

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIE ET
GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE PHYSIQUE ET APPLICATIONS

B.P. 812 Yaoundé

Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

POSTGRADUATE SCHOOL OF
SCIENCE, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR PHYSICS AND APPLICATIONS

P.O. Box : 812 Yaoundé

Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

**LABORATOIRE DE PHYSIQUE NUCLEAIRE, ATOMIQUE, MOLECULAIRE ET
BIOPHYSIQUE**

**EFFET D'UN DEFAUT TOPOLOGIQUE SUR LES SPECTRES
DES HADRONS ET CONFINEMENT DES QUARKS DANS UN
ESPACE-TEMPS AVEC UNE METRIQUE DE TYPE
SCHWARZCHILD INDUITE PAR UN CHAMP SCALAIRE
NON GRAVITATIONNEL**

Thèse

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du
Diplôme de Doctorat/ PhD en Physique

Option : Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection

Par :

ATANGANA LIKENE André Aimé

Matricule : 20W2780

Titulaire d'un DEA de Physique

Sous la Codirection de:

BEN-BOLIE Germain Hubert

Professeur, Université de Yaoundé I

Et de

ELE ABIAMA Patrice

Maitre de Recherche, MINRESI



Année 2024



DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE
DOCTORAT/PhD

Nous, Professeurs , **EYEBE FOUDA Jean Sire, SAÏDOU** et Professeur **MANGUELE-DIKOUM Eliezer**, respectivement Examineurs et Président du jury de la thèse de Doctorat/PhD de Monsieur **ATANGANA LIKENE André Aimé** Matricule **20W2780**, préparée sous la Co-direction du Professeur **BEN-BOLIE Germain Hubert** et du Docteur **ELE ABIAMA Patrice**, intitulée : «**Effet d'un défaut topologique sur les spectres des hadrons et confinement des quarks dans un espace-temps avec une métrique de type Schwarzschild induite par un champ scalaire non gravitationnel**», soutenue le **Mercredi, 31 Juillet 2024**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/PhD en Physique, Spécialité **Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection**, attestons que toutes les corrections demandées par le Jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le **08 NOV. 2024**

Examineurs

Pr. EYEBE FOUDA J. S.

Pr. SAÏDOU.

Le Président du Jury

Pr. MANGUELE-DIKOUM E.



Le Chef de Département de Physique

Professeur

Université de Yaoundé I

Faculté des Sciences

Département de Physique

**EFFET D'UN DEFAUT TOPOLOGIQUE SUR LES SPECTRES DES
HADRONS ET CONFINEMENT DES QUARKS DANS UN
ESPACE-TEMPS AVEC UNE MÉTRIQUE DE TYPE
SCHWARZCHILD INDUITE PAR UN CHAMP SCALAIRE NON
GRAVITATIONNEL**

THÈSE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat/PhD en Physique

Option: **Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection**

Par

ATANGANA LIKENE André Aimé

Matricule: 20W2780

Titulaire d'un DEA de Physique

Sous la Co-direction de

BEN-BOLIE Germain Hubert

Professeur

Université de Yaoundé I

Et de

ELE ABIAMA Patrice

Maître de Recherche

IRGM/MINRESI

Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique

Année 2024

Dédicace

Je dédie cette thèse :

À mes parents,

LIKENE ATANGANA Martin et AMAKIKA Martine.

Remerciements

Je tiens, en premier lieu, à exprimer ma profonde gratitude au **Pr. BEN-BOLIE Germain Hubert**, chef de Laboratoire de Physique Nucléaire de l'Université de Yaoundé I, pour ses conseils. Son engagement et son abnégation pour la recherche ont contribué énormément à l'aboutissement de cette thèse. En dépit d'énormes tâches académiques et de ses multiples responsabilités dans l'encadrement de nombreux étudiants de Masters et de Doctorat, il a toujours trouvé le temps pour discuter avec moi, de répondre à mes sollicitations et à mes différentes questions.

J'exprime mes remerciements au **Dr. ELE ABIAMA Patrice** qui, malgré les multiples occupations liées à sa fonction de Secrétaire Permanent du CNDT, n'a cessé de prodiguer des conseils éclairés et m'a orienté efficacement lors de la préparation de cette thèse, et jusqu'à son aboutissement et sa finalisation.

J'exprime mes remerciements au **Pr. EMA'A EMA'A Jean-Marie** qui, malgré les multiples occupations liées à sa fonction à l'ENS de Bertoua, n'a cessé de prodiguer des conseils éclairés et partagé son expérience dans le domaine du nucléaire qui m'ont été très profitables.

Ma profonde gratitude va également à l'endroit du **Pr. OWONO ATEBA Pierre**, Fondateur du Laboratoire de Physique Nucléaire, de l'Université de Yaoundé I.

Je remercie le **Pr. MANGUELLE-DICOUM Eliezer**, d'avoir accepté la lourde tâche de présider mon jury de thèse.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux Honorables membres du jury, qui ont accepté de juger cette Thèse.

Je remercie le **Pr. OWONO OWONO Luc Calvin** coordonnateur de l'URFD physique et application, Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I, pour ses conseils et sa rigueur dans le travail.

J'exprime ma reconnaissance au **Pr. EKOBEA FOUA Henri Paul**, Vice-Recteur à l'Université de Ngaoundéré.

Je remercie grandement le **Pr. NDJAKA Jean-Marie Bienvenu**, Chef de Département de Physique, et le **Pr. KOFANE Timoléon Crépin**, pour leurs conseils et encouragements dans la finalisation de différentes thèses au sein du Département de Physique.

Mes remerciements vont également à tous les Enseignants du Département de Physique, en particulier aux Professeurs : **NJANDJOCK NOUCK Philippe**, **TCHAWOUA Clément**, **PEMHA ELKANA**, **WOAFO Paul**, **HONA Jacques**, **BODO Bertrand**, **ENYEGUE A NYAM Françoise**, **ZEKENG Serge**, **VONDOU Débertini**, **FEWO Serge Ibrid**, **NANA ENGO Serge**, **NANA NBENJO Roméo**, **MVOGO Alain**, **SIEWE SIEWE Martin** et aux Docteurs **MBINACK Clément**, **CHAMANI Roméo**, **ABDOURAHIMI**, **NGA ONGODO Dieudonné**.

Mes remerciements au **Pr. SAÏDOU**, chef du Centre de Recherche en Sciences et Techniques Nucléaires (CRSTN), et à tous les chercheurs en service au CRSTN pour leur implication dans l'encadrement des étudiants de diverses universités du pays.

Je remercie également les Docteurs : **TAKEMBO Clovis**, **NGOUBI Hénock**, **ALI ZARMA**, **TAKOUKAM SOH Serge**, **ANEMENA ETOGA Emmanuel**, **OMON Yves**, **HAMADOU ISSA** et **TANKOU TAGNE Alain**, **YIA ETOLO Hervé**, **MAH TSILA Philipe**, **AWE Richard**, **KOYANG François** **AHMADOU KATARKALAH**, **MBIDA MBEMBE Serge**, **TJOCK MBAGA Thomas**, **GONDJI Dieu Souffit** pour leurs conseils.

Je tiens à remercier très particulièrement tous les membres du Laboratoire de Physique Nucléaire pour leurs aides et assistances particulièrement, les doctorants, **NDOUVADE KANAGO Vivien Ulrich**, **ADJABA Jean Liboire**, **NDJOBLO Justice**, **NDZONO Victor**.

Ma gratitude va spécialement à l'égard de mes parents **LIKENE ATANGANA Martin** et **AMAKIKA Martine** qui depuis le bas âge me sont d'un soutien inconditionnel et ne cessent de me prodiguer des conseils qui ont fait de moi ce que je suis.

Je tiens à remercier tous mes frères et soeurs : **AMAYENE Marie Cecile**, **EMENEMIE Micheline**, **OKALA LIKENE Sylvie**, **NOUDIAMA LIKENE Paul Noé** et **NGO NSOCKA LIKENE Grace Martine** pour leur soutien incontestable et inconditionnel depuis toujours.

Je ne saurais terminer sans remercier ma fiancée **AKONO AKOULOU Laura Maiva** et ma très adorée fille **ATANGANA Maïra** qui partagent ma vie au quotidien.

À tous ceux qui ont contribué et participé de près ou de loin à la rédaction de cette Thèse et qui n'ont pas été cités, je leur adresse ma profonde reconnaissance.

À tout seigneur tout honneur, je remercie le seigneur Jesus Christ, qui renouvelle en moi le souffle de vie au quotidien.

Liste des Abréviations

- QED** : Quantum Electrodynamics
- QCD** : Quantum Chromodynamics
- TQC** : Théorie Quantique des Champs
- MNU** : Méthode de Nikiforov-Uvarov
- MNUE** : Méthode de Nikiforov-Uvarov Etendue
- EW** : Electro Weak
- MQNR** : Modèles de Quarks Non Relativistes
- GUT** : Grand Unification Teories
- CMB** : Cosmic Microwave Background
- DTCC** : Défaut Topologique à Corde Cosmique

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Liste des Abréviations	iv
Table des matières	v
Liste des figures	vii
Listes des tableaux	x
Résumé	xii
Abstract	xiii
Chapitre I Revue de la littérature	4
I.1 Introduction	4
I.2 De la naissance de l'Univers aux particules et interactions de base	4
I.3 Description des interactions entre particules élémentaires	8
I.3.1 La théorie électrofaible	9
I.3.2 La chromodynamique quantique	9
I.3.3 La relativité générale	11
I.4 Le modèle standard de la physique des particules	17
I.4.1 Classification des particules élémentaires	17
I.4.2 Algèbres et groupes de Lie du modèle standard	20
I.5 Les modèles de quarks non-relativistes	20
I.5.1 Le modèle de quarks constituants	21
I.5.2 Les potentiels d'interaction quark-antiquark	22
I.6 Approche de Celso Barros	25
I.6.1 Opérateurs en coordonnées de Schwarzschild	26
I.6.2 Dynamique de Schwarzschild	29
I.7 Conclusion	32
Chapitre II Méthodologie	34
II.1 Introduction	34

II.2	Équation d'ondes quantique en espace-temps courbe	34
II.2.1	Fonction courbure de la métrique de type Schwarzschild	35
II.2.2	Équation Dirac	40
II.2.3	Métrique et opérateurs dans un espace-temps à corde cosmique	45
II.2.4	Équation de Schrödinger	46
II.3	Quelques propriétés des hadrons	63
II.3.1	Spectres des masses	63
II.3.2	Constantes de désintégration des mésons	65
II.3.3	Propriétés thermodynamiques quarkonia lourds	66
II.3.4	Confinement des quarks et gluons	68
II.4	Conclusion	71
Chapitre III Résultats et discussion		72
III.1	Introduction	72
III.2	Propriétés des mesons dans l'espace-temps à corde cosmique	72
III.2.1	Spectres de masse des quarkonia lourds	73
III.2.2	Propriétés thermodynamiques des quarkonia lourds	79
III.3	Propriétés des mésons dans l'espace plat fractionnaire	86
III.3.1	Spectres de masse des quarkonia lourds et des mésons lourds-légers	87
III.3.2	Constantes de désintégration de quelques mésons	95
III.4	Propriétés des baryons et mésons dans l'espace-temps de Schwarzschild	98
III.4.1	Masses de quelques noyaux atomiques et de quelques hadrons	98
III.4.2	Confinement des quarks et des gluons dans les hadrons	104
III.5	Conclusion	107
Conclusion générale et perspectives		110
Liste des publications issue de la thèse		113
Références Bibliographiques		114

Table des figures

Figure 1	Illustration de l'évolution de l'Univers.	6
Figure 2	Représentation des mouvements d'énergie autour d'un point dans l'espace-temps	15
Figure 3	Les différentes échelles de la matière dans l'Univers.	18
Figure 4	Classification des particules élémentaires de l'Univers par le modèle standard.	19
Figure 5	Spectre de masse des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ (en GeV) en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs de α avec $m_l = +1$	79
Figure 6	Spectre de masse des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ (en GeV) en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs de α avec $m_l = 0$	80
Figure 7	Spectre de masse des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ (en GeV) en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs de α avec $m_l = -1$	80
Figure 8	Fonctions d'ondes radiales et densités radiales de probabilités du méson $c\bar{c}$ pour $l = 0$ et $n = 1, 2, 3$	81
Figure 9	Fonctions d'ondes radiales et densités radiales de probabilités du méson $b\bar{b}$ pour $l = 0$ et $n = 1, 2, 3$	81
Figure 27	Energie interne des états P du méson $c\bar{c}$, en fonction de β pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	81
Figure 29	Variations de l'entropie des états P du méson $c\bar{c}$, en fonction de β pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	81
Figure 31	Variations de la capacité calorifique à volume constant, des états P du méson $c\bar{c}$, en fonction de β pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	81
Figure 10	Fonction d'onde de l'état fondamental du méson $c\bar{c}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	82
Figure 11	Fonction d'onde du premier état excité du méson $c\bar{c}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	82
Figure 12	Fonction d'onde du deuxième état excité du méson $c\bar{c}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	83
Figure 13	Fonction densité de probabilité radiale de l'état fondamental du méson $c\bar{c}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	83
Figure 14	Fonction densité de probabilité radiale du premier état excité du méson $c\bar{c}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	84

Figure 15	Fonction densité de probabilité radiale du deuxième état excité du méson $c\bar{c}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$. . .	84
Figure 16	Fonction d'onde de l'état fondamental du méson $b\bar{b}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	85
Figure 17	Fonction d'onde du premier état excité du méson $b\bar{b}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	85
Figure 18	Fonction d'onde du deuxième état excité du méson $b\bar{b}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	86
Figure 19	Fonction densité de probabilité radiale de l'état fondamental du méson $b\bar{b}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$. . .	86
Figure 20	Fonction densité de probabilité radiale du premier état excité du méson $b\bar{b}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$. . .	87
Figure 21	Fonction densité de probabilité radiale du deuxième état excité du méson $b\bar{b}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$. . .	87
Figure 22	variations du potentiel de Cornell étendu (en GeV) pour les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ avec les paramètres du Tableau 2	88
Figure 23	Fonction de partition des états P du méson $c\bar{c}$, en fonction de β pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	88
Figure 24	Fonction de partition des états P du méson $b\bar{b}$, en fonction de β pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	89
Figure 25	Energie libre des états P du méson $c\bar{c}$, en fonction de β pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$	89
Figure 33	Spectres de masse fractionnaires des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ en fonction du nombre quantique radial n pour différentes valeurs de ν et pour $l = 1$	94
Figure 34	Spectres de masse fractionnaires des mésons $\bar{b}c$ et $b\bar{s}$ en fonction du nombre quantique radial n pour différentes valeurs de ν et pour $l = 1$	94
Figure 35	Spectres de masse fractionnaires des mésons $c\bar{s}$ et $b\bar{q}$ en fonction du nombre quantique radial n pour différentes valeurs de ν et pour $l = 1$	95
Figure 36	Variations du potentiel d'interaction par rapport à la distance inter quark r pour les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ pour différentes valeurs de ν	95
Figure 37	Variations du potentiel d'interaction par rapport à la distance inter quark r pour les mésons $\bar{b}c$ et $b\bar{s}$ pour différentes valeurs de ν	96
Figure 38	Variations du potentiel d'interaction par rapport à la distance inter quark r pour les mésons $c\bar{s}$ et $b\bar{q}$ pour différentes valeurs de ν	96
Figure 39	Variation de l'énergie de l'état fondamental d'un nucléon à l'intérieur d'un noyau atomique et de l'énergie de l'état fondamental inter-nucléon en fonction de la constante de couplage forte α_s , en considérant le méson π^0 comme médiateur de l'interaction forte.	101

Figure 40	Variation de l'énergie de l'état fondamental d'un nucléon à l'intérieur d'un noyau atomique et de l'énergie de l'état fondamental inter-nucléon en fonction de la constante de couplage forte α_s , en considérant les mésons π^\pm comme médiateurs de l'interaction forte.	101
Figure 41	Variation de l'énergie de l'état fondamental d'un nucléon à l'intérieur d'un noyau atomique et de l'énergie de l'état fondamental inter-nucléon en fonction de la constante de couplage forte α_s , en considérant les gluons comme médiateurs de l'interaction forte.	102
Figure 42	Désintégration du quark up en quark down, du proton en neutron et vice-versa.	106
Figure 43	Désintégration du méson π neutre en deux photons γ	107

