

# **CONTRÔLE OPTIMAL D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES PAR LE PRINCIPE DU MAXIMUM**

**Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme  
de Master en mathématiques**

*Spécialité : Mathématiques et Applications fondamentales*

*Option : Probabilités, Statistiques et Finances*

**Par**

**SAKAM ABO Esaie**

*Matricule : 1602222*

*Licencié en Mathématiques*

**Sous la direction de**

**Dr BOGSO Antoine Marie**

*Chargé de Cours*

*Université de Yaoundé I*



**Année académique : 2023-2024**

---

---

## ♣ Dédicace ♣

---

Affectueusement à mes parents Monsieur et Madame ABO  
qui n'ont lésiné sur aucun moyen. J'aimerais que ce travail leur fasse  
honneur et qu'ils soient remplis de joie.

---

---

## ♣ Remerciements ♣

---

---

En préambule de ce mémoire, je remercie tout d'abord le Saint-Esprit pour son inspiration et la vertu de sa force durant la rédaction de ce modeste travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur Docteur BOGSO Antoine Marie qui malgré ses multiples sollicitations a accepté de diriger ce travail. Son soutien, son attention, ses compétences et sa clairvoyance m'ont été d'une aide inestimable. Lors de la rédaction de ce mémoire, il a orienté mon travail en me proposant des pistes de recherche tout en me laissant une grande liberté dans ma volonté d'explorer certains aspects.

Veillez trouver ici l'expression de mon grand respect et ma profonde admiration pour toutes vos qualités scientifiques et humaines.

J'exprime ma reconnaissance profonde au chef de département de Mathématiques le Professeur Directeur AYISSI Raoul Domingo pour ses multiples conseils et son attention ; aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques de l'Université de Yaoundé 1 et à toute l'équipe des formateurs du master Mathématiques qui ont assuré une formation solide et efficace pour que nous soyons à la hauteur. À toute l'équipe du laboratoire de Mathématiques et applications fondamentales pour leurs conseils, leur accompagnement et leurs suggestions.

J'espère que mon travail sera à la hauteur des exigences formulées pour cette formation.

Enfin, un merci tout particulier à ma famille sans qui je n'aurais pu mener ce projet : à mes parents chéris Monsieur et Madame ABO qui m'ont toujours soutenu et sans lesquels je ne serais jamais arrivé là et surtout pour leur soutien et leur amour sans faille tout au long de ces années, à mes frères et soeurs MEFEUZING Elise Venise, SIGNE Yannick Martial, Docteur TEKOU Florian Amel, MENOUDJEU Dorcace Hariane, et mon frère jumeau FOKOU ABO Emmanuel, aux Responsables d'étude biblique et prière actuels et anciens de l'APUC-Y, à mes amis KAMCHE Carl ,BASSO Edgard, FOKA Marius, DJOUMEDA Ange,GWETH Michel, DOUGUE Yvan,TONGA Alexandre,TATSA Josling, à toute la communauté de l'APUC-Y aux Docteurs TCHANTCHOU Yannick et WEMBE Boris pour leur accompagnement, au couple missionnaire WAMBO , à la charmante DJOMOU Christéva qui occupe une place vraiment particulière dans ma vie.

À mes promotionnels ainsi que tous les autres camarades de cette université pour leur présence dans les moments difficiles et les excellents moments que j'ai passés avec eux tout au long de cette formation . Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail. Aux nombreuses personnes que j'omets involontairement et qui de près ou de loin ont contribué à la production de ce travail.

---

---

## ♣ Déclaration sur l'honneur ♣

---

---

*Le présent mémoire est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.*

**Signature du candidat.**

**Esaie SAKAM ABO**

---

---

## ♣ Résumé ♣

---

Ce document traite du contrôle optimal d'équations différentielles stochastiques en utilisant le principe du maximum. Nous considérons le problème où une fonction de coût, composée d'une intégrale sur un horizon de temps fini et d'un terme de coût terminal est minimisée. Le processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  est régi par une équation différentielle de la forme  $dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t$  où  $b$  est une fonction déterministe,  $(X_t)_{t \geq 0}$  le processus stochastique,  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard. Le but est de trouver une stratégie optimale  $u^*$  qui minimise une fonction de coût. L'approche utilisée pour résoudre le problème est le principe du maximum qui consiste sous certaines conditions à trouver la variable minimisant l'hamiltonien issu du système hamiltonien. Une expression explicite de la stratégie optimale est donnée notamment dans le cas des jeux linéaires quadratiques à champ moyen. Au bout de ce travail, des perspectives prometteuses s'ouvrent pour l'optimisation et la planification des environnements dynamiques et incertains.

**Mots clés :** *Contrôle optimal stochastique, équations différentielles stochastiques, principe du maximum, hamiltonien, jeux linéaires quadratiques.*

---

---

# ♣ Abstract ♣

---

---

This document deals with the optimal control of stochastic differential equations with the maximum principle. We consider the problem where a cost function composed of an integral, over a finite time horizon and a terminal cost term is minimized. The stochastic process  $(X_t)_{t \geq 0}$  is governed by a stochastic differential of the form  $dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t$ , where  $b$  is a deterministic function,  $(X_t)_{t \geq 0}$  the process,  $(W_t)_{t \geq 0}$  the standard brownian motion. The purpose is to find an optimal strategy  $u^*$  which minimizes the cost function. The approach used is the maximum principle which, under certain conditions consists of finding the variable minimizing the hamiltonian resulting from the hamiltonian system. An explicit expression of a strategy is given in particular in the case of linear quadratic mean-field games. At the end of this work, promising perspectives open up for the optimization and planning of dynamic and uncertain environments.

**Keys words :** *Stochastic optimal control, stochastic differential equation, maximum principle, hamiltonian, mean-field games*

---

---

## ♣ Quelques Notations ♣

---

---

Les notations suivantes sont utilisées dans ce mémoire.

$a \vee b$  : le maximum entre a et b.

$a \wedge b$  : le minimum entre a et b .

$\sigma(A)$  : la plus petite sigma-algèbre contenant A.

$\mathbb{T}$  : l'intervalle de temps  $[0, T]$ , T fixé dans  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{F}^W$  : la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $W = (W_t)_{t \geq 0}$ .

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$  : La tribu borélienne sur  $\mathbb{R}$ .

$L^1_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$  : l'espace vectoriel des processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à trajectoires continues et  $\mathcal{F}$ -adaptés sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  tels que  $\int_0^T |X_t| dt < +\infty$  presque sûrement.

$L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$  : l'espace vectoriel des processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à trajectoires continues et  $\mathcal{F}$ -adaptés sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  tels que  $\int_0^T |X_t|^2 dt < +\infty$  presque sûrement.

$L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathcal{C}[0; T], \mathbb{R}^k)$  : l'espace vectoriel des processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à trajectoires continues et  $\mathcal{F}$ -adaptés sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  tels que  $\mathbb{E}[\sup_{t \in [0; T]} \int_0^T |X_t|^2 dt] < +\infty$

$L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k)$  : l'espace vectoriel des processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à trajectoires continues et  $\mathcal{F}$ -adaptés sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  tels que  $\int_0^T |X_t|^2 dt < +\infty$  presque sûrement.

$L^{2,loc}_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^{k \times m})$  : l'espace vectoriel des processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à trajectoires continues, localement intégrables et  $\mathcal{F}$ -adaptés sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  tels que  $\int_0^T |X_t|^2 dt < +\infty$  presque sûrement.

$\mathcal{M}_{\beta}[0; T]$  : désigne le produit cartésien  $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathcal{C}[0; T], \mathbb{R}^k) \times L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^{k \times m})$

$\mathcal{S}^n$  : l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.

---

$\phi_X$  : désigne la dérivée partielle de  $\phi$  par rapport à  $X$  étant donnée une fonction de plusieurs variables  $\phi$

$\phi_{xx}$  : Désigne la dérivée partielle seconde de  $\phi$  par rapport à  $x$  étant donnée une fonction de plusieurs variables  $\phi$

i.i.d. : indépendantes et identiquement distribuées.

$\sigma^T$  : transposée de  $\sigma$

EDS : équation différentielle stochastique

EDSR : équation différentielle stochastique rétrograde

---

---

# ♣ Table des matières ♣

---

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Déclaration sur l'honneur</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Quelques Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Notions Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Notions de calcul des probabilités . . . . .	5
1.1.1 Variables aléatoires . . . . .	5
1.1.2 Espérance conditionnelle . . . . .	6
1.2 Processus stochastiques . . . . .	7
1.2.1 Temps d'arrêt . . . . .	10
1.2.2 Le Mouvement brownien . . . . .	11
1.2.3 Martingales à temps continus . . . . .	12
1.3 Intégration stochastique . . . . .	13
1.3.1 Formule d'Itô Unidimensionnelle . . . . .	14
1.3.2 Formule d'Itô multidimensionnelle . . . . .	15
1.4 Équations différentielles stochastiques (EDS) . . . . .	17
1.5 Équations différentielles stochastiques Rétrogrades (EDSR) . . . . .	18
1.5.1 EDSR Linéaires . . . . .	18
1.5.2 EDSR non linéaires . . . . .	19
<b>2 PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL STOCHASTIQUE</b>	<b>23</b>
2.1 Quelques exemples de problèmes d'optimisation stochastique . . . . .	23
2.1.1 Minimisation du coût de fabrication d'un produit . . . . .	23
2.1.2 Réassurance et gestion des dividendes . . . . .	24

2.1.3	Investissement et consommation . . . . .	25
2.2	Formulation des problèmes de contrôle optimal stochastique . . . . .	26
2.2.1	Formulation Forte (FF) . . . . .	27
2.2.2	Formulation Faible (WF) . . . . .	28
2.3	Existence du contrôle optimal . . . . .	29
2.3.1	Existence sous la formulation forte . . . . .	29
2.3.2	Existence sous la formulation faible . . . . .	31
<b>3</b>	<b>PRINCIPE DU MAXIMUM STOCHASTIQUE ET SYSTÈMES HAMILTONIENS</b>	<b>37</b>
3.1	Cas déterministe . . . . .	37
3.2	Principe du maximum Stochastique . . . . .	39
3.2.1	Équations adjointes . . . . .	40
	Premier cas : La diffusion ne contient pas la variable de contrôle . . . . .	42
	Deuxième cas : Le domaine du contrôle $U \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe et tous les coefficients sont $\mathcal{C}^1$ en $u$ . . . . .	42
3.2.2	Implémentation du principe du maximum pour l'exemple énoncé au chapitre 2 à la partie 2.1.3 : Investissement et consommation . . . . .	44
3.2.3	Exemple de résolution du problème d'optimisation d'EDS par le principe du maximum : $n=m=1$ , avec drift et coefficient de diffusion dépendants de la variable de contrôle. . . . .	47
3.3	Application du Principe du maximum aux jeux quadratiques linéaires à champ moyen "mean-field games" (MFG) . . . . .	50
3.3.1	Cas de N-joueurs . . . . .	51
3.3.2	Application de l'approche des jeux linéaires quadratiques à champ moyen . . . . .	51
	Exemple de résolution du problème de type jeu linéaire quadratique à champ moyen . . . . .	55
	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>

---

---

## ♣ Introduction générale. ♣

---

---

Le contrôle optimal constitue un domaine de recherche central dans la théorie des systèmes dynamiques, avec des implications importantes dans de nombreux domaines notamment en finance, en économie, en ingénierie et même en biologie. La théorie du contrôle voit le jour en raison du besoin sans cesse croissant des hommes de résoudre de manière optimale leurs problèmes. C'est ainsi que dans les années 50, la version déterministe du problème fut posée pour la première fois par le mathématicien Russe Lev Semenovitch Pontryagin. Ce n'est qu'en 1958 que l'Américain Richard E. Bellman fût le premier à s'intéresser à l'aspect stochastique du problème. Cependant, on n'y retrouvait pas le type d'équation différentielle stochastique initiée par le Japonais Kiyoshi Itô (EDS) offrant un cadre mathématique puissant pour modéliser des systèmes soumis à des influences aléatoires.

Ce mémoire se concentre sur l'étude du contrôle optimal des EDS, en utilisant le principe du maximum comme outil principal d'analyse. Celui-ci vise à trouver des stratégies permettant de minimiser une fonction de coût tout en respectant les contraintes imposées par le système dynamique sous-jacent.

La fonction de coût considérée dans le cadre de ce travail est donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t, X_t, u_t) dt + g(X_T) \right] \quad (1)$$

où  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique satisfaisant une EDS de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t) dt + \sigma(t, X_t, u_t) dW_t \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2)$$

où  $h, g$  et  $b, \sigma$ , sont des fonctions déterministes décrivant respectivement le coût instantané, le coût terminal et la dynamique du système.

L'objectif principal de ce travail est de trouver une stratégie optimale  $u^*$  qui minimise la fonction de coût  $J(u)$ . Cette recherche s'inscrit dans un contexte plus large d'optimisation stochastique et de contrôle de systèmes dynamiques ayant des implications importantes dans la prise de décision et la planification dans les environnements incertains.

Deux applications spécifiques du contrôle optimal stochastique des EDS explorées dans ce travail sont premièrement son utilisation pour minimiser le risque d'investissement d'un investisseur, et ensuite son utilisation dans les jeux linéaires quadratiques à champ moyen. Ces applications offrent deux exemples concrets de l'importance pratique et des applications potentielles de la théorie du contrôle dans des domaines spécifiques tels que l'économie et la théorie des jeux.

Dans la suite de ce travail, nous nous attèlerons à présenter d'abord un aperçu des concepts préliminaires

et fondamentaux en théorie de contrôle optimal stochastique. Ensuite nous présenterons les différentes formulations du problème tout en démontrant l'existence d'une stratégie optimale pour un tel problème. Enfin nous développerons une méthodologie de résolution du problème en invoquant le théorème du principe du maximum stochastique et en mettant en lumière les applications de celui ci à la minimisation des risques d'investissement ainsi qu'aux jeux linéaires quadratiques à champ moyen.

# NOTIONS PRÉLIMINAIRES

---



---

## 1.1 Notions de calcul des probabilités

Les définitions et les résultats non démontrés dans cette partie sont extraits des documents [11], [14] et [28] mentionnés dans la bibliographie.

### 1.1.1 Variables aléatoires

Soit  $\Omega$  un ensemble quelconque non vide.

Soit  $P(\Omega)$  l'ensemble des parties de  $\Omega$

**Définition 1.1.1. (Tribu)**

On appelle **Tribu** ou  $\sigma$ -**algèbre** sur  $\Omega$  tout sous ensemble  $\mathcal{F}$  de  $P(\Omega)$  vérifiant :

- ❶  $\Omega \in \mathcal{F}$
- ❷  $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$
- ❸  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

**Remarque 1.1.1.**     *i* Le couple  $(\Omega, \mathcal{F})$  est appelé *espace mesurable*.

*ii* La tribu engendrée par un ensemble  $A$  est notée  $\sigma(A)$  désignant la plus petite tribu de parties de  $\Omega$  contenant  $A$ .

**Définition 1.1.2. (Mesure)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable, une **mesure** sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est une application  $\mu : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  telle que :

- 1)  $\mu(\emptyset) = 0$
- 2) Pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties de  $\Omega$  deux à deux disjointes on a :

$$\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

**Définition 1.1.3. (Espace probabilisé)**

Si  $\mu(\Omega) = 1$ , la mesure est dite de probabilité on la note  $\mathbb{P}$ ; ainsi le triplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est appelé *espace probabilisé* ou *de probabilité*.

**Définition 1.1.4. (Fonction  $\mathcal{F}$ -mesurable)**

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Une fonction  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite  $\mathcal{F}$ -mesurable si :

$$Y^{-1}(U) := \{w \in \Omega; Y(w) \in U\} \in \mathcal{F}$$

pour tout ensemble ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  (ou pour tout ensemble de Borel  $U \subset \mathbb{R}^n$ )

**Définition 1.1.5. (Variable aléatoire, Loi de X)**

Étant donné, deux espaces mesurables  $(\Omega, \mathcal{F})$  et  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

On appelle variable aléatoire réelle, toute application mesurable  $X$  de  $(\Omega, \mathcal{F})$  vers  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On appelle loi de  $X$  la probabilité image de  $\mathbb{P}$  par  $X$ , c'est à dire l'application définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  par :

$$\mathbb{P}_X(O) = \mathbb{P}(X^{-1}(O)) \tag{1.1}$$

pour tout  $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

**Définition 1.1.1. (Suite tendue)**

Une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 0}$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est dite tendue si :

$$\forall \epsilon > 0, \text{ il existe } M_\epsilon > 0 \text{ tel que } \mathbb{P}(|X_n| > M_\epsilon) \leq \epsilon \text{ pour tout } n \geq 1.$$

## 1.1.2 Espérance conditionnelle

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Pour toute sous tribu  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}$ , on souhaite, définir l'espérance conditionnelle de la variable  $X$  sachant  $\mathcal{G}$  qui s'interprète comme la meilleure approximation (en un certain sens) de la variable aléatoire  $X$  lorsqu'on dispose de l'information  $\mathcal{G}$ . Ainsi nous verrons que si  $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$  (tribus triviales), alors l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{G}$  est égale à  $\mathbb{E}[X]$ . L'idée est que si on ne dispose d'aucune information sur  $X$  alors la meilleure approximation de  $X$  est son espérance. Sur un autre angle, si  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ , alors comme  $X$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable, on considère que l'on a l'information qui suffit à connaître la valeur de  $X$ , et par conséquent, que l'approximation de  $X$  dans ce cas est exacte, c'est à dire que l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{G}$  est égale à  $X$ . De manière rigoureuse, l'existence de l'espérance conditionnelle est garantie par le théorème de Radon-Nikodym suivant :

**Théorème 1.1.1. (Radon-Nikodym)**

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $\mathcal{G}$  une sous tribu de  $\mathcal{F}$ . Alors pour toute variable aléatoire réelle intégrable  $X$ , il existe une variable aléatoire intégrable et  $\mathcal{G}$ -mesurable  $Y$  telle que

$$\int_A X(w) \mathbb{P}(dw) = \int_A Y(w) \mathbb{P}(dw), \forall A \in \mathcal{G} \tag{1.2}$$

**Proposition 1.1.1. (Espérance conditionnelle)**

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $\mathcal{G}$  une sous tribu de  $\mathcal{F}$ . Si  $X$  est une variable aléatoire intégrable,  $\mathcal{G}$ -mesurable, telle que

$$\int_A X(w) \mathbb{P}(dw), \forall A \in \mathcal{G} \tag{1.3}$$

alors  $X = 0$   $\mathbb{P}$ p.s. , c'est à dire  $\mathbb{P}(\{w \in \Omega; X(w) = 0\}) = 1$ . La variable aléatoire  $Y$  est appelée espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{G}$  , et est notée  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ .

Énonçons les propriétés suivantes relatives à l'espérance conditionnelle :

**Proposition 1.1.2.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et soient  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  deux sous tribus de  $\mathcal{F}$ . On considère deux variables aléatoires  $X, Y$  intégrables . On a :

- 1) Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ .
- 2)  $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$  si  $X$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable ;
- 3)  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$  si  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$  ; en particulier ,  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$  ;
- 4)  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$  si  $X \geq 0$  ;
- 5)  $\mathbb{E}[a|\mathcal{G}] = a$  pour tous  $a \in \mathbb{R}$
- 6)  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$  si  $X$  est indépendant de  $\mathcal{G}$ .

## 1.2 Processus stochastiques

L'objet de la théorie des processus stochastiques (ou aléatoires) est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.

### Définition 1.2.1. (Processus)

Un processus stochastique est une famille  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  de variables aléatoires à valeurs dans un espace mesurable  $\mathcal{X}$  et indexées par le temps  $t$ . Le paramètre de temps  $t$  variant dans  $\mathbb{T}$  peut être discret ou continu.

Pour chaque  $w \in \Omega$ , l'application  $X(w) : t \in \mathbb{T} \mapsto X_t(w)$  est appelée une trajectoire du processus dans le scénario  $w$ . Le processus stochastique  $X$  est dit càd-lag (respectivement continu) si pour chaque  $w \in \Omega$ , la trajectoire  $X(w)$  est continue à droite et admet une limite à gauche (respectivement continue).

### Définition 1.2.2. (filtration)

Une filtration sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est une famille  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  de sous - $\sigma$ -algèbres croissante de  $\mathcal{F}$ . (c'est-à-dire  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$  pour tous  $0 \leq t \leq s$  dans  $\mathbb{T}$ ). Le quadruplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  est appelé espace de probabilité filtré. Pour des raisons de commodité on prendra souvent  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ . L'exemple canonique de filtration est le suivant : si  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est un processus stochastique, la filtration naturelle (ou canonique) de  $X$  est :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), t \in \mathbb{T}$$

désigne la plus petite  $\sigma$ -algèbre par rapport à laquelle  $X_s$  est mesurable pour tous  $0 \leq s \leq t$ .  $\mathcal{F}_t^X$  s'interprète comme toute l'information qu'on peut extraire de l'observation des trajectoires de  $X$  entre 0 et  $t$ . Et  $\mathcal{F}_t$  s'interprète comme l'information connue à la date  $t$  et elle augmente avec le temps.

Dans le cadre de ce travail, on considère des processus stochastiques à temps continu et l'intervalle de variation du temps  $\mathbb{T}$  est soit fini  $\mathbb{T} = [0, T]$ ,  $0 < T < +\infty$ , soit infini  $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ .

