

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix – Travail – Patrie

\*\*\*\*\*

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

\*\*\*\*\*

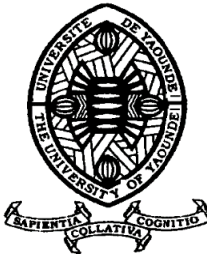
CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION  
DOCTORALE EN SCIENCES TECHNOLOGIES  
ET GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION  
DOCTORALE EN PHYSIQUE ET APPLICATIONS

B.P 812 Yaoundé

Email : crfd\_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace – Work – Fatherland

\*\*\*\*\*

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

\*\*\*\*\*

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,  
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING  
UNIT FOR PHYSICS AND APPLICATIONS

P.O Box812 Yaounde

Email : crfd\_stg@uy1.uninet.cm

**ECOULEMENT LAMINAIRE SOUS PRESSION D'UN  
FLUIDE INCOMPRESSIBLE LE LONG D'UN CANAL  
SEMI-POREUX A PAROIS HORIZONTALES ET  
PARALLELES**

**THESE**

Présentée en vue de l'obtention du diplôme  
de Doctorat/Ph.D en Physique

Spécialité : Mécanique Appliquée

Option : Mécanique des Fluides et Hydraulique

LABORATOIRE DE MECANIQUE APPLIQUEE ET D'HYDRAULIQUE



Par :

**GAZAMBETI Yvon**

Matricule : 12W1793

Titulaire du Master en Physique

Option : Mécanique des Fluides et Hydraulique

Directeur : Pr. PEMHA ELKANA, HDR  
*Professeur en Génie Mécanique*  
Université de Yaoundé I

*Année 2024*

# TABLE DES MATIERES

---

## TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES	
TABLE DES MATIERES	
DEDICACE	
LISTE DES FIGURES	
LISTE DES SYMBOLES	
REMERCIEMENTS	
RESUME	
ABSTRACT	
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I: REVUE DE LA LITTERATURE .....	18
I-1 HISTORIQUE DE LA MECANIQUE DES FLUIDES EN RELATION AVEC LE PROBLEME A TRAITER.....	19
I-1-1 Expérience de Reynolds.....	19
I-1-2 Expérience fondamentale de Couette .....	23
I-2 ETAT DE L'ART .....	28
CHAPITRE II: MATERIELS ET METHODES .....	55
II-1 ENONCÉ DU PROBLÈME .....	56
II-2 CONSERVATION DE LA MASSE .....	58
II-2-1 Taux de dilatation volumique.....	58
II-2-2 Enoncé du principe de conservation de la masse .....	60
II-2-3 Equation de continuité.....	60
II-2-4 Cas particulier de l'équation de continuité : Fluide incompressible ..	65
II-3 CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT .....	67
II-3-1 Forces de pression .....	67
II-3-2 Forces de contact .....	67
II-3-3 Tenseur des contraintes .....	68

II-3-4 Loi de comportement d'un fluide Newtonien .....	71
II-3-5 Equations de Navier-Stokes .....	74
II-4 EQUATION DE TRANSPORT DE LA VORTICITE .....	77
II-4-1 Définition de la vorticité.....	77
II-4-2 Forme équivalente de l'équation de Navier-Stokes pour le fluide incompressible .....	79
II-4 -3 Equation de vorticité.....	81
II-5 FORME ADIMENSIONNELLE DE L'EQUATION DE VORTICITE .	88
II-5-1 Forme classique .....	88
II-5-2 Forme adaptée au problème à résoudre.....	92
II-6 METHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES .....	92
II-6-1 Hypothèse de Berman [ 6 ].....	92
II-6-2 Application au problème à résoudre : équation de Proudman .....	93
II-6-3 Conditions aux limites .....	95
II-7 METHODES NUMERIQUES.....	98
II-7-1 Méthode de tir.....	98
II-7-2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre.....	99
II-7-3 Méthode de Newton-Raphson .....	99
CHAPITRE III: RESULTATS ET DISCUSSION.....	108
III.1 REMARQUES PRELIMINAIRES .....	109
III-2 VALIDATION DU CODE NUMERIQUE UTILISE [17].....	110
III-2-1 Solution analytique.....	110
III-2-2 Application de la méthode de tir .....	111
III.2.3 Comparaison des résultats.....	114
III-3 FONCTION DE COURANT PAR UNITE DE LONGUEUR DU CANAL .....	116
III-4 TRAJECTOIRE DES PARTICULES DE FLUIDE OU LIGNES DE COURANT.....	118

III-5 COMPOSANTES TRANSVERSALE ET LONGITUDINALE DU CHAMP DE VITESSE .....	120
III-6 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT SUR LES DEUX PAROIS DU CANAL .....	127
CONCLUSION ET PERSPECTIVES .....	130
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	134
PUBLICATION ISSUE DE LA THESE .....	145

---

Dédicace

---

---

DEDICACE

---

# DEDICACE

---

## DEDICACE

Je dédie cette thèse,

- ✚ A la grande famille feu René GAZAMBETI ;
- ✚ A l'Ambassade de France à Bangui ;
- ✚ A mon épouse LASSE Laurentine.

# LISTE DES FIGURES

---

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 1</b> :L'appareil d'Osborne Reynolds de 1883 lui ayant permis de démontrer l'apparition d'un écoulement turbulent.. .....	20
<b>Figure 2</b> : Représentation de l'expérience de Reynolds : à gauche l'écoulement laminaire, à droite l'écoulement turbulent .....	21
<b>Figure 3</b> : Les régimes d'écoulement.....	22
<b>Figure 4</b> : l'expérience de Couette entre deux cylindres coaxiaux.....	24
<b>Figure 5</b> : Ecoulement de Couette entre deux plaques parallèles. ....	25
<b>Figure 6</b> : Canal horizontal parallèle ayant une paroi supérieure poreuse et une paroi inférieure imperméable. ....	57
<b>Figure 7</b> : Domaine de fluide ( $D$ ) délimité par une surface( $S$ ).....	60
<b>Figure 8</b> : Conservation de la masse avec débit entrant et sortant.....	62
<b>Figure 9</b> : Notion de pression.....	67
<b>Figure 10</b> : Portion de fluide ( $D$ ) délimitée par une surface ( $S$ ) .....	68
<b>Figure 11</b> : Représentation de la surface orientée $dS$ .....	69
<b>Figure 12</b> : Schéma d'un tube de vortacité s'appuyant sur un contour $C$ . les parois sont tangentes au vecteur vortacité. ....	78
<b>Figure 13</b> : Courbes comparatives des solutions analytiques et numériques....	114
<b>Figure 14a</b> : Fonction de courant par unité de longueur du canal pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension, tracée pour la suction ( $a$ ) .....	116
<b>Figure 14b</b> : Fonction de courant par unité de longueur du canal pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension, tracée pour l'injection ( $b$ ) .....	117
<b>Figure 15</b> : Configuration des lignes de courant pour la suction et l'injection, tracée pour $\alpha = 1$ .....	119

**Figure 16a:** Profil de la composante transversale de la vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracé pour la succion (*a*) ..... 120

**Figure 16b:** Profil de la composante transversale de la vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracé pour l'injection (*b*) . ..... 121

**Figure 17a :** Profil de la composante longitudinale de la vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracé pour l'injection . ..... 123

**Figure 17b :** Profil de la composante longitudinale de la vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracé pour la succion ..... 124

**Figure 18a :** Contrainte de cisaillement pour les deux parois du canal en fonction du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracée pour la succion (*a*) ..... 127

**Figure 18b :** Contrainte de cisaillement pour les deux parois du canal en fonction du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracée pour l'injection (*b*) ..... 128

# LISTE DES SYMBOLES

---

## LISTE DES SYMBOLES

$R_e$  : Nombre de Reynolds

$\rho$  : Masse volumique du fluide

$\mathbf{v}(M, t)$  : Vitesse du fluide en un point M à un instant t

$V_{ref}$  : Vitesse de référence

$\psi$  : Fonction de courant

$\sigma$  : Gradient de pression externe

$p$  : Pression dans le fluide

$p_0$  : Pression à l'entrée du canal

$p_L$  : Pression à la sortie du canal

$\delta$  : Epaisseur de la couche limite

$W$  : Vitesse maximale de l'écoulement plan de Couette

$\nu$  : Viscosité cinématique

$h$  : Moitié de la hauteur

$\xi$  : Longueur adimensionnelle

$\phi$  : Fonction de flux par unité de longueur du canal

$U$  : Vitesse constante et uniforme

$V_x$  : Composante longitudinale du champ de vitesse

$V_y$  : Composante transversale du champ de vitesse

$q_e$  : Débit de masse par unité de masse fluide des flux entrant

$q_s$  : Débit de masse par unité de masse fluide des flux sortant

---

Remerciements

---

---

REMERCIEMENTS

---

# REMERCIEMENTS

---

## REMERCIEMENTS

Le présent travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique de l'Université de Yaoundé I, Faculté des Sciences.

Je rends infiniment grâce à Dieu tout puissant pour la santé et la sagesse qu'il m'a accordée afin de pouvoir réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer, ma profonde reconnaissance et mon grand estime à mon directeur de thèse le **Professeur PEMHA Elkana** pour la confiance qu'il m'a accordé, en m'offrant l'opportunité d'effectuer un Doctorat au sein de son Laboratoire, ainsi que pour les précieux conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués. Je le remercie pour sa contribution hautement distinguée dans la réalisation de ce travail. Son sens d'appréciation scientifique, sa rigueur pour le travail bienfait, ses suggestions pertinentes, son humour et surtout sa disponibilité à me recevoir sans hésitation dans son bureau à maintes reprises pour m'éclairer sur mes idées farfelues. Merci également pour tout le temps qu'il a consacré à la lecture régulière de ce travail. Le grand intérêt qu'il a porté à mon travail en me fournissant tous les outils nécessaires. Avec abnégation, et continuité, il a suivi pas à pas la structuration de ce mémoire. Ses critiques, suggestions et encouragements m'ont été d'un grand apport. Qu'il en soit ici très vivement remercié.

Je tiens à adresser également mes sincères remerciements aux **membres du jury** (Pré-soutenance, Auditions et Soutenance) qui ont pris de leur temps précieux pour lire ce travail et accepter de faire partie des examinateurs. Qu'ils en soient particulièrement remerciés.

### A l'Université de Yaoundé I

Aux coordonnateurs, **Professeur OWONO OWONO Luc Calvin** et **Professeur PEGNYEMB Dieudonné** respectivement de l'Unité de Formation

---

## Remerciements

---

et de Recherche de Physique et Applications et du Centre de Recherche et de Formation Doctorale, pour leurs services au profit de la recherche et pour avoir mis sur pied des nouvelles réformes administratives permettant de diligenter les dossiers.

Au chef du département de physique, **Professeur NDJAKA Jean-Marie Bienvenu** pour avoir réuni toutes les conditions administratives pour que mon dossier de thèse puisse être diligenté et connaître un avis favorable.

Au **Professeur NGO NYOBE Elisabeth**, pour sa disponibilité chaque fois que j'ai sollicité une aide, sa présence, ses encouragements, son soutien et ses précieux conseils qui m'ont beaucoup aidé durant ces quatre années de thèse. Qu'il veuille trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Au **Docteur LAMARA Maurice**, je ne le remercierais jamais assez, pour les précieux conseils, sa disponibilité et les encouragements qu'il m'a prodigués. Je lui réitère mes sincères remerciements pour le temps qu'il a consacré à la relecture régulière attentive et critique du manuscrit. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma vive gratitude.

Mes remerciements vont à l'endroit de tous les Enseignants de la faculté des sciences de l'université de Yaoundé I en général et en particulier à tous les Enseignants du Département de Physique pour toute contribution durant mes années passées au sein de leur contrôle, qu'ils soient vivement remerciés.

### **A l'Université de Bangui**

Je tiens à remercier également le Recteur de l'Université de Bangui **Professeur GRESENGUET Gilbert**;

le Vice Recteur **Professeur SYLLA SEMBALI**; Madame le Doyen de la Faculté des Sciences **Professeur Lucie ABA-TOUMNOU**;

---

## Remerciements

---

le Vice Doyen **Docteur MBESSE Yvon** et le chef du Département de Physique **Docteur PAKOUZOU Magloire**, de la Faculté des Sciences de cette Université pour incitation à cette recherche ainsi que tous les Enseignants du Département de Physique, plus particulièrement **les Professeurs : BASSIA Jean Marie, MBAIKOUA Timoléon, SIOKE RAINALDY, ROUAULT Joackim, M'BOLIGUIPA Jean, MARBOUA, SONGUELE Julien, KONZI Yvon, GBEBRI et KOUAGOU** qui ont été à la base de ma formation depuis la première année de Licence de Maths-physique à la faculté des sciences de l'Université de Bangui.

Mes remerciements vont à mes camarades de promotion :

**Docteur MAKON Noé Richard, Docteur MBOGBA Guy, MM.MBAM Benjamin Serge, BAYIHA Paul Arnaud, NTJAM Thérèse Berceline, TISSIBE Jacques Bernard et KALIBE Bernard,**

Je pense aujourd'hui avec beaucoup de tendresse à mes parents, à la confiance qu'ils m'accordent et qui, malgré la tristesse de voir leur fils partir à l'étranger, m'ont toujours soutenue et encouragé. Je veux les remercier de tout mon cœur, ainsi que mon feu père **GAZAMBETI René**, ma mère **NDAZAN Rébecca**, ma **feue sœur GAZAMBETI Francisca** et mes frères **GAZAMBETI Guy Célestin, GAZAMBETI Serge Aimé, GAZAMBETI Christian, GAZAMBETI Saint Marvin, GAZAMBETI Jocelyn, GAZAMBETI Patrick Buvince et DEMAZOU Cyriaque**. Sans votre soutien et votre amour sans faille, tout ceci n'aura jamais pu aboutir et je vous serai éternellement reconnaissant d'avoir su me donner les moyens d'arriver jusqu'ici. Aucun mot ne saurait décrire ma pensée !

Merci à mon grand amour **LASSE Laurentine**, pour sa patience et son soutien avant et durant ma thèse, et plus généralement pour tout l'amour que je

reçois au quotidien. Sans elle, je n'aurais pas surmonté les périodes de stress. Puisse cette thèse être le début de la réalisation de nos rêves...

A mes enfants, **GAZAMBETI Messie Lorenzo**, **GAZAMBETI Naomie Yvana**, **GAZAMBETI KOWAN Abigaël Céleste**, **GAZAMBETI Elisabeth Israëlla** et **GAZAMBETI Corneille Israël**, je ne saurais traduire sur du papier l'affection que j'ai pour vous, je n'oublierai jamais ces merveilleux moments passés ensemble. Aucune dédicace ne peut exprimer la profondeur des sentiments paternels et d'amour, d'attachement que j'éprouve à votre égard. J'implore le Dieu tout puissant de vous réserver un avenir meilleur.

Je n'oublie pas de remercier ma deuxième famille : ma belle mère **Thérèse DJAKOUE**, mon feu beau-père **LASSE Antoine** et mes beaux frères et belles-sœurs ainsi que leurs familles.

Merci aussi aux **doctorant-e-s** compatriotes de l'Université de Yaoundé I avec qui j'ai pu discuter des joies et des malheurs de la vie de Thésard et qui m'ont accueillie, notamment **Docteur OMON Yves**, **Docteur SENGHA Ghislain Gérard**, **Docteur ZAORO Rodax**, **SAMY Maximin**, **NDOUVADE Vivien**, **MABAGUEL Bruno**, **MOMET Olive**, **OGOULO BAZOUMA Cyrille**, **MASSIRI GONZAS Cédric** et **SIMATHO Brice**.

Je profite également de cette page pour remercier une personne à qui je dois beaucoup : Madame la directrice des stages de la formation et des analyses sociales **Lydie Judith KOZOUNGO**, Direction Générale des bourses.

Mes remerciements vont aussi vers toute l'Eglise Baptiste de Fondo centre membre de l'Union Fraternelle des Eglises Baptiste (UFEB) de Centrafrique en général et en particulier vers les Pasteurs **OUAGO Saint Ernest**, **KELEWANE Victor**, **ZOUMORO** et le Comité du culte en Français (COCEF).

---

## Remerciements

---

J'adresse mes sincères remerciements à toute ma famille et à tous mes amis, il me serait difficile de vous citer tous, vous êtes dans mon cœur, affectueusement. Que ce travail soit le symbole de ce que je ressens envers vous.

Que tous ceux qui ont contribué pour la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude et mes sincères remerciements.

Que Dieu vous bénisse et vous accorde longue vie pleine de joie et de réussite.

---

Résumé

---

---

RESUME

---

# RESUME

---

## RESUME

Ce présent travail est consacré à l'écoulement laminaire régulier sous pression d'un fluide Newtonien incompressible le long d'un canal horizontal à parois parallèles avec une paroi supérieure poreuse et une paroi inférieure imperméable. Le fluide est aspiré ou soufflé à travers la paroi poreuse, à une vitesse constante et uniforme, orthogonalement aux parois. En même temps, un gradient de pression externe constant dans le temps est appliqué entre les deux extrémités du canal. Le but de ce travail est de déterminer et d'analyser les effets du gradient de pression externe sur l'écoulement, la vitesse d'injection ou de succion étant maintenue constante. La configuration bidimensionnelle de l'écoulement d'un fluide avec un champ de vitesse à divergence nulle permet l'existence d'une fonction de courant donnée par une seule équation différentielle ordinaire non linéaire qui remplace les équations de Navier-Stokes connue sous le nom de l'équation de Vorticité. Cette dernière équation est démontrée en appliquant une approche inhabituelle qui utilise le rotationnel de l'équation dans sa forme générale. A partir de l'hypothèse de solutions semblables, il est montré que l'équation de Vorticité conduit à un problème de valeur limite à deux points dont les solutions sont calculées à l'aide d'une méthode numérique de tir comprenant l'algorithme d'optimisation de Newton-Raphson. Les compréhensions physiques de l'écoulement considéré sont dérivées des résultats obtenus : la fonction de courant par unité de longueur du canal, les lignes de courant, les composantes transversales et longitudinales du champ de vitesse de l'écoulement et la contrainte de cisaillement sur les deux parois.

**Mots clés :** Ecoulement laminaire, paroi poreuse semi parallèle ; Equation de vorticité ; Méthode de solutions semblables ; Méthode numérique de tir ; Algorithme d'optimisation de Newton-Raphson ; Contraintes de cisaillement aux parois.

---

Abstract

---

---

ABSTRACT

---

# ABSTRACT

---

## ABSTRACT

This paper is devoted to the pressure-exerted steady laminar flow of an incompressible Newtonian fluid along a parallel-walled horizontal channel with a porous upper wall and an impermeable lower wall. The fluid is sucked or blown through the porous wall, at constant and uniform velocity, orthogonally to the wall. At the same time, an external pressure gradient constant in time is applied between the two ends of the channel. The aim of this work is to determine and analyze the effects of the external pressure gradient on the flow, the suction/blowing velocity being kept constant. The two-dimensional configuration of the flow with zero-divergence velocity field allows the existence of the stream function given by a single nonlinear partial differential equation which replaces the Navier-Stokes equations and is called the vorticity equation. This latter equation is demonstrated by applying an unusual approach which uses the vector momentum equation in its general form. From the similarity-solutions assumption, it is shown that the vorticity equation leads to a two-point boundary value problem whose solutions are computed by means of a numerical shooting technique including the Newton-Raphson optimization algorithm. Physical understandings of the flow under consideration are derived from the results obtained: stream function per unit length of the channel, streamlines, transverse and longitudinal components of the velocity field, wall shear stress at the two walls of the channel.

**Keywords:** Laminar flows along semi porous parallel-walled channels; Vorticity equation; Similarity-solution method; Numerical shooting technique; Newton-Raphson optimization algorithm; Wall shear stress

INTRODUCTION GENERALE

# INTRODUCTION GENERALE

Le fluide peut être considéré comme étant un milieu matériel sans rigidité et essentiellement déformable. Sur le plan microscopique, les fluides tout comme les solides sont constitués des molécules ordonnées dans une structure lacunaire, c'est-à-dire discontinue. Contrairement aux solides qui sont formés des molécules pouvant osciller et se maintenir en moyen à des distances peu variables les unes des autres.

Sur le plan macroscopique, les fluides sont constitués des particules matérielles. Une particule étant un ensemble de  $N$  molécules voisines, cet ensemble est suffisamment petit pour être supposé ponctuel et est suffisamment grand pour avoir un volume élémentaire  $dv$ . Physiquement, cet ensemble est caractérisé par le fait que les grandeurs physiques comme la température, la pression, la masse volumique et d'autres paramètres restent constant à l'intérieur d'une particule.

Le transport de ses particules globalement d'un point à un autre constitue un écoulement.

Un fluide est visqueux lorsqu'il possède la caractéristique de s'opposer à toute action qui tend à déformer un quelconque élément de volume d'un domaine (D) considéré de celui-ci. Dans ces conditions, les effets inertiels sont négligés. Il est caractérisé par une viscosité dynamique et une viscosité cinématique. Ces viscosités sont liées à la masse volumique.

On reconnaît aux fluides trois propriétés essentielles : ils sont continus, très déformables et visqueux.

Un milieu matériel est dit continu lorsque toutes ses propriétés (champ de vitesse, contraintes et loi de comportement) sont des fonctions continues de l'espace et du temps. La définition des milieux continus implique de considérer les éléments de volume  $dv$  très grand à l'échelle moléculaire et très petit à

l'échelle macroscopique. En mécanique des fluides, un élément de volume  $dv$  répondant à ces spécificités est appelé particule fluide. La température, la masse volumique sont uniformes sur  $dv$  à chaque instant.

Les interactions entre molécules dans un fluide au repos sont caractérisées par les forces de pression, normales aux surfaces tandis que dans le fluide en mouvement ces interactions sont représentées par des forces tangentielles appelées forces de viscosité ou force de cisaillement et elles se traduisent par une résistance aux mouvements.

Le mouvement d'un fluide est étudié dans l'espace physique qui est espace affine, euclidien de dimension 3 à un repère orthonormé qu'on suppose fixe et galiléen. Pour décrire le mouvement du fluide, on distingue deux points de vue :

Le point de vue d'Euler qui consiste à associer à chaque point de l'écoulement un observateur capable de permettre la détermination du champ de vitesse en ce point. Le point de vue de Lagrange qui consiste à considérer individuellement une particule fluide, à suivre dans son mouvement et à déterminer sa position. Ainsi, l'évolution de la position de la particule qui permet la description de l'écoulement.

Le mouvement du fluide est dit permanent ou stationnaire si le champ de vitesse ne dépend pas explicitement du temps; il est dit non permanent ou instationnaire lorsqu'il n'est pas permanent, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas dépendance explicite du champ de vitesses par rapport au temps.

La Mécanique des fluides est la partie de la physique qui étudie les écoulements des fluides tant au repos qu'en mouvement. L'écoulement des fluides visqueux et incompressible à l'intérieur des canaux, de différentes sections, est d'une importance, du fait qu'il est fréquemment rencontré dans

diverses applications. Mieux encore, ces écoulements s'avèrent indispensables dans les applications industrielles, biomédicales, notamment les transports d'huile et les produits pétroliers par pipeline.

L'ingénierie dans son ensemble et dans plusieurs domaines, a rencontré des problèmes liés au développement notamment, la distribution de l'eau dans le ménage en zone urbaine des villes et l'irrigation des cultures. Nous savons que sans eau aucune vie n'est possible. C'est donc des recherches archéologiques, physiciens, mécaniciens et mathématiciens, par une motivation poussée qui ont montré que la prospérité de la civilisation préhistorique a été très déterminante dans la découverte, la construction et la maintenance des systèmes de distributions de l'eau.

Alors la maîtrise de l'eau, comme l'air, a intéressé des hommes depuis la préhistoire, pour résoudre les problèmes d'irrigation et utiliser la force du vent pour propulser les bateaux. Cette branche de la physique concernée par les fluides (liquides, gaz et plasmas) est la mécanique des fluides, bien qu'elle constitue une extension de la mécanique rationnelle à une classe de milieux continus dont les déformations peuvent prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. Celle-ci fut largement employée pour des applications quotidiennes pour les problèmes de l'irrigation en agriculture, les canaux, les fontaines, etc.

L'époque des années 6500 avant Jésus a été marquée par l'invention de certains instruments de mesures. Au niveau des crues, des zones marécageuses sont drainées et asséchées, les barrages et les digues pour être à l'abri de la menace des crues. Nous pouvons citer les travaux effectués sur le Nil, le fleuve jaune et l'Euphrate ect.

L'étude de la mécanique des fluides ainsi que celle de l'eau et de son comportement remontent au moins à l'époque Grèce antique avec le célèbre

savant Archimède (avant Jésus Christ), qui a été le véritable initiateur de la Mécanique des fluides, qui en prenant son bain découvrit le principe qui porte son nom et qui formula ainsi le principe qui est à l'origine de la statique des fluides notamment son principe éponyme. Dans cette même dynamique, Héron d'Alexandrie a poursuivi le travail de la statique des fluides en découvrant lui aussi un autre principe dont le principe de la pression et surtout du débit.

Pendant l'antiquité tardive, certains travaux hydrauliques poursuivent et se confirment tels que les aqueducs, les systèmes de distribution d'assainissement de l'eau, des fontaines et des bains. Ces travaux deviennent perceptibles et continuent à être décrits au troisième siècle. Ces travaux continuent à être décrits au troisième siècle à Rome par Sextus Lulius Frontin, les techniques utilisées pour le transport de masse (l'eau, pétrole etc.), des affluents ont permis de réorganiser le système des aqueducs comme la plupart des sciences.

En Europe, la traduction des œuvres d'Archimède, d'Euclide et la publication par la maison d'édition Al-Jazari dans le livre des mécanismes ingénieux décrivant les machines automatisées et perfectionne l'horloge hydraulique ainsi que l'hydrostatique d'Archimède.

Cependant l'utilisation des rouages des fluides s'est progressivement avancé et développé au moyen âge avec satisfaction ; ensuite on note un développement harmonieux des pompes à piston ont été développés pour l'assèchement des mines. Les moulins à eau et moulins à vent ont aussi eu une amélioration pour résoudre le grain. C'est donc cet ensemble de progrès successifs qui ont permis à l'humanité de réaliser les travaux sans utilisation de la puissance ou animal (vache, âne). Ces progrès scientifiques ont alors été considérés comme étant la base de la révolution industrielle.

En réalité, c'est au moyen âge que le système d'irrigation disparaît progressivement et cette situation a provoqué l'effondrement de la population locale. La société romaine a utilisé ses applications pour la construction des canaux pour la distribution des eaux ; c'est au quinzième siècle que la Mécanique des fluides devient un des sujets préoccupants en Europe.

En 1452 dans un village de Toscane est né un jeune homme doté d'une intelligence extraordinaire, le nommé Léonard de Vinci, qui analysa la mécanique de pompe cardiaque avec description détaillée, la structure et le fonctionnement des valves du cœur. C'est encore lui, le premier concepteur d'un parachute, l'anémomètre (appareil qui mesure la vitesse du vent), et la pompe centrifuge ; il est encore à l'origine de la description des multiples types d'écoulements et de la fameuse formule du principe de la conservation de masse ou principe de continuité. Il continua par la suite avec les fondements de la discipline et il introduira de nombreuses notions d'hydrodynamique telle que la notion de ligne de courant qui engendra la problématique de la résistance à l'écoulement.

Plusieurs chercheurs ont continué à travailler pour développer le système fluidique et les machines, avec une amélioration scientifique et méthodes d'utilisation. En Europe on peut citer : Simon Steven, Galileo Galilée, Edme Mariotte et Evangelista Torricelli .Tour à tour, ils ont appliqué la mécanique des fluides en accentuant les recherches sur la distribution de la pression hydraulique. Ce travail a été intégré par le mathématicien Blaise Pascal; il donna le premier exposé homogène et ordonné de ces principes fondamentaux de l'hydrostatique.

Le moine Benedetto Castelli fut le premier à faire une publication parlant l'état de continuité des fluides. En parallèle à la formulation des

équations de mouvement du solide, Isaac Newton a appliqué ses lois aux fluides et exploré l'inertie et la résistance des fluides et la viscosité, des jets libres dans son ouvrage intitulé « Livre II des principes mathématiques » qui traite les mouvements des corps en milieux résistants. Par ailleurs, Clifford Truesdell à son avis les travaux de Newton ont donné naissance à deux autres disciplines, ne laisse aucun acquis scientifique substantiel. Cependant, Il faut attendre les travaux d'Alexis Claude Clairant et Jean de Rond D'Alembert pour que commence à s'établir les lois des fluides. Il faut souligner que ces travaux bien qu'ils soient de légers progrès sont venus donner une nouvelle impulsion dans le développement bien que tout était focalisé sur le domaine technique ; mais cela a permis l'ouverture à plusieurs portes scientifiques pour l'évolution des temps modernes.

L'application des outils mathématiques à la physique a permis à la mécanique des fluides de résoudre de nombreux problèmes ; mieux encore cela a permis de définir les équations d'énergie et de quantité de mouvement qui servent beaucoup dans la résolution des problèmes de la Mécanique des fluides. Plusieurs travaux ont été repris durant les siècles suivants avec, en particulier les innovations de Pitot (rendement des machines hydrauliques, tube de Pitot) et Venturis (travaux hydrauliques, construction d'une tuyère à cônes divergents).

C'est grâce au Suisse Daniel Bernoulli qui vient concrétiser la recherche d'où le traité de Bernoulli ; c'est lui qui établit les lois appliquées aux fluides non visqueux en appliquant le principe de la conservation de l'énergie mécanique. Cependant dans une autre vision, Jean d'Alembert utilisa le calcul différentiel et développa une idée sur la composante de la vitesse et d'accélération, l'expression différentielle de la continuité, c'est-à-dire le paradoxe de non résistance à l'avancement uniforme. Ainsi il exposa, les bases de l'hydrodynamique en présentant le principe de la pression interne d'un fluide, du

champ de vitesse et des dérivées parallèles appliquées aux fluides. Leonhard Euler vena lui aussi à son tour compléter plus tard l'analyse d'Alembert sur la pression interne et les équations dynamiques sur les fluides incompressibles.

En 1755 Euler publia ainsi le traité qui donne les équations aux dérivées partielles décrivant les fluides parfaits incompressibles. Cette progression accélérée et accompagnée à celle analysée par les mathématiciens ont été en demeurant les mêmes personnes qui font des mathématiques dans divers domaines et qui analysent les problèmes sur les fluides incompressibles. Ce sont :

Evangelista Torricelli expliqua les effets de la pression atmosphérique sur l'hydraulique en utilisant les lois de la similitude et invente le baromètre en 1643. Henri Pitot introduit un instrument pour mesurer la vitesse du tube de Pitot et Bernoulli quant à lui utilise une approche mathématique des écoulements, ce qui le conduit au théorème de Bernoulli. A la même époque Jean d'Alembert introduit la notion de milieu continu et formalise divers problèmes dans son traité de la dynamique en 1743, dans cette lancée, Leonhard Euler et Louis Lagrange introduisent respectivement le calcul infinitésimal.

Le milieu du vingtième siècle pourrait être considéré comme l'âge d'or des applications de la mécanique des fluides. Les théories existantes étaient adéquates pour les tâches manuelles et les propriétés et paramètres des fluides étaient bien définis. Tout ceci permit large développement dans les domaines de l'aéronautique, de la chimie, industrielle et du traitement des eaux ; chacun poussait la mécanique des fluides dans de nouvelles directions. A la fin du XX<sup>e</sup> siècle, la recherche et le travail étaient dominés par le développement des ordinateurs numériques. La capacité à résoudre des gros problèmes complexes tels que l'optimisation du design d'une pale de turbine a profité davantage à la société, que les développeurs de la mécanique des fluides du dix huitième siècle

n'auraient jamais pu imaginer. Ceci va permettre l'éclosion d'une nouvelle branche de la mécanique des fluides, la mécanique des fluides numérique. Elle est basée sur l'avènement de calculateurs toujours plus puissants mais aussi de méthodes mathématiques permettant le calcul numérique.

Alors, l'historique de la mécanique des fluides nous a permis de faire un récapitulatif de ces chercheurs cités ci-dessus sur une source bibliographique représentée à la figure ci-dessous

Années Auteurs	1500	1600	1700	1800	1900	2000
ARCHIMEDE	-287 ; -212					
LEONARD DE VINCI	1452-1519					
NEWTON		1643-1727				
PITOT		1695-1771				
BERNOUILLI			1700-1782			
EULER			1707-1783			
LAGRANGE			1736-1813			
LAPLACE			1749-1827			
DARCY				1803-1858		
HELMHOLTZ				1821-1894		
THOMSON (KELVIN)				1824-1907		
RAYLEIGH				1842-1919		
REYNOLDS				1842-1912		
NAVIER			1785-1836			
STOKES				1819-1903		
BOLTZMANN				1844-1906		
PECLET			1793-1857			
COUETTE				1858-1943		
POISEUILLE			1799-1869			
KOLMOGOROV					1903-1987	
TAYLOR				1886-1975		
BATCHELOR				1953		
PRANDTL				1875-1979		
KARMAN				1881-1963		
BERNARD				1874-1939		

**Tableau 1** : Récapitulatif des savants en Mécanique des fluides avant l'année 2000

La Mécanique des fluides a fait l'objet de plusieurs applications dans la société antique et moderne. De nombreux métiers ont été développés grâce à l'amélioration des mécaniques des fluides. La société a retrouvé son équilibre grâce aux problèmes résolus par la mécanique des fluides ; elle s'applique alors sur plusieurs domaines à savoir : la Mécanique des fluides est considérée comme un sous ensemble de la mécanique des milieux continus, elle est basée et concerne l'étude des gaz et liquide en équilibre (repos) et en mouvement avec interaction de ces corps (gaz, liquide) avec les corps solides. Son importance et son efficacité s'explique par le fondement des théories qu'elle offre a de nombreuse discipline tels que l'aérodynamique, hydraulique, la météorologie et le plasma.

De nombreux chercheurs physiciens et mécaniciens ont préparé le chemin pour que l'application soit une réalité effective et efficace dans la société. Les grands travaux publics (pont, chaussée, eau et foret) et les grandes entreprises de leur dimension de réalisation hydraulique, n'ont pas pu. C'est le même cas dans les constructions de l'ensemble des ouvrages et installations hydrauliques et aqueducs, les centrales hydrauliques, thermiques et nucléaires pour la mise en place de l'exploitation des grands périmètres, d'irrigation, d'instabilité dues à la cavitation dans les turbo machines hydrauliques.

Le moyen âge marque l'époque des grandes réalisations de la mécanique des fluides notamment dans le cas de l'hydraulique, l'évolution au niveau de la construction des barrages, des aqueducs, des turbines hydrauliques de haute chute, les pompes alimentaires de chaudières. Depuis le temps des grecs, le rêve d'imiter les oiseaux fut la base des essais de vol qui perdura pendant les siècles. Il faudra attendre la fin du moyen-âge pour que les premières expériences concluantes voient le jour, en 1420 un modèle d'oiseau propulsé par fusée, qui fit un vol de 30 mètres. Ceci témoigne le renforcement de l'aérodynamique, elle

contribua à la construction des souffleries, le développement de l'automobile, mais également de la navigation ou du chemin de fer, aussi dans le cas de la balistique (trajectoire balistique des obus) et du domaine subsonique, supersonique et hypersonique.

Aux temps modernes, le domaine des machines hydrauliques s'améliore de manière intensive. Les constructeurs ont également acquis une position privilégiée dans le cadre du développement des grandes pompes à volute en béton armé (notamment à l'occasion de la mise en œuvre des paliers nucléaires de 1000Mw et 1500Mw) et des turbines hydrauliques de grande puissance [1-2]. Dans le domaine des ensembles, les techniques d'optimisation présentées sont la plupart originales et fondées sur les outils d'analyse les plus récents. On aurait pu également citer des applications particulières intéressantes dans les secteurs tels que : propulsion navale, l'industrie nucléaire, chimique ou pétrolière. Le domaine de prédilection des méthodes de visualisation est resté longtemps celui des grandes souffleries utilisées pour les recherches en aéronautique. La démythification du laser et l'expansion rapide des méthodes informatiques de traitement d'images ont démocratisé ce type d'analyse, même si l'usage d'un laser de puissance moyenne demeure encore une opération relativement onéreuse et exigeante quelques connaissances en optique.

A partir du moment présent, tout domaine industriel qui met en œuvre un écoulement liquide ou gazeux suffisamment transparent est théoriquement concerné, à condition toutefois que le phénomène étudié se déroule en atmosphère libre ou soit confiné dans une structure également transparente. Les exemples d'application abondent :

Circulation d'air dans les systèmes de climatisation et de chauffage ;  
Refroidissement aérodynamique ou liquide des machines électriques et  
thermiques ;

Ecoulements internes dans les moteurs thermiques, de la chambre de  
combustion à l'échappement ;

Ecoulements externes autour des véhicules terrestres (routiers et  
ferroviaires) ou aériens ;

Ecoulements atmosphériques ou génie civil et environnement  
(comportement d'ouvrage au vent, dispersion de polluants).

La variété extrême des domaines d'application se prête mal à un  
classement ; toutefois, un moyen simple de mettre un peu d'ordre dans ces listes  
d'exemple, concernant des disciplines aussi diversifiées, consiste à utiliser la  
nature du fluide et /ou le domaine de vitesse.

La mécanique des fluides occupe une place centrale et essentielle dans la  
formation des mécaniciens et les ingénieurs. Elle est une discipline dont le statut  
a notamment évolué au cours des dernières décennies. Partie du statut simple de  
discipline de base pour l'hydraulique et l'aéronautique, la mécanique des fluides  
s'est avéré champ d'expériences fondamentales pour l'hydrodynamique  
physique, la physique non linéaire, les mathématiques appliquées, et  
naturellement la turbulence[3]. Elle est également une des disciplines qui sous-  
tendent bon nombre d'évolutions technologiques dans la plupart des grands  
secteurs économiques : transport, énergie renouvelable, génie chimique,  
environnement, sécurité, aménagement du territoire, élaboration des matériaux,  
biomédical. Par ailleurs, elle joue tout aussi un rôle central dans le domaine des  
sciences de l'univers tels que : météorologie, climatologie, océanographie,  
planétologie, magnétisme naturel, cosmologie.

Une dernière particularité de la mécanique des fluides tient aux outils d'investigation que cette discipline a su développer, notamment les domaines de la métrologie et de la simulation numérique. Par exemple, il n'est pas rare d'autres domaines tels que la physique non linéaire, les plasmas, l'astrophysique, la chimie, etc. empruntent à la mécanique des fluides numériques les compétences algorithmiques qu'elle a développées.

Constatant ce large spectre d'intervention, on ne s'étonnera pas que la mécanique des fluides soit aujourd'hui répartie sur plusieurs sections. Une section gère cependant une partie importante, en particulier les développements technologiques, et un certain nombre de sujets propres au cœur de la discipline y sont fortement présents. C'est le cas notamment de la turbulence, un problème clé d'importance fondamentale ; cette dernière y est étudiée dans les conditions significatives vis-à-vis des champs d'application. La turbulence développée qui fait également l'objet d'une attention soutenue, singulièrement dans des situations d'anisotropie (rotation, stratification, magnétisation,...). Cette meilleure connaissance des écoulements turbulents permet également de tester les différentes modélisations numériques de la turbulence par les diverses méthodes de dissipation, statique et/ou de sous-main. Il est évident que toute avancée dans la modélisation numérique de la turbulence en configuration réelle constitue un enjeu stratégique pour les applications industrielles actuelles et futures. Ceci nécessite des moyens de diagnostic et de simulation en adéquation avec des champs d'application, permettant d'accéder à une connaissance très fine de la structure des écoulements et des mécanismes mis en jeu. Ces aspects méthodologiques sont fortement présents dans d'autres domaines comme :

L'aéro-acoustique ou acoustique non linéaire qui étudie la génération des ondes acoustique, dans les microsystèmes en particulier.

De nos jours, la mécanique des fluides est utilisée pour modéliser les contraintes des fluides sur certains systèmes tels que : l'étude du ballonnement de gaz dans les containers des gazinières en fonction des vagues, ou encore l'effet de la houle sur la coque des bateaux, la réaction des berges et des digues soumises à une tempête, la circulation automobile (gestion des feux rouges/verts grâce à un modèle continu de mécanique des fluides), celle-ci étudie l'écoulement d'air autour de la voiture sous le gros aileron, l'air se décolle de l'engin et crée un « trou d'air » donc une dépression qui aspire la voiture vers l'arrière, cette même présence d'un aileron crée présente des turbulences chargées de combler ce vide et de diminuer la traînée pour optimiser la vitesse.

La mécanique des fluides est surtout combinée à d'autres secteurs, ce qui lui donne des champs d'application larges : avec la Chimie pour l'étude des procédés et de la combustion ; avec la Biologie pour la biomécanique des fluides ; avec mécanique et l'automatique ; dans le domaine énergétique, la mécanique des fluides met l'accent sur les écoulements dans les turbomachines et leur conception, constitue un secteur très important.

La mécanique des fluides est complexe donc elle possède également beaucoup d'applications par contre dans le nucléaire, il y'a un réel effort mis sur la Mécanique des fluides pour optimiser le refroidissement du combustible, de plus, au vue des engagements environnementaux à tenir pour limiter la case écologique , la mécanique des fluides offre un secteur producteur d'énergie tel que : centrale thermique, nucléaire et hydraulique.

