

REPUBLIQUE DU CAMEROUN  
Paix – Travail – Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I FACULTE  
DES SCIENCES DEPARTEMENT DE  
PHYSIQUES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE  
FORMATION DOCTORALES EN  
SCIENCES TECHNOLOGIES ET  
GEOSCIENCES

LABORATOIRE DE PHYSIQUE  
NUCLEAIRE, ATOMIQUE,  
MOLECULAIRE ET BIOPHYSIQUE



REPUBLIC OF CAMEROON  
Peace – Work – Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I FACULTY  
OF SCIENCE DEPARTMENT OF  
PHYSICS

RÉSÉARCH AND POSTGRADUATÉ  
SCHOOL FOR SCIENCÉ  
TECHNOLOGY AND GÉOSCIENCÉS

LABORATORY OF NUCLEAR  
PHYSICS, ATOMICS, NUCLEAR,  
MOLECULAR AND BIOPHYSICS

# ETUDE THEORIQUE DE L'EFFET FRACTIONNAIRE SUR LA DEMI-VIE RADIOACTIVE ALPHA

Mémoire Présenté par l'étudiant :

**OTTOU NSA René**

**Matricule : 89H288**

Titulaire d'une Maitrise en Physique (UY1)

en vue de l'obtention du diplôme de Master en Physique

Option : **Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique**

Spécialité : **Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection**

Sous la Co-Direction de :

**BEN-BOLIE Germain Hubert**

Professeur  
Université de Yaoundé 1

**EMA'A EMA'A JeanMarie**

Maitre de Conférences  
Université de Bertoua



2023-2024

---

## Table des matières

---

Table des matières .....	ii
Liste des figures.....	iv
Liste des tableaux .....	v
Dédicace .....	vi
Remerciements .....	vii
Notations.....	ix
Résumé .....	x
Abstract.....	xi
Introduction générale .....	2
<b>GENERALITES SUR LE NOYAU ATOMIQUE ET LE PRECESSUS DE DESINTEGRATION.....</b>	<b>2</b>
I.1 Introduction .....	2
I.2 Le noyau atomique .....	2
I.2.1 Structure du noyau .....	2
I.2.2 Noyaux magiques.....	4
I.2.3 Forme du noyau .....	4
I.3 Les processus de désintégration radioactive .....	5
I.4 Energie de désintégration .....	9
I.5 Loi de décroissance radioactive .....	10
I.6 Période radioactive .....	10
I.7 Loi empirique de Geiger et Nuttall.....	11
I.8 Modèle de Gamow .....	12
I.9 Conclusion .....	16
<b>L'EFFET FRACTIONNAIRE SUR LA DESINTEGRATION ALPHA.....</b>	<b>17</b>
II.1 Introduction .....	17
II.2. Quelques notions préliminaires au calcul fractionnaire .....	17
II.2.1 Fonctions particulières.....	17
II.2.2 Transformation de Fourier .....	19
II.2.3 Transformation de Laplace .....	19
II.3. Les dérivées fractionnaires.....	20
II.3.1 Définitions .....	20
I.3.2 Dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville .....	21

---

I.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo .....	22
I.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Grunwald Letnikov .....	23
I.3.5 Dérivée fractionnaire au sens de Riesz .....	23
II.2. Notion de dérivée fractionnaire conforme .....	24
II.3 Résolution de l'équation de Schrödinger avec le formalisme fractionnaire .....	25
II.4 Conclusion .....	28
RESULTATS ET DISCUSSION .....	30
1. Introduction.....	30
2. Présentation des résultats et discussion .....	30
2.1 Tableaux des valeurs .....	30
2.2 Influence du nombre de neutrons du noyau sur $\nu$ .....	36
2.3 Influence du nombre de protons du noyau sur $\nu$ .....	40
2.4 Allure du potentiel en fonction de $\nu$ .....	41
3. Conclusion .....	44
Conclusion générale et perspectives.....	45
Références bibliographiques .....	48

---

## Liste des figures

---

Figure 1.1 : Noyau atomique.....	4
Figure 1.2 : Processus de désintégration du radium.....	5
Figure 1.3 : Processus de désintégration bêta plus.....	6
Figure 1.4 : Processus de désintégration bêta moins de l'iode-131 .....	7
Figure 1.5 : Processus de capture électronique.....	7
Figure 1.6 : Désexcitation d'un noyau .....	8
Figure 1.7 : Loi Geiger Nutall pour Po, Ra, U et Pu.....	12
Figure 1.8 : Potentiel nucléaire en absence de la répulsion coulombienne.....	12
Figure 1.9 : Prise en compte de la répulsion coulombienne (potentiel de Gamow) .....	13
Figure 1.10 : Illustration de l'effet tunnel.....	13
Figure 3.11 : Ecarts pour les isotopes du plomb.....	33
Figure 3.12 : Ecarts pour les isotopes du polonium .....	34
Figure 3.13 : Ecarts pour les isotopes du radon.....	34
Figure 3.14 : Ecarts pour les isotopes du radium.....	34
Figure 3.15 : Ecarts pour les isotopes du thorium.....	35
Figure 3.16 : Ecarts pour les isotopes de l'uranium. ....	35
Figure 3.17 : Variation de $v$ avec du nombre de neutrons $N$ (isotopes de Pb, le Po et Rn). ....	36
Figure 3.18 : Variation de $v$ avec le nombre de neutrons $N$ (isotopes de Ra, Th et U). ....	37
Figure 3.19 : Variation de $v$ avec $N$ pour les isotopes les plus riches et moins riches d'un même élément.....	38
Figure 3.20 : Variation de $v$ en fonction du nombre de protons $Z$ pour le Rn, Ra, Th et U pour $N = 136$ et $N = 138$ .....	40
Figure 3.21 : Variation de $v$ en fonction du nombre de protons $Z$ pour le Pb, Po, Rn, Ra, Th et U ( $N = 126, 128, 132, 134$ ). ....	40
Figure 3.22 : Variations du potentiel en fonction de $v$ pour le Po. ....	42
Figure 3.23 : Variations du potentiel en fonction de $v$ pour le Rn.....	42
Figure 3.24 : Variations du potentiel en fonction de $v$ pour le Ra. ....	43
Figure 3.25 : Variations du potentiel en fonction de $v$ pour le U.....	43
Figure 3.26 : Variations du potentiel en fonction de $v$ pour le Sg. ....	44

---

## Liste des tableaux

---

Tableau 1.1 : Energie cinétique et demi-vie de désintégration de quelques radioéléments .....	11
Tableau 3.1 : Effet fractionnaire sur la désintégration des isotopes pair-pair de plomb (Pb), polonium (Po) et radon (Rn).....	31
Tableau 3.2 : Effet fractionnaire sur la désintégration des isotopes pair-pair de radium (Ra), Thorium (Th) et uranium (U). .....	32
Tableau 3.3 : Effet fractionnaire sur la désintégration $\alpha$ de certains noyaux pair-pair superlourds. ....	33
Tableau 3.4 : Récapitulatif des isotopes avec ordre de la dérivée fractionnaire minimale .....	39

---

## Dédicace

---

Aucune œuvre humaine ne peut être réalisée sans Dieu. Je dédie ce travail au bon Dieu qui a permis à ce projet d'aller jusqu'à son terme.

---

## Remerciements

---

La réalisation de ce travail a nécessité diverses contributions, ce qui justifie l'adage selon lequel « **une seule main ne peut monter sur un palmier** ».

Avant toute chose, je voudrai exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance au **Professeur BEN-BOLIE Germain Hubert**, Enseignant au Département de Physique de l'Université de Yaoundé I et Chef de Laboratoire de Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection, qui m'a encouragé à revenir aux études après plus de 20 ans passés hors des milieux universitaires. Sa disponibilité, ses remarques, ses conseils et surtout sa rigueur dans le travail ont largement contribué à la réalisation de ce mémoire.

Je remercie particulièrement mon encadreur, le **Professeur EMA'A EMA'A Jean Marie**, Enseignant à l'Ecole Normale Supérieure de Bertoua, pour sa disponibilité, ses remarques, ses conseils et son souci du travail bien fait.

Pour l'encadrement dont j'ai bénéficié, je remercie :

- Le **Professeur NDJAKA Jean-Marie Bienvenu**, Chef du Département de Physique de l'Université de Yaoundé I.

- L'ensemble des enseignants du département de Physique, le Professeur NJANDJOCK Philippe, Professeur SAÏDOU, Professeur ELE ABIAMA Patrice, Professeur TCHAWOUA Clément, Professeur HONA Jacques, le Professeur BOYOMO Marthe et Professeur MVOGO Alain, Docteur NGA ONGODO Dieudonné pour la qualité des enseignements et le soutien multiforme.

Je remercie les **honorables membres du jury** qui auront la tâche d'apprécier ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements.

Je remercie chaleureusement tous les aînés du laboratoire de Physique Nucléaire à savoir les Docteurs NGOUBI HENOCK, TAKEMBO NTAHKIE Clovis, ALI ZARMA, AHMADOU KATAKARLA, MAH TSILA Philippe, MBIDA Serge, GONDJI Dieu-Soufit et SOULEYMANOU Haman Adama pour les conseils et les encouragements.

Je remercie vivement le doctorant NDZONO Victor Paulin qui m'a tenu la main tout au long de ce travail.

Je remercie également les Doctorants, TSAFACK FEUDJO Didéto, NEGOUE WOUMBE Jovanie, FOUDAFOUDA Aloys Bodouin et NDJOBBO Jean Paul Justice pour leurs conseils.

Pour les échanges constructifs et le soutien multiforme, je remercie mes camarades de promotion TCHEKOUNANG DJILA Leslie Mercedes, TCHAKOUTE Lionel Prescillia, NGOUEMO Barbine, MBA ASSOUMOU Simon Tanguy et BALLA Louise Erika Virginie.

Je remercie mon épouse Annie Lucile Carine et tous mes enfants.

---

## Notations

---

<b>Pb</b>	: Plomb
<b>Po</b>	: Polonium
<b>Rn</b>	: Radon
<b>Ra</b>	: Radium
<b>Th</b>	: Thorium
<b>U</b>	: Uranium
<b>Lv</b>	: Livermorium
<b>Og</b>	: Oganesson
<b>Fl</b>	: Flérovium
<b>Ds</b>	: Darmstadtium
<b>Hs</b>	: Hassium
<b>Sg</b>	: Seaborgium
<b>e</b>	: Charge élémentaire
<b>WKB</b>	: Wentzel-Kramers-Brillouin
$\Gamma$	: Fonction Gamma.
<b>B</b>	: Fonction bêta.
$E_\alpha$	: Fonction de Mittag-Leffler.
$E_{\alpha,\beta}$	: Fonction de Mittag-Leffler généralisée.
$\mathbb{R}^+$	: Ensemble des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{C}$	: Ensemble des nombres complexes.
${}_a D_t^\nu$	: Dérivée fractionnaire d'ordre $\nu$ .
${}_a I_t^\nu$	: Intégrale fractionnaire d'ordre $\nu$ .
$AC([a, b])$	: Espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ .
$AC^n([a, b])$	: Espace des fonctions $f$ ayant une dérivée jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continue sur $[a, b]$ telles que $f^{(n-1)} \in [a, b]$ .
$\mathcal{F}(f)$	: Transformation de Fourier de $f$ .
$\mathcal{F}^{-1}(f)$	: Transformation de Fourier inverse de $f$ .
$F(s) (\mathcal{L}\{f(t); s\})$	: Transformation de Laplace.
<b>WBK</b>	: Wentzel-Kramers-Brillouin

---

## Résumé

---

Dans cette étude, nous utilisons l'approche fractionnaire pour déterminer la demi-vie radioactive de désintégration alpha de certains noyaux pairs-pairs lourds et superlourds. A partir de la théorie de Gamow et de l'équation de Schrödinger correspondante, nous exploitons les outils fractionnaires conformables et l'approximation Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) pour déterminer la probabilité de désintégration fractionnaire  $P^\nu$ . L'expression de la constante radioactive et celle de la période  $T_{1/2}^\nu$  sont calculées connaissant le facteur de préformation de la particule  $\alpha$  ( $P_0$ ) et la fréquence d'assaut ( $\nu_0$ ) [22]. En faisant varier l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\nu$  dans l'expression  $T_{1/2}^\nu$ , nous obtenons différentes valeurs de la demi-vie pour les nucléides étudiés. Nous retenons pour chaque noyau radioactif la valeur de  $\nu$  qui donne une meilleure précision à sa période radioactive. Les résultats obtenus sont comparés avec les données expérimentales et ceux de l'approche non fractionnaire. Nous examinons les variations du paramètre fractionnaire avec la structure nucléaire, la barrière de potentiel et nous recherchons les informations que révèle ce paramètre. Les résultats de notre étude s'avèrent être en bon accord avec les données expérimentales et améliorés par rapport aux précédents.

**Mots clés :** Radioactive  $\alpha$  ; Barrière de Coulomb ; Effet tunnel ; Approximation WKB ; Dérivée fractionnaire conformable ; Demi-vie.

---

## Abstract

---

In this study, we use the fractional approach to determine the alpha-decay radioactive half-life of certain heavy and superheavy even-even nuclei. Starting from Gamow theory and the corresponding Schrödinger equation, we exploit conformal fractional tools and the WKB approximation to determine the decay probability  $P^\nu$ . The expression of the radioactive constant and that of the period  $T_{1/2}^\nu$  are calculated knowing the particle preformation factor  $\alpha$  ( $P_0$ ) and the assault frequency ( $\nu_0$ ) [22]. By varying the order of the fractional derivative  $\nu$  in the expression  $T_{1/2}^\nu$ , we obtain different half-life values for the nuclides studied. For each radioactive nucleus, we retain the value of  $\nu$  that gives the best precision to its half-life. The results obtained are compared with experimental data and those of the non-fractional approach. We examine the variations of the fractional parameter with the nuclear structure, the potential barrier and look for information revealed by this parameter. The results of our study turn out to be in good agreement with the experimental data and improved on previous ones.

**Keywords:** Radioactive  $\alpha$ ; Coulomb barrier; Tunnel effect; WKB approximation; Conformable fractional derivative; Half-life.

---

# INTRODUCTION GENERALE

---

La désintégration  $\alpha$  est un processus qui permet d'avoir d'importantes informations sur la structure des noyaux atomiques [1]. Elle a été étudiée à l'aide de diverses approches théoriques dont la première fut celle de Gamow en 1928 [2]. D'après ce modèle, la désintégration alpha résulte de l'effet tunnel quantique de la particule  $\alpha$  à travers la barrière Coulombienne. Diverses formules ont été utilisées pour calculer la demi-vie radioactive d'un émetteur  $\alpha$ , on peut citer la formule de Geiger-Nutall [3], la formule de Viola-Seborg [4], .... Pour la plupart de ces modèles, il existe des divergences significatives entre la demi-vie mesurée et la demi-vie calculée pour plusieurs noyaux radioactifs  $\alpha$  [5]. Dans cette étude du processus de désintégration alpha, nous allons utiliser un formalisme nouveau et l'approximation Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) dans la résolution de l'équation de Schrödinger de la particule alpha à travers la barrière de Coulomb. Ce qui nous permettra de déterminer la transmission, encore appelée probabilité de désintégration. La probabilité de pénétration ainsi calculée nous permettra de déterminer la valeur de la constante de désintégration  $\lambda$ , puis la demi-vie radioactive  $T_{1/2}$  des noyaux étudiés. Il en résulte que la valeur de la demi-vie est dépendante de la forme et de l'énergie de la barrière. On peut donc évaluer la barrière nucléaire d'un noyau à partir de la demi-vie calculée. Pour un émetteur  $\alpha$  donné, le degré de proximité entre la demi-vie calculée ( $T_{1/2}^{cal}$ ) et celle obtenue expérimentalement ( $T_{1/2}^{exp}$ ) est généralement considérée comme une mesure de la qualité de la formule prédite.

Au cours des dernières décennies, le calcul fractionnaire (CF) s'est avéré être fructueux dans un certain nombre de champs de recherche en sciences. En effet, il permet de calculer des intégrales et des dérivées d'un ordre positif arbitraire quelconque (réel ou complexe). La définition mathématique d'une dérivée fractionnaire a fait l'objet de plusieurs approches différentes qui visent toutes à rendre compte des effets mémoires de certains phénomènes physiques et de la nature fractale de l'espace [6]. Nous pouvons citer par exemple les dérivées fractionnaires de Caputo, de Riemann-Liouville et de Riesz. Cependant, la dérivée fractionnaire de Caputo présente un plus grand intérêt pour les sciences fondamentales et appliquées car elle est applicable à l'utilisation des conditions initiales et aux limites [7]. Le calcul fractionnaire est donc un sujet qui a considérablement gagné en popularité, en importance et en efficacité [8]. D'où le choix du calcul fractionnaire conforme pour résoudre l'équation de Schrödinger de

désintégration alpha avec l'approximation WKB afin de déterminer l'expression analytique de la demi-vie dans cette étude. En faisant varier le paramètre fractionnaire  $\nu$  dans cette expression, nous pourrions compenser les écarts entre l'expérience et la théorie. En attribuant des valeurs pertinentes à l'ordre de la dérivée fractionnaire, les valeurs des demi-vies calculées sont obtenues avec une précision raisonnable pour les isotopes de Pb, Po, Rn, Ra, Th, U et certains noyaux superlourds. De plus, nous examinerons l'effet du paramètre fractionnaire sur la forme de la barrière de potentielle. Les variations de  $\nu$  avec le nombre de neutrons ( $N$ ) et le nombre de protons ( $Z$ ) seront étudiées pour rechercher un lien entre l'ordre de la dérivée fractionnaire et la structure du noyau.

Ce mémoire sera organisé en trois (03) chapitres. Le premier chapitre porte sur quelques généralités sur le noyau atomique et la désintégration alpha. Le deuxième chapitre présente quelques notions préalables du calcul fractionnaire avant de s'intéresser au formalisme fractionnaire conforme. Ensuite, ce formalisme est utilisé dans la résolution de l'équation de Schrödinger afin de calculer de la demi-vie radioactive de certains noyaux lourds et superlourds. Le dernier chapitre quant à lui sera consacré à la présentation des résultats obtenus et leur discussion, puis suivra une conclusion générale de notre travail.

