisé.

3.1 Passage à la limite et problème homogénéisé global

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Nous supposons en plus des hypothèses $(p1)$ à $(p7)$, que les fonctions a et a_0 sont $Y-$périodique ($Y = (0,1)^N$) par rapport à leur première variable.

Théorème 15. *Soit la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, où, pour $\varepsilon > 0$, u_ε est solution du $\varepsilon-$problème (1.13) sous les hypothèses (p1) à (p7). Alors il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans la suite), $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u_1 \in L^p(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y))$ tels que :*

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_0 \quad dans\ W_0^{1,p}(\Omega) - faible; \tag{3.1}$$

$$u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} u_0 \quad dans\ L^p(\Omega); \tag{3.2}$$

$$Du_\varepsilon \xrightarrow{2-s} Du_0 + D_y u_1 \quad dans\ (L^p(\Omega))^N. \tag{3.3}$$

Preuve. Commençons par montrer que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Supposons qu'elle ne l'est pas. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \varepsilon_n > 0, ||u_{\varepsilon_n}||_{W^{1,p}(\Omega)} > n.$$

Il suit que

$$||u_{\varepsilon_n}||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow +\infty \ lorsque\ n \longrightarrow +\infty. \tag{3.4}$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\langle A_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}, v\rangle = \langle b, v\rangle \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega),$$

car u_{ε_n} est solution de (1.13). Ainsi on a $\langle A_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}\rangle = \langle b, u_{\varepsilon_n}\rangle$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; ce qui entraine

$$\langle A_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n} \rangle \leq \|b\| \, \|u_{\varepsilon_n}\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|b\| \, \|Du_{\varepsilon_n}\|_{L^p(\Omega)^N} = C\|b\| \, \|u_{\varepsilon_n}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Donc

$$\frac{\langle A_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n} \rangle}{\|u_{\varepsilon_n}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \leq C\|b\|. \tag{3.5}$$

Puisque

$$\frac{\langle A_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n} \rangle}{\|u_{\varepsilon_n}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \longrightarrow +\infty \quad lorsque \quad \|u_{\varepsilon_n}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow +\infty,$$

en faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans (3.5), il vient de la relation ci-dessus et de (3.4) que $+\infty \leq C\|b\|$; ce qui est absurde. On déduit donc que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$

La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ étant bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on déduit du *Théorème* 14 qu'il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans la suite), $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et $u_1 \in L^p(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y))$ tels que l'on ait (3.1) , (3.2) et (3.3) ; d'où le théorème. ■

Proposition 15. *Soient $w_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $w_1 \in \mathcal{D}(\Omega; C_{per}^\infty(Y))$, $\varepsilon > 0$ et $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ une solution du problème (1.13). On pose :*

$$w^\varepsilon(x) = w_0(x) + \varepsilon w_1(x, \frac{x}{\varepsilon}), \quad x \in \Omega\,.$$

Alors on a :

1) $\displaystyle\int_\Omega [a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) - a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Dw^\varepsilon)] \cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx \geq 0;$

2) $\displaystyle\int_\Omega f\,(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx - \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Dw^\varepsilon) \cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx - \int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) \cdot (u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx \geq 0;$

3) $$\int_\Omega a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Dw^\varepsilon) \cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx \xrightarrow{2-s} \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Dw_0 + D_y w_1) \cdot (D(u_0 - w_0) + D_y(u_1 - w_1))\, dydx;$$

4) $\displaystyle\int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Dw^\varepsilon)(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx \xrightarrow{2-s} \int_\Omega \int_Y a_0(y, u_0, Dw_0 + D_y w_1) \cdot (u_0 + u_1 - (w_0 + w_1))\, dydx.$

5) *Il existe $\chi \in L^q(\Omega \times Y)$ tel que à une sous-suite près,*

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) \cdot (u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx \xrightarrow{2-s} \int_\Omega \int_Y \chi(u_0 - w_0)\, dydx;$$

6) $\displaystyle\int_\Omega f(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx \longrightarrow \int_\Omega f(u_0 - w_0) dx.$

Preuve.

1) On a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega [a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) - a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Dw^\varepsilon)]\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx \\ &\geq c_0\int_\Omega (1+|u_\varepsilon|+|Du_\varepsilon|+|Dw^\varepsilon|)^{p-\delta}\,|Du_\varepsilon - Dw^\varepsilon|^\delta dx \\ &\geq 0\,.\end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx - \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Dw^\varepsilon)\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx - \int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\cdot(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx \\ &= \int_\Omega f(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx - \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx - \int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\cdot(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Dw^\varepsilon)\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx + \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx \\ &= \langle b, u_\varepsilon - w^\varepsilon\rangle - \langle A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - w^\varepsilon\rangle \\ &\quad + \int_\Omega [a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) - a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Dw^\varepsilon)]\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx.\end{aligned}$$

Mais $\langle b, u_\varepsilon - w^\varepsilon\rangle - \langle A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - w^\varepsilon\rangle = 0$ car u_ε est solution de (1.13) ; et d'après 1),

$$\int_\Omega [a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon) - a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Dw^\varepsilon)]\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx \geq 0;$$

d'où 2).

