UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
****
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
****
CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES HUMAINES, SOCIALES ET ÉDUCATIVES
****
UNITÉ DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES DE L'ÉDUCATION ET INGÉNIERIE ÉDUCATIVE
****
DÉPARTEMENT DIDACTIQUE DES DISCIPLINES

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
FACULTY OF EDUCATION
****
POSTGRADUATE SCHOOL FOR SOCIAL AND EDUCATIONAL SCIENCES
****
DOCTORAL UNIT OR RESEARCH AND TRAINING IN SCIENCE OF EDUCATION AND EDUCATIONAL ENGINEERING
****
DEPARTMENT OF DIDACTICS

ETUDE EXPLORATOIRE DES REPRESENTATIONS DE LA FRACTION CHEZ LES ELEVES DE 6E : CAS DES ELEVES DU LYCEE BILINGUE D'APPLICATION

Mémoire rédigé et soutenu le 17 Juillet 2025 en vue de l'obtention du diplôme de master en sciences de l'éducation

Spécialité :

Didactique des disciplines

(*Option : Didactique des mathématiques*)

Présenté par

MAFFO ANGE MERVEILLE

21V3323

Licenciée en Mathématiques

Devant le jury composé de :

Président :	**Hubert NNANG**	***Professeur***
Rapporteur :	**Judith SADJA**	***Maître de Conférences***
Membre :	**Fidèle CIAKE CIAKE**	***Maître de Conférences***

Juillet 2025

Table des matières

DEDICACE

A mon très cher époux, ***ABDOULKADIRI SALI***

A mes très chers parents, ***Delphine*** *et* ***Dieudonné FOFOU***

REMERCIEMENTS

Je rends grâce à Dieu tout puissant au terme de ce travail, pour le souffle de vie, la santé et la force dont il m'a fait don.

Je tiens à remercier tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail, particulièrement :

- Je présente mes profonds respects et remerciements au Pr SADJA Judith pour son encadrement, pour sa rigueur, sa patience ; je remercie cette dame exceptionnelle qui a su me guider tout au long de la rédaction de ce mémoire.

- A tous mes professeurs de la Faculté des Sciences de l'Education, pour la qualité de leurs enseignements, grâce à vous, je ressors de ces années de formation avec des enseignements de qualité.

- A mon encadrante de stage Mme KAPCHE Agnès pour toute l'aide qu'elle m'a apporté durant ce travail ;

- Aux enseignants de Mathématiques des classes de 6^e qui ont accepté de participer à mon travail, qui ont pris de leur temps pour répondre à mon questionnaire ;

- A Mr TCHONANG Patrick pour l'aide qu'il m'a apporté tout au long de ce travail, pour toutes mes interrogations satisfaites.

- A mon très cher époux ABDOULKADIRI Sali Hamadou, qui m'a apporté son soutien sur tous les plans dans la réalisation de ce mémoire, je t'aime.

- A mes parents FOFOU Dieudonné et FOMEKONG Delphine, pour leur soutien, pour m'avoir encouragé à commencer cette belle aventure, je vous aime.

- A toute ma famille, particulièrement à ma grande sœur FOPA Gladice, mes petites sœurs FOPA Stella et KOUMETIO Jessy, ma tantine MATCHOFOUO Ivette, pour leurs encouragements, leur soutien durant ce travail.

- A mes camarades de promotion, pour leur aide, leur soutien durant ces années de formation passées ensemble.

RESUME

La présente étude porte sur l'enseignement-apprentissage des fractions en classe de 6e, sur les représentations des élèves sur les fractions.

La fraction est l'un des concepts dont l'importance est directement vue dans l'environnement proche de l'élève, c'est un concept très difficile pour les élèves, il comprend une notion multiforme englobant plusieurs significations interdépendantes. Étant donné que dans l'approche par les compétences qui est recommandée pour les enseignements, l'élève doit être capable de déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie, l'élève doit donc pouvoir s'approprier de toutes les significations de la fraction afin de résoudre des problèmes. Il y'a un manque de compréhension conceptuelle de la fraction chez les élèves de 6e ; ces élèves mémorisent des règles « pour s'en tirer » parce que les principes de base ne sont pas acquis, ils ne comprennent pas souvent le sens de ce qui leur est donné. Nous voulions identifier les représentations du concept de fraction qu'ont les élèves de 6e et voir comment se construisent ces représentations à partir des pratiques enseignantes.

Nous avons apporté des éclaircissements grâce à nos cadres théoriques, à notre revue de littérature. Les sens de la fraction retenus de la littérature sont : partie d'un tout, partie d'un ensemble (cas discret), opérateur, rapport, quotient, mesure, nombre sur une droite numérique et nombre. Pour mener à bien notre recherche, nous avons premièrement analysé le manuel scolaire afin de voir les représentations de la fraction présentes et de quelle manière les fractions y sont abordés. Nous avons élaboré un questionnaire destiné aux enseignants afin de voir comment les enseignants abordent les fractions. Nous avons élaboré un questionnaire destiné aux élèves afin de connaitre leurs représentations sur les fractions.

Les résultats montrent que le sens de la fraction le plus présent chez les élèves est celui de partie d'un tout, ils ont beaucoup de difficultés à illustrer les autres sens. Le lien a été établi entre les représentations des élèves et les résultats d'analyse du manuel et des pratiques enseignantes. Nous avons à la fin donné des propositions, qui, nous espérons, serviront aux enseignants sur le terrain, aux recherches futures.

Mots clés : fraction, sens/statut/signification de la fraction, représentation.

ABSTRACT

This study focuses on the teaching and learning of fractions in 6^e, and on student's representations of fractions.

The fraction is one of the concepts whose importance is directly seen in the student's immediate environment; it is a very difficult concept for students, comprising a multifaceted notion encompassing several interdependent meanings. Given that, in the competency-based approach recommended for teaching, the student must be able to deploy mathematical reasoning and solve problems relating to life situations, the student must be able to appropriate all the meanings of the fraction in order to solve problems. There is a lack of conceptual understanding of the fraction among students of 6^e; these students memorize rules "to get by" because the basic principles have not been acquired, and they often don't understand the meaning of what is given to them. Our aim was to identify the representations of the fraction concept held by 6th graders, and to see how these representations are constructed on the basis of teaching practices.

Our theoretical frameworks and literature review have helped us to clarify these points. The meanings of fraction retained from the literature are: part of a whole, part of a set (discrete case), operator, ratio, quotient, measure, number on a number line and number. To carry out our research, we first analyzed the textbook to see what representations of the fraction were present and how fractions were approached. We then drew up a questionnaire for teachers to see how they approach fractions. We devised a questionnaire for pupils to find out how they represent fractions.

The results show that the fraction most present in the pupils' minds is that of part of a whole, and they have great difficulty in illustrating the other meanings. The link was established between the students' representations and the results of our analysis of the textbook and teaching practices. At the end, we have made recommendations that we hope will benefit teachers in the field and inform future research.

Keywords: fraction, meaning/status/significance of fraction, representation.

LISTE DES ABREVIATIONS

APC : Approche Par les Compétences

CE1 : Cours Elémentaire première année

CE2 : Cours Elémentaire deuxième année

CM1 : Cours Moyen première année

CM2 : Cours Moyen première année

CNRTL : Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales

CP : Cours Préparatoire

SIL : Section d'Initiation au Langage

$\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Q}$: Ensemble des rationnels

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION GENERALE

Dans ce travail, nous nous intéressons aux fractions, à l'enseignement de cette notion dans le contexte camerounais. Nous nous situons dans l'enseignement secondaire.

Le programme camerounais accorde une place très importante à l'enseignement des fractions ; elles sont enseignées aux niveaux 1, 2, 3 de l'école primaire, en 6e et en 5e. Les fractions se retrouvent dans diverses activités de la vie courante et son enseignement fait l'objet de nombreuses recherches depuis le siècle dernier, mais elles continuent de poser des problèmes aux élèves et même aux enseignants ; plusieurs difficultés sont recensées par les chercheurs. Certains auteurs comme Hembree précisent que les élèves éprouvent un état de panique et manifestent leur frustration et leur incapacité à manipuler les fractions. (Hembree, 1990)

Notre travail est motivé également par l'approche par les compétences (APC) qui est le paradigme pédagogique en vigueur depuis 2014 au Cameroun et dont l'un des objectifs présentés dans le programme scolaire est de déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie. Nous observons de la littérature que les fractions sont un concept plurivoque, c'est-à-dire qu'il revêt plusieurs sens. La connaissance et la maîtrise de ces sens-là sont nécessaires à la résolution des problèmes sur les fractions. Nous nous intéressons donc particulièrement aux différents sens de la fraction car ceux-ci sont indispensables à la résolution des problèmes de vie sur les fractions.

L'objectif de notre travail est d'identifier les représentations du concept de fraction qu'ont les élèves de 6e et de voir comment se construisent ces représentations à partir des pratiques enseignantes.

Notre travail comporte deux grandes parties : la partie théorique constituée de trois chapitres et la partie expérimentale constituée également de trois chapitres.

Le premier chapitre porte sur la problématique dans laquelle nous présentons le contexte de notre recherche, les constats, le problème, les questions de recherches, les hypothèses, les objectifs, l'intérêt et la délimitation de la recherche.

Le deuxième chapitre est intitulé insertion théorique du sujet et est consacré à la définition des termes clés de notre étude, à une enquête épistémologique sur les fractions et à la présentation de nos cadres théoriques.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une revue de la littérature : nous avons recensé les travaux de 5 auteurs qui vont enrichir notre travail.

Le quatrième chapitre est le cadre méthodologique de la recherche dans lequel nous allons présenter la méthodologie de notre travail, nous allons présenter et expliquer la grille d'analyse du manuel au programme, le questionnaire destiné aux élèves ainsi que l'analyse *a priori* de ce questionnaire et le questionnaire destiné aux enseignants.

Le cinquième chapitre est consacré à l'analyse du manuel scolaire de 6^e, l'analyse de la partie consacrée aux fractions.

Le dernier chapitre est intitulé présentation, analyse des résultats et discussion. Dans ce chapitre nous allons présenter les différents résultats, les analyser et les discuter.

CHAPITRE 1 : PROBLEMATIQUE DE L'ETUDE

Dans ce chapitre liminaire, nous présentons et justifions notre étude, nous présentons nos constats, formulons nos questions de recherche ainsi que nos hypothèses et objectifs de la recherche. Par la suite, nous donnons l'intérêt de notre recherche et la délimitation de notre sujet.

1.1. Le contexte et justification de l'étude

Le système scolaire camerounais est composé de deux sous-systèmes, le sous-système anglophone et le sous-système francophone ; chacun d'eux est constitué de l'enseignement maternel, primaire et secondaire. Ces sous-systèmes ont des différences et des similitudes tout au long du parcours. Nous nous intéressons au sous-système francophone et à l'enseignement secondaire, qui est organisé en deux cycles :

- Le premier cycle qui va de la classe de 6^{e} à la classe de 3^{e}. Il est divisé en deux sous cycles : le sous-cycle d'observation constitué des classes de sixième et de cinquième et le sous cycle d'orientation constitué des classes de quatrième et de troisième ;
- Le second cycle de l'enseignement secondaire va de la seconde en Terminale.

a- <u>**Fractions dans le système francophone camerounais**</u>

La place réservée à l'enseignement des fractions au Cameroun est très importante. Elles sont enseignées aux niveaux 1, 2 et 3 de l'école primaire et dans le secondaire.

➢ <u>**Au primaire**</u>

A ce niveau, les enseignants utilisent les activités de la vie courante comme la cuisine, la lecture de l'heure, le partage.

- A la SIL (Section d'Initiation au Langage), les objectifs sont : « définir et établir le lien entre le partage et la fraction ; écrire et dessiner les fractions dans le partage d'un objet ou d'une collection en 2,4 parties égales ».
- Au CP (Cours Préparatoire), il s'agit pour l'élève d' « écrire et représenter les fractions dans le partage d'un objet ou d'une collection en 3, 5 parts égales ».

- En classe de CE1 (Cours Elémentaire première année), l'objectif de l'enseignement des fractions est de « définir et identifier les termes d'une fraction simple » ;
- En classe de CE2 (Cours Elémentaire deuxième année), il est question pour l'élève de « lire et écrire les fractions simples » ;
- Au CM1 (Cours Moyen première année), l'apprentissage des fractions devient plus important, un peu plus complexe ; il y'a exploration des calculs avec les fractions. Il s'agira pour l'élève de pouvoir : utiliser les termes « demi », « tiers », « quart », « dixième », « centième » pour nommer une fraction, écrire et lire en chiffres et en lettres les fractions, encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs.
- Au CM2 (Cours Moyen deuxième année), viennent s'ajouter d'autres objectifs : expliquer la notion de fraction décimale, utiliser la notion de fractions décimales jusqu'au dix millièmes, écrire un nombre décimal sous forme de fraction, comparer des fractions à l'unité, écrire une fraction sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

➢ **<u>Au secondaire</u>**

Des nouveaux programmes ont été adoptés; ceux de 6^{e} et 5^{e} entrent en vigueur en 2014. L'élève sera compétent ici s'il est capable de « mobiliser, dans les différentes disciplines des domaines d'apprentissage constitutifs des programmes d'études, toutes les ressources pertinentes, en termes de savoirs, savoir-être, savoir-faire »[1].

Les compétences attendues en mathématiques sont celles d' « utiliser les mathématiques en toute confiance pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne » et de « communiquer et mener un raisonnement mathématique »[2]. Ces programmes sont organisés en 4 modules fondamentaux :

— Relations et opérations fondamentales dans l'ensemble des nombres décimaux et fractions;
— Organisations et gestions des données;
— Configurations élémentaires du plan;
— Solides de l'espace

[1] Programmes mathématiques 6^{e} et 5^{e}
[2] Programmes mathématiques 6^{e} et 5^{e}

Les fractions en 6^e sont introduites dans le module 1 : Relations et opérations fondamentales dans l'ensemble des nombres décimaux et fractions. Ce module vise à rendre l'apprenant compétent dans les situations de vie de la famille « représentation, détermination des quantités et identification des objets par des nombres ». Il s'agit en gros, de le rendre capable de :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie telles que : l'achat ou la vente des biens de consommation, le partage des biens, la vérification d'une facture, la comparaison des prix des objets …
- Communiquer des informations comportant des nombres (numéros de téléphones, matricule, immatriculation d'un véhicule, données sur le climat (température, niveau des eaux) …) ;

Ce module permet de développer les compétences transversales suivantes : l'esprit critique, le sens de l'ordre et de la méthode, le sens de la rigueur et de la concision, le sens de la prévision et de l'estimation. Il contribue au renforcement de la pratique du calcul mental, à l'utilisation de la calculatrice, ce qui permet à l'apprenant d'agir de manière autonome, compétente et adaptative dans diverses situations de la vie courante, dans lesquelles ces pratiques interviennent.

Les familles de situations données dans le programme sont : représentation, détermination des quantités et identification des objets par des nombres

Au niveau de la 6^e, les objectifs sont : donner l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal, simplifier des fractions, additionner et soustraire des fractions de même dénominateur, multiplier, diviser des fractions, comparer des fractions de même numérateur ou de même dénominateur.

b) <u>Le choix des fractions comme thème de recherche</u>

Plusieurs éléments sont à l'origine du choix que nous avons porté sur les fractions comme thème de recherche. Etant enseignante de Mathématiques, notre souci est d'essayer d'apporter des améliorations dans l'enseignement-apprentissage. De plus, « la maitrise des fractions et de la division est requise si des améliorations substantielles veulent être réalisées dans la compréhension de l'algèbre et d'autres aspects des mathématiques universitaires » (ibid., p. 696 in Martinez-Ibanez (2018, P.2)). Cette idée que les fractions jouent un rôle important dans la réussite scolaire est l'une des raisons qui nous ont conduites à choisir le thème des fractions.

Plusieurs auteurs se sont intéressés tant de manière individuelle que collective à l'enseignement et à l'apprentissage des fractions au primaire et au secondaire. La plupart des recherches sont centrées sur le primaire. Il s'agit entre autres de Alahmadati (2016), Morel (2013), Raynaud (2020), Martel (1995), Lancup (2004), Oumama (2015), Alonso (2017), Martinez-Ibanez (2018)… Ces derniers s'accordent sur le fait que les élèves rencontrent plusieurs difficultés dans l'apprentissage des fractions et que ce calcul qui occupe une place fondamentale dans le programme de Mathématiques, est à l'origine de plusieurs échecs scolaires en Mathématiques. Comme le cite Alahmadati (2016, P.190) « *certains élèves ont donc des difficultés avec les fractions, d'autant plus que les fractions seraient l'une des notions mathématiques les plus complexes pour les élèves*». Plusieurs élèves, même après plusieurs années passées à étudier les fractions, ne parviennent pas à maitriser ce concept, et ont beaucoup de difficultés. Celles-ci comprennent une notion multiforme englobant plusieurs significations interdépendantes, c'est l'un des principaux facteurs de leur complexité (Charalambos et Pitta-Pantazi, 2005, in Alahmadati, 2016 P.123).

La fraction est l'un des concepts dont l'importance est directement vue dans la vie, dans la société, dans l'environnement proche de l'élève. Nous les utilisons dans les activités de la vie courante comme le partage d'aliments ou autre, les recettes, comparaisons d'heures d'objets, probabilités.... De plus, la notion de fraction est utilisée dans d'autres matières scolaires comme les sciences ou encore la géographie. Il est donc primordial que les élèves comprennent « *les nombreux phénomènes qu'elles servent à expliquer* » (Rouche, 1998). Certains professionnels en ont besoin dans leur métier : cuisinier et cuisinière (recettes), géographe (échelle de carte), architecte (plans de maison), mathématicien et mathématicienne et autres (Mercier, 2004). Au vu de tout cela, il devient important de s'intéresser, de s'attarder à la compréhension qu'ont les élèves de cette notion.

c) <u>Le choix de la classe de 6^{e}</u>

Au secondaire, le premier sous-cycle étant constitué de 6^{e} et 5^{e}, les notions vues dans les deux classes sont presque les mêmes ; il s'agit d'un même palier de compétences. Pour analyser donc les difficultés des élèves, pour analyser leurs conceptions, on s'intéresse au début du palier, car celui-ci est essentiel pour bien comprendre les notions futures, les bases doivent être bien acquises.

1.2. Constats

Nous avons effectué deux stages pratiques dans les écoles primaire et secondaire, le premier durant l'année scolaire 2021/2022, et le second effectué l'année scolaire 2022/2023. Ces stages nous ont permis de constater que les fractions sont une source de difficultés chez les élèves. Parmi les difficultés observées, celles qui suivent ont retenu notre attention :

a- La difficulté que les élèves ont d'apprendre les règles spécifiques aux fractions : avant les fractions, les élèves étaient confrontés uniquement aux nombres entiers, les règles des nombres entiers interfèrent donc quand ils manipulent les nombres rationnels :

- Avec l'introduction des nombres rationnels, l'algorithme de comptage décroche, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de nombre rationnel suivant. Les fractions sont ajoutées différemment et ainsi de suite. Ce changement dans la pensée entraîne des difficultés pour de nombreux élèves. Par exemple après 1, l'enfant sait qu'il y'a 2, mais après $\frac{1}{2}$?
- Certains élèves ont des difficultés dans la multiplication de deux fractions, car dans les entiers naturels, on sait que la multiplication de deux nombres est toujours supérieure à chacun des nombres, mais avec les fractions ce n'est plus le cas : $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} < \frac{1}{4}$

En 1981, Brousseau (in Alonso, 2017) précise que le passage des nombres entiers aux nombres rationnels est complexe et la série d'obstacles vécus par les enfants est le résultat de difficultés à remettre en cause un certain nombre de choses (exemple : la multiplication d'un nombre entier « grossit » ce nombre, tandis que la multiplication d'un nombre rationnel « diminue » ce nombre).

- La comparaison des nombres rationnels et décimaux Certaines connaissances antérieures, concernant le nombre naturel, font obstacle à la compréhension des fractions ; pour certains enfants $\frac{1}{8} < \frac{1}{1000}$, car 8$<$ 1000.
- L'addition de deux fractions reste sous l'influence des nombres entiers naturels, par exemple l'élève va écrire $\frac{1}{5} + \frac{7}{4} = \frac{8}{9}$, qu'il obtient en additionnant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

b- Les élèves ont du mal à se représenter les fractions dont le numérateur est supérieur au dénominateur, ce qui pourrait s'expliquer par le fait que les fractions sont présentées depuis le primaire comme partie d'un tout.

c- Les élèves ont du mal à utiliser les règles de calcul pour effectuer des opérations avec les fractions : ils confondent les règles, ils utilisent les règles d'addition dans la multiplication ; ils utilisent ces règles mécaniquement sans comprendre.

Nos constats appuyés par les travaux des chercheurs nous conduisent à définir notre problème.

1.3. Problème

Les difficultés que nous présentons ci-dessus montrent la complexité des opérations sur les fractions au primaire et au collège, ce qui justifierait une difficile appropriation du concept par les élèves. Plusieurs démarches sont entreprises par les enseignants pour atteindre les objectifs définis dans le cours sur les fractions en classe de 6^{e}. Malgré les stratégies mises sur pied par ces derniers, les fractions restent encore une source de problèmes pour les élèves de la classe 6^{e}. De ce qui précède, nous voyons la persistance de quelques difficultés liées à l'apprentissage des fractions en classe de 6^{e}; il se pose le problème **du manque de compréhension conceptuelle de la fraction chez les élèves de 6^{e} ;** « le manque de compréhension des fractions oblige souvent les élèves à mémoriser des règles pour s'en tirer parce que les principes de base ne sont pas acquis. Et l'ensemble des règles et procédures, lorsqu'elles ne reposent pas sur une compréhension conceptuelle de la fraction, viennent embrouiller le sens de l'opération » (Ministère de l'éducation Ontario, 2018).

1.4. Questions de recherche

Après nos constats, nous voyons que les fractions sont un concept mathématique complexe que les élèves rencontrent dans l'enseignement primaire ; et au début du secondaire. Il est très important donc de comprendre ce concept-là, car il sous-tend beaucoup d'autres notions : les fractions vont permettre à l'élève de rentrer dans les nombres rationnels, puis de rentrer dans l'ensemble des nombres réels. Sa compréhension par l'élève va lui permettre d'avoir une plus grande abstraction, une plus grande facilité dans la compréhension, dans la construction d'autres savoirs. Ces élèves sont soumis à des pratiques enseignantes, nous avons les cours que les enseignants dispensent et également le manuel scolaire qui peut être mis à leurs dispositions. Etant donné les constats observés, les difficultés des élèves, nous nous posons la question générale de recherche suivante :

Quelles sont les représentations de la fraction présentes chez les élèves de 6ᵉ et comment les pratiques enseignantes contribuent à la construction de ces représentations ?

De cette question générale de recherche, découlent les questions spécifiques suivantes :

- Quelles sont les représentations de la fraction présentes chez les élèves de 6ᵉ ?
- Comment les fractions sont introduites, présentées dans le manuel scolaire de 6ᵉ et quel est le lien avec les représentations des élèves?
- Quelles représentations de la fraction sont présentes chez les enseignants et quel est le lien avec les représentations des élèves?

1.5. Hypothèses de recherche

Pour répondre à la question de recherche, nous émettons l'hypothèse générale suivante :

La signification de la fraction la plus présente est, chez les élèves de 6ᵉ, celle de partie d'un tout car elle est la plus présente dans les pratiques enseignantes.

De façon spécifique, nous formulons les hypothèses suivantes :

- La signification de la fraction la plus présente est, chez les élèves de 6ᵉ, celle de partie d'un tout ;
- La fraction est introduite comme partie d'un tout et les significations de la fraction les plus présentes dans le manuel scolaire, sont celles que les élèves ont le plus de facilité à illustrer correctement, tandis que celles qui sont peu présentes dans les manuels sont celles que les élèves éprouvent le plus de difficulté à illustrer ;
- Il y'a une prédominance de l'idée de la fraction comme partie d'un tout pour engager les enseignements et la manière avec laquelle les enseignants abordent les fractions influence les représentations qu'ont les élèves.

1.6. Les objectifs de la recherche

Nous nous proposons dans cette étude : **d'identifier les représentations du concept de fraction qu'ont les élèves de 6^{e} et de voir comment se construisent ces représentations à partir des pratiques enseignantes**. De manière plus spécifique, nous nous proposons :

- D'identifier les représentations des élèves sur les fractions ;
- D'identifier les représentations de la fraction dans le manuel scolaire de 6^{e}, et de voir l'impact sur les représentations des élèves;
- D'identifier la manière avec laquelle les enseignants abordent ce concept et d'identifier le lien entre ces pratiques et les représentations des élèves.

1.7. L'intérêt de la recherche

Cette recherche revêt un intérêt multiple à savoir : didactique, pédagogique et scientifique.

a- <u>Sur le plan pédagogique</u>

Sur le plan pédagogique cette étude permettra aux enseignants de comprendre les difficultés que rencontrent les élèves dans l'apprentissage des fractions au cycle 3 de l'école primaire et en classe de 6^{e} afin d'en tenir compte au cours de leurs enseignements. En effet les fractions peuvent paraitre évidentes pour l'enseignant qui a une posture d'expert. Pourtant les objets manipulés dans ce calcul ne sont pas assez clairs pour les élèves et le passage réciproque entre langage courant et langage mathématique n'est pas très évident pour les élèves. Elle permettra également de donner quelques pistes que les enseignants pourront prendre en compte pour améliorer leurs pratiques. Elle interpelle également les enseignants de mathématiques à réaliser des pratiques enseignantes contextualisées et participatives des élèves afin d'impulser une meilleure compréhension de la notion au détriment de la rétention des étapes, conséquence d'une pratique transmissive des apprentissages.

b- <u>Sur le plan didactique</u>

Sur le plan didactique, cette étude permettra aux enseignants de comprendre les difficultés que rencontrent les élèves dans l'apprentissage des fractions. Elle vise la mise en place du champ conceptuel des fractions, qui pourra être utilisée par les enseignants de mathématiques lors de l'enseignement des fractions.

c- <u>Sur le plan scientifique</u>

Sur le plan scientifique, de la recherche, notre étude pourra être utile pour les chercheurs car elle donne des pistes pour comprendre les difficultés liées à l'apprentissage des fractions.

1.8. Délimitation de l'étude

Afin de circonscrire cette étude, il importe de la délimiter temporellement, spatialement et thématiquement.

- **a- Délimitation temporaire :** cette étude se déroule à partir du second semestre de l'année scolaire 2022/2023 et s'achève en décembre 2024 ;
- **b- Délimitation spatiale : l**a présente étude se déroule à Yaoundé, plus précisément au lycée bilingue d'application.
- **c- Délimitation thématique :** la présente étude est intitulée «Etude exploratoire des représentations de la fraction chez les élèves de 6^{e} : cas des élèves du lycée bilingue d'application». L'objet de cette étude s'inscrit dans le champ de la didactique des mathématiques, plus précisément de la didactique des fractions.

CHAPITRE 2 : INSERTION THEORIQUE DU SUJET

Dans ce chapitre, nous donnons la définition des mots clés de notre étude, ensuite présentons notre étude épistémologique et enfin nos cadres théoriques.

2.1. Définition des concepts

Dans le cadre de notre recherche, nous définissons les mots et expressions **fractions, sens, signification, statut de la fraction, représentation.**

2.1.1. Fraction

2.1.1.1. Définition

Selon le Petit Larousse, « Fraction est l'.action de briser: la fraction du pain. ‖partie : une fraction de l'assemblée vota pour lui. ‖math. Opérateur formé deux nombres entiers : a (numérateur) et b (dénominateur), qui se note ($\frac{a}{b}$) et qui définit le résultat obtenu en partant d'une grandeur, en la divisant par b et en la multipliant par a, les deux opérations pouvant être interverties » (Petit Larousse illustré, édition 1974, p.446, in Alahmadati 2016,p.60).

Rouche (1998) définit la fraction ainsi : « une fraction est une bien petite chose : une barre horizontale, un nombre au-dessus et un nombre au-dessous. Mais que représente cette chose ? Un morceau de tarte ? Un rapport ? Une nouvelle espèce de nombre ? La réponse est loin d'être claire pour tout le monde ». Le dénominateur indique en combien de parts égales on a divisé, fractionné une unité ou un ensemble. Le numérateur indique combien de parts on prend. Par exemple, si on mange les $\frac{3}{7}$ d'une tarte, le numérateur 3 indique le nombre de parts que l'on mange alors que 7 indique le nombre total de parts, donc l'unité considérée. (Rouche, 1998, in Alahmadati 2016,p.60). Fractionner, c'est partager en parties égales, c'est diviser un tout, un ensemble. De ce point de vue, la fraction est vue comme partie d'un tout.

Les termes « fraction » et « fracteur » sont issus du verbe latin « frangere », qui signifie rompre, briser. Dans le langage courant, la fraction désigne, surtout, une petite partie, une parcelle ou une portion de quelque chose (Oumama, 2015, P 15). Dans la deuxième moitié du XIIIème siècle, du point de vue mathématique, il est semblable à la « division » (Introd. d'astron, B.N. 1353 in Alonso, 2017).

La fraction est une notation utilisée pour représenter un nombre rationnel. « Une fraction se compose donc de deux nombres entiers naturels, a et b, séparés par une barre horizontale, alors $\frac{a}{b}$. Le chiffre du haut (a) s'appelle numérateur et le chiffre du bas (b) s'appelle dénominateur. Le dénominateur (b) est toujours différent du zéro » (Corrieu, 1999). Cette définition est celle que nous retenons.

En d'autres termes, a et b étant deux nombres entiers naturels, avec b non nul, l'écriture $\frac{a}{b}$ du quotient de a par b est appelée fraction, de numérateur a et de dénominateur b.

- a et b sont les deux termes de la fraction.
- la barre de fraction signifie que l'on divise le numérateur par le dénominateur.
- la fraction $\frac{1}{2}$ indique que l'on divise l'entier 1 par 2 (le numérateur 1 est divisé par le dénominateur 2), dans ce cas particulier, cette fraction s'appelle : un demi, la moitié.
- pour énoncer une fraction, on lit d'abord le numérateur, ensuite le dénominateur auquel on ajoute la terminaison – ième.

Il existe des dénominations particulières : les dénominateurs 2, 3, 4 se nomment : demi, tiers et quart avec un numérateur qui est toujours 1. $\frac{1}{2}$ = 1 demi, $\frac{1}{3}$ = 1 tiers, $\frac{1}{4}$ = 1 quart, $\frac{4}{4} = 4\times\frac{1}{4}$ = 4quarts.

En classe de 6^{e}, on ne parle que de la dénomination « fractions », mais dans les niveaux supérieurs, le vocabulaire on présente les fractions comme des nombres rationnels.

2.1.1.2. Caractéristiques des nombres rationnels

Dans la littérature, les termes fraction et nombre rationnel sont souvent utilisés indifféremment pour désigner une entité mathématique constituée d'un numérateur et d'un dénominateur. Comme le dit Meert et Grégoire « Une fraction est un nombre rationnel, c'est-à-dire un quotient de deux nombres entiers » (Meert & Grégoire, 2005 in Morel, 2013 P.13).

Alahmadati trouve nécessaire de situer la fraction par rapport aux nombres rationnels pour pouvoir apprécier la complexité et la richesse de cette notion mais également de souligner les défis importants que posent l'enseignement et l'apprentissage de celle-ci. Il aborde les fractions comme moyen d'écriture des nombres rationnels.

Un nombre rationnel est « une classe d'équivalence de couples d'entiers naturels » (NCTM, 1964, in Oumama, 2015, P17). Considérons le couple (a ; b), écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, s'appelle la fraction de numérateur a et de numérateur b. L'équivalence $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est gouvernée par la relation (axd=bxc)

Les couples (3,4) et (6,8), désignant respectivement $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{8}$ sont équivalents puisque 3x8=4x6, donc l'ensemble {(3,4), (6,8), (9,12) ... } est une classe d'équivalence. Une fraction est donc une écriture possible d'un nombre rationnel, un nombre rationnel désigne une infinité de fractions.

2.1.2. Sens/ Signification/ Statut de la fraction

Le dictionnaire *Le Robert* définit le terme signification comme « ce que signifie une chose, un fait. Sens d'un signe, d'un ensemble de signes, et spéciale d'un mot ». Selon le dictionnaire Larousse, le mot signification est défini comme « ce que signifie, représente un signe, un geste, un fait. Sens et valeur d'un mot ».

Larousse (1992), précise que le sens est l'ensemble des représentations que suggère un mot ou un énoncé et est une signification.

Le sens est une relation du sujet-élève aux situations et aux signifiants, dont le « schème » rend compte (Vergnaud, 1990, in Couderette, 2022 P.21). On peut dire ici que le sens d'une fraction dans une situation, est l'interprétation qui est faite de cette fraction.

Le statut de la fraction est la fonction que la fraction prend dans une situation, c'est-à-dire l'interprétation de la fraction dans une situation.

Dans notre travail nous utilisons le sens selon la définition de Vergnaud.

Kieren (1976) fut le premier à lancer l'idée que les nombres rationnels peuvent prendre diverses significations (interprétations). Son travail est considéré comme une base fondamentale, un pas important dans la clarification des idées autour du concept de nombre rationnel. Il lance l'idée que les nombres rationnels peuvent prendre diverses significations, il proclame que la maîtrise de ces nombres suppose une compréhension claire de chacune de ces significations. « Il en identifie sept :

- les nombres rationnels peuvent être des fractions pouvant être comparées, additionnées et soustraites, etc… ;

- les nombres rationnels sont des fractions décimales qui forment une extension naturelle des nombres entiers ;
- les nombres rationnels sont des classes d'équivalence de fractions. ; donc $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, ...\}$ et $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \ldots\}$ sont des nombres rationnels ;
- les nombres rationnels sont des nombres de la forme $\frac{p}{q}$, tel que p et q sont entiers et q≠0 ; dans ce cas, les nombres rationnels expriment des rapports ;
- les nombres rationnels sont des opérateurs multiplicatifs (« dilateurs », « contracteurs », etc.) ;
- les nombres rationnels sont des éléments du domaine infini des quotients ordonnés ; ils sont des nombres de la forme x = $\frac{p}{q}$ tel que x satisfait en équation : q × x= p ;
- les nombres rationnels sont des mesures ou des points sur la droite numérique. » (Alahmadati, 2016, P. 124)

Nous utiliserons dans notre travail les termes « sens de la fraction », « signification de la fraction » et « statut de la fraction » pour référer aux différentes interprétations de la fraction dans un contexte.

2.1.3. Représentation

Selon le CNRTL(2012), représentation vient du latin repraesentatio et signifie l'action de replacer devant les yeux de quelqu'un.

Selon Reuter *et al.* (2013), la notion de représentation a été définie pour parler des systèmes de connaissances qu'un sujet mobilise face à une question ou à une thématique, que celle-ci ait fait l'objet d'un enseignement ou pas.