Liste des tableaux

Table 1	Les six saveurs de quarks et leurs propriétés.	21
Table 2	Paramètres du potentiel. Les masses des quarks [9, 30, 32] : $m_c = 1.207GeV$ and $m_b = 4.823GeV$	73
Table 3	Spectre de masse du charmonium (en GeV). Les masses des quarks sont $m_c = m_{\bar{c}} = 1.207 GeV$, et les paramètres du potentiel $a = 0.0407GeV^2$, $b = 0.0042GeV^3$ et $g = 0.1380GeV^{-1}$	75
Table 4	Spectre de masse du bottomonium (en GeV). Les masses des quarks sont $m_b = m_{\bar{b}} = 4.823GeV$, et les paramètres du potentiel $a = 0.2566GeV^2$, $b = 0.0150GeV^3$ et $g = 0.1043GeV^{-1}$	76
Table 5	Facteurs de normalisation et densités de probabilité radiales à l'origine pour les niveaux $1S$, $2S$ et $3S$ des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$	76
Table 6	Paramètres du potentiel et masses des quarks : $m_c = 1.209GeV$, $m_b = 4.823GeV$, $m_s = 0.419GeV$ and $m_u = m_d = 0.220GeV$ [125, 126, 127].	88
Table 7	Spectre de masse fractionnaire du charmonium (en GeV). Les masses des quarks sont $m_c = 1.207GeV$, $m_{\bar{c}} = 1.207GeV$, et les paramètres du potentiel $a = 0.0297GeV^3$, $b = 0.2209GeV^2$ and $d = 4.8542GeV^{-1}$	90
Table 8	Spectre de mass fractionnaire du bottomonium (en GeV). Les masses des quarks sont $m_b = 4.823GeV$, $m_{\bar{b}} = 4.823GeV$, et les paramètres du potentiel sont $a = 0.0289GeV^3$, $b = 0.3555GeV^2$ and $d = 4.8542GeV^{-1}$	90
Table 9	Spectre de masse fractionnaire du méson $\bar{b}c$ (en GeV). Les masses des quarks sont $m_c = 1.207GeV$, $m_{\bar{b}} = 4.823GeV$, et les paramètres du potentiel sont $a = 0.0204GeV^3$, $b = 0.2209GeV^2$ et $d = 4.8542GeV^{-1}$	91
Table 10	Spectre de masse fractionnaire du méson $c\bar{s}$ (en GeV). Les masses des quarks sont $m_c = 1.207GeV$, $m_{\bar{s}} = 0.419GeV$, et les paramètres du potentiel $a = 0.01282GeV^3$, $b = 0.0670GeV^2$ and $d = 4.8546GeV^{-1}$	92
Table 11	Spectre de masse fractionnaire du méson $b\bar{s}$ (en GeV). Les masses des quarks sont $m_b = 4.823GeV$, $m_{\bar{s}} = 0.419GeV$, et les paramètres du potentiel sont $a = 0.03725GeV^3$, $b = 0.2796GeV^2$ et $d = 0.1255GeV^{-1}$	92
Table 12	Spectre de masse fractionnaire du méson $b\bar{q}$ (en GeV). Les masses des quarks sont $m_b = 4.823GeV$, $m_q = m_{\bar{q}} = 0.220GeV$, ($q = u, d$). Les paramètres du potentiel sont $a = 0.01779GeV^3$, $b = 0.1589GeV^2$ et $d = 0.1232GeV^{-1}$	93
Table 13	Constantes de désintégration pseudoscalaires et vectorielles des mésons lourd-léger en MeV.	97

Table 14 Masses de quelques noyaux atomiques en MeV, calculées à partir des masses effectives $m_p^{eff} = 0,811$ GeV et $m_n^{eff} = 0,845$ GeV.	99
Table 15 Masses (en GeV) de quelques baryons et mésons, calculées pour différentes valeurs du paramètre a	102
Table 16 Rayons de Schwarzschild r_s (en fm) associés aux quarks de quelques baryons et mésons, calculés pour différentes valeurs du paramètre a	105

Résumé

Dans cette thèse, nous proposons une nouvelle approche combinant les principes de la mécanique quantique et ceux de la relativité générale pour étudier les propriétés des hadrons et les effets de la courbure d'espace-temps sur celles-ci. Nous analysons d'une part les effets du champ gravitationnel d'un défaut topologique linéaire sur les spectres des quarkonia lourds. Les particules étudiées se déplacent dans un espace-temps courbé par la présence d'une corde cosmique, dont la métrique est supposée sans torsion. Le spectre complet de chaque particule est obtenu en résolvant l'équation radiale de Schrödinger avec une version étendue du potentiel de Cornell. D'autre part, nous proposons une description purement géométrique de l'interaction forte, c'est-à-dire pouvant affecter la structure de l'espace-temps. Nous utilisons l'approche proposée par Barros, pour étudier les spectres des hadrons et quelques propriétés liées au confinement des quarks et des gluons dans un espace-temps de type Einstein-Schwarzschild, dont la métrique est générée par un champ scalaire non gravitationnel. Les résultats théoriques de notre modèle ont permis de calculer les spectres de masse, les constantes de désintégration et les propriétés thermodynamiques de quelques mésons, les masses de quelques baryons et noyaux atomiques ainsi que le rayon de confinement de quelques hadrons. Les résultats obtenus ont été comparés aux données expérimentales disponibles et aux prédictions de d'autres études théoriques pertinentes. Dans la plupart des cas considérés, nos prédictions sont en bon accord avec les données de l'expérience. Il a été observé que le rôle du paramètre topologique est très significatif dans cette étude. En effet, son champ gravitationnel agit sur les niveaux de masses d'une manière analogue à l'effet Zeeman dû au champ magnétique. De plus, à partir de nos résultats numériques, une explication simple du confinement de couleurs a été proposée, basée sur la théorie des trous noirs.

Mots clés : Équation de Schrödinger, équation de Dirac, équation d'Einstein, défaut topologique, espace-temps, métrique de Schwarzschild, confinement, hadron, quark, gluon.

Abstract

In this thesis, we propose a new approach that combines the principles of quantum mechanics and those of general relativity to study the properties of hadrons and the effects of space-time curvature on them. On the one hand, we analyze the effects of the gravitational field of a linear topological defect on the spectra of heavy quarkonia. The investigated particles are moving in a space-time curved by the presence of a cosmic string, whose metric is assumed to be torsion-free. The full spectrum of each particle is obtained by solving the radial Schrödinger equation with an extended version of the Cornell potential. On the other hand, we propose a purely geometric description of the strong interaction, in other words, one capable of affecting the structure of space-time. We use the approach proposed by Barros to study hadron spectra and few properties linked to the confinement of quarks and gluons in an Einstein-Schwarzschild type space-time, whose metric is generated by a non-gravitational scalar field. The theoretical results of our model were used to calculate the mass spectra, decay constants and thermodynamic properties of some mesons, the masses of some baryons and atomic nuclei as well as the confinement radius of some hadrons. The obtained results were compared with the available experimental data and the predictions from other relevant theoretical studies. In most considered cases, our predictions are in good agreement with the experimental data. It was observed that the role of topological parameter is very significant in this study. Indeed, its gravitational field acts on the mass levels in a manner analogous to the Zeeman effect due to the magnetic field. Furthermore, from our numerical results, a simple explanation of color confinement was provided, based on black hole theory.

Keywords : Schrödinger equation, Dirac equation, Einstein equation, topological defect, space-time, Schwarzschild metric, confinement, hadron, quark, gluon.

Introduction Générale

L'effet de la dynamique quantique sur la structure de l'espace-temps et l'effet de la structure de l'espace-temps en mécanique quantique sont des sujets qui jusqu'à présent n'ont pas encore été formellement théorisés. L'ampleur des efforts déployés par les physiciens théoriciens pour tenter de quantifier la gravité illustre suffisamment ce fait [1, 2, 3]. Le modèle standard de la Physique des Particules est l'unique théorie actuelle qui incorpore toutes les interactions connues, excepté la force de gravité [4]. Or celle-ci influence pourtant tout phénomène dans la nature. Le modèle standard n'arrive pas à décrire la matière noire, qui est cette forme de matière invisible qui interagit avec la matière ordinaire uniquement via la force de gravité [4]. Ainsi, il existe de nombreux phénomènes dans la nature que nous ne pourrions véritablement comprendre que si nous disposons d'une théorie du tout, c'est-à-dire une théorie qui permet d'étudier les effets de la dynamique quantique dans la structure de l'espace-temps et l'effet de la structure de l'espace-temps à l'échelle quantique.

A la fin du 20^e siècle, les physiciens ont commencé à s'intéresser activement aux effets de la structure de l'espace-temps au niveau quantique. C'est ainsi qu'à la fin des années 1970, dans le cadre des théories de la grande unification (GUT), le physicien britannique Thomas Kibble [5] a prédit que lors d'une des phases de refroidissement de l'Univers primordial, après le Big Bang, l'Univers aurait connu une série de brisures spontanées de symétrie [5, 6]. Ces brisures de symétrie s'accompagnaient de transitions de phase. Selon le mécanisme introduit par Kibble, des défauts topologiques se seraient formés lors de ces transitions de phase. Ces défauts sont des régions de l'espace dans lesquelles se concentre une très forte densité d'énergie. Dans des études antérieures, divers types de défauts ont été étudiés, à savoir : les défauts topologiques ponctuels [5, 7] encore appelés monopôles, les défauts topologiques linéaires ou cordes cosmiques [5, 6, 8, 9, 10], les défauts topologiques de surface ou murs de domaine [7], et les combinaisons entre ces différents types de défauts [5]. Les cordes cosmiques sont des défauts topologiques stables ; il est donc tout à fait possible qu'elles aient survécu après la phase de refroidissement de l'Univers primordial, et peut-être même jusqu'à nos jours [7]. C'est l'une des raisons pour

lesquelles les scientifiques s'intéressent particulièrement aux espaces à cordes cosmiques et en ont fait un sujet de grand intérêt et très actif. Les monopôles et les murs de domaines, par contre, sont si massifs qu'ils en arriveraient rapidement à dominer la dynamique de l'Univers, ce qui est en total désaccord avec les observations [11, 12].

Cependant, les cordes cosmiques n'ont pas été considérées dans les études antérieures en spectroscopie des hadrons. Pourtant, leurs présence dans l'Univers entraîne souvent des effets étonnant sur les comportements des objets [5, 7, 12]. Les fluctuations des observables quantiques dues aux cordes cosmiques nous ont amenés à nous intéresser aux propriétés des hadrons dans de tels espaces, sous l'action d'un champ central.

D'un autre côté, dans la plupart des recherches sur les systèmes quantiques et particulièrement en physique des particules, la question de l'effet de la dynamique quantique sur la structure de l'espace-temps n'est pas prise en compte, la variété est simplement l'espace-temps plat de Minkowski [13, 14] et aucune interaction n'est considérée comme affectant la structure de l'espace-temps. Cependant, une question fondamentale demeure, à savoir si les interactions non gravitationnelles peuvent également affecter la courbure de l'espace-temps d'une manière analogue à l'interaction gravitationnelle dans le cadre de la relativité générale, d'une part. D'autre part, une autre question fondamentale se pose. Celle de savoir si ces effets peuvent être observés. C'est ainsi qu'une théorie a récemment été introduite [13, 14, 15, 16], dans laquelle, les effets mentionnés ci-dessus ont été pris en compte, dans le cas de l'interaction électromagnétique [13, 17], conduisant à des résultats très intéressants en bon accord avec l'expérience. Avec l'introduction des modèles de potentiels par Murray Gell-Mann [18] et George Zweig [19] en 1964, de nombreux auteurs ont proposé des modèles de potentiels pour décrire la structure des hadrons en termes de particules confinées : les quarks [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33].

Récemment, Celso Barros [13, 14, 15] a proposé une nouvelle approche en postulant que les interactions non-gravitationnelles peuvent également se manifester à travers la structure de l'espace-temps. Selon cette approche, les particules décrivent les géodésiques dans un espace-temps courbe non pas par la présence d'une masse mais par la présence d'une charge électrique ou d'une charge de couleur [1, 17]. Le potentiel d'interaction non gravitationnelle est incorporé dans la métrique d'une manière purement géométrique [13, 14, 15]. En établissant ainsi via le principe de correspondance l'équation de Dirac pour un électron évoluant dans un espace-temps courbe [14, 16], doté d'une métrique statique à symétrie sphérique similaire à celle de Schwarz-

child [13, 14, 15, 17, 34], Barros a pu décrire l'atome d'hydrogène d'une toute nouvelle façon et a obtenu des résultats en bon accord avec les données expérimentales. Cependant, dans un article publié au début des années 2000 [13], une équation d'onde quantique relativiste prenant en compte les principes de la relativité générale a été proposée. Suivant la même approche, nous nous sommes proposés dans cette thèse, d'étudier les spectres de masse et les propriétés de confinement des quarks et des gluons avec un potentiel plus général [35, 36, 37], adapté à toutes les interactions non gravitationnelles.

Dans cette thèse, notre objectif est de montrer que la prise en compte de l'influence de la structure de l'espace-temps en MQ permet d'entrevoir de nouveaux effets tels que l'effet Zeeman dû au champ gravitationnel, qui n'apparaît pas dans les travaux antérieurs. D'autre part, nous voulons montrer que l'insertion de la dynamique quantique dans la structure de l'espace-temps permet de donner une explication cohérente au phénomène de confinement des quarks, dont le mécanisme n'est pas encore clairement compris en chromodynamique quantique (QCD). Pour mener à bien notre analyse vers l'atteinte de ces objectifs, nous allons d'abord nous intéresser aux solutions de l'équation non relativiste de Schrödinger avec une version étendue du potentiel de Cornell dans l'espace-temps d'une corde cosmique sans torsion. Nous allons considérer un système quark-antiquark interagissant avec le potentiel de Cornell étendu et nous examinerons comment les niveaux d'énergie sont modifiés par la topologie non triviale de l'espace-temps à corde cosmique. Ensuite, nous allons fournir une description géométrique des interactions fortes à partir d'une hypothèse assez simple selon laquelle l'énergie d'interaction d'une charge de couleur peut avoir des effets directs sur la structure de l'espace-temps.

Le travail comporte trois chapitres. Au premier chapitre, nous présentons la revue de la littérature sur les particules subatomiques. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des matériels et méthodes. En particulier, nous présenterons les solutions de l'équation de Schrödinger en présence d'un défaut topologique à corde cosmique (DTCC), un bref aperçu des équations du champ d'Einstein, de leurs solutions et des solutions de l'équation de Dirac pour un potentiel de Yukawa généralisé. Le troisième chapitre est consacré à la présentation des résultats du modèle, leur analyse et leur discussion en rapport avec les résultats expérimentaux et d'autres travaux théoriques pertinents. Ce travail s'achève par une conclusion et des perspectives.

cole d'Informatique en HEP et Applications CNRS Afrique Confrences (CHACAL) 2024

REVUE DE LA LITTÉRATURE

I.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter la revue de la littérature sur la physique des particules subatomiques, partant de la naissance de l'univers en passant par les différentes phases d'expansion de l'Univers, jusqu'à la formation des hadrons. Nous énonçons les différentes phases ayant suivies le Big Bang, l'apparition progressive des particules élémentaires dans l'Univers et la brisure de symétrie ayant conduit aux quatre forces fondamentales observées dans la nature. Nous présenterons ensuite le cadre théorique dans lequel chacune des quatre interactions fondamentales est décrite. Le modèle standard, qui regroupe toutes les particules élémentaires connues, sera présenté ainsi que ses limites. Nous aborderons ensuite les modèles de quarks non-relativistes, pertinents pour ce travail, ainsi que l'état de l'art sur ces modèles. Enfin, nous aborderons l'approche de Barros sur les interactions non gravitationnelles.

I.2 De la naissance de l'Univers aux particules et interactions de base

Il y a environ 13.8 milliards d'années, l'Univers est né à la suite du Big Bang et s'est développé dans un espace-temps courbé. Le Big Bang est le modèle cosmologique utilisé par les physiciens pour décrire l'origine et l'évolution de l'Univers [38]. Ce concept a été introduit en 1927 par le prêtre catholique belge George Lemaître et l'astrophysicien Chanoine, qui décrivaient dans les grandes lignes l'expansion de l'Univers, peu de temps avant qu'elle soit mise en évidence en 1929 par l'astronome américain Edwin Hubble [39]. Juste après le Big Bang, l'Univers a connu une expansion accélérée et qui s'est faite en plusieurs phases, parmi lesquelles nous pouvons citer : l'ère de Planck (cosmologie quantique¹), l'inflation cosmique, l'ère de grande unification, la baryogénèse², le découplage des neutrinos (fond diffus cosmologique), l'époque de l'anni-

1. La cosmologie quantique est une branche de la cosmologie, encore un peu spéculative qui vise à décrire les tout premiers instants de l'univers en considérant celui-ci comme une particule quantique.

2. La baryogénèse est la période de l'histoire de l'univers pendant laquelle les tout premiers baryons se sont formés.

hilation électron-positron, la nucléosynthèse primordiale³, l'ère de la grande recombinaison et l'Univers moderne [38, 39].

L'ère de Planck désigne la période de l'histoire de l'Univers pendant laquelle les quatre interactions fondamentales de la nature⁴ ne faisaient qu'une seule et même force [38, 39]. En effet, l'ère de Planck est une période très brève, située immédiatement après que l'Univers soit apparu à partir d'une singularité gravitationnelle. Cette phase de l'histoire de l'Univers a duré le "temps de Planck", soit $t_P = 10^{-43}$ seconde [40].

