RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ 1
Faculté des Sciences
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****
B.P. 812 YAOUNDE 1
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
Faculty of Sciences
****
DEPARTEMENT OF MATHEMATICS
****
P.O. BOX 812 YAOUNDE 1
****

GRANDS OPERATEURS DE HANKEL ENTRE LES ESPACES DE FOCK

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse et Applications

Option : Analyse Classique

Par :

SOLANGE BRIDGITTE DIFO

Licenciée en Mathématiques

Matricule :

17K2200

Sous la direction du :

Pr. TCHOUNDJA EDGAR

Maître de conférences

Faculté des Sciences – Université de Yaoundé I

ANNEE ACADEMIQUE 2023-2024

GRANDS OPERATEURS DE HANKEL ENTRE LES ESPACES DE FOCK

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de

l'obtention du MASTER II de Mathématiques de l'Université de Yaoundé I

par :

SOLANGE BRIDGITTE DIFO

Licenciée en Mathématiques Pures

Matricule : 17K2200

Sous la direction du :

Pr. TCHOUNDJA EDGAR LANDRY

Maître de Conférences à l'Université de Yaoundé I

Année Académique : 2023-2024

✠ Dédicace ✠

Ce mémoire est dédié à ma mère :

KEYA Jacqueline

✠ REMERCIEMENTS ✠

J'exprime ma profonde gratitude envers tous ceux qui m'ont aidés de près ou de loin jusqu'à la présentation de ce travail. Je tiens à remercier de façon particulière :

- ⋆ Le Dieu tout puissant pour son soutien durant toute cette période.
- ⋆ Mon directeur de mémoire Professeur Tchoundja Edgar à qui je dois le sujet de ce mémoire, pour sa disponibilité tout au long de la rédaction de ce travail, pour son attention, sa simplicité et ses précieux conseils.
- ⋆ Le Professeur Békollè David pour sa présence, sa disponibilité et ses enseignements qui m'ont donné une nouvelle perception plus simple des mathématiques.
- ⋆ Le Professeur et Chef de département de Mathématiques Ayissi Raoul pour l'aide qu'il m'a apportée et ses conseils.
- ⋆ Les enseignants du département de Mathématiques pour la formation de qualité qu'ils offrent et pour tous les efforts consentis pour nous soutenir.
- ⋆ Ma mère Madame Keya Jacqueline et mes frères et sœurs, qui ont toujours crues en moi, pour leur soutien et leur amour et à mon défunt père pour l'éducation de qualité qu'il m'a offert.
- ⋆ Mes camarades de promotion et les aînés doctorants pour leur accompagnement.
- ⋆ Toute la famille Chrétienne pour leur soutien et leur conseil.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent mémoire est une œuvre rédigée par la candidate et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Tous les documents exploités à cette fin sont cités dans la Bibliographie.

Signature de la candidate

Solange DIFO

✠ Table des matières ✠

Dédicace **i**

REMERCIEMENTS **ii**

Déclaration sur l'honneur **iii**

Résumé **vi**

Abstract **vii**

INTRODUCTION GÉNÉRALE **1**

1 PRÉLIMINAIRES **3**

1.1 Rappels sur la théorie de la mesure et de l'intégration 3

1.1.1 Espace mesurable-Application mesurable 3

1.1.2 Mesures positives 4

1.2 Espaces L^p et l^p 5

1.2.1 Espaces L^p 6

1.2.2 Espaces l^p 9

1.3 Rappels d'analyse fonctionnelle 11

1.3.1 Espace de Hilbert 11

1.3.2 Opérateurs dans les espaces de Hilbert 14

1.3.2.1 Définitions 14

1.3.2.2 Spectre d'un opérateur compact 18

1.4 Rappels d'analyse complexe 19

1.4.1 Holomorphie et analyticité 20

1.4.2 Familles normales 23

1.4.3 Définition et propriétés du noyau reproduisant d'un espace de Hilbert . 23

2 DÉFINITION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ESPACES DE FOCK 29

2.1 Introduction 29

2.2 Définitions et premières propriétés 29

2.3 Structure Hilbertienne de F_α^2 33

2.3.1 Base Hilbertienne de F_α^2 33

2.3.2 Projection orthogonale 38

2.4 Sous-espaces denses dans F_α^p 41

2.5 Dualité des espaces de Fock 43

2.6 Décomposition atomique 48

3 CARACTÉRISATION DES SYMBOLES f POUR LESQUELS H_f EST BORNE (resp. COMPACT) 59

3.1 Introduction 59

3.2 Mesures (p, q)-Carleson 59

3.3 Propriétés de H_f de F_α^p vers L_α^q pour $1 \leq p, q < +\infty$ 61

3.3.1 Caractérisation des symboles f pour lesquels H_f de F_α^p vers L_α^q est borné (resp. compact) pour $1 \leq p \leq q < +\infty$ 63

3.3.2 Caractérisation des symboles f pour lesquels H_f de F_α^p vers L_α^q est borné (resp. compact) pour $1 \leq q < p < +\infty$ 72

4 CLASSES DE SCHATTEN DE H_f DE F_α^2 VERS L_α^2 81

4.1 Introduction 81

4.2 Résultats préliminaires 81

4.3 Définitions et propriétés 83

4.4 Caractérisation des symboles f pour lesquels H_f de F_α^2 vers L_α^2 est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$ pour $1 \leq p < +\infty$ 85

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES 91

Bibliographie 92

✠ Résumé ✠

Notre travail porte essentiellement sur l'étude des grands opérateurs de Hankel entre les espaces de Fock. Dans ce mémoire, nous établissons tout d'abord quelques propriétés des espaces de Fock F^p_α, ensuite, pour $1 \leq p, q < +\infty$, nous établissons les théorèmes caractérisant les symboles f à valeurs complexes pour lesquels, le grand opérateur de Hankel H_f, s'étend en un opérateur borné (resp. compact) de F^p_α vers L^q_α. Enfin, nous caractérisons les symboles f pour lesquels H_f de F^2_α vers L^2_α est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, $1 \leq p < +\infty$.

Expressions clés : Espace de Fock, Grand opérateur de Hankel, Classe de Schatten.

✠ Abstract ✠

Our work essentially focuses on the study of big Hankel operators between Fock spaces. In this master dissertation, we firstly establish some properties of Fock spaces, and secondly, for all possible $1 \leq p, q < \infty$, we characterize the complex-valued symbols f for which the induced Hankel operators H_f are bounded (or compact) from F^p_α to L^q_α. In addition, we discuss the Schatten class membership of H_f from the Hilbert space F^2_α to L^2_α.

Key phrases : Fock space, Big Hankel operator, Schatten class.

✠ INTRODUCTION GÉNÉRALE ✠

Les sous-espaces des fonctions analytiques inclus dans L^p, parmi lesquels les espaces de Hardy, les espaces de Bergman, et les espaces de Fock, ont été largement étudiés durant ces dernières décennies. L'espace de Fock est une construction algébrique utilisée en mécanique quantique pour construire l'espace des états quantiques d'un nombre variable ou inconnu de particules identiques à partir d'une seule particule d'un espace de Hilbert donné. Dans le formalisme mathématique, on le définit comme suit. Pour $\alpha > 0$, $p > 0$ et $dA(z)$ la mesure de surface sur $\mathbb{C}$, l'espace de Fock, $F^p_\alpha(\mathbb{C})$, est le sous-espace des fonctions entières qui sont dans $L^p_\alpha(\mathbb{C})$, où l'espace de Lebesgue $L^p_\alpha(\mathbb{C})$ désigne l'espace des fonctions mesurables f sur $\mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|^p_{p,\alpha} := \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|^p dA(z) < +\infty.$$

Pour $p > 0$, $F^p_\alpha(\mathbb{C})$ est un sous espace de $L^p_\alpha(\mathbb{C})$. En particulier, pour $p = 2$, $F^2_\alpha(\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert et il existe donc un projecteur P_α appelé projecteur de Bergman, qui envoie $L^2_\alpha(\mathbb{C})$ dans $F^2_\alpha(\mathbb{C})$ et on note par K_α son noyau reproduisant. De plus, pour $\alpha > 0$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on montre que P_α s'étend en un opérateur borné de L^p_α vers F^p_α.
Ainsi, étant donné une fonction mesurable f sur $\mathbb{C}$ telle que $fk_z \in \bigcup_{p\geq 1} L^p_\alpha(\mathbb{C})$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $k_z(w) = \frac{K_\alpha(w,z)}{K_\alpha(z,z)}$ pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, on appelle grand opérateur de Hankel, H_f, de symbole f sur $\mathbb{C}$, l'opérateur défini sur un sous espace dense de $F^p_\alpha(\mathbb{C})$ par :

$$H_f g(z) = (I - P)(fg)(z).$$

Soient X un espace de Hilbert séparable et T un opérateur compact sur X. Les valeurs singulières de T notées μ_n (avec $n \in \mathbb{N}$) sont les racines carrées des valeurs propres de l'opérateur positif T^*T, où T^* désigne l'adjoint de T. Pour $0 < p < +\infty$, on définit la $p-$ième classe de Schatten notée $\mathcal{S}_p$ de X par

$$\mathcal{S}_p = \left\{ T \in \mathcal{L}(X) \text{ compact et tel que} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu_n|^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

où $\mathcal{L}(X)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires continues sur X.
Pour $1 \leq p < +\infty$, on montre que $\mathcal{S}_p$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu_n|^p \right)^{1/p}.$$

Il est question pour nous dans ce travail de caractériser les symboles (fonctions) complexes f pour lesquels H_f de F^p_α vers L^q_α, pour $1 \leq p, q < +\infty$, s'étend en un opérateur borné (resp. compact) et de caractériser les symboles f pour lesquels H_f compact de F^2_α vers L^2_α est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, $1 \leq p < +\infty$.

Dans l'élaboration de ce travail, nous adoptons le plan suivant :

- Au chapitre 1, nous rappelons les notions importantes pour la compréhension des résultats établis dans les chapitres suivants.
- Au chapitre 2, nous définissons et établissons quelques propriétés des espaces de Fock en mettant une emphase sur F^p_α avec $1 \leq p \leq +\infty$. Nous montrons aussi que pour $\alpha > 0$ et $1 \leq p \leq +\infty, P_\alpha$ s'étend en un opérateur borné de L^p_α vers F^p_α.
- Au chapitre 3, pour $0 < p, q < +\infty$, nous définissons les mesures (p, q)-Carleson pour F^p_α et nous établissons les grands théorèmes caractérisant les symboles f à valeurs complexes pour lesquels, H_f, s'étend en un opérateur borné (resp. compact) de F^p_α vers L^q_α pour $1 \leq p, q < +\infty$.
- Au chapitre 4, nous établissons quelques propriétés des classes de Schatten et nous caractériserons les symboles f à valeurs complexes pour lesquels H_f de F^2_α vers L^2_α est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, $1 \leq p < +\infty$.

Ce travail trouve de nombreuses applications en optimisation, en physique quantique, en analyse harmonique sur le groupe de Heisenberg et dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

★ ★ Chapitre Un ★ ★

PRÉLIMINAIRES

Dans cette partie, nous rappelons la plupart des notions utiles pour l'élaboration des résultats obtenus dans la rédaction de ce travail. Il s'agit notamment des notions sur la théorie de la mesure et l'intégration, la théorie des opérateurs en analyse fonctionnelle et l'analyse complexe. Pour plus de détails, on peut consulter [6] aux chapitres 4, 5 et 6 et [26].

1.1. Rappels sur la théorie de la mesure et de l'intégration

1.1.1. Espace mesurable-Application mesurable

Définition 1.1.1. (σ-algèbre)

Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ une collection de sous ensembles de X. On dit que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre ou tribu si

(a) $X \in \mathcal{A}$,

(b) Quels que soient $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \setminus B \in \mathcal{A}$,

(c) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \in \mathcal{A}$.

Rappels 1.1.2. Soit $M \subset \mathcal{P}(X)$. On appelle $\sigma-$algèbre engendrée par M la plus petite $\sigma-$algèbre de parties de X contenant M. C'est l'intersection de toutes les $\sigma-$algèbres contenant M.

Définition 1.1.3. (σ-algèbre de Borel)

Soit X un espace topologique. La σ-algèbre engendrée par les ouverts de X est appelée σ-algèbre des boréliens de X notée $\mathcal{B}_X$.

Définition 1.1.4. (Espace mesurable)

On appelle espace mesurable tout couple $(X, \mathcal{A})$, où X est un ensemble et $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de X.

Définition 1.1.5. (Ensemble mesurable)
Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, on dit que $A \subset X$ est un ensemble mesurable si $A \in \mathcal{A}$.

Définition 1.1.6. (Fonction mesurable)
Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est mesurable si l'image réciproque de tout ensemble mesurable de $\mathbb{C}$ est mesurable. C'est-à-dire pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

1.1.2. Mesures positives

Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de parties de X.

Définition 1.1.7. (Mesure positive)
Si $\mathcal{A}$ est un anneau de parties de X, on appelle mesure positive sur $\mathcal{A}$ toute application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ différente de l'application constante $+\infty$ et qui est telle que, pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \in \mathcal{A}$, on ait

$$\mu\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit que la mesure μ est finie si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
On dit que la mesure μ est σ-finie lorsqu'il existe une famille dénombrable $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ et $\mu(X_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.1.8. (Espace mesuré)
On appelle espace mesuré tout triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$, où $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et μ une mesure positive sur la σ-algèbre $\mathcal{A}$.

Définition 1.1.9. (Mesure de Borel)
Une mesure borélienne ou mesure de Borel est une mesure positive définie sur la tribu borélienne d'un espace topologique.

Définition 1.1.10. On note par $\mathbb{K}$ le corps de base égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis et f une application mesurable sur l'espace mesuré produit $(X_1 \otimes X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$.
On définit pour $x \in X_1$,

$$\begin{array}{rccc} f_x : & X_2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

et pour $y \in X_2$,

$$\begin{array}{cccc} f_y : & X_1 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Théorème 1.1.11. ***(Théorème de Fubini)***

Soient $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis et f une fonction mesurable sur l'espace mesuré produit $(X_1 \otimes X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Alors,

(1) f est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable si et seulement si :

$$\int_{X_1} d\mu_1(x) \int_{X_2} |f(x,y)| d\mu_2(y) < +\infty \, ,$$

ou si et seulement si

$$\int_{X_2} d\mu_2(y) \int_{X_1} |f(x,y)| d\mu_1(x) < +\infty \, ,$$

(2) Dans ce cas :

(a) $$\begin{cases} f_x \quad est \quad \mu_2 - \text{ intégrable pour } \quad \mu_1 - \text{ presque tout } \quad x \in X_1 \\ f_y \quad est \quad \mu_1 - \text{ intégrable pour } \quad \mu_2 - \text{ presque tout } \quad x \in X_2. \end{cases}$$

(b) Les fonctions $F : X_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, $G : X_2 \longrightarrow \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_{X_2} f(x,y) d\mu_2(y) \\ G(y) = \displaystyle\int_{X_1} f(x,y) d\mu_1(x) \end{cases}$$

sont presque partout définies sur X_1 et X_2 respectivement, y sont mesurables, intégrables et on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int\int_{X_1 \otimes X_2} f(x,y) d\mu_1 \otimes d\mu_2(x,y) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

1.2. Espaces L^p et l^p

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats fondamentaux sur les espaces L^p que nous utiliserons au chapitre 2 pour établir les propriétés basiques des espaces de Fock et aux chapitres 3 et 4 pour établir les preuves des résultats qui y seront énoncés.

1.2.1. Espaces L^p

Définition 1.2.1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $0 < p < +\infty$,

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty \right\}.$$

$$L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable}, \exists\, C > 0,\ |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } X \}.$$

Où p.p. signifie presque partout.

On note en général L^p ou $L^p(X)$ ou $L^p(\mu)$ ou $L^p(X, d\mu)$ pour désigner $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité et on pose

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.2.2. ***(Inégalité de Hölder)***

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. *Soient $p > 1$ et $q > 1$ deux réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour tous $f \in L^p$ et $g \in L^q$, fg est intégrable et on a l'inégalité de Hölder*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{1.1}$$

2. *Si μ est une mesure de probabilité, $0 < p \leq 1$ et $f \in L^1$, alors $f \in L^p$ et on a*

$$\left[\int_X |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_X |f|\, d\mu \tag{1.2}$$

Théorème 1.2.3. ***(Formule de Minkowski)***

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

- *Si $1 \leq p \leq +\infty$, alors pour tous $f, g \in L^p$, on a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{1.3}$$

- *Si $0 < p < 1$, alors pour tous $f, g \in L^p$, on a*

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1-p}{p}} (\|f\|_p + \|g\|). \tag{1.4}$$

Propriété 1.2.4. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Pour $1 \leq p < +\infty$, L^p est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_p$ définie pour tout $f \in L^p$ par :*
$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

2. *Pour $0 < p < 1$, L^p est un espace métrique muni de la distance d définie pour tous $f, g \in L^p$ par*
$$d(f,g) := \|f-g\|_p^p.$$

3. *Pour $p = +\infty$, L^∞ est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie pour tout $f \in L^\infty$ par :*
$$\|f\|_\infty := \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } X\}.$$

Théorème 1.2.5. ***(Fischer-Riesz)***

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, L^p est un espace de Banach.

Théorème 1.2.6. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$.*

Soient $(f_n)_n$ une suite dans L^p et $f \in L^p$ tels que $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ et une fonction $h \in L^p$ telle que :

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *presque partout sur X,*

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *pour tout k, presque partout sur X.*

Théorème 1.2.7. *Supposons que $(X, \mathcal{A})$ soit un espace mesurable séparable (c'est-à-dire X contient une partie dénombrable partout dense dans X). Alors $L^p(X)$ est séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Théorème 1.2.8. ***(Théorème de représentation de Riesz pour les espaces L^p)***

Pour $1 \leq p < +\infty$, le dual topologique $(L^p)'$ (c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur L^p) de L^p est isométrique à L^q, où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Plus précisément, pour tout $T \in (L^p)'$, il existe une unique fonction $u \in L^q$ telle que
$$T(f) = \langle f, u\rangle = \int_X f(x)\overline{u(x)}\, d\mu(x) \quad \forall\, f \in L^p.$$

De plus, par dualité, on a :

$$\|T\|_{(L^p)'} = \|u\|_q = \sup_{\|f\|_p=1} \left| \int_X f(x)\overline{u(x)}\, d\mu(x) \right|.$$

Ainsi, on identifie $(L^p)'$ *à* L^q *via l'isomorphisme isométrique suivante :*

$$\begin{array}{ccccccccc} \langle\cdot,\cdot\rangle & : & L^q & \longrightarrow & (L^p)' & & & & \\ & & u & \longmapsto & \langle\cdot,u\rangle & : & L^p & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & & & & & f & \longmapsto & \langle f,u\rangle = \int_X f(x)\overline{u(x)}\, d\mu(x) \end{array}$$

Théorème 1.2.9. ***(Schur, M. Riesz, Thorin)***

Supposons que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *soit un espace mesuré tel que* $\mu(X) < +\infty$ *et que* $T : L^1(X) \longrightarrow L^1(X)$ *est un opérateur linéaire borné avec la norme*

$$M_1 = \|T\|_{\mathcal{L}(L^1,L^1)}\,.$$

Supposons en plus que $T : L^\infty(X) \longrightarrow L^\infty(X)$ *soit un opérateur linéaire borné avec la norme*

$$M_\infty = \|T\|_{\mathcal{L}(L^\infty,L^\infty)}\,.$$

Alors T *est un opérateur linéaire borné de* $L^p(X)$ *vers* $L^p(X)$ *pour tout* $1 < p < +\infty$*, et sa norme* M_p *satisfait*

$$M_p \leq M_1^{\frac{1}{p}} M_\infty^{\frac{1}{q}},$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.2.10. ***(Lemme de Schur)***

Soient $H(x,y)$ *un noyau positif et*

$$Tf(x) = \int_X H(x,y)f(y)d\mu(y)$$

l'opérateur intégral associé. Soit $1 < p < +\infty$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. S'il existe une fonction positive* $h(x)$ *et des constantes positives* C_1 *et* C_2 *telles que*

$$\int_X H(x,y)h(y)^q d\mu(y) \leq C_1 h(x)^q, \quad x \in X,$$

et

$$\int_X H(x,y)h(x)^p d\mu(x) \leq C_2 h(y)^p, \quad y \in X,$$

alors l'opérateur T est borné sur $L^p(X, d\mu)$. De plus, la norme de T sur $L^p(X, d\mu)$ vérifie

$$\|T\| \leq C_1^{\frac{1}{q}} C_2^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.2.11. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)***
Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite de fonctions μ-intégrables qui converge simplement μ-presque partout vers une fonction f et telle qu'il existe une fonction $g \in L^1$ telle que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ-presque partout. Alors, $f \in L^1$ et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f d\mu$$

ou encore

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Lemme 1.2.12. (Lemme de Fatou)
Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de L^1 telles que :

(a) Pour tout n, $f_n \geq 0$ presque partout.

(b) $\sup_n \int f_n d\mu < +\infty$.

Pour tout $x \in X$, on pose $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq \infty$. Alors $f \in L^1$ et

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

1.2.2. Espaces l^p

Définition 1.2.13. Soit $0 < p < +\infty$.
L'espace l^p désigne l'espace des suites à valeurs réelles ou complexes $x = (x_n)_n$ telles que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

L'espace l^∞ est l'espace vectoriel des suites (à valeurs réelles ou complexes) bornées. Il est muni de la norme définie pour tout $x = (x_n)_n \in l^\infty$ par :

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

Théorème 1.2.14. *(a) Pour tous $1 \leq p < +\infty$ et toute, suite, $(a_k)_k \in l^p$ et $(b_k)_k \in l^p$ on a :*

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.5}$$

(b) Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l^p est un espace de Banach.

(c) Pour $1 < p < +\infty$ et pour toutes suites $(a_k)_k \in l^p$, $(b_k)_k \in l^q$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \bar{b}_k\right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{1.6}$$

(d) Pour $0 < p \leq 1$ et $(a_k)_k \in l^p$, on a $(a_k)_k \in l^1$ et

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right|^p \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^p \tag{1.7}$$

Proposition 1.2.15. *Soit $1 \leq p < +\infty$. Pour tout $\phi \in (l^p)'$, il existe un unique $u \in l^q$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) tel que quel que soit $x \in l^p$,*

$$\langle \phi, x\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{u_k} x_k.$$

De plus, $\|u\|_q = \|\phi\|_{(l^p)'}$.

Rappels 1.2.16. On appelle fonction gamma la fonction notée Γ et définie sur $]0, +\infty[$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Elle possède les propriétés suivantes :

(a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$;

(b) $\Gamma(1) = 1$;

(c) La fonction $\ln \Gamma$ est une fonction convexe sur $]0, +\infty[$.

Les propriétés (a) et (b) impliquent que $\Gamma(n+1) = n!$.

1.3. Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans cette section, nous rappelons quelques notions et résultats d'analyse fonctionnelle, notamment les notions : d'espace de Hilbert, de projection orthogonale sur un sous-ensemble fermé d'un espace de Hilbert, d'opérateurs bornés et d'opérateurs compacts. Les preuves des résultats énoncés se trouvent dans [5] et [6].

1.3.1. Espace de Hilbert

Définition 1.3.1. Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
Un produit scalaire sur H (ou forme hermitienne définie positive) est une application que nous notons $\langle , \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :
Pour tout $x, y, z \in H, \lambda \in \mathbb{C}$,

(a) $\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$;

(b) $\langle x, y + \lambda z\rangle = \langle x, y\rangle + \bar{\lambda}\langle x, z, \rangle$;

(c) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(d) $\langle x, x\rangle \geq 0$;

(e) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

L'application notée $||.||$ définie sur H par $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur H. C'est la norme associée au produit scalaire $\langle , \rangle$.
L'inégalité de Cauchy-Schawrz se traduit comme suit : pour tout $x, y \in H$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \, ||y|| \, .$$

Définition 1.3.2. Un espace préhilbertien est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. On le note $(H, \langle , \rangle)$ ou tout simplement H.
Si en plus H est complet pour la norme associée au produit scalaire $\langle , \rangle$, alors on dit que le couple $(H, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.3.3. Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien H sont dits orthogonaux lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.