Selon Brousseau (2004) : « Le terme *représentation* désigne *l'action de rendre présent à nouveau* et *son résultat.* Il est aujourd'hui un concept important de la psychologie cognitive et de la psychologie sociale, d'où il diffuse vers tous les secteurs de l'analyse des connaissances, notamment vers le secteur de l'éducation, donc vers celui de l'éducation mathématique » (p.242).

La représentation est un concept qui a été forgé par les sociologues comme Emile Durkeim pour désigner les façons de penser collective. Il a été introduit en psychologie génétique par J. Piaget quand il a étudié la représentation du monde chez l'enfant. Tout récemment les didacticiens l'ont adopté pour mieux comprendre et appréhender l'activité intellectuelle de l'apprenant et sa manière de construire le réel. Ici on suppose l'idée de la présence d'un réseau de connaissance chez l'enfant. Prendre en compte cette notion de représentation modifie la définition de l'enseignement : il ne peut plus être conçu comme un apport simple de nouveaux savoirs chez l'élève, puisque l'élève apprend en fonction de ce qu'il sait déjà. Le concept de représentation ouvre la voie à une *nouvelle approche de l'apprentissage* susceptible d'expliquer la manière dont nous construisons le réel. Ce terme de *représentation* est utilisé dans l'enseignement des mathématiques, selon Zhang (1997), il est classé en deux types : représentations internes et représentations externes.

Nous retenons la définition selon Reuter *et al*. (2013), le rôle du didacticien ici sera donc d'amener l'enfant à changer de représentation si celle-ci est fausse, car toute représentation fausse n'est que la manifestation d'un obstacle face à l'apparition du savoir et à la compréhension de la situation. Selon Alahmadati (2016), l'essentiel de l'apprentissage se centre sur le franchissement de ces obstacles en vue d'aboutir à une réorganisation du système de représentation chez l'élève.

2.2. Etude épistémologique

2.2.1. Origine et évolution historique

Dans cette partie, nous nous sommes appuyés sur les travaux de thèse de doctorat d' Alahmadati, sa thèse intitulée «Autour du concept de fraction à l'école primaire en France Étude exploratoire des significations de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III » et soutenue le 29 Janvier 2016.

Le besoin d'exprimer des rapports non entiers, souvent pour résoudre des problèmes de la vie courante s'est ressenti chez les peuples de l'antiquité. Très tôt, les hommes ont été confrontés au problème du partage : comment palier à l'insuffisance des nombres entiers ? (Wacheux, 2012, in Alahmadati, 2016). L'histoire des fractions débute avec les civilisations babyloniennes et égyptiennes. Les fractions babyloniennes et égyptiennes sont nées des besoins économiques et commerciaux comme les taxes, les intérêts, les échanges monétaires, etc. Il y'avait un besoin de calculer et de représenter le résultat du partage - dans le cas de collection d'objets, et du rapport, dans le cas de problèmes de mensuration et de calculs géométriques - sous une autre forme qu'un nombre entier.

Nous allons maintenant aborder le concept de fractions en Mésopotamie, en Egypte, en Inde, en Grèce, au Moyen- Orient et, enfin, en Occident.

Vers 3000 avant J.C., dans la région de Sumer apparaissent les premières écritures de fractions pour des cas particuliers : $\frac{1}{120}$; $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{5}$.

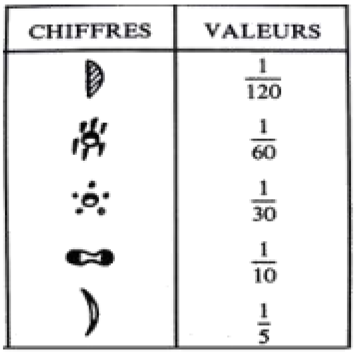


Figure 1 : les premières représentations des fractions apparues en Sumer (http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/les-fractions)

Quant aux babyloniens, la numération était à base 60. Les symboles utilisés dans cette numération étaient le clou de valeur 1 et le chevron de valeur 10. Il était alors possible d'écrire tous les nombres de 1 jusqu'à 59. Le clou et le chevron augmentaient en fonction du nombre qu'ils souhaitaient écrire. A propos des fractions, elles avaient toutes pour dénominateur un multiple de 60. Seul le numérateur était donc à écrire. Nous utilisons d'ailleurs actuellement cette numération dite sexagésimale pour les heures, les minutes et les secondes ainsi que pour les mesures d'angles. C'est par la suite, au 11^{e} siècle que les arabes considèrent les fractions comme étant le rapport de deux longueurs et des nombres à part entière. Le résultat de $\frac{a}{b}$ est donc le nombre qui multiplié par b donne a. De plus, le trait (ou la barre) qui symbolise la notation fractionnaire est lui aussi un héritage des peuples arabes.

Le système d'écriture des Mésopotamiens possède une autre caractéristique étonnante. Il sert en effet à noter non seulement les nombres entiers, mais aussi les nombres fractionnaires, comme ces exemples :

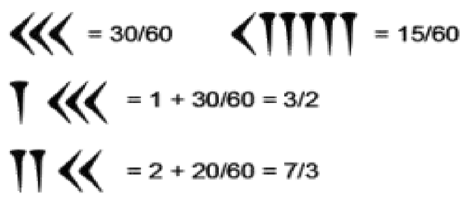


Figure 2 : représentation des entiers et des numérateurs des fractions selon l'écriture babylonienne (http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/les-fractions).

Les égyptiens quant à eux percevaient la fraction comme étant un partage. Cette représentation de partie d'un tout est toujours présente et parfois est la seule présente chez les élèves. Ils utilisaient uniquement, exceptée la fraction $\frac{2}{3}$, les fractions de la forme $\frac{1}{n}$ et les sommes $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$ de deux ou de plusieurs dénominateurs a, b, etc tous différents. Ils ont créés des tables de décomposition où les fractions de la forme $\frac{2}{n}$ étaient remplacées par des sommes de fractions de dénominateurs différents. Le papyrus de Rhind écrit par le scribe Ahmès vers 1650 ans avant J-C contient une table qui donne une décomposition possible du double d'une fraction en la somme de deux fractions unitaires. Ce tableau donnait les doubles des fractions de dénominateurs impairs jusqu'au dénominateur 101. Ainsi, toutes les fractions sont exprimées sous la forme de somme de fractions unitaires (de numérateur 1).

Dans la civilisation égyptienne, l'écriture d'une fraction se faisait à l'aide d'un hiéroglyphe particulier « la bouche » qui signifiait alors « partie » et qu'on plaçait sur le nombre de parts de l'unité. Voici les symboles du système hiéroglyphique utilisés pour les nombre 1, 10 et 100 :

Par exemple :

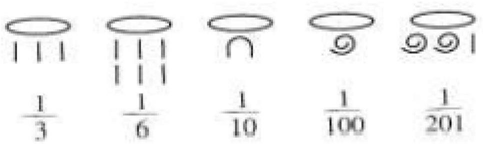


Figure 3 : Symboles représentant les fractions unitaires en Egypte (Alahmadati, 2016, P.26)

Seules certaines fractions disposent de symboles spécifiques. Il s'agit de : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{4}$

Figure 4 : Des symboles spécifiques des fractions en Egypte. (Ifrah, 1981, p. 225)

Les Grecs ont longtemps conçu les fractions non comme des nombres mais comme des opérateurs sur les nombres. Les Grecs donneront les méthodes de calcul pour ajouter, soustraire, multiplier et diviser des fractions. Chez les Grecs, les fractions n'existent que comme rapports de deux nombres entiers. Chez Diophante apparaît une notation des fractions sous la forme : dénominateur sur numérateur mais les deux nombres ne possèdent pas de trait comme dans notre notation actuelle.

Une notation analogue de la fraction à la nôtre est née en Inde vers la fin de l'antiquité, les mathématiciens de l'Inde notaient les fractions sous la forme : numérateur sur dénominateur, sans la barre de fraction qui fut introduite plus tard par les mathématiciens Arabes (Al Hâssan, 1150). Les indiens employaient des fractions dans une grande diversité de tâches, de façon assez proche des égyptiens, le plus souvent pour le partage, les calculs géométriques et des rapports de proportionnalité. Les fractions sont désignées le plus souvent sous le nom de bhinna (fendre, rompre, diviser…). On rencontre aussi les termes bhāga (diviser, partager…) et amśa (partie, portion). Le mot amśa a été surtout utilisé pour désigner le numérateur. Quant au dénominateur, il est appelé cheda (diviseur). On trouve aussi chez les mathématiciens indiens une conception unitaire des nombres entiers et fractionnaires, les nombres entiers étant considérés comme des fractions ayant l'unité pour dénominateur.

C'est au 9e siècle que les mathématiciens arabes vont utiliser de manière explicite les fractions et nombres rationnels et vont généraliser le concept de nombre rationnel ; la notation fractionnaire avec la barre est un héritage des arabes. Le perse Abu'l-Wafa (940 -998) est l'un des premiers à avoir accordé le statut de nombre à tout rapport de grandeurs. Au 11ème siècle chez les arabes, les fractions deviennent le rapport de deux longueurs et prennent le statut de nombre. Ainsi $\frac{2}{3}$ est perçu comme le nombre qui multiplié par 3 donne 2. On fait donc face à une évolution dans les sens de la fraction.

En 1427, dans La Clé de l'arithmétique, le célèbre Al-Kashi « expose la manière d'opérer dans le système sexagésimal de position qu'utilisaient les astronomes ». Il définit ce que représente une fraction décimale. Il explique et montre comment passer de toute fraction en somme de fractions décimales. Il conçoit même des tableaux de conversion de fractions décimales en fractions sexagésimales utilisées par les babyloniens comme évoqué précédemment.

En Occident, les nombres décimaux tardent à venir car l'écriture décimale des nombres a du mal à prendre sa place. Mais c'est Viète en 1579, qui incitera son usage devant les fractions sexagésimales. Il utilisera la « barre verticale pour séparer les parties entières et décimales des nombres ». Cependant, la découverte des nombres décimaux sera attribuée au belge Simon Stevin pour deux raisons. La première se justifie par la conception de sa théorie qui est indépendante des travaux qui ont été réalisés auparavant par les savants arabes. La deuxième raison découle du fait que son système s'est répandu d'une manière très rapide en étant adopté en une dizaine d'années. Stevin énonce dans son fascicule de dix pages intitulé « la Disme » et publié en 1582, des règles de calculs simples. Par exemple, dans son système de notation, le nombre 567 s'écrit 567° et se lit « cinq cent soixante-sept commencements ». Quant à la partie décimale, le nombre 0,457 se note : 41 52 73 et se lit « 4 primes 5 secondes et 7 tierces ». En 1592, un italien, Giovanni Antonio Magini fait évoluer cette notation et propose la notation suivante qui est par ailleurs toujours employée par les pays anglo-saxons : 89.532. En 1595, le suisse Jost Bürgi indique le chiffre du nombre qui correspond à l'unité simple par un petit rond au-dessus de celui-ci. Enfin, il faut attendre le début du 17^{e} siècle, pour voir apparaître la virgule dans l'écriture des nombres décimaux. On doit cette écriture au néerlandais Van Roijen Snell et à l'écossais Napier. On peut ainsi constater que l'invention du concept de fraction a été la réponse à des problèmes de la vie courante qui souhaitaient exprimer des rapports non entiers.

2.2.2. Analyse épistémologico-historique du concept de fraction

Il a fallu plus de 20 siècles pour arriver à la configuration qu'on a maintenant des fractions ; cela a été une élaboration progressive et nous permet de comprendre la complexité de cette notion et la difficile appropriation par les élèves.

Du point de vue historique, l'utilisation des fractions est liée à des tâches de mensuration, comparaison et distribution. Chez les peuples de l'antiquité, il y'a déjà le besoin d'exprimer des rapports non entiers, et cela souvent pour résoudre des problèmes de la vie courante. Nous voyons que les égyptiens percevaient la fraction comme étant un partage, cette représentation de la fraction comme partage est la première enseignée aux enfants et parfois la seule. Parmi les égyptiens, les babyloniens ou les indiens, il y'avait le besoin de calculer et de représenter le résultat du partage dans le cas de collection d'objets et du rapport dans le cas de problèmes de mensuration et de calculs géométriques. Le sens de partage est largement présent, aussi celui d'opérateurs sur les nombres qui est apparu après.

Les fractions unitaires étaient préférées par les peuples de l'antiquité. Par exemple les égyptiens ont conçu des tables de décomposition de fractions en somme de fractions de numérateur 1. L'usage unique des fractions unitaires a constitué un obstacle historique à la définition des fractions comme un nombre. La représentation des fractions avec la barre qui sépare deux nombres naturels est assez tardive. L'usage du modèle $\frac{parties}{entier}$ est lié à un besoin didactique très éloigné des problèmes réels dont les multiples aspects associés à la notion de fraction sont toujours porteurs. L'obstacle épistémologique est donc la fraction avec numérateur inférieur au dénominateur (fraction propre). Cet obstacle est présent chez les élèves, ceux-ci n'arrivent pas à comprendre, à donner un sens aux fractions dont le numérateur est supérieur au dénominateur, car cela ne fait pas penser de manière explicite à une partie d'un tout.

2.2.3. Développement du concept de fraction du point de vue mathématique

Cette partie est inspirée des travaux de thèse de doctorat d'Alahmadati

Les fractions représentent une réalité mathématique et c'est avec Weierstrass au 19^{e} siècle que la théorie complète sur le terrain formel des nombres « rationnels » et des nombres entiers a été mise en évidence, par l'élaboration de la théorie des couples. Du point de vue purement mathématique, la construction de la notion de fraction s'explique à partir de la théorie des ensembles.

Nous avons d'abord l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels, c'est –à-dire 0,1,2,3, … Cet ensemble est muni de deux opérations : l'addition et la multiplication.

Pour chaque opération, l'addition et la multiplication, les éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ n'admettent pas d'élément symétrique[3]. Il faut préciser le statut particulier de 0 qui est élément neutre pour l'addition et élément absorbant pour la multiplication. 1 est l'élément neutre pour la multiplication. Pour pouvoir palier à cela, on a construit successivement les ensembles $\mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est constitué de l'ensemble $\mathbb{N}$ et des symétries pour l'addition de tous les éléments de $\mathbb{N}$ (les nombres entiers négatifs). L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, constitué de l'ensemble $\mathbb{Z}$ et des symétries pour la multiplication de tous les éléments de $\mathbb{Z}$ excepté 0. Cela revient à définir des couples (m , n) tels que m $\in \mathbb{N}$ et n $\in \mathbb{N}^*$ et à

[3] un élément symétrique pour une loi de composition interne * : pour tout m $\in \mathbb{N}$, si e est l'élément neutre de la loi *, n' est symétrique de m si m * m' = e

définir dans l'ensemble ℕ × ℕ* une relation d'équivalence, notée ~. L'ensemble des classes d'équivalence obtenu est appelé ensemble quotient de ℕ par cette relation~.

L'ensemble quotient de ℕ par cette relation d'équivalence~, est alors muni d'une première loi de composition interne, l'addition, et d'une seconde loi de composition interne, la multiplication, et appelé ensemble des rationnels positifs noté ℚ+ . Une fraction est alors un couple de nombres (m, n) dont le second est non nul et ce couple définit un rationnel qu'on note $\frac{m}{n}$. On passe alors aux fractions équivalentes, en posant que «$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ » signifie que le rationnel ainsi défini est le même pour les couples (m, n) et (m`, n`). Un nombre rationnel est donc une classe de fractions équivalentes. Ces deux couples sont alors considérés comme deux représentants de la même classe d'équivalence et doivent vérifier par conséquent m × n` = m` × n. Parmi ces représentants d'une même classe de couples, il y a un couple particulier, $\frac{m}{n}$, où m et n sont des nombres premiers entre eux ; c'est cette fraction irréductible que nous prenons en général comme représentant de la classe d'équivalence. Par exemple, les couples (4, 10), (14, 35), (2, 5), … sont éléments d'une même classe d'équivalence, celle qui sera désignée par $\frac{2}{5}$ puisque 2 et 5 sont premiers entre eux. On peut construire de nombreuses autres classes d'équivalence, toute classe contient un seul couple (a, b) où a et b sont premiers entre eux.

Du point de vue de l'équation : (en considérant la multiplication notée ×, et l'addition +)

- L'équation $4 + x = 10$ admet une solution dans ℕ qui est l'entier 6
- l'équation $5x = 25$ admet une solution dans ℕ qui est l'entier 5
- L'équation $10 + x = 4$ n'admet pas de solution dans ℕ, mais admet une solution dans ℤ qui est le nombre -6
- L'équation $4x = 9$ n'admet de ni solution dans ℕ, ni dans ℤ, mais admet une solution dans ℚ, qui est la fraction $\frac{9}{4}$

Habran (1988) donne une figure montrant l'inclusion des différents ensembles de nombres et précise qu'ils sont liés par une relation d'inclusion hiérarchique au départ de l'ensemble des naturels qu'il considère comme la véritable fondation sur laquelle repose tout l'édifice numérique. [4]

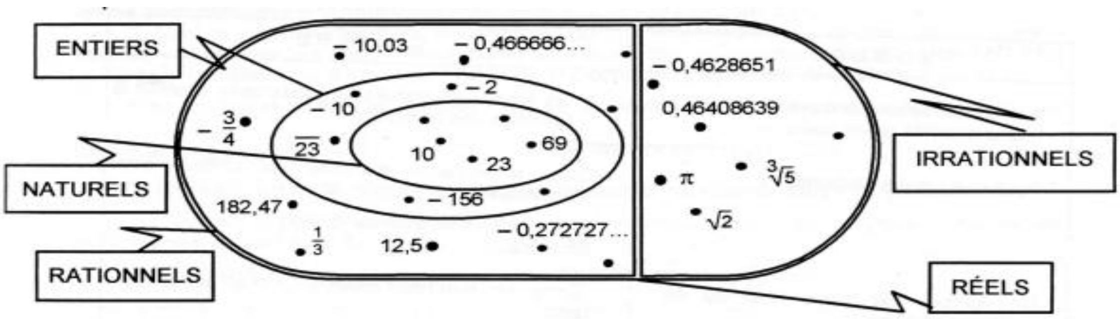


Figure 5 : l'inclusion des ensembles de nombres (L. Habran, 1988 in P. Stegen et C. Geron)

Habran (1988) ajoute que si l'école fondamentale veut donner du sens aux nombres, elle doit accorder une importance à l'élaboration des trois premiers ensembles de l'édifice : les naturels, les entiers relatifs et les rationnels.

2.3. Présentation des cadres théoriques

Dans cette partie, notre objectif consiste à présenter les différents cadres théoriques sur lesquels nous nous appuyons pour conduire notre recherche.

2.3.1. Les registres de représentation sémiotiques de Duval

Ce concept de registres sémiotiques est introduit en 1993 par Duval en mathématiques. Pour Duval (1993), « les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles à la perception, il faut donc en donner des représentations ». Duval (1993) explique qu'« une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents » (p.39).

Parmi les diverses représentations d'un objet, les *représentations sémiotiques* (celles qui lui donnent du sens) jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique. Pour donc résoudre un problème, il est essentiel de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation (géométrique, graphique, écriture symbolique, équation, langue naturelle, etc.) et aussi de savoir passer de l'un à l'autre.

[4] Stegen, P. et Daro, S. *L'enseignement des rationnels à la liaison primaire-secondaire*

Pour lui, un système est un registre de représentation sémiotique s’il permet les trois activités suivantes :

— La formation d’une représentation identifiable : idée qui consiste à constituer des écrits, traces qui soient identifiables comme une représentation de quelque chose dans un système déterminé.
— Le traitement : ces écrits ou ses traces seront traités par les seules règles propres au système.
— La conversion : il doit être possible de convertir les données dans un autre registre de telle sorte que ces représentations permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté.

Duval (1993) précise deux caractéristiques qui distinguent le rôle central et particulier des représentations sémiotiques en mathématiques :

- On ne les utilise pas d’abord pour évoquer des objets, ou pour communiquer, mais pour pouvoir effectuer des traitements; donc elles ne sont importantes que si elles peuvent être transformées en d’autres représentations.
- On recourt à des types très différents de représentations sémiotiques, car tous les systèmes sémiotiques n’offrent pas les mêmes possibilités de traitement. Le point fondamental dans l’activité mathématique n’est pas l’utilisation nécessaire de représentations sémiotiques mais la capacité à passer d’un registre de représentation sémiotique à un autre registre.

Nous précisons les termes de représentations internes et représentations externes car dans l’enseignement du concept de fraction, il faut d’abord faire comprendre aux élèves ces représentations.

<u>Représentations internes, représentations externes et lien entre les deux</u>

On distingue dans l’enseignement des mathématiques les représentations internes et les représentations externes (Zhang, 1997). Fandino Pinilla (2007) introduit également deux termes « noétique » et « sémiotique». Le terme *noétique* se réfère à l’acquisition conceptuelle et le terme *sémiotique* se réfère à la représentation des concepts à travers des systèmes de signes. Ces deux termes sont très importants en mathématiques.

Zhang (1997) a défini les deux termes de *représentations internes* et *représentations externes* :

> « *external representations* are the knowledge and structure in the environment, as physical symbols, objects, or dimensions (e.g. written symbols, beans of abacuses, dimensions of a graph, etc.), and as external rules, constraints, or relations embedded in physical configurations (e.g. spatial relations of written digits, visual and spatial layouts of diagrams, physical constraints in abacuses, etc.). *Internal representations* are the knowledge and structure in memory, as propositions, productions, schemas, neural networks, or other forms. » (p. 180).[5]

C'est-à-dire, les représentations externes sont la connaissance et la structure de l'environnement par exemple des symboles physiques, des chiffres écrits, visuels, les dispositions spatiales des diagrammes ; les représentations internes sont des connaissances, structure en mémoire par exemple des propositions, des productions, des schémas, réseaux neuronaux. Les deux représentations internes et externes jouent un rôle important dans la facilitation de l'apprentissage des mathématiques. Les représentations internes et les représentations externes peuvent être transformées les unes en les autres.

Zhang (1997) indique qu'il y a chez les individus trois situations différentes mettant en jeu les représentations internes et externes :

- celles où les représentations externes sont dominantes ;
- celles où les représentations internes sont dominantes ;
- celles où elles sont interdépendantes.

La communauté de l'enseignement des mathématiques est d'accord avec le troisième point de vue pour lequel les deux représentations internes et externes sont dépendantes les unes des autres et ces deux représentations contribuent à la compréhension conceptuelle des connaissances mathématiques acquises (Hiebert et Carpenter, 1992).

[5] « Les représentations externes sont les connaissances et les structures de l'environnement, sous forme de symboles physiques, d'objets ou de dimensions (par exemple des symboles écrits, des dimensions d'un graphique, etc.), et sous forme de règles, de contraintes ou de relations externes intégrées dans des configurations physiques (par exemple des relations spatiales de chiffres écrits, des dispositions visuelles et spatiales de diagrammes, des contraintes physiques dans des abaques, etc.). Les représentations internes sont les connaissances et les structures de la mémoire, sous forme de propositions, de productions, de schémas, de réseaux neuronaux ou d'autres formes. » (p.180)

Les représentations externes servent généralement comme indicateur des représentations internes car on peut difficilement mesurer les représentations internes ; les notions mathématiques n'existent pas dans la réalité concrète, on ne travaille pas avec les concepts mais avec leur représentations sémiotiques on ne peut donc étudier l'apprentissage en mathématiques sans faire référence à des systèmes de représentations sémiotiques.

En d'autres termes, on ne peut pas savoir ce que les enfants pensent, comment ils intègrent les concepts si ce n'est par les représentations externes de ceux-ci.

<u>Les trois registres de représentations sémiotiques possibles pour les fractions</u>

« Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système (sémiotique) de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement»(Duval, 1993). La possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend alors directement du système de représentation sémiotique utilisé. Dans l'enseignement, il est important de prendre en compte, soit les systèmes de registres, soit les problèmes de conversion entre les différents registres, pour permettre aux apprenants de maîtriser des concepts.

Dans le cas de l'enseignement des rationnels, Duval (1995) met en évidence l'importance de trois registres de représentation pour les nombres rationnels :

Le registre figuratif, selon l'approche de Duval (1993), ne représente que des états ou des configurations, les figures ne sont pas capables d'exprimer les actions ou les transformations. Le rapport entre les parties et l'entier, qui est l'opération mentale à la base de la notion de fraction, n'est pas évidente sur cette représentation. Ici, pour désigner la fraction, la figure doit être divisée également, ce qui va exiger des connaissances sur l'aire des figures. De plus, le dessin d'une figure fait au tableau, ne prenant pas en compte les mesures, peut induire l'élève en erreur sur la fraction représentée. Ceci s'aggrave quand il s'agit de comparer deux fractions représentées par deux figures, ou bien quand la même figure doit être sous-divisée pour représenter une autre fraction équivalente. Le registre figuratif a donc l'avantage de permettre la visualisation, mais a des inconvénients du point de vue de ce que Duval (1993) appelle le traitement.

La représentation fractionnaire (le registre numérique) : permet d'effectuer les opérations de manière pratique, à l'aide de la notion d'équivalence. Malgré le fait que la fraction représentée par deux nombres naturels ait des avantages du point de vue du traitement, elle a l'inconvénient d'être dans un registre dont la signification n'est pas évidente. De plus, la représentation fractionnaire est particulière en ce sens qu'elle peut utiliser un nombre naturel avec une signification relative, par exemple, le nombre 3 dans la fraction $\frac{3}{7}$ ne représente pas la même quantité que le même nombre dans le cas de la fraction $\frac{3}{5}$. Cette particularité introduit des contradictions parce que d'habitude le nombre naturel a toujours une valeur absolue.

La langue naturelle est un registre fondamental dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Dans le cas des fractions, les énoncés permettent de décrire des procédures mentales qui doivent être effectuées pour établir le rapport entre les parties et l'entier. Par exemple, le discours va permettre d'établir un codage pour passer de la figure à son registre fractionnaire: « j'ai l'entier, je le divise en trois parts égales, c'est le dénominateur et j'en prends deux, le numérateur ». La langue naturelle est également un registre ambigu, pour passer de la figure à la fraction numérique, le codage est simple ; mais pour passer de la fraction numérique à la figure, cela est un peu plus difficile car il faut d'abord choisir quel dessin prendre puisqu'il peut avoir plusieurs dessins pour représenter une même fraction donnée, il faut donc une conversion. La langue naturelle peut être vue comme le registre qui va permettre la coordination entre les deux autres registres figuratif et numérique.

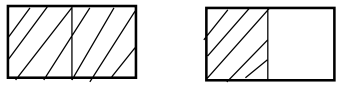
Comme l'a dit Duval, un système est un registre de représentation sémiotique s'il permet les trois activités suivantes : la formation d'une représentation identifiable, le traitement et la conversion. En prenant l'exemple des registres de représentations des fractions, on peut développer ces activités. Si on considère la fraction $\frac{1}{2}$:

- La formation d'une représentation identifiable : un exemple dans le registre figural peut être le dessin d'un carré divisé en 2 parties égales ; un exemple dans le registre numérique est l'écriture de la fraction $\frac{1}{2}$ et un exemple dans le registre de la langue naturelle peut être : j'ai l'entier, je le divise en 2 parts égales.
- Le traitement : dans le registre numérique, qui est le plus facile pour le traitement, on peut effectuer des opérations avec les fractions, les comparer …
  On a par exemple $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- La conversion : il est nécessaire de pouvoir convertir, passer d'un registre à un autre pour mieux comprendre le concept ; le passage du numérique au figuratif est très

important, par exemple pour représenter $\frac{3}{2}$, il faut le passage du registre numérique avec l'écriture $\frac{3}{2}$ au registre figuratif, il faut accepter de prendre plus d'une figure qui doivent aussi être divisées en deux parties équivalentes. Ce qui va permettre de déconstruire chez l'élève l'idée de la fraction comme partie d'un tout.

On aura par exemple :

$\frac{3}{2} =$



De l'intérêt de la notion de registres sémiotiques dans notre recherche

Selon Duval (1993), « une écriture, une notation, un symbole, représentent un objet mathématique ; un nombre, une fonction, un vecteur…de même, les tracés et les figures représentent des objets mathématiques ; un segment, un point, un cercle…cela veut dire que les objets mathématiques ne doivent pas être confondus avec la représentation qui en est faite » (p.39). La notion de représentation sémiotique définie par Duval est pertinente pour comprendre comment les élèves manipulent les objets mathématiques. Ces objets tels que droites, cercles, nombres, etc. ne sont pas des objets réels ou physiques, ils ne sont pas concrets ; les élèves doivent donc passer par leurs représentations, mentales et sémiotiques pour les manipuler.

Les fractions sont enseignées à l'école primaire et au secondaire dans les classes de 6^e et 5^e. Dans les manuels scolaires, il y'a des activités impliquant une ou plusieurs représentations sémiotiques concernant les fractions. Ces activités visent à mettre en œuvre des apprentissages relatifs aux figures, au langage naturel et aux nombres, ce qui fait notre choix des registres sémiotiques. Dans notre étude, il est question de voir les différentes représentations des fractions faites par les élèves de 6^e ; de voir les sens que les élèves donnent aux différentes représentations sémiotiques ; de voir comment ils mobilisent leurs connaissances pour résoudre divers problèmes portant sur les fractions. Il est également question de voir comment les enseignants abordent les fractions avec les élèves, quels registres de la fraction ils mettent en jeu dans leur enseignement. Pour cela on se réfère au travail de Duval (1995), qui analyse le rôle des différents registres dans l'apprentissage.

Les élèves pour comprendre les objets mathématiques et pas seulement leurs représentations, doivent maîtriser ces objets dans plusieurs registres et savoir coordonner ces représentations. La fraction étant un concept, il existe un côté abstrait dans sa manipulation et son apprentissage est au sein de la sphère de la noétique. On peut fonctionner avec un seul ensemble, un objet, un gâteau en le divisant et en obtenant une partie, mais le résultat obtenu n'est pas la fraction mathématique, mais la fraction de cet objet.

Il y'a différents registres possibles de la fraction, que l'enseignant doit prendre en compte lors de ses activités; le travail sur ces différents registres va amener l'enseignant à travailler dans le champ conceptuel possible de la fraction, ce qui nous amène à notre deuxième cadre théorique.

2.3.2. Théorie des champs conceptuels

Gérard Vergnaud a développé la théorie des champs conceptuels qu'il définit comme étant une « théorie cognitive qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques […] sa principale finalité est de fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances » (Vergnaud, 1990, p. 135).

La théorie des champs conceptuels offre un cadre pour cerner la complexité et la difficulté des problèmes mathématiques, mais aussi pour analyser les procédures et les erreurs des élèves et étudier leurs représentations symboliques (Levain et Vergnaud, 1994).

Pour Vergnaud (1981), au-delà de l'enseignement élémentaire, les difficultés causées, par exemple, par les notions de rapport, de proportion, de fraction et de fonction demandent des précautions didactiques importantes, dont une étude rigoureuse des problèmes mathématiques. L'apprentissage des fractions est complexe, c'est un concept qui a plusieurs statuts : partie d'un tout, partie d'un ensemble (cas discret), opérateur, rapport, nombre sur une droite numérique, mesure, nombre. Tous ces statuts sont variables d'une activité à une autre et dans plusieurs activités on retrouve plus d'un statut. A toute cette complexité dans l'usage du concept, il faut ajouter les difficultés d'ordre linguistique : l'introduction du formalisme dans les textes, le passage d'un langage à un autre. Cela nous permet de soutenir l'idée selon laquelle le concept de fraction et son apprentissage relèvent des connaissances complexes, et ainsi de motiver le choix du cadre des champs conceptuels pour nos recherches.

Les concepts sont utilisés dans diverses situations, et dans chacune d'elle, ils ne sont pas mis en œuvre de la même manière, comme c'est le cas de la fraction, ce qui rend compte de la complexité de ces concepts. Des propriétés différentes du concept dont la pertinence est variable selon les situations à traiter, doivent être mobilisées pour résoudre le problème posé.

C'est ainsi que Vergnaud affirme un principe d'élaboration pragmatique des connaissances : « C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Ce processus d'élaboration pragmatique est essentiel pour la psychologie et la didactique, comme il l'est d'ailleurs pour l'histoire des sciences. […] Si l'on veut prendre correctement la mesure de la fonction adaptative de la connaissance, on doit accorder une place centrale aux formes qu'elle prend dans l'action du sujet. La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas. » (Vergnaud, 1990, pp.135-136). Pour Vergnaud une connaissance est dite opératoire lorsqu'elle « permet de faire réussir » (Vergnaud, 2001).

Il soutient que les schèmes sont au centre du développement cognitif. Un schème, selon cet auteur, est une « organisation invariante de l'activité pour une classe de situations données » ; c'est dans les schèmes qu'on doit rechercher les éléments cognitifs permettant à l'action du sujet d'être opératoire. Un schème est universel et peut donner naissance à différentes séquences d'action, de recueil d'informations et de contrôle, selon les caractéristiques de chaque situation. Un schème est formé de quatre composantes :

- But, sous-but et anticipations ;
- Règles de l'action, prise d'information et contrôle (règle de type 'si… alors…) ;
- Invariants opératoires : concepts en acte et théorème en acte ;
- Possibilités d'inférence en action (raisonnements pour 'calculer' les règles et anticipations).

Les invariants opératoires d'un schème sont les éléments responsables pour la reconnaissance des éléments pertinents de la situation :

a) Propositions, susceptibles d'être vraies ou fausses (théorèmes-en-acte) ;
b) Fonction propositionnelle, briques indispensables à la construction des propositions, sont des propriétés et des relations (concepts-en-actes, pas nécessairement conscients) ;
c) Arguments, les objets. En mathématiques, par exemple, les nombres, les propositions, les relations, etc…

Ainsi, concernant le concept de fraction :

- Un théorème-en-acte peut être $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3}{9}$ qui découle du glissement de la règle de multiplication sur les fractions. C'est-à-dire un théorème en acte peut être : la somme deux fractions consiste en la somme des numérateurs entre eux et en la somme des dénominateurs entre eux.
- Un concept-en-acte peut être : la fraction est partie d'un tout, et de ce fait les élèves ne conçoivent pas les fractions plus grande que l'unité ;
- Les arguments, les objets peuvent être des nombres, des valeurs numériques. Ces nombres, selon leurs valeurs dans un problème, peuvent contribuer à rendre celui-ci complexe.

La construction d'un concept conduit à trois étapes comme l'explique Vergnaud (1991) dans la théorie des champs conceptuels : les situations, les invariants et les symboles. Autrement dit, par rapport au développement conceptuel, un concept est appris par les individus quand ils dominent trois ensembles de facteurs en relation avec ces concepts, à savoir :

a) « l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence),
b) l'ensemble des invariants opératoires sur lesquels repose de propriétés du concept (le signifié),
c) l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les procédures de traitement (le signifiant).» (Vergnaud, 1996, p. 212).