3) On écrit :

$$\begin{aligned}\int_\Omega a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Dw^\varepsilon)\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\,dx \\ &= \int_\Omega [a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Dw^\varepsilon) - a^\varepsilon(\cdot,u_0,Dw_0 + D_y w_1)]\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)dx \\ &\quad + \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot,u_0,Dw_0 + D_y w_1)\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)dx \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Avec

$$I_1 = \int_\Omega [a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Dw^\varepsilon) - a^\varepsilon(\cdot,u_0,Dw_0 + D_y w_1)]\cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)dx$$

et

$$I_2 = \int_\Omega a^\varepsilon(\cdot, u_0, Dw_0 + D_y w_1) \cdot D(u_\varepsilon - w^\varepsilon)dx.$$

Notons que :

$$Dw^\varepsilon - Dw_0 - D_y w_1 = \varepsilon D_x w_1 \,;$$

ce qui entraine :

$$\begin{aligned} \|Dw^\varepsilon - Dw_0 - D_y w_1\|^p_{L^p(\Omega)} &= \varepsilon^p \int_\Omega |D_x w_1(x, \frac{x}{\varepsilon})|^p\, dx \\ &\leq \varepsilon^p \|D_x w_1\|^p_{L^p(\Omega; C_{per}(Y))^N} \,; \end{aligned}$$

en faisant donc tendre ε vers 0, on obtient $Dw^\varepsilon \longrightarrow Dw_0 + D_y w_1$ dans $L^p(\Omega)^N$; par conséquent,

$$Dw^\varepsilon \xrightarrow{2-s} Dw_0 + D_y w_1 \quad \text{dans } L^p(\Omega)^N.$$

Comme la fonction qui à (x, y) associe $a\Big(y\,, u_0(x)\,, Dw_0(x) + D_y w_1(x, y)\Big)$ appartient à $L^q_{per}(Y, C(\overline{\Omega}))$, alors avec (3.3) et la limite ci-dessus on a :

$$I_2 \underset{\varepsilon\to 0}{\xrightarrow{2-s}} \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Dw_0 + D_y w_1) \cdot (D(u_0 - w_0) + D_y(u_1 - w_1))\, dydx.$$

Pour avoir 3) il reste à montrer que $I_1 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$. À cet effet, nous avons :

$$\begin{aligned} |I_1| \leq \int_\Omega \Big(&\Big|a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Dw^\varepsilon) - a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Dw_0 + D_y w_1)\Big| \\ &+ \Big|a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Dw_0 + D_Y w_1) - a^\varepsilon(\cdot, u_0, Dw_0 + D_y w_1)\Big|\Big) |Du_\varepsilon - Dw^\varepsilon|\, dx \\ = I_{1,1} + I_{1,2}. & \end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \int_\Omega \Big|a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Dw^\varepsilon) - a^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Dw_0 + D_y w_1)\Big|\, |Du_\varepsilon - Dw^\varepsilon|\, dx \\ &\leq c_2 \int_\Omega \Big(1 + |u_\varepsilon| + |Dw^\varepsilon| + |Dw_0 + D_y w_1|\Big)^{p-1-\alpha} |Dw^\varepsilon - Dw_0 - Dw_1|^\alpha\, |Du_\varepsilon - Dw^\varepsilon|\, dx \\ &= c_2 \varepsilon^\alpha \int_\Omega \Big(1 + |u_\varepsilon| + |Dw^\varepsilon| + |Dw_0 + D_y w_1|\Big)^{p-1-\alpha} |D_x w_1|^\alpha\, |Du_\varepsilon - Dw^\varepsilon|\, dx. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$I_{1,1} \leq c_2\varepsilon^{\alpha}\|Du_\varepsilon - Dw^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}\left(\int_\Omega \left(1+|u_\varepsilon|+|Dw^\varepsilon|+|Dw_0+D_yw_1|\right)^{(p-1-\alpha)q}|D_xw_1|^{q\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq c_2\varepsilon^{\alpha}\left(\|Du_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}+\|Dw^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}\right)\left(\int_\Omega \left(1+|u_\varepsilon|+|Dw^\varepsilon|+|Dw_0|+|D_yw_1|+|D_xw_1|\right)^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc

$$I_{1,1} \leq c_2\varepsilon^{\alpha}\left(\|Du_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}+\|Dw^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}\right)\Big(\|1\|_{L^p(\Omega)}+\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}+\|Dw^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}$$
$$+\|Dw_0\|_{L^p(\Omega)^N}+\|D_xw_1\|_{L^p(\Omega)^N}+\|D_yw_1\|_{L^p(\Omega)^N}\Big)^{p-1}.$$

En utilisant le fait que les suites $(\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)})_{\varepsilon>0}$, $\left(\|Du_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}\right)_{\varepsilon>0}$, et $\left(\|Dw^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}\right)_{\varepsilon>0}$ sont bornées, on déduit que $I_{1,1}\longrightarrow 0$ lorsque $\varepsilon\longrightarrow 0$.

D'autre part,

$$I_{1,2} = \int_\Omega \left|a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Dw_0+D_Yw_1)-a^\varepsilon(\cdot,u_0,Dw_0+D_yw_1)\right||Du_\varepsilon-Dw^\varepsilon|\,dx$$
$$\leq c_3\int_\Omega\left(1+|u_\varepsilon|+|u_0|+|Dw_0+D_yw_1|\right)^{p-1-\alpha}|u_\varepsilon-u_0|^{\alpha}|Du_\varepsilon-Dw^\varepsilon|\,dx.$$

Donc :

$$I_{1,2}\leq c_3\left(\|Du_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}+\|Dw^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}\right)\left(\int_\Omega\left(1+|u_\varepsilon|+|u_0|+|Dw_0+D_yw_1|\right)^{(p-1-\alpha)q}|u_\varepsilon-u_0|^{q\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Utilisant l'inégalité de Hölder pour $p'=\frac{p}{(p-1-\alpha)q}$ et $q'=\frac{p}{\alpha q}$ dans celle précédente, on obtient :

$$I_{1,2}\leq c_3\left(\|Du_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}+\|Dw^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N}\right)\|1+|u_\varepsilon|+|u_0|+|Dw_0+D_yw_1|\|^{p-1-\alpha}_{L^p(\Omega)}\|u_\varepsilon-u_0\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)}.$$

L'injection compacte de $W^{1,p}_0(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, la limite en (3.1) et cette dernière inégalité montrent que $I_{1,2}\longrightarrow 0$ lorsque $\varepsilon\to 0$. Il vient par la suite que $I_1\longrightarrow 0$ quand $\varepsilon\to 0$; d'où 3).