Si A est une partie non vide de H, on appelle orthogonal de A, et on note $A^{\perp}$, l'ensemble défini par :

$$A^{\perp} = \{x \in H \ : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in A\}.$$

Définition 1.3.4. Soit H un espace préhilbertien et soit I un ensemble non vide d'indices. La famille $\{e_i\}_{i\in I}$ d'éléments de H est dite orthogonale lorsque $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tout $i \neq j$.
De plus, si elle vérifie

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases},$$

alors elle est dite famille orthonormale ou orthonormée.

Théorème 1.3.5. ***(Projection orthogonale)***
Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de H. Pour tout $x \in H$, il existe un unique élément de H noté $P_F x$ tel que :

$$\|x - P_F x\| = d(x, F) = \inf_{z\in F} \|x - z\|\,.$$

De plus, $P_F x$ est l'unique élément de F tel que $x - P_F x$ soit dans l'orthogonal de F. Il est appelé le projeté orthogonal de x sur F.
L'application

$$\begin{array}{rccc} P_F : & H & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & P_F x \end{array}$$

est la projection orthogonale de H sur F.

Proposition 1.3.6. *Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de H.*

1. *P_F est un opérateur linéaire.*
2. *$\|P_F x - P_F y\| \leq \|x - y\|\,,\ \forall x, y \in H$.*
3. *Si $F \neq \{0\}$, alors P_F est un opérateur linéaire continue de norme 1.*
4. *Pour tout $x, y \in H$, on a : $\langle P_F x, y\rangle = \langle x, P_F y\rangle$.*

Théorème 1.3.7. ***(Théorème de représentation de Riesz)***
Soit H un espace de Hilbert. Étant donnée une forme linéaire continue φ sur H, il existe un unique $a \in H$ tel que pour tout $x \in H$,

$$\varphi(x) = \langle x, a\rangle.$$

De plus,

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}(H)} = \|a\|.$$

Définition 1.3.8. (Base hilbertienne)

Soit H un espace de Hilbert. On appelle base Hilbertienne de H (ou tout simplement base de H s'il n'y a pas de confusion possible) toute famille orthonormale $\{e_i\}_{i\in I}$ de H qui est totale c'est-à-dire que le sous-espace vectoriel engendré par les $\{e_i\}_{i\in I}$ est dense dans H.

Théorème 1.3.9. ***(Caractérisation d'une base Hilbertienne)***

Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormale d'un espace de Hilbert H. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$\{e_i\}_{i\in I}$ est une base Hilbertienne de H.*
2. *$\forall x \in H$, $\langle x, e_i\rangle = 0 \ \forall i \in I \Longrightarrow \ x = 0_H$*

Théorème 1.3.10. ***(Inégalité de Bessel)***

Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour toute suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de H, et pour tout $x \in H$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Théorème 1.3.11. ***(Théorème des bases Hilbertiennes)***

Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormale d'un espace de Hilbert H. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$\{e_i\}_{i\in I}$ est une base Hilbertienne de H.*
2. *Tout élément x de H s'écrit sous la forme :*

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$$

et on a l'identité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

Théorème 1.3.12. *Tout espace de Hilbert (séparable) possède une base hilbertienne (dénombrable).*

Théorème 1.3.13. ***(Partition de l'unité)***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ (ou de $\mathbb{R}^n$). Quelle que soit la famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ recouvrant Ω, il existe une famille de fonctions $(\phi_i)_{i\in I}$ vérifiant :

1. *Pour tout $i \in I$, ϕ_i est de classe $C^\infty(\Omega)$, supp $\phi_i \subset O_i$ et $0 \leq \phi_i \leq 1$.*

2. *$\forall x \in \Omega$, $\sum_i \phi_i(x) = 1$.*

3. *Pour tout K compact de Ω, il existe un nombre fini d'indices i pour lesquels ϕ_i n'est pas identiquement nulle sur K.*

La famille $(\phi_i)_i$ est appelée partition de l'unité associée au recouvrement $(O_i)_{i\in I}$.

1.3.2. Opérateurs dans les espaces de Hilbert

1.3.2.1. Définitions

Définition 1.3.14. Soient E et F deux espaces vectoriels normés.
On appelle opérateur toute application de E vers F.

Définition 1.3.15. Soient E et F deux espaces vectoriels normés.
Une application $A : E \longrightarrow F$ est dite bornée si son image est borné dans l'espace normé F. C'est-à-dire

$$\sup_{x\in E} ||Ax||_F < +\infty.$$

Une application linéaire $A : E \longrightarrow F$ est dite continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$

$$||Ax||_F \leq C\,||x||_E\,.$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E vers F. Il est muni de la norme

$$||T||_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{||Tx||_F}{||x||_E} = \sup_{\substack{x\in E \\ ||x||_E\leq 1}} ||Tx||_F = \sup_{\substack{x\in E \\ ||x||_E=1}} ||Tx||_F\ .$$

On pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ et $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$. E' s'appelle dual topologique de E.
Lorsque F est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ l'est aussi.
Pour $f \in E'$, le nombre complexe $f(x)$ est aussi noté $\langle f, x\rangle$.

Proposition 1.3.16. *Soit E un espace de Banach. Une application linéaire $A : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est borné si et seulement si elle est continue pour la topologie de la norme de E.*

Proposition 1.3.17. ***(Principe de prolongement par continuité)***
Soit X un espace vectoriel topologique, M un sous-espace vectoriel de X, Y un espace vectoriel topologique séparé et complet, et f une application linéaire et continue de M dans Y ; alors f peut se prolonger (et d'une facon unique) en une application linéaire continue $\tilde{f}$ sur $\overline{M}$ où $\overline{M}$ désigne l'adhérence de M dans X.
De plus, lorsque X et Y sont des espaces vectoriels normés, on a $\|f\| = \left\|\tilde{f}\right\|$.

Théorème 1.3.18. ***(Corollaire du théorème de Hahn-Banach)***
Soient E un espace de Banach et M un sous-espace vectoriel de E tel que $\overline{M} \neq E$. Alors il existe une forme linéaire f sur E non identiquement nulle telle que f est nulle sur M.

Remarque 1.3.19. On applique souvent ce Corollaire pour montrer qu'un sous-espace $M \subset E$ est dense. On considère une forme linéaire continue f sur E telle que $f \equiv 0$ sur M et on prouve que f est identiquement nulle sur E.

Définition 1.3.20. Soit E un espace de Banach. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit inversible s'il existe $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T \circ S = S \circ T = I_d$.
Où l'opérateur linéaire continu I_d (où tout simplement I) défini par :

$$\begin{array}{rccc} I_d : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

est appelé identité de E.

Théorème 1.3.21. *Soit E un espace de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, alors $I - T$ est inversible et $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} T^k$. Avec $T^k = T \circ T \cdots T$, k fois.*

Proposition 1.3.22. *Soient H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_n$ une base Hilbertienne de H. Soit T un opérateur linéaire de H dans lui-même. Pour tout $x \in H$, on a*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Tx, e_n \rangle e_n \ .$$

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition **1.3.23.** On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compacte pour la topologie de la norme de F, c'est-à-dire $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F. Où

$$B_E = \{x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

On désigne par $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Remarque 1.3.24. Puisque tout ensemble relativement compact est borné, alors toute application linéaire compacte est continue. Car toute application linéaire qui transforme les bornés en bornés est continue.

Définition **1.3.25.** On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x dans E si pour tout $f \in E'$, $\langle f, x_n\rangle_{E',E}$ tend vers $\langle f, x\rangle_{E',E}$ lorsque $n \to \infty$.

Remarque 1.3.26.

1. Dans un espace de Hilbert H, on établit aisément grâce au théorème de représentation de Riesz que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x dans H si et seulement si $\langle x_n, y\rangle_H \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $y \in H$.

2. Toute suite $(x_n)_n$ qui converge faiblement dans un espace de Hilbert H est bornée. Ce résultat s'obtient aisément en appliquant le théorème de la borne uniforme (ou théorème de Banach-Steinhaus) à la suite d'applications linéaires continues $T_n : y \in H \to \langle y, x_n\rangle_H$.

Théorème **1.3.27.** ***(Caractérisation des opérateurs compacts)***
On suppose que E et F sont deux espaces de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *T est compact.*

2. *L'image de toute partie bornée de E est une partie relativement compacte de F.*

3. *De toute suite bornée $(x_n)_n$ d'éléments de E, on peut extraire de la suite $(Tx_n)_n$ une sous-suite convergente dans F.*

4. *Si $(x_n)_n$ est une suite qui converge faiblement vers 0 dans E, alors $(Tx_n)_n$ converge vers 0 dans F pour la norme.*

Proposition **1.3.28.** *Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $S \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$ et*

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Proposition 1.3.29. *Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{K}(F,G)$ (resp. $T \in \mathcal{K}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,G)$), alors $S \circ T \in \mathcal{K}(E,G)$.*

Définition 1.3.30. Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire borné. Alors T induit un opérateur linéaire $T^* : F' \longrightarrow E'$ défini pour tous $x \in E$ et $f \in F'$ comme suit :

$$T^*(f)(x) = f(Tx).$$

L'opérateur T^* est appelé transposée de T.

Définition 1.3.31. Si E est un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$ et T un opérateur linéaire dans E (c'est-à-dire $T : E \longrightarrow E$).
On appelle opérateur adjoint de T un opérateur dans E, noté T^*, tel que pour tout $x, y \in E$,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

Proposition 1.3.32. *Si E est un espace de Hilbert, alors tout opérateur linéaire sur E possède un adjoint.*

Propriété 1.3.33. ***(Propriétés de l'adjoint)***
Soient T et V deux opérateurs linéaires dans E.

(a) *L'ajoint T^* s'il existe est unique.*

(b) $(T^*)^* = T$.

(c) $(T + V)^* = T^* + V^*$.

(d) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(e) $(T \circ V)^* = V^* \circ T^*$.

Définition 1.3.34. Soit T un opérateur linéaire dans E.
On dit que T est un opérateur auto-adjoint ou hermitien si T^* existe et $T^* = T$.
On dit que T est positif si T est auto-adjoint et si pour tout $x \in E$, $\langle Tx, x\rangle \geq 0$.

Proposition 1.3.35. *Soit T un opérateur linéaire continu sur E possédant un adjoint T^*. Alors :*

(1) *$T^* \circ T$ et $T \circ T^*$ sont des opérateurs auto-adjoints positifs.*

(2) T^* *est continu et* $\|T^*\| = \|T\|$.

(3) $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$.

Il découle immédiatement du point (2) que si T *est borné, alors* T^* *est aussi borné.*

Théorème 1.3.36. ***(Schauder)***
Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. *On a* $T \in \mathcal{K}(E, F)$ *si et seulement si* $T^* \in \mathcal{K}(F', E')$.

Théorème 1.3.37. *Soit* $1 \leq p, q < \infty$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si l'opérateur intégral*

$$Tf(x) = \int_X H(x, y)f(y)d\mu(y)$$

est borné sur $L^p(X, d\mu)$, *alors son adjoint*

$$T^* : L^q(X, d\mu) \longrightarrow L^q(X, d\mu)$$

est un opérateur intégral défini par

$$T^* f(x) = \int_X \overline{H(y, x)}f(y)d\mu(y).$$

1.3.2.2. Spectre d'un opérateur compact

Soit E un espace de Banach et T un opérateur linéaire dans E. Dans la suite, on dira simplement opérateur au lieu d'opérateur linéaire.

Définition 1.3.38. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle ensemble résolvant de T l'ensemble, noté $\rho(T)$, et défini par

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (T - \lambda I) \text{ est bijectif de } E \text{ vers } E\}.$$

Il est important de garder à l'esprit que si $\lambda \in \rho(T)$ alors $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.
Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.
On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.
L'ensemble des valeurs propres de T est appelé spectre ponctuel et est noté $VP(T)$.

Remarque 1.3.39. Toute valeur propre est une valeur spectrale. Plus précisément on a

$$VP(T) \subset \sigma(T).$$

Proposition 1.3.40. *Le spectre d'un opérateur borné T est une partie compacte de $\mathbb{C}$ et on a*

$$\sigma(T) \subset \bar{B}_{\mathbb{C}}(0, \|T\|).$$

Théorème 1.3.41. *Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. On suppose que E est de dimension infinie. On a :*

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$,
3. *L'une des situations suivantes se produit :*
   a. $\sigma(T) = \{0\}$,
   b. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est un ensemble fini,*
   c. *Les éléments de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ forment une suite qui converge vers* 0.

   Le dernier résultat s'obtient grâce au fait que si $T \in \mathcal{K}(E)$ et $(\lambda_n)_n$ est une suite de nombres réels distincts tels que

   $$\lambda_n \to \lambda$$

   et pour tout n

   $$\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\},$$

   alors on a $\lambda = 0$.

Théorème 1.3.42. *Soient H un espace de Hilbert séparable et T un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

1.4. Rappels d'analyse complexe

Dans cette partie, nous définissons et énonçons quelques résultats et propriétés des fonctions holomorphes d'une variable complexe que nous utiliserons aux chapitres suivants. Les différents résultats de cette partie peuvent être retrouvés dans [22].

1.4.1. Holomorphie et analyticité

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On note par :

$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ le disque ouvert de centre a et de rayon r.

$\overline{D(a, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$ le disque fermé de centre a et de rayon r.

Rappels 1.4.1. Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on a $|D(z, r)| = \pi r^2$.

En effet, en posant le changement de coordonnées polaires $w - z = \rho e^{i\theta}$, on a :

$$|D(z, r)| = \int_{D(z,r)} dA(w) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho d\rho d\theta = \pi r^2.$$

Définition 1.4.2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω vers $\mathbb{C}$. On dit que f est dérivable (au sens complexe) au point $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe dans } \mathbb{C}.$$

On note cette limite par $f'(z_0)$.

On dit que f est holomorphe dans Ω si f est dérivable (au sens complexe) en tout point de Ω.

L'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω est noté $\mathcal{H}(\Omega)$.

Une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ est appelée fonction entière.

Remarque 1.4.3. La fonction e^z est entière et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Définition 1.4.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que f est analytique en un point $z_0 \in \Omega$ s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un disque ouvert $D(z_0, r) \subset \Omega$ tels que, pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On dit que f est analytique dans Ω si f est analytique en tout point de Ω.

On note par $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

Définition 1.4.5. On appelle polynôme (complexe dans $\mathbb{C}$), toute expression de la forme

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \ ,$$

où $a_k \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.4.6. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$.*

Proposition 1.4.7. ***(Propriété de la moyenne)***

Toute fonction holomorphe dans un ouvert Ω y possède la propriété de la moyenne, c'est-à-dire que pour tout $a \in \Omega$, pour tout $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Définition 1.4.8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est harmonique si elle est de classe $C^2(\Omega)$ et vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta(f) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Remarque 1.4.9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour toute fonction f de classe $C^2(\Omega)$, on a :

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Proposition 1.4.10. *Toute fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est harmonique dans Ω.*

Proposition 1.4.11. *Toute fonction harmonique réelle ou complexe définie sur un ouvert Ω y possède la propriété de la moyenne.*

Proposition 1.4.12. ***(Propriété de la moyenne planaire)***

Soit f une fonction harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, pour tout disque fermé $\overline{D(a,r)}$ contenu dans Ω, on a :

$$f(a) = \frac{1}{|D(a,r)|} \int_{D(a,r)} f(z) \, dA(z)$$

où dA est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ et $|D(a,r)|$ la mesure de Lebesgue de $D(a,r)$.

Définition 1.4.13. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ est dite semi-continue supérieurement si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{z \in \Omega : f(z) < \alpha\}$ est un ouvert.

Définition 1.4.14. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ une fonction. On dit que f est sous-harmonique sur Ω si

1. f est semi-continue supérieurement dans Ω,

2. pour tout disque fermé $\overline{D(a,r)}$ contenu dans Ω, on a :

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta, \tag{1.8}$$

3. f n'est pas identiquement égale à $-\infty$.

Proposition 1.4.15. *1. Toute fonction harmonique est sous-harmonique.*

2. Si f est holomorphe dans Ω et non identiquement nulle, alors, $|f|^p$ est sous-harmonique pour tout $p > 0$.

Dans ce qui suit, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.16. (Convergence compacte)
On dit qu'une suite $(f_n)_n \subset C(\Omega)$ converge uniformément vers f sur les sous-ensembles compacts de Ω si :

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact }, \forall \epsilon > 0, \ \exists\, N = N(K, \epsilon) \in \mathbb{N} / \forall z \in K, \ \forall n > N, \ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

On rappelle que $C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{C}$.
La topologie de $C(\Omega)$ est celle de la convergence compacte.

Théorème 1.4.17. ***(Théorème de Weiertrass)***
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui converge uniformément vers f sur tous les compacts de $\mathbb{C}$ contenus dans Ω, alors, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. En outre, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tous les compacts de $\mathbb{C}$ contenus dans Ω.

Proposition 1.4.18. ***(Lemme d'Urysohn)***
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une fonction φ de classe C^∞ à support compact telle que :

(i) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $\varphi \equiv 1$ *sur un voisinage de* K,

(iii) $\varphi \equiv 0$ *en dehors d'un ouvert contenant* K.

Proposition 1.4.19. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, un ouvert. On peut décomposer* Ω *en une réunion d'une suite* $(K_n)_n$ *de compacts de* $\mathbb{C}$ *telle que :*

(1) *Pour tout* n*,* $K_n \subset \overset{\circ}{\widehat{K_{n+1}}}$.

(2) *Pour tout compact* K *de* $\mathbb{C}$ *contenu dans* Ω*, il existe* n_0 *tel que* $K \subset K_{n_0}$ *(donc* K *sera contenu dans une infinité de* K_n *en vertu de* (1)*).*

(3) *Pour tout* $n = 1, 2, 3, \cdots$*, chaque composante connexe de* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *est contenue dans une composante connexe et une seule de* $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$.

1.4.2. Familles normales

Soit Ω une région de $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.20. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ un sous-ensemble de fonctions holomorphes dans Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille normale si de toute suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{C}$ contenus dans Ω.

Définition 1.4.21. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est uniformément borné sur K s'il existe une constante $M = M(K) > 0$ telle que :

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall z \in K,\ |f(z)| \leq M.$$

Théorème 1.4.22. ***(Théorème de Montel)***

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ *un sous-ensemble de fonctions holomorphes dans* Ω*. Si* $\mathcal{F}$ *est uniformément borné sur tous les sous-ensembles compacts de* $\mathbb{C}$ *contenus dans* Ω*, alors* $\mathcal{F}$ *est une famille normale.*

1.4.3. Définition et propriétés du noyau reproduisant d'un espace de Hilbert

Dans cette sous-section nous présentons la notion de noyau reproduisant. Ces résultats peuvent être retrouvés au chapitre 6 dans [7].

Définition 1.4.23. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Soit H un espace de Hilbert de fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note par $\langle , \rangle$ et par $||.||$ respectivement le produit scalaire et la norme sur H.

On dit qu'une fonction K de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ est un noyau reproduisant pour H si :

(a) Pour tout $z \in E$, $K_z : w \longmapsto K_z(w) := K(w, z)$ est un élément de H,

(b) Pour tout $z \in E$ et pour tout $f \in H$

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

En particulier, pour tous $z, w \in \Omega$, $K_z(w) = \langle K_z, K_w \rangle$ et $||K_z|| = \langle K_z, K_z \rangle^{\frac{1}{2}} = K(z, z)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.4.24. On dit qu'un espace de Hilbert H de fonctions définies sur E est à noyau reproduisant s'il existe une application K de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie (a) et (b).

Proposition 1.4.25. *Un espace de Hilbert H de fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$ possède un noyau reproduisant si et seulement si pour tout $z \in E$, l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccc} \Psi_z : & H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

est continue.

Preuve. $\Rightarrow$) Supposons que H admette un noyau reproduisant noté K. Soit $z \in E$, pour tout $f \in H$, on a :

$$|\Psi_z(f)| = |f(z)| = |\langle f, K_z \rangle| \leq ||f|| \, ||K_z|| \, .$$

De plus, puisque Ψ_z est linéaire, on conclut que Ψ_z est continue.

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que pour tout $z \in E$, Ψ_z soit linéaire et continue sur H. Alors, en vertu du théorème de représentation de Riesz (voir Théorème 1.3.7), pour chaque $z \in E$, il existe une unique fonction $g_z \in H$ telle que : $f(z) = \Psi_z(f) = \langle f, g_z \rangle$ pour tout $f \in H$.

Pour conclure, montrons que la fonction K définie sur $E \times E$ par $K(w, z) = g_z(w)$ vérifie (a) et (b) de la définition du noyau reproduisant (Définition 1.4.23).

On a :

Pour tout $z \in E$, $K_z : w \longmapsto K_z(w) = K(w, z) = g_z(w)$ appartient à H car g_z appartient à H.

Pour tout $z \in E$, pour tout $f \in H$,

$$\langle f, K_z \rangle = \langle f, g_z \rangle = f(z).$$

On conclut que K est un noyau reproduisant pour H. ■

Proposition 1.4.26. *Soit H un espace de Hibert de fonctions sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si K est un noyau reproduisant pour H, alors :*

(1) K est unique.

(2) $\forall z, w \in E$, $K(z,w) = \overline{K(w,z)}$ et $K(z,z) \geq 0$.

(3) $\forall z \in K$, ($K(z,z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = 0$ pour tout $f \in H$).

(4) $\forall z, w \in E, |K(z,w)| \leq K(z,z)^{\frac{1}{2}} K(w,w)^{\frac{1}{2}}$.

(5) Pour tous $z_1, \cdots, z_N \in E$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{j,k=1}^{N} K(z_k, z_j)\alpha_j \overline{\alpha_k} \geq 0.$$

(6) Pour toute base orthonormale $\{\phi_m\}$ de H,

$$K(z,w) = \sum_m \phi_m(z)\overline{\phi_m(w)}$$

et la série converge pour tout $z, w \in E$.

Preuve.

(1) Si K et K' sont deux noyaux reproduisant pour H, alors pour tout $z \in H$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|K_z - K'_z\right\|^2 &= \langle K_z - K'_z, K_z - K'_z \rangle \\ &= \langle K_z - K'_z, K_z \rangle - \langle K_z - K'_z, K'_z \rangle \\ &= (K_z - K'_z)(z) - (K_z - K'_z)(z) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\left\|K_z - K'_z\right\| = 0$ et par conséquent $K_z = K'_z$ pour tout $z \in E$. Donc $K = K'$.

(2) Soit $z, w \in E$,

(i) $K(z, w) = K_w(z) = \langle K_w, K_z\rangle = \overline{\langle K_z, K_w\rangle} = \overline{K_z(w)} = \overline{K(w, z)}$.

(ii) $K(z, z) = \langle K_z, K_z\rangle \geq 0$.

(3) Soit $z \in K$.

$\Rightarrow$) Supposons que $K(z, z) = 0$.

Alors, puisque $K(z, z) = \langle K_z, K_z\rangle = ||K_z||^2$, on obtient

$$K(z, z) = 0 \implies K_z = 0$$

Ainsi, pour tout $f \in H$, $f(z) = \langle f, K_z\rangle = 0$.

$\Leftarrow$) Réciproquement, comme $K_z \in H$ et $\langle, \rangle$ est non dégénéré, si pour tout $f \in H$ on a $f(z) = 0$, alors

$$0 = f(z) = \langle f, K_z\rangle\ \forall f \in H \implies K_z \equiv 0.$$

D'où $K(z, z) = 0$.

(4) Soit $z, w \in E$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|K(z, w)| = |\langle K_w, K_z\rangle| \leq ||K_z||\, ||K_w||\,.$$

(5) Soient $z_1, \cdots, z_N \in E$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in \mathbb{C}$,on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{N} K(z_k, z_j)\alpha_j\overline{\alpha_k} &= \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j\overline{\alpha_k}\langle K_{z_j}, K_{z_k}\rangle \\
&= \langle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j K_{z_j}, \sum_{j=1}^{N} \alpha_k K_{z_k}\rangle \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{N} \alpha_k K_{z_k}\right\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(6) Soit $\{\phi_m\}$ une base orthonormée de H. Pour $w \in E$ fixé, on a :

$$K_w = \sum_m \langle K_w, \phi_m\rangle\phi_m = \sum_m \overline{\phi_m(w)}\phi_m.$$

Cette série converge pour la topologie de la norme de H. Puisque la fonction $f \longmapsto f(z)$

est continue, la série numérique

$$\sum_m \overline{\phi_m(w)}\phi_m(z)$$

converge vers $K_w(z) = K(z, w)$.