L'inflation cosmique est une période dans le paradigme⁵ du Big Bang pendant laquelle une partie de l'Univers comprenant l'Univers observable, a connu une phase d'expansion si rapide qu'elle lui aurait permis de grossir d'un facteur considérable d'au moins 10^{26} en un temps extrêmement court compris entre 10^{-36} et 10^{-33} secondes après le Big Bang [38].

L'ère de la grande unification correspond à la période de l'histoire de l'univers où l'énergie caractéristique des particules qui existaient alors, était de l'ordre de celle des GUT, soit 10^{16} GeV environ, mais inférieure à l'énergie de Planck [40].

La baryogénèse désigne la période de l'univers primordial pendant laquelle se sont formés les tout premiers baryons⁶. D'après la théorie du Big-Bang, aux tout premiers instants de l'Univers, celui-ci était si dense et incroyablement chaud qu'il était absolument impossible à la matière d'exister. Ainsi, la matière se serait formée à partir du moment où l'univers a entamé sa phase de refroidissement, et est devenu suffisamment froid pour permettre aux quarks et aux gluons de s'associer pour former les tout premiers baryons [38, 40]. À cet instant précis, la matière est passée de l'état plasma, qui est un état de la matière résultant du déconfinement des quarks et gluons, à un état où les quarks se retrouvent confinés à l'intérieur des hadrons. D'après certains modèles encore un peu spéculatifs, l'ère de la baryogénèse se situerait donc entre 10^{-32} s et 10^{-12} s après le Big Bang.

L'ère du fond cosmologique de neutrinos (ou découplage des neutrinos) représente l'ensemble des neutrinos qui ont été produit lors du Big Bang. Peu de temps après la nucléosynthèse primordiale, la température de l'Univers dépasse 0,5 MeV, soit 5 milliards de degrés. Cette

3. La nucléosynthèse primordiale est la période de l'histoire de l'univers pendant laquelle les tout premiers noyaux d'atomes se sont formés.

4. Il existe quatre interaction fondamentales observée dans la nature : la gravitation, l'électromagnétisme, l'interaction faible et l'interaction forte.

5. Un paradigme est une représentation du monde ou encore une façon de voir les choses et qui repose sur un fondement définit.

6. Les baryons sont des particules subatomiques constituées de trois quarks.

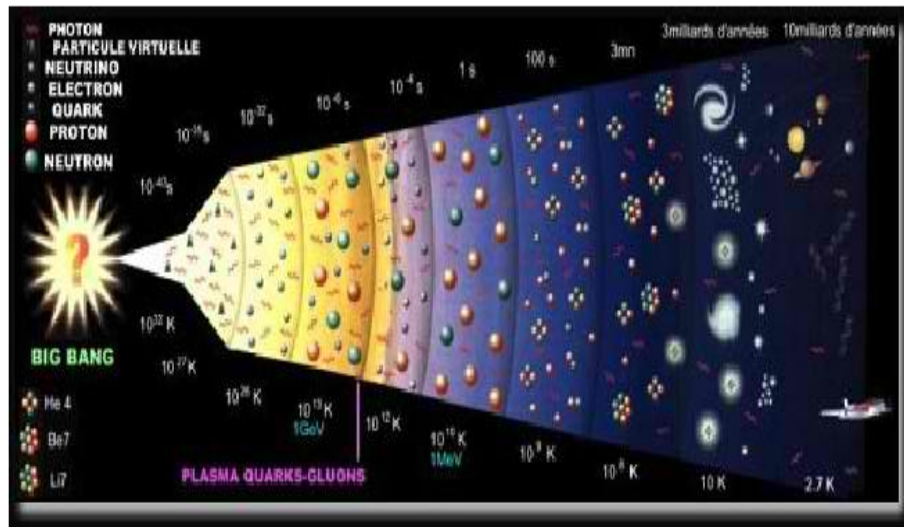


FIGURE 1 – Illustration de l'évolution de l'Univers.

température correspond à l'énergie de masse des électrons. Au delà de 5 milliards de degrés, les interactions entre photons et électrons peuvent spontanément créer des paires électron-positon. Ces paires s'annihilent spontanément et sont aussitôt recrées de façon continue, aussi longtemps que la température dépasse le seuil de 0,5 MeV. Dès que l'univers s'est refroidi encore un tout petit peu, c'est-à-dire quand la température est passée en dessous de 5 milliards de degrés, la quasi-totalité des paires (e^+ , e^-) se sont annihilés en photons, laissant place au léger excès d'électrons issus de la baryosynthèse. L'ère de la nucléosynthèse primordiale est un événement de synthèse des noyaux atomiques qui, selon la théorie du Big Bang, se serait déroulé dans tout l'Univers pendant les premières dizaines de minutes de son histoire. La nucléosynthèse primordiale a eu lieu entre 10 secondes et 20 minutes après le Big Bang. Elle a produit l'essentiel du deutérium, de l'hélium, et une toute petite fraction de lithium, de béryllium et de bore.

Environ 380000 ans après le Big Bang, alors que l'Univers était mille fois plus chaud et un milliard de fois plus dense qu'aujourd'hui, les étoiles et les galaxies n'existaient pas encore. Cette période connue comme l'ère de la recombinaison, marque l'époque où l'Univers est devenu suffisamment moins dense pour que la lumière puisse s'y propager. À cette époque, le principal obstacle à la propagation de la lumière était la présence d'électrons libres. C'est ainsi que lors du refroidissement de l'univers, les électrons libres se sont associés aux noyaux atomiques pour former les tout premiers atomes de l'Univers. C'est la raison pour laquelle cette partie de l'histoire de l'Univers porte le nom de recombinaison. Pendant cette même phase de refroidissement, des configurations souvent stables de matières, connues sous le nom de défaut

topologique se seraient formées dans l'Univers [5]. Selon la nature des brisures de symétrie, on suppose la formation de nombreux solitons au travers du mécanisme de Brout-Englert-Higgs-Hagen-Guralnik-Kibble [5, 10]. Les défauts topologiques les plus courants sont les monopôles magnétiques [5, 7], les cordes cosmiques [5, 6, 8, 9, 10], les murs de domaine [7], les skyrmions et les textures [5, 10]. L'on distinguera, selon l'authenticité du vide vers lequel l'Univers tend pour un temps infini, les faux défauts et les vrais défauts, si le potentiel tend vers le faux vide et le vrai vide respectivement. Les notions de vrai et faux vide sont définies dans le cadre des théories quantiques des champs. Le faux vide est un secteur d'espace métastable qui semble être un vide par analyse perturbative mais qui est instable sous les effets instanton c'est-à-dire effet tunnel vers un potentiel plus bas. Le vrai vide quant à lui est souvent utilisé en physique des particules pour décrire l'état de l'espace qui reste après la brisure de la symétrie électrofaible.

Alors que l'Univers s'est dilaté et refroidi, les symétries des lois physiques ont commencé à se briser dans les zones qui s'étendaient à la vitesse de la lumière. C'est ainsi que les défauts topologiques sont apparus dans les zones où différentes régions sont entrées en contact. Parmi tous les défauts topologiques, les cordes cosmiques sont celles qui sont compatibles avec les observations actuelles et leurs effets cosmologiques pourraient être confirmés par les travaux actuels et futurs. En effet, les DTCC sont les plus remarquables, dans le sens où la géométrie est plate partout sauf autour de l'axe de symétrie [7, 11]. Bien qu'il n'existe aucune preuve fondamentale de leur existence, la richesse des idées développées à partir de la théorie de la relativité générale constitue une grande motivation pour étudier le comportement des particules sur ces structures géométriques. Il est donc tout à fait logique d'accorder un intérêt particulier à l'étude des systèmes quantiques sur les espace-temps à géométrie de cordes cosmiques, car du fait de leur stabilité, ils seraient le défaut topologique le plus important de notre Univers, voir le seul type de défaut qui aurait survécu jusqu'à ce jour [10]. Comme conséquence importante de l'existence probable de cordes cosmiques, on peut citer par exemple, la compression de la matière lors du passage d'une corde en mouvement [12], les fluctuations de température dans le fond diffus cosmologique⁷ (CMB). Le champ gravitationnel généré par un DTCC possède des propriétés très inhabituelles. En effet, une particule quantique qui serait au repos au voisinage d'une corde droite et statique de dimension infinie ne serait pas attirée par celle-ci, et ne ressentirait donc aucun champ gravitationnel local. Cela signifie que l'espace est localement plat au voisinage d'une

7. En Anglais Cosmic Microwave Background

corde cosmique [7]. Il s'agit cependant d'une platitude locale et non globale. À cause de cette géométrie particulière, une corde cosmique peut générer des effets étonnants sur la dynamique des particules quantiques comme le processus de bremsstrahlung au voisinage d'un noyau statique, la création ou l'annihilation de la paire (e^+ , e^-).

De l'autre côté, à mesure que l'Univers s'est refroidi et s'est étendu, la super force de l'Univers à cette époque a commencé à se séparer en quatre composantes fondamentales. Ce processus de séparation des forces est appelé brisure de symétrie fondamentale [5, 10]. Il est dû à des changements dans les conditions de l'Univers et à des interactions entre les particules élémentaires. Au fur et à mesure que les forces se sont séparées, les particules ont commencé à interagir de différentes manières, conduisant à la diversité de phénomènes que nous pouvons observer aujourd'hui dans la nature. Ces quatre forces fondamentales parmi lesquelles la gravité, la force électromagnétique, la force nucléaire faible et la force nucléaire forte, ont des domaines de manifestation différents. La force électromagnétique est responsable des interactions entre particules chargées électriquement, telles que les électrons et les protons. C'est elle qui permet aux atomes de se lier pour former des molécules. La force faible est responsable de la désintégration radioactive et de certaines formes de désintégration des particules subatomiques. La force nucléaire forte est responsable de la cohésion des noyaux atomiques et des interactions entre les particules subatomiques appelées hadrons, tels que les protons et les neutrons. Enfin, la gravité est la force responsable de l'attraction des objets massifs, tels que les étoiles, les planètes et les galaxies.

I.3 Description des interactions entre particules élémentaires

Trois des quatre interactions fondamentales observées dans la nature sont décrites dans le cadre des théories quantiques des champs (TQC), ce sont les interactions non gravitationnelles. Chacune de ces TQC a été formalisée dans le cadre des théories de jauge à l'aide de groupes de symétrie locale. À l'échelle des particules subatomiques, les trois interactions non gravitationnelles sont dominantes. À l'échelle de l'infiniment grand, la gravité est l'interaction dominante et la théorie qui la décrit est basée sur des groupes de difféomorphismes. Dans ce qui suit, nous allons présenter brièvement chacune de ces interactions à travers la théorie qui permet de la décrire.

I.3.1 La théorie électrofaible

L'interaction électrofaible, encore appelée force électrofaible [41, 42], est la description unifiée de deux des quatre forces fondamentales de l'Univers, à savoir l'électromagnétisme encore appelé électrodynamique quantique (QED en anglais) dans sa version TQC, et l'interaction faible. Ces deux forces paraissent pourtant très différentes aux échelles atomique, et même nucléaire : l'interaction électromagnétique est dite de portée infinie car on peut l'observer aisément à l'échelle macroscopique tandis que la force nucléaire faible a une influence qui n'est perceptible qu'à l'échelle microscopique, plus précisément au niveau du noyau atomique. La théorie électrofaible (EW en anglais) est donc une théorie quantique des champs basée sur un groupe de jauge $SU(2)_{ew} \times U(1)_Y$ où $SU(2)_{ew}$ est le groupe de jauge décrivant l'interaction faible dont les bosons de jauge sont les bosons W^+ , W^- et le boson Z^0 , tandis que le groupe de jauge $U(1)_{em}$ de la QED, dont le boson de jauge est le photon, est une combinaison de $U(1)_Y$, avec un groupe $U(1) \subset SU(2)_{ew}$, appelé groupe d'isospin [41, 42]. La théorie EW est capable de prédire les masses des bosons à 80 GeV pour les bosons W^\pm et à 90 GeV pour le boson Z^0 [42], tous vecteurs de la force faible, tandis que le photon, vecteur de la force électromagnétique a une masse nulle. Ces différences de masse permettent d'expliquer la différence considérable de comportement de ces interactions à basse énergie.

I.3.2 La chromodynamique quantique

La chromodynamique quantique (QCD : Quantum Chromodynamics en anglais) [43], partie intégrante du Modèle Standard de la physique des particules élémentaires et de leurs interactions, est la théorie qui permet de décrire l'interaction forte. Elle est construite similairement à la QED. Sa formulation est basée sur la construction d'un Lagrangien invariant sous une transformation globale d'un groupe de symétrie particulier et répondant au principe d'invariance de jauge. D'après cette théorie, les quarks et les antiquarks correspondants sont confinés à l'intérieur des hadrons, c'est-à-dire qu'il est absolument impossible d'en observer à l'état libre. Ils possèdent une propriété communément nommée charge de couleur en abrégée "couleur" et qui n'a absolument rien à y voir avec le sens commun de ce mot [43]. Cette couleur peut être soit bleue, verte ou rouge pour une particule ; antibleue, antiverte ou antirouge pour une antiparticule. En effet, il s'agit d'un nombre quantique, analogue à la charge électrique dans le cas de la force électrostatique. Un autre principe fondamental de cette théorie est qu'une particule constituée

de quarks doit toujours donner un assemblage dont la couleur résultante est blanche, c'est-à-dire que sa charge de couleur doit être nulle. Cela peut être obtenu en combinant par exemple trois quarks de couleurs différentes : bleu, vert et rouge. Le baryon résultant est ainsi de couleur blanche. De la même façon, en combinant un quark et un antiquark de couleurs opposées (par exemple, bleu et antibleu), nous obtenons un méson de couleur blanche. De manière plus précise, la QCD décrit l'interaction forte à l'aide d'un groupe de jauge particulier sur la couleur des quarks, nommé groupe de jauge $SU(3)$. Pour construire un Lagrangien qui correspond à ce modèle, on commence par écrire le Lagrangien L_q qui décrit la propagation libre des quarks [43, 44] :

$$L_q(x) = \sum_{q=u,d,s,c,t,b} \left(\sum_{c=1,2,3} \bar{\psi}_{qk}(x) (i\partial_u \gamma^u - m_q) \psi_q^k(x) \right). \quad (\text{I.1})$$

Cependant, ce Lagrangien n'est pas invariant sous l'action d'une transformation de jauge appartenant à $SU(3)$, telle que

$$\psi_q^i(x) \rightarrow \psi_q'^i(x) = U_k^i(x) \psi_q^k(x), \quad (\text{I.2})$$

dans laquelle la matrice de transformation correspond à

$$U_k^i(x) = \exp \left[-i \sum_{a=1}^8 \chi^a(x) \frac{(\lambda^a)_k^i}{2} \right]. \quad (\text{I.3})$$

Dans l'équation (I.3), les λ^a ($a = 1, 2, 3, \dots, 8$) correspondent ici aux huit matrices de Gell-Man, génératrices du groupe $SU(3)$. Il faut donc ajouter un terme compensateur qui va annuler l'apparition du terme en $\partial \chi^a(x)$ lors de l'application d'une transformation :

$$L_q \rightarrow L_q + \sum_{q=u,d,\dots} \bar{\psi}_{qi}(x) \left[iU_k^{\dagger i}(x) \partial_\mu U_j^k(x) \right] \gamma^\mu \psi_q^j(x). \quad (\text{I.4})$$

Pour que le Lagrangien respecte la condition d'invariance de jauge, il faut introduire, conformément aux théories de Yang-Mills, huit champs de spin-1 interagissant avec les champs de quarks correspondant aux huit matrices de Gell-Mann. Les médiateurs de l'interaction forte seront donc huit particules similaires au photon (le médiateur de l'interaction dans QED) : les gluons. On

doit donc ajouter un terme d'interaction quark-gluon au Lagrangien

$$L_q(x) = \sum_{q=u,d,c,s,t,b} \left(g_s \bar{\psi}_{qi}(x) \frac{(\lambda^a)_k^i}{2} \gamma^\mu \psi_q^k(x) A_\mu^a(x) \sum_{c=1,2,3} \bar{\psi}_{qk}(x) (i\partial_u \gamma^u - m_q) \psi_q^k(x) \right), \quad (\text{I.5})$$

où g_s est la constante de couplage analogue à e dans la QED. Ce second terme est lui aussi invariant sous une transformation faisant intervenir $SU(3)$. Cependant, contrairement à ce qui se passe avec les photons dans la QED, les gluons qui sont les médiateurs de l'interaction dans la QCD, interagissent entre eux, et on doit donc en tenir compte en ajoutant un troisième et dernier terme également invariant sous $SU(3)$, le terme L_{gluons} à notre Lagrangien :

$$L_{gluons}(x) = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}(x), \quad (\text{I.6})$$

où le tenseur $G_{\mu\nu}^a$ du champ des gluons est défini par

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (\text{I.7})$$

On peut alors écrire le Lagrangien complet de la QCD comme

$$L_{QCD} = \sum_{q=u,d,c,s,t,b} \left(g_s \bar{\psi}_{qi}(x) \frac{(\lambda^a)_k^i}{2} \gamma^\mu \psi_q^k(x) A_\mu^a(x) \sum_{c=1,2,3} \bar{\psi}_{qk}(x) (i\partial_u \gamma^u - m_q) \psi_q^k(x) \right) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}(x). \quad (\text{I.8})$$

I.3.3 La relativité générale

La relativité générale est une théorie qui décrit la force de gravité [45]. Elle a été développée par Albert Einstein entre 1907 et 1915. D'après cette théorie, l'attraction gravitationnelle que l'on observe entre les masses est provoquée par une déformation de l'espace et du temps par ces masses. Avant l'avènement de la théorie de la relativité générale d'Einstein, la loi de l'attraction universelle d'Isaac Newton avait été acceptée pendant plus de 200 ans comme une description valable de la force de gravitation entre les corps massifs. Dans le modèle de Newton, la gravitation est le résultat d'une force attractive entre les objets massifs. Bien que Newton lui-même fût ennuyé par la nature inconnue de cette force, sa théorie permettait de décrire très correctement les mouvements terrestres et célestes.