La magnétohydrodynamique qui est l'un des domaines d'application de la mécanique des fluides intervient dans l'étude des gaz ionisés, ou plasmas (décharges électriques dans les gaz, confinement des plasmas par des champs

magnétiques destiné à la production contrôlée d'énergie par fusion thermonucléaire). Elle permet aussi de réaliser des prototypes de centrales convertissant directement de l'énergie thermique en énergie électrique (convertisseurs magnétohydrodynamiques). L'interaction entre un fluide et une structure prend dans un domaine une importance particulière de la biomécanique des fluides qui fait partie du domaine d'application. On peut mentionner également la mise aux systèmes biomimétiques inspirés du comportement des êtres vivants. On voit ici se développer de fructueuses interactions avec la physico-chimie. Mais aussi, cette biomécanique des fluides permet d'optimiser le mélange entre le sang et un anticoagulant [4].

Les domaines d'application sont larges, mais la problématique reste la même : comprendre l'écoulement des fluides et ces conséquences, la présence des nouvelles technologies joue un rôle important comme dans le cas de la simulation des écoulements. La mécanique des fluides étant au cœur de nombreux métiers en lien direct avec les défis sociétaux d'efficacité énergétique et de développement des énergies mais aussi ses réalisations avec d'autres disciplines de l'ingénieur telles que :

La thermodynamique qui joue un rôle clef dans un bon nombre de processus en mécanique des fluides, par exemple pour l'écoulement des fluides compressibles ou pour le processus de travail dans les machines à fluide.

Les principes de base du génie mécanique expliquant un bon nombre d'aspects en mécanique des fluides, par exemple le frottement, la conservation de l'énergie, l'impulsion ou le moment cinétique. La traversée des couches de matières, la capacité de stockage des sols et l'écoulement des canaux ouverts sont des thématiques du génie hydraulique.

Le présent travail est reparti comme suit : la première partie est consacrée à une étude bibliographique, la deuxième partie à l'énoncé du problème et à sa formulation mathématique. Dans la troisième partie, la méthode appliquée pour trouver une solution est expliquée en détail et les résultats obtenus sont présentés et discutés.

Des remarques finales sont données vers la fin où les principaux résultats sont résumés et quelques perspectives intéressantes sont présentées.

# CHAPITRE I: REVUE DE LA LITTERATURE

---

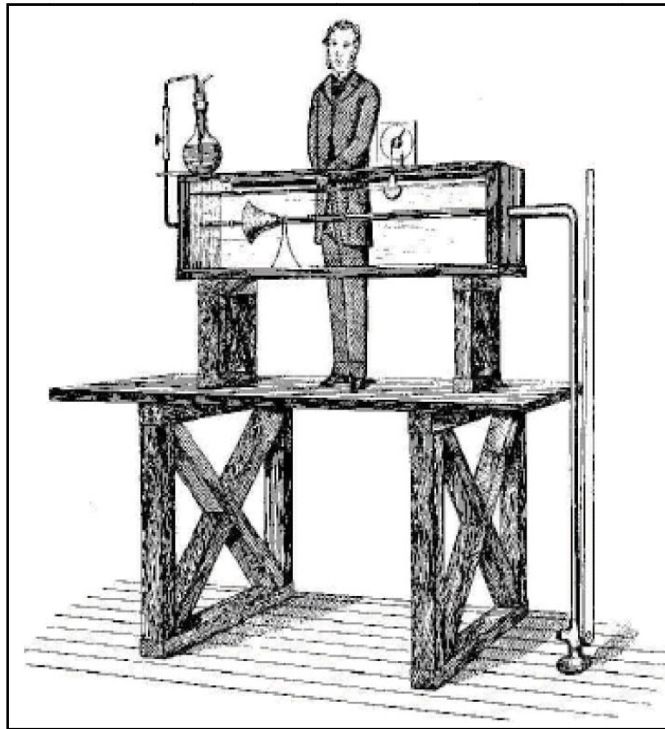
## **I-1 HISTORIQUE DE LA MECANIQUE DES FLUIDES EN RELATION AVEC LE PROBLEME A TRAITER**

### **I-1-1 Expérience de Reynolds**

Objets et résultats de l'étude : les résultats de cette étude ont un aspect à la fois pratique et philosophique. Sous leur aspect pratique, ils concernent la loi de la résistance au mouvement d'un liquide dans les conduites, qui apparaît sous une forme nouvelle, la loi pour toutes les vitesses et tous les diamètres étant représentés par une équation à deux termes. Dans leur aspect philosophique, ces résultats se rapportent aux principes fondamentaux du mouvement des fluides, dans le cas des conduites, de vérifier définitivement deux principes, à savoir que le caractère général du mouvement des fluides en contact avec des surfaces solides dépend du rapport entre une constante physique du fluide et le produit des dimensions linéaires de l'espace occupé par le fluide et de la vitesse.

Il est même à l'origine des plus célèbres expériences de l'histoire de la mécanique des fluides : en 1883, l'ingénieur irlandais Osborne Reynolds publie ses résultats issus de visualisations par colorant injecté dans un liquide s'écoulant dans un tube comme l'illustre la figure 1. Un paramètre de contrôle permettant de prédire si un écoulement sera 'laminaire' ou 'turbulent'.

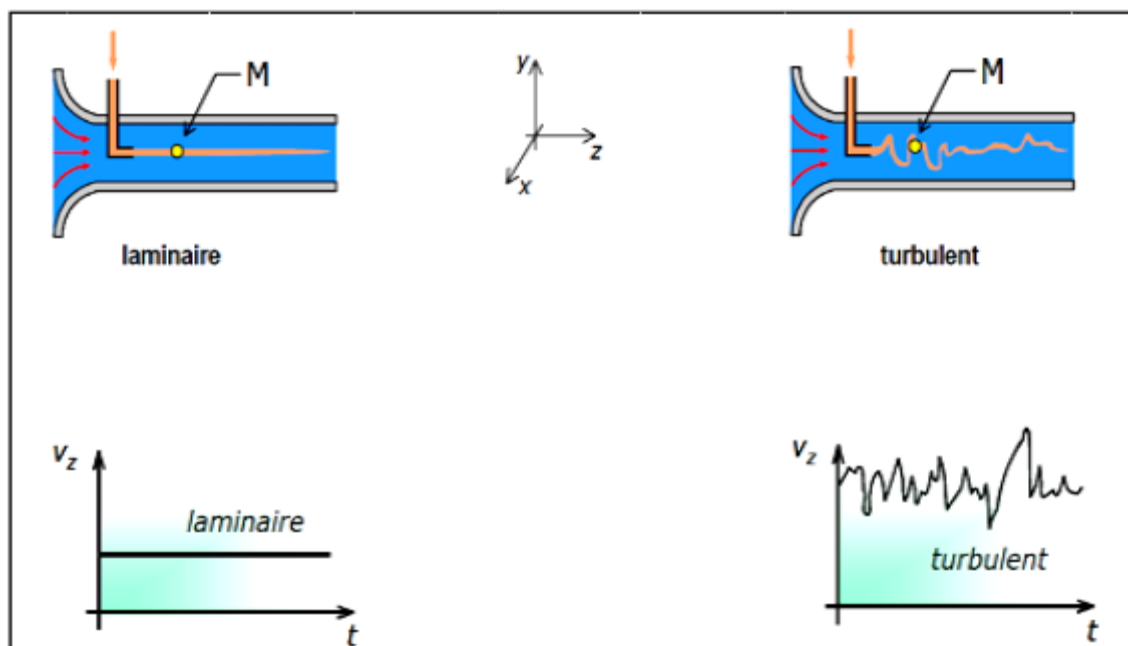
L'une des premières analyses de la transition du régime laminaire vers la turbulence est basée sur des observations d'écoulements dans une conduite cylindrique effectuées par O. Reynolds en 1883[3].



**Figure 1 :**L'appareil d'Osborne Reynolds de 1883 lui ayant permis de démontrer l'apparition d'un écoulement turbulent. D'après (Darrigol, 2005).

Le montage expérimental schématisé sur la figure 1 comporte un réservoir de liquide sous-pression débouchant sur une conduite cylindrique. Un tube mince permet l'injection de colorant.

Lorsque l'écoulement est laminaire, le filet décolorant reste mince, régulier et parallèle à la paroi du cylindre. En écoulement turbulent, le colorant est rapidement dispersé. Dans cette situation, une mesure de la composante de vitesse axiale montre que celle-ci fluctue de façon aléatoire dans l'espace et dans le temps.



**Figure 2 :** Représentation de l’expérience de Reynolds : à gauche l’écoulement laminaire, à droite l’écoulement turbulent d’après[3].

A partir de ces observations, les travaux de Reynolds ont alors permis de montrer que la transition du régime laminaire au régime turbulent (Figure2) n’est pas seulement conditionnée par le débit mais dépend d’un ensemble de paramètres qu’il convient de regrouper pour former une quantité sans dimension qu’on appellera « nombre de Reynolds ».

Ce nombre noté  $R_e$  prend en compte la vitesse moyenne de l’écoulement  $V$ , le diamètre  $D$  de la conduite(ou tout autre paramètre de longueur caractérisant l’écoulement), ainsi que les propriétés intrinsèques du fluide (masse volumique  $\rho$  et viscosité  $\mu$ ).

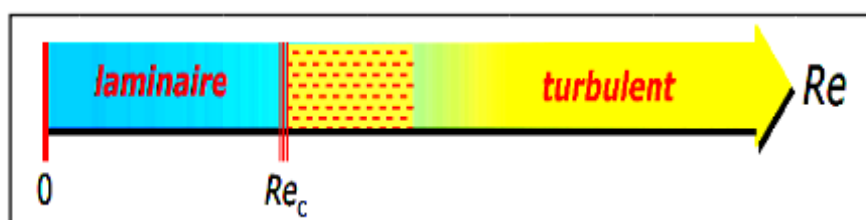
Remarquons que compte tenu des dimensions de chacun des paramètres, on vérifiera facilement que le nombre de Reynolds est bien sans dimension.

On constate généralement que la transition d'un régime laminaire à un régime turbulent (Figure 2) s'effectue lorsque le nombre de Reynolds est sensiblement égal à 2000 et égal au nombre de Reynolds critique  $Re_c$ . Le nombre de Reynolds critique est le nombre de Reynolds à partir duquel les mesures expérimentales commencent à s'écarter de la solution théorique laminaire.

Pour le nombre de Reynolds inférieur à 2000, l'écoulement reste laminaire et une perturbation localisée introduite dans l'écoulement est progressivement dissipée.

Pour le nombre de Reynolds compris entre 2000 et 3000, des « paquets » turbulents sont convectés dans le conduit de façon intermittente.

Pour le nombre de Reynolds supérieur à 3000, l'écoulement devient turbulent dans son ensemble ; c'est-à-dire que les forces de viscosité ne sont plus suffisantes pour empêcher les inévitables perturbations d'engendrer les tourbillons qui se superposent à l'écoulement global.



**Figure 3** : Les régimes d'écoulement.

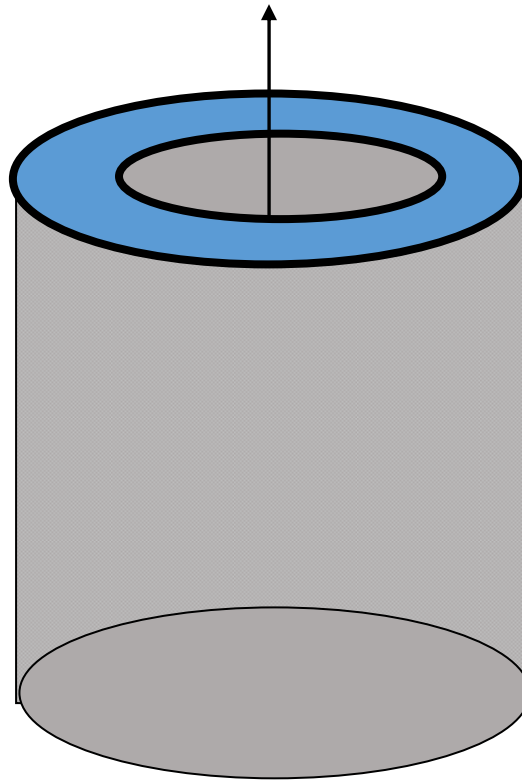
En prenant certaines précautions pour éviter au maximum les perturbations (vibrations, aspérités de la conduite ...) l'écoulement peut rester laminaire au-delà du nombre de Reynolds critique  $Re_c$ , jusqu'à une certaine limite (imprécise) qui dépendra essentiellement du niveau de précautions prises pour repousser l'apparition des turbulences.

Les valeurs limites du nombre de Reynolds de 2000 et 3000 définissant les différents régimes d'écoulement sont celles que l'on adopte généralement, mais ces valeurs ne sont pas strictes. On peut trouver dans la littérature des valeurs différentes suivant les sources et auteurs. Pour la limite entre écoulement laminaire et écoulement intermédiaire, les valeurs sont assez proches : autour de 2000-2100. En revanche, pour la limite entre écoulement intermédiaire et turbulent, des valeurs très différentes peuvent être indiquées : les valeurs de 3000, 4000 ou 10000 sont souvent retrouvées.

### I-1-2 Expérience fondamentale de Couette

On sait que dans un fluide immobile, les forces intérieures qui se manifestent sont des forces de pression, normales aux surfaces. Qu'en est-il dans un fluide en mouvement ? L'expérience de Couette nous apporte une réponse claire à cette question.

L'expérience de Couette utilise deux cylindres coaxiaux qui sont séparés par un mince espace annulaire rempli d'un liquide. Ils n'ont pas de liaison mécanique entre eux, et le cylindre intérieur est libre autour de son axe tel que le montre la figure 4. L'expérience consiste à mettre le cylindre extérieur en rotation, à une vitesse constante  $\omega$ . Alors, on observe que le cylindre intérieur, initialement fixe, se met à tourner dans le même sens.



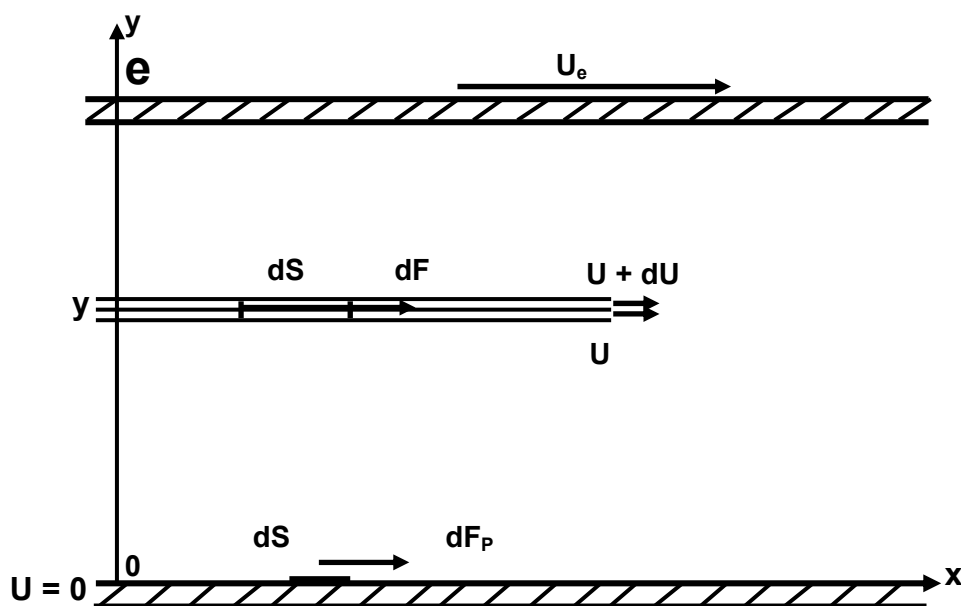
**Figure 4:** l'expérience de Couette entre deux cylindres coaxiaux.

L'interprétation du phénomène est immédiate : la mise en mouvement du cylindre intérieur ne peut se faire que par l'intermédiaire du fluide situé dans l'espace annulaire. Ceci prouve que des forces tangentielles s'exercent au sein du fluide et sur les parois. En effet, les forces de pression, perpendiculaires aux surfaces, ne pourraient pas faire tourner le cylindre. Ces forces tangentielles sont appelées forces de viscosité, ou encore forces de cisaillement en raison de leur analogie avec les forces tangentielles rencontrées en mécanique des solides, et elles se traduisent par une résistance au mouvement.

En fait, ce concept remonte à Newton, qui en a proposé la formulation mathématique, à partir d'observations faites en hydrodynamique. Mais l'expérience de Couette apporte la preuve formelle de l'existence des forces de viscosité.

Pour simplifier, nous raisonnerons maintenant comme si l'espace situé entre les deux cylindres était plan. L'une des parois se déplace donc parallèlement à l'autre avec une vitesse relative  $U_e$ .

Imaginons alors que le fluide est constitué (à l'image d'une pâte feuilletée) par une superposition de lames minces d'épaisseur  $dy$ , parallèles aux parois et animées de vitesses différentes ; considérons ensuite à l'ordonnée  $y$  deux lames en contact, dont les vitesses sont  $U$  et  $U + dU$  tel que le montre la figure 5. On peut admettre que cet écart de vitesse engendre un « frottement » entre les deux lames, et qu'un élément  $dS$  de la surface de contact est donc soumis à une force tangentielle  $dF$  (figure 5). Ce modèle n'est pas en contradiction avec la fin du paragraphe précédent, puisque les lames fluides sont supposées infiniment minces.



**Figure 5:** Ecoulement de Couette entre deux plaques parallèles.

Ceci étant admis, il est raisonnable de supposer au moins en première approximation que  $dF$  est proportionnelle à la différence de vitesse entre les couches fluides ou, pour être plus précis, au gradient transversal de vitesse.

Arrêtons-nous un moment sur ce qu'il se passe au voisinage immédiat de la paroi. Même si l'observation directe est difficile, toutes les expériences conduisent à admettre que, pour la majorité des fluides, les molécules les plus proches de la paroi sont « accrochées » à celle-ci. C'est la propriété d'adhérence à la paroi, autrement dit à l'interface fluide-paroi, la vitesse du fluide est égale à celle de la paroi, donc à zéro sur une paroi immobile. Ceci va un peu à l'encontre du sens commun, et la condition d'adhérence a fait l'objet de vifs désaccords entre physiciens au 19<sup>e</sup> siècle, avant de s'imposer finalement.

Une conséquence de cette propriété est qu'il n'y a pas de frottement stricto sensu entre le fluide et la paroi mais, comme il a été dit plus haut, une résistance qui se répartit au sein du fluide, tout comme le glissement qui a lieu dans le fluide lui-même. Ceci explique par exemple pourquoi vous ne pouvez pas souffler toute la poussière déposée sur une surface lisse, et pourquoi il faut l'essuyer avec un chiffon. Pour la même raison, les bombes aérosols anti poussière que l'on trouve dans le commerce sont une pure fumisterie !

Revenons à présent sur la viscosité d'un fluide, qui est la propriété inverse de la fluidité, est la caractéristique de résistance au glissement ou à la déformation d'un fluide. Ces forces de résistance proviennent du fait que les couches des fluides en mouvement ne peuvent pas glisser indépendamment et librement les unes sur les autres. Ce qui donne naissance à des forces des frottements qui s'opposent directement à l'écoulement. Cette viscosité, dite dynamique s'exprime comme le quotient d'une masse par une vitesse, elle dépend de la température. Dans un liquide, elle est inversement proportionnelle à la température. Au contraire, elle augmente avec la température dans le cas d'une phase gazeuse. A ce propos, on doit insister spécialement sur la différence de comportement d'un liquide et d'un gaz, puisque la viscosité du liquide diminue quand la température notée  $T$  augmente (pensons aux huiles

alimentaires ou de lubrification) alors que la viscosité du gaz augmente avec la température (donc le gaz naturel circule mieux dans un gazoduc sibérien que dans un gazoduc saharien !).

On mesure la viscosité dynamique d'un fluide, généralement fluide newtonien, à l'aide d'un viscosimètre. On distingue plusieurs genres de viscosimètres comme le viscosimètre à tube capillaire et viscosimètre à chute de bille. Par exemple, avec un viscosimètre à tube capillaire on mesure le temps d'écoulement d'un liquide visqueux à travers un tube mince. Sachant ce temps est proportionnel à la viscosité on peut la calculer. On note aussi qu'il y'a d'autres appareils qui mesurent la viscosité comme le rhéomètre. Cet instrument mesure directement les contraintes et les taux de déformation.

Dans l'expérience de Couette, la force totale  $F_p$  exercée sur la paroi peut être évaluée en mesurant le couple nécessaire pour immobiliser le cylindre intérieur, d'où l'on déduit la valeur de la viscosité  $\mu$ . C'est le principe du viscosimètre de Couette.

L'approximation du fluide parfait consiste à admettre  $\mu$  égale à 0 ; elle est parfois acceptable loin des parois. A noter qu'il ne faut pas confondre « fluide parfait » et « gaz parfait » : la viscosité du gaz parfait n'est pas nulle !

La viscosité ne se manifeste évidemment que s'il y a mouvement. En statique des fluides, il n'y a pas de différence entre fluide parfait et fluide visqueux. Les variations de la viscosité cinématique en fonction de la température montrent les mêmes différences de comportement que pour  $\mu$  entre les liquides usuels et les gaz.

Ajoutons que le cisaillement dans un fluide peut être raccroché à la notion de frottement, mais un frottement différent de celui qui s'exerce entre

deux surfaces solides. Il s'agit plutôt ici d'un frottement interne réparti dans toute l'épaisseur du fluide et associé (comme des expériences fines peuvent le montrer) à un gradient de vitesse entre les deux parois.

## **I-2 ETAT DE L'ART**

Les travaux pionniers de Berman [6] est le point de départ des études dues à de nombreux travaux consacrés aux écoulements laminaires d'un fluide incompressible dans le canal bidimensionnel à parois poreuses. Ces travaux peuvent être classés en deux groupes en fonction du type de géométrie du domaine dans lequel se trouve le fluide. Le premier groupe comprend les travaux relatifs aux écoulements dans des conduites circulaires, annulaires ou non, qui nécessitent l'utilisation de coordonnées cylindriques ou axisymétriques et le second groupe est celui des travaux consacrés aux écoulements dans des canaux pour lesquels des coordonnées cartésiennes sont appliquées. Dans le premier groupe de travaux, nous pouvons mentionner les travaux réalisés par Yuan et Finkelstein [7]. Pour plus de détails, nous pouvons préciser que les solutions semblables en régime permanent pour un écoulement dans une conduite circulaire ont été étudiées pour la première fois dans [7].

Terrill et Thomas [8], ont prouvé que l'écoulement laminaire incompressible dans une conduite bidimensionnelle avec deux parois poreuses identiques a été discuté auparavant par plusieurs auteurs. Dans leur étude, le problème du transport de chaleur avec une variation discontinue de la température pariétale est résolu. On trouve que, pour de petits nombre de Reynolds de suction, le nombre de Nusselt limite  $Nu_{\infty}$  augmente linéairement avec le nombre de Reynolds de suction. En particulier l'injection diminue tandis que la suction augmente le nombre de Nusselt. La première analyse complète de ces solutions est présentée dans [8], leur objectif était de donner une analyse complète des solutions numériques et théoriques de ce problème. Il est démontré

que deux solutions existent pour toutes les valeurs d'injection ainsi que les solutions doubles pour la succion qui ont été notées par les chercheurs précédents. Des solutions analytiques sont dérivées pour une succion et une injection importantes ; pour une succion importante, une couche visqueuse apparaît à la paroi, tandis que pour une injection importante, une solution présente une couche visqueuse au centre du canal et l'autre ne présente aucune couche visqueuse. Des solutions analytiques approximatives sont également données pour petites valeurs de succion et d'injection. En ce qui concerne les écoulements instationnaires, ceux qui ont lieu dans une conduite poreuse semi-infinie avec un rayon variable en fonction du temps ont été étudiés par :

Goto et Uchida [9], ils ont fait l'analyse qui simule le champ d'écoulement par la combustion de la surface intérieure d'un grain cylindrique dans un moteur de fusée à poudre, dans lequel la surface de combustion régresse avec le temps. Une solution similaire exacte de la forme entièrement non linéaire des équations de Navier-Stokes est calculée numériquement. Les propriétés de l'écoulement sont représentées comme des fonctions du taux d'expansion et du paramètre d'injection. L'effet de la régression de la surface de combustion sur le champ d'écoulement dans la chambre de combustion d'un moteur à propergol solide est si faible qu'il peut être négligeable.

Ceux qui se produisent entre deux disques poreux coaxiaux se déplaçant dans la direction axiale ont été étudiés numériquement par :

Ghaffar et al. [10], dans leurs travaux ils ont utilisé une transformation pour réduire les équations aux dérivées partielles (EDP) en un ensemble d'équations différentielles ordinaires non-linéaires couplées. Les effets des paramètres physiques qui gouvernent les écoulements tels que le taux d'expansion de la paroi et la perméabilité du nombre de Reynolds sur la vitesse sont discutés en détail.

Les résultats d'une extension de la solution exacte de l'écoulement laminaire axisymétrique dans une conduite droite de section circulaire avec une paroi poreuse, sont donnés par R.M. Terrill [8].

Pour ceux causés par l'injection ou succion instationnaire dans la paroi d'une conduite circulaire poreuse ont été présentés dans les travaux de S. Tsangaris, D. Kondaxakis, et N. W. Vlachakis[11]. Les cas du profil parabolique pulsé et de l'écoulement pulsé développé sont étudiés à titre d'exemple. L'écoulement pulsé dans les conduits poreux a de nombreuses applications dans l'ingénierie biomédicale et dans d'autres domaines d'ingénierie.

W. H. H. Banks et M. B. Zaturka [12], ont utilisé la théorie des bifurcations pour l'analyse du comportement dynamique complet de l'écoulement à travers une conduite annulaire poreuse. Un paramètre non dimensionnel,  $\delta$ , basé sur les rayons des parois d'une conduite est défini et les équations avec les conditions aux limites sont écrites de telle sorte qu'à  $\delta = 0$ , elles coïncident avec le problème bidimensionnel analogue. Par intégration numérique, les propriétés significatives trouvées précédemment pour  $\delta = 0$  sont poursuivies dans la région  $0 < \delta < 1$  correspondant à l'écoulement dans une conduite annulaire. Parmi les solutions stables, instables, périodiques, quasi-périodiques et chaotiques trouvées lorsque  $\delta = 0$ , seules des solutions stables, instables et périodiques ont été trouvées lorsque  $\delta \neq 0$ . Le cas pour lequel la pression locale dans une conduite dépend de la vitesse d'injection ou succion est étudié par :

B. Bernales et P. Haldenwang [13] qui dans leur article, ont analysé le problème d'une conduite à paroi poreuse, à savoir l'écoulement laminaire d'un fluide pur dans une conduite dont la paroi est composée d'un matériau poreux. Cette configuration s'inspire de certains systèmes d'irrigation ou de la

configuration de filtration à écoulement transversal (ou tangentiel) pour la séparation membranaire ou l'écoulement capillaire. Elle suppose que la fuite à travers la paroi (ou perméat) résulte de la différence de pression entre les deux côtés de la paroi de la conduite, et est ici modélisée par la loi de Starling-Darcy. La pression intérieure le long de la conduite se comporte en conséquence avec deux caractéristiques concurrentes : la chute de pression visqueuse en concurrence avec l'augmentation de pression due à la décélération de l'écoulement axial de la conduite. On sait depuis longtemps que ces deux caractéristiques se compensent à une valeur critique, du nombre de Reynolds transversal (basé sur le taux de la succion), cela correspond à la seule situation où la pression reste uniforme le long du canal. C'est le cas de l'écoulement avec une fuite uniforme connu sous le nom d'écoulement de Berman à une solution semblable due à Yuan et Finkelstein (1956) pour la configuration de la conduite. Le présent travail vise à étendre cette dernière étude à une fuite non uniforme dépendant linéairement de la pression locale. Tout d'abord, la solution de similitude est réexaminée. Son expansion dans une série leur permet de proposer une hiérarchie de nouvelles équations différentielles ordinaires (EDO), qui étendent à des valeurs petites ou modérées l'EDO linéaire proposée pour le cas limite par Regirer (1960) comme sous produit, ils proposent des solutions analytiques approximatives qui résolvent le problème d'une conduite poreuse avec une précision croissante dans le cas faiblement non-linéaire (WNL) ( c'est-à-dire pour les valeurs petites et modérées). Enfin, la validité des EDO et des solutions WNL est vérifiée numériquement par rapport à des simulations d'écoulement dans l'approximation de Prandtl.

M. Bouygues et al.[14] ont présenté une solution d'auto-semblable basée sur une étude asymptotique des équations de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire, incompressible et dépendant du temps qui se développe à l'intérieur

d'un canal possédant des parois perméables mobiles. Le cas considéré ici concerne un canal qui présente une injection ou une succion à travers deux parois poreuses opposées tout en subissant une expansion ou une contraction uniforme. Parmi les exemples d'application directe, on peut citer la modélisation des membranes pulsantes, le refroidissement ou le chauffage d'air, la séparation des isotopes, la filtration, la fabrication du papier, l'irrigation et la régression des grains pendant la combustion des propergols solides. Pour commencer, la fonction de courant et l'équation de vorticité sont utilis es pour produire une équation aux dérivées partielles qui se prête à une transformation de similitude, le problème posé est réduit à la résolution d'une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre quatre avec une variable de similitude  $h$  qui combine à la fois les dimensions spatiales et temporelles. Comme deux des quatre conditions initiales sont du type valeur limite, une méthode numérique dépend de deux suppositions initiales arbitrairement choisies. Afin d'atteindre la convergence, l'équation différentielle est d'abord transform e en une fonction de trois variables : les deux suppositions et  $h$ . Au départ, un algorithme numérique approprié est appliqué en résolvant l'ensemble résultant de douze équations différentielles ordinaires du premier ordre avec deux conditions initiales non sp cifi es. En recherchant les deux suppositions initiales inconnues, la méthode du Jacobien inverse, qui converge rapidement, est appliqu e de manière itérative. Les résultats numériques sont ensuite utilisés pour mieux comprendre le caractère de l'écoulement. La méthode numérique leur a permis d'étendre la gamme de solutions à des environnements physiques qui n'ont pas été pris en compte dans les études précédentes. En outre l'approche numérique élargit le champ d'application pour couvrir à la fois les cas de succion et d'injection se produisant avec un mouvement simultané des parois.

M. Siavashi et al. [15] ont réalisé une étude numérique sur l'écoulement de nanofluide considéré comme un refroidissement par impact d'un dissipateur thermique poreux cylindrique. Le fluide de refroidissement s'écoule uniformément à travers la paroi poreuse sur le disque chaud. Les équations de conservation de masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sous forme des équations différentielles partielles, en utilisant la méthode des solutions semblables ont été résolues numériquement. Les résultats sont également validés par comparaison avec ceux d'un code CFD commercial, avec une concordance acceptable. Dans cette étude, les effets des paramètres sans dimension sous la forme de caractéristiques du milieu poreux et de propriétés du fluide de refroidissement sur le profil de vitesse, le profil de température et le nombre de Nusselt moyen ont été examinés. Les résultats indiquent que l'ajout de nanoparticules, l'augmentation du rapport de conductivité thermique et la réduction du rapport d'aspect améliorent les performances thermiques du dissipateur thermique.

M. G. Sobamowo et al. [16] ont étudié les diverses applications de l'écoulement d'un thermo-magnéto-solutal entre deux disques parallèles noyées dans un milieu poreux, telles que celles qui sont évidentes dans les industries manufacturières, le traitement des polymères, la compression, la transmission de puissance, le système de lubrification, la transformation des aliments et le refroidissement, entre autres, nécessitent une étude approfondie des effets de divers paramètres sur les phénomènes d'écoulement. Dans la présente étude, les effets de la géométrie des nanoparticules, du glissement et des conditions de variations de température sur l'écoulement de compression thermo-magnéto-solutal du nanofluide entre deux disques parallèles coaxiaux dans un milieu poreux sont étudiés, analysés et discutés. La méthode des solutions semblables est utilisée pour transformer les équations différentielles non linéaires à des

équations à différentielles ordinaires avec quatre conditions aux limites. La méthode de perturbation homotopique est utilisée pour résoudre les systèmes d'équations différentielles ordinaires non-linéaires. Afin de vérifier la précision des solutions analytiques développées, les résultats de la méthode de perturbation de l'homotopie sont comparés aux résultats de la méthode numérique utilisant la méthode de tir couplée au Runge-Kutta du quatrième ordre, et de bons résultats sont établis. Grâce aux solutions analytiques approximatives, des études paramétriques ont été menées pour étudier les effets de la taille et de la forme des nanoparticules, du paramètre du mouvement brownien, du paramètre des nanoparticules, du paramètre de thermophorèse, du nombre de Hartmann, du nombre de Lewis et des paramètres du gradient de pression, du glissement et des conditions aux limites de variation de température sur le comportement thermo-solutal et hydromagnétique du nanofluide. Cette étude permettra d'améliorer et faire progresser la compréhension de la nanofluidique, notamment en ce qui concerne la conservation de l'énergie, la réduction des frottements et le micro-mélange d'échantillons biologiques.

Dans les travaux de notre équipe de recherche publiés par N. R. Makon et al. [17], l'écoulement laminaire dans le plan polaire d'un fluide incompressible situé dans une conduite annulaire poreuse et entraîné par succion- injection au niveau des parois est étudié pour la première fois et l'existence et la détermination de cet écoulement pour un fluide incompressible situé entre deux cylindres coaxiaux sont considérés. Le fluide étant confiné entre les cylindres et ayant une vitesse axiale nulle, ils ont prouvé que l'écoulement a lieu dans le plan polaire avec conservation de la masse, si un écoulement entrant existe dans le même plan pour compenser la masse de fluide extorquée par succion. Ainsi, l'un des cylindres subit la succion et l'autre l'injection. Des conditions aux limites appropriées pour les deux cylindres sont alors trouvées. Le problème posé

dépend du nombre de Reynolds, du rapport d'entrefer de la conduite et de la densité des pores et du rapport de surface des pores. La méthode de résolution utilise la méthode de tir comprenant les algorithmes de Runge-Kutta et Newton-Raphson. L'écoulement radial est trouvé comme une solution possible. Lorsque l'écoulement n'est pas radial, les figures des lignes de courant mettent en évidence une zone particulière dans laquelle le fluide est au repos, délimitée par deux lignes de courant singulières sur le cylindre aval. Le champ des vitesses de l'écoulement est déterminé. Les phénomènes physiques liés à l'écoulement sont déduits des résultats obtenus.

G.C. Dash et K. L. Ojha [18], ont traité l'écoulement d'un fluide viscoélastique hydromagnétique entre deux plaques poreuses parallèles infinies horizontales avec un gradient de pression sinusoïdale variable dans le temps et un champ magnétique. La viscoélasticité est une approche efficace pour modéliser le mécanisme dissipatif. Voici quelques observations intéressantes : le gradient de pression oscillant à basse fréquence empêche le reflux, une réduction significative des frictions cutanées est observée en incorporant le canal dans un milieu poreux, et le champ magnétique et l'élasticité ralentissent l'écoulement du fluide.

R. N. Barik et al. [19] ont fait une tentative, pour étudier l'effet de l'élasticité, de la succion/injection, de la matrice poreuse, du nombre de Reynolds de l'écoulement d'entrée sur l'écoulement d'un fluide viscoélastique (Walters) à travers une conduite poreuse. La nouveauté de l'étude est de considérer l'ensemble du domaine d'écoulement sans l'approximation de la couche limite dans les équations gouvernantes vis-à-vis des solutions entièrement développées du champ de vitesse sont obtenues. En outre, ils ont examiné les écoulements visqueux et conducteurs comme des cas particuliers en omettant l'effet de l'élasticité et du champ magnétique. Il est intéressant de noter

que la propriété d'élasticité du fluide en présence d'une matrice poreuse et d'une succion réduit le frottement cutané sur la plaque, ce qui est un résultat souhaitable de la présente étude.

L. Durlofsky et J. F. Brady [20] ont déterminé la stabilité spatiale d'une classe de solutions de similitude exactes des équations de Navier-Stokes dont la vitesse longitudinale est de la forme  $xf'(y)$ , où  $x$  est la coordonnée de l'écoulement et  $f'(y)$  est une fonction de la coordonnée transversale  $y$  seulement. Ces solutions de similitude correspondent à l'écoulement dans un canal ou un tube infiniment long dont la surface est uniformément poreuse ou se déplace avec une vitesse linéaire en  $x$ . De petites perturbations de la vitesse dans le sens de l'écoulement de la forme  $x^\lambda g'(y)$  sont supposées, ce qui donne lieu à un problème de valeurs propres pour  $\lambda$  qui est résolu numériquement. Pour le problème de la paroi poreuse, il est montré que les solutions de similitude dans lesquelles  $f'(y)$  est une fonction monotone de  $y$  sont spatialement stables, tandis que celles qui ne sont pas monotones sont spatialement instables. Pour le problème à paroi accélérateur, l'interprétation des résultats de stabilité n'est pas univoque et deux interprétations sont proposées. Dans une interprétation, les conclusions sont les mêmes que pour le problème poreux-les solutions monotones sont stables ; la seconde interprétation est plus restrictive en ce sens que certaines des solutions monotones et non monotones sont instables.

G. Casalis et al. [21] ont traité des propriétés de stabilité d'un écoulement dans un canal planaire entraîné par l'injection d'air à travers des parois poreuses. Des études expérimentales ont été menées dans l'installation VELCA et une analyse théorique de la stabilité linéaire a été réalisée. Les effets non parallèles sont étudiés à l'aide de trois approches différentes de la stabilité. Ils semblent

être très importants pour cet écoulement particulier. Cette étude fournit en effet un exemple intéressant d'un mécanisme d'instabilité fortement lié à la composante verticale (habituellement négligeable) du flux moyen. Les résultats obtenus concordent finalement très bien avec les mesures en ce qui concerne la gamme de fréquences amplifiées et l'amplification des ondes d'instabilité dans le sens du courant.

S. Ferro et G. Gnani [22], ont analysé la stabilité spatiale des solutions de similitude pour un fluide incompressible s'écoulant le long d'un canal aux parois poreuses et entraîné par une succion uniforme constante le long des parois. Ce travail étend les résultats de Durlofsky et Brady [Phys. Fluids 27, 1068 (1984)] à une classe plus large de solutions de similitude, et examine la stabilité spatiale de perturbations de faible amplitude et de forme arbitraire, générées à l'entrée du canal. Il s'avère que les perturbations antisymétriques sont les meilleurs candidats pour déstabiliser les solutions. Les solutions asymétriques temporellement stables avec inversion du flux présentées par Zatorska, Drazin et Banks [Fluid Dyn. Res. 4,151 (1988)] se révèlent spatialement instables. Les solutions de similitude perturbées sont également comparées aux solutions entièrement bidimensionnelles obtenues avec un code de différences finies. Les résultats confirment l'importance des solutions de similitude de la validité de l'analyse de stabilité dans une région dont la distance au centre du canal est plus de trois fois la demi-largeur du canal.

J. Griffond et G. Casalis [23], ont étudié la stabilité non parallèle de l'écoulement dit de Taylor induit par l'injection d'une paroi. Cet écoulement est instable en raison d'effets non parallèles qui n'ont pas encore été traités de manière rigoureuse. Seules des méthodes incohérentes ont été utilisées. Elles donnent de bons résultats par rapport aux expériences, mais elles souffrent d'un manque de justification et de la dépendance des résultats par rapport à la

formulation. La nécessité d'utiliser des méthodes incohérentes au lieu de l'approche d'Orr-Sommerfeld est justifiée dans le travail et une analyse asymptotique beaucoup plus rigoureuse est effectuée dans la limite des grandes distances dans le sens du courant.

Pour terminer avec ce premier groupe de travaux, nous mentionnons le travail récemment publié par notre équipe de recherche :

G. L. Mbogba et al. [24] qui est consacré à l'étude des effets d'un gradient de pression constant externe sur un écoulement laminaire stable à travers une conduite annulaire poreuse à paroi interne imperméable. Dans ce travail ils étudient un écoulement laminaire permanent pour un fluide incompressible situé dans une conduite annulaire semi-poreuse horizontale et soumis aux effets d'un gradient de pression constant appliqué entre les deux extrémités de la conduite. La paroi du cylindre extérieur subit une succion ou une injection, à une vitesse constante uniforme et orthogonale à la paroi, la paroi du cylindre interne étant alors imperméable. Le problème à étudier dépend ainsi de trois paramètres à savoir : le rapport de gap, le gradient de pression externe adimensionnel et le nombre de Reynolds ; avec les conditions aux limites appropriées pour les cylindres, définies à partir de la vitesse de succion ou d'injection et de la vitesse maximale de Hagen-Poiseuille. Ce problème est modélisé par les équations de Navier-Stokes donc les difficultés à trouver des solutions sont bien connues, car ces équations sont des équations aux dérivées partielles non linéaires où les champs de vitesses et de pression varient dans l'espace et dans le temps. L'équation de continuité issue de la conservation de la masse présente une contrainte qui doit être satisfaite compte tenu des conditions aux limites appliquées aux parois des deux cylindres. Ce problème peut être résolu directement par les algorithmes existants dans le domaine de la dynamique des fluides. Dans ce travail ils ont appliqué la méthode des solutions semblables

pour ramener l'équation de vorticité qui est une équation aux dérivées partielles, en une équation différentielle ordinaire. Cette équation de vorticité, étant déduite des équations de Navier-Stokes dans le cadre des écoulements des fluides incompressibles. L'équation différentielle ordinaire obtenue est une équation différentielle d'ordre quatre qui est ensuite r solv e à partir de la méthode de tir qui permet de transformer le problème à conditions aux limites en un problème à conditions initiales. En ce qui concerne le deuxième groupe de travaux, c'est-à-dire les travaux consacrés aux écoulements le long des conduites rectangulaires poreuses, des recherches approfondies ont été effectu es et nous pouvons citer les articles publiés par Terrill [25] sur les bases analytiques de l'écoulement laminaire dans un canal uniformément poreux.