■

Corollaire 1.4.27. *Si H est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes dans un domaine D de $\mathbb{C}$, et si K est le noyau reproduisant de H, alors $K(z, w)$ est holomorphe en z et antiholomorphe en w (c'est-à-dire son conjugué est holomorphe en w).*

Preuve. Soit $z, w \in D$. On a :
$K(z, w) = K_w(z)$. Comme $K_w \in H \subset \mathcal{H}(D)$, alors $K(z, w)$ est holomorphe en z.
De même, puisque $\overline{K(z, w)} = K_z(w)$ et comme $K_z \in H \subset \mathcal{H}(D)$, alors $\overline{K(z, w)}$ est holomorphe en w. ■

Proposition 1.4.28. *Soit H est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes dans un domaine D de $\mathbb{C}$. Si H s'injecte continûment dans $L^1_{loc}(D, dA)$, alors H possède un noyau reproduisant K, et, si ϕ_m est une base orthonormée de H, alors la série*

$$K(z, w) = \sum_m \phi_m(z)\overline{\phi_m(w)}$$

converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de $D \times D$.
Où dA désigne la mesure de Lebesgue dans C et pour $0 < p < \infty$, $L^p_{loc}(D, dA) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable telle que $\int_Q |f(z)|^p dA(z) < +\infty$ pour tout compact Q de $D\}$.

Corollaire 1.4.29. *Soit p une fonction mesurable strictement positive sur D. Soit H un espace de Hilbert de fonctions holomorphes dans D telles que*

$$\|f\|^2 = \int_D |f(z)|^2 p(z) dA(z) < \infty.$$

Si p est bornée sur tout sous-ensemble compact de D, alors H s'injecte continûment dans $L^1_{loc}(D, dA)$, puisque pour tout sous-ensemble compact Q de D on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_Q |f| dA \leq \left(\int_Q \frac{1}{p(z)} dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D |f(z)|^2 p(z) dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \leq M \|f\|.$$

Jl vient donc d'après la Proposition 1.4.28 que H possède un noyau reproduisant.

Chapitre Deux

DÉFINITION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ESPACES DE FOCK

2.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous définissons les espaces de Fock, nous établissons les propriétés basiques de ces espaces et nous établissons certains résultats de densité qui seront utiles dans la suite. Pour $\alpha > 0$ et $1 \leq p \leq +\infty$ nous montrons que le projecteur P_α de $L^2_\alpha(\mathbb{C})$ vers $F^2_\alpha(\mathbb{C})$ s'étend en un opérateur borné de $L^p_\alpha(\mathbb{C})$ vers $F^p_\alpha(\mathbb{C})$. Nous y établissons aussi le théorème sur la décomposition atomique des fonctions dans les espaces de Fock. Les résultats énoncés ici peuvent être retrouvés dans [27].

Dans la suite, C désignera une constante dont la valeur peut varier d'une ligne à une autre, mais ne dépend pas des fonctions considérées et les paramètres dont elle dépend seront précisés entre parenthèses si besoin se pose.

On dit que deux quantités A et B sont équivalentes et on écrit $A \simeq B$ s'il existe une constante C telle que $C^{-1}B \leq A \leq CB$.

2.2. Définitions et premières propriétés

Pour tout paramètre strictement positif α, on considère la mesure gaussienne

$$d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2} dA(z),$$

où dA est la mesure de Lebesgue usuelle dans $\mathbb{C}$.

Propriété 2.2.1. *La mesure λ_α est une mesure de probabilité.*

Preuve. Par passage en coordonnées polaires, c'est-à-dire en posant $z = re^{i\theta}$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(\mathbb{C}) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2} dA(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \, e^{-\alpha r^2} r dr \\ &= \int_0^{+\infty} 2\alpha r e^{-\alpha r^2} dr \\ &= -\left[e^{-\alpha r^2}\right]_0^{+\infty} = 1.\end{aligned}$$

■

Définition 2.2.2. Soient $p > 0$ et $\alpha > 0$. On désigne par L^p_α l'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables f sur $\mathbb{C}$ pour lesquelles $f(z)e^{\frac{-\alpha|z|^2}{2}}$ appartient à $L^p(\mathbb{C}, dA)$.
Pour $f \in L^p_\alpha$, on écrit :

$$\|f\|^p_{p,\alpha} = \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z) e^{\frac{-\alpha|z|^2}{2}} \right|^p dA(z).$$

De même, pour $\alpha > 0$ et $p = +\infty$, L^∞_α désigne l'espace des fonctions Lebesgue mesurables f sur $\mathbb{C}$ telles que :

$$\|f\|_{\infty,\alpha} := \inf\{C > 0 : |f(z)e^{\frac{-\alpha|z|^2}{2}}| \leq C \text{ p.p. sur } \mathbb{C}\} < +\infty.$$

Au regard de cette définition, pour $0 < p < +\infty$, on a :

$$L^p_\alpha = L^p(\mathbb{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}).$$

Mais

$$L^\infty(\mathbb{C}, dA) \subsetneq L^\infty_\alpha.$$

Théorème 2.2.3.

1. *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, L^p_α muni de la norme $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ est un espace de Banach.*
2. *Pour $0 < p < 1$, L^p_α est un espace métrique complet muni de la distance $d(f, g) = \|f - p\|^p_{p,\alpha}$.*

Définition 2.2.4. Soient $p > 0$ et $\alpha > 0$. On désigne par espace de Fock, noté F^p_α, l'ensemble des fonctions entières qui appartiennent à L^p_α, c'est-à-dire :

$$F^p_\alpha = L^p_\alpha \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Remarque 2.2.5. Il faut noter que, la mesure associée à l'espace de Fock F^p_α, $d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}$, dépend de α et de p.

Proposition 2.2.6. *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, F^p_α est un sous-espace fermé de L^p_α.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F^p_α qui converge vers f dans L^p_α. Nous allons montrer que $f \in F^p_\alpha$. Pour cela, il suffit de montrer que $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$.

Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p_\alpha = L^p(\mathbb{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}})$, alors, elle y est de Cauchy et il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ telle que

$$f_{n_k}(z) \longrightarrow f(z) \text{ presque partout dans } \mathbb{C} \tag{2.1}$$

Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Alors K est borné et il existe donc une constante $M > 0$ telle que, $|z| \leq M$, pour tout $z \in K$.

Soit $m, l \in \mathbb{N}$, on a $f_m - f_l \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Donc $|f_m - f_l|^p$ est sous-harmonique et par conséquent, elle vérifie la propriété de la sous-moyenne. Ainsi, quel que soit $z \in K$, on a :

$$\begin{aligned}
|f_m(z) - f_l(z)|^p &\leq \frac{1}{|D(z,1)|}\int_{D(z,1)} |f_m(w) - f_l(w)|^p dA(w) \\
&= C\int_{D(z,1)} |f_m(w) - f_l(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} e^{\frac{p\alpha}{2}|w|^2} dA(w) \\
&\leq Ce^{\frac{p\alpha}{2}(1+M)} \, \|f_m - f_l\|^p_{p,\alpha} \\
&= C(K, p, \alpha) \, \|f_m - f_l\|^p_{p,\alpha} \, .
\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{z\in K} |f_m(z) - f_l(z)| \leq C(K, p, \alpha) \, \|f_m - f_l\|_{p,\alpha} \underset{m,l\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Ainsi, $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy dans K . Par conséquent, elle converge uniformément sur tout compact K de $\mathbb{C}$ vers une fonction g qui est holomorphe d'après le théorème de Weierstrass (Théorème 1.4.17). En particulier, $(f_n)_n$ converge simplement vers g dans $\mathbb{C}$.

On déduit donc de (2.1) que $f = g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Donc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. D'où $f \in F^p_\alpha$. Ce qui montre donc que F^p_α est un sous-espace fermé de L^p_α pour $1 \leq p \leq \infty$. ■

Corollaire 2.2.7. *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, F^p_α muni de la norme $\|f\|_{p,\alpha}$ est un espace de Banach.*

Théorème **2.2.8.** *Soit $f \in F^p_\alpha$, et $0 < p \leq +\infty$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$|f(z)| \leq \|f\|_{p,\alpha}\, e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}.$$

Preuve. Le cas $p = \infty$ découle immédiatement de la définition de F^∞_α.

Supposons que $0 < p < +\infty$.

Puisque f est entière, alors $|f|^p$ est sous-harmonique. Ainsi, pour $z = 0$, on a pour tout $r > 0$:

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Multipliant cette inégalité par $re^{-\frac{p\alpha}{2}r^2}$ et intégrant sur $]0, +\infty[$ par rapport à r, on a :

$$\int_0^\infty |f(0)|^p re^{-\frac{p\alpha}{2}r^2} dr \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}r^2} rd\theta dr.$$

Ce qui implique que :

$$|f(0)|^p \frac{1}{p\alpha} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^p dA(z).$$

D'où

$$|f(0)|^p \leq \|f\|^p_{p,\alpha}.$$

Plus généralement, pour $z \in \mathbb{C}$ et $f \in F^p_\alpha$, considérons la fonction définie dans $\mathbb{C}$ par :

$$F(w) = f(z - w)e^{\alpha\bar{z}w - \frac{\alpha}{2}|z|^2}.$$

Alors F est entière et on a :

$$\begin{aligned}
\|F\|^p_{p,\alpha} &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z-w)e^{\alpha\bar{z}w - \frac{\alpha}{2}|z|^2}|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} dA(w) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z-w)|^p \left[e^{\alpha Re(\bar{z}w) - \frac{\alpha}{2}|z|^2 - \frac{\alpha}{2}|w|^2}\right]^p dA(w) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z-w)|^p \left[e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2}\right]^p dA(w) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(\zeta)e^{-\frac{\alpha}{2}|\zeta|^2}|^p dA(\zeta) \\
&= \|f\|^p_{p,\alpha},
\end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $\zeta = z - w$.

Donc $F \in F_\alpha^p$. D'après le résultat obtenu pour $z = 0$, on a :

$$|F(0)|^p \leq \|F\|_{p,\alpha}^p .$$

D'où

$$|f(z)| \leq \|f\|_{p,\alpha}\, e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}} .$$

■

Théorème 2.2.9. *Si $0 < p < q < +\infty$, alors l'inclusion $F_\alpha^p \subset F_\alpha^q$ est continue.*

Preuve. Supposons que $0 < p < q < +\infty$, soit $f \in F_\alpha^p$, montrons que $f \in F_\alpha^q$. D'après le Théorème 2.2.8, on a :

$$|f(z)| \leq \|f\|_{p,\alpha}\, e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}} .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{q,\alpha}^q &= \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^q dA(z) \\
&= \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p |f(z)|^{q-p} e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&\leq \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \left[\|f\|_{p,\alpha}\, e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}\right]^{q-p} |f(z)|^p e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&\leq \frac{q}{p}\, \|f\|_{p,\alpha}^q .
\end{aligned}$$

D'où $f \in F_\alpha^q$ et

$$\|f\|_{q,\alpha} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,\alpha} .$$

Ce qui montre aussi la continuité de l'inclusion. ■

2.3. Structure Hilbertienne de F_α^2

2.3.1. Base Hilbertienne de F_α^2

Proposition 2.3.1. *Soit $\alpha > 0$, l'espace de Fock $F_\alpha^2 = L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} d\lambda_\alpha(z).$$

De plus, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n,$$

alors, la famille $\{e_n\}_n$ est une base orthonormée pour F^2_α.

Lemme 2.3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{C}} z^n \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z) \neq 0$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z) &= \sqrt{\frac{n!}{\alpha^n}} \langle e_n, e_n \rangle_\alpha \\ &= \sqrt{\frac{n!}{\alpha^n}} \neq 0 \end{aligned}$$

■

Preuve. Preuve de la Proposition 2.3.1

Puisque F^2_α est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ muni du produit scalaire défini pour $f, g \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ par

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} d\lambda_\alpha(z) \ ,$$

alors F^2_α est aussi un espace de Hilbert.

Montrons que la famille $\{e_n\}_n$ est orthonormée dans F^2_α.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$, par passage en coordonnées polaires, on a :

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} e_n(z)\overline{e_m(z)} d\lambda_\alpha(z) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^{n+m}}{n!m!}} \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{z}^m e^{-\alpha|z|^2} dA(z) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^{n+m}}{n!m!}} \int_0^\infty r^{n+m+1} e^{-\alpha r^2} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

En effet, lorsque $n = m$, en posant $\rho = \alpha r^2$, et en utilisant les propriétés de la fonction Gamma

(Rappel 1.2.16), on a :

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_n\rangle_\alpha &= \frac{\alpha^{n+1}}{\pi n!}2\pi\int_0^\infty r^{2n+1}e^{-\alpha r^2}dr \\
&= \frac{\alpha^n}{\pi n!}\int_0^\infty\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^n e^{-\rho}d\rho \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^\infty \rho^n e^{-\rho}d\rho \\
&= \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

Montrons que la famille $\{e_n\}_n$ est totale.

Soit $f \in F^2_\alpha$ telle que $\langle f, e_n\rangle_\alpha = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $f \equiv 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
\langle f, e_n\rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{e_n(z)}d\lambda_\alpha(z) \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_{|z|<R} f(z)\overline{e_n(z)}d\lambda_\alpha(z).
\end{aligned}$$

Puisque f est une fonction entière, son développement en série de Taylor est de la forme :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

avec convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$. On obtient alors par passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
\int_{|z|<R} f(z)\overline{e_n(z)}d\lambda_\alpha(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\int_{|z|<R} z^k\overline{e_n(z)}d\lambda_\alpha(z) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}}\frac{\alpha}{\pi}\int_{r<R} r^{k+n+1}e^{-\alpha r^2}dr\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}d\theta.
\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Donc

$$\int_{|z|<R} f(z)\overline{e_n(z)}d\lambda_\alpha(z) = a_n\frac{\alpha}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}}\int_{r<R} r^{2n+1}e^{-\alpha r^2}dr\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= a_n \int_{|z|<R} z^n \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z).$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \langle f, e_n \rangle_\alpha &= a_n \lim_{R \to +\infty} \int_{|z|<R} z^n \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z) \\ &= a_n \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z). \end{aligned}$$

La condition $\langle f, e_n \rangle_\alpha = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, implique donc que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car $\int_{\mathbb{C}} z^n \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $f \equiv 0$.
On conclut donc que la famille $\{e_n\}_n$ est une base orthonormale pour F^2_α.

■

Proposition 2.3.3. ***(Noyau reproduisant pour F^2_α)***
Le noyau reproduisant de F^2_α est donné par :

$$K_\alpha(z, w) = e^{\alpha z \bar{w}}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Preuve. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, l'application $\Psi_z : f \longmapsto f(z)$ est une forme linéaire continue sur F^2_α. Ceci est visible à travers le Théorème 2.2.8. Alors d'après la Proposition 1.4.25, F^2_α possède un noyau reproduisant. De plus, comme la famille $\{e_n\}_n$, avec $e_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}}$, est une base Hilbertienne de F^2_α, alors pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $K_\alpha(z, w)$ d'après la Proposition 1.4.28.
Or

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} \bar{w}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha z \overline{w})^n}{n!} \\ &= e^{\alpha z \bar{w}} \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$k_z(w) = \frac{K_\alpha(w, z)}{\sqrt{K_\alpha(z, z)}} = e^{\alpha \bar{z} w - \frac{\alpha}{2}|z|^2}$$

Définition 2.3.4. L'application k_z est appelée le noyau reproduisant normalisé au point z.

Exemple 2.3.5. Exemples d'éléments de F^p_α, $\alpha > 0$ et $p > 0$

1. Les fonctions constantes appartiennent à F^p_α.

2. Pour $z \in \mathbb{C}$, le noyau reproduisant K_z et le noyau reproduisant normalisé k_z de F^2_α appartiennent à F^p_α.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \longmapsto z^n$ est un élément de F^p_α.

Preuve.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
||a||^p_{p,\alpha} &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |ae^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^p dA(z) \\
&= |a|^p \lambda_{\frac{p\alpha}{2}}(\mathbb{C}) \\
&= |a|^p < +\infty
\end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
||k_z||^p_{p,\alpha} &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |k_z(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}|^p dA(w) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha\bar{z}w-\frac{\alpha}{2}|z|^2}e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}|^p dA(w) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{p\alpha Re(\bar{z}w)}e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} dA(w) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2} dA(w) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|\zeta|^2} dA(\zeta) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Pour $p = +\infty$, puisque :

$$|k_z(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}| = e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2},$$

alors on a :

$$\sup_{w\in\mathbb{C}} |k_z(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}| = 1$$

D'où $k_z \in F^\infty_\alpha$. On obtient le résultat pour K_z en remarquant que $K_z = \sqrt{K_\alpha(z,z)}\, k_z$.

■

2.3.2. Projection orthogonale

Puisque F_α^2 est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$, alors la projection orthogonale, que nous notons P_α, de $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ vers F_α^2 existe.

Corollaire 2.3.6. *La projection orthogonale*

$$P_\alpha : L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha) \longrightarrow F_\alpha^2$$

est un opérateur intégral. Plus précisément,

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w) f(w) d\lambda_\alpha(w)$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ et tout $w \in \mathbb{C}$.

Preuve. Fixons $f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ et $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) &= \langle P_\alpha f, K_z \rangle_\alpha = \langle f, P_\alpha K_z \rangle_\alpha = \langle f, K_z \rangle_\alpha \\ &= \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w) f(w) d\lambda_\alpha(w) \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de ce corollaire. ■

Corollaire 2.3.7. *Soient $\alpha > 0$ et β un réel. On a :*

$$\int_{\mathbb{C}} |e^{\beta z \bar{a}}| d\lambda_\alpha(z) = e^{\frac{\beta^2 |a|^2}{4\alpha}}$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Preuve. Soit $a \in \mathbb{C}$, de la définition du noyau reproduisant, on a :

$$K_\alpha(a,a) = \int_{\mathbb{C}} |K_\alpha(a,z)|^2 d\lambda_\alpha(z).$$

En remplaçant a par $\frac{\beta a}{2\alpha}$, on a le résultat. ■

Théorème 2.3.8. *Pour tous $\alpha > 0$ et $1 \leq p \leq +\infty$, le projecteur orthogonal P_α s'étend en un opérateur borné de L_α^p vers F_α^p. De plus, quel que soit $f \in L_\alpha^p$, on a :*

$$\|P_\alpha f\|_{p,\alpha} \leq 2 \|f\|_{p,\alpha}.$$

Preuve.

Cas $p = 1$: Soit $f \in L^1_\alpha$, en utilisant le théorème de Fubini et le Corollaire 2.3.7, on a :

$$\begin{aligned}
\|P_\alpha f\|_{1,\alpha} &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |P_\alpha f(z)| e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} dA(z)\\
&= \frac{\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \left|\frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(w) e^{\alpha z\overline{w}-\alpha|w|^2} dA(w)\right| e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} dA(z)\\
&\leq \frac{\alpha^2}{2\pi^2}\int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} |f(w)||e^{\alpha z\overline{w}}| e^{-\alpha|w|^2} e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} dA(w)dA(z)\\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(w)| e^{-\alpha|w|^2}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha z\overline{w}}| e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} dA(z)\right) dA(w)\\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(w)| e^{-\alpha|w|^2}\left(\int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha z\overline{w}} d\lambda_{\frac{\alpha}{2}}(z)\right) dA(w)\\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(w)| e^{-\alpha|w|^2} e^{\frac{\alpha}{2}|w|^2} dA(w)\\
&= 2\,\|f\|_{1,\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que P_α est borné de L^1_α vers F^1_α.

Cas $p = +\infty$: Soit $f \in L^\infty_\alpha$, soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}
|P_\alpha f(z)| e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} &= \left|\frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(w) e^{\alpha z\overline{w}-\alpha|w|^2} dA(w)\right| e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\\
&\leq \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(w)||e^{\alpha z\overline{w}}| e^{-\alpha|w|^2} e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} dA(w)\\
&\leq \frac{\alpha}{\pi}\,\|f\|_{\infty,\alpha}\int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha z\overline{w}}| e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} dA(w)\\
&= \frac{\alpha}{\pi}\,\|f\|_{\infty,\alpha}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2} dA(w)\\
&= 2\,\|f\|_{\infty,\alpha}\,\frac{\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2}|\zeta|^2} dA(\zeta)\\
&= 2\,\|f\|_{\infty,\alpha}\,\lambda_{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{C})\\
&= 2\,\|f\|_{\infty,\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que P_α est borné de L^∞_α vers F^∞_α.

Cas $1 < p < +\infty$: L'opérateur P_α peut encore s'écrire comme suit :

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} f(w)\frac{2}{p} e^{\alpha z\overline{w}} e^{(\frac{p\alpha}{2}-\alpha)|w|^2} d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}(w).$$

Considérons l'opérateur Q_α défini sur L^p_α par :

$$Q_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} |K_\alpha(z,w)| f(w) d\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} f(w) \frac{2}{p} |e^{\alpha z\overline{w}}| e^{(\frac{p\alpha}{2}-\alpha)|w|^2} d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}(w).$$

Remarquons que, Q_α est un opérateur intégral de noyau positif $H(z,w) = \frac{2}{p}|e^{\alpha z\overline{w}}| e^{(\frac{p\alpha}{2}-\alpha)|w|^2}$. Nous allons montrer que Q_α vérifie les hypothèses du lemme de Schur (voir Théorème 1.2.10).
Soit $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Considérons la fonction positive définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$h(z) = e^{\frac{\alpha}{2q}|z|^2}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, en utilisant le Corollaire 2.3.7, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} H(z,w) h^q(w) d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}(w) &= \frac{p\alpha}{2\pi} \frac{2}{p} \int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha z\overline{w}}| e^{(\frac{p\alpha}{2}-\alpha)|w|^2} e^{\frac{\alpha}{2}|w|^2} e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} dA(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha z\overline{w}}| e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} dA(w) \\
&= 2 \int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha z\overline{w}}| d\lambda_{\frac{\alpha}{2}}(w) \\
&= 2 e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2} = 2h^q(z).
\end{aligned}$$

En procédant de la même façon, pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a :

$$\int_{\mathbb{C}} H(z,w) h^p(z) d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}(z) = 2h^p(w).$$

Puisque $L^p_\alpha = L^p(\mathbb{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}})$, alors d'après le lemme de Schur (Théorème1.2.10), Q_α est un opérateur borné de $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}})$ vers $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}})$ et sa norme vérifie :

$$\|Q_\alpha\|_{\mathcal{L}(L^p_\alpha)} \leq 2^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}} = 2.$$

Soit à présent $f \in L^p_\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
\|P_\alpha f\|^p_{p,\alpha} &\leq \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |P_\alpha f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&\leq \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| \int_{\mathbb{C}} f(w) |K_\alpha(z,w)| d\lambda_\alpha \right|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&= \|Q_\alpha f\|^p_{p,\alpha} \\
&\leq (2\,\|f\|_{p,\alpha})^p.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|P_\alpha f\|_{p,\alpha} \leq 2\,\|f\|_{p,\alpha}\,.$$

Ce qui montre que P_α est borné de L^p_α vers F^p_α.

Remarque 2.3.9. Le résultat dans le cas $1 < p < +\infty$ peut aussi être obtenu par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin (Théorème 1.2.9).