Une filtration est dite continue à droite si :

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Quand l'espace probabilisé est complet, on dit que la filtration satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite et  $\mathcal{F}_0$  contient tous les ensembles  $\mathbb{P}$ -nuls (ensembles de mesures nulles). À partir de maintenant, nous allons travailler dans un espace probabilisé complet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  avec la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  satisfaisant les conditions habituelles. Nous définissons aussi  $\mathcal{F}_T = \sigma(\bigcup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t)$ , c'est à dire la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\bigcup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t$ , désignant la plus petite tribu contenant tous les  $\mathcal{F}_t$ .

Dans la suite, on se donne une filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Définition 1.2.3. (Processus adapté)**

Un processus  $X_t$  est dit  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -adapté (ou plus simplement adapté) si pour tout  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Lorsqu'on veut préciser par rapport à quelle filtration le processus est adapté, on écrira  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté. Un processus adapté est donc un processus dont la valeur à toute date  $t$  est révélée par l'information  $\mathcal{F}_t$ . Il est clair que tout processus  $X$  est adapté par rapport à sa filtration naturelle  $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \in \mathbb{T}}$ .

Jusqu'à présent, le processus stochastique  $X$  est vu soit comme une fonction du temps  $t$  à  $w$  fixé (lorsqu'on parle de trajectoire) ou comme une fonction de  $w$  à  $t$  fixé (lorsqu'on considère la variable aléatoire comme dans la définition 1.1.6.). On peut considérer les deux aspects en regardant le processus comme une fonction définie sur  $\mathbb{T} \times \Omega$ . Ceci conduit aux définitions suivantes :

**Définition 1.2.4. (Processus progressif, Optionnel, Prévisible)**

- 1) Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dit **progressif** (par rapport  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ ) si pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , l'application  $(s, w) \mapsto X_s(w)$  est mesurable sur  $[0, t] \times \Omega$  muni de la tribu produit  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$
- 2) Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dit **optionnel** (par rapport  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ ) si l'application  $(s, w) \mapsto X_s(w)$  est mesurable sur  $\mathbb{T} \times \Omega$  muni de la tribu engendrée par les processus  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -adaptés et càdlàg.
- 3) Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dit **prévisible** (par rapport  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ ) si l'application  $(s, w) \mapsto X_s(w)$  est mesurable sur  $\mathbb{T} \times \Omega$  muni de la tribu engendrée par les processus  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -adaptés et continus.

**Remarque 1.2.1.** Il est clair que tout processus prévisible est optionnel. En effet tout processus continu est càdlàg car continu à gauche et à droite donc continu à droite et limité à gauche.

**Proposition 1.2.1.** Si le processus  $X$  est optionnel, il est progressif. En particulier, s'il est adapté et càdlàg alors il est progressif.

**Définition 1.2.1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  et  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \{\widehat{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}, \widehat{\mathbb{P}})$  dans cet ordre deux espaces de probabilité filtrés vérifiant les conditions habituelles. La seconde est une extension de la première s'il existe une variable aléatoire  $\theta : (\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$  telle que :

- i)  $\theta^{-1}(\mathcal{F}_t) \subset \widehat{\mathcal{F}}_t \quad \forall t$
- ii)  $\mathbb{P} = \widehat{\mathbb{P}} \circ \theta^{-1} \equiv \widehat{\mathbb{P}}_\theta$
- iii) Pour tout  $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  
 $\widehat{\mathbb{E}}[\widehat{X}(\widehat{w}) | \widehat{\mathcal{F}}_t](\widehat{w}) = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t](\theta \widehat{w})$  p.p.  $\widehat{w} \in \widehat{\Omega}$

où  $\hat{X}(\hat{w}) \equiv X(\theta\hat{w}) \quad \forall \hat{w} \in \Omega$

**Théorème 1.2.1.** Soit  $\{X_i, \quad i = 1, 2, \dots\}$  une suite de processus  $m$ -dimensionnels continus sur  $[0; T]$ , sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vérifiant :

$$\begin{cases} \sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[|X_i(0)|^\gamma] < +\infty \\ \sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[|X_i(t) - X_i(s)|^\alpha] \leq K|t - s|^{1+\beta} \quad t, s \in [0, T] \end{cases} \quad (1.4)$$

Pour des constantes  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ . Alors  $\{X_i\} (j = 1, 2, \dots)$  est une famille tendue comme variable aléatoire à valeurs dans  $W^m[0; T]$ . Et par conséquent, il existe une sous suite  $\{i_j\}$ , un processus  $m$ -dimensionnel continu  $\hat{X}_{i_j} = \{\hat{X}_{i_j}\} (j = 1, 2, \dots)$  et  $\hat{X}$  défini sur espace probabilisé  $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{i_j} \in A) = \hat{\mathbb{P}}(\hat{X}_{i_j} \in A), \forall A \in \mathcal{B}(W^m[0; T]) \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{X}_{i_j} \longrightarrow \hat{X} \quad \text{dans } W^m[0; T] \quad \hat{\mathbb{P}} - p.s. \end{cases} \quad (1.5)$$

**Corollaire 1.2.1.** Si  $(U, d)$  est compact, alors tout  $\Lambda \subset \mathcal{P}(U)$  est compact.

**Théorème 1.2.2. (Théorème de Skorokod)**

Soit  $(U, d)$  un espace métrique séparable (polonais) et  $\{\mathbb{P}_i, i = 1, 2, \dots, \mathbb{P}\} \subset \mathcal{P}(U)$  tel que  $\mathbb{P}_i$  converge faiblement vers  $\mathbb{P}$ . Alors sur un espace probabilisé  $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$ , il existe des variables aléatoires  $X_i$ ,

$$X_i : (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}) \longrightarrow (U, \mathcal{B}(U)) \quad i = 1, 2, \dots$$

telles que :

- i)  $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_{X_i}, i = 1, 2, \dots$  et  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_X$
- ii)  $X_i \longrightarrow X$  quand  $i \longrightarrow \infty$   $\mathbb{P} - p.s.$

**Lemme 1.2.1.** Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des ensembles des Cylindres boréliens dans  $W^m = (\mathcal{C}[0; T], \mathbb{R}^m)$ . La  $\sigma$ -algèbre  $\sigma(\mathcal{C})$  engendrée par  $\mathcal{C}$  coïncide avec la tribu de Borel  $\mathcal{B}(W^m)$  de  $W^m$ .

**Proposition 1.2.2.** Soit  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  et  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$  deux familles de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  telles que  $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ . Si  $X_t$  est une  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -martingale (respectivement surmartingale, sous-martingale), alors  $Y_t = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{G}_t]$  est une  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ -martingale (respectivement sous-martingale, surmartingale). En particulier, si  $X_t$  est  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté, alors  $X_t$  lui-même est une  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ -martingale (respectivement sous-martingale, surmartingale).

**Proposition 1.2.3.** Soit  $\xi_i : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{m_i}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_i}))$  une suite de variables aléatoires. ( $i = 1, 2, \dots$ ) Soit  $\mathcal{G} = \vee_i \sigma(\xi_i)$  et  $X \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Alors

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[g(\xi_1, \dots, \xi_n)] = 0$$

pour tout  $i$  et tout  $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$  où

$$N = \sum_{j=1}^i m_j$$

### 1.2.1 Temps d'arrêt

Ayant à l'esprit l'interprétation de  $\mathcal{F}_t$  comme l'information connue jusqu'à la date  $t$ , on s'intéresse à savoir si un évènement donné, caractérisé par sa première date  $\tau(w)$  d'apparition, a eu lieu ou non avant la date  $t$  sachant l'observation de l'information  $\mathcal{F}_t$ . Ceci conduit à la notion de temps d'arrêt.

**Définition 1.2.5.** (*Temps d'arrêt, Temps d'arrêt prévisible*)

1) Une variable aléatoire  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ , i.e. un temps aléatoire, est appelé temps d'arrêt (par rapport à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ ) si pour tout  $t \in \mathbb{T}$  :

$$\{\tau \leq t\} := \{w \in \Omega : \tau(w) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

2) Un temps d'arrêt  $\tau$  est dit prévisible s'il existe une suite de temps d'arrêt  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  telle que l'on ait p.s. :

i)  $\lim_n \tau_n = \tau$

ii)  $\tau_n < \tau$  pour tout  $\tau > 0$

On dit alors que  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  annonce  $\tau$ .

**Proposition 1.2.4.** Si  $\tau$  et  $\sigma$  sont deux temps d'arrêt alors  $\tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma, \tau + \sigma$  sont aussi des temps d'arrêt.

*Démonstration.* :

Soient  $\tau$  et  $\sigma$  deux temps d'arrêt, montrons que  $\tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma, \tau + \sigma$  sont des temps d'arrêt.

Soit  $t \in \mathbb{T}$  montrons que  $\{\tau \wedge \sigma \leq t\}, \{\tau \vee \sigma \leq t\}$  et  $\{\tau + \sigma \leq t\}$  appartiennent à  $\mathcal{F}_t$  on a :

$$\{\tau \wedge \sigma \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

de même

$$\begin{aligned} \{\tau \vee \sigma \leq t\} &= \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \\ &= (\{\tau \leq t\}^c \cup \{\sigma \leq t\}^c)^c \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

De plus,  $\{\tau + \sigma \leq t\} = \cup_{k \leq t} (\{\tau = k\} \cap \{\sigma = t - k\}) \in \mathcal{F}_t.$  □

**Remarque 1.2.2.** Soit  $\tau$  un temps d'arrêt, on mesure l'information accumulée jusqu'en  $\tau$  par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{T}\}$$

et est une tribu de  $\mathcal{F}$ .

Nous énonçons à présent quelques autres propriétés utiles au sujet des temps d'arrêt.

**Proposition 1.2.5.** Soient  $\tau$  et  $\sigma$  deux temps d'arrêt,  $\xi$  une variable aléatoire.

1) Pour tout  $B \in \mathcal{F}_\sigma, B \cap \{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$ , en particulier  $\sigma \leq \tau$  alors  $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$

2) Les évènements suivants  $\{\sigma < \tau\}, \{\sigma \leq \tau\}, \{\sigma = \tau\}$  appartiennent à  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ .

3)  $\xi$  est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{T}, \xi 1_{\{\tau \leq t\}}$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Démonstration. :

1) Soit  $B \in \mathcal{F}_\sigma$ , on a :

$\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$  car  $\sigma$  temps d'arrêt. De plus  $B \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$  sur  $\{\sigma \leq \tau\}$  donc  $B \cap \{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$ .

2) Montrons que  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$

. On a  $\sigma \wedge \tau \leq \sigma$  et  $\sigma \wedge \tau \leq \tau$  donc  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subseteq \mathcal{F}_\tau$  et  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subseteq \mathcal{F}_\sigma$  d'où  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subseteq \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ .

De plus Soit  $B \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$  alors  $B \in \mathcal{F}_\tau$  et  $B \in \mathcal{F}_\sigma$ .

si  $\sigma \leq \tau$  alors  $B \in \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$ .

Si  $\tau \leq \sigma$  alors  $B \in \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$ .

Par ailleurs,  $\{\sigma < \tau\} = \{\tau \leq \sigma\}^c \in \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$ ,

De même  $\{\sigma \leq \tau\} = \{\tau < \sigma\}^c \in \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$ .

On a aussi  $\{\sigma = \tau\} = \{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau \leq \sigma\}$

et  $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$

et  $\{\tau \leq \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$ .

d'où  $\{\sigma = \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$

□

## 1.2.2 Le Mouvement brownien

L'exemple basique de processus est le mouvement brownien, nom donné par le botaniste Robert Brown en 1827 pour décrire le mouvement irrégulier de particules de pollen dans un fluide. Le cadre d'application du mouvement brownien a largement dépassé l'étude des particules microscopiques pour être utilisé en finance dans la modélisation des prix d'actions, historiquement depuis Bachelier en 1900.

### Définition 1.2.6. (Mouvement brownien unidimensionnel)

On appelle mouvement brownien unidimensionnel, tout processus  $W := (W_t, t \geq 0)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que :

1)  $W_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -p.s.

2)  $W$  est à accroissements indépendants, ce qui signifie que, pour tous,  $0 \leq t < s \leq u < v$ , les variables aléatoires  $W_v - W_u$  et  $W_s - W_t$  sont indépendants.

3)  $W$  est à accroissements stationnaires et Gaussiens, c'est à dire pour tous  $0 \leq s < t$ ,  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ . Autrement dit,  $W_t - W_s$  est une variable aléatoire réelle de densité  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right)$

4)  $W$  est à trajectoires continues  $\mathbb{P}$ -p.s.

### Définition 1.2.7. (Mouvement brownien d-dimensionnel)

On appelle mouvement brownien d-dimensionnel ( $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $d \geq 2$ ) tout processus

$(W_t := (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(d)}), t \geq 0)$  tel que les processus  $(W_t^{(i)}, t \geq 0)$   $i \in \{1, \dots, d\}$  sont des mouvements browniens unidimensionnels indépendants.

**Proposition 1.2.6.** Soit  $(W_t, t \geq 0)$  un mouvement brownien, défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  alors chacun des processus ci-dessous est un mouvement Brownien :

i)  $(X_t = \frac{1}{c}W_{c^2t}, t \geq 0) \quad c \in \mathbb{R}$

ii)  $(Y_t = -W_t, t \geq 0)$

*Démonstration.* : Nous montrerons juste la troisième propriété de la définition car les trois autres s'obtiennent aisément.

1) Montrons que  $(X_t)$  est à accroissements stationnaires Gaussiens. Soient  $0 \leq s < t$  on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{c}W_{c^2t} - \frac{1}{c}W_{c^2s}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{c^2}\mathbb{E}[W_{c^2t} - W_{c^2s}]^2 \\ &= \frac{1}{c^2}(c^2t - c^2s) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

2) De même

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Y_t - Y_s)^2] &= \mathbb{E}[(-W_t + W_s)^2] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] \\ &= t - s. \end{aligned}$$

□

### 1.2.3 Martingales à temps continus

**Définition 1.2.8. (Martingales)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé filtré. Où  $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$  ou  $[0, +\infty]$ . Un processus  $(X_t, t \in \mathbb{T})$  est appelé  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -martingale si :

i)  $X$  est  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -adapté.

ii)  $X$  est intégrable, c'est à dire  $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty \quad \forall t \in \mathbb{T}$

iii)  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \quad \mathbb{P}$ -p.s. pour tous  $0 \leq s < t$

**Définition 1.2.9. (sous-martingales, sur-martingales)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé filtré. Où  $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$  ou  $[0, +\infty]$ . Un processus  $(X_t, t \in \mathbb{T})$  vérifiant les conditions i) et ii) ci-dessus. Il est appelé  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -sous-martingale (respectivement  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -sur-martingale) si  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s, \mathbb{P}$ -p.s. pour tous  $0 \leq s < t$  (respectivement  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s, \mathbb{P}$ -p.s.)

**Théorème 1.2.3. (Théorème d'arrêt de Doob)**

Soit  $(X_t, t \geq 0)$  une  $\mathbb{F}$ -Martingale continue (à trajectoires continues,  $\mathbb{P}$ -p.s.), et  $\tau$  un  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt borné tel que la variable aléatoire  $X_\tau$  soit intégrable, (c'est à dire  $\mathbb{E}(|X_\tau|) < \infty$ ) alors  $\mathbb{E}(|X_\tau|) = \mathbb{E}(X_0)$  Par conséquent, si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt bornés, tels que  $\tau_1 \leq \tau_2$   $\mathbb{P}$ -p.s.,  $\mathbb{E}(|X_{\tau_1}|) < \infty$  et  $\mathbb{E}(|X_{\tau_2}|) < \infty$  alors  $\mathbb{E}(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$

**Définition 1.2.2.** Soit  $M \in \mathcal{M}^2[0; T]^n$  (respectivement  $\mathcal{M}^{2,loc}[0; T]^n$ ). Un processus croissant  $A_t$  est une variation quadratique de  $M_t$  si  $M_t M_t^T - A_t$  est une  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -martingale (respectivement martingale locale). On note  $\langle M_t \rangle \equiv A_t$

**Définition 1.2.10. (Processus de Markov)**

Soit  $(X_t, t \geq 0)$  un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\mathbb{F}^*$  sa filtration naturelle. On dit que  $X$  est un processus de Markov si pour tous  $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$  et tout Borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^d$ , on a :

$$\mathbb{P}[X_{t+s} \in A | \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}[X_{t+s} \in A | X_t] \quad (1.6)$$

**Proposition 1.2.7.** Soient  $(X_t, t \geq 0)$  un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\mathbb{F}^* = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  sa filtration naturelle, alors  $X$  est un processus de Markov si et seulement si pour toute fonction mesurable positive et bornée  $\phi$ , on a :

$$\mathbb{E}[\phi(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\phi(X_{t+s}) | X_t] = g(X_t) \quad (1.7)$$

où  $g(x) = \mathbb{E}[\phi(X_{t+s}) | X_t = x]$

**Définition 1.2.11. (Propriété de Markov forte)**

Soient  $(X_t, t \geq 0)$  un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\mathbb{F}^* = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  sa filtration naturelle, on dit que  $X$  possède la propriété de Markov forte si pour tous temps d'arrêts  $\tau_1$  et  $\tau_2$  et pour toute fonction mesurable positive et bornée  $\phi$  on a :

$$\mathbb{E}[\phi(X_{\tau_1+\tau_2}) | \mathcal{F}_{\tau_1}] = \mathbb{E}[\phi(X_{\tau_1+\tau_2}) | X_{\tau_1}] = g(X_{\tau_1}) \quad (1.8)$$

**Définition 1.2.12. (Diffusion)**

On appelle diffusion tout processus  $(X_t, t \geq 0)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  qui possède la propriété de Markov forte, des trajectoires continues  $\mathbb{P}$ -p.s. et tel que pour tous  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ , les limites

$$\mu(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[X_{t+h} - X_t | X_t = x] \quad (1.9)$$

$$\sigma^2(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[(X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x] \quad (1.10)$$

existent. Alors  $\mu$  est appelé drift de  $(X_t, t \geq 0)$  et  $\sigma^2$  le coefficient de diffusion de  $(X_t, t \geq 0)$ . ( $\sigma^2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ )

## 1.3 Intégration stochastique

**Définition 1.3.1. (Variation quadratique)**

Soit  $W = (W_s, s \geq 0)$  un mouvement brownien défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Soit  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de subdivisions de  $[0, t]$ ,  $t > 0$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(\pi_n) = 0$ . On appelle variation quadratique de  $B$  la variable aléatoire définie par :

$$\langle W \rangle_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_t(W, \pi_n)$$

où  $\pi_n = (t_i^n, i = 0, \dots, r_n)$  avec  $t_0^n = 0$  et  $t_{r_n} = t$  et  $Q_t(W, \pi_n) = \sum_{k=1}^{r_n} (W_{t_k^n} - W_{t_{k-1}^n})^2$

### 1.3.1 Formule d'Itô Unidimensionnelle

#### Définition 1.3.2. (Intégrale d'Itô)

Soit  $W = (W_s, s \in [0, t])$  un mouvement brownien défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On désigne par  $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_s^W, s \in [0, T])$  la filtration naturelle de  $W$ .

i) On appelle Intégrale d'Itô tout processus de la forme

$$I_t = \int_0^t \sigma_s dW_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{t_{k-1}^n} (W_{t_k^n} - W_{t_{k-1}^n})$$

où  $(\sigma_s, s \in [0, T])$  est un processus  $\mathbb{F}^W$ -adapté tel que  $(s, w) \rightarrow \sigma_s(w)$ , est mesurable

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\sigma_s|^2 ds \right] < \infty$$

et où  $(\pi_n = \{t_i^n, i = 0, \dots, r_n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de subdivision de  $[0, t]$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(\pi_n) = 0$

ii) On appelle processus d'Itô, tout processus  $(X_t, t \in [0, t])$  de la forme  $X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + I_t$  où  $X_0$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_s^W$ -mesurable ( $I_t, t \in [0, T]$ ) est une intégrale d'Itô, et  $(\mu_s ds, s \in [0, T])$  est un processus  $\mathbb{F}^W$ -adapté tel que  $(s, w) \rightarrow \mu_s(w)$  est mesurable (par rapport à  $\mathcal{W}([0, T]) \times \mathcal{F}$ ) et  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\mu_s| ds \right] < \infty$

**Remarque 1.3.1.** i) Tout processus d'Itô est à trajectoires continues.

ii) Toute intégrale d'Itô est un processus d'Itô mais la réciproque est fausse.

#### Proposition 1.3.1. (Propriétés de l'intégrale d'Itô)

Soit  $(I_t, t \in [0, T])$  une intégrale d'Itô, alors

i)  $I$  est une martingale de carré intégrable et à trajectoires continues telle que

$$\mathbb{E}[I_t] = \mathbb{E}[I_0] = 0$$

ii)  $I$  satisfait la propriété d'isométrie d'Itô, c'est à dire

$$\mathbb{E}[I_t^2] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \sigma_s^2 ds \right] \forall t \in [0, T]$$

iii) Soient  $\langle I \rangle = (\langle I \rangle_t, t \in [0, T])$  la variation quadratique de  $I$ . Alors,  $\langle I \rangle$  est l'unique processus croissant à trajectoires continues  $\mathbb{P}$ p.s. tel que

$$I^2 - \langle I \rangle = (I_t^2 - \langle I \rangle_t, t \in [0, T])$$

est une martingale, et on a :  $\langle I \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds, \forall t \in [0, T]$ .

