

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

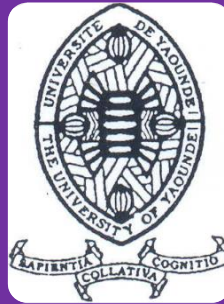
UNIVERSITE DE YAOUNDE I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN
SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE
PHYSIQUES ET APPLICATIONS

BP: YAOUNDE 812

Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROUN

Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

CENTER FOR RESEARCH AND
DOCTORAL TRAINING SCIENCES
TECHNOLOGIES AND
GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE
TRAINING UNIT FOR PHYSICS
AND APPLICATIONS

P.O. BOX: 812 YAOUNDE

Email : crfd_stg@uy1.uninet.cm

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

LABORATOIRE DE MECANIQUE APPLIQUEE ET D'HYDRAULIQUE.

Thème :

ÉCOULEMENT DE STOKES AUTOUR D'UNE SPHÈRE IMPERMÉABLE.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de **Master of science en Physique**

Option : **MECANIQUE APPLIQUEE**

Rédigé par :

FOGHEM TOKO MARC Hervé

Matricule : **14G2920**

Licencié en Physique

Sous la direction de :

PEMHA ELKANA

Professeur

Université de Yaoundé I

Année : 2025



Dédicaces

A mes chers parents,

Dont le soutien indéfectible et l'amour inconditionnel ont été les piliers de mon parcours académique. Votre sacrifice et vos encouragements m'ont permis d'atteindre ce moment important de ma vie. Je vous dédie ce mémoire en témoignage de ma gratitude éternelle.

A mes frères et sœurs,

Qui ont été mes compagnons de route et mes sources d'inspiration. Votre soutien moral et votre présence joyeuse ont rendu ce chemin plus agréable et significatif. Ce mémoire leur est dédié en signe de reconnaissance pour leur soutien inconditionnel.

A mes ancêtres,

Dont l'héritage et la sagesse ont tracé le chemin que je suis aujourd'hui. Leurs valeurs, leur persévérance et leur courage ont été une source d'inspiration constante. Je dédie ce mémoire en hommage à leur mémoire et à leur héritage qui continue de m'inspirer au quotidien.

Que cette dédicace exprime ma profonde gratitude envers ceux qui ont influencé mon parcours académique et personnel, et qui ont contribué à la personne que je suis aujourd'hui.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon directeur de mémoire, le Pr. PEMHA ELKANA, pour sa disponibilité, son écoute et ses précieux conseils tout au long de ce travail. Sa rigueur scientifique et sa pédagogie m'ont permis de progresser et de mener à bien ce projet.

Je voudrais également remercier chaleureusement le Dr. LAMARA MAURICE, enseignant au département de physique, pour son aide précieuse dans la rédaction de ce mémoire. Ses conseils avisés ont été d'une grande utilité pour l'aboutissement de ce projet.

Je n'oublie pas tous les enseignants du département de physique qui m'ont accueilli dans leurs locaux et ont partagé leurs connaissances et équipements. Leur gentillesse et leur professionnalisme m'ont été d'une grande aide dans l'accomplissement de ce travail.

Enfin, je remercie ma famille, mes amis et toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réussite de ce mémoire. Leur affection et leur confiance m'ont été indispensables.

TABLE DE MATIERES

Dédicaces..... 2

REMERCIEMENTS 3

TABLE DE MATIERES..... 4

LISTE DES ABREVIATIONS 7

LISTE DE FIGURES 9

RESUME..... 11

ABSTRACT 12

INTRODUCTION..... 13

I. CHAPITRE I : REVUE DE LITTERATURE..... 15

ETAT DE L'ART SUR LES ECOULEMENTS..... 15

II. CHAPITRE II : MATERIELS ET METHODES..... 23

**II.1 DESCRIPTION DU MODELE D'ÉCOULEMENT AUTOUR
D'UNE SPHERE 23**

II.2 VALIDITE DU MODELE 26

II.3 MATERIELS 26

II.3.1 EQUATIONS FONDAMENTALES 26

II.3.1.1 Equation de continuité..... 27

II.3.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement..... 30

II.3.1.3 Equation de Navier-stokes 33

II.3.1.4 La Vorticité ω 36

II.4 METHODES 37

II.4.1 METHODE DE RESOLUTION DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE SPHERE.. 37

II.4.1.1 Equations de conservation de la masse 37

II.4.1.2 Conditions aux limites du champ de vitesses..... 39

II.4.1.3 Conditions aux limites de la fonction de courant.....	40
II.4.1.4 Conditions aux limites du champ de pression.....	41
II.4.2 SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES	41
II.4.3 LES COMPOSANTES DE LA VORTICITE EN COORDONNEES SPHERIQUES :...	42
II.4.4 FORMULATION EN VORTICITE DE L'ÉQUATION DE NAVIER STOKES	44
II.4.5 LA FONCTION DE COURANT	48
II.4.6 METHODE DE SEPARATION DES VARIABLES	49
II.4.7 LE CHAMP DE VITESSES	53
II.4.8 LE CHAMP DE PRESSION :	54
II.4.9 LA FORCE DE TRAINEE	57
II.4.9.1 Coefficient de traînée	61
<u>III. CHAPITRE III : RESULTATS.....</u>	62

III.1 PRESENTATION DES RESULTATS OBTENUS POUR DIFFERENTS

PARAMETRES D'ÉCOULEMENT	62
III.1.1 COEFFICIENT DE TRAINEE.....	62
III.1.1.1 Confrontation aux expériences.....	62
III.1.2 LE CHAMP DE VITESSES	65
III.1.2.1 Code Matlab de modélisation du champ de vitesses	66
III.1.2.2 Profil de vitesse suivant les axes cartésiens	78
III.1.2.3. Variation du champ de vitesses en fonction de la distance par rapport au centre de la sphère.	84
III.1.2.4 Variation de la vitesse en fonction de l'angle θ pour différentes distances (r) à la sphère	86
III.1.3 LA FONCTION DE COURANT	88
III.1.3.1 La programme Matlab suivant nous donne l'allure des lignes de courant	89
III.1.3.2 Simulation de l'écoulement autour de la sphère	95

III.1.4 LE CHAMP DE PRESSION 97

III.1.4.1 Variation du champ de pression en fonction de r 105

III.1.4.2 Variation de la pression en fonction de θ pour différentes valeurs de r
 108

III.2 DISCUSSION ET LIMITE DE VALIDITE 111

III.2.1 ORDRE DOMINANT DE VALIDITE 111

Conclusion..... 113

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 115

LISTE DES ABREVIATIONS

ρ : masse spécifique du fluide	(kg/m ³)
dm : élément de masse du fluide.....	(kg)
$d\vartheta$: volume élémentaire.....	(m ³)
T : température.....	(⁰ K)
g : accélération de pesanteur.....	(N/kg)
ϖ : poids volumique.....	(N/m ³)
d : densité.....	
ρ_{ref} : masse volumique du fluide de référence.....	(Kg/m ³)
ϑ : le volume de fluide.....	(m ³)
p : pression.....	(pa)
E : Le coefficient de compressibilité isotherme	
μ : viscosité dynamique	(pa.s)
τ : contrainte de cisaillement	(N/m ²)
ν : viscosité cinématique.....	(stokes)
dS : surface élémentaire autour d'un point dans le fluide.....	(m ²)
dF : force élémentaire appliquée à la surface	(N)
P : pression en un point du fluide	(pa)
\underline{V} : vecteur vitesse	(m/s)
Ma : nombre de Mach.....	

T : temps(s)

$\underline{\underline{\Omega}}$: vecteur tourbillon.....(s⁻¹)

$\underline{\text{grad}}$: vecteur gradient(m⁻¹)

Re : Nombre de Reynolds.....(adimensionnelle)

v : viscosité cinématique du fluide (m²/s)

Q_e : Débit entrant fourni par la source (kg/s)

Q_s : Débit sortant retiré par le puits (kg/s)

div : divergence(s⁻¹)

$\underline{\text{rot}}$: vecteur rotationnel.....(s⁻¹)

$\underline{\underline{F_m}}$: Vecteur force massique(N/kg)

$\underline{\underline{n}}$: est le vecteur unitaire tangent à la surface (Σ).....

$\underline{\underline{\sigma}}$: est le Tenseur des contraintes(Pa)

\mathcal{H} : Hamiltonien.....(J)

$P_{\text{calorifique}}$: puissance calorifique..... (w)

E_{interne} : énergie interne..... (j)

$\underline{\varphi}$: est la densité de flux de chaleur par conduction à travers une surface (w)

Φ : fonction de dissipation de l'énergie intérieure du fluide.....(w)

$\underline{\underline{\varepsilon}}$: Tenseur du taux de déformation.....(s⁻¹)

C_D : coefficient de traînée(adimensionnelle)

K_G : facteur géométrique.....(adimensionnelle)

LISTE DE FIGURES

Figure II:1 Modèle de l'écoulement autour d'un obstacle sphérique 24

Figure II:2 Écoulement rampant autour d'une sphère imperméable 25

Figure II:3 Contraintes sur la sphère et force aérodynamique résultante (traînée) 57

Figure III:1- Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds (compilation) (source : laurent jacquin tome 2 modèle) 62

Figure III:2 Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds 63

Figure III:3 champ de vitesses en 3D 69

Figure III:4 champ de vitesses en 3D vue XY 70

Figure III:5 champ de vitesses en 3D vue YZ 71

Figure III:6 champ de vitesse de l'écoulement rampant autour d'une sphère en 2D vue XZ 74

Figure III:7 champ de vitesse de l'écoulement rampant autour d'une sphère en 2D vue YZ 77

Figure III:8 profil de vitesse de l'écoulement suivant l'axe des $X_{\text{Cartésiens}}$ 79

Figure III:9 profils de vitesse de l'écoulement suivant l'axe des $X_{\text{Cartésiens}}$ 80

Figure III:10 profil de vitesse de l'écoulement suivant l'axe des $Y_{\text{Cartésiens}}$ 82

Figure III:11 profils de vitesse de l'écoulement suivant l'axe des $Y_{\text{Cartésiens}}$ 83

Figure III:14 Variation du champ de vitesses lorsqu'on s'éloigne de la sphère. 85

Figure III:15 Variation du champ de vitesses avec l'angle θ pour r fixé. 87

Figure III:16 ligne de champ 88

Figure III:17 lignes de courant qui se resserrent au contour de l'obstacle ... 89

Figure III:18 ligne de courant autour de la sphère en vue YZ..... 92

Figure III:19 lignes de courant autour de la sphère en vue XZ 93

Figure III:20 lignes de courant tangente aux vecteur vitesse..... 94

Figure III:21 visualisation des lignes de courant pour $Re=0.16$ (source : Van Dyke) 95

Figure III:22 sphère tombant librement dans l'axe d'un tube de deux fois son diamètre rempli de glycérine. avec un $Re=0.10$ (source : Van Dyke)..... 96

Figure III:23 Champ de pression en vue 3D 100

Figure III:24 champ de pression en vue XX 101

Figure III:25 champ de pression en vue ZZ..... 101

Figure III:26 champ de pression autour de la sphère pour $\phi=0^\circ$ et $\phi=90^\circ$ 104

Figure III:27 variation du champ de pression avec r pour θ fixé 106

Figure III:28 variation du champ de pression avec r pour θ fixé 107

Figure III:29 Variation de la pression en fonction de θ pour différentes valeurs de r fixé. 109

RESUME

L'écoulement de stokes autour d'une sphère imperméable est un thème central dans l'étude des fluides visqueux et des phénomènes de transport dans des applications allant de l'ingénierie à la biologie. Ce mémoire a pour objectif de déterminer les champs de vitesse, le champ de pression et les forces de trainée agissant sur une sphère placée dans un fluide en mouvement, en se concentrant sur le régime de stokes ou les effets de la viscosité prédominant sur les forces d'inertie. Dans un premier temps, nous introduirons les fondements théoriques en exposant les équations de Navier-stokes dans le cadre du régime de stokes, qui s'applique à des écoulements à faible nombre de Reynolds. Nous établirons les équations du mouvement en coordonnées sphériques, en tenant compte des conditions aux limites imposées par la sphère, spécifiquement que la vitesse du fluide à la surface est nulle en raison de son imperméabilité. L'analyse des champs de vitesses sera conduite à l'aide des méthodes analytiques, notamment par l'application des méthodes de séparation des variables, ce qui permettra de décrire le comportement du fluide dans le domaine autour de la sphère. Par la suite, nous aborderons la détermination du champ de pression autour de la sphère. En utilisant la projection de l'équation de Navier-stokes dans la direction de l'écoulement incidente, nous dérivons l'expression du champ de pression, en mettant en évidence son interaction avec le champ de vitesse et son rôle essentiel dans le calcul de la force de trainée. Le dernier volet de notre étude se concentrera sur les forces de trainée. En appliquant la loi de stokes, nous établirons une relation quantitative entre la force de trainée, les propriétés du fluide telles que la viscosité et la vitesse d'écoulement, ainsi que le rayon de la sphère. Il en ressort que la vitesse du fluide croît lorsqu'on s'éloigne de la surface de la sphère en suivant un modèle parabolique. La variation de la pression dépend de la zone du fluide autour de la sphère considérée. Elle croît lorsqu'on s'éloigne de la sphère dans la partie supérieure du plan passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à la direction de l'écoulement incidente. Les forces de trainées quant à elles s'opposent au mouvement de la sphère dans le fluide visqueux et dépendent iniquement du nombre de Reynold. En conclusion l'écoulement de stokes autour de la sphère est un modèle essentiel pour comprendre les interactions entre les solides et les fluides visqueux. Nos résultats contribuent à la compréhension fondamentale de ces phénomènes.

ABSTRACT

Stokes flow around an impermeable sphere is a central topic in the study of viscous fluids and transport phenomena in applications ranging from engineering to biology. This thesis aims to determine the velocity fields, pressure fields and drag forces acting on a sphere placed in a moving fluid, focusing on the Stokes regime where the effects of viscosity predominate over inertial forces. First, we will introduce the theoretical foundations by presenting the Navier-Stokes equations in the Stokes regime, which applies to flows at low Reynolds numbers. We will establish the equations of motion in spherical coordinates, taking into account the boundary conditions imposed by the sphere, specifically that the fluid velocity at the surface is zero due to its impermeability. The analysis of the velocity fields will be conducted using analytical methods, in particular by applying the methods of separation of variables, which will allow us to describe the behavior of the fluid in the area around the sphere. Subsequently, we will address the determination of the pressure field around the sphere. Using the projection of the Navier-Stokes equation in the direction of the incident flow, we derive the expression of the pressure field, highlighting its interaction with the velocity field and its essential role in calculating the drag force. The last part of our study will focus on the drag forces. By applying Stokes' law, we will establish a quantitative relationship between the drag force, the properties of the fluid such as viscosity and flow velocity, as well as the radius of the sphere. It emerges that the velocity of the fluid increases as we move away from the surface of the sphere following a parabolic model. The variation of the pressure depends on the area of the fluid around the sphere considered. It increases when moving away from the sphere in the upper part of the plane passing through the center of the sphere and perpendicular to the direction of the incident flow. The drag forces oppose the movement of the sphere in the viscous fluid and depend exclusively on the Reynolds number. In conclusion, the Stokes flow around the sphere is an essential model for understanding the interactions between solids and viscous fluids. Our results contribute to the fundamental understanding of these phenomena.

INTRODUCTION

La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui concerne le comportement des liquides et des gaz au repos ou en mouvement. Cette branche de la mécanique englobe une variété de problèmes allant de l'étude de l'écoulement sanguin dans des capillaires déformables (vaisseaux sanguins de diamètre de quelques microns) à l'écoulement de pétrole brut dans des conduites de l'ordre du mètre de diamètre avec des longueurs pouvant aller jusqu'à 13 000 km. C'est une science qui trouve des applications dans plusieurs domaines tels que l'astrophysique, la biomédecine, la météorologie, la géophysique, la physique du plasma, l'aérodynamique, l'hydraulique, les turbomachines et les équipements thermiques. La mécanique des fluides est subdivisée en plusieurs branches qui sont définies par les propriétés des fluides.

Face à la complexité de la résolution analytique des équations de la mécanique des fluides Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies : la mécanique des fluides numérique (CFD ou Computational Fluid Dynamics en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs très puissants et des logiciels de simulation : les supercalculateurs.

Les structures d'écoulement autour des obstacles profilés et en particulier autour de la sphère occupe une place importante dans la mécanique des fluides dues à leurs importance pratique dans les applications aérodynamiques tels que les ailes d'avion, les sous-marins et les missiles. Le problème d'écoulement rampant autour d'une sphère peut paraître de portée

pratique limitée. Mais il n'en est rien. Il concerne en effet le comportement de petites particules, fluides ou solides, dans un fluide au repos ou en mouvement, et il fournit alors une solution de référence pour tous les problèmes de fluides diphasiques tels que les fumées, les aérosols, les sprays, la pluie, le brouillard, etc. Il constitue aussi un problème de base pour l'application des techniques optiques de mesure de champs de vitesse dans les fluides, telles que la vélocimétrie laser doppler (LDV, pour *Laser Doppler Velocimetry*) et la vélocimétrie par image de particules (PIV pour *Particle Image Velocimetry*), qui sont aujourd'hui largement utilisées dans le domaine de la recherche et de l'industrie. Plusieurs travaux de recherches aérodynamique ont été réalisés pour modéliser l'écoulement autour des obstacles et plusieurs méthodes numériques basées sur des théories physiques ont été développées. Dans ce contexte s'inscrit le présent travail, dont l'objectif principale consiste à étudier les caractéristiques de l'écoulement de stokes autour d'une sphère imperméable.

Le mémoire éclairant le présent travail sera organisé en trois chapitres principaux. Dans le premier chapitre, nous aborderons les travaux antérieurs en relation avec le sujet traité, à travers une revue de la littérature des études anciennes et récentes sur les écoulements autour des obstacles. Par la suite en deuxième chapitre nous allons modéliser nôtres écoulement autour de la sphère et proposer des méthodes de résolutions des équations qui en découle et en troisième chapitre nous allons présenter les résultats obtenus et commenter les différents profils de vitesse, de pression et examiner la relation entre le coefficient de trainée de l'écoulement autour de la sphère et le nombre de Reynolds.

I. CHAPITRE I : REVUE DE LITTERATURE

Beaucoup de travaux de recherches ont été réalisés pour modeler l'écoulement autour des obstacles. Pour cela, plusieurs expériences dans le domaine ont été réalisées et confrontées aux méthodes numériques. Pour cette dernière une large gamme de méthodes mathématiques a été développées afin de s'approcher de la réalité de l'écoulement à différents régimes autour des obstacles (subsonique, transsonique, supersonique et hypersonique) et de fournir le maximum d'informations qui peuvent se produire

ETAT DE L'ART SUR LES ECOULEMENTS

1. Études expérimentales et numériques sur les écoulements autour de cylindres

Guojon-Durand et al. [1] ont étudié l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre en rotation oscillante (mouvement de rotation périodique) autour de son axe. Ils ont confirmé qu'à certaines fréquences d'oscillation, l'instabilité hydrodynamique diminue, modifiant ainsi la topologie de l'écoulement et l'effet sur le sillage.

Calluaud et al. [2] ont réalisé une étude expérimentale et numérique de l'écoulement laminaire autour d'un obstacle de section carrée placé sur une plaque plane, utilisant la méthode de vélocimétrie par images de particules (PIV). Les deux méthodes ont permis d'identifier la topology de l'écoulement, les lignes de séparation et la formation du tourbillon en s'appuyant sur la convergence des résultats. Une formation de tourbillons verticaux au-dessus du cube a été aussi observée.

Madani et Abidat [3] ont proposé un algorithme basé sur la méthode des différences finies pour résoudre les équations de Navier-Stokes (les équations fondamentales décrivant le mouvement des fluides). Leur méthode, utilisant des schémas d'ordre $O(h^2)$ et $O(h^4)$, permet d'étudier les écoulements instationnaires autour d'obstacles profilés, tout en étant efficace en termes de temps de calcul et de précision.

2. Modélisation numérique et écoulements turbulents

Belakroum et al. [4] ont appliqué la modélisation par simulation d'échelles larges (Large Eddy Simulation, LES) pour étudier les écoulements turbulents, instationnaires autour d'un cylindre. Leur étude a permis de visualiser nettement le phénomène d'éclatement tourbillonnaire, caractéristique des écoulements turbulents.

Meddane et al. [5] ont analysé l'écoulement d'un fluide autour d'un profil d'aile NACA 0021 à l'aide d'une combinaison d'études expérimentales et numériques. Ils ont montré que l'utilisation d'un volet mobile influence directement la distribution de pression et, par conséquent, les forces aérodynamiques exercées sur le profil.

Pascal-Ribot et Blanchet [6] ont mené une étude expérimentale et numérique de l'écoulement autour d'un cylindre dans deux phases — air et eau — utilisant la méthode d'analyse dimensionnelle. Leur objectif était d'évaluer les forces de portance induites par la vibration du cylindre.

Bhattacharyya et Singh [7] ont examiné l'effet du nombre de Reynolds (Re) compris entre 100 et 200, ainsi que du nombre de Richardson (Ri), sur la fréquence du détachement tourbillonnaire. Ils ont constaté que cette fréquence augmentait avec Re jusqu'à une valeur critique, au-delà de laquelle

l'écoulement présentait plutôt une organisation sous la forme d'un panache thermique.

3. Études sur les écoulements autour d'obstacles et leur influence

Roquet et al. [8] ont utilisé la modélisation numérique pour étudier l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre, notamment la variation des efforts de frottement et la déformation du sillage en fonction des paramètres tels que la vitesse et la géométrie.

Wang et Yang [9], ont simulé numériquement la formation de vortex en fer à cheval (structure tourbillonnaire caractéristique) autour d'un cube dans un canal. Leur étude a montré que l'augmentation du nombre de Reynolds complexifie la structure tourbillonnaire, entraînant la croissance du nombre de vortex.

D'Allessio et Kocabiyik [10] ont simulé la circulation autour d'un cylindre elliptique incliné en oscillation transversale dans un canal, avec Re fixé à 102. Leur étude a sondé l'effet de l'inclinaison et du rapport d'aspect sur la formation de vortex.

4. Influence des paramètres géométriques et dynamiques

Ardonceanu [11], en 2009, a développé une procédure nodale de résolution numérique de l'équation de Laplace pour les écoulements à potentiel de vitesse autour de corps portants. La méthode utilise des conditions de Dirichlet internes aux nœuds du maillage plutôt que sur les surfaces lisses, ce qui, couplé à une formulation Neumann des conditions de Kutta, réduit l'impact de la discrétisation sur l'estimation des efforts globaux. Applicable aux écoulements stationnaires ou non stationnaires en deux ou trois dimensions.

Cao et Tamura [12] ont étudié analytiquement et expérimentalement l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à basses valeurs de Reynolds. Ils ont observé que le nombre de Strouhal ne varie pas significativement avec le paramètre de cisaillement, et que la vitesse d'arrêt à haute vitesse influence fortement la force aérodynamique.

Zou et Lam [13] ont analysé les écoulements turbulents autour de quatre cylindres en configuration carrée à différentes hauteurs d'espacement. Leur résultat montre que la fluctuation de vitesse est cohérente entre modélisations expérimentales et numériques.

5. Études expérimentales et numériques sur écoulements derrière les cylindres

I. Khabbouchi et M. S. Guellouz (2014) [14] ont réalisé des mesures par PIV dans le sillage d'un cylindre placé près d'une paroi, au niveau de son bord d'attaque. La configuration a permis d'isoler l'effet de l'écoulement type jet entre la paroi et le cylindre. À un nombre de Reynolds $Re=8667$, ils ont identifié trois régions distinctes d'écoulement de type jet, perturbant la couche limite et empêchant la formation régulière de la structure de Von Kármán dans le sillage.

6. Étude numérique et expérimentale de l'écoulement autour d'un cylindre

Yukio Tamura et Cao (années indéfinies) [15] ont analysé l'écoulement autour d'un cylindre à Re sous-critique. Leur étude a montré que la fréquence de Strouhal reste stable et indépendante du paramètre de cisaillement, tandis que la vitesse d'arrêt à haute vitesse est fortement impactée par la force aérodynamique.

7. Étude sur les écoulements turbulents autour de plusieurs cylindres

K. Lam-L. Zou [16] a étudié numériquement et expérimentalement les écoulements turbulents autour de quatre cylindres dans une configuration carrée, en faisant varier le rapport d'espacement entre eux. Les résultats de fluctuation de vitesse ont montré une similarité entre simulation et expérimentation, notamment dans la formation de vortex et la dynamique de la turbulence.

8. Simulation de l'écoulement instationnaire autour d'un cylindre

R. Belakroum et al. [17] ont utilisé la modélisation par la méthode des grandes échelles (LES) pour étudier un écoulement turbulent autour d'un cylindre. Leur travail a mis en évidence la formation claire de structures tourbillonnaires et leurs impacts sur la turbulence globale.