4) Se fait de façon similaire à (3), cette fois avec plutôt $w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} w_0$ et (3.2) .

5) On sait (d'après la preuve de la *Proposition*7), que

$$\|a_0^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\|_{L^q(\Omega)}\leq c_1'\left(|\Omega|+\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{q}};$$

donc $\left(a_0^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\right)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^q(\Omega)$. Ainsi, il existe $\chi\in L^q(\Omega\times Y)$ et une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans la suite) telle que :

$$a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) \xrightarrow{2-s} \chi \text{ dans } L^q(\Omega). \tag{3.6}$$

Mais $w^\varepsilon \longrightarrow w_0$ dans $L^p(\Omega)$, et comme $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ il vient que $u_\varepsilon - w^\varepsilon \longrightarrow u_0 - w_0$ dans $L^p(\Omega)$; ce qui avec(3.6) entraine que

$$\int_\Omega a_0^\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) \cdot (u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx \xrightarrow{2-s} \int_\Omega \int_Y \chi(u_0 - w_0)\, dydx$$

qui est bien (5).

6) On a

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx &= \int_\Omega f(u_\varepsilon - w_0 - \varepsilon w_1)\, dx \\ &= \int_\Omega f(u_\varepsilon - w_0)\, dx - \varepsilon \int_\Omega f\, w_1\, dx\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient $\int_\Omega f(u_\varepsilon - w^\varepsilon)\, dx \longrightarrow \int_\Omega f(u_0 - w_0)\, dx.$

On a donc les résultats voulus. ■

Notons ce résultat sur a^ε (nécessaire pour la preuve du *Théorème* 16), dont la preuve se trouve dans [18].

Proposition 16. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (a^\varepsilon(\cdot, u, Du) - a^\varepsilon(\cdot, u, Dv)) \cdot (Du - Dv)\, dx \\ &\qquad\qquad \geq c\left(|\Omega| + \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Du\|^p_{L^p(\Omega)^N} + \|Dv\|^p_{L^p(\Omega)^N}\right)^{\frac{p-\delta}{p}} \|Du - Dv\|^\delta_{L^p(\Omega)^N}.\end{aligned}$$

Théorème 16. *Soient $\varepsilon > 0$ et $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ une solution du problème (1.13) sous les hypothèses (p1) à (p7). Alors il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (toujours notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans la suite) et un couple $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p\left(\Omega; W_\#^{1,p}(Y)\right)$ tels que :*

$$\begin{aligned}&u_\varepsilon \longrightarrow u_0 \quad dans\ W_0^{1,p}(\Omega) - faible; \\ &Du_\varepsilon \xrightarrow{2-s} Du_0 + D_y u_1 \quad dans\ (L^p(\Omega))^N.\end{aligned}$$

De plus (u_0, u_1) *est solution du* ***problème variationnel global*** *suivant :*

$$\begin{cases} \int_\Omega \int_Y a_0(y, u_0, Du_0 + D_y u_1) v_0 \, dydx \\ \qquad\qquad + \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1) \cdot (Dv_0 + D_y v_1) \, dydx = \int_\Omega f v_0 \, dx; \\ \qquad \forall (v_0, v_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right). \end{cases} \tag{3.7}$$

Preuve. Lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans 2) de la *Proposition* 15, l'on obtient grâce au 3), 5) et 6) de la même proposition et de la densité des espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}\left(\Omega; C_\sharp^\infty(Y)\right)$ respectivement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right)$ que :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_Y \chi(u_0 - w_0) \, dydx + \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Dw_0 + D_y w_1) \cdot (D(u_0 - w_0) + D_y(u_1 - w_1)) \, dydx \\ \leq \int_\Omega f(u_0 - w_0) dx, \quad \forall \, (w_0, w_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Soit $\lambda > 0$. Posons $w_0 = u_0 - \lambda v_0$ et $w_1 = u_1 - \lambda v_1$. Alors (3.8) devient :

$$\lambda \int_\Omega \int_Y \chi v_0 \, dydx + \lambda \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1 - \lambda(Dv_0 + D_y v_1)) \cdot (Dv_0 + D_y v_1) \, dydx \leq \lambda \int_\Omega f v_0 dx;$$

c'est-à-dire :

$$\int_\Omega \int_Y \chi v_0 \, dydx + \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1 - \lambda(Dv_0 + D_y v_1)) \cdot (Dv_0 + D_y v_1) \, dydx \leq \int_\Omega f v_0 dx.$$

Ainsi, lorsque $\lambda \longrightarrow 0$ on obtient :

$$\int_\Omega \int_Y \chi v_0 \, dydx + \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1) \cdot (Dv_0 + D_y v_1) \, dydx \leq \int_\Omega f v_0 dx. \tag{3.9}$$

Posons maintenant $w_0 = u_0 + \lambda v_0$ et $w_1 = u_1 + \lambda v_1$ dans (3.7) ; on obtient :

$$-\lambda \int_\Omega \int_Y \chi v_0 \, dydx - \lambda \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1 + \lambda(Dv_0 + D_y v_1)) \cdot (Dv_0 + D_y v_1) \, dydx \leq -\lambda \int_\Omega f v_0 dx,$$

c'est-à-dire :

$$\int_\Omega \int_Y \chi v_0 \, dydx + \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1 + \lambda(Dv_0 + D_y v_1)) \cdot (Dv_0 + D_y v_1) \, dydx \geq \int_\Omega f v_0 dx.$$