Pour Vergnaud (2007) le champ conceptuel est à la fois un ensemble de situations dont la maîtrise progressive appelle une variété de concepts, de schèmes et de représentations symboliques en étroite connexion et un ensemble de concepts qui contribuent à la maîtrise de ces situations. La théorie des champs conceptuels permet de regrouper les situations et les problèmes mathématiques à résoudre. Nous donnons deux exemples de champs conceptuels exploités dans les ordres primaire et post-primaire : le champ conceptuel des structures additives et le champ conceptuel des structures multiplicatives. Le champ conceptuel des structures additives correspond à l'ensemble des situations qui demandent une addition, une soustraction ou une combinaison de telles opérations (Levain et Vergnaud, 1994). Le champ conceptuel des structures multiplicatives est définit comme des « problèmes de proportion simple et multiple, qui incluent des fonctions linéaires et n- linéaires, espaces vectoriels, analyse dimensionnelle, fraction, rapport, taux, nombre rationnel, et de multiplication et de division »

(Vergnaud, 1983, p. 141). Il est important de noter que les nombres rationnels et les fractions entrent dans cette catégorie et englobent une variété de sujets.

Gérard Vergnaud (1996) relève deux points sur l'espace large et complet accordé au terme situation par Brousseau:

> « Les processus cognitifs et les réponses du sujet sont fonction des situations auxquelles ils sont confrontés. […] nous en retiendrons deux idées principales :
>
> 1) celle de variété : il existe une grande variété de situations dans un champ conceptuel donné, et les variables de situation sont un moyen de générer de manière systématique l'ensemble des classes possibles,
>
> 2) celle d'histoire : les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et procédures que l'on veut leur enseigner. » (p.218).

Le point n°1 constitue la base de l'analyse des manuels scolaires ; le point n°2, donne tout son intérêt à évaluer où en sont les élèves dans l'appréhension du concept de fraction.

La théorie des champs conceptuels fournit un cadre pour comprendre le développement progressif des savoirs et savoir-faire à l'intérieur d'un ensemble de situations. Elle intéresse à la fois le psychologue et le didacticien puisqu'elle permet de catégoriser ces différentes situations, d'analyser les procédures utilisées par les élèves dans ces situations, y compris les erreurs et d'étudier les principales représentations symboliques utilisées par les élèves. Elle intéresse aussi l'enseignant en l'aidant à proposer aux élèves un ensemble organisé de problèmes. L'enjeu principal étant d'aider l'élève à développer un répertoire de significations d'une plus grande richesse que celles habituellement enseignées comme la réduction et la limitation de l'enseignement du concept de la fraction à une ou deux significations, à savoir la signification partie-tout, mesure.

Étudier le champ conceptuel, qui englobe l'apprentissage de la fraction, revient en partie à regarder toutes les situations qui s'y réfèrent (en l'occurrence pour nous celles rassemblées à l'intérieur des manuels scolaires) et de réfléchir à l'ensemble des objets présents : tâches réclamées aux élèves, formes symboliques utilisées, variables en jeu… pour en dégager des invariants d'analyse et d'actions indiquées aux élèves sur ces problèmes qui leur sont présentés. Pour en dégager le sens qui est envoyé à l'élève. Nous allons également mettre en avant les notions de théorème-en-acte, de concept-en-acte et d'arguments afin de regarder les représentations des élèves.

CHAPITRE 3 : REVUE DE LA LITTERATURE

Dans cette partie, notre objectif consiste à visiter quelques travaux en relation avec notre thème et d'en tirer des éléments qui permettront de nourrir notre recherche.

3.1. Autour du concept de fraction à l'école primaire en France : Étude exploratoire des significations de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III (Abdul Aziz Alahmadati, 2016)

Les résultats que nous présentons ici sont issus de la thèse de doctorat d'Alahmadati intitulée : « Autour du concept de fraction : Étude exploratoire des significations de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III ». Cette thèse a été soutenue en 2016 à l'Université de Lyon. Les mots clés de cette étude sont : Concept de fraction, significations de la fraction, enseignement-apprentissage des fractions, le manuel scolaire de mathématiques.

L'auteur s'intéresse au concept mathématique de fraction et à son enseignement-apprentissage au cycle 3 de l'école primaire en France. Ce concept difficile à comprendre par les élèves est introduit formellement dès la classe de CM1 du cycle 3 de l'école primaire.

Sa recherche a 3 objectifs qui sont :

- l'étude de l'enseignement des fractions, qui sera faite par analyse des situations d'apprentissage qui proposent des activités portant sur les fractions dans 10 manuels scolaires ;
- l'étude des conceptions et les représentations chez ces élèves à l'égard de la notion de fraction, en particulier à l'égard des différentes significations de la fraction données par ces élèves ; ce qui sera observé par l'analyse d'un questionnaire destiné aux élèves ;
- la connaissance des conceptions de quelques enseignants sur la manière avec laquelle ils abordent les fractions avec leurs élèves. Pour ce faire, 8 enseignants parmi les 12 enseignants des classes concernées ont participé à l'étude.

Nous nous intéressons plus particulièrement ici aux significations de la fraction retenues par l'auteur dans sa thèse.

Il insiste sur la notion de prendre en compte les différentes significations des fractions dans l'enseignement des fractions : « Kieren, Vergnaud et Behr s'accordent pour opposer la possibilité d'enseigner un de ces aspects sans envisager, à court ou long terme, l'étude des autres aspects. »

Il précise que les différentes significations repérées par les auteurs ne se situent pas toujours au même niveau et sont de ce fait difficilement utilisables en tant que telles.

Les lectures faites sur les travaux de Hétu et Desjardins (1974), Kieren (1980), Post (1989), Behr et al. (1983), Prevost (1983), Payne (1984), Lester (1984), Mick et Sinicrope (1989), Terrien, Dionne et Mura (1994), Niemi (1996), Rouche (1998), Adjiage et Pluvinage (2000), Watanabe (2002) et Blouin (2002) lui ont permis de répertorier neuf significations accordées aux fractions. Ces significations possibles sont : relation entre une partie et un tout (quantité continue ou un seul objet), relation entre une partie et un tout (quantité discrète ou un ensemble d'objets), opérateur, rapport, quotient, mesure, probabilité, nombre sur une droite numérique et nombre.

a) <u>Relation entre une partie et un tout (quantité continue ou un seul objet)</u>

Cette signification est la plus commune selon plusieurs auteurs, elle fait partie des premières significations enseignées aux enfants et selon Marschall (1993), « il s'agit de l'une des premières situations rencontrées par les enfants lorsque, par exemple, ils partagent leur collation de manière équitable avec leurs camarades ». Cette signification repose sur le principe de la division d'une quantité en plusieurs parties égales. Pour Lamon (1999), « la signification partie d'un tout de la fraction est définie comme une situation dans laquelle une quantité continue ou un ensemble d'objets discrets sont partitionnés en parties de taille égale ».

Ici, la notion de quantité continue se réfère à une longueur, une surface ou un volume ; le tout dont une fraction est une partie, est composé d'un seul objet comme une feuille de papier, une orange, une tarte ou un carré.

Il précise que « la signification partie/tout de fractions a traditionnellement servi à initier les étudiants à l'instruction sur les fractions », car ce modèle semble plus naturel. Lamon (1999) note l'importance de cette signification en affirmant qu'il fournit en général le langage et le symbolisme pour les nombres rationnels.

Selon Behr et Post (1992), afin de développer cette signification, les élèves doivent comprendre que les parties qui composent le tout doivent être de même taille ; pouvoir partitionner une quantité et voir si le tout a été divisé en parties égales comprendre que les parties composées du tout doivent être de taille égale.

De plus, selon Boulet (1999), « ceux-ci doivent développer l'idée d'inclusion (à savoir, les parts du numérateur sont des composantes du dénominateur) et comprendre que tant que le nombre de parts dans lequel le tout est divisé augmente, leur taille diminue ». Il s'agit de prendre une grandeur continue (comme par exemple une tarte) et de la diviser en parties égales afin de choisir certaines parties sur le tout. « Ces parties obtenues sont considérées comme des unités nouvelles dont le nom est fourni par le quantième de l'unité qui s'appelle alors dénominateur. Un nombre de ces parties est déterminé par le numérateur qui ne peut être qu'un nombre entier naturel ». Par exemple, la fraction $\frac{6}{13}$ peut représenter 6 parties égales d'une quantité continue (forme géométrique, pizza, etc.) sur le total de 13.

Kerslake (1986) met en garde contre « l'apprentissage du seul modèle de partie-tout qui peut entraîner de sérieuses limitations sur la compréhension des fractions des enfants ». Pour lui, le fait d'utiliser uniquement cette représentation peut empêcher les enfants de développer d'autres significations des fractions, car elle peut se révéler inadéquate dans certaines situations.

De plus, l'incompréhension de cette relation, entre partie-tout et l'unité, « peut entrainer des problèmes dans le développement conceptuel, telles la compréhension d'addition des fractions (le résultat d'additionner deux fractions peut être supérieur à l'unité), l'ordre des fractions et le fait de trouver des fractions équivalentes ».

Il précise que : «les élèves possèdent généralement une vision réductrice, stéréotypée des fractions, pour ceux-ci, une fraction est toujours une partie plus petite que l'unité, il faut diviser puis multiplier etc... ». Afin de permettre une meilleure compréhension des fractions, il donne quelques conceptions de l'unité que les élèves doivent développer :

- l'unité peut être un objet entier ou une collection
- l'unité peut être une partie d'objet qui est à son tour partagée (partages successifs)
- l'unité peut être reconstruite à partir des différentes parties.

b) <u>Relation entre une partie et un tout (quantité discrète ou un ensemble d'objets)</u>

On parle de quantité discrète ici lorsque le tout se compose de plusieurs objets discrets (séparés) : 10 billes, 4 bonbons, etc…

La différence entre cette signification et la signification partie-tout (quantité continue) est que : ici plutôt qu'une grandeur continue soit divisée, une grandeur discrète (un ensemble d'objets), est divisée en parties égales. La fraction $\frac{4}{7}$ peut représenter ici quatre objets de même nature sur un total de sept.

Dans les salles, ce qui est observé c'est la construction de la notion de fraction sur des fractionnements de l'unité. Pour l'auteur, cette notion doit se construire également sur le fractionnement des collections d'objets prises comme unité. « Brissiaud parle dans ce cas de partition d'une pluralité; démarche plus complexe que le fractionnement d'une unité mais fondamentale dans la construction de la notion de fraction ».

c) <u>Opérateur</u>

Cette signification désigne des situations où la fraction opère sur une quantité. Lamon (1999) affirme brièvement que « la notion d'opérateur des nombres rationnels est sur le rétrécissement et l'élargissement, la compression et l'expansion, l'agrandissement et la réduction ou la multiplication et la division ». L'auteur précise que, dans la signification opérateur, la fraction peut être considérée comme une fonction algébrique qui transforme des figures géométriques ou des ensembles d'objets). On voit que lorsqu'une fraction opère sur un élément, elle l'étend ou le rétracte. Il prend l'exemple suivant: « si une longueur de 1 est opéré par $\frac{p}{q}$, la longueur étirée est de p fois sa longueur, et rétrécie par un facteur q ». Par exemple pour une longueur de 8 et un opérateur de $\frac{1}{4}$, le résultat serait 8 × 1 ÷ 4=2.

Il précise que cette interprétation de la fraction permet de considérer la fraction comme une fonction ou comme une suite d'opérateurs multiplicatifs. On peut alors « construire des images d'une figure géométrique par des homothéties…construire des collections diverses en transformant une collection originale ».

Ici, le sens du nombre en est affecté, le nombre représente maintenant une transformation ; « la fraction $\frac{3}{4}$ n'est pas interprétée comme étant 3 parties sur 4 parties en tout mais bien comme étant une suite d'opérateurs multiplicatifs (x 3 et ÷ 4) qui sont appliqués sur une quantité. De là, en découle une mise en place naturelle de la notion d'inverse multiplicatif, propriété essentielle des nombres rationnels ».

L'idée d'opérateur apparait lorsqu'on se trouve devant une situation dans laquelle il faut transformer une quantité. Il prend un exemple « si nous voulons savoir combien de sucettes nous avons si nous en prenons les $\frac{2}{3}$ de 30, la première opération est de diviser 30 en 3 parts égales et ensuite de multiplier par 2 ou encore l'inverse. Cela revient à calculer $\frac{2}{3} \times 30$ ». Dans cet exemple on voit que deux opérations sont en jeu, une multiplication et une division. La transformation est donc composée de deux opérations inverses, c'est-à-dire la division par le dénominateur et la multiplication par le numérateur.

Cette signification est très importante pour améliorer la compréhension chez les enfants de la multiplication et de la division ; il faut conduire l'enfant dans ce cas à décomposer une fraction en deux opérations, il pourra ainsi mieux saisir le sens du numérateur et celui du dénominateur.

d) <u>Rapport</u>

Les fractions sont de la forme $\frac{p}{q}$, avec p et q des entiers qui sont sous la forme d'un rapport de nombres. Le rapport est une relation qui exprime la notion de quantité relative. Selon Rouche (1998) « un rapport est une comparaison et il exprime une relation entre deux grandeurs ou entre deux ensembles finis d'objets ». Il exprime une relation entre des grandeurs discrètes ou continues qui consiste à comparer deux grandeurs. Il s'agit de relations entre couples de nombres. On peut donc facilement écrire le rapport entre deux quantités par une fraction.

Il prend un exemple pour mieux faire comprendre cette signification : « Il y a 15 filles et 18 garçons dans la classe A, alors que nous comptons 14 filles et 21 garçons dans la classe B. Dans le premier cas, la classe A, le nombre de filles représente les 5 sixièmes du nombre de garçons. Le nombre de garçons est les 6 cinquièmes du nombre de filles. Dans le second cas, la classe B, le nombre de filles est les 2 tiers du nombre de garçons. Le nombre de garçons représente les 3 demis du nombre de filles ».

« Cette signification est aussi appelée le modèle exclusif à cause de l'indépendance des deux quantités mises en relation. La notion de proportion découle de cette signification ».

Il précise que les significations « partie-tout » et « rapport » sont liées par la relation d'équivalence.

Il prend un exemple « lorsque nous interprétons la fraction $\frac{3}{8}$, selon son sens « partie-tout », nous considérons 3 parties sur 8 parties égales au total ou 3 objets bleus sur 8 objets au total, les 3 objets appartiennent à la collection totale. En revanche, lorsque la fraction $\frac{3}{8}$ indique un rapport, le 3 peut signifier 3 objets bleus pour 8 objets rouges, donc 11 objets au total ».

e) <u>Quotient</u>

« La barre d'une fraction est un symbole de division où le quotient (la fraction) est le résultat de la division dans laquelle le numérateur définit la quantité à être partagée et le dénominateur définit les partitions de la quantité ». Cette signification est rattachée à la définition du nombre rationnel ; on considère ici que la fraction $\frac{a}{b}$, est définie comme la division des deux nombres a et b (a ÷ b). Elle dérive du système décimal et aussi de la nécessité de représenter les expressions algébriques avec un dénominateur qui ne peut être réduit.

Pour comprendre cette signification, les élèves doivent pouvoir relier les fractions à la division et de comprendre le rôle du diviseur et du dividende dans cette opération. Ici $\frac{5}{3}$, est introduite comme solution de l'équation $3x = 5$, c'est-à-dire comme quotient de 5 par 3, 5 partagé en 3.

C'est difficile pour les élèves de concilier deux significations de la fraction à savoir la fraction-partage et la fraction-quotient et comprendre que « 1 partagé en 3 pris 5 fois « est égal à » 5 partagé en 3 « ou encore que » 5 fois le tiers de 1 « est égal au » tiers de 5 ». C'est à partir de là que la fraction prend le statut de nombre rationnel qui sera enrichi par le calcul sur les fractions.

f) <u>Mesure</u>

Dans la vie, les fractions peuvent exprimer des mesures : «un quart d'heure», « trois quarts de la population » ; cette signification suppose l'existence d'une unité de mesure qui peut être une mesure de longueur, d'aire, de temps ou d'argent…Selon Rouche (1998), «les mesures expriment des grandeurs, la fraction - mesure est un rapport entre une grandeur mesurée et une autre grandeur de même espèce choisie comme unité de mesure ».

La mesure d'une grandeur se définit comme suit : « on appelle mesure d'une grandeur le coefficient numérique par lequel il faut multiplier une autre grandeur de même espèce, dite unité de mesure, pour former la grandeur considérée » (Louis Couturat, 1914 in Alahmadati, 2016),. L'auteur présente 2 cas qui peuvent apparaitre lorsqu'on a 2 grandeurs de même espèce A et B qu'on veut mesurer :

- si la grandeur A est multiple de B (A=mB), alors le nombre entier m est la mesure de A par rapport à l'unité B
- si les grandeurs A et B sont multiples d'une même grandeur M (de même espèce) : (A=aM ; B=bM ; M=$\frac{B}{b}$;A=$\frac{a}{b}M$) dans ce cas la mesure de A, par rapport à l'unité B, est la fraction $\frac{a}{b}$ formée par les deux coefficients entiers a et b qui définissent les grandeurs A et B comme multiples d'une même grandeur M.

Pour certains auteurs comme Behr et al. (1983), la signification-mesure est une reconceptualisation de la signification partie-tout. Car dans celle-ci, on considère « combien il y a d'une quantité par rapport à une unité particulière de la quantité ». Elle se différencie du point de vue de Kieren de l'interprétation partie-tout « par une référence explicite et un traitement dynamique de l'unité ». « Ainsi, $\frac{3}{4}$ n'est plus considéré comme étant 3 parties prises sur 4 parties égales d'un tout mais exprime une relation multiplicative entre deux mesures quelconques ou entre deux mesures de même nature. Selon cette relation, la fraction unité se note $\frac{1}{4}$ car elle est contenue 4 fois dans un entier, elle représente le quart de un ».

Il est important de préciser les 3 unités qui doivent être identifiées lors de l'utilisation d'une fraction-mesure : l'unité de référence, l'unité de partage et l'unité discrète. L'auteur précise que dans le cas des quantités continues, deux unités de mesure suffisent, l'unité de référence et l'unité de partage. L'unité de partage est définie par le dénominateur fractionnaire ($\frac{3}{4}$ de pomme). Dans l'expression « trois quarts de litre », l'unité de référence est le litre et l'unité de partage est le quart de litre ; dans « le quart d'un paquet de 20 bonbons », l'unité de référence est le paquet de bonbons, l'unité de partage est le quart du paquet et l'unité discrète est le bonbon.

g) <u>Nombre sur une droite numérique</u>

L'auteur précise que cette signification est liée à celle de mesure car ici, nombre sur une droite numérique repose sur une mesure de longueur. L'unité de mesure étant la distance de zéro à un. « Les multiples de cette unité de distance sont générées sur la droite par répétition de la distance de zéro à un, au long de la droite numérique ». C'est une catégorie différente « pour situer une fraction sur une droite graduée, il faut savoir entre quels nombres entiers et entre quelles fractions elle se situe ».

La droite numérique a des avantages, elle peut être utile « pour modéliser des fractions supérieures à un », « pour la comparaison des fractions », « pour renforcer la compréhension des enfants sur les concepts de l'ordre et sur l'équivalence des fractions.

h) <u>Nombre</u>

Cette signification est générale et abstraite ; « toutes les autres significations accordées aux fractions en découlent ». Les notions importantes ici sont les opérations arithmétiques, la comparaison de fractions et la notion de fractions équivalentes.

La signification de la fraction comme nombre désigne « les fractions qui servent à effectuer des calculs où aucun autre contexte n'intervient ».

A la suite de ces significations, l'auteur précise qu'elles ne sont pas indépendantes les unes des autres « les problèmes mathématiques qui donnent sens aux fractions se réfèrent rarement à une unique et à une seule de ces significations ». Pour comprendre donc la notion de fraction, il est important de comprendre les significations mais aussi de savoir les coordonner.

<u>Conclusion :</u>

Cette partie nous permet de mieux comprendre les différentes significations attribuées aux fractions, de comprendre la complexité de la notion de fraction à travers ses différents sens. Dans notre travail, nous allons nous servir de ces significations répertoriées par Alahmadati, à l'exception de la signification probabilités, car nous considérons qu'elle n'est pas utile pour la classe de 6^{e}.

3.2. Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire (Guy Brousseau, 1987).

La complexité du concept de la fraction et son enseignement ont donné lieu à de nombreuses recherches, comme celles de G. Brousseau et R. Douady en 1987. Dans cette partie nous présentons une partie de la recherche menée par Brousseau, nous nous servons du document « Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire » I.R.E.M. de Bordeaux, 1987.

Il a conçu une ingénierie didactique sur l'enseignement des nombres rationnels et des décimaux ; elle a pour but de « favoriser une réflexion fondée sur l'observation en vue de la formation des maîtres ». Son ingénierie comporte 65 leçons dont certaines concernent les nombres décimaux. Il précise que ces notions ne sont pas indispensables en classe de CM2 (classe dans laquelle il mène ses recherches), mais trouveraient leur place en classe de 6^{e} ou 5^{e}. Nous avons sélectionné les trois premiers modules, car ce sont les principales séances qui impliquent les nombres rationnels.

Module 1 : les nombres rationnels : construction

C'est à travers une situation avec des feuilles de papier de différentes épaisseurs qui sont présentés aux élèves que Brousseau introduit les fractions ; il veut que les élèves arrivent à trouver un moyen de désigner les différents types de papier en fonction de son épaisseur afin de comparer les types de feuilles.

Les élèves se sont vites rendus compte que l'épaisseur d'une feuille de papier étant trop mince pour être mesurée avec une règle graduée ; ils décident de mesurer l'épaisseur de plusieurs feuilles de papier et obtiennent les résultats suivants:

5 feuilles de type A = 2 mm

10 feuilles de type A = 4 mm

8 feuilles de type B = 3 mm

L'enseignant les amène à construire des classes d'équivalence afin de vérifier la cohérence de leurs résultats: si l'épaisseur de 5 feuilles est égale à 2mm, alors l'épaisseur de 10 feuilles de même type doit être égale à 4mm. Ils établissent des tableaux où figurent plusieurs écritures différentes pour un même type de papier A, B, C, D ou E.

A	B	C	D	E
(48f;9mm)	(10f;2mm) (5f; 1mm) (20f;4mm)	(100f; 8 mm)	(100f;11mm)	(10f;4mm)

A partir de cela donc, il explique aux élèves comment passer de l'écriture d'un couple (nombre de feuilles ; nombre de mm) à l'écriture fractionnaire:

> « Si l'on veut désigner l'épaisseur d'une feuille elle-même et non plus un tas de feuilles de telle épaisseur, si l'on veut désigner toute la classe des couples et non plus un couple particulier, il faut

> inventer un nom et une écriture particulière. Cette écriture existe, on l'appelle fraction. Par exemple, on dit que le papier de type C a une épaisseur de 4 mm pour cinquante feuilles, ou encore "4 pour cinquante millimètres", et le plus souvent de "4 cinquantième mm" et on écrit ceci à l'aide de la fraction $\frac{4}{50}$. (50; 4) désigne un tas de 50 feuilles qui mesure 4 mm, $\frac{4}{50}$ désigne l'épaisseur d'une feuille de papier telle qu'il en faut 50 pour obtenir une épaisseur de 4 mm » (Brousseau, 1987 P36)

A la fin de ce 1[er] module, les enfants peuvent trouver des couples équivalents, comparer les épaisseurs des feuilles ; désigner l'épaisseur d'une feuille de papier à l'aide d'une fraction et trouver des fractions égales.

Module 2 : les nombres rationnels : opérations

- **<u>Addition :</u>** il pose le problème aux élèves de savoir : « *Quelle est l'épaisseur de la somme de deux feuilles de type différent ? Soient par exemple des types* $\frac{10}{50}$ *et* $\frac{40}{100}$»

Les élèves pensent d'abord spontanément à «$\frac{10+40}{50+100}$ », mais se rendent vite compte que ça ne marche pas. Ils essaient donc d'obtenir des classes d'équivalence afin que les mesures soient comparables : $\frac{40}{100} = \frac{20}{50}$, l'addition devient donc $\frac{10}{50} + \frac{20}{50} = \frac{30}{50}$

$\frac{10}{50} = \frac{20}{100}$, l'addition devient donc $\frac{20}{100} + \frac{40}{100} = \frac{60}{100}$

Brousseau insiste sur le fait que c'est mieux de commencer l'addition des fractions par l'addition des fractions de dénominateurs différents, car il faut que l'élève soit dans une situation dans laquelle la recherche d'un dénominateur commun apparaisse nécessaire et primordiale.

- **<u>Soustraction :</u>**

L'enseignant rappelle d'abord les résultats de la dernière séance, les significations des fractions $\frac{8}{50}$ (l'épaisseur d'une feuille telle qu'il en faut 50 pour obtenir une épaisseur de 8 mm) et $\frac{6}{100}$ (l'épaisseur d'une feuille telle qu'il en faut 100 pour obtenir une épaisseur de 6 mm), l'enseignant écrit la soustraction $\frac{8}{50}$ - $\frac{6}{100}$. Il essaie ensuite de faire que les enfants arrivent à donner un sens à ce qu'il a mis au tableau, il utilise pour cela une figure explicite. Ceux-ci arrivent donc à l'écriture $\frac{6}{100}+ ... = \frac{8}{50}$.

Et comme avec l'addition ils ont vu la nécessité de travailler sur des fractions de même dénominateur, les élèves aboutissent, après recherches, aux deux résultats suivants:

$\frac{8}{50} = \frac{6}{100}$, la soustraction devient donc $\frac{6}{100}+ \frac{10}{100}= \frac{16}{100}$

$\frac{6}{100} = \frac{3}{50}$, la soustraction devient donc $\frac{3}{50} + \frac{5}{50}= \frac{8}{50}$

- **Multiplication d'un nombre rationnel par un entier :**

Ici il pose le problème qui est celui de savoir: « quelle est l'épaisseur de trois cartons de même type? »

Il y a conflit entre les élèves, certains ont donné la réponse erronée $3 \times \frac{3}{19} = \frac{9}{57}$ et d'autres la réponse juste $3 \times \frac{3}{19} = \frac{9}{19}$. Le rejet de la réponse erronée repose sur deux arguments: l'épaisseur du carton est contrôlée par l'addition $\frac{3}{19} + \frac{3}{19}+ \frac{3}{19}$et les fractions $\frac{3}{19}$et $\frac{9}{57}$ sont équivalentes.

- **Division d'un rationnel par un entier :**

Le problème ici est : *« J'ai collé 9 feuilles de même épaisseur. J'ai obtenu un carton qui a une épaisseur de $\frac{18}{7}$ mm. Quelle est l'épaisseur des feuilles collées? »*

Le résultat est immédiatement trouvé par les élèves et contrôlé grâce à la multiplication: $9 \times \frac{2}{7} = \frac{18}{7}$; dans ce cas la division tombe juste.

Il donne un cas dans lequel la division ne tombe pas juste : l'épaisseur de 9 feuilles est égale à $\frac{12}{7}$. 2 solutions sont possibles :

Solution 1) $\frac{12}{7} = \frac{108}{63}$, on peut donc faire $\frac{108}{63} \div 9 = \frac{12}{63}$ et $9 \times \frac{12}{63} = \frac{12}{7}$

Solution 2) $\frac{12}{7} = \frac{36}{21}$, on peut donc faire $\frac{36}{21} \div 9 = \frac{4}{21}$ et $9 \times \frac{4}{21} = \frac{12}{7}$.

Module 3: Mesures de poids, de capacités et de longueurs. Découverte de la méthode de fractionnement de l'unité, comparée à la méthode dite de commensuration

Les élèves sont invités à utiliser les rationnels, découverts lors de la désignation des épaisseurs de feuilles, pour mesurer de nouvelles grandeurs :

- le poids de différents clous, au moyen d'une unité poids ;

- la capacité de différents verres, au moyen d'un verre unité ;
- les longueurs de différentes baguettes, au moyen d'une unité de longueur.

Les enfants procèdent par commensuration : par exemple, il faut 4 bandes pour faire la même longueur que 5 bandes unités ; il faut 3 fois le contenu du verre F pour avoir le 2 fois celui du verre unité.

Ils apprennent également le fractionnement de l'unité, ils arrivent à identifier les longueurs de 6 baguettes différentes dont les longueurs sont égales à $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{6}{4}$ et $\frac{9}{4}$ de l'unité de longueur convenue. Soit les enfants procèdent par commensuration, soit ils constatent que la baguette $\frac{1}{4}$ est un sous-multiple des autres baguettes et ils l'utilisent comme unité de mesure.

Le module 4 poursuit le travail sur les fractions dans lequel il propose des jeux où il faut comparer des fractions, les additionner et deviner parmi les trois réponses possibles, celle qui est la plus proche du résultat. Le traitement des nombres fractionnaires dans de tels exercices est coûteux en temps et en efforts, pour la recherche d'un dénominateur commun. L'introduction des nombres décimaux se trouve alors justifiée car, sous bien des aspects, ils sont plus maniables que les nombres fractionnaires.

Conclusion :

Brousseau propose d'essayer une approche différente du schéma classique dans lequel l'apprentissage est la mise en mémoire d'une connaissance qui va s'appliquer. Il rejoint les travaux de Piaget en pensant que « l'apprentissage est une adaptation de l'élève à une situation –problème ». Pour lui, les difficultés que l'élève rencontre sont fondamentales pour qu'il puisse s'adapter ; ces difficultés sont souvent constitutives du nouveau savoir et témoignent des conceptions antérieures de l'élève. Le dépassement de ces difficultés amène donc à la nouvelle conception.

Ce document propose une ingénierie que les enseignants peuvent prendre en compte dans leur enseignement, il nous permet de voir une autre manière d'aborder les fractions.

Cet ouvrage est un bon instrument de formation des enseignants car on y trouve outre la leçon et les conditions didactiques de son déroulement, également une analyse des connaissances visées et un inventaire des représentations des élèves. Il comporte également plusieurs leçons et l'utilisation d'un large éventail de matériel, ce qui rend sa mise en œuvre difficile.

3.3. A componentiel view of children's difficulties in learning fractions. (Florence Gabriel, Frédéric Coché, Dénes Szucs, Vincent Carette, Bernard Rey et Alain Content, 2013)

Les résultats que nous présentons sont issus de l'article intitulé : A componentiel view of children's difficulties in learning fractions. Il a été publié dans la revue Frontiers in Psychologie en 2013.

Les fractions sont connues depuis les civilisations anciennes jusqu'à nos jours, elles posent de nombreux problèmes majeurs lors de l'apprentissage des mathématiques. De plus, les fractions jouent un rôle clé en mathématiques, car elles participent au raisonnement probabiliste, proportionnel et algébrique. Les fractions sont utilisées et manipulées dans plusieurs situations de la vie quotidienne mais ne cessent de poser des difficultés pour les élèves. L'objectif principal de cet article est de fournir des données empiriques pouvant expliquer les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des fractions. Le premier objectif est d'analyser le programme de mathématiques de la communauté française de Belgique et le second est de comprendre la nature des difficultés des élèves à travers différentes catégories. Ils se posent les questions suivantes : la connaissance conceptuelle des fractions influence-t-elle la connaissance procédurale ? Les connaissances procédurales sont-elles suffisantes pour comprendre les fractions ?

Les auteurs ont évalué la connaissance conceptuelle des fractions au moyen de tests sur les différentes significations des fractions et les différentes représentations des fractions ; les connaissances procédurales ont été évaluées à travers des opérations sur les fractions et des tâches de simplification.

Les origines de quelques difficultés et obstacles sur les fractions :

- Les nombres entiers
- Les significations des fractions
- La compréhension conceptuelle et compréhension procédurale

a) Les nombres entiers

L'une des principales difficultés lors de l'apprentissage des fractions vient de l'utilisation des propriétés des nombres rationnels pour faire des interférences sur les nombres rationnels. Ni et Zhou(2005) ont appelé cela « biais des nombres entiers ».

D'après Siegler (2011) : « children who have not yet learned fractions generally believe that the properties of whole numbers are the same for all numbers »[6] (P.1). Des erreurs apparaissent donc dans les tâches d'addition ou de soustraction des fractions ($\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}$), dans la comparaison ($\frac{1}{5}>\frac{1}{3}$). Pitkethly et Hunting (1996) précisent également que les élèves traitent souvent le numérateur et le dénominateur comme deux nombres distincts.

Les auteurs précisent les différences entre les nombres naturels et rationnels : en se référant aux travaux de Vamvakoussi et Vosniadou(2004), les nombres rationnels forment un ensemble ordonné alors que les nombres entiers forment un ensemble discret. Les nombres rationnels peuvent être écrits à partir d'une infinité de fractions, on appelle cela des fractions équivalentes.

b) Les significations des fractions

Une autre difficulté vient de la notion multiforme de la fraction. Les auteurs précisent que Kieren (1976) a été le premier à séparer les fractions en 4 catégories indépendantes : ratio ; opérateur ; quotient ; et mesure. Par la suite Behr et al. (1983) ont recommandé de considérer la fraction comme partie-tout. Plusieurs modèles ont été proposés.

c) Compréhension conceptuelle et procédurale

Une autre explication des difficultés pour les auteurs seraient l'articulation entre connaissances conceptuelles et procédurales.

Selon Rittle-Johnson et Alibali (1999), la connaissance conceptuelle est la compréhension explicite ou implicite des principes régissant un domaine et des interrelations entre les différentes parties de la connaissance dans un domaine ; les connaissances procédurales peuvent être définies comme des séquences d'actions utiles à la réalisation de problèmes. Ils précisent à travers Schneider et Stern (2010) que la connaissance procédurale permettrait de résoudre des problèmes de manière rapide car elle peut être automatisée.

Halford (1993) et Gelman (1997) soutiennent que les enfants utilisent leur compréhension conceptuelle pour développer leurs procédures. « children's difficulties when

[6] Les enfants qui n'ont pas encore appris les fractions pensent généralement que les propriétés sur les nombres entiers sont les mêmes pour tous les nombres.

learning about fractions could be interpreted as a use of mathematical symbols without access to their meaning »(P.2)[7].

De nombreux enfants apprennent les bonnes procédures pour multiplier les fractions, mais ne semblent pas comprendre les principes de cela.

Les auteurs ont considéré deux composantes principales dans leur test : la composante conceptuelle qui a été divisée en : proportion, nombre, mesure et partie-tout/partition ; la composante procédurale implique l'addition, la soustraction, la multiplication et la simplification des fractions.

Après le test effectué, les résultats ont été présentés : les enfants ont obtenus de meilleurs résultats aux questions sur les proportions et la partie-tout. De plus, les élèves semblent appliquer des procédures qu'ils ne comprennent pas complètement. Après une analyse de corrélation, ils ont obtenu que les catégories conceptuelles étaient corrélées les unes aux autres et aussi avec les catégories procédurales.