---

## Chapitre I

---

# GENERALITES SUR LE NOYAU ATOMIQUE ET LE PROCESSUS DE DESINTEGRATION

---

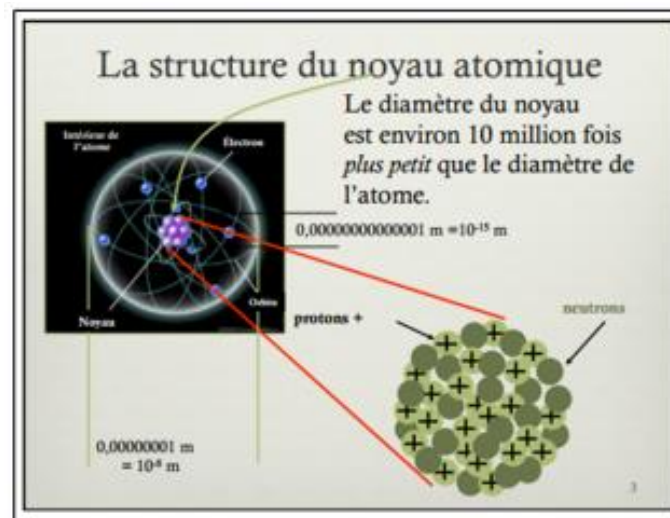
### I.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons brièvement quelques concepts de base utiles à la bonne compréhension des processus de désintégration ; en particulier la désintégration alpha. Pour cela, nous ferons au préalable quelques rappels sur le noyau atomique et les processus de désintégration. Nous présenterons ensuite la loi de Geiger-Nuttall et enfin le modèle de Gamow sur la désintégration alpha.

### I.2 Le noyau atomique

#### I.2.1 Structure du noyau

La structure du noyau atomique est longtemps restée inconnue ou du moins mal connue des physiciens du XIX siècle jusqu'à la fameuse expérience de Rutherford en 1911 [9]. Par la diffusion des particules alpha à travers une mince feuille d'or, il mit ainsi en évidence l'existence d'un noyau central chargé positivement. Le noyau atomique est constitué de protons portant des charges positives et de neutrons particules de charges nulles, de masse à peu près égale à celle du proton. Un noyau atomique est représenté par le symbole  ${}^A_ZX$ , où  $Z$  est le nombre de protons ou nombre de charge et  $A$  le nombre de nucléons ou nombre de masse. Son rayon est de l'ordre de  $10^{-15}$  m. Les nucléons sont constitués de protons et de neutrons et le nombre de neutrons est  $N = A - Z$ . Au vue de cette configuration, le noyau se décomposerait du fait de l'interaction coulombienne de répulsion entre les protons dans un si faible volume, s'il n'existait pas entre les nucléons une force de liaison à courte distance suffisamment grande pour palier d'un côté à cet effet et de l'autre côté maintenir la cohésion en son sein du noyau.



**Figure 1.1 : Noyau atomique [10]**

La figure 1.1 illustre la structure du noyau atomique, on retrouve 99,9 % de la masse atomique dans le noyau. Notons également que la force attractive entre les protons et les électrons (chargés négativement) assure la cohésion atomique.

Un noyau est dit stable lorsque sa durée de vie est infinie. Il est instable dans le cas contraire. La radioactivité est le résultat d'une dynamique interne, le noyau n'est donc pas un système statique mais en perpétuel activité et transformation.

### I.2.2 Noyaux magiques

Les noyaux magiques sont des noyaux dont le nombre de protons ou de neutrons est égal à l'un des nombres suivants : 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ... Ces nombres rappellent la structure en couches du cortège électronique de l'atome. Un noyau comportant simultanément un nombre magique de protons et un nombre magique de neutrons est dit doublement magique.

### I.2.3 Forme du noyau

La forme de noyau est une propriété fondamentale en physique nucléaire. Elle varie rapidement en fonction du nombre de nucléons. En ajoutant ou en retranchant un nucléon ou en augmentant le spin du noyau. Un noyau peut également présenter différents types de déformations à des énergies d'excitations très similaires, c'est ce qu'on appelle coexistence de forme [11]. Pour retrouver un état stable, les noyaux atomiques instables peuvent se désintégrer suivant différents canaux.

### I.3 Les processus de désintégration radioactive

La radioactivité est la transformation spontanée d'un noyau atomique instable ou radioactif (dit père) en un autre noyau plus stable (dit fils) en émettant une particule ou un photon qui emporte leur trop plein d'énergie. Ainsi, le noyau d'un isotope radioactif va se transformer spontanément en un noyau d'un isotope plus stable du même élément, ou bien encore en un noyau d'un isotope plus stable d'un autre élément chimique. Le nombre de noyaux stables et de noyaux radioactifs naturellement présents est d'environ 300, ce nombre est porté à environ 2000 en ajoutant les noyaux synthétisés dans les laboratoires à partir des réactions nucléaires. Il existe plusieurs modes de désintégration radioactive. En fonction de la nature du rayonnement émis, on peut distinguer : la désintégration  $\alpha$  (émission de la particule  ${}^4\text{He}$ ), la désintégration  $\beta^+$  (émission de la particule  ${}^0_1\text{e}$ ) et la capture électronique, la désintégration  $\beta^-$  (émission de la particule  ${}^0_{-1}\text{e}$ ), une désexcitation  $\gamma$  (émission de la particule  $\gamma$ ) et la conversion interne.

#### o La radioactivité alpha ( $\alpha$ )

La radioactivité  $\alpha$  est le processus de désintégration d'un noyau lourd, riche en neutrons en un noyau fils plus léger, avec émission d'une particule alpha

La particule alpha est le noyau d'hélium ( ${}^4_2\text{He}$ ), doublement positive. Les lois de conservation de Soddy permettent d'écrire plus simplement :



Une fraction de l'énergie de masse libérée par la réaction est emportée par la particule alpha sous forme d'énergie cinétique.

Illustration dans le cas du radium.

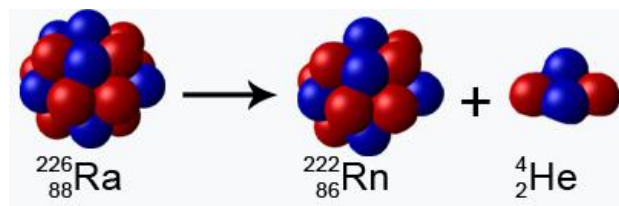


Figure 1.2 : Processus de désintégration du radium [12]

○ **La désintégration bêta plus ( $\beta^+$ )**

Dans le cas de la radioactivité  $\beta^+$ , le noyau père instable se désintègre en un noyau fils plus stable avec émission d'un positron ( ${}_{+1}^0e$ ) et d'un neutrino ( $\nu_0^0$ ). Son équation de désintégration est :



Ce processus est décrit par la figure 1.3.

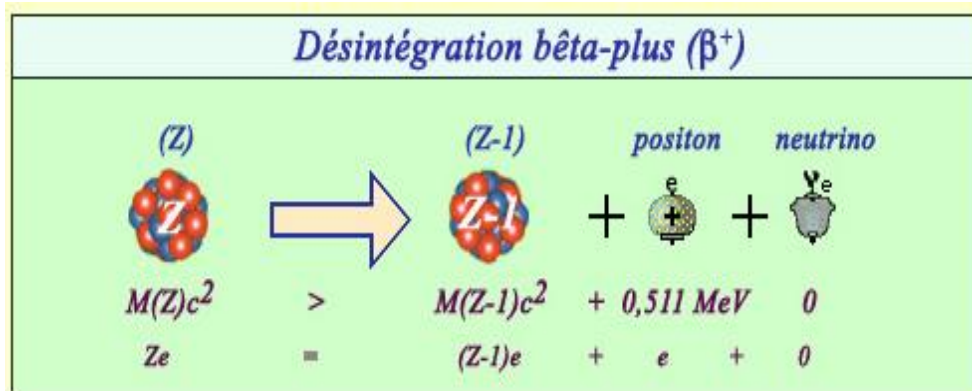


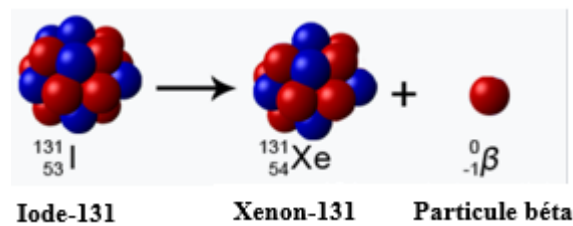
Figure 1.3 : Processus de désintégration bêta plus [13].

○ **La désintégration bêta moins ( $\beta^-$ )**

Lors de la radioactivité  $\beta^-$ , le noyau père instable se désintègre en un noyau fils plus stable avec émission d'un électron ( ${}_{-1}^0e$ ) et d'un antineutrino ( $\bar{\nu}_0^0$ ). L'équation de désintégration s'écrit :



La désintégration bêta moins du radium peut se décrire par la figure 1.4.



**Figure 1.4 : Processus de désintégration bêta moins de l'iode-131[14]**

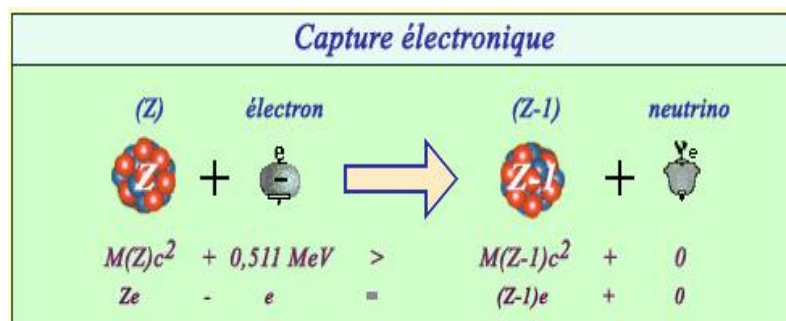
○ **La capture électronique (CE)**

La capture électronique est le processus au cours duquel un noyau atomique déficient en neutrons absorbe un électron. L'équation de désintégration s'écrit :



En général, la capture électronique accompagne la désintégration  $\beta^+$ .

La capture électronique est illustrée par la figure 1.5.



**Figure 1.5 : Processus de capture électronique [15]**

○ **La désintégration gamma ( $\gamma$ )**

La radioactivité  $\gamma$  est la désexcitation d'un noyau atomique instable. Le rayonnement électromagnétique  $\gamma$  provient généralement d'un noyau fils instable issu de la radioactivité  $\alpha$  ou  $\beta$ .

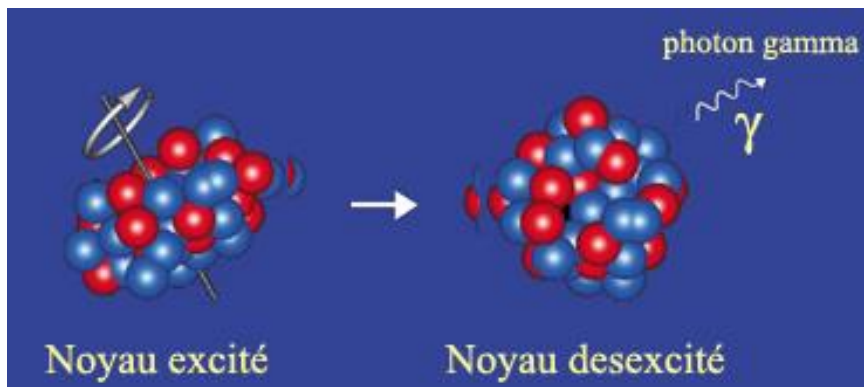
L'équation de la désexcitation s'écrit :



ou



La désexcitation d'un noyau est décrite par la figure 1.6.



**Figure 1.6 : Désexcitation d'un noyau [16]**

Le rayonnement gamma est très pénétrant, mais peu ionisant.

#### ○ Conversion interne

Lorsqu'un noyau est dans un état excité, il peut retrouver son état fondamental de deux manières : par transmission directe de l'énergie du photon hors du noyau ou par transmission directe de l'énergie de désexcitation à un électron du cortège électronique. Ce dernier peut passer à un niveau supérieur ou être éjecté ; il s'en suit un réarrangement du cortège électronique accompagné d'émission de photons gamma ou X. Ces rayonnements très énergétiques sont très dangereux par leur capacité à détruire les cellules vivantes (ils sont utilisés pour détruire des cellules malades en radiothérapie).

D'autres modes de désintégration existent mais sont moins répandus dans la nature. Ils interviennent beaucoup plus dans la désexcitation des noyaux artificiels ou synthétiques à savoir : l'émission des neutrons, l'émission des protons et la fission spontanée.

## I.4 Energie de désintégration

L'énergie de désintégration  $Q$  est la quantité d'énergie libérée par le processus de désintégration. Elle peut se calculer par la relation :

$$Q = \sum_i m_i c^2 - \sum_f m_f c^2, \quad (1.10)$$

avec  $m_i$  les masses nucléaires de l'état initial et  $m_f$  les masses nucléaires de l'état final. Il s'agit de la différence des énergies de masse entre les réactifs et les produits.

Le signe de  $Q$  nous informe sur la spontanéité ou non de la réaction pour :

$Q = 0$ , diffusion élastique.

$Q > 0$ , la réaction est exothermique et donc possiblement spontanée.

$Q < 0$ , la réaction est endothermique et donc impossible sans apport d'énergie extérieur. Il faut fournir de l'énergie dans la voie d'entrée de la réaction, sous forme d'énergie cinétique, pour que celle-ci soit possible.

Dans le cas de la désintégration  $\alpha$ , l'énergie libérée est partagée entre le noyau fils et la particule  $\alpha$ . Si le noyau fils est obtenu dans son état fondamental, on a :

$$Q = E_C\left(\frac{A-4}{Z-2}Y\right) + E_C\left({}^4_2\text{He}\right). \quad (1.11)$$

Avec  $E_C(Y) = \frac{1}{2}m_Y V_Y^2$  et  $E_C(\alpha) = \frac{1}{2}m_\alpha V_\alpha^2$  respectivement l'énergie cinétique du noyau fils ( $Y$ ) et celle de la particule alpha. Le noyau fils ayant une masse plus importante que la particule  $\alpha$ , cette dernière amène la plus grande part de l'énergie cinétique.

En effet, à partir de la conservation de l'impulsion :

$$m_Y V_Y = m_\alpha V_\alpha \quad (1.12)$$

En combinant (1.11) et (1.12), on obtient :

$$E_C(Y) = Q \times \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_Y}, \quad (1.13)$$

et

$$E_C(\alpha) = Q \times \frac{m_Y}{m_\alpha + m_Y}. \quad (1.14)$$

## I.5 Loi de décroissance radioactive

La radioactivité est un phénomène aléatoire. Soit  $N(t)$  le nombre de noyaux radioactifs présents à un instant  $t$  quelconque, le nombre total de désintégrations pendant l'intervalle de temps  $dt$  est proportionnel au nombre de  $N(t)$  et à la durée  $dt$ . Le coefficient de proportionnalité noté  $\lambda$  est appelé constante radioactive de l'échantillon radioactif considéré. Soit :

$$dN(t) = -\lambda N(t) \cdot dt, \quad (1.15)$$

$\lambda$  est caractéristique de l'échantillon et ne dépend ni de la présence des autres nucléides, ni du milieu environnant. Le nombre de noyaux présents à l'instant  $t$  quelconque est donné par :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (1.16)$$

où  $N_0$  est le nombre de noyaux présents à l'instant initial.

## I.6 Période radioactive

Le temps de demi-vie d'un noyau radioactif comme étant le temps au bout duquel la moitié des noyaux initialement présents se sont désintégrés.

La loi de désintégration s'écrit :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad (1.17)$$

ou 
$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt. \quad (1.18)$$

La résolution de cette équation différentielle fait apparaître une fonction exponentielle décroissante :  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ . (1.19)

La demi-vie est :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}. \quad (1.20)$$

Afin de comprendre le phénomène de désintégration alpha, plusieurs lois empiriques et modèles théoriques ont été développés. Un des objectifs visés par ces modèles est de prédire et déterminer les périodes radioactives des noyaux instables.

## I.7 Loi empirique de Geiger et Nuttall

Les particules émises par diverses sources radioactives ont à peu près des énergies cinétiques  $Q$  voisines (environ de 4 MeV à 10 MeV). Cependant, les demi-vies des sources varient sur une très large gamme de valeurs, selon l'élément mis en jeu.

Elément	Energie $\alpha$ (MeV)	Demi-vie
$^{212}_{84}\text{Po}$	8,95	$3 \cdot 10^{-7}$ s
$^{240}_{96}\text{Cm}$	6,40	27 jours
$^{226}_{88}\text{Ra}$	4,90	$1,6 \cdot 10^3$ années
$^{232}_{90}\text{Th}$	4,05	$1,4 \cdot 10^{10}$ années
$^{228}_{92}\text{U}$	6,59	9,3 minutes
$^{230}_{92}\text{U}$	5,60	21 jours
$^{232}_{92}\text{U}$	5,21	73 années
$^{234}_{92}\text{U}$	4,70	$2,4 \cdot 10^5$ années
$^{236}_{92}\text{U}$	4,45	$23 \cdot 10^7$ années
$^{238}_{92}\text{U}$	4,19	$4,4 \cdot 10^9$ années

**Tableau 1.1 : Energie cinétique et demi-vie de désintégration de quelques radioéléments**

Il ressort de ce tableau que l'énergie cinétique des particules  $\alpha$  est comprise entre 4 MeV et 10 MeV alors que les demi-vies sont comprises entre  $3 \cdot 10^{-7}$  s et  $4,4 \cdot 10^9$  années. De plus, on constate que **plus l'énergie cinétique des particules alpha est élevée, plus la durée de demi-vie est courte.**

Ces observations faites par les physiciens Geiger et Nuttall en 1911 ont été à l'origine de la loi semi-empirique reliant les demi-vies  $t_{1/2}$  aux énergies cinétiques  $Q$  des particules  $\alpha$  émises :

$$\log_{10}(T_{1/2}) = C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{Q}} \quad (1.21)$$

Avec des valeurs  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $Q$  mais dépendantes du numéro atomique  $Z$  du noyau fils. La figure 1.7 donne une illustration de cette loi.