■

2.4. Sous-espaces denses dans F^p_α

Lemme **2.4.1.** Soit $\alpha > 0$, pour tout $0 < p < +\infty$, $\beta \in]0, \alpha[$, on a $F^2_\beta \subset F^p_\alpha$ et il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in F^2_\beta$,

$$\|f\|_{p,\alpha} \leq C\,\|f\|_{2,\beta}\,.$$

Preuve. Soient $\beta \in]0, \alpha[$, $f \in F^2_\beta$ et $z \in \mathbb{C}$. D'après le Théorème 2.2.8, on a :

$$|f(z)| \leq \|f\|_{2,\beta}\, e^{\frac{\beta}{2}|z|^2}.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\beta < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{p,\alpha} &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&\leq \frac{p\alpha}{2\pi}\,\|f\|^p_{2,\beta}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} e^{\frac{p\beta}{2}|z|^2} dA(z) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi}\,\|f\|^p_{2,\beta}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p(\alpha-\beta)}{2}|z|^2} dA(z) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi}\,\|f\|^p_{2,\beta}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{p(\alpha-\beta)}{2}r^2} r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\,\|f\|^p_{2,\beta}\,.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition **2.4.2.** *Soient $0 < r < 1$, $\alpha > 0$ et $0 < p < +\infty$. Pour tout $f \in F^p_\alpha$, on considère la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f_r(z) = f(rz)$. Alors :*

(a) $\|f_r - f\|_{p,\alpha} \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} 0\,.$

(b) Il existe une suite $\{p_n\}_n$ de polynômes telle que $\|p_n - f\|_{p,\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$

Preuve.

(a) Puisque

$$f_r(z) \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} f(z)$$

presque partout, alors montrer que $\|f_r - f\|_{p,\alpha} \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ revient à montrer que $\|f_r\|_{p,\alpha} \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} \|f\|_{p,\alpha}$. Soit $f \in F^p_\alpha$, en faisant le changement de variables $w = rz$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f_r\|^p_{p,\alpha} &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(rz)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi r^2}\int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2r^2}|w|^2} dA(w) \\
&= \frac{p\alpha}{2\pi r^2}\int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} e^{-\frac{p\alpha}{2}(\frac{1}{r^2}-1)|w|^2} dA(w).
\end{aligned}$$

Puisque

$$e^{-\frac{p\alpha}{2}(\frac{1}{r^2}-1)|w|^2} \leq 1$$

pour tout $w \in \mathbb{C}$ et $0 < r < 1$, alors

$$\|f_r\|^p_{p,\alpha} \leq \frac{p\alpha}{2\pi r^2} \|f\|^p_{p,\alpha} .$$

On conclut d'après le Théorème de convergence dominée que : $\|f_r\|_{p,\alpha} \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} \|f\|_{p,\alpha}$.

(b) Soit $f \in F^p_\alpha$. Nous établirons que, pour tout $0 < r < 1$, f_r peut être approximée par sa suite de polynômes de Taylor pour la topologie de la norme de F^p_α. Fixons $0 < r < 1$ et $\beta \in]r^2\alpha, \alpha[$. En utilisant le Théorème 2.2.8 on montre aisément que $f_r \in F^2_\beta$ et il existe une constante positive C d'après le Lemme 2.4.1, telle que $\|g\|_{p,\alpha} \leq C\,\|g\|_{2,\beta}$, pour tout $g \in F^2_\beta$.

Si $p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(f_r)^{(k)}(0)}{k!} z^k$ le n−ième polynôme de Taylor de f_r, alors $f_r - p_n \in F^2_\beta$ et le Théorème 2.2.8 donne,

$$\|f_r - p_n\|_{p,\alpha} \leq C\,\|f_r - p_n\|_{2,\beta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où (b) d'après (a).

■

Théorème **2.4.3.** *Pour tous paramètres positifs α et γ, l'ensemble des fonctions de la forme*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k K_\gamma(z, w_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\gamma z \overline{w}_k},$$

$n \in \mathbb{N}^*, w_k \in \mathbb{C}$, *est dense dans* F^p_α.

Preuve. Puisque les w_k sont arbitraires, on peut supposer que $\gamma = \alpha$.

Établissons le résultat pour $p = 2$.

Nous allons utiliser le corollaire du théorème de Hahn-Banach (voir Théorème 1.3.18). Soit $h \in (F^2_\alpha)' = F^2_\alpha$ tel que pour tout $w \in \mathbb{C}$ on ait :

$$\langle h, K_w \rangle_\alpha = 0.$$

Alors, par la propriété du noyau reproduisant, quel que soit $w \in \mathbb{C}$, on a :

$$h(w) = \langle h, K_w \rangle_\alpha = 0.$$

D'où $h \equiv 0$. Ce qui établit la densité pour $p = 2$.

Pour tout $\beta \in]0, \alpha[$, on sait que $F^2_\beta \subset F^p_\alpha$ et il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in F^2_\beta$,

$$\|f\|_{p,\alpha} \leq C \, \|f\|_{p,\beta} \, .$$

Si f est un polynôme et $\{w_1, \cdots, w_n\}$ sont des points de $\mathbb{C}$, alors $f - \sum_{k=1}^{n} c_k K_\alpha(z, w_k) \in F^2_\alpha$ et

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k K_\alpha(z, w_k) \right\|_{p,\alpha} &\leq C \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k K_\alpha(z, w_k) \right\|_{2,\beta} \\ &= C \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k K_\beta(z, \frac{\alpha}{\beta} w_k) \right\|_{2,\beta} , \end{aligned}$$

car $K_\alpha(z, w_k) = e^{\alpha z \overline{w}_k} = e^{\beta z \, \overline{(\frac{\alpha w_k}{\beta})}} = K_\beta(z, \frac{\alpha}{\beta} w_k)$. Comme les fonctions de la forme $z \longmapsto \sum_{k=1}^{n} c_k K_\alpha(z, u_k)$ sont denses dans F^2_β, alors, on conclut que tout polynôme peut être approché pour la topologie de la norme de F^p_α par des fonctions de la forme $z \longmapsto \sum_{k=1}^{n} c_k K_\alpha(z, w_k)$. Puisque l'ensemble des polynômes complexes est dense dans F^p_α, on a le résultat voulu. ■

2.5. Dualité des espaces de Fock

Théorème **2.5.1.** *Soient $\beta > 0$, $1 < p < +\infty$, et $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, le dual topologique de F^p_α s'identifie à F^q_β sous le crochet de dualité :*

$$\langle f, g\rangle_\gamma = \frac{\gamma}{\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{|z|<R} f(z)\overline{g(z)} e^{-\gamma|z|^2} dA(z),$$

avec $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$.

Preuve. I) Montrons que F^q_β est inclus dans le dual topologique de F^p_α.
Soit $g \in F^q_\beta$, considérons

$$\begin{array}{rccl} F: & F^p_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & F(f) = \frac{\gamma}{\pi} \lim\limits_{R\to+\infty} \displaystyle\int_{|z|<R} f(z)\overline{g(z)} e^{-\gamma|z|^2} dA(z). \end{array}$$

Nous allons montrer que F est une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}$ et conclure par densité que c'est le cas pour F^p_α. Soit $a \in \mathbb{C}$, alors $f(z) = e^{\gamma z\bar{a}} \in \mathcal{K} \subset F^p_\alpha$. Par les propriétés des noyaux $K_\gamma(z, w)$ et $K_\alpha(z, w)$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} g(a) &= \langle g, K_\gamma(\cdot, a)\rangle_\gamma = \frac{\gamma}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g(z) K_\gamma(a, z) e^{-\gamma|z|^2} dA(z) \\ &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g(z) e^{\gamma a\bar{z}} e^{-\gamma|z|^2} dA(z) \\ &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) e^{-\gamma|z|^2} dA(z). \end{aligned} \tag{2.2}$$

D'autre part, puisque $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$, on a :

$$\begin{aligned} g(a) &= g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{\gamma}{\alpha} a\right) = \left\langle g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\right), K_\alpha\left(\cdot, \frac{\gamma}{\alpha} a\right)\right\rangle_\alpha \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} z\right) e^{\alpha(\frac{\gamma}{\alpha} a)\bar{z}} e^{-\alpha|z|^2} dA(z) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} z\right) \overline{f(z)} e^{-\alpha|z|^2} dA(z). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} d\lambda_\gamma(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} z\right)} e^{-\alpha|z|^2} dA(z). \tag{2.3}$$

Ceci montre que pour toute fonction $f \in \mathcal{K}$,

$$F(f) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} z\right)} e^{-\alpha|z|^2} dA(z)$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\left[f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right]\left[\bar{g}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}z\right)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right]dA(z). \tag{2.4}$$

De plus, dire que $g \in L^q_\beta$, est équivalent à dire que la fonction

$$\varphi(z) = g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}z\right) \in L^q_\alpha\,,$$

et on a : $||g||_{q,\beta} = ||\varphi||_{q,\alpha}$.
En effet, en posant $z = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}w$, on a $dA(z) = \frac{\alpha}{\beta}dA(w)$ et

$$\begin{aligned}
||g||^q_{q,\beta} &= \frac{q\beta}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}|g(z)|^q e^{-\frac{q\beta}{2}|z|^2}dA(z)\\
&= \frac{q\beta}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}w\right)\right|^q e^{-\frac{q\beta}{2}\frac{\alpha}{\beta}|w|^2}\frac{\alpha}{\beta}dA(w)\\
&= \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}w\right)\right|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|w|^2}dA(w)\\
&= \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}|\varphi(w)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|w|^2}dA(w) = ||\varphi||^q_{q,\alpha}\,.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder (1.1) à (2.4), on obtient :

$$|F(f)| \leq C\,||f||_{p,\alpha}\,||\varphi||_{q,\alpha} = C\,||f||_{p,\alpha}\,||g||_{q,\beta}\,, \tag{2.5}$$

quel que soit $f \in \mathcal{K}$. Ceci montre que F est une forme linéaire continue sur F^p_α.

II) Montrons que le dual topologique de F^p_α est inclus dans F^q_β.

Soit $F:\ F^p_\alpha \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Soit $z \in \mathbb{C}$, considérons la fonction g donnée par :

$$\overline{g(w)} = F(e^{\gamma z\overline{w}}).$$

Nous allons montrer que $g \in F^q_\beta$ et que $F(f) = \langle f, g\rangle_\gamma$ pour tout $f \in \mathcal{K}$.
Le fait que g soit entière découle du developpement en série entière de l'exponentielle complexe et de la linéairité de F. Pour montrer que $g \in L^q_\beta$, nous allons établir que la fonction $g(w)e^{-\frac{\beta}{2}|w|^2} \in L^q(\mathbb{C}, dA)$. Pour cela, considérons la fonctionnelle définie pour tout $h \in L^p(\mathbb{C}, dA)$ par

$$\Phi(h) = \int_{\mathbb{C}} h(w)\overline{g(w)}e^{-\frac{\beta}{2}|w|^2}dA(w).$$

Il suffit de montrer que Φ est une forme linéaire continue sur $L^p(\mathbb{C}, dA)$. Sans nuire à la généralité, nous supposons que h est à support compact dans $\mathbb{C}$ (densité des fonctions à support compact dans $L^p(\mathbb{C}, dA)$). Dans ce cas, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{C}} h(w) e^{\gamma z \overline{w}} e^{-\frac{\beta}{2}|w|^2} dA(w)$$

converge pour la topologie de la norme de F^p_α et en posant $w = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\zeta$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(h) &= \int_{\mathbb{C}} h(w) F(e^{\gamma z \overline{w}}) e^{-\frac{\beta}{2}|w|^2} dA(w) \\
&= F\left(h(w) F(e^{\gamma z \overline{w}}) e^{-\frac{\beta}{2}|w|^2} dA(w)\right) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} F\left(h\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\zeta\right) e^{\alpha z \overline{\zeta}} e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} dA(w)\right) \\
&= \frac{\pi}{\beta} F(P_\alpha(\varphi)),
\end{aligned}$$

où quel que soit $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(\zeta) = h\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\zeta\right) e^{\frac{\alpha}{2}|\zeta|^2}.$$

De plus, en posant $w = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\zeta$, on a :

$$\begin{aligned}
||h||_p^p &= \int_{\mathbb{C}} |h(w)|^p dA(w) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \int_{\mathbb{C}} \left| h\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\zeta\right)\right|^p dA(\zeta) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \int_{\mathbb{C}} |\varphi(\zeta) e^{-\frac{\alpha}{2}|\zeta|^2}|^p dA(\zeta) \\
&= \frac{2\pi}{p\beta} ||\varphi||^p_{p,\alpha}.
\end{aligned}$$

Puisque la projection P_α est bornée de L^p_α vers F^p_α, et F est continue, on conclut que

$$|\varphi(h) \leq C\,||F||\,||P_\alpha(\varphi)||_{p,\alpha}| \leq C\,||P_\alpha||\,||\varphi||_{p,\alpha} \leq C\,||h||_p.$$

Ceci montre que Φ est continue. On conclut que $g \in F^q_\beta$.

Finalement, si $f(z) = e^{\gamma z \bar{a}}$ pour un certain $a \in \mathbb{C}$, alors comme dans (2.2) on a :

$$\langle f, g\rangle_\gamma = \overline{g(a)} = F(f).$$

Ceci combiné avec la densité de $\mathcal{K}$ dans F^p_α achève la preuve du théorème. ■

Corollaire 2.5.2. *La suite $\{k_z\}_{z\in\mathbb{C}}$ converge faiblement vers 0 dans F^p_α lorsque $z \to \infty$.*

Preuve. Soit $\beta > 0$, et γ tel que $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$, on sait que le dual topologique de F^p_α s'identifie à F^q_β avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sous le crochet de dualité :

$$\langle f, g\rangle_\gamma = \frac{\gamma}{\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{|z|<R} f(z)\overline{g(z)} e^{-\gamma|z|^2} dA(z).$$

Soit $f \in F^q_\beta$, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|\langle f, k_z\rangle_\gamma| \leq \|f\|_{q,\beta} \|k_z\|_{p,\alpha} = \|f\|_{q,\beta}\,.$$

Car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\|k_z\|_{p,\alpha} = 1$. De plus, quel que soit $|w| < R$, on a :

$$\begin{aligned}
|f(w)k_z(w)e^{-\gamma|w|^2}| &= |f(w)||e^{\alpha z\overline{w} - \frac{\alpha}{2}|z|^2 - \gamma|w|^2}| \\
&\leq \left(\sup_{|w|<R} |f(w)|e^{-\gamma|w|^2}\right) e^{\alpha|z||w| - \frac{\alpha}{2}|z|^2} \\
&= Ce^{-\frac{\alpha}{2}|z|(|z|-2|w|)} \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

On conclut par le théorème de convergence dominée que

$$\langle f, k_z\rangle_\gamma \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Proposition 2.5.3. *Pour tout $f \in F^p_\alpha$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$f(z) = \langle f, K_z\rangle_\alpha.$$

Preuve. Soit $f \in F^p_\alpha$. Nous avons établi dans le Théorème 2.4.3 ci-dessus que l'ensemble

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{j=1}^m a_j K_\gamma(\cdot, z_j) : m \in \mathbb{N}^*, z_j \in \mathbb{C} \text{ et } a_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \ldots, m \right\}$$

est dense dans F^p_α. Or :

$$\mathcal{K} \subset F^2_\alpha \cap F^p_\alpha \subset F^p_\alpha.$$

Donc $F_\alpha^2 \cap F_\alpha^p$ est dense dans F_α^p. Ainsi, il existe une suite $\{f_n\}_n$ d'éléments de $F_\alpha^2 \cap F_\alpha^p$ qui converge vers f dans F_α^p lorsque $n \to +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a par la propriété du noyau reproduisant de F_α^2 :

$$f_n(z) = \langle f_n, K_z \rangle_\alpha.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, en utilisant le Théorème 2.2.8, on a :

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \|f_n - f\|_{p,\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, f_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(z).$$

De plus, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$|\langle f_n - f, K_z \rangle_\alpha| \leq \|f_n - f\|_{p,\alpha} \|K_z\|_{q,\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ce qui montre que,

$$\langle f_n, K_z \rangle_\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle f, K_z \rangle_\alpha.$$

Il vient de l'unicité de la limite que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle_\alpha.$$

■

2.6. Décomposition atomique

La décomposition atomique des espaces de Fock est un résultat fondamental et puissant pour l'étude de ces espaces. Pour établir cela, nous avons besoin d'une notion très importante : la notion de treillis, que nous définirons ci-dessous et dont l'existence vient du lemme de recouvrement de Besicovitch. Plus de détails sur cette notion peuvent être consultés au chapitre 4 de [26], au chapitre 1 de [27] et dans [16].

Définition 2.6.1. Soit $r > 0$, on dit que la suite $\{z_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ est un $r-$treillis si

(a) $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D(z_j, r) = \mathbb{C}$;

(b) Les disques euclidiens $\{D(z_j, \frac{r}{4})\}_{j=1}^{\infty}$ sont deux à deux disjoints.

Des conditions (a) et (b), on déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

$$1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{D(z_j,r)}(z) \leq N. \tag{2.6}$$

Ceci signifie que chaque élément $z \in \mathbb{C}$ est contenu dans au plus N disques $D(z_j, r)$.

Propriété 2.6.2. *Si $0 < r < 1$ et $\{z_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ est un $r-$treillis, alors pour tout j, il existe un sous ensemble mesurable D_j tel que :*

(a) $D(z_j, \frac{r}{4}) \subset D_j \subset D(z_j, r)$ pour tout j ;

(b) $D_j \cap D_k = \emptyset$ si $k \neq j$;

(c) $D_1 \cup D_2 \cup \cdots = \mathbb{C}$.

Preuve. Voir Lemme 4.11 dans [26]. ■

Propriété 2.6.3. *Soient μ une mesure de Borel positive sur $\mathbb{C}$ et $\{z_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ un $r-$treillis avec $0 < r < 1$, alors pour tout $f \in L^1(\mathbb{C}, d\mu)$, on a :*

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)d\mu(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D_j} f(z)d\mu(z).$$

Si de plus f est mesurable positive alors la relation (2.6) nous permet d'avoir :

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)d\mu(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D_j} f(z)d\mu(z) \leq N \int_{\mathbb{C}} f(z)d\mu(z). \tag{2.7}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} f(z)d\mu(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D_j} f(z)d\mu(z) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D(z_j,r)} f(z)d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{D(z_j,r)}(z) f(z)d\mu(z) \\
&\leq N \int_{\mathbb{C}} f(z)d\mu(z).
\end{aligned}$$

Rappels 2.6.4. (Inégalité de Young)

Pour tous $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a :

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \epsilon\frac{b^2}{2}.$$

Nous aurons besoin des lemmes suivants pour établir le théorème principal sur la décomposition atomique des fonctions dans les espaces de Fock.

Lemme 2.6.5. Pour tous $0 < r < 1$ et $x > 0$, on a :

$$e^{rx} - 1 \leq re^x.$$

Preuve. Soient $0 < r < 1$ et $x > 0$, alors pour tout $k \geq 1$, $r^k \leq r$ et on a :

$$\begin{aligned} e^{rx} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(rx)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(rx)^k}{k!} \\ &\leq 1 + r(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x)^k}{k!}) = 1 + r(e^x - 1) \end{aligned}$$

Puisque $e^x \geq 1$ pour tout $x \geq 0$, on a :

$$e^{rx} - 1 \leq r(e^x - 1) \leq re^x.$$

■

Lemme 2.6.6. Soit $\{z_j\}_{j=1}^{+\infty}$ un $r-$treillis quelconque dans $\mathbb{C}$. Pour tout nombre positif δ, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $w \in \mathbb{C}$, on ait :

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\delta|z_j - w|^2} \leq C.$$

Preuve. Voir Lemme 1.12 dans [27]. ■

Théorème 2.6.7. *Soit $0 < p \leq +\infty$. Alors, il existe une constante positive r_0 telle que pour tout $r \in]0, r_0[$, l'espace F_α^p est exactement constitué des fonctions de la forme*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k k_{z_k}(z), \tag{2.8}$$

avec $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ et $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ un $r-$treillis. De plus, il existe une constante C telle que, pour tout

$f \in F^p_\alpha$,

$$C^{-1}\|f\|_{p,\alpha} \leq \inf \|\{\lambda_k\}\|_{l^p} \leq C\|f\|_{p,\alpha}$$

où le inf *est pris sur toutes les suites* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \in l^p$ *donnant lieu à la décomposition (2.8).*

Preuve. Soient $r > 0$ et $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ un $r-$treillis.

I) Montrons que $\{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k k_{z_k}(z)\} \subset F^p_\alpha$.

1. Si $0 < p \leq 1$ et f est donnée par (2.8) avec $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \in l^p$, alors d'après l'inégalité de Hölder (1.7), on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\left|f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|^p = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k k_{z_k}(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|^p \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^p |k_{z_k}(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^p.$$

En multipliant par $\frac{p\alpha}{2\pi}$ et intégrant sur $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \left|f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|^p dA(z) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^p \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |k_{z_k}(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^p dA(z)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^p \left\|k_{z_k}\right\|^p_{p,\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^p < +\infty,
\end{aligned}$$

car $\left\|k_{z_k}\right\|^p_{p,\alpha} = 1$.

D'où $f \in F^p_\alpha$ et par la définition de la borne inférieure, on a :

$$\|f\|^p_{p,\alpha} \leq \inf \|\{\lambda_k\}\|^p_{l^p}.$$

2. Si $\{\lambda_k\} \in l^\infty$ et f est donnée par (2.8), alors en utilisant le Lemme 2.6.6, on a :

$$\begin{aligned}
|f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}| &= \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k k_{z_k}(z)\right| e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k||k_{z_k}(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\\
&\leq \|\{\lambda_k\}\|_\infty \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}|z_k - z|^2}\\
&\leq C\|\{\lambda_k\}\|_{l^\infty}.
\end{aligned}$$

D'où $f \in F^\infty_\alpha$ et par la définition de la borne inférieure, on a :

$$\|f\|_{\infty,\alpha} \leq C \inf \|\{\lambda_k\}\|_{l^\infty} .$$

En interpolant entre $p = 1$ et $p = +\infty$, on obtient le résultat pour $p \in]1, +\infty[$ et on conclut que, pour tout $p \in]0, +\infty]$ et $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \in l^p$, la fonction f donnée par (2.8) appartient à F^p_α et on a :

$$\|f\|^p_{p,\alpha} \leq C \inf \|\{\lambda_k\}\|^p_{l^p} .$$

où C dépend de p, α, r et le inf est pris sur toutes les suites $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \in l^p$ donnant lieu à la décomposition (2.8).

II) Nous établirons la seconde partie du théorème juste pour les $1 \leq p \leq +\infty$, puisque notre travail est centré sur les espaces de Fock avec $1 \leq p < +\infty$.
Nous supposons dans la suite que $r \in]0, 1[$ et considérons l'opérateur linéaire T_r défini sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ par :

$$T_r(f)(z) = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} e^{\alpha z \bar{z}_j - \frac{\alpha}{2}|z_j|^2} \int_{D_j} f(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2 + \alpha i Im(z_j \overline{w})} dA(w).$$

Où $\{D_j\}$ est la suite associée au $r-$treillis $\{\lambda_k\}$, donnée par la Propriété 2.6.2.
Nous établirons que T_r est un opérateur linéaire borné sur F^p_α et nous estimerons $\|I - T_r\|$, la norme d'opérateur de $I - T_r$ sur F^p_α.
Posons $D_r = I - T_r$. Si $f \in F^p_\alpha$, alors d'après la Proposition 2.5.3,

$$\begin{aligned} f(z) &= \langle f, K_z\rangle_\alpha \\ &= \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{z\overline{w}} d\lambda_\alpha(w) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{z\overline{w} - \alpha|w|^2} dA(w) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D_j} f(w) e^{\alpha z\overline{w} - \frac{\alpha}{2}|w|^2 - \alpha i Im(z_j\overline{w})} e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2 + \alpha i Im(z_j \overline{w})} dA(w). \end{aligned}$$

Jl vient que,

$$D_r f(z) = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D_j} f(w) H(z, z_j, w) dA(w), \tag{2.9}$$

avec

$$H(z, z_j, w) = e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2 + \alpha i Im(z_j \overline{w})} \left[e^{\alpha z \overline{w} - \frac{\alpha}{2}|w|^2 - \alpha i Im(z_j \overline{w})} - e^{\alpha z \bar{z}_j - \frac{\alpha}{2}|z_j|^2} \right]$$

Estimons la norme de D_r sur F^∞_α et sur F^1_α.