W. A. Robinson [26] a effectué une simulation numérique pour déterminer l'existence de solutions multiples de l'écoulement laminaire dans un canal uniformément poreux avec succion aux deux parois. De nombreux auteurs ont trouvé de tels écoulements lorsqu'ils sont symétriques, stables et bidimensionnels, en supposant une forme de solution similaire due à Berman afin de réduire les équations de Navier-Stokes à une équation différentielle ordinaire non-linéaire. Il généralise leurs travaux en considérant les écoulements asymétriques, les écoulements instables et les perturbations tridimensionnelles. En utilisant des calculs numériques, des expansions asymétriques adapt es pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds, et la théorie des systèmes dynamiques, il trouve beaucoup plus de solutions exactes des équations de Navier-Stokes, il examine leur stabilité et il les interprète.

M. B. Zaturka et al. [27] ont démontré que les études classiques sur les solutions stables, symétriques et bidimensionnelles de l'écoulement laminaire dans un canal poreux sont g n ralis es en considérant les écoulements asymétriques, les écoulements instationnaires. Ils ont traité théoriquement

l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entraîné le long d'un canal par une succion uniforme et constante à travers des parois poreuses, parallèles et rigides. De nombreux auteurs ont trouvé de tels écoulements lorsqu'ils sont symétriques, stables et bidimensionnels, en supposant une forme de solution semblable due à Berman afin de réduire les équations de Navier-Stokes à une équation différentielle ordinaire non-linéaire. Il généralise leur travail en considérant les écoulements asymétriques, les écoulements instables et les perturbations tridimensionnelles. En utilisant des calculs numériques, des expansions asymétriques adaptées pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds, et la théorie des systèmes dynamiques, il trouve beaucoup plus de solutions exactes des équations de Navier-Stokes, il examine leur stabilité et il les interprète. En particulier, il montre que la plupart des solutions stables trouvées précédemment sont instables aux perturbations antisymétriques bidimensionnelles. Cela conduit à une bifurcation en fourche, à des solutions stables asymétriques, à une bifurcation de Hopf, à des solutions quasi-périodiques stables, à un verrouillage de phase et à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

Cox [28] a étudié les perturbations tridimensionnelles, il considère l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un canal à parois parallèles, sous l'effet d'une succion à vitesse uniforme et constante à travers les parois poreuses du canal. Une transformation de similitude réduit les équations de Navier-Stokes à une seule équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction d'écoulement, avec des conditions aux limites en deux points. Ils discutent d'abord des bifurcations des solutions stables et montrent comment une bifurcation en fourche se déploie lorsqu'une symétrie du problème est brisée. Il décrit ensuite les solutions dépendantes du temps de l'EDP gouvernante, qu'il analyse ces solutions instables lorsqu'il y'a un taux élevé de

la succion à travers une paroi et que l'autre paroi est imperméable : il y'a un cycle limite composé d'une phase explosive de croissance inviscide et d'une lente décroissance visqueuse. La phase inviscide présente "presque" une singularité à temps fini. Il examine si les solutions de l'EDP gouvernante, qui sont des solutions exactes des équations de Navier-Stokes, peuvent développer des singularités mathématiques en un temps fini. Lorsque les taux de la succion aux deux parois sont égaux, de sorte que le problème est symétrique, il y'a une transition abrupte vers le chaos, une " explosion homocinétique", dans les solutions dépendant du temps à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Il dévoile cette transition en perturbant la symétrie et compare les intégrations numériques directes de l'EDP gouvernante avec une théorie récente pour les systèmes dynamiques " de type Lorenz". Le chaos se révèle très sensible à la rupture de symétrie.

Halden Wang [29] a présenté les résultats pour l'écoulement laminaire dans un canal plan poreux bidimensionnel avec une pression locale dépendant de la vitesse de succion, il a montré que de longs conduits (ou tuyaux) composés de parois transpirantes (poreuses, par exemple) sont à la base de nombreux dispositifs industriels de séparation des espèces, tels que la filtration tangentielle ou le dessalement par membrane. Des configurations similaires peuvent également être impliquées dans les systèmes d'alimentation en fluides, comme l'irrigation ou les fluides biologiques dans les capillaires. Une fuite transversale (ou flux de perméat), dont la force est supposée dépendre linéairement de la pression locale (comme dans la loi de Sterling pour les capillaires), se produit à travers les parois perméables. Toutes les autres dépendances, comme la pression osmotique ou l'encrassement partiel dû à la polarisation de la concentration des espèces, sont négligées. Pour analyser ce problème ouvert il considère la situation la plus simple : l'écoulement laminaire

régulier dans un canal bidimensionnel composé de deux parois poreuses symétriques. Tout d'abord, l'analyse dimensionnelle nous aide à déterminer les paramètres pertinents. Il révisé ensuite le problème de Berman qui considère un écoulement transversal uniforme (c'est-à-dire une fuite indépendante de la pression). Il développe la solution dans une série de  $R_t$ , le nombre de Reynolds transversal. Nous remarquons que cette série a une convergence rapide dans le domaine considéré de  $R_t$  (c'est-à-dire  $R_t \leq 0$  (1)).

Une méthode particulière de séparation des variables nous permet ensuite de dériver les équations de Navier-Stokes deux nouvelles équations différentielles ordinaires (ODE), qui correspondent au premier et deuxième ordre dans le développement en  $R_t$ .

Dauenhauer et Majdalani [30] ont utilisé la méthode numérique de tir et décrit dans leur article une solution d'auto-similaire des équations de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire incompressible et dépendant du temps qui se développe à l'intérieur d'un canal possédant des parois perméables et mobiles. Le cas considéré ici concerne un canal qui présente une injection ou une succion à travers deux parois poreuses opposées tout en subissant une expansion ou une contraction uniforme. Parmi les exemples d'applications directe, on peut citer la modélisation des membranes pulsantes, le refroidissement ou le chauffage d'air, la séparation des isotopes, la filtration, la fabrication du papier, l'irrigation et régression des grains pendant la combustion des propergols solides. Pour commencer, la fonction de courant et l'équation de vorticité sont utilis es pour résoudre une équation aux dérivées partielles qui se prête à une transformation de similitude, le problème posé est réduit à la résolution d'une équation différentielle d'ordre quatre avec une variable de similitude  $\eta$  qui combine à la fois.

Mohyud-Din et al. [31], ont utilisé la méthode des perturbations d'homotopie (HPM), dans leurs travaux, ils ont développé la solution analytique des équations de Navier-Stokes pour un canal rectangulaire semi-infini avec des parois poreuses et uniformément en expansion ou en contraction en utilisant la méthode de perturbation homotopique (HPM). La solution en série du problème est obtenue. Quelques exemples ont été inclus. Les résultats ainsi obtenus sont comparés à la littérature existante et une amélioration remarquable conduit à un excellent accord avec les résultats numériques.

Dans [32], le mouvement considéré est un écoulement instationnaire de nanofluide sous l'influence d'un flux magnétique uniforme. D'autres écoulements sont étudiés dans des milieux poreux délimités par des plaques parallèles, pour un fluide non-Newtonien du troisième degré avec source de chaleur interne, L'étude de Akinshilo [32-33], porte sur l'écoulement et le transfert de chaleur d'un nanofluide transporté dans un canal poreux en expansion ou en contraction sous un champ magnétique uniforme. L'influence du champ magnétique sur l'écoulement et le transfert de chaleur avec injection est étudiée. Le nanofluide est décrit par des équations non-linéaires couplées du quatrième ordre, analysées à l'aide de la méthode de perturbation de l'homotopie (HPM). Les solutions analytiques obtenues sont adaptées pour décrire l'effet de divers paramètres thermo-fluidiques tels que le nombre de Reynolds, le paramètre de Hartmann et l'indice de puissance de la température. Les résultats révèlent que l'augmentation du paramètre de Hartmann entraîne une augmentation de l'effet de friction du fluide de la peau, tandis que l'augmentation de l'indice de puissance de la température entraîne une augmentation de l'effet du nombre de Nusselt. La comparaison de la solution analytique obtenue avec les publications précédentes montre également une concordance satisfaisante. Cette étude donne un bon aperçu des applications

pratiques telles que la nanofluidique, la conservation de l'énergie, la réduction du frottement et la production d'énergie.

Akinshilo et al. [33], dans leur article, l'écoulement régulier incompressible d'un fluide d'alginate de sodium (AS) non newtonien transportant des nanoparticules de cuivre (Cu) qui s'écoulent à l'intérieur de deux plaques parallèles verticales est étudié en utilisant le schéma analytique de perturbation de l'homotopie pour résoudre les équations ordinaires non linéaires couplées découlant de la mécanique du fluide. Les solutions analytiques développées sont utilisées pour étudier l'effet de l'écoulement du fluide et des paramètres de transfert de chaleur tels que la concentration de nanoparticules, le paramètre non newtonien et le paramètre de variation de la viscosité. Les résultats analytiques obtenus, comparés aux travaux existants dans la littérature, sont en accord satisfaisant. En outre, les résultats obtenus dans le cadre de la présente étude peuvent être utilisés pour une analyse plus approfondie du comportement de l'alginate de sodium dans des applications telles que la transformation des aliments et industries chimiques et pharmaceutiques.

Taha Aziz et al. [34], ont étudié l'écoulement entièrement développé en fonction du temps d'un nanofluide incompressible, thermodynamiquement compatible et non newtonien de troisième degré. Le modèle classique de Stokes est considéré dans lequel l'écoulement est généré par le mouvement de la plaque dans son propre plan avec une vitesse impulsive. L'approche de la symétrie de Lie est utilisée pour convertir l'équation différentielle partielle non-linéaire en différentes équations différentielles ordinaires linéaires et non linéaires. Les équations différentielles ordinaires réduites sont ensuite résolues à l'aide de la méthode de compatibilité et de la méthode des groupes généralisés. Les solutions exactes pour l'équation modèle sont déduites sous la forme de fonctions exponentielles fermées qui ne sont pas disponibles dans la littérature

auparavant. En outre, ils ont également dérivé les lois de conservation associées au modèle directeur. Enfin, les caractéristiques physiques des paramètres pertinents sont discutées en détail à l'aide de plusieurs graphiques.

Ce deuxième groupe des travaux se termine par les recherches expérimentales et numériques réalisées dans [34] pour un écoulement de nanofluide et de fluide hybride à travers les conduites poreuses.

Selon Z. Alhajaj et al. [35], l'amélioration et le stockage de la chaleur deviennent des sujets d'ingénierie importants liés aux énergies renouvelables. Différentes classes de fluides ont été proposées et divers types de matériaux à changement de phase ont été utilisés pour le stockage de l'énergie. Les nanofluides, qui se composent de nanoparticules métalliques dans des liquides tels que l'eau, ont récemment fait l'objet d'une grande attention. Certaines exagérations concernant la conductivité de ces fluides ont conduit les chercheurs à mener des études plus approfondies sur les propriétés physiques de cette nouvelle classe de fluides. Dans cet article, ils ont tenté de mener une expérience détaillée visant à étudier la qualité de l'amélioration de la chaleur que l'on peut attendre de cette classe de fluides. L'expérience, qui consistait en la convection forcée d'un nanofluide composé d'Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> dans l'eau, a démontré que l'amélioration de la chaleur peut être obtenue dans la plage de 6%, quelle que soit la concentration de nanoparticules dans l'eau. La dynamique des fluides computationnelle était en bon accord avec les données expérimentales. Les études ont révélé qu'il existe une concentration optimale de nanofluide qui permet d'obtenir l'amélioration la plus élevée du transfert de chaleur. Lorsque la concentration de nanoparticules augmente au-delà de la concentration optimale, il n'y a plus d'amélioration significative du transfert de chaleur. En outre, la perte de charge augmente avec la concentration en nanoparticules. Un nouveau fluide hybride composé d'oxyde d'aluminium et d'oxyde de cuivre dans l'eau a

révélé une amélioration supplémentaire, mais une nouvelle augmentation de la perte de charge. Il est donc conclu que le fluide hybride est un choix alternatif si l'on a besoin d'extraire de la chaleur au détriment de la perte de charge.

Il existe des travaux qui ont été étudiés simultanément concernant les écoulements laminaires dans des conduites poreuses et les écoulements laminaires dans des tubes poreux. A cet égard, nous pouvons citer les travaux réalisés par Brady, Wang, Oxarango, Schmitz et Quintard. Plus précisément, nous mentionnons que le développement spatial du profil de vitesse d'entrée dans un canal et tube poreux est étudié dans.

J.F Brady [36], a étudié l'effet du rayonnement thermique sur un milieu poreux sous l'approximation de l'épaisseur optique en utilisant la méthode du schéma de Newton à partir des séries de Taylor implémentées numériquement sur MATLAB. Les profils de vitesse et de température sont étudiés pour différents paramètres physiques tels que le terme poreux  $P$ , le rayonnement  $F$  et le nombre de Grashof thermique  $G_a$ . Les résultats montrent que le paramètre poreux augmente avec la vitesse, tandis que la tendance s'inverse avec le rayonnement thermique et le nombre Grashof thermique dans l'approximation de l'épaisseur optique. Le débit augmente de manière asymétrique en raison de la conduction.

C.Y. Wang [37], a développé une revue complète des méthodes permettant de rechercher des solutions exactes des équations de Navier-Stokes en régime permanent pour les écoulements le long des canaux et des tubes poreux. Il a montré que les solutions exactes des équations de Navier-Stokes pour les écoulements stables sont caractérisées, en résumant les résultats des recherches analytiques récentes. L'accent est mis sur la valeur de ces solutions en tant que descriptions des phénomènes d'écoulement de base et en tant que contrôle de la précision des méthodes approximatives. Les écoulements

parallèles et concentriques, les écoulements de Beltrami généralisés (cas planaires et asymétriques) et les solutions de similitude pour les écoulements radiaux, les écoulements dans des disques en rotation, les écoulements en stagnation, les frontières poreuses, les frontières en translation, les écoulements à parois étirées sont examinés.

L. Oxarango et al. [38] la non-uniformité de la vitesse de succion ou d'injection dans les canaux ou les tubes est prise en compte par un modèle unidimensionnel pour décrire l'écoulement laminaire. Ils ont proposé un modèle unidimensionnel pour déterminer l'écoulement laminaire d'un fluide dans un canal poreux avec aspiration ou injection à la paroi. L'approche est basée sur l'intégration des équations de Navier-Stokes en utilisant les solutions analytiques pour les champs de vitesse et de pression locaux bidimensionnels obtenus à partir des développements asymptotiques à faible nombre de Reynolds de filtration proposés par Berman et Yuan et Finkelstein. On remarque que le modèle unidimensionnel qui en résulte préserve l'ensemble des propriétés de l'écoulement, en particulier les termes inertiels qui peuvent affecter les conditions de succion de la paroi et la distribution spatiale de la couche de particules du fluide en croissance à la paroi rencontrée dans les processus de filtration. Le modèle est validé dans le cas d'un canal poreux unique de section rectangulaire ou circulaire avec une succion de paroi uniforme ou variable. Le modèle est ensuite appliqué à un système multi canal bidimensionnel composé d'un grand nombre de canaux d'entrée et de sortie adjacents reliés par un milieu poreux filtrant. Il est démontré que l'effet des conditions aux limites non uniformes et l'influence des caractéristiques géométriques hétérogènes sur l'hétérogénéité de la structure de l'écoulement des fluides peuvent être étudiés à l'aide d'un tel modèle.

J.F. Brady et A. Acrivos [39], ont étudié le développement spatial du profil de vitesse d'entrée dans un canal et dans un tube uniformément poreux. Pour les tubes très longs par rapport à leur rayon, il est montré qu'au-delà d'un nombre de Reynolds critique de 2,3, le profil de vitesse d'entrée ne se décompose pas nécessairement en un profil de similitude entièrement développé pour un tube infini. Au contraire, la structure de l'écoulement dans l'ensemble du tube est influencée par le profil d'entrée. Cette perte de validité de la solution de similitude est due au fait que le tube est de longueur finie et que le profil d'entrée n'est pas de la forme de similitude. La longueur réelle du tube est cependant sans importance. Des résultats analogues sont obtenus pour l'écoulement dans un canal poreux, avec un nombre de Reynolds critique d'environ 6.

Ils ont aussi présenté une solution exacte des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement dans un canal ou un tube avec une vitesse de surface accélérée. Au moyen d'une transformation de similitude, les équations du mouvement sont réduites à une seule équation différentielle ordinaire pour la fonction de similitude qui est résolue numériquement. Pour l'écoulement bidimensionnel dans un canal, une solution unique existe lorsque le nombre de Reynolds  $R$  est inférieur à 310. Lorsque  $R$  dépasse 310, deux solutions supplémentaires apparaissent et forment une branche fermée reliant deux états asymptotiques différents à  $R$  infini. La structure à grand  $R$  des solutions consiste en un noyau de fluide inviscide et une couche limite mince  $O(R-1)$  adjacente à la paroi mobile. Des techniques d'expansion asymptotique appropriée sont utilisées pour construire des séries asymptotiques qui sont cohérentes avec chacune des solutions numériques pour l'écoulement axisymétrique non tourbillonnant dans un tube, cependant, la solution est tout à fait différente. Pour  $10 \leq R \leq 147$ , il existe deux solutions qui forment une branche fermée. Au-delà de  $10 \leq R \leq 147$ , il n'existe pas de solutions de

similitude dans l'intervalle  $10 \leq R \leq 147$ . Une fois que  $R$  dépasse 147, des solutions multiples réapparaissent, formant deux branches fermées qui relient quatre états asymptotiques différents à  $R$  infini. La possibilité d'un écoulement axisymétrique avec tourbillon est envisagée, et les deux ensembles de solutions tourbillonnaires existent pour tous les  $R > 0$ . Ces solutions, cependant, n'évoluent pas à partir de l'écart  $R = 0$  et ne bifurquent pas à partir des solutions non tourbillonnaires à toute valeur finie de  $R$ .

Pour les écoulements ci-dessus mentionnés, certains d'entre eux ont été consacrés aux parois mobiles de canaux ou de tubes [19,20, 36-40]. Pour ce type d'écoulements, il est important de mentionner la grande aide apportée par les travaux de Brady et de Activos [39] et ceux de Uchida et Aoki [40], qui ont été réalisés pour des parois imperméables et ont montré comment traiter les parois accélératrices dans la direction longitudinale.

S. Uchida et H. Aoki [40], un vaisseau sanguin fermé à une extrémité par une valve est modélisé par un tuyau circulaire semi-infini dont une extrémité est fermée par une membrane compliant idéalisée. Les écoulements instationnaires produits par une contraction ou une dilatation unique de la paroi sont calculés en obtenant une solution de l'équation de Navier-Stokes qui est similaire en ce qui concerne la distance axiale par rapport à l'extrémité fermée. Quelques schémas d'écoulement typiques pour des tuyaux en contraction et en expansion sont calculés. On constate que dans l'écoulement dû à une paroi en contraction, les effets de la viscosité sont confinés à une couche limite attachée à la paroi qui devient plus mince pour des nombres de Reynolds critique. Le gradient de pression le long de l'axe est favorable pour les tuyaux en contraction et défavorable pour les tuyaux en expansion, sauf pour la plage des nombres de Reynolds inférieurs.

Ces traitements continuent à être appliqués de nos jours pour les frontières poreuses. Il est important de souligner que, dans tous ces travaux cités au-dessus de [6-40], l'écoulement laminaire stable exercé par la pression le long du canal poreux n'a pas encore été étudié, ni dans nos précédentes publications ni dans les autres qui ont été mentionnées dans ce mémoire. Cela constitue notre motivation pour ce présent mémoire. Cette motivation est renforcée par le fait que le problème à résoudre dans ce travail présente de nombreuses applications industrielles, notamment dans les processus d'ingénierie thermique pour lesquels un gradient de pression longitudinal constant fourni par une pompe est généralement superposé au processus de la suction ou d'injection de fluide sur les parois. Le présent mémoire examine les effets d'un gradient de pression externe sur un écoulement laminaire stable d'un fluide Newtonien incompressible le long d'un canal horizontal parallèle avec une paroi supérieure poreuse et une paroi inférieure imperméable. La pression externe constante appliquée entre les extrémités du canal se détériore. Dans le même temps, le fluide est aspiré ou soufflé à travers la paroi poreuse, à une vitesse constante et uniforme, orthogonalement à la paroi. Deux paramètres doivent être pris en compte: le gradient de pression externe et le nombre de Reynolds étant des nombres sans dimension construits à partir de la somme de la vitesse maximale d'écoulement plan de couette. L'objectif de ce travail est de déterminer et d'analyser les effets du gradient de pression externe sur l'écoulement laminaire stable considéré, la vitesse de suction ou d'injection étant maintenue constante. Pour résoudre le problème à l'étude, nous allons montrer comment les équations de Navier-Stokes sont réduites à l'unique équation de la vorticité, satisfaite par la fonction de courant dont l'existence est due à la configuration bidimensionnelle, une divergence nulle. Au lieu de résoudre l'équation du transport de vorticité en utilisant les algorithmes du calcul de la Dynamique d'un fluide (CFD), nous choisissons la méthode de la solution de semblable. Cette méthode recherche des

solutions exactes, connues pour les équations de Navier-Stokes et sont alors préférables dans la configuration dite à deux dimensions, à celles données par le CFD. Comme on le voit dans ce travail, la méthode de la solution semblable conduit à une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre quatre connue sous le nom de l'équation de Proudman-Johnson [40],

Proudman-Johnson [41], a analysé le développement, selon les équations de Navier-Stokes, de l'écoulement bidimensionnel au voisinage du point de stagnation arrière sur un cylindre qui est mis en mouvement impulsivement avec une vitesse constante. L'écoulement local est idéalisé dans la mesure où la frontière cylindrique est considérée comme un plan infini délimitant un domaine semi-infini de fluide. Le champ de vitesse est considéré comme une fonction linéaire de la coordonnée mesurée parallèlement à la frontière, et l'écoulement initial est considérée comme la forme irrotationnelle (unique) d'un tel champ, à savoir un écoulement inviscide s'éloignant d'un point de stagnation. Par la suite, cet écoulement irrotationnel est maintenu comme condition limite extérieure à une grande distance de la frontière. Il est suggéré qu'en dehors d'une couche visqueuse sur la frontière, l'écoulement asymptotique pour les temps longs est décrit par une solution de similitude de la forme inviscide de l'équation directrice, avec une échelle de longueur normale à la frontière qui augmente exponentiellement avec le temps. Cette solution inviscide a une vitesse de glissement constante le long de la frontière qui est égale mais opposée à celle de l'écoulement initial, de sorte que l'écoulement dans la couche visqueuse devient en fin de compte l'écoulement de stagnation bien connu vers une frontière. Cette suggestion est étayée par une solution numérique du problème de la valeur initiale.

L'algorithme de Newton-Raphson sont appliqués : à l'issue de la procédure de calcul, on retrouve certaines caractéristiques de l'écoulement en

fonction du gradient de pression externe sans dimension, notamment la fonction de courant par unité de longueur du canal, les profils des composantes du champ de vitesse d'écoulement, les contraintes de cisaillement sur les deux parois du canal. Les compréhensions physiques de l'écoulement sont dérivées des résultats obtenus. L'intérêt principal de ce travail est de fournir des potentielles pistes de recherche au problème considéré dans le futur. A cet égard, le travail effectué dans ce mémoire représente une étape préliminaire pour des investigations ultérieures dans lesquelles il serait intéressant d'examiner l'influence de divers nombres de Reynolds, afin de saisir d'autres informations physiques sur la richesse profonde de la structure de l'écoulement étudié.

H. Schlichting [42] a effectué une analyse pour étudier l'effet de l'écoulement de la couche limite laminaire hydrodynamique et le transfert de la chaleur d'un fluide poussiéreux sur une surface d'étirement instable en présence d'une source/puits de chaleur non uniforme. Les caractéristiques du transfert de chaleur sont examinées pour deux types différents de conditions limites, à savoir

- 1) Une température de paroi variable et
- 2) un flux de chaleur variable.

Les équations aux dérivées partielles sont transformées en un système d'équations différentielles ordinaires. Ces équations sont résolues numériquement en appliquant la méthode de RKF-45. Les effets de divers paramètres physiques tels que le paramètre d'interaction avec la poussière, la densité numérique, le nombre de Prandtl, le nombre d'Eckert, le paramètre source/puits de chaleur et le paramètre d'instabilité sur les profils de vitesse et de température sont étudiés.

En résumé, l'étude des écoulements des fluides dans les canaux aux parois poreuses est d'actualité à cause des innombrables applications qui en résultent dans le domaine industriel. On peut citer entre autres le processus d'amélioration des systèmes de filtrations d'air, l'optimisation des processus de lubrification et

de refroidissement ou protection thermique des plaques par ablation, la sublimation de surface, la régression de grain solide (comme dans le cas de la combustion dans les moteurs de fusée). En mécanique des fluides, tout problème devrait pouvoir être résolu à partir des équations classiques tirées des principes de conservation complétées par l'équation d'état du fluide. Théoriquement la solution est déterminée si l'on ajoute des conditions aux limites et les conditions initiales. Ces conditions aux limites sont en général définies par des surfaces solides immobiles ou en mouvement, qui limitent l'espace occupé par le fluide, par des surfaces libres sur lesquelles règnent des pressions constantes et par des champs de vitesses. Quant aux conditions initiales, elles expriment l'instant de départ pour l'étude du mouvement du fluide. Les systèmes d'équations obtenus sont souvent trop complexes pour pouvoir être résolu par des calculs surtout si l'écoulement est turbulent, d'ailleurs, on ne sait pas trouver des solutions. Cette difficulté vient de ce que ces équations ne sont pas linéaires. Cependant, pour les écoulements laminaires, où les conditions aux limites sont particulièrement simples, il est possible de trouver une solution. Il s'agit dans ce travail d'étudier l'écoulement laminaire sous pression d'un fluide incompressible le long d'un canal semi-poreux à parois horizontales et parallèles.

Généralement dans la nature, l'écoulement d'un fluide se fait suivant trois dimensions ; ce qui est souvent une source de difficulté pour les mécaniciens de fluide. C'est ainsi que la géométrie des canaux plans est théoriquement souvent exploitée pour modéliser les écoulements, car celle-ci permet le passage des écoulements en 3D trop complexes aux écoulements en 2D plus pratiques. L'écoulement plan de Couette est un exemple illustratif. L'avantage qu'offre la géométrie d'un canal plan a été aussi exploité pour la première fois en 1953 par Berman [6], mais en utilisant les parois poreuses. Partant des équations de Navier-Stokes en 2D, celui-ci réalisa que la composante normale de la vitesse devrait être indépendante de variable  $x$  (direction de l'écoulement) ce qui lui a

permis de réduire les équations de Navier-Stokes en une équation différentielle ordinaire non-linéaire d'ordre 4. Et l'écoulement était ensuite contrôlé grâce à un paramètre de contrôle  $R$  (Reynolds d'injection), ces travaux étaient fondés sur la vitesse normale d'injection  $V$  et de la mi-hauteur entre les deux plaques  $h$ . Ensuite, de nombreux travaux sur les écoulements dans des canaux poreux ont suivis. Parmi lesquels, on peut citer les travaux de Terrill [8] qui a fait une extension sur les faibles valeurs de  $R$  de Berman. Proudman [40], quant à lui a examiné le cas grandes valeurs de  $R$  en utilisant une approche d'intégrale. Ceux-ci ont été suivis par les travaux de Taylor et Yuan [7].

La mise en équation, la détermination des conditions aux limites et la méthodologie de résolution de ces équations feront alors l'objet du chapitre II.

# CHAPITRE II: MATERIELS ET METHODES

---

## II-1 ENONCÉ DU PROBLÈME

Considérons un fluide newtonien incompressible ayant une densité volumique de masse  $\rho$  et une viscosité cinématique  $\nu$ , situé dans un canal horizontal à parois parallèles, la paroi supérieure du canal étant poreuse et la paroi inférieure imperméable.

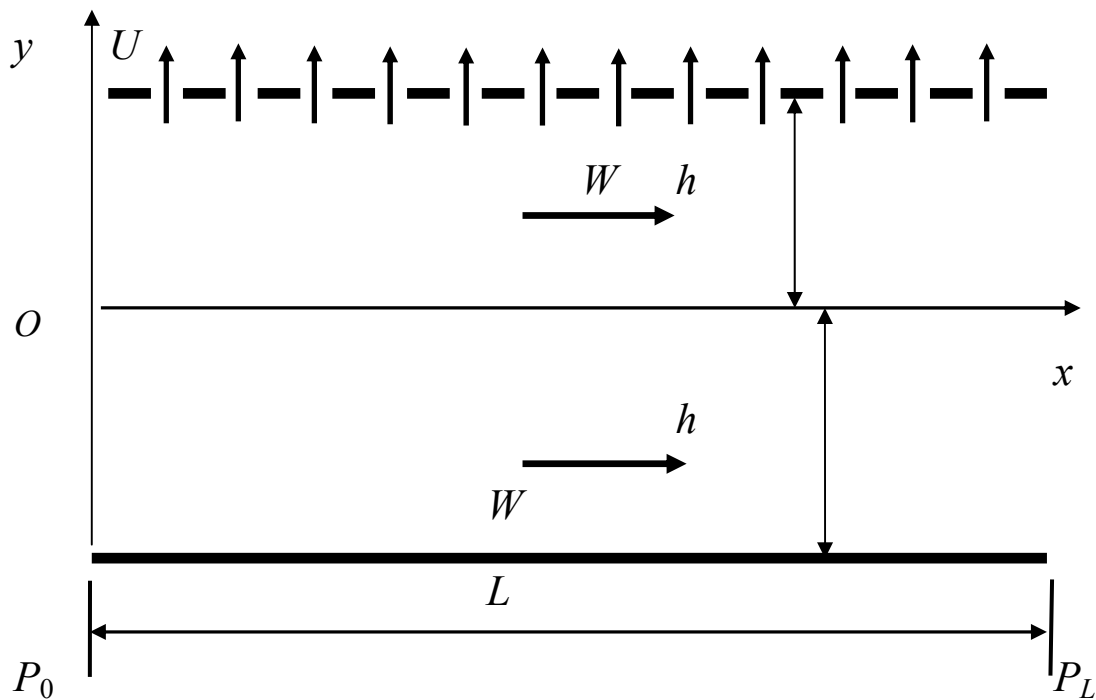
Le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  est adopté avec les vecteurs unitaires respectifs  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  de sorte que le sens de l'écoulement est orienté suivant l'axe  $(Ox)$ , symétrique par rapport aux deux parois horizontales du canal, l'axe des  $y$  est ascendant et perpendiculaire aux parois.  $(2Z_m)$  est la largeur du canal et ses deux parois sont situées en  $y = -h$  et  $y = h$ , et ont la même longueur  $L$  telle que  $0 \leq x \leq L$ . D'un point de vue pratique, le canal est donc supposé être semi-infini de telle sorte qu'aucun écoulement longitudinal n'existe à l'extrémité fermée  $x = 0$ . La longueur  $L$  du canal est supposée être très grande par rapport à sa hauteur  $(y = 2h)$ .

En outre, pour obtenir une configuration bidimensionnelle de l'écoulement, le rapport de la largeur  $(2Z_m)$  sur la hauteur  $(2h)$  du canal est suffisamment grand pour que la direction  $(OZ)$  n'ait aucune influence sur l'écoulement considéré. Ainsi, les particules de fluide se déplacent dans le plan  $(x, y)$  et l'écoulement se répète de manière identique tout le long de l'axe  $(OZ)$ .

La paroi supérieure poreuse subit une injection ou une succion de fluide avec une vitesse constante et uniforme, orthogonalement à la paroi du canal supérieur, comme le montre la figure 6. Un gradient de pression externe  $(P_L - P_0)/L$  constant dans le temps est appliqué entre les deux extrémités du canal. Seul le cas d'un gradient de pression favorable est étudié dans ce travail. Le gradient de pression externe est qualifié de favorable lorsque sa valeur numérique et celle de la vitesse de succion ou d'injection sont de même signe:

cela se traduit lorsque le gradient de pression externe est négatif pour l'injection, et positif pour la succion.

Ceci nous permet de ressortir le dispositif du problème, présenté à la figure ci-dessous.



**Figure6:** Canal horizontal parallèle ayant une paroi supérieure poreuse et une paroi inférieure imperméable.

Le canal contient l'écoulement laminaire d'un fluide qui est aspiré à une vitesse constante et uniforme  $U$  orthogonalement à la paroi poreuse.  $W$  représente la vitesse maximale de l'écoulement plan de Couette que peut offrir le gradient de pression. Cette vitesse est l'échelle de la vitesse longitudinale.

Les forces de masse n'ont pas d'effets sur l'écoulement étudié et le champ de vitesse  $\mathbf{V}$  a pour composantes longitudinale et transversale

$(V_x, V_y)$  respectivement.

Dans son ensemble, la mécanique des fluides est gouvernée par trois principes fondamentaux: le principe de conservation de la masse, le principe de conservation de la quantité de mouvement et le principe de conservation de l'énergie. Du fait que notre étude ne s'intéresse qu'à l'aspect dynamique, on se limite donc aux principes de conservation de la masse et conservation de la quantité de mouvement, afin d'établir les équations d'hydrodynamiques encore appelées les équations de Navier-Stokes.

## II-2 CONSERVATION DE LA MASSE

Les équations d'hydrodynamiques expriment le principe de conservation de la masse à travers l'équation de continuité.

### II-2-1 Taux de dilatation volumique

Soit  $dv$  le volume occupé par la particule de fluide à l'instant  $t$ ,

$dv'$  le volume occupé par la particule de fluide à l'instant  $t + dt$

$D(x, y, z)$  : la vitesse de déformation à l'instant  $t$ ,

$D(x', y', z')$  : la vitesse de déformation à l'instant  $t + dt$ .

Par définition; le Jacobien  $J$  est donné par:

$$J = \frac{dv'}{dv} = \frac{D(x', y', z')}{D(x, y, z)}, \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) peut encore s'écrire suivante:

$$\frac{D(x', y', z')}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

or  $\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{OM}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$  et  $\mathbf{MM}' = \mathbf{V}dt$ ,

en introduisant  $O$  par la relation de Chasles il vient :  $\mathbf{MO} + \mathbf{OM}' = \mathbf{V}dt$   
 ou encore  $\mathbf{OM}' = -\mathbf{MO} + \mathbf{V}dt$  avec  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  .

On a donc :

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + udt) = 1 + dt \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = dt \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial x'}{\partial z} = dt \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = dt \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 + dt \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial y'}{\partial z} = dt \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2.3c)$$

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = dt \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z'}{\partial y} = dt \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 + dt \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.3d)$$

Il vient que :

$$\frac{dv'}{dv} = \begin{vmatrix} \left(1 + dt \frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(dt \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(dt \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \left(dt \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(1 + dt \frac{\partial v}{\partial y}\right) & \left(dt \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \left(dt \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(dt \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \left(1 + dt \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

Le calcul du déterminant nous permet d'obtenir:

$$\begin{aligned} \frac{dv'}{dv} = & 1 + dt \frac{\partial u}{\partial x} + dt \frac{\partial v}{\partial y} + dt^2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + dt \frac{\partial w}{\partial z} + dt^2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + dt^2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \\ & dt^3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - dt^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - dt^3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - dt^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - dt^3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \\ & dt^3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + dt^3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - dt^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - dt^3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

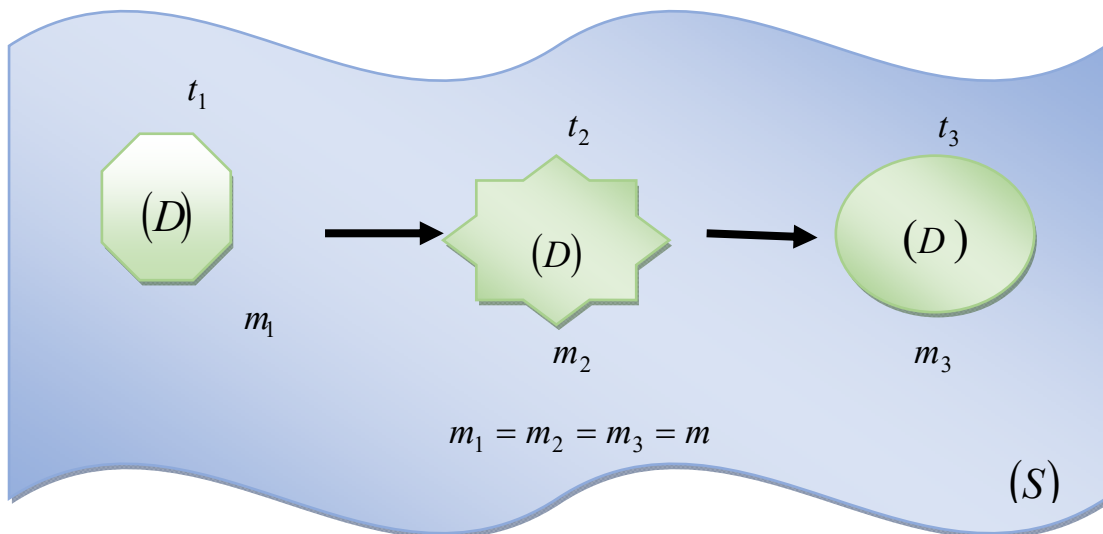
En négligeant tous les termes de degré 2 et 3 on obtient :

$$\frac{d(dv)}{dt} = \text{div} \mathbf{V} dv \quad [41] \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) est le taux de dilatation volumique relative de la particule fluide se trouvant en ce point à cet instant.

### II-2-2 Enoncé du principe de conservation de la masse

Formulé pour la première fois, par Léonard De Vinci, ensuite par Héron [41], le principe de conservation de la masse stipule l'énoncé suivant : quelque soit le domaine (D) de fluide limité par une surface fermée (S), ne contenant aucune source ni puits de masse, et entièrement contenu dans le fluide, la masse de fluide contenue dans (D) reste constante quand on suit le domaine (D) dans son mouvement.



**Figure 7 :** Domaine de fluide (D) délimité par une surface (S)

### II-2-3 Equation de continuité.

Soit  $v$  le volume de fluide contenu dans le domaine (D) et soit  $dv$  le volume élémentaire pris autour d'une particule de fluide contenu dans (D) à

l'instant  $t$ . Le principe de conservation de la masse nous permet d'écrire:  
 $m = cte$

Pour une particule de fluide de masse  $dm$  contenue dans  $(D)$ , la masse totale du fluide dans le domaine  $(D)$  est donnée par la relation suivante :

$$m = \iiint_D dm \quad (2.7)$$

En tenant compte du fait que  $dm = \rho dv$ , on obtient la relation suivante :

$$m = \iiint_D \rho(M, t) dv \quad (2.8)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide.

D'après le principe de conservation de la masse, la masse reste constante au cours du temps. Ce qui conduit à l'équation suivante:

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_D \frac{d}{dt}(\rho dv) = 0 \quad (2.9)$$

$$\iiint_D \frac{d\rho}{dt} dv + \rho \frac{d(dv)}{dt} = 0 \quad (2.10)$$

Lorsqu'on utilise la dérivée lagrangienne définie par :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}, \quad (2.11)$$

en tenant compte de l'expression donnant la relation entre la divergence du vecteur vitesse et le taux de dilatation volumique obtenu à (2.6), l'équation (2.10)

devient :

$$\iiint_D \left[ \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div} \rho(M, t) \mathbf{V} \right] dv = 0 \quad (2.12)$$

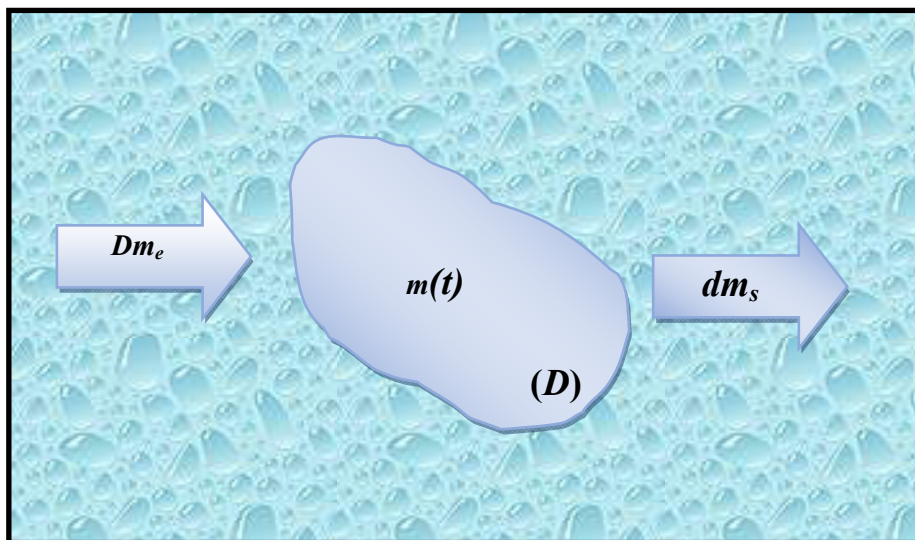
Cette équation devant être vérifiée pour tout domaine [41] et permet d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \text{div}[\rho(M,t)\mathbf{V}] = 0 \quad (2.13)$$

où  $\text{div}(\rho\mathbf{V}) = \rho \text{div}\mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \text{grad}\rho$

l'équation (2.13) est appelée équation de continuité. Elle traduit la conservation de la masse.