Faisant $\lambda \longrightarrow 0$, on obtient :

$$\int_\Omega \int_Y \chi v_0 \, dydx + \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1) \cdot (Dv_0 + D_y v_1) \, dydx \geq \int_\Omega f v_0 dx. \tag{3.10}$$

Utilisant (3.9) et (3.10), on parvient à :

$$\begin{cases} \int_\Omega \int_Y \chi v_0 \, dydx + \int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1) \cdot (Dv_0 + D_y v_1) \, dydx = \int_\Omega f v_0 dx, \\ \forall \, (v_0, v_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p \left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right). \end{cases} \tag{3.11}$$

Il reste donc à montrer que $\chi = a_0(\cdot\,, u_0, Du_0 + D_y u_1)$. Soit $\eta > 0$ fixé. Soit $B'_\sharp(u_1, \eta^{\frac{1}{\alpha}})$ (respectivement $B'_0(u_0, \eta^{\frac{1}{\alpha}})$) la boule fermée de $L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right)$ (respectivement $W_0^{1,p}(\Omega)$) centrée en u_0 (respectivement u_1) et de rayon $\eta^{\frac{1}{\alpha}}$. Par réflexivité de $L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$ ces boules sont faiblement compactes. Posons

$$d = \sup_{v_1 \in B'_\sharp(u_1, \eta^{\frac{1}{\alpha}})} \; \sup_{v_0 \in B'_0(u_0, \eta^{\frac{1}{\alpha}})} \left[\| 1 + |u_0| + |Du_0 + D_y v_1| + |Dv_0 + D_y v_1| \, \|_{L^p(\Omega \times Y)}^{p-1-\alpha} \right];$$

et

$$k = 2(c_2 + c_3)d + 1.$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et de $\mathcal{D}\left(\Omega; C_{per}^\infty(Y)\right)$ dans $L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right)$ on a l'existence de $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi_1 \in \mathcal{D}\left(\Omega; C_{per}^\infty(Y)\right)$ tels que $\varphi_0 \in B'_0\left(u_0, \left(\frac{\eta}{4k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \subseteq B'_0\left(u_0, \eta^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ et
$\varphi_1 \in B'_\sharp\left(u_1, \left(\frac{\eta}{4k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \subseteq B'_\sharp\left(u_1, \eta^{\frac{1}{\alpha}}\right)$. Prenons maintenant $w_0 = \varphi_0,\ w_1 = \varphi_1$ et $w^\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ comme dans la *Proposition* 15. On écrit :

$$\begin{aligned} \|a_0(\cdot, u_0, Du_0 + D_y u_1) - \chi\|_{L^q(\Omega \times Y)} \leq\ & \|a_0(\cdot, u_0, Du_0 + D_y u_1) - a_0(\cdot, u_0, Du_0 + D_y \varphi_1)\|_{L^q(\Omega \times Y)} \\ & + \|a_0(\cdot, u_0, Du_0 + D_y \varphi_1) - a_0(\cdot, u_0, D\varphi_0 + D_y \varphi_1)\|_{L^q(\Omega \times Y)} \\ & + \|a_0(\cdot, u_0, D\varphi_0 + D_y \varphi_1) - \chi\|_{L^q(\Omega \times Y)}. \end{aligned}$$

Mais d'une part,

$$\begin{aligned} & \|a_0(\cdot, u_0, Du_0 + D_y u_1) - a_0(\cdot, u_0, Du_0 + D_y \varphi_1)\|_{L^q(\Omega \times Y)} \\ & \quad \leq c_2 \| 1 + |u_0| + |Du_0 + D_y u_1| + |Du_0 + D_y \varphi_1| \, \|_{L^p(\Omega \times Y)}^{p-1-\alpha} \|D_y(u_1 - \varphi_1)\|_{L^p(\Omega \times Y)^N}^\alpha \\ & \quad \leq c_2 \, d \, \|D_y(u_1 - \varphi_1)\|_{L^p(\Omega \times Y)^N}^\alpha \\ & \quad \leq \frac{\eta}{4}, \qquad \text{car} \quad \|D_y(u_1 - \varphi_1)\|_{L^p(\Omega \times Y)^N} \equiv \|u_1 - \varphi_1\|_{L^p\left(\Omega; W_\sharp^{1,p}(Y)\right)^N}; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\|a_0(\cdot,u_0,Du_0+D_y\varphi_1)-a_0(\cdot,u_0,D\varphi_0+D_y\varphi_1)\|_{L^q(\Omega\times Y)}\\
&\quad\le c_2\|1+|u_0|+|Du_0+D_y\varphi_1|+|D\varphi_0+D_y\varphi_1|\,\|^{p-1-\alpha}_{L^p(\Omega\times Y)}\|D_y(u_0-\varphi_0)\|^{\alpha}_{L^p(\Omega\times Y)^N}\\
&\quad\le c_2\,d\,\|D_y(u_0-\varphi_0)\|^{\alpha}_{L^p(\Omega\times Y)^N}\\
&\quad\le \frac{\eta}{4},\qquad\qquad \text{car}\quad \|D_y(u_0-\varphi_0)\|_{L^p(\Omega\times Y)^N}\equiv\|u_0-\varphi_0\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'autre part, du *Lemme* 6 (Chapitre 2) et des résultats 4) et 5) de la *Proposition* 15, on est conduit à :

$$\|a_0(\cdot,u_0,D\varphi_0+D_y\varphi_1)-\chi\|_{L^q(\Omega\times Y)}\le\liminf_{\varepsilon\to0}\|a_0^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,D\varphi_\varepsilon)-a_0^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\|_{L^q(\Omega)}.$$