Cependant, des expériences et des observations montrent que la description proposée par Einstein rend compte de quelques effets inexpliqués par la loi de Newton, telles que les anomalies observées sur l'orbite de la planète Mercure, et d'autres planètes. La relativité générale prédit aussi de nouveaux effets de la gravitation, tels que les ondes gravitationnelles, les effets de lentille optique gravitationnelle et l'effet de la gravitation sur le temps, connu sous le nom de dilatation gravitationnelle du temps. Cependant, elle n'est pas apte à expliquer les phénomènes de l'infiniment petit tels que les interactions entre particules subatomiques, qui sont décrites par la mécanique quantique.

En relativité générale, les différentes étapes qui permettent de résoudre un problème sont bien connues. La première étape est de déterminer la géométrie d'espace-temps dans laquelle on veut résoudre notre problème. En d'autres termes, il s'agit de trouver la métrique que l'on va utiliser. Dans un univers "vide", on utilisera la métrique de Minkowski, qui décrit l'espace-temps plat de la relativité restreinte⁸. Autour d'une masse sphérique, et statique, on utilisera la métrique de Schwarzschild [45] :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{I.9})$$

où $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild associé à l'objet massif, ds^2 est l'intervalle d'espace-temps, G est la constante de gravitation universelle de Newton, c est la vitesse de la lumière et M est la masse de l'objet. C'est la métrique la plus utilisée en relativité générale, car elle est simple mais peut tout de même s'appliquer à un grand nombre de situations. La métrique de Schwarzschild est une solution des équations d'Einstein dans l'espace-temps vide. En effet, en 1905, Albert Einstein s'est rendu compte que bien que les observateurs qui accélèrent voient le temps différemment, cela ne s'applique pas aux observateurs qui n'accélèrent pas, qui se déplacent à une vitesse constante ou qui sont immobiles, et que la vitesse de la lumière est indépendante de tout mouvement. Einstein a ensuite publié sa théorie de la relativité générale qui conclut que les objets ayant une masse subissent une gravité, qui est une distorsion de l'espace et du temps plutôt qu'une force physique réelle. C'est ainsi qu'en 1916, Karl Schwarzschild utilise les équations de champ d'Einstein, qu'il résout pour trouver l'équation de la masse dans l'espace-temps vide, c'est-à-dire dans une zone totalement dépourvue de toute matière.

⁸. Restreinte car en plus de ne pas inclure la force de gravité, c'est une théorie de la relativité qui impose des restrictions sur le comportement des objets

Cela a donné naissance à la métrique (I.9). En de termes simples, il s'agit d'une représentation mathématique d'un trou noir. Karl Schwarzschild a créé l'équation d'un trou noir complètement statique ($\partial_t g_{\mu\nu} = 0, \forall \mu, \nu = 0, i$), sans changement. Il s'agit d'un trou noir éternel, c'est-à-dire un trou noir dont la taille ne change pas, et qui a toujours existé. La distances r_s est appelée rayon de Schwarzschild et définit l'horizon des événements d'un trou noir. À l'horizon des événements ou au delà, tous les événements se produisent toujours infiniment loin dans le futur de sorte que pour un observateur extérieur, ces événements ne se produisent jamais. La métrique de Schwarzschild montre qu'au niveau du trou noir idéalisé l'espace devient le temps et le temps devient l'espace, échangeant leurs rôles de sorte que la singularité du trou noir se trouve dans un futur inévitable plutôt que dans un lieu.

Une fois que le choix de la métrique a été opéré, l'étape suivante consiste à analyser les symétries de notre problème, afin de réduire son nombre de dimensions et de choisir les coordonnées adaptées à la résolution du problème. Une fois la métrique et les coordonnées déterminés, on peut donc exprimer la solution du problème. À partir du tenseur métrique, tout un tas d'outils mathématiques vont être nécessaires pour construire les équations d'Einstein et les résoudre. Ainsi, en utilisant les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique, on peut calculer les symboles $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ de Christoffel comme [1, 8, 9, 45]

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\mu\rho} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} g_{\mu\nu} \right], \quad (\text{I.10})$$

et en déduire chaque composante du tenseur de courbure Riemann

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma = \frac{\partial \Gamma_{\nu\rho}^\sigma}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\beta}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\beta. \quad (\text{I.11})$$

Ce tenseur caractérise la courbure de l'espace selon toutes les directions possibles. C'est l'outil le plus complet pour décrire une géométrie. Malheureusement, son nombre élevé de composantes en font un objet très lourd à manipuler. En particulier, certaines de ses composantes se répètent et d'autres sont même nulles. Pire encore, dans le cas d'un vrai espace-temps à quatre dimensions, le tenseur de courbure possède 256 composantes ! A cet effet, pour simplifier cette description de la courbure, il est de coutume d'introduire deux outils plus simples et plus performants, à partir du tenseur de courbure de Riemann qui vont nous être plus agréables pour les calculs. Le premier de ces deux outils est ce qu'on appelle le tenseur de Ricci. Il s'obtient en effectuant une

contraction sur le premier et le troisième indice du tenseur de Riemann et a cette particularité qu'il peut être représenté sous la forme d'une matrice, ce qui n'est pas le cas du tenseur de Riemann. Le tenseur de Ricci est donc défini par

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \quad (\text{I.12})$$

et donne la contribution de la trace du tenseur de courbure de Riemann. De façon intuitive, le tenseur de Ricci mesure les variations de volume de la surface lorsqu'on se déplace le long de sa courbure. Sur une sphère par exemple, le volume que renferme deux géodésiques parallèles va diminuer au fur et à mesure que l'on progresse sur la surface. Les différentes composantes du tenseur de Ricci mesurent ces variations de volumes selon les différentes directions de la surface. Mais dans le cas de certaines géométries régulières comme la sphère par exemple, la courbure de l'espace est la même dans toutes les directions et on va pouvoir la décrire par un seul nombre. Ce nombre, qui caractérise une moyenne de la courbure selon toutes les directions possibles est ce qu'on appelle la courbure scalaire et est noté R . Dans le cas où le système de coordonnées est orthogonal, cette quantité s'obtient facilement comme la trace du tenseur de Ricci [1, 8, 9, 45]

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu}, \quad (\text{I.13})$$

et qui est donc un invariant. Enfin, introduisons un objet important pour la suite : le tenseur d'Einstein. Il est défini par [1, 45]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{I.14})$$

Cet outil permet de décrire complètement une géométrie d'espace-temps et notamment sa courbure. Mais avant de donner explicitement l'équation d'Einstein, nous allons d'abord remplir notre Univers d'un contenu, de la matière. Nous allons donc pour cela introduire un nouveau tenseur. En effet, notre Univers consiste en un tissu, l'espace-temps, dans lequel est déposé un contenu, tel que des astres, de la masse, de l'énergie. À première vue, le contenu de l'Univers semble très diversifié. On y trouve des étoiles, des planètes, des nuages de gaz interstellaires, des êtres humains, des microbes, des bactéries, des atomes et molécules ou encore des particules subatomiques. Pourtant toute cette diversité peut être résumé en un seul et unique concept, des

mouvements d'énergie. L'énergie est une notion abstraite, qui traduit la présence de perturbations dans l'espace-temps. En particulier, il peut s'agir de matière, de masse. La masse contient de l'énergie d'après la formule $E = mc^2$, mais d'autres facteurs contribuent eux aussi au contenu énergétique de l'Univers comme par exemple le champ électromagnétique, l'énergie sombre⁹, ou encore le cas le plus simple de matière : un champ scalaire. Sous toutes ces différentes formes, cette énergie va se déplacer dans l'espace-temps à la façon d'un fluide. Le mouvement d'un ob-

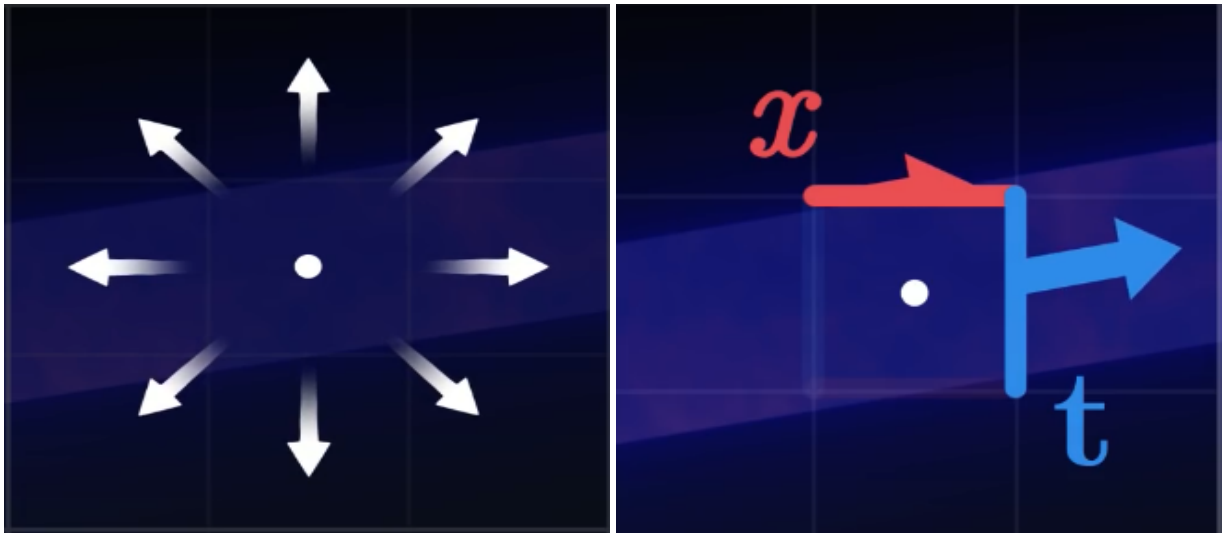


FIGURE 2 – Représentation des mouvements d'énergie autour d'un point dans l'espace-temps

jet dans l'espace-temps peut donc être synthétisé par un flux d'énergie. Pour décrire un tel flux d'énergie, intéressons nous à un point sur sa trajectoire. À partir de ce point l'énergie va communiquer son mouvement dans différentes directions (Voir Figure 2). Si l'on ne s'intéresse qu'à une des trois dimensions d'espace, le mouvement peut se propager à travers quatre surfaces, deux pour chacune des coordonnées qu'on utilise. Cette situation est symétrique, c'est-à-dire que si l'énergie communique son mouvement depuis le passé, il doit ressortir vers le futur. Ainsi, seules deux surfaces sont nécessaires pour décrire la façon dont s'échangent les mouvements d'énergie (Voir Figure 2). Si l'objet reste immobile dans l'espace, il communique son énergie exclusivement vers le futur. Ainsi, seule la surface associée à la coordonnée temporelle va être traversée par un flux de mouvement. Si l'objet se déplace dans l'espace, il va communiquer son énergie à travers chacune des deux surfaces. Si pour chaque surface nous représentons le flux d'énergie du mouvement qui la traverse par un vecteur, alors en fonction du comportement de

⁹. C'est cette énergie ayant la fameuse propriété d'être négative et qui a tendance à accélérer l'expansion de l'Univers

l'énergie comme une sorte de fluide, ces vecteurs vont varier. En les décomposant sur une base, on va pouvoir créer un tenseur de rang 2, dont la représentation sous forme de matrice 4×4 est notée

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.15})$$

Ce tenseur traduit les échanges de mouvements au sein de l'énergie, on le note $T = T_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ c'est ce qu'on appelle couramment le tenseur énergie-impulsion. Dans notre tenseur, la première case T_{00} mesure la quantité d'énergie qui traverse le temps au cours du temps propre. Cette composante correspond donc à la quantité d'énergie qui reste immobile dans l'espace, c'est une énergie qui ne se déplace que vers le futur. On l'appelle plus communément la densité d'énergie, et elle est d'autant plus grande que le point est dense en énergie. Les composantes qui suivent sur la première ligne et la première colonne sont telles que $T_{10} = T_{01}$, $T_{20} = T_{02}$ et $T_{30} = T_{03}$ et représentent la quantité de mouvement qui va être transmise à l'énergie au cours du temps. Les quantités T_{0i} représentent les composantes de l'impulsion \vec{p} par unité de volume, et mesurent la vitesse spatiale de l'énergie c'est-à-dire son mouvement dans l'espace au cours du temps. Leur valeur va être d'autant plus grande que l'énergie se déplace rapidement dans l'espace par rapport au temps on appelle ces composantes la densité d'impulsion car elle mesure la quantité de mouvement de l'énergie. Les autres éléments de la diagonale quant à eux, mesurent la composante spatiale du flux d'énergie à travers l'espace. A première vue, ces composantes sont plus difficiles à interpréter car il faut donner un sens à cet échange de mouvement dans l'espace. Il s'agit en fait d'une tendance que va avoir l'énergie à pousser dans une direction, c'est ce qu'on appelle plus communément la pression. Les composantes symétriques par rapport à la diagonale de la partie spatiale du tenseur $T_{\mu\nu}$ à savoir $T_{21} = T_{12}$, $T_{31} = T_{13}$ et $T_{32} = T_{23}$, correspondent au flux de viscosité. La viscosité est simplement cette tendance que va avoir l'énergie à communiquer un mouvement parallèle autour d'elle. En se plaçant dans un système local de coordonnées x^μ , et en notant par u^μ la quadri-vitesse d'une particule fluide, le tenseur énergie-impulsion est donné par [1]

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (\text{I.16})$$

où ρ désigne la masse volumique propre du fluide¹⁰ et P sa pression. L'idée la plus puissante de la relativité générale va être de relier les notions de courbure d'espace-temps et de contenu énergétique de l'Univers. Ainsi, à l'aide d'une unique équation, Albert Einstein va écrire une égalité entre d'une part la géométrie de l'espace-temps et d'autre part son contenu énergétique [1] :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (\text{I.17})$$

I.4 Le modèle standard de la physique des particules

Le modèle standard de la physique des particules est une théorie qui concerne les interactions électromagnétique, forte et faible, et qui fournit la classification de toutes les particules subatomiques connues [4]. Elle a été développée pendant la deuxième moitié du 20^e siècle, dans une initiative collaborative mondiale, sur les bases de la mécanique quantique. La formulation actuelle a été finalisée au milieu des années 1970 à la suite de la confirmation expérimentale des quarks. Les découvertes successives du quark top en 1995, du neutrino tauique en 2000 et du boson de Higgs en 2012 ont donné encore plus de crédibilité au modèle standard de la physique des particules. Toutes les particules énumérées dans le modèle standard ont désormais été observées expérimentalement. Par son succès à expliquer une large variété de résultats expérimentaux, le modèle standard est parfois vu comme une "théorie de presque tout".