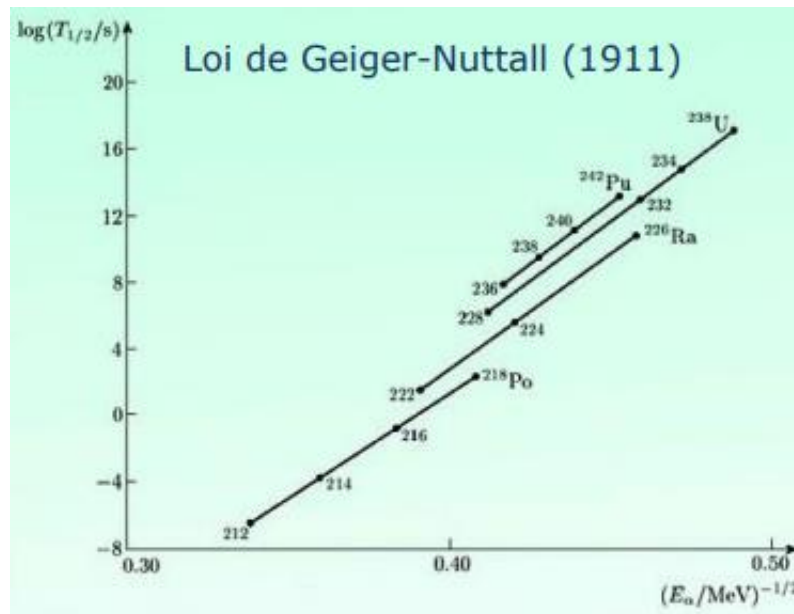


Figure 1.7 : Loi Geiger Nuttall pour Po, Ra, U et Pu [17].

Cette loi montre que plus l'énergie cinétique de la particule  $\alpha$  émise est élevée, plus la demi-vie du noyau est courte.

## I.8 Modèle de Gamow

Le premier modèle élaboré pour l'interprétation la radioactivité  $\alpha$  est celui de Gamow (1929), il fait appel à l'effet tunnel [1]. Gamow suppose que la particule  $\alpha$  et le noyau fils Y préexistent dans le noyau père X. La particule  $\alpha$  est liée au reste du noyau par le potentiel nucléaire de courte portée  $R_0$  et de profondeur  $U_0$ , comme représenté sur la figure 1.8 ( $r$  est la distance entre la particule  $\alpha$  et le centre du noyau).

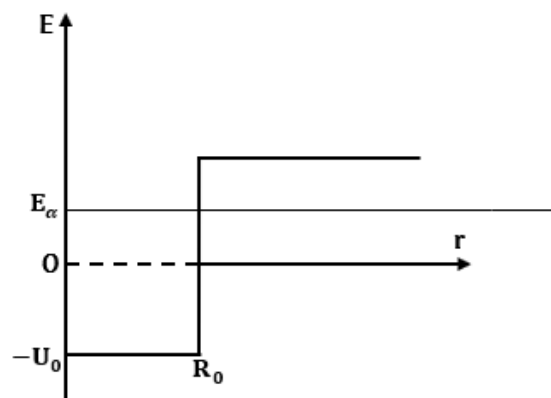


Figure 1.8 : Potentiel nucléaire en absence de la répulsion coulombienne

La particule  $\alpha$  a une énergie  $E_\alpha$ , le **système est stable**, la particule alpha ne peut s'échapper.

En tenant compte de la répulsion coulombienne entre la particule  $\alpha$  de charge  $+2e$  et le reste du noyau de charge  $(Z - 2)e$ , nous obtenons de potentiel de la figure 1.9.

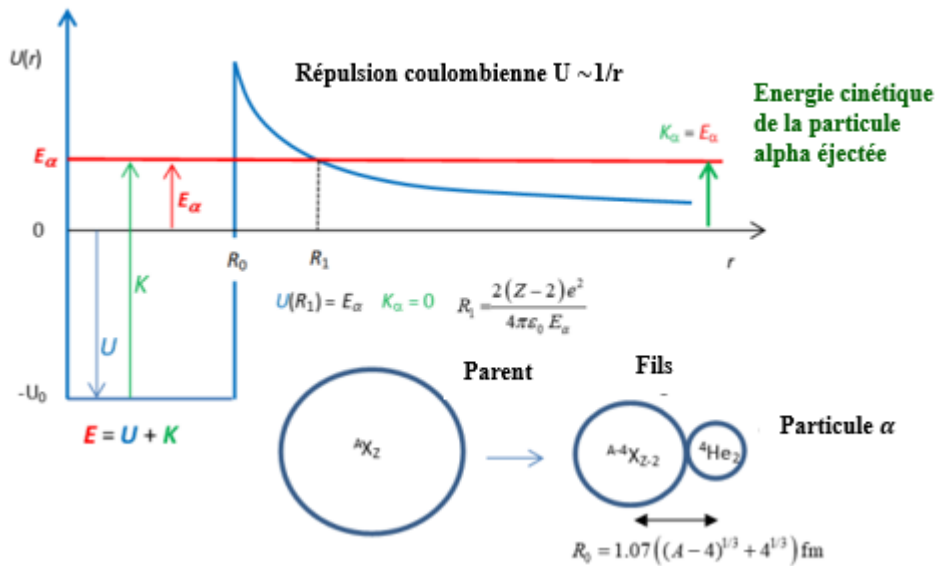


Figure 1.9 : Prise en compte de la répulsion coulombienne (potentiel de Gamow) [18].

D'après la mécanique classique, le système reste stable et la particule alpha ne devrait pas être émise, car la barrière de potentiel qu'elle doit passer (**20 MeV à 25 MeV**) est supérieure à l'énergie des particules  $\alpha$  (**4 MeV à 10 MeV**), comme nous l'avons vu précédemment.

Pour la mécanique quantique, la particule  $\alpha$  a une **probabilité de traverser** cette barrière de potentiel par **effet tunnel** illustrée ci-après.

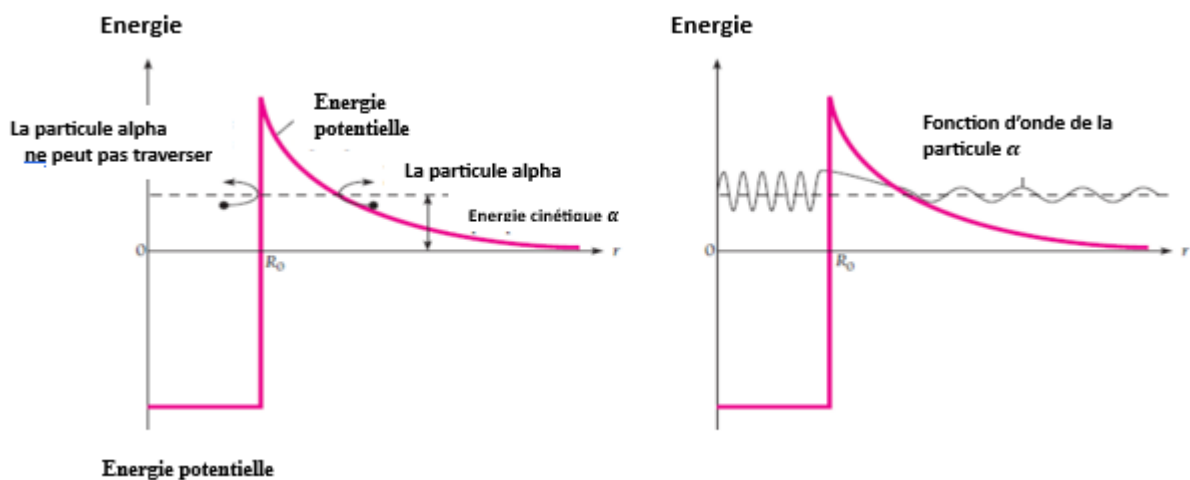


Figure 1.10 : Illustration de l'effet tunnel [19].

La particule  $\alpha$  n'est pas uniquement soumise à une interaction forte, attractive et de courte durée, mais aussi à la répulsion électrostatique qui intervient seule dès que sa distance aux nucléons dépasse 1 fm. En supposant que le noyau est sphérique, on peut supposer que  $U$  ne dépend que de  $r$ . On pose que la fonction  $U(r)$  est donnée par :

$$U(r) = \begin{cases} U_0 = \text{Const}, & \text{pour } r < R_0 \\ \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, & \text{pour } r > R_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

L'équation de Schrödinger radiale est :

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (Q - U)\psi(r) = 0, \quad (1.23)$$

avec  $\mu$  la masse réduite,  $Q$  énergie de la particule alpha,  $U$  le potentiel coulombien et  $\psi$  la fonction d'onde radiale de la particule alpha.

En considérant l'approximation WKB, nous prenons  $\psi$  sous la forme :

$$\psi(r) = Ae^{S(r)/\hbar}. \quad (1.24)$$

Alors,

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = \frac{A}{\hbar} \left( \frac{dS}{dr} \right) e^{S(r)/\hbar}, \quad (1.25)$$

et

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( \frac{A}{\hbar} \left( \frac{dS}{dr} \right) e^{S(r)/\hbar} \right), \quad (1.26)$$

$$= \frac{A}{\hbar} \left[ \frac{d^2S}{dr^2} + \frac{1}{\hbar} \left( \frac{dS}{dr} \right)^2 \right] e^{S(r)/\hbar}, \quad (1.27)$$

(1.27) dans (1.23), on obtient :

$$\hbar \frac{d^2S}{dr^2} + \left( \frac{dS}{dr} \right)^2 - 2\mu(U - Q) = 0 \quad (1.28)$$

Dans l'équation (1.28), la dérivée seconde  $\frac{d^2S}{dr^2}$  est multipliée par  $\hbar$ , dont la valeur est très faible (de l'ordre de  $10^{-34}$ ), de plus, la dérivée  $\frac{dS}{dr}$ , varie faiblement [20]. On peut donc négliger le produit  $\hbar \frac{d^2S}{dr^2}$ . L'équation (1.28) se réduit alors à :

$$\left( \frac{dS}{dr} \right)^2 = 2\mu(U - Q). \quad (1.29)$$

Pour un résultat physiquement acceptable (fonction d'onde de carré sommable), on retient :

$$\frac{dS}{dr} = -\sqrt{2\mu(U-Q)}. \quad (1.30)$$

En tenant compte de la continuité de  $\psi$  en  $r = R_0$  et  $r = R_1$  alors,

$$\frac{\psi(R_1)}{\psi(R_0)} = \frac{e^{S(R_1)/\hbar}}{e^{S(R_0)/\hbar}} = e^{\frac{1}{\hbar}(S(R_1)-S(R_0))}, \quad (1.31)$$

(1.30) dans (1.31) conduit à :

$$\frac{\psi(R_1)}{\psi(R_0)} = e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2\mu(U-Q)} dr}. \quad (1.32)$$

La probabilité de désintégration est :

$$P = \left| \frac{\psi(R)}{\psi(r_0)} \right|^2 = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2\mu(U-Q)} dr}. \quad (1.33)$$

Pour le potentiel coulombien de la forme  $U = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$ , nous avons :

$$\frac{dS}{dr} = -\sqrt{2\mu \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - Q \right)}, \quad (1.34)$$

et

$$P = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2\mu \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - Q \right)} dr}. \quad (1.35)$$

Pour une particule alpha à la sortie du tunnel ( $r = R_1$ ), d'énergie  $Q = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1}$ ,

alors :

$$R_1 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{Q}. \quad (1.36)$$

Une évaluation de l'équation intégrale (1.31) conduit

$$\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2\mu \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - Q \right)} dr = \sqrt{\frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2}} \left| \int_{R_0}^{R_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) dr \right|^{\frac{1}{2}}, \quad (1.37)$$

$$= \sqrt{\frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2}} \sqrt{R_1} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{R_0}{R_1} - \frac{R_0^2}{R_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (1.38)$$

Pour des faibles énergies,  $R_1$  est grand d'après (1.34) soit  $R_1 \gg R_0$  alors :

$$\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2\mu \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - Q \right)} dr = \left( \sqrt{\frac{2\mu}{Q}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \right) \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right), \quad (1.39)$$

avec

$$\delta = 2 \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} = 2 \sqrt{\frac{R_0}{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{Q}}}, \quad (1.40)$$

d'où la transmission ou probabilité de désintégration est :

$$P = e^{-2 \left( \sqrt{\frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar}} \right) \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right)}. \quad (1.41)$$

La constante radioactive  $\lambda$  est le produit de trois termes [21] : la probabilité de préformation  $P_0$  de la particule  $\alpha$  dans le noyau, la fréquence  $\nu_0$  avec laquelle la particule  $\alpha$  percute la barrière avant de traverser, la probabilité de désintégration  $P$ . Soit :

$$\lambda = P_0 \nu_0 P, \quad (1.42)$$

avec

$$\nu_0 = \frac{V_\alpha}{2R_0} = \frac{1}{2R_0} \sqrt{\frac{2Q}{M}}, \quad (1.43)$$

où  $V_\alpha$  est la vitesse de la particule supposée constante à l'intérieur du noyau et  $Q$  son énergie cinétique.

Finalement, on obtient en tenant compte de (1.41) et (1.43) :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = P_0 \left( \frac{1}{2R_0} \sqrt{\frac{2Q}{M}} \right) e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2\mu \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - Q \right)} dr}; \quad (1.44)$$

$T_{1/2}$  étant la période radioactive.

## I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit le noyau atomique et passé en revue les différents modes de désintégration. Nous avons également vu la formule semi empirique de Geiger-Nuttall qui permet de calculer la demi-vie radioactive. Un accent a été mis sur le modèle de Gamow sur la désintégration alpha qui a aussi conduit au calcul de la demi-vie radioactive. Bien que les résultats de la formule de Geiger-Nuttall ainsi que ceux de la théorie de Gamow pour déterminer la demi-vie radioactive soient en accord avec l'expérience, on constate que ceux-ci manquent de précision pour un certain nombre de noyaux. Dans le prochain chapitre, nous allons utiliser le calcul fractionnaire dans la résolution de l'équation de Schrödinger décrivant la désintégration alpha selon le modèle de Gamow afin d'exprimer la demi-vie radioactive de certain radionucléides pairs-pairs. Cette démarche nous semble adaptée pour réduire les écarts observés entre les théories et l'expérience.

---

## Chapitre II

---

# L'EFFET FRACTIONNAIRE SUR LA DESINTEGRATION ALPHA

---

### II.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la désintégration  $\alpha$  peut-être décrite par le modèle de Gamow. Selon cette théorie, la particule alpha préformée avec une probabilité  $P_0$  est plongée dans un puits de potentiel  $U(r)$ . Elle percute la barrière de potentielle avec une fréquence d'assaut  $\nu_0$  avant de traverser ladite barrière par effet tunnel. Sa probabilité de désintégration ou la transmission est alors  $P$ . Le système ainsi décrit, de masse réduite  $\mu$  est régit par l'équation de Schrödinger. Dans ce chapitre, nous présenterons d'abord quelques notions préliminaires indispensables au calcul fractionnaire, ensuite nous nous intéresserons à la de dérivée fractionnaire conformable, enfin nous utiliserons le formalisme fractionnaire pour résoudre l'équation de Schrödinger. Cette résolution nous mènera vers l'expression fractionnaire  $P^\nu$  de la probabilité de désintégration, où  $\nu$  est l'ordre de la dérivée fractionnaire. La formule  $\lambda = P_0 \nu_0 P$  nous conduira à l'expression finale de la demi-vie radioactive du radionucléide considéré  $T_{1/2}^\nu$ .

### II.2. Quelques notions préliminaires au calcul fractionnaire

#### II.2.1 Fonctions particulières

- **La fonction Gamma d'Euler**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale d'Euler de seconde espèce :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (2.1)$$

Cette intégrale est convergente pour les réels positifs.

○ **Propriétés de la fonction gamma**

•  $\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x), x > 0;$  (2.2)

•  $\Gamma(x + n) = x(x + 1)(x + 2) \dots (x + n - 1) \Gamma(x);$  (2.3)

•  $\Gamma(n + 1) = n !,$  (2.4)

où  $n !$  est le factoriel du nombre  $n$ .

○ **Quelques valeurs particulières de la fonction  $\Gamma$**

•  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1;$  (2.5)

•  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  (Intégrale de Gauss) ; (2.6)

•  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}.$  (2.7)

○ **La fonction Bêta**

Une autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale d'Euler de première espèce :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad \forall p, q > 0. \quad (2.8)$$

○ **Remarque :**

La relation entre  $\beta$  et  $\Gamma$  est :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (2.9)$$

La fonction Bêta est symétrique :

$$\beta(p, q) = \beta(q, p). \quad (2.10)$$

La formule intégrale de la fonction Bêta est :

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1} (\cos\theta)^{2q-1} d\theta. \quad (2.11)$$

○ **La fonction Mittag-Leffler**

La fonction de Mittag-Leffler est définie par :

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (x \in \mathbb{C}, \alpha > 0). \quad (2.12)$$

La fonction de Mittag-Leffler généralisée  $E_{\alpha,\beta}(z)$  est :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha, \beta > 0). \quad (2.13)$$

○ **Remarque :**

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x. \quad (2.14)$$

## II.2.2 Transformation de Fourier

Soit  $f$  une fonction telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ , la transformation de Fourier de  $f$  est définie par :

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \hat{f}(i\omega) \quad (2.15)$$

La transformée inverse est donnée par :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(i\omega) d\omega = f(t) \quad (2.16)$$

## II.2.3 Transformation de Laplace

Soit  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux,

On appelle transformée de Laplace de  $f(t)$ , la fonction :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (2.17)$$

$f(t)$  est appelée l'original de  $F(s)$ .

### II.3. Les dérivées fractionnaires

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17<sup>ième</sup> siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de  $\frac{d^n y}{dt^n}$ , lorsque  $n = \frac{1}{2}$ . Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et a écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tiré des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche essentielle qui plus tard porta le nom "Approche de Riemann-Liouville". D'autres théories ont fait leurs apparitions comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo [22, 23, 24].

A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique... [22].

#### II.3.1 Définitions

De façon générale, la dérivation fractionnaire peut être définie comme une opération qui consiste à **dérivée une fonction donnée à un ordre  $\nu$  ( $\nu > 0$ ), non entier [25]**. L'opérateur général de dérivée à un ordre  $\nu$  non entier est défini par :

$$D_t^\nu = \frac{d^\nu}{dt^\nu}, \quad (2.18)$$

où  $\nu$  est l'ordre de la dérivée.