Si on considère un écoulement de fluide avec un débit entrant et un débit sortant, la masse de fluide contenue dans le domaine ( $D$ ) donne une autre forme à l'équation de continuité. La figure ci-dessous montre le domaine ( $D$ ) de fluide évoluant dans le temps avec les débits entrant et sortant.



**Figure 8:** Conservation de la masse avec débit entrant et sortant.

Puisque la masse  $m = cte$  , on a :

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (2.14)$$

L'équation de conservation de la masse avec débit entrant et sortant s'écrit :

$$dm = dm_e - dm_s \quad (2.15)$$

En dérivant  $dm$  par rapport à  $t$  la relation (2.15) devient:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_e}{dt} - \frac{dm_s}{dt} \quad (2.16)$$

L'équation (2.16) peut encore se mettre sous la forme :

$$\frac{dm}{dt} = Q_e - Q_s \quad (2.17)$$

avec  $Q_e = \frac{dm_e}{dt}$  et  $Q_s = \frac{dm_s}{dt}$  où  $Q_e$  et  $Q_s$  représentent respectivement les débits de masse entrant et sortant.

En substituant la relation suivante :

$$m = \iiint_{(D)} dm = \iiint_{(D)} \rho dv, \quad (2.18)$$

dans celle de (2.17) on aboutit à :

$$\iiint_{(D)} \left( \frac{d}{dt} (\rho dv) \right) = Q_e - Q_s. \quad (2.19)$$

La différentiation de la relation (2.19) permet d'écrire:

$$\iiint_{(D)} \left( \frac{d\rho}{dt} dv + \rho \frac{d(dv)}{dt} \right) = Q_e - Q_s \quad (2.20)$$

La relation (2.20) peut aussi se mettre sous la forme :

$$\iiint_{(D)} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) \right) dv = Q_e - Q_s, \quad (2.21)$$

En définissant respectivement les débits de masse entrant et sortant par unité de masse du fluide, on a :

$$Q_e = \iiint_{(D)} \rho q_e dv \text{ et } Q_s = \iiint_{(D)} \rho q_s dv \quad (2.22)$$

Où  $q_e$  et  $q_s$  sont respectivement les débits de masse entrant et sortant par unité de masse du fluide. En remplaçant (2.22) dans la relation (2.21) il vient :

$$\iiint_{(D)} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) \right) dv = \iiint_{(D)} \rho (q_e - q_s) dv. \quad (2.23)$$

La relation ci-dessus étant vraie quelque soit le domaine du fluide, on obtient l'équation de continuité avec débits entrant et sortant :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) = \rho (|q_e| - |q_s|). \quad (2.24)$$

La relation (2.24) est appelé équation locale de conservation de la masse avec un débit entrant et sortant par unité de masse du fluide. Pour une masse volumique variable  $\rho = \rho(M, t)$ , celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} \rho \quad (2.25)$$

Cette expression peut encore s'écrire sous la forme :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (2.26)$$

en injectant ces expressions dans l'équation (2.24) puis en simplifiant membre à membre de l'égalité, celle-ci nous permet de trouver une autre forme locale de l'équation de conservation de la masse avec des débits entrant et sortant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho (|q_e| - |q_s|). \quad (2.27)$$

La contrainte incontournable lors de la détermination du champ de vitesse de l'écoulement est l'équation de conservation de la masse écrite pour les flux entrant et sortant sous la forme (2.27) où  $q_e$  et  $q_s$  représentent les débits de masse par unité de masse de fluide des flux entrant et sortant respectivement, avec  $q_e \leq 0$  et  $q_s \geq 0$ .

#### II-2-4 Cas particulier de l'équation de continuité : Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque la masse volumique ne varie pas en fonction de la pression. Les liquides (eau, huile, etc.) et les gaz à faible vitesse peuvent être considérés comme des fluides incompressibles.

Partant de l'équation d'état du fluide :

$$\rho(p, T) = 0 \quad (2.28)$$

En tenant compte de l'incompressibilité du fluide la relation (2.28) devient  $\rho = \rho(T)$  et lorsque le fluide est incompressible en transformation isotherme

( $T = cte$ ), la masse volumique varie très faiblement avec la pression ainsi  $\rho = \rho_0 = cte$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ et } \mathbf{grad} \rho = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Par conséquent la dérivée totale de la masse volumique est nulle :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} \rho = 0 \quad (2.30)$$

Lorsqu'il y'a compensation entre un débit entrant par unité de masse et un débit sortant par unité de masse c'est-à-dire  $|q_e| = |q_s|$ , on dit alors que le flux est conservatif, alors l'équation (2.27) devient :

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0 \quad (2.31)$$

L'équation (2.31) peut s'écrire en coordonnées cartésiennes suivant la relation :

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (2.32)$$

Où  $V_x$  et  $V_y$  représentent respectivement les composantes longitudinale et transversale du champ de vitesse du fluide incompressible.

Cette relation peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial V_y}{\partial y} \quad (2.33)$$

Ce qui explique réellement l'existence d'une fonction de courant  $\psi$  dans le plan cartésien qui est défini par la relation.

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.34)$$

Les relations (2.34) montrent aussi que la fonction  $\psi(x, y)$  est invariante sur toute ligne tangente en tout point au vecteur vitesse, que l'on appelle ligne de courant, puisque, sur une telle ligne, les variations des coordonnées entre deux points voisins,  $dx$  et  $dy$ , vérifient :

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}, \quad \text{car} \quad \mathbf{V} \wedge d\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

$$\text{avec} \quad d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \quad \text{ou encore} \quad d\psi = 0.$$

Cette grandeur  $\psi(x, y)$ , définie à une constante additive près par les relations (2.34), est appelée fonction de courant.

## II-3 CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

### II-3-1 Forces de pression

La pression est la force normale exercée sur une surface unitaire :

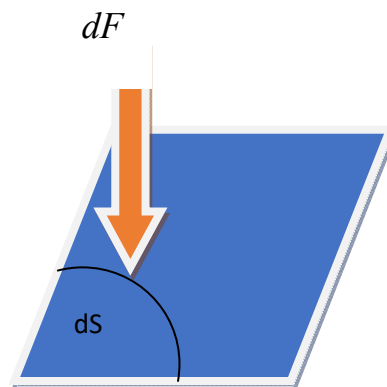
$$p = \lim_{ds \rightarrow 0} \left( \frac{dF}{ds} \right) \quad (2.36)$$

où :

$dS$  : surface élémentaire autour d'un point dans le fluide.

$dF$  : force élémentaire appliquée à la surface  $dS$ .

Il s'agit d'une propriété qui dépend du point considéré, elle peut donc être différente d'un point à l'autre dans le fluide [42].



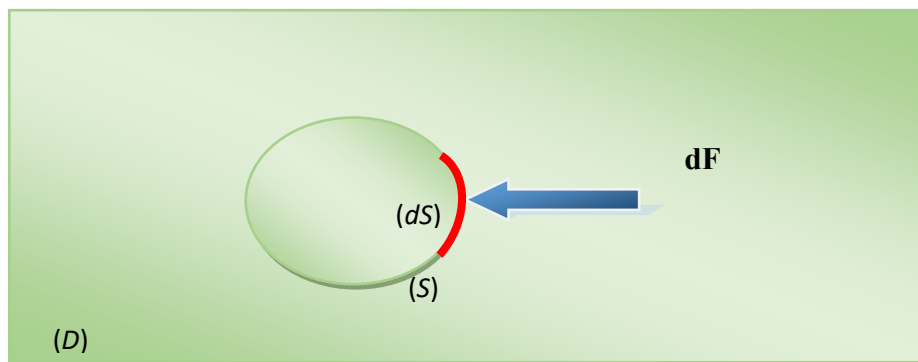
**Figure 9:** Notion de pression.

### II-3-2 Forces de contact

On appelle force de contact sur une portion de fluide ( $D$ ) limitée par une surface fermée ( $S$ ), la force exercée par le fluide extérieur sur le fluide intérieur à ( $D$ ) et qui s'applique sur la surface ( $S$ ) à raison de  $\mathbf{T} dS$  sur l'élément de Surface  $dS$  telle que :  $d\mathbf{F} = \mathbf{T}(M) dS$ , où  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{T}(M)$  sont respectivement la force de contact sur  $dS$  et la tension ou contrainte au point  $M$ .

On peut alors dire que le caractère déformable d'un fluide est du à l'existence en son sein du champ de contrainte  $\mathbf{T}(M)$ .

La figure ci-dessous illustre une particule fluide ( $D$ ) sur laquelle est appliquée la force  $\mathbf{T}dS$  sur l'élément de surface  $dS$ . La contrainte  $\mathbf{T}$  contient une composante normale ou contrainte normale à  $dS$  et une composante parallèle ou composante tangentielle à  $dS$  (ou contrainte de glissement, ou contrainte de cisaillement) et est égale à :  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_n + \mathbf{T}_f$ .



**Figure 10:** Portion de fluide ( $D$ ) délimitée par une surface ( $S$ )

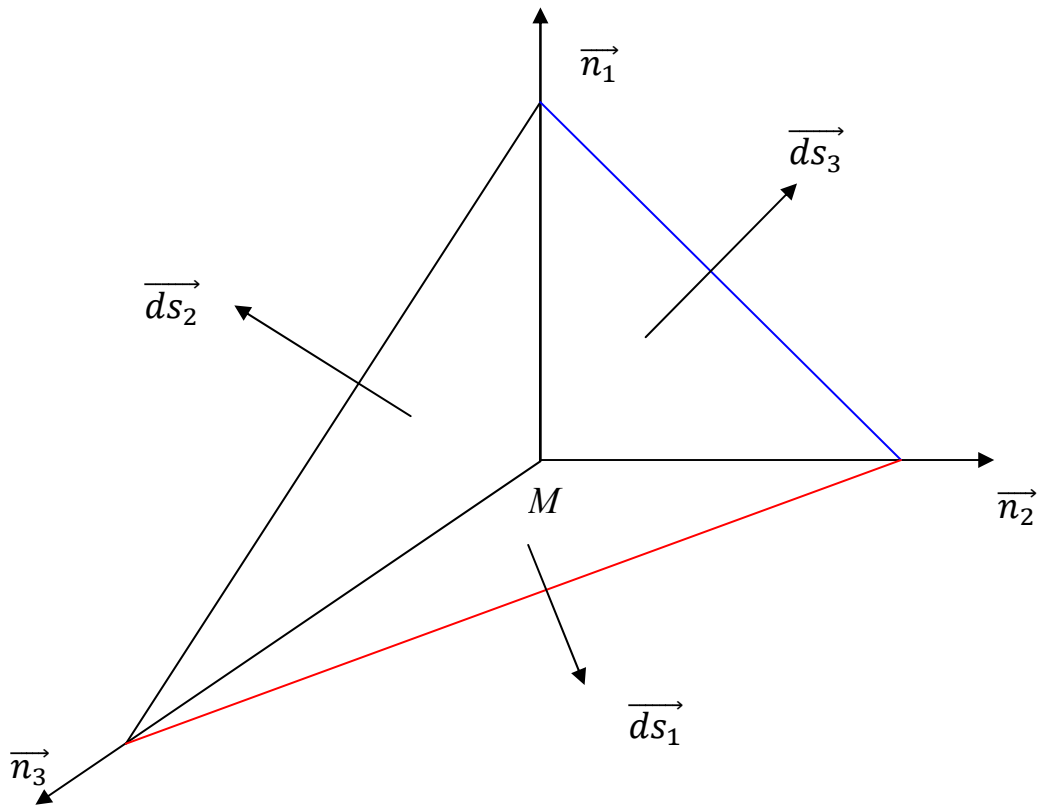
### II-3-3 Tenseur des contraintes

Pour les fluides étudiés dans notre travail, on vérifie les deux propriétés suivantes :

Propriété1: la distribution des contraintes  $\mathbf{T}(M)$ , en tout point  $M$  du fluide, est totalement déterminée dès que l'on connaît les contraintes qui s'exercent sur les trois éléments de surface formant un trièdre trirectangle ayant pour origine le point  $M$ .

Soit en  $M$  la surface  $dS$  orientée sur laquelle s'applique la contrainte  $\mathbf{T}(M)$  ; soient  $dS_1$ ,  $dS_2$  et  $dS_3$  trois éléments de surface trirectangle ayant  $dS_i$  pour normale  $\mathbf{n}_i$  telle que :

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{S}_1 + d\mathbf{S}_2 + d\mathbf{S}_3. \quad (2.36)$$



**Figure 11** : Représentation de la surface orientée  $dS$

$dS_1, dS_2$  et  $dS_3$  sont les trois projections de l'élément de surface normale  $dS$  suivant les axes du repère.

On pose que  $\sigma_k$  est la contrainte sur l'élément de surface de normale  $\mathbf{n}_k$ .

On montre après développement que :

$$T(M) = \sum_{k=1}^3 \sigma_k(M) n_k. \quad (2.37)$$

Dans une base orthonormée directe  $(\mathbf{x}_j) j=1,2,3$  la  $j$ ème composante  $T_j$  de la contrainte  $\mathbf{T}$  est donnée par :

$$\sum_{j=1}^3 T_j(M) \mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \sigma_{kj} \mathbf{x}_j \right) n_k, \quad (2.38)$$

Comme la base est orthonormée, la  $j$ ème composante  $T_j$  au point  $M$  sont les composantes d'un vecteur de second ordre appelé tenseur de contrainte noté  $\overline{\sigma}$ .  $\sigma_{kj}$  est la contrainte dirigée suivant l'axe  $\mathbf{x}_j$  et appliquée sur l'élément de surface perpendiculaire à  $n_k$ .

Propriété2: si l'on considère maintenant un petit parallépipède rectangle bâti sur le point  $M$  et aux arrêts parallèles aux axes de coordonnées et qu'on exprime l'équilibre des moments des forces appliquées, on trouve que le tenseur des contraintes  $\overline{\sigma}$  est symétrique, c'est-à-dire  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

On démontre que la contrainte  $\mathbf{T}$  sur un élément de surface pris autour du point  $M$  du fluide est liée à la normale unitaire  $\mathbf{n}$  de cet élément de surface par la relation suivante:

$$\mathbf{T} = \overline{\sigma} \mathbf{n}, \quad (2.39)$$

dans laquelle  $\overline{\sigma}$  est le tenseur d'ordre 2 des contraintes. La composante  $\sigma_{jk}$  de ce tenseur s'interprète comme la contrainte suivant l'axe  $x_j$  sur une surface de normale  $n_k$ .

Pour  $j = k$ , la composante  $\sigma_{jj}$  est appelée contrainte normale et pour  $j \neq k$ , la composante  $\sigma_{jk}$  est appelée contrainte tangentielle.

### II-3-4 Loi de comportement d'un fluide Newtonien

#### a) Hypothèses de Stokes (Fluide de Stokes)

Rappelons qu'un fluide newtonien est un fluide de Stokes vérifiant l'hypothèse de Newton à savoir:

H1 : le tenseur des contraintes est une fonction continue du tenseur des taux de déformations et de l'état thermodynamique local (pression, température) du fluide, il est indépendant du temps de la translation et de la rotation de l'élément de fluide local.

H2 : le fluide est entièrement dénué d'élasticité, c'est-à-dire il ne possède aucune mémoire du passé.

H3 : le fluide est dit homogène : un même état des contraintes conduit à un même état des déformations quel que soit le point considéré dans le fluide. Le tenseur des contraintes ne dépend pas explicitement des coordonnées locales.

H4 : le fluide est isotrope c'est-à-dire les relations entre contraintes et déformations n'ont pas de direction privilégiée dans le fluide.

La combinaison des hypothèses H1, H2, H3 et H4 nous permet d'écrire que :  $\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl})$  où  $f_{ij}$  est une fonction dépendant de la pression et de la température locale.

#### b) Principe de symétrie :

Selon le principe entre les causes (contraintes) et effets (taux de déformation), les taux de déformation ont en plus d'autres symétries éventuelles, toutes les symétries que possèdent les contraintes. Par conséquent, les plans principaux et les directions principales du tenseur  $\overset{=}{\sigma}$  des contraintes sont confondus avec ceux du tenseur  $\overset{=}{\varepsilon}$  (taux de déformation).

**c) Hypothèse de Newton**

Les contraintes sont les contraintes linéaires des taux de déformations c'est-à-dire une composante quelconque  $\sigma_{ij}$  du tenseur  $\overline{\sigma}$  est associée linéairement à toutes les composantes  $\varepsilon_{kl}$  du tenseur  $\overline{\varepsilon}$  :

$$\sigma_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \alpha_{ijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (2.40)$$

où  $\alpha_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre quatre qui contient  $3^4$  composantes.

On appelle fluide Newtonien tout fluide de Stokes vérifiant l'hypothèse de Newton. Les fluides usuels que l'on rencontre dans la nature (liquide, gaz) sont Newtoniens. En utilisant l'hypothèse d'isotropie du fluide on a :

$$\sigma_{jk} = (a + c \operatorname{div} \mathbf{V}) \delta_{jk} + (b - c) \varepsilon_{jk} , \quad (2.41)$$

où  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker.

La relation précédente étant valable pour toutes les valeurs d'indices  $j$  et  $k$  nous pouvons écrire que :

$$\overline{\sigma} = (a + c \operatorname{div} \mathbf{V}) \overline{I} + (b - c) \overline{\varepsilon} . \quad (2.42)$$

$c$  représente la viscosité de dilatation  $\eta$  du fluide ; et on montre expérimentalement à partir de l'expérience de Couette que le terme  $(b - c)$  s'identifie à  $2\mu$  où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide.

Dans le cas particulier où le fluide est en équilibre au repos, il n'y a pas de mouvement c'est-à-dire il n'existe aucune déformation partout dans le fluide. On a alors  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$  cela entraîne l'annulation des termes  $\operatorname{div} \mathbf{V}$  et  $\varepsilon_{jk}$  de la relation (2.41).

Nous obtenons donc  $\sigma_{jk} = a \delta_{jk}$ . Ceci permet d'écrire  $T_j$  sous la forme

$T_j = a \delta_{ij} n_k = a n_j$ . Ainsi  $\mathbf{T}$  prend la forme :

$$\mathbf{T} = a\mathbf{n}. \quad (2.43)$$

Lorsqu'un fluide est en équilibre au repos, il existe une seule contrainte en tout point du fluide : c'est la pression  $p$  telle que  $\mathbf{T} = -p\mathbf{n}$ . Par identification avec la relation, (2.43) on obtient  $a = -p$ , alors nous aboutissons finalement à la relation :

$$\sigma_{ij} = (-p + \eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (2.44)$$

#### **d) Forme finale de la loi de contraintes**

La viscosité d'un fluide est la propriété qui exprime sa résistance à une force tangentielle de frottement. Son effet se manifeste principalement au voisinage des parois. Dans le cas d'un fluide Newtonien en mouvement, la relation entre la contrainte de cisaillement,  $\tau$ , et le gradient de vitesse est linéaire ( direction de l'axe des  $y$  est perpendiculaire et la vitesse de l'écoulement,  $V$ , est parallèle à la paroi) [43] :

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad (2.45)$$

L'expression de la viscosité cinématique est :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.46)$$

Où :

$\mu$  : viscosité dynamique ; en  $(N.s/m^2)$ .

$\nu$  : la viscosité cinématique ; en  $(m^2/s)$ .  $\tau$  : contrainte de cisaillement ; en  $(N/m^2)$ .

### II-3-5 Equations de Navier-Stokes

#### a) Enoncé du principe de conservation des quantités de mouvement

Ce principe stipule que, quel que soit le domaine ( $D$ ) de fluide que l'on suit dans son mouvement, la dérivée par rapport au temps du tenseur des quantités de mouvement dans un référentiel galiléen est égale au tenseur des forces extérieures appliquées au fluide contenu dans le domaine ( $D$ ). Cet énoncé entraîne l'égalité entre les résultantes générales et l'égalité entre les moments résultants ; la deuxième égalité n'apporte aucune information supplémentaire sur la détermination du champ des vitesses.

#### b) Equation de Cauchy

En exploitant l'énoncé de conservation de la quantité de mouvement, nous obtenons :

$$\frac{dC}{dt} = \mathbf{F}_{ext}. \quad (2.47)$$

Où  $C$  représente le tenseur des quantités de mouvement dont la dérivée par rapport au temps équivaut encore à l'égalité entre les moments résultants :

$$\mathbf{R}_{ext} = \iiint_D \rho \mathbf{F} dv + \oiint \overline{\boldsymbol{\sigma}} ndS \quad (2.48)$$

Dans cette relation,  $\rho \mathbf{F} dv$  est la force de masse qui s'applique sur une particule de fluide de masse ;  $dm$  les forces de masse qui sont proportionnelles à la masse et qui sont dues à l'existence d'un ou plusieurs champs de forces dans le domaine où se trouve le fluide.

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_D \rho \mathbf{F} dv + \oiint \overline{\boldsymbol{\sigma}} ndS. \quad (2.49)$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky on a :

$$\oiint_S \overline{\boldsymbol{\sigma}} nds = \iiint_D \text{div} \overline{\boldsymbol{\sigma}} dv. \quad (2.50)$$

La relation (2.49) devient alors :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_D \rho \mathbf{F} dv + \iiint_D \operatorname{div} \overline{\overline{\sigma}} dv, \quad (2.51)$$

soit :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_D (\rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \overline{\overline{\sigma}}) dv. \quad (2.52)$$

Le domaine ( $D$ ) pouvant être quelconque et arbitrairement choisi dans le fluide en mouvement, on aboutit à l'équation locale de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \overline{\overline{\sigma}} \quad (2.53)$$

Cette relation obtenue ci-dessus peut aussi se mettre sous forme d'une notation indicielle suivante :

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.54)$$

L'équation (2.54) est appelé relation de Cauchy. Cette relation est valable quelque soit le fluide, qu'il soit newtonien ou pas.

### c) Cas du fluide Newtonien

Pour tout fluide newtonien, la relation (2.44) ci-dessus se met sous la forme tensorielle :

$$\overline{\overline{\sigma}} = (-p + \eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}}. \quad (2.55)$$

Dans la suite de notre travail, nous allons utiliser la relation suivante :

$$\operatorname{div} (f \overline{\overline{A}}) = f \operatorname{div} \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}} \cdot \operatorname{grad} f, \quad (2.56)$$

où  $f$  est une fonction scalaire et  $\overline{\overline{A}}$  un tenseur d'ordre 2. On en déduit que :

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}) = \operatorname{div}\left[(-p + \eta \operatorname{div}\mathbf{V})\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}}\right] \quad (2.57a)$$

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}) = -\mathbf{grad}p + \mathbf{grad}(\eta \operatorname{div}\mathbf{V}) + \operatorname{div}\left[\mu\left(\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}} + {}^t\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}}\right)\right] \quad (2.57b)$$

En remplaçant la relation (2.57b) dans les équations de Cauchy, on obtient les nouvelles équations données par :

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \overline{\overline{\operatorname{grad}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V})}}\right) &= \rho\mathbf{F} - \mathbf{grad}p + \\ \mathbf{grad}(\eta \operatorname{div}\mathbf{V}) + \operatorname{div}\left[\mu\left(\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}} + {}^t\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}}\right)\right] & \end{aligned} \quad (2.58)$$

L'équation (2.58) s'appelle équation de Navier-Stokes.

Lorsque  $\mu$  et  $\eta$  sont des constantes on peut écrire :

$$\mathbf{grad}(\eta \operatorname{div}\mathbf{V}) = \eta \mathbf{grad}(\operatorname{div}\mathbf{V}) \quad (2.59a)$$

$$\operatorname{div}\left[\mu\left(\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}} + {}^t\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}}\right)\right] = \mu \operatorname{div}(\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}}) + \mu \operatorname{div}({}^t\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}}), \quad (2.59b)$$

or,  $\operatorname{div}(\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}}) = \Delta\mathbf{V}$  et  $\operatorname{div}({}^t\overline{\overline{\operatorname{grad}\mathbf{V}}}) = \mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}$ , alors l'équations de Navier-Stokes devient :

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\right) = \rho\mathbf{F} - \mathbf{grad}p + (\eta + \mu)\operatorname{div}(\mathbf{grad}\mathbf{V}) + \mu\Delta\mathbf{V}. \quad (2.60)$$

Ces équations mettent en évidence les forces suivantes appliquées à l'unité de volume du fluide :

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\right), \rho\mathbf{F}, \mathbf{grad}p \text{ et } \overline{\overline{\operatorname{grad}(\eta \operatorname{div}\mathbf{V})}} + \operatorname{div}\left[\overline{\overline{\mu \operatorname{grad}\mathbf{V}}} + {}^t\overline{\overline{\mu \operatorname{grad}\mathbf{V}}}\right]$$

respectivement les forces d'inertie, de masse, de pression et de viscosité.

Pour les fluides incompressibles en transformation isotherme ou de faibles variations de masse volumique ;  $div \mathbf{V} = 0$  et de plus  $\nu$  et  $\mu$  sont constants liés par une relation  $\mu = \rho\nu$ . Les équations suivantes qui sont les équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles se réduisent :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{V} \right] = \rho \mathbf{F} - \mathbf{grad} p + \mu \Delta \mathbf{V} . \quad (2.61)$$

## II-4 EQUATION DE TRANSPORT DE LA VORTICITE

### II-4-1 Définition de la vorticité

#### a) Circulations

On considère un contour fermé  $C$  dans un écoulement. La circulation le long de  $C$  est alors l'intégrale le long de  $C$  de la vitesse tangente à  $C$ . En notant  $d\mathbf{l}$  un vecteur tangent à  $C$  en un point  $M$  de  $C$ , de norme petite  $dl$ , la circulation vaut

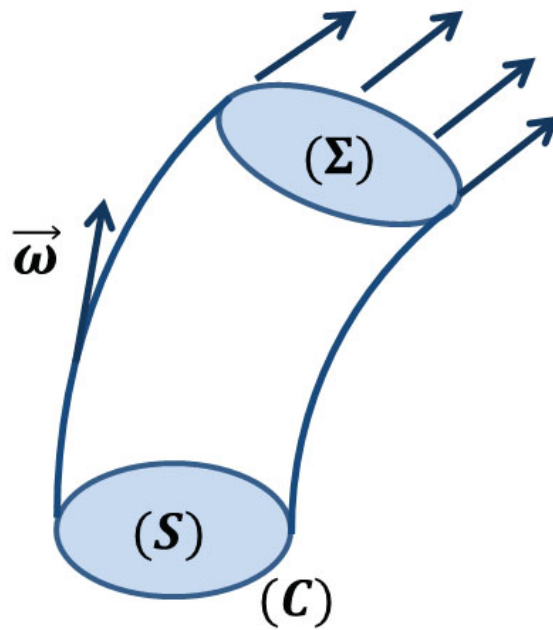
$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.62)$$

#### b) Vorticité

La vorticité est définie comme le rotationnel de la vitesse :  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ . Elle est reliée à la circulation par le théorème du rotationnel :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.63)$$

où  $S$  est une surface s'appuyant sur  $C$ , et  $d\mathbf{S}$  un vecteur normal à  $S$  de norme  $dS$  proportionnelle à un petit élément de surface.



**Figure 12** : Schéma d'un tube de vorticit   s'appuyant sur un contour  $C$ .

Les parois sont tangentes au vecteur vorticit   ; le flux de vorticit      travers  $S$  et  $\Sigma$  est donc identique.

### c) Tube de vorticit  

Une ligne de vorticit   est d  finie de fa  on analogue    une ligne de courant : c'est    un instant donn   une courbe qui est tangente en tout point    la vorticit   locale (son   quation est donné en  $2D$  par  $dx/\omega_x = dy/\omega_y$ ). Un tube de vorticit   s'appuyant sur un contour ferm    $C$  est compos   de l'ensemble des lignes de vorticit   passant par  $C$  (figure 1).

Pour un contour ferm   quelconque sur les parois du tube de vorticit  , d  limitant une surface  $\Sigma$ , on peut utiliser l'  galit   (2.63) pour la surface composé de  $\Sigma$  et des parois du tube. On trouve alors que le flux de vorticit      travers

$\Sigma$  est égal à celui à travers  $S$ , et à la circulation le long de  $C$ . On a donc finalement que dans un tube de vorticité :

- La circulation le long d'un contour fermé sur les parois est indépendante du contour.
- Le flux de vorticité à travers une surface interceptant le tube est indépendant de cette surface.

#### **II-4-2 Forme équivalente de l'équation de Navier-Stokes pour le fluide incompressible**

Dans la relation (2.61) obtenue ci-dessus le premier terme de gauche (forces d'inertie) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{V} \right] \quad (2.64)$$

Le terme de non-linéarité  $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{V}$  dans le membre de droite de l'équation (2.64) peut se mettre sous la forme :

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{V} = \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \quad (2.65a)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \right]. \quad (2.65b)$$

En insérant les relations (2.64) et (2.65a) dans l'équation (2.61), on obtient une nouvelle forme appropriée de l'équation de Navier-Stokes quelque soit le système de coordonnées :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V}. \quad (2.66)$$

Si on néglige l'action du poids  $\mathbf{F}$  en supposant que le mouvement du fluide a lieu dans un canal horizontal au poids alors les forces de masse s'annulent et la relation (2.66) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V}. \quad (2.67)$$

Ces équations de Navier-Stokes peuvent être détaillées dans plusieurs systèmes de coordonnées pour un champ de vitesse  $\mathbf{V}$ . Mais dans le cas de notre travail, l'utilisation du plan cartésien permet de visualiser et d'analyser la distribution du champ de vitesse et du gradient de pression externe favorable, de comparer les résultats expérimentaux et numériques, ainsi que d'étudier les performances de la paroi poreuse. Cela facilite la compréhension des interactions entre le fluide et la paroi poreuse, et contribue à l'optimisation du système d'écoulement laminaire.

L'étude des écoulements réels (visqueux) est gouvernée par les équations dites équations de Navier-Stokes, données par la relation (2.67). En pratique, la solution analytique de cette équation est impossible. Généralement, on utilise des hypothèses de base et on fait recours aux méthodes numériques (différences finies, volumes finis, éléments finis, méthode de tir,...etc). Dans toutes les situations, les forces de frottements, ou la viscosité n'est plus négligeable (fluide réel), ce qui fait la différence avec un fluide parfait.

Compte tenu de la géométrie de notre dispositif, la troisième composante du champ de vitesse  $V_z \mathbf{e}_z$  est négligée donc, la projection de l'équation de Navier-Stokes sur les deux axes, aboutie au système d'équations en coordonnées cartésiennes où les composantes du champ de vitesse sont  $(V_x, V_y)$  respectivement :

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \quad (2.68a)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \quad (2.68b)$$

### II-4 -3 Equation de vorticité.

Pour obtenir cette équation nous allons utiliser deux approches :

La première approche consiste à utiliser des dérivées partielles sur les équations de Navier-Stokes établies et d taill es ci-dessus en coordonnées cartésiennes et la seconde approche est bas e sur l'utilisation des identités vectorielles sur les équations de Navier-Stokes du fluide newtonien et visqueux.

#### a) Première approche

Considérons un écoulement plan de fluide isochore. Le problème posé se situant dans le plan cartésien  $(O, x, y)$ , les équations de Navier-Stokes déjà établies précédemment aux relations (2.68a) et (2.68b) prennent les nouvelles formes suivantes :

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta V_x \quad (2.69a)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta V_y \quad (2.69b)$$

Les propriétés mathématiques sur le gradient et le laplacien nous permettent d'écrire :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_x = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_y = V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad (2.70a)$$

$$\Delta V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \Delta V_y = \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \quad (2.70b)$$

A l'évidence, un moyen simple d'éliminer la pression est de dériver la première équation par rapport à  $y$ , de dériver la seconde par rapport à  $x$ , et de soustraire celle-ci de la première, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_y) - \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_x) = \\ \nu \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta V_y - \frac{\partial}{\partial y} \Delta V_x \right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Les opérateurs  $\partial(\cdot)$  et  $\Delta$  peuvent être permutés dans le second membre. En outre, en développant les termes de la relation (2.71), on montre que :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_y) - \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_x) = \text{div} \left\{ \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \mathbf{V} \right\} \quad (2.72)$$

En remplaçant la relation (2.72) par son expression dans la relation (2.71) il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \text{div} \left\{ \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \mathbf{V} \right\} = \nu \Delta \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (2.73)$$

On reconnaît dans la grandeur entre parenthèses la composante suivant  $\mathbf{e}_k$  du

$$\text{vecteur tourbillon } 2\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Cette composante est appelée vorticité de l'écoulement, et désignée par  $\omega$  (sans indice) :

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega} = \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_k \quad (2.75)$$

En remplaçant l'équation (2.75) dans la relation (2.73), ce qui donne l'équation de vorticité sous la forme :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \text{div}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (2.76)$$

En tenant compte des propriétés de la divergence on a :

$$\text{div}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \text{div} \mathbf{V}. \quad (2.77)$$

Compte tenu de ce que  $\text{div} \mathbf{V} = 0$ , car le fluide est supposé incompressible en transformation isotherme pour de faibles variations de masse volumique et de ce que  $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \mathbf{V})$  est identiquement nul pour un écoulement permanent, on obtient :

$$\mathbf{V} \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (2.78)$$

L'équation (2.78) se présente donc comme un bilan local de vorticité (dérivé du bilan de quantité de mouvement) avec un terme source qui s'identifie à un mécanisme de diffusion visqueuse, et elle porte le nom de l'équation de vorticité.

Les forces de pression n'apparaissent plus directement en tant que telles, mais elles ont été int gr es dans les autres paramètres du mouvement.

Par contre, cette astuce ne marche pas avec les écoulements tridimensionnels: on peut toujours éliminer la pression dans les équations de Navier-Stokes prises deux par deux, mais on se retrouve avec des termes qui contiennent les trois composantes de la vitesse et qui n'apportent guère de simplification.

L'opération effectuée au paragraphe précédent a permis de s'affranchir de la pression, et simultanément de réduire les équations dynamiques en une seule équation.

### b) Deuxième approche

Pour utiliser cette approche de résolution, nous signalons que le problème est régi par l'équation de la quantité de mouvement vectorielle présentée déjà ci-dessus et définie par :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \mathbf{grad}) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V} \quad (2.79)$$

Les forces de masse sont négligeables car on suppose que le mouvement du fluide a lieu dans une direction horizontale.

Dans le système de coordonnées cartésiennes on a :

$$(\mathbf{V} \mathbf{grad}) \mathbf{V} = \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}. \quad (2.80)$$

En égalisant les relations (2.79) et (2.80), on obtient:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V} \quad (2.81)$$

Où  $\mathbf{V}$  représente le vecteur vitesse,  $p$  la pression,  $t$  le temps,  $\Delta$  l'opérateur laplacien,  $\mathbf{rot} \mathbf{V}$  le rotationnel du champ de vitesse  $\mathbf{V}$ ,  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

En appliquant le rotationnel dans les deux membres de l'équation (2.81) il vient:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rotV}) + \mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)\right) + \mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = - \mathbf{rot}\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p\right) + \mathbf{rot}(\nu\Delta\mathbf{V}) \quad (2.82)$$

Pour l'obtention de l'équation de vorticité on effectue les calculs de chaque terme de la relation (2.82).

Compte tenu du fait que l'écoulement est permanent c'est-à-dire que le champ de vitesse ne dépend pas explicitement du temps, on écrit:

$$\mathbf{rot}\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rotV}) = 0 \quad (2.83)$$

Pour la suite, nous appliquons les propriétés mathématiques sur les opérateurs. On a alors :

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)\right) = 0 \quad (2.84)$$

$$\mathbf{rot}\left(-\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p\right) = -\frac{1}{\rho}\mathbf{rot}(\mathbf{grad}p) = 0 \quad (2.85)$$

Pour obtenir le troisième terme du membre de gauche de l'équation (2.82); on pose  $\mathbf{rotV} = \boldsymbol{\omega}$  et on décompose  $\mathbf{rot}(\mathbf{V} \wedge \boldsymbol{\omega})$  en utilisant la relation vectorielle générale suivante valable pour des champs de vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  quelconques :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{B}.\mathbf{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A}.\mathbf{grad})\mathbf{B} - \mathbf{B}div\mathbf{A} + \mathbf{A}div\mathbf{B} [42] \quad (2.86)$$

Compte tenu de ce que  $div\mathbf{V} = 0$ , car le fluide est supposé incompressible, et de ce que  $div\boldsymbol{\omega} = div(\mathbf{rotV})$  est identiquement nul pour tout champ de vecteur, on obtient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{V} \wedge \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}.\mathbf{grad})\mathbf{V} - (\mathbf{V}.\mathbf{grad})\boldsymbol{\omega} \quad (2.87)$$

Evaluons maintenant le dernier terme  $\nu\Delta\omega$  en utilisant l'identité vectorielle :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \quad (2.88)$$

On obtient :

$$\Delta\mathbf{V} = \mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{V}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{V}) = -\mathbf{rot}\omega \quad (2.89)$$

En prenant le rotationnel des deux membres, l'équation ci-dessus devient

$$\mathbf{rot}(\Delta\mathbf{V}) = \Delta\omega - \mathbf{grad}(\mathit{div}\omega) = \Delta\omega \quad (2.90)$$

Lorsque  $\rho$  est constant, les coefficients de viscosités  $\mu$  et  $\nu$  sont aussi constants.

On obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{rot}(\nu\Delta\mathbf{V}) = \nu\Delta\omega. \quad (2.91)$$

En remplaçant les relations (2.83), (2.84), (2.85) et (2.91) déjà trouvées pour chacun des termes dans l'équation (2.82); on obtient finalement une équation appelée équation de vorticité donnée par la relation :

$$(\mathbf{Vgrad}\omega) = \nu\Delta\omega \quad (2.92a)$$

$$(\mathbf{Vgrad})\mathbf{rot}\mathbf{V} = \nu\Delta(\mathbf{rot}\mathbf{V}) \quad (2.92b)$$

En se servant de l'équation de vorticité (2.92a) obtenue ci-dessus, son membre de gauche s'écrit :

$$(\mathbf{Vgrad})\omega = \left( V_x \frac{\partial\omega}{\partial x} + V_y \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) \mathbf{e}_k, \quad (2.93)$$

et celui de droite devient :

$$\nu\Delta\omega = \nu \left( \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \right) \mathbf{e}_k \quad (2.94)$$

En égalisant les deux relations (2.93) et (2.94) il vient :

$$V_x \frac{\partial\omega}{\partial x} + V_y \frac{\partial\omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.95)$$

or  $V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  et  $V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,

En remplaçant  $V_x$  et  $V_y$  par leurs expressions qui les lient à  $\psi$ , il vient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (2.96)$$

en se référant de la relation (2.66):

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{V} = \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_k, \quad (2.97)$$

En remplaçant  $V_x$  et  $V_y$  par leurs expressions qui les lient à  $\psi$ , il vient :

$$\text{rot}\mathbf{V} = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \mathbf{e}_k \quad (2.98)$$

Lorsque l'on pose  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , l'équation (2.98) devient :

$$\text{rot}\mathbf{V} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_k, \quad (2.99)$$

En injectant la relation (2.97) dans la relation (2.96) on aboutit à :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi) = \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\nabla^2 \psi) \right), \quad (2.100)$$

avec :

$$\frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.101a)$$

$$\frac{\partial^2 (\nabla^2 \psi)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.101b)$$

$$\frac{\partial^2 (\nabla^2 \psi)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.101c)$$

La relation (2.100) est l'équation du transport de vorticité de l'écoulement laminaire en régime permanent d'un fluide incompressible dans le plan.

## II-5 FORME ADIMENSIONNELLE DE L'EQUATION DE VORTICITE

### II-5-1 Forme classique

L'équation du transport de vorticité obtenue à la relation (2.100) ci-dessus dépend de plusieurs groupements de variables, il faut l'adimensionnaliser pour ressortir les paramètres de contrôle. Rappelons que le but de l'adimensionnalisation est de rendre plus commode la modélisation d'une part, d'autre part d'effectuer une similitude des nombres sans dimensions entre l'écoulement industriel et l'analyse expérimentale de l'écoulement dans le canal à paroi supérieure poreuse. Ceci a trois intérêts majeurs :

- les équations obtenues sont simplifi es ;
- les équations calcul es étant normalis es, ce qui permet de mieux maîtriser les erreurs numériques ;
- la solution calcul e pour un jeu de nombres caractéristiques est valable pour tous les systèmes naturels ayant le même jeu de nombres caractéristiques : c'est le principe de similitude.

Si le fluide subit le processus d'injection ou de la succion uniquement, la vitesse de référence d'injection ou de la succion sera not e  $U$ , comme couramment r alis e. Dans le cas de ce travail, le gradient de pression externe imposé entre les deux extrémités du canal peut causer le mouvement de fluide si le processus d'injection ou de la succion n'existe pas. Ainsi, l'écoulement étudié est effectué par deux effets conducteurs qui sont l'injection ou la succion sur la paroi poreuse du canal et le gradient de pression externe appliqué aux deux extrémités de la conduite. Par conséquent la vitesse de référence est définie comme étant la somme des vitesses fournies par chaque effet conducteur ; nous avons alors:

$$V_{ref} = U + |W|, \quad (2.102)$$

où  $W = -(2\rho\nu)^{-1}(|P_L - P_0|/L)h^2$  est la vitesse maximale de l'écoulement de Couette sous la pression exercée qui existerait seule en l'absence du processus de la suction ou d'injection.