**Théorème 1.3.1. (Formule d'Itô)**

Soit  $(X_t, t \in [0, T])$  un processus d'Itô de la forme :  $X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + I_t$  (confère définition 1.1.19) et  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , alors  $(F(X_t), t \in [0, T])$  est un processus d'Itô. Précisément, on a :

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d \langle X \rangle_s .$$

ce qui équivaut à :

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t (F'(X_s)\mu_s + \frac{1}{2}F''(X_s)\sigma_s^2) ds + \int_0^t F'(X_s)\sigma_s dW_s .$$

En effet

$$dX_s = \mu_s ds + \sigma_s dW_s, \quad \langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds, \quad d \langle X \rangle_t = \sigma_t^2 dt$$

**1.3.2 Formule d'Itô multidimensionnelle**

**Théorème 1.3.2. (d-Processus d'Itô)**

Soient  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(d)}$  d-processus d'Itô ( $d \in \mathbb{N}^*, d \geq 2$ ) alors pour toute fonction  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ , on a :

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_s) dX_s^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (X_s) d \langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle$$

où  $X = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(d)})$

**Définition 1.3.3. (Processus d'Itô d-dimensionnel)**

Soient  $W = (W^{(1)}, W^{(2)}, \dots, W^{(d)})$  avec  $W^{(i)} = (W_t^{(i)}, t \in [0, T])$  un mouvement brownien d-dimensionnel, défini sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ . On appelle processus d'Itô d-dimensionnel, tout processus  $(X_t, t \in [0, T])$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ) de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \forall t \in [0, T]$$

où  $X_0$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $(\mu_t, t \in [0, T])$  et  $(\sigma_t, t \in [0, T])$  sont des processus  $\mathbb{F}$ -adaptés à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{n \times d}$  respectivement tels que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( \sum_{i=1}^n |\mu_s^{(i)}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d |\sigma_s^{(i,j)}|^2 \right) ds \right] < \infty$$

Le processus  $\mu$  est appelé le **drift** et le processus  $\sigma$  est appelé coefficient (ou matrice de ) **diffusion**.

**Théorème 1.3.3. (Formule d'Itô multidimensionnelle pour les processus d'Itô)**

Soient  $(X_t, t \in [0, T])$ , un processus d'Itô multidimensionnel de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \forall t \in [0, T]$$

Soit  $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{1,2}$ . On adopte les notations suivantes.  $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$ ,  $F_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ ,  $F_{x_i, x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $G_t = \sigma \sigma^t$  et  $[\sigma_t]^{(i)} = (\sigma_t^{(i_1)}, \sigma_t^{(i_2)}, \dots, \sigma_t^{(i_d)})$  alors

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \left[ F_t(s, X_s) + \sum_{i=1}^n \mu_s^{(i)} F_{x_i}(s, X_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G^{ij} F_{x_i, x_j}(0, X_s) \right] ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t F_{x_i}(0, X_s) [\sigma_t]^{(i)} dW_s$$

ce qui s'écrit aussi (forme contractée)

$$dF(t, X_t) = \left[ F_t(t, X_t) + \sum_{i=1}^n \mu_s^{(i)} F_{x_i}(s, X_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G^{ij} F_{x_i, x_j}(t, X_t) \right] dt + \sum_{i=1}^n F_{x_i}(t, X_t) [\sigma_t]^{(i)} dW_t$$

**Remarque 1.3.2.** On définit les éléments suivants :

- i) Le gradient,  $D_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$
- ii) La Hésienne,  $D_{xx} = (\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, \dots, n)$
- iii) La trace,  $tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$  où  $A = (A_{i,j})_{i,j=1, \dots, n}$

Alors la formule d'Itô s'écrit :

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \left[ F_t(s, X_s) + (\mu[D_x F]^t)(s, X_s) \right] ds + \int_0^t (D_x F_\sigma) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t tr(\sigma D_{xx} \sigma^t)(s, X_s) ds$$

**Définition 1.3.4.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable. Deux mesures de probabilité  $\mathbb{P}$  et  $\hat{\mathbb{P}}$  sont dites équivalentes si

$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \hat{\mathbb{P}}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

**Théorème 1.3.4. (Girsanov)**

Soient  $(W_t, t \in [0, T])$  un mouvement brownien défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$  sa filtration naturelle. Soit  $(\theta_t, t \in [0, T])$  un processus  $\mathbb{F}$ -adapté. On définit

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right\} \quad \hat{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

On suppose que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- i)  $\mathbb{E}[\exp(\int_0^T \theta_s dW_s)] < \infty$  (Condition de Kamazaki)
- ii)  $\mathbb{E}[\exp(\int_0^T \theta_s^2 dW_s)] < \infty$  (Condition de Novikov)

Démonstration. □

Alors  $\mathbb{E}[Z_t] = 1$  et sous la probabilité  $\hat{\mathbb{P}}$  définie par  $\hat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[1_A Z_T], \forall A \in \mathcal{F}$ , le processus  $(\hat{W}_t, t \in [0, T])$  est un mouvement standard.

**Théorème 1.3.5. (Théorème de représentation martingale)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles. Soit  $M \in \mathcal{M}^2[0; T]^n$  (respectivement  $\mathcal{M}^{2,loc}[0; T]^n$ ) et  $\sigma \in L_{\mathcal{F}}^2(0, T, \mathbb{R}^{n \times m})$  (respectivement  $L_{\mathcal{F}}^{2,loc}(0, T, \mathbb{R}^{n \times m})$ ) avec  $\sigma \sigma^T \in L_{\mathcal{F}}^1(0, T, \mathbb{R}^{n \times m})$  (respectivement  $\sigma \sigma^T \in L_{\mathcal{F}}^{1,loc}(0, T, \mathbb{R}^{n \times m})$ ). Si

$$\langle M \rangle (t) = \int_0^t \sigma(s) \sigma(s)^T ds$$

alors il existe une extension  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \{\widehat{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}, \widehat{\mathbb{P}})$  de  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  sur laquelle il existe un mouvement brownien  $m$ -dimensionnel  $W_t$  tel que

$$M(t) = \int_0^t \sigma(s) dW_s.$$

## 1.4 Équations différentielles stochastiques (EDS)

**Définition 1.4.1.** Soient  $T > 0$ , et  $X_t$  un processus d'Itô  $n$ -dimensionnel, ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). ( $X_t := (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \dots, X_t^{(n)}), t \in [0, T]$ ) dirigé par un mouvement Brownien  $d$ -dimensionnel ( $W_t := (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(d)}), t \in [0, T]$ ), on suppose que le drift et le coefficient de diffusion sont respectivement de la forme  $\mu_t = \mu(t, X_t)$  et  $\sigma_t = \sigma(t, X_t)$  où  $\mu : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  sont des fonctions mesurables. La représentation suivante :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, X_0 = \zeta \quad (1.11)$$

du processus d'Itô  $X = (X_t, t \in [0, T])$  est appelée, équation différentielle stochastique d'inconnue  $X$  avec pour valeur initiale  $\zeta$ . On suppose que  $\zeta$  est un vecteur aléatoire  $n$ -dimensionnel indépendant du mouvement brownien  $W$ .

### Existence et unicité des solutions

**Définition 1.4.2.** Soient  $T > 0$  et  $(W_t, t \in [0, T])$  un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On note  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$  sa filtration naturelle. On appelle solution forte de l'équation différentielle stochastique (1.11) tout processus  $X = (X_t, t \in [0, T])$   $\mathbb{F}$ -adapté tel que :

- i)  $X_0 = \zeta$
- ii)  $\int_0^T |\mu^{(i)}(s, X_s)| ds < +\infty$  et  $\int_0^T |\sigma^{(i)}(s, X_s)|^2 ds < +\infty$   $\mathbb{P}$ .p.s. c'est à dire pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$
- iii)  $X$  satisfait (1.11) c'est à dire

$$X_t = \zeta + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad \forall t \in [0, T]$$

**Définition 1.4.1.** Un 6-uplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}, W, X)$  est appelé solution faible de (1.11) si :

- 1-  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions habituelles.
- 2-  $W$  est un  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -mouvement brownien et  $X$  est  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté, filtré et continu.
- 3-  $X_0$  et  $\eta$  ont la même distribution.
- 4- Les conditions (ii) et (iii) de la définition précédente sont vérifiées.

**Théorème 1.4.1.** On suppose que le drift  $\mu$  et le coefficient de diffusion  $\sigma$  du processus d'Itô  $X$  représenté par (1.11) satisfont les conditions suivantes :

$$\|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K\|x - y\| \quad (\text{Condition de Lipschitz}) \quad (1.12)$$

$$\|\mu(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + \|x\|) \quad (\text{Condition de croissance (au plus) linéaire}) \quad (1.13)$$

où  $K > 0$  est une constante et  $\|\sigma\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d (\sigma^{(ij)})^2$ . supposant que la donnée initiale  $\zeta$  est indépendante du mouvement brownien  $(W_t, t \in [0, T])$  et que  $\mathbb{E} \left[ \|\zeta\|^2 \right] < \infty$ . Alors, l'équation différentielle stochastique (1.11) admet une unique solution  $X = (X_t, t \in [0, T])$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- 1)  $X$  est  $\mathbb{F}$ -adapté, et adapté par rapport à la filtration engendrée par le mouvement brownien  $W$  et la variable aléatoire  $\zeta$ .
- 2)  $X$  est à trajectoires continues  $\mathbb{P}$ .p.s
- 3)  $X$  est de carré intégrable c'est à dire  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T \|X_s\|^2 ds \right] < \infty$
- 4)  $X$  est un processus de Markov.

## 1.5 Équations différentielles stochastiques Rétrogrades (EDSR)

Les résultats et théorèmes non démontrés de cette section sont issus de [14] respectivement aux pages 349-353 et 358-359 :

### 1.5.1 EDSR Linéaires

Considérons le problème à valeur terminale suivant :

$$\begin{cases} dY_t = [A_t Y_t + \sum_{j=1}^m B_j(t) Z_j(t) + f(t)] dt + Z_t dW_t, & t \in [0; T] \\ Y_T = \xi \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $A, B_1, \dots, B_m$  sont des processus bornés à valeurs dans  $\mathbb{R}^{k \times k}$  et  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -adaptés,  $f \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k)$  et  $\xi \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ . Notre but est de trouver les processus  $Y$  et  $Z = (Z^1, \dots, Z^m)$  vérifiant le système (1.14) et à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$  et dans  $\mathbb{R}^{k \times m}$  respectivement.

La paire  $(Y, Z)$  que nous cherchons doit être adaptée vers l'avant alors que le processus  $Y$  à valeur terminale  $t=T$  (doit être résolue vers l'arrière). C'est pourquoi l'équation (1.14) est appelée équation différentielle stochastique rétrograde.

**Définition 1.5.1.** Une paire  $(Y, Z) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathcal{C}[0; T], \mathbb{R}^k) \times L^{2,loc}_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^{k \times m})$  est appelée solution adaptée de (1.14) si  $Y$  vérifie l'équation suivante :

$$Y_t = \xi - \int_t^T [A_s Y_s + \sum_{j=1}^m B_j(s) Z_j(s) + f(s)] ds - \int_t^T Z_s dW_s \quad \forall t \in [0; T] \quad p.s.$$

L'équation (1.14) a une unique solution si pour deux solutions adaptées  $(Y, Z)$  et  $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ , on a :

$$\mathbb{P}(\{Y_t = \tilde{Y}_t, \forall t \in [0; T] \text{ et } Z_t = \tilde{Z}_t, p.p.t \in [0; T]\}) = 1$$

On a le théorème suivant :

**Théorème 1.5.1.** Soient  $A, B_1, \dots, B_m \in L_{\mathcal{F}}^{\infty}(0, T, \mathbb{R}^{k \times k})$ . Alors pour tout  $f \in L_{\mathcal{F}}^2(0, T, \mathbb{R}^k)$  et  $\xi \in L_{\mathcal{F}}^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ , l'EDSR (1.14) admet une unique solution adaptée  $(Y, Z) \in L_{\mathcal{F}}^2(\Omega, \mathcal{C}[0; T], \mathbb{R}^k) \times L_{\mathcal{F}}^2(0, T, \mathbb{R}^{k \times m})$  et il existe  $K > 0$  tel que :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0; T]} |Y_t|^2 + \sum_{j=1}^m \mathbb{E} \left[ \int_0^T |Z_t^j|^2 dt \right] \right] \leq K \left\{ \mathbb{E}(|\xi|^2) + \mathbb{E} \left[ \int_0^T |f(t)|^2 dt \right] \right\} \quad (1.15)$$

### 1.5.2 EDSR non linéaires

Dans cette section, nous étudions les EDSR non linéaires ; ils ont des applications intéressantes en mathématiques appliquées et en finance, dans les équations aux dérivées partielles et bien d'autres.

Considérons l'EDSR suivante pour temps fixé  $t \in [0; T]$

$$\begin{cases} dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t & t \in [0; T] \text{ p.s.} \\ Y_T = \xi \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $f : [0; T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times m} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  et  $\xi \in L_{\mathcal{F}}^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ .  $f$  pouvant être aléatoire.

Notre objectif est de trouver une paire de processus  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -adaptés  $Y : [0; T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  et  $Z : [0; T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k \times m}$  vérifiant tous les deux l'EDSR ci-dessus .

Introduisons les notations suivantes :

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{k \times m}. \quad (1.17)$$

Ce produit est bien défini sur l'espace de Hilbert  $\mathbb{R}^{k \times m}$ . Définissons  $\| \cdot \|$  la norme induite par (1.17) par :

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{\max \sigma(AA^T)} \leq \sqrt{\text{tr}(AA^T)} \equiv |A| \\ &\leq \sqrt{k \wedge m} \sqrt{\max \sigma(AA^T)} \equiv \sqrt{k \wedge m} \|A\| \end{aligned}$$

où  $\sigma(AA^T)$  est l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $AA^T$ . Ensuite pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ , on définit  $\mathcal{M}_{\beta}[0; T]$  l'espace de Banach suivant :

$$\mathcal{M}_{\beta}[0; T] = L_{\mathcal{F}}^2(\Omega, \mathcal{C}[0; T], \mathbb{R}^k) \times L_{\mathcal{F}}^2(0, T, \mathbb{R}^{k \times m})$$

muni de la norme

$$\|(Y, Z)\|_{\mathcal{M}_{\beta}[0; T]} = \left[ \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0; T]} |Y_t|^2 e^{2\beta t} \right) + \mathbb{E} \left[ \int_0^T |Z_t|^2 e^{2\beta t} dt \right] \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque  $0 < T < +\infty$ , toutes les normes  $\| \cdot \|_{\mathcal{M}_{\beta}[0; T]}$  sont équivalentes pour des valeurs différentes de  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Supposons les hypothèses suivantes sur la fonction  $f : [0; T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m \times k} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

**(B)**  $\forall (Y, Z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m \times k}$   $f(t, Y, Z)$  est  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -adapté ;  
 $f(\cdot, 0; 0) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k)$ .

**Remarque 1.5.1.** *L'unicité s'obtient exactement comme dans le cas linéaire abordé ci-dessus.*

**Définition 1.5.2.** *La paire de processus  $(Y, Z) \in \mathcal{M}_\beta[0; T]$  est appelée solution adaptée de (1.16) si on a l'égalité suivante :*

$$Y_t = \xi - \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall t \in [0; T]$$

**Théorème 1.5.2.** *Supposons les conditions définies par (B) sont vérifiées. Pour tout  $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ , l'EDSR (3.20) admet une unique solution adaptée  $(Y, Z) \in \mathcal{M}_\beta[0; T]$ .*

*Démonstration.* : Pour  $(Y, Z)$  fixé dans  $\mathcal{M}_\beta[0; T]$ , il vient des conditions de (B) que  $f(\cdot, x; y) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k)$ .  
 Considérons l'EDSR

$$\begin{cases} dY_t = f(t, y(t), z(t))dt + Z_t dW_t & t \in [0; T] \text{ p.s.} \\ Y_T = \xi \end{cases} \quad (1.18)$$

De plus  $f$  satisfait une condition de Lipschitz uniforme : il existe une constante positive  $L$  telle que :

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq L(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|), \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^k \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{k \times m} \quad \mathbb{P}.p.s$$

qui est une EDSR linéaire. Et par le théorème 1.5.1, il admet une unique solution adaptée  $(Y, Z) \in \mathcal{M}_\beta[0; T]$ . De plus par l'EDSR (1.18), on peut définir l'opérateur

$\mathcal{T} : \mathcal{M}_\beta[0; T] \longrightarrow \mathcal{M}_{\beta[0; T]}$  par  $(y, z) \mapsto (Y, Z)$ . Nous montrons que pour tout  $\beta > 0$ ,

$$\|\mathcal{T}(y, z) - \mathcal{T}(\tilde{y}, \tilde{z})\|_{\mathcal{M}_{\beta[0; T]}} \leq \frac{1}{2} \|(y, z) - (\tilde{y}, \tilde{z})\|_{\mathcal{M}_{\beta[0; T]}} \quad \forall (y, z), (\tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathcal{M}_\beta[0; T]. \quad (1.19)$$

Ce qui montre  $\mathcal{T}$  est une application contractante sur l'espace de Banach  $\mathcal{M}_\beta[0; T]$ . Nous pouvons utiliser le théorème de l'application contractante (Zeidler[1 p17]), pour affirmer l'existence et l'unicité d'un point fixe de  $\mathcal{T}$  qui est donc l'unique solution adaptée de (1.16).

Pour prouver (1.19), soient  $(y, z), (\tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathcal{M}_\beta[0; T]$  et posons

$$(Y, Z) = \mathcal{T}(y, z), \quad (\tilde{Y}, \tilde{Z}) = \mathcal{T}(\tilde{y}, \tilde{z}).$$

Définissons

$$\begin{cases} \hat{Y}_t = Y_t - \tilde{Y}_t, & \hat{Z}_t = Z_t - \tilde{Z}_t \\ \hat{y}_t = y_t - \tilde{y}_t, & \hat{z}_t = z_t - \tilde{z}_t \\ \hat{f}(t) = f(t, y(t), z(t)) - f(t, \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \end{cases}$$

Soit  $\beta > 0$ , une constante positive. Appliquant la formule d'Itô à  $|\hat{Y}_t|^2 e^{2\beta t}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 |\hat{Y}_t|^2 e^{2\beta t} + \int_0^T |\hat{Z}_s|^2 e^{2\beta s} ds &= - \int_t^T [2\beta |\hat{Y}_s|^2 + 2 \langle \hat{Y}_s, \hat{f}(s) \rangle] e^{2\beta s} - \int_t^T 2e^{\beta s} \langle \hat{Y}_s, \hat{Z}_s dW_s \rangle \\
 &\leq \int_t^T \left\{ -2\beta |\hat{Y}_s|^2 + 2L |\hat{Y}_s| (|\hat{y}(s)| + |\hat{z}(s)|) \right\} e^{2\beta s} ds - 2 \int_t^T e^{\beta s} \langle \hat{Y}_s, \hat{Z}_s dW_s \rangle \\
 &\leq \int_t^T \left[ \left(-2\beta + \frac{2L^2}{\lambda}\right) |\hat{Y}_s|^2 + \lambda (|\hat{y}(s)|^2 + |\hat{z}(s)|^2) \right] e^{2\beta s} ds - 2 \int_t^T e^{2\beta s} \langle \hat{Y}_s, \hat{Z}_s dW_s \rangle
 \end{aligned}$$

où  $\lambda = \frac{2L^2}{\beta} > 0$  cela implique

$$|\hat{Y}_t|^2 e^{2\beta t} + \int_0^T |\hat{Z}_s|^2 e^{2\beta s} ds \leq \lambda(T+1) \left[ \sup_{t \in [0;T]} |\hat{y}(t)|^2 e^{2\beta t} + \int_0^T |\hat{z}(s)|^2 e^{2\beta s} ds \right] - 2 \int_t^T e^{2\beta s} \langle \hat{Y}_s, \hat{Z}_s dW_s \rangle. \quad (1.20)$$

En passant à l'espérance on a :

$$\mathbb{E} \left[ |\hat{Y}_t|^2 e^{2\beta t} + \int_0^T |\hat{Z}_s|^2 e^{2\beta s} ds \right] \leq \|(\hat{y}, \hat{z})\|_{\mathcal{M}_\beta[0;T]}^2. \quad (1.21)$$

D'autre part , par l'inégalité de Burkholder -Davis-Gundy, obtenue en (1.21) on a :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} \left| \int_t^T e^{2\beta s} \langle \hat{Y}_s, \hat{Z}_s dW_s \rangle \right| \right] \leq \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^T e^{2\beta s} \langle \hat{Y}_s, \hat{Z}_s dW_s \rangle \right| \right] + \quad (1.22)$$

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} \left| \int_0^t e^{2\beta s} \langle \hat{Y}_s, \hat{Z}_s dW_s \rangle \right| \right] \quad (1.23)$$

$$\leq 2 \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} \left| \int_0^t e^{2\beta s} \langle \hat{Y}_s, \hat{Z}_s dW_s \rangle \right| \right] \quad (1.24)$$

$$\leq K \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} \left| \int_0^t |\hat{Y}_s|^2 |\hat{Z}_s|^2 e^{4\beta s} ds \right|^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1.25)$$

$$\leq K \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} (|\hat{Y}_t|^2 e^{2\beta t})^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t |\hat{Z}_s|^2 e^{2\beta s} ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1.26)$$

$$\leq \frac{1}{4} \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} (|\hat{Y}_t|^2 e^{2\beta t}) \right] + K^2 \mathbb{E} \left[ \int_0^T |\hat{Z}_s|^2 e^{2\beta s} ds \right] \quad (1.27)$$

$$\leq \frac{1}{4} \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} (|\hat{Y}_t|^2 e^{2\beta t}) \right] + K^2 \lambda(T+1) \|(\hat{y}, \hat{z})\|_{\mathcal{M}_\beta[0;T]}^2. \quad (1.28)$$

Par conséquent , de (1.20) et (1.22), on obtient :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} (|\hat{Y}_t|^2 e^{2\beta t}) \right] \leq \lambda(T+1) \|(\hat{y}, \hat{z})\|_{\mathcal{M}_\beta[0;T]}^2 + 2 \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} \left| \int_t^T e^{2\beta s} \langle \hat{Z}_s^T \hat{Y}_s, dW_s \rangle \right| \right] \quad (1.29)$$

$$\leq (1 + 2K^2) \lambda(T+1) \|(\hat{y}, \hat{z})\|_{\mathcal{M}_\beta[0;T]}^2 + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0;T]} (|\hat{Y}_t|^2 e^{2\beta t}) \right]. \quad (1.30)$$

Combiné avec (1.29) et (1.21) on a :

$$\|(\hat{Y}, \hat{Z})\|_{\mathcal{M}_\beta[0;T]}^2 \leq \frac{2(3 + 4K^2)(T + 1)L^2}{\beta} \|(\hat{y}, \hat{z})\|_{\mathcal{M}_\beta[0;T]}^2. \quad (1.31)$$

On peut bien évidemment prendre  $\beta$  très grand pour réduire au maximum la contraction de  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{M}_\beta[0; T]$ . Ce qui entraîne l'existence d'un unique point fixe pour  $\mathcal{T}$  et par conséquent l'existence et l'unicité d'une solution adaptée à l'équation (1.16).  $\square$

**Théorème 1.5.3.** Soient  $f$  et  $\tilde{f} : [0; T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times m} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  satisfaisant les conditions de **(B)** et soit  $\xi$  et  $\tilde{\xi} \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ . Soient  $(Y, Z)$  et  $(\tilde{Y}, \tilde{Z}) \in \mathcal{M}_\beta[0; T]$  deux solutions de (1.16) correspondant respectivement à  $(f, \xi)$  et  $(\tilde{f}, \tilde{\xi})$ . Alors

$$\|Y - \tilde{Y}, Z - \tilde{Z}\|_{\mathcal{M}_\beta[0;T]}^2 \leq K \left\{ \mathbb{E}[|\xi - \tilde{\xi}|^2] + \mathbb{E} \left[ \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s) - \tilde{f}(s, Y_s, Z_s)|^2 \right] \right\}$$

# PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL STOCHASTIQUE

---



---

Le but de ce chapitre est de donner une formulation du problème de contrôle optimal stochastique. Aussi nous démontrerons l'existence d'un contrôle optimal pour ce problème. En effet il s'agira pour nous de présenter les conditions et équations mathématiques que doit vérifier la solution optimale, afin concrètement de minimiser une fonction de coût  $J$  donnée. Pour mener à bien notre analyse et surtout afin de mieux cerner le problème, nous préférons débiter par énoncer quelques exemples pratiques de tels problèmes.