9. Effet des volets sur la distribution de pression

Meddane et al. [18] ont étudié par simulation l'effet du volet sur la distribution de pression autour d'un profil d'aile NACA 0021. Leur résultat indique que l'utilisation du volet influence directement la distribution de la pression et modifie la force de portance ainsi que la traînée.

10. Étude des forces de vibration sur un cylindre en flux oscillant

Pascal-Ribot et Y. Blanchet [19] ont abordé expérimentalement et numériquement l'écoulement autour d'un cylindre en phase avec des fluides eau-air, en utilisant une analyse dimensionnelle. Leur recherche a permis d'évaluer l'effet des forces de portance liées aux vibrations mécaniques du cylindre.

11. Fenêtre sur la fréquence du détachement du vortex

Bhattacharyya et Singh [20] ont montré, pour Re compris entre 100 et 200 ainsi que pour un rapport de Richardson supérieur à 1, que la fréquence du détachement vortex augmente avec le nombre de Richardson jusqu'à un seuil critique, après quoi l'écoulement prend une configuration en panache thermique.

12. Étude sur l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre

Roquet et al. [21] ont modélisé l'écoulement stationnaire d'un fluide autour d'un cylindre, afin d'étudier la variation des efforts de fléchissement dans le sillage, en utilisant des simulations numériques pour analyser le comportement asymptotique.

13. Structures tourbillonnaires autour d'un cube

Wang et Yang [22] ont réalisé une étude numérique sur la formation de vortex en fer à cheval et de tourbillons latéraux autour d'un cube dans un canal. Ils ont constaté que l'augmentation du nombre de Reynolds complexifie ces structures tourbillonnaires en renforçant la formation de vortex en fer à cheval.

14. Étude de l'effet de la géométrie sur écoulements autour d'un cylindre elliptique

D'Allessio et S. Kocabiyik [23] ont simulé numériquement un écoulement visqueux autour d'un cylindre elliptique incliné, effectuant des oscillations transversales. La méthode utilisée repose sur la discrétisation par différences finies, et a permis d'étudier l'influence de la fréquence d'oscillation sur la formation de vortex.

15. Influence de la surface biconvexe sur la traînée

H. Ardakani et N. S. Vaghefial [24] ont étudié la simulation d'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle, en se concentrant sur l'impact de la surface biconvexe et des paramètres de Mach. Leur résultat montre que ces paramètres influencent fortement la traînée et la répartition des pressions.

16. Analyse des écoulements à haut nombre de Reynolds

W. Ogana [25] a consacré ses travaux à l'étude des écoulements transsoniques en domaine bidimensionnel, en utilisant une viscosité artificielle pour modéliser l'écoulement. La résolution s'appuie sur une équation intégrale, démontrant une convergence rapide ; ses résultats concordent avec ceux issus de méthodes aux différences finies.

17. Étude des écoulements supercritique avec effets d'ondes de choc

Hemdan et Selim [26] ont exploré, par modélisation numérique, les écoulements non viscosiques à haut Mach où des ondes de choc apparaissent à proximité d'un profil mince. Leur travail montre comment ces écoulements sont sensibles à la surface et à l'angle d'attaque.

18. Simulation de flux turbulents autour de cylindres avec rainures

Yates [27] a réalisé une simulation numérique de flux turbulents autour de cylindres dotés de rainures en V ou U, avec Re élevé. Leur étude a permis de comprendre l'impact de la géométrie modifiée sur la stabilité vortex et la turbulence.

19. Influence de la distance par rapport à la paroi

Cetin Canpolat et al. [28] ont expérimenté et modélisé l'écoulement d'un cylindre en présence d'un sillon sur sa surface, en étudiant l'effet de la distance par rapport à une paroi. Ils ont observé que cette distance influence de manière significative la séparation du flux et la formation de vortex.

20. Effets de la vibration structurelle sur la dynamique du vortex

Un dernier point d'intérêt concerne l'interaction entre la vibration mécanique de structures et l'écoulement vortex, notamment dans le contexte de la stabilité des systèmes aérodynamiques [29].

II. CHAPITRE II : MATÉRIELS ET MÉTHODES

Il existe quelques solutions analytiques des équations de Navier-Stokes mais le catalogue de ces solutions est peu étoffé. Cela tient au fait que les équations de Navier-Stokes sont non linéaires. La majorité des solutions connues concernent des situations où les équations sont linéaires. Elles appartiennent donc à la classe des écoulements sans inertie définie dans ce chapitre.

L'écoulement autour d'une sphère à petit nombre de Reynolds (second problème de Stokes) ou écoulements rampants, sont les écoulements incompressibles pour lesquels le nombre de Reynolds est très petit ($Re \ll 1$), c'est-à-dire pour lesquels les forces visqueuses prédominent sur les forces d'inertie.

II.1 DESCRIPTION DU MODÈLE D'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE SPHERE

Le choix du modèle repose sur des hypothèses simplificatrices d'étude des écoulements :

Considérons l'écoulement autour d'un obstacle de forme sphérique, de quelque millimètre de Diamètre.

On se place dans un repère de coordonnées orthogonales sphériques (r, θ, ϕ) d'axe \underline{e}_z et l'on fait les hypothèses suivantes :

H1 - le fluide est considéré comme newtonien, incompressible et homogène, de masse volumique ρ ;

H2 - la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ est constante ;

H3 - l'écoulement est permanent et irrotationnel ;

H4 - on néglige les forces extérieures (notamment : le fluide est considéré comme non pesant)

H5 - l'écoulement est axisymétrique (indépendant de la coordonnée ϕ) ;

H6 - le nombre de Reynolds est supposé très petit, de sorte que l'on puisse considérer l'écoulement comme étant sans inertie (écoulement rampant).

On cherche à déterminer le coefficient de traînée de la sphère, le champ de Vitesses autour de la sphère et enfin le champ de pression.

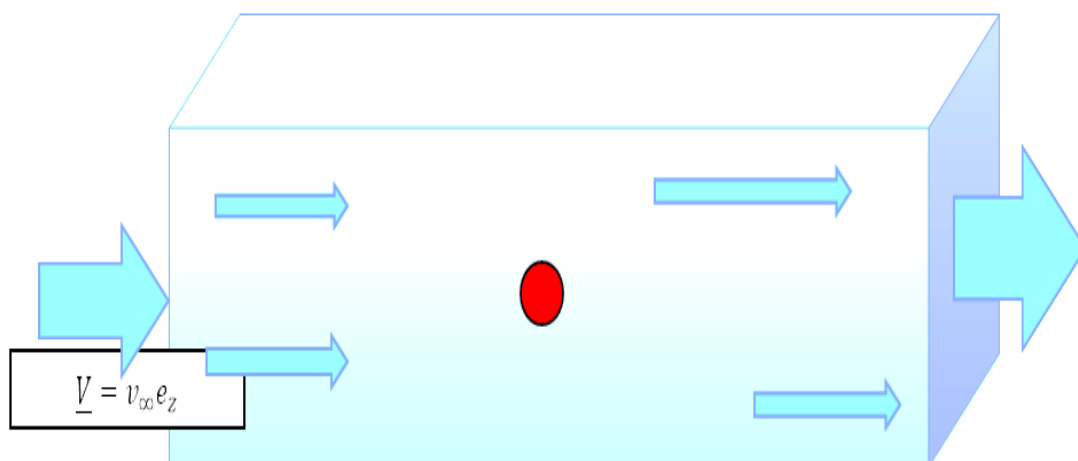


Figure II:1 Modèle de l'écoulement autour d'un obstacle sphérique

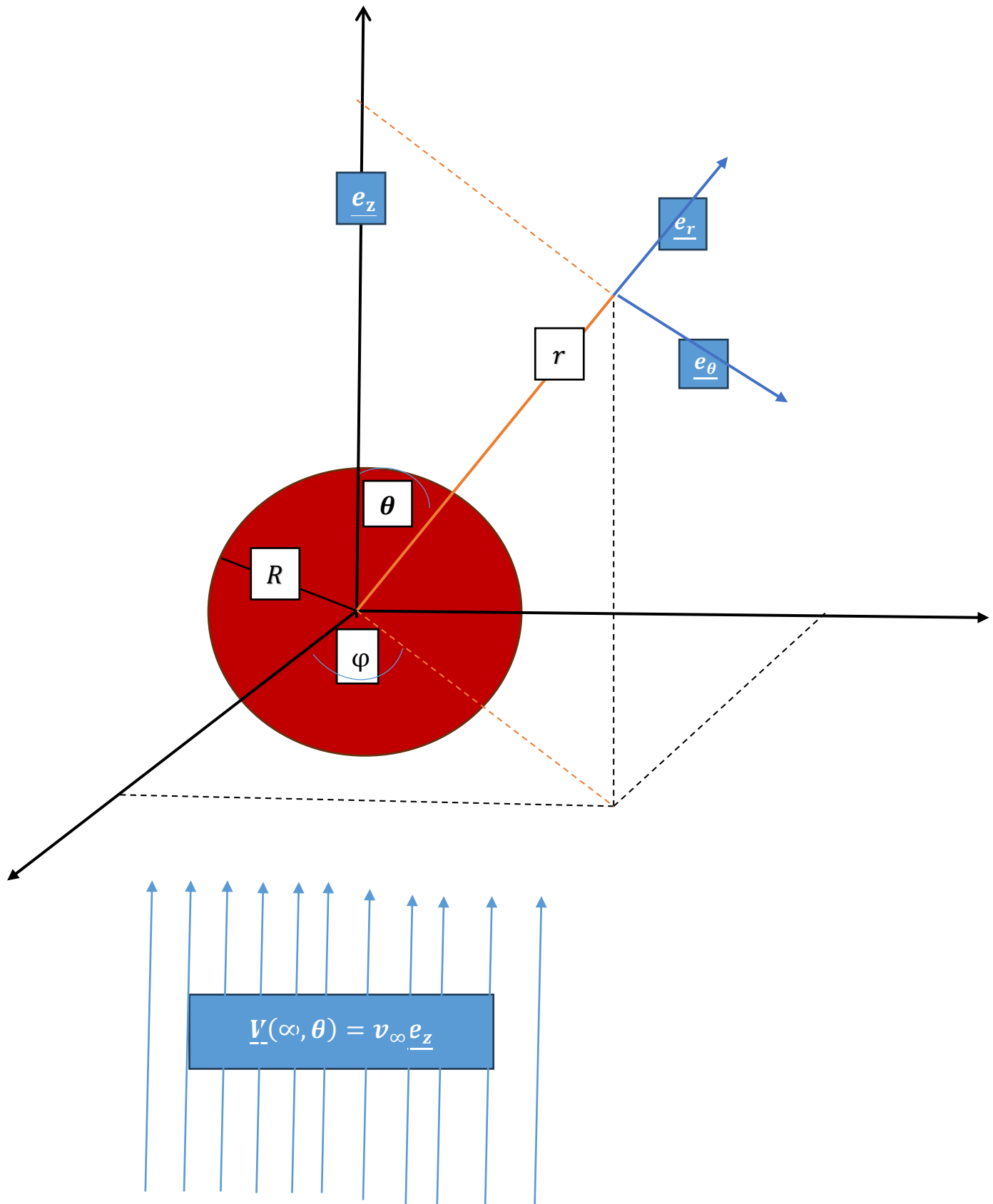


Figure II:2 Écoulement rampant autour d'une sphère imperméable

II.2 Validité du Modèle

Les deux hypothèses H4 et H6 ne sont applicables simultanément que pour de toutes petites particules. En effet, la première condition stipule que $Fr = v_\infty / \sqrt{gR} \gg 1$; la seconde impose $Re = v_\infty R / \nu \ll 1$. Cela mène à la condition : $\sqrt{gR} \ll v_\infty \ll \nu / R$ soit $R \ll (\nu)^{2/3} / g^{1/3}$.

Dans le cas de l'eau par exemple ($\nu \approx 10^{-6} m^2/s$) cela donne : $2R \ll 10^{-4} m$. Cela revient donc à considérer des particules dont le diamètre n'excède pas quelques dizaines de microns.

II.3 MATERIELS

II.3.1 EQUATIONS FONDAMENTALES

On peut décrire le mouvement d'un fluide par un ensemble d'équations aux dérivées partielles déduites des lois fondamentales de la mécanique et de la thermodynamique, c'est-à-dire les lois de conservation de la masse (équation de la continuité), de la quantité de mouvement (équation de la quantité de mouvement) et d'énergie (l'équation de l'énergie).

Pour proposer de façon complète un problème en dynamique des fluides, il convient d'ajouter aux équations de mouvement des conditions initiales et des conditions aux limites (ou conditions frontières).

II.3.1.1 Equation de continuité

L'équation de continuité est une des formes sous laquelle peut se présenter l'équation de conservation de la masse.

Enoncé du principe de conservation de la masse :

« Quel que soit le domaine (D) de fluide limité par une surface (Σ), et entièrement contenu dans le fluide, la masse de fluide contenue dans (D) reste constante quand on suit (D) dans son mouvement. ».

En supposant que le domaine (D) contient des sources ou des puits, l'équation de conservation de la masse se traduit par la relation suivante :

$$\frac{dm}{dt} = |Q_e| - |Q_s| \quad (\text{II. 1})$$

Q_e : Débit entrant fourni par la source en (kg/s)

Q_s : Débit sortant retiré par le puits en (kg/s)

dm : masse de la particule de fluide en (kg)

Sachant que :

$$m = \iiint_{(D)} \rho \, d\vartheta \quad (\text{II. 2})$$

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_{(D)} \left[\frac{d\rho}{dt} d\vartheta + \rho \frac{d(d\vartheta)}{dt} \right] = \iiint_{(D)} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{V}) \right] d\vartheta \quad (\text{II. 3})$$

$$|Q_e| = \iiint_{(D)} \rho |q_e| d\vartheta \quad (\text{II. 4})$$

$$|Q_s| = \iiint_{(D)} \rho |q_s| d\vartheta \quad (\text{II. 5})$$

On obtient

$$\iiint_{(D)} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{V}) \right] d\vartheta = \iiint_{(D)} \rho (|q_e| - |q_s|) d\vartheta \quad (\text{II. 6})$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit donc :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{V}) = \rho (|q_e| - |q_s|) \quad (\text{II. 7})$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{V}) = \rho (|q_e| - |q_s|) \quad (\text{II. 8})$$

$|q_e|$: débits des masses par unités de masse entrant dans (D).

$|q_s|$: débits des masses par unités de masse sortant de (D).

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) l'équation de continuité s'écrit pour un débit entrant égale au débit sortant : $|q_e| = |q_s|$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{II. 9})$$

Considérons un champ de vitesse défini par :

$$\underline{V} = v_r \underline{e}_r + v_\theta \underline{e}_\theta + v_\varphi \underline{e}_\varphi \quad (\text{II. 10})$$

Pour un fluide incompressible et isotherme avec en débit entrant égale au débit sortant, l'équation de conservation de la masse se réduit à la relation suivante :

$$\text{div}(\underline{V}) = 0 \quad (\text{II. 11})$$

On dit que l'écoulement est à Flux conservatif et le champ de vitesse dérive d'un potentiel vecteur \underline{A} :

$$\underline{V} = \text{rot}(\underline{A}) \quad (\text{II. 12})$$

De cette relation on en déduit le champ de vitesse en fonction de la fonction de courant ψ en coordonnée sphérique :

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (\text{II. 13})$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{II. 14})$$

II.3.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Enoncé

« Quel que soit le domaine (D) de fluide que l'on suit dans son mouvement, la dérivée par rapport au temps du tenseur de quantité de mouvement du domaine est égale au tenseur des forces extérieures appliquées au domaine (D) ».

La quantité de mouvement d'un système fluide de volume \mathfrak{V} , s'écrit :

$$\iiint_{\mathfrak{V}} \rho \underline{V} d\mathfrak{V} \quad (\text{II. 15})$$

Or, l'énoncé nous permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathfrak{V}} \rho \underline{V} d\mathfrak{V} = \iiint_{\mathfrak{V}} \rho \underline{F}_m d\mathfrak{V} + \iint_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} ds \quad (\text{II. 16})$$

\underline{F}_m : Vecteur force massique

\underline{n} : est le vecteur unitaire tangent à la surface Σ .

$\underline{\underline{\sigma}}$: est le Tenseur des contraintes totales appliquées en un point du fluide et s'écrit en fonction des composantes tangentielle et composantes normales de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\theta\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{II. 17})$$

La transformation de **Green-ostrogradski** nous permet d'écrire :

$$\iint_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} ds = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) d\mathcal{V} \quad (\text{II. 18})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\rho \frac{d\underline{V}}{dt} = \rho \underline{F}_m + \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (\text{II. 19})$$

En coordonnée sphérique elle s'écrit :

Projection suivant \underline{e}_r :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) + \rho (F_m)_r = \rho \frac{dv_r}{dt} \quad (\text{II. 20})$$

Projection suivant \underline{e}_θ :

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta) + \rho (F_m)_\theta = \rho \frac{dv_\theta}{dt} \quad (\text{II. 21})$$

Projection suivant \underline{e}_φ :

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{r\theta} \cot \theta) + \rho (F_m)_\varphi = \rho \frac{dv_\varphi}{dt} \quad (\text{II. 22})$$

Les composantes du tenseur de contrainte sont :

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{II. 23})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\varphi \cot \varphi}{r} \right) \quad (\text{II. 24})$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) \quad (\text{II. 25})$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \quad (\text{II. 26})$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta \cot \varphi}{r} \right) \quad (\text{II. 27})$$

$$\sigma_{\theta r} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (\text{II. 28})$$

P : pression en un point du fluide en (N/m²)

II.3.1.3 Equation de Navier-stokes

Les fluides Newtoniens sont décrits par l'équation de Navier-stokes. Cette équation découle du principe de conservation de la quantité de mouvement par remplacement du tenseur de contrainte par sa forme liée au tenseur du taux de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{d\underline{V}}{dt} = \rho \underline{F}_m + \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (\text{II. 29})$$

Sachant que

$$\underline{\underline{\sigma}} = (-p + \eta \text{div}(\underline{V})) \underline{\underline{\delta}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{II. 30})$$

On obtient donc l'équation de Navier-stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{V}) \cdot \underline{V} \right) = \rho \underline{F}_m - \underline{\underline{\text{grad}}}(p) + \underline{\underline{\text{grad}}}(\eta \text{div}(\underline{V})) + \text{div}(\mu \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{V})) + \text{div}(\mu \underline{\underline{\text{tgrad}}}(\underline{V})) \quad (\text{II. 31})$$

La forme générale de Navier-stokes met en évidence les forces par unité de volume suivantes :

- $\rho \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{V}) \cdot \underline{V} \right)$: Force d'inertie
- $\rho \underline{F}_m$: Force de masse
- $-\underline{\underline{\text{grad}}}(p)$: force de pression
- $\underline{\underline{\text{grad}}}(\eta \text{div}(\underline{V})) + \text{div}(\mu \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{V})) + \text{div}(\mu \text{ }^t \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{V}))$: Force de viscosité

Pour un fluide incompressible avec débit entrant égale au débit sortant, dans des conditions isothermes, la projection sur chaque axe de l'équation de Navier-stokes s'écrit :

Projection suivant \underline{e}_r :

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\mathcal{H}v_r - 2\frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho (F_m)_r \quad (\text{II. 32})$$

$$= \rho \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right)$$

Projection suivant \underline{e}_θ :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\mathcal{H}v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 (\sin \theta)^2} - \frac{2 \cos \theta}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho (F_m)_\theta \quad (\text{II. 33})$$

$$= \rho \left(\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\varphi \cot \theta}{r} \right)$$

Projection suivant \underline{e}_φ :

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\mathcal{H} v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 (\sin \theta)^2} + \frac{2}{r^2 (\sin \theta)^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{II. 34}) \\
 + \rho (F_m)_\varphi = \rho \left(\frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{v_\varphi v_r}{r} - \frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \right)
 \end{aligned}$$

Avec

$$\mathcal{H} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 (\sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{II. 35})$$

II.3.1.4 La Vorticité $\underline{\omega}$

$$2\underline{\Omega} = \underline{\omega} = \text{rot}(\underline{V}) \quad (\text{II. 36})$$

Or

$$\text{rot}(\underline{V}) = \text{rot}(\underline{V})_r \underline{e}_r + \text{rot}(\underline{V})_\theta \underline{e}_\theta + \text{rot}(\underline{V})_\varphi \underline{e}_\varphi \quad (\text{II. 37})$$

$$\text{rot}(\underline{V})_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r \sin \theta v_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{II. 38})$$

$$\text{rot}(\underline{V})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta v_\varphi)}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 39})$$

$$\text{rot}(\underline{V})_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II. 40})$$

II.4 METHODES

II.4.1 Méthode de résolution de l'écoulement autour d'une sphère

La méthode de résolution du second problème de Stokes sera de manière analytique suivant les étapes suivantes :

- Equations de conservation (masse, quantité de mouvement)
- Introduction de la fonction de courant
- Expression de la vorticité
- R crire les équations de mouvement en fonction de la fonction de courant
- R crire les conditions aux limites en fonction de la fonction de courant

L'écoulement est symétrique par rapport à l'angle φ . Il s'agit donc d'un écoulement bidimensionnel (r, θ) .

II.4.1.1 Equations de conservation de masse

Le fluide considéré incompressible, isotherme avec débit entrant égal au débit sortant :

$$\text{div}(\underline{V}) = 0 \quad (\text{II. 41})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{II. 42})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{II.43})$$

Cela nous amène à conclure que le champ de vitesse dérive d'un potentiel vecteur \underline{A} .

$$\underline{V} = \text{rot}(\underline{A}) \quad (\text{II.44})$$

Avec

$$\underline{A} = \psi \underline{e}_\varphi \quad (\text{II.45})$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (\text{II.46})$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{II.47})$$

$$v_\varphi = 0 \quad (\text{II.48})$$

Alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_r r^2 \sin \theta \quad (\text{II.49})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_\theta r \sin \theta \quad (\text{II.50})$$

Dou

$$\psi = \psi(r, \theta) \quad (\text{II. 51})$$

On conclut également que ψ de classe supérieur ou égale un et que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta) \quad (\text{II. 52})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) \quad (\text{II. 53})$$

II.4.1.2 Conditions aux limites du champ de vitesses

Les conditions aux limites pour le champ de vitesse sont celles correspondant à la condition d'adhérence sur la sphère et celle d'un écoulement uniforme à l'infini :

Sur la surface de la sphère :

$$v_r(R, \theta) = v_\theta(R, \theta) = v_\varphi(R, \theta) = 0 \quad (\text{II. 54})$$

Loin de la sphère :

$$\underline{V}(\infty, \theta) = v_\infty \underline{e}_z = v_\infty \cos \theta \underline{e}_r - v_\infty \sin \theta \underline{e}_\theta \quad (\text{II. 55})$$

$$v_r(\infty, \theta) = v_\infty \cos \theta \quad (\text{II. 56})$$

$$v_\theta(\infty, \theta) = -v_\infty \sin \theta \quad (\text{II. 57})$$

A une position comprise entre la surface de la sphère et la zone éloigné de la sphère on définit le champ de vitesse en coordonnées sphériques par la relation vectoriel suivante :

$$\underline{V}(r, \theta) = v_r(r, \theta)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta)\underline{e}_\theta \quad (\text{II. 58})$$

II.4.1.3 Conditions aux limites de la fonction de courant

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(R, \theta) = v_r(R, \theta)R^2 \sin \theta = 0 \quad (\text{II. 59})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(R, \theta) = v_\theta(R, \theta)R \sin \theta = 0 \quad (\text{II. 60})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\infty, \theta) = v_r(\infty, \theta)r^2 \sin \theta \quad (\text{II. 61})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(\infty, \theta) = v_\theta(\infty, \theta)r \sin \theta \quad (\text{II. 62})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\infty, \theta) = v_\infty r^2 \cos \theta \sin \theta \quad (\text{II. 63})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(\infty, \theta) = -v_\infty r \sin \theta \sin \theta \quad (\text{II. 64})$$

II.4.1.4 Conditions aux limites du champ de pression

$$p(r = \infty, \theta) = p_0 = 0 \quad (\text{II. 65})$$

II.4.2 Simplification de l'Equation de Navier-stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\underline{V}) \cdot \underline{V} \right) = \quad (\text{II. 66})$$

$$\rho \underline{F}_m - \underline{\text{grad}}(p) + \underline{\text{grad}}(\eta \text{div}(\underline{V})) + \text{div}(\underline{\mu \text{grad}}(\underline{V})) + \text{div}(\underline{\mu \text{tgrad}}(\underline{V}))$$

En tenant compte des Hypothèses H1, H2, H3, H4, H5, H6, l'équation devient :

$$-\underline{\text{grad}}(p) + \text{div}(\underline{\mu \text{grad}}(\underline{V})) = 0 \quad (\text{II. 67})$$

$$\text{div}(\underline{\mu \text{grad}}(\underline{V})) = \underline{\text{grad}}(p) \quad (\text{II. 68})$$

$$\underline{\text{grad}}(p) = \mu \Delta(\underline{V}) \quad (\text{II. 69})$$

II.4.3 Les composantes de la vorticité en coordonnées sphériques :