L'intérêt de la manière de définir la vitesse de référence comme faite dans (2.102) est de créer la possibilité de prendre en compte les effets du gradient de pression externe en introduisant dans la formulation des conditions aux limites le paramètre  $\alpha$  qui joue le rôle du gradient de pression sans dimension si la vitesse  $U$  de la suction ou de l'injection reste constante.

Dans ces conditions, la variation du gradient de pression externe est la même que la variation de  $\alpha$  et  $\alpha = |W|/U$  est le rapport de vitesse comparant les ordres de grandeur des vitesses longitudinales et transversales dans le canal.

Malgré la définition de  $\alpha$  sous forme de ratio de vitesse, ce paramètre peut être considéré comme le gradient de pression externe sans dimension [14] car sa définition en termes de gradient de pression  $(P_L - P_0)/L$  peut être écrite comme suit:

$$\alpha = |P_L - P_0|L^{-1} / (2\rho\nu h^{-2}U) \quad (2.103)$$

Dans tout ce qui suit, pour alléger l'écriture, les grandeurs adimensionnelles seront notées sans astérisque.

Les variables sans dimensions s'écrivent donc :

$$\xi = \frac{x}{h}, \eta = \frac{y}{h}, F = \frac{\psi}{V_{ref}h}, u = \frac{V_x}{V_{ref}}, v = \frac{V_y}{V_{ref}} \quad (2.104)$$

où :  $\xi$  est le paramètre adimensionnel défini sur la direction  $x$ ,

$\eta$  est le paramètre adimensionnel défini sur la direction  $y$ ,

$F$  est la fonction de courant adimensionnelle,

$u$  et  $v$  désignent les composantes longitudinale et transversale adimensionnelles du champ de vitesse respectivement.

Les relations (2.104) nous permettent d'établir les expressions des variables adimensionnelles suivantes :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.105a)$$

or :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (2.105b)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \quad (2.105c)$$

On a :  $\psi = V_{ref} h F$ , ce qui nous permet d'écrire les relations suivantes :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = V_{ref} h \frac{\partial F}{\partial \xi} \quad (2.106a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = V_{ref} h \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \quad (2.106b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_{ref} \frac{\partial F}{\partial \xi} \quad (2.106c)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{V_{ref}}{h} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \quad (2.106d)$$

Par analogie avec la relation (2.106d) nous avons:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{V_{ref}}{h} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \quad (2.107)$$

L'addition et factorisation des relations (2.106d) et (2.107) nous donnent :

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{V_{ref}}{h} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right), \quad (2.108)$$

avec  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{V_{ref}}{h} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$

En introduisant les grandeurs adimensionnelles définies ci-dessus, la forme classique de l'équation de vorticité devient:

$$\begin{aligned} & \frac{V_{ref}^2}{h} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) - \frac{V_{ref}^2}{h} \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = \\ & \nu \frac{1}{h^2} \frac{V_{ref}}{h} \left( \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.109)$$

En multipliant la relation ci-dessus par  $h^2 / (V_{ref})^2$ , et en simplifiant membre à membre, il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = \nu \frac{1}{V_{ref} \cdot h} \\ & \left( \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.110)$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = \frac{1}{R_e} \left( \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.111)$$

Avec  $R_e = (V_{ref} h) / \nu$  le nombre de Reynolds.

### II-5-2 Forme adaptée au problème à résoudre

La relation (2.111) est la forme classique de l'équation adimensionnelle du transport de vorticité. Elle peut ainsi être g n ralis e sur la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^2 F - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \nabla^2 F = \frac{1}{R_e} \nabla^2 \nabla^2 F \quad (2.112)$$

Afin de pouvoir résoudre l'équation différentielle obtenue à la relation (2.112), nous avons choisi d'utiliser la méthode des solutions semblables car elle est mieux adapt e à la géométrie et aux certaines hypothèses utilis es dans notre travail.

## II-6 METHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES

### II-6-1 Hypothèse de Berman [ 6 ]

L'hypothèse sur les solutions semblables exige que la composante transversale du champ de vitesse  $v$  est indépendante de la coordonn e  $\xi$  définie sur la direction  $x$ . Cette hypothèse a été envisag e pour la première fois par Berman. Elle reste valable dans le cas de notre travail car la hauteur  $h$  du canal ne varie pas dans le sens de la bande et la succion ou l'injection de fluide à travers le canal est effectu e uniformément sur toute la paroi poreuse.

### II-6-2 Application au problème à résoudre : équation de Proudman

Nous considérons l'expression sans dimension de la vitesse transversale donnée par la relation  $v(\eta) = -\partial F / \partial \xi$ . En intégrant cette équation et en tenant compte du fait que  $F = 0$  pour  $\xi = 0$ , on obtient la relation suivante :

$$F(\xi, \eta) = \xi \phi(\eta), \text{ avec } \phi = -v \quad (2.113)$$

Où  $\phi$  désigne la fonction de courant de l'écoulement permanent par unité de longueur du canal.

En dérivant la relation (2.113) par rapport à  $\xi$  on a :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \xi \phi^{(1)}(\eta) \quad (2.114)$$

Calculons chacun des termes de l'équation (2.112), on a :

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \quad (2.115a)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \xi \phi^{(2)}, \quad (2.115b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -(1 + \alpha)^{-1} \quad (2.115c)$$

Calculons encore la dérivée seconde de l'équation de l'équation (2.115c), on a :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0. \quad (2.116a)$$

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \xi \phi^{(2)} \quad (2.116b)$$

En dérivant (116b) par rapport à  $\xi$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^2 F = \phi^{(2)} \quad (2.117)$$

En remplaçant ces termes dans l'équation adimensionnelle du transport de vorticité (2.112) et en la simplifiant par  $\xi$ , on obtient :

$$\xi \phi^{(1)} \phi^{(2)} - \phi \xi \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \eta} = \frac{1}{R_e} \left[ \frac{\partial^2 (\xi \phi^{(2)})}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 (\xi \phi^{(2)})}{\partial \xi^2} \right] \quad (2.118a)$$

$$\phi^{(1)} \phi^{(2)} - \phi \phi^{(3)} = \frac{1}{R_e} \phi^{(4)} \quad (2.118b)$$

L'équation différentielle ordinaire non-linéaire satisfaisant  $\phi$  est appelée l'équation de Proudman-Johnson [40].

On pose alors :  $\phi^{(1)} = d\phi/d\eta$ ,  $\phi^{(2)} = d^2\phi/d\eta^2$ ,

$$\phi^{(3)} = d^3\phi/d\eta^3, \phi^{(4)} = d^4\phi/d\eta^4, \quad (2.119)$$

A l'état actuel de la même manière que la méthode de la solution semblable permet de réduire les équations d'écoulement stables (2.112) à une seule équation différentielle ordinaire non-linéaire d'ordre 4.

$$\phi^{(4)} + R_e \phi \phi^{(3)} - R_e \phi^{(1)} \phi^{(2)} = 0 \quad (2.120)$$

La relation (2.120) est une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre quatre vérifiée par la fonction de courant par unité de longueur  $\phi$  en

fonction de la variable  $\eta$ . Alors le problème posé à l'équation (2.120) nécessite des conditions aux limites et celles-ci sont données sur les interne et externe.

### II-6-3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour les fluides visqueux dépendent des propriétés du fluide, de la géométrie de l'écoulement et des conditions environnementales :

- les conditions d'adhérence pour les fluides visqueux sont des conditions qui décrivent le comportement des fluides visqueux en contact avec une surface solide. Ces conditions sont importantes pour comprendre comment les fluides se déplacent dans les conduites, les canaux et les tuyaux, ainsi que pour comprendre les phénomènes de frottement et de traînée.

- Les conditions d'adhérence exigent que la vitesse du fluide à la surface d'une paroi solide est égale à la vitesse de la paroi elle-même. En d'autres termes, le fluide adhère à la surface solide et se déplace avec elle. Cette condition est connue sous le nom de condition de non-glissement.

- Elle est basée sur l'hypothèse que la viscosité du fluide est suffisamment élevée pour que les forces de frottement entre le fluide et la surface solide soient importantes.

Les équations de Navier-Stokes (équations (2.68a) et (2.68b)) sont remplacées par une seule équation différentielle (2.120) avec  $\phi$  qui est la fonction de courant par unité de longueur, les conditions aux limites sont alors nécessaires. Elles sont dictées par la considération sur la conservation de la masse développée dans la section II – 2 – 1. En introduisant le paramètre  $a$  pour prendre en compte les deux orientations possibles que prendrait l'écoulement, on obtient alors les conditions aux limites suivantes :

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ et } V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ pour } y = -h \quad (2.121a)$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ et } V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = aU \text{ pour } y = h \quad (2.121b)$$

( $a = 1$  pour la succion ou  $a = -1$  pour l'injection)

Avec  $U$  représentant la valeur absolue de la vitesse de succion ou de l'injection (voir figure 6):

L'adimensionnalisation des conditions aux limites par les variables adimensionnelles mentionnées ci-dessus, donne :

$$u = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \quad v = -\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \quad \eta = -1. \quad (2.122a)$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \quad v = -\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{au}{u \left( 1 + \frac{|W|}{u} \right)} = -a(1 + \alpha)^{-1}, \quad \eta = 1 \quad (2.122b)$$

Afin de pouvoir résoudre l'équation différentielle (2.120), il est important de fixer les conditions aux limites. On a alors :

$$\phi^{(1)} = 0 \text{ et } \phi = 0 \text{ pour } \eta = -1 \quad (2.123a)$$

$$\phi^{(1)} = 0, \text{ et } \phi = -a(1 + \alpha)^{-1} \text{ pour } \eta = 1 \quad (2.123b)$$

En utilisant la fonction de courant par unité de longueur  $\phi$  du canal calculé à partir de (2.120), (2.123a) et (2.123b), les composantes longitudinales et transversales sans dimensions ( $u, v$ ) du champ de vitesse sont déduites en appliquant les formules :

$$u = \xi \phi^{(1)} \text{ et } v = -\phi \quad (2.124)$$

La contrainte de cisaillement étant faite sans dimension par  $\rho v W_{ref}/h$ , la contrainte de cisaillement sans dimension est la quantité  $\rho v(\partial u/\partial \eta + \partial v/\partial \xi)$  pour les parois inférieures et supérieures, nous obtenons les formules suivantes pour la contrainte de cisaillement pariétal par unité de longueur du canal en fonction de  $\alpha$  :

$$\tau_l/\xi = \phi^{(2)}(\eta = -1) = \tau_l(\alpha)/\xi \quad (2.123a)$$

$$\tau_u/\xi = \phi^{(2)}(\eta = 1) = \tau_u(\alpha)/\xi \quad (2.123b)$$

Les trajectoires des particules de fluide ou les lignes de courant sont définies par la relation:  $\psi = C$  où  $C$  est une constante dont la valeur est déterminée à partir des coordonnées  $(\xi_k, \eta_k)$  d'au moins un point à laquelle les lignes sont passées. Pour la simplicité, ce point peut être choisi pour être situé sur la paroi poreuse ( $\eta = 1$ ). Les deux orientations du flux sont étudiées en fonction de la valeur de  $a$  ( $a = -1$  pour injection et  $a = 1$  pour la succion). Le coefficient  $a = -1$  correspond aux lignes de courant qui commencent par injection du point à la paroi  $(\xi_k, \eta_k = 1)$  poreuse et le cas  $a = 1$  est l'orientation opposée, c'est la configuration pour laquelle les lignes finissent au point  $(\xi_k, \eta_k = 1)$  de la paroi poreuse par succion. Pour l'injection et la succion on obtient ensuite dans le plan cartésien  $(\xi, \eta)$ , les équations de lignes de courant écrites sous la forme :

$$\xi = \xi_k \phi(1)/\phi(\eta) \quad \text{avec } \xi \geq 0 \quad (2.126)$$

Le problème étant ainsi bien posé car le nombre de conditions aux limites est égale au degré de l'équation, l'utilisation des méthodes numériques est alors bien adaptée.

L'équation (2.120) donnée par :  $\phi^{(4)} + R_e\phi\phi^{(3)} - R_e\phi^{(1)}\phi^{(2)}$ , est notre équation à résoudre, avec les conditions aux limites données par les relations (2.123a) et (2.123b) suivantes :  $\phi^{(1)} = 0$  et  $\phi = 0$  pour  $\eta = -1$  ;  $\phi^{(1)} = 0$  et  $\phi = -a(1 + \alpha)^{-1}$  pour  $\eta = 1$ . Le problème obtenu est un problème aux limites en deux points avec deux conditions aux limites en chaque point. Pour résoudre numériquement l'équation de notre problème, plusieurs méthodes peuvent être appliquées notamment : la méthode spectrale, la méthode spectrale, la méthode des moindres carrés, la méthode de collocation, la méthode de Galerkin, et la méthode de tir.

Nous allons utiliser la méthode de tir [34] parce qu'elle nous donne l'opportunité d'appliquer l'algorithme de Runge-Kutta qui fournit à la fois la fonction inconnue  $f$  et ses dérivées, qui interviennent dans l'expression du champ de vitesse et les contraintes pariétales.

## II-7 METHODES NUMERIQUES

### II-7-1 Méthode de tir

La méthode de tir consiste à transformer le problème aux limites en deux points, en un problème à conditions initiales.

Pour résoudre ce problème de valeur limite à deux points posé par l'équation (2.120) avec les relations (2.123a) et (2.123b), nous adoptons les trois étapes de structure de la méthode de tir suivantes:

- Le problème à résoudre est transformé en un problème à conditions initiales qui consiste à conserver la même équation différentielle ordinaire et à introduire deux conditions arbitrairement choisies pour les dérivées seconde et troisième manquantes  $u_1$  et  $u_2$  à la frontière de départ  $\eta = -1$ , afin d'obtenir une fonction inconnue  $f(\eta)$ , telle que:

$$f^{(1)} f^{(2)} - f^{(3)} = \frac{1}{R_e} f^{(4)}, \text{ pour } \eta > -1 \quad (2.127)$$

Les nouvelles conditions initiales sont dictées alors :

$$f^{(1)} = 0, f = 0, f^{(2)} = u_1, f^{(3)} = u_2, \text{ pour } \eta = -1 \quad (2.128)$$

### II-7-2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre

Pour toutes valeurs considérées  $u_1$  et  $u_2$ , le problème à conditions initiales ci-dessus est résolu en utilisant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre [42]. Pour cela, nous allons adopter 101 valeurs discrétisées pour le paramètre  $\eta$  couvrant tout son intervalle  $[-1, 1]$  et formant 100 intervalles de même pas  $\Delta\eta = 2 \cdot 10^{-2}$ . Les paramètres  $u_1$  et  $u_2$  sont ensuite mis à jour et ajustés afin d'obtenir les valeurs  $u_1^*$  et  $u_2^*$  qui sont les valeurs optimales pour lesquelles  $f$  satisfait les conditions requises pour  $\phi$  à la frontière finale  $\eta = 1$ .

Lorsque ces valeurs optimales sont atteintes avec une bonne précision, la solution calculée  $f$  est identique à la solution souhaitée  $\phi$ .

La procédure de mise à jour est effectuée par l'algorithme d'optimisation de Newton-Raphson [41].

### II-7-3 Méthode de Newton-Raphson

Cette algorithme consiste à définir un vecteur  $\mathbf{D}(D_1, D_2)$  dont les composantes permettent de calculer la distance à laquelle les valeurs de la fonction  $f$  sont satisfaites à la borne supérieure  $\eta = 1$ .

On a alors :

$$D_1(u_1, u_2) = f^{(1)}(\eta = 1) - 0 \quad (2.129a)$$

$$D_2(u_1, u_2) = f^{(1)}(\eta = 1) - (-a(1 + \alpha)^{-1}) \quad (2.129b)$$

De ce fait, cherchons à minimiser la fonction coût définie comme suit :

$$J(u_1, u_2) = |\mathbf{D}|^2 = D_1^2 + D_2^2 \quad (2.130)$$

Dans le but de minimiser la fonction coût  $J$ , c'est-à-dire  $D_1$  et  $D_2$ , on démarre avec un couple initiale  $(u_1, u_2)_0$  puis on applique l'algorithme d'optimisation basé sur la méthode de descente par gradient ou une autre méthode d'optimisation comme cela a été fait dans des travaux publiés antérieurement par notre équipe de recherche [24]. Dans ce travail, la procédure itérative d'optimisation sur la borne supérieure est effectuée par l'algorithme de Newton-Raphson et cela se passe par le calcul de la matrice Jacobienne  $M$ .

Partant d'un couple  $(u_1, u_2)$  et de l'écart  $(\delta u_1, \delta u_2)$  tel que le couple  $(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2)$  donne les valeurs minimales respectives de  $D_1$  et  $D_2$ .

$\delta u_1$  et  $\delta u_2$ , on a : En utilisant le développement limité de Taylor à l'ordre 1 de  $D_1$  et  $D_2$  autour de

$$D_1(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2) = D_1(u_1, u_2) + \left( \frac{\partial D_1}{\partial u_1} \right) \delta u_1 + \left( \frac{\partial D_1}{\partial u_2} \right) \delta u_2 \quad (2.131a)$$

$$D_2(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2) = D_2(u_1, u_2) + \left( \frac{\partial D_2}{\partial u_1} \right) \delta u_1 + \left( \frac{\partial D_2}{\partial u_2} \right) \delta u_2 \quad (2.131b)$$

On désire avoir  $D_1$  et  $D_2$ , pour cela on pose :

$$D_1(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2) = 0 \text{ et } D_2(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2) = 0 \quad (2.132)$$

Pour le choix de  $\delta u_1$  et  $\delta u_2$  ; on a alors :

$$\left(\frac{\partial D_1}{\partial u_1}\right)\delta u_1 + \left(\frac{\partial D_1}{\partial u_2}\right)\delta u_2 = -D_1(u_1, u_2) \quad (2.133a)$$

$$\left(\frac{\partial D_2}{\partial u_1}\right)\delta u_1 + \left(\frac{\partial D_2}{\partial u_2}\right)\delta u_2 = -D_2(u_1, u_2) \quad (2.133b)$$

Les relations (2.133a) et (2.133b) obtenues ci-dessus peuvent encore se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 \\ -D_2 \end{pmatrix}, \quad (2.134)$$

Où  $[M]$  représente une matrice Jacobienne construite à partir de  $D_1$  et  $D_2$  telle que :

$$[M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial u_1} & \frac{\partial D_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial D_2}{\partial u_1} & \frac{\partial D_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

Posons :

$$M_{1,1} = \frac{\partial D_1}{\partial u_1}, \quad M_{1,2} = \frac{\partial D_1}{\partial u_2} \quad (2.136a)$$

$$M_{2,1} = \frac{\partial D_2}{\partial u_1}, \quad M_{2,2} = \frac{\partial D_2}{\partial u_2} \quad (2.136b)$$

$$[M]^{(q)} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix}^{(q)} = - \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}^{(q)} \quad (2.136c)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{(q+1)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{(q)} - ([M]^{(q)})^{-1} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}^{(q)} \quad (2.136d)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{q+1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{(q)} + \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix}^{(q)} \quad (2.136e)$$

Dans la relation ci-dessus,  $q$  représente l'indice d'itération. Ainsi, les calculs des composantes de la matrice Jacobienne  $M_{i,j}(i=1,2; j=1,2)$  nous amènent à chercher les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial u_1}$  et  $\frac{\partial f}{\partial u_2}$ , pour cela on pose :

$$M_{1,j} = \frac{\partial D_1}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} (f^{(1)}(\eta=1)), \text{ pour } j=1, 2, \quad (2.137a)$$

$$M_{2,j} = \frac{\partial D_2}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} (f^{(2)}(\eta=1)), \text{ pour } j=1,2 \quad (2.137b)$$

Ceci conduit à définir deux fonctions  $p_j$  dépendant de  $\eta$  et paramétrées par  $(u_1, u_2)$

$$p_j = \frac{\partial f}{\partial u_j} \text{ et } q_j = \frac{\partial f}{\partial u_j} \text{ pour } j=1,2 \quad (2.138)$$

En admettant que :

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (f(\eta=1)) = \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \right)_{\eta=1} = p_j(\eta=1) \quad (2.139a)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} (f(\eta=1)) = \left( \frac{\partial f}{\partial u_2} \right)_{\eta=1} = q_j(\eta=1) \quad (2.139b)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) = \frac{\partial p_j}{\partial \eta} = p_j^{(1)} \quad (2.139c)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial q_j}{\partial \eta} = q_j^{(1)} \quad (2.139d)$$

Les composantes de la matrice Jacobienne de  $M_{i,j}$  sont alors données par:

$$M_{1,1} = p_j(\eta = 1) ; M_{1,2} = q_j(\eta = 1) \quad (2.140a)$$

$$M_{2,1} = p_j^{(1)}(\eta = 1) ; M_{2,2} = q_j^{(1)}(\eta = 1) \quad (2.140b)$$

Par conséquent, le calcul de  $M_{ij}$  nécessite de connaître  $p_j$  et  $q_j$  et leurs dérivées premières  $p_j^{\dot{}}$  et  $q_j^{\dot{}}$  à la borne finale  $\eta = 1$ . Pour obtenir ces valeurs, nous différencions les équations (2.127) par rapport à  $u_1$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (f^{(1)} f^{(2)}) - \frac{\partial}{\partial u_1} (ff^{(3)}) = \frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial u_1} (f^{(4)}) \quad (2.141a)$$

$$f^{(2)} \frac{\partial}{\partial u_1} (f^{(1)}) + f^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_1} (f^{(2)}) - f^{(3)} \frac{\partial}{\partial u_1} (f) - f \frac{\partial}{\partial u_1} (f^{(3)}) = \frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial u_1} (f^{(4)}) \quad (2.141b)$$

De même, on applique la différenciation à la relation (2.127) par rapport à  $u_2$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial u_2} (f^{(1)} f^{(2)}) - \frac{\partial}{\partial u_2} (ff^{(3)}) = \frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial u_2} (f^{(4)}) \quad (2.142a)$$

$$f^{(2)} \frac{\partial}{\partial u_2} (f^{(1)}) + f^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_2} (f^{(2)}) - f^{(3)} \frac{\partial}{\partial u_2} (f) - f \frac{\partial}{\partial u_2} (f^{(3)}) = \frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial u_2} (f^{(4)}) \quad (2.142b)$$

En évaluant les dérivées liant  $p_j$  et  $q_j$  à  $f$  par rapport à  $\eta$ , on a :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial u_1} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) = \frac{dp_j}{d\eta} = p_j^{(1)} \quad (2.143a)$$

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial u_1} = \frac{d^2}{d\eta^2} \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) = \frac{d^2 p_j}{d\eta^2} = p_j^{(2)} \quad (2.143b)$$

$$\frac{\partial f^{(3)}}{\partial u_1} = \frac{d^3}{d\eta^3} \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) = \frac{d^3 p_j}{d\eta^3} = p_j^{(3)} \quad (2.143c)$$

$$\frac{\partial f^{(4)}}{\partial u_1} = \frac{d^4}{d\eta^4} \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) = \frac{d^4 p_j}{d\eta^4} = p_j^{(4)} \quad (2.143d)$$

De manière analogue avec  $q$ , on a aussi :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial u_2} = \frac{dq_j}{d\eta} = q_j^{(1)} \quad (2.144a)$$

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial u_2} = \frac{d^2 q_j}{d\eta^2} = q_j^{(2)} \quad (2.144b)$$

$$\frac{\partial f^{(3)}}{\partial u_2} = \frac{d^3 q_j}{d\eta^3} = q_j^{(3)} \quad (2.144c)$$

$$\frac{\partial f^{(4)}}{\partial u_2} = \frac{d^4 q_j}{d\eta^4} = q_j^{(4)} \quad (2.144d)$$

En remplaçant les relation (2.144a), (2.144b), (2.144c) et (2.144d) trouvées dans la relation (2.144b), il vient :

$$\begin{aligned} p_j^{(4)} + R_e f(\eta) p_j^{(3)} - R_e f^{(1)}(\eta) p_j^2 - \\ R_e f^{(2)}(\eta) p_j^{(1)} + R_e f^{(3)}(\eta) p_j = 0 \end{aligned} \quad (2.145)$$

De même avec  $q$ , on a aussi :

$$\begin{aligned} q_j^{(4)} + R_e f(\eta) q_j^{(3)} - R_e f^{(1)}(\eta) q_j^2 - \\ R_e f^{(2)}(\eta) q_j^{(1)} + R_e f^{(3)}(\eta) q_j = 0 \end{aligned} \quad (2.146)$$

Alors, les relations (2.144) et (2.146) sont appelées les équations de perturbation vérifiées par  $p_j$  et  $q_j$ . Pour cela on dérive les relations (2.114) par rapport à  $u_1$  en  $\eta = -1$  on a :

$$f(-1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}(-1) = 0 \quad (2.147)$$

En tenant compte de l'expression de  $p_j$  posée ( $p_j = \partial f / \partial u_1$ ), la relation (2.147) devient :

$$p_j(-1) = 0 \quad (2.148)$$

De même on continue à opérer ces dérivées pour obtenir les conditions aux limites définies par  $p_j$ , on a :

$$f^{(1)}(-1) = \frac{df}{d\eta}(-1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial f}{d\eta}(-1) \right) = \frac{dp_j}{d\eta}(-1) = 0 \quad (2.149a)$$

$$f^{(2)}(-1) = u_1, \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{d^2 f}{d\eta^2}(-1) \right) = \frac{d^2 p_j}{d\eta^2}(-1) = 1 \quad (2.149b)$$

$$f^{(3)}(-1) = u_2, \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{d^3 f}{d\eta^3}(-1) \right) = \frac{d^3 p_j}{d\eta^3}(-1) = 0 \quad (2.149c)$$

Pour les conditions aux limites à valeur initiale vérifiée par  $q_j$ , on dérive la relation (2.128) par rapport à  $u_2$  en  $\eta = -1$ , on a :

$$f(-1) = 0, \frac{\partial f}{\partial u_2}(-1) = 0 \quad (2.148)$$

Compte tenu de l'expression de  $q_j$  posée ( $q_j = \partial f / \partial u_2$ ), la relation (2.148) se réduit :

$$q_j(-1) = 0 \quad (2.149)$$

Dans la même progression comme la relation utilisée par  $p_j$ , les autres conditions s'obtiennent alors :

$$f^{(1)}(-1) = \frac{df}{d\eta}(-1) = 0, \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{df}{d\eta}(-1) \right) = \frac{dq_j}{d\eta}(-1) = 0 \quad (2.151a)$$

$$f^{(2)}(-1) = u_1, \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{d^2 f}{d\eta^2}(-1) \right) = \frac{d^2 q_j}{d\eta^2}(-1) = 0 \quad (2.151b)$$

$$f^{(3)}(-1) = u_2, \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{d^3 f}{d\eta^3}(-1) \right) = \frac{d^3 q_j}{d\eta^3}(-1) = 1 \quad (2.151c)$$

Alors les fonctions  $p_j$  et  $q_j$  sont des solutions du problème linéaire de valeur initiale donnée par la même équation différentielle ordinaire  $p_j = y$  ou  $q_j = y$  :

$$\begin{aligned} & y^{(4)} + R_e f(\eta) y^{(3)} - R_e f^{(1)}(\eta) y^{(2)} - \\ & R_e f^{(2)}(\eta) y^{(1)} + R_e f^{(3)}(\eta) y = 0 \end{aligned} \quad (2.152)$$

Les conditions aux limites à valeur initiale sont alors résumées par:

$$p_j = 0, p_j^1 = 0, p_j^2 = 1, p_j^3 = 0 \text{ à } \eta = -1 \quad (2.153a)$$

$$q_j = 0, q_j^1 = 0, q_j^2 = 0, q_j^3 = 1 \text{ à } \eta = -1 \quad (2.153b)$$

$$\text{où : } p_j^{(1)} = \frac{dp_j}{d\eta}, p_j^{(2)} = \frac{d^2 p_j}{d\eta^2}, p_j^{(3)} = \frac{d^3 p_j}{d\eta^3}, q_j^{(1)} = \frac{dq_j}{d\eta},$$

$$q_j^{(2)} = \frac{d^2 q_j}{d\eta^2}, \text{ et } q_j^{(3)} = \frac{d^3 q_j}{d\eta^3}$$

En somme, il a été question pour nous de déterminer les équations pouvant conduire à la résolution du problème posé dans ce mémoire. A cet effet, à partir des équations de Navier-Stokes, nous avons déterminé l'équation de vorticité ainsi que ses conditions aux limites. Le problème obtenu alors est un problème aux limites en deux points. Pour le résoudre nous avons fait recours à la méthode de tir car cette méthode a largement été utilisée en génie mécanique et en mathématiques appliquées. La méthode de tir nous a permis de transformer le problème aux limites en deux points en un problème aux limites à condition initiale. Dans cette méthode, les algorithmes de Runge-Kutta et d'optimisation de Newton-Raphson ont été appliqués pour la résolution du problème posé. Il nous reste à présenter les résultats obtenus de la méthode de tir.

# **CHAPITRE III: RESULTATS ET DISCUSSION**

---

---

### III.1 REMARQUES PRELIMINAIRES

Le but de ce travail étant d'étudier les effets du gradient de pression externe sur l'écoulement étudié, les calculs sont effectués pour différentes valeurs du gradient de pression externe constant sans dimension  $\alpha$ , et pour un nombre de Reynolds  $R_e$  maintenu constant.

Nous avons attribué au nombre de Reynolds une valeur fixe  $R_e = 2$ , afin d'éviter de mener les études portant sur les divers comportements dynamiques pouvant conduire aux solutions multiples des équations de Navier-Stokes, prédits par Robinson [25] lorsque le nombre de Reynolds dépasse la valeur critique  $R_e = 12,165$ , pour l'écoulement le long d'un canal uniformément poreux avec une succion aux deux parois.

Pour les exigences de convergence des algorithmes de Runge-Kutta et Newton-Raphson, 101 valeurs discrétisées sont adoptées pour le paramètre  $\eta$ , formant 100 intervalles de même longueur  $\Delta\eta = 0,02$ . Le critère d'arrêt que nous avons appliqué pour la procédure d'optimisation de Newton-Raphson permet de réduire la fonction coût  $J$  définie dans le chapitre II à la valeur minimale  $J_m \approx 10^{-25}$ . Cela prouve la haute précision qu'offre la méthode de tir que nous avons utilisée, l'objectif étant de réduire  $J$  à zéro.

Les résultats obtenus sont interprétés et tracés à l'aide du logiciel Matlab. Ces résultats sont discutés en considérant les divers grandeurs physiques suivants : la fonction de courant par unité de longueur du canal, les lignes de courant, les composantes transversales et longitudinales du champ de vitesse de l'écoulement, et la contrainte de cisaillement sur les deux parois.

### III-2 VALIDATION DU CODE NUMERIQUE UTILISE [17]

Dans ce sous chapitre nous montrons d'abord la validation du code de calcul que nous avons utilisé. Ensuite nous allons présenter les résultats que nous avons obtenus pour les divers grandeurs de l'écoulement : la fonction de courant par unité de longueur du canal, les lignes de courant, les composantes transversales et longitudinales du champ de vitesse de l'écoulement et la contrainte de cisaillement sur les deux parois.

A cet égard, considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre quatre et ses conditions aux limites définies par :

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(2)}(x) + y(x) = 0 \quad (3.1)$$

$$y(-1) = 1, y^{(1)}(-1) = -1, y(1) = 0, y^{(1)}(1) = 0, \quad (3.2)$$

avec  $y^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}$ ,  $y^{(2)}(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$  et  $-1 \leq x \leq 1$ .

#### III-2-1 Solution analytique

L'équation (3.1) a pour équation caractéristique :

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0. \quad (3.3)$$

Cette relation ci-dessus prend la forme factorisée suivante :

$$(r^2 - 1) = 0 \quad (3.4)$$

Les solutions de l'équation (3.4) obtenues sont  $-1$  et  $1$  et la solution générale pour l'équation (3.1) se présente sous la forme :

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) \exp(x) + (C_3 + C_4 x) \exp(-x). \quad (3.5)$$

En utilisant les conditions aux limites données à la relation (3.2), on obtient alors un système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + e^2 C_3 - e^2 C_4 = e \\ C_1 - e^2 C_3 + 2e^2 C_4 = -e \\ e^2 C_1 + e^2 C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ 2C_1 + 2e^2 C_2 - C_3 = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $e = \exp(1)$ ,  $e^2 = \exp(2)$  ;  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  étant des constantes à déterminer.

La résolution de ce système (3.6) par la méthode de Cramer nous permet d'obtenir les constantes suivantes :

$$C_1 = \frac{-3e^5 - e}{e^8 - 18e^4 + 1}, \quad (3.7a)$$

$$C_2 = \frac{2e^5 - 2e}{e^8 - 18e^4 + 1} \quad (3.7b)$$

$$C_3 = \frac{e^7 - 5e^3}{e^8 - 18e^4 + 1} \quad (3.7c)$$

$$C_4 = \frac{8e^3}{e^8 - 18e^4 + 1} \quad (3.7d)$$

### III-2-2 Application de la méthode de tir

Pour débiter, nous transformons d'abord l'équation différentielle d'ordre quatre ci-dessous en une équation différentielle d'ordre 1.

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(2)}(x) + y(x) = 0, \quad (3.9)$$

$$y(-1) = 1, y^{(1)}(-1) = -1, y(1) = 0, y^{(1)}(1) = 0. \quad (3.10)$$

Pour cela, on écrit:

$$y_1 = y, y_2 = y^{(1)}, y_3 = y^{(2)}, y_4 = y^{(3)}. \quad (3.11)$$

En remplaçant les relations (3.11) dans l'équation (3.1), on obtient:

$$y_4^{(1)}(x) - 2y_3(x) + y_1(x) = 0, \quad (3.12)$$

Pour transformer l'équation différentielle (3.12) qui est un problème à valeurs aux limites en deux points, en un problème à conditions initiales, il faut donc pour cela ajouter deux autres conditions supplémentaires sur la borne  $x = -1$  afin que le problème soit bien posé. Ainsi on introduit deux valeurs  $a$  et  $b$  pour remplacer les conditions initiales manquantes, on obtient :

$$y_4^{(1)}(x) - 2y_3(x) + y_1(x) = 0 \quad (3.13)$$

$$y_1(-1) = 1, y_2(-1) = -1, y_3(-1) = a, y_4(-1) = b. \quad (3.14)$$

L'objectif est de trouver les valeurs  $a = a^*$  et  $b = b^*$  pour lesquelles les conditions à la borne finale  $x = 1$  imposées sont vérifiées. A cet effet, une technique d'optimisation est nécessaire à la borne finale  $x = 1$ . On cherche à trouver les équations de perturbation ainsi que leurs conditions à valeur initiale comme à la technique utilisée au chapitre précédent aux relations (2.115) et (2.116), pour cela, la relation (3.13) est différenciée par  $u_1$  et puis par  $u_2$  respectivement on a

$$\frac{\partial y_4^{(1)}(x)}{\partial u_1} - 2 \frac{\partial y_3(x)}{\partial u_1} + \frac{\partial y_1(x)}{\partial u_1} = 0. \quad (3.15)$$

Dans la même lancée avec  $u_2$ , on obtient:

$$\frac{\partial y_4^{(1)}}{\partial u_2} - 2 \frac{\partial y_3(x)}{\partial u_2} + \frac{\partial y_1(x)}{\partial u_2} = 0. \quad (3.16)$$

En posant ( $\partial y_1/\partial u_1 = p_1$  et  $\partial y_1/\partial u_2 = q_1$ ) alors il vient les équations de perturbation vérifiées par  $p$  et  $q$  suivantes:

$$p_4^{(1)} - 2p_3 + p_1 = 0 \quad (3.17a)$$

$$q_4^{(1)} - 2q_3 + q_1 = 0 \quad (3.17b)$$

Les conditions à valeur initiale s'obtiennent en utilisant la méthode la relation (2.90a) comme au chapitre précédent:

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1, p_4 = 0 \text{ à } x = -1 \quad (3.18a)$$

$$q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 1 \text{ à } x = -1 \quad (3.18b)$$

### III.2.3 Comparaison des résultats

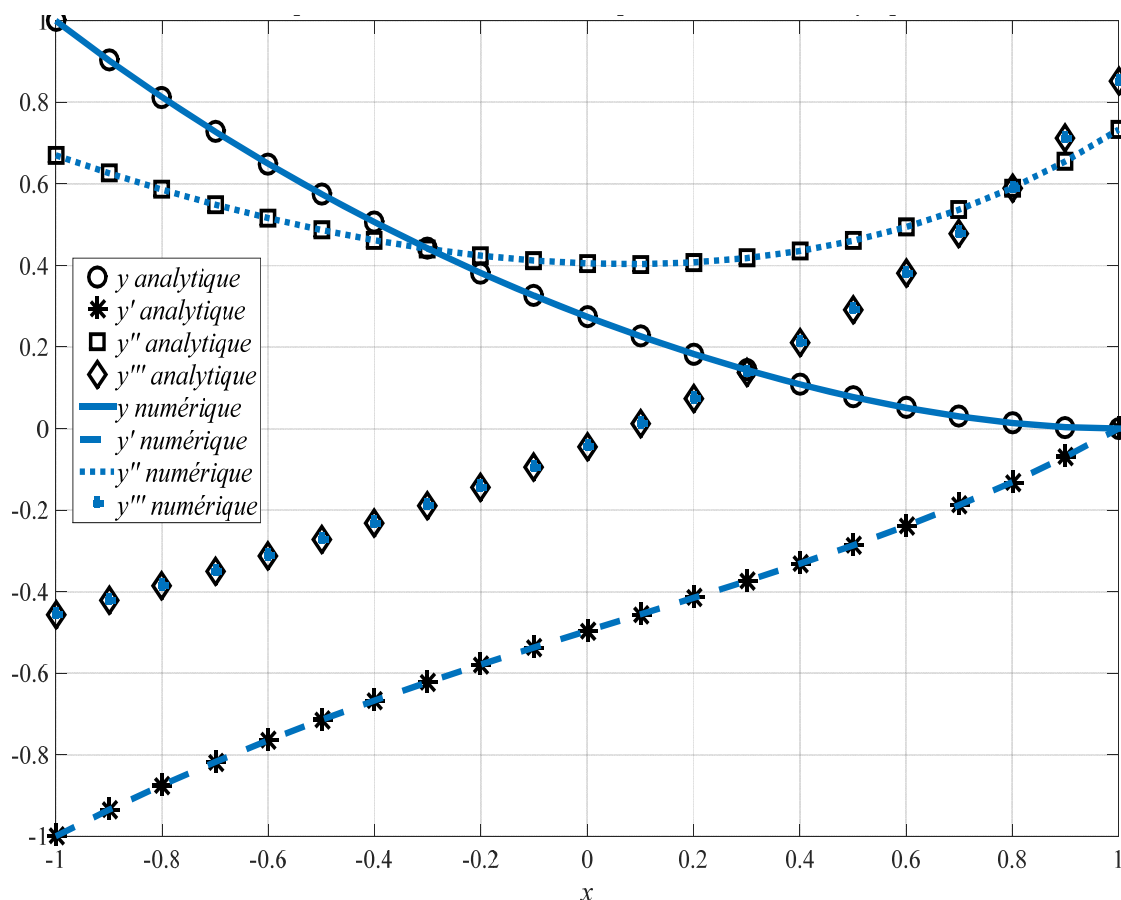


Figure 13: Courbes comparatives des solutions analytiques et numériques

Les solutions analytiques et numériques montrent les parfaits accords entre elles. Les courbes tracées en noir représentent les solutions analytiques et celles en bleu des solutions numériques comme montre la figure ci-dessous. L'évolution de la solution analytique en  $y$  présente la même allure, la même similitude que celle de la solution numérique et ces solutions sont représentées en cercle et en barre respectivement.