## 2.1 Quelques exemples de problèmes d'optimisation stochastique

Nous allons dans cette première partie énoncer trois exemples intéressants. Le premier est la minimisation des coûts de fabrication d'un produit par une usine, le second la réassurance et gestion des dividendes qui est un problème relativement nouveau et largement exploré. Sa première version fut introduite en 1996 par Leland-Toft, mais ne comprenait cependant pas de problème d'optimisation. Nous discutons ici d'un cas plus complexe où une compagnie d'assurance désire optimiser les dividendes qu'elle verse à ses actionnaires à travers une suite de décisions optimales qu'elle devra prendre. Le troisième et dernier exemple, bien connu dans le monde de la finance, est le problème du portefeuille de Merton énoncé et résolu en 1969 par Robert C. Merton : Investissement et consommation. Un investisseur dans un temps limité doit effectuer des allocations de sa richesse sur des actions et des obligations (sans risque) afin de maximiser son utilité. Dans la suite nous détaillons ces exemples.

### 2.1.1 Minimisation du coût de fabrication d'un produit.

Dans cette partie nous examinons le cas d'une usine qui désire minimiser le coût de fabrication d'un produit sachant que la demande n'est pas maîtrisée (c'est-à-dire n'est pas une fonction déterministe du temps). De façon formelle, désignons par  $z(t)$  la demande,  $X(t)$  la production et  $u(t)$  la stratégie de production. On pourrait, par exemple, considérer que  $u$ ,  $x$  et  $z$  sont liées par la dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx(t) = [u(t) - z(t)]dt \quad \text{pour } t \in [0, T] \\ dz(t) = b(t, z(t))dt + \sigma(t)dW_t \quad \text{pour } t \in [0, T] \\ x(0) = 0 \\ x(t) \leq K \quad \text{pour } t \in [0, T] \text{ ou } K > 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Et la fonction de coût est de la forme :

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{(-\gamma t)} f(x(t), u(t)) dt + \exp(-\gamma T) h(x(T)) \right]$$

### 2.1.2 Réassurance et gestion des dividendes

Nous discutons ici d'un cas plus complexe où une compagnie d'assurance désire optimiser les dividendes qu'elle verse à ses actionnaires à travers une suite de décisions optimales qu'elle devra prendre. Considérons un modèle dans une compagnie d'assurance A, qui permet de choisir une police d'assurance auprès d'une autre compagnie B dans le but de se couvrir d'une partie des risques. Cette opération qu'on appelle réassurance est d'usage dans le monde des assurances. Notre compagnie A a le choix du montant des dividendes qu'elle verse à ses actionnaires. De plus, A doit constamment rembourser une dette corporative (un emprunt auprès d'une banque par exemple), le remboursement instantané est O. Il est commun d'évaluer une compagnie à travers le montant des dividendes qu'elle reverse. Alors, le but de A est donc de trouver la police de réassurance et la stratégie sur les dividendes qui lui permettront de maximiser le total des dividendes actualisés sur une période donnée.

Pour modéliser un tel problème, considérons R(t) le total des actifs liquides de A au temps t. Évidemment, R(t) est influencé par le montant p des primes encaissées par unité de temps, par le remboursement constant de la dette, et par le paiement des réclamations faites par les clients. Soit V(t) le nombre de réclamations au temps t, et  $\eta_i$  le montant de la  $i^e$  réclamation. On peut donc écrire :

$$R(t) = R(0) + pt - \delta t - \sum_{i=0}^{V(t)} \eta_i \quad (2.2)$$

Si V(t) est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , et que les réclamations sont i.i.d., alors R(t) peut être approximé par un mouvement brownien de dérivée  $p - \delta - \lambda \mathbb{E}(\eta)$  et de coefficient de diffusion  $(\eta \mathbb{E}(\eta^2))^{\frac{1}{2}}$ . Mais le contrat de réassurance permet à la compagnie A de conserver juste une proportion a du montant des primes, donc de reverser 1 - a à la compagnie B. En conséquence, 1 - a des réclamations sera à la charge de B. Donc dans l'équation (2.2), p sera remplacé par ap,  $\eta_i$ , par a  $\eta_i$ . On construit ainsi le modèle qui suit :

Soient x(t) le volume d'argent liquide dont dispose la compagnie à l'instant t, c(t) le taux de dividende payé aux actionnaires à l'instant t. Alors la dynamique de x(t) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx(t) = [a(t)\mu - \delta - c(t)]dt + a(t)\sigma dW_t \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Ici  $\mu$  est la différence entre le taux de la prime et le paiement espéré par unité de temps 1-a(t) est la fraction de réassurance au temps t. Selon la nature du problème on a les contraintes ci-dessous :

$$x(t) \geq 0 \quad 0 \leq a(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

L'objectif donc de l'équipe dirigeante de la compagnie est donc de choisir le schéma de paiement des dividendes  $c(\cdot)$ , et la politique de gestion des risques  $a(\cdot)$ , tous les deux non anticipables, tels que (2.3) soit satisfaite, et le total espéré des dividendes

$$J(c(\cdot), a(\cdot)) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \exp(-\gamma t) c(t) dt \right]$$

soit maximal sur  $[0, T]$ . Noter que  $\gamma$  est le taux d'actualisation.

### 2.1.3 Investissement et consommation

Considérons un marché dans lequel  $m + 1$  actifs sont échangés continuellement. L'un d'entre eux qu'on appelle obligation est tel que le processus de prix  $P_0(t)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt, t \in [0, T], \\ P_0(0) = P_0 > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $r(t_0)$  est le taux d'intérêt (de l'obligation). Il est clair que  $P_0(t)$  augmentera constamment dans le temps. Les  $m$  autres actifs sont appelés actions, et les prix  $P_1(t), \dots, P_m(t)$  satisfont l'équation différentielle :

$$\begin{cases} dP_i(t) = P_i(t)b_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t), t \in [0, T], \\ P_i(0) = P_i > 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

Où  $b_i : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b_i(t) > 0$  est appelé le taux d'appréciation, et  $\sigma_i : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  est appelé la volatilité ou encore dispersion des actions. Tous ces processus sont supposés  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adaptés. Ici,  $W_t$  est un mouvement brownien standard  $m$ -dimensionnel défini sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . Le terme de diffusion  $\langle \sigma_i(t), dW(t) \rangle$  de (2.5) reflète la fluctuation du prix des actions, qui sont par conséquent des actifs risqués. Pour intéresser les éventuels acheteurs, on peut supposer :

$$\mathbb{E}(b_i(t)) > r(t) > 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2.6)$$

Considérons maintenant un investisseur détenant  $N_i(t)$  parts de l'actif  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) à l'instant  $t$ , nous noterons  $X_t$  sa richesse totale. Alors :

$$X_t = \sum_{i=1}^m N_i(t)P_i(t), t \geq 0 \quad (2.7)$$

On suppose que les transactions des actions et le paiement des dividendes (au taux  $\mu_i(t)$  par unité de temps et par unité de capital investi sur le  $i^e$  actif) s'effectuent de manière continue. Soit  $c(t)$  le taux de retrait du marché par l'investisseur pour consommation. On a donc :

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \sum_{i=1}^m N_i(t)[P_i(t + \Delta t) - P_i(t)] + \sum_{i=1}^m \mu_i(t)N_i(t)P_i(t)\Delta t - c(t)\Delta t \quad (2.8)$$

En faisant  $\Delta t \rightarrow 0$  on obtient :

$$dX_t = \sum_{i=1}^m N_i(t) dP_i(t) + \sum_{i=1}^m \mu_i(t) N_i(t) P_i(t) dt - c(t) dt \quad (2.9)$$

$$= (r(t) N_0(t) P_0(t) + \sum_{i=1}^m [b_i(t) + \mu_i(t)] N_i(t) P_i(t) - c(t)) dt + \sum_{i=1}^m N_i(t) P_i(t) \sigma_i(t) dW(t) \quad (2.10)$$

$$= [r(t) X_t + \sum_{i=1}^m [b_i(t) + \mu_i(t) r(t)] \mu_i(t) - c(t)] dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t) u_i(t) dW(t) \quad (2.11)$$

, où,

$u_i(t) = N_i(t) P_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, n$  est la richesse de l'investisseur sur le  $i^e$  actif. Lorsque  $u_i(t) < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), il/elle est à court du  $i^e$  actif. Quand  $u_0(t) < 0$ , l'investisseur emprunte le montant  $|u_0(t)|$  au taux d'intérêt  $r(t)$ . Il est clair qu'en changeant  $U_i(t)$ , notre investisseur change l'allocation de sa richesse sur les  $m+1$  actifs.  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  est le portefeuille de l'investisseur. Remarquons que l'allocation faite à l'obligation n'apparaît pas dans le portefeuille. ce dernier est entièrement déterminé par l'allocation effectuée sur les actions, étant donné la richesse totale.

Maintenant, pour  $X_0 = x_0 > 0$ , notre investisseur veut la stratégie d'investissement  $u(\cdot)$  et le plan de consommation  $c(\cdot)$  tels que :

$$X_t \geq 0, \forall t \in [0, T], p.s.$$

et le flux d'utilité actualisé :

$$J(u(\cdot), c(\cdot)) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \exp(-\gamma t) \phi(c(t)) dt + \exp(-\gamma T) h(X_T) \right] \quad (2.12)$$

est maximal ;  $\gamma > 0$  est le taux d'actualisation,  $\phi(c)$  est l'utilité de la consommation  $c$ ,

et  $\exp(-\gamma T) h(X_T)$  est l'utilité actualisé provenant des legs (richesse terminale). On pourrait bien évidemment imposer des contraintes supplémentaires, par exemple :

$$u_i(t) \geq -L_i \quad \forall t \in [0, T], p.s., i = 0, 1, \dots, n, \quad \forall L_i \geq 0$$

$L_i = 0$  signifie que la vente à découvert est interdite.

## 2.2 Formulation des problèmes de contrôle optimal stochastique

Tous les systèmes d'équations différentielles stochastiques (EDS) présentent des caractéristiques communes telles que : un système de diffusion décrit par Itô ; beaucoup de décisions alternatives qui peuvent affecter la dynamique du système ; les décisions et/ou l'état du système sont sujets à certaines contraintes ; un critère mesurant l'efficacité des décisions. Notre but est d'optimiser (maximiser ou minimiser) ce critère en sélectionnant une décision non-participative parmi celles satisfaisant les contraintes. Un tel problème est appelé problème de contrôle optimal stochastique.

Présentons maintenant deux formulations mathématiques (formulation forte (FF) et formulation faible (WF) du problème de contrôle optimal stochastique à travers deux définitions.

### 2.2.1 Formulation Forte (FF)

Soit un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  satisfaisant les conditions usuelles. On définit un mouvement brownien standard  $W(\cdot)$  de dimension  $m$  sur ce même espace. Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.13)$$

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty] \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$b$  est une fonction mesurable bornée,  $U$  un espace métrique séparé donné et  $T \in [0, \infty]$  fixé. Le processus  $u(\cdot)$  s'appelle le contrôle représentant l'action, la stratégie, ou la politique des décideurs (contrôleurs). À tout instant, le contrôleur doit posséder certaines informations (telles que spécifié par le champ d'information  $\mathcal{F}_t$ , à un moment donné (spécifique)), mais il n'est pas en mesure de prédire ce qui arrivera à cause de l'incertitude du système (en conséquence, pour tout  $t$ , le contrôleur ne peut pas prendre sa décision  $u(t)$  avant que le temps  $t$  arrive). Cette restriction non anticipative en terme mathématique peut être représentée par  $u(\cdot)$  qui doit être  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté  $u(\cdot)$  est adapté à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ . C'est-à-dire que le contrôle  $u(\cdot)$  est pris dans l'ensemble :

$$\mathcal{A} := \{u : [0, T] \times \Omega \longrightarrow U \mid u(\cdot) \text{ est } \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0} \text{-adapté}\}$$

Tout contrôle  $u(\cdot) \in \mathcal{A}$  est appelé contrôle admissible. Aussi nous pouvons avoir certaines contraintes d'état.

Soit  $S(t) : [0, T] \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  une multifonction donnée, alors la contrainte d'état peut être donnée par :

$$X_t \in S(t), \forall t \in [0, T], \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Il peut aussi avoir d'autres conditions. Etant donné la fonction de cout suivante :

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t, X_t, u_t)dt + g(X_T) \right] \quad (2.14)$$

**Définition 2.2.1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions usuelles et  $W(\cdot)$  un mouvement brownien standard  $m$ -dimensionnel défini sur ce même espace. Une fonction  $u(\cdot)$  est  $s$ -admissible et  $(X(\cdot), u(\cdot))$  est une paire  $s$ -admissible si :

- (i)  $u(\cdot) \in \mathcal{A}$
- (ii)  $X(\cdot)$  est l'unique solution forte de (2.13)
- (iii) Certaines contraintes d'état prescrites (données) sont satisfaites ;
- (iv)  $h(\cdot, X(\cdot), \cdot, u(\cdot)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$  et  $h(X_T) \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{R})$

L'ensemble des contrôles  $s$ -admissibles est noté  $\mathcal{A}_{ad}^s$ . Nous pouvons donner une formulation forte (FF) du problème de contrôle optimal stochastique de la manière suivante :

$$\text{Problème (FF) : Minimiser (2.14) sur } \mathcal{A}_{ad}^s.$$

L'objectif est de trouver  $u^* \in \mathcal{A}_{ad}^s$  (s'il existe), tel que

$$j(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{A}_{ad}^s} j(u) \quad (2.15)$$

Le problème (FF) est s-fini si la partie de droite de (2.15) est finie, et il admet une s-solution unique s'il existe une solution unique  $u^* \in \mathcal{A}_{ad}^s$  qui vérifie (2.15). Tout  $u^* \in \mathcal{A}_{ad}^s$  vérifiant (2.15) est appelé contrôle s-optimal. Le processus d'état  $X^*(\cdot)$  correspondant et la paire état-contrôle  $(X^*(\cdot), u^*(\cdot))$  sont appelés processus d'état s-optimal et paire s-optimale respectivement.

### 2.2.2 Formulation Faible (WF)

Notons que dans la formulation forte, l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  et le mouvement Brownien  $W(\cdot)$  de ce même espace sont tous deux fixés. Dans certaines situations il sera nécessaire et même pratique de varier l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  ainsi que  $W(\cdot)$  et de les considérer comme des parties à contrôler. Pour cette raison, nous avons besoin d'une autre formulation du problème.

**Définition 2.2.2.** Un 6-uplet  $\pi = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}, W(\cdot), u(\cdot))$  est appelé contrôle w-admissible, et  $(X(\cdot), u(\cdot))$  une paire w-admissible, si

- (i)  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles ;
- (ii)  $W(\cdot)$  est un mouvement Brownien standard de dimension  $m$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$
- (iii)  $u(\cdot)$  est un processus  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeur dans  $U$  ;
- (iv)  $X(\cdot)$  est l'unique solution faible de (2.13) sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  sous  $u(\cdot)$ .
- (v) Certaines contraintes d'état prescrites (données) sont satisfaites ;
- (vi)  $h(\cdot, X(\cdot), \cdot, u(\cdot)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$  et  $h(X_T) \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{R})$ . Ici, les espaces  $L^1_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$  et  $L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{R})$  sont définis sur l'espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  associé au 6-uplet  $\pi$ .

L'ensemble de tous les contrôles admissibles est noté par  $\mathcal{A}_{ad}^w$ . Parfois nous écrivons  $u^* \in \mathcal{A}_{ad}^w$  au lieu de  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}, W(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{A}_{ad}^w$  s'il n'y a aucune confusion à craindre, cela dépend aussi du contexte dans lequel on considère la formulation faible. Notre formulation faible (WF) du problème de contrôle optimal stochastique est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Minimiser (2.14) sur } \mathcal{A}_{ad}^w. \\ \text{Trouver } \pi^* \in \mathcal{A}_{ad}^w \text{ (s'il existe), tel que} \\ j(\pi^*) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}_{ad}^w} j(\pi) \end{cases} \quad (2.16)$$

De manière analogue à la formulation forte, le problème (2.16) est w-fini si la partie de droite du troisième volet de (2.16) est finie. On définit la w-solution unique, le contrôle w-optimal, le processus d'état w-optimal et la paire w-optimale de la même façon que dans la formulation forte.

Notons que la formulation forte est celle qui découle du monde pratique, alors qu'on se sert souvent de la formulation faible comme un modèle mathématique auxiliaire mais c'est un modèle mathématique efficace qui vise le même objectif que la formulation forte. Un des objectifs du contrôle optimal stochastique, est d'optimiser (minimiser ou maximiser) l'espérance mathématique de certaines variables

aléatoires qui dépendent seulement de la distribution des processus impliqués. Par conséquent, si toutes les solutions de l'équation (2.13) ont la même distribution dans des espaces de probabilités différents, alors on est plus libre dans le choix de l'espace de probabilité qui nous convient. On devrait noter aussi que la formulation faible échoue toutefois si l'un des coefficients donnés  $b$  ;  $\sigma$  ;  $h$  et  $g$  est aléatoire (c'est-à-dire si l'un d'entre eux dépend explicitement de  $w$ ), parce que dans ce cas, l'espace de probabilité doit être spécifié et fixé a priori.

## 2.3 Existence du contrôle optimal

Dans cette section , nous discuterons de l'existence du contrôle optimal. L'essentiel de la théorie est la suivante : Une fonction semi-continue inférieurement ( sci) et définie sur un espace métrique compact atteint son minimum.

### 2.3.1 Existence sous la formulation forte

De prime abord , nous examinons l'existence sous la formulation forte. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré donné et soit  $W(\cdot)$  un mouvement brownien standard défini sur ce même espace ; Considérons le système linéaire stochastique contrôlé suivant :

$$\begin{cases} dX_t = [AX_t + Bu_t]dt + [CX_t + Du_t]dW_t & t \in [0, T] \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Ou A,B,C,D sont des matrices de tailles carrées d'ordre  $n$  . L'état  $X(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et le contrôle  $u(\cdot)$  est dans l'ensemble :

$$\mathcal{A}^L = \{u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k) | u_t \in U \text{ pp } t \in [0, T] \text{ ps}\} \quad (2.18)$$

$U \subseteq \mathbb{R}^k$ . Notons que nous avons une contrainte supplémentaire , étant que le contrôle doit être de carré intégrable juste pour assurer l'existence d'éléments dans l'ensemble défini en (2.18).