Soit $f \in F^\infty_\alpha$, d'après (2.9), on a :

$$\begin{aligned}
|D_r f(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} &\leq \frac{\alpha}{\pi}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{D(z_j,r)}|f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|H(z,z_j,w)|dA(w)\\
&\leq \frac{\alpha}{\pi}\,\|f\|_{\infty,\alpha}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{D(z_j,r)}e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}e^{\frac{\alpha}{2}|w|^2}|H(z,z_j,w)|dA(w)\\
&\leq \frac{\alpha}{\pi}\,\|f\|_{\infty,\alpha}\,J_r(z),
\end{aligned}$$

où

$$J_r(z) = \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{D(z_j,r)}e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|e^{\alpha z\overline{w}-\frac{\alpha}{2}|w|^2-\alpha i Im(z_j\overline{w})} - e^{\alpha z\overline{z}_j-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2}|dA(w).$$

Des calculs élémentaires sur les nombres complexes permettent d'obtenir d'une part :

$$\begin{aligned}
\alpha z\overline{w} - \frac{\alpha}{2}|w|^2 - \alpha i Im(z_j\overline{w}) - \frac{\alpha}{2}|z|^2 &= -\frac{\alpha}{2}|z-w|^2 + \alpha i Im(z\overline{w}) - \alpha i Im(z_j\overline{w})\\
&= -\frac{\alpha}{2}|z-w|^2 + \alpha i Im((z-z_j)\overline{w}),
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\alpha z\overline{z}_j - \frac{\alpha}{2}|z_j|^2 - \frac{\alpha}{2}|z|^2 &= -\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2 + \alpha i Im(z\overline{z}_j)\\
&= -\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2 + \alpha i Im((z-z_j)\overline{z}_j) \quad \text{car } Im(|z_j|^2) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
J_r(z) &= \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{D(z_j,r)}\left|e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2+\alpha i Im((z-z_j)\overline{w})} - e^{-\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2+\alpha i Im((z-z_j)\overline{z}_j)}\right|dA(w)\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2}\int_{D(z_j,r)}\left|1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2+\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2+\alpha i Im((z-z_j)\overline{w})-\alpha i Im((z-z_j)\overline{z}_j)}\right|dA(w)\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2}\int_{D(z_j,r)}\left|1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2+\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2+\alpha i Im((z-z_j)(\overline{w}-\overline{z}_j))}\right|dA(w)
\end{aligned}$$

Or

$$-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2 + \frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2 + \alpha i Im((z-z_j)(\overline{w}-\overline{z}_j)) = -\frac{\alpha}{2}|w|^2 + \frac{\alpha}{2}|z_j|^2 + \alpha Re(z(\overline{w}-\overline{z}_j)) + \alpha i Im(z-z_j)(\overline{w}-\overline{z}_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\alpha}{2}|w-z_j|^2 + \alpha Re(z-z_j)(\overline{w}-\overline{z}_j) + \alpha i Im(z-z_j)(\overline{w}-\overline{z}_j)\\
&= -\frac{\alpha}{2}|w-z_j|^2 + \alpha(z-z_j)(\overline{w}-\overline{z}_j).
\end{aligned}
$$

En posant par la suite $u = w - z_j$, on a :

$$
\begin{aligned}
J_r(z) &= \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2} \int_{D(z_j,r)} \left|1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|w-z_j|^2+\alpha(z-z_j)(\overline{w}-\overline{z}_j)}\right| dA(w)\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2} \int_{|u|<r} \left|1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2+\alpha(z-z_j)u}\right| dA(u).
\end{aligned}
$$

Nous rappelons que pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, on a :

$$
|1-e^{\zeta}| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\zeta|^k}{k!} = e^{|\zeta|} - 1. \tag{2.10}
$$

Ainsi, pour tout $|u| \leq r$, en utilisant (2.10), le Lemme 2.6.5, l'inégalité de Young (pour $\epsilon = 2$) et le fait que $0 < r < 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
\left|1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2+\alpha(z-z_j)u}\right| &\leq e^{|-\frac{\alpha}{2}|u|^2+\alpha(z-z_j)u|} - 1\\
&\leq e^{\frac{\alpha}{2}r^2+\alpha|z-z_j|r} - 1 \leq e^{\frac{\alpha}{2}r+\alpha|z-z_j|r} - 1\\
&\leq re^{\frac{\alpha}{2}+\alpha|z-z_j|}\\
&\leq re^{\frac{\alpha}{2}}e^{\alpha(1+\frac{|z-z_j|^2}{4})}\\
&= re^{\frac{3}{2}\alpha}e^{\frac{\alpha}{4}|z-z_j|^2} = Cre^{\frac{\alpha}{4}|z-z_j|^2},
\end{aligned}
$$

avec $C = e^{\frac{3}{2}\alpha}$. Et par conséquent, en utilisant le Lemme 2.6.6, on a :

$$
\begin{aligned}
J_r(z) &\leq Cr\sum_{j=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2}e^{\frac{\alpha}{4}|z-z_j|^2} \int_{|u|<r} dA(u)\\
&= Cr\sum_{j=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{4}|z-z_j|^2}\pi r^2\\
&= C\pi r^3 \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{4}|z-z_j|^2}\\
&\leq Cr^3 \leq Cr.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|D_r f(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} &\leq \frac{\alpha}{\pi}\,\|f\|_{\infty,\alpha}\, J_r(z)\\
&\leq \frac{Cr\alpha}{\pi}\,\|f\|_{\infty,\alpha}\\
&= Cr\,\|f\|_{\infty,\alpha}\,.
\end{aligned}$$

avec C qui dépend uniquement de α.

D'où

$$\|D_r f\|_{\infty,\alpha} \leq Cr\,\|f\|_{\infty,\alpha}\,.$$

Il ressort que la norme d'opérateur de D_r sur F^∞_α vérifie :

$$\|D_r\|_{F^\infty_\alpha \longrightarrow F^\infty_\alpha} \leq Cr, \quad 0 < r < 1. \tag{2.11}$$

Estimons à présent la norme d'opérateur de D_r sur F^1_α.

Soit $f \in F^1_\alpha$, de (2.9), on a :

$$|D_r f(z)| \leq \frac{\alpha}{\pi}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{D_j}|f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\left|e^{\alpha z\overline{z}_j-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2} - e^{\alpha z\overline{w}-\frac{\alpha}{2}|w|^2-\alpha i Im(z_j\overline{w})}\right| dA(w).$$

En multipliant cette inégalité par $e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}$ et en intégrant sur $\mathbb{C}$, on obtient en utilisant le Théorème de Fubini (voir Théorème 1.1.11) :

$$\int_{\mathbb{C}}|D_r f(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}dA(z) \leq \frac{\alpha}{\pi}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{Dj}|f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}H(z_j,w)dA(w),$$

où

$$H(z_j,w) = \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\left|e^{\alpha z\overline{z}_j-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2} - e^{\alpha z\overline{w}-\frac{\alpha}{2}|w|^2-\alpha i Im(z_j\overline{w})}\right| dA(z).$$

Par des calculs élémentaires sur des nombres complexes, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha z\overline{z}_j - \frac{\alpha}{2}|z_j|^2 - \frac{\alpha}{2}|z|^2 &= -\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2 + \alpha i Im(z\overline{z}_j)\\
&= -\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2 + \alpha i Im((z-z_j)\overline{z}_j) \quad \text{car } Im(|z_j|^2) = 0.
\end{aligned}$$

et on a aussi

$$
\begin{aligned}
-\frac{\alpha}{2}|z|^2 + \alpha z\overline{w} - \frac{\alpha}{2}|w|^2 - \alpha i Im(z_j\overline{w}) &= -\frac{\alpha}{2}|z-w|^2 + \alpha i Im(z\overline{w}) - \alpha i Im(z_j\overline{w}) \\
&= -\frac{\alpha}{2}|z-w|^2 + \alpha i Im\left((z-z_j)\overline{w}\right)
\end{aligned}
$$

Donc en faisant le changement de variables $\zeta = z - z_j$, on a :

$$
\begin{aligned}
H(z_j, w) &= \int_{\mathbb{C}} \left| e^{-\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2 + \alpha i Im((z-z_j)\bar{z}_j)} - e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2 + \alpha i Im((z-z_j)\overline{w})} \right| dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left| e^{-\frac{\alpha}{2}|z-z_j|^2} - e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2 + \alpha i Im(z-z_j)(\overline{w}-\bar{z}_j)} \right| dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left| e^{-\frac{\alpha}{2}|\zeta|^2} - e^{-\frac{\alpha}{2}|\zeta-(w-z_j)|^2 + \alpha i Im(\zeta)(\overline{w}-\bar{z}_j)} \right| dA(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \left| 1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|z-(w-z_j)|^2 + \alpha i Im(z)(\overline{w}-\bar{z}_j) + \frac{\alpha}{2}|z|^2} \right| dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \left| 1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|w-z_j|^2 + \alpha z(\overline{w}-\bar{z}_j)} \right| dA(z).
\end{aligned}
$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |D_r f(z)| e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} dA(z) &\leq \frac{\alpha}{\pi} \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{Dj} |f(w)| e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \left| 1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|w-z_j|^2 + \alpha z(\overline{w}-\bar{z}_j)} \right| dA(z) \right) dA(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\int_{D_j} |f(w)| e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2 - \frac{\alpha}{2}|z|^2} \left| 1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|w-z_j|^2 + \alpha z(\overline{w}-\bar{z}_j)} \right| dA(w) \right) dA(z).
\end{aligned}
$$

Pour tout $w \in D_j \subset D(z_j, r)$, on a $|w - z_j| < r$ et en utilisant le Lemme 2.6.5 et l'inégalité de Young (voir Rappel 2.6.4) (pour $\epsilon = 2$), on a :

$$
\begin{aligned}
|1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|w-z_j|^2 + \alpha z(\overline{w}-\overline{z_j})}| &\leq e^{|-\frac{\alpha}{2}|w-z_j|^2 + \alpha z(\overline{w}-\overline{z_j})|} - 1 \\
&\leq e^{\frac{\alpha}{2}r^2 + \alpha|z|r} - 1 \leq e^{\frac{\alpha}{2}r + \alpha|z|r} - 1 \\
&\leq r e^{\frac{\alpha}{2} + \alpha|z|} \\
&\leq r e^{\frac{3\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4}|z|^2} = C r e^{\frac{\alpha}{4}|z|^2}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|D_r f\|_{1,\alpha} \leq Cr\frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{D_j} |f(w)| e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2 - \frac{\alpha}{2}|z|^2} e^{\frac{\alpha}{4}|z|^2} dA(w) dA(z)
$$

$$
\begin{aligned}
&= Cr\frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{D_j}|f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}e^{-\frac{\alpha}{4}|z|^2}dA(w)dA(z)\\
&= Cr\frac{\alpha}{\pi}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{D_j}|f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}dA(w)\int_{\mathbb{C}}e^{-\frac{\alpha}{4}|z|^2}dA(z).
\end{aligned}
$$

Puisque

$$\int_{\mathbb{C}}e^{-\frac{\alpha}{4}|z|^2}dA(z)=\frac{4\pi}{\alpha},$$

alors, on a d'après (2.7)

$$
\begin{aligned}
\|D_rf\|_{1,\alpha} &\leq Cr\frac{\alpha}{\pi}\frac{4\pi}{\alpha}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{D_j}|f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}dA(w)\\
&\leq 4CrN\int_{\mathbb{C}}|f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}dA(w)\\
&\leq Cr\,\|f\|_{1,\alpha}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\|D_r\|_{F^1_\alpha\longrightarrow F^1_\alpha}\leq Cr,\quad 0<r<1. \tag{2.12}$$

Pour r suffisamment petit, (2.11) et (2.12) deviennent :

$$\|D_r\|_{F^1_\alpha\longrightarrow F^1_\alpha}<1 \text{ et } \|D_r\|_{F^\infty_\alpha\longrightarrow F^\infty_\alpha}<1.$$

On déduit du théorème d'interpolation de Riesz Thorin que pour $1\leq p\leq+\infty$:

$$\|D_r\|_{F^p_\alpha\longrightarrow F^p_\alpha}<1.$$

Ceci montre, d'après le Théorème 1.3.21 que pour un r suffisamment petit que nous notons r_0, l'opérateur T_r est inversible sur F^p_α pour tout $1\leq p\leq+\infty$. Dans ce cas, on a : pour tout $f\in F^p_\alpha$, il existe $g\in F^p_\alpha$ tel que $f=T_rg$ ou encore $g=T_r^{-1}f$, et on obtient la décomposition :

$$f(z)=T_rg(z)=\sum_{j=1}^{+\infty}e^{\alpha z\bar{z}_j-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2}\frac{\alpha}{\pi}\int_{D_j}g(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2+\alpha iIm(z_j\overline{w})}dA(w),$$

c'est-à-dire que

$$f(z)=\sum_{j=1}^{+\infty}k_{z_j}(z)\lambda_j,$$

avec

$$\lambda_j = \frac{\alpha}{\pi} \int_{D_j} g(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2 + \alpha i Im(z_j \overline{w})} dA(w). \tag{2.13}$$

Montrons que pour tout $g \in F^p_\alpha$, la suite $\{\lambda_j\}$ donnée par (2.13) appartient à l^p.

Soit $g \in F^p_\alpha$, en utilisant l'inégalité de Hölder (1.1) et (2.7), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^p &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left| \frac{\alpha}{\pi} \int_{D_j} g(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2 + \alpha i Im(z_j \overline{w})} dA(w) \right|^p \\
&\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha^p}{\pi^p} \int_{D_j} |g(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}|^p dA(w) (\int_{D_j} dA(w))^{\frac{p}{q}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha^p}{\pi^p} \int_{D_j} |g(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}|^p dA(w) \left(\int_{D(z_j, r)} dA(w) \right)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq C \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{D_j} |g(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}|^p dA(w) \\
&\leq N \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |g(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}|^p dA(w) \\
&= C \, ||g||^p_{p,\alpha} < +\infty
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème dans le cas $1 \leq p \leq +\infty$.

Consulter le Théorème 2.34 dans [27] pour le cas $0 < p < 1$.

■

Remarque 2.6.8. **(Remarque très importante)**

La constante r_0 donnée par le Théorème 2.6.7 sera utilisée dans les prochains chapitres.

Chapitre Trois

CARACTÉRISATION DES SYMBOLES f POUR LESQUELS H_f EST BORNE (resp. COMPACT)

3.1. Introduction

L'étude des opérateurs de Hankel sur les espaces de Fock a été initiée par Berger et Coburn dans [2] où ils ont étudié la compacité des opérateurs de Hankel induits par des symboles bornés. Bauer dans [1] a caractérisé la continuité et la compacité des H_f induits par les fonctions réelles sur F_1^2. Plus tard dans [21], Per*ä*l*ä*, Schuster et Virtanen ont étendu le résultat sur F_α^p, avec $1 < p < +\infty$. Hu et Wang dans [14] ont obtenu des conditions équivalentes sur les fonctions f à valeurs réelles pour lesquelles H_f de F_α^p vers L_α^q est borné (compact), pour $1 \leq p, q < +\infty$. Ensuite, Lv dans [18] a établi les propriétés de H_f sur les espaces de Fock à poids F_ϕ^p avec $1 \leq p < +\infty$. Leur étude était restreinte aux symboles à valeurs réelles et pour ceux complexes, ils donnaient des caractérisations équivalentes pour H_f et $H_{\bar{f}}$. Hu et Lv dans [13] ont caractérisé les symboles complexes f pour lesquels H_f est borné (compact) sur l'espace de Fock à poids F_ϕ^p avec $1 \leq p < +\infty$.

Une question naturelle surgit donc suite à ces travaux : pour $1 \leq p, q < +\infty$, comment caractériser la continuité (resp. compacité) de H_f de F_α^p vers L_α^q induit par des symboles f à valeurs complexes. L'objectif de ce chapitre est de répondre à cette question en nous appuyant sur les travaux de E. Wang et Z. Xu dans [24].

3.2. Mesures (p, q)-Carleson

Rappels 3.2.1. Sauf mention contraire, L^p désignera $L^p(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}}, dA)$, où $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ désigne la tribu de Borel sur $\mathbb{C}$ et $dA(z) = dxdy$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.
Nous rappelons (Voir Théorème 2.4.3) que pour tous paramètres positifs α et γ l'ensemble

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_j K_\gamma(\cdot, z_j) : m \in \mathbb{N}^*, z_j \in \mathbb{C} \text{ et } a_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \ldots, m \right\},$$

est un sous-espace dense dans F^p_α. Puisque les z_j sont arbitraires, on posera en général $\gamma = \alpha$.
Posons

$$\Gamma = \left\{ f \text{ mesurable dans } \mathbb{C} \text{ telle que } : f k_z \in \cup_{p\geq 1} L^p_\alpha, \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \right\} \tag{3.1}$$

Définition 3.2.2. Soit $0 < p, q < +\infty$ et soit μ une mesure de Borel sur $\mathbb{C}$ positive et finie.

1. On dit que μ est une mesure (p, q)-Carleson pour F^p_α si l'opérateur $I_d : F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)$ est borné. C'est-à-dire, il existe une constante C telle que pour tout $f \in F^p_\alpha$,

$$\left(\int_{\mathbb{C}} |f(z) e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^q d\mu(z) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \, \|f\|_{p,\alpha} .$$

2. On dit que μ est une mesure (p, q)-Carleson évanescente pour F^p_α si l'opérateur I_d : $F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)$ est compact. C'est-à-dire pour toute suite borné $\{f_k\}_k$ d'éléments de F^p_α qui converge vers 0 uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{C}$, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{C}} |f_k(z) e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^q d\mu(z) = 0.$$

Dans ce qui suit, nous rappelons deux importantes caractérisations des mesures de Carleson établis par Xu et Lv dans [11].

Théorème 3.2.3. *Soient $0 < p \leq q < +\infty$ et μ une mesure de Borel positive sur $\mathbb{C}$. Alors, on a les assertions suivantes :*

(A) μ est une mesure (p, q)-Carleson pour F^p_α si et seulement si il existe (ou quelque soit) $r \in]0, r_0]$,

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \mu(D(z, r)) < +\infty. \tag{3.2}$$

De plus,

$$\|Id\|^q_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)} \simeq \sup_{z\in\mathbb{C}} \mu(D(z, r)). \tag{3.3}$$

(B) *μ est une mesure (p,q)-Carleson évanescente pour F^p_α si et seulement s'il existe (ou quel que soit) $r \in]0, r_0]$ tel que,*

$$\lim_{z\to\infty} \mu(D(z,r)) = 0. \tag{3.4}$$

Théorème 3.2.4. *Soient $0 < q < p < +\infty$ et μ une mesure positive de Borel sur $\mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A) *μ est une mesure (p,q)-Carleson pour F^p_α ;*

(B) *μ est une mesure (p,q)-Carleson évanescente pour F^p_α ;*

(C) *il existe (ou quel que soit) $r \in]0, r_0]$ tel que,*

$$\mu(D(\cdot,r)) \in L^{\frac{p}{p-q}}. \tag{3.5}$$

De plus,

$$\|Id\|^q_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)} \simeq \|\mu(D(\cdot,r))\|_{L^{\frac{p}{p-q}}}. \tag{3.6}$$

3.3. Propriétés de H_f de F^p_α vers L^q_α pour $1 \le p, q < +\infty$

Définition 3.3.1. Soit $1 \le p,q < +\infty$. Étant donnée une fonction $f \in \Gamma$ (voir 3.1), le grand opérateur de Hankel (ou tout simplement l'opérateur de Hankel) induit par le symbole f est densément défini de F^p_α vers L^q_α par : quel que soit $g \in \mathcal{K} \subset F^p_\alpha, z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} H_f g(z) &= (Id - P_\alpha)(fg)(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} (f(z) - f(w)) K_\alpha(z,w) g(w) e^{-\alpha|w|^2} dA(w), \end{aligned}$$

où Id désigne l'opérateur identité sur L^p_α.

Dans cette section, nous caractériserons les symboles f à valeurs complexes pour lesquels H_f s'étend en un opérateur borné (resp. compact) de F^p_α vers L^q_α. Pour cela, nous aurons besoin d'une fonction auxiliaire $G_{q,r}(f)$, qui avait premièrement été introduite par Luecking dans [17].

Définition 3.3.2. Soient $q \ge 1$ et $r > 0$. Pour $f \in L^q_{loc}$, on définit pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$G_{q,r}(f)(z) = \inf\left\{ \left(\frac{1}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} |f-h|^q dA \right)^{\frac{1}{q}} : h \in \mathcal{H}(D(z,r)) \right\}.$$

Propriété **3.3.3.** *Soient* $z \in \mathbb{C}$, $f \in L^q_{loc}$, *et* $w \in D(z, \frac{r}{2})$, *il existe* $C > 0$, *tel qu'on ait :*

$$G_{q,\frac{r}{2}}(f)(w) \leq CG_{q,r}(f)(z). \tag{3.7}$$

Preuve. En effet, pour $w \in D(z, \frac{r}{2})$, on a $D(w, \frac{r}{2}) \subset D(z, r)$. Ainsi, pour toute fonction $h \in \mathcal{H}(D(z, r))$, on a $h \in \mathcal{H}(D(w, \frac{r}{2}))$ et

$$\int_{D(w,\frac{r}{2})} |f - h|^q dA \leq \int_{D(z,r)} |f - h|^q dA,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{|D(w, \frac{r}{2})|} \int_{D(w,\frac{r}{2})} |f - h|^q dA \leq \frac{1}{|D(w, \frac{r}{2})|} \int_{D(z,r)} |f - h|^q dA.$$

D'où par la propriété de la borne inférieure, on a :

$$G^q_{q,\frac{r}{2}}(f)(w) \leq \frac{1}{|D(w, \frac{r}{2})|} \int_{D(z,r)} |f - h|^q dA = \frac{|D(z, r)|}{|D(w, \frac{r}{2})|} \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z,r)} |f - h|^q dA.$$

Et par suite, on a :

$$G^q_{q,\frac{r}{2}}(f)(w) \leq 4G^q_{q,r}(f)(z).$$

En prenant $C = 4^{\frac{1}{q}}$ on a le résultat. ∎

Définition **3.3.4.** Soit $r > 0$. On rappelle que l'opérateur moyenne locale M_r sur L^1_{loc} est défini par

$$M_r(f)(z) = \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z,r)} f(w)dA(w) \, ,$$

pour tous $f \in L^1_{loc}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 3.3.5. Puisque la fonction nulle est une fonction holomorphe, alors pour tout $f \in L^q_{loc}$ et pour tout, $z \in \mathbb{C}$ $G_{q,r}(f)(z) \leq M_r(|f|^q)^{\frac{1}{q}}(z)$.

Propriété **3.3.6.** *Soit* $r > 0$.

1. *Pour* $f \in L^1_{loc}$ *; telle que* f *soit holomorphe ; on a :*

$$|f| \leq M_r(|f|), \quad \textit{presque partout dans } \mathbb{C}.$$

2. *Dans L^∞, on a :*

$$\|M_r(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Preuve. Voir Corollaire 2.1.16 dans [9]. ■

3.3.1. Caractérisation des symboles f pour lesquels H_f de F^p_α vers L^q_α est borné (resp. compact) pour $1 \leq p \leq q < +\infty$

Dans cette sous section, nous établissons deux principaux théorèmes qui caractérisent les symboles complexes f pour lesquels H_f de F^p_α vers L^q_α est borné (resp. compact) pour $1 \leq p \leq q < +\infty$.

Théorème 3.3.7. *Soit $1 \leq p \leq q < +\infty$. Alors pour $f \in \Gamma$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A) $H_f : F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha$ est borné ;

(B) il existe (ou quel que soit) $r \in]0, r_0]$, $G_{q,r}(f) \in L^\infty$;

(C) f admet une décomposition $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in C^1(\mathbb{C})$ satisfait

$$\overline{\partial} f_1 \in L^\infty, \tag{3.8}$$

et f_2 a la propriété suivante : il existe (ou quel que soit) $r > 0$,

$$M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}} \in L^\infty. \tag{3.9}$$

De plus,

$$\left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha} \simeq \left\|G_{q,r}(f)\right\|_{L^\infty} \simeq \left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^\infty} + \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^\infty}. \tag{3.10}$$

Pour établir la preuve de ce théorème, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.8. Soient $r \in]0, r_0]$ et $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ un $\frac{r}{2}$−treillis dans $\mathbb{C}$. Pour tout $j \geq 1$, il existe $h_j \in \mathcal{H}(D(z_j, r))$ telle que :

$$\frac{1}{|D(z_j, r)|} \int_{D(z_j,r)} |f - h_j|^q dA \leq G^q_{q,r}(f)(z_j). \tag{3.11}$$

Preuve. Soit $j \geq 1$, on a :

$$G_{q,r}(f)(z_j) = \inf\left\{\left(\frac{1}{|D(z_j,r)|}\int_{D(z_j,r)} |f-h|^q dA\right)^{\frac{1}{q}} : h \in \mathcal{H}(D(z_j,r))\right\}$$

Ainsi, de la propriété de la borne inférieure, quel que soit $k \geq 1$, il existe $h_{j,k} \in \mathcal{H}(D(z_j,r))$ tel que

$$\left(\frac{1}{|D(z_j,r)|}\int_{D(z_j,r)} |f-h_{j,k}|^q\, dA\right)^{\frac{1}{q}} \leq G_{q,r}(f)(z_j) + \frac{1}{k}. \tag{3.12}$$

Montrons que $\{h_{j,k}\}_k$ est une famille uniformément bornée dans $D(z_j,r)$.