Mais

$$\|a_0^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,D\varphi_\varepsilon)-a_0^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\|_{L^q(\Omega)}\le c_2\|1+|u_\varepsilon|+|Du_\varepsilon|+|D\varphi_\varepsilon|\,\|^{p-1-\alpha}_{L^p(\Omega)}\|Du_\varepsilon-D\varphi_\varepsilon\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)^N},$$

donc

$$\|a_0(\cdot,u_0,D\varphi_0+D_y\varphi_1)-\chi\|_{L^q(\Omega\times Y)}\le k_1\liminf_{\varepsilon\to0}\|Du_\varepsilon-D\varphi_\varepsilon\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)^N};$$

où $k_1>0$ est (puisque $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont bornées dans $W^{1,p}_0(\Omega)$) choisi tel que

$$c_2\|1+|u_\varepsilon|+|Du_\varepsilon|+|D\varphi_\varepsilon|\,\|^{p-1-\alpha}_{L^p(\Omega)}\le k_1\,.$$

Par ailleurs la *Proposition* 16 nous permet d'avoir :

$$c|\Omega|^{\frac{p-\delta}{p}}\|Du_\varepsilon-D\varphi_\varepsilon\|^{\delta}_{L^p(\Omega)^N}\le\int_\Omega\left[a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,D\varphi_\varepsilon)-a^\varepsilon(\cdot,u_\varepsilon,Du_\varepsilon)\right]\cdot(D\varphi_\varepsilon-Du_\varepsilon)\,dx;\tag{3.12}$$

et on sait montrer (de façon analogue à la *Proposition* 15) que lorsque $\varepsilon\longrightarrow0$, le membre de droite de (3.12) que nous appelons désormais B_ε, tend vers B, où :

$$B=\int_\Omega\int_Y\Big[a(y,u_0,Du_0+D_yu_1)-a(y,u_0,D\varphi_0+D_y\varphi_1)\Big]\cdot\Big(D(u_0-\varphi_0)+D_y(u_1-\varphi_1)\Big)\,dydx.$$

Ainsi,

$$\exists\,\varepsilon_0>0\ /\ \forall\varepsilon\le\varepsilon_0,\ B_\varepsilon\le B+\frac{\eta}{4}\,.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
B&\le\|a(y,u_0,Du_0+D_yu_1)-a(y,u_0,D\varphi_0+D_y\varphi_1)\|_{L^q(\Omega\times Y)}\Big(\|D(u_0-\varphi_0)\|\|_{L^p(\Omega\times Y)}+\|D_y(u_1-\varphi_1)\|_{L^p(\Omega\times Y)}\Big)\\
&\le k\Big(\|D(u_0-\varphi_0)\|\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}+\|D_y(u_1-\varphi_1)\|_{L^p(\Omega;W^{1,p}_\#(Y))}\Big)^{\alpha+1}\,.
\end{aligned}$$

Donc
$$B_\varepsilon \leq k\left(\frac{\eta}{2k}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{\eta}{4}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Et de (3.12) il vient que
$$\|Du_\varepsilon - D\varphi_\varepsilon\|^\alpha_{L^p(\Omega)^N} \leq \left[\frac{1}{|\Omega|^{\frac{p-\delta}{p}}}\left(k\left(\frac{\eta}{2k}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{\eta}{4}\right)\right]^{\frac{\alpha}{\delta}}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0;$$

finalement,
$$\|a_0(\cdot, u_0, Du_0 + D_y u_1) - \chi\|_{L^q(\Omega\times Y)} \leq \frac{\eta}{2} + k_1\left[\frac{1}{|\Omega|^{\frac{p-\delta}{p}}}\left(k\left(\frac{\eta}{2k}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{\eta}{4}\right)\right]^{\frac{\alpha}{\delta}}.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $\eta > 0$, on a bien $\chi = a_0(\cdot, u_0, Du_0 + D_y u_1)$; ce qui achève toute la preuve du théorème. ■

Proposition 17. *Le problème variationnel* (3.7) *admet au-moins une solution.*

Preuve. Posons :
$$E = W^{1,p}_0(\Omega) \times L^p(\Omega; W^{1,p}_\sharp(Y)).$$

Munissons E de la norme :
$$\|v\|_E = \|Dv_0 + D_y v_1\|_{L^p(\Omega\times Y)^N}; \quad \forall v = (v_0, v_1) \in E.$$

L'espace $(E, \|\cdot\|_E)$ est alors un espace de Banach réflexif (se fait par adaptation de la preuve du *Lemme* 25 dans [16]). Posons maintenant, pour $w = (w_0, w_1)$ et $v = (v_0, v_1)$ dans E,
$$\langle Sw, v\rangle = \int_\Omega\int_Y a_0(y, w_0, Dw_0 + D_y w_1)v_0\,dydx + \int_\Omega\int_Y a(y, w_0, Dw_0 + D_y w_1)\cdot(Dv_0 + D_y v_1)\,dydx\,;$$

et
$$\langle h, v\rangle = \int_\Omega f v_0\,dx\,.$$

On a donc le problème variationnel suivant :
$$\begin{cases} \text{Trouver } w = (w_0, w_1) \in E; \\ \langle Sw, v\rangle = \langle h, v\rangle\ ; \\ \text{pour tout } v = (v_0, v_1) \in E\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

On montre de façon analogue à ce qui a été fait pour A_ε au chapitre 1, que S est un opérateur de E dans E', cœrcif et du type Calcul des Variations. Aussi, on prouve facilement que $h \in E'$. Ainsi, du *Corollaire* 1, le problème (3.13) admet au-moins une solution. ■

3.2 Problème homogénéisé

Dans cette section, il s'agit de trouver le problème (**problème macroscopique**) dont la limite u_0 de la sous-suite encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est solution. Pour cela, nous allons utiliser un problème intermédiaire dit **problème microscopique**.