Les résultats ont montré de grandes différences entre les catégories. Ils arrivent à la conclusion que la catégorie partie d'un tout est un concept largement utilisé dans les salles de classe, les élèves utilisaient majoritairement le cercle ou le carré pour représenter des fractions. Concernant les opérations, les enfants ont bien réussi à additionner les fractions de mêmes dénominateurs, mais n'ont pas beaucoup réussi avec les fractions de dénominateurs différents, les erreurs étant majoritairement liées au biais sur les nombres entiers. Les enfants ont eu de meilleurs résultats aux questions comprenant des fractions familières ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$). Un autre résultat est la difficulté majeure pour les élèves de représenter des fractions impropres.

<u>Conclusion :</u>

Cet article nous permet de mieux comprendre les difficultés des enfants sur les fractions ; de comprendre la complexité de la notion de fraction à travers les connaissances conceptuelles et procédurales liées à la fraction. Il permet également de reconnaître un résultat majeur, une bonne compréhension des procédures passe par une bonne compréhension conceptuelle.

[7] Les difficultés des enfants dans l'apprentissage peuvent être interprétées comme une utilisation de symboles mathématiques sans accès à leur signification.

La méthode utilisée est limitée, dans le sens où, ils ne prennent pas en compte l'analyse des pratiques enseignantes, cette analyse aurait pu leur donner des pistes pour comprendre la nature des difficultés des enfants.

Dans notre travail, nous nous attardons sur les connaissances conceptuelles des fractions et nous prenons un répertoire des fractions plus grand que celui pris dans cet article, mais nous nous servons néanmoins des sens énoncés pour mieux les cerner.

3.4. Le passage de l'école primaire à l'école secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions (Patricia Mercier, 2004)

Le document que nous présentons ici est le mémoire de Patricia Mercier, intitulé *le passage de l'école primaire à l'école secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions*. Il a été présenté en 2004 à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval. Nous nous intéressons à la partie expérimentale.

Les élèves qui passent du primaire au secondaire font face à une adaptation au plan physique, psychologique et pédagogique. L'auteure soutient plusieurs auteurs en disant que les fractions se trouvent dans diverses activités de la vie et sont l'une des plus complexes et des plus importantes notions en mathématiques.

Selon Picard (1992), Mack (1990), les élèves du primaire trouvent les opérations avec les fractions très difficiles à apprendre, plusieurs élèves au secondaire ont peu d'habiletés à calculer avec la fraction. Selon plusieurs auteurs, les opérations sur les fractions impliquent beaucoup de règles et celles-ci sont introduites souvent très tôt. Deux autres difficultés sont le manque de compréhension conceptuelle et le fait de réaliser qu'il existe une grande diversité des représentations graphiques et concrètes des fractions.

L'objectif de cette recherche est l'étude du passage de l'école primaire à l'école secondaire dans l'enseignement des fractions. Elle se pose les questions suivantes :

1- Quels sens sont exploités dans les manuels scolaires de cinquième et sixième année du primaire, et de première secondaire lors des activités portant sur les fractions ? Peut-on observer des liens et des distinctions entre ces niveaux scolaires ?
2- Comment les élèves de sixième année et de première secondaire illustrent-ils les fractions ? Ces illustrations sont-elles liées à leurs expériences scolaires ?

Elle va pour cela analyser des manuels scolaires à travers une grille d'observation.

Grille d'observation des manuels scolaires

Titre du manuel scolaire										
Sens des fractions	Opérateur	Partie d'un tout	Partie d'un ensemble	Rapport	Probabilité	Mesure	Nombre	Droite numérique	Quotient
Nombre de problèmes									
Pourcentage									
Rang									
Total des problèmes analysés:									

Cette grille va lui permettre de déterminer les sens de la fraction exploités dans les manuels et aussi de comparer les manuels entre eux.

Elle va ensuite établir un questionnaire de 12 questions destiné aux élèves, inspiré de Blouin (2002), de Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert (2001) et de manuels scolaires. Ensuite faire des entrevues avec les élèves.

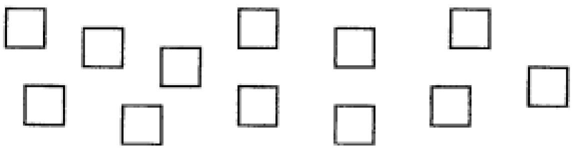
Question 1 : Qu'est-ce qu'une fraction pour toi?

Question 2 : Donne un exemple où on utilise les fractions dans la vie de tous les jours et explique pourquoi.

Question 3 : Représente 3/4 d'une façon. ***Question 4 : Représente 3/4 d'une façon différente.***

Question 5 : Représente les 2/8 du rectangle dessiné ci-dessous.

Question 6 : Représente le 1/3 de cette collection d'objets.



Question 7 : Place 5/6 sur cette droite numérique.

Question 8 : Si cinq biscuits sont séparés également entre trois enfants, combien de biscuits chaque enfant aura-t-il? Laisse les traces de ta démarche.

Question 9 : Amélie a lu les 3/8 d'un livre qui contient 160 pages. À quelle page est-elle rendue? Laisse les traces de ta démarche.

Question 10 : Le segment suivant représente l'unité :
Dessine un segment qui représente le 1/4 de cette unité.

Question 11 : L'enseignante de ta classe fait un tirage. Elle écrit le nom de chaque élève sur un billet rouge ou un billet bleu, mais les billets sont de la même dimension. Elle met donc 13 billets rouges et 12 billets bleus dans une enveloppe pour effectuer le tirage. Tu sais que ton nom est inscrit sur un billet rouge.
Quelle fraction représente les chances que ton enseignante a de tirer un billet rouge?
Laisse les traces de ta démarche.

Question 12 : Dans un panier, il y a 7 pommes dont 5 sont rouges et les autres sont vertes. Combien y a-t-il de pommes vertes par rapport aux pommes rouges ?
Laisse les traces de ta démarche en représentant la situation.

Après ses analyses, elle constate que le sens le plus utilisé par les élèves est celui de partie d'un tout, bien que les sens de nombre, mesure et partie d'un ensemble soient présents. De plus, il y a peu de distinctions entre les niveaux des élèves sur les sens manifestés. Concernant le manuel, les élèves semblent utiliser les sens les plus fréquents dans le manuel.

Conclusion :

Ce travail nous aide à comprendre les difficultés des enfants sur les fractions, les ruptures dans la transition primaire-collège. Elle s'intéresse principalement aux difficultés des élèves relativement à la diversité des sens possibles des fractions. Nous retenons qu'il faut prendre le temps de donner des sens plus variés dans les problèmes, de développer les concepts fondamentaux sur les fractions dès le primaire et aussi au secondaire.

La méthodologie utilisée par l'auteure ici nous convient, elle va nous aider dans nos travaux ; nous allons nous servir de son questionnaire destiné aux élèves pour élaborer le nôtre.

3.5. Un portrait de la compréhension du concept de la fraction: une étude exploratoire en Iran (Mahdokht NAGHIBI-BEIDOKHTI, 2008)

Les résultats que nous présentons ici sont issus de la thèse de Mahdokht NAGHIBI-BEIDOKHTI intitulée : « *Un portrait de la compréhension du concept de la fraction: une étude exploratoire en iran*». Cette thèse a été soutenue en 2008 à l'Université Laval au Quebec.

L'auteur s'intéresse au concept mathématique de fraction et à son enseignement-apprentissage chez les élèves de quatrième et cinquième année primaire et chez les élèves de première année secondaire en Iran.

Sa recherche a deux principaux objectifs qui sont :

- évaluer la compréhension de la notion de fraction, notamment dans le sens *partie/tout* retenu de la liste d'interprétation de Kieren (1980), chez des élèves Iranien
- savoir quelles conceptions des mathématiques et de leur apprentissage sont véhiculées par les enseignants.

Nous nous intéressons plus particulièrement à son résumé sur les granges théories d'apprentissage, à son questionnaire destiné aux enseignants et à l'analyse des résultats de celui-ci.

a. Les granges théories d'apprentissage

Il précise que plusieurs théories d'apprentissage ont marqué la didactique des mathématiques, mais il s'intéresse aux théories béhavioristes et constructivistes de l'apprentissage, car leurs rôles et leurs influences ont été les plus déterminants. Il présente les principales caractéristiques liées notamment à l'aspect de l'enseignement : les modes de représentation utilisés par le maître, les rôles respectifs du maître et de l'élève et finalement la place des erreurs.

- **Théorie behavioriste**

Ici, l'apprentissage est « un changement dans le comportement de la personne qui apprend » et la connaissance est comme un « résultat de l'influence du milieu entourant l'individu ». L'élève apprend par la transmission de l'information provenant de l'extérieur de lui-même.

La pédagogie béhavioriste s'appuie fondamentalement sur la notion de stimulus - réponse – renforcement, enseigner consiste « premièrement à choisir les stimuli qui seront présentés à l'élève afin de maximiser l'apparition du comportement souhaité, deuxièmement à s'assurer de la présence de ces stimuli dans l'environnement de l'élève et finalement, à prévoir les renforcements nécessaires pour que ce comportement soit conservé dans le bagage intellectuel de l'apprenant en éliminant les autres comportements par manque de renforcement ». Autrement dit, enseigner c'est présenter les concepts, les règles ou les formules,

les faire répéter par les élèves, et faire travailler les élèves sur des exercices d'applications jusqu'à ce qu'ils réussissent.

Le rôle de l'enseignant est très exigeant: « il est à la fois déclencheur et moteur de l'apprentissage auquel l'élève est appelé à se soumettre. Dans cette vision, l'élève est vu comme un être plutôt passif, réagissant de façon prévisible aux stimuli de l'environnement ».

Dans ces apprentissages, les manipulations des objets physiques et aussi des notions abstraites (représentées par des symboles) ont un rôle à jouer, elles sont facteurs d'apprentissage car la répétition de ces actions va permettre de développer l'habileté.

L'intérêt ici est porté principalement sur la réponse produite de l'élève plutôt que sur les stratégies ou les processus utilisés pour trouver cette réponse. L'évaluation consiste donc simplement à vérifier les réponses des élèves afin de juger de leurs progrès.

Une erreur commise par l'individu est une mauvaise réponse signifiant que l'apprentissage n'est pas complété dans le sens attendu. Lorsqu'elle apparait, l'enseignant recommence le processus d'enseignement.

- **Théorie constructiviste**

On considère ici que les connaissances ne peuvent pas être transmises d'un individu à l'autre, c'est l'apprenant qui construit ses connaissances dans un acte interne. L'accent est alors mis sur le processus de l'apprentissage.

Dans la perspective constructiviste, l'enseignement consiste « à introduire dans l'environnement des élèves des éléments susceptibles de provoquer les déséquilibres cognitifs évoqués plus hauts et de favoriser la prise de connaissance du fait que tel objet nouveau ne s'inscrit pas dans les schèmes déjà élaborés et exige donc une modification de ces schèmes ».

Le rôle de l'enseignant est important: il soutient l'élève dans sa démarche, par des remarques ou des questions, dans le but de relancer l'activité par des interventions judicieuses, tout en s'armant de patience afin que les élèves aient l'occasion d'explorer librement les pistes qu'ils ont. Son rôle n'est pas celui de simple transmetteur de connaissance, mais celui de pouvoir placer l'élève dans les conditions les plus favorables à sa formation personnelle.

La manipulation d'objets physiques ou plus ou moins abstraits a aussi un rôle important à jouer car elle est occasion d'exploration et d'expérience, sert de support à l'intériorisation de l'action par anticipation du résultat probable de celle-ci et la vérification des hypothèses avancées. La répétition des mêmes manipulations sur les mêmes matériels ne constitue pas un facteur d'apprentissage et présente peu d'intérêt, sauf peut-être celui de permettre l'acquisition de la rapidité d'exécution par l'entraînement.

La présence des erreurs commises par les élèves n'est pas jugée anormale dans la démarche d'acquisition des connaissances et peut constituer une source de renseignements pouvant aider à comprendre le processus.

b. Analyse des enseignements sur la fraction

Son questionnaire est construit dans le but de savoir quels rôles les enseignants s'attribuent, quels rôles ils réservent à leurs élèves, quelle place ils laissent aux représentations matérielles, graphiques ou mentales, de savoir si les enseignements sont orientés vers la construction de connaissances chez les élèves ou vers l'acquisition d'habiletés mécaniques et de savoirs instrumentaux à retenir par cœur. Ce questionnaire est constitué de deux parties

Partie A : les identifications générales

1- Vous êtes de quel sexe?
féminin ☐ masculin☐

2- Quelle est votre formation?
diplôme de secondaire ☐ diplôme d'enseignante primaire ☐
baccalauréat en enseignement de secondaire ☐ baccalauréat ☐
autre(expliquez) ☐

3- Depuis combien de temps enseignez-vous?
moins de 2 ans ☐ entre 2-5 ans ou 5 ans ☐ entre 5-10ans ☐
plus que 10 ans ☐

4- Quelles sont vos principales sources de références pour votre enseignement?
manuels scolaires ☐ guide du maître ☐ autre (expliquez) ☐

5- Dans ce qui suit, précisez les caractéristiques de classe dans laquelle vous enseignez présentement.

Niveau scolaire :
3 ière année du primaire ☐ 4 ière année du primaire ☐
5 ière année du primaire ☐ 1 ière année du secondaire junior ☐
2 ière année du secondaire junior ☐ 3 ière année du secondaire junior ☐

Cette classe se forme de quel groupe d'élèves?
fille ☐ garçon ☐ les deux ☐ adulte ☐

L'école dans la quelle vous enseignez cette classe, est de quel type?
publique ☐ privée ☐ autre (expliquez) ☐

L'école dans la quelle vous enseignez cette classe, se situe dans quelle zone?
urbaine ☐ banlieue ou semi-rurale ☐ rurale ☐

Le milieu socio-économique de l'école est : pauvre ☐ moyen ☐ riche ☐

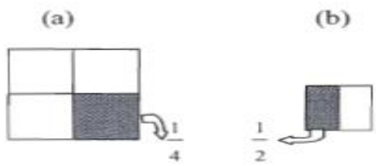
Si vous avez seulement une classe d'élèves, passez à la partie B.

Partie B : enseignement de la notion de fraction

1- Imaginez que dans votre classe, vous voulez introduire aux élèves «la fraction » (par exemple la fraction $\frac{1}{3}$), comment allez-vous procéder?

2- Dans votre classe, pour enseigner une première fois aux élèves « la comparaison des fractions » (par exemple pour comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$), que ferez-vous?

3- Imaginez qu'un de vos élèves vous dise :
« $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ car la partie hachurée de la figure (a) (représentant de $\frac{1}{4}$) est plus grande que la partie hachurée de la figure (b) (représentant de $\frac{1}{2}$) »
Comment réagissez-vous?



4- Comment présentez-vous aux élèves, la notion de « fractions équivalentes » (par exemple $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = ...$) ?

Les réponses à la partie B de ce questionnaire ont été regardées suivant deux perspectives, pédagogique et mathématique. Pour l'analyse à caractère pédagogique, une grille a été construite autour des modes de représentation privilégiés par les maîtres et autour des rôles réservés au maître et à l'élève. Pour l'analyse à caractère mathématiques, il a vérifié pour chaque question la présence des éléments importants pour le concept de fraction à l'aide des critères. Nous nous intéressons seulement à son analyse à caractère pédagogique.

- Analyse à caractères pédagogique : ici il s'intéresse aux caractéristiques pédagogiques de l'enseignant dans sa classe, il s'attache aux modes de représentations (matériel, imagé, symbolique, formel) mis en œuvre dans la classe. Ces modes définissent quatre catégories à l'intérieur desquelles il présente les rôles réservés à l'enseignant et à l'élève.

I) En utilisant des matériels didactiques (manipulation d'objets concrets) :
a) manipulés par les élèves : ce sont les élèves eux-mêmes qui découvrent leur cheminement pour construire leurs connaissances à partir de quelques indications nécessaires que donne l'enseignant pour les orienter et les soutenir. b) manipulés par les élèves, mais l'enseignant donne des instructions aux élèves étape par étape et leur pose parfois des questions pour orienter leur réflexion. c) manipulés par l'enseignant : en posant parfois des questions aux élèves, il réalise l'activité jusqu'à la conclusion. (les élèves sont plus des témoins que des participants actifs).
II) En utilisant des représentations graphiques (recours à des objets semi-concrets) :
a) dessinées par les élèves, l'enseignant pose des questions pour mettre les élèves en réflexion et pour orienter l'activité. b) dessinées par les élèves, l'enseignant pose des questions pour mettre les élèves en réflexion, mais c'est lui qui donne les instructions.

c) dessinées par l'enseignant qui pose des questions aux élèves pour les mettre en réflexion et, en expliquant, complète l'activité.

d) dessinées par l'enseignant qui explique les étapes à franchir et complète l'activité dont les élèves sont simplement témoins.

III) En utilisant des représentations symboliques ou des représentations mentales :

a) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des objets *physiques* et pose des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l'objectif.

b) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des objets *physiques* en donnant des explications nécessaires pour résoudre le problème.

c) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des représentations *graphiques* et pose des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l'objectif.

d) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des représentations *graphiques* en donnant des explications nécessaires pour résoudre le problème.

e) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des *idées ou des règles* et pose des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l'objectif.

f) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des *idées ou des règles* en donnant des explications nécessaires pour résoudre le problème.

IV) L'enseignant énonce les règles et formules pour résoudre le problème.

Après ses analyses, il présente plusieurs résultats : les maîtres laissent une large place à l'utilisation du matériel ou des représentations imagées, pour que les élèves puissent mieux « voir » les notions et puissent ainsi mieux leur donner du sens. Le recours aux représentations graphiques est le plus fréquent. Le maître joue un rôle central dans l'explication donnée à l'élève, il joue un rôle important et est très présent lors d'explorations par les élèves. Sur le plan mathématique, les compétences de la plupart des maîtres sont acceptables, car l'idée la plus importante est présente, malgré quelques erreurs qui pourraient causer certains problèmes aux élèves en créant de la confusion dans leur esprit.

Conclusion :

Ce travail nous aide à comprendre les difficultés du processus enseignement-apprentissage des fractions, les ruptures dans la transition primaire-collège. L'auteur s'intéresse principalement à la compréhension des élèves sur les fractions et à l'enseignement qui est effectué. Nous retenons qu'il faut prendre le temps de donner des sens plus variés dans les problèmes, de développer les concepts fondamentaux sur les fractions dès le primaire et aussi au secondaire, d'utiliser toutes les représentations de la fraction, l'enseignant doit laisser plus de place à l'élève.

La méthodologie utilisée par l'auteur ici est bien définie, elle va nous aider dans nos travaux ; nous allons nous servir de son questionnaire destiné aux enseignants pour élaborer notre questionnaire, de même ses grilles d'analyse du questionnaire vont nous aider dans l'élaboration des nôtres.

Nous pensons qu'il aurait été préférable dans son travail de soumettre les trois grands groupes d'élèves exactement aux mêmes tâches, il a préparé trois versions du questionnaire pour adapter le niveau de difficulté des questions aux élèves, ce qui a rendu difficiles les comparaisons entre ces élèves-là, et on n'a pas pu voir le progrès qui peut exister entre ces niveaux.

CHAPITRE 4 : CADRE METHODOLOGIQUE

Dans cette recherche, nous avons recueilli des données pour valider ou invalider nos hypothèses, nous avons eu recours d'abord à une analyse de manuel, un questionnaire destiné aux élèves de 6^{e} et enfin un questionnaire destiné aux enseignants. Nous allons donc dans ce chapitre, présenter notre méthodologie, notre grille d'analyse et nos questionnaires.

4.1. Présentation de la méthodologie

Notre travail est subdivisé en deux grandes parties, une partie théorique et une partie expérimentale.

4.1.1. Partie théorique

a. Définition des mots clés

Elle nous permet de cerner et de bien préciser le sens qu'on donne à chaque concept dans notre travail.

b. Etude épistémologique

Cette étude nous permet de voir l'origine, l'évolution du concept de fraction, de voir les difficultés dans l'émergence de ce concept. Elle nous permet de comprendre la construction mathématique des fractions. Elle nous permet de préciser l'un des principaux obstacles épistémologiques que peuvent avoir les élèves. Elle nous donne quelques éléments pour la mise sur pied du questionnaire destiné aux élèves.

c. Cadres théoriques

Ils nous aident à faire ressortir les éléments d'analyse du manuel, les éléments d'analyse des résultats du questionnaire.

d. Revue de la littérature

Il s'agit pour nous de faire un tour d'horizon des études menées par d'autres chercheurs et ayant un rapport avec le problème que nous abordons. Dans ce sens, elle nous apporte des éléments qui vont nous servir à nourrir notre travail, qui vont nous renseigner sur les difficultés d'apprentissage de la notion de fraction. Elle nous donne des éléments pour l'élaboration de notre gille d'analyse du manuel et pour la construction de nos questionnaires.

4.1.2. Partie expérimentale

a. Analyse du manuel

En nous appuyant sur nos cadres théoriques, sur notre revue de la littérature, nous allons voir comment est-ce que le manuel scolaire aborde les fractions, comment les fractions sont introduites et présentées et nous regarderons l'impact sur les représentations des élèves. Tout ceci afin de valider ou invalider notre deuxième hypothèse de recherche : la fraction est introduite comme partie d'un tout et les significations de la fraction les plus présentes dans le manuel scolaire, sont celles que les élèves ont le plus de facilité à illustrer correctement, tandis que celles qui sont peu présentes dans les manuels sont celles que les élèves éprouvent le plus de difficulté à illustrer.

b. Questionnaire destiné aux enseignants

A partir de notre revue de littérature, nous avons construit un questionnaire destiné aux enseignants afin de connaitre les représentations de la fraction présentes chez les enseignants et de regarder l'impact avec les représentations des élèves. Tout ceci afin de valider ou invalider notre troisième hypothèse : Il y'a une prédominance de l'idée de la fraction comme partie d'un tout pour engager les enseignements et la manière avec laquelle les enseignants abordent les fractions influence les représentations qu'ont les élèves.

c. Questionnaire destiné aux élèves

A partir de l'étude épistémologique, de la revue de littérature et des résultats à l'analyse du manuel, nous avons construit un questionnaire destiné aux élèves afin de connaitre les différentes représentations des élèves sur les fractions et de valider ou invalider notre première hypothèse : la signification de la fraction la plus présente est, chez les élèves de 6^e, celle de Partie d'un tout.

d. Résultats

A partir des résultats des cadres théoriques, de l'analyse du manuel, des résultats d'analyse des questionnaires, nous allons faire une mise en perspective afin de voir comment est-ce-que l'enseignement peut impacter sur les représentations des élèves.

Nous pouvons résumer notre méthodologie par le schéma suivant :

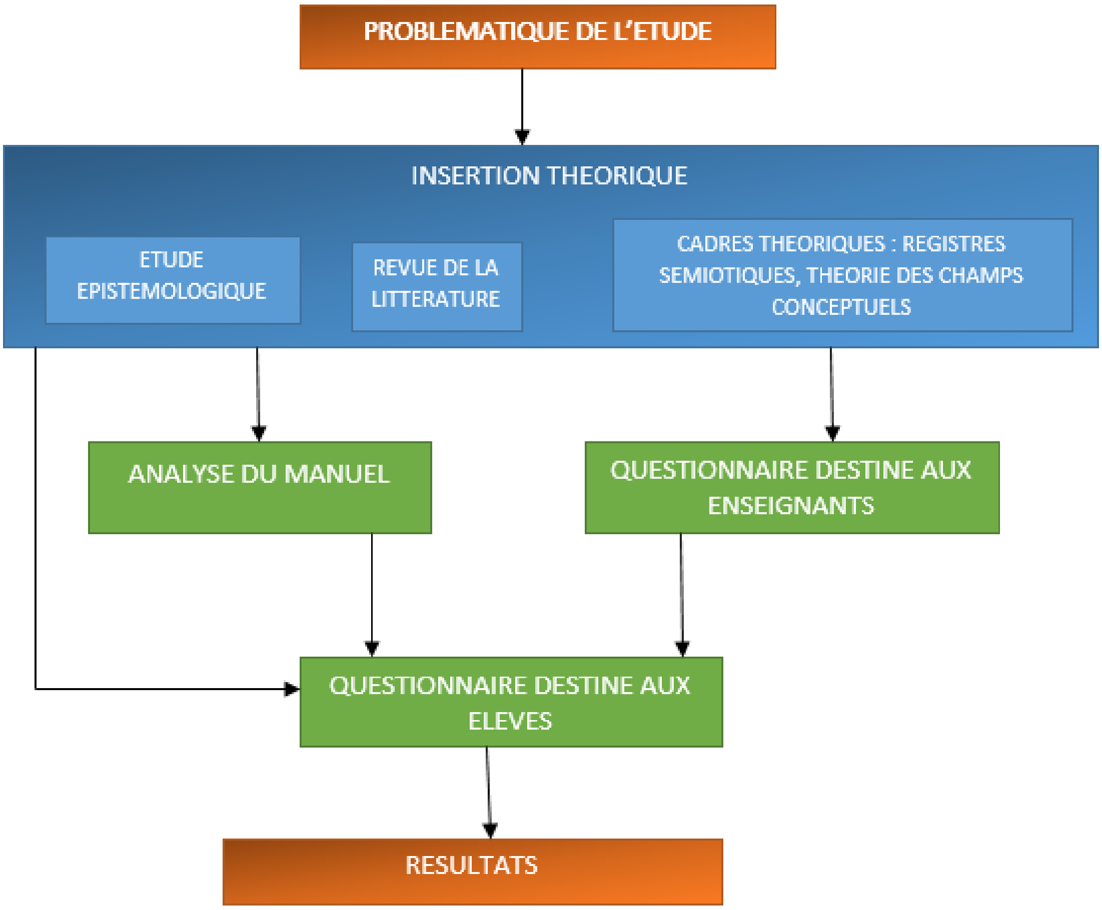


Figure 6 : Méthodologie de notre travail

4.2. <u>Analyse du manuel</u>

Nous analysons le manuel de mathématiques de la classe de 6^{e}, à partir d'une grille d'analyse que nous avons élaboré, grille qui va nous aider à faciliter la compilation et l'analyse des données.

A partir des différentes significations à une écriture fractionnaire : Partie d'un tout (quantité continue), Partie d'un tout (quantité discrète), Opérateur, Mesure, Quotient, Rapport, Nombre, Nombre sur une droite graduée, nous avons utilisé une grille d'analyse afin de voir l'importance que chaque signification de la fraction prend dans le manuel. Cette grille est construite en fonction de nos questions de recherche, de nos hypothèses. Elle est construite dans le but de déterminer les significations de la fraction présentes dans le manuel scolaire de 6^{e}, de comprendre comment l'enseignement des fractions est pris en charge par le manuel scolaire et enfin pour comprendre le lien entre ces significations présentes dans le manuel et celles présentes chez les élèves.

Pour effectuer cette analyse de manuels scolaire des mathématiques de 6^{e}, nous utilisons une grille d'analyse où toutes les significations sont mentionnées. Les significations de la fraction retenues sont celles que nous avons déjà définies et expliquées dans la partie théorique. Nous exposons, au-dessous, cette grille d'analyse :

	Significations de la fraction							
	Partie d'un tout	Partie d'un ensemble	Opérateur	Rapport	Quotient	Mesure	Nombre sur une droite numérique	Nombre
Nombre de problèmes								
Pourcentage								
Rang								
Nombre total de problèmes analysés portant sur les fractions :								

Tableau 1 : Grille d'analyse du manuel scolaire

Nombre de problèmes : ici « problèmes » fait référence à toutes les activités portant sur les fractions, au nombre total d'activités relatif à chaque signification

Pourcentage : fait référence au pourcentage relatif à chaque signification

Rang : fait référence à la place accordée à chaque signification

Une analyse du manuel scolaire nous permet à la fois de déterminer les significations présentes dans ces manuels et nous aide à nous familiariser avec ces significations. Cela va ensuite nous faciliter la tâche pour élaborer les questions pour le questionnaire écrit destiné aux élèves. Cette analyse sert de support à l'analyse des questionnaires pour catégoriser les réponses obtenues aux questions et pour mieux comprendre les difficultés des élèves.

4.3.Questionnaire destiné aux élèves

Dans cette partie, nous allons tout d'abord justifier le choix du questionnaire écrit comme outil de collecte de données, ensuite nous allons présenter et expliquer les questions constituant ce questionnaire et enfin nous allons présenter les modalités de passation

4.2.1. Choix du questionnaire écrit comme outil de collecte des données

Le questionnaire est un moyen rapide de collecte de données, il ne comporte généralement qu'une dizaine de questions et de ce fait se remplit en un temps assez court. Nous avons donc choisi le questionnaire, qui sera présenté dans son intégralité en annexe. Nous avons construit un questionnaire écrit pour en faciliter l'accès aux élèves. Un questionnaire écrit portant sur les différentes significations de la fraction adressé aux élèves de 6e servira, en effet, à répondre à la première question de notre recherche, soit « Quelles sont les représentations de la fraction présentes chez les élèves de 6e ?»

Nantais (1983) précise que les tests écrits sont la méthode classique la plus répandue en didactique des mathématiques. Selon Nantais, ils permettent de déduire la pensée de l'enfant, d'obtenir des informations précises et simples qui sont comparables étant donné que les questions sont les mêmes pour tous. Nous avons choisi des questions ouvertes et fermées.

4.2.2. Construction et explication du questionnaire destiné aux élèves

Le questionnaire construit est inspiré de plusieurs sources : Alahmadati(2016), Mercier (2004) ; manuels scolaires. Nous avons tenu à nous assurer de l'adéquation du niveau du vocabulaire ; nous avons procédé également à divers ajustements pour que les questions puissent être convenablement interprétées par les participants et pour que leurs réponses fournissent la matière attendue qui permettra de répondre aux questions de recherche. Le but de ce questionnaire est de déterminer les différentes statuts de la fraction utilisées par les élèves de 6e, de connaître comment ces élèves illustrent les fractions et de mettre en évidence leur compréhension.

Différentes questions mettant en œuvre les fractions ont été créées, le questionnaire comprend 7 questions, qui portent sur les différentes statuts de la fraction à savoir : partie d'un tout, partie d'un ensemble, nombre sur une droite numérique, mesure, opérateur, rapport, quotient, nombre.

4.2.3. Analyse *a priori* du questionnaire

Q_1R_1 : ceci fait référence à la première réponse possible à la question 1

$Q_7O_1R_1$: ceci fait référence à la réponse possible 1 à la première opération de la question 7

Question1 : Colorie les $\frac{2}{8}$ du rectangle dessiné ci-dessous. Laisse les traces de ta démarche

Le but de cette question est de savoir si l'élève est capable de représenter la fraction selon le sens partie d'un tout, et de voir s'ils arrivent à passer du registre numérique au registre figural.

Nous avons choisi d'un part la fraction $\frac{2}{8}$, car 8 est un nombre pair et il est plus facile, selon Vézina (1994), de partager un tout en un nombre pair de parties qu'en un nombre impair de parties. De plus, le partage en huitièmes est celui qui vient en troisième position pour le rectangle selon Vézina (1994)[8]. D'autre part, nous avons choisi le rectangle, car il est plus facile à partager que le cercle (Vézina, 1994). La longueur du rectangle mesure quatre centimètres et la largeur, deux centimètres. Ainsi, les élèves devraient avoir de la facilité à partager le rectangle en huit parties.

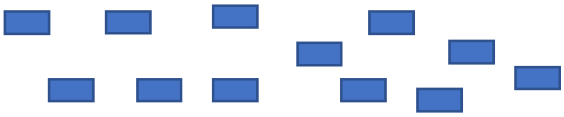
Plusieurs procédures sont possibles chez les élèves, ils peuvent :

- Q_1R_1: partager le rectangle en huit parties égales ou non, en traçant des bandes verticales et choisir deux parties juxtaposées ou non juxtaposées, cela témoignerait de la signification partie d'un tout ; cette procédure est la plus probable d'apparition, cela pourrait provenir des habitudes scolaires, de l'approche du manuel sur les fractions. Ceci est une représentation juste.
- Q_1R_2: partager le rectangle en huit parties égales ou non, en traçant une bande horizontale et trois bandes verticales et choisir deux parties juxtaposées ou non juxtaposées, cela témoignerait de la signification partie d'un tout. Ceci est une représentation juste.
- Q_1R_3: partager le rectangle en huit parties égales ou non, en bandes horizontales et choisir deux parties juxtaposées ou non juxtaposées, cela témoignerait de la signification partie d'un tout. La probabilité d'apparition de cette procédure est très petite car l'élève pour cela devra diviser la largeur en 8 parties. Ceci est une représentation juste.

[8] Dans son mémoire, Vézina montre que chez les élèves, pour partager un rectangle, les élèves ont plus de facilité à partager en première position le rectangle en 2, en deuxième position en 4 et en troisième position en 8.

- Q_1R_4: choisir d'illustrer une fraction équivalente à $\frac{2}{8}$ comme $\frac{1}{4}$ ou encore $\frac{4}{16}$. Cela témoignerait de la signification partie d'un tout et également de la signification nombre car ici il utilise une fraction équivalente à $\frac{2}{8}$. Ceci est une représentation juste.
- Q_1R_5: Diviser le rectangle en deux, prendre une partie et la diviser en deux également, prendre encore une partie et la diviser en deux. Cela témoignerait qui montre la signification partie d'un tout et également de la signification nombre. Il montre ici une maîtrise de la fraction, ceci est une représentation juste.
- Q_1R_6: donner une mauvaise représentation de la fraction $\frac{2}{8}$.

<u>Question 2:</u> Entoure le $\frac{1}{3}$ de cette collection d'objets. Laisse les traces de ta démarche



Le but de cette question est de savoir si l'élève est capable de représenter la fraction selon le sens partie d'un ensemble et opérateur.

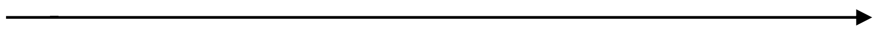
Nous choisissons d'une part la fraction $\frac{1}{3}$ qui est une fraction avec un dénominateur impair étant donné qu'une fraction avec un dénominateur pair a été utilisée pour la question précédente. La fraction $\frac{1}{3}$ est toutefois une fraction unitaire (dont le numérateur est 1), ce qui facilite la tâche. D' autre part, nous choisissons plus de trois objets pour augmenter un peu la difficulté.

Plusieurs procédures sont possibles chez les élèves, ils peuvent :

- Q_2R_1: compter tous les objets et calculer $\frac{1}{3}$ de 12, en faisant la suite d'opérations $12 \times 1 = 12 \; et \; 12 \div 3$ pour trouver 4 et choisir d'entourer quatre objets proches des uns des autres ou non ce qui est une procédure développée à partir du sens opérateur de la fraction et à partir du sens partie d'un ensemble ; ceci est une représentation juste.