I.4.1 Classification des particules élémentaires

En physique des subatomique, une particule élémentaire, ou particule fondamentale, est une particule dont on ne connaît pas la composition : on ne sait pas si elle est constituée d'autres particules plus petites. Le modèle standard regroupe toutes les particules élémentaires qui composent l'Univers en une seule théorie. Les particules élémentaires sont les éléments fondamentaux à la base de l'Univers tout entier. Le modèle standard regroupe donc ces particules élémentaires en plusieurs groupes. Tout d'abord l'Univers est composé de matière, qui est à la base des êtres vivants, des planètes, des étoiles et de tout ce qui possède une masse. les particules de l'Univers qui composent la matière sont appelées fermions. Il existe deux grandes catégories de fermions : les quarks, et les leptons. Les quarks et les leptons qui composent la matière existent sous différentes formes, qui sont classés en trois générations. Pour chaque génération, sont associés

10. Dans notre cas c'est le flux d'énergie dans l'espace-temps

un couple de quarks et un couple de leptons. La première génération comporte les particules les plus communes, que l'on peut observer partout. Elle est composée notamment des quarks up et down et des leptons électron et neutrino électronique. En s'associant par groupe de trois, les quarks up et down forment les protons et les neutrons, qui sont les constituants essentiels des noyaux d'atomes. Les électrons sont également présent dans les atomes, orbitant autour des protons et des neutrons, et leur charge négative permet de compenser la charge positive des protons, afin que la matière reste neutre. Les neutrinos électroniques sont les particules de matière

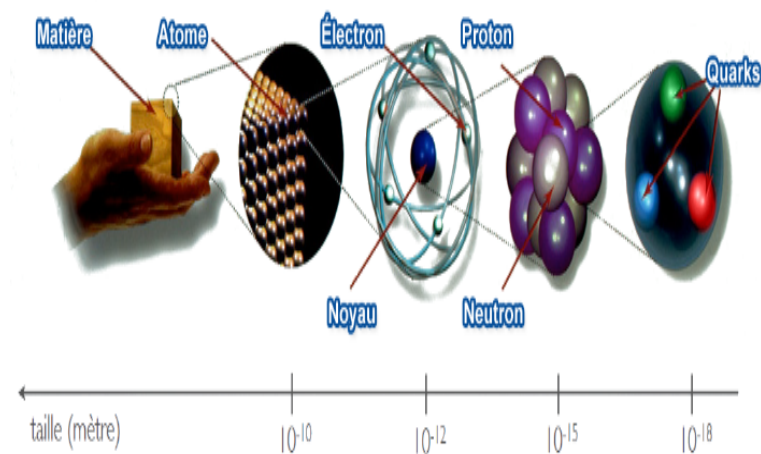


FIGURE 3 – Les différentes échelles de la matière dans l'Univers.

les plus nombreuses dans l'Univers. En effet, plus de mille milliards de neutrinos traversent nos corps chaque seconde. Les neutrinos ont pour particularité de ne pas interagir avec la matière, ce qui les rend très difficiles à détecter. La deuxième génération de la matière est constituée des quarks charm et strange et des leptons muon et neutrino muonique. Ces quatre particules ont une masse plus importante que celles de la première génération. Enfin, la troisième génération est composée des quarks top et bottom et des leptons tau et neutrino tauique. Ces quatre particules sont les plus massives par rapport à celles des deux premières générations. Toutes les particules du modèle standard existent en deux versions. En effet, il existe une autre forme de matière qu'on appelle l'antimatière, qui associe à chaque particule son antiparticule. Les antiparticules ont toutes les mêmes caractéristiques que les particules normales, sauf leur charge qui est opposée. Ensuite, il existe une autre catégorie de particules qui ne sont pas des constituants de la matière, qu'on appelle des bosons. Un boson est une particule qui va agir comme un messenger pour permettre l'interaction à distance entre deux particules de matière. Quatre de ces bosons

sont appelés bosons de jauge. Ces bosons de jauge représentent chacun une force de l'Univers. Ainsi, le photon est le boson de jauge associé à la force électromagnétique, il se déplace à la vitesse de 297792 km/s et est à la base de l'électricité et du magnétisme. Le gluon est le boson de jauge associé à l'interaction forte. Cette force agit à un niveau microscopique, et est très puis-

masse →	$\approx 2,3 \text{ MeV/c}^2$	$\approx 1,275 \text{ GeV/c}^2$	$\approx 173,07 \text{ GeV/c}^2$	0	$\approx 126 \text{ GeV/c}^2$
charge →	$2/3$	$2/3$	$2/3$	0	0
spin →	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	0
	u up	c charm	t top	g gluon	H boson de Higgs
QUARKS	$\approx 4,8 \text{ MeV/c}^2$	$\approx 95 \text{ MeV/c}^2$	$\approx 4,18 \text{ GeV/c}^2$	0	
	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	d down	s strange	b bottom	γ photon	
	$0,511 \text{ MeV/c}^2$	$105,7 \text{ MeV/c}^2$	$1,777 \text{ GeV/c}^2$	$91,2 \text{ GeV/c}^2$	
	-1	-1	-1	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	e électron	μ muon	τ tau	Z^0 boson Z^0	
LEPTONS	$< 2,2 \text{ eV/c}^2$	$< 0,17 \text{ MeV/c}^2$	$< 15,5 \text{ MeV/c}^2$	$80,4 \text{ GeV/c}^2$	
	0	0	0	± 1	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	ν_e neutrino électronique	ν_μ neutrino muonique	ν_τ neutrino tauique	W^\pm boson W^\pm	BOSONS DE JAUGE

FIGURE 4 – Classification des particules élémentaires de l'Univers par le modèle standard.

sante. C'est elle qui maintient entre eux les quarks qui forment les protons et les neutrons. Enfin, les bosons Z^0 , W^+ et W^- , sont les bosons de jauge associés à l'interaction faible. Cette force est à l'origine de phénomènes tels que la radioactivité des particules, ou la fusion nucléaire qui a lieu au sein des étoiles comme le soleil. Il existe dans le modèle standard un dernier boson, c'est le boson de Higgs. Ce dernier ne représente pas une force de l'Univers mais plutôt un champ, le champ de Higgs. Ce champ de Higgs attribue une masse aux particules qui le traversent. Plus les particules interagissent avec ce champ, plus elles ont une masse importante. Il existe donc dans l'Univers une grande diversité de particules élémentaires que le modèle standard regroupe en une seule théorie, mais cette théorie n'explique pas tout. Par exemple, le modèle standard n'inclut pas encore la force de gravité, qui est pourtant essentielle à l'Univers. Pour cela, les physiciens ont suggéré l'existence d'un boson, qui serait le médiateur l'interaction gravitationnelle, le graviton. Cependant ce dernier n'a pas encore été formellement détecté, et son existence n'est

pour l'instant qu'une hypothèse.

I.4.2 Algèbres et groupes de Lie du modèle standard

Du point de vue des mathématiques, les théories quantiques des champs ont été formalisées dans le cadre des théories dites de jauge grâce aux groupes de symétrie locale prenant la forme de groupes de Lie complexes sous-tendant chacun les symétries de jauge modélisées. Ce sont des groupes de Lie compacts, c'est-à-dire des groupes continus et bornés. Ainsi, nous avons :

- la QED, qui a permis la description de l'électromagnétisme dans le cadre d'une théorie de jauge abélienne avec le groupe unitaire $U(1)$;
- l'interaction faible a été décrite avec le groupe spécial unitaire $SU(2)$;
- la théorie EW a été décrite avec le groupe de jauge $SU(2) \otimes U(1)$;
- la QCD (interaction forte) a été décrite avec le groupe $SU(3)$;
- enfin, le modèle standard a été élaboré avec le groupe de jauge $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

I.5 Les modèles de quarks non-relativistes

À haute énergie, on sait résoudre la QCD pour des cas pratiques par les méthodes perturbatives par exemple. Cependant pour des énergies plus faibles, on se retrouve avec une théorie insoluble. Plusieurs alternatives sont généralement envisageables, parmi lesquelles : la QCD sur réseau [43], les règles de somme (QCD sum rules) [46] et les modèles des quarks non-relativistes (MQNR) [8, 9, 29, 30, 31, 32, 33]. La QCD sur réseau utilise un maillage de l'espace-temps pour travailler sur le Lagrangien exact de la théorie. Elle est à l'origine de beaux succès comme la vérification du confinement et de la brisure de symétrie chirale. Mais elle reste malgré tout une méthode difficile à mettre en oeuvre, réclamant de gros moyens informatiques. Les règles de somme de la QCD permettent de relier les largeurs de désintégration et les rapports de branchement aux condensats de quarks et gluons. Cependant ces deux moyens d'étude restent lourds d'emploi, limités à basse énergie, et ne peuvent être utilisés pour tous les calculs et enfin il est souvent difficile d'en faire ressortir la physique. En effet, malgré leurs succès, aucune de ces approches ne donne la moindre explication sur le mécanisme de confinement des quarks et gluons. En outre, elles sont difficiles à appliquer à des systèmes avec des masses différentes pour les quarks et les gluons et présentent des faiblesses considérables à basse énergie.

I.5.1 Le modèle de quarks constituants

Le modèle de quarks constituants a été proposé en 1964 par Gell-Mann et Zweig [18, 19], et présente les mésons comme des paires de quark-antiquark et les baryons comme étant constitués de trois quarks ou de trois antiquarks. Ces quarks et antiquarks interagissent via le processus d'émission et/ou absorption de gluon.

TABLE 1 – Les six saveurs de quarks et leurs propriétés.

Quark	Symbole	Masse (GeV/c^2)	Charge électrique	Nombre baryonique	Etrangeté	Spin
Up	u	0.0024	+2/3	1/3	0	1/2
Down	d	0.0048	-1/3	1/3	0	1/2
Charm	c	1.32	+2/3	1/3	0	1/2
Strange	s	0.104	-1/3	1/3	-1	1/2
Top	t	171.2	+2/3	1/3	0	1/2
Bottom	b	4.8	-1/3	1/3	0	1/2

Dans ce modèle, on abandonne l'idée de travailler avec le Lagrangien de la QCD si ce n'est pour s'en inspirer dans la construction du potentiel modélisant les interactions. Le modèle des quarks constituants est un modèle dit phénoménologique dans lequel les degrés de liberté des gluons disparaissent et les quarks "nus" de la QCD sont remplacés par des quarks constituants. Il s'agit de quasi-particules de nombres quantiques identiques à ceux de la QCD fondamentale mais qui diffèrent par certaines propriétés dynamiques telles que la masse. Ces quarks constituants possèdent : des masses plus importantes, une extension spatiale résultant du nuage gluonique. Ils sont pris comme étant non-relativistes. Ceci peut apparaître comme une grossière approximation pour les saveurs les plus légères telles que les quarks u , d et s mais est justifié a posteriori par le succès du modèle. L'hypothèse de base de ce modèle est que les quarks constituants obéissent à l'équation non-relativiste de Schrödinger, à la façon de la Physique Atomique

$$\hat{H} |\Psi(\vec{r}, t)\rangle = i \frac{d|\Psi(\vec{r}, t)\rangle}{dt}, \quad (\text{I.18})$$

où dans sa version stationnaire :

$$\hat{H} |\Psi(\vec{r}, t)\rangle = (T + V) |\Psi(\vec{r}, t)\rangle = E |\Psi(\vec{r}, t)\rangle, \quad (\text{I.19})$$

où \hat{H} est l'opérateur Hamiltonien, T et V sont respectivement l'opérateur énergie cinétique et

le potentiel modélisant les interactions. L'écriture de l'opérateur Hamiltonien nécessite un choix de traitement relativiste (équation de Salpether) ou non (équation de Schrödinger) de l'énergie cinétique et également l'écriture d'un potentiel simulant les interactions, notamment l'interaction forte. Une bonne connaissance de la QCD est donc primordiale pour la mise au point de ce dernier. La résolution de l'équation pour les solutions stationnaires nous fournit la fonction d'onde de l'état lié ainsi que les niveaux d'énergie. Il faut souligner ici le problème de la définition de la masse pour un système instable. L'état instable se définit comme une résonance dans la diffusion de particules stables. Un pôle dans le plan complexe de l'énergie signale également un tel état. Une conséquence de l'utilisation de l'équation de Schrödinger est que le nombre de particules est fixé, contrairement aux TQC où le nombre de particules peut varier. Ainsi les hadrons étudiés auront un nombre de quarks constituants bien défini. L'avantage du modèle des quarks couplé au potentiel d'interaction forte est qu'il est facile de faire ressortir la physique en jugeant l'importance de tel ou tel terme du potentiel, ce qui n'est pas le cas en QCD. La méthode de calcul dans les MQNR est bien connue puisqu'on regarde les éléments de matrice associés aux processus étudiés. Le modèle des quarks est à l'origine de nombreux succès et a suggéré certaines propriétés de la QCD.

1.5.2 Les potentiels d'interaction quark-antiquark

Ces dernières années, l'une des interrogations les plus pertinentes soulevées en physique nucléaire et des particules concerne la description complète des propriétés des hadrons. Afin d'analyser et de décrire certaines propriétés du noyau et des états liés de quarks, les scientifiques ont proposés de nombreux modèles de potentiels [8, 30, 47, 48, 49, 50, 51]. Depuis la découverte du méson J/ψ par le Brookhaven National Laboratory en 1974 [52, 53] et la mise en place du méson Υ , l'étude des mésons à l'aide de modèles de potentiels a particulièrement attiré l'attention des chercheurs dans le sens où les MQNR sont devenus un moyen de tester quantitativement le modèle standard de la physique des particules [54, 55]. En plus du nombre élevé de données expérimentales disponibles [56, 57, 58], la dynamique des baryons, des quarkonia et des mésons lourds peut être traitée avec des MQNR [59, 60, 61, 62, 63] ou de manière non perturbative avec la QCD, rendant ainsi leur étude particulièrement intéressante et facile à mettre en oeuvre. La méthode des potentiels consiste en la mise au point d'un potentiel d'interaction quark-quark (ou quark-antiquark) dit "QCD inspired", c.-à-d. reproduisant les caractéristiques

de la QCD. Ce potentiel généralement noté $V_{q\bar{q}}$ simule d'une certaine façon le rôle des gluons qui ont disparu dans ce cadre d'étude. Les quarks ressentant ce potentiel sont dénommés quarks constituants pour les différencier des particules élémentaires de la QCD fondamentale. La plupart des potentiels phénoménologiques doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$\frac{dV_{q\bar{q}}(r)}{dr} > 0 \quad , \quad \frac{d^2V_{q\bar{q}}(r)}{dr^2} \leq 0, \quad (\text{I.20})$$

qui sont les propriétés de base des théories de jauge. Nous allons maintenant présenter les termes habituels intervenant dans $V_{q\bar{q}}$, potentiel à deux corps, où r désigne la distance relative entre le quark et l'antiquark. De façon générale, le potentiel d'interaction quark-antiquark s'écrit :

$$V_{q\bar{q}}(r) = V(r) + V_{DS}(r) = V_c(r) + V_{gluon}(r) + V_{DS}(r), \quad (\text{I.21})$$

où $V_c(r)$ est le terme de confinement, qui est en puissance de r , V_{gluon} est le terme d'échange d'un gluon, interaction de courte portée de type Coulombien, et V_{DS} représente les interactions dépendantes du spin. Le terme V_{DS} contient notamment le terme hyperfin, qui est une interaction de type spin-spin résultant de corrections relativistes, terme de couplage spin-orbite et le terme tensoriel. Parmi les potentiels les plus utilisés en physique des particules, nous pouvons citer :

– le potentiel de Yukawa [1, 17, 64, 65, 66] :

$$V(r) = -g^2 \frac{\exp(-mr)}{r}. \quad (\text{I.22})$$

En 1930, le physicien Hideki Yukawa montra qu'un tel potentiel provient de l'échange d'un champ scalaire massif tel que celui d'un pion de masse m . La particule médiatrice du champ possédant une masse, la force correspondante a une portée inversement proportionnelle à sa masse. Pour une masse nulle, le potentiel de Yukawa devient équivalent à un potentiel Coulombien, et sa portée est considérée comme infinie. Dans l'équation ci-dessus, le potentiel est négatif, ce qui indique que la force est attractive [1, 17]. Ce potentiel a longuement été utilisé pour obtenir les spectres de masse et constantes de désintégration des molécules de hadrons dimésoniques [64]. Cependant, il manque de prendre en compte une considération fondamentale de la QCD : le confinement des quarks. En outre, il ne permet pas d'évaluer la contribution

des mésons vecteurs aux masses nucléaires.

- le potentiel de Cornell [67]

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + br, \quad (\text{I.23})$$

où $-\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$ est le terme d'échange de gluons et br le terme de confinement linéaire, α_s la constante de couplage forte. Le potentiel de Cornell décrit le spectre de masse des hadrons avec une assez bonne approximation. Malheureusement, il ne prend pas en compte les effets de la QCD à haute énergie, qui peuvent être important pour les hadrons excités. Cependant il peut être amélioré en ajoutant les termes de confinement.

- Le potentiel harmonique singularisé ou potentiel de Cornell étendu [8, 9, 32, 33, 30]

$$V(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + cr + dr^2. \quad (\text{I.24})$$

Il s'agit d'une version améliorée du potentiel de Cornell. En effet, en plus des termes d'échange de gluons et de confinement linéaire, il comprend un terme de confinement quadratique, et un terme de barrière centrifuge dont la taille dépend généralement de la masse des quarks. Il prend en compte certains effets de la QCD à haute énergie, mais présente cependant quelques limites. Il ne dispose pas de paramètres continus pouvant rendre compte de certains effets de la QCD à haute énergie et pouvant être important pour les états excités des hadrons. En 2018, Al-Jamel a proposé une forme de ce potentiel avec une dépendance en l'énergie du système quark antiquark [32] :

$$V(r, E_{nl}) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{g}{r^2} + a(1 + \gamma E_{nl})r + (1 + 2\gamma E_{nl} + \gamma^2 E_{nl}^2)r^2 \quad (\text{I.25})$$

, où γ est le paramètre de la dépendance en l'énergie. Ce potentiel décrit avec un grand succès les états excités des quarkonia lourds mais est limité quand il s'agit de d'autres types de mésons, notamment ceux contenant un quark et un antiquark différent.