Soit K un compact contenu dans $D(z_j,r)$ et soit $z \in K$. Puisque, quel que soit $k \geq 1$, $h_{j,k}$ est holomorphe, alors $|h_{j,k}|^q$ est sous-harmonique. Ainsi, pour tout $\rho > 0$ tel que $\overline{D(z,\rho)} \subset D(z_j,r)$, on a :

$$\begin{aligned}
|h_{j,k}(z)|^q &\leq \frac{1}{|D(z,\rho)|}\int_{D(z,\rho)} |h_{j,k}(w)|^q dA(w)\\
&\leq C(K)\frac{1}{|D(z_j,r)|}\int_{D(z_j,r)} |h_{j,k}(w) - f(w) + f(w)|^q dA(w).
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Minkowski (1.3) et (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned}
|h_{j,k}(z)| &\leq C(K)\left(\frac{1}{|D(z_j,r)|}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\int_{D(z_j,r)} |h_{j,k}(w)-f(w)|^q dA(w)\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{D(z_j,r)} |f(w)|^q dA(w)\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&\leq C(K)\left[G_{q,r}(f)(z_j) + \frac{1}{k} + G_{q,r}(f)(z_j)\right]\\
&\leq C(K)(2G_{q,r}(f)(z_j) + 1).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\{h_{j,k}\}_k$ est une famille uniformément bornée dans $D(z_j,r)$, et par conséquent une famille normale. On peut ainsi en extraire une sous suite qui converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ contenu dans $D(z_j,r)$ vers une fonction $h_j \in \mathcal{H}(D(z_j,r))$ lorsque $k \to +\infty$. En appliquant le lemme de Fatou (Lemme1.2.12) à (3.12), on obtient :

$$\frac{1}{|D(z_j,r)|}\int_{D(z_j,r)} |f-h_j|^q dA \leq G^q_{q,r}(f)(z_j).$$

■

Lemme 3.3.9. Soit $1 \leq p \leq q < +\infty$. Soit $f \in \Gamma$ qui admet la décomposition $f = f_1 + f_2$. Si on suppose que f_1 satisfait (3.8) et f_2 satisfait (3.9) comme au Théorème 3.3.7, alors :

1. La mesure $d\mu = |\overline{\partial} f_1|^q dA$ est une mesure $(p,q)-$Carleson pour F^p_α et

$$\|I_d\|_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)} \leq C \left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^\infty}. \tag{3.13}$$

2. La mesure $d\nu = |f_2|^q dA$ est une mesure $(p,q)-$Carleson pour F^p_α et

$$\|I_d\|_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\nu)} \leq C \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^\infty}. \tag{3.14}$$

<u>**Preuve.**</u> Soit $r \in]0, r_0]$,

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \mu(D(z,r)) &= \int_{D(z,r)} d\mu = \int_{D(z,r)} |\overline{\partial} f_1|^q dA \\ &\leq \left\|\overline{\partial} f_1\right\|^q_{L^\infty} \int_{D(z,r)} dA(w) \\ &\leq \pi r_0^2 \left\|\overline{\partial} f_1\right\|^q_{L^\infty}. \end{aligned}$$

   D'où $\sup_{z\in\mathbb{C}} \mu(D(z,r)) \leq \pi r_0^2 \left\|\overline{\partial} f_1\right\|^q_{L^\infty} < +\infty$. Il vient du Théorème 3.2.3 que $d\mu = |\overline{\partial} f_1|^q dA$ est une mesure $(p,q)-$Carleson sur F^p_α et

$$\|I_d\|^q_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)} \simeq \sup_{z\in\mathbb{C}} \mu(D(z,r)) \leq C \left\|\overline{\partial} f_1\right\|^q_{L^\infty}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, en utilisant la Propriété 3.3.6, on a :

$$\begin{aligned} \nu(D(z,r)) &= \int_{D(z,r)} d\nu(w) = \int_{D(z,r)} |f_2|^q(w) dA(w) \\ &\leq \int_{D(z,r)} M_r(|f_2|^q)(w) dA(w) = \int_{D(z,r)} [M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}(w)]^q dA(w) \\ &\leq \pi r_0^2 \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|^q_{L^\infty}. \end{aligned}$$

   D'où, $\sup_{z\in\mathbb{C}} \mu(D(z,r)) \leq \pi r_0^2 \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|^q_{L^\infty} < \infty$. Il vient du Théorème 3.2.3 que $d\nu = |f_2|^q dA$ est une mesure $(p,q)-$Carleson pour F^p_α et

$$\|I_d\|^q_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\nu)} \simeq \sup_{z\in\mathbb{C}} \mu(D(z,r)) \leq C \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|^q_{L^\infty}.$$

■

Lemme 3.3.10. (Proposition 1.4 dans [20])

Soit ϕ une fonction sous-harmonique telle que $\Delta\phi$ soit une mesure double. La solution u de l'équation $\overline{\partial} u = f$ de norme minimal dans $L^2(e^{-2\phi})$ est telle que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $\left\|ue^{-\phi}\right\|_{L^p(\mathbb{C})} \lesssim \left\|fe^{-\phi}\rho\right\|_{L^p(\mathbb{C})}$.

Preuve. (Preuve du Théorème 3.3.7)

Montrons que $(A) \Rightarrow (B)$. Soit $r \in]0, r_0]$ fixé. Soit $z \in \mathbb{C}$, on rappelle que pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a :

$$|k_z(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} = e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2}.$$

Ainsi, quel que soit $w \in D(z, r)$, on a :

$$|k_z(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \geq e^{-\frac{q\alpha}{2}r^2} \geq e^{-\frac{q\alpha}{2}r_0^2}. \tag{3.15}$$

Puisque la fonction k_z est holomorphe et ne s'annule pas, alors $\frac{P_\alpha(fk_z)}{k_z} \in \mathcal{H}(D(z, r))$. En utilisant (3.15) et la définition de la borne inférieure dans la Définition 3.3.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|H_f k_z\right\|_{q,\alpha}^q &= \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |fk_z(w) - P_\alpha(fk_z)(w)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|w|^2} dA(w)\\
&= \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \left|f(w) - \frac{P_\alpha(fk_z)}{k_z}\right|^q |k_z(w)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|w|^2} dA(w)\\
&\geq \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{D(z,r)} \left|f(w) - \frac{P_\alpha(fk_z)}{k_z}\right|^q |k_z(w)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|w|^2} dA(w)\\
&\geq C\int_{D(z,r)} \left|f(w) - \frac{P_\alpha(fk_z)}{k_z}\right|^q dA(w)\\
&\geq C|D(z, r)|G_{q,r}^q(f)(z)\\
&= CG_{q,r}^q(f)(z).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

De plus, comme $||k_z||_{p,\alpha} = 1$ et $H_f : F_\alpha^p \longrightarrow L_\alpha^q$ est borné, alors

$$\left\|H_f k_z\right\|_{q,\alpha}^q \leq \left\|H_f\right\|_{F_\alpha^p \longrightarrow L_\alpha^q}^q ||k_z||_{p,\alpha}^q = \left\|H_f\right\|_{F_\alpha^p \longrightarrow L_\alpha^q}^q .$$

Par conséquent, $G_{q,r}(f) \in L^\infty$ et

$$\left\|G_{q,r}(f)\right\|_{L^\infty} \leq C\left\|H_f\right\|_{F_\alpha^p \longrightarrow L_\alpha^q} . \tag{3.17}$$

D'où (B).

Montrons que (B) $\Rightarrow$ (C). Soit $r \in]0, r_0]$ tel que $G_{q,r}(f) \in L^\infty$. Fixons $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ un $\frac{r}{2}-$treillis dans $\mathbb{C}$ et $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ une partition de l'unité (voir Théorème 1.3.13) subordonnée au recouvrement $\{D(z_j, \frac{r}{2})\}_{j=1}^\infty$ de $\mathbb{C}$, telle que $|\overline{\partial}\phi_j| \leq C$. (L'existence d'une telle partition de l'unité vient du lemme d'Urysohn (Lemme 1.4.18) et la dernière propriété sur les dérivées partielles vient du fait que les fonctions soient C^∞ à support compact et uniformément bornées.)

En utilisant le Lemme 3.3.8, on construit une suite $\{h_j\}$ associée au $\frac{r}{2}-$treillis $\{z_j\}_{j=1}^\infty$, avec $h_j \in D(z_j, r)$ et vérifiant (3.11) . Définissons les fonctions f_1 et f_2 comme suit :

$$f_1(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} h_j(z)\phi_j(z) \in C^\infty(\mathbb{C})$$

et $f_2 = f - f_1$. Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $J_z = \{j : z \in D(z_j, \frac{r}{2})\}$. D'après (2.6),

$$|J_z| := \sum_{j=1}^{+\infty} \chi_{D(z_j,\frac{r}{2})}(z) \leq N. \tag{3.18}$$

Si $z \in D(z_j, \frac{r}{2}) \cap D(z_k, \frac{r}{2})$, alors $D(z, \frac{r}{2}) \subset D(z_j, r)$ et $D(z, \frac{r}{2}) \subset D(z_k, r)$. Ainsi, la sous-harmonicité de $|h_j - h_k|^q$ donne :

$$\begin{aligned} |h_j(z) - h_k(z)|^q &\leq \frac{1}{|D(z, \frac{r}{2})|} \int_{D(z,\frac{r}{2})} |h_j(w) - h_k(w)|^q dA(w) \\ &= \frac{1}{|D(z, \frac{r}{2})|} \int_{D(z,\frac{r}{2})} |h_j(w) - f(w) + f(w) - h_k(w)|^q dA(w). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski (1.3) et (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned} |h_j(z) - h_k(z)| &\leq 4^{\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{1}{|D(z_j, r)|}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{D(z_j,r)} |h_j - f|^q dA\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{|D(z_k, r)|}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{D(z_k,r)} |h_k - f|^q dA\right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &\leq C[G_{q,r}(f)(z_j) + G_{q,r}(f)(z_k)]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Si on suppose que $1 \in J_z$, alors on a :

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{j=1}^{+\infty} h_j(z)\phi_j(z) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} (h_j(z) - h_1(z))\phi_j(z) + \sum_{j=1}^{+\infty} h_1(z)\phi_j(z) \\ &= h_1(z) + \sum_{j=1}^{+\infty} (h_j(z) - h_1(z))\phi_j(z), \end{aligned}$$

car $\sum_{j=1}^{+\infty} \phi_j = 1$.

Puisque quel que soit j, on a $h_j \in \mathcal{H}(D(z_j, r))$ et $supp\ \phi_j \subset D(z_j, \frac{r}{2})$, alors

$$\overline{\partial} f_1(z) \;=\; \sum_{j=1}^{+\infty} (h_j(z) - h_1(z)) \overline{\partial} \phi_j(z).$$

D'où

$$\begin{aligned} |\overline{\partial} f_1(z)| &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} |h_j(z) - h_1(z)||\overline{\partial} \phi_j(z)| \\ &\leq C \sum_{j \in J_z} |h_j(z) - h_1(z)| \end{aligned}$$

Ainsi, de (3.19), on a :

$$|\overline{\partial} f_1(z)| \leq C \sum_{j \in J_z} G_{q,r}(f)(z_j). \tag{3.20}$$

En utilisant le fait que $G_{q,r}(f) \in L^\infty$, (3.18) et (3.20) impliquent que

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |\overline{\partial} f_1(z)| \leq C \left\| G_{q,r}(f) \right\|_{L^\infty} \tag{3.21}$$

d'où (3.8).

Soit $z \in \mathbb{C}$, puisque le disque $D(z, r)$ ne rencontre qu'un nombre fini de disques $D(z_j, \frac{r}{2})$, alors l'inégalité de Minkowski, le fait que $supp\ \phi_j \subset D(z_j, \frac{r}{2})$, $0 \leq \phi_j \leq 1$ pour tout j, et le Lemme 3.3.8, donnent :

$$\begin{aligned} M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}(z) &= \left(\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z,r)} |f_2|^q dA \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z,r)} |f - f_1|^q dA \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z,r)} |f \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j - \sum_{j=1}^{\infty} h_j \phi_j|^q dA \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z,r)} |(f - h_j)\phi_j|^q dA \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z,r) \cap D(z_j, \frac{r}{2})} |f - h_j|^q dA \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \sum_{j \in J_z} G_{q,r}(f)(z_j) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ainsi,

$$M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}(z) \leq C \left\|G_{q,r}(f)\right\|_{L^\infty} \tag{3.23}$$

car $G_{q,r}(f) \in L^\infty$. D'où (3.9).

De plus, (3.21) et (3.23) impliquent que

$$\left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^\infty} + \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^\infty} \leq C \left\|G_{q,r}(f)\right\|_{L^\infty}. \tag{3.24}$$

Montrons que (C) $\Rightarrow$ (A). Supposons que f admette la décomposition suivante : $f = f_1 + f_2$, avec f_1 qui satisfait (3.8) et f_2 qui satisfait (3.9). Alors quel que soit $g \in F^p_\alpha$, nous pouvons remarquer que $H_{f_1}g$ est la solution canonique de l'équation $\overline{\partial}u = g\overline{\partial}f_1$. En effet, pour $g \in F^p_\alpha$, on a $H_{f_1}g = f_1 g - P_\alpha(f_1 g)$. Comme $P_\alpha(f_1 g), g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, alors $\overline{\partial}(H_{f_1}g) = g\overline{\partial}f_1$. En appliquant la Proposition 1.4 dans [20] avec $\phi(z) = \frac{\alpha}{2}|z|^2$, on a :

$$\left\|H_{f_1}g\right\|_{q,\alpha} \leq C \left\|g\overline{\partial}f_1\right\|_{q,\alpha}. \tag{3.25}$$

Soit $g \in F^p_\alpha$, en appliquant le Lemme 3.3.9, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|g\overline{\partial}f_1\right\|_{q,\alpha} &= \left(\frac{q\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{C}} |g(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^q |\overline{\partial}f_1|^q dA(z)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{q\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{C}} |g(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^q d\mu(z)\right)^{\frac{1}{q}} = ||g||_{L^q_\alpha(d\mu)} \\
&\leq ||I_d||_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)} ||g||_{p,\alpha} \\
&\leq C \left\|\overline{\partial}f_1\right\|_{L^\infty} ||g||_{p,\alpha}.
\end{aligned}$$

Ceci combiné à (3.25) donnent :

$$\left\|H_{f_1}g\right\|_{q,\alpha} \leq C \left\|g\overline{\partial}f_1\right\|_{q,\alpha} \leq C \left\|\overline{\partial}f_1\right\|_{L^\infty} ||g||_{p,\alpha}. \tag{3.26}$$

Puisque l'opérateur $I_d - P_\alpha : L^q_\alpha \longrightarrow F^q_\alpha$ est borné, en appliquant la deuxième partie du Lemme 3.3.9 pour f_2, quel que soit $g \in F^p_\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|H_{f_2}g\right\|_{q,\alpha} &= ||(I_d - P_\alpha)(f_2 g)||_{q,\alpha} \\
&\leq C\,||f_2 g||_{q,\alpha} = C \left(\frac{q\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{C}} |ge^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^q |f_2|^q dA(z)\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\left(\frac{q\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{C}}|ge^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}|^q d\nu(z)\right)^{\frac{1}{q}} = C\,\|g\|_{L^q_\alpha(d\nu)}\\
&\leq C\,\|I_d\|^q_{F^p_\alpha\hookrightarrow L^q_\alpha(d\nu)}\,\|g\|_{p,\alpha}\\
&\leq C\left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^\infty}\|g\|_{p,\alpha}\,,
\end{aligned}
$$

où $d\nu(z) = |f_2|^q dA(z)$.

D'où

$$
\left\|H_{f_2}g\right\|_{q,\alpha} \leq C\left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^\infty}\|g\|_{p,\alpha}\,. \tag{3.27}
$$

De (3.26) et (3.27), on a : quel que soit $g \in F^p_\alpha$

$$
\begin{aligned}
\left\|H_f g\right\|_{q,\alpha} &= \left\|H_{f_1}g + H_{f_2}g\right\|_{q,\alpha} \leq \left\|H_{f_1}g\right\|_{q,\alpha} + \left\|H_{f_2}g\right\|_{q,\alpha}\\
&\leq C\left(\left\|\overline{\partial}f_1\right\|_{L^\infty} + \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^\infty}\right)\|g\|_{p,\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

Ce qui montre que $H_f : F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha$ est borné et

$$
\left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha\longrightarrow L^q_\alpha} \leq C\left(\left\|\overline{\partial}f_1\right\|_{L^\infty} + \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^\infty}\right). \tag{3.28}
$$

De plus, (3.17), (3.28) et (3.24) donnent :

$$
\left\|G_{q,r}(f)\right\|_{L^\infty} \leq C\left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha\longrightarrow L^q_\alpha} \leq C_1\left(\left\|\overline{\partial}f_1\right\|_{L^\infty} + \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^\infty}\right) \leq C_2\left\|G_{q,r}(f)\right\|_{L^\infty}.
$$

D'où (3.10). Ce qui achève la preuve du théorème. ■

Théorème 3.3.11. *Soit $1 \leq p \leq q < +\infty$. Alors pour $f \in \Gamma$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A) $H_f : F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha$ est compact ;

(B) il existe (ou quel que soit) $r \in]0, r_0]$, $\lim_{z\to\infty} G_{q,r}(f)(z) = 0$;

(C) f admet une décomposition $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in C^1(\mathbb{C})$ satisfait

$$
\lim_{z\to\infty}|\overline{\partial}f_1(z)| = 0, \tag{3.29}
$$

et il existe (ou quel que soit) $r > 0$, tel que

$$\lim_{z\to\infty} M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}(z) = 0\ . \tag{3.30}$$

<u>Preuve</u>. Montrons que (A) $\Rightarrow$ (B). Supposons que $H_f : F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha$ soit compact. En utilisant (3.16) dans la preuve du Théorème 3.3.7, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $G_{q,r}(f)(z) \leq C\left\|H_f k_z\right\|_{q,\alpha}$. D'après le Corollaire 2.5.2 $\{k_z\}_{z\in\mathbb{C}}$ est borné dans F^p_α et y converge faiblement vers 0 lorsque $z \to \infty$. La compacité de H_f entraine que, $\lim_{z\to\infty}\left\|H_f k_z\right\|_{q,\alpha} = 0$. Ainsi $\lim_{z\to\infty} G_{q,r}(f)(z) = 0$. D'où (A) $\Rightarrow$ (B).

Montrons que (B) $\Rightarrow$ (C). Supposons que (B) soit vraie. De (3.20) et (3.22), on a :

$$|\overline{\partial} f_1(z)| \leq C \sum_{j\in J_z} G_{q,r}(f)(z_j)$$

et

$$M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}(z) \leq C \sum_{j\in J_z} G_{q,r}(f)(z_j).$$

En faisant tendre z vers ∞, on obtient (C).

Montrons que (C) $\Rightarrow$ (A). Supposons que (C) soit vraie, alors (3.29) et (3.30) impliquent que $\left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^\infty} = 0$ et $\left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^\infty} = 0$. En posant $d\mu = |\overline{\partial} f_1|^q dA$ et $d\nu = |f_2|^q dA$, on obtient en procédant comme dans la preuve du Lemme 3.3.9 que, quel que soit $r \in]0, r_0]$,

$$\lim_{z\to\infty} \mu(D(z, r)) = 0$$

et

$$\lim_{z\to\infty} \nu(D(z, r)) = 0.$$

Ce qui montre, d'après le Théorème 3.2.3, que $d\mu$ et $d\nu$ sont des mesures $(p, q)-$Carleson évanescentes pour F^p_α.

Soit $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ une suite bornée dans F^p_α qui converge uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{C}$ lorsque $k \to \infty$. Alors, lorsque $k \to \infty$, il vient de (3.25) et de la définition de mesure $(p, q)-$Carleson évanescente que, ,

$$\left\|H_{f_1}(g_k)\right\|_{q,\alpha} \leq C\left\|g_k \overline{\partial} f_1\right\|_{q,\alpha} = C\left\|g_k\right\|_{L^q_\alpha(d\mu)} \to 0,$$

et

$$\left\|H_{f_2}(g_k)\right\|_{q,\alpha} \leq C\left\|f_2 g_k\right\|_{q,\alpha} = C\left\|g_k\right\|_{L^q_\alpha(d\nu)} \to 0.$$

Ceci conduit à :

$$\lim_{k\to\infty}\left\|H_f(g_k)\right\|_{q,\alpha} = 0.$$

D'où $H_f : F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha$ est compact. Ce qui achève la preuve du théorème.

■

3.3.2. Caractérisation des symboles f pour lesquels H_f de F^p_α vers L^q_α est borné (resp. compact) pour $1 \leq q < p < +\infty$

A présent, nous caractérisons les symboles à valeurs complexes pour lesquels les opérateurs H_f sont à la fois bornés et compacts de F^p_α vers L^q_α, pour $1 \leq q < p < +\infty$. Les inégalités de Khinchine nous seront utiles pour établir ces résultats.

Définition 3.3.12. Pour $k = 1, 2, \cdots$, on définit la fonction de Rademacher r_k sur $\mathbb{R}$ par :

$$r_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t - [t] < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t - [t] < 1 \end{cases}$$

et $r_k(t) = r_0(2^k t)$, où $[t]$ désigne la partie ent¨ière inférieure de t (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à t).

Proposition 3.3.13. ***(Inégalités de Khinchine)*** *Pour $0 < l < +\infty$, il existe des constantes positives C_1 et C_2 dépendant de l uniquement, telles que pour tout $m \geq 1$ et tous nombres complexes $b_1, b_2, \cdots, b_m$, on ait :*

$$C_1\left(\sum_{k=1}^m |b_k|^2\right)^{\frac{l}{2}} \leq \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^m b_k r_k(t)\right|^l dt \leq C_2\left(\sum_{k=1}^m |b_k|^2\right)^{\frac{l}{2}} \tag{3.31}$$

Théorème 3.3.14. *Soit $1 \leq q < p < +\infty$. Posons $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Alors, pour $f \in \Gamma$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A) $H_f : F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha$ est borné ;

(B) $H_f : F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha$ est compact ;

(C) il existe (ou quelque soit) $r \in]0, \frac{r_0}{2}]$, $G_{q,r}(f) \in L^s$;

(D) f admet une décomposition $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in C^1(\mathbb{C})$ satisfait

$$\overline{\partial} f_1 \in L^s, \tag{3.32}$$

et f_2 a la propriété suivante : il existe (ou quel que soit) $r > 0$,

$$M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}} \in L^s. \tag{3.33}$$

En outre, pour tout $r \in]0, \frac{r_0}{2}]$,

$$\left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha} \simeq \left\|G_{q,r}(f)\right\|_{L^s}. \tag{3.34}$$

Pour établir la preuve de ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.15. Soit $1 \leq q < p < \infty$ et soit $f \in \Gamma$ admettant la décomposition $f = f_1 + f_2$. Si on suppose que f_1 satisfait (3.32) et f_2 satisfait (3.33), alors :

(a) La mesure $d\mu = |\overline{\partial} f_1|^q dA$ est une mesure $(p, q)-$Carleson (évanescente) pour F^p_α et pour tout $r \in]0, r_0]$,

$$\|I_d\|_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)} \leq C \left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^s}. \tag{3.35}$$

(b) La mesure $d\nu = |f_2|^q dA$ est une mesure $(p, q)-$Carleson (évanescente) pour F^p_α et

$$\|I_d\|_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\nu)} \leq C \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^s}. \tag{3.36}$$

__Preuve.__ Soit $r \in]0, r_0]$. On rappelle que $s = \frac{pq}{p-q}$, et $\frac{s}{q} = \frac{p}{p-q} = \frac{1}{1-\frac{q}{p}} > 1$.