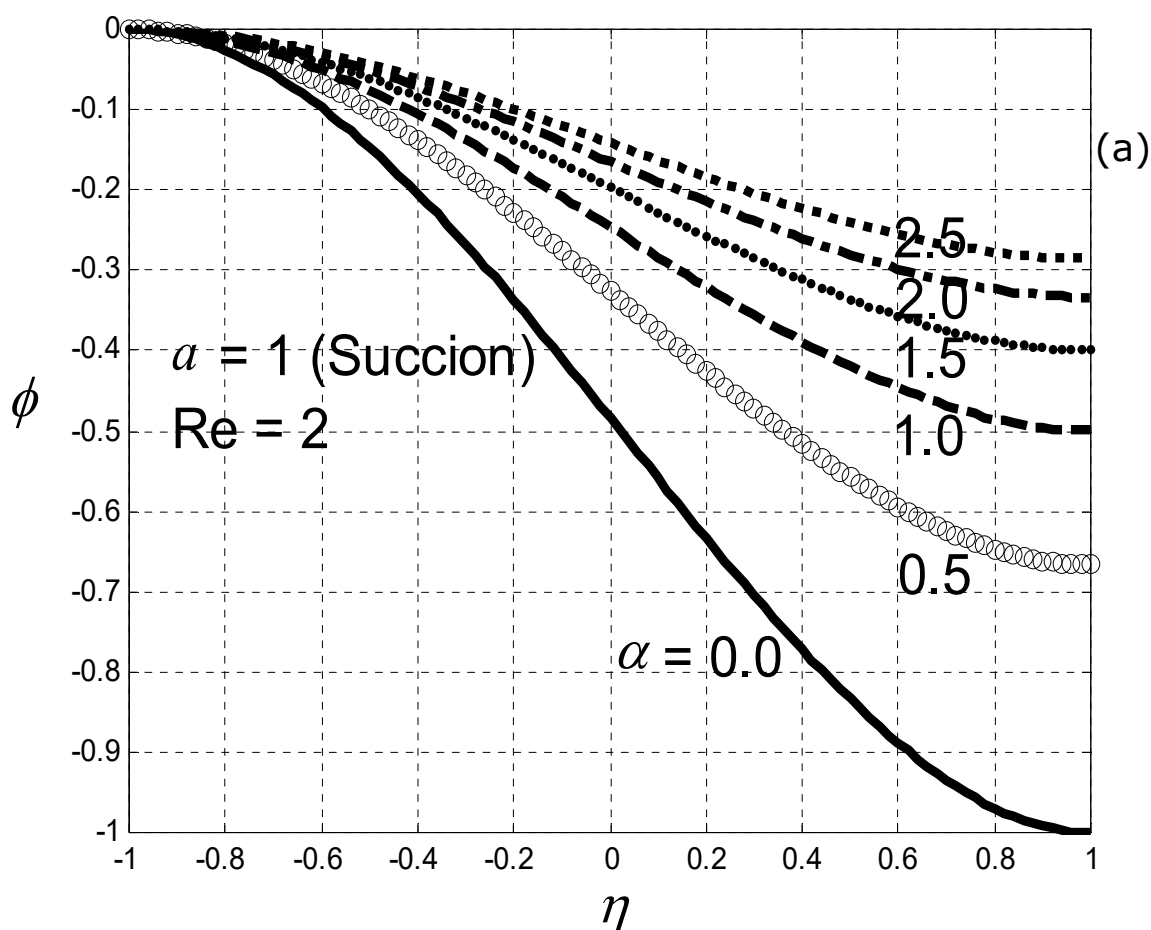
De même, les solutions analytique et numérique de la première dérivée  $y^{(1)}$  présentent aussi la même allure et similitude et rencontrant celles de  $y$  en  $x = 0$  représentées en étoile et tiret de 6 respectivement. Alors que les courbes en square et trait interrompu sont celles de la solution analytique et de la

solution numérique de la deuxième dérivée  $y^{(2)}$  respectivement et présentent la même allure et similitude et rencontrent celles de  $y$  en un point de  $x = -0.3$ . Quand aux courbes de la troisième dérivée  $y^{(3)}$  en losange et en daemon des solutions analytique et numérique respectivement et qui présentent la même allure et similitude et rencontrent  $y$  en  $x = 0.3$  et  $y^{(1)}$  en  $x = 0.8$ .

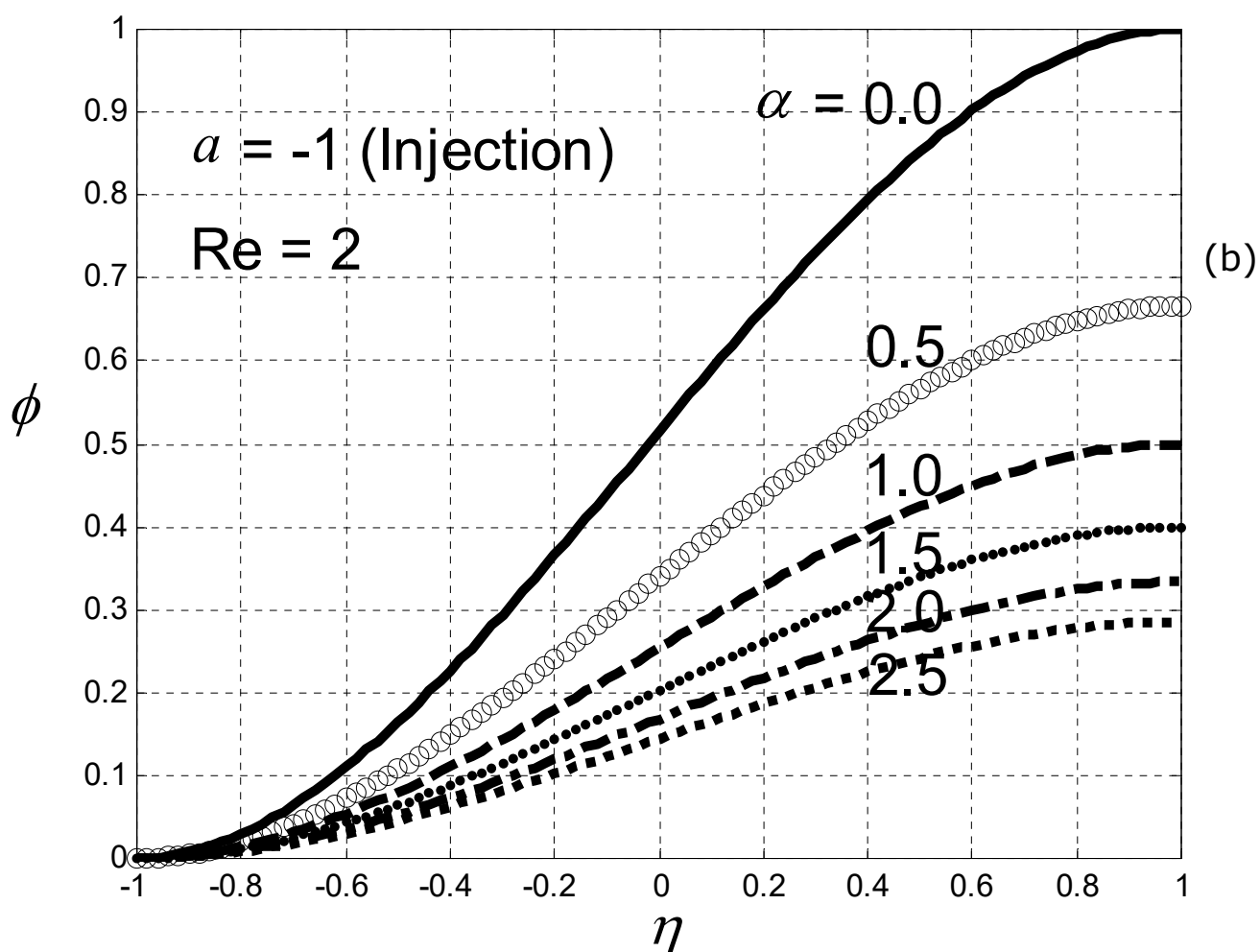
A l'aide du code de calcul numérique validé ci-dessus, nous traçons les différentes courbes ci-dessous dans le cas de la suction et d'injection. Les résultats obtenus sont discutés en tenant compte des divers grandeurs de l'écoulement qui sont : la fonction de courant par unité de longueur du canal, les lignes de courant, les composantes transversales et longitudinales du champ de vitesse de l'écoulement, et la contrainte de cisaillement sur les deux parois.

### III-3 FONCTION DE COURANT PAR UNITE DE LONGUEUR DU CANAL

A partir de la méthode numérique utilisée basée sur la méthode de tir expliquée au chapitre II, les valeurs de la fonction de courant  $\phi$  par unité de longueur du canal ont été calculées. Ces valeurs sont tracées en fonction de la position de toute couche de fluide ; pour la succion (a) et l'injection (b) et pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$  :



**Figure 14a** : Fonction de courant par unité de longueur du canal pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension, tracée pour la succion (a).



**Figure 14b** : Fonction de courant par unité de longueur du canal pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension, tracée pour l'injection (b).

Les figure 14 (a) et (b) ci-dessus montrent les valeurs de la fonction de courant  $\phi$  par unité de longueur du canal, tracées pour la succion (a) et l'injection (b), en fonction de toute position  $\eta$  de la couche de fluide, pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension. On remarque que les valeurs de  $\phi$  pour la succion sont symétriques par rapport à l'axe central du canal, à celles obtenues pour l'injection. Comme on le voit sur ces figures, le signe de  $\phi$  dépend de l'orientation de l'écoulement

On constate que les valeurs de  $\phi$  sont négatives pour la succion alors que celles obtenues pour l'injection sont positives. Du point de vue physique, cela signifie que l'écoulement est irréversible dans le fluide. Ceci est dû au fait que la quantité  $\phi_0 - \phi_c = -\phi_c$  qui représente le débit massique du fluide circulant entre l'axe central du canal défini par l'équation  $\phi = \phi_0 = 0$  et toute autre ligne de courant  $\phi(\eta) = \phi_c$ , est positive pour la succion et négative pour l'injection, car le vecteur unitaire normal au plan supérieure poreux est orienté vers l'extérieur du canal. Pour une valeur donnée du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , les valeurs absolues de  $\phi$  augmentent lorsque  $\eta$  augmente à partir de la paroi inférieure ( $\eta = -1$ ), comme on le voit sur les figures 14 : (a) et (b).

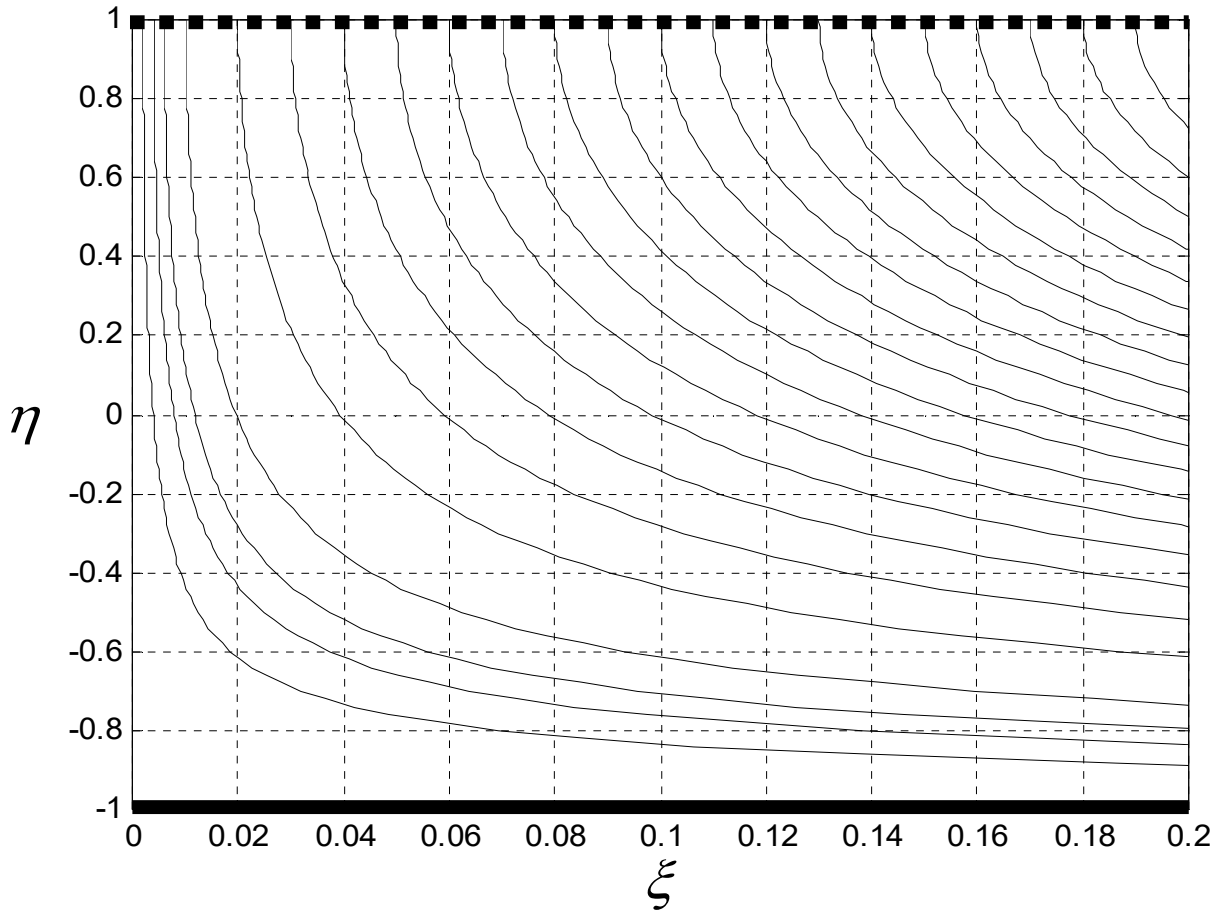
En examinant simultanément les figures 14 (a) et (b) on observe que  $\phi$  ne change pas de signe lorsque le fluide change de direction, selon que le fluide soit aspiré ou injecté dans le canal. Cela mène à la conclusion selon laquelle il n'y a pas d'écoulement du fluide dans le sens inverse si la fonction de courant par unité de longueur du canal change de signe pour un gradient de pression externe constant donné. Par ailleurs, lorsque le signe de la fonction de courant par unité de la longueur du canal reste inchangé, cela confirme qu'aucun écoulement dans le sens inverse ne se produit dans le canal.

D'après les figures ci-dessus, on observe également que les valeurs absolues de  $\phi$  diminuent lorsque  $\alpha$  augmente, pour une position  $\eta$  donnée par rapport à la couche de fluide, aussi bien pour la succion que pour l'injection. Cela signifie que les lignes de courant dans les deux cas sont identiques.

### **III-4 TRAJECTOIRE DES PARTICULES DE FLUIDE OU LIGNES DE COURANT**

Avec la formule  $\xi = \xi_k \phi(1)/\phi(\eta)$  pour différentes valeurs de  $\xi$  prises sur la paroi supérieure poreuse  $\eta = 1$  et définissant le point de départ de la ligne de

courant dans le cas de l'injection ou son point d'arrivée dans le cas de la suction, nous avons tracé pour  $\alpha = 1$  la configuration des lignes de courant de l'écoulement suivante :



**Figure 15:** Configuration des lignes de courant pour la suction et l'injection, tracée pour  $\alpha = 1$ .

III-5 COMPOSANTES TRANSVERSALE ET LONGITUDINALE DU CHAMP DE VITESSE

a) Composante transversale du champ de vitesse

En exploitant encore la fonction de courant par unité de longueur, nous trouvons la composante transversale du champ de vitesse  $v$  dans le fluide donnée par la relation suivante :  $v = -\phi$ . Cette formule nous a permis de tracer les figures 16 (a) et (b) suivants :

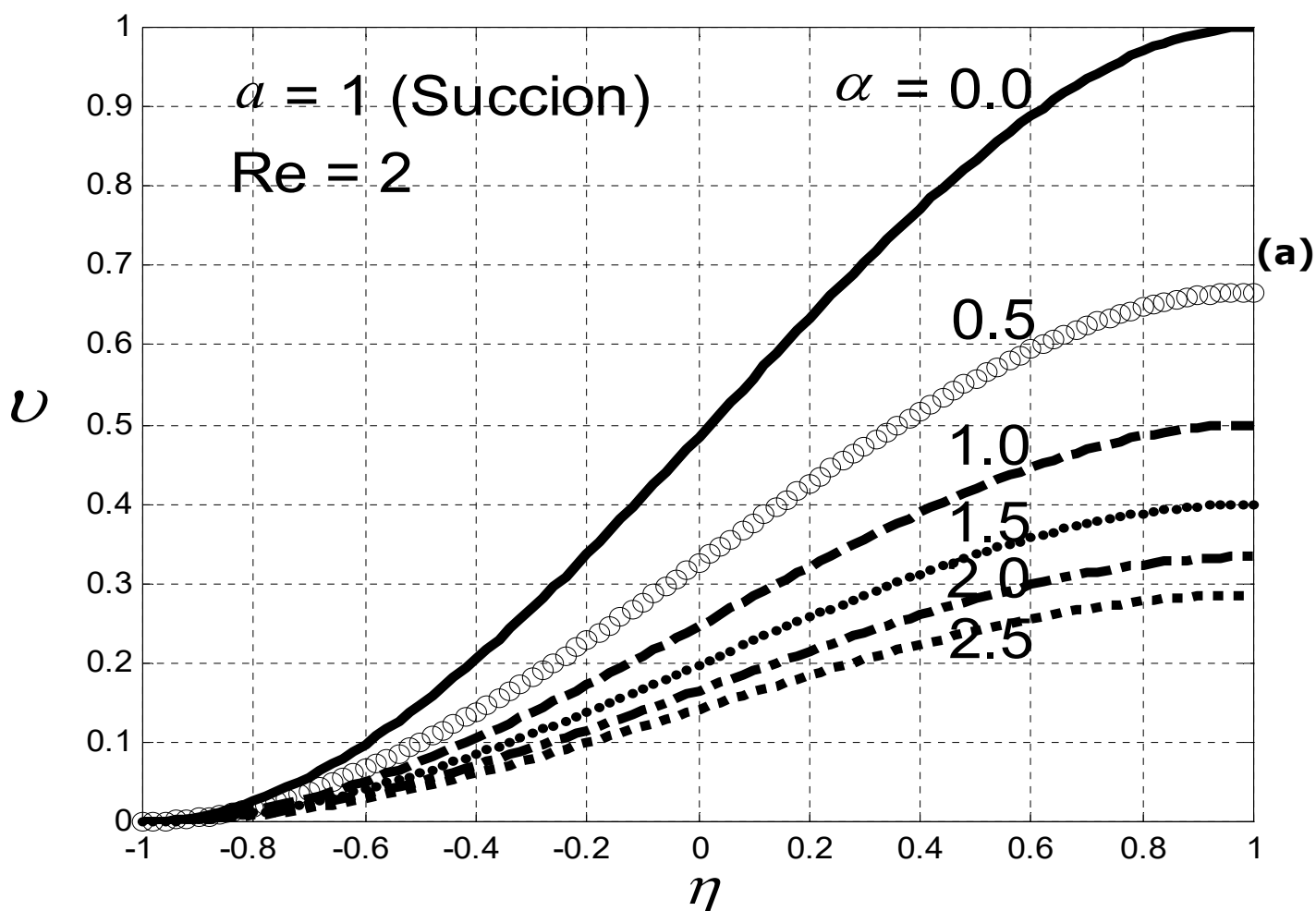
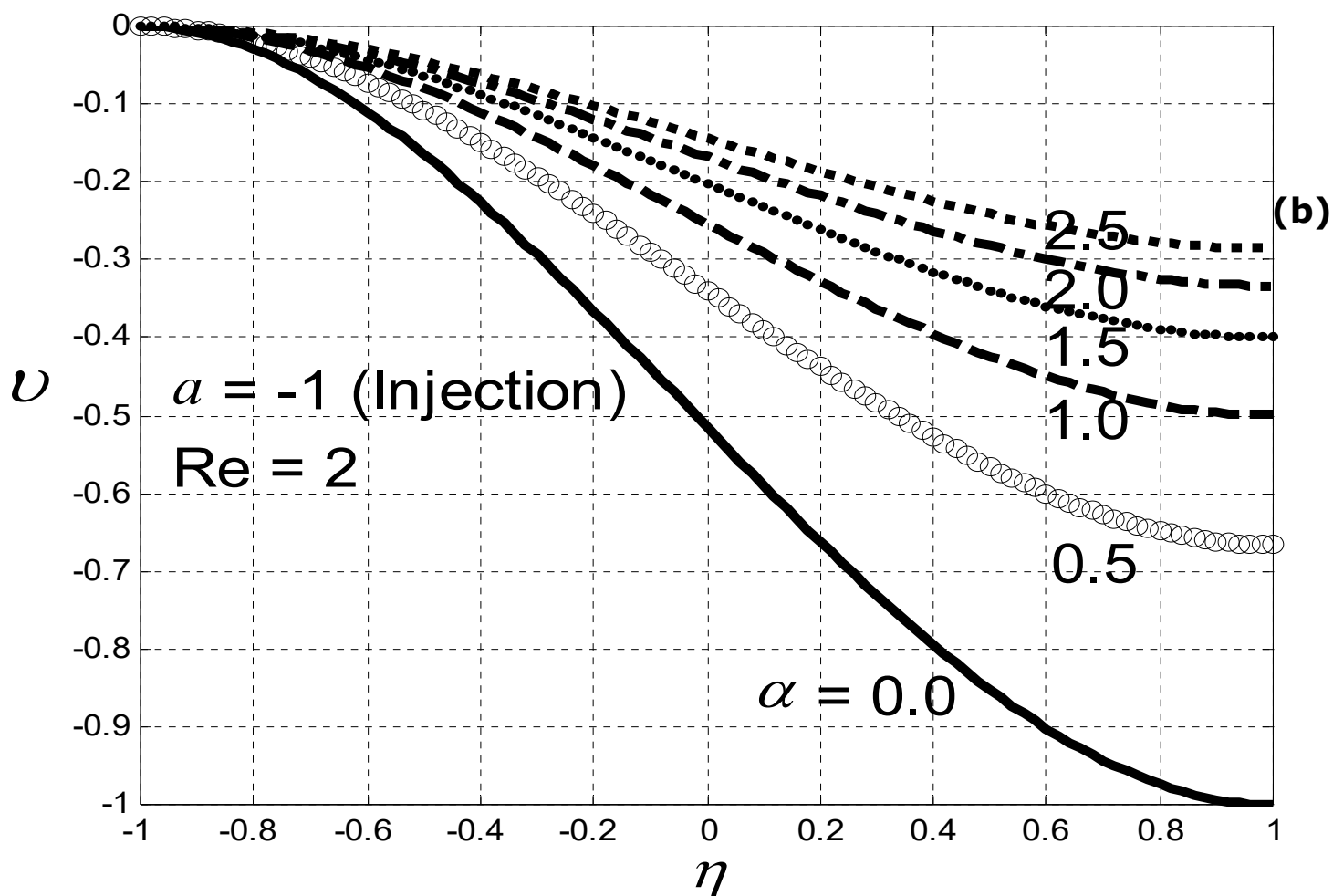


Figure 16a: Profil de la composante transversale de la vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracé pour la suction (a)



**Figure 16b:** Profil de la composante transversale de la vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracé pour l'injection (b).

Le signe de  $v$  est confirmé par les figures 16 : (a) et (b), c'est-à-dire que  $v$  est positif pour la succion et négatif pour l'injection. Les figures 16 : (a) et (b) montrent qu'il n'y a pas de couche de fluide dans le canal, dont la vitesse transversale dépasse la vitesse de la succion ou d'injection, contrairement à l'écoulement laminaire sous pression à travers une conduite annulaire semi-poreuse étudié dans [23].

Le processus de la succion extrait toute particule de fluide en contact avec la paroi poreuse et la remplace, par conservation de la masse, par une autre

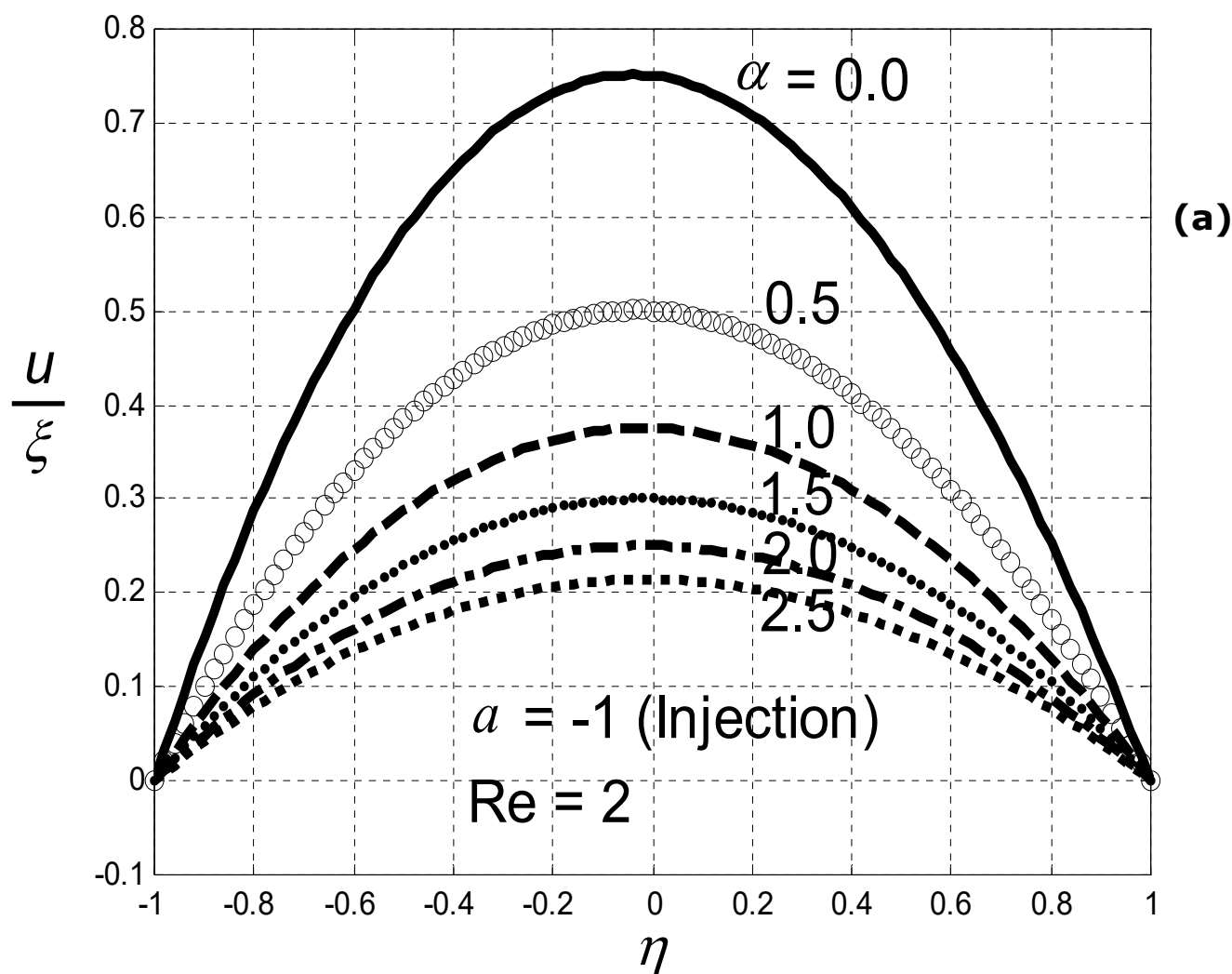
particule de fluide plus profonde et dont la vitesse transversale augmente alors. Les autres couches de fluide sont également remplacées par celles qui sont plus profondes et dont la vitesse transversale augmente. Ainsi, avec l'augmentation de la distance de la paroi imperméable dans la direction transversale, le processus de succion provoque une augmentation de la quantité de mouvement transversale dans le fluide. Ceci donne l'explication physique des graphiques présents à la figure 16 (a) qui montrent que la vitesse transversale augmente lorsque  $\eta$  augmente à partir de sa plus petite valeur  $\eta = -1$ , pour une valeur donnée du gradient de pression externe.

Dans le cas de l'injection, en raison de la conservation de la masse, les particules de fluide injectées à partir de la paroi poreuse sortent en remplaçant les particules plus profondes ayant une vitesse transversale plus faible. Dans le reste de l'écoulement, les couches de fluide remplaçant alors celles qui sont profondes et dont la vitesse transversale est plus faible. Ainsi, au fur et à mesure que la distance transversale augmente entre la paroi poreuse et la paroi imperméable, le processus d'injection provoque une diminution de la quantité de mouvement transversal dans le fluide. On comprend alors la raison physique qui explique que la valeur absolue de la vitesse transversale diminue pour une distance croissante de la paroi poreuse, le gradient de pression externe étant maintenu constant, comme le montre la figure 16 (b).

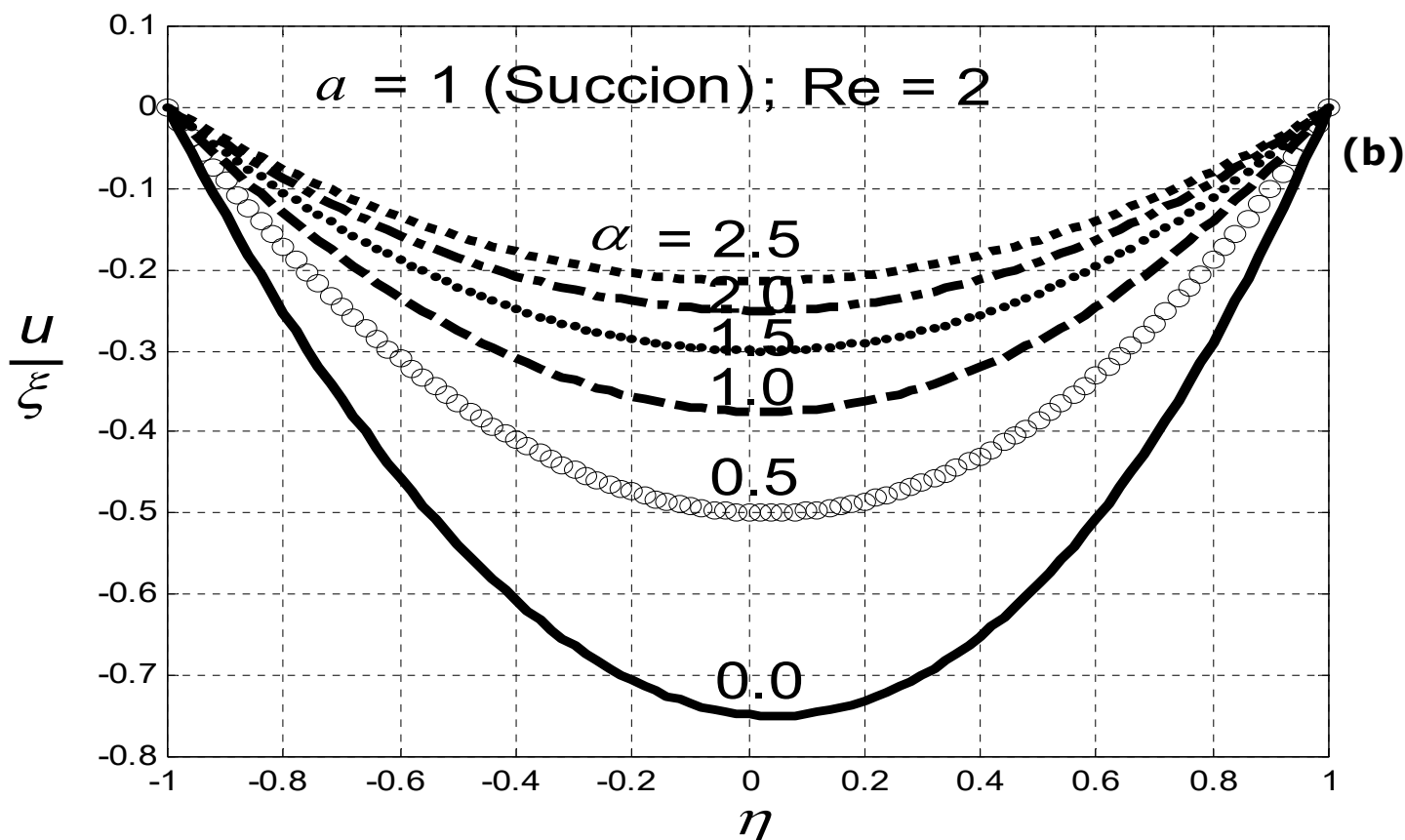
### **b) Composante longitudinale du champ de vitesse**

A partir de la fonction de courant par unité de longueur, nous avons obtenu la composante longitudinale du champ de vitesse  $u$  dans le fluide donnée par la relation suivante :  $u = \xi\phi^{(1)}$ .

Cette relation nous a permis de tracer les figures (17a) et (17b) :



**Figure 17a :** Profil de la composante longitudinale de la vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracé pour l'injection .



**Figure 17b :** Profil de la composante longitudinale de la vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracé pour la succion .

Les figures 17 : (a) et (b) confirment également le signe de  $u$  qui est négatif pour la succion et positif pour l'injection, selon le signe du gradient de pression externe qu'il nous faut être favorable.

Ces figures 16 et 17 (a) et (b) peuvent être expliquées comme suit : en raison de la condition de non-glissement qui impose  $v=0$  à la paroi imperméable inférieure  $\eta=-1$ , les valeurs absolues  $v$  diminuent de façon monotone de la valeur 1 à la valeur 0 lorsque  $\eta$  varie de la paroi supérieure à la paroi inférieure, comme le montrent les graphiques des figures 16 : (a) et (b).

Alors que les valeurs absolues de  $v$  diminuent, la conservation de la masse entraîne l'augmentation de la valeur absolue de  $u$  partir de la valeur

$u = 0$  de l'état sans glissement, lorsque  $\eta$  commence à diminuer, à partir de la paroi supérieure, comme on peut le voir sur les graphiques des figures 17 (a) et (b). Au fur et à mesure que  $\eta$  continue de diminuer, la diminution de  $|u|$  devrait être monotone s'il n'y avait pas une autre condition de non-glissement à satisfaire par  $u$  au niveau de la paroi inférieure.

Ainsi, après avoir augmenté, les valeurs absolues de  $u$  présentent un maximum puis commencent à diminuer au-delà de ce maximum et jusqu'à la valeur 0, comme on le voit tracer sur les figures 17 : (a) et (b). Sur ces figures, on observe que ce maximum dépend du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$  et qu'il diminue lorsque  $\alpha$  augmente. On observe également que les profils de la vitesse longitudinale par unité de longueur du canal sont symétriques par rapport à l'axe médian du canal, contrairement aux résultats que nous avons obtenus pour la conduite annulaire semi-poreuse dans la Réf.23. De plus les figures 16 et 17 (a) et (b) mettent en évidence un phénomène intéressant qui se traduit par le fait que les valeurs absolues de  $v$  et  $u$  diminuent simultanément lorsque  $\alpha$  augmente.

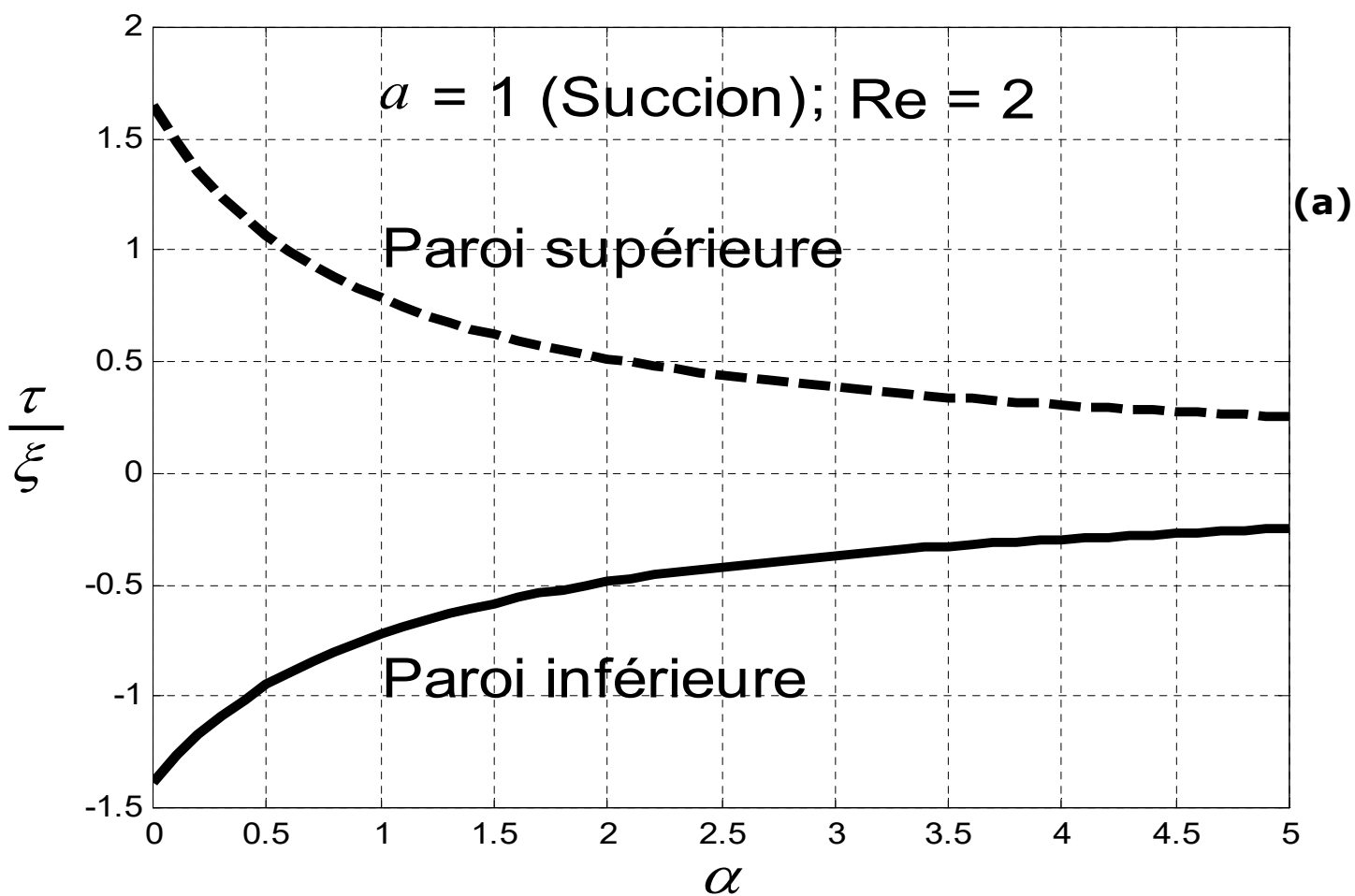
La raison de cette perspicacité physique est la suivante : lorsque le gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$  augmente à partir de la valeur 0, la force de pression agissant sur les deux extrémités du canal augmente également et le fluide subit un gain de vitesse qui devrait augmenter la vitesse absolue de la succion ou d'injection. Pour maintenir cette vitesse constante, le fluide, grâce à sa viscosité, crée des contraintes de cisaillement de frottement agissant sur les couches de fluide. Ces forces de frottement supplémentaires sont plus intenses que les forces d'inertie provenant du gain de vitesse fourni par l'augmentation du gradient de pression externe imposé entre les deux extrémités du canal.

Par conséquent, les particules fluides ayant la vitesse la plus lente augmentent en nombre et en masse et les valeurs absolues des vitesses transversales et longitudinales diminuent pour toute couche fluide, comme le montrent les figures 16 et 17 : (a) et (b). A l'aide de l'argument précédent, on comprend pourquoi le débit massique de l'écoulement diminue lorsque  $\alpha$  augmente, comme on le voit dans les tracés de la fonction de courant présentés sur les figures 14 : (a) et (b). Les figures 17 (a) et (b) peuvent être exploitées pour obtenir des indications physiques relatives à l'épaisseur des couches limites au voisinage des parois inférieures et supérieures du canal.

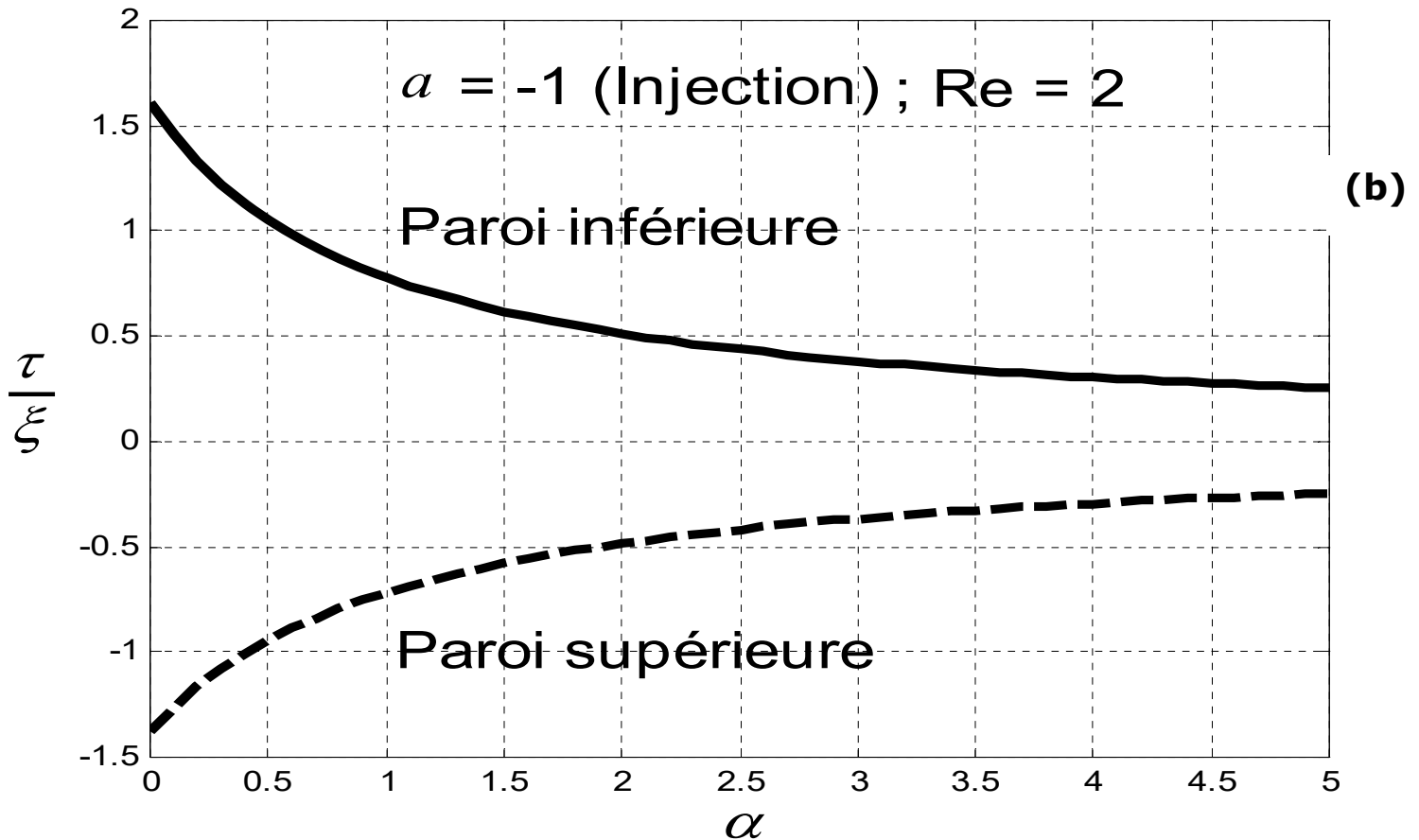
A cet effet, il est utile d'indiquer que, la vitesse transversale sans dimension  $v$  étant indépendante de la coordonnée  $\xi$  dans le sens du courant, la quantité  $\left|(\partial u/\partial \eta)_{paroi}\right|$  qui est la valeur absolue de la pente du tracé de  $u$  fonction de  $\eta$ , évaluée aux deux parois, est proportionnelle à la contrainte de cisaillement de la paroi et à l'ordre de grandeur  $u/\delta$ , où  $\delta$  est l'épaisseur de la couche limite. La valeur absolue de ces pentes étant égale pour une valeur donnée du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$  comme on le voit sur les figures 17 : (a) et (b), on en conclut que l'épaisseur des couches limites ainsi que les effets de la viscosité, au voisinage des deux parois, sont égaux pour un  $\alpha$  donné. Lorsque  $\alpha$  augmente à partir de sa plus petite valeur 0, la quantité  $\left|(\partial u/\partial \eta)_{paroi}\right|$  diminue. Cela signifie que, pour la succion comme pour l'injection, l'intensité des effets de la viscosité aux deux parois diminue et que l'épaisseur des couches limites au voisinage des parois du canal augmente, lorsque  $\alpha$  augmente.