Lorsque  $\nu$  est inférieur à zéro, on a plutôt à faire à une intégration à un ordre non entier appelée intégration fractionnaire.

L'opérateur d'intégration fractionnaire est défini par :

$${}_a I_t^v = \int_a^t d\tau^v, \quad (2.19)$$

où  $a$  et  $t$  sont les bornes d'intégration.

Plusieurs définitions mathématiques rencontrées dans la littérature étayent la notion de dérivée fractionnaire définie précédemment. Nous retiendrons pour la suite celle de Riemann Liouville, de Caputo, Riesz et de Grunwald Letnikov.

### I.3.2 Dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville

En considérant l'intégrale  $n$ -ième de Liouville d'une fonction  $f(t)$  définie par [25] :

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \int_a^t \int_a^{t_{n-1}} \int_a^{t_{n-2}} \dots \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} dt_n, \quad (2.20)$$

$$\Rightarrow$$

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau. \quad (2.21)$$

A laquelle correspond l'intégrale fractionnaire d'ordre ( $v > 0$ ) donnée par :

$${}^{RL}D_t^{-v} f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-v}} d\tau. \quad (2.22)$$

On définit pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $v$  tel que  $1 < v < n$ , la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $v$  de la fonction  $f$  est définie par [25] :

$${}^{RL}D_a^v f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[ D_a^{-(n-v)} f(t) \right],$$

$${}^{RL}D_a^v f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-v)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t ((t-\tau)^{n-v-1} f(\tau)) d\tau. \quad (2.23)$$

Nous notons que  $v$  est un réel positif non entier et  $n$  un entier positif non nul.

○ **Remarque :**

Pour  $n = 0$ ,  $0 < \nu < 1$ , on obtient :

• **L'intégrale fractionnaire d'ordre  $\nu$**

$${}^{RL}D_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\nu}} d\tau \quad (2.24)$$

• **La dérivée fractionnaire d'ordre  $\nu$**

$${}^{RL}D_t^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\nu}} d\tau \quad (2.25)$$

### I.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Elle est donnée par [23, 25] :

$${}^C D_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\nu-n+1}} d\tau, \quad (2.26)$$

avec  $n - 1 < \nu < n$ .

Il est à noter que sous des conditions initiales identiques, la dérivée de Riemann Liouville et celle de Caputo sont équivalentes. On montre qu'elles sont étroitement liées par la relation :

$${}^{RL}D_t^{-\nu} f(t) = {}^C D_t^{-\nu} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-a}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(a), \quad (2.27)$$

où  $f^{(k)}(a) = 0$  avec  $k = (0, 1, 2, \dots, n-1)$ .

Il découle donc que les conditions initiales pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire avec les dérivées de Caputo sont sous la même forme que celles des équations différentielles d'ordre entier. Cela est un grand avantage lorsqu'on sait que grand nombre de problèmes d'application demande à ce que les dérivées fractionnaires soient définies en des endroits où on a une bonne interprétation des conditions initiales à savoir  $f(a)$ ,  $f'(a)$ ,  $f''(a)$ , ...

### I.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Grunwald Letnikov

Soit  $f(t)$ , une fonction de variable réelle  $t$  donnée. Partant de la dérivée nième de la fonction  $f(t)$  suivante :

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=1}^n (-1)^j C_n^j f(t - jh), \quad (2.28)$$

avec  $h = \frac{t-a}{n}$ .

La dérivée fractionnaire d'ordre  $v$  de la fonction  $f(t)$  au sens de Grunwald-Letnikov notée  ${}^G L D_t^v$  est donnée par :

$${}^G L D_t^v f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^v} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j C_a^j f(t - jh), \quad (2.29)$$

qui peut être généralisée par [25] :

$${}^G L D_t^v f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^v} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j C_a^j f(t - jh). \quad (2.30)$$

**Les grandeurs constituants la dérivée de G. Letnikov sont :**

- $a$  (= constante) est la borne inférieure du domaine de dérivation.
- $h$  ( $= \frac{t-a}{n}$ ) est le pas de la sommation.
- $C_v^j = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(j)\Gamma(v-j)}$ ,  $C_v^0 = 1$ .

### I.3.5 Dérivée fractionnaire au sens de Riesz

Soient  $f \in AC^n([a, b])$  et  $n-1 < v < n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre  $v$  de la fonction  $f$  est donnée par [26]:

$$R_x^v f(t) = \frac{\Gamma(1+v) \sin(\frac{v\pi}{2})}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t+\tau) - 2f(t) + f(t-\tau)}{\tau^{1+v}} d\tau \quad (1.31)$$

## II.2. Notion de dérivée fractionnaire conformable

Comme indiqué précédemment, la dérivée fractionnaire est la généralisation de la dérivée habituelle à l'ordre non entier. Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire conformable, telles que les dérivées fractionnaires de Caputo, Riemann-Liouville et de Riesz. La dérivée de Caputo [6] présente un grand intérêt dans les sciences fondamentales et appliquées, car elle s'applique mieux à l'utilisation des conditions initiales et limites. C'est elle que nous utiliserons dans cette étude. La dérivée de Caputo d'une fonction où  $\psi(r)$  est :

$${}_{R_0}^C D_r^\nu \psi(r) = \int_{R_0}^r K_\nu(r-y) \psi^{(n)}(y) dy, \quad R_0 < r, \quad (2.32)$$

avec

$$K_\nu(r-y) = \frac{(r-y)^{n-\nu-1}}{\Gamma(n-\nu)}, \quad (2.33)$$

$\psi^{(n)}(r)$  est nième dérivée de la fonction  $\psi(r)$  et  $K_\nu(r-y)$  est le noyau. Le noyau

$K_\nu(r-y)$  est fixe pour un nombre réel  $\nu$  donné et présente une singularité à  $r=y$ .

Afin de redéfinir les dérivées fractionnaires en utilisant des noyaux exponentiels lisses non sinusoidaux exponentielles lisses non singulières, Caputo et Fabrizio [27] ont proposé une nouvelle formule de dérivée fractionnaire de la forme :

$$D_r^\nu \psi(r) = \frac{M(\nu)}{(1-\nu)} \int_{R_0}^r \exp\left(-\frac{\nu(r-y)}{1-\nu}\right) \psi'(y) dy, \quad (2.34)$$

où  $M(\nu)$  est une fonction de normalisation satisfaisant  $M(0) = M(1) = 1$ . Récemment, le concept de concept de CFD a été proposé par Khalil et al. [27], pour une fonction donnée  $\psi(r)$ , la CFD d'ordre  $\alpha$  est donnée par :

$$D_r^\nu \psi(r) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(r-\epsilon r^{1-\nu}) - \psi(r)}{\epsilon}, \quad 0 < r, \quad (2.35)$$

$$\psi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(r), \quad (2.36)$$

alors,

$$D^{\nu}[\psi(r^{\nu})] = r^{1-\nu}\psi'(r^{\nu}) \quad (2.37)$$

$$D^{\nu}[D^{\nu}\psi(r^{\nu})] = (1 - \nu)r^{1-2\nu}\psi'(r^{\nu}) + r^{2-2\nu}\psi''(r^{\nu}) \quad (2.38)$$

avec  $0 < \nu \leq 1$ . Cette formulation est très simple et fournit une extension naturelle des opérateurs différentiels d'ordre non entier. De plus, l'opérateur différentiel fractionnaire conforme est linéaire et satisfait les propriétés de la dérivée habituelle telles que la dérivée d'un produit, la règle de la chaîne et la dérivée d'un quotient.

### II.3 Résolution de l'équation de Schrödinger avec le formalisme fractionnaire

L'équation radiale de Schrödinger à résoudre est :

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(Q - U)\psi = 0, \quad (2.39)$$

soit, avec le formalisme fractionnaire :

$$D^{\nu}[D^{\nu}\psi(r^{\nu})] + \frac{2\mu}{\hbar^2}[Q - U(r^{\nu})]\psi(r^{\nu}) = 0, \quad (2.40)$$

$$r^{2-2\nu}\psi''(r^{\nu}) + (1 - \nu)r^{1-2\nu}\psi'(r^{\nu}) + \frac{2\mu}{\hbar^2}[Q - U(r^{\nu})]\psi(r^{\nu}) = 0. \quad (2.41)$$

On considère une solution de l'équation (2.41) de la forme :

$$\psi(r^{\nu}) = Ae^{\frac{iS(r^{\nu})}{\hbar}}, \quad (2.42)$$

où S est le nombre d'onde.

Alors,

$$\psi(r^{\nu})' = \frac{i}{\hbar} \left( \frac{dS(r^{\nu})}{dr} \right) Ae^{\frac{iS(r^{\nu})}{\hbar}} = \frac{i}{\hbar} \left( \frac{dS(r^{\nu})}{dr} \right) \psi(r^{\nu}), \quad (2.43)$$

et

$$\psi(r^{\nu})'' = \frac{i}{\hbar} \frac{d^2S(r^{\nu})}{dr^2} \psi(r^{\nu}) - \frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{dS(r^{\nu})}{dr} \right)^2 \psi(r^{\nu}). \quad (2.44)$$

On considère que le potentiel varie faiblement, de même que  $s(r^{\nu})$  (**approximation WKB**)

alors :

$$\frac{d^2S(r^{\nu})}{dr^2} \approx 0, \quad (2.45)$$

(2.45) devient :

$$\psi(r^\nu)'' = -\frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{dS}{dr} \right)^2 \Psi(r^\nu). \quad (2.46)$$

En remplaçant (2.43) et (2.44) dans (2.41), on obtient :

$$r^{2-2\nu} \left[ -\frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{dS(r^\nu)}{dr} \right)^2 \right] \Psi(r^\nu) + (1-\nu)r^{1-2\nu} \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{dS(r^\nu)}{dr} \right) \right] \Psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} [Q - U(r^\nu)] \Psi(r^\nu) = 0, \quad (2.47)$$

ou

$$\left[ -\frac{r^{2-2\nu}}{\hbar^2} \left( \frac{dS(r^\nu)}{dr} \right)^2 + (1-\nu) i \frac{r^{1-2\nu}}{\hbar} \left( \frac{dS(r^\nu)}{dr} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} [Q - U(r^\nu)] \right] = 0. \quad (2.48)$$

En multipliant l'équation (2.48) par  $\hbar^2$  et en remplaçant  $\frac{dS(r^\nu)}{dr}$  par  $S'(r^\nu)$ , il vient :

$$\left[ r^{2-2\nu} S(r^\nu)'^2 - i\hbar(1-\nu)r^{1-2\nu} S(r^\nu)' - 2\mu [Q - U(r^\nu)] \right] \psi(r^\nu) = 0, \quad (2.49)$$

ou

$$\left[ S(r^\nu)'^2 - \frac{i\hbar(1-\nu)}{r} S(r^\nu)' - \frac{2\mu}{r^{2-2\nu}} [Q - U(r^\nu)] \right] \psi(r^\nu) = 0. \quad (2.50)$$

Pour déterminer  $S(r^\nu)'$ , nous résolvons l'équation du second degré associée.

$$\Delta = -\frac{[\hbar(1-\nu)]^2}{r^2} + \frac{8\mu}{r^{2-2\nu}} [Q - U(r^\nu)], \quad (2.51)$$

ou

$$\Delta = \frac{1}{r^{2-2\nu}} \left\{ -\left[ \frac{\hbar(1-\nu)}{r^\nu} \right]^2 + 8\mu [Q - U(r^\nu)] \right\}. \quad (2.52)$$

La solution est donc :

$$S(r^\nu)' = \frac{i\hbar(1-\nu)}{2r} \mp \frac{\sqrt{\frac{1}{r^{2-2\nu}} \left\{ -\left[ \frac{\hbar(1-\nu)}{r^\nu} \right]^2 + 8\mu [Q - U(r^\nu)] \right\}}}{2}, \quad (2.53)$$

ou

$$S(r^\nu)' = \frac{i\hbar(1-\nu)}{2r} \mp i r^{\nu-1} \sqrt{\left[ \frac{\hbar(1-\nu)}{2r^\nu} \right]^2 + 2\mu [U(r^\nu) - Q]}. \quad (2.54)$$

En intégrant entre R et  $R_1$ , on obtient :

$$S(r^\nu) = \frac{i\hbar(1-\nu)}{2} \text{Ln} \left( \frac{R_1}{R} \right) \mp i \int_R^{R_1} r^{\nu-1} \sqrt{\frac{A}{r^{2\nu}} + 2\mu \left( \frac{C_2}{r^\nu} - Q \right)} dr, \quad (2.55)$$

ou

$$S(r^\nu) = \frac{i\hbar(1-\nu)}{2} \text{Ln} \left( \frac{R_1}{R} \right) \mp i \int_R^{R_1} \frac{1}{r} \sqrt{A + 2\mu C_2 r^\nu - 2\mu Q r^{2\nu}} dr \quad (2.56)$$

Avec,

$$\text{et} \quad \begin{cases} A = \frac{[\hbar(1-\nu)]^2}{2}, \\ U(r^\nu) = \frac{C_2}{r^\nu}, \end{cases} \quad (2.57)$$

$U(r^\nu)$  étant la forme fractionnaire du potentiel Coulomb .

$$\text{Posons } X = r^\nu, \text{ alors } dX = \nu r^{\nu-1} dr \text{ et } dr = \frac{dX}{\nu X r^{-1}}. \quad (2.58)$$

(2.57) et (2.58) dans (2.56) donne :

$$S(r^\nu) = \frac{i\hbar(1-\nu)}{2} \text{Ln} \left( \frac{r_2}{r_0} \right) \mp i \int_{X_0}^{X_2} \frac{1}{\nu X} \sqrt{A + 2\mu C_2 X - 2\mu Q X^2} dX. \quad (2.60)$$

La probabilité de désintégration est donnée par :

$$P^\nu = e^{\frac{2iS(r^\nu)}{\hbar}}. \quad (2.62)$$

(2.60) dans (2.62) conduit à :

$$P^\nu = e^{-\frac{2}{\hbar} \left[ \frac{\hbar(1-\nu)}{2} \text{Ln} \left( \frac{r_2}{r_0} \right) \mp \int_{X_0}^{X_2} \frac{1}{\nu X} \sqrt{A + 2\mu C_2 X - 2\mu Q X^2} dX \right]}. \quad (2.62)$$

La solution physiquement acceptable est :

$$P^\nu = e^{\left[ (\nu-1) \text{Ln} \left( \frac{r_2}{r_0} \right) - \frac{2}{\hbar} \int_{X_0}^{X_2} \frac{1}{\nu X} \sqrt{A + 2\mu C_2 X - 2\mu Q X^2} dX \right]}. \quad (2.63)$$

En introduisant (2.63) dans l'équation (1.42)  $\lambda = P_0 \nu_0 P$  qui devient  $\lambda^\nu = P_0 \nu_0 P^\nu$ ,

$$\lambda^{\nu} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}^{\nu}} = P_0 v_0 e^{\left[ (\nu-1) \text{Ln} \left( \frac{r_2}{r_0} \right) - \frac{2}{\hbar} \int_{X_0}^{X_2} \frac{1}{vX} \sqrt{A+2\mu C_2 X - 2\mu Q X^2} dX \right]}. \quad (2.64)$$

Il vient que :

$$T_{1/2}^{\nu} = \frac{\text{Ln} 2}{P_0 v_0 e^{\left[ (\nu-1) \text{Ln} \left( \frac{r_2}{r_0} \right) - \frac{2}{\hbar} \int_{X_0}^{X_2} \frac{1}{vX} \sqrt{A+2\mu C_2 X - 2\mu Q X^2} dX \right]}}, \quad (2.65)$$

la fréquence de collision dans le noyau  $v_0$  peut être estimée à partir de la vitesse des particules  $V_{in}$  et du rayon nucléaire  $R$  comme suit [29] :

$$v_0 = \frac{V_{in}}{R}, \quad (2.66)$$

l'énergie cinétique  $E_C$  du noyau est exprimée en fonction de l'énergie potentielle  $U_0$  comme par :

$$E_C = Q - U_0, \quad (2.67)$$

la vitesse est donc :

$$V_{in} = \sqrt{\frac{2E_C}{\mu}} = \sqrt{\frac{2(Q-U_0)}{\mu}} \quad (2.68)$$

La valeur de  $U_0 = -175,5 \text{ MeV}$  est obtenue expérimentalement.

Avec la formule (2.61), nous avons l'expression qui permet de calculer la demi-vie radioactive d'un radionucléide. Ce modèle, adossé sur le calcul fractionnaire est celui proposé dans ce travail.

## II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques éléments indispensables au calcul fractionnaire, ensuite, nous avons résolu l'équation de Schrödinger avec le formalisme fractionnaire conformable. En utilisant l'approximation WKB, nous avons obtenu l'expression

de la probabilité de désintégration recherchée. Nous avons enfin obtenu l'expression de la demi-vie radioactive. Dans le prochain chapitre, nous utiliserons cette expression pour calculer la demi-vie de certains noyaux pairs-pairs.

---

# RESULTATS ET DISCUSSION

---

## III.1 Introduction

Pour évaluer l'apport du fractionnaire sur la désintégration  $\alpha$  en vue d'élaborer un modèle nucléaire, nous nous intéressons d'abord à certains noyaux. C'est ainsi que le formalisme du chapitre précédent, basé sur le calcul fractionnaire, nous a permis d'avoir un modèle de calcul de la demi-vie radioactive d'un radionucléide. Dans ce chapitre, les valeurs théoriques  $\log_{10}(T_{1/2}^v)$  sont calculées pour les isotopes pairs-pairs du plomb (Pb), du polonium (Po), du radon (Rn), du radium (Ra), du thorium (Th), de l'uranium (U) et de certains noyaux superlourds. Les résultats théoriques ainsi calculées seront comparés aux résultats expérimentaux proposés par H. F. Zhang and G. Royer [21].