- Q_2R_2: grouper les objets par trois, procédure erronée qui montre qu'ils ont juste pris en compte le dénominateur de la fraction ; cette procédure peut également témoigner d'un mauvais calcul en faisant la suite d'opérations $12 \times 1 = 12\ et\ 12 \div 3$.
- Q_2R_3: prendre 3 cercles par exemples pour représenter les 3 du dénominateur, ensuite affecter les objets dans les cercles, c'est une procédure acceptée développée à partir de la division faite au primaire
- Q_2R_4: entourer un autre nombre d'objets, cette procédure peut également témoigner d'un mauvais calcul

Question 3: Place $\frac{5}{6}$ sur la droite numérique



Cette question est posée pour savoir si l'élève est capable de représenter une fraction comme un nombre qui se place sur une droite numérique.

Nous avons choisi une fraction avec un dénominateur pair, car c'est plus simple ; le numérateur 5 est choisi pour que l'enfant ne s'arrête pas au partage, mais détermine le bon point de partage. Le segment dessiné est d'une longueur de 8 centimètres.

Plusieurs procédures sont possibles chez les élèves, ils peuvent :

- Q_3R_1: placer 0 et 1 sur la droite, faire des graduations et situer la fraction correctement, cette procédure est développée à partir du sens nombre sur une droite numérique.
- Q_3R_2: situer la fraction incorrectement entre 0 et 1, sans partitionner le segment. Cette procédure est développée à partir du sens de nombre puisque l'élève doit savoir qu'une fraction est située entre deux nombres entiers consécutifs
- Q_3R_3: situer la fraction incorrectement après 0. Cette procédure est développée à partir du sens de nombre puisque l'élève doit savoir qu'une fraction est supérieure à 0 ;
- Q_3R_4: développer une procédure à partir du sens partie d'un tout. En effet, ils peuvent diviser le segment en 6 parties en faisant 5 petits traits pour graduer et situer $\frac{5}{6}$ au cinquième trait.

- Q_3R_5 : considérer uniquement le numérateur de la fraction qui est 5, marquer le zéro et graduer jusqu'à 5. Ce qui montrerait la difficulté qu'ont les élèves de tenir compte à la fois du numérateur et du dénominateur.

Question 4 : voici un segment qui représente l'unité, construis un segment dont la mesure est $\frac{5}{3}$ de celle du segment unité : ____________

Le but de cette question est de savoir si l'élève est capable de représenter une fraction en se servant de la signification mesure.

Nous choisissons la fraction $\frac{5}{3}$ pour augmenter le degré de difficulté, pour voir si l'élève est capable de représenter une fraction plus grande que l'unité. Le segment est d'une longueur de 3 centimètres, ce qui facilite la tâche de l'élève.

Plusieurs procédures sont possibles chez les élèves, ils peuvent :

- Q_4R_1: mesurer le segment donné et dessiner un autre segment qui représente $\frac{5}{3}$ de celui-ci. Cette procédure serait développée à partir du sens de mesure étant donné que les élèves doivent savoir que l'unité contient 3 fois la partie $\frac{1}{3}$;
- Q_4R_2: prendre le segment qui représente l'unité, le séparer en 5 et colorier la partie qui représente les $\frac{3}{5}$. Cette procédure incorrecte serait développée à partir du sens de partie d'un tout, ils ne considèrent pas la fraction $\frac{5}{3}$ mais $\frac{3}{5}$ car c'est elle qui a un sens pour eux ;
- Q_4R_3: mesurer le segment donné et construire un autre segment qui représente $\frac{3}{5}$ de celui-ci. Cette procédure serait développée à partir du sens de mesure, mais c'est une procédure qui n'est pas validée, car ici la fraction à représenter est $\frac{5}{3}$

Question 5: Si 5 biscuits sont partagés équitablement entre 3 enfants, combien de biscuits aura chaque enfant ? Laisse les traces de ta démarche

Cette question est posée pour savoir si l'élève est capable de représenter une fraction quotient.

Nous choisissons la fraction $\frac{5}{3}$ qui demande plus de réflexion de la part des élèves.

Plusieurs procédures sont possibles chez les élèves, ils peuvent :

- Q_5R_1: effectuer la division 5 ÷ 3. Cette procédure est développée à partir du sens de quotient ;
- Q_5R_2: dessiner cinq biscuits, les diviser chacun en trois parties égales et les distribuer aux enfants. Toutefois, cette procédure est développée beaucoup plus à partir du sens partie d'un tout plutôt qu'à partir de celui de quotient.
- Q_5R_3: attribuer aux enfants un biscuit chacun, ensuite essayer de partager les deux biscuits restants de manière inégale aux trois enfants en donnant demi à chaque enfant, ceci est développé à partir du sens quotient mais ne peut pas marcher ici car on a une division avec reste ; cette procédure découle de la division faite au primaire.
- Q_5R_4: Donner un biscuit à chaque enfant et considérer qu'il en reste deux, l'élève n'a pas pris en compte ci le mot équitablement, ou alors donner à deux enfants deux biscuits et le troisième enfant a un biscuit, cette procédure découle de la division faite au primaire

Question 6: Dans un panier il y'a 7 pommes dont 5 rouges et 2 vertes. Combien y a-t-il de pommes vertes par rapport aux pommes rouges ? Laisse les traces de ta démarche en représentant la situation

Le but de cette question est de savoir si l'élève est capable de représenter une fraction selon le sens de rapport partie à partie.

Plusieurs procédures sont possibles chez les élèves, ils peuvent :

- Q_6R_1: donner le rapport de partie à partie $\frac{2}{5}$ tel que demandé. Cette réponse réfère au sens de rapport. L'élève a d'abord trouvé le nombre de pommes vertes qui est deux, ensuite il a mis le rapport du nombre de pommes vertes par rapport au nombre de pommes rouges ;
- Q_6R_2: écrire $\frac{2}{7}$ qui est une réponse incorrecte. Cela fait référence au sens de rapport, mais c'est un rapport de partie à tout. Ainsi, c'est une réponse qui serait développée à partir du sens partie d'un tout. L'élève a d'abord trouvé le nombre de pommes vertes qui est deux, ensuite il a mis le rapport du nombre de pommes vertes par rapport au nombre total de pommes
- Q_6R_3: écrire « 2 » qui est une autre réponse erronée, ils auraient fait : 7 – 5=2. Il a juste trouvé le nombre de pommes vertes dans la question, mais n'a pas trouvé le rapport pommes verte à pommes rouges.

Question 7: Effectue les opérations en laissant les traces de ta démarche

$$\frac{2}{5}+\frac{6}{5}; \qquad \frac{1}{3}+\frac{2}{7}; \qquad \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}; \qquad \frac{11}{4}\div\frac{1}{2}$$

Le but de cette question est de savoir si l'élève est capable d'effectuer des opérations avec les fractions, ce qui représente la signification de la fraction comme nombre.

Nous avons choisi une addition avec des dénominateurs communs, une addition avec des dénominateurs différents, une multiplication et une division.

Pour ce qui est de la première opération, plusieurs procédures sont possibles chez les élèves:

- $Q_7O_1R_1$: $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$; ils donnent la bonne réponse, ce qui montre a priori qu'ils savent faire l'addition de deux fractions de même dénominateur
- $Q_7O_1R_2$: $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=\frac{8}{10}$; ils regardent le numérateur et le dénominateur indépendamment et utilisent les propriétés sur les entiers naturels, cette procédure peut également témoigner du glissement de la règle sur la multiplication des fractions
- $Q_7O_1R_3$: Ils donnent une autre réponse erronée, qui peut venir du fait qu'ils s'embrouillent dans les procédures de calcul

Pour ce qui est de la deuxième opération, plusieurs procédures sont possibles chez les élèves:

- $Q_7O_2R_1$: $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}=\frac{3}{10}$ ils regardent le numérateur et le dénominateur indépendamment et utilisent les propriétés sur les entiers naturels, cette procédure peut également témoigner du glissement de la règle sur la multiplication des fractions
- $Q_7O_2R_2$: $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}=\frac{13}{21}$ ils donnent la bonne réponse, ce qui montre a priori qu'ils peuvent faire l'addition de deux fractions de dénominateurs différents
- $Q_7O_2R_3$: Ils donnent une autre réponse erronée, qui peut venir du fait qu'ils s'embrouillent dans les procédures de calcul

Pour ce qui est de la troisième opération, plusieurs procédures sont possibles chez les élèves:

- $Q_7O_3R_1$: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ils peuvent donner la bonne réponse, ce qui montre a priori qu'ils peuvent faire la multiplication de deux fractions.
- $Q_7O_3R_2$: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ils peuvent multiplier 1 par 2 et mettre au numérateur, ensuite 1 par 4 et mettre au dénominateur. Ils transposent la réduction au même dénominateur faite pour l'addition de deux fractions à la multiplication.
- $Q_7O_3R_3$: Ils peuvent également donner une autre réponse erronée, qui peut venir du fait qu'ils s'embrouillent dans les procédures de calcul

Pour ce qui est de la quatrième opération, plusieurs procédures sont possibles chez les élèves:

- $Q_7O_4R_1$: $\frac{11}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{22}{4}$ ils peuvent donner la bonne réponse, ce qui montre a priori qu'ils peuvent faire la division de deux fractions de dénominateurs différents
- $Q_7O_4R_2$: $\frac{11}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ ils peuvent regarder le numérateur et le dénominateur indépendamment et utilisent les propriétés sur les entiers naturels, cette procédure peut également témoigner du glissement des propriétés sur la multiplication des fractions
- $Q_7O_4R_3$: Ils peuvent également donner une autre réponse erronée, qui peut venir du fait qu'ils s'embrouillent dans les règles et procédures de calcul.

4.2.4. Modalités de passation

La passation du questionnaire a eu lieu au mois de mars, précisément le 15 mars 2024. Nous avons choisi cette période du deuxième trimestre car les cours sur les fractions dans les classes de 6^{e} avaient déjà été couverts. Le questionnaire était sur une durée de 45minutes.

Nous avons fait passer le questionnaire au lycée bilingue d'application, en classe de 6^{e} bilingue, de 8h à 8h45 ; ils étaient au nombre de 46 ; nous remercions à cet effet Mme Kapche Kamga Agnès qui a accepté de nous céder 1h de son temps.

4.4. Questionnaire destiné aux enseignants

4.3.1. Construction et explication du questionnaire destiné aux enseignants

Nous avons construit un questionnaire écrit pour en faciliter l'accès aux enseignants. Ce questionnaire sera présenté en intégralité en annexes et servira à répondre à la troisième question de recherche, soit «Quelles représentations de la fraction sont présentes chez les enseignants et quel est le lien avec les représentations des élèves? »

Dans le questionnaire, nous avons demandé aux enseignants des renseignements généraux concernant leur ancienneté dans l'enseignement, leur fréquence d'utilisation du manuel, ensuite nous avons posé des questions sur l'enseignement de la fraction : comment l'abordent-ils ? Comment évaluent-ils les connaissances qu'ont les élèves sur les fractions ? Quels registres privilégient-ils ? Les élèves ont-ils l'occasion d'explorer la notion de fraction par eux-mêmes ? Leurs réponses à nos questions doivent fournir un bon aperçu de leur manière de travailler en classe et nous permettre de caractériser leurs façons de faire avec les élèves : leur approche est-elle magistrale ou laisse-t-elle de la place à l'élève ?

4.3.2. <u>Plan d'analyse des réponses des enseignants et grille d'analyse</u>

Ces réponses ont été regardées suivant deux perspectives, la première pédagogique et la seconde, mathématique. Pour l'analyse pédagogique, nous utilisons les éléments du tableau de Mahdokht (2008) présentant les modes de représentations - matériel, imagé, symbolique, formel - mis en œuvre dans les activités d'enseignement et d'apprentissage proposées ainsi que les rôles réservés à l'enseignant et à l'élève dans ces activités. Ces modes définissent quatre catégories à l'intérieur desquelles nous nous sommes arrêtées plus particulièrement sur les rôles réservés à l'enseignant et à l'élève. Ces rôles possibles se situent entre deux extrêmes. À l'un de ces extrêmes, l'élève se révèle très actif et à l'autre extrême, l'enseignant se réserve un rôle nettement plus actif et exigeant pour lui-même. Il fait presque tout : c'est lui qui agit, qui fournit les renseignements, qui exécute les activités et qui présente les exercices. L'élève garde alors un rôle plus passif : il écoute, enregistre et « apprend ». Pour l'analyse mathématique, nous voulons savoir quels sont les statuts de la fraction mis en jeu dans les réponses des enseignants.

Approche pédagogique	I) En utilisant des matériels didactiques (manipulations d'objets concrets) :	a) manipulés par les élèves : ce sont les élèves eux-mêmes qui découvrent leur cheminement pour construire leurs connaissances à partir de quelques indications nécessaires que donne l'enseignant pour les orienter et les soutenir. b) manipulés par les élèves, mais l'enseignant donne des instructions aux élèves étape par étape et leur pose parfois des questions pour orienter leur réflexion. c) manipulés par l'enseignant : en posant parfois des questions aux élèves, il réalise l'activité jusqu'à la conclusion. (les élèves sont plus des témoins que des participants actifs).

	II) En utilisant des représentations graphiques (recours à des objets semi-concrets) :	a) dessinées par les élèves, l'enseignant pose des questions pour mettre les élèves en réflexion et pour orienter l'activité. b) dessinées par les élèves, l'enseignant pose des questions pour mettre les élèves en réflexion, mais c'est lui qui donne les instructions. c) dessinées par l'enseignant qui pose des questions aux élèves pour les mettre en réflexion et, en expliquant, complète l'activité. d) dessinées par l'enseignant qui explique les étapes à franchir et complète l'activité dont les élèves sont simplement témoins.
	III) En utilisant des objets abstraits, de pensée :	a) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des objets physiques et pose des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l'objectif. b) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des objets physiques en donnant des explications nécessaires pour résoudre le problème. c) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des représentations graphiques et pose des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l'objectif. d) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des représentations graphiques en donnant des explications nécessaires pour résoudre le problème. e) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des idées ou des règles et pose des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l'objectif. f) l'enseignant fait référence au sens des symboles et/ou évoque des idées ou des règles en donnant des explications nécessaires pour résoudre le problème.
	IV) L'enseignant énonce les règles et formules pour résoudre le problème.	
Statut de la fraction	Connaissance des statuts	

Tableau 2 : Grille d'analyse des réponses des enseignants

Ainsi, une réponse qui se voit attribuer la cote (I b) signifie que l'enseignant a parlé d'utilisation d'un matériel, mais qu'il dirige étroitement les élèves dans leurs manipulations.

4.3.3. Modalités de passation

Au total, 10 enseignants ont accepté de remplir notre questionnaire, ce questionnaire qui sera présenté dans son intégralité en annexes, a été distribué par voie numérique aux enseignants, ils l'ont rempli de la période allant du 04 Juillet 2024 au 11 juillet 2024.

CHAPITRE 5 : ANALYSE DU MANUEL

Dans ce chapitre, nous analysons le manuel scolaire de la classe de 6^{e}, dans le but de déterminer les interprétations de la fraction présentes dans le manuel, de voir la manière avec laquelle le manuel aborde les fractions et l'impact sur les représentations des élèves.

5.1. <u>**Présentation du manuel**</u>

Le manuel que nous avons analysé est le manuel homologué par le gouvernement pour l'enseignement des mathématiques en classe de 6^{e} au cours de l'année académique 2023-2024. Ce manuel est « *Collection Périmètre 6^{e}* », publié en 2014 aux éditions *Nathan*. Il compte 167 pages et 66 leçons.

La structure des leçons est définie par les auteurs dans l'avant-propos du manuel ; d'après les auteurs, l'ossature d'une leçon se présente comme suit :

- Des activités de mise en route (du calcul mental et un contrôle de prérequis nécessaires) : dans cette partie, une ou plusieurs activités sont proposées à l'apprenant, dans le but de tester ses connaissances et de lui donner les connaissances nécessaires à la leçon ;
- Une ou plusieurs activités de découverte afin de favoriser l'acquisition des savoirs nouveau ou de consolider des acquis antérieurs Il doit faire face aux éventuelles difficultés qu'il rencontre, s'interroger et mobiliser ses connaissances et autres moyens pour résoudre les difficultés rencontrées ;
- Une rubrique « je retiens » avec l'essentiel à retenir
- De nombreux exercices d'application et des problèmes centrés sur la vie des élèves
- Des exercices d'approfondissement

Dans ce manuel, nous nous intéressons au cours sur les fractions, ceux-ci couvrent 16 pages du manuel et portent sur 8 leçons qui sont :

- Leçon 6 : Fractions d'une grandeur
- Leçon 7 : Les fractions égales
- Leçon 8 : Simplifier les fractions
- Leçon 9 : Ajouter, soustraire, multiplier des fractions
- Leçon 10 : Les fractions décimales
- Leçon 11 : Comparer des fractions
- Leçon 12 : Les fractions inverses

- Leçon 13 : Diviser une fraction

5.2. <u>Analyse du manuel</u>

L’analyse de manuel a pour but de déterminer les interprétations de la fraction présentes dans le manuel, de voir la manière avec laquelle le manuel aborde les fractions et l’impact sur les représentations des élèves.

Pour cette analyse, nous nous appuyons sur les définitions et les explications données précédemment concernant les significations de la fraction, sur le contexte du problème et sur ce que les élèves ont à faire. Dans notre analyse et nos tableaux, nous utilisons le terme problème pour identifier toutes les activités analysées (exemples, exercices, problèmes). Puisque nous nous intéressons au nombre d’activités reliées à chaque signification de la fraction, nous n’avons pas cru nécessaire de distinguer le type d’activité.

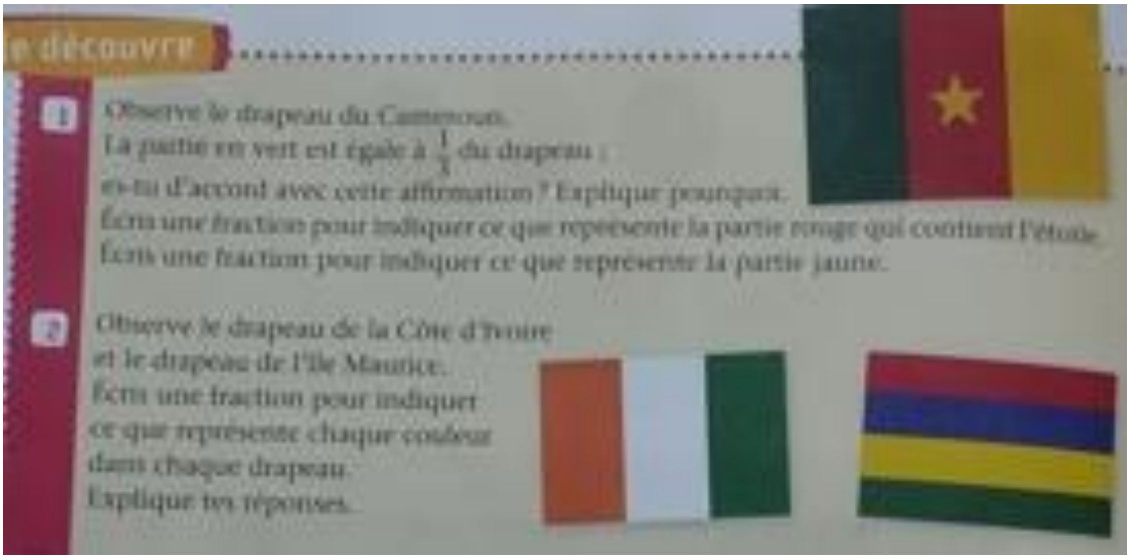
A la fin de chaque leçon, nous allons dresser un tableau récapitulatif des interprétations de la fraction présentes, du nombre d’activités analysées ; nous allons ajouter de nouvelles catégories dans le cas où une fraction a plus d’un sens dans une activité.

1. Leçon 6 : Fractions d’une grandeur (pp 18-19)

a- « Avant de démarrer » : dans cette rubrique, il y’a deux activités. La première présente la fraction $\frac{1}{2}$ et on définit le numérateur et le dénominateur en précisant que le dénominateur « indique en combien de parts l’unité a été partagée » et le numérateur « indique le nombre de parts utilisées », ce qui renvoie à la fraction comme partie-tout. Dans la deuxième, on a tracé un segment [AB] et on demande à l’élève d’écrire la fraction qui correspond à la partie rouge, on a encore ici le statut de la fraction comme partie d’un tout ; ici on a l’application de ce qui est dit dans la première activité.

b- « Je découvre » : dans cette rubrique il y’a 3 activités dans lesquelles des représentations graphiques sont données, des schémas.

Les 2 premières présentent la fraction comme partie d’un tout, car ici on présente à l’enfant un rectangle considéré comme un tout continu et l’enfant doit écrire une fraction pour représenter chacune des parts du rectangle. Dans la troisième activité, nous avons la faction comme opérateur, en effet, l’élève a besoin d’effectuer les deux opérations *multiplication* et *division* pour trouver le résultat. L’élève n’a aucun moyen de aire l’activité 3, cet exercice est en rupture avec la manière dont la fraction est présentée.



c- « Je retiens » : on explique bien ici, comment appliquer la fraction à une grandeur. Mais nous remarquons que, on part de fraction comme partie d'un tout, pour passer à fraction comme opérateur, sans transition et cela crée beaucoup de problèmes. Les définitions données ici nous montrent que la notion de fraction comme opérateur n'est pas très développée, c'est la fraction comme partie d'un tout qui est beaucoup plus développé. En effet, dans le manuel, pour calculer $\frac{1}{6}$ d'une grandeur, on partage l'unité en 6, et on en prend une seule part ; et pour calculer la fraction d'une grandeur, on divise l'unité en un nombre de parts et on en prend certain nombres. De plus, toutes les fractions données en exemples ont un numérateur inférieur au dénominateur.

d- « Exercices et problèmes » :

Dans les exercices 1, 3, 4, 5, 7, 9 et l'exercice d'approfondissement, la fraction est classée dans la catégorie opérateur, en effet l'élève doit calculer la fraction d'une grandeur.

Dans l'exercice 2, la fraction est classée dans la catégorie partie d'un tout (continu). En effet, ici le carré est considéré comme un tout continu. La fraction $\frac{2}{5}$ représente deux parties égales prises sur dans un tout divisé en 5.

Dans l'exercice 6, la fraction est classée dans la catégorie *Mesure*. En effet, 1 heure = 60 minutes est conçue comme unité de mesure qui peut être utile pour calculer les autres quantités demandées dans ce problème, c'est-à-dire : $\frac{1}{2}$ heure = $\frac{1}{2}$ × 60 minutes = 60 minutes ÷ 2 = 30 minutes. On le met également dans la catégorie opérateur, car l'élève doit effectuer une succession d'opération de multiplication et division pour trouver le résultat.

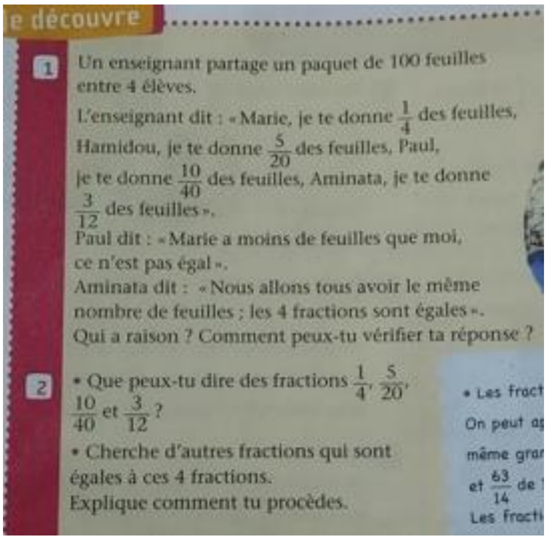
Dans l'exercice 8, la fraction est classée dans la catégorie *Opérateur*. En effet, l'élève a besoin d'effectuer les deux opérations *multiplication* et *division* pour trouver la somme versée par les trois premières personnes. La première personne a payé $\frac{1}{3}$×4200 = (1×4200) ÷ 3 = 1400F ou (4200 ÷ 3) × 1 = 1400F. On le classe également dans la catégorie nombre, car l'élève doit trouver la part du quatrième et va faire 1-($\frac{1}{3}$ +$\frac{1}{4}$ +$\frac{2}{7}$).

	Significations de la fraction			
	Partie d'un tout	Opérateur	Mesure et opérateur	Nombre et opérateur
Nombre de problèmes	4	8	1	1
Nombre total de problèmes analysés pour la leçon6 : 14				

Tableau 3 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans la leçon 6

2. Leçon 7 : Les fractions égales (pp 20-21)

a- « Avant de démarrer » : dans cette rubrique on a juste une seule activité, ici on demande à l'élève de calculer les fractions d'une grandeur, la fraction est vue comme opérateur ; les fractions utilisées sont toutes de numérateur inférieur au dénominateur.


e découvre

1 Un enseignant partage un paquet de 100 feuilles entre 4 élèves.
L'enseignant dit : « Marie, je te donne $\frac{1}{4}$ des feuilles, Hamidou, je te donne $\frac{5}{20}$ des feuilles, Paul, je te donne $\frac{10}{40}$ des feuilles, Aminata, je te donne $\frac{3}{12}$ des feuilles ».
Paul dit : « Marie a moins de feuilles que moi, ce n'est pas égal ».
Aminata dit : « Nous allons tous avoir le même nombre de feuilles ; les 4 fractions sont égales ».
Qui a raison ? Comment peux-tu vérifier ta réponse ?

2 • Que peux-tu dire des fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{10}{40}$ et $\frac{3}{12}$?
• Cherche d'autres fractions qui sont égales à ces 4 fractions.
Explique comment tu procèdes.

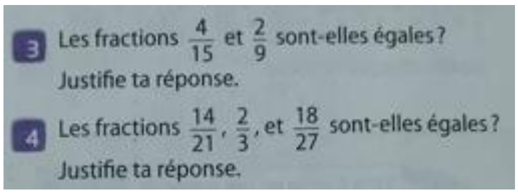
b- « Je découvre » : dans cette rubrique, il y'a deux activités qui renvoient au statut nombre de la fraction, car ici il s'agit des fractions équivalentes, l'élève doit comparer des fractions et voir quel enfant a le plus de feuilles. Etant donné que l'élève ne connait pas encore comparer des fractions, il va appliquer les fractions qu'on lui a donné aux 100 feuilles et ainsi voir ce qui est plus grand ; on a là la fraction comme opérateur. La première activité les fractions utilisées sont toutes de numérateur inférieur au dénominateur.

c- « Je retiens » : on donne une méthode pour vérifier si deux fractions sont égales, pour cela on doit calculer les fractions d'une même grandeur et si le résultat est le même alors elles sont égales. Cette méthode est développée à partir du sens opérateur. Ils expliquent comment à partir d'une fraction, on peut obtenir une fraction équivalente, ceci est développé à partir du sens nombre. De plus, toutes les fractions données en exemples ont un numérateur inférieur au dénominateur.

d- « Exercices et problèmes » :

Dans les exercices 1, 2, 5, 7 et 8, la fraction est classée dans la catégorie opérateur, en effet l'élève doit calculer la fraction d'une grandeur.

Les exercices 3, 4, 6, et l'exercice d'approfondissement sont classées dans la catégorie nombre, en effet aucun contexte n'est donné ici et l'élève dot effectuer des calculs sur les fractions. De plus dans les exercices 3 et 4, c'est à la charge de l'élève de trouver une grandeur, puis multiplier les fractions par cette grandeur et comparer les résultats.


3 Les fractions $\frac{4}{15}$ et $\frac{2}{9}$ sont-elles égales ? Justifie ta réponse.

4 Les fractions $\frac{14}{21}$, $\frac{2}{3}$, et $\frac{18}{27}$ sont-elles égales ? Justifie ta réponse.

	Significations de la fraction		
	Opérateur	Opérateur et nombre	Nombre
Nombre de problèmes	6	2	4
Nombre total de problèmes analysés pour la leçon7: 12			

Tableau 4 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans la leçon 7

3. Leçon 8 : Simplifier les fractions (pp 22-23)

a- « Avant de démarrer » : ici une activité est proposée à l'élève, dans laquelle il faut citer des fractions égales, c'est la catégorie nombre ici qui intervient.

b- « Je découvre » : dans cette rubrique deux activités sont données à l'élève. Dans la première l'élève doit expliquer pourquoi sur la photo, on a divisé chaque terme de la fraction par 5, ici c'est la catégorie nombre. Dans la deuxième activité, il doit calculer les fractions de la même grandeur, afin de conclure que ces fractions sont égales, ici c'est la catégorie opérateur.

c- « Je retiens » : dans cette rubrique, on explique quelle méthode utiliser pour simplifier une fraction. Pour simplifier une fraction, on recherche un diviseur commun aux deux termes de la fraction et on simplifie la fraction en utilisant ce diviseur commun.

d- « Exercices et problèmes » :

Dans les exercices 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 et l'exercice d'approfondissement, la fraction est classée dans la catégorie nombre, car ici l'élève doit effectuer des opérations de simplifications des fractions.

Dans l'exercice 5, la fraction est classée dans la catégorie partie d'un ensemble, le tout discret ici est « les 60minutes d'une heure », et chaque fois l'élève doit prendre une partie, il doit prendre premièrement 30minutes, ensuite 10minutes, 20minutes et enfin 15minutes du tout discret. Ici on a également la catégorie nombre, car l'élève doit ensuite simplifier les fractions.

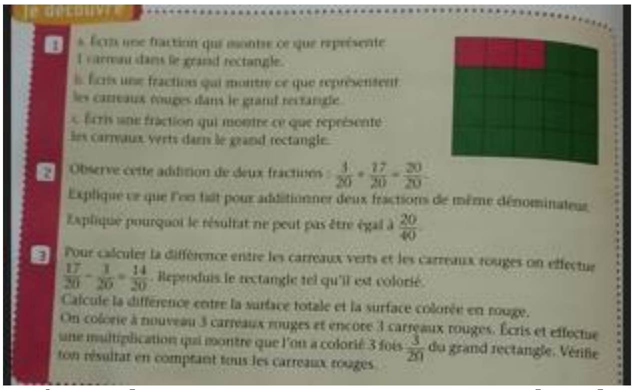
Dans l'exercice 9, la fraction est classée dans la catégorie nombre, car l'élève doit simplifier la fraction $\frac{12}{100}$, mais il est également dans la catégorie opérateur car l'élève doit ensuite calculer la fraction d'une grandeur.

	Significations de la fraction			
	Partie d'un ensemble et nombre	Opérateur	Opérateur et nombre	Nombre
Nombre de problèmes	1	1	1	10
Nombre total de problèmes analysés pour la leçon8: 13				

Tableau 5 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans la leçon 8

4. Leçon 9 : Ajouter, soustraire, multiplier des fractions (pp 24-25)

a- « Avant de démarrer »: dans cette rubrique, l'élève est soumis à une seule activité dans laquelle il doit simplifier des fractions et trouver les fractions irréductibles correspondantes, la fraction ici est considérée comme un nombre.


Je découvre

1 a. Écris une fraction qui montre ce que représente 1 carreau dans le grand rectangle.
b. Écris une fraction qui montre ce que représentent les carreaux rouges dans le grand rectangle.
c. Écris une fraction qui montre ce que représente les carreaux verts dans le grand rectangle.

2 Observe cette addition de deux fractions : $\frac{3}{20} + \frac{17}{20} = \frac{20}{20}$
Explique ce que l'on fait pour additionner deux fractions de même dénominateur.
Explique pourquoi le résultat ne peut pas être égal à $\frac{20}{40}$.

3 Pour calculer la différence entre les carreaux verts et les carreaux rouges on effectue $\frac{17}{20} - \frac{3}{20} = \frac{14}{20}$. Reproduis le rectangle tel qu'il est colorié.
Calcule la différence entre la surface totale et la surface colorée en rouge.
On colorie à nouveau 3 carreaux rouges et encore 3 carreaux rouges. Écris et effectue une multiplication qui montre que l'on a colorié 3 fois $\frac{3}{20}$ du grand rectangle. Vérifie ton résultat en comptant tous les carreaux rouges.

b- « Je découvre » : dans cette rubrique, l'élève est soumis à trois activités. Dans la première on lui présente un rectangle partagé en 20 petits carrés, dont 3 sont coloriés en rouge et 17 en verts. L'élève doit écrire une fraction qui représente 1 carreau du rectangle, ensuite une fraction qui représente les carreaux verts et enfin une fraction qui représente les carreaux rouges ; ceci est dans la catégorie partie d'un tout. Dans la deuxième activité, on demande à l'élève d'expliquer ce que l'on fait pour additionner deux fractions de même dénominateur, mais l'élève ne construit pas lui-même cette connaissance, on la lui donne déjà ; ici la fraction est dans la catégorie nombre. On pense à priori que l'élève pour additionner deux fractions, va additionner les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, donc on lui montre avant tout que c'est une erreur. Dans la troisième activité, la fraction est dans la catégorie partie d'un tout et également dans la catégorie nombre. Il y'a un passage de partie d'un tout à nombre. Dans une fraction, le dénominateur c'est le nombre de parties par lesquelles on a divisé et le numérateur c'est le nombre de parties qu'on choisit. Ecrire donc l'expression de cette somme, c'est dire qu'on a pris le nombre de parties en vert plus le nombre de parties en rouge, et on a donc trouvé 20 parties. Ce passage doit être bien expliqué à l'élève, pour qu'il comprenne.

c- « Je retiens » : dans cette rubrique, on donne des règles de calcul, pour additionner, soustraire et multiplier des fractions. L'élève doit juste mémoriser ces règles, surtout qu'il n'y a pas eu construction du savoir par l'élève.

d- « Exercices et problèmes » :

Dans les exercices 1, 2, 3, 4, 5 et 6, la fraction a le statut de nombre, car ici l'élève doit effectuer des opérations d'addition, de soustraction et de multiplication des fractions.

Dans l’exercice 7, la fraction a le statut de partie d’un tout (discret). La fraction $\frac{4}{12}$ ici représente une relation entre une partie (4 tomates) et un tout discret (12 tomates). La fraction a également le statut de nombre car l’élève doit effectuer l’addition des fractions.

Dans l’exercice 8, la fraction est classée dans la catégorie partie d’un tout, car on considère 2 parts sur 25 parts du chargement, il est également classé dans la catégorie nombre car l’élève doit ensuite effecteur la multiplication des fractions pour trouver la quantité déchargée par chaque employé, ensuite l’addition des fractions pour trouver la quantité totale déchargée et enfin la soustraction pour trouver ce qui reste à décharger.