(a) En utilisant l'inégalité de Hölder (1.1) et le théorème de Fubini (Théorème 1.1.11), on a :

$$\begin{aligned}
\|\mu(D(\cdot, r))\|^{\frac{p}{p-q}}_{L^{\frac{p}{p-q}}} &= \int_{\mathbb{C}} |\mu(D(z, r))|^{\frac{p}{p-q}} dA(z) = \int_{\mathbb{C}} \left[\int_{D(z,r)} |\overline{\partial} f_1|^q(w) dA(w)\right]^{\frac{p}{p-q}} dA(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{C}} \left[\int_{D(z,r)} |\overline{\partial} f_1(w)|^s dA(w)\right]^{\frac{q}{s}\frac{s}{q}} \left[\int_{D(z,r)} dA(w)\right]^{(1-\frac{q}{s})\frac{s}{q}} dA(z) \\
&= C \int_{\mathbb{C}} \int_{D(z,r)} |\overline{\partial} f_1(w)|^s dA(w) dA(z) = C \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \chi_{D(z,r)}(w) |\overline{\partial} f_1(w)|^s dA(w) dA(z) \\
&= C \int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} f_1(w)|^s \left[\int_{\mathbb{C}} \chi_{D(z,r)}(w) dA(z)\right] dA(w)
\end{aligned}$$

$$\leq \quad C\int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} f_1(w)|^s dA(w). \tag{3.37}$$

Ce qui montre que $\mu(D(.,r)) \in L^{\frac{p}{p-q}}$. On déduit du Théorème 3.2.4 et (3.37) que μ est une mesure $(p,q)-$Carleson (évanescente) pour F^p_α et

$$\|I_d\|_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)} \simeq \|\mu(D(\cdot,r))\|_{L^{\frac{p}{p-q}}} \leq C\left\|\overline{\partial} f_1\right\|^q_{L^s}.$$

(b) En utilisant le théorème de Fubini (Théorème 1.1.11) , on a :

$$\begin{aligned}
\|\nu(D(\cdot,r))\|^{\frac{p}{p-q}}_{L^{\frac{p}{p-q}}} &= \int_{\mathbb{C}} |\nu(D(z,r))|^{\frac{p}{p-q}} dA(z) = \int_{\mathbb{C}}\left[\int_{D(z,r)} |f_2(w)|^q dA(w)\right]^{\frac{p}{p-q}} dA(z)\\
&= \int_{\mathbb{C}}\left[|D(z,r)|\frac{1}{|D(z,r)|}\int_{D(z,r)} |f_2|^q(w) dA(w)\right]^{\frac{p}{p-q}} dA(z)\\
&= \int_{\mathbb{C}} |D(z,r)|^{\frac{s}{q}}\left[M_r(|f_2|^q)(z)\right]^{\frac{s}{q}} dA(z)\\
&= C\int_{\mathbb{C}}\left[M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}(z)\right]^s dA(z).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Ce qui montre que $\nu(D(.,r)) \in L^{\frac{p}{p-q}}$. On déduit du Théorème 3.2.4 et (3.38) que ν est une mesure $(p,q)-$Carleson (évanescente) pour F^p_α et

$$\|I_d\|_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)} \simeq \|\nu(D(\cdot,r))\|_{L^{\frac{p}{p-q}}} \leq C\left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|^q_{L^s}.$$

■

<u>**Preuve.**</u> **(Preuve du Théorème 3.3.14)** Puisque tout opérateur compact est borné, alors l'implication $(B) \Rightarrow (A)$ est triviale. Nous montrerons les implications $(A) \Rightarrow (C) \Rightarrow (D) \Rightarrow (B)$.

Montrons que $(A) \Rightarrow (C)$. Soit $r \in]0, \frac{r_0}{2}]$ fixé et $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ un $r-$treillis. D'après le Lemme 2.6.6, on sait que, quel que soit $\{\lambda_k\} \in l^p$, la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$g_t(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k r_k(t) k_{z_k}(z)$$

appartient à F^p_α et $\|g_t\|_{p,\alpha} \leq C\,\|\{\lambda_k\}\|_{l^p}$. Le fait que H_f soit borné implique

$$\left\|H_f g_t\right\|_{q,\alpha} \leq \left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha} \|g_t\|_{p,\alpha} \leq C\left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha} \|\{\lambda_k\}\|_{l^p}.$$

Or $\|\{\lambda_k\}\|_{l^p} = \|\{|\lambda_k|^q\}\|_{l^{\frac{p}{q}}}^{\frac{1}{q}}$. Donc

$$\left\|H_f g_t\right\|_{q,\alpha} \leq C \left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha} \|\{|\lambda_k|^q\}\|_{l^{\frac{p}{q}}}^{\frac{1}{q}} .$$

Les inégalités de Khinchine (3.31) nous permettent d'écrire

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k r_k(t) k_{z_k}(z)\right|^q dt \simeq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |k_{z_k}(z)|^2\right)^{\frac{q}{2}}$$

car quel que soit k, $|r_k| = 1$.

Puisque pour tout j

$$|\lambda_j|^2 |H_f k_{z_j}|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 |H_f k_{z_k}|^2$$

et pour tous $j \geq 1$ et $z \in D(z_j, \frac{r}{4})$,

$$|k_{z_j}(z)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} = e^{-\frac{q\alpha}{2}|z-z_j|^2} \geq e^{-\frac{q\alpha}{128} r_0^2}.$$

Alors on obtient, en appliquant le Théorème de Fubini (Théorème 1.1.11) et (2.7), que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\|H_f g_t\right\|_{q,\alpha}^q dt &= \int_0^1 \frac{q\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |H_f g_t(z)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) dt \\
&= \frac{q\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k r_k(t) H_f k_{z_k}(z) \right|^q dt \right) e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&\geq C \int_{\mathbb{C}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 |H_f k_{z_k}|^2 \right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&\geq C \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{D(z_j, \frac{r}{4})} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 |H_f k_{z_k}|^2 \right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&\geq C \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{D(z_j, \frac{r}{4})} \left(|\lambda_j|^2 |H_f k_{z_j}|^2 \right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&= C \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^q \int_{D(z_j, \frac{r}{4})} |f(z) k_{z_j}(z) - P_\alpha(f k_{z_j})(z)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&= C \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^q \int_{D(z_j, \frac{r}{4})} \left| f(z) - \frac{P_\alpha(f k_{z_j})(z)}{k_{z_j}(z)} \right|^q |k_{z_j}(z)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\
&\geq C \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^q \int_{D(z_j, \frac{r}{4})} \left| f(z) - \frac{P_\alpha(f k_{z_j})(z)}{k_{z_j}(z)} \right|^q dA(z)
\end{aligned}$$

$$\geq \quad C \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^q \left[G_{q,\frac{r}{4}}(f)(z_j)\right]^q.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^q \left[G_{q,\frac{r}{4}}(f)(z_j)\right]^q &\leq \int_0^1 \left\|H_f g_t\right\|_{q,\alpha}^q dt \\
&\leq C \int_0^1 \left\|H_f\right\|_{F_\alpha^p \longrightarrow L_\alpha^q}^q \|\{|\lambda_k|^q\}\|_{l^{\frac{p}{q}}} dt \\
&= C \left\|H_f\right\|_{F_\alpha^p \longrightarrow L_\alpha^q}^q \|\{|\lambda_k|^q\}\|_{l^{\frac{p}{q}}}.
\end{aligned}$$

Et par conséquent, quel que soit $\{\lambda_k\} \in l^p$, on a :

$$\frac{\sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^q \left[G_{q,\frac{r}{4}}(f)(z_j)\right]^q}{\|\{|\lambda_k|^q\}\|_{l^{\frac{p}{q}}}} \leq C \left\|H_f\right\|_{F_\alpha^p \longrightarrow L_\alpha^q}^q. \tag{3.39}$$

Puisque $\frac{p}{q} > 1$ et $\frac{q}{p} + \frac{p-q}{p} = 1$, alors d'après la Proposition 1.2.15, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\left\{|G_{q,\frac{r}{4}}(f)(z_j)|^q\right\}_j\right\|_{l^{\frac{p}{p-q}}} &= \left[\sum_{j=1}^{+\infty} \left[G_{q,\frac{r}{4}}(f)(z_j)\right]^{\frac{qp}{p-q}}\right]^{\frac{p-q}{p}} \\
&= \sup_{\{a_j\}_j \in l^{\frac{p}{q}} \setminus \{0\}} \frac{\sum_{j=1}^{+\infty} |a_j| \left[G_{q,\frac{r}{4}}(f)(z_j)\right]^q}{\left\|\{a_j\}_j\right\|_{l^{\frac{p}{q}}}} \\
&\leq C \left\|H_f\right\|_{F_\alpha^p \longrightarrow L_\alpha^q}^q,
\end{aligned}$$

où on a utilisé (3.39) avec $\{\lambda_j = |a_j|^{\frac{1}{q}}\}$.

D'où

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left[G_{q,\frac{r}{4}}(f)(z_j)\right]^s \leq C \left\|H_f\right\|_{F_\alpha^p \longrightarrow L_\alpha^q}^s.$$

Car $s = \frac{pq}{p-q}$. Il est important de remarquer que cette majoration ne dépend pas de r.

Rappelons que d'après la Propriété 3.3.3, pour $z \in \mathbb{C}$ et $w \in D(z, r)$, on a

$$G_{q,r}(f)(w) \leq C G_{q,2r}(f)(z).$$

On obtient ainsi :

$$\int_{\mathbb{C}} \left[G_{q,r}(f)(z)\right]^s dA(z) \quad \leq \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{D(z_j,r)} \left[G_{q,r}(f)(z)\right]^s dA(z)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{D(z_j,r)}\left[G_{q,2r}(f)(z_j)\right]^s dA(z)\\
&= C\sum_{j=1}^{+\infty}\left[G_{q,2r}(f)(z_j)\right]^s\\
&\leq C\left\|H_f\right\|^s_{F^p_\alpha\longrightarrow L^q_\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Ce qui montre que $G_{q,r}(f)\in L^s$.

Montrons que $(C)\Rightarrow(D)$. Supposons qu'il existe $r\in]0,\frac{r_0}{2}]$ tel que $G_{q,r}(f)\in L^s$. Comme dans la preuve du Théorème 3.3.7, définissons les fonctions f_1 et f_2 comme suit :

$$
f_1(z)=\sum_{j=1}^{+\infty}h_j(z)\phi_j(z)\in C^\infty(\mathbb{C})\text{ et } f_2=f-f_1,
$$

où $\{\phi_j\}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{D(z_j,\frac{r}{2})\}$ de $\mathbb{C}$ avec $|\bar\partial\phi_j|\leq C$. Soit $j\geq 1$ fixé, quel que soit $u\in\mathbb{C}$ tel que $z_j\in D(u,\frac{r}{2})$, d'après la Propriété 3.3.3 on a :

$$
G_{q,r}(f)(z_j)\leq CG_{q,r}(f)(u).
$$

En prenant la moyenne sur $D(z_j,\frac{r}{2})$ des $G_{q,r}(f)(u)$ avec $u\in D(z_j,\frac{r}{2})$ tel que $z_j\in D(u,\frac{r}{2})$, on a :

$$
G_{q,\frac{r}{2}}(f)(z_j)\leq\frac{C}{|D(z_j,\frac{r}{2})|}\int_{D(z_j,\frac{r}{2})}G_{q,r}(f)(u)dA(u).
$$

Puisque $s>1$, en appliquant l'inégalité de Hölder (1.1), on a :

$$
\left[G_{q,\frac{r}{2}}(f)(z_j)\right]^s\leq\frac{C}{|D(z_j,\frac{r}{2})|}\int_{D(z_j,\frac{r}{2})}\left[G_{q,r}(f)(u)\right]^s dA(u).
\tag{3.41}
$$

Soit $z\in\mathbb{C}$, en appliquant l'inégalité (1.6) à (3.20), on a :

$$
\begin{aligned}
|\bar\partial f_1(z)| &\leq C\sum_{j\in J_z}G_{q,\frac{r}{2}}(f)(z_j)\\
&\leq C\left(\sum_{j\in J_z}\left[G_{q,\frac{r}{2}}(f)(z_j)\right]^s\right)^{\frac{1}{s}}|J_z|^{1-\frac{1}{s}}.
\end{aligned}
$$

Et (3.41) implique que :

$$
|\bar\partial f_1(z)|^s \leq C\sum_{j\in J_z}\left[G_{q,\frac{r}{2}}(f)(z_j)\right]^s
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{|D(z_j,\frac{r}{2})|}\sum_{j\in J_z}\int_{D(z_j,\frac{r}{2})}\left[G_{q,r}(f)(u)\right]^s dA(u)\\
&\leq \frac{C}{|D(z,r)|}\int_{D(z,2r)}\left[G_{q,r}(f)(u)\right]^s dA(u).
\end{aligned}
$$

Ceci est obtenu en observant que, puisque $r\in]0,\frac{r_0}{2}]$ alors $2r\in]0,r_0]$ et pour $z\in D(z_j,\frac{r}{2})$, on a $D(z_j,\frac{r}{2})\subset D(z,2r)$. En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{C}$ par rapport à la mesure de Lebesgue et en appliquant le Théorème de Fubini (Théorème 1.1.11), on a :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}}|\overline{\partial}f_1(z)|^s dA(z) &\leq \int_{\mathbb{C}}\frac{C}{|D(z,r)|}\int_{D(z,2r)}\left[G_{q,r}(f)(u)\right]^s dA(u)dA(z)\\
&= C\int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}}\frac{1}{|D(z,r)|}\chi_{D(z,2r)}(u)\left[G_{q,r}(f)(u)\right]^s dA(u)dA(z)\\
&= C\int_{\mathbb{C}}\left[G_{q,r}(f)(u)\right]^s\left(\int_{\mathbb{C}}\frac{1}{|D(z,r)|}\chi_{D(z,2r)}(u)dA(z)\right)dA(u).
\end{aligned}
$$

Or pour tout $z,u\in\mathbb{C}$, $\chi_{D(z,2r)}(u)=\chi_{D(u,2r)}(z)$. Donc $\int_{\mathbb{C}}\chi_{D(z,2r)}(u)dA(z)=\int_{\mathbb{C}}\chi_{D(u,2r)}(z)dA(z)=|D(u,2r)|$. Ainsi,

$$
\int_{\mathbb{C}}|\overline{\partial}f_1(z)|^s dA(z)\leq C\int_{\mathbb{C}}\left[G_{q,r}(f)(u)\right]^s dA(u). \tag{3.42}
$$

Ce qui montre que $\overline{\partial}f_1(z)\in L^s$.

Soit $z\in\mathbb{C}$, en appliquant (1.6) à (3.22) et en utilisant (3.41), on obtient :

$$
\begin{aligned}
M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}(z) &\leq C\sum_{j\in J_z}G_{q,r}(f)(z_j)\\
&\leq C\left(\sum_{j\in J_z}\left[G_{q,r}(f)(z_j)\right]^s\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq C\left(\sum_{j\in J_z}\left[\frac{1}{|D(z_j,r)|}\int_{D(z_j,r)}\left[G_{q,2r}(f)(u)\right]^s dA(u)\right]\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq C\left\{\frac{C}{|D(z,r)|}\int_{D(z,2r)}\left[G_{q,2r}(f)(u)\right]^s dA(u)\right\}^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}
$$

En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{C}$ par rapport à la mesure de Lebesgue et en appliquant le théorème de Fubini, comme avec $\overline{\partial}f_1$ plus haut, on obtient :

$$
\left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^s}\leq C\left\|G_{q,2r}(f)\right\|_{L^s}. \tag{3.43}
$$

Ce qui montre que $M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\in L^s$. D'où (D).

De plus, (3.42) et (3.43) impliquent que

$$\left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^s} + \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^s} \leq C \left\|G_{q,r}(f)\right\|_{L^s}. \tag{3.44}$$

Montrons que $(D) \implies (B)$. D'après le Lemme 3.3.15, la mesure $d\mu = |\overline{\partial} f_1|^q dA$ est une mesure $(p,q)-$Carleson pour F^p_α. Soit $g \in \mathcal{K}$, en utilisant (3.25) et (3.35), on a :

$$\begin{aligned} \left\|H_{f_1} g\right\|_{q,\alpha} &\leq C \left\|g\overline{\partial} f_1\right\|_{q,\alpha} = C \left\|g\right\|_{L^q_\alpha(d\mu)} \leq C \left\|I_d\right\|_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)} \left\|g\right\|_{p,\alpha} \\ &\leq C \left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^s} \left\|g\right\|_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Par densité de $\mathcal{K}$ dans F^p_α, on déduit que H_{f_1} est borné de F^p_α vers L^q_α avec

$$\left\|H_{f_1}\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha} \leq C \left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^s}. \tag{3.45}$$

Puisque $d\mu$ est aussi une mesure $(p,q)-$Carleson évanescente alors l'injection $Id : F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\mu)$ est compacte. Ainsi, si $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite bornée dans F^p_α qui converge uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{C}$ lorsque $k \to +\infty$, alors

$$\left\|H_{f_1} g_k\right\|_{q,\alpha} \leq C \left\|g_k \overline{\partial} f_1\right\|_{q,\alpha} = C \left(|g_k(z)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} d\mu(z)\right)^{\frac{1}{q}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui montre que $H_{f_1} : F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha$ est compact.

De plus, la mesure $d\nu = |f_2|^q dA$ est une mesure $(p,q)-$Carleson (évanescente) pour F^p_α d'aprés le Lemme 3.3.15. En utilisant la continuité de l'injection $Id : L^q_\alpha \hookrightarrow F^q_\alpha$, on obtient grâce à (3.36) que pour tout $g \in \mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} \left\|H_{f_2} g\right\|_{q,\alpha} &\leq C \left\|f_2 g\right\|_{q,\alpha} = C \left\|g\right\|_{L^q_\alpha(d\nu)} \\ &\leq C \left\|I_d\right\|_{F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\nu)} \left\|g\right\|_{p,\alpha} \leq C \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^s} \left\|g\right\|_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Par densité de $\mathcal{K}$ dans F^p_α, on déduit que H_{f_2} est borné de F^p_α vers L^q_α avec

$$\left\|H_{f_2}\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha} \leq C \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^s}. \tag{3.46}$$

La continuité de l'injection $Id : L^q_\alpha \hookrightarrow F^q_\alpha$ et la compacité de l'injection $Id : F^p_\alpha \hookrightarrow L^q_\alpha(d\nu)$ entraînent la compacité de H_{f_2} de F^p_α vers L^q_α.

On conclut que H_f de F^p_α vers L^q_α est compact et (3.45) et (3.46) entraînent

$$\left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha} \leq \left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^s} + \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^s}. \tag{3.47}$$

On déduit de (3.47), (3.44) et (3.40) que

$$\left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha} \leq C \inf\left\{\left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^s} + \left\|M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^s}\right\} \leq C \left\|G_{q,r}(f)\right\|_{L^s} \leq C \left\|H_f\right\|_{F^p_\alpha \longrightarrow L^q_\alpha}.$$

D'où (3.34). Ce qui achève la preuve du théorème. ■

Chapitre Quatre

CLASSES DE SCHATTEN DE H_f DE F^2_α VERS L^2_α

4.1. Introduction

Pour $1 \leq p < +\infty$, Xia et Zheng dans [25] ont caractérisé les symboles f à valeurs réelles pour lesquels H_f est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$. Plus tard, Isralowitz dans [15] a établit un résultat similaire pour $0 < p < 1$. Ensuite Hu et Lv dans [13] ont caractérisé les symboles f à valeurs complexes pour lesquels H_f défini sur F^2_ϕ appartient à $\mathcal{S}_p$ pour $2 \leq p < +\infty$. Suite à ce travail, une question naturelle est donc de donner une caractérisation de ces symboles pour $0 < p < +\infty$. L'objectif de ce chapitre est de caractériser les symboles f à valeurs complexes pour lesquels $H_f : F^2_\alpha \longrightarrow L^2_\alpha$ appartient à la classe de Schatten S_p pour $1 \leq p < +\infty$. Pour y arriver, nous allons rappeler la définition des classes de Schatten et ses propriétés qui nous seront utiles et nous caractériserons ces symboles en utilisant la fonction $G_{2,r}(f)$ avec $r \in]0, r_0]$ et la décomposition atomique en nous appuyant sur les travaux de Erming Wang et Zhenghua Xu dans [24] et les travaux de Z.J. Hu et X.F. Lv dans [13].

4.2. Résultats préliminaires

Soit X un espace de Hilbert séparable et $\langle , \rangle$ le produit scalaire dans X.Les résultats énoncés dans cette section et la section suivante viennent de [26] au Chapitre 1.

Définition 4.2.1. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire. On appelle rang de T, noté par $rang(T)$, la dimension de $T(H_1)$.

Théorème 4.2.2. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.*

1) Si l'opérateur T est de rang fini, alors il est compact.

2) *L'opérateur T est compact si et seulement s'il existe une suite d'opérateurs linéaires $\{T_n\}$ telles que* $\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T\| = 0$.

Définition 4.2.3. Soit T un opérateur compact sur X. Les valeurs singulières de T que nous notons $\{\lambda_n\}_n$ sont les racines carrées des valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint, positif et compact T^*T, où T^* désigne l'adjoint de T.

Théorème 4.2.4. *Si T est un opérateur auto-adjoint compact, alors il existe une suite de nombres réels $\{\lambda_n\}_n$ tendant vers 0 et une famille orthonormée $\{e_n\}_n$ de X telles que pour tout $x \in X$,*

$$Tx = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Plus précisément, $\{\lambda_n\}_n$ est la suite des valeurs propres de T et $\{e_n\}_n$ est une base orthonormée de X constituée des vecteurs propres de T.

Théorème 4.2.5. ***(Thérème de décomposition canonique d'un opérateur compact)***
Soient X un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact. Alors il existe deux familles orthonormées $\{f_n\}_n$ et $\{g_n\}_n$ telles que pour tout $x \in X$:

$$Tx = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle f_n, x\rangle g_n,$$

où la somme ci-dessus est absolument convergente.

Preuve. Puisque T est compact, alors l'opérateur T^*T est auto-adjoint et compact. D'après le Théorème 1.3.42, il existe une base orthonormée $\{f_n\}_n$ de X formée des vecteurs propres $\{\lambda_n^2\}_n$ de T^*T. Posons $g_n = \frac{Tf_n}{\lambda_n}$ quel que soit $\lambda_n \neq 0$. Alors pour tout $x \in X$, on a : $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_n, x\rangle f_n$ et

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_n, x\rangle T f_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle f_n, x\rangle g_n. \end{aligned}$$

De plus, cette somme est absolument convergente puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |\langle f_n, x\rangle|^2 \leq \sup_n \lambda_n^2 \|x\|^2 .$$

Montrons que $\{g_n\}_n$ est une famille orthonormée. On a :

$$\begin{aligned}
\|g_n\| &= \left\|T\left(\frac{f_n}{\lambda_n}\right)\right\| = \frac{1}{\lambda_n}\|Tf_n\| \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\sqrt{\langle Tf_n, Tf_n\rangle} = \frac{1}{\lambda_n}\sqrt{\langle T^*Tf_n, f_n\rangle} \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\sqrt{\langle \lambda_n^2 f_n, f_n\rangle} = \|f_n\| = 1.
\end{aligned}$$

De plus, si $n \neq m$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle g_n, g_m\rangle &= \left\langle T\left(\frac{f_n}{\lambda_n}\right), T\left(\frac{f_m}{\lambda_m}\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{\lambda_n\lambda_m}\langle T^*Tf_n, f_m\rangle = \frac{1}{\lambda_n\lambda_m}\langle \lambda_n^2 f_n, f_m\rangle = \frac{\lambda_n}{\lambda_m}\langle f_n, f_m\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. ■

4.3. Définitions et propriétés

Soit X un espace de Hilbert séparable.