3.2.1. Problème microscopique

En prenant (v_0, v_1) dans le problème variationnel (3.7) tels que $v_0 = 0$, nous obtenons :

$$\int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1) \cdot D_y v_1 \, dydx \; = 0\,. \tag{3.14}$$

Pour $v_1 = \varphi \otimes \theta$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\theta \in W^{1,p}_\sharp(Y)$; nous obtenons de (3.14) l'égalité suivante :

$$\int_\Omega \int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1) \cdot D_y\theta(y)\varphi(x) \, dydx \; = 0\,.$$

Ainsi,
$$\int_\Omega \left(\int_Y a(y, u_0, Du_0 + D_y u_1) \cdot D_y\theta(y) \right) \varphi(x) \, dydx \; = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il suit que pour presque tout $x \in \Omega$ fixé,

$$\begin{cases} \int_Y a(y, u_0(x), Du_0(x) + D_y u_1(x,y)) \cdot D_y\theta(y) \, dy = 0; \\ \forall \theta \in W^{1,p}_\sharp(\Omega)\,. \end{cases} \tag{3.15}$$

Nous formulons à présent le **problème microscopique** proprement dit.

Proposition 18. *Soit $(t, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ fixé. Le problème suivant dit **microscopique**,*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \pi(t,r) \in W^{1,p}_\sharp(Y); \\ \int_Y a(y, t, r + D_y\pi(t,r)) \cdot D_y\theta = 0; \\ \textit{pour tout } \theta \in W^{1,p}_\sharp(Y)\,, \end{cases} \tag{3.16}$$

admet une unique solution.

Preuve. Posons $\langle K^r_t w, \theta\rangle = \int_Y a(y, t, r + D_y w) \cdot D_y\theta \, dy, \quad w, \theta \in W^{1,p}_\sharp(Y).$

a) **Montrons que K^r_t envoie $W^{1,p}_\sharp(Y)$ dans son dual topologique.**

   Soit $w \in W^{1,p}_\sharp(Y)$, il est évident que $K^r_t w$ est linéaire. S'agissant de la continuité, on a, pour $\theta \in W^{1,p}_\sharp(Y)$

$$
\begin{aligned}
|\langle K_t^r w, \theta\rangle| &= \left|\int_Y a(y,t,r+D_y w)\cdot D_y\theta\, dy\right| \\
&\leq \|D_y\theta\|_{L^p(Y)^N}\, \|a(\cdot,t,r+D_y w)\|_{L^q(Y)^N} \\
&= \|\theta\|_{W^{1,p}_\sharp(Y)} \|a(\cdot,t,r+D_y w)\|_{L^q(Y)} \\
&\leq c_4 \|\theta\|_{W^{1,p}_\sharp(Y)},
\end{aligned}
$$

où, comme on l'a fait pour avoir (1.15) au Chapitre 1, $c_4 = 3c_1^{\frac{1}{q}}\left(1+\|t\|_{L^p(Y)}+\|r+D_y w\|_{L^p(Y)^N}\right)^{\frac{1}{q}}$.

b) **Montrons que k_t^r est cœrcif.**

Soit $w \in W^{1,p}_\sharp(Y)$; on a :

$$
\begin{aligned}
\langle K_t^r w, w\rangle &= \int_Y a(y,t,r+D_y w)\cdot D_y w\, dy \\
&\geq \int_Y a(y,t,r+D_y w)\cdot (r+D_y w)\, dy - \int_Y a(y,t,r+D_y w)\cdot r\, dy \\
&\geq c_0 \|1+|t|+|r+D_y w|\,\|^{p-\delta}_{L^p(Y)}\, \|r+D_y w\|^{\delta}_{L^p(Y)} - \int_Y a(y,t,r+D_y w)\cdot r\, dy \\
&\geq c_0\left(1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|D_y w\|_{L^p(Y)^N}\right)^{p-\delta} \left|\,\|r\|_{L^p(Y)} - \|D_y w\|_{L^p(Y)^N}\right|^{\delta} \\
&\qquad - \int_Y a(y,t,r+D_y w)\cdot r\, dy\,.
\end{aligned}
$$

Mais,

$$
\begin{aligned}
\int_Y a(y,t,r+D_y w)\cdot r\, dy &\leq c_2 \|1+|t|+|r+D_y w|\,\|^{p-1}_{L^p(Y)} \|r\|_{L^p(Y)} \\
&\leq c_2\left(1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|D_y w\|_{L^p(Y)^N}\right)^{p-1} \|r\|_{L^p(Y)}\,.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\langle K_t^r w, w\rangle &\geq \left(1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|D_y w\|_{L^p(Y)^N}\right)^{p} \left[c_0\left(\frac{\left|\,\|r\|_{L^p(Y)}-\|D_y w\|_{L^p(Y)^N}\right|}{1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|D_y w\|_{L^p(Y)^N}}\right)^{\delta}\right. \\
&\qquad\left. - \frac{c_2\|r\|_{L^p(Y)}}{1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|D_y w\|_{L^p(Y)^N}}\right] \\
&= \left(1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|w\|_{W^{1,p}_\sharp(Y)}\right)^{p} \left[c_0\left(\frac{\left|\,\|r\|_{L^p(Y)}-\|w\|_{W^{1,p}_\sharp(Y)}\right|}{1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|w\|_{W^{1,p}_\sharp(Y)}}\right)^{\delta}\right. \\
&\qquad\left. - \frac{c_2\|r\|_{L^p(Y)}}{1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|w\|_{W^{1,p}_\sharp(Y)}}\right].
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\frac{\langle K_t^r w, w\rangle}{\|w\|_{W_\sharp^{1,p}(Y)}} \geq$$

$$\frac{\left(1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|w\|_{W_\sharp^{1,p}(Y)}\right)^p}{\|w\|_{W_\sharp^{1,p}(Y)}}\left[c_0\left(\frac{\left|\|r\|_{L^p(Y)}-\|w\|_{W_\sharp^{1,p}(Y)}\right|}{1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|w\|_{W_\sharp^{1,p}(Y)}}\right)^\delta-\frac{c_2\|r\|_{L^p(Y)}}{1+t+\|r\|_{L^p(Y)}+\|w\|_{W_\sharp^{1,p}(Y)}}\right],$$

et le membre de droite de cette dernière minoration tend vers $+\infty$ lorsque $\|w\|_{W_\sharp^{1,p}(Y)}$ tend vers $+\infty$; d'où le résultat escompté.