Dans l’exercice d’approfondissement, la fraction est classée dans la catégorie partie d’un ensemble, l’élève doit écrire ce que représente une ligne sur 80 lignes, il y’a également la catégorie nombre car il doit calculer ce qui lui reste à faire

	Significations de la fraction				
	Partie d’un tout	Partie d’un ensemble et nombre	Partie d’un tout et nombre	Nombre sur une droite numérique	Nombre
Nombre de problèmes	1	2	1	0	9
Nombre total de problèmes analysés pour la leçon9: 13					

Tableau 6 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans la leçon 9

5. Leçon 10 : Les fractions décimales (pp 26-27)

a- « Avant de démarrer » : dans cette rubrique, il y a une seule activité dans laquelle on donne des nombres décimaux et on demande à l’élève de donner la position de chaque chiffre dans un nombre, si c’est le chiffre des unités, des dizaines, des dixièmes, des centièmes ou des millièmes.

b- « Je découvre » : dans cette rubrique, on a quatre activités. Dans la première, la fraction a le statut de nombre, car l’élève doit effectuer des opérations de multiplication. Dans les trois autres activités, la fraction a le statut de quotient car l’élève doit effectuer des divisions pour trouver les nombres décimaux correspondants aux fractions qu’on leur a données.

c- « Je retiens » : dans cette rubrique, on donne la définition de fraction décimale et de nombre décimal. Ils donnent une méthode pour transformer une fraction décimale en nombre décimal : « je la lis et je l’écris sous forme décimale », mais cette méthode n’a vraiment pas de sens pour l'élève, l'élève ne peut pas à partir de là comprendre comment passer d'une fraction décimale à un nombre décimal.

d- « Exercices et problèmes » :

Dans les exercices 1, 2, 3 et 5, la fraction est dans la catégorie quotient. En effet, dans ces exercices, l'élève doit effectuer la division du numérateur par le dénominateur afin d'obtenir le nombre décimal qui convient à la fraction décimale

Dans l'exercice 4, la fraction est dans la catégorie nombre sur une droite numérique, car l'élève doit pouvoir placer des fractions sur la droite numérique qui lui est présentée.

Dans l'exercice d'approfondissement, la fraction est classée dans la catégorie partie d'un tout, car l'élève doit dire quelle fraction représente la partie coloriée en rouge, la partie coloriée en bleu et la partie coloriée en jaune. La fraction est également dans la catégorie quotient, car l'élève doit ensuite calculer ces fractions pour obtenir les nombres décimaux correspondants.

	Significations de la fraction			
	Partie d'un tout	Quotient	Nombre sur une droite numérique	Nombre
Nombre de problèmes	1	7	1	1
Nombre total de problèmes analysés pour la leçon10: 10				

Tableau 7 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans la leçon 10

6. Leçon 11 : Comparer des fractions (pp 28-29)

a- « Avant de démarrer » : dans cette rubrique, on présente une activité à l'élève dans laquelle il doit effectuer la division du numérateur de la fraction par son dénominateur pour trouver un nombre décimal. Ici la fraction a le statut de quotient.

b- « Je découvre » : dans cette rubrique, on présente deux activités à l'apprenant. Dans la première, on lui donne un segment, qui est ici comme une droite numérique ; il doit faire un trait en vert sur la partie qui représente $\frac{2}{8}$ et un trait en bleu sur la partie qui représente $\frac{5}{8}$. Ici les catégories partie d'un tout et nombre sur une droite numérique apparaissent. Dans la deuxième activité, on présente un segment à l'apprenant, on lui demande de tracer en noir sur la partie qui représente $\frac{10}{8}$, une fraction plus grande que l'unité, la fraction ici a le statut de nombre sur une droite numérique. La manière dont c'est présenté a un impact sur l'apprentissage des élèves et c'est ça qui peut être à l'origine des difficultés des élèves, on parle au début de l'activité de fraction comme partie d'un tout, on limite la fraction à des cas où le numérateur est plus petit que le dénominateur et après on demande à l'enfant de citer une fraction plus grande que 2.

c- « Je retiens » : dans cette rubrique, on donne les règles de comparaison des fractions, ces règles sont nombreuses et peuvent embrouiller es élèves. Ils donnent également une méthode pour comparer une fraction à un nombre entier, par exemple « si le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction est plus petite que 1 ». Dans ces règles, la fraction est considérée comme un nombre.

d- « Exercices et problèmes » :

Dans les exercices 1, 2, 3, 4 et 5, la fraction est dans la catégorie nombre, car ici l'enfant compare juste les fractions et aucun autre contexte n'est donné.

Dans les exercices 6 et 7, la fraction est dans la catégorie partie d'un tout, car l'élève doit écrire la fraction représentée par le schéma devant lui ; la fraction est également dans la catégorie nombre, car l'élève doit ensuite les comparer.

Dans l'exercice d'approfondissement, la fraction est classée dans la catégorie partie d'un tout, car l'élève doit écrire la fraction représentée par le schéma devant lui.

	Significations de la fraction					
	Partie d'un tout	Partie d'un tout et nombre	Quo tient	Nombre sur une droite numérique et partie d'un tout	Nombre sur une droite numérique	Nombre
Nombre de problèmes	1	2	1	1	1	5
Nombre total de problèmes analysés pour la leçon11: 11						

Tableau 8 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans la leçon 11

7. Leçon 12 : Les fractions inverses (pp 30-31)

a- « Avant de démarrer » : dans cette rubrique, on présente à l'élève une activité dans laquelle il doit simplifier des fractions, ici la fraction est dans la catégorie nombre.

b- « Je découvre » : dans cette rubrique, on a deux activités. Dans la première on demande à l'élève d'écrire les fractions inverses correspondantes aux fractions données, ici la fraction est dans la catégorie nombre. Dans la deuxième activité, on a la catégorie nombre également, l'élève doit vérifier des assertions et donner des exemples dans le cas où l'assertion est vraie.

c- « Je retiens » : dans cette rubrique on montre comment obtenir l'inverse d'une fraction.

d- « Exercices et problèmes » : dans tous les exercices ici, la fraction est dans la catégorie nombre, dans l'exercice 1, l'élève doit donner les fractions inverses des fractions qui lui sont présentées, ensuite simplifier les fractions qui peuvent être simplifiées. Dans l'exercice 2, l'élève doit écrire une fraction dont la fraction inverse est plus petite que l'unité. Dans l'exercice 3, l'élève doit écrire une fraction dont la fraction inverse est plus grande que l'unité. Dans l'exercice 4, l'élève doit écrire une fraction dont la fraction inverse est égale à 2. Dans l'exercice 5, l'élève doit écrire une fraction dont la fraction inverse est égale à 5. Dans l'exercice 6, l'élève doit écrire une fraction dont la fraction inverse est égale l'unité. Dans l'exercice 7, l'élève doit écrire une fraction dont la fraction inverse est égale à 3.

	Significations de la fraction
	Nombre
Nombre de problèmes	11
Nombre total de problèmes analysés pour la leçon12: 11	

Tableau 9 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans la leçon 12

8. Leçon 13 : Diviser une fraction (pp 32-33)

a- « Avant de démarrer » : dans cette rubrique, on présente une activité à l'élève dans laquelle on lui demande d'effectuer des opérations, ici la fraction est dans la catégorie nombre.

b- « Je découvre » : dans cette rubrique, on présente deux activités à l'élève. Dans la première, on lui donne un segment gradué et on lui demande de partager en 2 parties égales, ici on a la catégorie partie d'un tout et nombre sur une droite numérique. Dans la deuxième activité, on veut partager un disque en 3 parties égales, ici on a la catégorie partie d'un tout.

c- « Je retiens » : dans cette rubrique on montre la méthode à l'élève, comment diviser une fraction par un nombre entier.

d- « Exercices et problèmes » :

Dans les exercices 1 et 2, la fraction est classée dans la catégorie nombre, car ici l'élève doit pouvoir effectuer des opérations de division.

Dans l'exercice 3, la fraction a le sens de partie d'un tout et nombre sur une droite numérique. En effet, l'élève doit reproduire le segment gradué, ensuite le diviser en 3 parties égales.

Dans l'exercice 4, la fraction est classée selon le sens partie d'un tout, car c'est à partir de ce sens que l'élève va donner les fractions de liquide contenues dans A, B, C et D.

Dans l'exercice d'approfondissement, la fraction est classée selon le sens partie d'un ensemble, car l'apprenant doit écrire ce que représente 1 beignet sur 16 beignets. La fraction est classée dans la catégorie nombre également, car l'élève doit écrire une division pour compléter l'égalité qui montre le partage des beignets.

	Significations de la fraction				
	Partie d'un tout	Partie d'un ensemble et nombre	Nombre sur une droite numérique et partie d'un tout	Partie d'un tout et nombre	Nombre
Nombre de problèmes	1	1	2	1	3
Nombre total de problèmes analysés pour la leçon13: 8					

Tableau 10 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans la leçon 13

9. Activités d'intégration (pp 34-35)

L'activité d'intégration 1 « jeu de cartes » : dans cette activité d'intégration, l'élève doit fabriquer 32 cartes avec des fractions de son choix, sur une carte l'élève écrit une fraction. On lui présente ensuite deux activités, dans la première il y a deux joueurs, 6 cartes doivent être distribuées à chaque joueur, chaque joueur présente sa première carte et celui qui a la plus grande remporte les deux cartes. Dans cette activité, la catégorie qui intervient est celle de nombre, l'élève doit pouvoir comparer des fractions. Dans la deuxième activité, il y'a quatre joueurs et on ne distribue pas les cartes aux joueurs, toutes les cartes sont retournées, le premier joueur tire une carte et la pose, le deuxième joueur tire une carte et la pose à droite si elle est de plus grande valeur ou à gauche si elle est de plus petite valeur que la première carte. Dans cette activité, la catégorie qui intervient est celle de nombre, l'élève doit pouvoir comparer des fractions.

L'activité d'intégration 2 « achats pour la maison » : dans cette activité d'intégration, on présente à l'élève deux activités. Dans la première on lui présente des facilités de paiement d'une cuisinière « payez la moitié de votre cuisinière maintenant et le reste en 4 fois sans frais », on lui demande d'exprimer la valeur de chaque versement par une fraction et ensuite de calculer le montant de chaque versement. Ici c'est la catégorie partie d'un tout qui est en jeu, car on prend d'abord une partie sur 2 du prix total, ensuite on prend une partie sur 4 du reste ; on a également la catégorie opérateur, car l'élève doit trouver le montant du versement en trouvant la fraction d'une grandeur.

Dans la deuxième activité, on lui présente des facilités de paiement d'un ordinateur « payez votre ordinateur portable en 8 fois sans frais », on lui demande d'exprimer la valeur de chaque versement par une fraction et ensuite de calculer le montant de chaque versement. Ici c'est la catégorie partie d'un tout qui est en jeu, car on prend d'abord une partie sur 8 du prix total; on a également la catégorie opérateur, car l'élève doit trouver le montant du versement en trouvant la fraction d'une grandeur.

Dans la troisième activité, on lui présente des facilités de paiement d'un réfrigérateur « payez votre réfrigérateur en 6 fois sans frais après un premier versement de 30000F», on lui demande d'exprimer la valeur du premier versement par une fraction et ensuite d'exprimer la valeur de chaque versement avec une fraction de ce qu'il reste à payer et enfin de calculer le montant de chaque versement. Ici c'est la catégorie partie d'un tout qui est en jeu, car on prend une partie sur un tout ($\frac{30000}{330000}$) pour trouver la valeur du premier versement en fraction; on a également la catégorie opérateur, car l'élève doit trouver le montant du versement en trouvant la fraction d'une grandeur.

	Significations de la fraction	
	Partie d'un tout et opérateur	Nombre
Nombre de problèmes	3	2
Nombre total de problèmes analysés pour les activités d'intégration : 5		

Tableau 11 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans les activités d'intégration

5.3. **Synthèse des sens observés**

	Significations de la fraction							
	Partie d'un tout	Partie d'un ensemble	Opérateur	Rapport	Quotient	Mesure	Nombre sur une droite numérique	Nombre
Nombre de problèmes	21	3	21	0	10	1	5	55
Pourcentage (en %)	21,42	3,06	21,42	0	10,20	1,02	5,10	56,12
Rang	2	6	3	8	4	7	5	1
Nombre total de problèmes analysés portant sur les fractions : 97								

Tableau 12 : Tableau récapitulatif des sens de la fraction présents dans le manuel scolaire

Nous remarquons que d’autres catégories apparaissent également :

- Mesure et opérateur : nous avons rencontré des fractions qui dans une même activité, ont le sens mesure et le sens opérateur, nous l’avons rencontré dans une seule activité.
- Nombre et opérateur : nous avons rencontré des fractions qui dans une même activité, ont le sens nombre et le sens opérateur, ceci est présent dans 4 activités.
- Partie d’un ensemble et nombre : nous avons rencontré des fractions qui dans une même activité, ont le sens nombre et le sens partie d’un ensemble, ceci est présent dans 4 activités.
- Partie d’un tout et nombre : nous avons rencontré des fractions qui dans une même activité, ont le sens nombre et le sens partie d’un tout, ceci est présent dans 4 activités.
- Nombre sur une droite numérique et partie d’un tout : nous avons rencontré des fractions qui dans une même activité, ont le sens nombre sur une droite numérique et le sens partie d’un tout, ceci est présent dans 3 activités.
- Partie d’un tout et opérateur : nous avons rencontré des fractions qui dans une même activité, ont le sens partie d’un tout et le sens opérateur, ceci est présent dans 3 activités.

Description du tableau récapitulatif

Partie d'un tout : le sens partie d'un tout est présent dans une bonne part des problèmes de fraction du manuel scolaire de 6^{e}. En effet, la catégorie de problèmes utilisant le sens partie d’un tout se classe au deuxième rang avec 21,42% derrière la catégorie de problèmes utilisant le sens de nombre et devant la catégorie de problèmes utilisant le sens opérateur.

Partie d'un ensemble: les problèmes privilégiant le sens de partie d'un ensemble sont presque absents du manuel scolaire de 6^{e}. En effet, le manuel contient 3,06% de ces problèmes et ce sens se classe au 6^{e} rang derrière le sens nombre sur une droite numérique et devant le sens mesure.

Opérateur: les problèmes de fraction portant sur le sens opérateur occupent une bonne part des problèmes de fraction présents dans le manuel scolaire de 6^{e}. En effet, cette catégorie de problèmes se classe au 3^{e} rang avec 21,42% derrière la catégorie de problèmes utilisant le sens partie d’un tout et devant la catégorie de problèmes utilisant le sens quotient. Nous classons cette catégorie troisième derrière la catégorie partie d’un tout, car cette catégorie opérateur est implicite dans le manuel, elle est expliquée à partie de la catégorie partie d’un tout.

Rapport: les problèmes portant sur le sens de rapport se classent en dernière position dans ce manuel, par rapport aux autres catégories de problèmes. En effet, aucun des problèmes analysés ne contenait le sens rapport.

Quotient: le sens de quotient est un sens qui intervient peu dans les problèmes analysés. Cette catégorie de problèmes se classe au quatrième rang avec 10,20% des problèmes dans le manuel scolaire, derrière la catégorie de problèmes utilisant le sens opérateur et devant la catégorie de problèmes utilisant le sens nombre sur une droite numérique.

Mesure: les problèmes privilégiant le sens mesure sont presque absents du manuel scolaire de 6^{e}. En effet, le manuel contient 1,02% de ces problèmes et cette catégorie se classe au 6^{e} rang derrière la catégorie de problèmes utilisant le sens nombre sur une droite numérique et devant la catégorie de problèmes utilisant le sens rapport.

Nombre sur la droite numérique: les problèmes portant sur le sens de nombre sur la droite numérique sont presque absents du manuel scolaire, ils représentent 5,10% des problèmes. Le manuel classe ces problèmes en cinquième position, derrière la catégorie de problèmes utilisant le sens quotient et devant la catégorie de problèmes utilisant le sens partie d'un ensemble.

Nombre: les problèmes portant sur le sens de nombre dominent le manuel scolaire de 6^{e}. Le manuel contient 56,12% de ces problèmes.

5.4. **Conclusion de l'analyse du manuel**

La fraction est introduite dans le manuel comme partie d'un tout. Certaines interprétations de la fraction présentes dans le manuel donnent lieu à des activités avec souvent des ruptures où la fraction n'est plus utilisée comme partie d'un tout, et dans plusieurs cas, l'élève n'a pas assez de ressources pour ces activités-là.

Nous pouvons conclure également que presque toutes les fractions qui sont dans un contexte sont de numérateur inférieur au dénominateur, nous avons trouvé un seul cas de fraction qui était inscrite dans un contexte et dont le numérateur était supérieur au dénominateur. Cela conforte les élèves dans l'idée que la fraction est partie d'un tout et si ils se retrouvent dans une situation dans laquelle il y'a des fractions impropres, ils pourraient avoir des difficultés à travailler. De même, la même fraction peut avoir plusieurs statuts dans les problèmes posés, ce qui rend la tâche difficile aux élèves.

A partir des titres des leçons, on peut déjà dire que globalement la fraction est un nombre, les objectifs visés sont la manipulation des fractions, et pour cela les élèves doivent faire face à plusieurs interprétations. Nous voyons que le statut nombre est souvent imbriqué avec un autre statut, on part des différents statuts de la fraction, pour amener l'élève à s'imprégner du statut de nombre, à pouvoir manipuler les fractions, effectuer des opérations, comparer ; mais cela n'est pas explicite dans le manuel et ça peut causer des difficultés aux élèves dans la manipulation des fractions.

Nous remarquons également que, tous les schémas sont donnés à l'élève, il n'a pas la charge de faire des schémas.

Nous pouvons conclure après analyse du manuel scolaire de 6e que, les sens les plus observés dans les problèmes de fractions sont : nombre (56,12%), partie d'un tout (21,42%), opérateur (21,42%) et quotient (10,20%) ; quant aux sens les moins présents, ce sont les sens nombre sur la droite numérique (5,10%), partie d'un ensemble (3,06%), mesure (1,02%) et rapport (0%).

Nous allons analyser le questionnaire destiné aux élèves afin de voir quelles représentations ont les élèves et quels liens nous pouvons faire avec les résultats de l'analyse du manuel.

CHAPITRE 6 : PRESENTATIONS DES RESULTATS ET DISCUSSIONS

Dans ce chapitre, nous présentons premièrement les résultats des questionnaires, ce qui va nous permettre de voir quelles sont les représentations des élèves et de quelle manière les enseignants abordent la notion de fraction. Ensuite, nous vérifions les hypothèses et enfin nous donnons des stratégies de remédiation statuts.

6.1. Analyse des réponses des enseignants

Nous présentons dans la section qui vient l'analyse des réponses des 10 enseignants répondant à notre questionnaire écrit qui leur a été soumis, ces réponses sont présentées intégralement en annexe.

6.1.1. Synthèse et constats des analyses des réponses des enseignants

Dans cette section, nous synthétisons les analyses détaillées présentées en annexe et dégageons nos constats des réponses fournies par les enseignants en procédant question par question. Ceci nous amènera, dans la section qui suivra, à des éléments de conclusions sur ce qu'ils disent de leurs enseignements.

Nous commencerons par donner les synthèses des réponses des enseignants aux quatre premières questions, ensuite nous allons faire un tableau récapitulatif de leurs réponses aux six autres questions.

Réponses à la question 1 :

La question 1 porte sur le nombre d'années d'enseignement dans la classe de 6^{e}, E_1 et E_4 enseignent depuis 3 ans, E_2 enseigne depuis 7 ans et E_3 enseigne depuis 1 an. E_3 est l'enseignant que nous avons interrogé et qui a le moins d'année d'expérience. E_5 enseigne depuis 24 ans, il est l'enseignant que nous avons interrogé avec le plus d'année d'expérience. E_6 et E_{10} enseignent depuis 2 ans. E_7 enseigne depuis 12 ans, E_8 enseigne depuis 11 ans et E_9 enseigne depuis 8 ans.

Réponses à la question 2 :

Cette question avait pour but de savoir si les enseignants ont suivi une formation sur les fractions. Presque tous les enseignants déclarent n'avoir suivi aucune formation. Deux enseignants (20%) seulement déclarent avoir suivi une formation sur les fractions dans le cadre de la formation des enseignants, E_2 a suivi une formation à AiMS et E_9 lors d'un séminaire pédagogique.

Réponses à la question 3 :

Cette question avait pour but de voir les principales références des enseignants pour leur cours sur les fractions. 5 (50%) enseignants déclarent que leurs sources sont les documents au programme (manuel scolaire et livre programme). E_{10} mentionne qu'en plus du manuel scolaire, il a une documentation propre à lui et E_5 mentionne les livres et les problèmes quotidiens. 2 enseignants ne déclarent pas leur source de référence et E_2 déclare que sa principale source est internet.

Réponses à la question 4 :

Cette question avait pour but de voir à quelle fréquence les enseignants utilisent le manuel scolaire et pourquoi. La plupart des enseignants (7 soit 70%) l'utilisent surtout pour donner des exercices aux élèves. E_4 et E_6 utilisent le manuel régulièrement mais n'ont pas expliqué pourquoi. E_8 utilise le manuel scolaire à 60% car il n'y trouve pas souvent tout ce dont il a besoin. Ceci montre que le manuel scolaire est utilisé par les enseignants pour la préparation de leur cours mais surtout aussi pour donner les exercices aux élèves.

Nous présentons ici un tableau récapitulatif de leurs réponses en fonction de notre grille d'analyse. Dans ce tableau à double entrées, la première colonne représente les questions 5 à 10 et la première ligne représente les enseignants interrogés.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
Q_5	I	I c	II c	III b	III	III	I c	III	III a	I c
Q_6	II d	IV	III c	IIIf, IV	III	III a	I c	III a	I c	IV
Q_7	IV	IV	II c	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV
Q_8	IV	I c	II d	IV	IV	III	IV	IV	III	IV
Q_9	Rien écrit	Rien écrit	Rien écrit	Type de fractions	Rien écrit	Ratio,nombre pourcentage	Rien écrit	Rien écrit	Type de fractions	Rien écrit
Q_{10}	Rien écrit	Rien écrit	Rien écrit	Type de fractions	Rien écrit	Nombre ensuite ratio	Rien écrit	Rien écrit	Rien écrit	Rien écrit

Tableau 13 : Tableau récapitulatif des réponses des enseignants aux six dernières questions

Réponses à la question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

Cette question porte sur la façon dont les enseignants disent aborder le concept de fraction. 4 enseignants utilisent des objets concrets, qu'ils manipulent eux-mêmes sans laisser les élèves manipuler, les élèves sont témoins de l'activité (catégorie I c). 4 enseignants utilisent des objets de pensée. Un seul enseignant utilise des représentations graphiques, il dessine une boule et mène l'activité (catégorie II c). Un enseignant n'explique pas sa démarche.

Réponses à la question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

Cette question porte sur la façon dont les enseignants disent aborder la comparaison de fractions. E_1 utilise des représentations graphiques, il dessine des cercles et mène l'activité lui-même. 2 enseignants utilisent des objets concrets, ils viennent avec deux objets de même nature, ils mènent l'activité eux-mêmes (catégorie I c). 2 enseignants donnent la règle de comparaison des fractions. 4 enseignants utilisent des objets de pensée, un enseignant ne précise pas les rôles des acteurs, les trois autres posent des questions aux élèves pour orienter leur processus d'apprentissage vers l'objectif (catégorie III a). E_4 utilise des objets de pensée et après il introduit la règle de calcul.

Réponses à la question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

Cette question porte sur la façon dont les enseignants disent aborder l'addition de fractions. 9 enseignants sur 10 abordent cela en donnant des règles et formules de calcul. Certains expliquent aux élèves qu'il faut réduire au même dénominateur et ensuite effectuer l'addition de fractions de même dénominateurs, d'autres donnent la procédure de calcul directement sans réduire au même dénominateur (catégorie IV). E_3 a donné une réponse qui n'est pas correcte du point de vue mathématique, car elle ne permet pas de calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Nous faisons le constat selon lequel les enseignants pour l'addition de fraction donnent juste la formule et les règles de calcul aux élèves.

Réponses à la question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

La huitième question s'attache à la manière dont les enseignants présenteraient la notion de fractions équivalentes. E_2 utilise des objets concrets qu'il manipule lui-même, il réalise l'activité jusqu'à la fin (catégorie I c). E_3 utilise des représentations graphiques dessinées par lui-même (catégorie II d). 5 des 10 enseignants donnent une règle formelle pour la notion de fractions équivalentes (catégorie IV). E_6 et E_9 déclarent utiliser le partage mais ne précisent pas comment ils font, ni les rôles des élèves, E_8 déclare utiliser des situations de comparaison mais n'explique pas comment il va procéder. Nous constatons que la plupart des enseignants montrent la méthode de calcul seulement, de plus la place réservée à l'enseignant est très grande, l'élève ne manipule pas, il observe juste.

Réponses à la question 9 : connaissance des différents statuts

Cette question avait pour but de voir si les enseignants ont connaissance des différents statuts de la fraction, des différents sens de la fraction. 7 enseignants n'ont rien écrit. E_4 et E_9 ont cité les types de fractions. Les fractions propres sont des fractions dont la valeur du numérateur est plus petite que celle du dénominateur, les fractions impropres sont des fractions dont la valeur du numérateur est plus grande que celle du dénominateur, les fractions décimales sont des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10. E_6 a cité ratio, pourcentage, nombre rationnel. A priori on peut faire l'hypothèse que les enseignants ne cernent pas bien ce qu'on entend par statut d'une fraction.

Réponses à la question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

Cette question avait pour but de voir ce que les enseignants demandent en priorité à leurs élèves. Les enseignants qui n'ont pas répondu à la question 9 n'ont pas donné de réponse à cette question. E_4 a mis la même réponse qu'à la question 9. E_6 a déclaré à cette question : nombre pour les calculs et ratio pour l'évaluation des compétences.

6.1.2. <u>Conclusion de l'analyse des réponses des enseignants</u>

Après l'analyse des réponses des enseignants, nous arrivons à plusieurs résultats. Les enseignants interrogés introduisent la fraction comme partie d'un tout chez leurs élèves. Nous constatons que les enseignants laissent très peu de place aux élèves, les élèves sont juste témoins des activités. Les objets de pensée sont les plus utilisées par les enseignants, ensuite les objets concrets et enfin les représentations graphiques. La plupart des enseignants dans leur cours, font référence à des représentations symboliques, évoque des objets, le travail est beaucoup plus fait dans l'abstraction, il n'y a pas de manipulation par les élèves. Très peu d'enseignants utilisent des représentations graphiques, et dessinées par eux même et non par les élèves. De plus, beaucoup d'enseignants donnent les règles et formules de calcul aux élèves pour aborder la comparaison, l'addition et l'équivalence de fractions. Nous constatons également que les enseignants n'ont pas connaissance des différents statuts de la fraction. Un seul enseignant a eu une idée des différents statuts de la fraction en citant : ratio, pourcentage et nombre rationnel ; et pour l'évaluation il a précisé que la fraction comme nombre est utilisée dans les calculs et la fraction comme ratio dans les évaluations de compétences.

6.2. <u>Analyse *a postériori* des réponses des élèves</u>

6.2.1. <u>Présentation des résultats des élèves</u>

Le but de l'analyse des réponses des élèves au questionnaire est de tenter d'apporter une réponse à notre première question de recherche posée dans la problématique : quels sont les représentations des élèves de 6^e sur les fractions ? Quel est leur rapport à la fraction ? Quels sont les sens qu'ils donnent à la fraction?

Nous allons maintenant présenter les pourcentages de réponses manifestées par les élèves de 6^e aux 7 questions du questionnaire.

<u>Question 1:</u> Représente les $\frac{2}{8}$ du rectangle dessiné ci-dessous

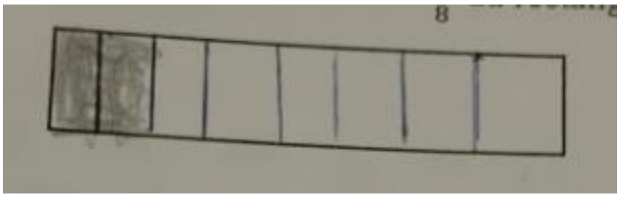
Réponse	Q_1R_1	Q_1R_2	Q_1R_3	Q_1R_4	Q_1R_5	Q_1R_6	Autre réponses	Rien écrit
Elèves	$e_1; e_2; e_3; e_5; e_6; e_7; e_8;$ $e_{10}; e_{12}; e_{13}; e_{14}; e_{15};$ $e_{19}; e_{21}; e_{23}; e_{24}; e_{26};$ $e_{28}; e_{29}; e_{33}; e_{35}; e_{37};$ $e_{39}; e_{40}; e_{41}; e_{43}; e_{46}.$ $e_9; e_{17};\ e_{27};\ e_{38};$	$e_4; e_{30}$ $e_{31}; e_{32}$ $e_{34}; e_{36}$ $e_{42}; e_{45}.$	Pas de réponses	e_{11}	Pas de réponses	e_{16} e_{18} e_{20} e_{25} e_{44}	e_{22}	Pas de réponses
Effectifs	31	8	0	1	0	5	1	0
Pourcentage (en %	67,39	17,39	0	2,17	0	10,87	2,17	0

Tableau 14 : Tableau des réponses des élèves à la première question

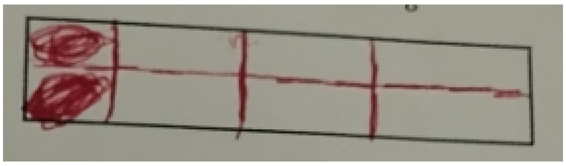
Cette question est une question sur la signification Partie-tout (quantité continue). Les résultats montrent que, pratiquement, la plupart des élèves illustrent ou représentent correctement cette signification. En effet, au total 41 élèves sur 46 (89,13 %) illustrent de façon correcte cette fraction.

Nous constatons que le mode de fractionnement du rectangle (le tout) est varié, c'est-à-dire qu'il existe plusieurs illustrations différentes. Les élèves choisissent surtout des parties qui sont juxtaposées.

67,39% des élèves partagent le rectangle en huit parties égales ou non, en traçant des bandes verticales et en choisissant deux parties juxtaposées, cela témoignerait de la signification partie d'un tout ; cette procédure est celle qui apparait le plus, cela pourrait provenir des habitudes scolaires, de l'approche du manuel sur les fractions, car dans celui-ci la fraction est introduite par un rectangle subdivisé en bandes verticales exemples sont pris avec des rectangles. Parmi ces élèves, seuls deux partagent le rectangle en bandes égales, le reste partage en bandes inégales, cela témoigne de la difficulté de représenter dans le registre figural. Ça peut s'expliquer par le fait que l'élève ait fait ce travail à main levée, également par le fait de ces habitudes scolaires (il n'est pas habitué à être précis dans les dessins).



17,39% des élèves partagent le rectangle en huit parties inégales, en traçant une bande horizontale et trois bandes verticales cela témoignerait de la signification partie d'un tout.



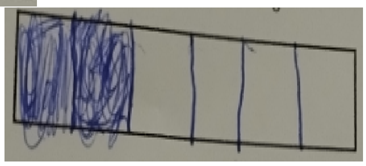
L'élève e_{11} a choisi de représenter une fraction équivalente à $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{4}$, ce qui renvoie à la signification partie d'un tout et également de la signification nombre car ici il utilise une fraction équivalente à $\frac{2}{8}$.

L'élève e_{22} a utilisé une autre représentation qui découle de la signification partie d'un tout, car il a divisé le rectangle en 8 parties et en a pris deux.

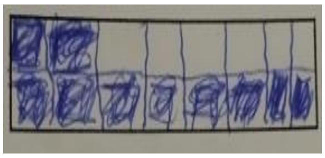
Une difficulté remarquée, chez un bon nombre d'élèves, est celle d'être précis dans l'exécution des illustrations étant donné qu'ils ne font pas des parties égales. Dans l'ensemble, nous pouvons dire que les élèves interrogés illustrent correctement la signification *Partie-tout (quantité continue).*

Par ailleurs, 5 élèves sur 46 (10,86%) donnent une réponse erronée sur cette question. Les réponses erronées étaient dues au mauvais découpage du rectangle, à la mauvaise représentation de la fraction $\frac{2}{8}$.

L'élève e_{16} a divisé le rectangle en deux.

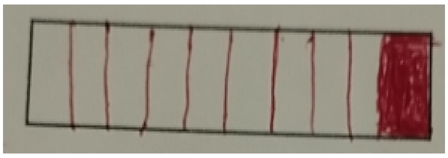


L'élève e_{20} a divisé le rectangle en six et en a pris deux parties, il a considéré le nombre de parties à prendre, mais n'a pas trouvé le tout.

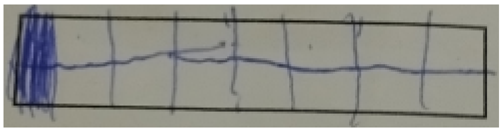


L'élève e_{18} a divisé le rectangle en seize parties et en a pris dix, quand on regarde de plus près, on voit qu'il a matérialisé deux carreaux en haut et huit carreaux en bas, il a réécrit la fraction $\frac{2}{8}$. On pourrait pense à une interprétation de $\frac{2}{8}$ comme 2 sur 8.

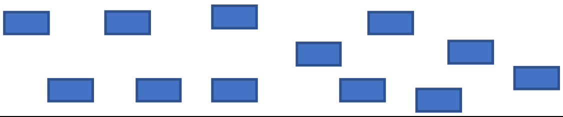
L'élève e_{25} a divisé le rectangle en dix et en a pris une partie.



L'élève e_{44} a divisé le rectangle en seize parties et en a pris deux, il a considéré le nombre de parties à prendre, mais n'a pas trouvé le tout.



<u>Question 2:</u> Représente le $\frac{1}{3}$ de cette collection d'objets

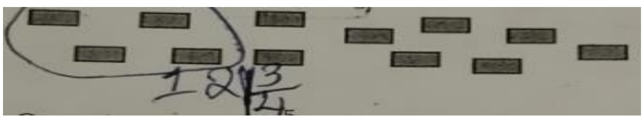


Réponses	Q_2R_1	Q_2R_2	Q_2R_3	Q_2R_4	Rien écrit
Elèves	e_2 ; e_8; e_9; e_{10}; e_{13};e_{16} ;e_{17}; e_{44} e_{18} ;e_{19}; e_{21}; e_{22}; e_{23}; e_{24}; e_{45}; e_{25} ;e_{26}; e_{27} ; e_{28} ;e_{30}; e_{32} ; e_{33} ;e_{36} ;e_{37}; e_{38}; e_{39}; e_{40}; e_{41} e_{42}	e_1; e_{43}; e_{46} e_{31}; e_{34} e_3; e_4; e_{11} ;e_{35} e_{14}; e_{15}; e_{20}; e_{29}	Pas de réponses	e_7 ; e_{12}	e_5; e_6
Effectif	29	13	0	2	2
Pourcentage (en %)	63,04	28,26	0	4,34	4,34

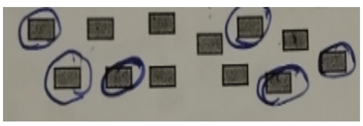
Tableau 15 : Tableau des réponses des élèves à la deuxième question

Cette question sert à vérifier et à savoir si les élèves de 6[e] illustrent correctement la signification Partie-tout (quantité discrète) et la signification opérateur.