La vorticité est nul pour l'écoulement et s'exprime par la relation :

$$2\Omega = \underline{\omega} = \text{rot}(\underline{V}) \quad (\text{II. 70})$$

Or

$$\text{rot}(\underline{V}) = \text{rot}(\underline{V})_r \underline{e}_r + \text{rot}(\underline{V})_\theta \underline{e}_\theta + \text{rot}(\underline{V})_\varphi \underline{e}_\varphi \quad (\text{II. 71})$$

$$\text{rot}(\underline{V})_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r \sin \theta v_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{II. 72})$$

C'est à dire que :

$$\text{rot}(\underline{V})_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r \sin \theta \cdot 0)}{\partial \theta} - \frac{\partial \left(r \left(-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right)}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (\text{II. 73})$$

$$\text{rot}(\underline{V})_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} (0 - 0) = 0 \quad (\text{II. 74})$$

De même

$$\text{rot}(\underline{V})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta v_\varphi)}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 75})$$

$$\text{rot}(\underline{V})_{\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \sin \theta (0))}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 76})$$

Dou

$$\text{rot}(\underline{V})_{\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} (0 - 0) = 0 \quad (\text{II. 77})$$

En fin

$$\text{rot}(\underline{V})_{\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r v_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II. 78})$$

$$\text{rot}(\underline{V})_{\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \left(r \left(-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right)}{\partial r} - \frac{\partial \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II. 79})$$

$$\text{rot}(\underline{V})_{\varphi} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II. 80})$$

Finalemment

$$\underline{\omega} = \text{rot}(\underline{V}) = \text{rot}(\underline{V})_{\varphi} \underline{e}_{\varphi} \quad (\text{II. 81})$$

$$\underline{\omega} = \text{rot}(\underline{V}) = \left[-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \underline{e}_{\varphi} \quad (\text{II. 82})$$

L'écoulement irrotationnel se traduit donc par la relation :

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{II.83})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \psi = 0 \quad (\text{II.84})$$

II.4.4 Formulation en vorticité de l'equation de Navier stokes

La résolution du problème stationnaire sans inertie est facilitée si l'on transforme au préalable l'équation de Navier-stokes en introduisant la vorticité :

$$\underline{\omega} = \underline{\text{rot}}(\underline{V}) = \text{rot}(\underline{V})_{\varphi} \underline{e}_{\varphi} \quad (\text{II.85})$$

En appliquant l'opérateur rotationnel à la loi de la dynamique décrit par l'équation de Navier stokes on obtient :

$$\underline{\text{rot}}(\underline{\text{grad}}(p)) = \underline{\text{rot}}(\mu \Delta(\underline{V})) \quad (\text{II.86})$$

On élimine ainsi la pression p :

$$\underline{\text{rot}}(\underline{\text{grad}}(p)) = 0 \quad (\text{II.87})$$

L'équation de Navier-stokes devient :

$$\underline{\text{rot}}(\Delta(\underline{V})) = 0 \quad (\text{II. 88})$$

On utilise alors l'identité vectorielle suivante :

$$\underline{\text{rot}}(\Delta(\underline{V})) = \Delta(\underline{\text{rot}}(\underline{V})) = -\underline{\text{rot}}[\underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}(\underline{V}))] \quad (\text{II. 89})$$

$$\underline{\text{rot}}(\Delta(\underline{V})) = -\Delta\underline{\omega} = 0 \quad (\text{II. 90})$$

Résoudre le problème de stokes autour de la sphère revient donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} \text{div}(\underline{V}) = 0 \\ \Delta\underline{\omega} = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 91})$$

Il s'agit donc de résoudre une équation de Laplace pour la vorticité de l'écoulement, munie des conditions aux limites sur la vitesse.

L'avantage de cette formulation est dû au fait que dans un écoulement bidimensionnel, la vorticité ne possède qu'une composante. Ici le champ de vitesse axisymétrique vérifie :

$$\underline{V}(r, \theta) = v_r(r, \theta)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta)\underline{e}_\theta \quad (\text{II. 92})$$

Compte tenu de l'expression de la vorticité en coordonnée sphérique :

$$\underline{\omega} = \underline{\text{rot}}(\underline{V}) = \left[-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \underline{e}_\varphi \quad (\text{II. 93})$$

En utilisant alors la relation :

$$\underline{\text{rot}}(\Delta(\underline{V})) = \Delta(\underline{\text{rot}}(\underline{V})) = -\underline{\text{rot}}[\underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}(\underline{V}))] \quad (\text{II. 94})$$

Le calcul du laplacien sous la forme :

$$\Delta \underline{\omega} = -\underline{\text{rot}}[\underline{\text{rot}}(\underline{\omega})] \quad (\text{II. 95})$$

Nécessite tout d'abord celui du rotationnel de la vorticité :

$$\underline{\omega} = \underline{\text{rot}}(\underline{V}) = \omega_\varphi \underline{e}_\varphi \quad (\text{II. 96})$$

Dont l'expression en coordonnées sphériques est :

$$\underline{\text{rot}}(\underline{\omega}) = \text{rot}(\underline{\omega})_r \underline{e}_r + \text{rot}(\underline{\omega})_\theta \underline{e}_\theta + \text{rot}(\underline{\omega})_\varphi \underline{e}_\varphi \quad (\text{II. 97})$$

$$\text{rot}(\underline{\omega})_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r \sin \theta \omega_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r \omega_\theta)}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{II. 98})$$

$$\text{rot}(\underline{\omega})_{\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \sin \theta \omega_{\varphi})}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 99})$$

$$\text{rot}(\underline{\omega})_{\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r \omega_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II. 100})$$

Alors

$$\underline{\text{rot}}(\underline{\omega}) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial (r \sin \theta \omega_{\varphi})}{\partial \theta} \right) \underline{e}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (r \sin \theta \omega_{\varphi})}{\partial r} \right) \underline{e}_{\theta} \quad (\text{II. 101})$$

$$\underline{\text{rot}}(\underline{\omega}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta \omega_{\varphi})}{\partial \theta} \right) \underline{e}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r \omega_{\varphi})}{\partial r} \right) \underline{e}_{\theta} \quad (\text{II. 102})$$

Le rotationnel de ce vecteur vaut quant à lui :

$$\underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}(\underline{\omega})) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \left(r \left(\underline{\text{rot}}(\underline{\omega}) \right)_{\theta} \right)}{\partial r} - \frac{\partial \left(\underline{\text{rot}}(\underline{\omega}) \right)_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_{\varphi} \quad (\text{II. 103})$$

$$\underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}(\underline{\omega})) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \left(-r \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r \omega_{\varphi})}{\partial r} \right) \right)}{\partial r} - \frac{\partial \left(\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta \omega_{\varphi})}{\partial \theta} \right) \right)}{\partial \theta} \right) \underline{e}_{\varphi} \quad (\text{II. 104})$$

$$\underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}(\underline{\omega})) = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \omega_{\varphi})}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \omega_{\varphi}) \right] \right) \underline{e}_{\varphi} \quad (\text{II. 105})$$

Avec

$$\omega_\varphi = \left[-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \quad (\text{II.106})$$

Finalement :

$$\Delta \underline{\omega} = \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] (r \sin \theta \omega_\varphi) \right] \underline{e}_\varphi \quad (\text{II.107})$$

II.4.5 La fonction de courant

En remplaçant ω_φ dans l'expression de $\Delta \underline{\omega}$ le problème se ramène à la résolution d'une équation différentielle d'ordre quatre pour la fonction de courant :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0 \quad (\text{II.108})$$

Sachant que loin de la sphère on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\infty, \theta) = v_\infty r^2 \cos \theta \sin \theta \quad (\text{II.109})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(\infty, \theta) = -v_\infty r \sin \theta \sin \theta \quad (\text{II.110})$$

On obtient par intégration :

$$\psi = \psi(r, \theta) = -\frac{1}{2} v_{\infty} r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{II. 111})$$

La vérification des condition aux limites sur ψ nous donne :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(R, \theta) = v_{\infty} R^2 \cos \theta \sin \theta \neq 0 \quad (\text{II. 112})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(R, \theta) = -v_{\infty} R \sin \theta \sin \theta \neq 0 \quad (\text{II. 113})$$

Ce qui est en contradiction avec les conditions à la surface de la sphère, car Ψ change avec θ au loin et en surface.

II.4.6 Méthode de séparation des Variables

Dans le but de trouver une fonction de courant solution de l'équation précédente (II. 108), on pose :

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta \quad (\text{II. 114})$$

Introduisons ψ dans l'équation du problème :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 (f(r) \sin^2 \theta) = 0 \quad (\text{II. 115})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \left[\left(\sin^2 \theta f'' - 2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} f \right) \right] = 0 \quad (\text{II. 116})$$

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta \left[f'''' - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(-2 \frac{f}{r^3} + \frac{f'}{r^2} \right) \right] + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2 \cos \theta f'' - 4 \cos \theta \frac{f}{r^2} \right] \quad (\text{II. 117}) \\ & = \sin^2 \theta \left[f'''' - 4 \frac{f''}{r^2} + 8 \frac{f'}{r^3} - 8 \frac{f}{r^4} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\sin^2 \theta \left[f'''' - 4 \frac{f''}{r^2} + 8 \frac{f'}{r^3} - 8 \frac{f}{r^4} \right] = 0 \quad (\text{II. 118})$$

$$\sin^2 \theta \left[\frac{d^4 f}{dr^4} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{8}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{8f}{r^4} \right] = 0 \quad \times r^4 \quad (\text{II. 119})$$

On obtient finalement :

$$r^4 \frac{d^4 f}{dr^4} - 4r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 8r \frac{df}{dr} - 8f = 0 \quad (\text{II. 120})$$

On cherche la solution sous la forme :

$$f(r) = ar^n \quad (\text{II. 121})$$

En remplaçant (II. 83) dans (II. 82) on obtient :

$$r^4 \frac{d^4 ar^n}{dr^4} - 4r^2 \frac{d^2 ar^n}{dr^2} + 8r \frac{dar^n}{dr} - 8ar^n = 0 \quad (\text{II. 122})$$

$$r^4 (n)(n - 1)(n - 2)(n - 3)ar^{n-4} - 4r^2(n)(n - 1)ar^{n-2} + 8r(n)ar^{n-1} \text{ (II. 123)}$$

$$-8ar^n = 0$$

Divisons (II. 85) par ar^n on obtient :

$$(n)(n - 1)(n - 2)(n - 3) - 4(n)(n - 1) + 8n - 8 = 0 \quad \text{(II. 124)}$$

Il s'agit d'un polynôme d'ordre 4 qui peut également être écrit comme suit :

$$[n(n - 1) - 2][(n - 2)(n - 3) - 2] = 0 \quad \text{(II. 125)}$$

Il y'a 04 valeurs possibles pour n qui s'avèrent vérifier cette équation, à savoir : -1, 1, 2 et 4.

La solution est donc de la forme :

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \quad \text{(II. 126)}$$

Alors :

$$\psi(r, \theta) = \sin^2 \theta \left[\frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \right] \quad (\text{II. 127})$$

Les deux conditions d'adhérence sur la surface de l'objet donnant alors :

$$A = \frac{v_\infty R^3}{4} ; \quad B = \frac{-3v_\infty R}{4} \quad (\text{II. 128})$$

La condition d'écoulement uniforme à l'infini implique :

$$C = \frac{v_\infty}{2} ; \quad D = 0 \quad (\text{II. 129})$$

D'où :

$$f(r) = v_\infty \left(\frac{r^2}{2} - 3R \left(\frac{r}{4} \right) + \frac{R^3}{4} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \quad (\text{II. 130})$$

La solution cherchée est donc :

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta = v_\infty \sin^2 \theta \left(\frac{r^2}{2} - 3R \left(\frac{r}{4} \right) + \frac{R^3}{4} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \quad (\text{II. 131})$$

$$\psi(r, \theta) = v_\infty \sin^2 \theta \left(\frac{r^2}{2} - 3R \left(\frac{r}{4} \right) + \frac{R^3}{4} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \quad (\text{II. 132})$$

Soit, sous forme adimensionnelle :

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{v_{\infty} R^2} = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right) \right) \quad (\text{II.133})$$

II.4.7 Le champ de vitesses

La relation entre le champ de vitesses et la fonction de courant nous permet de déduire l'expression de ce champ :

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_{\infty} \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{II.134})$$

$$v_{\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_{\infty} \sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{II.135})$$

$$v_{\varphi} = 0 \quad (\text{II.136})$$

Soit, sous forme adimensionnelle :

$$\bar{v}_r = \frac{v_r}{v_{\infty}} = \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{II.137})$$

$$\bar{v}_{\theta} = \frac{v_{\theta}}{v_{\infty}} = -\sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{II.138})$$

$$\bar{v}_{\varphi} = 0 \quad (\text{II.139})$$

II.4.8 Le champ de pression : $p(r, \theta)$

L'écoulement étant supposé non-pesant, la pression est alors obtenue en intégrant l'équation de la dynamique qui s'écrit, moyennant l'utilisation de l'identité vectorielle :

$$\underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}(\underline{V})) = \underline{\text{grad}}(\text{div}(\underline{V})) - \Delta \underline{V} \quad (\text{II. 140})$$

L'équation de Navier stokes s'écrit :

$$\underline{\text{grad}}(p) = \mu \Delta(\underline{V}) \quad (\text{II. 141})$$

$$\underline{\text{grad}}(p) = \mu \left[\underline{\text{grad}}(\text{div}(\underline{V})) - \underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}(\underline{V})) \right] \quad (\text{II. 142})$$

$$\underline{\text{grad}}(p) = \mu \left[\underline{\text{grad}}(\text{div}(\underline{V})) - \underline{\text{rot}}(\underline{\omega}) \right] \quad (\text{II. 143})$$

Finalement on obtient l'équation de Navier stokes sous la forme :

$$\underline{\text{grad}}(p) = -\mu [\underline{\text{rot}}(\underline{\omega})] \quad (\text{II. 144})$$

$$\begin{aligned}
 -\mu \cdot \underline{\text{rot}}(\underline{\omega}) &= -\mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta \omega_\varphi)}{\partial \theta} \right) \underline{e}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \omega_\varphi)}{\partial r} \right) \right] \underline{e}_\theta \quad (\text{II. 145}) \\
 &= \underline{\text{grad}}(p)
 \end{aligned}$$

La projection suivant l'axe de \underline{e}_r :

$$\text{rot}(\underline{\omega})_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r \sin \theta \omega_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r \omega_\theta)}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{II. 146})$$

$$\text{rot}(\underline{\omega})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta \omega_\varphi)}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II. 147})$$

$$\text{rot}(\underline{\omega})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \left(\sin \theta \left[\left[-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \right) \right)}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II. 148})$$

$$\text{rot}(\underline{\omega})_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] (f(r) \sin^2 \theta) \right] \quad (\text{II. 149})$$

$$\text{rot}(\underline{\omega})_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\sin^2 \theta f'' - 2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} f \right) \right) \quad (\text{II. 150})$$

$$\text{rot}(\underline{\omega})_r = -2 \left(\frac{f''}{r^2} - 2 \frac{f}{r^4} \right) \cos \theta \quad (\text{II. 151})$$

Donc

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\mu \cdot \text{rot}(\underline{\omega})_r = 2\mu \left(\frac{f''}{r^2} - 2 \frac{f}{r^4} \right) \cos \theta \quad (\text{II. 152})$$

En remplaçant f par son expression :

$$f(r) = v_\infty \left(\frac{r^2}{2} - 3R \left(\frac{r}{4} \right) + \frac{R^3}{4} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \quad (\text{II. 153})$$

Puis en intégrant, on trouve :

$$p(r, \theta) = p_0 - \frac{3}{2} \left(\frac{\mu v_\infty}{R} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (\text{II. 154})$$

Posons $x = \frac{r}{R}$ et $y = \theta$

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{\left(\frac{\mu v_\infty}{R} \right)} \quad (\text{II. 154})$$

Alors la forme adimensionnelle de la variation du champ de pression s'écrit :

$$\bar{p} = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^2 \cos y \quad (\text{II. 155})$$

II.4.9 La force de traînée

Rappelons que la **force de traînée**, que l'on note D_F (pour Drag) correspond à la composante parallèle à la vitesse amont du fluide de la force résultante aérodynamique.

La force de contact résultante vaut :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_r\right)_{r=R} = \left[\left[-(p - p_0) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \right] \cdot \underline{\underline{e}}_r \right]_{r=R} \quad (\text{II. 156})$$

Soit :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_r\right)_{r=R} = \left[\left[-(p - p_0) + 2\mu d_{rr} \right] \cdot \underline{\underline{e}}_r + 2\mu d_{r\theta} \cdot \underline{\underline{e}}_\theta \right]_{r=R} \quad (\text{II. 157})$$

La projection de cette force dans la direction de l'écoulement incident définit la contribution locale à la force de traînée.

La situation est schématisée sur la figure ci-dessous :

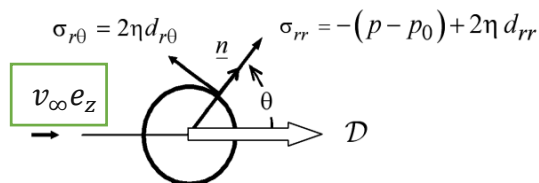


Figure II:3 Contraintes sur la sphère et force aérodynamique résultante (traînée)

Cette densité de force vaut :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r\right)_{r=R} \cdot \underline{e}_z = \left[[-(p - p_0) + 2\mu d_{rr}] \cdot \cos \theta - 2\mu d_{r\theta} \cdot \sin \theta\right]_{r=R} \quad (\text{II. 158})$$

L'expression de la pression p et les deux composantes du tenseur des taux de déformation mises en jeu sont :

$$p(r, \theta) = p_0 - \frac{3}{2} \left(\frac{\mu v_\infty}{R}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos \theta \quad (\text{II. 159})$$

$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{II. 160})$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{II. 161})$$

Or

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right) \quad (\text{II. 162})$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_\infty \sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right) \quad (\text{II. 163})$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$d_{rr} = \cos \theta \frac{v_{\infty}}{R} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) \frac{v_{\infty}}{R} \cdot \cos \theta \quad (\text{II.164})$$

$$d_{r\theta} = -\frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \frac{v_{\infty}}{R} \sin \theta \quad (\text{II.165})$$

En remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e_r}} \right)_{r=R} \cdot \underline{\underline{e_z}} \quad (\text{II.166}) \\ &= \left[\left[\left[\frac{3}{2} \left(\frac{\mu v_{\infty}}{R} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \right] + 2\mu \left[\frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) \frac{v_{\infty}}{R} \cdot \cos \theta \right] \right] \cdot \cos \theta \right. \\ & \quad \left. - 2\mu \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \frac{v_{\infty}}{R} \sin \theta \right] \cdot \sin \theta \right]_{r=R} \end{aligned}$$

Donc :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e_r}} \right)_{r=R} \cdot \underline{\underline{e_z}} = \frac{3}{2} \frac{\mu v_{\infty}}{R} \quad (\text{II.167})$$

On note alors, fait remarquable, que cette force par unité de surface est uniforme sur toute la surface de l'objet (elle ne dépend pas de θ).

La force traînée, est alors obtenue en intégrant sur la surface, donc ici en multipliant cette force unitaire par la surface de l'objet :

la surface de notre sphère est :

$$S_{\text{sphère}} = 4. \pi. R^2 \quad (\text{II. 168})$$

On obtient :

$$D_F = \iint_{\text{sphère}} \left[\left(\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r \right)_{r=R} \cdot \underline{e}_z \right] dS = 4. \pi. R^2 \left(\frac{3}{2} \frac{\mu v_\infty}{R} \right) \quad (\text{II. 169})$$

Dou

$$D_F = 6. \pi. R. \mu. v_\infty \quad (\text{II. 170})$$

Ce résultat est connu sous le nom de *loi de résistance de Stokes*.

Dans un écoulement à très petit nombre de Reynolds, on trouve que la force de résistance à l'avancement d'un objet est linéairement proportionnelle à la vitesse.

II.4.9.1 Coefficient de traînée

Le coefficient de traînée est obtenu en normalisant la force de traînée par la quantité $\rho((v_\infty)^2/2)S_0$. ou S_0 est la surface issue de la projection de la sphère sur un plan :

$$S_0 = \pi \cdot R^2 \quad (\text{II. 171})$$

$$C_D = \frac{D_F}{\rho \left(\frac{v_\infty^2}{2} \right) \pi \cdot R^2} = \frac{24}{\frac{2 \cdot R \cdot v_\infty}{\nu}} = \frac{24}{Re} \quad (\text{II. 172})$$

III. CHAPITRE III : RESULTATS

III.1 Présentation des résultats obtenus pour différents paramètres d'écoulement

III.1.1 Coefficient de Trainée

$$C_D = \frac{D_F}{\rho \left(\frac{v_\infty^2}{2}\right) \pi \cdot R^2} = \frac{24}{\frac{2 \cdot R \cdot v_\infty}{\nu}} = \frac{24}{Re} \quad (\text{III. 1})$$

III.1.1.1 Confrontation aux expériences

La figure ci-dessous montre des résultats d'expériences sur la mesure du coefficient de traînée C_D de la sphère en fonction du nombre de Reynolds.

La prévision théorique est correctement vérifiée tant que le nombre de Reynolds reste « suffisamment petit ». Cela est conforme à l'hypothèse $Re \ll 1$ des écoulements rampants (hypothèse H6).

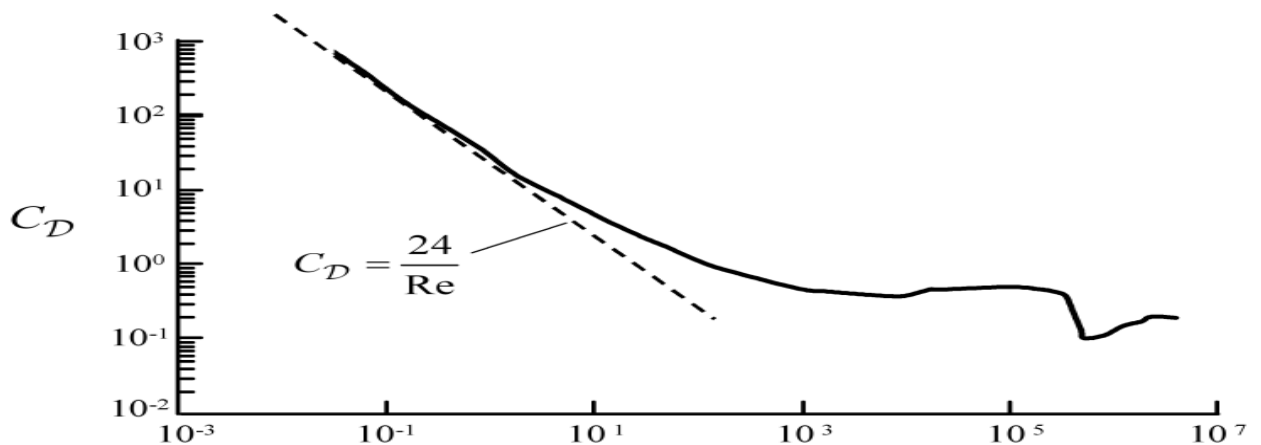


Figure III:1- Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds (compilation) (source : laurent jacquin tome 2 modèle)

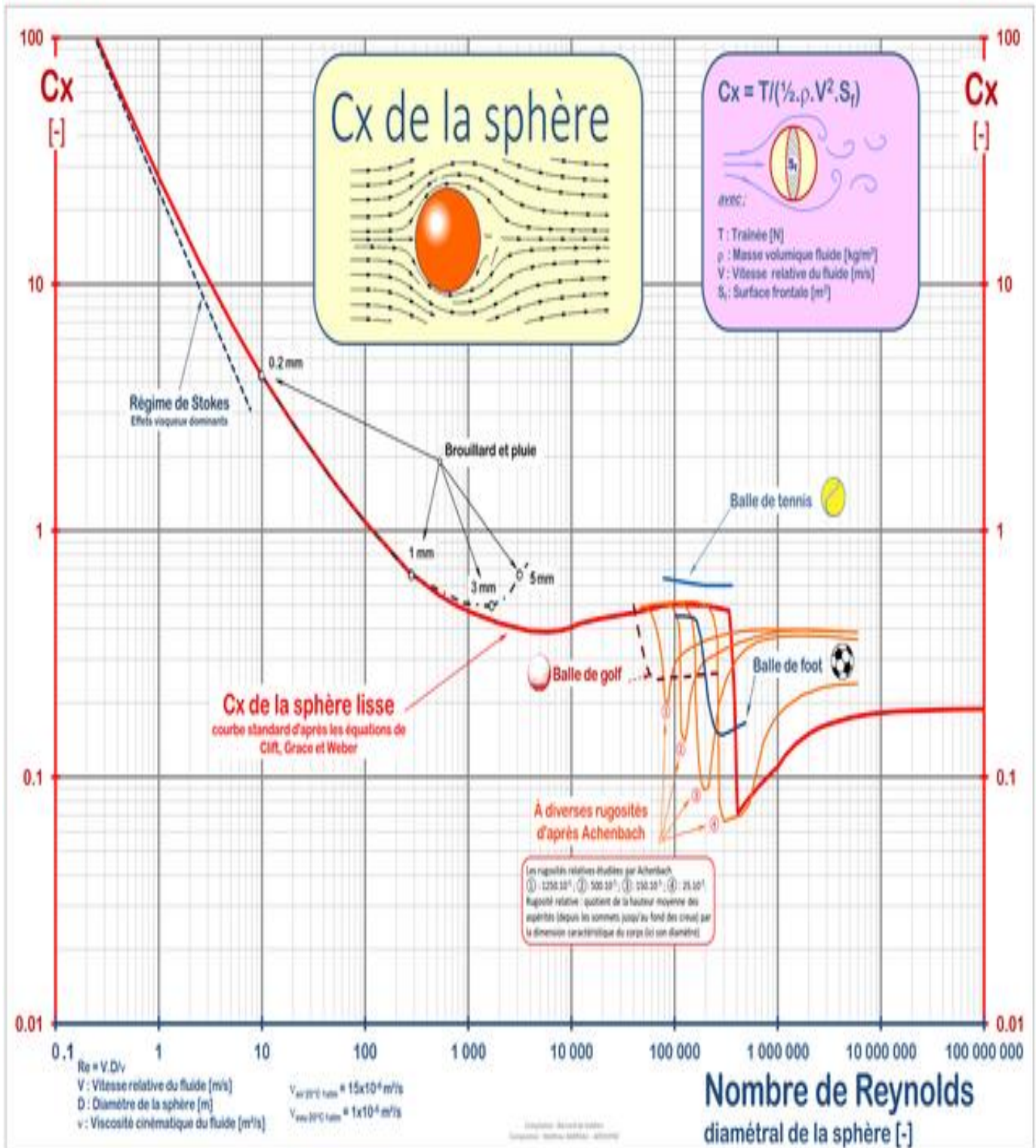


Figure III:2 Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds

Au-delà d'une certaine valeur du nombre de Reynolds, qu'il est difficile à déterminer sur la figure ci-dessus, on voit que l'expérience s'écarte de la solution de Stokes.