## III.2 Présentation des résultats et discussion

### III.2.1 Tableaux des valeurs

Afin de montrer clairement le comportement du paramètre fractionnaire  $v$  et celui  $\log_{10}(T_{1/2}^v)$  par rapport à  $\log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}})$ , nous présentons les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3. Dans ces tableaux, les valeurs expérimentales de l'énergie de désintégration ( $Q$ ) et celles des logarithmes des demi-vies expérimentales ( $\log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}})$ ) sont indiquées respectivement sur les colonnes 2 et 3 des tableaux. La colonne 4 est réservée aux valeurs des logarithmes des périodes radioactives ( $\log_{10}(T_{1/2}^{v=1})$ ) calculées en absence du formalisme fractionnaire tandis que la colonne 5 donne la différence ou l'écart ( $\delta_{v=1} = \log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}}) - \log_{10}(T_{1/2}^{v=1})$ ) entre les valeurs expérimentales et théoriques calculées. La colonne 6 présente les valeurs des logarithmes des périodes radioactives ( $\log_{10}(T_{1/2}^v)$ ) calculées avec le formalisme fractionnaire, l'écart ou la différence ( $\delta_{v=1} = \log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}}) - \log_{10}(T_{1/2}^v)$ ) entre ces valeurs est consigné dans la colonne 7. La dernière colonne quant à elle, donne l'ordre de la dérivée fractionnaire  $v$  retenu lors des calculs.

- Isotopes pairs-pairs de Pb, Po et Rn.

Noyaux	Q(MeV)	$\log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}})$	Absence d'effet fractionnaire		Effet fractionnaire		
			$\log_{10}(T_{1/2}^{\nu=1})$	$\delta_{\nu=1}$	$\log_{10}(T_{1/2}^{\nu})$	$\delta_{\nu}$	$\nu$
$^{178}_{82}\text{Pb}$	7,790	-3,64	-3,76	0,12	-3,64	0,00	0,770
$^{180}_{82}\text{Pb}$	7,415	-2,30	-2,46	0,16	-2,30	0,00	0,785
$^{182}_{82}\text{Pb}$	7,080	-1,26	-1,46	0,20	-1,26	0,00	0,798
$^{184}_{82}\text{Pb}$	6,774	-0,21	-0,45	0,24	-0,21	-0,00	0,810
$^{186}_{82}\text{Pb}$	6,470	1,08	0,85	0,23	1,08	0,00	0,818
$^{188}_{82}\text{Pb}$	6,109	2,43	2,15	0,28	2,42	0,01	0,831
$^{190}_{82}\text{Pb}$	5,697	4,26	3,93	0,33	4,25	0,00	0,846
$^{192}_{82}\text{Pb}$	5,221	6,56	6,17	0,39	6,56	-0,00	0,863
$^{194}_{82}\text{Pb}$	4,738	9,99	9,60	0,38	9,99	-0,00	0,875
$^{210}_{82}\text{Pb}$	3,790	16,57	16,09	0,47	16,57	0,00	0,902
$^{188}_{84}\text{Po}$	8,087	-3,40	-3,49	0,09	-3,40	-0,00	0,762
$^{190}_{84}\text{Po}$	7,693	-2,60	-2,73	0,14	-2,60	0,01	0,777
$^{192}_{84}\text{Po}$	7,319	-1,54	-1,72	0,18	-1,54	0,00	0,792
$^{194}_{84}\text{Po}$	6,990	-0,41	-0,60	0,18	-0,41	0,01	0,802
$^{196}_{84}\text{Po}$	6,660	0,76	0,53	0,22	0,77	-0,01	0,815
$^{198}_{84}\text{Po}$	6,310	2,18	1,91	0,27	2,17	0,00	0,827
$^{200}_{84}\text{Po}$	5,980	3,79	3,47	0,32	3,78	0,01	0,839
$^{202}_{84}\text{Po}$	5,700	5,13	4,83	0,30	5,13	-0,00	0,846
$^{204}_{84}\text{Po}$	5,480	6,28	5,94	0,33	6,28	-0,01	0,854
$^{206}_{84}\text{Po}$	5,330	7,15	6,78	0,36	7,14	0,00	0,859
$^{208}_{84}\text{Po}$	5,220	7,97	7,58	0,39	7,97	-0,01	0,864
$^{210}_{84}\text{Po}$	5,407	7,08	6,77	0,31	7,09	-0,01	0,854
$^{212}_{84}\text{Po}$	8,950	-6,52	-6,50	-0,02	-6,52	0,00	0,715
$^{214}_{84}\text{Po}$	7,830	-3,87	-3,99	0,12	-3,87	0,00	0,766
$^{216}_{84}\text{Po}$	6,900	-0,82	-1,05	0,23	-0,82	0,00	0,803
$^{218}_{84}\text{Po}$	6,110	2,27	2,01	0,26	2,27	0,00	0,829
$^{198}_{86}\text{Rn}$	7,349	-1,19	-1,36	0,17	-1,19	0,01	0,794
$^{200}_{86}\text{Rn}$	7,040	0,0	-0,22	0,22	0,00	-0,00	0,807
$^{202}_{86}\text{Rn}$	6,770	1,06	0,85	0,21	1,05	0,01	0,813
$^{204}_{86}\text{Rn}$	6,550	2,00	1,76	0,24	2,01	-0,01	0,822
$^{206}_{86}\text{Rn}$	6,380	2,71	2,44	0,27	2,71	-0,00	0,828
$^{208}_{86}\text{Rn}$	6,260	3,34	3,04	0,29	3,33	0,01	0,832
$^{210}_{86}\text{Rn}$	6,160	3,96	3,70	0,26	3,96	-0,00	0,833
$^{212}_{86}\text{Rn}$	6,380	3,17	2,91	0,25	3,17	-0,00	0,826
$^{214}_{86}\text{Rn}$	9,210	-6,57	-6,53	-0,04	-6,56	-0,01	0,712
$^{216}_{86}\text{Rn}$	8,200	-4,35	-4,43	0,08	-4,34	-0,00	0,757
$^{218}_{86}\text{Rn}$	7,260	-1,45	-1,61	0,16	-1,45	0,00	0,792
$^{220}_{86}\text{Rn}$	6,40	1,75	1,50	0,25	1,75	-0,00	0,824
$^{222}_{86}\text{Rn}$	5,590	5,52	5,18	0,34	5,52	-0,00	0,852

**Tableau 3.1 : Effet fractionnaire sur la désintégration des isotopes pairs-pairs de plomb (Pb), polonium (Po) et radon (Rn).**

- Isotopes pairs-pairs de Ra, Th et U.

Noyaux	Q(MeV)	$\log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}})$	Absence d'effet fractionnaire		Effet fractionnaire		
			$\log_{10}(T_{1/2}^{\nu=1})$	$\delta_{\nu=1}$	$\log_{10}(T_{1/2}^{\nu})$	$\delta_{\nu}$	$\nu$
$^{202}_{88}\text{Ra}$	8,020	-2,58	-2,49	-0,09	-2,58	0,00	0,762
$^{204}_{88}\text{Ra}$	7,636	-1,23	-1,37	0,13	-1,23	0,00	0,787
$^{206}_{88}\text{Ra}$	7,42	-0,62	-0,79	0,17	-0,62	-0,00	0,796
$^{208}_{88}\text{Ra}$	7,27	0,15	-0,05	0,20	0,14	0,01	0,801
$^{210}_{88}\text{Ra}$	7,16	0,56	0,39	0,17	0,55	0,01	0,802
$^{212}_{88}\text{Ra}$	7,03	1,15	0,95	0,20	1,16	0,01	0,808
$^{214}_{88}\text{Ra}$	7,27	0,40	0,21	0,19	0,41	-0,01	0,800
$^{216}_{88}\text{Ra}$	9,53	-6,74	-6,68	-0,06	-6,74	-0,00	0,706
$^{218}_{88}\text{Ra}$	8,55	-4,59	4,62	0,03	-4,59	-0,00	0,747
$^{220}_{88}\text{Ra}$	7,60	-1,74	-1,88	0,14	-1,74	0,00	0,785
$^{222}_{88}\text{Ra}$	6,68	1,59	1,35	0,23	1,59	-0,00	0,819
$^{224}_{88}\text{Ra}$	5,79	5,53	5,19	0,34	5,52	0,00	0,849
$^{226}_{88}\text{Ra}$	4,87	10,73	10,29	0,44	10,73	-0,00	0,879
$^{210}_{90}\text{Th}$	8,053	-1,77	-1,86	0,09	-1,77	0,00	0,775
$^{212}_{90}\text{Th}$	7,952	-1,44	-1,55	0,11	-1,43	-0,00	0,780
$^{214}_{90}\text{Th}$	8,53	-1,00	-1,13	0,14	-1,00	0,00	0,784
$^{216}_{90}\text{Th}$	8,07	-1,55	-1,66	0,11	-1,55	0,01	0,774
$^{218}_{90}\text{Th}$	9,85	-7,00	-6,90	-0,10	-7,00	0,00	0,698
$^{220}_{90}\text{Th}$	8,95	-5,01	-5,01	-0,00	-5,01	-0,00	0,737
$^{222}_{90}\text{Th}$	8,13	-2,55	-2,64	0,09	-2,55	0,00	0,770
$^{224}_{90}\text{Th}$	7,30	0,11	-0,08	0,19	0,11	-0,00	0,802
$^{226}_{90}\text{Th}$	6,45	3,39	4,10	-0,71	3,40	0,01	0,779
$^{228}_{90}\text{Th}$	5,52	7,92	8,59	-0,67	7,92	0,00	0,812
$^{230}_{90}\text{Th}$	4,77	12,51	13,10	-0,59	12,50	0,01	0,839
$^{232}_{90}\text{Th}$	4,08	17,76	18,26	-0,50	17,75	0,01	0,863
$^{218}_{92}\text{U}$	8,773	-3,29	-3,31	0,20	-3,29	0,00	0,751
$^{220}_{92}\text{U}$	10,30	-7,22	-7,11	-0,11	-7,21	-0,01	0,689
$^{224}_{92}\text{U}$	8,620	-3,15	-3,20	0,05	-3,15	0,00	0,757
$^{226}_{92}\text{U}$	7,701	-0,30	-0,46	0,16	-0,29	-0,01	0,793
$^{228}_{92}\text{U}$	6,80	2,76	2,54	0,21	2,76	0,00	0,821
$^{230}_{92}\text{U}$	5,99	6,43	6,13	0,29	6,43	0,01	0,847
$^{232}_{92}\text{U}$	4,41	9,52	9,15	0,37	9,52	-0,01	0,866
$^{234}_{92}\text{U}$	4,86	13,02	12,58	0,44	13,03	-0,01	0,883
$^{236}_{92}\text{U}$	4,57	14,99	13,59	0,40	15,00	-0,01	0,888
$^{238}_{92}\text{U}$	4,27	17,27	16,82	0,45	17,28	-0,01	0,897

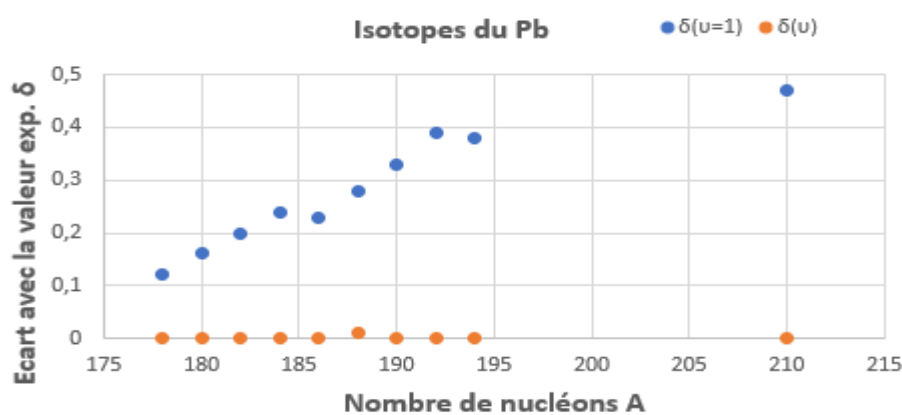
Tableau 3.2 : Effet fractionnaire sur la désintégration des isotopes pairs-pairs de radium (Ra), Thorium (Th) et uranium (U).

- Noyaux superlourds

Noyaux	Q(MeV)	$\log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}})$	Absence d'effet fractionnaire		Effet fractionnaire		
			$\log_{10}(T_{1/2}^{\nu=1})$	$\delta_{\nu=1}$	$\log_{10}(T_{1/2}^{\nu})$	$\delta_{\nu}$	$\nu$
$^{294}_{118}\text{Og}$	11,81	-3,05	-2,74	-0,31	-3,05	0,00	0,697
$^{292}_{116}\text{Lv}$	10,66	-1,74	-1,55	-0,19	-1,75	0,01	0,733
$^{290}_{116}\text{Lv}$	11,00	-2,15	-1,91	-0,24	-2,15	0,00	0,721
$^{288}_{114}\text{Fl}$	10,09	-0,10	0,03	-0,13	-0,10	-0,00	0,749
$^{286}_{114}\text{Fl}$	10,33	-0,87	-0,73	-0,14	-0,87	0,00	0,742
$^{270}_{110}\text{Ds}$	11,20	-4,00	-3,79	-0,21	-4,00	-0,00	0,703
$^{266}_{108}\text{Hs}$	10,34	-2,64	-2,48	-0,16	-2,48	-0,00	0,728
$^{264}_{108}\text{Hs}$	10,58	-3,60	-3,42	-0,17	-3,61	0,01	0,719
$^{266}_{106}\text{Sg}$	8,76	1,53	1,50	0,03	1,54	-0,01	0,780
$^{260}_{106}\text{Sg}$	9,93	-2,07	-1,97	-0,10	-2,07	0,00	0,739

**Tableau 3.3 : Effet fractionnaire sur la désintégration  $\alpha$  de certains noyaux pairs-pairs superlourds.**

Un examen sommaire de colonnes 3 et 6 des tableaux 3.1, 3.2 et 3.3 montre que les valeurs  $\log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}})$  et  $\log_{10}(T_{1/2}^{\nu})$  sont très proches. Pour plus de détails, représentons sur le même graphe les écarts  $\delta_{\nu=1} = \log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}}) - \log_{10}(T_{1/2}^{\nu=1})$  entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées en absence d'effet fractionnaire ( $\nu = 1$ ) (**couleur bleue**) d'une part, et les écarts  $\delta_{\nu} = \log_{10}(T_{1/2}^{\text{exp}}) - \log_{10}(T_{1/2}^{\nu})$  entre les valeurs expérimentales et les valeurs obtenues avec le formalisme fractionnaire ( $\nu$  non entier) (**couleur orange**) d'autre part pour différents isotopes.



**Figure 3.11: Ecarts pour les isotopes du plomb**

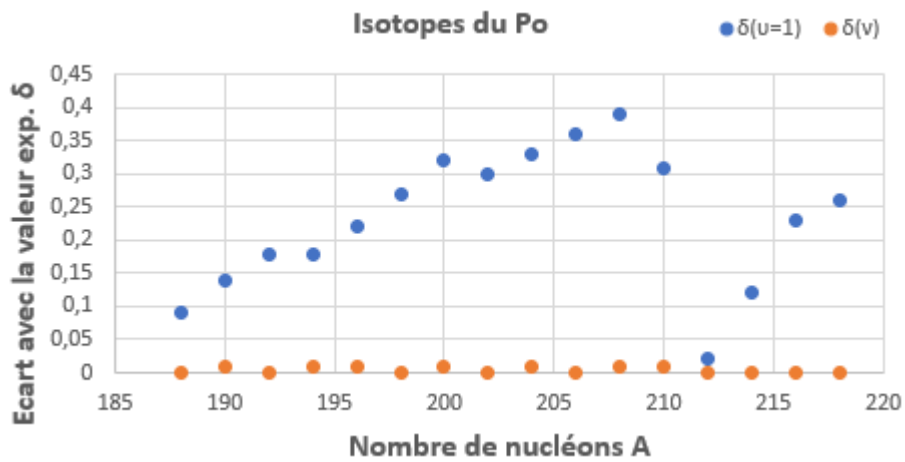


Figure 3.12 : Ecart pour les isotopes du polonium

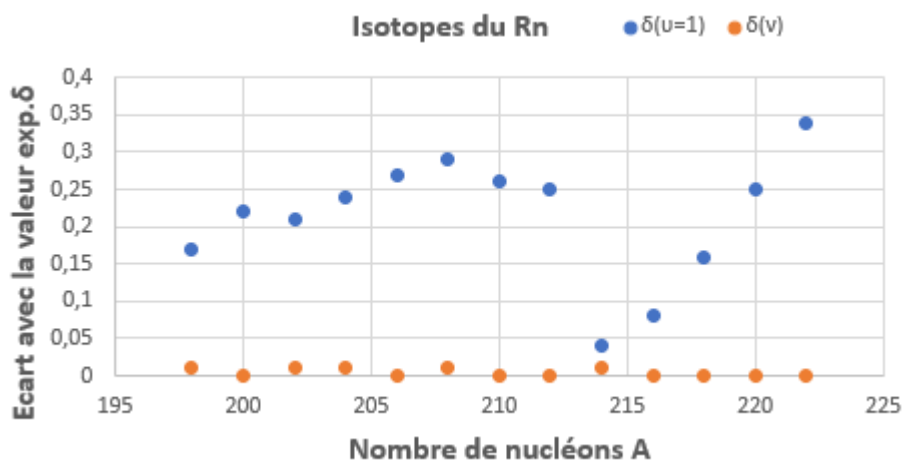


Figure 3.13 : Ecart pour les isotopes du radon

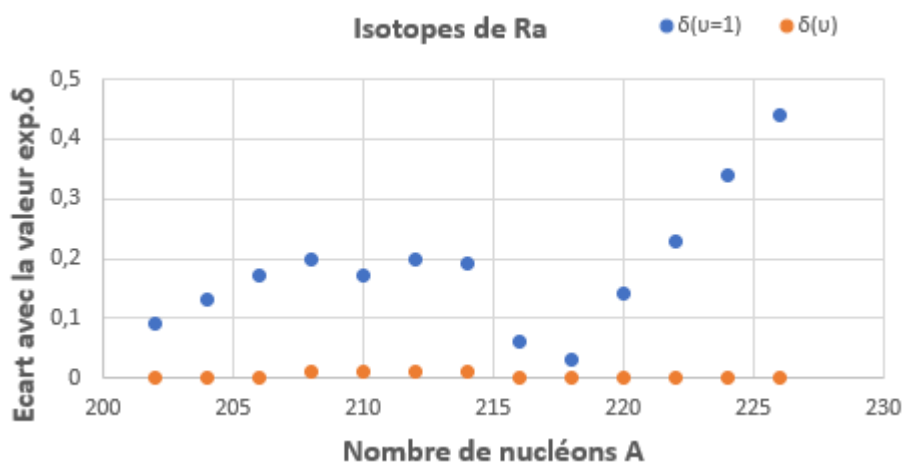


Figure 3.14 : Ecart pour les isotopes du radium

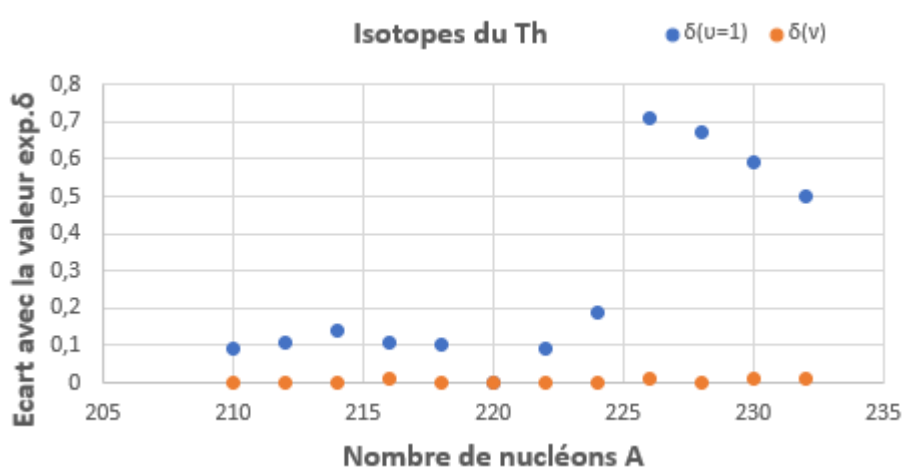


Figure 3.15 : Ecart pour les isotopes du thorium.