**Remarque 2.3.1.** Si  $U$  est borné, alors cette condition est automatiquement satisfaite.

La fonction de cout est :

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(X_t, u_t) dt + g(X_T) \right] \quad (2.19)$$

Avec

$$h : \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Le problème de contrôle optimal peut être énoncé comme suit :

Minimiser la fonction de coût (2.19) sur  $\mathcal{A}^L$

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

( $H_1$ ) : L'ensemble  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  est convexe et fermé , les fonctions  $h$  et  $g$  sont convexes et pour certains  $\delta, K > 0$  ,

$$h(x, u) \geq \delta |u|^2 - K, \quad g(x) \geq -K \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U \quad (2.20)$$

( $H_2$ ) : L'ensemble  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  est convexe et compact , les fonctions  $h$  et  $g$  convexes. Lorsque l'une des hypothèses ci-dessus est supposée, le problème défini en (2.19), est appelé "problème de contrôle optimal stochastique linéaire convexe. Un cas particulier est que lorsque  $h$  et  $g$  sont des fonctions quadratiques convexes, le problème défini en (2.19), est réduit à un problème linéaire quadratique stochastique.

**Théorème 2.3.1.** (*Existence de contrôle optimal sous la formulation forte*)

Sous l'une des hypothèses ( $H_1$ ) ou ( $H_2$ ) , si le problème défini en (2.19) est fini , alors il admet un contrôle optimal.

*Démonstration.* Premièrement supposons que ( $H_1$ ) est vérifiée . Soit  $(X_j(\cdot), u_j(\cdot))$  une suite minimisante c'est à dire  $(j(u_j(\cdot)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \inf_{u \in \mathcal{A}^L} j(u(\cdot)))$  par (2.20) on a :

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |u_j(t)|^2 dt \right] \leq K \quad \forall j \geq 1 \quad (2.21)$$

pour une constante  $K > 0$ .  $L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$ , étant un Banach , il existe une sous-suite que désignons toujours par  $u_j(\cdot)$ , telle que :

$$u_j(\cdot) \longrightarrow u^*(\cdot) \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k) - \text{faible}. \quad (2.22)$$

Par le théorème de MAZUR , nous avons une suite de combinaisons convexes.

$$\tilde{u}_j(\cdot) = \sum_{i \geq 1} \alpha_{ij} u_{i+j}(\cdot) \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} \geq 0 \quad \sum_{i \geq 1} \alpha_{ij} = 1$$

tel que

$$\tilde{u}_j(\cdot) \longrightarrow u_j^*(\cdot) \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^k) - \text{fort} \quad (2.23)$$

Puisque l'ensemble  $U \subset \mathbb{R}^k$  est convexe fermé, il suit que  $u^* \in \mathcal{A}^L$  . D'autre part , si  $\tilde{X}_j(\cdot)$  est l'état sous, le contrôle  $\tilde{u}_j(\cdot)$  , alors nous avons la convergence

$$\tilde{X}_j(\cdot) \longrightarrow X_j^*(\cdot) \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{F}}([0, T], \mathbb{R}^n) - \text{fort} \quad (2.24)$$

Ainsi on obtient clairement que  $(X^*(\cdot), u^*(\cdot))$  est admissible, et la convexité de  $h$  implique

$$J(u^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} J(\tilde{u}_j) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \geq 1} \alpha_{ij} J(u_{i+j}) = \inf_{u \in \mathcal{A}^L} j(u) \quad (2.25)$$

Alors  $(X^*, u^*)$  est optimal. □

Dans le cas où ( $H_2$ ) est plutôt vérifié, nous avons directement (2.21)

$$\int_0^T |u_j(t)|^2 dt \leq K$$

et donc

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |u_j(t)|^2 dt \right] \leq K \quad \forall j \geq 1$$

On fait donc de façon analogue à la preuve ci-dessus.

### 2.3.2 Existence sous la formulation faible

Les résultats et théorèmes non démontrés de cette partie proviennent de [14] pages 171-175

Dans cette section nous nous attelons à examiner l'existence du contrôle optimal sous la formulation faible énoncée ci-dessus. Nous débutons par énoncer quelques hypothèses.

(HF1) :  $(U, d)$  est un espace métrique compact.

(HF2) Les applications  $h, g$  et  $b$  sont continues et il existe une constante  $L > 0$  telle que : pour  $\varphi(t, x, u) = h(t, x, u), b(t, x, u)\sigma(t, x, u), g(x)$

$$\begin{cases} |\varphi(t, x, u) - \varphi(t, y, u)| \leq L|x - y| \\ \forall t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^n, u \in U \\ |\varphi(t, 0, \mu, u)| \leq L \end{cases} \quad (2.26)$$

(HF3) : Pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ , l'ensemble

$$(b, \sigma\sigma^T, h)(t, X, U) := \left\{ b_i(t, X, u), (\sigma\sigma^T)^{ij}(t, x, u), h(t, X, u) / u \in U, i = 1, \dots, n \right\}$$

est convexe dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

(HF4) :  $S(t) \equiv \mathbb{R}^n$ .

Nous énonçons à présent le théorème d'existence du contrôle optimal dans le cas de la formulation faible.

**Théorème 2.3.2.** (Existence de contrôle optimal sous la formulation faible). Sous les hypothèses (HF1)-(HF4), si le problème (WF) est fini, alors il admet un contrôle optimal.

*Démonstration.* Désignons par  $\wedge$  l'ensemble de toutes les mesures positives  $\lambda$  sur  $[0; T] \times U$  telles que :

$$\lambda([0; T] \times U) = s \quad \forall s \in [0; T] \quad (2.27)$$

Puisque  $U$  est compact,  $\wedge$  tendu lorsqu'il est doté d'une topologie de convergence faible, qui est métrisable (d'après le corollaire 1.2.1. ). D'autre part,  $\lambda$  peut être représenté comme  $\lambda(dt, du) = \lambda'(t, du)$ .

Où  $\lambda'(t, \cdot)$  est une mesure de probabilité sur  $U$  pour presque tout  $t$  et est déterminée de manière unique sauf sur un ensemble  $t$ -négligeable. Dans ce cadre, toute fonction mesurable (déterministe)  $u(\cdot)$  à valeurs dans  $U$  peut être intégrée dans l'espace  $\wedge$ ; en ce sens que  $u(\cdot)$  correspond à la mesure de Dirac  $\lambda_{u(\cdot)}(dt, du) = \lambda'_{u(\cdot)}(t, du)dt$  avec la propriété suivante :

Pour toute fonction uniformément continue et bornée  $\rho(t, x, u(t))$  définie sur  $[0; T] \times \mathbb{R}^n \times U$ ,

$$\rho(t, x, u(t)) = \int_U \rho(t, x, u) \lambda_{u(\cdot)}(t, du) \equiv \bar{\rho}(t, x, \lambda_{u(\cdot)}). \quad (2.28)$$

Maintenant introduisons une filtration appropriée sur  $\Lambda$ . Premièrement chaque  $\lambda \in \Lambda$  peut-être identifié à une fonction linéaire de  $\mathcal{C}([0; T] \times U)$  de la manière suivante :

$$\lambda(h) \equiv \int_0^T \int_U h(t, u) \lambda(dt, du), \quad \forall h \in \mathcal{C}([0; T] \times U)$$

Pour toute fonction  $h \in \mathcal{C}([0; T] \times U)$  et  $t \in [0; T]$ , définissons  $h^t(s, u) \equiv h(s \wedge t, u)$ .

Puisque  $\{h_j^t\}_{j \geq 1}$  est dense dans l'ensemble  $\{h^t | h \in \mathcal{C}([0; T] \times U)\}$ . Nous définissons enfin

$$B_t(\Lambda) = \sigma\left(\{\lambda \in \Lambda | \lambda(h^s) \in B\} : s \in [0; t], \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$$

Par le lemme 1.2.1, on déduit que  $B_t(\Lambda)$  peut-être engendré par les cylindres définis par :

$$B_t(\Lambda) = \sigma\left(\{\lambda \in \Lambda | \lambda(h_j^s) \in (a, b)\} : t \geq s \in \mathbb{Q}, j = 1, \dots, a, b \in \mathbb{Q}\right)$$

Soit  $\pi_k = (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \{\mathcal{F}_{kt}\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}_k, W_k, U_k) \in \mathcal{A}_{ad}^w$  une suite minimisante, c'est à dire

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J(\pi_k) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}_{ad}^w} j(\pi)$$

Soit  $x_k$  l'état de trajectoire correspondant à  $\Pi_k$ . Définissons par  $X_k \equiv (x_k, B_k, \sum_k, F_k, W_k)$  où

$$\begin{cases} B_k(t) \equiv \int_0^t b(s, x_k(s), u_k(s)) ds \\ \sum_k(t) \equiv \int_0^t \sigma(s, x_k(s), u_k(s)) ddW_k(s) \\ F_k(t) \equiv \int_0^t h(s, x_k(s), u_k(s)) ds \end{cases} \quad (2.29)$$

De (HF2) on déduit qu'il existe  $K > 0$  telle que

$$\mathbb{E}_k[|X_k(t) - X_k(s)|^4] \leq K|t - s|^2 \quad \forall s, t \in [0; T]$$

où  $\mathbb{E}_k$  est l'espérance sous la probabilité  $\mathbb{P}_k$ . En utilisant la compacité de  $\Lambda$ ,  $\{(X_k, \lambda_{u_k})\}$  est tendue comme suite de variables aléatoires de  $(\mathcal{C}[0; T], \mathbb{R}^{3n+m+1})$ . (Confère théorème 1.2.1 et le corollaire 1.2.1.). Par le théorème de Skorohod, on peut choisir une sous-suite (dépendant toujours de k) et avoir

$$\begin{cases} \{(\bar{X}_k, \bar{\lambda}_k)\} \equiv \{(\bar{x}_k, \bar{B}_k, \bar{\sum}_k, \bar{F}_k, \bar{W}_k, \bar{\lambda}_k)\} \\ (\bar{X}, \bar{\lambda}) \equiv (\bar{x}, \bar{B}, \bar{\sum}, \bar{F}, \bar{W}, \bar{\lambda}) \end{cases}$$

sur un espace probabilisé approprié  $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$  telle que la loi de  $\{(\bar{X}_k, \bar{\lambda}_k)\}$  est égale à la loi de  $\{(X_k, \lambda_{u_k})\}$  pour tout  $k \geq 1$  et  $\mathbb{P}$ -presque sûrement  $\bar{X}_k \rightarrow \bar{X}(t)$  uniformément en  $t \in [0, T]$  et  $\bar{\lambda}_k \rightarrow \bar{\lambda}$  dans  $\Lambda$ .

faible . Soit

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{F}}_{kt} \equiv (\sigma\{\overline{W}_k(s), \overline{x}_k(s) : s \leq t\} \vee \overline{\lambda}_k^{-1}(B_t(\wedge))) \\ \overline{\mathcal{F}}_t \equiv (\sigma\{\overline{W}(s), \overline{x}(s) : s \leq t\} \vee \overline{\lambda}^{-1}(B_t(\wedge))) \end{cases} \quad (2.30)$$

Avec

$$B_t(\wedge) = \sigma\left(\left\{\lambda \in \wedge \mid \lambda(h_j^s) \in (a, b)\right\} : t \geq s \in \mathbb{Q}, j = 1, \dots, a, b \in \mathbb{Q}\right) \quad (2.31)$$

et le lemme 1.2.1  $\overline{\mathcal{F}}_{kt}$  est la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\overline{W}_k(t_1), \dots, \overline{W}_k(t_l), \overline{x}_k(t_1), \dots, \overline{x}_k(t_l), \overline{\lambda}_k(f_j^{t_1}), \dots, \overline{\lambda}_k(f_j^{t_l})$ ,  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots, \leq t_l \leq t$  et  $j, l = 1, 2, \dots$ ,

. Une assertion similaire peut être faite pour  $\overline{\mathcal{F}}_t$ . À présent nous devons montrer que  $\overline{W}_k$  est un  $\{\overline{\mathcal{F}}_{kt}\}_{t \geq 0}$ -mouvement brownien. Pour parvenir cette fin, notons que  $W_k$  est un  $\sigma\{W_k(s), x_k(s), s \leq t\} \vee \lambda_{u_k}^{-1}(B_t(\wedge))$ -mouvement brownien en vue de la proposition 1.2.2. Ainsi par la proposition 1.2.3. pour tout  $0 \leq t \leq T$  et toute fonction continue et bornée  $g$  sur  $\mathbb{R}^{(m+n+\beta)l}$ , On a :

$$\mathbb{E}\{g(Y_k)(W_k(t) - W_k(s))\} = 0$$

où

$$Y_k \equiv \{W_k(t_i), x_k(t_i), \lambda_k(h_{j_\alpha}^{t_i})\}, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_l \leq s, \alpha = 1, 2, \dots, \beta$$

En vue du fait que la loi de  $\{(\overline{X}_k, \overline{\lambda}_k)\}$  est égale à celle de  $\{(X_k, \lambda_{u_k})\}$  on déduit que

$$\mathbb{E}\{g(\overline{Y}_k)(\overline{W}_k(t) - \overline{W}_k(s))\} = 0$$

où

$$\overline{Y}_k \equiv \{\overline{W}_k(t_i), \overline{x}_k(t_i), \overline{\lambda}_k(h_{j_\alpha}^{t_i})\}, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_l \leq s, \alpha = 1, 2, \dots, \beta.$$

Par la proposition 1.2.3. à nouveau, nous déduisons donc que  $\overline{W}_k$  est un  $\{\overline{\mathcal{F}}_{kt}\}_{t \geq 0}$ -mouvement brownien.

Puisque la loi de  $\{(\overline{X}_k, \overline{\lambda}_k)\}$  est égale à celle de  $\{(X_k, \lambda_{u_k})\}$ , nous avons l'EDS suivante sur  $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \{\overline{\mathcal{F}}_{kt}\}_{t \geq 0}, \overline{\mathbb{P}})$  :

$$\overline{x}_k(t) = x_0 + \overline{B}_k(t) + \overline{\sum}_k(t) \quad (2.32)$$

$$= x_0 + \int_0^t \int_U b(s, \overline{x}_k(s), u) \overline{\lambda}_k^{-1}(s, du) ds + \int_0^t \int_U \sigma(s, \overline{x}_k(s), u) \overline{\lambda}_k^{-1}(s, du) d\overline{W}_k(s) \quad (2.33)$$

$$= \int_0^t \tilde{b}(s, \overline{x}_k(s), \overline{\lambda}_k) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(s, \overline{x}_k(s), \overline{\lambda}_k)(s, du) d\overline{W}_k(s) \quad (2.34)$$

Remarquons que toutes les intégrales ci-dessus sont bien définies à cause du fait que  $\overline{W}_k$  est un  $\{\overline{\mathcal{F}}_{kt}\}_{t \geq 0}$ -mouvement brownien.

De plus

$$\overline{\mathbb{E}}(\overline{F}_k(T)) = \overline{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \int_U h(s, \overline{x}_k(s), u) \overline{\lambda}_k'(s, du) ds + g(\overline{x}_k(T))\right] \quad (2.35)$$

$$= \overline{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \int_U \tilde{h}(s, \overline{x}_k(s), u) \overline{\lambda}_k ds + g(\overline{x}_k(T))\right] \quad (2.36)$$

$$= J(\pi_k) \longrightarrow \inf_{\pi \in \mathcal{A}_{ad}^w} J(\pi), k \longrightarrow +\infty \quad (2.37)$$

Où  $\bar{\mathbb{E}}$  est l'espérance sous  $\bar{\mathbb{P}}$ . Faisons tendre  $k \rightarrow +\infty$  dans (2.32) et (2.35), et en vertu de ce que  $\bar{X}_k \rightarrow \bar{X}(t)$  uniformément en  $t \in [0, T]$ , on obtient :

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = x_0 + \bar{B}(t) + \bar{\Sigma}(t) \forall t \in [0; T] & \bar{\mathbb{P}} - p.s. \\ \bar{\mathbb{E}}(\bar{F}(T)) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}_{ad}^w} J(\pi). \end{cases} \quad (2.38)$$

Ensuite considérons

$$a_k(s) \equiv \tilde{\sigma} \tilde{\sigma}^T(s, \bar{x}_k(s), \bar{\lambda}_k), s \in [0; T]$$

Par HF2,  $\sup \int_0^T |a_k(s)|^2 ds < +\infty$ , et aussi  $\{a_k\}$  est relativement compact dans  $L^2([0; T] \times \bar{\Omega}, S^n)$  tel que

$$a_k \rightarrow a \text{ dans } L^2([0; T] \times \bar{\Omega}, S^n)\text{-faible}$$

Désignons par  $a^{ij}$  le  $ij$ -ème élément de la matrice  $a$ , nous affirmons que pour presque tout  $(s, w)$ ,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k^{ij}(s, w) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k^{ij}(s, w) \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.39)$$

En effet si (2.39) n'est pas vérifiée sur un ensemble  $A \subset [0; T] \times \bar{\Omega}$  de mesure positives,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} a_k^{ij}(s, w) > a^{ij}(s, w)$$

Alors par le lemme de Fatou on a :

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_A a_k^{ij}(s, w) ds d\bar{\mathbb{P}}(w) > \int_A a^{ij}(s, w) ds d\bar{\mathbb{P}}(w)$$

Ce qui est en contradiction avec le fait que  $a_k \rightarrow a$  dans  $L^2([0; T] \times \bar{\Omega}, S^n)$ -faible.

On peut également faire de même avec  $\limsup$ , ce qui prouve (2.39). De plus grâce à (HF2) et du fait que  $\bar{X}_k \rightarrow \bar{X}(t)$  uniformément en  $t \in [0, T]$ , pour presque tout  $(s, w)$

$$\begin{cases} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_A a_k^{ij}(s, w) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\sigma} \tilde{\sigma}^T(s, \bar{x}_k(s), \bar{\lambda}_k) \\ \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_A a_k^{ij}(s, w) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\sigma} \tilde{\sigma}^T(s, \bar{x}_k(s), \bar{\lambda}_k) \end{cases} \quad (2.40)$$

En associant (2.39), (2.40) et (HF3), on obtient

$$a^{ij}(s, w) \in (\sigma \sigma^T)(s, \bar{x}(s, w), U) i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.41)$$

On peut modifier  $a^{ij}$  sur un ensemble négligeable si nécessaire tel que (2.41) soit vérifiée pour tout  $(s, w) \in [0; T] \times \bar{\Omega}$ . De manière similaire, définissons

$$\begin{cases} b_k^i(s) = \tilde{b}^i(s, \bar{x}_k(s), \bar{\lambda}_k), i = 1, 2, \dots, n \\ h_k(s) = \tilde{h}(s, \bar{x}_k(s), \bar{\lambda}_k), \end{cases} \quad (2.42)$$

on peut montrer qu'il existe  $b^i, h \in L^2([0; T] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R})$  telles que :

$$b_k^i \longrightarrow b^i, i = 1, 2, \dots, n, h_k \longrightarrow h \text{ dans } L^2([0; T] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R})\text{-faible}$$

et

$$b^i(s, w) \in b^i(s, \bar{x}(s, w)), h(s, w) \in h(s, w) \in h(s, \bar{x}(s, w), U) \quad (2.43)$$

$$\forall (s, w) \in [0; T] \times \bar{\Omega}, i = 1, 2, \dots, n..$$

Par (2.41), (2.43) et (HF3) et un théorème de sélection mesurable ( voir Li-yong [1.p 102, corolaire 2.26])

il existe un processus  $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté  $\bar{u}(\cdot)$  tel que

$$(b, \sigma \sigma^T, h)(s, w) = (b, \sigma \sigma^T, h)(s, \bar{x}(s, w), \bar{u}(s, w)) \quad \forall (s, w) \in [0; T] \times \bar{\Omega} \quad (2.44)$$

Ensuite nous affirmons que  $\bar{\Sigma}(t)$  est une  $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}$ -martingale. Pour voir cela une fois de plus prenons  $0 \leq s \leq t \leq T$  et définissons

$$\bar{Y}_k \equiv \{\bar{W}_k(t_i), \bar{x}_k(t_i), \bar{\lambda}_k(h_{j_\alpha}^{t_i})\}, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_l \leq s, \alpha = 1, 2, \dots, \beta.$$

Puisque  $\bar{\Sigma}(t)$  est une  $\bar{\mathcal{F}}_{kt}$ -martingale, pour toute fonction continue et bornée  $g$  sur  $\mathbb{R}^{(m+n+\beta)l}$ , on a :

$$0 = \mathbb{E}[g(\bar{Y}_k)(\bar{\Sigma}_k(t) - \bar{\Sigma}_k(s))] \longrightarrow \mathbb{E}[g(\bar{Y})(\bar{\Sigma}(t) - \bar{\Sigma}(s))] \quad (2.45)$$

grâce au fait que  $\bar{X}_k \longrightarrow \bar{X}(t)$  uniformément en  $t \in [0, T]$ ,  $\bar{\lambda}_k \longrightarrow \bar{\lambda}$  dans  $\wedge$ -faible et le théorème de convergence dominée. Ce qui montre que  $\bar{\Sigma}(t)$  est une  $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}$ -martingale en vue de la proposition 1.2.3.

En outre, de (2.32), il suit que :

$$\langle \bar{\Sigma}_k \rangle (t) = \int_0^t \tilde{\sigma} \tilde{\sigma}^T(s, \bar{x}_k(s), \bar{\lambda}_k) \equiv \int_0^t a_k(s) ds$$

Où  $\langle \bar{\Sigma}_k \rangle$  désigne la variation quadratique de  $\bar{\Sigma}_k$  ( abordée à la définition 1.2.1 du chapitre 1).