Dans l'écoulement autour d'une sphère nous pouvons signaler l'existence d'un nombre de Reynolds critique R_{ec} séparant régimes stationnaire et instationnaire de cet écoulement.

Toutefois, le début de la déviation à la loi de Stokes que l'on observe ci-dessus lorsque le nombre de Reynolds R_e devient de l'ordre de 1 n'est pas attribuable à l'apparition d'une instationnarité. Il résulte de la violation progressive de la principale hypothèse de l'analyse de Stokes qui est que le Reynolds doit être très petit $R_e \ll 1$ pour pouvoir négliger complètement l'inertie du fluide (hypothèse des écoulements rampants).

Cette première déviation à la loi de Stokes peut être capturée de manière analytique par la solution *d'Oseen*.

Il faut alors dépasser un nombre de Reynolds de l'ordre de quelques dizaines pour que l'écoulement devienne instationnaire, puis turbulent.

On observe aussi sur la figure ci-dessus que le coefficient de traînée C_D tend ensuite à devenir approximativement indépendant du nombre de Reynolds, mis à part un accident au-delà de $R_e = 10^5$ appelée « crise de traînée » .

III.1.2 Le champ de vitesses

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{III. 2})$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_\infty \sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{III. 3})$$

$$v_\varphi = 0 \quad (\text{III. 4})$$

Soit, sous forme adimensionnelle :

$$\bar{v}_r = \frac{v_r}{v_\infty} = \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{III. 5})$$

$$\bar{v}_\theta = \frac{v_\theta}{v_\infty} = -\sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{III. 6})$$

$$\bar{v}_\varphi = 0 \quad (\text{III. 7})$$

Posons $x = \frac{r}{R}$ et $y = \theta$ alors :

$$\bar{v}_r = \frac{v_r}{v_\infty} = \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^3 \right) \cos y \quad (\text{III. 8})$$

$$\overline{v_\theta} = \frac{v_\theta}{v_\infty} = - \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} \right)^3 \right) \sin y \quad (\text{III. 9})$$

III.1.2.1 Code Matlab de modélisation du champ de vitesses

```

clear all; close all ; clc

%paramètres

R = 1;

Vinf = 1;

L = 10;

r = linspace(1,L,20);

theta = linspace(0,pi,20);

phi = linspace(0,2 * pi,20);

%grille de coordonnées

[r1,theta1,phi1] = meshgrid(r,theta,phi);

% conversion en coordonnées cartésiennes

X = r1.* sin(theta1).* cos(phi1);

Y = r1.* sin(theta1).* sin(phi1);

Z = r1.* cos(theta1);

```

%champ de vitesses? Vr ,Vtheta et Vphi

$$Vr = Vinf * (\cos(\theta_1)) * (1 - (3/2) * (R./r1) + (1/2) * ((R./r1).^3));$$

$$Vtheta = Vinf * (\sin(\theta_1)) * (-1 + (3/4) * (R./r1) + (1/4) * ((R./r1).^3));$$

$$Vphi = \text{zeros}(\text{size}(Vr));$$

%champ de vitesse Vx, Vy et Vz

$$Vx = (Vr) * (\cos(\theta_1)) * (\cos(\phi_1)) + (Vtheta) * (\cos(\theta_1)) * (\cos(\phi_1)) - (Vphi) * (\sin(\phi_1));$$

$$Vy = (Vr) * (\sin(\theta_1)) * (\sin(\phi_1)) + (Vtheta) * (\cos(\theta_1)) * (\sin(\phi_1)) + (Vphi) * (\cos(\phi_1));$$

$$Vz = (Vr) * (\cos(\theta_1)) - (Vtheta) * (\sin(\theta_1));$$

%Tracé du champ de vitesses

quiver3(X, Y, Z, Vx, Vy, Vz, 'r')

xlabel('X_cartesien'); ylabel('Y_cartesien'); zlabel('Z_cartesien')

title('champs de vitesses de l'écoulement autour de la sphère');

grid on

hold on

%sphère

[x, y, z] = sphere % coordonnées de base pour une sphère unitaire

%échelle de la sphère

scaling = R; % facteur d'échelle pou la sphère

%coordonnées finales de la sphère

*x = x * R;*

*y = y * R;*

*z = z * R*

%représentation de la sphère

mesh(x, y, z, 'Facecolor', 'black', 'Edgecolor', 'none');

axis equal;

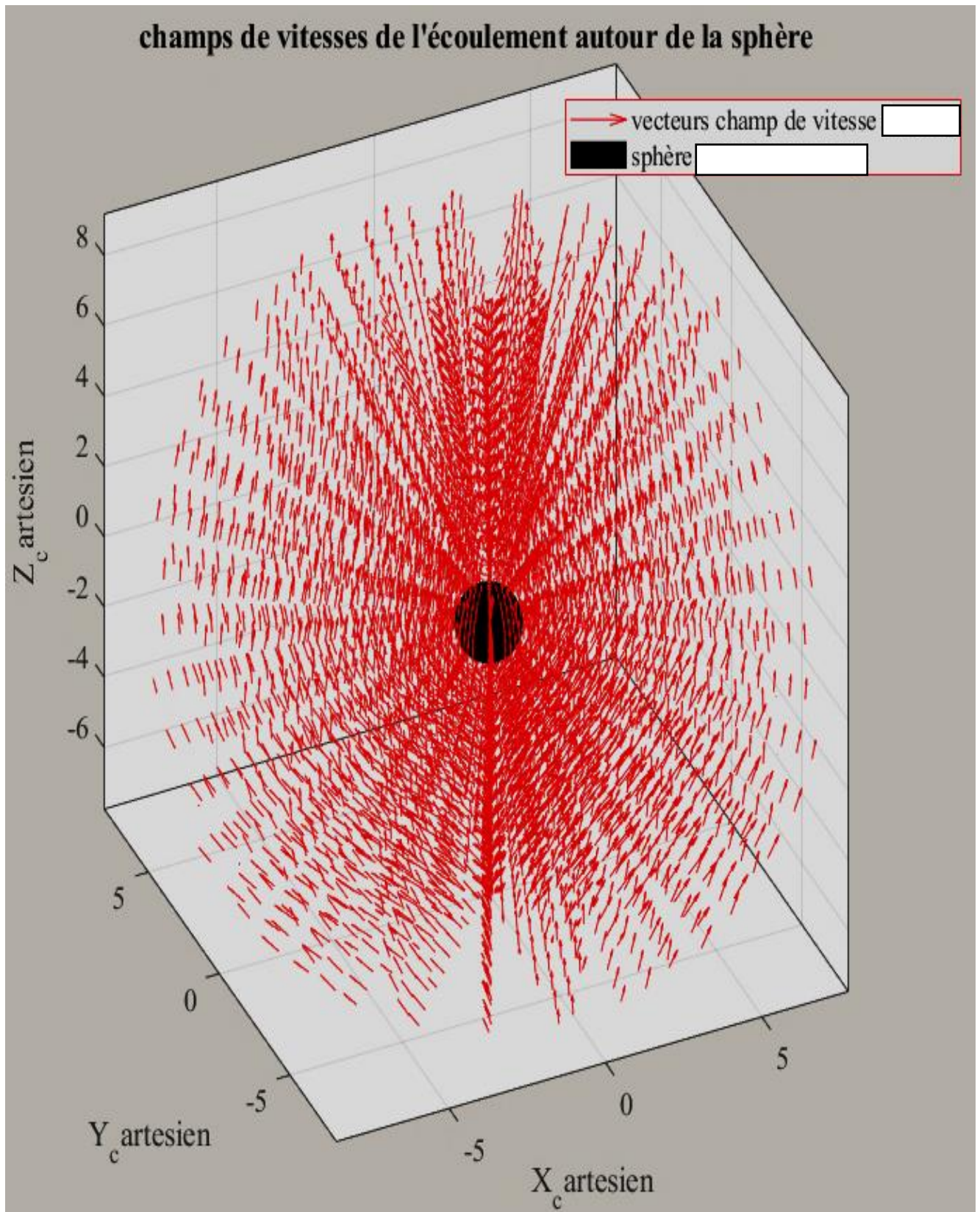


Figure III:3 champ de vitesses en 3D

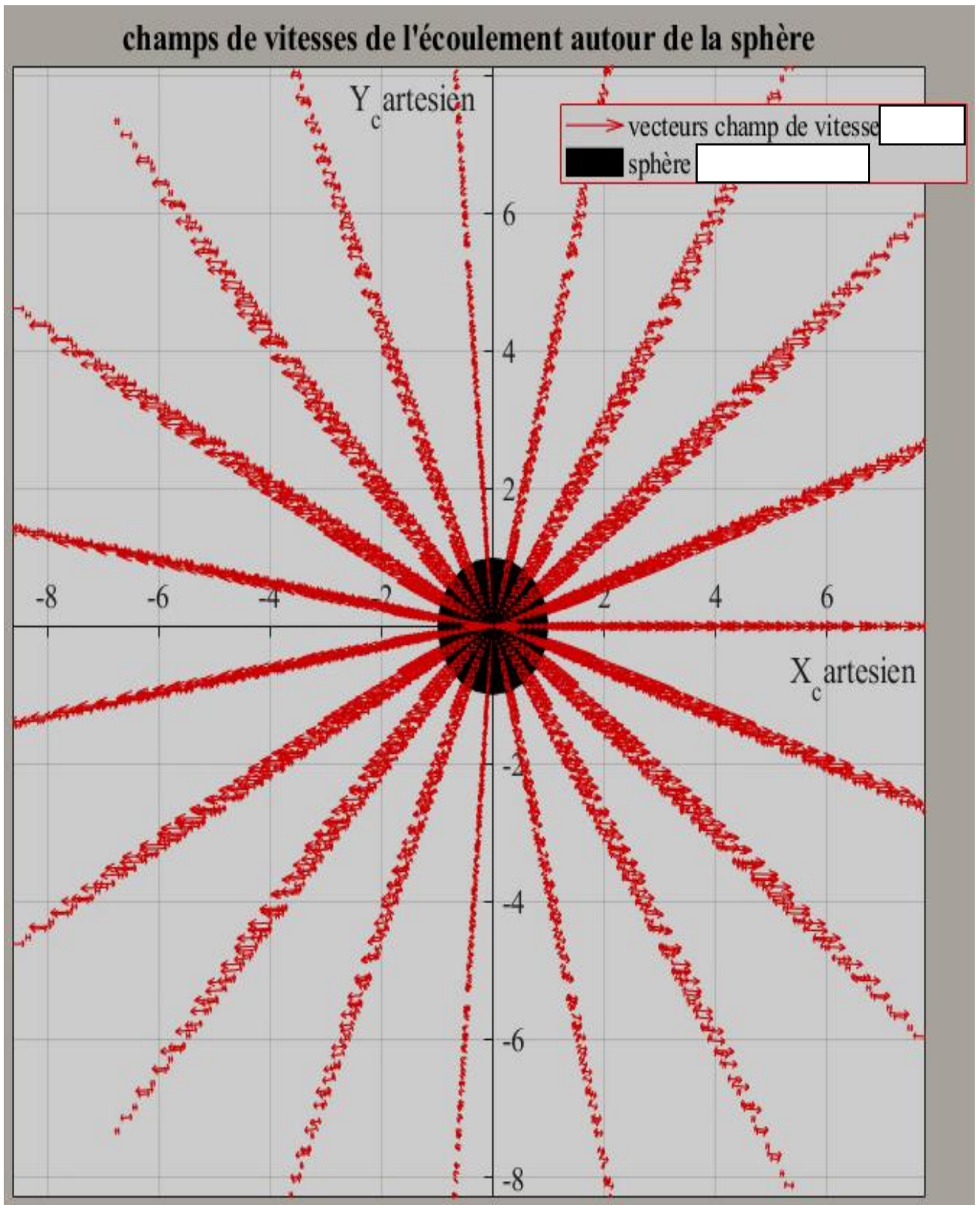


Figure III:4 champ de vitesses en 3D vue XY

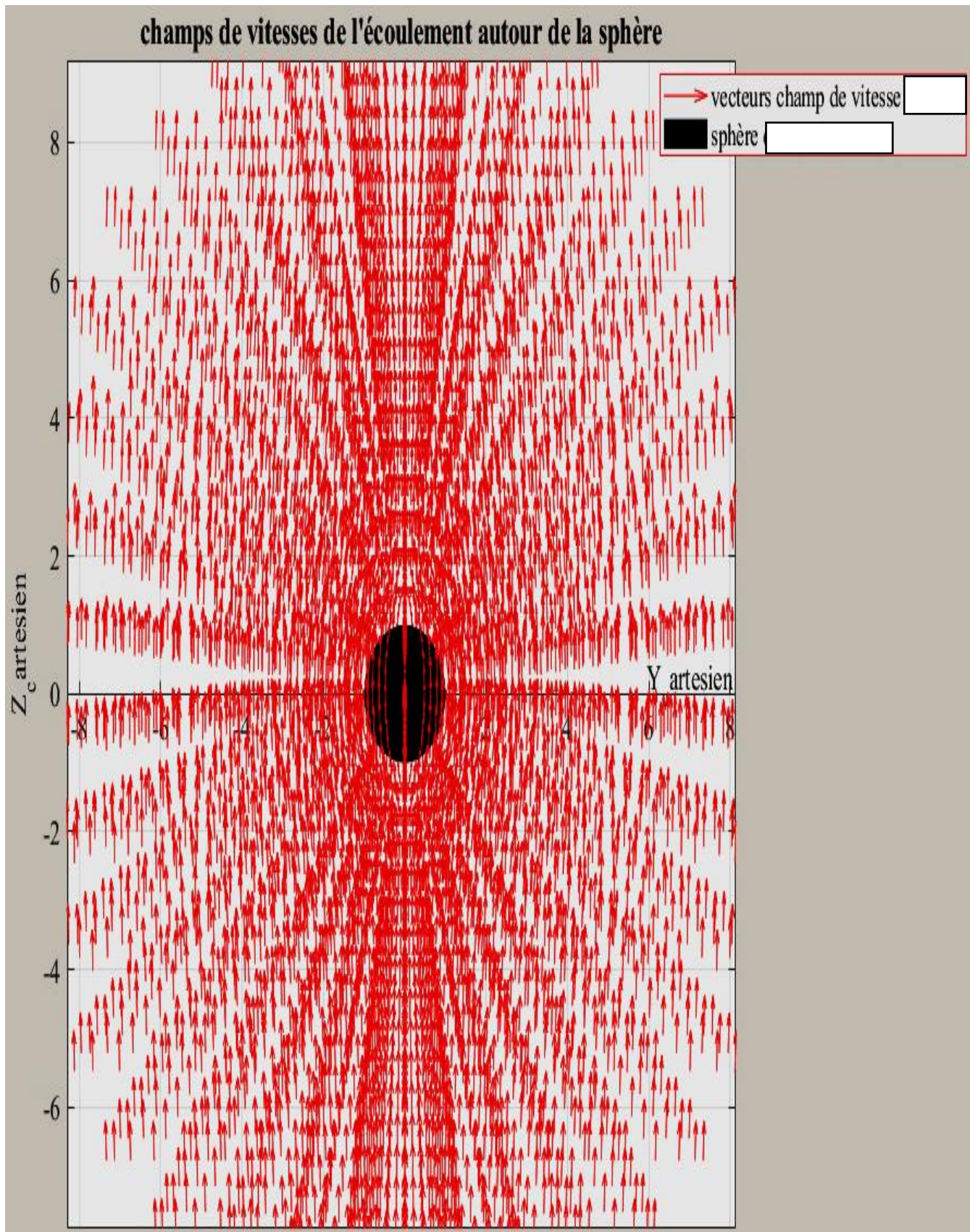


Figure III:5 champ de vitesses en 3D vue YZ

clear all; close all ; clc

%paramètres

R = 1;

Vinf = 1;

*L = 4 * pi;*

r = linspace(1, L, 20);

theta = linspace(-pi, pi, 20);

phi = 0;

%grille de coordonnées

[r1, theta1, phi1] = meshgrid(r, theta, phi);

% conversion en coordonnées cartésiennes

X = r1. sin(theta1).* cos(phi1);*

Y = r1. sin(theta1).* sin(phi1);*

Z = r1. cos(theta1);*

%champ de vitesses? Vr ,Vtheta et Vphi

*Vr = Vinf * (cos(theta1)).* (1 - (3/2) * (R./r1) + (1/2).
* ((R./r1). ^3));*

*Vtheta = Vinf * (sin(theta1)).* (-1 + (3/4) * (R./r1) + (1/4).
* ((R./r1). ^3));*

Vphi = zeros(size(Vr));

```

        %champ de vitesse Vx, Vy et Vz
Vx = (Vr).* (cos(theta1)).* (cos(phi1)) + (Vtheta).* (cos(theta1)).
        * (cos(phi1)) - (Vphi).* (sin(phi1));

Vy = (Vr).* (sin(theta1)).* (sin(phi1)) + (Vtheta).* (cos(theta1)).
        * (sin(phi1)) + (Vphi).* (cos(phi1));

Vz = (Vr).* (cos(theta1)) - (Vtheta).* (sin(theta1));

        %Tracé du champ de vitesses
        quiver(X,Z,Vx,Vz,'red')
        xlabel('X_cartesien'); ylabel('Z_cartesien');
        title('champs de vitesses de l'écoulement autour de la sphère');

        grid on

        hold on

        %fonction de courant? f
f = Vinf.* ((1/2).* (r1.^2) - (3/4).* (R * r1) + (1/4).* ((R^3)./r1)).
        * ((sin(theta1)).^2);
        %contour(X,Z,f);

        %cercle
        ang = linspace(0,2 * pi, 100);
        centre = [0,0];
        Xc = centre(1) + R * cos(ang);
        Yc = centre(2) + R * sin(ang);
    
```

```

hold on
plot(Xc,Yc,'black - ','Linewidth',2);
axis equal;
    
```

Le profil de Vitesse est donc représenté sur la figure ci-dessous :

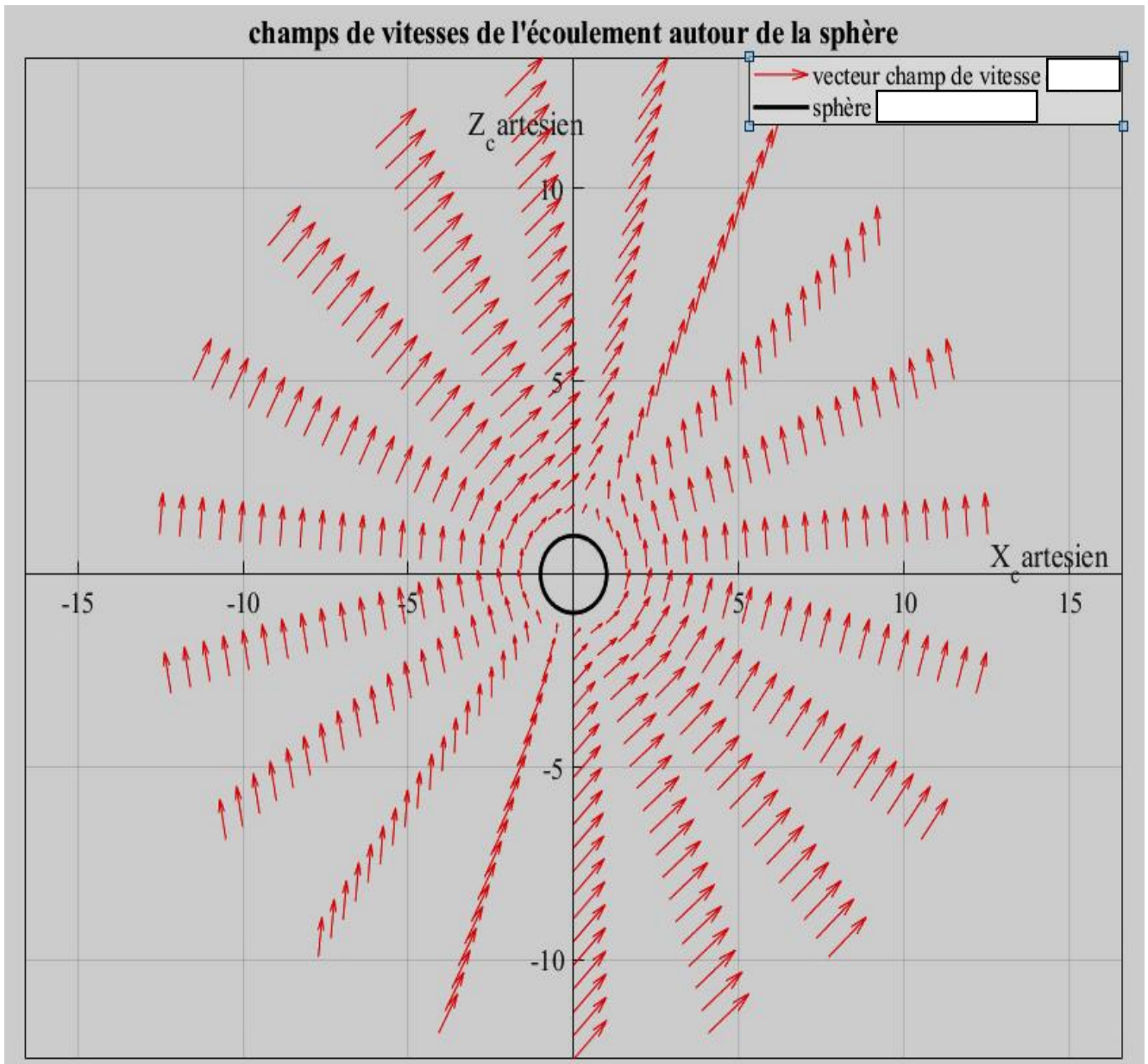


Figure III:6 champ de vitesse de l'écoulement rampant autour d'une sphère en 2D vue XZ.

clear all; close all ; clc

%paramètres

R = 1;

Vinf = 1;

*L = 4 * pi;*

r = linspace(1, L, 20);

theta = linspace(-pi, pi, 30);

phi = pi/2;

%grille de coordonnées

[r1, theta1, phi1] = meshgrid(r, theta, phi);

% conversion en coordonnées cartésiennes

X = r1. sin(theta1).* cos(phi1);*

Y = r1. sin(theta1).* sin(phi1);*

Z = r1. cos(theta1);*

%champ de vitesses Vr , Vtheta et Vphi

*Vr = Vinf * (cos(theta1)).* (1 - (3/2) * (R./r1) + (1/2).
* ((R./r1). ^3));*

*Vtheta = Vinf * (sin(theta1)).* (-1 + (3/4) * (R./r1) + (1/4)
* ((R./r1). ^3));*