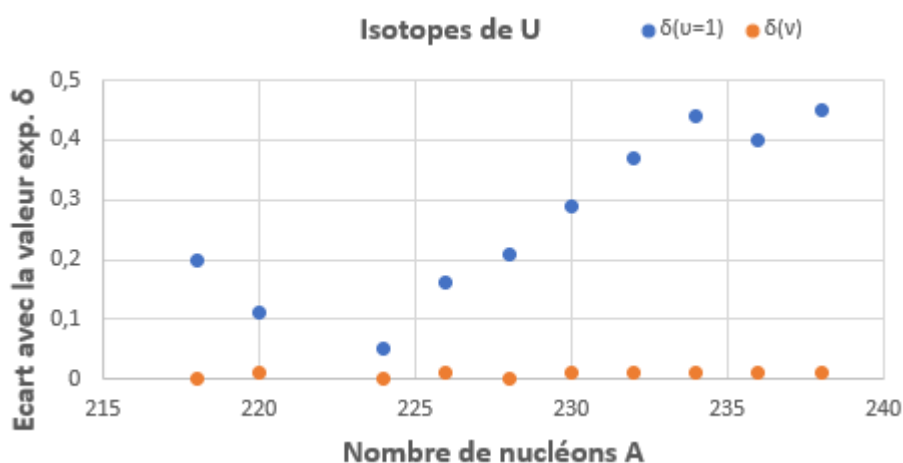


Figure 3.16 : Ecart pour les isotopes de l'uranium.

Les figures 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15 et 3.16 donnent les informations suivantes :

- en **absence des effets fractionnaires**, des écarts plus ou moins grands existent entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques calculées. Dans le cadre de cette étude, l'écart le plus grand ( $\delta_{u=1} = 0,71$ ) est observé pour le thorium ( $^{226}_{90}\text{Th}$ ), alors que le plus petit ( $\delta_{u=1} = 0,00$ ) est observé pour le ( $^{220}_{90}\text{Th}$ ) ;
  - avec **le formalisme fractionnaire**, les écarts sont pratiquement nuls. Cela signifie que dans ce cas, les résultats théoriques sont pratiquement identiques aux données expérimentales.
- Il en découle que le formalisme fractionnaire est en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

De plus, on remarque que pour les noyaux superlourds (tableau 3.3), l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\nu$  est compris entre 0,697 et 0,789 ; ce qui suggère que pour les noyaux superlourds étudiés, l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\nu$  est plus petit pour les noyaux légers et les noyaux moyens. Nous obtenons également une valeur moyenne de l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\nu = 0,806$  pour l'ensemble des noyaux étudiés.

Dans la partie qui suit, nous nous intéressons aux variations de l'ordre de la dérivée fractionnaire avec le nombre de neutrons du noyau.

### III.2.2 Influence du nombre de neutrons du noyau sur $\nu$

Examinons pour chaque groupe d'isotopes, les variations de l'ordre de la dérivée fractionnaire ( $\nu$ ) avec le nombre de neutrons (N) du noyau.

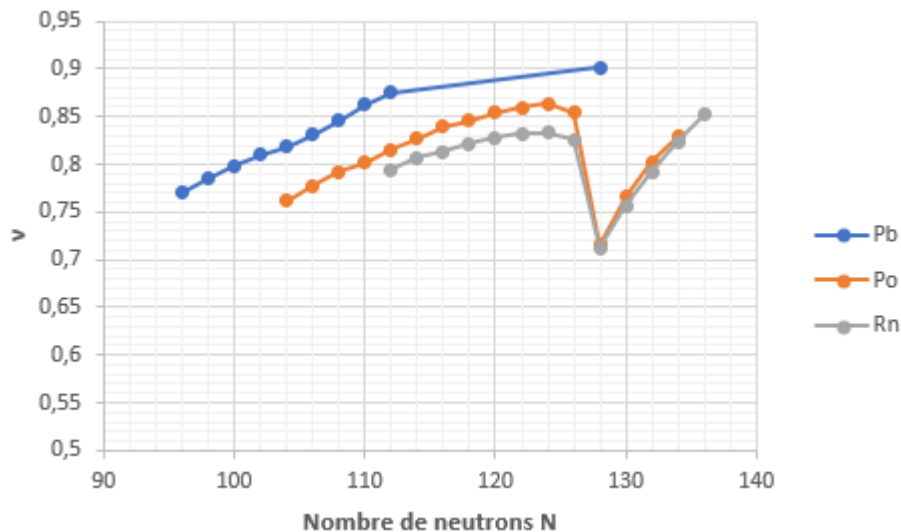
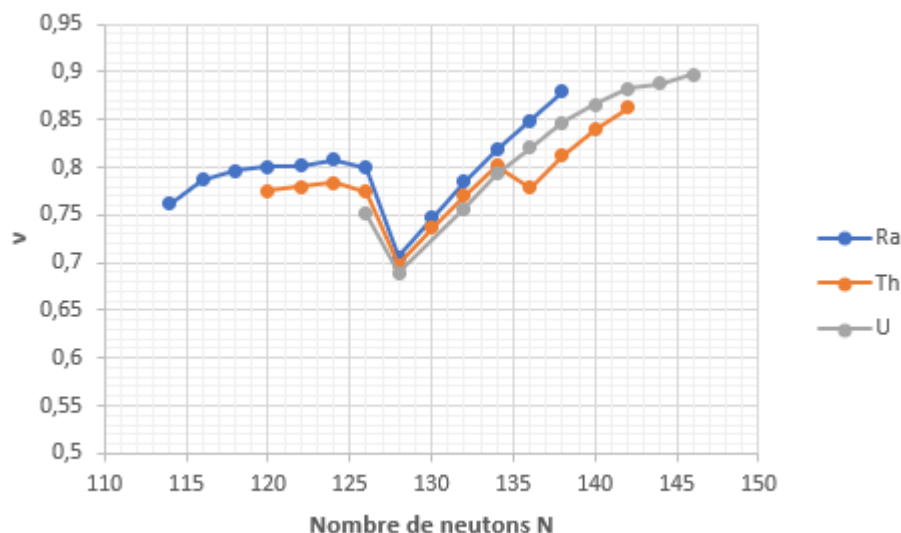


Figure 3.17 : Variation de  $\nu$  avec du nombre de neutrons N (isotopes de Pb, le Po et Rn).



**Figure 3.18 : Variation de  $\nu$  avec le nombre de neutrons  $N$  (isotopes de Ra, Th et U).**

Sur la figure 3.17, il ressort que le paramètre fractionnaire croît avec le nombre de neutrons dans l'intervalle  $[96, 128]$  pour les isotopes de plomb. Le Pb a un nombre de protons magique ( $Z = 82$ ) mais n'a pas un isotope avec un nombre magique de neutrons. Par conséquent, la variation de  $\nu$  en fonction du nombre de protons ne présente pas de cas particulier.

Pour le polonium et le radon,  $\nu$  croît avec le nombre de neutrons dans l'intervalle  $[104, 124]$ . Pour  $N$  appartenant à l'intervalle  $[124, 128]$ ,  $\nu$  décroît de façon abrupte avec un minimum pour  $N = 128$ . Pour des valeurs de  $N$  supérieures 128,  $\nu$  croît de nouveau. Dans l'intervalle de nombre de neutrons sus indiqué, nous avons les isotopes  $^{210}_{84}\text{Po}$  ( $N = 126$ ) et  $^{212}_{86}\text{Rn}$  ( $N = 126$ ) avec un nombre un nombre magique de neutrons. On en déduit que le pic observé pour Po et Rn est dû à l'existence des isotopes avec un nombre magique de neutrons.

Le paramètre fractionnaire  $\nu$  est minimal pour les isotopes  $^{212}_{84}\text{Po}$  ( $N = 128$ ) et  $^{214}_{86}\text{Rn}$  ( $N = 128$ ); ce qui indique que l'effet de fermeture de coquille (fermeture de couches et sous couches) contribue à diminuer  $\nu$ . De plus, les valeurs de  $\nu$  sont presque identiques pour  $N = 128$  pour ces deux isotopes.

Concernant la figure 3.18, nous voyons que  $\nu$  croît avec le nombre de protons entre  $N = 114$  et  $N = 124$ . Pour  $N$  appartenant à l'intervalle  $[124, 128]$ ,  $\nu$  décroît de façon abrupte avec un minimum pour  $N = 128$ . Pour des valeurs de  $N$  supérieures 128,  $\nu$  croît de nouveau.

Dans l'intervalle de nombre de neutrons indiqué plus haut, nous avons les isotopes  $^{214}_{88}\text{Ra}$  ( $N = 126$ ),  $^{216}_{90}\text{Th}$  ( $N = 126$ ) et  $^{218}_{92}\text{U}$  ( $N = 126$ ) avec un nombre magique de neutrons ; ce qui confirme que le pic observé pour Ra, Th et U est dû à l'existence des isotopes avec un nombre magique de neutrons.

Le paramètre fractionnaire  $\nu$  est minimal pour les isotopes  $^{216}_{88}\text{Ra}$  ( $N = 128$ ),  $^{218}_{90}\text{Th}$  ( $N = 128$ ) et  $^{220}_{92}\text{U}$  ( $N = 128$ ) ; ce qui indique que l'effet de fermeture de coquille (fermeture de couches et sous couches) contribue à diminuer  $\nu$ . De plus, les valeurs de  $\nu$  sont presque identiques pour  $N = 128$  pour ces trois isotopes.

Par ailleurs, l'ordre de la dérivée fractionnaire du thorium présente un autre extrémum pour  $N = 136$  ( $^{226}_{90}\text{Th}$ ) qui est un descendant de  $^{230}_{92}\text{U}$  ( $N = 138$ ) qui a sa couche extérieure (3p) pleine ; ce qui confirme une fois de plus l'effet de fermeture de couche.

Dans la figure 3.19, nous représentons les variations de  $\nu$  avec le nombre de neutrons des isotopes les moins riches et les plus riches en neutrons pour les éléments Pb, Po, Rn, Ra, Th et U.

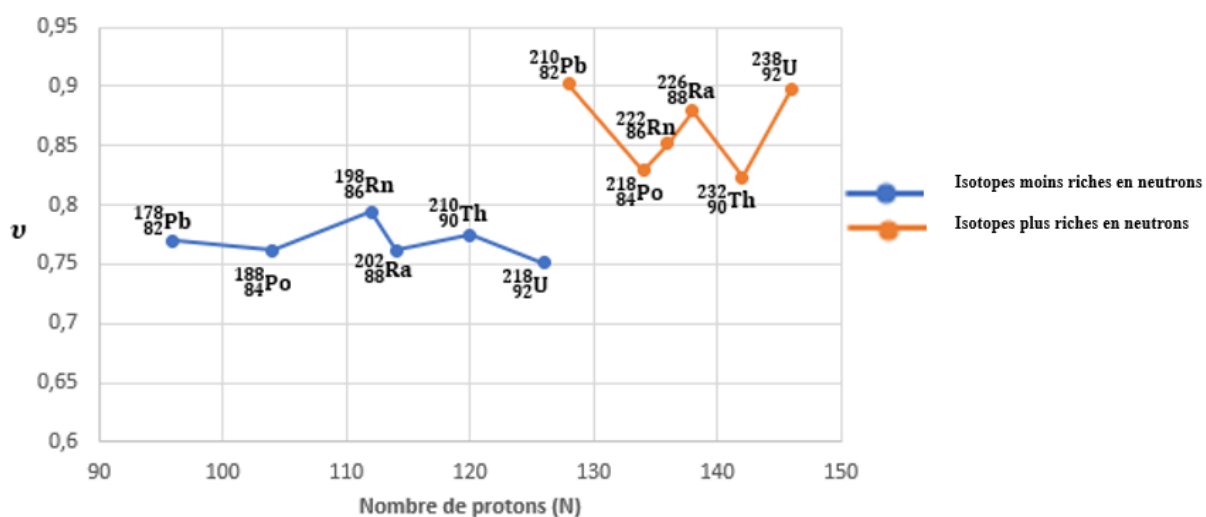


Figure 3.19 : Variation de  $\nu$  avec  $N$  pour les isotopes les plus riches et moins riches en neutrons d'un même élément.

La figure 3.19 montre que pour les isotopes d'un même noyau,  $\nu$  augmente lorsque le nombre de neutrons augmente. L'augmentation de  $\nu$  la plus grande est celle de l'uranium.

Nous pouvons retenir de ce paragraphe que pour les isotopes d'un même élément, l'ordre de la dérivée fractionnaire croît avec le nombre de neutrons. Toutefois, cette augmentation est perturbée pour les isotopes à nombre de neutrons magiques et par les effets de fermeture des couches. En particulier, pour  $N = 128$ ,  $\nu$  prend une valeur minimale. Nous savons que l'émission alpha est beaucoup plus probable pour les noyaux avec deux neutrons en dehors de la fermeture de la coquille (sous couche fermée) [30]. On en déduit que lorsque  $\nu$  est minimal, la transmission ou la probabilité de désintégration est maximale.

Dans le tableau 3.4 qui suit, nous récapitulons les isotopes des éléments Pb, Po, Rn, Ra, Th et U pour lesquels  $\nu$  est minimal.

Noyaux pères		Noyaux fils		$\nu$
Symbole	Nombre de neutrons	Symbole	Nombre de neutrons	
$^{178}_{82}\text{Pb}$	96	$^{174}_{80}\text{Hg}$	94	0,770
$^{212}_{84}\text{Po}$	128	$^{208}_{82}\text{Pb}$	126	0,715
$^{214}_{86}\text{Rn}$	128	$^{210}_{84}\text{Po}$	126	0,712
$^{216}_{88}\text{Ra}$	128	$^{212}_{86}\text{Ra}$	126	0,706
$^{218}_{90}\text{Th}$	128	$^{214}_{88}\text{Th}$	126	0,698
$^{220}_{92}\text{U}$	128	$^{216}_{90}\text{U}$	126	0,689

**Tableau 3.4 : Récapitulatif des isotopes avec ordre de la dérivée fractionnaire minimale**

Le tableau 3.4 confirme le fait que lorsque le nombre de charge  $Z$  d'un ensemble d'isotopes n'est pas magique, les variations de l'ordre de la dérivée fractionnaire des isotopes radioactifs alpha présentent un minimum pour l'isotope qui a un nombre de neutrons  $N = 128$  (s'il existe) ; dans ce cas, cet isotope ( $N = 128$ ) est le noyau père du noyau fils ( $N = 126$ ) qui a un nombre magique.

Après avoir étudié l'influence du nombre de neutrons sur paramètre fractionnaire, intéressons-nous à l'effet d'une variation du nombre de protons.

### III.2.3 Influence du nombre de protons du noyau sur $\nu$

Dans cette partie, nous étudions pour les noyaux étudiés les variations de  $\nu$  avec le nombre de protons  $Z$  pour les noyaux isotones  $N = 126, 128, 132, 134, 136$  et  $138$ .