- Le potentiel de Martin [68] :

$$V(r) = -8.064 \text{ GeV} + 6.898 \text{ GeV} r^{0.1}, \quad (\text{I.26})$$

il comprend un terme de confinement en puissance 0.1 de r afin de reproduire au mieux les trajectoires de Regge dans un formalisme non relativiste, cependant il ne prend pas en compte un aspect crucial de la QCD, l'échange de gluon entre les quarks.

Dans la plupart des cas, les MQNR décrivent avec une assez bonne précision les propriétés des baryons et des mésons contenant des quarks lourds tels que les quarks c , t et b . Un des avantages des modèles de potentiels est que les états excités peuvent être étudiés via les MQNR. Par contre en QCD sur réseau et en règle de somme de la QCD, seul l'état fondamental ou dans certains cas exceptionnels quelques états excités peuvent être étudiés. Cependant, les MQNR semblent ne pas donner une bonne description des propriétés des hadrons constitués de quarks légers tels que les quarks u , d et s . Pour combler cette insuffisance, Capstick et al[69] ont suggéré que les MQNR devraient incorporer un minimum de principes de la relativité aux traitement des problèmes liés à l'étude des hadrons. L'introduction des défauts topologiques est donc une bonne alternative dans ce sens là. Par ailleurs, malgré le grand succès de ces modèles de potentiels non relativistes à décrire les propriétés des hadrons, il reste cependant plus raisonnable de traiter les quarks comme particules relativistes. Ainsi, dans une vision relativiste, et dans une série de travaux publiés au début des années 2000, Barros a proposé une idée selon laquelle les interactions non-gravitationnelles peuvent aussi se manifester à travers la structure de l'espace-temps. En appliquant sa théorie à l'interaction électromagnétique, Barros a pu décrire les propriétés de l'atome d'hydrogène avec un succès remarquable. Motivés par ce succès, et par la richesse des idées issues de la combinaison des principes de la mécanique quantique et ceux de la relativité générale, nous nous sommes proposés d'appliquer l'approche de Barros au cas de l'interaction forte, pour sonder la matière hadronique.

I.6 Approche de Celso Barros

La théorie de Barros est une approche récente qui consiste à construire les équations d'ondes quantiques relativistes en y insérant les principes de la relativité générale. En effet, le point de départ est une métrique de type Schwarzschild, dont les composantes sont habituellement données implicitement sous la forme

$$g_{tt} = \xi(r) \quad , \quad g_{rr} = \frac{1}{g_{tt}} = \frac{1}{\xi(r)} \quad , \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{I.27})$$

et prenant en compte deux considérations. La première considération consiste à prendre la métrique de Minkowski comme limite de la métrique de type Schwarzschild pour le cas des faibles potentiels, c'est-à-dire $\xi(r) = 1$ quand $V(r) = 0$. Dans la suite, nous allons présenter en détails l'approche de Barros, partant des coordonnées de Schwarzschild au opérateurs intervenant dans les équation d'ondes quantiques relativistes. La deuxième considération consiste à supposer que pour chaque théorie que l'on considère, la charge est la source de la courbure.

1.6.1 Opérateurs en coordonnées de Schwarzschild

Considérons une particule à l'intérieur d'un champ, qui peut être décrit par un potentiel $V(r)$. Les particules vont donc interagir avec les fluctuations du champ $\phi(x^\mu)$ sous-jacent. Dans une telle configuration, le champ va contribuer au contenu énergétique de l'espace-temps et la source du champ aura une certaine distribution, décrite par un tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ non-nul. Si nous considérons un système présentant une symétrie sphérique, avec un potentiel central $V(r)$ l'espace-temps peut être décrit par une métrique du type Schwarzschild dont la forme quadratique est donnée par [1, 13, 70, 71]

$$ds^2 = \xi(r)c^2 dt^2 - \frac{1}{\xi(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{I.28})$$

où $\xi(r)$ est la fonction courbure. C'est une fonction centrale qui décrit la façon dont le potentiel non-gravitationnel $V(r)$ affecte la courbure de l'espace-temps, pour une interaction indépendante du temps. La forme quadratique fondamentale ds^2 peut se mettre sous une forme plus compacte à savoir

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (\text{I.29})$$

Les coefficients $g_{\mu\nu}$ dans (I.29) sont les composantes covariantes du tenseur métrique. En représentation matricielle, les composantes covariantes et contravariantes de la métrique sont données par

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \xi(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\xi(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{I.30})$$

Les composantes contravariantes $g^{\mu\nu}$ du tenseur métrique sont obtenues à partir des composantes covariantes $g_{\mu\nu}$ en utilisant la relation

$$\sum_{\rho=0}^3 g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (\text{I.31})$$

δ_{μ}^{ν} étant le symbole de Kronecker. Les composantes contravariantes peuvent encore s'écrire sous la forme

$$g^{\mu\nu} = h_{\mu}^{-2} \eta^{\mu\nu}, \quad (\text{I.32})$$

où

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.33})$$

est la métrique de Minkowski, et les coefficients h_{μ} appelés coefficients métriques sont donnés par

$$h_0 = \sqrt{\xi(r)} \quad , \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{\xi(r)}} \quad , \quad h_2 = r \quad , \quad h_3 = r \sin \theta. \quad (\text{I.34})$$

Une des hypothèses est que dans une région où $V(r) = 0$ on doit retrouver la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques. Pour cela, il faut que $\sqrt{\xi(r)} = 1$ quand $V(r) = 0$. En se servant de ces définitions, nous pouvons exprimer les opérateurs

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \nabla_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^3 h_i^{-1} \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (\text{I.35})$$

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} = -i\hbar \left(\frac{\vec{u}_r}{h_1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_{\theta}}{h_2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{u}_{\varphi}}{h_3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (\text{I.36})$$

En utilisant les relations (I.34), l'opérateur impulsion peut se mettre sous la forme

$$\vec{p} = -i\hbar, \quad (\text{I.37})$$

qui dans une région où $V(r) = 0$ doit redonner l'opérateur impulsion habituel en coordonnées sphériques, soit

$$\vec{p} = -i\hbar \left[\vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{u}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]. \quad (\text{I.38})$$

Le principe de correspondance permet d'écrire l'opérateur énergie sous la forme

$$E = i\hbar \nabla_0 = i\hbar \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial t} = i\hbar \frac{1}{\sqrt{\xi(r)}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (\text{I.39})$$

et qui dans une région où $V(r) = 0$ se réduit à l'opérateur énergie habituel

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{I.40})$$

L'opérateur Laplacien quant à lui peut être calculé en utilisant la formule

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right], \quad (\text{I.41})$$

où les h_i sont donnés par l'équation (I.34), et ainsi le carré de l'opérateur impulsion peut se mettre sous la forme

$$\vec{p}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\sqrt{\xi(r)}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (\text{I.42})$$

On peut cependant remarquer que les composantes de l'opérateur impulsion définies par $p_r = -i\hbar \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r}$, $p_\theta = -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ et $p_\varphi = -\frac{i\hbar}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ne sont pas de bons opérateurs. En effet, en plus de ne pas être hermitiens, ces opérateurs ne commutent pas. Pour le couple (p_r, p_θ) par exemple, pour une fonction ψ au moins $\mathcal{C}^2(U \subseteq \mathcal{M})$ nous avons

$$\begin{aligned} [p_r, p_\theta] \psi &= \left[-i\hbar \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r}, -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \psi \\ &= -\hbar^2 \sqrt{\xi(r)} \left\{ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} \right\} \\ &= -i\hbar \frac{1}{r} \sqrt{\xi(r)} \left(-i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi \\ &= -i\hbar \frac{\sqrt{\xi(r)}}{r} p_\theta \psi \end{aligned}$$

c'est-à-dire $[p_r, p_\theta] = -i\hbar \frac{\sqrt{\xi(r)}}{r} p_\theta \neq 0$. Il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle définition qui prend en compte ces deux manquements du modèle. C'est ainsi que Barros a proposé une définition plus adaptée, que nous pouvons mettre sous la forme suivante [14, 15, 16]

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{D}, \quad (\text{I.43})$$

où $D = \sqrt{-g}$, avec $g = \det(g_{\mu\nu})$. À partir de cette définition on obtient

$$p_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right), \quad p_\theta = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \right), \quad p_\varphi = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (\text{I.44})$$

et les relations de commutation sont données par

$$[p_i, q^j] = -i\hbar \delta_i^j \quad (\text{I.45})$$

$$[p_i, p_j] = [q^i, q^j] = 0. \quad (\text{I.46})$$

Dans ce cas, on peut donc exprimer le Laplacien comme

$$\vec{\nabla}^2 = \left(p_r - \frac{i\hbar}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \xi \left(p_r - \frac{i\hbar}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 + \frac{3}{4} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}, \quad (\text{I.47})$$

qui dans le cas des faibles potentiels se réduit à

$$\vec{\nabla}^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2. \quad (\text{I.48})$$

1.6.2 Dynamique de Schwarzschild

Pour formuler les équations d'ondes quantiques, Barros a indiqué dans son approche qu'il est nécessaire de déterminer la forme explicite de la fonction courbure $\xi(r)$ ainsi que l'expression de l'énergie relativiste du système. Il est donc nécessaire de présenter brièvement la dynamique d'une particule dans un espace-temps de Schwarzschild et montrer notamment comment les quantités auxquelles nous nous intéressons peuvent être exprimées. Commençons par définir quelques grandeurs dynamiques telles que le temps propre et les quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion. Le temps est une notion essentielle pour décrire notre monde. Le temps qui passe permet de quantifier l'évolution et le mouvement des objets. À première vue on pourrait

penser que le temps est absolu, qu'il s'écoule toujours au même rythme avec une même horloge pour tout l'univers. Pourtant la réalité est toute autre. En effet, au début du 20e siècle en 1905 précisément, une découverte viens changer l'image que nous avons du temps jusqu'alors, c'est la relativité. En relativité le temps n'est plus absolu comme en physique Newtonienne, il est relatif. Chaque objet porte son propre temps, sa propre horloge et celle ci mesure le temps propre. Le temps propre est relié à l'intervalle d'espace-temps entre deux évènements¹¹ infiniment proches par la relation suivante :

$$d\tau = \frac{\sqrt{ds^2}}{c} \quad (\text{I.49})$$

qui compte tenu de (I.28) s'écrit

$$d\tau = dt \sqrt{\xi(r) - \frac{1}{\xi(r)}\beta_r^2 + r^2\beta_\Omega^2} = \frac{dt}{\gamma_s}, \quad (\text{I.50})$$

où $\Omega = (\theta, \varphi)$ est la variable angulaire et γ_s est le facteur de Lorentz associé à la métrique du type Schwarzschild, et est défini par

$$\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{\xi(r) - \frac{1}{\xi(r)}\beta_r^2 + r^2\beta_\Omega^2}}, \quad (\text{I.51})$$

β_r et β_Ω sont respectivement la partie radiale et la partie transversale de la vitesse $\vec{\beta}$. Elles sont définies par

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (\text{I.52})$$

$$\beta_r = \frac{dr}{dt}, \quad (\text{I.53})$$

$$\beta_\Omega = \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2}. \quad (\text{I.54})$$

De l'autre côté, le principe de moindre action permet d'écrire que

$$\begin{aligned} S &= \int L dt = -mc^2 \int ds \\ &= -mc^2 \int dt \sqrt{\xi(r) - \frac{1}{\xi(r)}\beta_r^2 + r^2\beta_\Omega^2}, \end{aligned} \quad (\text{I.55})$$

11. Les points de l'espace-temps sont encore appelés évènements

où m est la masse au repos de la particule. Le lagrangien du système peut s'exprimer comme suit

$$L = -mc^2 \sqrt{\xi(r) - \frac{1}{\xi(r)}\beta_r^2 + r^2\beta_\Omega^2} = -\frac{mc^2}{\gamma_s}. \quad (\text{I.56})$$

Le quadrivecteur énergie-impulsion p^μ de la métrique (I.28) est défini de la manière suivante

$$p^\mu = E_0\beta^\mu = E_0\gamma_s(1, \vec{\beta}) = (p^0, \vec{p}) \quad (\text{I.57})$$

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = \left(\xi(r)p^0, -\frac{1}{\xi(r)}p^1, -r^2p^2, -r^2\sin^2\theta p^3 \right), \quad (\text{I.58})$$

avec $E_0 = mc^2$. En utilisant l'équation des géodésiques, nous avons la relation ci-après pour la composante temporelle du quadrivecteur vitesse β^μ

$$\frac{d\beta^0}{dt} = -\Gamma_{\mu\nu}^0\beta^\mu\beta^\nu, \quad (\text{I.59})$$

ce qui donne pour la composante p^0 de p^μ

$$\gamma_s \frac{dp^0}{dt} = E_0\Gamma_{0\nu}^\sigma\beta_\sigma\beta^\nu = E_0(\Gamma_{00}^1\beta_1\beta^0 + \Gamma_{01}^0\beta_0\beta^1) = 0. \quad (\text{I.60})$$

L'énergie étant la composante temporelle du quadrivecteur énergie-impulsion, nous avons l'expression suivante de l'énergie pour la métrique (I.28)

$$E = p^0 = \xi(r)\gamma_s E_0 = \frac{mc^2\xi(r)}{\sqrt{\xi(r) - \frac{1}{\xi(r)}\beta_r^2 + r^2\beta_\Omega^2}}, \quad (\text{I.61})$$

qui est une intégrale première, donc une constante du mouvement en vertu de l'équation (I.60). Une autre quantité conservée est la composante $L_z = \frac{p_3}{c}$ du moment cinétique orbital \vec{L} . Dans le référentiel de la particule au repos, nous avons

$$p^\mu p_\mu = -E_0^2 = -m^2c^4, \quad (\text{I.62})$$

le quadrivecteur énergie-impulsion étant un invariant de Lorentz, sa norme est conservée dans l'espace-temps. Ainsi, nous pouvons écrire que

$$p^\mu p_\mu = \vec{p}^2 c^2 - \frac{E^2}{\xi(r)} = -m^2 c^4, \quad (\text{I.63})$$

et la formule de l'énergie relativiste s'obtient sous la forme

$$\frac{E^2}{\xi(r)} = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (\text{I.64})$$

I.7 Conclusion

Au terme de ce chapitre, où nous avons présenté la revue de la littérature sur les physique des particules subatomiques, nous nous sommes aperçu que chaque théorie des interactions fondamentales explique avec succès le comportement de la matière à travers la force qu'elle décrit. cependant, on note quelques manquements dans chacune de ces théories. La QCD décrit les hadrons comme des assemblages quarks et de gluons confinés mais dissimule cependant un secret assez embarrassant : elle ne donne aucune information sur le mécanisme par lequel ces quarks et gluons restent confinés dans les hadrons. Le modèle standard, malgré son remarquable succès à décrire toute la matière connue, n'inclut cependant pas la force de gravité et ne parvient donc pas à expliquer des phénomènes tels que la matière noire dans l'univers dont l'interaction serait purement gravitationnelle. La relativité générale quant à elle ne peut pas expliquer les phénomènes de l'infiniment petit. Elle est parfois limitée quand il s'agit d'expliquer des phénomènes de la nature où les principes de la mécanique quantique sont indispensables, et cette limite n'est nulle part plus évidente que dans les profondeurs d'un trou noir¹².

L'état de l'art sur les MQNR nous a permis de nous rendre compte que l'approche choisie peut être qualifiée de "dépendant du modèle" car on développe de paire la connaissance de la QCD (au travers le choix du potentiel) et du processus physique étudié. Ainsi des résultats théoriques ne reproduisant pas correctement les données expérimentales peuvent s'expliquer soit par une méconnaissance de la physique intervenant dans le processus (par exemple un mauvais opérateur de transition) ou encore une fonction d'onde incorrecte issue d'un potentiel manquant une propriété importante de la QCD. Il apparaît donc important de formuler dans

12. Un trou noir est une région de l'espace où la gravité est si intense que rien, pas même la lumière ne peut s'en échapper

la suite une approche mécanique quantique basée sur les principes de la relativité générale et vis versa. Parallèlement, il est question de proposer des modèle de potentiels qui s'inspirent au mieux de la QCD pour décrire efficacement les propriétés des particules sensibles à l'interaction forte, les hadrons.

MÉTHODOLOGIE

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le cadre théorique ainsi que les méthodes mathématiques utilisées pour étudier les propriétés des hadrons en présence des effets de la courbure et de la gravitation. Dans un premier temps, nous allons formuler les équations de la mécanique quantique en espace-temps courbes c'est-à-dire basées sur la relativité générale, et les résoudre en utilisant des méthodes analytiques précises. Pour le cas relativiste de Dirac, les effets quantiques seront introduit via un champ scalaire non-gravitationnel qui va affecter la structure de l'espace-temps et notamment sa courbure. À partir du champs scalaire et de la métrique donnée implicitement, nous construirons d'une part le tenseur d'Einstein et d'autre part le tenseur énergie-impulsion de la matière et du champ. Les équations d'Einstein ainsi obtenues seront résolues pour obtenir explicitement le tenseur métrique. À partir du tenseur métrique, nous allons pouvoir exprimer les opérateurs différentiels, construire l'équation relativiste de Dirac basée sur la relativité générale et la résoudre. De l'autre coté, nous aurons l'équation non relativiste de Schrödinger, où nous allons introduire les effets du champ gravitationnel à travers la métrique. Contrairement au cas relativiste, nous donnons explicitement l'expression de la métrique, à savoir celle d'un DTCC. À partir de la métrique, les opérateurs différentiels seront construits ainsi que l'équation de Schrödinger du système, qui sera par la suite résolue analytiquement. Enfin, à partir des équations dérivées de nos différentes approches, nous allons déduire quelques propriétés des hadrons.