Vphi = zeros(size(Vr));

%champ de vitesse Vx, Vy et Vz

$$V_x = (V_r) \cdot (\cos(\theta_1)) \cdot (\cos(\phi_1)) + (V_\theta) \cdot (\cos(\theta_1)) \cdot (\cos(\phi_1)) - (V_\phi) \cdot (\sin(\phi_1));$$

$$V_y = (V_r) \cdot (\sin(\theta_1)) \cdot (\sin(\phi_1)) + (V_\theta) \cdot (\cos(\theta_1)) \cdot (\sin(\phi_1)) + (V_\phi) \cdot (\cos(\phi_1));$$

$$V_z = (V_r) \cdot (\cos(\theta_1)) - (V_\theta) \cdot (\sin(\theta_1));$$

%Tracé du champ de vitesses

quiver(Y,Z,Vy,Vz,'red')

xlabel('Y_cartesien'); ylabel('Z_cartesien');

title('champs de vitesses de l'écoulement autour de la sphère');

hold on;

%cercle

*ang = linspace(0,2 * pi, 100);*

centre = [0,0];

*Xc = centre(1) + R * cos(ang);*

*Yc = centre(2) + R * sin(ang);*

hold on

plot(Xc,Yc,'black - ','Linewidth', 2);

axis equal;

grid on;

axis equal;

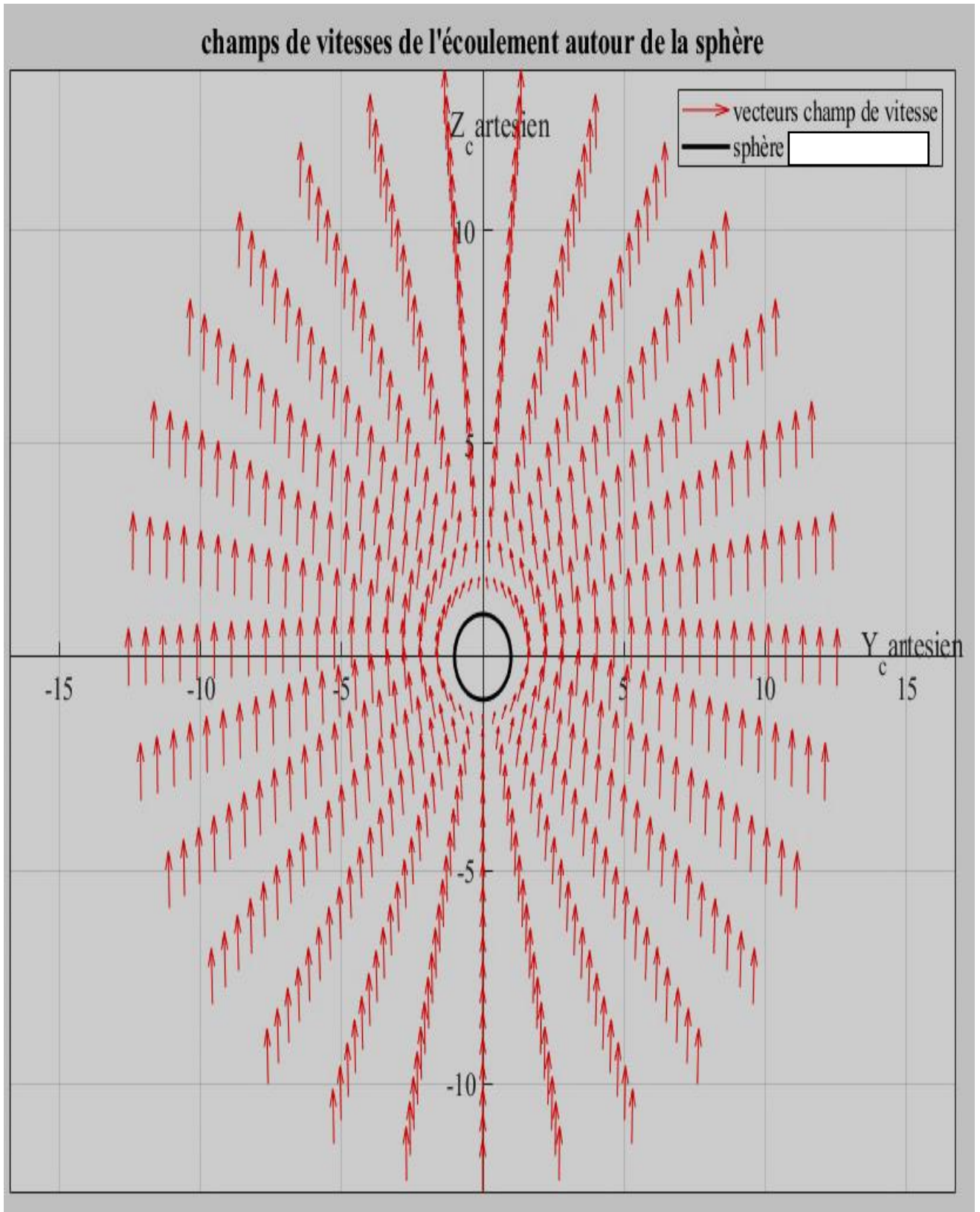


Figure III:7 champ de vitesse de l'écoulement rampant autour d'une sphère en 2D vue YZ

III.1.2.2 Profil de vitesse suivant les axes cartésiens Code Matlab modélisant le profil de vitesse

```

clear all; close all; clc;

%paramètres
R = 1;
Vinf = 1;
r = 2 * R
theta = linspace(0, pi, 30);
Phi = 0;

%grille de coordonnées
[r1, theta1, phi1] = meshgrid(r, theta, phi);

% conversion en coordonnées cartésiennes
X = r1.* sin(theta1).* cos(phi1);
Y = r1.* sin(theta1).* sin(phi1);
Z = r1.* cos(theta1);
r = sqrt(X.^2 + Y.^2 + Z.^2);

%champ de vitesses Vr , Vtheta et Vphi
Vr = Vinf * (cos(theta1)).* (1 - (3/2) * (R./r) + (1/2).* ((R./r).^3));
Vtheta = Vinf * (sin(theta1)).* (-1 + (3/4) * (R./r) + (1/4)
* ((R./r).^3));
Vphi = zeros(size(Vr));

% module de la vitesse
V = sqrt(Vr.^2 + Vtheta.^2 + Vphi.^2);
plot(X,V);

```

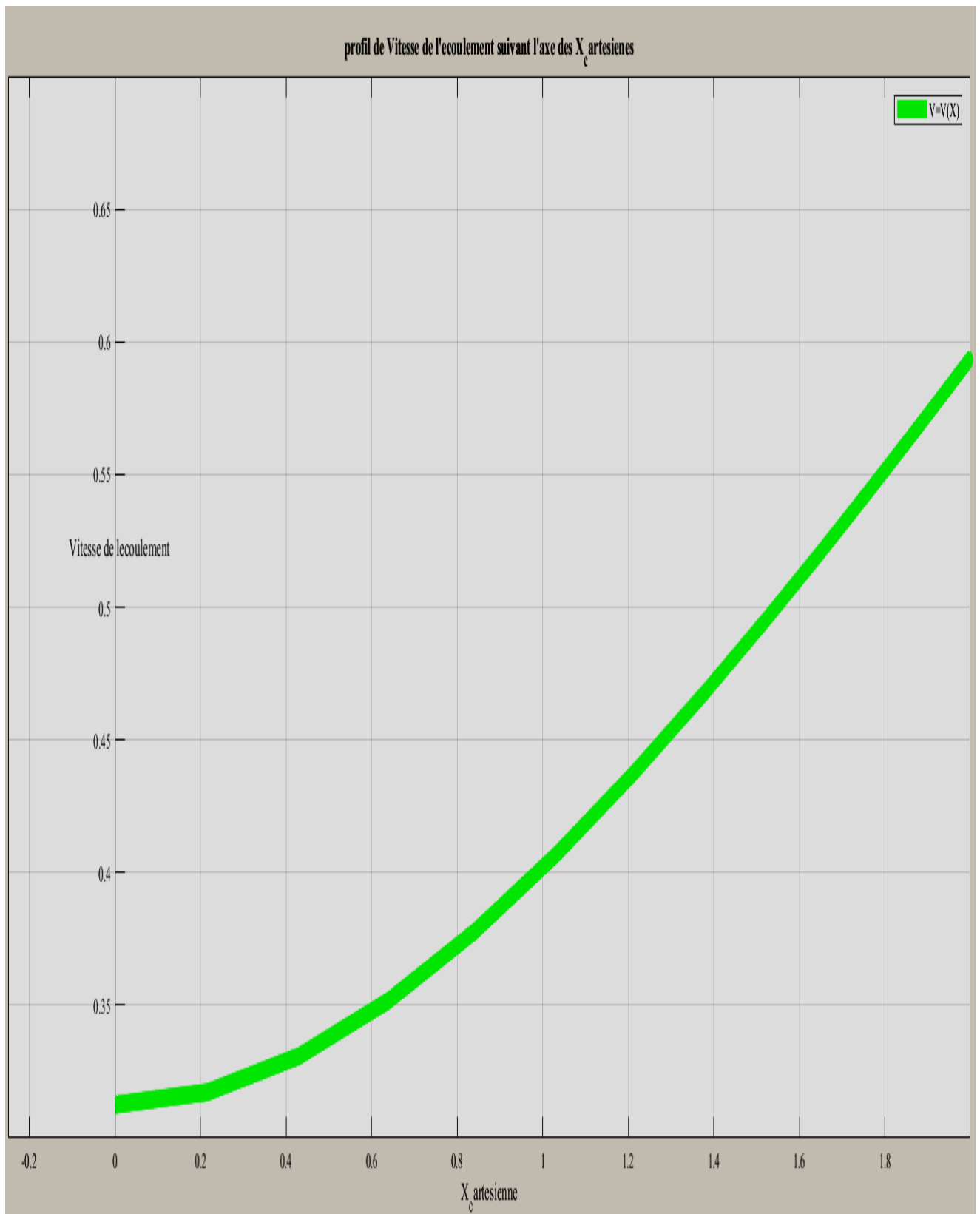


Figure III:8 profil de vitesse de l'écoulement suivant l'axe des $X_{Cartésiens}$

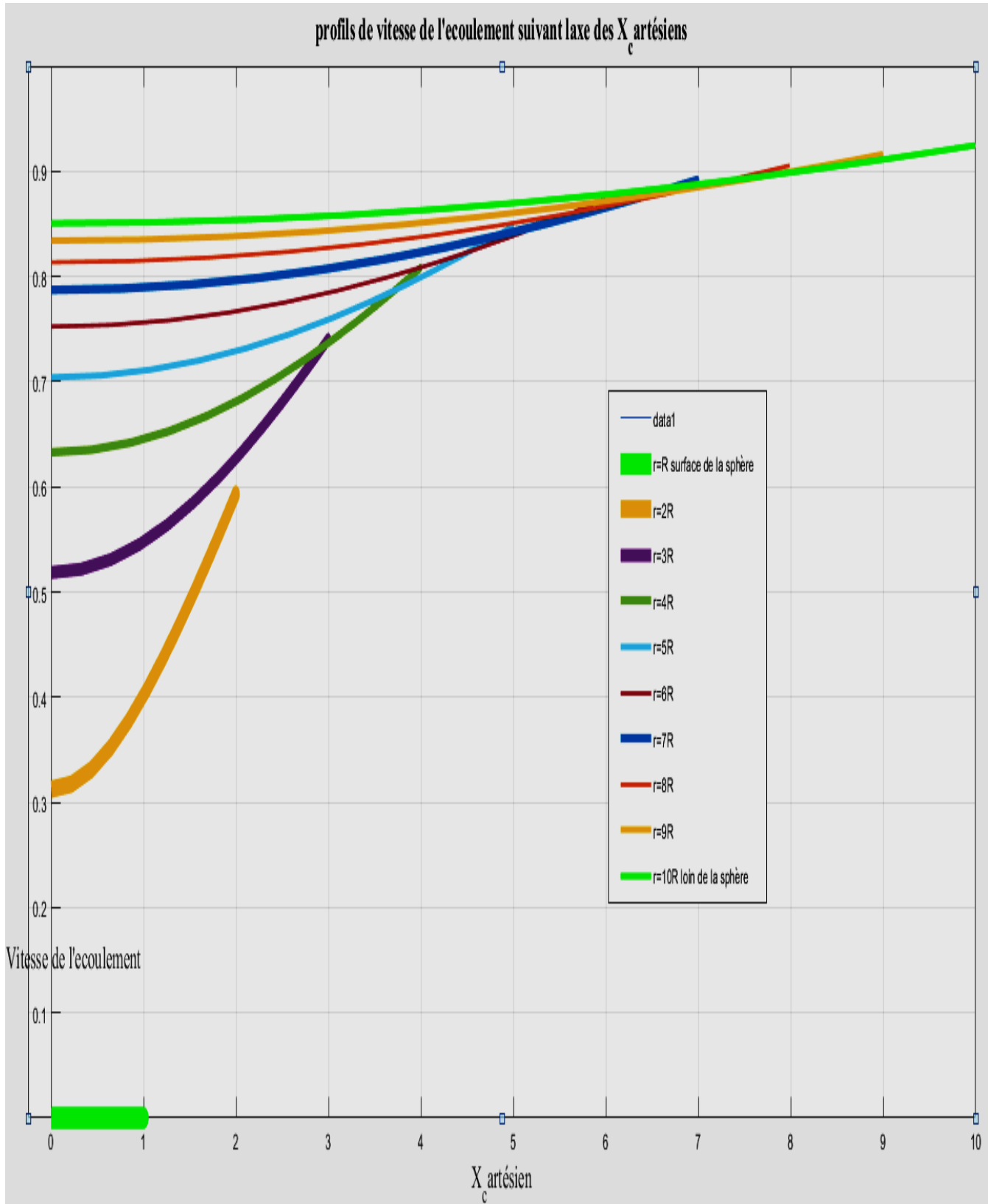


Figure III:9 profils de vitesse de l'écoulement suivant l'axe des $X_{Cartésien}$

```

clear all; close all; clc;

%paramètres
R = 1;
Vinf = 1;
r = 2 * R;

%r = R:R:10 * R
theta = linspace(0,pi,30);
phi = pi/2;

%grille de coordonnées
[r1,theta1,phi1] = meshgrid(r,theta,phi);

% conversion en coordonnées cartésiennes
X = r1.* sin(theta1).* cos(phi1);
Y = r1.* sin(theta1).* sin(phi1);
Z = r1.* cos(theta1);
r = sqrt(X.^2 + Y.^2 + Z.^2);

%champ de vitesses Vr ,Vtheta et Vphi
Vr = Vinf * (cos(theta1)).* (1 - (3/2) * (R./r) + (1/2).* ((R./r).^3));
Vtheta = Vinf * (sin(theta1)).* (-1 + (3/4) * (R./r) + (1/4)
* ((R./r).^3));
Vphi = zeros(size(Vr));

% module de la vitesse
V = sqrt(Vr.^2 + Vtheta.^2 + Vphi.^2);
plot(Y,V);

```

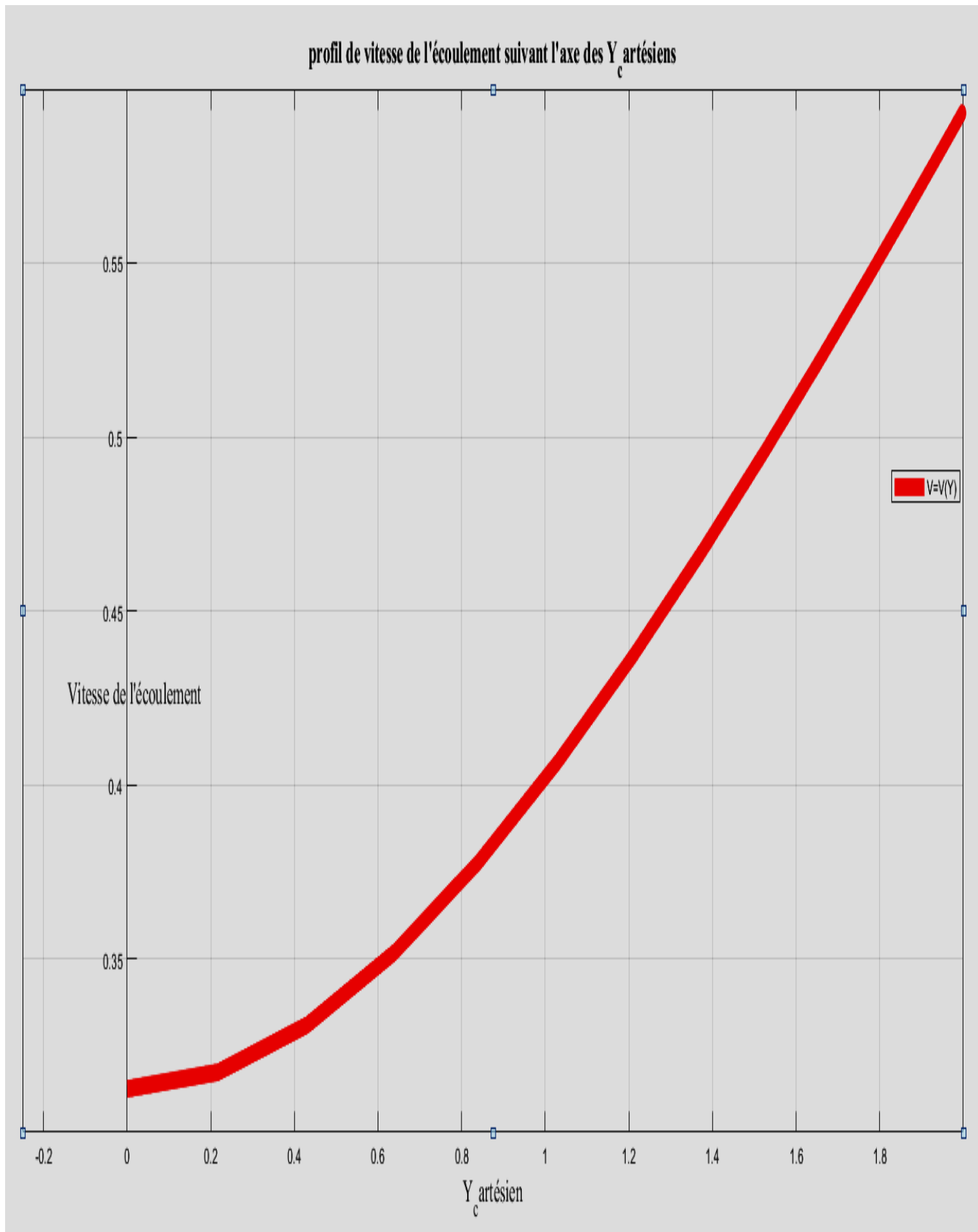


Figure III:10 profil de vitesse de l'écoulement suivant l'axe des Y_c Cartésiens

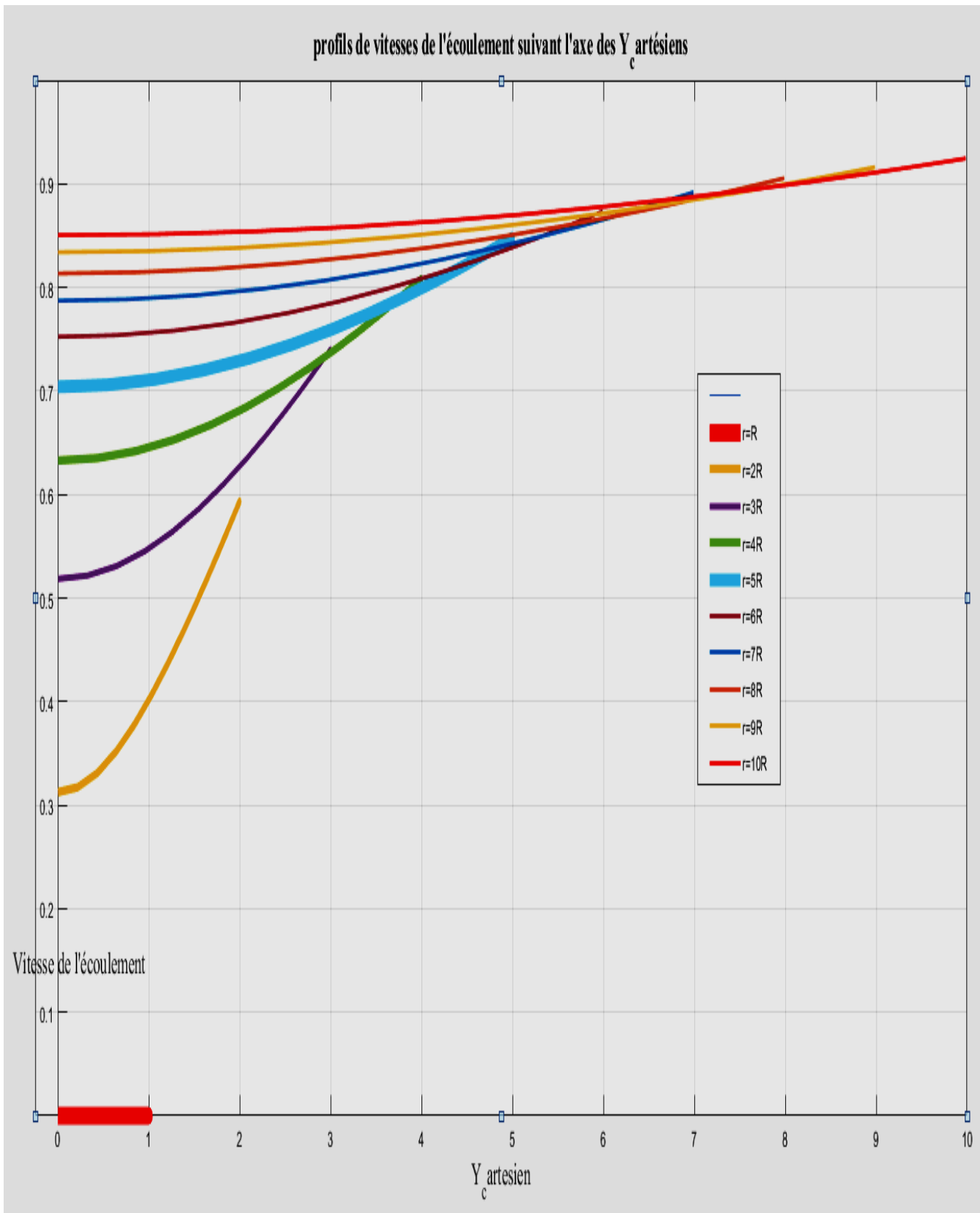


Figure III:11 profils de vitesse de l'écoulement suivant l'axe des Y_c Cartésiens

III.1.2.3 Variation du champ de vitesses en fonction de la distance par rapport au centre de la sphère.