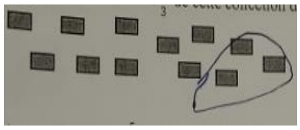
Pratiquement, un bon nombre d'élèves illustrent de façon correcte cette signification, en effet, 29 élèves (63,04%) illustrent correctement la signification *Partie-tout (quantité discrète).* Les élèves colorient ou encerclent 4 objets juxtaposés. Il y'a également là une manifestation du sens opérateur également, car pour pouvoir entourer le $\frac{1}{3}$, les élèves doivent savoir à quoi c'est égal. Plusieurs élèves ont laissé des traces de leur démarche, et on voit qu'ils ont multiplié 12 par 1, ensuite ils ont divisé par 3.



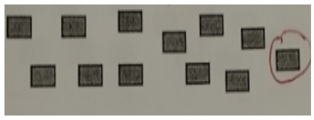
Par ailleurs, 15 élèves (32,60%) donnent une réponse erronée sur cette question, l'élève e_{12} entoure 6 objets



13 élèves entourent 3 objets. On voit avec cela que certains élèves se concentrent juste sur le dénominateur qui est donné, il peut également considérer que $\frac{1}{3}$ représente 3 parts de la quantité.



L'élève e_7 entoure un seul objet, il prend en compte juste sur le numérateur.



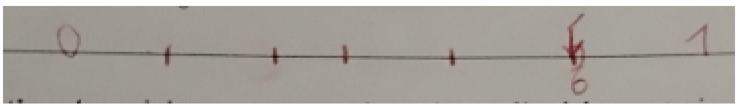
Enfin, nous avons deux élèves qui n'ont pas donné de réponse à cette question sur la signification Partie-tout (quantité discrète).

Question 3: Place $\frac{5}{6}$ sur la droite numérique

Réponses	Q_3R_1	Q_3R_2	Q_3R_3	Q_3R_4	Q_3R_5	Autre réponse	Rien écrit
Elèves	e_7	e_{36}	$e_2; e_4; e_{18}; e_{19}; e_{20}; e_{24}; e_{25}; e_{31}; e_{32}; e_{38}$	$e_6; e_{10}; e_{12}; e_{14}$; $e_{15}; e_{22}; e_{23}$;e_{37}	$e_{28}; e_{40}; e_{41}; e_{42}$ $e_{43}; e_{45}$	$e_8; e_{16}; e_{44}$ $e_{17}; e_{27}$ $e_{29}; e_{30}; e_{33}$	$e_1; e_3; e_5; e_9; e_{11}; e_{13}; e_{21}$;$e_{26}e_{34}$; $e_{35}; e_{39}; e_{46}$
Effectif	1	1	10	8	6	8	12
Pourcentage (en %)	2,17	2,17	21,74	17,39	13,04	17,39	26,08

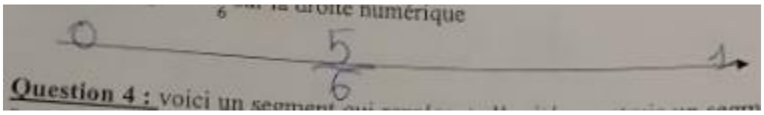
Tableau 16 : Tableau des réponses des élèves à la troisième question

Cette question est une question sur la signification *Nombre sur une ligne numérique ou graduée*, elle permet de constater que très peu d'élèves représentent correctement cette signification. En effet, un seul élève réussit la question portant sur cette signification. Il sait comment graduer une droite numérique, il a mis le zéro, le un, mais il n'est pas précis dans les graduations, il fait les séparations entre les traits d'une manière inégale.

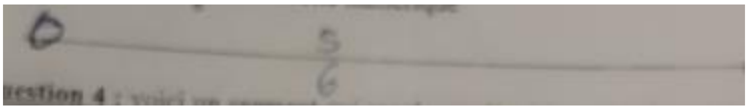


33 élèves au total (71,74%) fournissent une mauvaise réponse, ils ont une mauvaise connaissance de la droite numérique, ils ne savent pas qu'il faut placer d'abord le zéro, ensuite le un, ensuite graduer.

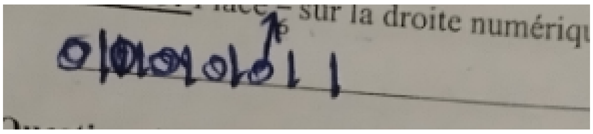
L'élève e_{36} situe la fraction incorrectement entre 0 et 1, sans partitionner le segment. Cette procédure est développée à partir du sens de nombre puisque l'élève doit savoir qu'une fraction est située entre deux nombres entiers consécutifs.



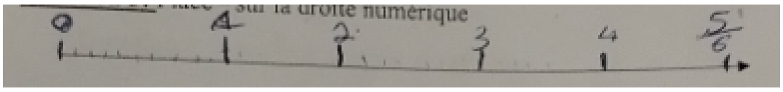
Certains (10 élèves, soit 21,74%) situent la fraction $\frac{5}{6}$ après 0, ils marquent juste 0 sur la droite numérique et puis marquent la fraction après. Ceci car la fraction est vue comme un nombre soit entre zéro et un, plus grand que zéro, plus grand que un ; ils développent cette signification à partir du sens nombre.



D'autres ont utilisé la signification partie d'un tout (8 élèves, soit 17,39%), en effet, ils divisent le segment en 6 parties en faisant 5 petits traits pour graduer et situent $\frac{5}{6}$ au cinquième trait.



Certains élèves (6 élèves, soit 13,04%) considèrent uniquement le numérateur de la fraction qui est 5, ils marquer le zéro et graduent jusqu'à 5. Ce qui montrerait la difficulté qu'ont les élèves de tenir compte à la fois du numérateur et du dénominateur.



Une autre réponse, donnée par 8 élèves, est celle d'écrire la fraction $\frac{5}{6}$ sur la droite sans repère.

Enfin, nous constatons que 26,8 % (12 sur 46) des élèves n'ont pas donné de réponse à cette question sur la signification *Nombre sur une ligne graduée*.

Question 4: Le segment suivant représente l'unité, construis un segment qui représente le $\frac{5}{3}$ de ce segment:

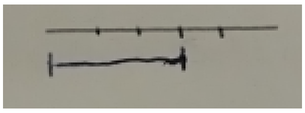
Réponses	Q_4R_1	Q_4R_2	Q_4R_3	Autre réponse	Rien écrit
Elèves	Pas de réponses	$e_2; e_4; e_6; e_{14}; e_{15}; e_{23}; e_{24}; e_{31}; e_{36}; e_{37}$ $e_{39}; e_{40}; e_{41}; e_{42}; e_{43}$	$e_1; e_7; e_{17}$ $e_{25}; e_{27};$ $e_{32}; e_{45}$	$e_8; e_{10}; e_{20}; e_{22};$ $e_{16}; e_{19}; e_{29}; e_{30};$ $e_{33}; e_{38}; e_{44};$	$e_3; e_5; e_9; e_{11}; e_{12}$ $e_{13}; e_{18}; e_{21}; e_{26};$ $e_{28}; e_{34}; e_{35}; e_{46}$
Effectif	0	15	7	11	13
Pourcentage	0%	32,60%	15,21%	23,91%	28,26%

Tableau 17 : Tableau des réponses des élèves à la quatrième question

Nous allons présenter les résultats des réponses des élèves à cette question spécifique portant sur la signification de *Mesure*. Nous constatons qu'aucun des élèves n'a réussi à répondre correctement à cette question. 71,74% des élèves soit 33 sur 46 élèves ont donné des réponses erronées à cette question. Nous avons catégorisé les réponses en 5 groupes.

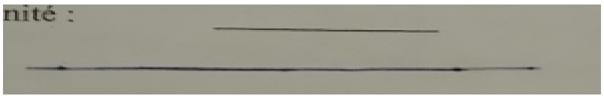
Parmi les réponses, 15 élèves (32,60%) ont divisé le segment donné en 5 et ont pris trois parties, ils ont représenté la fraction $\frac{3}{5}$, cette procédure est développée à partir du sens de partie d'un tout, ils ne considèrent pas la fraction $\frac{5}{3}$ mais $\frac{3}{5}$ car ils y sont habitués, la difficulté vient de ce que les habitudes scolaires donnent à travailler avec les fractions propres.

Nous avons 7 élèves (soit 15,21%) qui ont construit un autre segment qui est $\frac{3}{5}$ du segment de base, on voit apparaitre le sens mesure et le sens partie d'un tout.

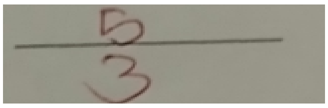


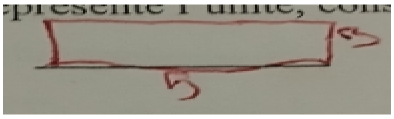
Au total, 22 élèves sur 46 ont représenté la fraction $\frac{3}{5}$, au lieu de la fraction $\frac{3}{5}$.

Nous avons obtenus d'autres réponses, parmi lesquelles 6 élèves ont juste reproduit un autre segment en bas, ils ont juste construit le segment demandé dans la question.



4 élèves ont écrit la fraction $\frac{5}{3}$ sur le segment donné à la question, ils n'ont pas compris le sens de la question.





Un élève a dessiné un rectangle à partir du segment qu'on a donné, et a placé 5 et 3, ce qui montre qu'il produit juste une réponse en utilisant les chiffres de l'énoncé, sans comprendre le sens.

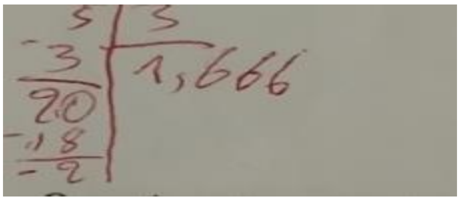
Enfin, nous avons 28,26% (13 sur 46) des élèves n'ont pas donné de réponse à cette question sur la signification *Mesure*.

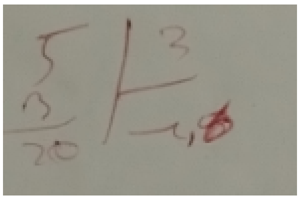
<u>Question 5:</u> Si 5 biscuits sont partagés équitablement entre 3 enfants, combien de biscuits aura chaque enfant ? Laisse les traces de ta démarche

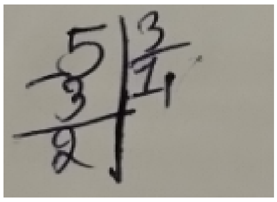
Réponses	Q_5R_1	Q_5R_2	Q_5R_3	Q_5R_4	Autre réponse	Rien écrit
Elèves	e_3; e_4; e_6 ; e_8 ; e_{15} ; e_{16} ; e_{17} ; e_{19}; e_{20}; e_{21} ; e_{23} ; e_{25} ; e_{26} ; e_{28}; e_{29}; e_{33} ; e_{35} ; e_{36} ; e_{37} e_{38}; e_{39}; e_{40} ; e_{41} ; e_{42} ; e_{43}; e_{45}	e_7 e_9	e_2; e_{10} e_{13}; e_{22} e_{24} ; e_{27}	e_{11} e_{30}	e_{14}; e_{18} e_{31}; e_{32}	e_1; e_5 e_{12}; e_{34} e_{44} ; e_{46}
Effectif	26	2	6	2	4	6
Pourcentage	56,52%	4,34%	13,04%	4,34	8,69%	13,04%

Tableau 18 : Tableau des réponses des élèves à la cinquième question

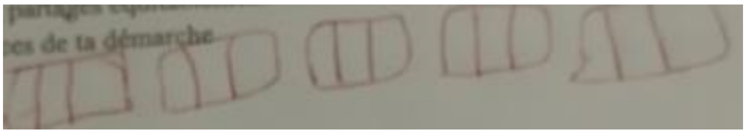
Cette question vise à vérifier si les élèves représentent correctement la signification *Quotient*. Nous pouvons constater qu'un peu plus de la moitié des élèves, soit 56,52% (26 sur 46 élèves) réussissent cette question. Les élèves donnent des réponses correctes, ou incorrectes en utilisent une procédure développée à partir de la signification *Quotient*, ils effectuent 5÷ 3 pour donner une réponse. Certains ont trouvé 1,66, d'autres 1,6, d'autres encore se sont arrêtés à la réponse 1. Ceci découle d'une mauvaise connaissance sur la division de deux entiers. Ici on voulait voir la capacité des élèves à représenter correctement cette signification.



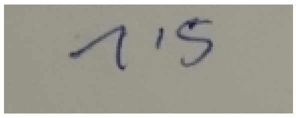




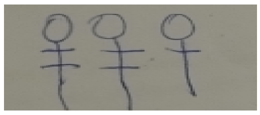
Nous avons deux (4,34%) élèves qui ont utilisé une procédure découlant de la signification partie d'un tout, ils ont dessiné cinq biscuits, les ont séparé chacun en trois parties pour distribuer aux enfants.



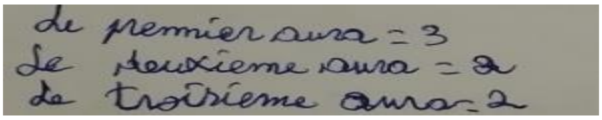
Nous avons 6 élèves (13,04%) qui attribuent aux enfants un biscuit chacun, ensuite essayent de partager les deux biscuits restants de manière inégale aux trois enfants en donnant demi à chaque enfant, ceci est développé à partir du sens quotient mais ne peut pas marcher ici car on a une division avec reste ; cette procédure découle de la division faite au primaire. Cela peut aussi s'expliquer par le contexte de la question, on travaille ici avec des biscuits. Cette réponse est donnée car de façon pragmatique 0,6 n'est pas facilement identifiable pour l'élève.

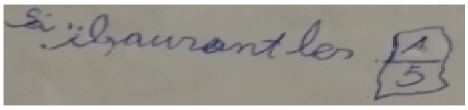


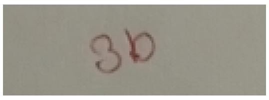
Nous avons deux (4,34%) élèves qui ont utilisé une procédure découlant de la division faite au primaire, ils ont dessiné trois enfants, et ont attribué les biscuits aux trois enfants, mais ce partage n'est pas équitable.

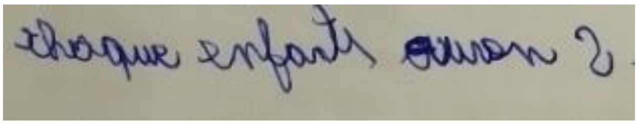


Nous avons dénombré quatre autres réponses. L'élève e_{14} a partagé en donnant 3 au premier enfant, 2 au deuxième enfant et 2 au troisième enfant ; cet élève a partagé 7 biscuits et non 5 comme le demande la question. L'élève e_{18} a écrit que chaque enfant aura $\frac{1}{5}$. L'élève e_{31} a écrit que chaque enfant 2 biscuits ; cet élève a partagé 6 biscuits, cela peut venir du fait qu'il a pensé impossible de partager 5 biscuits entre 3 personnes. L'élève e_{32} a écrit que chaque enfant aura 3 biscuits cet élève a partagé 9 biscuits.









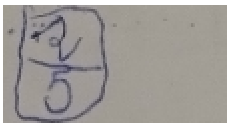
Nous avons 13,04% (6 sur 46) des élèves qui n'ont pas répondu à cette question portant sur la signification *Quotient*.

Question 6: Dans un panier il y'a 7 pommes dont 5 rouges et les autres vertes. Combien y a-t-il de pommes vertes par rapport aux pommes rouges ? Laisse les traces de ta démarche en représentant la situation

Réponses	Q_6R_1	Q_6R_2	Q_6R_3	Autre réponse	Rien écrit
Elèves	e_{18}	e_{28}; e_{40} e_{41}; e_{45}	e_1; e_2; e_3 ; e_4 ; e_5 ; e_7 ; e_8 ; e_{10}; e_{13}; e_{14} ; e_{15} ; e_{20} ; e_{21} ; e_{23}; e_{24}; e_{25} ; e_{26} ; e_{30} ; e_{31} e_{32}; e_{37}; e_{43} ; e_{46}	e_{11} ; e_{12}; e_{16}; e_{17} ; e_{19} e_{27} ; e_{29} e_{33}; e_{34}; e_{35} ; e_{42}	e_6 ; e_9; e_{22}; e_{36} ; e_{38} ; e_{39} e_{44}
Effectif	1	4	23	11	7
Pourcentage	2,17%	8,69%	50%	23,91%	15,21%

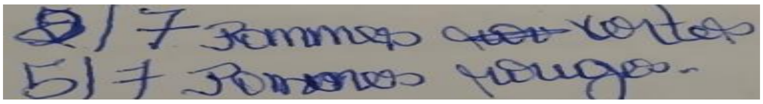
Tableau 19 : Tableau des réponses des élèves à la sixième question

Cette question sert à vérifier si les élèves illustrent correctement la signification rapport. Un seul élève a donné la bonne réponse. Il a donné le rapport de partie à partie $\frac{2}{5}$ tel que demandé. Cette réponse réfère au sens de rapport. L'élève a d'abord trouvé le nombre de pommes vertes qui est deux, ensuite il a mis le rapport du nombre de pommes vertes par rapport au nombre de pommes rouges.

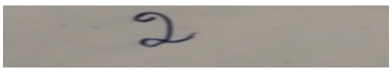


Par ailleurs, 82,60% (38 sur 46 élèves) des élèves donnent une réponse incorrecte et ces réponses incorrectes données par les élèves peuvent être mises dans 5 catégories.

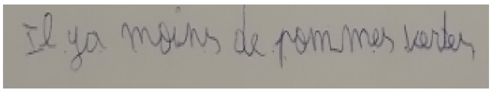
Parmi ces réponses erronées, 8,69% (4 sur 46) des élèves pensent au rapport de partie à tout. En effet, ils écrivent $\frac{2}{7}$ pour indiquer le nombre de pommes vertes par rapport au nombre total de pommes. Cela fait référence au sens de rapport, mais c'est un rapport de partie à tout. Ainsi, c'est une réponse qui serait développée à partir du sens partie d'un tout.

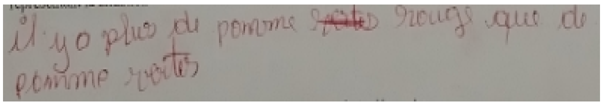


Une autre réponse erronée donnée par la moitié des élèves (23 sur 46) des élèves consiste à calculer 7-5 et trouver 2. Ils ont juste trouvé le nombre de pommes vertes dans la question, mais n'ont pas trouvé le rapport pommes verte à pommes rouges.

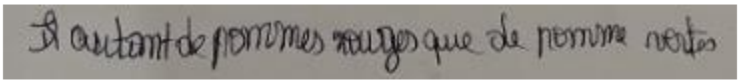


7 élèves (15,22%) ont répondu par des phrases comme « il y'a moins de pommes vertes », ou alors « les pommes rouges sont supérieurs aux pommes vertes »

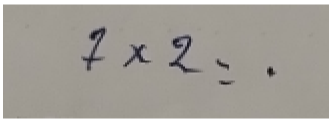


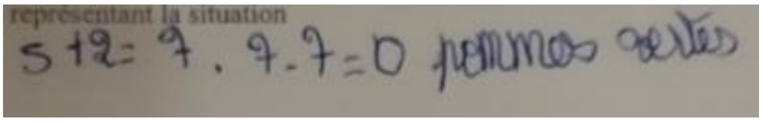


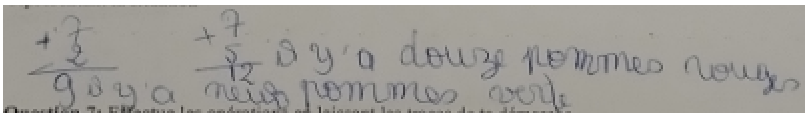
L'élève e_{16} a écrit qu'il y'a autant de pommes rouges que de pommes vertes.



Les élèves e_{12}; e_{17} et e_{19} ont répondu par des opérations, la multiplication de 7 par 2, ou encoure l'addition des chiffres. Il nous semble que les élèves effectuent juste des opérations sans comprendre, mais seulement pour répondre à la question en utilisant les chiffres qu'ils voient dans l'énoncé.







Enfin, nous constatons que juste deux élèves (4,34%) ne répondent pas à cette question portant sur la signification *Rapport*.

<u>Question 7:</u> Effectue les opérations :

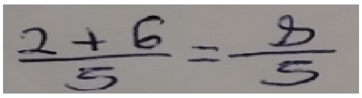
$$\frac{2}{5}+\frac{6}{5}; \qquad \frac{1}{3}+\frac{2}{7}; \qquad \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}; \qquad \frac{11}{4}\div\frac{1}{2}$$

a. <u>Première opération</u>

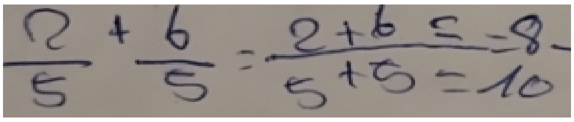
Réponses	$Q_7O_1R_1$	$Q_7O_1R_2$	$Q_7O_1R_3$	Rien écrit
Elèves	e_2; e_6; e_7 ; e_8 ; e_9 ; e_{11} ; e_{12} ; e_{14} ; e_{15} e_{16}; e_{17}; e_{18} ; e_{19} ; e_{20} ; e_{21} ; e_{22} ; e_{26} e_{28}; e_{29}; e_{30} ; e_{31} ; e_{34} ; e_{35} e_{36}; e_{37}; e_{39}; e_{42} ; e_{43} ; e_{44} ; e_{46}	e_1; e_3; e_5 ; e_{23} e_{27}; e_{32} ; e_{33} e_{38}; e_{41} ; e_{45}	e_4 ; e_{10} ; e_{24}	e_{12} ; e_{25} ; e_{40}
Effectif	30	10	3	3
Pourcentage	65,22%	21,74%	6,52%	6,52%

Tableau 20 : Tableau des réponses des élèves à la première opération de la septième question

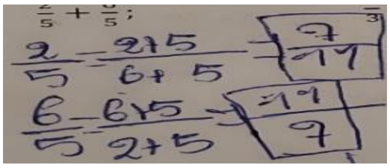
Cette question sert à vérifier si les élèves arrivent à calculer la somme de deux fractions de mêmes dénominateurs. Nous pouvons constater que 65,22% (30 sur 46) des élèves réussissent cette question. Ils additionnent les numérateurs entre eux et conservent le dénominateur qui est 5.

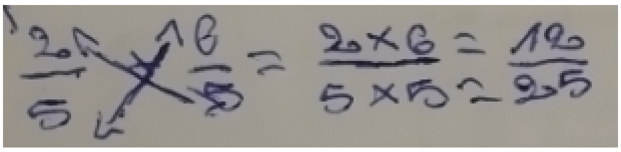


Au total, 13 élèves donnent une mauvaise réponse, 21,74% (10 sur 46) des élèves regardent le numérateur et le dénominateur indépendamment et utilisent les propriétés sur les entiers naturels, ils ne considèrent pas la barre de fraction et additionnent comme avec les entiers ; cette procédure peut également témoigner du glissement de la règle sur la multiplication des fractions, puisque dans la multiplication des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.



6,52% des élèves donnent des réponses erronées en utilisant des règles fausses qui semblent provenir du mélange de toutes les règles de calcul qu'ils ont apprises, les élèves e_4 ; e_{10} semblent vouloir appliquer la procédure pour réduire au même dénominateur. L'élève e_{24} multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.





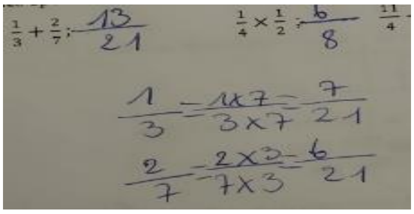
Enfin, nous constatons que trois élèves (6,52%) ne répondent pas à cette question.

b. <u>Deuxième opération</u>

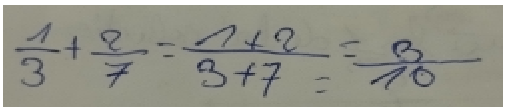
Réponses	$Q_7O_2R_1$	$Q_7O_2R_2$	$Q_7O_2R_3$	Rien écrit
Elèves	e_1; e_3; e_5 ; e_7 ; e_8 ; e_{11} ; e_{12} ; e_{14} ; e_{15} e_{16}; e_{18} ; e_{21} ; e_{22} ; e_{23} ; e_{26} ; e_{27}; e_{45} e_{28}; e_{29}; e_{30} ; e_{31} ; e_{32} ; e_{33} e_{34}; e_{35}; e_{36}; e_{37} ; e_{38} ; e_{41} ; e_{42}	e_6; e_{17}	e_2; e_{19}; e_{20} ; e_{43}; e_{44}; e_{46} ; e_4; e_{10}; e_{24}	e_9; e_{13}; e_{25} ; e_{39}; e_{40}
Effectif	30	2	9	5
Pourcentage	65,22%	4,34%	19,56%	10,87%

Tableau 21 : Tableau des réponses des élèves à la deuxième opération de la septième question

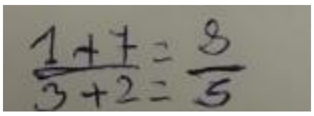
Cette question sert à vérifier si les élèves arrivent à calculer la somme de deux fractions de dénominateurs différents. Nous pouvons constater que 4,34% (2 sur 46) seulement des élèves réussissent cette question. Ils donnent la bonne réponse, ils réduisent les fractions au même dénominateur avant d'additionnent les numérateurs entre eux et de conserver le dénominateur.

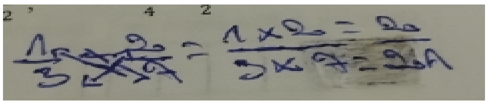


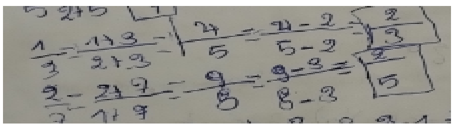
Au total, 39 élèves donnent une mauvaise réponse, 65,22% (30 sur 46) des élèves regardent le numérateur et le dénominateur indépendamment et utilisent les propriétés sur les entiers naturels, ils ne prennent pas en compte la barre de fraction et additionnent comme avec les entiers ; cette procédure peut également témoigner du glissement des propriétés sur la multiplication des fractions, puisque dans la multiplication des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.



19,56% (soit 9 sur 46) des élèves donnent des réponses en confondant les règles de calcul, ils semblent vouloir appliquer la procédure pour réduire au même dénominateur. Les élèvese_2, e_{19}, e_{20} , e_{43}, e_{44} et e_{46} additionnent le numérateur de la première fraction avec le dénominateur de la deuxième fraction, ensuite le numérateur de la deuxième fraction avec le dénominateur de la première fraction. Ceci peut venir des règles de calcul mal assimilées. L'élève e_{24} multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.







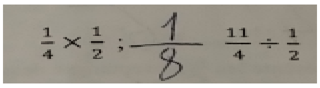
Enfin, nous constatons que cinq élèves (10,87%) ne répondent pas à cette question.

c. **Troisième opération**

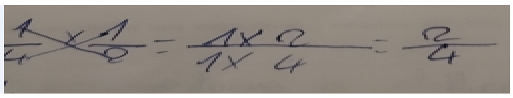
Réponses	$Q_7O_3R_1$	$Q_7O_3R_2$	$Q_7O_3R_3$	Rien écrit
Elèves	$e_5; e_6; e_7$; e_8 ; e_{12} $e_{15}; e_{16}; e_{17}$; e_{22} ; e_{27} $e_{30}; e_{34}; e_{35}$; e_{45}	$e_1; e_2; e_4$; e_9 ; e_{10} $e_{11}; e_{19}; e_{20}$; e_{21} ; e_{23} $e_{28}; e_{31}; e_{32}$; e_{33} ; e_{36} $e_{37}; e_{38}; e_{39}$; e_{43} ; e_{46}	$e_{41}; e_{44}$ e_{29} ; e_{26} e_{18} ; e_{24}	$e_3; e_{13}$ e_{14} ; e_{25} e_{40} ; e_{42}
Effectif	14	20	6	6
Pourcentage	30,43%	43,48%	13,04%	13,04%

Tableau 22 : Tableau des réponses à la troisième opération de la septième question

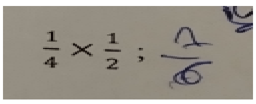
Cette question spécifique sert à vérifier si les élèves arrivent à multiplier deux fractions. Nous pouvons constater que seulement 30,43% (14 sur 46) des élèves réussissent cette question. Ils multiplient correctement, en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.



Au total, 26 élèves donnent une mauvaise réponse, 43,48% (20 sur 46) des élèves marquent une croix et multiplient le numérateur de la première fraction par le dénominateur de la deuxième fraction ensuite ils multiplient le numérateur de la deuxième fraction par le dénominateur de la première fraction. Ceci pourrait venir du fait qu'ils n'ont pas bien assimilés les règles de calcul.



13,04% des élèves ont additionné les dénominateurs et conservé le numérateur, ce qui peut venir de la mauvaise compréhension des règles de calcul ; ceci peut également venir du fait qu'ils aient mal calculé le produit de 4 par 2.



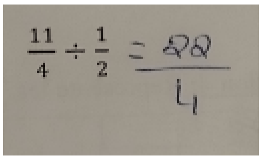
Enfin, nous constatons que six élèves (13,04%) ne répondent pas à cette question.

d. <u>Quatrième opération</u>

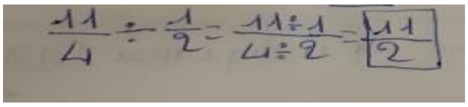
Réponses	$Q_7O_4R_1$	$Q_7O_4R_2$	$Q_7O_4R_3$	Rien écrit
Elèves	$e_{18}; e_{21}$ e_{31} ; e_{34} e_{39} ; e_{42}	$e_6; e_7; e_8$; e_{10} ; e_{12} $e_{16}; e_{17}; e_{19}$; e_{20} ; e_{23} $e_{26}; e_{27}; e_{28}$; e_{29} ; e_{35} $e_{36}; e_{37}; e_{41}$; e_{44} ; e_{45}	$e_1; e_2; e_{22};$ $e_{25}; e_{30}; e_{11}$ $e_{15}; e_{24}; e_{38}$ $e_{43}; e_{46}$	$e_3; e_4e_2; e_5$ e_9 ; e_{40} e_{13} ; e_{14} e_{32} ; e_{33}
Effectif	6	20	11	9
Pourcentage	13,04%	43,48%	23,91%	19,56%

Tableau 23 : Tableau des réponses à la quatrième opération de la septième question

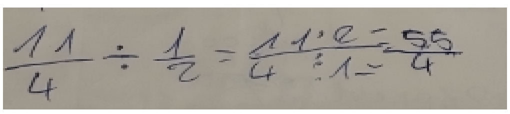
Cette question spécifique sert à vérifier si les élèves arrivent à faire la division de deux fractions. Nous pouvons constater que seulement 13,04% (6 sur 46) des élèves réussissent cette question. Ils arrivent à effectuer la division, en multipliant la première fraction par l'inverse de la deuxième fraction.



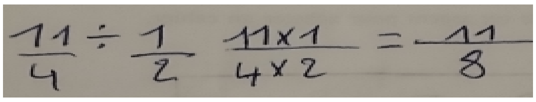
Au total, 31 élèves donnent une mauvaise réponse, 43,48% (20 sur 46) des élèves regardent le numérateur et le dénominateur indépendamment et utilisent les propriétés sur les entiers naturels, ils ne considèrent pas la barre de fraction et divisent comme avec les entiers ; cette procédure peut également témoigner du glissement de la règle sur la multiplication des fractions, puisque dans la multiplication des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.



Certains élèves (8 sur 46) divisent le numérateur de la première fraction par le dénominateur de la deuxième fraction, ensuite ils divisent le dénominateur de la première fraction par le numérateur de la deuxième fraction ; en fait ces élèves ont divisé la première fraction par l'inverse de la deuxième fraction, ils se sont embrouillés dans les règles de calcul.



3 élèves donnent une réponse en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, ce qui pourrait venir du fait des règles de calcul non assimilées.



Enfin, nous constatons que 9 élèves (619,56%) ne répondent pas à cette question.

6.2.2. <u>Synthèse des réponses observés</u>

Les sens les plus observés chez les élèves sont ceux de partie d'un tout, partie d'un ensemble, opérateur et quotient. Les sens les moins présents sont ceux de nombre, nombre sur une droite numérique, mesure et rapport.

Partie d'un tout: ce sens est celui que les élèves ont réussi le mieux à représenter, en tout 41 élèves sur 46 illustrent correctement la question portant sur ce sens ; de plus, certains élèves ont utilisé le sens partie d'un tout pour répondre aux autres questions. Ceci pourrait venir des habitudes scolaires, car ce sens est celui qui est le plus présenté aux élèves, il est utilisé pour introduire les fractions dans le manuel scolaire et par les enseignants. Ceci également pourrait provenir du fait que le sens partie d'un tout est introduit depuis l'école primaire. Les élèves avaient des difficultés à partager de manière égale, ceci peut-être à cause du manque de matériel.

Quotient: le sens quotient est uniquement utilisé à la question 5, un peu plus de la moitié des élèves réussissent cette question (56,52%, soit 26 élèves sur 46). D'autres élèves restent sur la division intuitive développée au primaire, ils effectuent un partage inégal, cela pourrait également être contextuel. Cette question est une situation de vie courante chez les élèves, ce qui explique son succès par les élèves. Dans le manuel le sens quotient est parmi les sens les plus présents, ce qui explique pourquoi les élèves réussissent bien.

Partie d'un ensemble et opérateur: ces statuts sont demandés uniquement à la question 2. 29 élèves (63,04%) réussissent cela ils arrivent à trouver le nombre d'objets à entourer et ensuite à entourer ce nombre d'objets sur le nombre total. Certains élèves ont fait des erreurs de calcul, d'autres ont juste considéré le dénominateur de la fraction ; ceci montre la difficulté que les élèves ont à tenir compte à la fois du numérateur et du dénominateur. Dans le manuel scolaire, le sens opérateur est parmi les sens les plus présents, ce qui explique le succès des élèves à cette question. Le sens partie d'un ensemble quant à lui n'est pas très présents dans le manuel scolaire, mais il est enseigné depuis le primaire, ce qui explique le succès des élèves à cette question.

Nombre sur la droite numérique: un seul élève a réussi cette question, les élèves n'arrivent pas à marquer l'origine et la droite, certains n'arrivent pas à donner du sens à la fraction en jeu dans la question. Il semble que les élèves ne soient pas habitués à ce genre de problèmes. Nous faisons le lien avec le manuel scolaire, car le sens nombre sur la droite numérique est parmi les sens les moins présents du manuel, les élèves n'y sont donc pas habitués.