II.2 Équation d'ondes quantique en espace-temps courbe

Contrairement à une bille qui possède une position définie, à l'échelle microscopique une particule n'a pas vraiment de position et sa présence est distribuée à travers l'espace avec plus ou moins de probabilités. Cette description des particules par des ondes de probabilités, est ce qu'on

appelle la mécanique quantique. La mécanique quantique permet de décrire l'évolution d'une particule au cours du temps. Mais cette description, aussi efficace soit-elle manque de prendre en compte les effets de la courbure. En effet, malgré la puissance de la théorie quantique et de la relativité générale à décrire l'Univers chacune à son échelle, il existe cependant des phénomènes que nous ne pouvons véritablement comprendre que si l'on dispose d'une théorie unique qui combine les principes de ces deux théories.

II.2.1 Fonction courbure de la métrique de type Schwarzschild

Dans cette partie, la source du champ qui est une masse pour le cas du champ gravitationnel, une charge électrique pour le cas du champ électromagnétique, sera dans notre cas une charge de couleur pour le cas du champ $\phi(x^\mu)$ associé à l'interaction forte. Dans cette sous section, afin de savoir comment notre potentiel non gravitationnel $V(r) = -g\phi(r)$ du type Yukawa affecte la structure de l'espace-temps, il est indispensable de connaître la forme explicite de la métrique du type Schwarzschild pour le potentiel de type Yukawa. Pour ce faire, considérons une particule évoluant dans un espace-temps courbé, muni de la métrique (I.28). Pour pouvoir déterminer explicitement la forme de la métrique, intéressons nous d'abord au membre de droite de l'équation d'Einstein (I.17), le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Il décrit le contenu énergétique du système considéré. Dans le cas d'un fluide parfait, nous avons vu au chapitre précédent que le tenseur énergie-impulsion prend une forme précise qu'on peut ramener à [71]

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (\text{II.1})$$

où p est la pression du fluide, ρ est la densité de matière et u^μ est la vitesse du fluide dans le continuum d'espace-temps. Dans le cas d'un flux d'énergie statique, nous avons $u_j = 0$, $u^t = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}}$ et $u_t = \sqrt{g_{tt}}$, et les composantes diagonales du tenseur énergie-impulsion s'écrivent

$$T_{tt} = g_{tt} u^t u_t (p + \rho) - pg_{tt} = \rho g_{tt}, \quad (\text{II.2})$$

$$T_{rr} = g_{rr} u^r u_r (p + \rho) - pg_{rr} = -pg_{rr}, \quad (\text{II.3})$$

$$T_{\theta\theta} = g_{\theta\theta} u^\theta u_\theta (p + \rho) - pg_{\theta\theta} = -pg_{\theta\theta} = pr^2, \quad (\text{II.4})$$

$$T_{\varphi\varphi} = g_{\varphi\varphi} u^\varphi u_\varphi (p + \rho) - pg_{\varphi\varphi} = pr^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{II.5})$$

$$(\text{II.6})$$

et la trace est donnée par

$$T_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g^{tt}T_{tt} + g^{rr}T_{rr} + g^{\theta\theta}T_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}T_{\varphi\varphi} = \rho - 3p. \quad (\text{II.7})$$

Les symboles de Christoffel non nuls de la métrique (I.17) sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{\Gamma_{\varphi\varphi}^r}{\sin^2\theta} = \frac{r}{g_{rr}} \quad , \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2g_{rr}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2g_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \quad , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin\theta \cos\theta \quad , \quad \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} &= \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \quad , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{r \sin^2\theta}{g_{rr}} = \sin^2\theta \Gamma_{\theta\theta}^r \quad , \quad \Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2g_{rr}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Ayant les symboles de Christoffel non nuls à la main, nous pouvons évaluer le membre de gauche de l'équation (I.17), notament le tenseur de Ricci (I.12) dont les composantes diagonales sont données par

$$R_{\mu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \Gamma_{\mu\mu}^{\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \quad (\text{II.9})$$

et qui peuvent explicitement se réécrire comme

$$R_{tt} = \frac{1}{2g_{rr}} \frac{\partial^2 g_{tt}}{\partial r^2} - \frac{1}{4g_{rr}g_{tt}} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{4g_{rr}g_{tt}} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) + \frac{1}{rg_{rr}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}, \quad (\text{II.10})$$

$$R_{rr} = \frac{1}{2g_{tt}} \frac{\partial^2 g_{tt}}{\partial r^2} - \frac{1}{4g_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \left(\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) - \frac{1}{rg_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}, \quad (\text{II.11})$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{g_{rr}} - \frac{r}{g_{rr}} \left(\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right), \quad (\text{II.12})$$

$$R_{\varphi\varphi} = \left[-\frac{r \sin^2\theta}{g_{rr}} \left(\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) - \frac{\sin^2\theta}{g_{rr}} + \sin^2\theta \right] = \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \quad (\text{II.13})$$

En considérant les équations d'Einstein (I.17) où nous avons remplacé la constante de Newton G par la constante de couplage de l'interaction forte α_s , nous pouvons écrire que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} \left(1 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \right) = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2 c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{II.14})$$

$$\implies R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\alpha_s}{m^2 c^4} T_{\mu\nu}, \quad (\text{II.15})$$

et la courbure scalaire qui s'obtient comme

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \frac{R_{tt}}{g_{tt}} + \frac{R_{rr}}{g_{rr}} + \frac{R_{\theta\theta}}{g_{\theta\theta}} + \frac{R_{\varphi\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = -\frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4}T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = -\frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4}T^\mu{}_\mu. \quad (\text{II.16})$$

Ce résultat permet de réécrire les équations d'Einstein sous la forme

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\mu{}_\mu \right), \quad (\text{II.17})$$

où $T^\mu{}_\mu$ est la trace du tenseur énergie-impulsion. L'équation (II.17) est explicité par le système des 4 équations non-linéaires suivant :

$$R_{tt} = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4} \left(T_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}T^\mu{}_\mu \right) = \frac{4\pi\alpha_s}{m^2c^4}(\rho + 3p)g_{tt}, \quad (\text{II.18})$$

$$R_{rr} = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4} \left(T_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}T^\mu{}_\mu \right) = -\frac{4\pi\alpha_s}{m^2c^4}(\rho - p)g_{rr}, \quad (\text{II.19})$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4} \left(T_{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}T^\mu{}_\mu \right) = \frac{4\pi\alpha_s}{m^2c^4}(\rho - p)r^2, \quad (\text{II.20})$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4} \left(T_{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}T^\mu{}_\mu \right) \sin^2\theta = \frac{4\pi\alpha_s}{m^2c^4}(\rho - p)r^2 \sin^2\theta. \quad (\text{II.21})$$

En égalant chaque composante du tenseur de Ricci dans (II.10)-(II.13) à son expression dans (II.18)-(II.21), les équations d'Einstein à résoudre s'écrivent

$$\frac{1}{2g_{tt}} \frac{\partial^2 g_{tt}}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{2g_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{1}{2g_{tt}} \right)^2 \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) + \frac{1}{rg_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = \frac{4\pi\alpha_s}{m^2c^4}(\rho + 3p)g_{rr}, \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{1}{2g_{tt}} \frac{\partial^2 g_{tt}}{\partial r^2} - \frac{1}{4g_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \left(\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) - \frac{1}{rg_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = -\frac{4\pi\alpha_s}{m^2c^4}(\rho - p)g_{rr}, \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{1}{2rg_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{1}{2rg_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} - \frac{g_{rr}}{r^2} = \frac{4\pi\alpha_s}{m^2c^4}(\rho - p)g_{rr}. \quad (\text{II.24})$$

En calculant la différence (II.22)-(II.23) on obtient :

$$\left[\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right] = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4}(\rho + p)rg_{rr}. \quad (\text{II.25})$$

Par ailleurs, l'équation (II.24) permet d'écrire que

$$\left[\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right] = \frac{2}{r} - \frac{2g_{rr}}{r} + \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4}(\rho - p)rg_{rr}. \quad (\text{II.26})$$

En additionnant membre à membre les équations (II.25) et (II.26) et sachant que $g_{rr} = -\frac{1}{g_{tt}}$, on obtient l'équation

$$\frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + g_{tt} \right) = \frac{1}{r^2} - \frac{8\pi\alpha_s}{m^2 c^4} \rho. \quad (\text{II.27})$$

Après intégration, la solution s'obtient sous la forme

$$g_{tt} = \frac{1}{r} \int_0^r \left(1 - \frac{8\pi\alpha_s}{m^2 c^4} r'^2 \rho \right) dr' = 1 - \frac{2\alpha_s}{m^2 c^4 r} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr', \quad (\text{II.28})$$

que l'on met sous la forme simplifiée suivante

$$g_{tt} = \xi(r) = 1 - \frac{2\alpha_s}{m^2 c^4 r} M(r) \quad , \quad M(r) = M_0 + \int_{r_s}^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr', \quad (\text{II.29})$$

où M_0 est une constante d'intégration et r_s est le rayon de Schwarzschild. Dans l'équation (II.29), le domaine d'intégration a été séparé en deux régions : la région interne $0 \leq r' \leq r_s$ et la région externe $r_s \leq r' \leq r$ à l'horizon des événements.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'évolution d'une particule dans un espace-temps courbé par la présence d'un champ fort de type Yukawa dont la forme est donnée par [1]

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{\alpha_s}{4\pi}} \frac{(a + b \exp(-\mu r))}{r}, \quad (\text{II.30})$$

où a, b sont des constantes arbitraires et μ est la masse au repos de la particule médiatrice de l'interaction associée au champ scalaire $\phi(r)$. Le potentiel de type Yukawa associé au champ fort ϕ peut s'écrire sous la forme [1]

$$V(r) = -g\phi(r) = -\frac{\alpha_s}{r} (a + b \exp(-\mu r)), \quad (\text{II.31})$$

g étant la constante de couplage au champ scalaire ϕ . Via un choix convenable des paramètres, on peut retrouver les expressions du potentiel d'interaction précédemment utilisé dans des travaux basés sur l'approche de Barros [1, 13, 17]. L'expression de la densité d'énergie ρ du boson médiateur de l'interaction forte, s'obtient comme la densité Hamiltonienne du champ scalaire de

type Yukawa qui lui est associé [1, 77] :

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\nabla} \phi \right)^2 + \mu^2 \phi^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \right)^2 + \mu^2 \phi^2 \right]. \quad (\text{II.32})$$

Compte tenu de l'équation (II.30), la densité Hamiltonienne ρ peut se mettre sous la forme explicite suivante :

$$\rho = \frac{\alpha_s}{8\pi} \left\{ \left(\frac{2b^2 \mu^2}{r^2} + \frac{2b^2 \mu}{r^3} + \frac{b^2}{r^4} \right) e^{-2\mu r} + \left(\frac{2ab}{r^4} + \frac{2ab\mu}{r^3} + \frac{2ab\mu^2}{r^2} \right) e^{-\mu r} + \left(\frac{a^2}{r^4} + \frac{a^2 \mu^2}{r^2} \right) \right\}. \quad (\text{II.33})$$

l'équation (II.33) est une généralisation des expressions de la densité d'énergie obtenues dans les références [13, 17]. En effet, en posant $a = \alpha Z$, α étant la constante de structure fine et $b = \mu = 0$, nous retrouvons l'expression de la densité d'énergie obtenue dans la référence [13], et en posant $a = 0$, $b = 1$ et $\mu \neq 0$, retrouvons l'expression de la densité d'énergie obtenue dans la référence [17]. En évaluant l'intégrale (II.29) par parties ayant remplacé $\rho(r)$ par (II.33), on obtient après simplifications

$$\xi(r) = 1 - \frac{2\chi}{r} + \left(\frac{\alpha_s b}{mc^2} \right)^2 (1 + \mu r) \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} + \frac{2ab\alpha_s^2}{m^2 c^4} (1 + \mu r) \frac{e^{-\mu r}}{r^2} + \left(\frac{\alpha_s a}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{1}{r^2} - \mu^2 \right), \quad (\text{II.34})$$

où χ est un paramètre ayant la dimension d'une longueur. Il est important de mentionner que ces expressions sont obtenues dans la limite des faibles distances ($\mu r \ll 1$). En regardant de près l'équation (II.34), il est possible de la ramener à la forme

$$\xi(r) = \left(1 - \frac{\eta}{r} \right)^2 = 1 - \frac{2\eta}{r} + \frac{\eta^2}{r^2}, \quad (\text{II.35})$$

où η est à déterminer. En comparant les équations (II.34) et (II.35) terme à terme, l'expression de η s'obtient sous la forme

$$\eta = \chi = \sqrt{\left(\frac{\alpha_s a}{mc^2} \right)^2 + \frac{2ab\alpha_s^2}{m^2 c^4} (1 + \mu r) e^{-\mu r} + \left(\frac{\alpha_s b}{mc^2} \right)^2 (1 + \mu r) e^{-2\mu r}}. \quad (\text{II.36})$$

Ainsi, la fonction de courbure $\xi(r)$ de la métrique de type Schwarzschild pour le potentiel (II.31)

de type Yukawa est donnée par

$$\xi(r) = g_{tt} = \left[1 - \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\alpha_s a}{mc^2}\right)^2 + \frac{2ab\alpha_s^2}{m^2 c^4} (1 + \mu r)e^{-\mu r} + \left(\frac{\alpha_s b}{mc^2}\right)^2 (1 + \mu r)e^{-2\mu r}} \right]^2, \quad (\text{II.37})$$

et sa racine carré,

$$\sqrt{\xi(r)} = \left(1 - \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\alpha_s a}{mc^2}\right)^2 + \frac{2ab\alpha_s^2}{m^2 c^4} (1 + \mu r)e^{-\mu r} + \left(\frac{\alpha_s b}{mc^2}\right)^2 (1 + \mu r)e^{-2\mu r}} \right), \quad (\text{II.38})$$

qui donne l'expression suivante dans la limite des faibles distances

$$\sqrt{\xi(r)} \approx 1 + \frac{b^2 \mu \alpha_s}{2mc^2} - \frac{(a+b)\alpha_s}{mc^2 r}. \quad (\text{II.39})$$

La fonction courbure de ce travail est obtenue sous une forme plus générale que celles obtenues dans les travaux précédents. En effet, via un choix convenable des paramètres du potentiel, on retrouve les expressions de la fonction courbure obtenues dans les références [13, 17]. Maintenant que nous avons l'expression explicite de toutes les composantes de la métrique, nous sommes désormais en mesure d'établir les équations d'ondes quantiques relativistes dans un espace-temps courbé, muni d'une métrique du type Schwarzschild et les résoudre afin de décrire le comportement des particules subatomiques dans un tel espace-temps.