Le programme Matlab suivant met en évidence la variation de la vitesse V en fonction de la distance au centre de la sphère r :

```

clear all; close all; clc

%paramètres
R = 1;
Vinf = 1;
L = pi;
r = linspace(1, L, 20);
%theta = linspace(-pi, pi, 20);
%phi = 0;
%champ de vitesses : Vr et Vtheta
for k = -4:4
    theta = k * (pi/4)
    Vr = Vinf * (cos(theta)).* (1 - (3/2) * (R./r) + (1/2).* ((R./r).^3));
    Vtheta = Vinf * (sin(theta)).* (-1 + (3/4) * (R./r) + (1/4)
        * ((R./r).^3));
    Vphi = 0;
% module de la vitesse
V = sqrt(Vr.^2 + Vtheta.^2 + Vphi.^2);
plot(r, V)
hold on
end

Vmax = 1 * r - r + Vinf;
hold on
plot(r, Vmax)
    
```

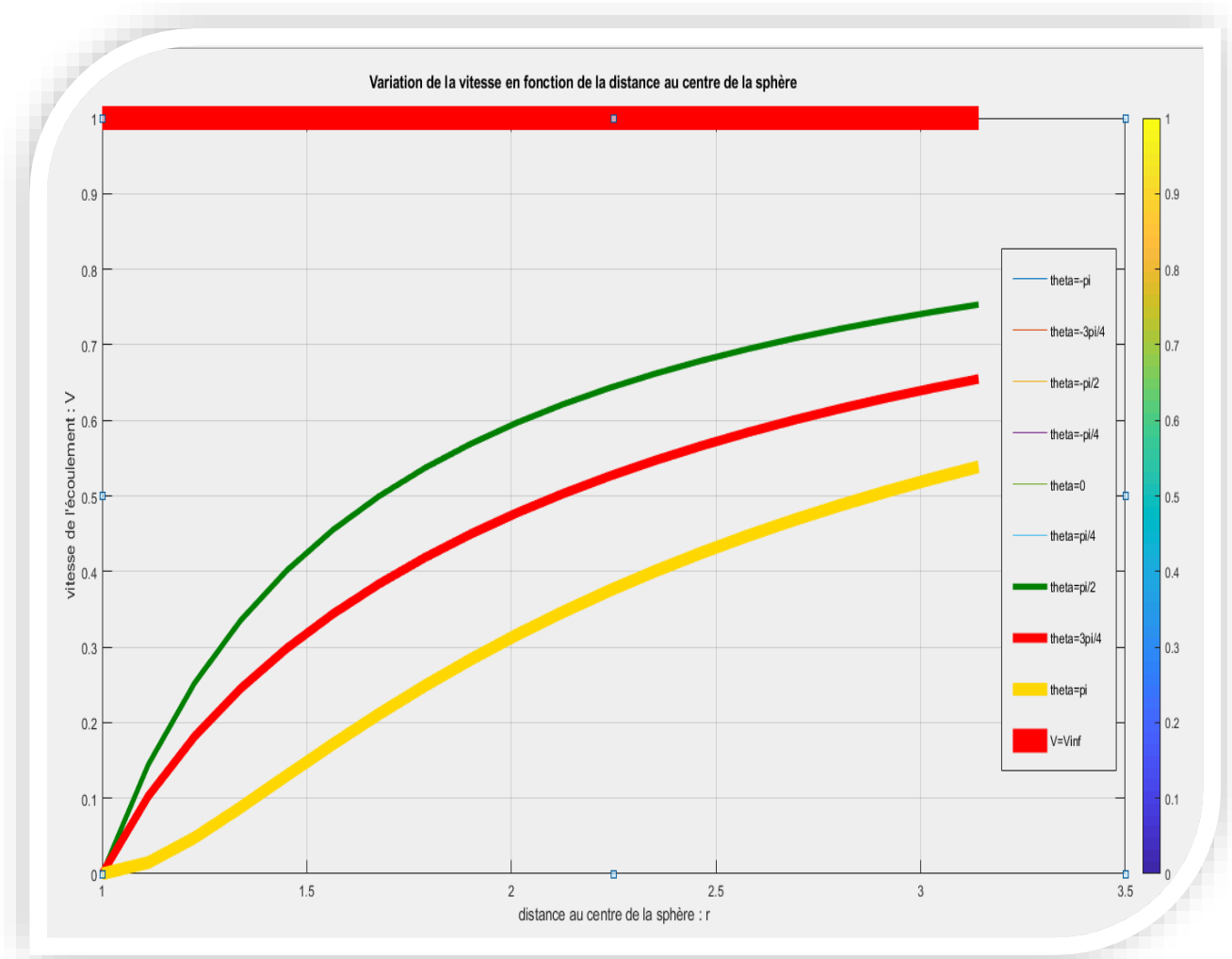


Figure III:12 Variation du champ de vitesses lorsqu'on s'éloigne de la sphère.

L'écoulement de Stokes est donc caractérisé par un profil de vitesse qui décroît rapidement lorsqu'on se rapproche de la surface de la sphère.

Le fait que toutes les courbes passent par l'origine du repère et se superposent justifie simplement l'isotropie du fluide vis-à-vis de sa vitesse et marque la présence des points de vitesses nulles qui ne sont autre que la surface de la sphère.

III.1.2.4 Variation de la vitesse en fonction de l'angle θ pour différentes distances (r) à la sphère

```

clear all; close all; clc

%paramètres
R = 1;
Vinf = 1;
L = pi;
%r = linspace(1, L, 20);
theta = linspace(0, pi, 40);
%theta = linspace(-pi, pi, 20);
%phi = 0;

%champ de vitesses : Vr et Vthrtta
for k = 1:5
    r = k * (R)
    Vr = Vinf * (cos(theta)).* (1 - (3/2) * (R./r) + (1/2).* ((R./r). ^3));
    Vtheta = Vinf * (sin(theta)).* (-1 + (3/4) * (R./r) + (1/4)
        * ((R./r). ^3));

    Vphi = 0;

    % module de la vitesse
    V = sqrt(Vr. ^2 + Vtheta. ^2 + Vphi. ^2);
    plot(theta, V)
    hold on
end

Vmax = 1 * theta - theta + Vinf;
hold on

plot(theta, Vmax)

```

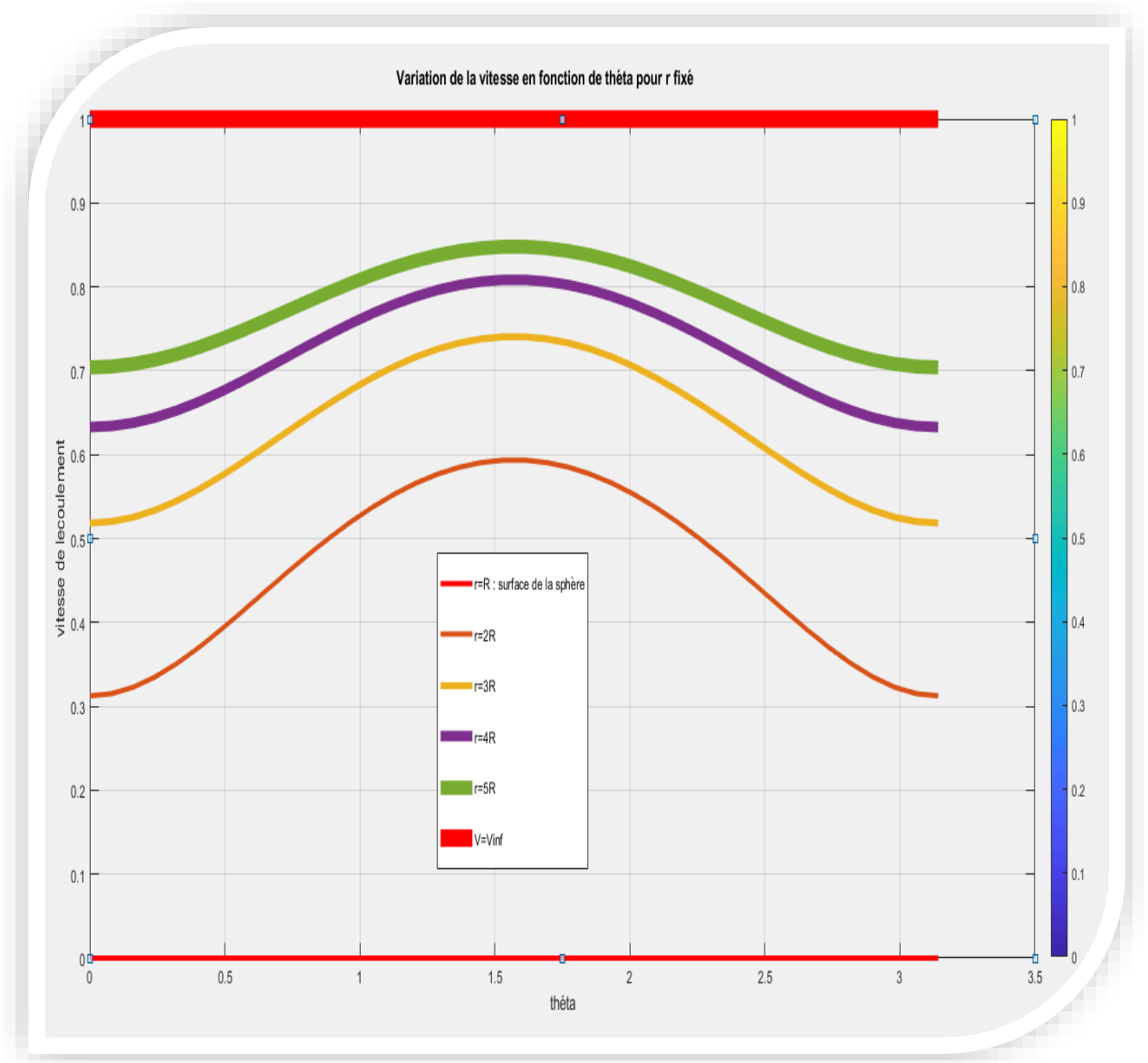


Figure III:13 Variation du champ de vitesses avec l'angle θ pour r fixé.

Le champ de vitesses sur une sphère de rayon r différent de R n'est pas uniforme. On voit bien que la vitesse s'annule aux points de coordonnées (R, θ) , ce sont les points de stagnations.

Le profil de vitesse nous montre également que l'écoulement est laminaire, car on observe un mouvement ordonné et colinéaire des vecteurs de ce champ.

III.1.3 La fonction de courant

Elle est donnée par la relation :

$$\psi(r, \theta) = v_{\infty} \sin^2 \theta \left(\frac{r^2}{2} - 3R \left(\frac{r}{4} \right) + \frac{R^3}{4} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \quad (\text{III. 10})$$

Soit, sous forme adimensionnelle :

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{v_{\infty} R^2} = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right) \right) \quad (\text{III. 11})$$

Posons $x = \frac{r}{R}$ et $y = \theta$ alors :

$$\bar{\psi} = \left(\frac{1}{2} (x)^2 - \frac{3}{4} (x) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \sin^2 y \quad (\text{III. 12})$$

Le cas de la figure ci-après illustre le principe de disposition des lignes de courant sur le cas d'un corps profilé et sphérique bidimensionnel.

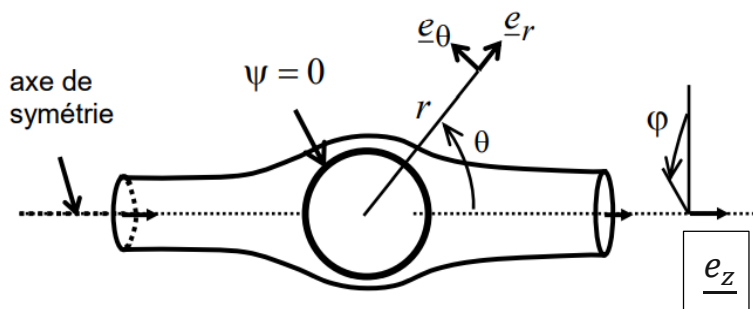


Figure III:14 ligne de champ

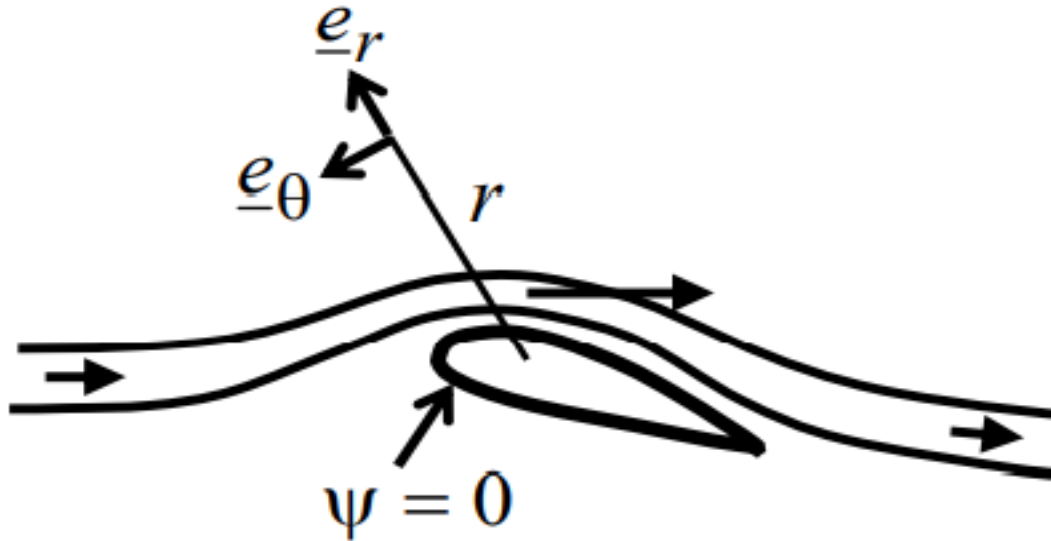


Figure III:15 lignes de courant qui se resserrent au contour de l'obstacle

III.1.3.1 La programme Matlab suivant nous donne lalure des lignes de courant

```
clear all; close all ; clc

%paramètres
R = 1;
Vinf = 1;
L = 0.5 * pi;
r = linspace(1, L, 50)
theta = linspace(-pi, pi, 50);
phi = 0;
```

%grille de coordonnées

$[r1, theta1, phi1] = meshgrid(r, theta, phi);$

% conversion en coordonnées cartésiennes

$X = r1.* sin(theta1).* cos(phi1);$

$Y = r1.* sin(theta1).* sin(phi1);$

$Z = r1.* cos(theta1);$

%champ de vitesses Vr ,Vtheta et Vphi

$Vr = Vinf * (cos(theta1)).* (1 - (3/2) * (R./r1) + (1/2). * ((R./r1).^3));$

$Vtheta = Vinf * (sin(theta1)).* (-1 + (3/4) * (R./r1) + (1/4) * ((R./r1).^3));$

$Vphi = zeros(size(Vr));$

%champ de vitesses Vx, Vy et Vz

$Vx = (Vr).* (cos(theta1)).* (cos(phi1)) + (Vtheta).* (cos(theta1)). * (cos(phi1)) - (Vphi).* (sin(phi1));$

$Vy = (Vr).* (sin(theta1)).* (sin(phi1)) + (Vtheta).* (cos(theta1)). * (sin(phi1)) + (Vphi).* (cos(phi1));$

$Vz = (Vr).* (cos(theta1)) - (Vtheta).* (sin(theta1));$

%Tracé du champ de vitesses

$quiver(X, Z, Vy, Vz, 'red')$

$xlabel('X_cartesien'); ylabel('Z_cartesien');$

$title('ligne de courant de l'écoulement autour de la sphère');$

$grid on$

$hold on$

```
r2 = sqrt(X.^2 + Y.^2 + Z.^2);
theta2 = acos(Z./r2);
phi2 = atan2(Y,X);
```

%fonction de courant? f

```
f = Vinf.* ((1/2).*(r2.^2) - (3/4).*(R * r2) + (1/4).*((R^3)./r2)).
* ((sin(theta2)).^2);
contourf(X,Z,f);
```

hold on

%cercle

```
ang = linspace(0,2 * pi, 100);
centre = [0,0];
Xc = centre(1) + R * cos(ang);
Yc = centre(2) + R * sin(ang);
```

```
plot(Xc,Yc,'black -','Linewidth',2);
axis equal;
grid on;
axis equal;
```

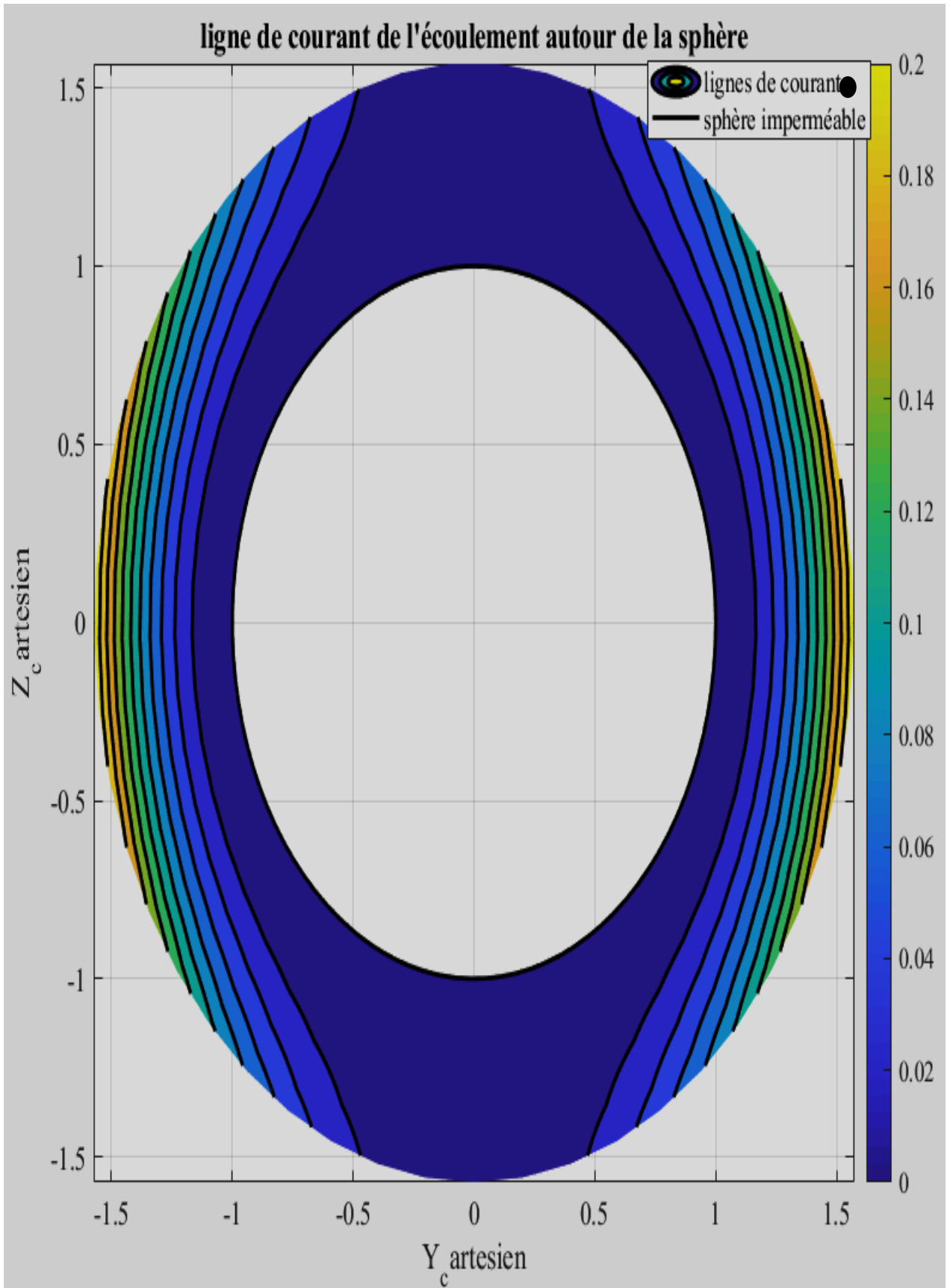


Figure III:16 ligne de courant autour de la sphère en vue YZ

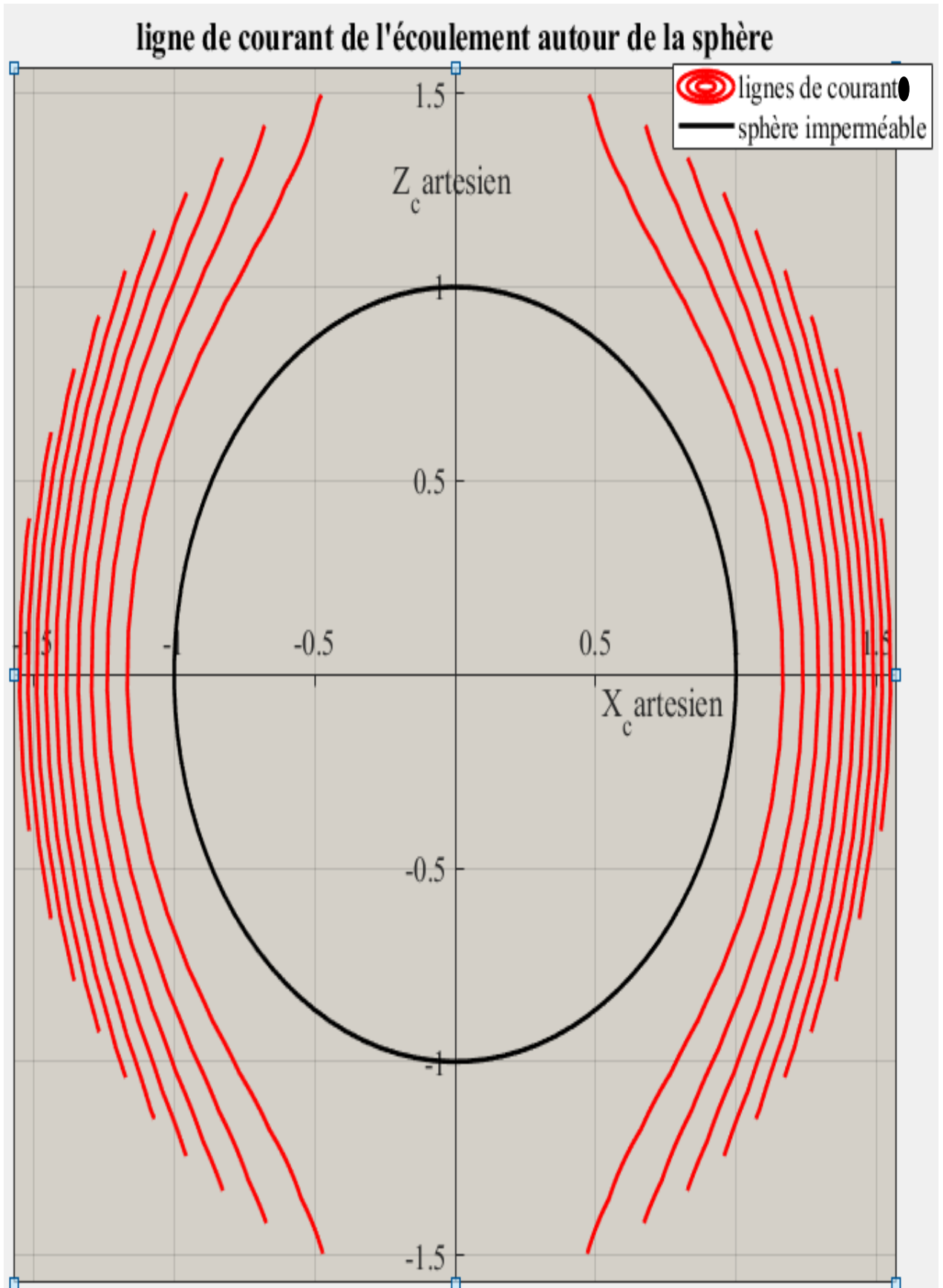


Figure III:17 lignes de courant autour de la sphère en vue XZ

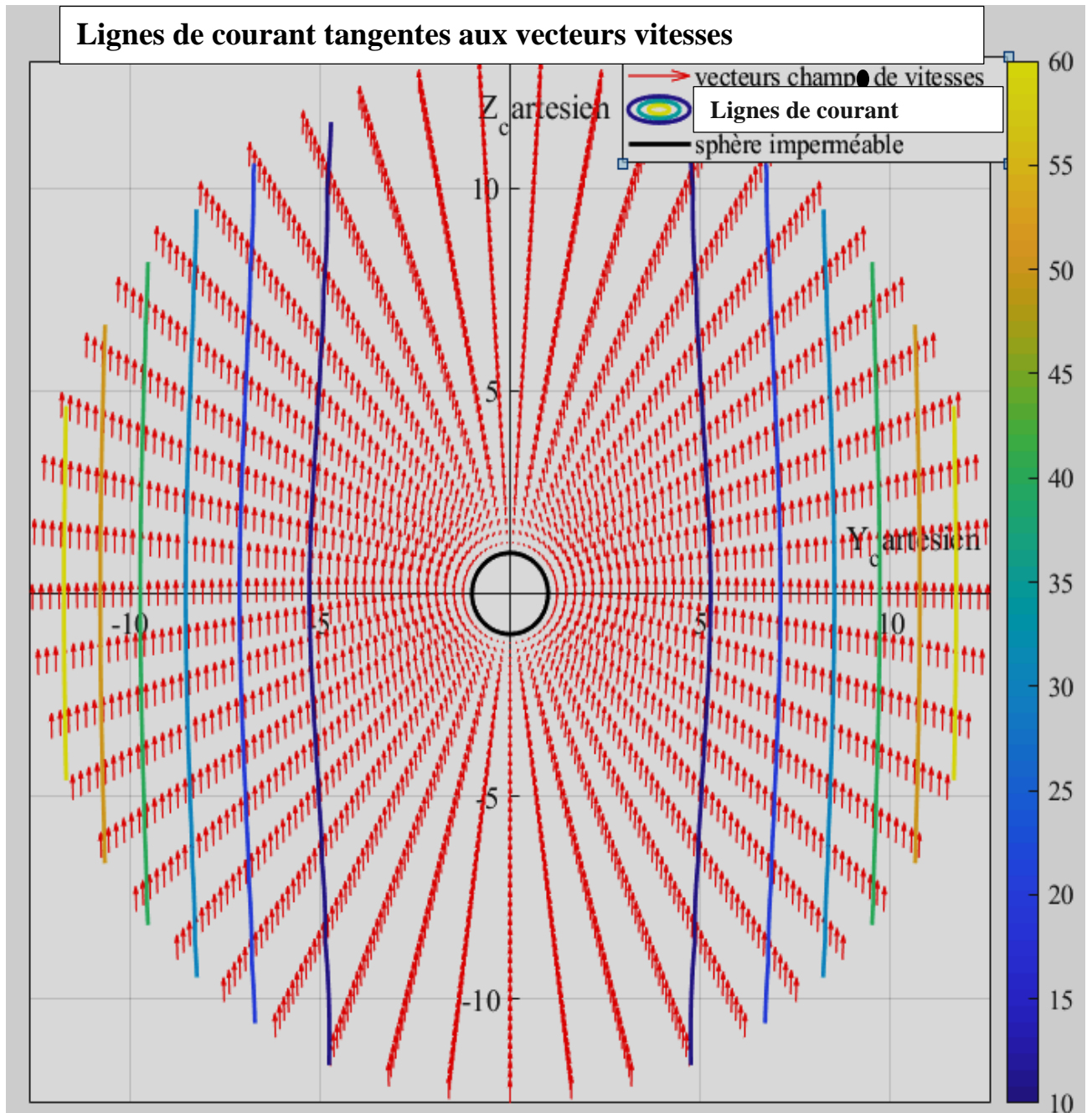


Figure III:18 lignes de courant tangente au vecteur vitesse

On constate que la variation de φ n'influence pas les lignes de champ observé. Ce résultat n'est pas une surprise car l'écoulement présente une symétrie vis-à-vis de cette variable spatiale.