### III-6 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT SUR LES DEUX PAROIS DU CANAL

Les valeurs de la contrainte de cisaillement aux parois inférieures et supérieures du canal sont calculées à partir des formules suivantes :  $\tau_l/\xi = \phi^{(2)}(\eta = -1) = \tau_l(\alpha)/\xi$  et  $\tau_u/\xi = \phi^{(2)}(\eta = 1) = \tau_u(\alpha)/\xi$ . Cette formule nous a permis de tracer les figures (18a) et (18b) :



**Figure 18a :** Contrainte de cisaillement pour les deux parois du canal en fonction du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracée pour la succion (a)



**Figure 18b :** Contrainte de cisaillement pour les deux parois du canal en fonction du gradient de pression externe sans dimension  $\alpha$ , tracée pour l'injection (b) .

Ces valeurs sont représentées sur les figure 18: (a) et (b) en fonction du gradient de pression externe, pour la suction et l'injection respectivement.

Les figures 18: (a) et (b) montrent que les valeurs absolues de la contrainte de cisaillement de paroi pour les deux parois du canal diminuent lorsque le gradient de pression externe augmente à partir de sa plus petite valeur 0. On en conclut que l'épaisseur des couches limites au voisinage des deux parois augmente lorsque  $\alpha$  augmente, aussi bien pour la suction que pour l'injection. Ceci confirme les résultats obtenus pour les couches limites dans la section III.3.

Les résultats ci-dessus pour la contrainte de cisaillement de paroi ont déjà été obtenus dans le cas d'un écoulement laminaire sous-pression à travers une conduite annulaire semi-poreux [22]. Contrairement à l'écoulement sous pression dans un tube annulaire semi-poreux pour lequel les valeurs de la contrainte de cisaillement à la paroi du cylindre intérieur ne sont pas symétriques à celles déduite pour le cylindre extérieur lorsque le gradient de pression externe  $\alpha$  varie [23], l'écoulement sous- pression étudié présente, pour la suction comme pour l'injection, des contraintes de cisaillement aux deux parois du canal qui sont symétriques pour toute valeur de  $\alpha$  sauf au voisinage de sa plus petite valeur 0, comme le montre la figure 18 : (a) et (b).

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Notre motivation pour mener le présent travail est venue en constatant que les écoulements le long de canaux poreux et soumis à un gradient de pression externe n'ont pas encore été étudiés, malgré les nombreuses recherches déjà effectuées sur les écoulements laminaires le long des canaux poreux. Ce travail est consacré à un écoulement laminaire stable soumis à un gradient de pression le long d'un canal semi-poreux horizontal à parois parallèles ayant une paroi inférieure imperméable. Le but de ce travail est d'étudier, à nombre de Reynolds fixe, les effets d'un gradient de pression externe constant imposé aux extrémités du canal, sur l'écoulement laminaire considéré, la vitesse de suction ou d'injection étant maintenue constante.

Notre motivation aussi est renforcée par le fait que le problème considéré a de nombreuses applications dans les procédés d'ingénierie des fluides thermiques tels que ceux dans lesquels un gradient de pression externe fourni par une pompe est généralement superposé au processus de la suction ou d'injection du fluide aux parois délimitant l'écoulement. L'intérêt principal de cette thèse est de fournir des directions des recherches potentielles dans le future pour le problème étudié. A cet égard, ce travail effectué représente une étape préliminaire pour des recherches ultérieures dans lesquelles il serait intéressant d'examiner l'influence du nombre de Reynolds, afin d'obtenir des informations physiques supplémentaires sur la richesse profonde de la structure de l'écoulement étudié. Les principales conclusions de ce travail peuvent être résumées comme suit.

- Le nombre de Reynolds de l'écoulement est défini comme suit:

$R_e = (Uh + h^3/|P_L - P_0|/4\rho\nu L/\nu)$  ; il est construit à partir de la somme de la vitesse absolue de la suction ou d'injection  $u$  et de la vitesse maximale d'écoulement plan de Couette  $W$  fournie par le gradient de pression externe constant.

- En maintenant  $u$  et  $h$  constants, le gradient de pression externe sans dimension imposé entre les deux extrémités du canal est donnée par:

$$\alpha = |P_L - P_0|L^{-1}/(4\rho\nu u/h^2)$$

- Grâce à l'action de ce gradient de pression externe favorable, aucun écoulement inverse ne se produit dans le canal semi-poreux.
- Il n'y a pas de couche de fluide dont la vitesse transversale dépasse la vitesse de la suction ou d'injection, contrairement aux résultats obtenus par notre équipe de recherche pour l'écoulement laminaire sous-pression dans un tube annulaire semi-poreux.
- Contrairement à leurs résultats où la vitesse axiale ne présente aucune symétrie, le profil de la vitesse longitudinale dans le canal est symétrique par rapport à l'axe central du canal, pour toute valeur du gradient de pression externe.
- Lorsque  $\alpha$  augmente à partir de sa plus petite valeur 0, le fluide subit un gain de quantité de mouvement qui devrait faire augmenter la valeur absolue de la vitesse de suction ou d'injection. Pour maintenir cette vitesse constante, le fluide, à l'aide de sa viscosité, crée des contraintes de frottements agissant sur les couches fluides. Ces forces de frottement supplémentaires sont plus intenses que les forces d'inertie provenant de l'apport de la quantité de mouvement fourni pour l'augmentation de  $\alpha$ .
- Au fur et à mesure que  $\alpha$  augmente, les particules fluides ayant la vitesse la plus faible augmentent donc en nombre et en masses.
- Lorsque les valeurs de  $\alpha$  augmentent, les composantes transversales et longitudinales de la vitesse d'écoulement diminuent pour toute couche de fluide.
- Comme dans le cas d'un écoulement laminaire sous pression dans une conduite annulaire semi-poreux, la contrainte de cisaillement de la paroi

en valeur absolue diminue lorsque le gradient de pression externe augmente à partir de sa plus petite valeur 0.

- Contrairement à l'écoulement sous pression dans un tube annulaire semi-poreux pour lequel les valeurs de la contrainte de cisaillement de paroi pour le cylindre intérieur ne sont pas symétriques à celles déduite pour le cylindre extérieur, l'écoulement sous pression étudié présente, pour la succion comme pour l'injection, des contraintes de cisaillement aux deux parois du canal qui sont symétriques pour toute valeur de  $\alpha$  sauf au voisinage de sa plus petite valeur 0.
- Pour une valeur donnée de  $\alpha$ , l'épaisseur des couches limites et l'intensité des effets de viscosité, au voisinage des deux parois, sont presque égales, tant pour la succion que pour l'injection.
- Lorsque  $\alpha$  augmente à partir de sa plus petite valeur 0, l'épaisseur des couches limites au voisinage des deux parois du canal diminue, aussi bien pour la succion que pour l'injection.

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [1] **C. W. Ose,**  
Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications, *Acta Mathematica*, vol.34, n°1911, p.205-284.
- [2] **L. Euler,**  
Principes généraux du mouvement des fluides, *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles lettres de berlin*, vol.11, 1757.
- [3] **M. Couette,**  
Etudes sur les frottements liquides, *Annals.chm.phy*, 21<sup>e</sup> serie, vol.6, p. 433-510.
- [4] **A.N. Kolmogorov,**  
On the generation of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid, *Doklady Akademic Nauk* ,vol.31, n°1941, p.319-323.
- [5] **O. Reynolds,**  
An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channel, *philosophical transaction of the society* vol clxxiv, 1883.
- [6] **A. S. Berman,**  
“Laminar flow in channels with porous walls,” *J. Appl. Phys.*, vol. 24, pp. 1212-35, 1953.
- [7] **S. W. Yuan and A B. Finkelstein,**  
“Stability of pipe flow with blowing,” *Trans. ASME*, vol. 78, pp. 719-727, 1956.
- [8] **R. M Terrill and P. W. Thomas,**  
“On laminar flow through a uniformly porous pipe,” *App. Sci. Res.*, vol. 21, pp. 37- 67, 1969.

- [9] **M. Goto and S. Uchida**,  
“Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall,” *Trans. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci.*, vol. 33, p. 14, 1990.
- [10] **M. Ghaffar and al**,  
“Unsteady flow between two orthogonally moving porous disks,” *J. Mech.*, vol. 31, pp. 147-151, 2015.
- [11] **S. Tsangaris, D. Kondaxakis**,  
“Exact solution for flow in a porous pipe with unsteady wall suction and/or injection,” *Commun. Nonlinear Sci.*, vol. 12, pp. 1181-1189, 2007.
- [12] **W. H. H. Banks and M. B. Zaturka**,  
“On flow through a porous annular pipe,” *Phys. Fluids A.*, vol. 4, no. 6, pp. 1131-1141, 1992.
- [13] **B. Bernales and P. Haldenwang**,  
“Laminar flow analysis in a pipe with locally pressure-dependent leakage through the wall”, *Eur. J. Mech. B-Fluid.*, vol. 43, pp. 100-109, 2014.
- [14] **M. Bouyges and al**, “Asymptotically based self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous tube with a non-circular cross-section”, *J. Fluid Mech.* 826, pp. 396-420, 2017.
- [15] **M. Siavashi and al**,  
“Similarity solution of air and nanofluid impingement cooling of a cylindrical porous heat sink,” *J. Therm. Anal. Calorim.* vol. 135, pp. 1399-1415, 2019.
- [16] **M. G. Sobamowo and al**,  
“Thermo-magneto-solutal squeezing flow of nanofluid between two parallel disks embedded in a porous medium: effects of nanoparticle geometry, slip and temperature jump conditions, modeling and simulation in engineering, *article ID: 7364634*, 2018.

- [17] **N. R. Makon and al,**  
“On the existence and determination of the incompressible laminar flow located in the polar plane of a porous annular pipe,” *Alex. Eng. J.*, vol. 61, no. 4, pp. 2637-2650, 2022.
- [18] **G. C. Dash and K. L. Ojha,** “Viscoelastic hydromagnetic flow between two porous parallel plates in the presence of sinusoidal pressure gradient,” *Alex. Eng. J.*, vol. 57, n0.4, pp. 3463-3471, 2018.
- [19] **R. N. Barik and al ,**  
“Steady laminar MHD flow of Viscoelastic fluid through a porous pipe embedded in a porous medium,” *Alex. Eng. J.*, vol. 57, 2,pp. 973-982, 2018.
- [20] **L. Durlofsky and J. F. Brady,**  
“The spatial stability of a class of similarity solutions,” *Phys. Fluids*, vol. 27, p. 1068, 1984.
- [21] **G. Casalis and al,**  
“Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls,” *Phys. Fluids*, vol. 10, p. 2558, 1998.
- [22] **S. Ferro, and G. Gnavi,**  
“Spatial stability of similarity solutions for viscous flows in channels with porous walls,” *Phys. Fluids*, vol. 12, no.4, pp. 997-802, 2000.
- [23] **J. Griffon and G. Casalis,**  
“On the nonparallel stability on the injection induced two-dimensional Taylor flow,” *Phys. Fluids*, vol. 13, p. 1635, 2001.
- [24] **G. L. Mbogba and al,**  
“Effects of an external constant pressure gradient on a steady incompressible laminar flow through a semi-porous annular pipe,” *Z. NaturforschA*, vol. 77, no. 2, pp. 131-141, 2022.

- [25] **W. A. Robinson**,  
“The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls,” *J. Eng. Math.*, vol. 10, no. 1, pp. 23-40, 1976.
- [26] **M. B. Zaturka and W. H. H. Banks**,  
“On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls,” *Fluid Dyn. Res.*, vol. 4, p. 151, 1988.
- [27] **S. M. Cox**,  
“Two-dimensional flow Of a viscous fluid in a channel with porous wall,” *J. Fluid. Mech.*, vol. 227, pp. 1-33, 1991.
- [28] **P. Haldenwang**,  
“Laminar flow in a two-dimensional plane channel with local pressure-dependent cross-flow,” *J. Fluid. Mech.*, vol. 593, pp. 463-473, 2007.
- [29] **E. C. Dauenhauer and J. Majdalani**,  
“Exact self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls,” *Phys. Fluids.*, vol. 15, no. 6, pp. 1485-1495, 2003.
- [30] **S. T. Mohyud-Din and al**,  
“Analytical approach to a slowly deforming channel flow with weak permeability,” *Z. NaturforschA*, vol. 65, pp. 1033–1038, 2010.
- [31] **A. T. Akinshilo**,  
“Flow and heat transfer of nanofluid with Injection through an expanding or contracting porous channel under magnetic force field”, *J. Eng. Sci. Tech.*, vol. 21, pp. 486-494, 2018.
- [32] **A. T. Akinshilo, Olofinkua**,  
“Steady flow and heat transfer analysis of third grade fluid with porous medium and heat generation,” *J. Eng. Sci. Tech.*, vol. 20, pp. 1602-1609, 2017.

- [33] **T. Aziz and al,**  
“Exact solutions for Stokes flow of a non-Newtonian nanofluid model: a Lie similarity approach,” *Z. Naturforschung A.*, vol. 71, no. 7, pp. 621-630, 2016.
- [34] **Z. Alhajaj and al,**  
“Flow of nanofluid and hybrid fluid in porous channels: experimental and numerical approach,” *Int. J. Thermophys.* 1-2, 100016, 2020.
- [36] **J. F. Brady,**  
“Flow development in a porous channel and tube,” *Phys. Fluids.*, vol. 27, pp. 1061-1067, 1984.
- [37] **C. Y. Wang,**  
“Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations,” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 23, pp. 159-177, 1991.
- [38] **L. Oxarango and al,**  
“Laminar flow in channels with wall suction or injection: a new model to study multi-channel filtration systems,” *Chem. Eng. Sci.*, vol. 59, pp. 1039-1051, 2004.
- [39] **J. F. Brady and A. Acrivos,**  
“Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 112, pp. 127-150. 1981.
- [40] **S. Uchida and H. Aoki,**  
“Unsteady flow in a semi-infinite contracting or expanding pipe,” *J. Fluid Mech.*, vol. 82, pp. 371-387, 1977.
- [41] **I. Proudman and K. Johnson,**  
“Boundary-layer growth near a rear stagnation point,” *J. Fluid Mech.*, vol. 12, pp. 161-168, 1962.

- [42] **H. Schlichting**,  
Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering,  
*New-York*, 1968.
- [43] **G. K. Batchelor**,  
An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press,  
*Cambridge*, 1967.
- [44] **PEMHA Elkana**,  
Cours de Mécanique des Fluides de l'Université de Yaoundé 1. Faculté  
des Sciences, Département de Physique, Niveau 3.
- [45] **H. W. Press, A. S. Teukolsky, T. W. Vettering, and P. B. Flannery**,  
Numerical Recipes in Fortran, 2<sup>nd</sup>ed, Cambridge, 1992.
- [46] **W. E. K. Middleton**,  
The place of Torricelli in the history of the barometer vol.54, n<sup>o</sup>1, 1963.
- [47] **B.M Françoise**,  
Les Principes mathématiques; défi aux principes cartésiens ou réalité. In  
revue philosophique de Louvain. Quatrième séries, tomes 86, n<sup>o</sup>72, 1988  
p.440-466.
- [48] **H.Pitot**,  
Description d'une machine pour mesurer la vitesse des eaux courants et  
le sillage des vaisseaux, *histoire de l'académie royale des sciences* 1732,  
p.363-376.
- [49] **J. Boussinesq**,  
Essai sur la théorie des eaux courantes, *compte rendu de l'académie des  
sciences*, vol.23, 1877, p.1-680.
- [50] **Viollet and P. Esposito**,  
"Mécanique des Fluides appliquée: écoulements incompressibles dans les  
circuits, canaux et rivières autour des structures et dans  
l'environnement." *Presses des ponts*, 2003.

- [51] **V. Karman, T. H. L Rubach,**  
“On the Mechanisms of fluid resistance”, *Physics Z, Ol.13, pp.49-67, 1912*
- [52] **W. Thomson,**  
On vortex motion, *transactions of the royal society of Edinburgh*, vol.25, 1868, p.217-260.
- [53] **J. Boussinesq,**  
Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grandes section vol.1, *Gauthier- Villas*, 1897.
- [54] **J.L.M. Poiseuille,**  
Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres ; *imprimerie royale*, 1844.
- [55] **O. Reynolds,**  
On the dynamical theory of incompressible viscous fluids, and the determination of the criterion, *philosophical transactions of the royal society A*, vol clxxx, 1895.
- [56] **S. W. Thompson,**  
XLVI, hydrokinetic solutions and observations, *the London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science, Taylor /Francis*, vol.42, n°281, 1871, p .362-377.
- [57] **J.W. Rayleigh,**  
On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the underside, the London, *Edinburgh, and Dublin, philosophical magazine and journal of science, sixième série*, vol.32, n°192, 1916, p.529-546.
- [58] **M. Couette,**  
Etudes sur les frottements liquides, *Annals.Chm. phys*, 21<sup>e</sup>serie, vol.6, p.433-510.

- [59] **G.G. Stokes**,  
On the theories of the internal friction of fluids in motion, and on the equilibrium and motion of elastic solids, transactions *of the Cambridge philosophical society*, vol.8, p.287-305.
- [60] **E. PEMHA**,  
“ Notes de cours de Mécanique des Fluides», Niveau 4, Université de Yaoundé I, Laboratoire de Mécanique Appliquée et d’Hydraulique, (2013).
- [61] **E. Pemha**,  
“Markovian model for the propagation of a light wave in a heated turbulent jet of air,” PhD Thesis, Ecully, France, Laboratory of Fluid Mechanics, *Ecole Centrale de Lyon*, 1990.
- [62] **E. Pemha and al**,  
“Measurement of the diffusion coefficient in a heated plane airstream,” *Phys. Fluids A.*, vol. 5, no. 6, pp. 1289-1295, 1993.
- [63] **E. Ngo Nyobe**,  
“A new laser-based diagnostic technique using genetic algorithms for the optical and thermal turbulence in a hot turbulent jet of air,” PhD Thesis, Yaoundé, Applied Mechanics Laboratory of the Faculty of Science, *University of Yaoundé I*, 2008.
- [64] **M. Lamara, E. Ngo Nyobe, and E. Pemha**, “Engineering laser-based diagnostic in a hot wind tunnel jet: measurement of the temperature structure coefficient by using an optimization Prog. *Electromagn. Res. M, von technique.*,” ol.74, pp. 93-103, 2018.
- [65] **E. Ngo Nyobe and E. Pemha**,  
“Shape optimization using genetic algorithms and laser beam propagation for the determination of the diffusion coefficient in a hot turbulent jet of air,” *Prog. Electromagn. Res. B.*, vol. 4, pp. 211-221, 2008.

- [66] **E. Pemha and E. Ngo Nyobe**,  
“Genetic algorithm approach and experimental confirmation of a laser-based diagnostic technique for the local thermal turbulence in a hot wind tunnel jet,” *Prog. Electromagn. Res. B.*, vol. 28, pp. 325-350, 2011.
- [67] **J.L. Lagrange**,  
Introduction à la notion d’écoulements à potentiel de vitesse, formaliser la notion de lignes de courant et précise la notion d’onde dans le fluide à la surface libre, 1781.
- [68] **I.Mahariq and al**,  
Photonic Nanojets and Whispering Gallery Modes in smooth and Corrugated Micro-Cylinders under point-source Illumination, *Photonics*, 7, 3. *Multidisciplinary Digital publishing Institute*, (2020).
- [69] **Louis Vadot**,  
Réflexions sur l’histoire de la mécanique des fluides (23, av. de la Plaine Fleurie, 38240 Meylan)
- [70] **F.M. White**,  
Fluid Mechanics. 4<sup>th</sup> edition. WCB McGraw-Hill, New York, NY, 1988.
- [71] **S. David**,  
Horologium oscillatorium de Huygens et Principes in revue philosophique de Louvain. Quatrième série 86, n<sup>o</sup>72? 1988, p.485-504.
- [72] **J. W.S. Rayleigh**,  
On the dynamical theory of incompressible viscous fluids, and the determination of the criterion, *philosophical transactions of the royal society A*, vol. clxxxiv, 1895.
- [73] **W. Thomson**,  
On vortex Motion, *Transactions of the royal society of Edinburgh* vol.25, 1868, p.217-260.

- [74] **J. Leray**,  
Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace, *Acta Mathematica*, vol.63, n°1, 1934, p.193-248.
- [75] **Zaynab Salloum**,  
Etude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers. *Mathématiques générales [math.GM]*. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT: 2008PEST0017. Tel-00461675
- [76] **N. Alleborn and al**,  
"Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion." *J.Fluid Mech.*330, 169 (1997)

# PUBLICATION ISSUE DE LA THESE

---

Publication issue de la Thèse

**Yvon GAZAMBETI, Elisabeth NGO NYOBE, Maurice LAMARA, and Elkana PEMHA** Pressure-exerted steady laminar flow of an incompressible fluid along a porous parallel-walled channel with an impermeable wall

Yvon Gazambeti, Elisabeth Ngo Nyobe, Maurice Lamara and Elkana Pemha\*

# Pressure-exerted steady laminar flow of an incompressible fluid along a porous parallel-walled channel with an impermeable wall

<https://doi.org/10.1515/zna-2022-0009>

Received January 14, 2022; accepted March 4, 2022;

published online March 28, 2022

**Abstract:** This paper is devoted to the pressure-exerted steady laminar flow of an incompressible Newtonian fluid along a parallel-walled horizontal channel with a porous upper wall and an impermeable lower wall. The fluid is sucked or blown through the porous wall, at constant and uniform velocity, orthogonally to the wall. At the same time, an external pressure gradient constant in time is applied between the two ends of the channel. The aim of this work is to determine and analyze the effects of the external pressure gradient on the flow, the suction/blowing velocity being kept constant. The two-dimensional configuration of the flow with zero-divergence velocity field allows the existence of the stream function given by a single nonlinear partial differential equation which replaces the Navier–Stokes equations and is called the vorticity equation. This latter equation is demonstrated by applying an unusual approach which uses the vector momentum equation in its general form. From the similarity-solutions assumption, it is shown that the vorticity equation leads to a two-point boundary value problem whose solutions are computed by means of a numerical shooting technique including the Newton–Raphson optimization algorithm. Physical understandings of the flow under consideration are derived from the results obtained.

**Keywords:** laminar flows along semi porous parallel-walled channels; Newton–Raphson optimization algorithm; numerical shooting technique; similarity-solution method; vorticity equation; wall shear stress.

## 1 Introduction

The seminal work of Berman [1] is the starting point for many works devoted to incompressible laminar flows in porous boundaries for the so-called two-dimensional configuration which has extensively been investigated. These works can be classified in two groups according to the type of geometry of the domain in which the fluid is located. The first group contains works relating to flows in circular conducts whether annular or not, which require the use of cylindrical or axisymmetric coordinates and the second group is that of works devoted to flows in channels for which Cartesian coordinates are applied.

In the first group of works, we can mention the papers achieved by Yuan and Finkelstein [2], Terrill and Thomas [3], Goto and Uchida [4], Ghaffar, Ali and Ashraf [5], Tsangaris, Kondaxakis and Vlachakis [6], Banks and Zaturka [7], Galowin, Fletcher and Desantis [8], Bernales and Haldenwang [9], Bouyges et al. [10], Siavashi, Rasam and Izadi [11], Sobamowo, Akinshilo and Yinusa [12] and the recently published works of our research team [13, 14]. With more details, we can precise that steady-state similarity solutions for a flow in a circular pipe have been investigated for the first time in [2] and the first complete analysis of these solutions is presented in [3]. About unsteady flows, those taking place in a semi-infinite porous pipe with time-varying radius have been investigated in [4], those occurring between two coaxial porous disks moving in the axial direction have been studied in [5], and the results for those caused by unsteady suction–injection in the wall of a circular pipe have been presented in [6]. In Ref. [7], the theory of bifurcations has been used for the analysis of the complete dynamical behavior of the flow through a porous annular pipe. The case for which the local pressure in a pipe depends on the suction–injection velocity is investigated

---

\*Corresponding author: Elkana Pemha, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon, E-mail: elkanaderbeau@yahoo.fr.

<https://orcid.org/0000-0002-1867-2708>

Yvon Gazambeti and Maurice Lamara, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon. <https://orcid.org/0000-0003-2483-3923> (M. Lamara)

Elisabeth Ngo Nyobe, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon; and Department of Mathematics and Physical Science, National Advanced School of Engineering, University of Yaoundé I, P.O. Box 8390, Yaoundé, Cameroon. <https://orcid.org/0000-0003-4033-0242>

[8, 9]. An asymptotically based self-similarity solution of the Navier–Stokes equations is presented in [10] for a porous tube with a non-circular cross-section. The flow of nanofluid is considered as impingement cooling of a cylindrical porous heat sink [11], or as thermo-magneto-solutal between two parallel disks embedded in a porous medium [12]. In the work of our research team reported in [13], the polar-plane laminar flow is investigated for the first time and the existence and determination of that flow for an incompressible fluid located between two coaxial cylinders are considered. To end with this first group of works, we mention our recently published work [14] which is devoted to the study of the effects of an external constant pressure gradient on a steady laminar flow through a porous annular pipe with inner impermeable wall.

About the second group of works, that is, papers devoted to flows along porous rectangular channels, extensive research has been done and we can cite the works published by Terrill [15], Robinson [16], Zaturka, Drazin and Banks [17], Cox [18], Haldenwang [19], Dauenhauer and Majdalani [20], Mohyud-Din, Yildırım, and Sezer [21], Akinshilo [22, 23], Akinshilo, Olofinkua, and Olaye [24], Taha Aziz, Aziz, and Khalique [25], and Alhajaj, Bayomy and Ziad Saghir [26]. More precisely, we mention that in Ref. [15], the analytical bases of the laminar flow in a uniformly porous channel are presented. A numerical investigation is performed in [16] to determine the existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls. Classical studies on steady, symmetric and two-dimensional solutions of the laminar flow in porous channel are generalized by considering asymmetric flows [17, 18], unsteady flows [17] and three dimensional perturbations [18]. The results for the laminar flow in a two-dimensional porous plane channel with local pressure depending on the suction velocity are presented in [19]. Numerical shooting technique [20] and homotopy perturbation method (HPM) [21, 22] are applied to study the flow in a porous contracting or expanding channel. In [22], the motion considered is an unsteady flow of nanofluid under the influence of uniform magnetic flux. Other flows are studied in porous media bounded by parallel plates, for a non-Newtonian third grade fluid with internal heat source [23], for sodium alginate conveying copper nanoparticles [24], and for a Stokes flow of nanofluid [25]. This second group of works ends by the experimental and numerical investigations done in [26] for a flow of nanofluid and hybrid fluid in porous channels.

There are papers which simultaneously investigate laminar flows in porous channels and laminar flows in porous tubes. In this regard, we can cite the works achieved by Brady [27], Wang [28], Oxarango, Schmitz and Quintard [29]. More precisely, we mention that the spatial development of the inlet velocity profile in a porous channel and tube is studied in [27]. Comprehensive review of methods to seek exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations for flows along porous channels and tubes is developed in [28]. Non uniformity of the suction or injection velocity in channels or tubes is taken into account by a one-dimensional model to describe the laminar flow in [29].

For the aforementioned flows, some of them have been devoted to moving walls of channels or tubes [4, 5, 20–22]. For this kind of flows, it is important to mention the great help provided by the work of Brady and Acrivos [30] and that of Uchida and Aoki [31], which have been done for impermeable walls, and have shown how to treat accelerating walls in the longitudinal direction [30] and in transverse direction [31]. These treatments continue to be applied nowadays for porous boundaries.

It is important to point out that, in all the works cited above [1–31], the pressure-exerted steady laminar flow along porous channels has not yet been investigated, neither in our previous works nor in the others that have been mentioned, or in those referred to in these papers. This constitutes our motivation for the present investigation. This motivation is reinforced by the fact that the problem to be solved in this paper has many industrial applications, notably in thermal engineering processes for which a constant longitudinal pressure gradient provided by a pump is usually superimposed to the fluid suction or injection process at the walls of the porous channel containing the flow.

The present paper investigates the effects of an external pressure gradient on a steady laminar flow of an incompressible Newtonian fluid along a parallel-walled horizontal channel with a porous upper wall and an impermeable lower wall. The external pressure gradient constant in time is applied between the two ends of the channel. At the same time, the fluid is sucked or blown through the porous wall, at constant and uniform velocity, orthogonally to the wall.

Two parameters are to be taken into consideration: the dimensionless external pressure gradient and the Reynolds number constructed from the sum of the suction–injection velocity and the maximum plane-Couette-flow velocity. The purpose of this paper is to determine and analyze the effects of the external pressure gradient on

the steady laminar flow considered, the suction/injection velocity being kept constant.

To solve the problem under consideration, this paper shows how the Navier–Stokes equations are reduced to the single vorticity equation [32], satisfied by the stream function whose existence is due to the two-dimensional configuration of the incompressible flow, having a zero-divergence velocity field which is justified by the equality between the incoming and outgoing mass rates.

Instead of solving the vorticity equation by using the computational fluid dynamics (CFD) algorithms, we choose the similarity-solution method. This method seeks solutions which are known to be exact for the Navier–Stokes equations, and are then preferable in the so-called two-dimensional configuration, to those given by the CFD despite the increasing precision of the CFD algorithms.

As it will be seen in this paper, the similarity-solution method leads to a fourth-order nonlinear ordinary differential equation which is the Proudman–Johnson equation [33], solved by means of a numerical shooting technique [34] in which the Runge–Kutta and Newton–Raphson algorithms [34] are applied. At the end of the calculation procedure, some characteristics of the flow are found as function of the dimensionless external pressure gradient, notably the stream function per unit length of the channel, the profiles of the components of the flow velocity field, and the wall shear stress at both walls of the channel. Physical understandings of the flow are derived from the results obtained.

The main interest of this study is to provide potential research directions in the future for the problem under consideration. In this regard, the work done in this paper represents a preliminary step for subsequent investigations in which it would be interesting to examine the influence of various Reynolds numbers, in order to capture further physical insights of the deep richness of the structure of the flow under study.

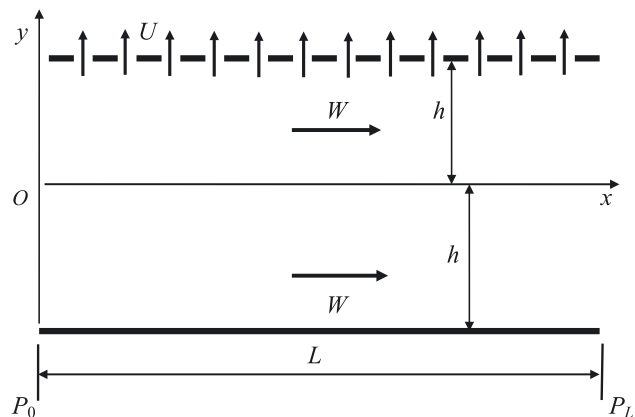
The present paper is organized as follows. The next section is devoted to the statement of the problem and its mathematical formulation. In Section 3, the method applied to find solution is explained in detail. The results obtained are presented and discussed in Section 4. Concluding remarks are given in the last section where the main findings are summarized and some interesting outlooks are presented.

## 2 Statement of the problem and mathematical formulation

### 2.1 Statement of the problem

Consider an incompressible Newtonian fluid having constant density  $\rho$  and constant kinematic viscosity  $\nu$ , located in a rectangular space formed by a horizontal parallel-walled channel, the upper wall of the channel being porous and the lower one impermeable. The Cartesian-coordinates system  $(x, y, z)$  is adopted with the respective unit vectors  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , such that the  $x$ -axis is the streamwise median axis of the channel, the  $y$ -axis is ascending and perpendicular to the walls, the origin of the coordinates system being located on the  $x$ -axis at the head-end of the channel ( $x = 0$ ). The two walls of the channel are located at  $y = -h$  and  $y = h$ , and have same length  $L$  such that  $0 \leq x \leq L$ . From the practical point of view, the channel is then supposed to be semi-infinite such that no streamwise flow exists at the closed end  $x = 0$ . The length  $L$  of the channel is supposed to be very great compared to its height ( $2h$ ). In addition, to have a two-dimensional configuration for the flow, the channel has a large aspect ratio, that is, the width of the channel defined to be its dimension ( $2z_m$ ) along the  $z$  direction is great compared to its height ( $2h$ ).

The upper porous wall undergoes suction or injection at constant and uniform velocity, orthogonally to the wall, as seen in Figure 1. An external pressure gradient  $(P_L - P_0)/L$  constant in time is applied between the two ends of the channel. Only the case of favorable pressure



**Figure 1:** Horizontal parallel-walled channel having a porous upper wall and impermeable lower wall. The channel contains the laminar flow with the fluid sucked at constant and uniform velocity  $U$ .  $W$  represents the maximum velocity of the plane Couette flow which is the order of magnitude of longitudinal velocities.

gradient is investigated in this paper. The external pressure gradient is qualified to be favorable when its algebraic value and the algebraic value of the suction/injection velocity have same sign: this occurs when the external pressure gradient is negative for injection, or positive for suction.

The effects of the body forces are negligible and the flow is assumed to be two-dimensional and can then be studied in the Cartesian plane  $(x, y)$ , with dimensional longitudinal and transverse components  $(V_x, V_y)$  of the velocity field  $\mathbf{V}$ . This hypothesis holds because of two reasons. First, the suction or injection of fluid is operated with a velocity having zero  $z$ -component, and being uniform over the whole porous wall, that is, in particular in the  $z$  direction. Second, the channel has a sufficiently large aspect ratio of width  $(2z_m)$  to height  $(2h)$  such that the  $z$ -direction has no influence on the flow under consideration. So, the fluid particles move in the  $xy$ -plane, and the flow repeats identically to itself in any translation along the  $z$ -axis.

## 2.2 Derivation of the stream function formulation

The unavoidable constraint when determining the velocity field of the flow is the equation of conservation of mass written for incoming and outgoing flows in the form [13, 35, 36]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho (|q_i| - |q_o|), \quad (1)$$

where  $q_i$  and  $q_o$  represent the mass rates per unit fluid mass of the incoming and outgoing flows, respectively, with  $q_i \leq 0$  and  $q_o \geq 0$ . For an incompressible fluid, (1) gives:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = |q_i| - |q_o|. \quad (2)$$

As it can be seen from Figure 1, and as encountered in environmental or industrial flows that are not emptying processes, the incoming and outgoing mass rates are usually equal, such that (2) gives a zero-divergence velocity field:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (3)$$

This important relation is desired in all the works devoted to the motion of any isothermal incompressible fluid. Although it is automatically applied sometimes, it requires, as seen, to check that the incoming and outgoing flows have equal mass rates in the apparatus investigated [13, 14].

Due to the two-dimensional configuration of the channel, relation (3) justifies the existence of the stream

function  $\psi$  whose definition is given by the following relations:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ and } V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4)$$

so that the conservation of mass is automatically satisfied without knowing beforehand the velocity field.

## 2.3 Dimensionless vorticity equation and dimensionless external pressure gradient

On the other hand, with  $p$  denoting the pressure,  $t$  the time,  $\operatorname{Curl} \mathbf{V}$  the rotational of the velocity field  $\mathbf{V}$ ,  $\Delta$  the vector Laplacian, and  $\times$  representing the vector product, let us write the vector momentum equation [13, 14, 35, 36]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \operatorname{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V}. \quad (5)$$

Taking the rotational of (1), one obtains the equation of transport of vorticity named vorticity equation [35]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Curl} \mathbf{V} + \operatorname{Curl}(\operatorname{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}) = \nu \operatorname{Curl}(\Delta \mathbf{V}). \quad (6)$$

Since  $\psi$  exists, relation (6) can be expressed in terms of  $\psi$  by using the well-known relation deduced from (4):

$$\operatorname{Curl} \mathbf{V} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z, \text{ with: } \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (7)$$

For this purpose, we have initiated calculations to obtain the following two formulas valid in Cartesian coordinates, by using (7) and the well-known relation  $\Delta \mathbf{V} = -\operatorname{Curl}(\operatorname{Curl} \mathbf{V})$  valid when (3) is applied:

$$\operatorname{Curl}(\operatorname{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}) = -\left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi \right) \mathbf{e}_z, \quad (8a)$$

$$\operatorname{Curl}(\Delta \mathbf{V}) = -\nabla^2(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z. \quad (8b)$$

Taking into account (8a) and (8b), one then obtains from (6), the steady-state vorticity equation [32]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (9)$$

As it can be seen from Figure 1, the boundary conditions needed for (9) are as follows, with  $U$  representing the absolute value of the suction or injection velocity:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ and } V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \text{ at } y = -h, \quad (10a)$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ and } V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = aU, \text{ at } y = h, \quad (10b)$$

( $a = 1$  for suction or  $a = -1$  for injection).

Let us find the dimensionless form of the vorticity equation and the corresponding boundary conditions. One then needs to define the reference velocity denoted by  $V_{\text{ref}}$ . If the flow was driven by the suction/injection process only, the reference velocity would be defined through the suction/injection velocity  $U$ , as commonly done. In the case of this paper, the external pressure gradient imposed between the two ends of the channel can drive the flow if the suction/injection process does not exist. So, the flow under study is conducted by two drivers, and the reference velocity is then defined by using the sum of the velocities provided by each driver. Therefore, we have:

$$V_{\text{ref}} = U + |W|, \quad (11)$$

where  $W = -(2\rho\nu)^{-1} (|P_L - P_0|/L) h^2$  is the maximum velocity of the pressure-exerted plane Couette flow which would exist alone in the absence of the suction or injection process.

Introducing the dimensionless quantities  $\xi = x/h$ ,  $\eta = y/h$ ,  $u = V_x/V_{\text{ref}}$ ,  $v = V_y/V_{\text{ref}}$ ,  $F = \psi/(V_{\text{ref}}h)$ , we find that the dimensionless vorticity equation and its boundary conditions are written as:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^2 F - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \nabla^2 F = \frac{1}{Re} \nabla^2 \nabla^2 F, \quad (12)$$

$$u = 0 \text{ and } v = 0, \text{ at } \eta = -1, \quad (13a)$$

$$u = 0 \text{ and } v = \alpha(1 + \alpha)^{-1}, \text{ at } \eta = 1, \quad (13b)$$

where  $Re = (V_{\text{ref}}h)/\nu$  is the Reynolds number, and  $\alpha = |W|/U$  is the velocity ratio comparing the orders of magnitude of the longitudinal and transverse velocities in the channel.

Despite the definition of  $\alpha$  as a velocity ratio, this parameter can be regarded as the dimensionless external pressure gradient [14] because its definition in terms of the pressure gradient  $(P_L - P_0)/L$  can be written as:

$$\alpha = |P_L - P_0| L^{-1} / (2\rho\nu h^{-2}U). \quad (14)$$

The advantage of the way for defining the reference velocity as done in (11) is to create the opportunity to take into account the effects of the external pressure gradient by introducing in the formulation of the boundary conditions, the parameter  $\alpha$  which plays the role of the dimensionless pressure gradient if the suction/injection velocity  $U$  is kept constant, as seen in (14). Under these conditions, varying the external pressure gradient is the same as varying  $\alpha$ .

## 3 Method of solution

### 3.1 Calculation of the stream function per unit length using the shooting technique

All parameters being dimensionless, we assume the similarity-solution hypothesis which states that the transverse velocity component  $v$  is independent of the streamwise coordinate  $\xi$  defined along the  $x$ -direction. This hypothesis was considered by Berman [1] for the first time. It holds because the height  $h$  of the channel does not vary in the streamwise direction and the injection-suction of fluid through the channel is operated uniformly over the whole porous wall.