D'où  $\bar{\Sigma}_k \bar{\Sigma}_k^T(t) - \int_0^t a_k(s) ds$  est une  $\{\bar{\mathcal{F}}_{kt}\}_{t \geq 0}$ -martingale. Rappelant que  $a_k(s) \longrightarrow a(s) \equiv \sigma \sigma^T(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s))$  dans  $L^2([0; T] \times \bar{\Omega})$ -faible, on a donc pour tout  $s, t \in [0; T]$ ,

$$\int_s^t a_k(r) dr \longrightarrow \int_s^t \sigma \sigma^T(r, \bar{x}(r), \bar{u}(r)) dr$$

dans  $L^2(\Omega)$ -faible.

D'autre part, par le théorème de convergence dominée,

$$g(\bar{Y}_k) \longrightarrow g(\bar{Y}) \quad \text{dans } L^2(\Omega)\text{-fort.}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E} \left[ g(\bar{Y}_k) \int_s^t a_k(r) dr \right] \longrightarrow \mathbb{E} \left[ g(\bar{Y}) \int_s^t \sigma \sigma^T(r, \bar{x}(r), \bar{u}(r)) dr \right].$$

C'est pourquoi, faisant usage d'un argument similaire à ce qui précède, nous obtenons que

$$\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T(t) - \int_0^t \sigma \sigma^T(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) ds$$

est une  $\{\overline{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}$ -martingale. Ce qui implique

$$\langle \overline{\Sigma} \rangle (t) = \int_0^t \sigma \sigma^T(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) ds. \quad (2.46)$$

Par le théorème de représentation martingale (théorème 1.3.5 du chapitre 1), il existe une extension  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \{\widehat{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}, \widehat{\mathbb{P}})$  de  $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \{\overline{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}, \overline{\mathbb{P}})$  sur lequel est défini un mouvement brownien  $\widehat{W}(t)$  tel que :

$$\langle \overline{\Sigma} \rangle (t) = \int_0^t \sigma \sigma^T(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) d\widehat{W}s. \quad (2.47)$$

De même on obtient de manière analogue

$$\overline{B}(t) = \int_0^t b(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) ds \quad (2.48)$$

$$\overline{F}(t) = \int_0^t h(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) ds \quad (2.49)$$

En injectant cela dans (2.38) et en notant la définition 1.2.1 vue au chapitre 1, nous arriverons à la conclusion que

$$\overline{\pi} \equiv (\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \{\widehat{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}, \widehat{\mathbb{P}}, \widehat{W}, \overline{u}) \in \mathcal{A}_{ad}^w$$

est un contrôle optimal. □

# PRINCIPE DU MAXIMUM STOCHASTIQUE ET SYSTÈMES HAMILTONIENS

---



---

Dans ce chapitre, Nous abordons une des approches principales dans la résolution des problèmes d'optimisation : le principe du maximum de Pontryagin. Il consiste à tirer un ensemble de conditions nécessaires qui doivent être satisfaites par toute solution optimale du problème. Ces conditions nécessaires deviennent suffisantes sous certaines conditions de convexité sur les fonctions objectives. Ce principe formulé par Pontryagin et ses collaborateurs en 1950 constitue véritablement une étape importante de la théorie du contrôle optimal. Il stipule que tout contrôle optimal, ainsi que la trajectoire d'état optimale doivent être solution de ce que nous appellerons systèmes hamiltoniens qui est un problème de valeur limite à deux points ou une équation différentielle rétrograde appelée équation adjointe dans le cas stochastique, avec en plus une condition maximale d'une fonction appelée Hamiltonien qui est plus simple à résoudre que le problème originel qui était optimal et en dimension infinie. Le principe du maximum est énoncé à l'origine pour des problèmes déterministes. C'est la raison pour laquelle nous rappelons ce principe dans le cas déterministe.

## 3.1 Cas déterministe

Les résultats et théorèmes non démontrés dans cette partie sont issus de [14] (Pages 112-113) et (Pages 104-112 )

Nous énonçons d'entrée de jeu la formulation déterministe du problème de contrôle optimal. Et nous énonçons également quelques assertions qui nous seront utiles. On considère le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x_t, u_t) & p.p.t \in [0; T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

et la fonction de coût est donnée par :

$$J(u) = \int_0^T h(t, x(t), u(t))dt + g(x(T)) \quad (3.2)$$

Nous fixons les hypothèses suivantes :

(H<sub>1</sub>) : (U, d) est un espace métrique séparable et complet (polonais) et T > 0.

(H<sub>2</sub>) Les applications h, g et b sont mesurables et il existe une constante L > 0 et un module de continuité

$$w : [0; +\infty[ \longrightarrow [0; +\infty[$$

tels que : pour  $\varphi(t, x, \mu, u) = h(t, x, \mu, u), b(t, x, \mu, u), g(x, \mu)$

$$\begin{cases} |\varphi(t, x, u) - \varphi(t, y, v)| \leq L|x - y| + w(d(u, v)) \\ \forall t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^n, u, v \in U \\ |\varphi(t, 0, \mu, u)| \leq L \end{cases} \quad (3.3)$$

(H<sub>3</sub>) Les applications h, g et b sont C<sup>1</sup> en x et il existe un module de continuité w : [0; +∞[ → [0; +∞[ tels que pour  $\varphi(t, x, u) = h(t, x, \mu, u), b(t, x, u), g(x)$  on a :

$$|\varphi_x(t, x, u) - \varphi_x(t, y, v)| \leq w(|x - y| + d(u, v))$$

$$\forall t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^n, u, v \in U$$

Soit

$$\mathcal{A}' = \left\{ u(\cdot) : [0; T] \longrightarrow U \mid u(\cdot) \text{ mesurable} \right\}$$

On voit clairement que sous les conditions (H<sub>1</sub>) – (H<sub>2</sub>) pour tout u ∈ A' l'équation (3.1) admet une unique solution x(·) = x(·, u(·)) et (3.2) est bien définie. Notre problème de contrôle optimal déterministe peut-être énoncé comme suit :

Probleme (D) : Minimiser (3.2) sur A'

Tout u\* ∈ A' vérifiant :

$$j(u^*(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{A}'} j(u(\cdot))$$

est appelé contrôle optimal. La trajectoire correspondante x\*(·, u\*(·)) et (x\*, u\*) sont appelées respectivement trajectoire optimale et paire optimale. Précisons ici que nous considérons qu'il n'ya pas de contrainte d'état pour lequel, la faisabilité et l'admissibilité du contrôle coïncident.

Le théorème suivant nous permet d'énoncer le principe du maximum de Pontryagin , qui donne un ensemble de conditions du premier ordre nécessaires pour la paire optimale.

### Principe du maximum déterministe

On a l'énoncé du théorème suivant :

#### **Théorème 3.1.1. (Principe du maximum déterministe)**

Supposons (H<sub>1</sub>) – (H<sub>3</sub>) vérifiées .

Soit (x\*, u\*) une paire optimale solution du problème (D) . Alors il existe p(·) : [0; T] → ℝ<sup>n</sup> vérifiant

les égalités ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -b_x(t, x^*(t), u^*(t))^T p(t) + h_x(t, x^*(t), u^*(t)) & p.p.t \in [0; T] \\ p(T) = -h_x(u^*(T)) \end{cases} \quad (3.4)$$

et

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^*(t), u(t), p(t)) \quad p.p.t \in [0, T] \quad (3.5)$$

où

$$H(t, x, u, p) = \langle p, b(t, x, u) \rangle - h(t, x, u) \quad (t, x, u, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \quad (3.6)$$

On appelle  $p(\cdot)$  la variable adjointe ou la fonction et (3.4) l'équation adjointe respectivement. Et (3.5) est appelée condition maximale. La fonction  $H$  définie par (3.6) est appelée l'Hamiltonien. L'équation correspondante à l'équation adjointe (3.4) avec la condition maximale peut être notée comme il suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = H_p(t, x(t), u(t), p(t)), & p.p.t \in [0, T] \\ \dot{p}(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t)), & p.p.t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \quad p(T) = g_x(x(T)), \\ H(t, x(t), u(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), u, p(t)) & ppt \in [0, T] \end{cases} \quad (3.7)$$

Le système ci-dessus est appelé une extension du système Hamiltonien, et ce dernier caractérise véritablement l'optimalité du problème. Une fois que certaines conditions de convexité sont vérifiées, le système hamiltonien ci-dessus caractérise un contrôle optimal.

**Théorème 3.1.2. (Condition suffisante d'optimalité)**

Supposons  $(H_1) - (H_3)$  vérifiées. Soient  $(x^*(t), u^*(t))$  une paire optimale et  $p(\cdot)$  la variable adjointe correspondante. Supposons que  $g$  est convexe et  $H(t, \cdot, \cdot, p(t))$  est concave. Alors  $(x^*(t), u^*(t))$  est optimale si :

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^*(t), u(t), p(t)) \quad (3.8)$$

Dans la suite de notre travail, nous abordons concrètement la version stochastique du principe du maximum de Pontryagin.

## 3.2 Principe du maximum Stochastique

Rappelons premièrement la formulation forte du problème de contrôle optimal stochastique tel énoncé au chapitre 2. Étant donné un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  et un brownien standard  $W$  de dimension  $m$  sur ce même espace,  $X$  une solution de l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.9)$$

Également la fonction de coût à minimiser définie par :

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t, X_t, u_t) dt + g(X_T) \right]$$

Dans ces définitions ci-dessus,

$$b : [0; T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad h : [0; T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \sigma : [0; T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On définit

$$\begin{cases} b(t, X, u) = (b^1(t, X, u), \dots, b^n(t, X, u))^T \\ \sigma(t, X, u) = (\sigma^1(t, X, u), \dots, \sigma^m(t, X, u)) \\ \sigma^j(t, X, u) = (\sigma^{1j}, \dots, \sigma^{nj})^T \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Affirmons les hypothèses suivantes comparativement à la formulation déterministe :

- $(H'_0)$  :  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est la filtration naturelle engendrée par  $(W_t)_t$  augmentée de tous les ensembles  $\mathbb{P}$ -négligeables dans  $\mathcal{F}$ .
- $(H'_1)$   $(U, d)$  est un espace métrique séparable et  $T > 0$
- $(H'_2)$  : Les applications  $b, h,$  et  $g$  sont mesurables, il existe une constante  $L > 0$  et un module de continuité  $\bar{w} : [0; +\infty[ \longrightarrow [0; +\infty[$  tels que pour  $\varphi(t, X, u) = h(t, X, u), b(t, X, u), g(X)$

$$\begin{cases} |\varphi(t, X, u) - \varphi(t, Y, v)| \leq L|X - Y| + \bar{w}(d(u, v)) \\ \forall t \in [0, T], X, Y \in \mathbb{R}^n, u, v \in U \\ |\varphi(t, 0, u)| \leq L \quad \forall (t, u) \in [0; T] \times U \end{cases} \quad (3.10)$$

- $(H'_3)$  : Les applications  $b, h$  sont de classe  $C^2$  en  $x$ . De plus, il existe une constante  $L > 0$  et un module de continuité  $\bar{w} : [0; +\infty[ \longrightarrow [0; +\infty[$  tels que :

$$\begin{cases} |\varphi(t, X, u) - \varphi(t, Y, v)| \leq L|X - Y| + \bar{w}(d(u, v)) \\ |\varphi_{xx}(t, X, u) - \varphi_{xx}(t, Y, v)| \leq \bar{w}(|X - Y| + d(u, v)) \\ \forall t \in [0, T], X, Y \in \mathbb{R}^n, u, v \in U \end{cases} \quad (3.11)$$

### 3.2.1 Équations adjointes

Les résultats et théorèmes non démontrés de cette parties sont issues de [14]

Dans le cas déterministe, nous avons l'existence d'une application  $p$  qui vérifiait une équation différentielle ordinaire. Dans le cas stochastique, nous aborderons les notions d'équations adjointes et d'équation différentielle stochastique rétrograde. Définissons au préalable l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S}^n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times m} | A^T = A\}.$$

Introduisons le problème à valeurs terminale suivant :

$$\begin{cases} dY_t = -\{b_X(t, X_t^*, u_t^*)^T Y_t + \sum_{j=1}^m \sigma_X^j(t, X_t^*, u_t^*)^T Z_t^j - h_X(t, X_t^*, u_t^*)\} dt + Z_t dW_t \\ Y_T = -g_X(X_T^*) \end{cases} \quad (3.12)$$

Toute solution  $(Y, Z)$  de l'équation ci-dessus est appelée processus adjoint et l'équation différentielle stochastique rétrograde est appelée équation adjointe.

La variable adjointe  $p$  dans le cas déterministe correspond au prix fictif ou à la valeur marginale de la ressource représentée par la variable d'état en économie. Le principe du maximum est un principe de dualité car minimiser le coût total de revient à maximiser la contribution totale de la valeur marginale. Dans le cadre stochastique, le décideur doit soigneusement équilibrer l'échelle de contrôle et le degré d'incertitude si le contrôle effectué doit affecter la volatilité. (c'est-à-dire si la diffusion dépend de la variable de contrôle). Par conséquent, la valeur marginale seule peut ne pas être à mesure de caractériser pleinement le coût et le gain de contrôle dans un environnement incertain.

Nous introduisons donc une nouvelle variable caractérisant donc l'incertitude ou le facteur risque dans le système et cela s'obtient à l'aide de l'équation adjointe supplémentaire suivante :

$$\begin{cases} dY_t^* = -\{b_X(t, X_t^*, u_t^*)^T Y_t^* + Y_t^* b_X(t, X_t^*, u_t^*) + \sum_{j=1}^m \sigma_X^j(t, X_t^*, u_t^*)^T Y_t^* \sigma_X^j(t, X_t^*, u_t^*) + \\ \sum_{j=1}^m \sigma_X^j(t, X_t^*, u_t^*)^T (Z_t^*)^j \sigma_X^j(t, X_t^*, u_t^*) + H_{XX}(t, X_t^*, u_t^*, Y_t, Z_t)\} dt + (Z_t^*)^j dW_t^j \\ Y_T^* = -g_{XX}(X_T^*) \end{cases} \quad (3.13)$$

Où l'hamiltonien  $H$  est défini par :

$$H(t, X, u, Y, Z) = \langle Y, b(t, X, u) \rangle + \text{tr}[Z^T \sigma(t, X, u)] - h(t, X, u)$$

où  $(t, X, u, Y, Z) \in [0; T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $(Y, Z)$  solution de (3.12). Dans le système précédent,  $(Y^*, Z^*) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathcal{S}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathcal{S}^n))^m$ .

Nous définissons également la fonction  $\mathcal{H}$  suivante associée au 6-uplet optimal  $(X^*, u^*, Y, Z, Y^*, Z^*)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, X, u) &= H(t, X, u, Y, Z) - \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma(t, X_t^*, u_t^*)^T Y_t^* \sigma(t, X_t^*, u_t^*)] + \\ &\frac{1}{2} \text{tr}(\{\sigma(t, X_t^*, u_t^*) - \sigma(t, X_t^*, u)\}^T Y_t^* \cdot \{\sigma(t, X_t^*, u_t^*) - \sigma(t, X_t^*, u)\}) \end{aligned}$$

**Théorème 3.2.1. (Énoncé du principe du maximum stochastique)**

Supposons les hypothèses  $(H'_0 - H'_3)$  vérifiées. Soit  $(X^*, u^*)$  une paire optimale du problème, alors il existe des paires de processus

$$\begin{cases} (Y, Z) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}^n))^m \\ (Y^*, Z^*) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathcal{S}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathcal{S}^n))^m. \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} Y = (Y^1, \dots, Y^m), & Z = (Z^1, \dots, Z^m) \\ Y^j \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathcal{R}^n), & Z^{*j} \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathcal{S}^n) \quad 0 \leq j \leq n \end{cases}$$

vérifiant respectivement les équations du premier ordre et de second ordre (3.12) et (3.13) et tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(t, X_t^*, u_t^*, Y_t, Z_t) - \mathcal{H}(t, X_t^*, u, Y_t, Z_t) - \frac{1}{2} \text{tr}(\{\sigma(t, X_t^*, u_t^*) - \sigma(t, X_t^*, u)\}^T Y_t \cdot \{\sigma(t, X_t^*, u_t^*) - \sigma(t, X_t^*, u)\}) \\ \forall \in U \text{ p.p.s} \end{cases} \quad (3.14)$$

ou de manière équivalente

$$\mathcal{H}(t, X_t^*, u_t^*) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, X_t^*, u) \quad \text{p.p. } t \in [0; T] \text{ p.s.} \quad (3.15)$$

À ce niveau de notre analyse, deux cas sont possibles

### Premier cas : La diffusion ne contient pas la variable de contrôle

C'est à dire

$$\sigma(t, X, u) = \sigma(t, X) \quad \forall (t, X, u) \in [0; T] \times \mathbb{R}^n \times U$$

et dans ce cas , la condition (3.15) se réduit à :

$$H(t, X_t^*, u_t^*, Y_t, Z_t) = \max_{u \in U} H(t, X_t^*, u, Y_t, Z_t) \quad \text{p.p. } t \in [0; T] \text{ p.s.}$$

**Remarque 3.2.1.** Dans ce cas on n'a pas besoin de l'équation (3.13) ou encore moins de trouver  $(Y^*, Z^*)$ . Également la seconde différentiabilité de  $b, \sigma, h$  et  $g$  en  $X$  n'est pas nécessaire

### Deuxième cas : Le domaine du contrôle $U \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe et tous les coefficients sont $\mathcal{C}^1$ en $u$

. Dans ce cas , l'équation (3.14) implique

$$\langle \mathcal{H}(t, X_t^*, u_t^*, Y_t, Z_t), u - u_t^* \rangle \leq 0 \quad \forall u \in U, \text{ p.p. } t \in [0; T] \quad \mathbb{P} - \text{p.s.} \quad (3.16)$$

De manière analogue au cas déterministe, le système (3.9) avec le système adjoint de premier ordre peut s'écrire :

$$\begin{cases} dX_t = H_Y(t, X_t, u_t, Y_t, Z_t)dt + H_Z(t, X_t, u_t, Y_t, Z_t)dW_t \\ dY_t = -H_X(t, X_t, u_t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t, \quad t \in [0; T] \\ X(0) = X_0, \quad Y_T = -g_X(X_T) \end{cases} \quad (3.17)$$

La combinaison de (3.17), (3.13) et (3.14) ou (3.15) est appelée un système hamiltonien avec pour solution le 6-uplet  $(X, u, Y, Z, Y^*, Z^*)$ . C'est pourquoi nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.2.2.** Supposons  $(H'_0 - H'_3)$  sont vérifiées. Supposons que le problème admette une paire optimale  $(X^*, u^*)$ . Alors le 6-uplet optimal  $(X^*, u^*, Y, Z, Y^*, Z^*)$  du problème est solution du système hamiltonien issu de (3.17), (3.13) et (3.14) ou (3.15)

Dans le cas particulier où le coefficient de diffusion dépend de la variable de contrôle, nous énonçons et démontrons une autre version du théorème du principe du maximum comme il suit :

**Théorème 3.2.3. (Condition suffisante d'optimalité)**

Soient  $u^* \in \mathcal{A}$  et  $X^*$  la diffusion contrôlée associée. Supposons que les conditions  $(H'_0) - (H'_3)$  sont vérifiées, qu'il existe une solution  $(Y^*, Z^*)$  à l'EDSR correspondante telle que :

$$\mathcal{H}(t, u_t^* X_t^*, Y_t^*, Z_t^*) = \max_{u \in \mathcal{A}} \mathcal{H}(t, X_t^*, u, Y_t^*, Z_t^*) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.18)$$

et que

$$(x, u) \mapsto H(t, x, u, Y_t^*, Z_t^*) \quad (3.19)$$

est concave pour tout  $t \in [0; T]$  et  $g$  est convexe, alors  $u^*$  est un contrôle optimale c'est-à-dire :

$$J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{A}} j(u)$$

*Démonstration.* Pour tout  $u \in \mathcal{A}$ , on a :

$$J(u^*) - J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T (h(t, X_t^*, u_t^*) - h(t, X_t, u_t)) dt + g(X_T^*) - g(X_T) \right] \quad (3.20)$$

D'après la convexité de  $g$  (au dessus de ses tangentes en chaque point), et grâce au produit d'Itô on a :

$$\begin{aligned} g(X_T^*) - g(X_T) &\leq (X_T^* - X_T) D_x g(X_T^*) \\ \mathbb{E} \left[ \int_0^T g(X_T^*) - g(X_T) \right] &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T (X_T^* - X_T) D_x g(X_T^*) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T (X_T^* - X_T) Y_T^* \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T (X_t^* - X_t) dY_t^* + \int_0^T Y_t^* (dX_t^* - dX_t) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \text{tr} [(\sigma(t, X_t^*, u_t^*)) - \sigma(t, X_t, u_t)]' Z_t^* dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T (X_t^* - X_t) (-D_x \mathcal{H}(t, X_t^*, Y_t^*, Z_t^*)) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T Y_t^* (b(t, X_t^*, u_t^*) - b(t, X_t, u_t)) \right] \end{aligned}$$

D'autre part d'après la définition de  $\mathcal{H}$  ; On a :

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T (h(t, X_t^*, u_t^*) - h(t, X_t, u_t)) dt \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\mathcal{H}(t, X_t^*, Y_t^*, Z_t^*) - \mathcal{H}(t, X_t, Y_t, Z_t)) dt - \int_0^T Y_t^* (b(t, X_t^*, u_t^*) - b(t, X_t, u_t)) - tr [(\sigma(t, X_t^*, u_t^*) - \sigma(t, X_t, u_t))' Z_t^*] dt \right]$$

En introduisant, les deux relations finales ci-dessus dans (3.20) on a :

$$J(u^*) - J(u) \leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\mathcal{H}(t, X_t^*, Y_t^*, Z_t^*) - \mathcal{H}(t, X_t, Y_t, Z_t)) dt - \int_0^T (X_t^* - X_t) (-D_x \mathcal{H}(t, X_t^*, Y_t^*, Z_t^*)) dt \right] \leq 0$$

Ceci par la convexité de  $\mathcal{H}$ , et la positivité de l'espérance. Ce qui achève la preuve.

où  $D_x$  est l'opérateur qui à toute fonction  $\phi$  associe  $D_x \phi = \phi_x$  étant la dérivée partielle de  $\phi$  par rapport à  $x$  c'est à dire le représentant du processus.  $\square$

### 3.2.2 Implémentation du principe du maximum pour l'exemple énoncé au chapitre 2 à la partie 2.1.3 : Investissement et consommation

Nous résolvons le cas particulier où  $m=1$ ,  $\sigma$  et  $b$ ,  $a$  et  $r$  sont des constantes strictement positives, Posons

$$\theta = \frac{1}{\sigma}(b - r)$$

$\theta$  est le coefficient de risque relatif . Nous supposons qu'il n'y a pas d'interdiction de vente à découvert , c'est à dire  $u \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R})$  Plus précisément, on a  $U \subset \mathbb{R}$ . De plus, l'EDS contrôlée vérifiée par le processus  $X$  soit la suivante :

$$\begin{cases} dX_t = [rX_t + (b - r)u_t] dt + \sigma u_t dW_t & t \in [0; T] \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

et la fonction de coût à minimiser définie par :

$$Var[X_T] = \mathbb{E}[(X_T - \mathbb{E}(X_T))^2] \quad (3.22)$$

sous la contrainte  $\mathbb{E}(X_T) = d$ ,  $d$  étant une constante .