III.1.3.2 Simulation de l'écoulement autour de la sphère

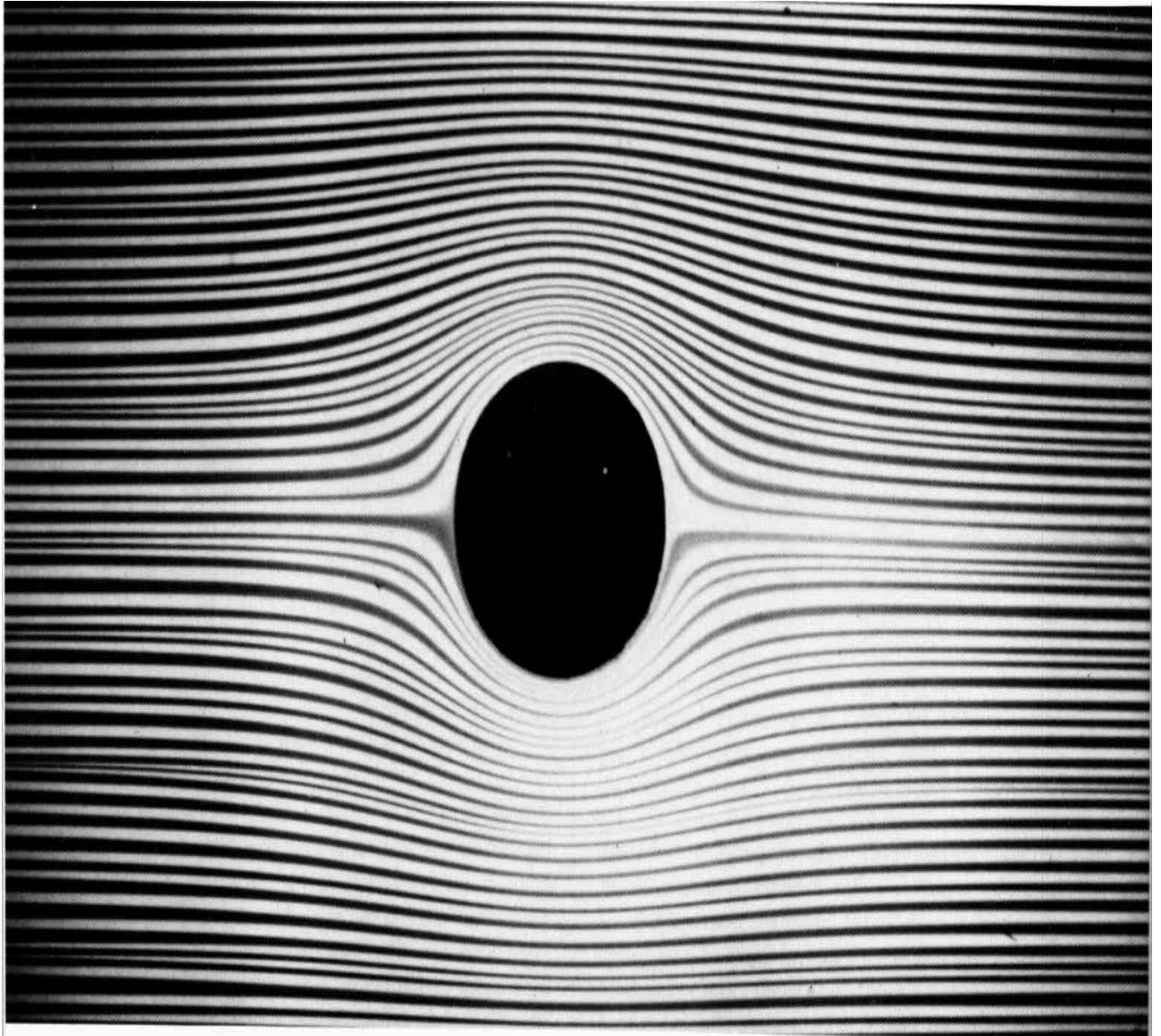


Figure III:19 visualisation des lignes de courant pour $Re=0.16$ (source : Van Dyke)

L'examen attentif de cette figure révèle une légère dissymétrie amont-aval (un léger évasement du tube de courant) qui résulte d'une mise en défaut de l'hypothèse $Re \ll 1$.

La figure ci-dessus montre bien la courbure des lignes de courant ainsi qu'une accélération du fluide lors du contournement du bord d'attaque de cette sphère. Cette accélération se traduit par une contraction des lignes de courant.

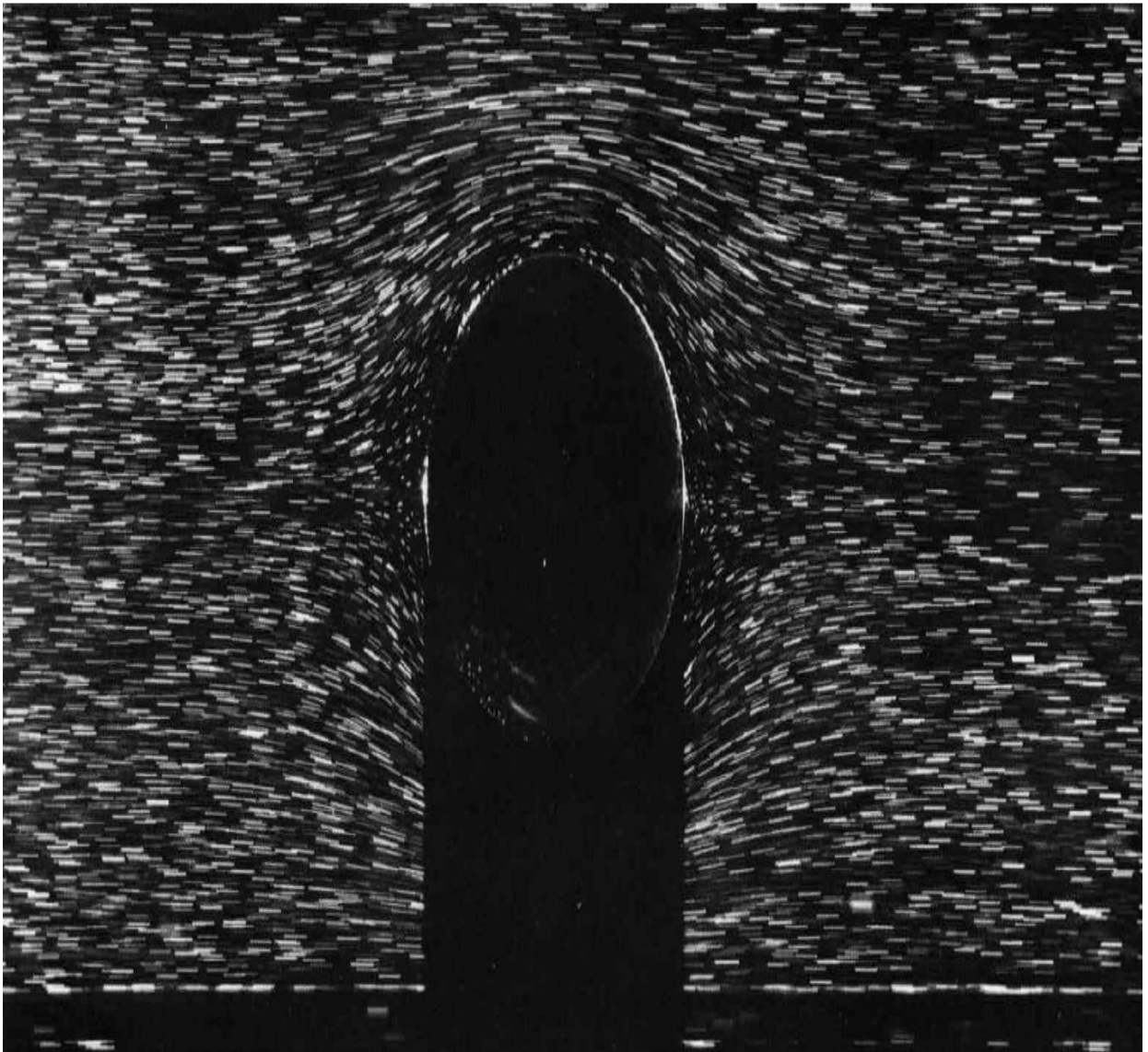


Figure III:20 sphère tombant librement dans l'axe d'un tube de deux fois son diamètre rempli de glycérine. avec un $Re=0.10$ (source : Van Dyke)

III.1.4 Le champ de pression $p(r, \theta)$

Nous avons établie l'expression de la pression:

$$p(r, \theta) = p_0 - \frac{3}{2} \left(\frac{\mu v_\infty}{R} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (\text{III. 16})$$

Posons $x = \frac{r}{R}$ et $y = \theta$

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{\left(\frac{\mu v_\infty}{R} \right)} \quad (\text{III. 17})$$

Alors la forme adimensionnelle de la variation du champ de pression s'écrit :

$$\bar{p} = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^2 \cos y \quad (\text{III. 18})$$

La variation du champ de pression se présente graphiquement par exécution du programme Matlab suivant :

```
clear all; close all; clc

%paramètres
R = 1; %rayon de la sphère
Vinf = 1; %vitesse de l'écoulement infini
mu = 1; % viscosité dynamique du fluide
```

$p_0 = 0$; % pression de l'écoulement infini

$\rho = 1$; % densité du fluide

$L = 3 * \pi$;

$r = \text{linspace}(1, L, 200)$;

$\theta = \text{linspace}(-\pi, \pi, 200)$;

$\phi = 0$;

% grille de coordonnées

$[r_1, \theta_1, \phi_1] = \text{meshgrid}(r, \theta, \phi)$;

% conversion en coordonnées cartésiennes

$X = r_1 * \sin(\theta_1) * \cos(\phi_1)$;

$Y = r_1 * \sin(\theta_1) * \sin(\phi_1)$;

$Z = r_1 * \cos(\theta_1)$;

% transformation de la pression en coordonnée cartésienne

$r_2 = \sqrt{X.^2 + Y.^2 + Z.^2}$;

$\theta_2 = \arccos(Z./r_2)$;

$\phi_2 = \text{atan2}(Y, X)$;

% Expression du champ de pressions

$p = p_0 - (3/2) * ((\mu * V_{\infty})/R) * ((R./r_2).^2) * \cos(\theta_2)$;

% Tracé du champ de pressions

$\text{meshc}(X, Z, p)$

axis equal ;

```

        grid on;
xlabel('X_cartesien'); ylabel('Z_cartesien'); title('champ de pression de l'ecoulement
= 0°, et phi = 90°')

        hold on

        %sphère
[x, y, z] = sphere % coordonnées de base pour une sphère unitaire

        %échelle de la sphère
scaling = R; % facteur d'échelle pour la sphère

        %coordonnées finales de la sphère
        x = x * R;
        y = y * R;
        z = z * R

        %représentation de la sphère
mesh(x, y, z, 'Facecolor', 'black', 'Edgecolor', 'none');
axis equal;

```

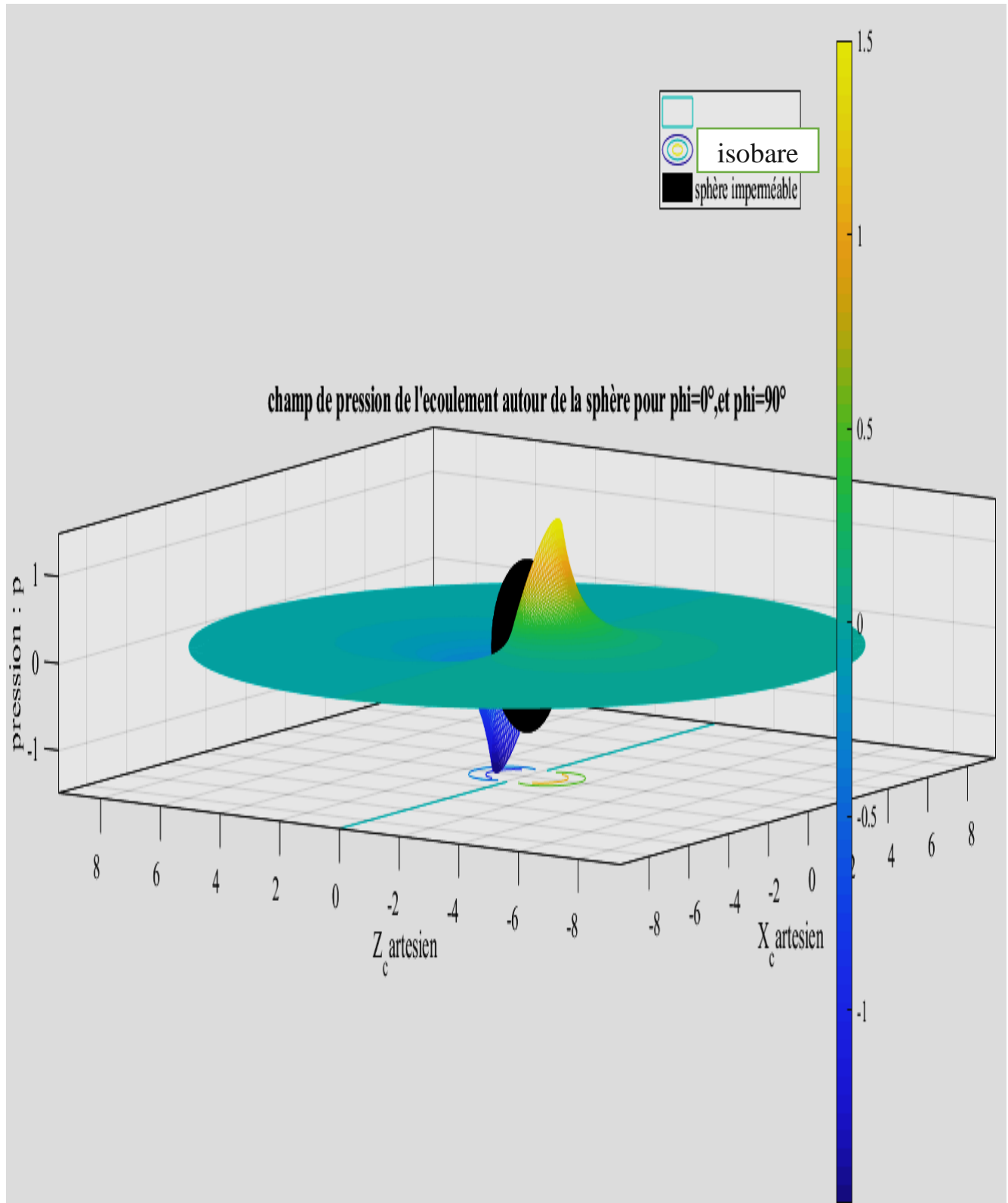


Figure III:21 Champ de pression en vue 3D

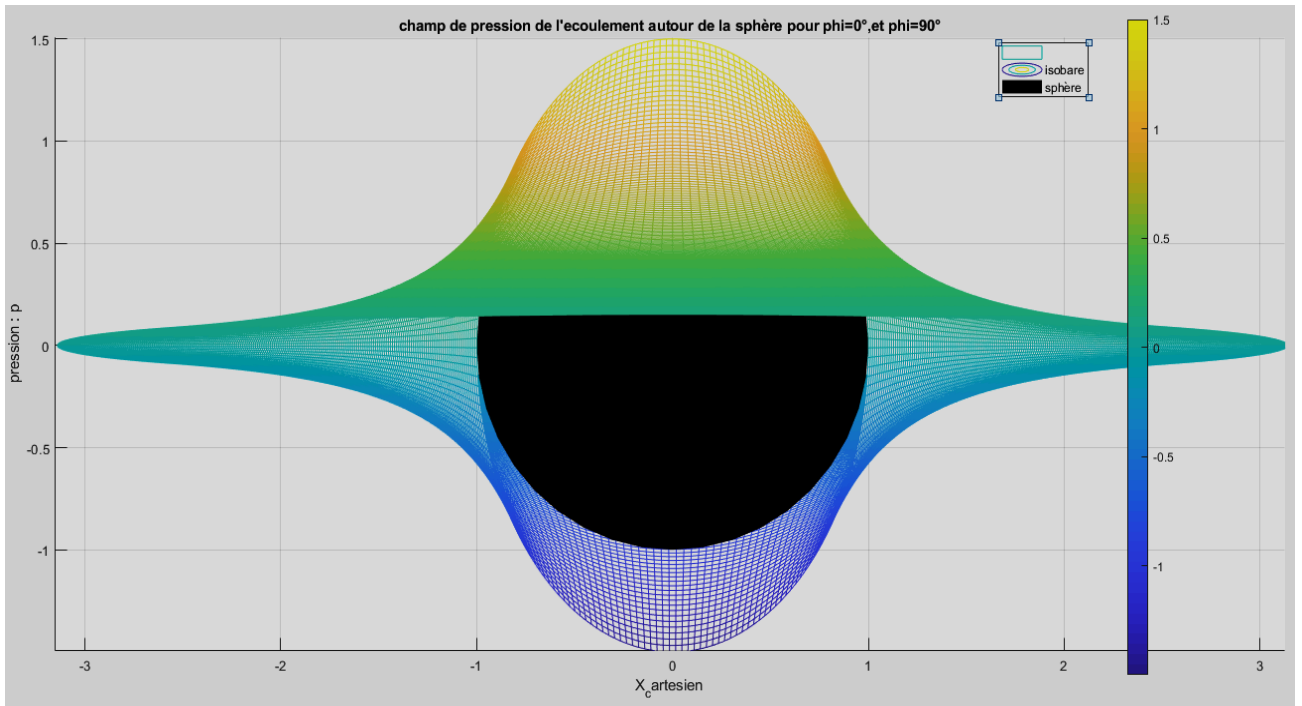


Figure III:22 champ de pression en vue XX

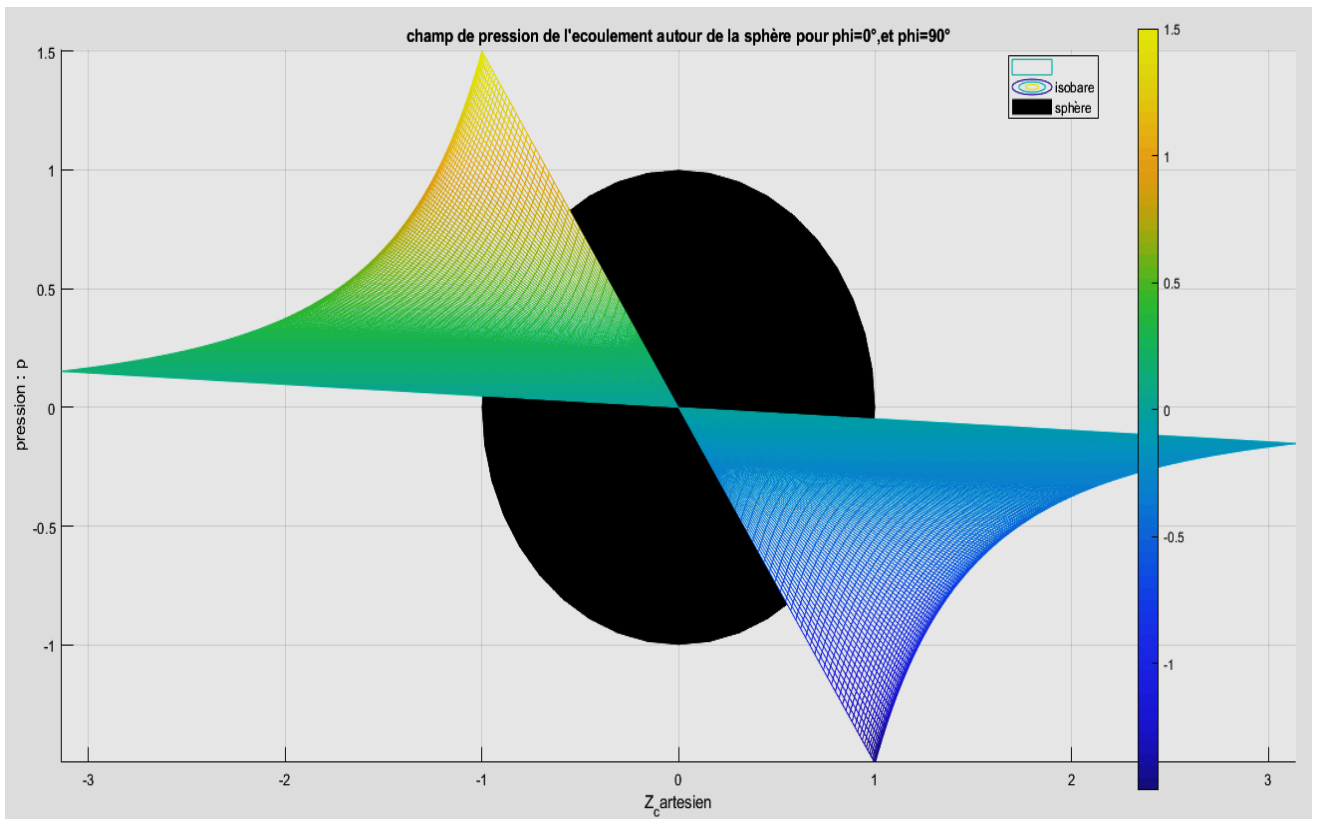


Figure III:23 champ de pression en vue ZZ

```
clear all; close all ; clc
```

```
%paramètres
```

```
R = 1; %rayon de la sphère
```

```
Vinf = 1; %vitesse de l'écoulement infini
```

```
mu = 1; % viscosité dynamique du fluide
```

```
po = 0; % pression de l'écoulement infini
```

```
rho = 1; % densité du fluide
```

```
L = pi;
```

```
r = linspace(1, L, 200);
```

```
theta = linspace(-pi, pi, 200);
```

```
phi = 0;
```

```
%grille de coordonnées
```

```
[r1, theta1, phi1] = meshgrid(r, theta, phi);
```

```
% conversion en coordonnées cartésiennes
```

```
X = r1.* sin(theta1).* cos(phi1);
```

```
Y = r1.* sin(theta1).* sin(phi1);
```

```
Z = r1.* cos(theta1);
```

```
%transformation de la pression en coordonnée cartésienne
```

```
r2 = sqrt(X.^2 + Y.^2 + Z.^2);
```

```
theta2 = acos(Z./r2);
```

```
phi2 = atan2(Y, X);
```

```
%Expression du champ de pressions
```

$$p = p_0 - (3/2) * ((\mu * V_{inf}) / R) * ((R / r^2)^2) * \cos(\theta^2);$$

```

%Tracé du champ de pressions
contourf(X,Z,p)
axis equal;
grid on;
xlabel('X_cartesien'); ylabel('Z_cartesien'); title('champ de pression de l''ecoulement
= 0°, et phi = 90°')

hold on

%cercle
ang = linspace(0,2 * pi, 100);
centre = [0,0];
Xc = centre(1) + R * cos(ang);
Yc = centre(2) + R * sin(ang);

plot(Xc,Yc,'black - ','Linewidth',2);
axis equal;
grid on;
axis equal;