Considering the dimensionless expression  $v(\eta) = -\partial F/\partial \xi$  coming from the definition of  $\psi$  given in (3), one then obtains by integrating and by setting  $F = 0$  at  $\xi = 0$ :

$$F(\xi, \eta) = \xi \phi(\eta), \text{ with } \phi = -v. \quad (15)$$

According to relation (15),  $\phi$  is called the stream function per unit length of the channel. Using the result obtained in (15), (12) gives the following nonlinear ordinary differential equation satisfied by  $\phi$  and called the Proudman–Johnson equation [33]:

$$\phi^{(1)} \phi^{(2)} - \phi \phi^{(3)} = \frac{1}{Re} \phi^{(4)}, \quad (16)$$

with the boundary conditions:

$$\phi^{(1)} = 0 \text{ and } \phi = 0, \text{ at } \eta = -1, \quad (17a)$$

$$\phi^{(1)} = 0 \text{ and } \phi = -\alpha(1 + \alpha)^{-1}, \text{ at } \eta = 1, \quad (17b)$$

where  $\phi^{(k)}$  represents the derivative  $d^k \phi/d\eta^k$ . As it is seen, the similarity-solution method enables to reduce the steady-flow Navier–Stokes Eqs. (3) and (5) to a single fourth-order nonlinear ordinary differential equation with two boundary conditions at each wall.

To solve this two-point boundary value problem, we use the numerical shooting technique [34]. This technique is structured in three steps.

Step 1: The problem to be solved is transformed to an initial boundary value problem which involves to keep the same ordinary differential equation and to introduce two conditions freely chosen for the missing second and third derivatives  $u_1$  and  $u_2$  at the starting border  $\eta = -1$ , in order to obtain an unknown function  $f(\eta)$  such that:

$$f^{(1)} f^{(2)} - f f^{(3)} = \frac{1}{Re} f^{(4)}, \text{ for } \eta > -1, \quad (18a)$$

$$f^{(1)} = 0, \quad f = 0, \quad f^{(2)} = u_1, \quad f^{(3)} = u_2, \quad \text{at } \eta = -1. \quad (18b)$$

Step 2: For any guest values  $(u_1, u_2)$ , the above initial value problem is solved by using the fourth-order Runge–Kutta algorithm [34].

Step 3: The parameters  $(u_1, u_2)$  are then updated and adjusted in order to obtain the values  $(u_1^*, u_2^*)$  which are the optimal values for which  $f$  match conditions required for  $\phi$  at the ending border  $\eta = 1$ . When these optimal values are reached with good accuracy, the computed solution  $f$  is identical to the desired solution  $\phi$ .

For the purpose of step 3, a procedure of numerical optimization is conducted at the ending border  $\eta = 1$ . A quadratic cost function  $J = D_1^2 + D_2^2$  is then defined from a discrepancy vector  $\mathbf{D}$  whose components  $(D_1, D_2)$  measure how far the computed solution  $f$  is from satisfying the required conditions at the border  $\eta = 1$ . This gives:

$$D_1(u_1, u_2) = f^{(1)}(\eta = 1) - 0, \quad (19a)$$

$$D_2(u_1, u_2) = f(\eta = 1) - (-a(1 + \alpha)^{-1}). \quad (19b)$$

The ultimate aim being to reduce  $D_1$  and  $D_2$  to the minimum, one initializes the calculation procedure by a starting guess  $(u_1, u_2)_0$  and may apply the gradient-descent algorithm [37, 38] or other optimization technique as done in the previously published works of our research team [39–42]. In this paper, the update procedure is performed by the Newton–Raphson optimization algorithm [13, 14, 34, 43] and involves the computation of the Jacobean matrix  $[\mathbf{M}]$  according to the following relation in which  $q$  represents the iteration index:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{(q+1)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{(q)} - ([\mathbf{M}]^{(q)})^{-1} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}^{(q)}, \quad (20)$$

and the components of the matrix  $[\mathbf{M}]$  are defined by:  $M_{i,j} = \partial D_i / \partial u_j$  (with  $i, j = 1, 2$ ). The method used for calculating the components  $M_{i,j}$  is detailed in the Appendix.

### 3.2 Derivation of the streamlines

The trajectories of the fluid particles or streamlines are defined by the relation:  $\psi = C$  where  $C$  is a constant whose value is determined from the coordinates  $(\xi_k, \eta_k)$  of at least one point at which the streamlines passes. For simplicity, this point can be chosen to be located on the porous wall ( $\eta = 1$ ).

The two orientations of the flow are investigated according to the value of  $a$  ( $a = -1$  for injection, and  $a = 1$  for suction). The case  $a = -1$  corresponds to the

streamlines which begin by injection from the point  $(\xi_k, \eta_k = 1)$  at the porous wall, and the case  $a = 1$  is the opposite orientation, that is the configuration for which the streamlines end at the point  $(\xi_k, \eta_k = 1)$  of the porous wall by suction. For both injection and suction, one then obtains in the Cartesian plane  $(\xi, \eta)$ , the equations of streamlines written in the form:

$$\xi = \xi_k \phi(1) / \phi(\eta), \quad \text{with } \xi \geq 0. \quad (21)$$

### 3.3 Computation of the components of the velocity field and wall shear stresses

Using the stream function per unit length  $\phi$  of the channel computed from (16), (17a) and (17b), the dimensionless longitudinal and transverse components  $(u, v)$  of the velocity field are deduced by applying the formulas:

$$u = \xi \phi^{(1)} \text{ and } v = -\phi. \quad (22)$$

The shear stress being made dimensionless by  $\rho \nu V_{\text{ref}} / h$ , the dimensionless shear stress is the quantity  $\rho \nu (\partial u / \partial \eta + \partial v / \partial \xi)$ . For the lower and upper walls, we obtain the following formulas for the wall shear stress per unit length of the channel as function of  $\alpha$ :

$$\tau_l / \xi = \phi^{(2)}(\eta = -1) = \tau_l(\alpha) / \xi \text{ (lower wall)}, \quad (23a)$$

$$\tau_u / \xi = \phi^{(2)}(\eta = 1) = \tau_u(\alpha) / \xi \text{ (upper wall)}. \quad (23b)$$

## 4 Results and discussion

### 4.1 Preliminary remarks

Since the purpose of this paper is to investigate the effects of the external pressure gradient on the flow under study, computations are performed for various values of the dimensionless form of this parameter denoted by  $\alpha$ , the Reynolds number being kept constant with  $\text{Re} = 2$ .

We choose the value  $\text{Re} = 2$  in order not to work with various dynamical behaviors due to multiple solutions of the Navier–Stokes equations, predicted by Robinson [16] when the Reynolds number exceeds the critical value  $\text{Re} = 12.165$ , for the flow along a uniformly porous channel with suction at both walls.

To achieve convergence of the Runge–Kutta and Newton–Raphson algorithms, we have adopted for the discretization of  $\eta$ , 100 intervals having same length  $\Delta \eta = 0.02$ . The stop criterion that we have applied for the Newton–Raphson optimization procedure enables to

reduce the cost function  $J$  to the minimum  $J_{\min} \approx 10^{-25}$ . This proves the high accuracy of the shooting technique we have utilized, the objective being to reduce  $J$  to zero. Physical understandings derived from the results are discussed by considering the following aspects of the flow: the stream function per unit length of the pipe, the streamlines, the transverse and longitudinal components of the flow velocity field, and the wall shear stress for the two walls.

### 4.2 Stream function per unit length of the channel

Figure 2a and b shows the values of the stream function  $\phi$  per unit length of the channel, plotted for both suction and

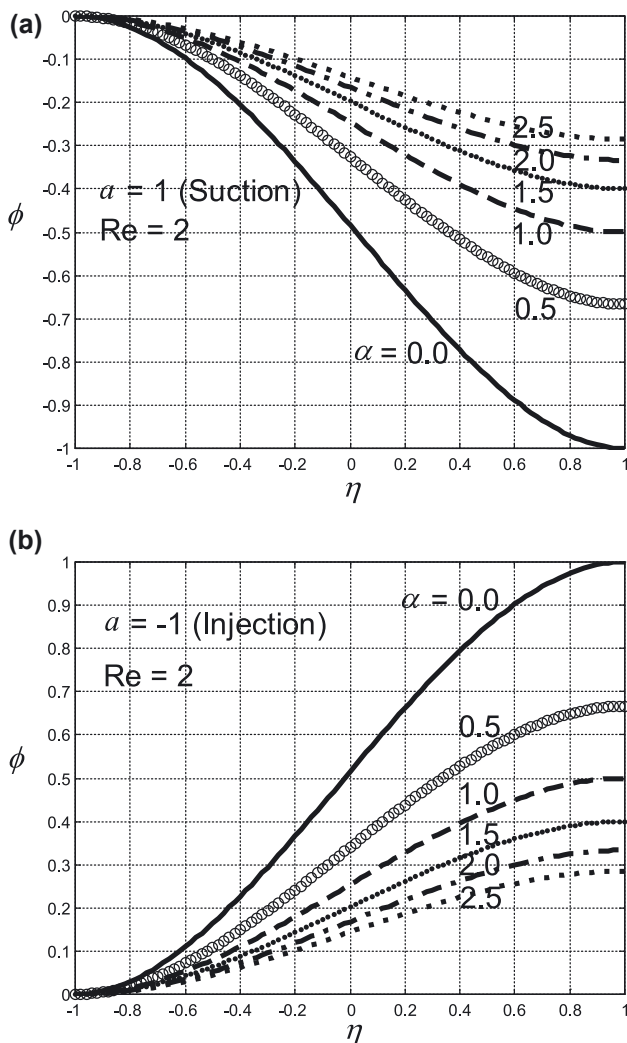


Figure 2: Stream function per unit length of the channel for various values of the dimensionless external pressure gradient, plotted for (a) suction and (b) injection.

injection, as function of any position  $\eta$  of the fluid layer, for various values of the dimensionless external pressure gradient. We notice that the values of  $\phi$  for suction are symmetrical to those obtained for the injection.

As seen in these figures, the sign of  $\phi$  depends on the flow orientation. More precisely, the values of  $\phi$  for the suction are negative whereas those obtained for the injection are positive. This is due to the fact that the quantity  $\phi_0 - \phi_c = -\phi_c$  which represents the mass rate of fluid flowing between the lower wall of the channel defined by the equation  $\phi = \phi_0 = 0$  and any other streamline  $\phi(\eta) = \phi_c$ , is positive for the suction and negative for the injection, because the unit vector normal to the porous upper plane is oriented towards the outside of the channel. The above argument explains why, for a given value of the dimensionless external pressure gradient  $\alpha$ , the absolute values of  $\phi$  increases as  $\eta$  increases from the lower wall ( $\eta = -1$ ), as seen in Figure 2a and b. In addition, the sign of  $\phi$  being unchanged for any plot obtained for a fixed value of  $\alpha$ , for both suction and injection, one can conclude that no reverse flow occurs in the channel.

From the above figures, one also observes that the absolute values of  $\phi$  decreases as  $\alpha$  increases, for a given position  $\eta$  of the fluid layer, for both suction and injection. The physical reason which explains this behaviour will be developed in Section 4.4.

### 4.3 Streamlines

Figure 3 shows a pattern of streamlines of the flow plotted for  $\alpha = 1.0$ , by applying (21) for various values of  $\xi_k$  taken on the porous upper wall  $\eta = 1$  and defining the beginning

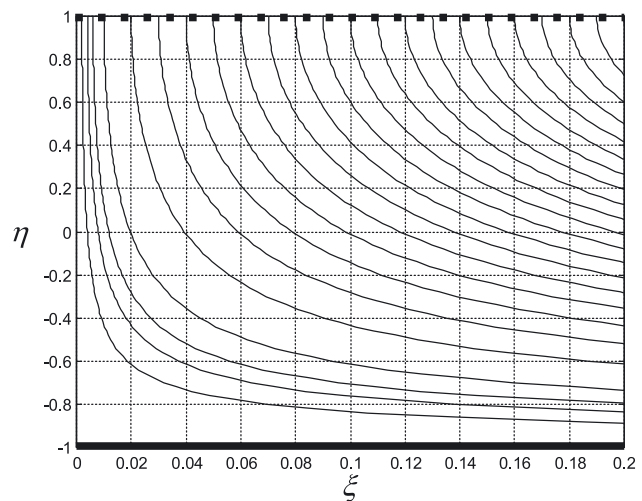


Figure 3: The pattern of streamlines for both suction and injection, plotted for  $\alpha = 1$ .

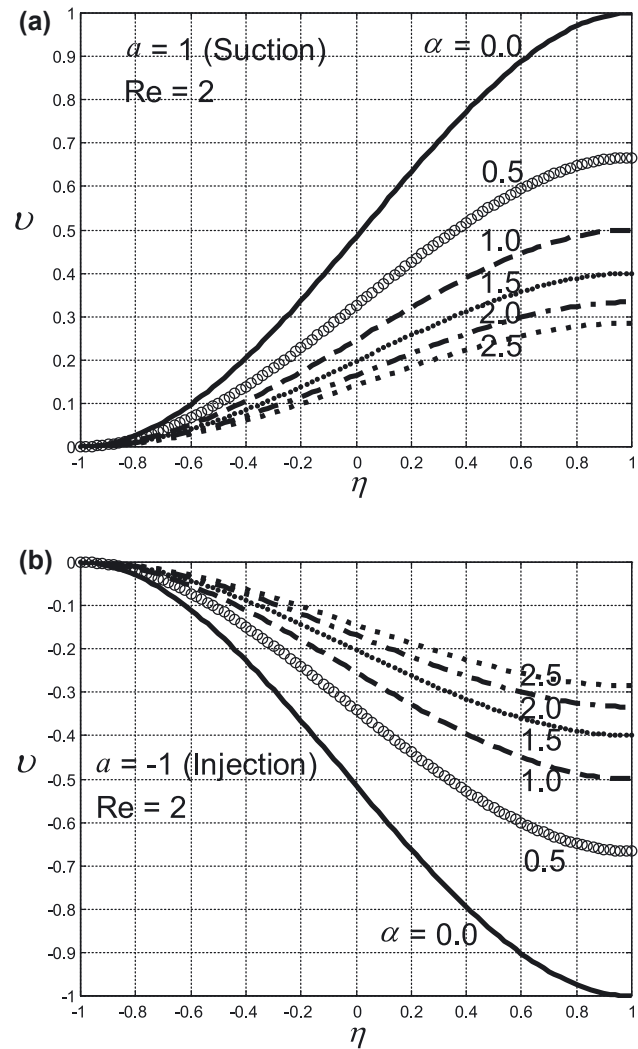
point of the streamline in the case of injection or its ending point in the case of suction. The values of  $\phi$  for the suction being symmetrical with respect to the median axis of the channel, to those obtained for the injection, relation (21) explains why the pattern of streamlines presented are the same for both suction and injection. This pattern is similar to that presented in our recently published work in which we have investigated the effects of the external pressure gradient on the laminar flow through a semi porous annular pipe [14].

As seen in Figure 3, the streamlines presented confirm that no reverse flow occurs in the channel. From the physical point of view, this leads to conclusion that the dragging action of any fluid layer exerted on fluid particles is favorable to the effects of the external pressure gradient imposed between the two ends of the channel.

#### 4.4 Transverse and longitudinal components of the velocity field

Calculations performed by means of the numerical shooting technique give the dimensionless transverse and longitudinal velocities  $v$  and  $u$  of the flow by applying relation (22). The values of  $v$  obtained are plotted in Figure 4a and b and those of  $u$  are presented in Figure 5a and b, for the suction and injection, respectively. Depending on whether the porous upper wall undergoes suction or injection, the sign of  $v$  is confirmed by Figure 4a and b, that is  $v$  is positive for the suction and negative for the injection. Figure 5a and b also confirm the sign of  $u$  which is negative for the suction and positive for the injection, according to the sign of the external pressure gradient that we need to be favorable. Figure 4a and b show that there is no fluid layer in the channel, whose transverse velocity exceeds the velocity of suction or injection, contrarily to the pressure-exerted laminar flow through a semi-porous annular pipe investigated in [14].

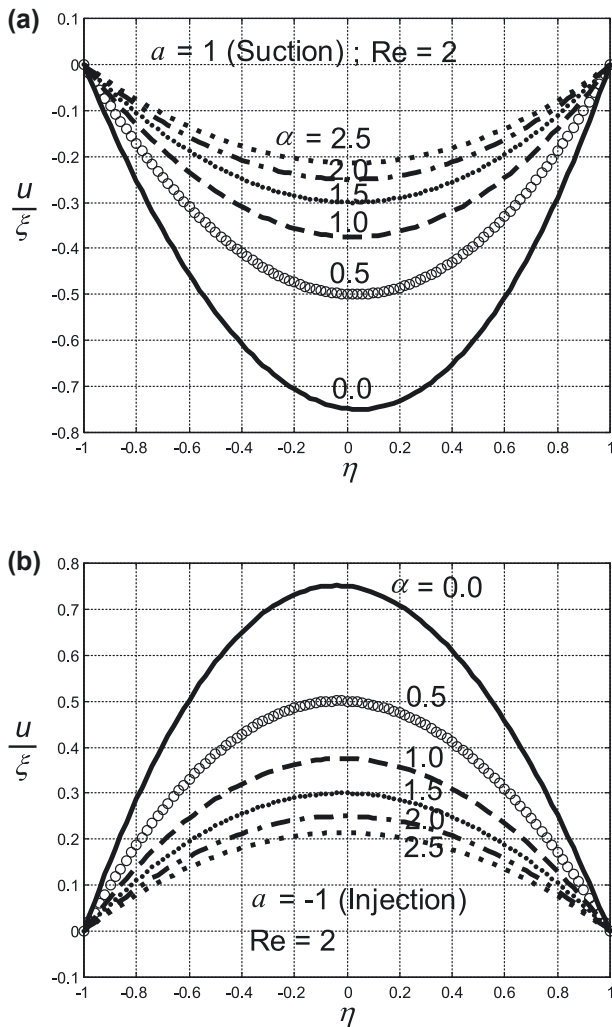
The suction process extorts any fluid particle in contact with the porous wall and replaces it, by conservation of mass, by another fluid particle which is deeper and whose transverse velocity then increases. The remaining fluid layers are also replaced with those which are deeper and whose transverse velocity increases. So, with increasing distance from the impermeable wall in the transverse direction, the suction process causes an increase of transverse momentum in the fluid. This gives the physical explanation of the plots presented in Figure 4a which show that the transverse velocity increases as  $\eta$  increases from its smallest value  $\eta = -1$ , for a given value of the external pressure gradient.



**Figure 4:** Profile of the transverse component of the flow velocity for various values of the dimensionless external pressure gradient  $\alpha$ , plotted for (a) suction and (b) injection.

In the case of the injection, because of the conservation of mass, the fluid particles injected from the porous wall drive out and replace the deeper particles having lower transverse velocity. In the rest of the flow, the fluid layers then replace those which are deeper and whose transverse velocity is lower. So, as the transverse distance increases from the porous wall to the impermeable one, the injection process causes a diminishing of transverse momentum in the fluid. One then understands the physical reason which explains why the absolute value of the transverse velocity decreases for increasing distance from the porous wall, the external pressure gradient being kept constant, as seen in Figure 4b.

For a given value of the dimensionless external pressure gradient, the simultaneous behaviors of  $v$  and



**Figure 5:** Profile of the longitudinal component of the flow velocity for various values of the dimensionless external pressure gradient  $\alpha$ , plotted for (a) suction and (b) injection.

$u$  shown by the plots which are presented in Figures 4 and 5 can be explained as follows. Due to the no-slip condition which imposes  $v = 0$  at the lower impermeable wall  $\eta = -1$ , the absolute values of  $v$  monotonically decrease from the value 1 to the value 0 as  $\eta$  varies from the upper wall to the lower one, as seen plotted in Figure 4a and b. While the absolute values of  $v$  decrease, the conservation of mass causes the increase of the absolute value of  $u$  from the no-slip-condition value  $u = 0$ , as  $\eta$  begins to decrease from the upper wall, as seen plotted in Figure 5a and b. As  $\eta$  continues to decrease, the decrease of  $|u|$  should be monotonically if there was not another no-slip condition to be satisfied by  $u$  at the lower wall. So, after having increased, the absolute values of  $u$  exhibit a maximum and then begin to decrease beyond this maximum and

until the value 0, as seen plotted in Figure 5a and b. From these figures, one observes that this maximum depends on the dimensionless external pressure gradient  $\alpha$  and it decreases as  $\alpha$  increases. One also observes that the profiles of the longitudinal velocity per unit length of the channel are symmetrical with respect to the median axis of the channel contrarily to the results we have obtained for the semi porous annular pipe in Ref. [14].

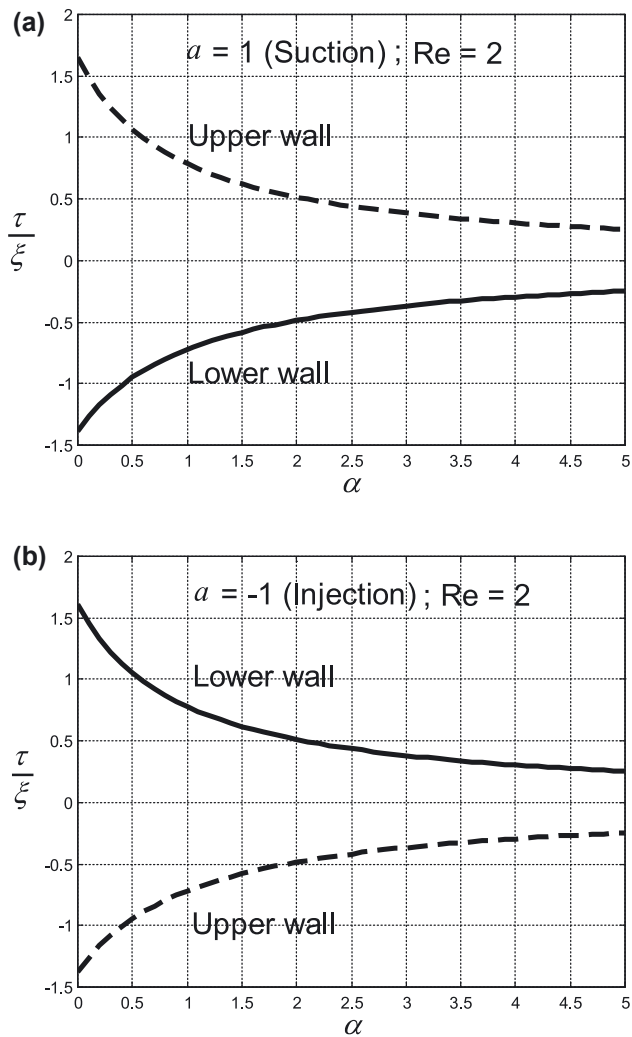
Moreover, Figures 4 and 5 highlight an interesting phenomenon which is captured by the fact that the absolute values of  $v$  and  $u$  simultaneously decrease as  $\alpha$  increases. The reason of this physical insight is as follows. As the dimensionless external pressure gradient  $\alpha$  increases from the value 0, the pressure force acting on the two ends of the channel also increases and the fluid undergoes a gain of momentum which should increase the absolute velocity of suction or injection. To keep this velocity constant, the fluid by the aid of its viscosity creates an antagonist frictional shearing stress acting on fluid layers. These additional frictional forces are more intense than the inertial forces coming from the gain of momentum provided by the increasing of the external pressure gradient imposed between the two ends of the channel. Therefore, the fluid particles with slowest velocity increase in number and mass and the absolute values of the transverse and longitudinal velocities decrease for any fluid layer, as seen plotted in Figures 4 and 5. By the aid of the preceding argument, one understands why the mass rate of the flow decreases as  $\alpha$  increases, as seen in the plots of the stream function presented in Figure 2a and b.

Figure 5a and b can be exploited to obtain physical insights related to the thickness of the boundary layers at the vicinity of the lower and upper walls of the channel. In this regard, it is useful to indicate that, the dimensionless transverse velocity  $v$  being independent on the streamwise coordinate  $\xi$ , the quantity  $|(\partial u / \partial \eta)_{\text{wall}}|$  which is the absolute value of the slope of the plot of  $u$  as function of  $\eta$ , evaluated at the two walls, is proportional to the wall shear stress and has the order of magnitude  $U / \delta$ , where  $\delta$  is the thickness of the boundary-layer considered. The absolute value of these slopes being equal for a given value of the dimensionless external pressure gradient  $\alpha$  as seen in Figure 5a and b, one concludes that the thickness of the boundary layers as well as the effects of the viscosity, at the vicinity of the two walls, are equal for a given  $\alpha$ . As  $\alpha$  increases from its smallest value 0, the quantity  $|(\partial u / \partial \eta)_{\text{wall}}|$  decreases. This means that, for both suction and injection, the intensity of the viscosity effects at both walls diminishes and the thickness of the boundary layers at the vicinity of the walls of the channel increases, as  $\alpha$  increases.

#### 4.5 Wall shear stress at the two walls of the channel

The values of the wall shear stress at the lower and upper walls of the channel are computed from the formulas given in relations (23a) and (23b).

These values are plotted in Figure 6a and b as function of the external pressure gradient, for the suction and injection, respectively. Figure 6a and b shows that the absolute values of the wall shear stress for the two walls of the channel decrease as the external pressure gradient increases from its smallest value 0. One concludes that the thickness of the boundary layers at the vicinity of the two walls increases as  $\alpha$  increases, for both suction and injection. This confirms the results obtained for the boundary layers in Section 4.4. The above results for the



**Figure 6:** Wall shear stress for the two walls of the channel as function of the dimensionless external pressure gradient  $\alpha$ , plotted for (a) suction and (b) injection.

wall shear stress were already obtained in the pressure-exerted laminar flow through a semi porous annular pipe [14].

Unlike the pressure-exerted flow through a semi porous annular pipe for which the values of the wall shear stress for the inner cylinder are not symmetrical to those derived for the outer cylinder as the external pressure gradient  $\alpha$  varies [14], the pressure-exerted flow under study exhibits, for both suction and injection, the shear stresses at the two walls of the channel which are symmetrical for any value of  $\alpha$  except at the vicinity of its smallest value 0, as seen in Figure 6a and b.

## 5 Concluding remarks

Our motivation for conducting the present work came by noting that flows along porous channels and subjected to an external pressure-gradient have not yet been investigated, despite the extensive research already done on laminar flows along porous channels.

This paper is devoted to a pressure-exerted steady laminar flow along a porous horizontal parallel-walled channel having a lower impermeable wall. The aim of this work is to investigate at fixed Reynolds number, the effects of a constant external pressure gradient imposed at the ends of the channel, on the laminar flow considered, the suction/injection velocity being kept constant. Our motivation is reinforced by the fact that the problem considered has many applications in thermal fluid engineering processes such as those in which an external pressure gradient provided by a pump is usually superimposed to the suction/injection process of the fluid at the walls bounding the flow.

The main interest of this study is to provide potential research directions in the future for the problem studied. In this regard, the work done in this paper represents a preliminary step for subsequent investigations in which it would be interesting to examine the influence of the Reynolds number, in order to capture further physical insights of the deep richness of the structure of the flow investigated.

The main findings of the present work may be summarized as follows.

- The Reynolds number of the flow is defined as:  $Re = (Uh + h^3 |P_L - P_0| / 4\rho\nu L) / \nu$ . It is constructed from the sum of the absolute suction/injection velocity  $U$  and the maximum plane-Couette-flow velocity  $W$  provided by the constant external pressure gradient.

- Keeping  $U$  and  $h$  constant, the dimensionless external pressure gradient imposed between the two ends of the channel is given by:  $\alpha = |P_L - P_0| L^{-1} / (4\rho\nu U/h^2)$ .
- Due to the action of that favorable external pressure gradient, no reverse flow occurs in the semi porous channel.
- There is no fluid layer whose transverse velocity exceeds the suction/injection velocity, contrarily to the results we have obtained for the pressure-exerted laminar flow in a semi porous annular pipe.
- Unlike these results in which the axial velocity does not exhibit any symmetry, the profile of the longitudinal velocity in the channel is symmetrical with respect to the median axis of the channel, for any value of the external pressure gradient.
- As  $\alpha$  increases from its smallest value 0, the fluid undergoes a gain of momentum which should increase the absolute velocity of suction or injection. To keep this velocity constant, the fluid by the aid of its viscosity creates an antagonist frictional shearing stress acting on fluid layers. These additional frictional forces are more intense than the inertial forces coming from the gain of momentum provided by the increase of  $\alpha$ .
- As  $\alpha$  increases, the fluid particles with slowest velocity increase in number and mass.
- With increasing  $\alpha$  values, the transverse and longitudinal components of the flow velocity decrease for any fluid layer.
- As in the pressure-exerted laminar flow through a semi porous annular pipe, the wall shear stress in absolute value decreases as the external pressure gradient increases from its smallest value 0.
- Unlike the pressure-exerted flow through a semi porous annular pipe for which the values of the wall shear stress for the inner cylinder are not symmetrical to those derived for the outer cylinder, the pressure-exerted flow under study exhibits, for both suction and injection, the shear stresses at the two walls of the channel which are symmetrical for any value of  $\alpha$  except at the vicinity of its smallest value 0.
- For a given value of  $\alpha$ , the thickness of the boundary layers and the intensity of the viscosity effects, at the vicinity of the two walls, are nearly equal, for both suction and injection.
- As  $\alpha$  increases from its smallest value 0, the thickness of the boundary layers at the vicinity of the two walls of the channel increases, for both suction and injection.

**Acknowledgments:** One of the authors (E. P.) would like to thank Emeritus Professor Bernard Gay from the advanced school of engineering “Ecole Centrale de Lyon” (France) for his unforgettable training about Numerical Methods in Fluid Mechanics. The authors are extremely grateful to the Editor and the Reviewers for the valuable comments they have made about the paper.

**Author contribution:** All the authors have accepted responsibility for the entire content of this submitted manuscript and approved submission.

**Research funding:** None declared.

**Conflict of interest statement:** The authors declare no conflicts of interest regarding this article.

## Appendix: Derivation of the components of the Jacobean matrix $[M]$

In this appendix, we explain in detail the method for calculating the components  $M_{i,j}$  of the Jacobean matrix  $[M]$  introduced in (20). From (19a) and (19b), it is found that:

$$M_{1,j} = \frac{\partial D_1}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} \left( f^{(1)}(\eta = 1) \right), \text{ for } j = 1, 2, \quad (\text{A1a})$$

$$M_{2,j} = \frac{\partial D_2}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} \left( f(\eta = 1) \right), \text{ for } j = 1, 2. \quad (\text{A1b})$$

This leads to define two functions  $p_j$  depending on  $\eta$  and parameterized by  $(u_1, u_2)$ :

$$p_j = \partial f / \partial u_j, \text{ for } j = 1, 2. \quad (\text{A2})$$

Assuming that:

$$\partial(d f / d \eta) / \partial u_j = d(\partial f / \partial u_j) / d \eta = p_j^{(1)}, \text{ for } j = 1, 2, \quad (\text{A3a})$$

$$\begin{aligned} \partial(f(\eta = 1)) / \partial u_j &= (\partial f / \partial u_j)(\eta = 1) = p_j(\eta = 1), \\ \text{for } j &= 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{A3b})$$

one finds the results:

$$M_{1,1} = p_1^{(1)}(\eta = 1); \quad M_{1,2} = p_2^{(1)}(\eta = 1); \quad (\text{A4a})$$

$$M_{2,1} = p_1(\eta = 1); \quad M_{2,2} = p_2(\eta = 1). \quad (\text{A4b})$$

So, relations (A4a) and (A4b) reveal that the  $M_{i,j}$  quantities are given as the values at the ending border  $\eta = 1$ , of the functions  $p_j$  ( $j = 1, 2$ ) and their first derivatives

$p_j^{(1)}$ . To get these values, one needs to derive the equation governing  $p_j$  with the corresponding conditions. For that, we differentiate (18a) and (18b) with respect to  $u_j$  and then apply the assumptions (A3a) and (A3b). This gives the initial boundary value problem stated as the fourth-order linear ordinary differential equation whose coefficients depend on  $f$ :

$$p_j^{(4)} + \operatorname{Re}f(\eta)p_j^{(3)} - \operatorname{Re}f^{(1)}(\eta)p_j^{(2)} - \operatorname{Re}f^{(2)}(\eta)p_j^{(1)} + \operatorname{Re}f^{(3)}(\eta)p_j = 0, \quad (\text{A5})$$

with the initial value condition:

$$p_j = 0, p_j^{(1)} = 0, p_j^{(2)} = \delta_1(j) \text{ and } p_j^{(3)} = \delta_2(j), \quad (\text{A6})$$

at  $\eta = -1$  (for  $j = 1, 2$ ),

where  $\delta_N(j)$  represents the kronecker delta considered for given  $N = 1, 2$  and defined for any  $j = 1, 2$  as follows:  $\delta_N(j) = 1$  or  $0$ , if  $j = N$  or  $j \neq N$ , respectively. Solving (A5) with (A6) by using the fourth-order Runge–Kutta algorithm, one finds the needed values of  $p_1, p_2, p_1^{(1)}$  and  $p_2^{(1)}$  at the ending point  $\eta = 1$ .

## References

- [1] A. S. Berman, “Laminar flow in channels with porous walls,” *J. Appl. Phys.*, vol. 24, pp. 1232–1235, 1953.
- [2] S. W. Yuan and A. B. Finkelstein, “Stability of pipe flow with blowing,” *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, vol. 78, pp. 719–727, 1956.
- [3] R. M. Terrill and P. W. Thomas, “On laminar flow through a uniformly porous pipe,” *Appl. Sci. Res.*, vol. 21, pp. 37–67, 1969.
- [4] M. Goto and S. Uchida, “Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall,” *Trans. Jpn. Soc. Aeronaut. Space Sci.*, vol. 33, pp. 14–27, 1990.
- [5] M. Ghaffar, K. Ali, A. Yasmin, and M. Ashraf, “Unsteady flow between two orthogonally moving porous disks,” *J. Mech.*, vol. 31, pp. 147–151, 2015.
- [6] S. Tsangaris, D. Kondaxakis, and N. W. Vlachakis, “Exact solution for flow in a porous pipe with unsteady wall suction and/or injection,” *Commun. Nonlinear Sci.*, vol. 12, pp. 1181–1189, 2007.
- [7] W. H. H. Banks and M. B. Zaturka, “On flow through a porous annular pipe,” *Phys. Fluids A*, vol. 4, no. 6, pp. 1131–1141, 1992.
- [8] L. S. Galowin, L. S. Fletcher, and M. J. DeSantis, “Investigation of laminar flow in a porous pipe with variable wall suction,” *AIAA J.*, vol. 12, pp. 1585–1589, 1974.
- [9] B. Bernales and P. Haldenwang, “Laminar flow analysis in a pipe with locally pressure-dependent leakage through the wall,” *Eur. J. Mech. B Fluid*, vol. 43, pp. 100–109, 2014.
- [10] M. Bouyges, F. Chedevegne, G. Casalis, and J. Majdalani, “Asymptotically based self-similarity solution of the Navier–Stokes equations for a porous tube with a non-circular cross-section,” *J. Fluid Mech.*, vol. 826, pp. 396–420, 2017.
- [11] M. Siavashi, H. Rasam, and A. Izadi, “Similarity solution of air and nanofluid impingement cooling of a cylindrical porous heat sink,” *J. Therm. Anal. Calorim.*, vol. 135, pp. 1399–1415, 2019.
- [12] M. G. Sobamowo, A. T. Akinshilo, and A. A. Yinusa, “Thermo-magneto-solutal squeezing flow of nanofluid between two parallel disks embedded in a porous medium: effects of nanoparticle geometry, slip and temperature jump conditions,” *Model. Simul. Eng.*, vol. 2018, 2018, Art no. 7364634.
- [13] N. R. Makon, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, Y. C. Mbono Samba, and E. Pemha, “On the existence and determination of the incompressible laminar flow located in the polar plane of a porous annular pipe,” *Alex. Eng. J.*, vol. 61, no. 4, pp. 2637–2650, 2022.
- [14] G. L. Mbogba, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, Y. C. Mbono Samba, and E. Pemha, “Effects of an external constant pressure gradient on a steady incompressible laminar flow through a semi-porous annular pipe,” *Z. Naturforsch A*, vol. 77, no. 2, pp. 131–141, 2022.
- [15] R. M. Terrill, “Laminar flow in a uniformly porous channel,” *Aeronaut. Q.*, vol. 15, pp. 299–310, 1964.
- [16] W. A. Robinson, “The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls,” *J. Eng. Math.*, vol. 10, no. 1, pp. 23–40, 1976.
- [17] M. B. Zaturka, P. G. Drazin, and W. H. H. Banks, “On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls,” *Fluid Dynam. Res.*, vol. 4, p. 151, 1988.
- [18] S. M. Cox, “Two-dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous wall,” *J. Fluid Mech.*, vol. 227, pp. 1–33, 1991.
- [19] P. Haldenwang, “Laminar flow in a two-dimensional plane channel with local pressure-dependent cross-flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 593, pp. 463–473, 2007.
- [20] E. C. Dauenhauer and J. Majdalani, “Exact self-similarity solution of the Navier–Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls,” *Phys. Fluids*, vol. 15, no. 6, pp. 1485–1495, 2003.
- [21] S. T. Mohyud-Din, A. Yıldırım, and S. A. Sezer, “Analytical approach to a slowly deforming channel flow with weak permeability,” *Z. Naturforsch A*, vol. 65, pp. 1033–1038, 2010.
- [22] A. T. Akinshilo, “Flow and heat transfer of nanofluid with Injection through an expanding or contracting porous channel under magnetic force field,” *J. Eng. Sci. Technol.*, vol. 21, pp. 486–494, 2018.
- [23] A. T. Akinshilo, “Steady flow and heat transfer analysis of third grade fluid with porous medium and heat generation,” *J. Eng. Sci. Technol.*, vol. 20, pp. 1602–1609, 2017.
- [24] A. T. Akinshilo, J. O. Olofinkua, and O. Olaye, “Flow and heat transfer analysis of sodium alginate conveying copper nanoparticles between two parallel plates,” *J. Appl. Comput. Mech.*, vol. 3, pp. 258–266, 2017.
- [25] T. Aziz, A. Aziz, and C. M. Khalique, “Exact solutions for Stokes flow of a non-Newtonian nanofluid model: a Lie

- similarity approach,” *Z. Naturforsch. A*, vol. 71, no. 7, pp. 621–630, 2016.
- [26] Z. Alhajaj, A. M. Bayomy, M. Ziad Saghir, and M. M. Rahman, “Flow of nanofluid and hybrid fluid in porous channels: experimental and numerical approach,” *Int. J. Thermophys.*, vol. 1–2, p. 100016, 2020.
- [27] J. F. Brady, “Flow development in a porous channel and tube,” *Phys. Fluids*, vol. 27, pp. 1061–1067, 1984.
- [28] C. Y. Wang, “Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations,” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 23, pp. 159–177, 1991.
- [29] L. Oxarango, P. Schmitz, and M. Quintard, “Laminar flow in channels with wall suction or injection: a new model to study multi-channel filtration systems,” *Chem. Eng. Sci.*, vol. 59, pp. 1039–1051, 2004.
- [30] J. F. Brady and A. Acrivos, “Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 112, pp. 127–150, 1981.
- [31] S. Uchida and H. Aoki, “Unsteady flow in a semi-infinite contracting or expanding pipe,” *J. Fluid Mech.*, vol. 82, pp. 371–387, 1977.
- [32] S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. 1, New York, Dover Publications Inc., 1965.
- [33] I. Proudman and K. Johnson, “Boundary-layer growth near a rear stagnation point,” *J. Fluid Mech.*, vol. 12, pp. 161–168, 1962.
- [34] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1992.
- [35] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1967.
- [36] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, New-York, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1968.
- [37] E. Pemha, “Markovian model for the propagation of a light wave in a heated turbulent jet of air,” PhD Thesis, Ecully, France, Laboratory of Fluid Mechanics, Ecole Centrale de Lyon, 1990.
- [38] E. Pemha, B. Gay, and A. Tailland, “Measurement of the diffusion coefficient in a heated plane airstream,” *Phys. Fluids A*, vol. 5, no. 6, pp. 1289–1295, 1993.
- [39] E. Ngo Nyobe, “A new laser-based diagnostic technique using genetic algorithms for the optical and thermal turbulence in a hot turbulent jet of air,” PhD Thesis, Applied Mechanics Laboratory of the Faculty of Science, University of Yaoundé I, Yaoundé, 2008.
- [40] E. Ngo Nyobe and E. Pemha, “Shape optimization using genetic algorithms and laser beam propagation for the determination of the diffusion coefficient in a hot turbulent jet of air,” *Prog. Electromagn. Res. B*, vol. 4, pp. 211–221, 2008.
- [41] E. Pemha and E. Ngo Nyobe, “Genetic algorithm approach and experimental confirmation of a laser-based diagnostic technique for the local thermal turbulence in a hot wind tunnel jet,” *Prog. Electromagn. Res. B*, vol. 28, pp. 325–350, 2011.
- [42] M. Lamara, E. Ngo Nyobe, and E. Pemha, “Engineering laser-based diagnostic in a hot wind tunnel jet: measurement of the temperature structure coefficient by using an optimization technique,” *Prog. Electromagn. Res. M*, vol. 74, pp. 93–103, 2018.
- [43] G. N. Vanderplaats, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design and Applications*, New-York, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1984.