Mesure: aucun élève ne trouve cette question. La plupart ont représenté la fraction inverse de celle demandée. Il semble que les élèves ne soient pas habitués à des problèmes avec des fractions dont le numérateur est supérieur au dénominateur. Nous faisons le lien avec le manuel scolaire, du fait que, dans celui-ci le sens mesure est presque absent, donc les élèves ne sont pas habitués à travailler ce sens, de plus dans le manuel presque toutes les fractions présentes sont des fractions propres, donc quand on donne une fraction impropre à l'élève il n'arrive pas à « s'en sortir ». Les résultats de cette question nous font rejoindre l'idée de Vergnaud selon laquelle, les apprentissages doivent se faire à travers des familles de situations.

Rapport: un seul élève arrive à trouver cette question, à illustrer correctement le rapport partie à partie. Certains élèves se sont contentés de donner juste une réponse, d'autres ont représenté le rapport partie à tout. Il semble que les élèves ne soient pas habitués à ce genre de problèmes. Ce sens est complètement absent du manuel scolaire, ce qui explique que les élèves n'arrivent pas à traiter cette question. Les résultats de cette question nous font rejoindre l'idée de Vergnaud selon laquelle, les apprentissages doivent se faire à travers des familles de situations.

Nombre: 30 élèves réussissent la première opération, 2 élèves réussissent la deuxième opération, 14 élèves réussissent la troisième opération et 6 élèves réussissent la quatrième opération. Les élèves ont beaucoup de difficultés avec les règles et procédures de calcul, ils mélangent tout, inversent les règles. Les élèves commettent des erreurs en calculant avec les fractions parce qu'ils se réfèrent parfois à des règles qu'ils utilisent mécaniquement. Ce sens est parmi les sens les moins présents chez les élèves, malgré le fait qu'il soit le sens le plus présent dans le manuel scolaire.

Dans le tableau suivant, nous recensons pour chaque question, les élèves qui ont utilisé le sens partie d'un tout de la fraction pour résoudre la question.

Questions :	1	2	3	4	5	6
Elèves qui ont utilisé le statut partie d'un tout de la fraction	e_1; e_2; e_3; e_5; e_6; e_7; e_8; e_{10}; e_{12}; e_{13}; e_{14}; e_{15}; e_{19}; e_{21}; e_{23}; e_{24}; e_{26}; e_{28}; e_{29}; e_{33}; e_{35}; e_{37}; e_{39}; e_{40}; e_9; e_{17}; e_{27}; e_{38}; e_4; e_{30}; e_{31}; e_{32} e_{34}; e_{36}; e_{42}; e_{45} e_{11} ;e_{41}; e_{43}; e_{46}. e_{22}	e_2 ; e_8; e_9; e_{10} e_{13};e_{16} ; e_{17} ; e_{44} e_{18} ;e_{45} ; e_{25} ; e_{19} ; e_{21} ; e_{22} ; e_{23} e_{26} ; e_{27} ; e_{28} ; e_{30} ; e_{32} ; e_{33} ;e_{36} ; e_{37} ; e_{38} ; e_{39} ; e_{40} ;e_{41} e_{42}	e_6 e_{10} e_{12} e_{14} e_{15} e_{22} e_{23} e_{37}	e_2; e_4; e_6; e_{14}; e_{15}; e_{23}; e_{24}; e_{31}; e_{36}; e_{37} e_{39}; e_{40}; e_{41}; e_{42}; e_{43} e_1; e_7; e_{17} e_{25}; e_{27}; e_{32}; e_{45}	e_7 e_9	e_{28} e_{40} e_{41} e_{45}
Total :	41	28	8	23	2	4

Tableau 24 : Tableau présentant les réponses des élèves utilisant le sens partie d'un tout

Après la présentation et l'analyse des résultats sur les productions des élèves, nous voyons que le sens le plus présent chez les élèves de 6^e est celui de Partie d'un tout, ce qui valide notre 1ère hypothèse : **La signification de la fraction la plus présente est, chez les élèves de 6^e, celle de Partie d'un tout.**

Par ailleurs, les réponses données par les élèves interrogés ne correspondent pas toujours à la question posée dans le questionnaire. Par exemple, les questions portant sur les significations Mesure et Rapport sont parfois incomprises par les élèves. En effet, Warne-Hiebert et Hiebert (1983) mentionnent que le but des élèves est de manipuler les nombres donnés d'un problème pour générer une réponse sans nécessairement porter attention à la signification du problème. Cela s'explique dans la mesure où l'analyse du manuel montre une absence totale de l'utilisation de ces statuts de la fraction. Cela s'associe également à une approche d'enseignement par objectifs où le résultat est plus important que la procédure. Les nouveaux programmes d'études remplacent cette approche par une approche par compétences où les procédures des élèves sont aussi importantes que leurs réponses.

6.2.3. Lien entre le manuel scolaire et les productions des élèves

Les activités portant sur les fractions se limitent souvent au sens partie d'un tout, ce qui entraine un répertoire limité de procédures chez les élèves au moment de résoudre un problème. Les élèves utilisent souvent des procédures développées à partir du sens partie d'un tout pour résoudre des problèmes dans lesquels la fraction a un autre statut.

Une répartition inégale des significations attribuées à la fraction dans l'enseignement peut conduire certains élèves à avoir peu de référents par rapport aux symboles et aux règles qu'ils utilisent comme le précise Rouche (1998). Cette répartition inégale des significations des fractions, ajoutée à l'importance de la signification Nombre dans le manuel scolaire pourrait expliquer la difficulté des élèves de 6^{e} à apprendre les fractions.

Les représentations utilisées par les élèves sont influencées par celles du manuel.

Nous voyons que les sens les plus observés dans les problèmes de fractions du manuel sont : nombre, partie d'un tout, opérateur et quotient ; quant aux sens les moins présents, ce sont les sens nombre sur la droite numérique, partie d'un ensemble, mesure et rapport. Chez les élèves, les sens les plus présents chez les élèves sont ceux de partie d'un tout, partie d'un ensemble, opérateur et quotient. Les sens les moins présents chez les élèves sont ceux de nombre, nombre sur une droite numérique, mesure et rapport.

Les sens les plus illustrés dans le manuel sont ceux que les élèves illustrent le mieux, en dehors du sens nombre. Celui-ci est très illustré dans le manuel car l'élève doit pouvoir effectuer des opérations sur les fractions. Les sens les moins présents sont ceux dont les élèves éprouvent le plus de difficulté à illustrer, à l'exception du sens partie d'un ensemble, que les élèves ont eu à rencontrer dans les classes antérieures.

Dans le manuel, la plupart des fractions utilisées ont des numérateurs inférieurs aux dénominateurs, ce qui influence les élèves, ils n'arrivent pas à résoudre le problème quand ils rencontrent un numérateur supérieur au dénominateur.

Tout ceci valide notre 2^{e} hypothèse : **la fraction est introduite comme partie d'un tout et les significations de la fraction les plus présentes dans le manuel scolaire, sont celles que les élèves ont le plus de facilité à illustrer correctement, tandis que celles qui sont peu présentes dans les manuels sont celles que les élèves éprouvent le plus de difficulté à illustrer.**

6.2.4. Lien entre les réponses des enseignants et les productions des élèves

Nous trouvons comme résultat que la signification Nombre est souvent utilisée par les élèves et qu'elle est parmi les significations les plus présentes dans le manuel scolaire. Cependant, nous constatons que les élèves commettent des erreurs en calculant avec les fractions parce qu'ils se réfèrent parfois à des règles qu'ils utilisent mécaniquement. Par exemple, pour effectuer l'addition des deux fractions, certains d'élèves font la somme des numérateurs entre eux et font encore la somme des dénominateurs ensemble. Hasemann (1981) indique à ce sujet que si les règles sont introduites trop tôt chez les élèves, elles ont plus de risques d'être utilisées mécaniquement et nous voyons que la plupart des enseignants interrogés donnent juste la formule de calcul à l'élève.

Nous avons également le fait que les enseignants n'ont pas une idée formelle des différents statuts de la fraction, donc leur répertoire d'activités peut être limité, et nous le constatons avec les élèves, ils n'arrivent pas à résoudre les questions portant sur certains sens de la fraction.

Tout ceci valide notre 3^{e} hypothèse : **Il y'a une prédominance de l'idée de la fraction comme partie d'un tout pour engager les enseignements et la manière avec laquelle les enseignants abordent les fractions influence les représentations qu'ont les élèves.**

6.3. Suggestions et limites de la recherche

6.3.1. Suggestions

Suggestion 1 : Champ conceptuel des fractions

Il est nécessaire que les enseignants travaillent dans le champ conceptuel des fractions. Les enseignants doivent prendre en compte les différentes significations de la fraction, afin de varier les activités proposées aux élèves, afin que ceux-ci « touchent » à tous les cas. Les enseignants doivent faire varier les variables de leurs activités, ne pas seulement donner des cas de fractions propres aux élèves, mais aussi des cas de fractions impropres. Les élèves doivent faire un maximum d'exercices pour se familiariser avec plusieurs types de situation.

Suggestion 2 : Formation des enseignants sur la connaissance des statuts des fractions

Il est nécessaire de former les enseignants sur la connaissance des statuts des fractions. Il faut mettre à la disposition des enseignants les résultats des recherches approuvées en didactiques des mathématiques, afin qu'ils adaptent leurs contenus. Faire des séminaires afin que les enseignants soient entretenus par des spécialistes en didactique des mathématiques.

Suggestion 3 : Ingénierie de Brousseau

Il a conçu une ingénierie didactique sur l'enseignement des nombres rationnels et des décimaux ; elle a pour but de « favoriser une réflexion fondée sur l'observation en vue de la formation des maîtres ». Son ingénierie comporte 65 leçons dont certaines concernent les nombres décimaux. Ceci va aider les enseignants à adopter une nouvelle approche pour aborder les fractions.

Suggestion 4 : Les droites numériques

Les droites numériques constituent un modèle mathématique puissant pour résoudre des problèmes et communiquer des idées. Elles sont efficaces pour soutenir les élèves dans leur compréhension des fractions, qu'il s'agisse du fractionnement en parties égales, de comparer des fractions, des fractions équivalentes ou des opérations sur des fractions. Et contrairement aux modèles de surface (rectangles, cercles), il n'y a qu'une dimension (la longueur) à prendre en considération.

Suggestion 5 : Le vocabulaire, le langage

Le langage est à la fois un objet mais aussi un outil au service des apprentissages. L'enjeu de maitriser des outils langagiers est important. Les enseignants peuvent faire que les élèves verbalisent leur procédure de travail en leur permettant de se confronter entre pairs à l'oral, ce qui va permettre la remise en question face à leur propre procédure. Ils vont comprendre la nécessité d'adopter un vocabulaire approprié et précis pour expliquer leur procédure.

Lorsque nous additionnons ou soustrayons des quantités fractionnaires ayant des unités fractionnaires différentes, nous trouvons des formes équivalentes des fractions qui ont des unités communes. Certaines personnes appellent cela « trouver un dénominateur commun ». Mais pour aider les élèves à faire des liens entre leurs connaissances de l'unité et d'autres contextes (argent, mesure, vie), on peut utiliser l'expression « trouver une unité commune ».

6.3.2. <u>Limites de la recherche</u>

Lors de la réalisation de cette recherche nous avons pu identifier quelques limites.

Premièrement, d'autres chercheurs pourraient catégoriser les significations de la fraction autrement. Par ailleurs, nous avons analysé un seul manuel scolaire de la classe de 6^e, nous ne pouvons pas généraliser les résultats obtenus de l'analyse de ce manuel. Si nous recommencions ce travail, nous analyserions un nombre plus grand de manuels scolaires.

Deuxièmement, il est difficile de généraliser les résultats de cette recherche concernant l'apprentissage du concept de fraction. En effet, 46 élèves seulement de la classe de 6^e ont répondu au questionnaire. Le choix s'est porté sur notre lieu de stage au lycée bilingue d'application et dans la classe de notre encadrante.

Troisièmement, concernant le questionnaire destiné aux élèves, sur la question trois portant sur la signification nombre sur une droite numérique, les élèves auraient mieux traité cela si nous avions placé le zéro et le un sur cette droite. Par ailleurs, dans le questionnaire, nous ajouterions une question sur la comparaison des fractions, sur l'équivalence des fractions, pour mieux voir comment les élèves s'en sortent dans la manipulation des fractions. Nous n'avons pas pu rencontrer les élèves après les analyses de leurs réponses, cette rencontre aurait pu nous donner des éléments sur leurs fonctionnement cognitif, ils auraient pu nous expliquer leurs réponses au questionnaire.

Quatrièmement, pour étudier l'enseignement de la notion de fraction effectivement dispensé par les enseignants dans les classes et pour bien connaître le rôle de l'élève dans la construction de ses savoirs et savoir-faire, ses interactions avec son enseignant, ses camarades et son milieu, il aurait fallu réaliser une observation dans la classe ou filmer des séances réalisées par certains enseignants lors de la présentation de ce concept aux élèves. Mais nous n'avons pu le faire, les cours avaient déjà été dispensés, nous avons donc construit un questionnaire.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Notre travail porte sur les fractions en classe de 6^{e} mathématique. Les fractions sont très complexes pour les élèves, et ce pour plusieurs raisons. Il y'a une rupture entre les nombres entiers naturels et les nombres rationnels ce qui donne lieu à de nombreuses erreurs que les élèves commettent, de plus les fractions ont plusieurs significations, plusieurs statuts, et l'élève pour bien comprendre et maîtriser les fractions doit pouvoir travailler sans problèmes avec chacune de ces significations. L'objectif de notre travail était celui d'identifier les représentations du concept de fraction qu'ont les élèves de 6^{e} et de voir comment se construisent ces représentations à partir des pratiques enseignantes.

Pour mener à bien ce travail, nous avons commencé par une première partie, une partie théorique. Nous avons défini les mots clés de notre étude, nous avons mené une étude épistémologique du concept de fraction, ce qui nous a permis de voir un obstacle épistémologique qui est la fraction propre. Nous nous sommes placés dans le cadre de la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud et dans celui des registres sémiotiques de Duval. Nous avons ensuite fait état de quelques travaux de la littérature.

Pour la deuxième partie, la partie expérimentale, nous avons construit une grille d'analyse du manuel afin de voir les représentations de la fraction présentes dans le manuel. Nous avons construit un questionnaire, que nous avons fait passer à 10 enseignants, dans le but de recueillir leurs représentations sur les fractions et de voir la manière avec laquelle ils abordent celles-ci. Nous avons fait passer un questionnaire aux élèves de 6^{e} afin de voir les représentations de la fraction présentes chez ceux-ci et de voir quels sont les liens qu'on peut établir entre leurs représentations et les pratiques enseignantes.

Les résultats obtenus à la suite des analyses montrent que les significations de la fraction les plus présentes dans le manuel scolaire, sont celles que les élèves ont le plus de facilité à illustrer correctement, tandis que celles qui sont peu présentes dans les manuels sont celles que les élèves éprouvent le plus de difficulté à illustrer. Les résultats des réponses des enseignants montrent que la manière avec laquelle les enseignants abordent les fractions influence les représentations qu'ont les élèves. Les résultats de l'analyse a posteriori des réponses des élèves montrent que la signification de la fraction la plus présente est, chez les élèves de 6^{e}, celle de Partie d'un tout. Tous ces éléments nous ont amené à valider nos hypothèses. Nous avons donné quelques suggestions à la suite, et les limites de notre recherche.

Nous avons plusieurs perspectives pour notre travail. Nous voulons nous intéresser aux fractions dans l'enseignement primaire, dans notre travail nous nous intéressons au lycée et la classe de 6^e, or les fractions sont enseignées depuis le primaire. Nous voulons également nous intéresser au modèle constructiviste élargi de la compréhension de Herscovics et Bergeron (1988). Nous pensons également à construire une ingénierie didactique de l'enseignement des fractions en 6^e, qui prend en compte les résultats de notre recherche.

BIBLIOGRAPHIE

Alahmadati, A. A. (2016). *Autour du concept de fraction à l'école primaire en France : Étude exploratoire des significations de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III* (Thèse de doctorat, Université de Lyon).

Alonso, B. (2017). *Enseigner la notion de fraction au CM2 : enjeux d'apprentissage et rôle du langage dans ces derniers* (Mémoire de Master, Université de Montpelier).

Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux,

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. Revue des sciences de l'éducation, 30 (2), 241-277. Récupéré le 31 mai 2011 du site de la revue : http://www.erudit.org/revue/rse/2004/v30/n2/012669ar.pdf

Carette, V. et al. (2009) *Etude de l'apprentissage des nombres rationnels et des fractions dans une approche par compétences à l'école primaire*. Recherche financée par la communauté française n°126/07, Université libre de Bruxelles.

Corrieu, L. (1999). Dictionnaire du professeur des écoles, enseignement des mathématiques. Paris, France : Vuibert.

Couderette, M. (2022). *Enquête comparatiste sur la mise en œuvre d'une ingénierie didactique pour l'enseignement de la soustraction au premier cycle du primaire dans plusieurs systèmes didactiques : études de cas en Suisse et en France* (Thèse de doctorat, Université Toulouse le Mirail).

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* (IREM de Strasbourg), 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Exploration Recherches en Sciences de l'Education. Peter Lang.

Fandino Pinilla, M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45. Consulté le 14 novembre 2023 sur http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/fandino/133%20Fractions.pdf

Gabriel, F. et al. (2013). A componentiel view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*

Hembree, R. (1990). The Nature, Effects and Relief of Mathematic Anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education, 21 (1), 33-46.*

Herscovics, N. et Bergeron, J.C. (1982). Des modèles de la compréhension. *Revue des sciences de l'éducation*, 8(3), 576-596.

Hiebert, J. and Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *A handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 65-100). New York: Macmillan Library.

Lecours, V. (2016). *Elaboration d'un modèle prédisant la difficulté de tâches impliquant des fractions pour les élèves du primaire* (Mémoire, Université du Québec A Montréal)

Magnette, Y. (2014). *Élèves à risque au primaire: construction du concept des fractions au moyen de la musique indienne* (Mémoire de Master, Université du Québec A Rimouski)

Martinez-Ibanez, S. (2018). *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS* (Thèse de doctorat, Université Paris Descartes).

Mercier, P. (2004). *Le passage de l'école primaire à l'école secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions* (Mémoire de Master, Université Laval)

Ministère de l'éducation Ontario. (2018). *Accroitre la capacité : Les fractions à travers le curriculum* (n°47).

Morel, C. (2013*). L'impact des performances en arithmétique et des compétences cognitives sur le développement des performances liées à la notion de fraction : une étude au CM1* (Mémoire de Master, Université Claude Bernard Lyon1)

Oumama, G. (2015). *Les connaissances sur les fractions d'élèves de troisième cycle du primaire* (Mémoire de Master, Université du Québec A Montréal)

Perrin-Glorian, M., Baltar, P. (2019). L'ingénierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. *Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online*, 9(1), 45-82

Rouche, N. (1998). *L'esprit des sciences. Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.

Stegen, P. et Daro, S. (s.d). *L'enseignement des rationnels à la liaison primaire-secondaire*

Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative Structures*. Dans R. Lesh et M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (P. 127-174). New York: Academie Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage éditions.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 2/3, pp.133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptuel Field: What and Why? Dans G. Harel et J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Leaming of Mathematics* (p. 41-59). New York: State University of New York Press

Vergnaud, G. (1996). La théorie des champs conceptuels. Dans J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (P. 197-242). Lausanne: Delachaux et Niestlé.

Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Montréal Mai 2001, conférence publiée dans les actes du Colloque GDM-2001 ; *(Jean Portugais (Ed) La notion de la compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation)*

Vergnaud, G. (2007). Qu'est-ce qu'apprendre ?, Dans un Colloque : *Les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages dus élèves.* IUFM du Pôle Nord-Est. Besançon 14 et 15 de mars 2007.

Vezina, N. (1994). *Le développement de la partition en nombre pairs et impairs chez les jeunes enfants* (Mémoire de maîtrise. Université de Moncton)

Zhang, J. J. (1997). The nature of external representations in problem solving. Cognitive Science, 21(2), 179-21

Dictionnaires

Larousse. (s.d.). Sens. Dans *dictionnaire en ligne*. Consulté le 10 janvier 2024 en ligne sur https://www.larousse.fr/dictionnaires/français/sens/72087

Larousse. (s.d.). Signification. Dans *dictionnaire en ligne*. Consulté le 10 janvier 2024 en ligne sur https://www.larousse.fr/dictionnaires/français/signification/72709

LeRobert. (s.d.). Signification. Dans *Lerobert dico en ligne*. Consulté le 10 janvier 2024 en ligne sur https://dictionnaire.lerobert.com/definition/signification

Documents officiels

Curriculum de l'enseignement primaire francophone niveau 1

Curriculum de l'enseignement primaire francophone niveau 2

Curriculum de l'enseignement primaire francophone niveau 3

Programme d'études de 6e et 5e : Mathématiques

Manuel scolaire

Yebga et al. (2014) *La collection Périmètre 6e*. Editions Nathan. Cameroun

Sitographie

https://www.cnrtl.fr/etymologie/representation consulté le 10 Avril 2024

https://shs.cairn.info/dictionnaire-des-concepts-fondamentaux-des-didacti-9782804169107-page-191?lang=fr consulté le 10 janvier 2024

http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/les-fractions consulté le 13 septembre 2023

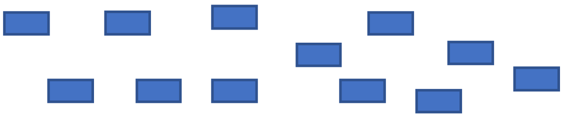
ANNEXES

<u>ANNEXE 1 : QUESTIONNAIRE DESTINE AUX ELEVES</u>

<u>Questionnaire pour recueillir les conceptions des élèves sur les fractions</u>

<u>Question 1:</u> Représente les $\frac{2}{8}$ du rectangle dessiné ci-dessous

<u>Question 2:</u> Représente le $\frac{1}{3}$ de cette collection d'objets



<u>Question 3:</u> Place $\frac{5}{6}$ sur la droite numérique

<u>Question 4:</u> Le segment suivant représente l'unité, construis un segment qui représente le $\frac{5}{3}$ de ce segment:

<u>Question 5:</u> Si 5 biscuits sont partagés équitablement entre 3 enfants, combien de biscuits aura chaque enfant ? Laisse les traces de ta démarche

<u>Question 6:</u> Dans un panier il y'a 7 pommes dont 5 rouges et les autres vertes. Combien y a-t-il de pommes vertes par rapport aux pommes rouges ? Laisse les traces de ta démarche en représentant la situation

<u>Question 7:</u> Effectue les opérations :

$\frac{2}{5} + \frac{6}{5};$ $\quad \frac{1}{3} + \frac{2}{7};$ $\quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{2};$ $\quad \frac{11}{4} \div \frac{1}{2}$

ANNEXE 2 : QUESTIONNAIRE DESTINE AUX ENSEIGNANTS

Questionnaire relatif à l'enseignement des fractions en classe de 6^{e} dans les lycées et collèges du Cameroun

Ce questionnaire est réalisé par un chercheur en didactique des mathématiques en vue de la rédaction de son mémoire de fin de cycle. Il a pour objectif de voir la manière avec laquelle les enseignants abordent les fractions, comment se fait l'enseignement des fractions. Plus précisément, nous allons regarder quels rôles les enseignants s'attribuent, quels rôles ils réservent à leurs élèves, quelle place ils font aux représentations matérielles, graphiques ou mentales, quels statuts de la fraction ils privilégient et quelle est l'orientation de leur enseignement (l'enseignement est-il orienté vers la construction de connaissances chez les élèves ou vers l'acquisition d'habiletés mécaniques et de savoirs instrumentaux à retenir par cœur).

Question 1 : Avez-vous suivi une formation sur les fractions ? Si oui, dans quelle cadre ?

Question 2 : Depuis combien d'années enseignez-vous la classe de 6e ?

Question 3 : Quelles sont vos principales sources de référence pour votre enseignement

Question 4: Pour votre enseignement, utilisez-vous le manuel scolaire ? Si oui, à quelle fréquence et pourquoi ?

Question 5 : imaginez que dans votre classe vous voulez introduire à vos élèves « la fraction » (par exemple la fraction$\frac{1}{3}$), comment allez-vous procéder ?

Question 6 : dans votre classe pour enseigner la comparaison des fractions à vos élèves (par exemple pour comparer$\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$), que feriez-vous ?

Question 7 : dans votre classe pour enseigner l'addition de deux fractions à vos élèves (par exemple $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$), que feriez-vous ?

Question 8 : comment présentez-vous à vos élèves la notion de fractions équivalentes (par exemple $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\cdots$)?

Question 9 : quels sont les statuts de la fraction que vous connaissez ?

Question 10 : si vous aviez à évaluer vos élèves sur les fractions, quels sont les statuts de la fraction que vous leur demanderiez en priorité ?

ANNEXE 3 : REPONSES DES ENSEIGNANTS AU QUESTIONNAIRE

Enseignant 1 (E_1):

$\boldsymbol{E_1}$ enseigne depuis 3 ans, il n'a suivi aucune formation sur les fractions. Ses principales sources de référence sont le manuel scolaire et le livre programme. Il utilise le manuel scolaire très souvent surtout pour les exercices.

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

L'enseignant dit qu'il utiliserait dans un premier temps les matériels concrets comme une chose qui serait divisée en trois (I), mais ne donnent pas les rôles réservés aux élèves.

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

L'enseignant dessine un cercle divisé en deux au tableau pour montrer la fraction $\frac{1}{2}$. Il désigne un autre cercle divisé en trois à l'aide duquel elle présente la fraction $\frac{1}{3}$. Il compare $\frac{1}{2}$ du premier cercle et $\frac{1}{3}$ du deuxième pour conclure que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ (II d).

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$)

L'enseignant donne la méthode aux élèves, en leur disant qu'on doit réduire au même dénominateur ensuite additionner comme avec les fractions de même dénominateur (IV)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

En simplifiant les fractions $\frac{2}{4}$ et $\frac{4}{8}$ à leur forme irréductible $\frac{1}{2}$, il démontre que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ (IV).

Question 9 : connaissance des différents statuts

Pas de connaissance sur les différents statuts

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

Enseignant 2 (E_2):

Il enseigne depuis 7 ans, il dit avoir suivi une formation sur les fractions à AiMS, ses principales sources de référence sont internet. Il utilise le manuel scolaire uniquement pour donner des exercices aux élèves.

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

Il dit qu'il va venir avec un objet à partager en 3, il va diviser en 3 et dire aux élèves qu'une partie représente $\frac{1}{3}$ (I c)

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

A cette question, il donne la règle suivante : lorsque deux fractions ont le même numérateur, le plus grand est celui qui a le plus petit dénominateur (IV)

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

A cette question, il déclare réduction au même dénominateur (IV)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

Ici, il utilise des objets de même circonférence découpées respectivement en 2, 4, 8 parties égales ; il représente ensuite chaque proportion et fait remarquer aux élèves que c'est la même chose (I c)

Question 9 : connaissance des différents statuts

Pas de connaissance sur les différents statuts

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

<u>Enseignant 3 (E_3):</u>

Il enseigne depuis 1 an, il dit avoir suivi une formation dans son parcours académique au lycée. Ses principales sources de référence sont le manuel scolaire, le livre programme. Il utilise le manuel scolaire très souvent car les élèves sont appelés à s'exercer dans le manuel.

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

L'enseignant dessine une boule, la divise en trois parties, colorie une partie et demande aux élèves combien de parts sur combien sont coloriées (II c)

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

L'enseignant demande aux élèves entre partager un beignet entre deux personnes et entre trois personnes, quelle option ils préfèrent (III c)

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

L'enseignant déclare qu'il va dessiner deux rectangles, diviser l'un en deux et colorier une case, diviser l'autre en trois et colorier une case, il va demander aux élèves combien de cases au total sont coloriées. Mais cette procédure ne permet pas de calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, puisque on aura deux cases au total qui sont coloriées mais on ne peut pas aboutir à la somme demandée. (II c)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

Il déclare qu'il va diviser un rectangle en deux et colorier une case, diviser un rectangle en quatre et colorier deux cases, il va ensuite demander aux élèves s'il y'a une différence. (II d)

Question 9 : connaissance des différents statuts

Pas de connaissance sur les différents statuts

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

<u>Enseignant 4 (E_4):</u>

Il enseigne depuis 3 ans, il n'a suivi aucune formation sur les fractions. Ses principales sources de référence sont le manuel scolaire et le livre programme. Il utilise le manuel scolaire mais n'a pas expliqué pourquoi

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

Ici, il déclare qu'il pose le problème d'un gâteau qu'on veut partager de manière égale entre trois frères, et il leur explique que la part de chacun c'est le gâteau divisé en trois et représente le $\frac{1}{3}$ du gâteau. (III b)

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

Il explique d'abord aux enfants que si on veut partager une boule de couscous de manière égale à deux enfants, la part que chacun reçoit sera plus grande que la part que chacun recevra de la même boule de couscous si elle était plutôt divisée en 3. Ensuite il introduit le principe selon lequel lorsque deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur. (III f et IV)

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

Il donne la règle de calcul suivante : pour additionner deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, je multiplie le numérateur de la première fraction par le dénominateur de la deuxième fraction lus la multiplication du numérateur de la deuxième fraction par le dénominateur de la première fraction et je divise le tout par le produit des deux dénominateurs. (IV)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

Il donne la règle : deux fractions sont équivalentes si j'obtiens l'un en multipliant ou en divisant l'autre par un même nombre.(IV)

Question 9 : connaissance des différents statuts

Ici, il cite les fractions propres, fractions impropres et fractions égales à un nombre

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

Ici, il cite les fractions propres, fractions impropres et fractions égales à un nombre

<u>Enseignant 5 (E_5):</u>

Il enseigne depuis 24 ans, il dit avoir suivi une formation sur les fractions au collège. Ses principales sources de référence sont les livres et les problèmes quotidiens. Il utilise le manuel scolaire très souvent pour que les élèves s'exercent à la fin d'une leçon

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

Il déclare un partage équitable entre trois personnes mais il n'explique pas de quelle façon il procède ni quels rôles il réserve aux élèves dans la démarche. (III)

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

Il propose un partage entre trois personnes puis entre deux personnes (III)

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

La règle de réduction au même dénominateur (IV)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

Il demande aux élèves de calculer $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{4}{8}$ de la même quantité (IV)

Question 9 : connaissance des différents statuts

Pas de connaissance sur les différents statuts

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

Enseignant 6 (E_6):

Il enseigne depuis 2 ans, il n'a suivi aucune formation sur les fractions. Ses principales sources de référence sont le manuel scolaire et le livre programme. Il utilise le manuel scolaire régulièrement.

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

Il propose un partage d'objet en trois parts égales ou alors un élève qui a répondu à trois questions et n'a donné qu'une bonne réponse (III)

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

Il propose le partage, il demande à ses élèves lorsqu'on partage un pain à trois personnes et un pain à deux personnes, quelles sont les personnes qui ont les plus grandes parts ? (III a)

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

Il donne la formule de calcul (IV)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

Il utilise le partage, mais sans expliquer comment il procède. (III)

Question 9 : connaissance des différents statuts

Il donne ratio, pourcentage, nombre rationnel

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

Il répond nombres pour les calculs et ratio pour l'évaluation des compétences

<u>Enseignant 7 (E_7):</u>

Il enseigne depuis 12 ans, il n'a pas suivi de formation sur les fractions. Il n'a pas mentionné ses principales sources de référence, il utilise le manuel à 60%, pour les exercices.

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

Il déclare prendre un objet partagé en 3 et considérer un morceau (I c)

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

Il utilise le partage d'un même objet entre deux personnes, puis entre trois personnes et les élèves vont identifier la plus grande portion (I c)

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

La règle de réduction au même dénominateur, puis l'addition des fractions de mêmes dénominateurs(IV)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

Il rend irréductible les autres fractions (IV)

Question 9 : connaissance des différents statuts

Pas de connaissance sur les différents statuts

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

<u>Enseignant 8 (E_8):</u>

Il enseigne depuis 11 ans, il n'a pas suivi de formation sur les fractions. Ses principales sources de référence sont le quotidien et les documents au programme. Il utilise le manuel scolaire à 60% car il n'y trouve as souvent tout ce dont il a besoin.

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

Il déclare une situation de partage mais n'explique pas comment il va la présenter. (III)

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

Il propose de donner une situation : deux enfants doivent effectuer une même tâche, l'un divise la sienne en trois et effectue une part, l'autre divise sa tâche en 2 et effectue également une tâche, les deux ont-ils effectué la même quantité de travail ? Sinon, qui a le plus avancé ? (III a)

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

La règle de réduction au même dénominateur (IV)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

Il va utiliser des situations de comparaison mais n'explique pas en quoi cela va consister (IV)

Question 9 : connaissance des différents statuts

Pas de connaissance sur les différents statuts

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

Enseignant 9 (E_9):

Il enseigne depuis 8 ans, il dit avoir suivi une formation sur les fractions pendant un séminaire pédagogique. Il ne mentionne pas ses principales sources de référence, il utilise le manuel scolaire, pour que les enfants s'exercent.

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

Il propose la situation : pour leur réussite à l'entrée en sixième, Gaby et ses deux amis ont reçu un gâteau qu'ils veulent se partager en parts égales. Combien de parts y'aura au total ? Par rapport à ce nombre de parts, quelle sera la part de chacun ? (III a)

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

Il propose de venir avec deux pains, il divise l'un en deux et l'autre en trois et les élèves comparent (I c)

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

Il déclare produit des extrêmes plus produit des moyens sur produit des dénominateurs (IV)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

Il utilise le partage d'objet mais ne dit pas comment il va procéder

Question 9 : connaissance des différents statuts

Il déclare fractions propres, fractions impropres et fractions décimales

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation

Enseignant 10 (E_{10}):

Il enseigne depuis 2 ans, il dit n'avoir suivi aucune formation sur les fractions, ses principales sources de référence sont le manuel scolaire et en plus une documentation propre à lui. Il utilise le manuel scolaire pour donner des exercices de fixation et ceux à faire à la maison.

Question 5 : initiation au concept de fraction (par exemple $\frac{1}{3}$)

Il prend l'exemple d'une barre de craie segmentée en parts égales et il leur dit qu'un fragment représente un tiers de cette barre (I c)

Question 6 : initiation à la comparaison de fraction (par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$)

Dire aux élèves que pour deux fractions ayant le même numérateur, la plus grande est celle ayant le plus petit dénominateur (IV)

Question 7 : initiation à l'addition de fraction (par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$)

La règle de réduction au même dénominateur(IV)

Question 8 : initiation à la notion de fractions équivalentes

Il dit aux élèves que si l'on multiplie (ou on divise) le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une nouvelle fraction égale à la première(IV)

Question 9 : connaissance des différents statuts

Pas de connaissance sur les différents statuts

Question 10 : priorité des statuts dans l'évaluation