#### **Définition 3.2.1. Stratégie de la moyenne Variance**

La stratégie moyenne-variance est la stratégie d'investissement qui satisfait  $\mathbb{E}(X_T) = d$ , pour  $d$  donné, tout en s'assurant de minimiser le risque, représenté par la variance de  $X_T$

Le problème d'optimisation correspondant se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min Var[X_T] = \min \mathbb{E}[(X_T - \mathbb{E}(X_T))^2] \\ \mathbb{E}(X_T) = d \\ u \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T, \mathbb{R}_+) \\ (X, u) \text{ satisfaisant} \end{cases} \quad (3.23)$$

Ayant posé la contrainte  $\mathbb{E}(X_T) = d$ , le problème de minimisation se ramène à minimiser  $\mathbb{E}(X_T^2)$ . Puisque nous avons une contrainte dépendant de T, nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange en introduisant le réel  $\lambda_T$  et ainsi cela revient à minimiser

$$\mathbb{E}[X_T^2 + \lambda_T[X_T - d]]$$

ou encore

$$\mathbb{E}[(X_T + \frac{\lambda_T}{2})^2].$$

Nous savons d'après le chapitre 2 qu'en prenant  $U \subset \mathbb{R}$  convexe et compact et puisque  $h \equiv 0$  et  $g$  définie par  $g(x) = (x + \frac{\lambda_T}{2})^2$  est convexe, il existe un contrôle optimal pour un tel problème. Soit donc  $(X^*, u^*)$  une paire optimale solution du problème alors on a respectivement les équations adjointes du premier et second ordre suivantes :

$$\begin{cases} dY_t = -rY_t + Z_t dW_t \\ Y_T = -2(X_T^* + \frac{\lambda_T}{2}) \end{cases} \quad (3.24)$$

et

$$\begin{cases} dY_t^* = -2rY_t^* + Z_t^* dW_t \\ Y_T^* = -2 \end{cases} \quad (3.25)$$

En résolvant l'EDSR (3.25) on a immédiatement la solution  $(Y_T^*, Z_t^*) = (-2e^{2r(T-t)}, 0)$

Posons

$$Y_t = \eta_t X_t^* + \mu_t \lambda_T, \quad \text{avec } \eta_t = -2 \text{ et } \mu_T = 1 \quad (3.26)$$

où  $\eta_t$  et  $\mu_t$  sont des fonctions déterministes. Ainsi

$$dY_t = [\dot{\eta}_t X_t^* + [rX_t^* + (b-r)u_t^*]\eta_t + \dot{\mu}_t \lambda_T]dt + \sigma \eta_t u_t^* dW_t \quad (3.27)$$

De plus l'Hamiltonien correspondant au problème est défini par :

$$\mathcal{H}(t, X^*, u) = \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t^* u^2 + [Y_t(b-r) + \sigma Z_t - \sigma^2 Y_t^* u^*]u + rX^* Y_t \quad (3.28)$$

qui est bien deux fois dérivable en  $u$  et puisqu'une condition nécessaire pour que  $u$  soit optimal est que la dérivée s'annule en  $u$ , on obtient :

$$Y_t(b-r) + \sigma Z_t = 0$$

$$\begin{aligned} Z_t &= -\frac{(b-r)}{\sigma}Y_t \\ &= -\theta Y_t \end{aligned}$$

En identifiant les expressions de  $dY_t$  dans (3.24) et (3.27)

$$\begin{cases} \dot{\eta}_t X_t^* + [rX_t^* + (b-r)u_t^*]\eta_t + \dot{\mu}_t \lambda_T = -rY_t \\ \sigma \eta_t u_t^* = Z_t \end{cases} \quad (3.29)$$

De la deuxième équation de (3.29) on obtient

$$\begin{aligned} u_t^* &= \frac{Z_t}{\sigma \eta_t} \\ &= \frac{-\theta}{\sigma} \left( X_t^* + \frac{\mu_t}{\eta_t} \lambda_T \right) \end{aligned}$$

En remplaçant dans la première expression de (3.29), on a :

$$[\dot{\eta}_t - \theta^2 \eta_t + r\eta_t]X_t^* + [\dot{\mu}_t - \theta^2 \mu_t] \lambda_T = -r\eta_t X_t^* - r\mu_t \lambda_T$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_t - \theta^2 \eta_t + 2r\eta_t = 0 \\ \eta_T = -2 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} \dot{\mu}_t - \theta^2 \mu_t + r\mu_t = 0 \\ \mu_T = 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

dont les solutions sont :

$$\eta_t = -2e^{(2r-\theta^2)(T-t)} \quad \mu_t = e^{(r-\theta^2)(T-t)}$$

Le choix pour le contrôle optimal est donc

$$u_t^* = -\frac{1}{\sigma \eta_t} Z_t = -\frac{\theta}{\sigma} X_t^* - \frac{\lambda_T}{2} e^{-r(T-t)}$$

Nous concluons que la paire  $(X^*, u^*)$  est optimale en raison de la condition suffisante d'optimalité du principe du maximum ou encore Énoncé 2 du principe du maximum stochastique. En effet  $u^*$  maximise la fonction  $\mathcal{H}$  définie en (3.28) qui est manifestement concave de même que celle qui à  $(x, u) \mapsto \mathcal{H}(t, x, u, Y_t^*, Z_t^*)$  et en outre  $g$  définie par  $g(x) = (x + \frac{\lambda_T}{2})^2$  est convexe. D'où  $u^*$  est le contrôle optimal solution du problème.

### 3.2.3 Exemple de résolution du problème d'optimisation d'EDS par le principe du maximum : $n=m=1$ , avec drift et coefficient de diffusion dépendants de la variable de contrôle.

Soient l'EDS contrôlée suivante vérifiée par le processus  $X$  :

$$\begin{cases} dX_t = u_t dt + u_t dW_t \\ X_0 = 1, \quad t \in [0; 1] \end{cases} \quad (3.32)$$

$U = \mathbb{R}$  et la fonction de coût définie par :

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^1 \frac{1}{2} r u_t^2 dt + \frac{1}{2} X_0^2 \right] \quad (3.33)$$

avec  $r \in ]0; 1[$  vérifiant  $\ln r + 2 - r < 0$  ou encore  $(0 < r \lesssim 0.1586)$

Supposons  $(X^*, u^*)$  la paire optimale à déterminer : alors les équations adjointes correspondantes sont les suivantes :

$$\begin{cases} dY_t = Z_t dW_t, \quad t \in [0; 1] \\ Y_1 = X_1^* \end{cases} \quad (3.34)$$

et

$$\begin{cases} dY_t^* = Z_t^* dW_t, \quad t \in [0; 1] \\ Y_1^* = -1 \end{cases} \quad (3.35)$$

Clairement ,  $(Y_t^*, Z_t^*) = (-1; 0)$  est la seule solution adaptée à (3.35) et l'hamiltonien correspondant est :

$$\mathcal{H}(t, x, u) = \frac{1}{2}(1 - r)u^2 + (Y_t + Z_t + u_t^*)u \quad (3.36)$$

Nous remarquons que  $\mathcal{H}$  une fonction convexe en  $u$  à cause du fait que  $0 < r < 1$  (en effet la dérivée seconde nous donne  $D_{uu}\mathcal{H}(t, x, u) = 1 - r$  et donc on a la positivité de celle ci.

De plus ,

$$D_u \mathcal{H}(t, x, u) = (1 - r)u_t^* + Y_t + Z_t + u_t^* = 0$$

ou encore

$$u_t^* = -\frac{Y_t + Z_t}{r} \quad (3.37)$$

On a donc le système hamiltonien suivant :

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{Y_t + Z_t}{r} dt - \frac{Y_t + Z_t}{r} dW_t \\ dY_t = Z_t dW_t \\ X_0^* = 1 \\ Y_1 = X_1^* \end{cases} \quad (3.38)$$

Nous cherchons à présent une solution appropriée  $(X_t^*, Y_t, Z_t)$  du système qui nous donnera le contrôle  $u^*$  défini à l'équation (3.37).

Supposons que  $(X_t^*, Y_t, Z_t)$  soit une solution de (3.38) vérifiant  $Y_t = \theta_t X_t^*$  pour tout  $t \in [0; 1]$  où  $\theta_t$  est une fonction déterministe. Il est donc question de déterminer l'équation vérifiée par  $\theta$ .

On a :

$Y_t = \theta_t X_t^*$  d'après la formule d'Itô on a :

$$\begin{aligned} dY_t &= [\dot{\theta}_t X_t^* + dX_t^* \theta_t] dt + u_t dW_t \\ &= [\dot{\theta}_t X_t^* - \frac{Y_t + Z_t}{r}] dt - \theta_t \frac{Y_t + Z_t}{r} dW_t \end{aligned}$$

En comparant à (3.34) par identification on a :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_t X_t^* = \theta_t \frac{Y_t + Z_t}{r} \\ Z_t = -\theta_t \frac{Y_t + Z_t}{r} \end{cases} \quad (3.39)$$

La deuxième ligne de (3.39) implique  $rZ_t = -\theta_t(Y_t + Z_t)$

ou encore  $(r + \theta_t)Z_t = -\theta_t Y_t$

donc

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{-\theta_t Y_t}{r + \theta_t} \\ &= -\frac{\theta_t^2 X_t^*}{r + \theta_t} \end{aligned}$$

car  $Y_t = \theta_t X_t^*$  de même

$$\begin{aligned} \frac{Y_t + Z_t}{r} &= -\frac{Z_t}{\theta_t} \\ &= -\frac{1}{\theta_t} \left( -\frac{\theta_t^2 X_t^*}{r + \theta_t} \right) \\ &= \frac{\theta_t X_t^*}{r + \theta_t} \end{aligned}$$

Ainsi on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} Z_t = -\frac{\theta_t^2 X_t^*}{r + \theta_t} \\ \frac{Y_t + Z_t}{r} = \frac{\theta_t X_t^*}{r + \theta_t} \end{cases} \quad (3.40)$$

Par identification et en comparant (3.40) et (3.39) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}_t X_t^*}{\theta_t} &= \frac{Y_t + Z_t}{r} \\ \frac{\dot{\theta}_t X_t^*}{\theta_t} &= \frac{\theta_t X_t^*}{r + \theta_t} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_t = \frac{\theta_t^2}{r+\theta_t} & t \in [0; 1] \\ \theta_1 = -1 \end{cases} \quad (3.41)$$

Supposons que l'équation (3.41) admet une solution  $\theta$  sur  $[0; 1]$  alors il est nécessaire que  $(r + \theta_1 < 0)$

$$r + \theta_t < 0 \quad \forall t \in [0; 1] \quad (3.42)$$

D'après (3.40) et (3.37) on voit que le meilleur candidat pour le contrôle optimal est :

$$u^* = -\frac{\theta_t X_t^*}{r + \theta_t} \quad t \in [0; 1] p.s. \quad (3.43)$$

Le processus correspondant solution de (3.38) est  $X_t^*$  on a le système suivant :

$$\begin{cases} dX_t^* = -\frac{\theta_t X_t^*}{r+\theta_t} dt - \frac{\theta_t X_t^*}{r+\theta_t} dW_t \\ X_0^* = 1 \end{cases} \quad (3.44)$$

Montrons à présent que la paire optimale  $(X^*, u^*)$  obtenue est véritablement optimale.

Soit  $(X, u)$  une paire admissible , d'après la formule du produit d'Itô , on a :

$$d(\theta_t X_t^2) = \left[ \theta_t u_t^2 + 2\theta_t u_t X_t + \frac{\theta_t^2 X_t^2}{r + \theta_t} \right] dt + \{...\} dW_t \quad (3.45)$$

En intégrant de 0 à 1 et en faisant passer l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X_1^2) = -\theta_0 - \mathbb{E} \left[ \int_0^1 (\theta_t u_t^2 X_t + \frac{\theta_t^2 X_t^2}{r + \theta_t}) dt \right] \quad (3.46)$$

En injectant ceci dans le membre de droite de l'égalité (3.41) on a :

$$J(u) = -\frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \int_0^1 (r + \theta_t) (u_t + \frac{\theta_t X_t}{r + \theta_t}) dt \right] - \frac{1}{2} \theta_0 \quad (3.47)$$

C'est pourquoi avec (3.42) , la valeur minimale de la fonction de coût sera atteinte à  $u^* = -\frac{\theta_t X_t^*}{r+\theta_t}$ , qui est exactement ce que nous avons obtenu à l'équation (3.43).

Il reste à montrer que l'équation (3.41) a une solution  $\theta$  avec la condition (3.42) , on a :

(3.41) est équivalent à  $\ln(-\theta_t) - \frac{r}{\theta_t} = t - 1 + r$ .

En définissant  $f_t$  par :

$$f_t(\lambda) = \ln(\lambda) + \frac{r}{\lambda} - t + 1 - r, \quad \lambda \in ]0; +\infty[.$$

Comme  $\ln r + 2 - r < 0$  on a :

$$f_t(r) = \ln r + 2 - t - r < 0 \quad \forall t \in [0; 1]$$

$$f_t(1) = 1 - t > 0.$$

On conclut d’après le théorème des valeurs intermédiaires que  $-\theta_t \in ]r; 1[$ ; tel que

$$f_t(-\theta_t) = 0 \quad \forall t \in [0; 1[ \quad , \text{de plus}$$

$$f'_t(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{r}{\lambda^2}$$

$$= \frac{\lambda - r}{\lambda^2}.$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} f'_t(\lambda) < 0 & \text{si } \lambda < r \\ f'_t(\lambda) > 0 & \text{si } \lambda > r \\ f'_t(\lambda) = 0 & \text{si } \lambda = r. \end{cases}$$

Ainsi  $f_t(-\theta_t) = 0$  et  $r + \theta_t < 0$  est unique.

Enfin on a  $f^1(1) = 0$  ce qui entraîne  $\theta_1 = -1$ . Ce qui nous permet de conclure l’existence de la solution (3.41) sous la condition (3.42). Nous concluons donc que le contrôle optimal est donné par (3.43) et la valeur optimale de la fonction de coût est  $-\frac{1}{2}\theta_0$  ( d’après (3.47) et  $\theta$  obtenue en résolvant (3.41)).

### 3.3 Application du Principe du maximum aux jeux quadratiques linéaires à champ moyen “mean-field games” (MFG)

Les résultats et théorèmes non démontrés de cette partie sont issus de [23]

Dans cette section, nous poussons l’analyse un peu plus loin en de trouver une formule explicite du contrôle optimal . Nous appliquons le problème contrôle optimal stochastique aux jeux linéaires quadratiques à champ moyen. Et dans ce cas particulier nous aurons la présence d’une famille de mesures positives au sein de chaque coefficient, mesure que nous allons geler afin d’avoir un problème de contrôle optimal habituel. Choisissons les coefficients  $b$ ,  $h$  et  $g$  de notre EDS de type linéaire quadratique, prenons :

$$b(t, x, \mu, u) = a_t x + a_t^* \mu^* + b_t u + \beta_t$$

$$h(t, x, \mu, u) = \frac{1}{2} n_t u^2 + \frac{1}{2} (m_t x + m_t^* \mu^*)^2$$

$$g(x, \mu) = \frac{1}{2} (q x + q^* \mu^*)^2$$

où les coefficients  $a_t, a_t^*, b_t, \beta_t, m_t, m_t^*, \mu^*, n_t$  sont des fonctions réelles et continues du temps  $t \in [0, T]$ , et  $q$ , et  $q^*$  sont des réels. Nous désignons par  $\mu^*$  la moyenne de la mesure  $\mu$  (c'est à dire  $\mu^* = \int x d\mu(x)$ ).

### 3.3.1 Cas de N-joueurs

En supposant que les états individuels privés sont de dimension 1, et en plus les actions de chaque joueur sont de dimension 1, on peut écrire :

$$dX_t^i = [a_t X_t^i + a_t^* X_t^* + b_t u_t^i + \beta_t] + \sigma dW_t^i,$$

$i = 1, \dots, N \quad t \in [0; T]$  et  $X_0^i = x_0$  avec  $x_0$  un réel donné comme condition initiale et

$$X_t^* = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n X_t^i$$

étant la moyenne empirique.

De manière analogue, la fonction de coût individuelle est :

$$J^i(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{1}{2} [n_t (u_t^i)^2 + (m_t X_t^i + m_t^* X_t^*)^2] dt + \frac{1}{2} (q X_T^i + q^* X_T^*)^2 \right]$$

$i \dots N$

La résolution du problème se fait en utilisant le principe du maximum de Pontryagin tel qu'énoncé plus haut.

### 3.3.2 Application de l'approche des jeux linéaires quadratiques à champ moyen

Premièrement, nous fixons la mesure de probabilité  $\mu = (\mu_t)_{0 \leq t \leq T}$  au lieu de la mesure empirique des joueurs d'états privés et résolvons le problème de contrôle résultant pour un unique joueur. Puisque la mesure empirique des états des joueurs privés n'intervient que dans la fonction de coût et dans l'équation d'état, cela signifie qu'il est facile de choisir une valeur réelle, d'une fonction déterministe  $(\mu_t^*)_{0 \leq t \leq T}$  comme approximation de la moyenne empirique des états privés des joueurs. Alors le problème individuel de contrôle optimal stochastique se résume à minimiser la fonction de coût définie par

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{1}{2} [n_t u_t^2 + (m_t X_t + m_t^* X_t^*)^2] dt + \frac{1}{2} (q X_T + q^* X_T^*)^2 \right] \quad (3.48)$$

sous la contrainte dynamique

$$dX_t = [a_t X_t + a_t^* X_t^* + b_t u_t + \beta_t] dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0; T] \quad (3.49)$$

Avec  $X_0 = x_0$  comme condition initiale.

Sachant que la fonction réelle  $t \rightarrow \mu_t^*$  est fixée, nous définissons l'Hamiltonien de la forme suivante :

$$\mathcal{H}^{\mu^*}(t, x, y, u) = y[a_t x + a_t^* \mu_t^* + b_t u + \beta_t] + \frac{1}{2} (m_t x + m_t^* \mu_t^*)^2 + \frac{1}{2} n_t u^2 \quad (3.50)$$

$\mathcal{H}^{\mu_t^*}$  est dérivable par rapport à  $u$  et sa dérivée est donnée par :

$$D_x \mathcal{H}^{\mu_t^*} = y b_t + n_t u$$

Ainsi , la valeur minimale de l’Hamiltonien est atteinte pour le contrôle

$$u^*(t, y) = -\frac{b_t}{n_t} y, \quad y \in \mathbb{R} \quad (3.51)$$

et cette valeur minimale est :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\mu_t^*}(t, x, y) &= \inf_{u \in \mathcal{A}} \mathcal{H}^{\mu_t^*}(t, x, y, u) \\ &= (a_t x + a_t^* \mu_t^* + \beta_t) y + \frac{1}{2} (m_t x + m_t^* \mu_t^*)^2 - \frac{1}{2} \frac{b_t^2}{y^2} \end{aligned}$$

L’équation adjointe est la suivante :

$$dY_t = -D_x \mathcal{H}^{\mu_t^*}(t, X_t, u_t, Y_t, Z_t) \quad (3.52)$$

$$= -[a_t Y_t + m_t (m_t X_t + m_t^* \mu_t^*)] dt + Z_t dW_t \quad (3.53)$$

$$Y_T = q(q X_T + q^* \mu_t^*) \quad (3.54)$$

$$= D_x g(X_T, \mu_T) \quad (3.55)$$

Remarquons qu’à cause de la forme des coefficients, on n’a pas une forme explicite du contrôle donné par (3.51). De (3.51) on déduit que l’équation différentielle stochastique vérifiée par le processus stochastique s’écrit :

$$dX_t = [a_t X_t + a_t^* X_t^* - \frac{b_t^2}{n_t} + \beta_t] dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0; T] \quad (3.56)$$

avec  $X_0 = x_0$ .