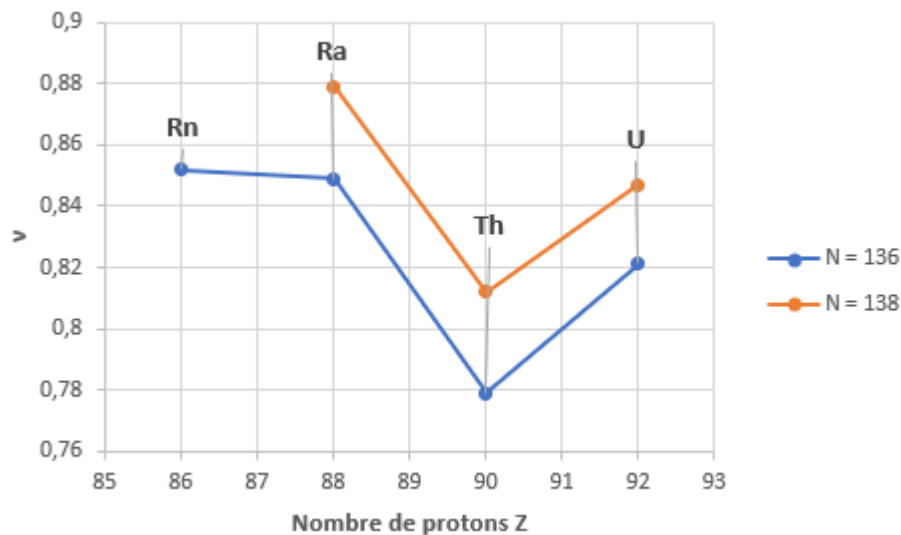


Figure 3.20 : Variation de  $\nu$  en fonction du nombre de protons  $Z$  pour le Rn, Ra, Th et U pour  $N = 136$  et  $N = 138$

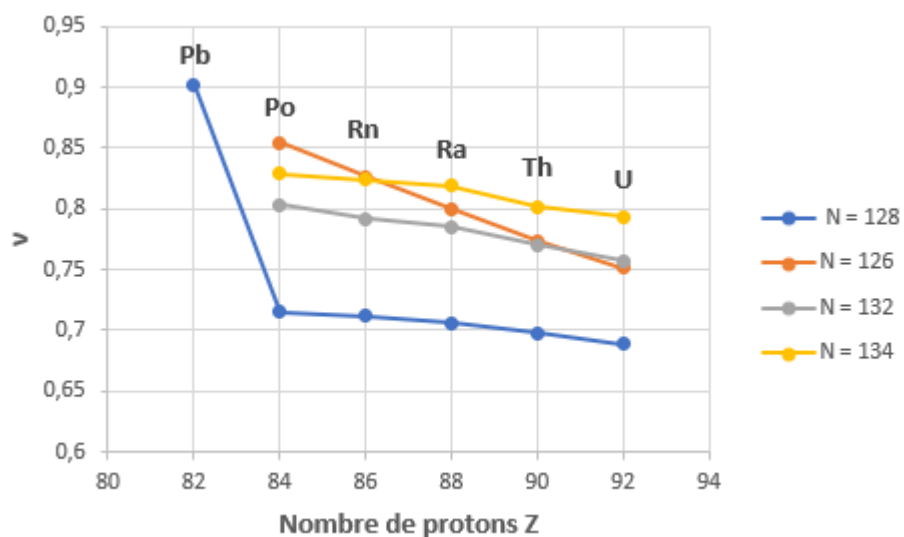


Figure 3.21 : Variation de  $\nu$  en fonction du nombre de protons  $Z$  pour le Pb, Po, Rn, Ra, Th et U ( $N = 126, 128, 132, 134$ ).

La figure 3.20 montre que pour les isotones  $N = 136$  et  $N = 138$ , la valeur minimale de l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\nu$  correspond  $Z = 90$  (Th). Lorsque  $Z = 90$ , la sous-couche nucléaire  $1f$  est pleine. Nous pouvons en déduire que la fermeture des coquilles nucléaires a pour effet de diminuer la valeur de  $\nu$ . Ce constat est confirmé car pour  $Z = 90$ , les deux isotones  $N = 136$  et  $N = 138$  ont les valeurs de  $\nu$  les plus faibles. Le courbe de l'isotone  $N = 138$  est au-dessus de celle de l'isotone  $N = 136$ , ce qui confirme que pour un même élément,  $\nu$  augmente lorsque  $N$  croît.

Sur la figure 3.21, on remarque que  $\nu$  décroît graduellement lorsque  $Z$  augmente pour les isotones  $N = 126$ ,  $N = 132$  et  $N = 134$ . Pour ces mêmes isotones, les valeurs les plus petites de  $\nu$  sont celles pour lesquelles  $Z = 90$  et  $Z = 92$  (3s) qui correspondent une fois de plus à la fermeture des coquilles nucléaires.

Au terme de cette partie, on observe que pour chaque isotone,  $\nu$  diminue lorsque  $Z$  augmente. Cette diminution peut être perturbée par les effets de fermeture des coquilles nucléaires. Il est important d'examiner l'allure du potentiel.

#### III.2.4 Allure du potentiel en fonction de $\nu$ .

Dans ce paragraphe, il est question d'observer les formes et allures du potentiel lorsque  $\nu$  varie. En rouge, l'énergie de la particule  $\alpha$ , la forme du potentiel en absence de formalisme fractionnaire est représentée en vert. La couleur noire donne la forme du potentiel pour la valeur  $\nu$  retenue.

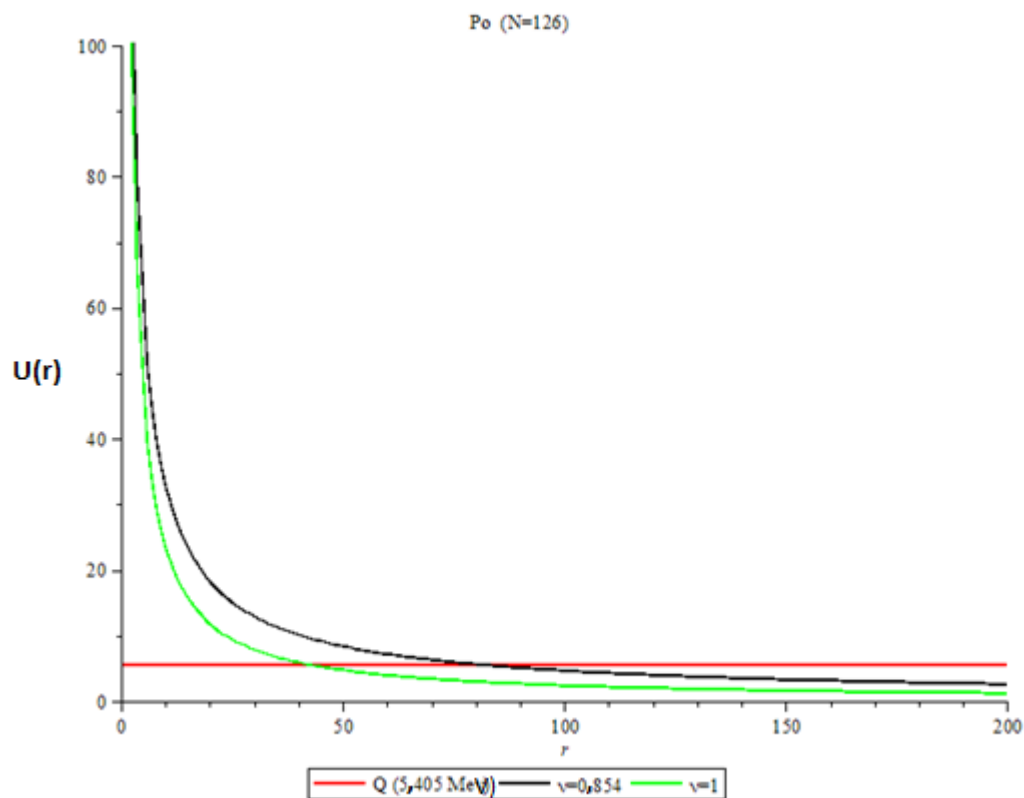


Figure 3.22 : Variations du potentiel en fonction de  $\nu$  pour le Po.

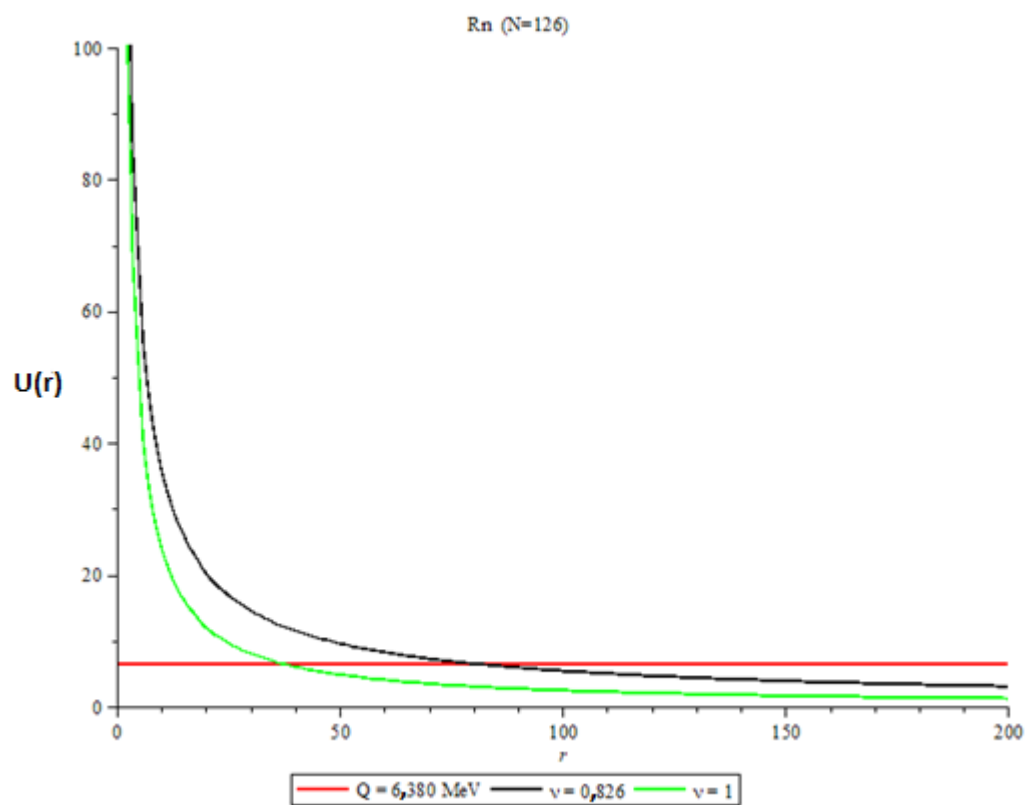


Figure 3.23 : Variations du potentiel en fonction de  $\nu$  pour le Rn.

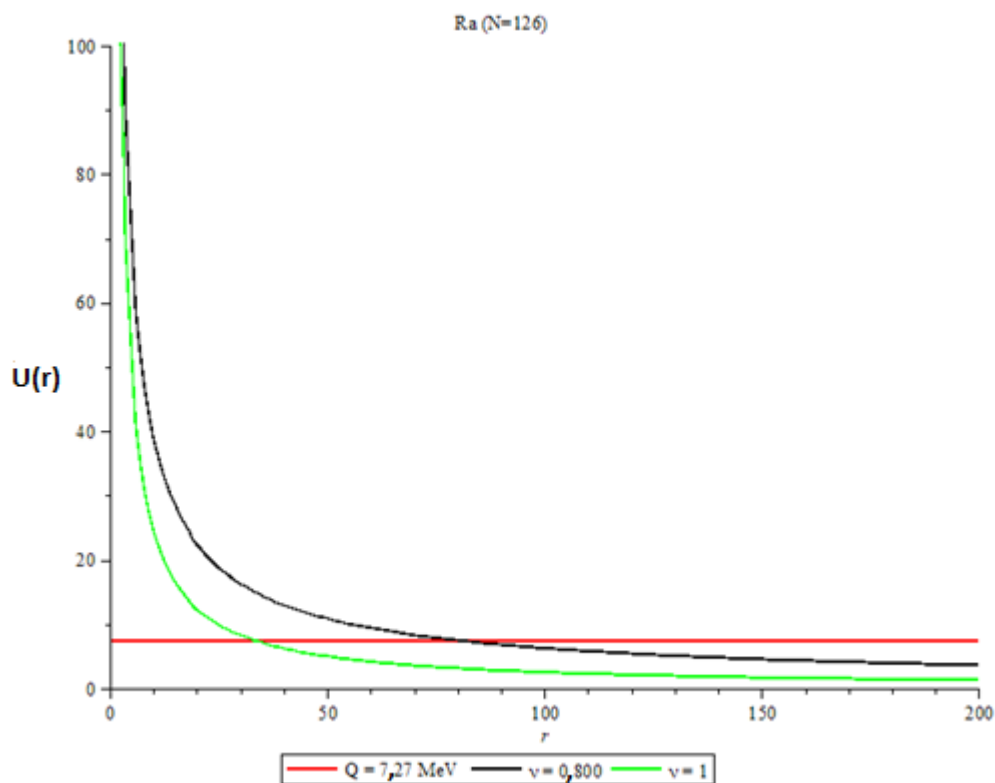


Figure 3.24 : Variations du potentiel en fonction de  $\nu$  pour le Ra.

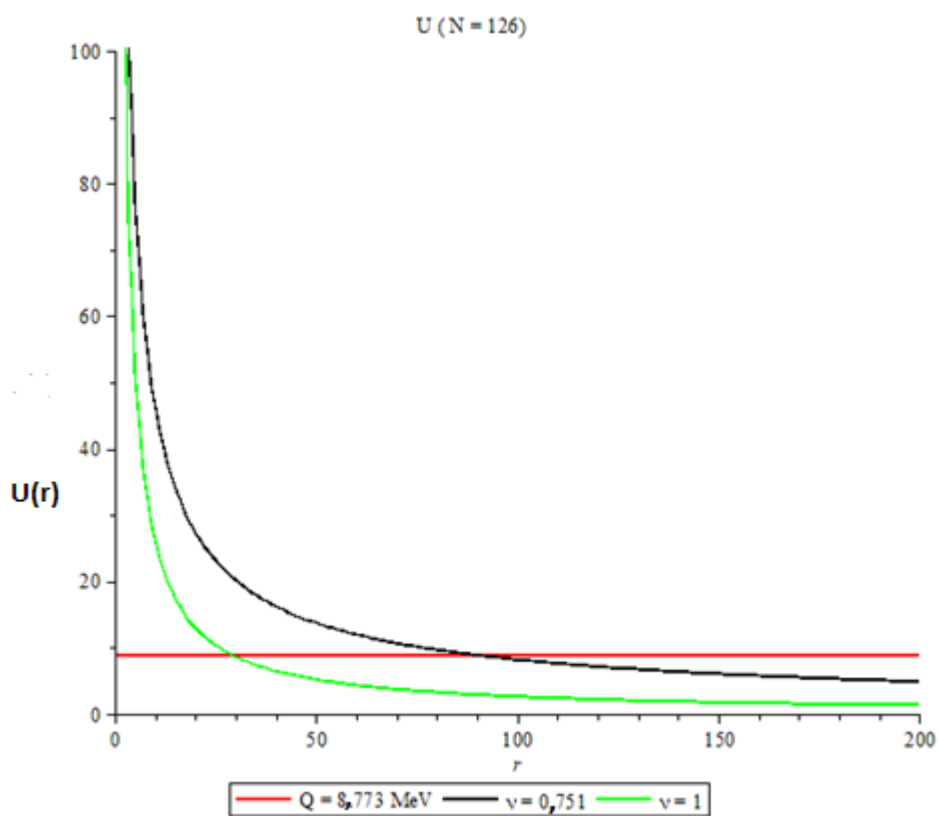


Figure 3.25 : Variations du potentiel en fonction de  $\nu$  pour le U.

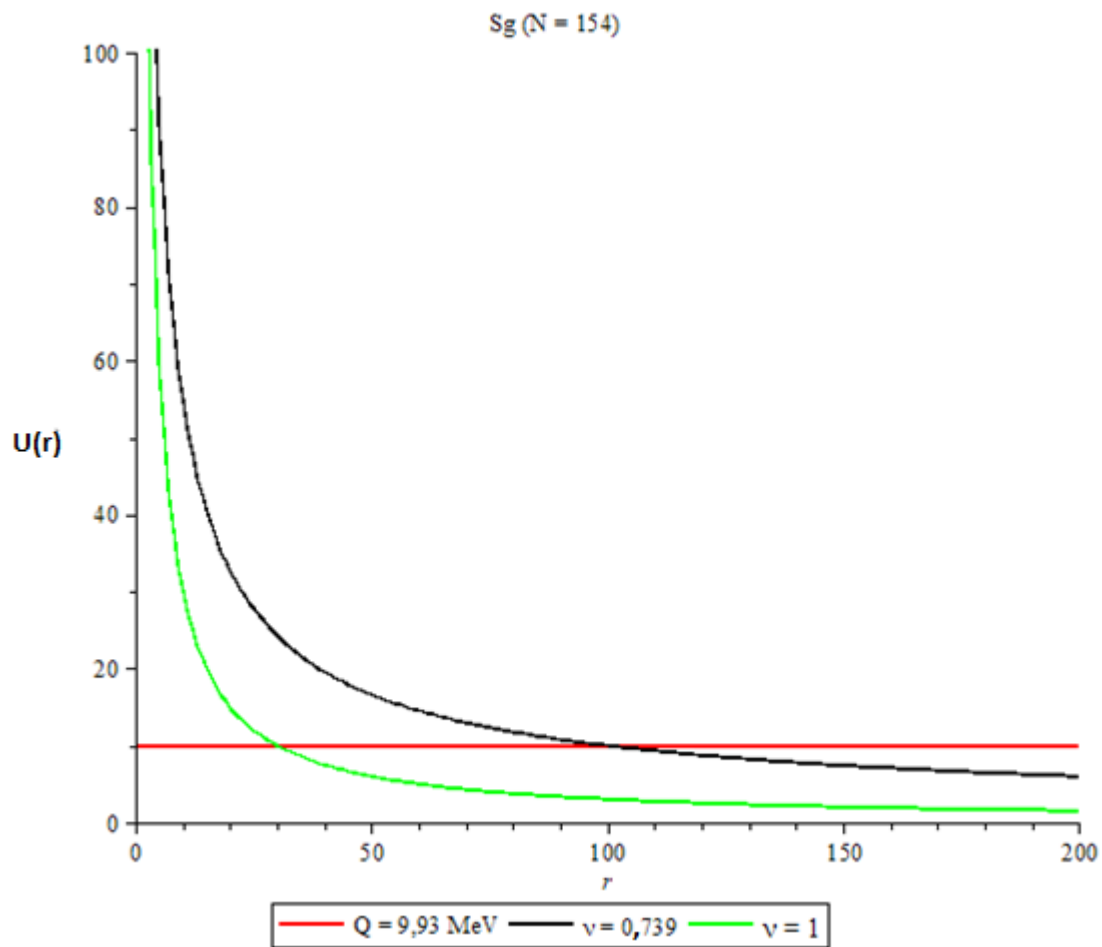


Figure 3.26 : Variations du potentiel en fonction de  $\nu$  pour le Sg.

Le potentiel garde la même forme quelque soit la valeur de  $\nu$ . Cependant, la largeur de la barrière varie avec le paramètre fractionnaire. De façon plus précise, le paramètre  $\nu$  a pour effet de rallonger la barrière.

### III.3 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mettre en évidence l'apport du calcul fractionnaire sur la détermination de la demi-vie radioactive de certains radionucléides émetteurs alpha. Ce calcul est testé sur les isotopes pairs-pairs de certains noyaux lourds et superlourds. Les résultats obtenus ont été comparés aux données expérimentales. En utilisant différentes valeurs de l'ordre de la dérivée fractionnaire, la forme du potentiel a été représentée pour différents noyau.