c) **Montrons que k_t^r est strictement monotone.**

Soit $v, w \in W_\sharp^{1,p}(Y),\ v \neq w$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle K_t^r w - K_t^r v, w-v\rangle &= \int_Y \left[a(y,t,r+D_y w)-a(y,t,r+D_y v)\right]\cdot D_y(w-v)\,dy\\
&= \int_Y \left[a(y,t,r+D_y w)-a(y,t,r+D_y v)\right]\cdot\left[(r+D_y w)-(r+D_y v)\right]\,dy\\
&\geq c_0\int_Y \left(1+|t|+|r+D_y w|+|r+D_y v|\right)^{p-\delta}|D_y w-D_y v|^\delta\,dy\\
&\geq c_0\|1+|t|+|r+D_y w|+|r+D_y v|+|r+D_y v|\,\|_{L^p(Y)}^{p-\delta}\,\|D_y(w-v)\|_{L^p(Y)}^\delta\\
&\equiv c_0\|1+|t|+|r+D_y w|+|r+D_y v|+|r+D_y v|\,\|_{L^p(Y)}^{p-\delta}\,\|w-v\|_{W_\sharp^{1,p}(Y)}^\delta > 0\,.
\end{aligned}$$

d) **Montrons que k_t^r est hémicontinu.**

Soient $u, v, w \in W_\sharp^{1,p}(Y)$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. En raisonnant comme on l'a fait pour l'hémicontinuité de A_ε au Chapitre 1, on est conduit à :

$$\langle K_t^r(w+tu)-K_t^r w, v\rangle \leq c_2 t^\alpha\|1+|t|+2|r|+(1+t)|D_y u|+2|D_y w|\,\|_{L^p(Y)}^{p-1}\|Dv\|_{L^p(Y)}\,.$$

En conclusion, k_t^r est un opérateur de $W_\sharp^{1,p}(Y)$ dans son dual, hémicontinue, strictement monotone et cœrcif. Ainsi, par le *Théorème* de Browder-Minty nous avons l'existence et l'unicité de la solution de (3.16). ■

Proposition 19. *Dans le couple (u_0, u_1) solution de (3.7), u_1 est définie de façon unique par :*

$$u_1(x,y) = \pi\,(\,u_0(x), Du_0(x)\,)\,(y) \quad p.p\ (x,y) \in \Omega\times Y$$

Où π est l'application de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ dans $W_\sharp^{1,p}(Y)$ qui à tout couple $(t,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ associe l'unique solution du problème (3.16).

Preuve. Pour $x \in \Omega$, posons $t = u_0(x)$ et $r = Du_0(x)$; alors d'après la Proposition 3.2.1 il existe un unique $\pi(t,r) \in W_{\sharp}^{1,p}(Y)$ tel que :

$$\begin{cases} \int_Y a(y,t,r+D_y\pi(t,r)) \cdot D_y\theta = 0\,; \\ \text{pour tout } \theta \in W_{\sharp}^{1,p}(Y)\,. \end{cases}$$

Mais l'équation (3.15) est donnée par :

$$\begin{cases} \int_Y a(y,u_0(x),Du_0(x)+D_yu_1(x,y)) \cdot D_y\theta(y)\,dy = 0\,; \\ \forall\theta \in W_{\sharp}^{1,p}(\Omega)\,. \end{cases}$$

Et par unicité de la solution du problème microscopique (3.16) nous avons

$$u_1(x,y) = \pi(u_0(x),Du_0(x))(y) \quad \forall y \in Y\,;$$

d'où le résultat voulu . ■

3.2.2. Problème macroscopique

En prenant $v_1 = 0$ dans le problème variationnel (3.7), nous obtenons :

$$\int_\Omega \int_Y a_0(y,u_0,Du_0+D_yu_1)v_0\,dydx + \int_\Omega \int_Y a(y,u_0,Du_0+D_yu_1) \cdot Dv_0\,dydx = \int_\Omega fv_0\,dx.$$

Ainsi nous avons :

$$\int_\Omega \left[\int_Y a_0\left(y,u_0,Du_0+D_y\pi(u_0,Du_0)\right)\,dy\right] v_0\,dx \\ + \int_\Omega \left[\int_Y a\left(y,u_0,Du_0+D_y\pi(u_0,Du_0)\right)\,dy\right] Dv_0\,dx = \int_\Omega fv_0\,dx\,. \quad (3.17)$$

Posons :

$$q_0(t,r) = \int_Y a_0\left(y,t,r+D_y\pi(t,r)\right)\,dy \quad (t,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$$

et

$$q(t,r) = \int_Y a\left(y,t,r+D_y\pi(t,r)\right)\,dy \quad (t,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N.$$

Alors nous obtenons de (3.17) que :

$$\int_\Omega q_0\,(\,u_0(x)\,,Du_0(x)\,)\;v_0(x)\,dx+\int_\Omega q\,(\,u_0(x)\,,Du_0(x)\,)\cdot Dv_0(x)\,dx=\int_\Omega f v_0\,dx\,; \tag{3.18}$$

ce qui nous conduit à :

$$q_0\,(\,u_0(x)\,,Du_0(x)\,)-div\,(q\,(\,u_0(x)\,,Du_0(x)\,))=f(x)\quad \text{dans } \Omega\,. \tag{3.19}$$