```

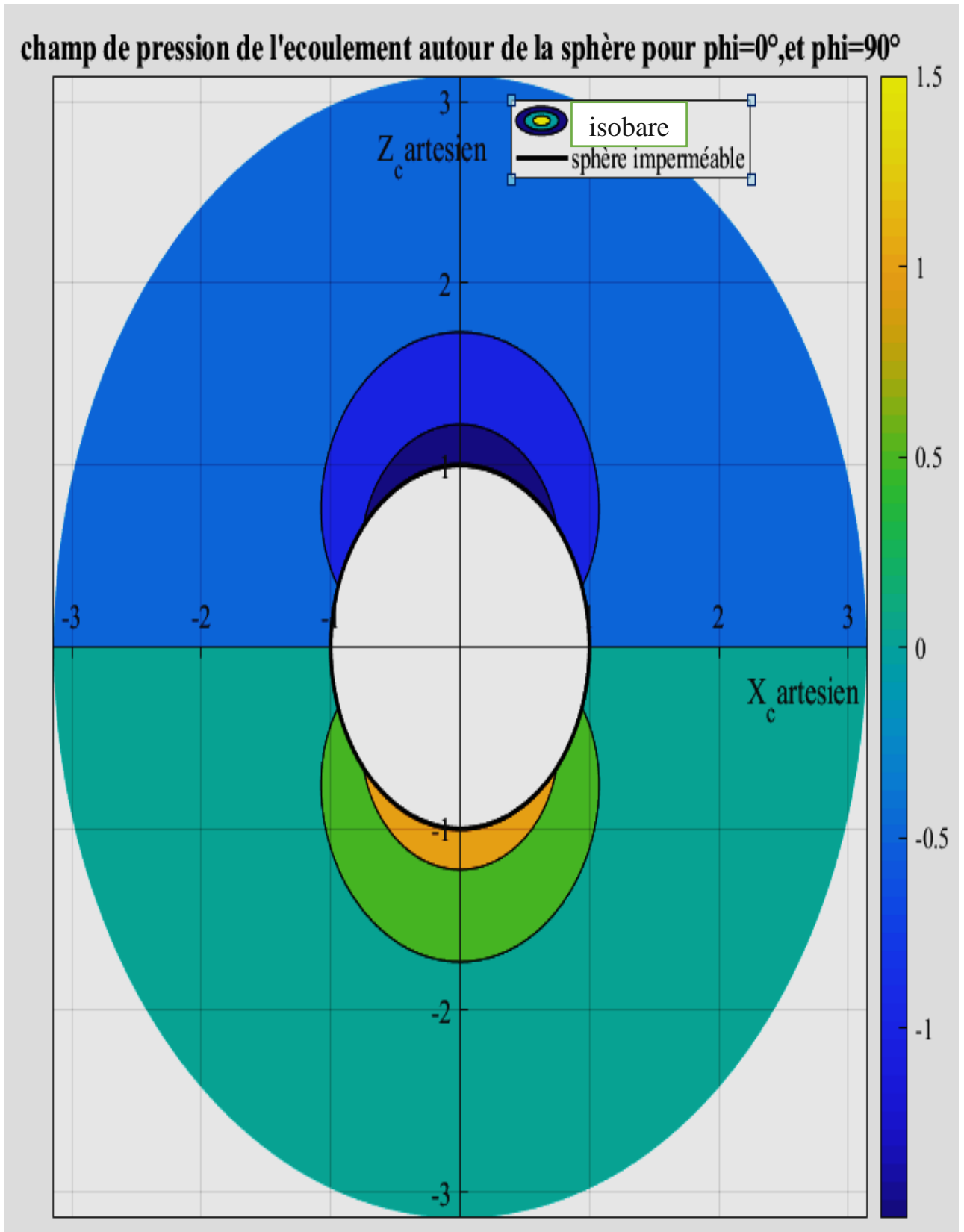


Figure III:24 champ de pression autour de la sphère pour $\phi=0^\circ$ et $\phi=90^\circ$

III.1.4.1 Variation du champ de pression en fonction de r

```

clear all; close all ; clc

%paramètres
R = 1; %rayon de la sphère
Vinf = 1; %vitesse de l'écoulement infini
mu = 1; % viscosité dynamique du fluide
po = 0; % pression de l'écoulement infini
rho = 1; % densité du fluide

% coordonnées sphérique
L = pi;
r = linspace(1, L, 100);

phi = 0;

for k = -4:4
theta = k * (pi/4);

%Expression du champ de pressions
p = po - (3/2).* ((mu * Vinf)./R).* ((R./r).^2).* cos(theta);

plot(r, p);

hold on
end

```

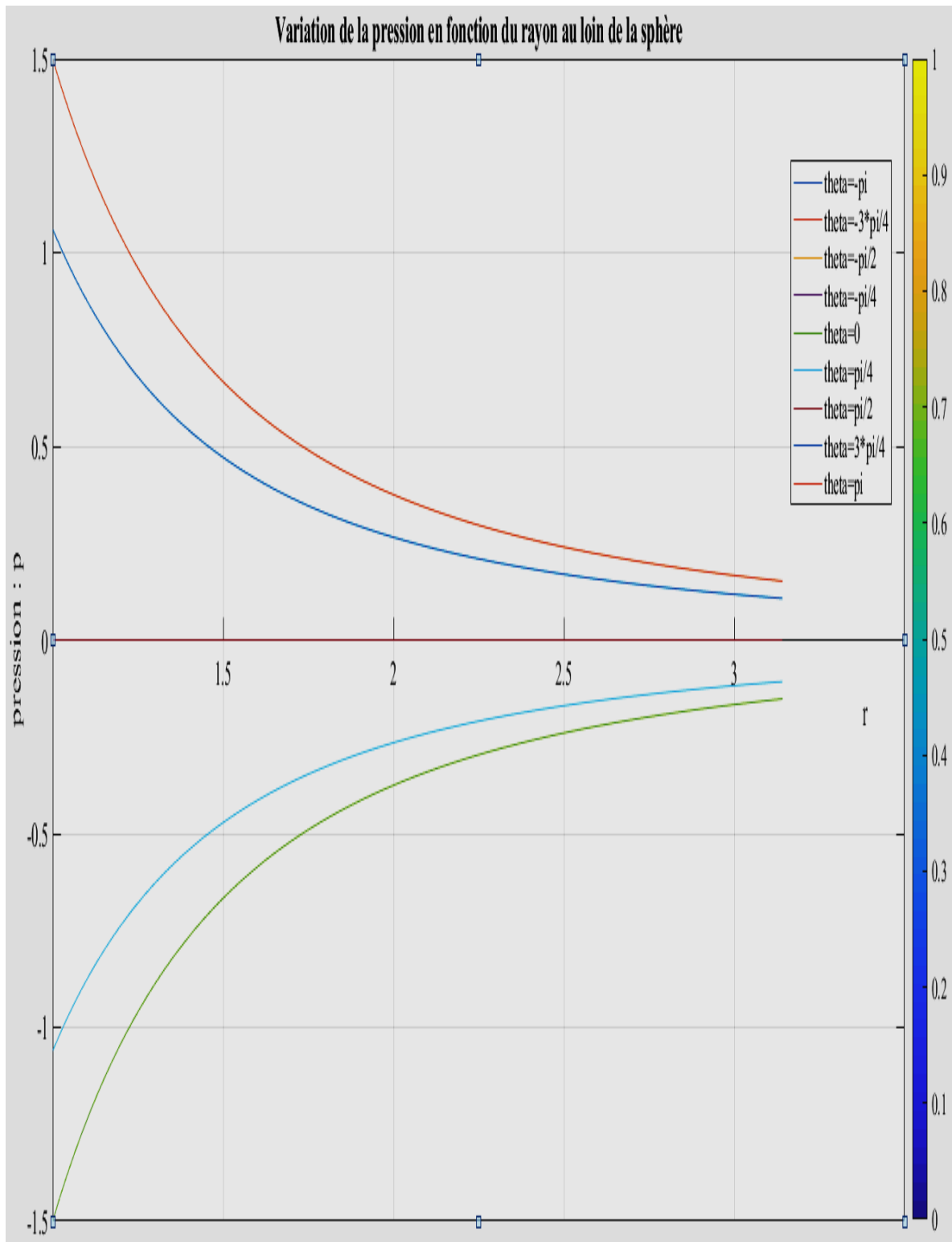


Figure III:25 variation du champ de pression avec r pour θ fixé

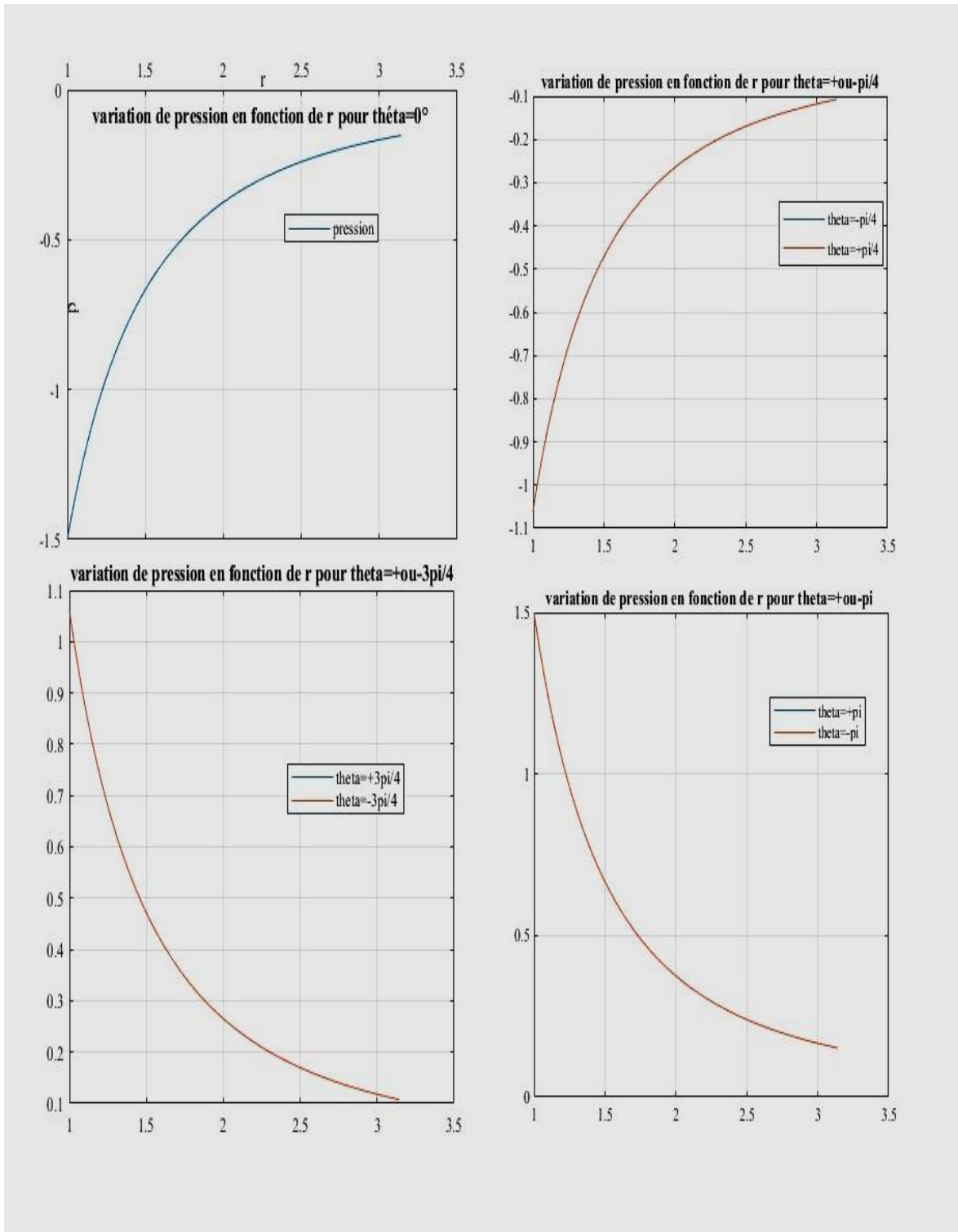


Figure III:26 variation du champ de pression avec r pour θ fixé

On constate que la pression croit lorsqu'on s'éloigne de la sphère dans la partie aval de cette dernière ou dans le domaine situé au-dessus du plan

passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à la direction de l'écoulement incidente.

III.1.4.2 Variation de la pression en fonction de θ pour différentes valeurs de r

```

clear all; close all ; clc
    %paramètres
    R = 1; %rayon de la sphère
    Vinf = 1; %vitesse de l'écoulement infini
    mu = 1; % viscosité dynamique du fluide
    po = 0; % pression de l'écoulement infini
    rho = 1; % densité du fluide

    % coordonnées sphérique
    L = pi;
    %r = linspace(1,L,100);
    theta = linspace(0,pi,100);
    phi = 0;
    for k = 1:5
        r = k * R

        %Expression du champ de pressions
        p = po - (3/2).* ((mu * Vinf)./R).*((R./r).^2).* cos(theta);

        plot(theta,p);
        hold on
    end
    
```

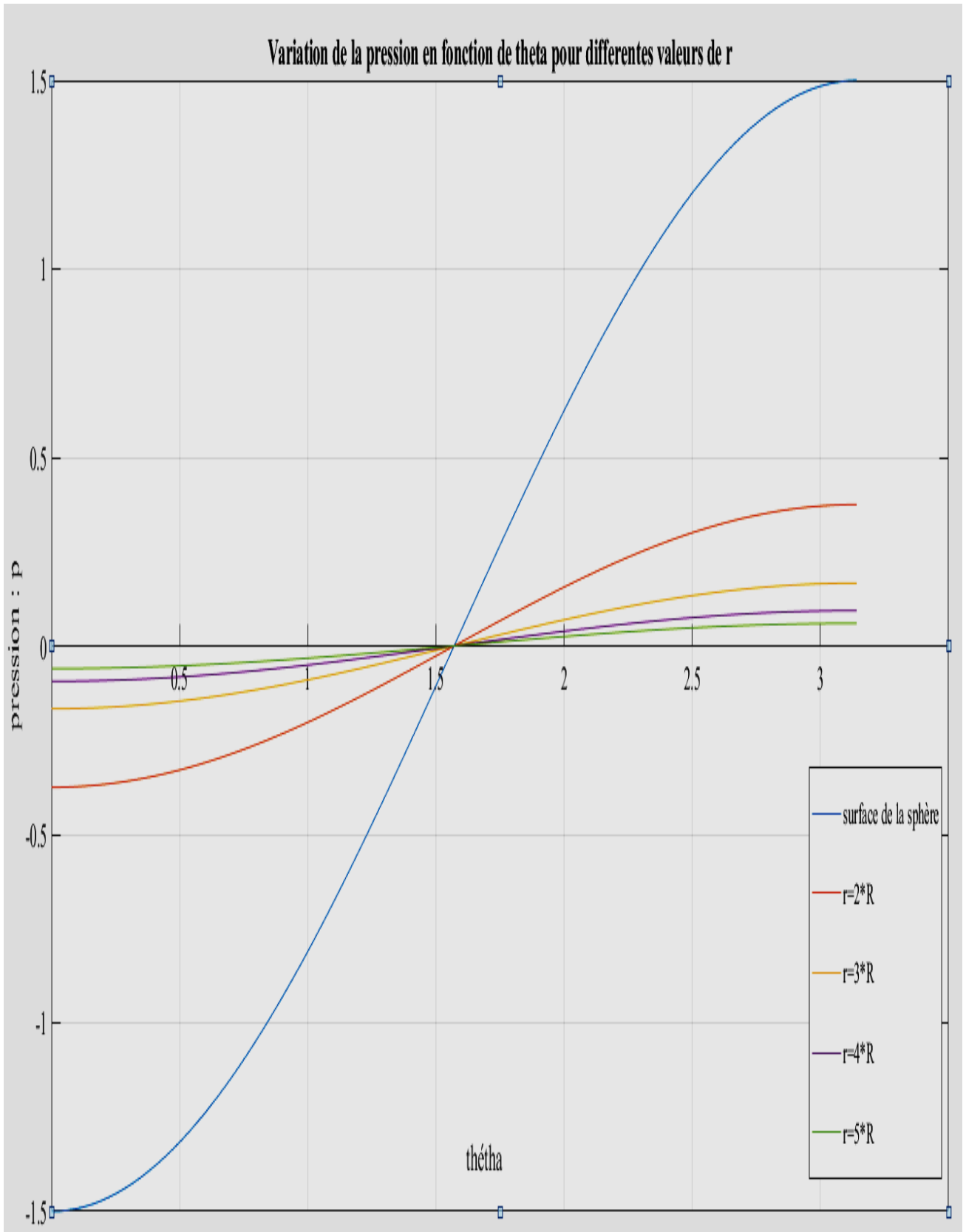


Figure III:27 Variation de la pression en fonction de θ pour différentes valeurs de r fixé.

On remarque que pour une distance au centre de la sphère fixé, le champ de pression n'est pas uniforme sur la sphère de rayon égale à cette distance r et concentrique à la sphère autour de laquelle le fluide s'écoule.

On remarque que l'échelle δp qui caractérise la variation de la pression entre l'infini amont et le point d'arrêt frontal de la sphère $\theta = \pm\pi$ vérifie :

$$\frac{\delta p}{\left(\frac{\mu v_\infty}{2R}\right)} = \frac{p(R, \pm\pi) - p_0}{\left(\frac{\mu v_\infty}{2R}\right)} = 3 \quad (\text{III. 19})$$

En l'absence d'inertie, l'échelle caractéristique de variation de la pression dans l'écoulement est donc fixée par la viscosité. Elle vérifie $\delta p \propto \frac{\mu v_\infty}{R}$ et non pas $\delta p \propto \rho(v_\infty)^2$ comme dans un écoulement inertiel où $\rho \underline{\nabla}(\underline{V}) \cdot \underline{V}$ est un terme dominant.

On constate que la variation de la pression dépend de la zone du fluide autour de la sphère considérée. Elle croît lorsqu'on s'éloigne de la sphère dans la partie supérieure du plan passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à la direction de l'écoulement incidente (partie aval). Et elle décroît lorsqu'on s'éloigne de la sphère dans l'autre domaine du fluide en dessous du plan passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à la direction de l'écoulement incidente (partie amont).

Ainsi le comportement de la pression en amont de la sphère varie de manière inverse à celle de l'aval de la sphère.

III.2 Discussion et Limite de validité

Les résultats annoncés précédemment se méritent. Mais malgré tous les efforts consentis pour obtenir ces résultats, cette dernière présente un défaut : elle n'est pas uniformément valable dans tout l'espace. En effet, toute l'analyse que nous avons effectuée repose sur le fait que les termes d'inertie de l'équation de Navier-Stokes sont négligeables du fait de la valeur du nombre de Reynolds. Il faut donc vérifier que tel est le cas.

III.2.1 Ordre dominant de validité

Compte tenu de la relation :

$$\sigma_{rr} = 2\mu d_{rr} = 2\mu v_\infty \cos \theta \left(\frac{3R}{2r^2} - \frac{3R^3}{2r^4} \right) \quad (\text{III. 20})$$

Ce qui signifie que dans l'équation du mouvement le terme visqueux $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})$ décroît, à l'ordre dominant, comme $\mu v_\infty R/r^3$:

$$\|\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})\| \sim \mu v_\infty R/r^3 \quad (\text{III. 21})$$

Le comportement du terme d'inertie $\nabla \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{V}}$ s'obtient quant à lui à partir des composantes de vitesse :

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{III. 22})$$

$$v_{\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_{\infty} \sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \quad (\text{III. 23})$$

$$v_{\varphi} = 0 \quad (\text{III. 24})$$

Donc l'ordre dominant :

$$\|\nabla \underline{V} \cdot \underline{V}\| \sim \rho (v_{\infty})^2 R / r^2 \quad (\text{III. 25})$$

En conclusion :

$$\frac{\text{inertie}}{\text{frottement}} \sim \frac{\|\nabla \underline{V} \cdot \underline{V}\|}{\|\text{div}(\underline{\sigma})\|} \sim \frac{\rho (v_{\infty})^2 R / r^2}{\mu v_{\infty} R / r^3} = \frac{v_{\infty} R}{\nu} \frac{r}{R} = Re \frac{r}{R} \quad (\text{III. 26})$$

Il existe alors une distance, telle que

$$\frac{r}{R} \sim \frac{1}{Re} \quad (\text{III. 27})$$

Où l'approximation du fluide sans inertie est mise en défaut. On doit alors corriger la solution de Stokes pour la rendre compatible avec une solution inertielle loin de la sphère. Une solution connue est celle proposée par **Oseen** en 1910.

Conclusion

Ce travail de recherche a permis d'analyser en profondeur le phénomène de l'écoulement de stokes autour d'une sphère imperméable, en mettant l'accent sur la détermination des champs de vitesses, des champs de pression, ainsi que des forces de trainée exercées sur la sphère. En appliquant les principes fondamentaux de la dynamique des fluides dans un régime à faible nombre de Reynolds, nous avons pu établir un modèle pertinent décrivant le comportement de la sphère. Les hypothèses d'étude, incluant l'adhérence à la surface de la sphère qui impose une vitesse nulle, ont été déterminantes pour la modélisation de l'écoulement. Ceci, associé à la condition d'un écoulement infini constant, nous a permis de résoudre les équations de Navier-stokes en régime de stokes avec précision. Les résultats obtenus révèlent que, près de la sphère, la vitesse du fluide décroît significativement, tandis que le champ de pression présente des gradients qui influencent directement la force de trainée. Nos analyses ont mis en évidence un champ de vitesse tridimensionnel complexe, mais avec une symétrie discernable qui permet de prédire le comportement du fluide autour de la sphère. Les calculs du champ de pression ont quant à eux démontré des variations significatives, soulignant l'influence de la sphère sur l'écoulement et illustrant l'interactions entre la vitesse du fluide et la dynamique de pression. Concernant les forces de trainée, nos résultats confirment les prédictions théoriques basées sur la loi de stokes, établissant ainsi une relation directe entre cette force, les propriétés visqueuses du fluide, et les dimensions de la sphère. Ce lien est crucial pour comprendre comment les particules se déplacent dans un fluide visqueux et se rapporte à de nombreuses applications pratiques, telles que le transport de particules en suspension dans des milieux variés. En résumé, ce mémoire a non seulement enrichi notre compréhension des principes physiques

sous-jacents à l'écoulement de Stokes autour d'une sphère imperméable, mais a également jeté les bases pour des études ultérieures dans des environnements plus complexes. Les résultats obtenus ouvrent des perspectives intéressantes pour des recherches futures, notamment dans l'analyse d'écoulements impliquant des objets de formes diverses ou dans l'étude des fluides non-Newtoniens, contribuant à une meilleure maîtrise des mouvements de particules dans les fluides à faible Reynolds. Ainsi, cette étude démontre que la compréhension des interactions entre les fluides et les obstacles solides est essentielle dans de nombreux domaines d'application, du génie des matériaux à la biophysique, en passant par la biomécanique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. White F.M. "Viscous Fluid Flow", 3rd Edition, McGraw-Hill, 2006.
2. Batchelor G.K. "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press, 2000.
3. Brenner M.P., "Flow and Transport in Porous Media", Springer, 2010.
4. Hinze J.O. "Fundamentals of Fluid Spray Technology", PennWell Books, 2003.
5. Strykowski P.J., "Vortex Shedding and Flow-Induced Vibrations", Annual Review of Fluid Mechanics, 2012.
6. Tchoufag J., "Numerical Simulation of Flow around Bluff Bodies", Journal of Fluids Engineering, 2015.
7. Moin P., "Fundamentals of Turbulence for CFD", Annual Review of Fluid Mechanics, 2010.
8. Zdravkovich M.M. "Flow Around Circular Cylinders", Vol. 1 & 2, Oxford University Press, 1997.
9. Roshko A., "On the Vortex Shedding from Structures", Journal of Fluid Mechanics, 1954.
10. Williamson C.H., "Vortex Dynamics in the Wake of Bluff Bodies", Journal of Fluid Mechanics, 1996.
11. Faucher V., "Modélisation Numérique des Écoulements Turbulents", Presses Universitaires de France, 2003.
12. Rung T., "Large Eddy Simulation of Turbulent Flow around Cylinders", Computers & Fluids, 2014.
13. Chorin A.J., "Vorticity and Turbulence", Springer-Verlag, 1973.
14. Bourguet R., "Étude des Effets de la Vorticité dans les Écoulements Turbulents", Revue d'Hydraulique, 2011.

15. Leweke T., "Simulation Numérique et Analyse des Écoulements Stationnaires", *Journal of Computational Physics*, 2017.
16. Mukhopadhyay R., "Modeling of Flow-induced Vibrations", Springer, 2007.
17. Saffman P.G., "Vortex Dynamics", Cambridge University Press, 1992.
18. Farge M., "Wavelet transforms and their application to turbulence analysis", *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1999.
19. Gabbana A., "Flow Past Bluff Bodies: Experimental and Numerical Approaches", Elsevier, 2013.
20. Ghia K.N., "Numerical Simulation of Vortex Shedding", *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 2015.
21. Vierendeels J., "Hydrodynamique et Modélisation des Écoulements", Éditions Hermès, 2012.
22. Dargush G.F., "Hydrodynamic Forces and Flow Control around Bluff Bodies", *Advances in Engineering Software*, 2014.
23. Jeong J., "Flow Separation and Reattachment in Turbulent Flows", *Journal of Fluid Mechanics*, 2004.
24. Schlichting H., "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill, 2000.
25. Ewing K., "Computational Fluid Dynamics and its Applications", Springer, 2008.
26. Madsen J., "Flow and Vortex Dynamics around Cylinders", *Journal of Fluid Mechanics*, 2013.
27. Oki D., "Numerical Modeling of Turbulence using RANS and LES", *Fluid Dynamics Research*, 2018.
28. Liu H., "Experimental Studies of Flow Around Bluff Bodies", *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2011.
29. Menter F., "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models", *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1994.