Définition 4.3.1. Étant donné $0 < p < +\infty$, la $p-$ième classe de Schatten de X notée $\mathcal{S}_p(X)$ ou simplement $\mathcal{S}_p$ désigne l'espace de tous les opérateurs compacts T dont les valeurs singulières $\{\lambda_n\}_n$ appartiennent à l^p. En d'autres termes,

$$\mathcal{S}_p = \left\{T \in \mathcal{L}(X) \text{ compact et tel que} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\right\}.$$

Théorème 4.3.2. *Pour $0 < p < +\infty$, on a les résultats suivants :*

1 Quel que soit $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{S}_p$ est un espace de Banach muni de la norme définie par : pour tout $T \in \mathcal{S}_p$,

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2 Les $\mathcal{S}_p$ sont des idéaux bilatéraux de $\mathcal{L}(X)$.

3 Quel que soit $1 \leq p \leq q < +\infty$, $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}_q$.

4 *Pour* $0 < p < 1$, *on a l'inégalité suivante*

$$\|T + S\|_{\mathcal{S}_p}^p \leq \|T\|_{\mathcal{S}_p}^p + \|S\|_{\mathcal{S}_p}^p .$$

Définition 4.3.3. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit $T\colon H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire borné. Les valeurs singulières de T, notés $s_j(T)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, sont définies par :

$$s_j(T) = \inf\{\|T - K\| : K\colon H_1 \to H_2, rang(K) \leq j\},$$

où $rang(K)$ désigne le rang de K. L'opérateur T est compact si et seulement si la suite $s_j(T) \to 0$. Pour $0 < p < +\infty$, on dit qu'un opérateur compact T est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$ et on écrit $T \in \mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ si

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p}^p = \sum_{j=0}^{+\infty} (s_j(T))^p < +\infty. \tag{4.1}$$

L'expression (4.1) définit une norme sur $\mathcal{S}_p$ lorsque $1 \leq p < +\infty$.

Remarque 4.3.4. La preuve l'équivalence entre la Définition 4.2.3 et la Définition 4.3.3 lorsque $H_1 = H_2$ se trouve dans [26], Théorème 1.34.

Proposition 4.3.5. *Supposons que A soit un opérateur surjectif et borné sur X et T un opérateur linéaire quelconque sur X. Alors,* $A^*TA \in \mathcal{S}_p$ *si et seulement si* $T \in \mathcal{S}_p$.

Théorème 4.3.6. *Si* $T \in \mathcal{S}_p$, $1 \leq p < +\infty$, *alors pour toute famille orthonormée* $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$, *on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle Te_n, e_n\rangle|^p \leq \|T\|_{\mathcal{S}_p}^p .$$

Définition 4.3.7. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$. Alors l'opérateur de multiplication $M_\varphi : F_\alpha^2 \longrightarrow L_\alpha^2$ est donné par quel que soit $f \in F_\alpha^2$,

$$M_\varphi f(z) = \varphi(z) f(z).$$

L'opérateur M_φ est un opérateur linéaire borné sur F_α^2.

Théorème 4.3.8. *Si T est un opérateur compact sur X et* $p > 0$, *alors* $T \in \mathcal{S}_p$ *si et seulement si* $T^*T \in \mathcal{S}_{\frac{p}{2}}$. *De plus, on a :*

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p}^p = \|T^*T\|_{\mathcal{S}_{\frac{p}{2}}}^{\frac{p}{2}} .$$

Preuve. Voir Théorème 1.26 dans [26]. ■

Théorème 4.3.9. *Si T est un opérateur compact sur X et $p \geq 2$, alors $T \in \mathcal{S}_p$ si et seulement si quelle que soit la famille orthonormée $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ de X,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Te_n\|^p < +\infty.$$

De plus,

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p} = \sup\left\{\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \|Te_n\|^p\right]^{\frac{1}{p}} : \{e_n\}_n \text{ orthonormée}\right\}.$$

Preuve. Voir Théorème 1.33 [26]. ■

Définition 4.3.10. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$, on définit un opérateur linéaire $T_\varphi : F^2_\alpha \longrightarrow F^2_\alpha$ par quel que soit $f \in F^2_\alpha$,

$$T_\varphi(f) = P_\alpha(\varphi f).$$

L'opérateur T_φ est appelé opérateur de Toeplitz sur F^2_α de symbole φ. Il est clair que T_φ est un opérateur linéaire borné sur F^2_α.

Théorème 4.3.11. *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$. Si $p \geq 1$ et $\varphi \in L^p(\mathbb{C}, dA)$, alors $T_\varphi \in \mathcal{S}_p$.*

Preuve. Voir Lemme 6.30 [27]. ■

4.4. Caractérisation des symboles f pour lesquels H_f de F^2_α vers L^2_α est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$ pour $1 \leq p < +\infty$

Nous rappelons que pour $1 \leq p < +\infty$, F^p_α est séparable comme sous-espace de l'espace de Banach $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}})$.

Théorème 4.4.1. *Soient $f \in \Gamma$ et $r \in]0, r_0]$, on suppose que le grand opérateur de Hankel $H_f : F^2_\alpha \longrightarrow L^2_\alpha$ est compact. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A) $H_f \in S_p$;

(B) il existe un (ou quel que soit le) , $\frac{r}{2}$−treillis $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\{G_{2,r}(f)(z_k)\}_{k=1}^{+\infty} \in l^p$;

(C) f admet une décomposition $f = f_1 + f_2$, avec

$$M_r(|f_2|^2)^{\frac{1}{2}} \in L^p \quad \text{et} \quad \overline{\partial} f_1 \in L^p.$$

Preuve. Montrons $(A) \Rightarrow (B)$. Supposons que $H_f \in \mathcal{S}_p$, alors H_f est compact et les valeurs singulières de H_f forment une suite d'éléments de l^p.
Soit $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ un $\frac{r}{2}-$treillis dans $\mathbb{C}$. Considérons la base orthonormée de F^2_α donnée par la Proposition 2.3.1 et l'opérateur A défini sur F^2_α par : pour tout $k \geq 0$,

$$Ae_k = k_{z_k}. \tag{4.2}$$

Soit $f \in F^2_\alpha$, alors f s'écrit sous la forme $f = \sum_{k=1}^{+\infty}\langle f, e_k\rangle_\alpha e_k$. Ainsi,

$$Af = \sum_{k=1}^{+\infty}\langle f, e_k\rangle_\alpha Ae_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\langle f, e_k\rangle_\alpha k_{z_k}.$$

En se servant du Théorème 2.6.7 et du Théorème 1.3.11, on a :

$$\begin{aligned}
\|Af\|_{2,\alpha} &= \left\|\sum_{k=1}^{+\infty}\langle f, e_k\rangle_\alpha k_{z_k}\right\|_{2,\alpha} \leq \|\{\langle f, e_k\rangle_\alpha\}\|_{l^2} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{+\infty}|\langle f, e_k\rangle_\alpha|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{2,\alpha}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que A est borné sur F^2_α.
Considérons l'opérateur B défini sur F^2_α par : quel que soit $k \geq 0$,

$$B(e_k) = C_k\chi_{D(z_k,r)}H_f k_{z_k}, \tag{4.3}$$

avec

$$C_k = \left(\int_{D(z_k,r)}|H_f k_{z_k}(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2}dA(w)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|B(e_k)\|^2_{2,\alpha} &= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}}|B(e_k)(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2}dA(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}}|C_k\chi_{D(z_k,r)}(w)H_f k_{z_k}(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2}dA(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}C_k^2\int_{D(z_k,r)}|H_f k_{z_k}(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2}dA(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}.
\end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $B = C_k\chi_{D(z_k,r)}H_f A$. Ainsi, B est borné comme composée d'opérateurs bornés.

Puisque

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}e^{-\alpha|z|^2}dA(z),$$

alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_{D(z_k,r)}|H_f k_{z_k}(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2}dA(w)\right)^{\frac{p}{2}} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{C}}\chi_{D(z_k,r)}|H_f k_{z_k}(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2}dA(w)\right)^{\frac{p}{2}}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(C_k\langle H_f k_{z_k}, \chi_{D(z_k,r)}H_f k_{z_k}\rangle_\alpha\right)^p\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\langle H_f A e_k, C_k\chi_{D(z_k,r)}H_f k_{z_k}\rangle_\alpha\right)^p\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\langle H_f A(e_k), B(e_k)\rangle_\alpha\right)^p\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\langle B^* H_f A(e_k), e_k\rangle_\alpha\right)^p . \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Puisque B^* et A sont bornés sur F^2_α, $H_f \in \mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}_p$ est un idéal bilatéral alors $B^*H_fA \in \mathcal{S}_p$. Ainsi, d'après le Théorème 4.3.6,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\langle B^* H_f A(e_k), e_k\rangle_\alpha\right)^p < +\infty. \qquad (4.5)$$

Cependant, puisque pour $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $w \in D(z, r)$,

$$|k_z(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2} = e^{-\alpha|z-w|^2} \geq e^{-\alpha r_0^2}, \qquad (4.6)$$

on a :

$$\begin{aligned}
\int_{D(z,r)}|H_f k_z(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2}dA(w) &= \int_{D(z,r)}|f(w)k_z(w) - P_\alpha(fk_z)(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2}dA(w)\\
&\geq C\int_{D(z,r)}\left|f(w) - \frac{P_\alpha(fk_z)(w)}{k_z(w)}\right|^2 dA(w)\\
&= \frac{C}{|D(z,r)|}\int_{D(z,r)}\left|f(w) - \frac{P_\alpha(fk_z)(w)}{k_z(w)}\right|^2 dA(w)\\
&\geq CG^2_{2,r}(f)(z). \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Ainsi, (4.7) implique que pour tout $k \geq 1$,

$$G_{2,r}^2(f)(z_k) \quad \leq \quad C \int_{D(z_k,r)} |H_f k_{z_k}(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2} dA(w).$$

On déduit de (4.4) et (4.5) que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (G_{2,r}(f)(z_k))^p \quad \leq \quad C \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{D(z_k,r)} |H_f k_{z_k}(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2} dA(w) \right)^{\frac{p}{2}} < +\infty.$$

D'où $\{G_{2,r}(f)(z_k)\}_{k=1}^{+\infty} \in l^p$.

Montrons que $(B) \Rightarrow (C)$. Supposons qu'il existe un $\frac{r}{2}$−treillis $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ de $\mathbb{C}$ tel que $\{G_{2,r}(f)(z_k)\}_{k=1}^{+\infty} \in l^p$. Comme dans le Théorème 3.3.7, définissons les fonctions f_1 et f_2 comme suit :

$$f_1(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} h_j(z)\phi_j(z) \in C^{\infty}(\mathbb{C}) \text{ et } f_2 = f - f_1.$$

Nous rappelons que pour $z \in \mathbb{C}$, d'après (3.20) et (3.22) on a :

$$|\overline{\partial} f_1(z)| \leq C \sum_{j \in J_z} G_{q,r}(f)(z_j) \quad \text{et} \quad M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}(z) \leq C \sum_{j \in J_z} G_{q,r}(f)(z_j).$$

Soit $j \geq 1$, d'après la Définition 2.6.1, l'ensemble $K_j = \{k : D(z_j, \frac{r}{2}) \cap D(z_k, \frac{r}{2}) \neq \emptyset\}$ possède un nombre fini d'éléments. Ainsi (3.20) et l'inégalité (1.6) donnent :

$$\sup_{z \in D(z_j, \frac{r}{2})} |\overline{\partial} f_1(z)| \quad \leq \quad C \sum_{k \in K_j} G_{2,r}(f)(z_k) \leq C \left[\sum_{k \in K_j} G_{2,r}^p(f)(z_k) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

On obtient alors que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} f_1|^p dA(z) \quad & \leq \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{D(z_j, \frac{r}{2})} |\overline{\partial} f_1|^p dA(z) \\ & \leq \quad C \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\sup_{z \in D(z_j, \frac{r}{2})} |\overline{\partial} f_1(z)| \right]^p \\ & \leq \quad C \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k \in K_j} G_{2,r}^p(f)(z_k) \leq C \sum_{j=1}^{+\infty} G_{2,r}^p(f)(z_j) < +\infty. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\overline{\partial} f_1 \in L^p$.

De même, (3.22) et l'inégalité (1.6) donnent :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} [M_r(|f_2|^2)^{\frac{1}{2}}(z)]^p dA(z) &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{D(z_j,\frac{r}{2})} [M_r(|f_2|^2)^{\frac{1}{2}}(z)]^p dA(z) \\
&\leq C \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\sup_{z\in D(z_j,\frac{r}{2})} M_r(|f_2|^2)^{\frac{1}{2}}(z) \right]^p \leq C \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\sum_{k\in K_j} G_{2,r}(f)(z_k) \right]^p \\
&\leq C \sum_{j=1}^{+\infty} G_{2,r}^p(f)(z_j) < +\infty.
\end{aligned}$$

D'où $M_r(|f_2|^2)^{\frac{1}{2}} \in L^p$.

Montrons que $(C) \Rightarrow (A)$. Supposons que f se décompose sous la forme $f = f_1 + f_2$ avec

$$M_r(|f_2|^2)^{\frac{1}{2}} \in L^p \quad \text{et} \quad \overline{\partial} f_1 \in L^p.$$

Montrons que $f \in \mathcal{S}_p$.

Posons $\tau = \overline{\partial} f_1$ ou $\tau = f_2$. Alors pour tous $\varphi, h \in F^2_\alpha$, on a d'une part

$$\begin{aligned}
\langle (M_\tau)^* M_\tau h, \varphi\rangle_\alpha &= \langle M_\tau h, M_\tau \varphi\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} M_\tau h(z)\overline{M_\tau \varphi(z)} d\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |\tau(z)|^2 h(z)\overline{\varphi}(z) d\lambda_\alpha(z),
\end{aligned}$$

et d'autre part, en utilisant le théorème de Fubini et les propriétés du noyau reproduisant, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle T_{|\tau|^2} h, \varphi\rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} T_{|\tau|^2} h(z)\overline{\varphi}(z) d\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left[\int_{\mathbb{C}} |\tau|^2(w) h(w) K_\alpha(z,w) d\lambda_\alpha(w) \right] \overline{\varphi}(z) d\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} h(w)|\tau|^2(w) \left[\int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w)\overline{\varphi}(z) d\lambda_\alpha(z) \right] d\lambda_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{C}} h(w)|\tau|^2(w) \left[\int_{\mathbb{C}} K_w(z)\overline{\varphi}(z) d\lambda_\alpha(z) \right] d\lambda_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{C}} h(w)|\tau|^2(w) \left[\langle K_w, \varphi\rangle_\alpha \right] d\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} h(w)|\tau|^2(w) \left[\overline{\langle \varphi, K_w\rangle_\alpha} \right] d\lambda_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |\tau|^2(w) h(w)\overline{\varphi}(w) d\lambda_\alpha(w).
\end{aligned}$$

D'où $(M_\tau)^* M_\tau = T_{|\tau|^2}$.

En utilisant le Théorème 4.3.8, on a :

$$M_\tau \in \mathcal{S}_p \Leftrightarrow (M_\tau)^* M_\tau \in \mathcal{S}_{\frac{p}{2}} \Leftrightarrow T_{|\tau|^2} \in \mathcal{S}_{\frac{p}{2}}.$$

De la condition $\tau \in L^p$, on a $|\tau|^2 \in L^{\frac{p}{2}}$. On déduit du Théorème 4.3.11 que, lorsque $2 \leq p < +\infty$, on a $T_{|\tau|^2} \in \mathcal{S}_{\frac{p}{2}}$. D'où $M_\tau \in \mathcal{S}_p$.
Pour tout $g \in F^2_\alpha$, on a :

$$H_{f_2} g = (I_d - P_\alpha)(f_2 g) = (I_d - P_\alpha)(M_{f_2} g) = (I_d - P_\alpha) \circ (M_{f_2})(g).$$

Donc $H_{f_2} = (I_d - P_\alpha) \circ M_{f_2}$. Il vient du Théorème 4.3.2 que H_{f_2} et H_{f_1} appartiennent à $\mathcal{S}_p$ et on a :

$$\begin{aligned} \left\|H_{f_2}\right\|_{\mathcal{S}_p} &\leq \|I_d - P_\alpha\|_{L^2_\alpha \longrightarrow L^2_\alpha} \left\|M_{f_2}\right\|_{\mathcal{S}_p} \\ &= C \left\|M_{f_2}\right\|_{\mathcal{S}_p} = C \left\|T_{|f_2|^2}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^{\frac{p}{2}}} \\ &\leq C \left\||f_2|^2\right\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{S}_{\frac{p}{2}}} = C \|f_2\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

D'autre part, d'après (3.25), pour tout $g \in F^2_\alpha$, on a

$$\left\|H_{f_1} g\right\|_{2,\alpha} \leq C \left\|g \overline{\partial} f_1\right\|_{2,\alpha} = C \left\|M_{\overline{\partial} f_1} g\right\|_{2,\alpha}.$$

Ainsi, comme $M_{\overline{\partial} f_1} \in \mathcal{S}_p$, alors $H_{f_1} \in \mathcal{S}_p$ et en utilisant le Théorème 4.3.8 on obtient :

$$\left\|H_{f_1}\right\|_{\mathcal{S}_p} \leq C \left\|M_{\overline{\partial} f_1}\right\|_{\mathcal{S}_p} = C \left\|T_{|\overline{\partial} f_1|^2}\right\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{S}_{\frac{p}{2}}} \tag{4.9}$$

$$\leq C \left\||\overline{\partial} f_1|^2\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^{\frac{p}{2}}} = C \left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^p}. \tag{4.10}$$

Puisque pour $1 \leq p < +\infty$ $\mathcal{S}_p$ est un espace de Banach, alors de (4.8) et (4.9), on a :

$$\left\|H_f\right\|_{\mathcal{S}_p} = \left\|H_{f_1} + H_{f_2}\right\|_{\mathcal{S}_p} \leq \left\|H_{f_1}\right\|_{\mathcal{S}_p} + \left\|H_{f_2}\right\|_{\mathcal{S}_p} \leq C \left\{ \left\|\overline{\partial} f_1\right\|_{L^p} + \|f_2\|_{L^p} \right\} < +\infty.$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

■

✠ CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES ✠

L'objectif de ce mémoire était de nous introduire aux espaces de Fock, et à l'étude, des symboles f à valeurs complexes, du grand opérateur de Hankel H_f. On voulait caractériser les symboles f pour lesquels H_f s'étend en un opérateur borné (resp. compact) de $F^p_\alpha(\mathbb{C})$ vers $L^q_\alpha(\mathbb{C})$ pour $1 \leq p, q < +\infty$ et obtenir la caractérisation des fonctions symboles f à valeurs complexes pour lesquelles H_f de $F^2_\alpha(\mathbb{C})$ vers $L^2_\alpha(\mathbb{C})$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, $1 \leq p < +\infty$. Pour y arriver, nous avons d'abord rappelé quelques définitions et résultats d'analyse qui nous ont permis d'établir quelques propriétés essentielles des espaces de Fock $F^p_\alpha(\mathbb{C})$. Par la suite, nous avons rappelé des résultats importants sur les mesures $(p, q)-$Carleson (évanescentes) pour F^p_α qui nous ont servi dans la démonstration des grands théorèmes caractérisant les symboles f à valeurs complexes pour lesquels H_f s'étend en un opérateur borné (resp. compact) de $F^p_\alpha(\mathbb{C})$ vers $L^q_\alpha(\mathbb{C})$ pour $1 \leq p, q < +\infty$. Et enfin, nous avons établi les propriétés des classes de Schatten qui nous ont permis d'établir les caractérisations des fonctions symboles f à valeurs complexes pour lesquelles H_f de $F^2_\alpha(\mathbb{C})$ vers $L^2_\alpha(\mathbb{C})$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, $1 \leq p < +\infty$. La fonction auxiliaire $G_{q,r}(f)$ introduite pour la première fois par Luecking dans [17] et la décomposition atomique des fonctions dans les espaces de Fock ont été des outils indispensables qui nous ont permis d'atteindre notre objectif.

Toutefois, ce travail étant loin d'être terminé, on se propose dans un futur proche d'étudier les grands opérateurs de Hankel et les opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Fock à valeurs vectorielles en mettant une emphase sur les applications en optimisation.

✠ Bibliographie ✠

[1] W. Bauer, *Mean oscillation and Hankel operatos on the Segal-Bargmann space*. Integr. Equ. Oper. Theory, **52**, 2005, 1-15.

[2] C. A. Berger, L. A. Coburn, *Toeplitz operators and quantum mechanics*. J. Funct. Anal., **68**, 1986, 273-299.

[3] C. A. Berger, L. A. Coburn, *Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space*. Trans. Amer. Math. Soc., **301**, 1987, 813-829.

[4] C. A. Berger, L. A. Coburn, *Heat Flow and Berezin-Toeplitz estimates*. Amer. J. Math., **116**, 1994, 563-590.

[5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Masson, 1983.

[6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science and Business Media, 2010.

[7] J. Faraut and A. Korani, *Analysis on Symmetric Cones*. Oxford. Clarendon Press, 1994.

[8] I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators*. Nauka, Moscow, 1965 ; translation in "Transl. Math. Monographs," Vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

[9] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*.Second Edition, Columbia : Springer, April 2008.

[10] Z. J. Hu, J. Lu, *Hankel operators on Bergman spaces with regular weights*. J. Geom. Anal., **29**, 2019, 3494-3519.

[11] Z. J. Hu, X. F. Lv, *Toeplitz operators from one Fock space to another*. Integr. Equ. Oper. Theory, **70**, 2011, 541-559.

[12] Z. J. Hu, X. F. Lv, *Toeplitz operators on Fock spaces F^p_φ*. Integr. Equ. Oper. Theory, **80**, 2011, 33-59.

[13] Z. J. Hu, X. F. Lv, *Hankel operators on weighted Fock spaces* (in Chinese). Sci. Sin. Math., **46**, 2016, 141-156.

[14] Z. J. Hu, E. M. Wang, *Hankel Operators Between Fock Spaces*. Integr. Equ. Oper. Theory, 90 :37, 2018.

[15] J. Isralowitz, *Schatten p class Hankel operators on the Segal-Bargmann space $H^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$ for* $0 < p < 1$. J. Oper. Theory, **66**, 2011, 145-160.

[16] S. Janson, J. Peetre, R. Rochberg, *Hankel forms on the Fock space*. Revista Mat. Iberoamer., **3**, 1987, 61-138.

[17] D. H. Luecking, *Characterizations of certain classes of Hankel operators on the Bergman spaces of the unit disk*. J. Funct. Anal., **110**, 1992, 247-271.

[18] X. Lv, *Hankel operators on Fock spaces $F^p(\phi)$*. Complex Var. Elliptic, **64**, 2018, 1-12.

[19] C. A. McCarthy,c_p. Israel J. Math., **5**, 1967, 249-271.

[20] J. Marzo, J. Ortega-Cerd*à*, *Pointwise estimates for the Bergman kernel of the weighted Fock space*. J. Geom. Anal., **19**, 2009, 890-910.

[21] A. Per*ä*l*ä*, A. Schuster, J. A. Virtanen, *Hankel operators on Fock spaces*. In : Concrete Operators, Spectral Theory, Operators in Harmonic Analysis and Approximation. Operator Theory : Advances and Applications, **236**, New York : Springer, 2014, 377-390.

[22] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. Second Edition, MC Graw-Hill, 1974.

[23] J. Tung, Fock spaces. Ph. D thesis, University of Michigan, 2005.

[24] E. Wang and Z. Xu, *Hankel operators between classical Fock spaces*. Houston Journal of Mathematics, **47**, 4, 2021, 833-848.

[25] J. B. Xia, D. C. Zheng, *Standard deviation and Schatten class Hankel operators on the Segal-Bargmann space*. Indiana Univ. Math. J., **53**, 2004, 1381-1399.

[26] K. H. Zhu, *Operator theory in Function Spaces*. Second Edition, Math. Surveys and Monographs **138**, American Mathematical Society : Providence, Rhode Island, 2007.

[27] K. H. Zhu, *Analysis on Fock Spaces*. Graduate Texts in Mathematics, **263**.Springer, New York, 2012.