Théorème 17. *Soient $\varepsilon>0$ et $u_\varepsilon\in W_0^{1,p}(\Omega)$ une solution du problème (1.13) sous les hypothèses (p1) à (p7). Il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (que nous notons toujours $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$) telle que, lorsque ε tend vers 0*

$$u_\varepsilon\longrightarrow u_0\quad dans\ W_0^{1,p}(\Omega)-faible,$$

*où u_0 est solution du **problème macroscopique** suivant :*

$$\begin{cases} q_0\,(\,u_0(x)\,,Du_0(x)\,)-div\,(q\,(\,u_0(x)\,,Du_0(x)\,))=f(x) & dans\ \Omega\,;\\ u_0=0\quad sur\ \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.20}$$

Avec

$$q_0(t,r)=\int_Y a_0\Big(y,t,r+D_y\pi(t,r)\Big)\,dy\quad (t,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$$

et

$$q(t,r)=\int_Y a\Big(y,t,r+D_y\pi(t,r)\Big)\,dy\quad (t,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N.$$

*D'ailleurs, toute limite faible u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de toute la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ entière, lorsque ε tend vers 0, est une solution du **problème macroscopique** (3.20).*

Preuve. Nous avons déjà (grâce à (3.19)) montré que u_0 est solution du problème macroscopique (3.20). L'existence d'une solution pour le problème macroscopique (3.20) découle du fait qu'il est du même type que le problème (1.13) du Chapitre 1 ; donc on montre de façon similaire qu'il admet au-moins une solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De plus, l'injection compacte de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, permet de voir que l'on peut remplacer dans tout le procédé d'homogénéisation précédent, u_0 par n'importe qu'elle limite faible u de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque ε tend vers 0 et parvenir à (3.19) avec u à la place de u_0 ; d'où le théorème. ■

✠ Conclusion. ✠

En somme, comme il était question pour nous de présenter l'homogénéisation périodique d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire et non-monotone donnée par (1), il était important pour nous à cet effet de présenter tout d'abord certains espaces de Banach nécessaires pour la résolution des problèmes variationnels, ensuite de prouver l'existence d'une solution faible du problème pour enfin homogénéiser le dit problème par la méthode de la convergence à deux échelles et de ses théorèmes de compacité. Toute cette analyse s'est aussi soldée par la démonstration du résultat de convergence suivant qui stipule que, toute limite faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (où pour $\varepsilon > 0$, u_ε est solution de (1.13)), est solution du problème homogénéisé final (3.20), et ce dernier reste d'ailleurs du même type que celui initial. Les résultats de ce travail trouvent leur application dans des domaines variés tels que l'ingénierie des matériaux, la mécanique des structures, la modélisation des fluides, ou encore la conception de dispositifs micro-électromécaniques. Une perspective parmi tant d'autres serait d'étudier cette fois-ci l'homogénéisation quantitative du problème (1) dont la bonne compréhension apporterait sans doutes de nouvelles idées dans la modélisation et la simulation de nombreux problèmes complexes.

✠ Bibliographie ✠

[1] R.A. ADAMS and J.J.F. FOURNIER ; *Sobolev spaces,*Vancouver, August 2002.

[2] G. ALLAIRE ; *shape optimization by the homogenization method,* Springer-Verlay, New-York, 2001.

[3] G. ALLAIRE ; *Homogenization and two scale convergence,*, SIAM J, Math.Anal , 23(1992) 1482-1518.

[4] G. ALLAIRE and M. BRIANE ; *Multiscale convergence and reitered homogenization*, Proceedings of the Royal Society of Edingurgh, **126**(1996), 297-342.

[5] H. BREZIS ; *Analyse fonctionnelle,* Masson, Paris, 1983.

[6] H. BREZIS ; *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Anales de l'institut Fourier, tome 18, n^0 (1968) , p. 115-175

[7] M. CHIPOT ; *Elements of Nonlinear Analysis,* Zurich University, Switzerland, 2000.

[8] D. CIORANESCU and P. DONATO, *An introduction to homogenization ,* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Application, New York, 1999.

[9] E. CODDING and N. LEVINSON ; *Theory of ordinary differential equation,* MC Graw Hill, New-York, 1995.

[10] H. DOUANLA ; *Two-scale Convergence and homogenization of some Partial Differential Equations,* PhD Thesis, University of Gothenburg, Sweden, 2013.

[11] H. DOUANLA, J.L. WOUKENG ; *Homogenization of reaction-diffusion equation in a fractured porous media,* Electronic Journal of Differential Equations, **2015** (2015), 1-23.

[12] JÉRÔME DRONIOU. *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles..* 2001. ffhal-01382368

[13] E. Hewitt and K. Stromberg ;*Real and Abstract Analysis, A Modern Treatment of the theory of Functions of a Real Variable,* second printing corrected, springer-verlag, Berlin, 1969.

[14] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[15] J. Leray, J.L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull.SMF.France, **93**, 1965, P.97-107

[16] D. Lukkassen, G. Nguetseng and P.Wall *Two-scaled convergence,* AMS subject Classification, (2000), 35B27-35B40.

[17] G.Nguetseng *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization,* SIAM J.Math. Anal, **20** (1989), 608-623.

[18] G.Nguetseng and H.Nnang ; *Homogenization of nonlinear monotone operators beyong the periodic setting,* Electronic Journal of Differential Equations, **2003** (2003) 1-24.

[19] G.Nguetseng, *Homogenization structures and applications* I,Z. Anal. Anwend. **22** (2003) 73-107.

[20] H.Nnang, *PhD thesis, University of Yaoundé I, 2004*

[21] J.L. Woukeng, *Deterministic homogenization of non-linear non-monotone degenerate elliptic operators*, Advances in Mathematics **219** (2008) 1608–1631