---

## CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

---

Le thème de travail est « **Etude théorique de l'effet fractionnaire sur la demi-vie radioactive alpha** », nous envisagions de déterminer l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\nu$  qui réduit l'écart entre les résultats du calcul et les données expérimentales, mais aussi de rechercher un lien entre  $\nu$  et la structure du noyau. Pour cela, nous avons bâti ce travail autour de trois (03) chapitres.

Le premier chapitre a présenté quelques généralités sur le processus de désintégration, les types désintégration, l'énergie de désintégration, la demi-vie radioactive, la loi de Geiger Nuttall. Nous avons ensuite abordé la théorie de Gamow sur la désintégration alpha.

Dans le deuxième chapitre, les outils essentiels sur calcul fractionnaire ont été présentés. Par la suite, nous avons ressorti la notion de dérivée fractionnaire conformable au sens de Caputo que nous avons utilisé pour la résolution de l'équation de Schrödinger modélisant le processus de désintégration alpha. En utilisant l'approximation WKB, nous avons déterminé l'expression de la transmission, puis la demi-vie radioactive en fonction du paramètre fractionnaire  $\nu$ .

Enfin dans le troisième chapitre, nous avons fait varier le paramètre  $\nu$  et avons retenu celle qui est le mieux en accord avec les résultats expérimentaux. Nous avons par la suite présenté les résultats pour les noyaux lourds de Pb, Po, Rn, Ra, Th, U et même des certains noyaux superlourds que nous avons ensuite comparé avec les données expérimentales. Pour les noyaux étudiés, les résultats de cette étude se déclinent comme suit. Le premier constat est que le traitement fractionnaire de l'équation de Schrödinger est en parfait accord l'expérience, qu'il contribue même à améliorer la précision du calcul de la demi-vie radioactive. Deuxièmement, il apparaît que le potentiel garde la même forme lorsque  $\nu$  varie. Cependant la largeur de celui-ci tend à s'allonger au fur et à mesure que la précision est bonne. Enfin, nous retenons que pour les isotopes d'un même élément, l'ordre de la dérivée fractionnaire croît avec le nombre de neutrons. Toutefois, cette augmentation est perturbée par les effets de fermeture des coquilles nucléaires.

En particulier, il apparait que lorsque  $N = 128$ ,  $\nu$  prend une valeur minimale ; ce qui indique que la désintégration alpha est plus probable pour les noyaux avec deux neutrons en dehors de la fermeture des coquilles nucléaires. Le paramètre fractionnaire a donc un lien d'opposition avec la transmission.

Ces observations montrent que l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\nu$  et la structure nucléaire ne peuvent pas être traités indépendamment. Les valeurs de  $\nu$  peuvent permettre d'obtenir des informations sur la structure nucléaire.

---

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [1] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, 251 John Wiley & Sons (1988).
- [2] G. Gamow and f. Zeist, *Zur Quanten theorie des Atomkernes*, *Physik* 51 204 (1928).
- [3] H.F. Zhang and G. Royer, *a particle preformation in heavy nuclei and penetration probability*, *Phys. Rev. C* 77, 054318 (2008).
- [4] D. N. Poenaru and M. Ivascu, *Cluster radioactivities*, *Rev. Roum., Phys.* 28 309 (1983).
- [5] E. C. Abdullah, E. Huseyin, O. BUKET and C. Huseyin, *A fractional calculus approach to investigate the alpha decay processes*, *Int. J. of Modern Physics*, 22 (2013).
- [6] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press (1999).
- [7] M. Caputo, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. II.*, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13(5), 529-539 (1967).
- [8] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, 204 Elsevier (2006).
- [9] H. Kragh, *Quantum Generations: A History of Physics in the Twentieth Century*, Princeton University Press (1997).
- [10] J. Smith, *Introduction à la physique nucléaire*, Éditions Scientifiques, 45 (2015).
- [11] T. ZerroukI, *Thèse de Doctorat*, Laboratoire de Centre de Sciences Nucléaires et des Sciences de la matière, Université Paris-Sud (2015).
- [12] Wikibooks contributors, *Le noyau atomique/Les désintégrations radioactives*, Wikibooks (15\_06\_2024)
- [13] <https://laradioactivite.com/articles/le-phenomene/lacaptureelectronique-2>
- [14] [https://fr.wikibooks.org/wiki/Le\\_noyau\\_atomique/Les\\_d%C3%A9sint%C3%A9grations\\_radioactives](https://fr.wikibooks.org/wiki/Le_noyau_atomique/Les_d%C3%A9sint%C3%A9grations_radioactives)
- [15] <https://laradioactivite.com/articles/le-phenomene/lacaptureelectronique-2>
- [16] [https://laradioactivite.com/articles/le-phenomene/radioactivite\\_gamma](https://laradioactivite.com/articles/le-phenomene/radioactivite_gamma)
- [17] Lopez-Martens, *Notes de Cours Physique Nucléaire Partie 2*, CNRS (2015).
- [18] V. Sharma, *Gamow theory of alpha decay*, Indian Institute of Technology Hyderabad (2021).
- [19] S. Lumb, *Note de cours Elements of Modern Physics*, rajdhanicollege (2019)
- [20] K. D. Krori and Samrat Dey, *Gamow's alpha-decay theory revisited*, Arxiv2112.09578v3 (2023).
- [21] H.F. Zhang and G. Royer, *a particle preformation in heavy nuclei and penetration probability*, *Phys. Rev. C* 77, 054318 (2008)
- [22] T. R. Mbezele, *Mémoire*, Laboratoire d'énergie, des systèmes électriques et électroniques, ENS YDE, (2019).
- [23] S. Zhang, *The Existence of a positive Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation*, *J. Math. Anal. Appl.*, 252, 804-812 (2000).
- [24] C. Yang and C. B. Zhai, *Uniqueness of Positive Solutions for a Fractional Differential Equation Via a Fixed Fixed Point Theorem of a Sum Opérateur*, *Elec. J. Diff. Eqs.*, 70, 1-8 (2012).
- [25] D. Cafagna, *Fractional Calculus: A mathematical tool from the past for present engineers*, *IEEE Industrial Electronics Magazine* 1 35-40 (2007).

- [26] S. Selçuk Bayin, Definition of Riesz Derivative and its Application to Space Fractional Quantum Mechanis, Middle East Technical University IAM Ankara (2016).
- [27] R. Khalil, M. Al Hornin, A. Yousef and M. Sababheh, *Some New Results on the New Conformable Fractional Calculus with Application Using D'Alambert Approach*, Appli. Math. 264 (2014).
- [28] B.M. Karnakov and V.P. Krainov, *WKB Approximation in Atomic Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2013).
- [29] H. Koura, *Phenomenological formula for alpha-decay half-lives*, journal of Nuclear Science and Technology, vol 49, 8 (2012).
- [30] X.J. Bao, Ho. Zhang, Ha. Zhang, G. Royer and J.Q. Li, *Systematical calculation of alpha decay half-lives with a generalized liquid drop model*, Hal (2013).
- [31] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, 86-89 John Wiley (1995).
- [32] K. D. Krori, *Philosophical Strands in Physics*, 73 Theoretical Physics Foundation (2020).
- [33] N. Bohr and J. A. Wheeler, *The mechanism of nuclear fission*, Physical Review 56 426-450 (1939).
- [34] G. J. Royer, *Alpha emission and spontaneous fission through quasi-molecular shapes*, Phys. G. 26 1149-1170 (2000)
- [35] R. G. Lovas, R. J. Liotta, A. Insolia, K. Verga and Delion, *Microscopic theory of cluster radioactivity*, D.S. Phys. Rep. 294 265-362 (1998).
- [36] M. Ismail, A. Y. Ellithi, M. M. Selim, N. Abou-Samra, and O. A. Mohamedien, *Calculs systématiques des demi-vies de radioactivité des agrégats dans les noyaux trans-plomb*, Phys. Scr. 95 075303 (2020).
- [37] H. F. Zhang, G. Royer and J. Q. Li, *Assault frequency and preformation probability of the  $\alpha$  emission process*, Phys. Rev. C 84 027303 (2011).
- [38] A. Ghatak and S. Lokanathan, *Quantum Mécanics: Theory and Applications*, 455 Springer Dordrecht (2004).
- [39] Z. Ren and G. Xu, *Reduced alpha transfer rates in a schematic model*, Phys. Rev. C 36, 456 (1987).
- [40] H. Horiuchi, *Microscopic study of clustering phenomena in nuclei*, Nucl. Phys. A522, 257c (1991).
- [41] R. W. Gurney and E. U. Condon, *Application of quantum mechanics to a simple model of the nucleus gives the phenomenon of radioactive disintegration*, Physical Review 33 (1929).
- [42] J. L. Staff, *Nuclear instruments ad methods in physics*, Junior lab reader (2005).
- [43] H. D. K. Edward M. Baum and T. R. Miller, *Nuclides and Isotopes: Chart of the Nuclides*, Lockheed Martin 16th ed. (2002).
- [44] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Prentice Hall, 2nd ed. (2005).
- [45] URL <http://atom.kaeri.re.kr/ton/>, *Table of nuclides* (2015).
- [46] C.J. Gallacher, J.O. Rasmussen, *Alpha-Decay hindrance-factor calculations*, J. Inorg. Nucl. Chem. 3, 333-344 (1957).
- [47] J. Foos, *Manuel de radioactivité*, Éd. Hermann Cote BU 539 725 FOO. (2011).
- [48] L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, Éd Hermann Cote ENSIC 539 VAL (1975).
- [49] D. Sivoukhine, *Cours de physique générale*, Tome 5 65-91, Éd Mir. Moscou (1989).
- [50] M. Caputo and M. Fabrizio, *A fractional model of cancer-immune system with Caputo and Caputo–Fabrizio derivatives*, Prog. Fract. Dier. Appl. 1 (2015).
- [51] H. Horiuchi, *Neutron-rich nuclei studied with AMD*, Phys. A522, 257c (1991).

- [52] R. B. Firestone, V. S. Shirley, C. M. Baglin, S. Y. Frank Chu and J. Zipkin, *Table of Isotopes*, 8th ed. (Wiley Interscience, New York, 1996).
- [53] R. G. Lovas, R. J. Liotta, A. Insolia, K. Varga and D. S. Delion, *Microscopic theory of cluster radioactivity*, Phys. Rep. 294, 265 (1998).
- [54] F. Garcia, O. Rodriguez, M. Goncalve, S. B. Duarte, O. A. P. Tavares and F. Guzman, *Alpha Decay and Nuclear Deformation: The Case for Favoured Alpha Transitions of Even-Even Emitters*, J. Phys. G 26, 755 (2000).
- [55] G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, and A. H. Wapstra, *The Nubase evaluation of nuclear and decay properties*, Nucl. Phys. A729, 3 (2003).
- [56] T. N. Ginter et al., *Confirmation of production of element 110 by the  $^{208}\text{Pb} (^{64}\text{Ni}, n)$  reaction*, Phys. Rev. C 67, 064609 (2003).
- [57] P. E. Hodgson and E. Betak, *Cluster emission, transfer and capture in nuclear reactions*, Phys. Rep. 374, 1 (2003).
- [58] R. D. Herzberg, *Nuclear isomers in super heavy elements*, J. Phys. G 30, R123 (2003).
- [59] Z. G. Gan, J. S. Guo, X. L. Wu, Z. Qin, H. M. Fan, X. G. Lei, H. Y. Liu, B. Guo, H. G. Xu, R. F. Chen, C. F. Dong, F. M. Zhang, H. L. Wang, C. Y. Xie, Z. Q. Feng, Y. Zhen, L. T. Song, P. Luo, H. S. Xu, X. H. Zhou, G. M. Jin and Z. Ren, *New isotope  $^{265}\text{Bh}$* , Eur. Phys. J. A 20, 385 (2004).
- [60] D. Seweryniak et al., *alpha decay of  $^{105}\text{Te}$* , Phys. Rev. C 73, 061301 (R) (2006).
- [61] A. P. Leppanen et al.,  *$\alpha$  decay studies of the nuclides  $^{218}\text{U}$  and  $^{219}\text{U}$* , Phys. Rev. C 75, 054307 (2007).
- [62] Yu. Ts. Oganessian et al., *Synthesis of the isotopes of elements 118 and 116 in the  $^{249}\text{Cf}$  and  $^{245}\text{Cm} + ^{48}\text{Ca}$  fusion reactions*, Phys. Rev. C 72 034611 (2005).
- [63] S. Hofmann et al., *Dynamics of  $\delta$ -dopant redistribution during heterostructure growth*, Eur. Phys. Rev. J. A 32, 251 (2007).
- [64] K. Morita et al., *Observation of second decay chain from 278113*, J. Phys. Soc. Jpn. 76, 045001 (2007).
- [65] A. Sobiczewski, Z. Patyk, S. Ćwiok, *Deformed superheavy nuclei*, Phys. Lett. B 224, 1 (1989)
- [66] E. U. Condon and R. W. Gurney, *Wave mechanics and radioactive disintegration*, Nature London 122, 439 (1928).
- [67] B. A. Brown, *New semi empirical formula for exotic cluster decay*, Phys. Rev. C 46, 811 (1992).
- [68] K. Varga, R. G. Lovas and R. J. Liotta, *A simple relation for alpha decay half-lives*, Phys. Rev. Lett. 69, 37 (1992).
- [69] B. Buck, A. C. Merchant and S. M. Perez, *Half-Lives of favored alpha Decays from nuclear ground states*, At. Data Nucl. Data Tables 54, 53 (1993).
- [70] G. Roger, *Alpha emission and spontaneous fission through quasi-molecular shapes* J. Phys. G 26 1149 (2000).
- [71] R. K. Gupta, M. Balasubramaniam, C. Mazzocchi, M. LaCommara, W. Scheid, *Decay of excited  $^{116}\text{Ba}^*$  formed in the  $^{58}\text{Ni}+^{58}\text{Ni}$  reaction via the emission of intermediate mass fragments*, Phys. Rev. C 65, 024601 (2002).
- [72] S. B. Duarte et al., *Half-lives of spontaneous nuclear decay processus*, Data Nucl. Data Tables 80, 235 (2002).
- [73] P. Roy Chowdhury, D. N. Basu, and C. Samanta,  *$\alpha$  decay chains from element 113*, Phys. Rev. C 75, 047306 (2007).
- [74] H. F. Zhang, W. Zuo, J. Q. Li and Royer, *Theoretical and experimental  $\alpha$  decay half-lives of the heaviest odd- $Z$  elements and general predictions*, Phys. Rev. C 74, 017304 (2006).

- [75] P. Mohr, *Potentiels du noyau  $\alpha$ , demi-vies de désintégration  $\alpha$  et fermetures de couches pour les noyaux superlourds*, Phys. Rev. C 73, 031301 (2006).
- [76] C. Xu and Z. Z. Ren, *Global calculation of  $\alpha$ -decay half-lives with a deformed density-dependent cluster model*, Phys. Rev. C 74, 014304 (2006).
- [77] D. N. Poenaru, I. H. Plonski, and W. Greiner,  *$\alpha$ -decay half-lives of superheavy nuclei*, Phys. Rev. C 74, 014312 (2006).
- [78] J. C. Pei, F. R. Xu, Z. J. Lin, and E. G. Zhao,  *$\alpha$ -decay calculations of heavy and superheavy nuclei using effective mean-field potentials*, Phys. Rev. C 76, 044326 (2007).
- [79] H. J. Mang, *Microscopic theory of cluster radioactivity*, Phys. Rev. 119, 1069 (1960).
- [80] A. Arima and S. Yoshida, *Alpha-particle strengths from the  $^{16}\text{O} (^6\text{Li}, d) ^{20}\text{Ne}$  reaction*, Nucl. Phys. A219, 475 (1974).
- [81] T. Fließback and H. J. Mang,  *$\alpha$ -decay calculations of heavy and superheavy nuclei using effective mean-field potentials*, Nucl. Phys. A263, 75 (1976).
- [82] Y. K. Ganbhir, P. Ring and P. Schuck, *Nuclei: A Superfluid Condensate of  $\alpha$  Particles Study within the Interacting-Boson Model*, Phys. Rev. Lett. 51, 1235 (1983).
- [83] G. G. Dussel, A. J. Fendrik and C. Pomar, *Four-body correlations in heavy nuclei*, Phys. Rev. C 34, 1969 (1986).
- [84] Z. Ren and G. Xu, *Evidence of  $\alpha$  correlation from binding energies in medium and heavy nuclei*, Phys. Rev. C 38, 1078 (1988).
- [85] G. Ropke, A. Schnell and P. Schuck, *Four particle condensate in strongly coupled fermion systems*, Phys. Rev. Lett. 80, 3177 (1998).
- [85] N. G. Kelkar, H. M. Castaneda and M. Nowakowski, *Quantum time scales in alpha tunneling*, arXiv 1903v2 (2009).
- [87] D. S. Delion, A. Insolia and R. J. Liotta, *New single particle basis for microscopic description of decay processes*, Phys. Rev. C 54, 292 (1996).
- [88] K. Varga, R. G. Lovas and R. J. Liotta, *Cluster-configuration shell model for alpha decay*, Nucl. Phys. A550, 421 (1992).
- [89] G. Royer and B. Remaud, *Static and dynamic fusion barriers in heavy-ion reactions*, Nucl. Phys. A444, 477 (1985).
- [90] M. M. Sharma, A. R. Farhan and G. Munzenberg, *Decay properties of superheavy elements*, Phys. Rev. C 71, 054310 (2005).
- [91] G. Royer and H. F. Zhang, *Recent  $\alpha$  decay half-lives and analytic expression predictions*, Phys. Rev. C 77, 037602 (2008).
- [92] X. H. Zhong, L. Li and P. Z. Ning, *Size Effects in Heavy Ions Fragmentation*, arXiv 0410083v2 (2003).
- [93] B. B. F. Atangana, *Mémoire de Master 2*, Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique, Département de Physique, Université de Yaoundé 1, (2023).
- [94] A. Katarkalah, *Thèse de Doctorat*, Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique, Département de Physique, Université de Yaoundé 1 (2023).
- [95] V. P. Ndzono, *Mémoire de Master 2*, Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique, Département de Physique, Université de Yaoundé 1, (2021).