Le problème est donc de prouver l’existence d’une solution pour chacune des équations (3.56) et (3.52) et d’analyser les propriétés de ses solutions.

De ce qui précède, on obtient en récrivant les équations (3.52) et (3.56) le système suivant :

$$\begin{cases} dX_t = [a_t X_t + \tilde{b}_t Y_t + c_t] dt + \sigma dW_t, & X_0 = x_0 \\ dY_t = [\tilde{m}_t X_t - \tilde{a}_t Y_t + \lambda_t] dt + Z_t dW_t & , Y_T = \tilde{q} X_T + \tau \end{cases} \quad (3.57)$$

Où nous avons :

$$\tilde{a}_t = a_t, \tilde{b}_t = -\frac{b_t^2}{n_t}, c_t = \beta_t + a_t^* \mu_t^*, \tilde{m}_t = -m_t^2, \lambda_t = -m_t m_t^* \mu_t^*, \tilde{q} = q^2, \tau = q q^* \mu_T^*$$

Chaque équation du système ci-dessus étant sous forme linéaire, nous cherchons une fonction affine solution du système d’équations différentielles stochastiques avant arrièrè dans l’espace des variables. Il s’agit donc concrètèment de chercher deux fonctions déterministes  $\eta_t$  et  $\chi_t$  telles que

$$Y_t = \eta_t X_t + \chi_t \quad t \in [0; T] \quad (3.58)$$

En dérivant  $Y_t$  on a :

$$\begin{aligned}
 dY_t &= \dot{\eta}_t X_t dt + \eta_t dX_t + \dot{\chi}_t dt \\
 &= \dot{\eta}_t X_t + \eta_t ([a_t X_t + \tilde{b}_t Y_t + c_t] dt + \sigma dW_t) + \dot{\chi}_t dt \\
 &= \dot{\eta}_t X_t dt + \eta_t [(a_t X_t + \tilde{b}_t (\eta_t X_t + \chi_t) + c_t) dt + \sigma dW_t] + \dot{\chi}_t dt \\
 &= [(\dot{\eta}_t + \tilde{a}_t \eta_t + \tilde{b}_t \eta_t^2) X_t + \dot{\chi}_t + \tilde{b}_t \eta_t \chi_t + \eta_t c_t] dt + \sigma \eta_t dW_t \quad t \in [0; T]
 \end{aligned}$$

Par identification au deuxième volet de (3.57), on a le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_t = -\tilde{b}_t \eta_t^2 - 2\tilde{a}_t \eta_t + \tilde{m}_t & \eta_T = \tilde{q} \\ \dot{\chi}_t + (\tilde{a}_t + \tilde{b}_t \eta_t) \chi_t = \lambda_t - c_t \eta_t & \chi_T = \tau \\ Z_t = \sigma \eta_t \end{cases} \quad (3.59)$$

Le premier volet de (3.59) est une équation de Riccati et donc d’après la théorie des équations différentielles ordinaires, sa solution est obtenue en résolvant l’équation suivante :

$$-\tilde{b}_t \ddot{\theta}_t + [\dot{\tilde{b}}_t - 2\tilde{a}_t \tilde{b}_t] \dot{\theta}_t + \tilde{m}_t \tilde{b}_t^2 \theta_t = 0$$

Avec la condition terminale  $\theta_T = 1$  et  $\dot{\theta}_T = \tilde{b}_T \tilde{q}$ .

En théorie du contrôle, le premier volet de (3.59) peut être également reformulé sous forme d’une équation de Riccati dérivant d’un problème de contrôle optimal déterministe de type jeu linéaire quadratique à savoir , le système adjoint associé à la minimisation de la fonction de coût

$$\tilde{J}(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \tilde{q} \xi_T^2 + \int_0^T \frac{1}{2} [\tilde{u}_t^2 - \tilde{m}_t \xi_t^2] dt \quad (3.60)$$

. Elle dépend du contrôle  $(\tilde{u}_t)_{0 \leq t \leq T}$  et sous réserve de l’équation

$$d\xi_t = [\tilde{a}_t \xi_t - (-\tilde{b}_t)^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_t] dt \quad t \in [0; T], X_0 = \xi_0$$

admet le premier volet de (3.59) pour factorisation de Riccati. Puisque  $\tilde{q}$  et  $-\tilde{m}$  sont positifs, le problème (3.60) admet une unique solution optimale et l’équation de Riccati est résoluble. C’est pourquoi nous déduisons que le système (3.59) admet une solution. Nous déduisons également que le système avant et arrière (3.57) admet en tant que sous produit une solution, et par le principe du minimum cette solution est même unique. En effet le système (3.57) décrit le problème de contrôle optimal stochastique d’état conduit par la fonction de coût

$$J^*(u^*) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \tilde{q} \xi_T^2 + \tau \xi_T + \int_0^T \frac{1}{2} [u_t^{*2} - \tilde{m}_t \xi_t^2 - 2\lambda_t \xi_t] dt \right]$$

dépendant du contrôle  $(u_t^*)_{0 \leq t \leq T}$  sous réserve de l’équation

$$d\xi_t = [\tilde{a}_t \xi_t - (-\tilde{b}_t)^{\frac{1}{2}} u_t^*] dt \quad t \in [0; T], X_0 = \xi_0.$$

À l’aide du principe du minimum stochastique,  $\tilde{q}$  et  $-\tilde{m}$  sont positifs, on déduit que le système avant et

arrière admet une solution.

L'équation adjointe (3.52) admet donc une unique solution lorsque  $\mu^*$  est donné . C'est pourquoi le défis est à présent de construire un point fixe  $\mu^* = (\mu_t^*)_{0 \leq t \leq T}$  . Car s'il existe un tel point fixe, c'est à dire si on peut résoudre (3.52) avec la contrainte  $\mu_t^* = \mathbb{E}[X_t]$  , alors la paire  $(\mu_t^* = \mathbb{E}[X_t], Y_t^* = \mathbb{E}[Y_t])_{0 \leq t \leq T}$  est solution du système avant et arrière déterministe suivant :

$$\begin{cases} d\mu_t^* = [(a_t + \tilde{a}_t)u_t^* - \frac{b_t^2}{n_t}Y_t^* + \beta_t]dt & \mu_0^* = X_0 \\ dY_t^* = -[a_t Y_t^* + m_t(m_t + \tilde{m}_t u_t^*)]dt, & Y_T^* = q(q + \tilde{q})\mu_T^* \end{cases} \quad (3.61)$$

Inversement, si (3.61) admet des solutions, alors  $\mu^*$  satisfait la condition du point fixe pour le type de jeu linéaire quadratique à champ moyen. Puisque le système linéaire

$$\begin{cases} dX_t^* = t[a_t X_t^* + \tilde{a}_t \mu_t^* - \frac{b_t^2}{n_t}Y_t^* + \beta_t]dt & \mu_0^* = X_0 \\ dY_t^* = -[a_t Y_t^* + m_t(m_t + \tilde{m}_t u_t^*)]dt, & Y_T^* = q(q X_t^* + \tilde{q} \mu_T^*) \end{cases} \quad (3.62)$$

admet une unique solution. Cela vient du fait que (3.62) a la même structure que (3.57) avec  $\sigma = 0$ . Mais les conditions de signe  $(\frac{b_t^2}{n_t})_{0 \leq t \leq T}$ ,  $(m_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $q^2$  sont trop énormes pour recommencer l'analyse ci-dessus.

De manière analogue à ce qui précède , la clé pour la résolution de (3.61) est de le reformuler en un système de même forme que (3.57) et s'intéresser aux coefficients.

Posons

$$e_t = \exp\left(-\int_0^t \tilde{a}_s ds\right)$$

alors le système

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}_t = [(a_t + \tilde{a}_t)\tilde{\xi}_t - \frac{b_t^2}{m_t}e_t^{-1}\tilde{\zeta}_t + \beta_t]dt & \xi_0 = X_0 \\ d\tilde{\zeta}_t = -[e_t m_t(m_t + \tilde{m}_t)\tilde{\xi}_t + (a_t + \tilde{a}_t)\tilde{\zeta}_t]dt, & \tilde{\zeta}_T = e_T q(q + \tilde{q})\tilde{\xi}_T \end{cases} \quad (3.63)$$

a la même structure que (3.57) (avec  $\sigma = 0$ ) donc  $(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})$  est une solution de (3.63) si et seulement si  $(\tilde{\xi}, e^{-1}\tilde{\zeta})$  est solution de (3.61). De plus, (3.63) satisfait aux bonnes conditions de signe pour l'unité de la solution si  $q(q + \tilde{q}) \geq 0$  et  $\inf_{t \in [0; T]} m_t(m_t + \tilde{m}_t) \geq 0$

**Théorème 3.3.1.** *Sous les conditions évoquées dans le cas de  $N$  joueurs , supposons  $q(q + \tilde{q}) \geq 0$  et  $\inf_{t \in [0; T]} m_t(m_t + \tilde{m}_t) \geq 0$  et la condition initiale sur  $X$  donnée, alors la fonction continue et déterministe sur  $[0; T] : t \rightarrow \mu_t^*$  telle que le système (3.52) admet une unique solution  $(X, Y)$  vérifiant  $\mu_t^* = \mathbb{E}(X_t)$  pour tout  $t \in [0; T]$ .*

Une fois avoir calculé  $\eta_t$  dans le premier volet de (3.59) il faut remplacer dans la troisième équation de (3.59) pour trouver  $Z_t$  puis remplacer dans la deuxième afin d'obtenir  $\chi_t$  qui est donné par :

$$\chi_t = \tau e^{\int_0^t (\tilde{a}_u + \tilde{b}_u \eta_u) du} - \int_t^T [\lambda_s - c_s \eta_s] e^{\int_t^s [\tilde{a}_u - \tilde{b}_u \eta_u] du} ds \quad (3.64)$$

En posant convenablement l'équation de Riccati, sa solution est intégrable. Une fois les fonctions  $(\eta_t)_{0 \leq t \leq T}$

### 3.3. Application du Principe du maximum aux jeux quadratiques linéaires à champ moyen “mean-field games” (MFG)

et  $(\chi_t)_{0 \leq t \leq T}$  calculées, on peut donc réécrire l'équation différentielle stochastique initiale

$$dX_t = [\tilde{a}_t X_t + \tilde{b}_t \chi_t + c_t] dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0 \quad (3.65)$$

et avoir la forme explicite de la solution donnée par :

$$X_t = X_0 e^{\int_0^t (\tilde{a}_u + \tilde{b}_u \eta_u) du} + \int_0^t (\tilde{b}_s \chi_s + c_s) e^{\int_s^t (\tilde{a}_u + \tilde{b}_u \eta_u) du} ds + \sigma \int_0^t e^{\int_s^t (\tilde{a}_u + \tilde{b}_u \eta_u) du} dW_s. \quad (3.66)$$

#### Exemple de résolution du problème de type jeu linéaire quadratique à champ moyen

Après avoir étudié de manière théorique cette application dans cette partie nous donnons un exemple concret de résolution. Posons  $b(t, x, \mu, u) = 3u$ ,  $\tilde{a}_t = a_t = \beta_t = 0$ ,  $b_t = 3$  de sorte que l'équation d'état soit donnée par :

$$dX_t = 3u_t dt + \sigma dW_t \quad t \in [0; T] \quad X_0 = x_0 \quad (3.67)$$

Posons également  $h(t, x, \mu, u) = u^2$ ,  $n_t = 2$  et  $m_t = \tilde{m}_t = 0$  En utilisant les résultats de la partie ci-dessus, on obtient :

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{9}{2} Y_t dt + \sigma dW_t, & t \in [0; T], \quad X_0 = x_0 \\ dY_t = Z_t dW_t, \quad Y_T = \tilde{q} X_T + \tau \end{cases} \quad (3.68)$$

$$Y_t = \eta_t X_t + \chi_t \quad t \in [0; T] \quad (3.69)$$

On a aussi le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_t = \frac{9}{2} \eta_t^2, & \eta_T = \tilde{q} \\ \dot{\chi}_t - \frac{9}{2} \eta_t \chi_t = 0, & \chi_T = \tau \\ Z_t = \sigma \eta_t \end{cases} \quad (3.70)$$

qui est un système d'équations différentielles ordinaire simple à résoudre et dont la résolution conduit au résultat suivant :

$$\begin{cases} \eta_t = \frac{\tilde{q}}{1 + \frac{9}{2} \tilde{q}(T-t)} \\ \chi_t = \frac{\tau}{1 + \frac{9}{2} \tilde{q}(T-t)} \\ Z_t = \frac{\sigma \tilde{q}}{1 + \frac{9}{2} \tilde{q}(T-t)} \end{cases} \quad (3.71)$$

On obtient également en remplaçant dans l'équation (3.66) :

$$X_t = X_0 \frac{1 + \frac{9}{2} \tilde{q}(T-t)}{1 + \frac{9}{2} \tilde{q}T} - \frac{\tau t}{1 + \frac{9}{2} \tilde{q}T} + \sigma [1 + \frac{9}{2} \tilde{q}(T-t)] \int_0^t \frac{dW_s}{1 + \frac{9}{2} \tilde{q}(T-s)} \quad (3.72)$$

D'autre part,

$$-\frac{2}{3} u_t = Y_t = \frac{\tilde{q}}{1 + \frac{9}{2} \tilde{q}(T-t)} X_t + \frac{\tau}{1 + \frac{9}{2} \tilde{q}(T-t)} \quad (3.73)$$

### 3.3. Application du Principe du maximum aux jeux quadratiques linéaires à champ moyen “mean-field games” (MFG)

$$u_t = -\frac{3}{2}Y_t = \frac{\tilde{q}}{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}(T-t)}X_t + \frac{\tau}{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}(T-t)} \quad (3.74)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{\tilde{q}}{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}(T-t)}X_t + \frac{\tau}{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}(T-t)}\right) \quad (3.75)$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{\tilde{q}}{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}(T-t)}\left(X(0)\frac{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}(T-t)}{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}T} - \frac{\tau t}{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}T} + \right.\right. \quad (3.76)$$

$$\left.\left. \sigma\left[1 + \frac{9}{2}\tilde{q}(T-t)\right] \int_0^t \frac{dW_s}{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}(T-s)}\right) + \frac{\tau}{1 + \frac{9}{2}\tilde{q}(T-t)}\right] \quad (3.77)$$

À présent la seule variable dépendant de la fonction moyenne qui à  $t \mapsto \mu_t^*$  est la constante  $\tau = qq^*\mu_T^*$  qui dépend seulement de l'état moyen à l'instant final T de l'intervalle . En se servant du fait que  $\tilde{q} = q^2$ , cela rend la recherche d'un point fixe très simple et on vérifie aisément que

$$\mu_T^* = \frac{X(0)}{1 + q(q + \tilde{q})T} \quad (3.78)$$

alors la moyenne au temps T de la variable aléatoire  $X_T$  donnée par (3.72) est  $\mu_T^*$ . Et nous avons donc de manière explicite notre contrôle optimal solution du problème.

---

---

## ♣ Conclusion ♣

---

---

Tout bien considéré, nous pouvons dire que ce mémoire explore profondément un problème de contrôle optimal d'équations différentielles stochastiques à l'aide du principe du maximum. Nous avons premièrement démontré l'existence d'un contrôle optimal pour le problème posé. Ensuite par le principe du maximum stochastique tel qu'énoncé dans [11] et [14], nous avons vu les conditions que doivent vérifier, l'Hamiltonien et les fonctions objectives afin d'avoir de manière explicite la stratégie qui minimise la fonction de coût  $J$  de départ. Par ailleurs l'application spécifique aux jeux linéaires quadratiques à champ moyen et à la minimisation du risque d'investissement a illustré la pertinence pratique de cette théorie de contrôle optimal stochastique dans des domaines variés ; tels que l'économie et la théorie des jeux. Ces applications offrent des perspectives intéressantes pour l'analyse et la modélisation des systèmes complexes où les interactions entre les agents sont influencées par des facteurs aléatoires et des contraintes de dynamique non linéaire.

Toutefois bien qu'ayant abordé certains aspects fondamentaux de la théorie du contrôle optimal d'EDS, notons que le travail effectué reste inéluctablement très limité, en ce que notre EDS est linéaire, le drift et le coefficient de diffusion ne modélisant pas toujours tous les problèmes de la vie courante. Il demeure donc encore un immense champ à explorer dans ce domaine passionnant et des extensions pourraient inclure des études plus complexes à l'instar des équations aux dérivées partielles notamment celle de Navier Stokes, les problèmes à EDS non linéaires, avec des drift et diffusions beaucoup plus complexes (discontinus) ou dépendant d'autres variables par exemple d'une famille de mesures variables. L'étude et la simulation pour des EDS modélisant parfaitement des problèmes plus concrets et pratiques ainsi qu'à voir les applications dans les domaines émergents tels que l'intelligence artificielle et la robotique.

---

---

## ♣ Bibliographie ♣

---

---

- [1] Alain Storck, Alain Le Méhauté, Joëlle Forrest, and Joëlle Forrest. Pour une gestion raisonnée de la métis de la promotion d'une recherche «sci a ntifique» dans les grandes écoles et ailleurs rapport de la commission recherche et transfert à l'attention du président de la conférence des grandes écoles. La revue des Sciences de Gestion, (1) :13–98, 2009.
- [2] Alain Bensoussan. Lectures on stochastic control. In Nonlinear Filtering and Stochastic Control : Proceedings of the 3rd 1981 Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME), Held at Cortona, July 1–10, 1981, pages 1–62. Springer, 2006.
- [3] Charles-Albert Lehalle. Mathematical Models to Study and Control the Price Formation Process. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2015.
- [4] David Baños, Thilo Meyer-Brandis, Frank Proske, and Sindre Duedahl. Computing deltas without derivatives. Finance and Stochastics, 21 :509–549, 2017.
- [5] Emmanuel Trélat. Optimal control of a space shuttle and numerical simulations. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S, pages 842–851, 2003.
- [6] Emmanuel Trélat. Contrôle optimal : théorie & applications, volume 36. Vuibert Paris, 2005.
- [7] Frank L Lewis, Lihua Xie, and Dan Popa. Optimal and robust estimation : with an introduction to stochastic control theory. CRC press, 2017.
- [8] Halina Frankowska. The first order necessary conditions for nonsmooth variational and control problems. SIAM journal on control and optimization, 22(1) :1–12, 1984.
- [9] H Mete Soner. Stochastic optimal control in finance. Scuola normale superiore, 2004.
- [10] HJ Kushner. Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems. SIAM Journal on Control, 10(3) :550–565, 1972.
- [11] Huyên Pham. Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance, volume 61. Springer, 2007.
- [12] Jean-Michel Bismut. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. SIAM Journal on Control and Optimization, 14(3) :419–444, 1976.
- [13] Jean-Michel Bismut. An introductory approach to duality in optimal stochastic control. SIAM review, 20(1) :62–78, 1978.
- [14] Jiongmin Yong, Xun Yu Zhou, Jiongmin Yong, and Xun Yu Zhou. Maximum principle and stochastic hamiltonian systems. Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and HJB Equations, pages 101–156, 1999.

- 
- [15] Jiongmin Yong and Xun Yu Zhou. Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations, volume 43. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] Kendy Valmont. Contrôle optimal stochastique avec applications à la propagation de l’e-rumeur. PhD thesis, Antilles, 2019.
- [17] Khaled Bahlali, Boualem Djehiche, and Brahim Mezerdi. On the stochastic maximum principle in optimal control of degenerate diffusions with lipschitz coefficients. Applied mathematics and optimization, 56 :364–378, 2007.
- [18] Khaled Bahlali, Brahim Mezerdi, and Youssef Ouknine. The maximum principle for optimal control of diffusions with non-smooth coefficients. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 57(3-4) :303–316, 1996.
- [19] Martin Bauer, Thilo Meyer-Brandis, and Frank Proske. Strong solutions of mean-field stochastic differential equations with irregular drift. 2018.
- [20] Mezerdi Brahim. Necessary conditions for optimality for a diffusion with a non-smooth drift. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 24(4) :305–326, 1988.
- [21] Paul Lescot and Jean-Claude Zambrini. Isovecteurs pour l’équation de hamilton–jacobi–bellman, différentielles stochastiques formelles et intégrales premières en mécanique quantique euclidienne. Comptes Rendus Mathématique, 335(3) :263–266, 2002.
- [22] R Carmona. Lectures on bsdes, stochastic control and stochastic differential games, 2015.
- [23] René Carmona and François Delarue. Probabilistic analysis of mean-field games. SIAM Journal on Control and Optimization, 51(4) :2705–2734, 2013.
- [24] René Carmona and François Delarue. Probabilistic theory of mean field games with applications. i, volume 83 of probability theory and stochastic modelling, 2018.
- [25] Seid Bahlali and Adel Chala. The stochastic maximum principle in optimal control of singular diffusions with non linear coefficients. Random Operators & Stochastic Equations, 13(1), 2005.
- [26] Seid Bahlali and Brahim Mezerdi. A general stochastic maximum principle for singular control problems. 2005.
- [27] UG Haussmann. Some examples of optimal stochastic controls or : the stochastic maximum principle at work. SIAM review, 23(3) :292–307, 1981.
- [28] Xun Yu Zhou. Hamiltonian systems, hjb equations, and stochastic controls. In Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, volume 4, pages 3436–3441. IEEE, 1997.