II.2.2 Équation Dirac

Pour une particule massive de spin 1/2 se déplaçant dans un espace-temps courbe doté de la métrique (I.28), il est tout à fait possible d'établir une équation d'onde relativiste en appliquant le principe de correspondance au Hamiltonien de Dirac associé à la particule [1, 66, 78, 79]. Celui-ci est donné par [1, 13, 17, 66, 78, 79]

$$H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}c + \beta mc^2, \quad (\text{II.40})$$

avec $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{e}_i$ où $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ et β sont les matrices 4×4 de Dirac définies par

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.41})$$

où \mathbb{I} est la matrice unité 2×2 et $\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \vec{e}_i$, où σ_i sont les matrices 2×2 de Pauli données par :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.42})$$

Maintenant, en utilisant le principe de correspondance, puis en appliquant le Hamiltonien de Dirac (II.40) sur un bi-spineur à 4 composantes¹ $\Psi(\vec{r}, t)$, nous obtenons l'équation de Dirac généralisée suivante [1, 13, 14] :

$$\frac{i\hbar}{\sqrt{\xi(r)}} \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left\{ -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{Sch} + \beta mc^2 \right\} \Psi(\vec{r}, t). \quad (\text{II.43})$$

Le potentiel $V(r)$ décrivant l'interaction forte entre les quarks d'un hadron, intervient dans l'équation (II.43) à travers la fonction courbure $\xi(r)$ de la métrique de Schwarzschild. Dans ce qui suit, nous cherchons une solution de l'équation (II.43) de la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right). \quad (\text{II.44})$$

En remplaçant (II.44) dans (II.43), et après simplification, on obtient l'équation suivante

$$\left\{ -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{Sch} + \beta mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \right\} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (\text{II.45})$$

En utilisant un peu d'algèbre, on peut facilement montrer que le terme cinétique $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{Sch}$ associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami pour la métrique du type Schwarzschild peut se mettre sous la forme [1, 16, 17, 80, 81, 82] :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{Sch} = \frac{\xi(r)}{r} \vec{\alpha} \cdot \vec{r} \left\{ \sqrt{\xi(r)} r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^r \left(\frac{\alpha^\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\alpha^\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right\}, \quad (\text{II.46})$$

où $\sqrt{\xi(r)}$ est donné par l'équation (II.39). En tenant compte de l'équation (II.46), l'équation (II.45) devient :

$$\left\{ -i\hbar c \alpha_r \left(\sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{\hbar r} \right) + \beta mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \right\} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (\text{II.47})$$

1. Deux composantes pour chaque spineur de Pauli qui le constitue

À ce stade, il convient d'écrire la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$ en fonction du spineur supérieur $\Sigma(\vec{r})$ et du spineur inférieur $\Xi(\vec{r})$ comme suit [1, 80, 81, 82] :

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \Sigma(\vec{r}) \\ \Xi(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(r)\Omega_k^\mu(\theta, \varphi) \\ iG(r)\Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.48})$$

où $F(r)$ et $G(r)$ sont des fonctions arbitraires de r et les $\Omega_{\pm k}^\mu$ sont les spineurs sphériques [80, 81, 82]. Ces spineurs peuvent être décomposés sur la base des harmoniques sphériques de la manière suivante

$$\Omega_{\pm k}^\mu(\theta, \varphi) = \sum_{m=-1/2}^{+1/2} C\left(l, \frac{1}{2}, j; \mu - m, m\right) Y_l^{\mu-m}(\theta, \varphi) \chi^m, \quad k = j + \frac{1}{2} \quad (\text{II.49})$$

où $C(l, \frac{1}{2}, j; \mu - m, m)$ et χ^m représentent respectivement les coefficients de Clebsh-Gordan et les spineurs de Pauli. De plus, afin d'utiliser les propriétés du spineur sphérique de manière simple, nous introduisons l'opérateur \hat{K} défini par

$$\hat{K} = \hbar\mathcal{K} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \quad (\text{II.50})$$

qui satisfait l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\hat{K}\Omega_k^\mu(\theta, \varphi) = -\hbar k\Omega_k^\mu(\theta, \varphi), \quad k = j + \frac{1}{2}. \quad (\text{II.51})$$

Ensuite, en tenant compte de l'équation (II.48) et des définitions des matrices de Dirac β et $\alpha_r = \alpha_1$, l'équation (II.47) prend la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} & -ic\sigma_1 \left(\hbar\sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{K} - \hbar\mathcal{K}}{r} \right) \\ -ic\sigma_1 \left(\hbar\sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{K} - \hbar\mathcal{K}}{r} \right) & -mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(r)\Omega_k^\mu(\theta, \varphi) \\ iG(r)\Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.52})$$

d'où l'on peut déduire le système suivant de deux équations différentielles couplées

$$\left(mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \right) F(r)\Omega_k^\mu(\theta, \varphi) + c\sigma_1 \left\{ \hbar\sqrt{\xi(r)} \frac{dG(r)}{dr} \Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) - G(r) \frac{\hat{K} - \hbar\mathcal{K}}{r} \Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) \right\} = 0 \quad (\text{II.53})$$

$$c\sigma_1 \left\{ \hbar\sqrt{\xi(r)} \frac{dF(r)}{dr} \Omega_k^\mu(\theta, \varphi) - F(r) \frac{\hat{K} - \hbar\mathcal{K}}{r} \Omega_k^\mu(\theta, \varphi) \right\} + \left(mc^2 + \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \right) G(r)\Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) = 0 \quad (\text{II.54})$$

En utilisant l'équation (II.51) avec l'identité $\sigma_1 \Omega_k^\mu(\theta, \varphi) = -\Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi)$, et après réarrangement et simplifications, les équations (II.53)-(II.54) deviennent

$$\sqrt{\xi(r)} \frac{dG(r)}{dr} + (1-k) \frac{G(r)}{r} = -\frac{1}{\hbar c} \left(\frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} - mc^2 \right) F(r), \quad (\text{II.55})$$

$$\sqrt{\xi(r)} \frac{dF(r)}{dr} + (1+k) \frac{F(r)}{r} = -\frac{1}{\hbar c} \left(\frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} + mc^2 \right) G(r). \quad (\text{II.56})$$

Les solutions de ces équations doivent se comporter à grande distances comme des fonctions exponentielles et à faible distances comme des polynômes, pour ainsi assurer une convergence aux frontières. Ainsi, nous recherchons des solutions du type

$$F(X) = X^s \sum_{n=0}^N a_n X^n e^{-X} \quad , \quad (a_0 \neq 0), \quad (\text{II.57})$$

$$G(X) = X^s \sum_{n=0}^N b_n X^n e^{-X} \quad , \quad (b_0 \neq 0), \quad (\text{II.58})$$

qui sont des séries de Frobenius, avec $X = \frac{\delta}{\hbar c} r$. Leurs dérivées premières sont respectivement obtenues sous la forme

$$\frac{dF(X)}{dX} = \sum_{n=0}^N a_n [(n+s)X^{n+s-1} - X^{n+s}] e^{-X}, \quad (\text{II.59})$$

$$\frac{dG(X)}{dX} = \sum_{n=0}^N b_n [(n+s)X^{n+s-1} - X^{n+s}] e^{-X}. \quad (\text{II.60})$$

En insérant les équations (II.57)-(II.60) et (II.39) dans les équations (II.55)-(II.56), après simplification et réarrangement nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{E - mc^2 \Lambda}{\delta} a_n - \Lambda^2 b_n \right\} X^n + \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{mc^2 \omega}{\hbar c} a_n + \left[(n+s)\Lambda^2 + (1-k)\Lambda + \frac{2\Lambda\delta\omega}{\hbar c} \right] b_n \right\} X^{n-1} \\ & - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{2\Lambda\delta(n+s)\omega}{\hbar c} + \left(\frac{\delta\omega}{\hbar c} \right)^2 + \frac{\delta(1-k)\omega}{\hbar c} \right\} b_n X^{n-2} + \sum_{n=0}^N \frac{\delta^2 \omega^2 (n+s)}{\hbar^2 c^2} b_n X^{n-3} = (\text{II.61}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{E + mc^2 \Lambda}{\delta} b_n + \Lambda^2 a_n \right\} X^n + \sum_{n=0}^N \left\{ \left[(n+s)\Lambda^2 + (1+k)\Lambda + \frac{2\Lambda\delta\omega}{\hbar c} \right] a_n + \frac{mc^2 \omega}{\hbar c} b_n \right\} X^{n-1} \\ & - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{2\Lambda\delta(n+s)\omega}{\hbar c} + \left(\frac{\delta\omega}{\hbar c} \right)^2 + \frac{\delta(1+k)\omega}{\hbar c} \right\} a_n X^{n-2} + \sum_{n=0}^N \frac{\delta^2 \omega^2}{\hbar^2 c^2} (n+s) a_n X^{n-3} = (\text{II.62}) \end{aligned}$$

où $\Lambda = 1 + \frac{b^2 \mu \alpha_s}{2mc^2}$ et $\omega = \frac{(a+b)\alpha_s}{mc^2}$. En regroupant les termes d'une même puissance de X , puis égalisant chaque coefficient de puissance à zéro, et après quelques manipulations, nous pouvons déduire les relations de récurrence suivantes

$$\frac{E - mc^2 \Lambda}{\delta} a_n = \Lambda^2 b_n \quad (\text{II.63})$$

$$\frac{mc^2 \omega}{\hbar c} b_n = - \left[n\Lambda^2 + (1+k)\Lambda + \frac{2\Lambda\delta\omega}{\hbar c} \right] a_n, \quad (\text{II.64})$$

pour l'équation (II.61), puis pour l'équation (II.62) nous avons

$$\frac{E + mc^2 \Lambda}{\delta} b_n = -\Lambda^2 a_n \quad (\text{II.65})$$

$$\frac{mc^2 \omega}{\hbar c} a_n = - \left[n\Lambda^2 + (1-k)\Lambda + \frac{2\Lambda\delta\omega}{\hbar c} \right] b_n, \quad (\text{II.66})$$

avec $\delta = \frac{\sqrt{m^2 c^4 \Lambda^2 - E^2}}{\Lambda^2}$. En éliminant les coefficients a_n et b_n dans les équations (II.63)-(II.64) ainsi que dans les équations (II.65)-(II.66) puis en additionnant les relations obtenues terme à terme, on obtient

$$\frac{2\omega}{\hbar c} \delta^2 + (n\Lambda + 1)\delta - \frac{m^2 c^4 \omega}{\hbar c \Lambda^2} = 0. \quad (\text{II.67})$$

Cette équation admet deux solutions réelles données par

$$\delta_{\pm} = -\frac{\hbar mc^3}{4(a+b)\alpha_s} (n\Lambda + 1) \pm \frac{mc^2}{2\Lambda} \sqrt{\frac{\Lambda^2}{4(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + 2}. \quad (\text{II.68})$$

Par ailleurs, nous avons

$$\delta = \frac{\sqrt{m^2 c^4 \Lambda^2 - E^2}}{\Lambda^2}. \quad (\text{II.69})$$

En comparant les équations (II.68) et (II.69) sachant que δ est positif, on en déduit que

$$E^2 = m^2 c^4 \left[\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{(\hbar c)^2 \Lambda^4}{8(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + \frac{\hbar c \Lambda^3 (n\Lambda + 1)}{4(a+b)\alpha_s} \sqrt{\frac{(\hbar c)^2 \Lambda^2}{4(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + 2} \right]. \quad (\text{II.70})$$

En considérant les solutions positives, les valeurs propres d'énergie sont alors

$$E_n = mc^2 \left[\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{(\hbar c)^2 \Lambda^4}{8(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + \frac{\hbar c \Lambda^3 (n\Lambda + 1)}{4(a+b) \alpha_s} \sqrt{\frac{(\hbar c)^2 \Lambda^2}{4(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + 2} \right]^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2 \quad (\text{II.71})$$

II.2.3 Métrique et opérateurs dans un espace-temps à corde cosmique

Ici aucun calcul ne sera nécessaire sur les coefficients métrique car ils sont donnés de façon explicite. Dans le système local de coordonnées ($x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$), l'élément de longueur qui décrit un DTCC est donné par [6, 8, 9]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + [\chi d\theta + \alpha r \sin \theta d\varphi]^2, \quad (\text{II.72})$$

où $0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi$, et $0 < \alpha < 1, \alpha = 1 - 4J$ est le paramètre topologique de la corde cosmique, $\chi = \frac{4GJ}{c^3}$ est le paramètre de torsion [9, 83] et J représente la densité linéaire de masse de la corde cosmique. Nous savons d'après la relativité générale que $J \in [0, 1]$ [8, 9, 83, 84]. En effet, pour $\alpha \rightarrow 1$ et la torsion $\chi \rightarrow 0$, la variété \mathcal{M} se réduit à l'espace de Minkowski en coordonnées sphériques. La direction de la corde cosmique est choisie orienté suivant l'axe Oz , occasionnant ainsi une brisure de la symétrie sphérique et par conséquent l'invariance par rotation est brisée. Cette brisure de symétrie entrainera des effets étonnants sur les spectres des hadrons comme nous le verons dans la suite et plus en détail au chapitre III. Le mécanisme de brisure de symétrie est à la base même de la formation du défaut topologique en question. Pour plus de détails sur le sujet, le lecteur pourra se référer à [8, 9, 85, 86] et aux références à l'intérieur. Ainsi, le tenseur métrique de l'espace-temps décrit par (II.72) et son inverse sont donnés respectivement par :

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^2 + r^2 & \chi \alpha r \sin \theta \\ 0 & 0 & \chi \alpha r \sin \theta & \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & -\frac{\chi}{\alpha r^3 \sin \theta} \\ 0 & 0 & -\frac{\chi}{\alpha r^3 \sin \theta} & \frac{\chi^2 + r^2}{\alpha^2 r^4 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{II.73})$$

où la métrique de l'espace euclidien tridimensionnel interne et est donnée par :

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2 + r^2 & \chi\alpha r \sin \theta \\ 0 & \chi\alpha r \sin \theta & \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{II.74})$$

Dans la limite des faibles valeurs du paramètre de torsion χ , l'opérateur ∇ et l'opérateur de Laplace-Beltrami dans le système de coordonnées locales peuvent respectivement s'exprimer comme :

$$\vec{\nabla} = \sum_{k=1}^3 \nabla_k = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (\text{II.75})$$

$$\Delta_{LB} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{and} \quad g = \det(g_{ij}) = \alpha^2 r^4 \sin^2 \theta, \quad (\text{II.76})$$

qui compte tenu de la condition $\chi \ll 1$, s'écrivent explicitement :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{\alpha r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi, \quad (\text{II.77})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{LB} &= \frac{1}{\sqrt{r^4 \alpha^2 \sin^2 \theta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha r^2 \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\alpha^2 r^2 \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{r^4 \alpha^2 \sin^2 \theta}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\alpha r^2 \sin \theta}{\alpha^2 r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right] + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

Nous sommes désormais en mesure d'écrire l'équation de Schrödinger pour une particule évoluant dans un espace-temps à corde cosmique.

II.2.4 Équation de Schrödinger

Dans cette partie, nous allons d'abord présenter brièvement quelques méthodes de résolution analytique de l'équation de Schrödinger, que nous utiliserons ensuite pour obtenir les solutions de l'équation non relativiste de Schrödinger dans l'espace à corde cosmique et dans l'espace-

fractionnaire. Nous utiliserons la méthode de Nikiforov-Uvarov étendue pour la résolution de l'équation de Schrödinger dans l'espace à corde cosmique. La méthode d'itération asymptotique fractionnaire conformable développée sera utilisée pour résoudre l'équation de Schrödinger dans l'espace fractionnaire.

II.2.4.1 Méthodes de Nikiforov-Uvarov étendue

La méthode de Nikiforov-Uvarov (MNU) [8, 47, 87] est une méthode bien connue dans la littérature, et qui permet de trouver les solutions des équations de type Schrödinger pour différents potentiels. La méthode Nikiforov-Uvarov étendue (MNUE) est une extension de la MNU [87]. Dans cette partie, nous présentons brièvement les bases de la MNUE. Pour plus de détails sur la MNU et sa version étendue, on peut se référer à [8, 47, 88, 89, 90]. De manière terre à terre, cette méthode permet de résoudre les équations différentielles du second ordre de la forme

$$\psi''(r) + \frac{\bar{\tau}(r)}{\sigma(r)}\psi'(r) + \frac{\bar{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)}\psi(r) = 0, \quad (\text{II.79})$$

où $\bar{\tau}(r)$, $\sigma(r)$ et $\bar{\sigma}(r)$ sont des polynômes, au plus du deuxième, troisième et quatrième degré respectivement. Pour obtenir la solution particulière de l'équation (II.79), on utilise la transformation suivante

$$\psi(r) = \phi(r)Y(r), \quad (\text{II.80})$$

qui réduit l'équation (II.79) à une équation du type hypergéométrique,

$$Y''(r) + \left(2\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} + \frac{\bar{\tau}(r)}{\sigma(r)}\right)Y'(r) + \left(\frac{\phi''(r)}{\phi(r)} + \frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\frac{\bar{\tau}(r)}{\sigma(r)} + \frac{\bar{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)}\right)Y(r) = 0. \quad (\text{II.81})$$

L'équation ci-dessus peut se mettre sous une forme plus simple, notament [87, 88],

$$Y''(r) + \frac{\tau(r)}{\sigma(r)}Y'(r) + \frac{h(r)}{\sigma(r)}Y(r) = 0. \quad (\text{II.82})$$

La fonction ϕ dans l'équation (II.81) et la fonction h dans l'équation (II.82) satisfont respectivement les équations suivantes,

$$\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} = \frac{\pi(r)}{\sigma(r)}, \quad (\text{II.83})$$

$$h(r) = \pi'(r) + G(r), \quad (\text{II.84})$$

$Y(r)$ étant la solution de l'équation hypergéométrique. Les solutions polynomiales de la fonction $Y(r)$ satisfont la formule de type Rodrigues [88, 89, 90]

$$Y_n(r) = \frac{B_n}{\rho(r)} \frac{d^n}{dr^n} [\sigma^n(r)\rho(r)], \quad (\text{II.85})$$

où $\rho(r)$ est la fonction poids et B_n est la constante de normalisation. La fonction poids doit satisfaire la condition

$$(\sigma(r)\rho(r))' = \tau(r)\rho(r), \quad (\text{II.86})$$

la fonction $\tau(r)$ étant définie comme

$$\tau(r) = \bar{\tau}(r) + 2\pi(r). \quad (\text{II.87})$$

La MNUE nécessite deux fonctions notées $\pi(r)$ et $G(r)$ définies comme

$$\pi(r) = \left(\frac{\sigma'(r) - \bar{\tau}(r)}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(r) - \bar{\tau}(r)}{2} \right)^2 - \bar{\sigma}(r) + G(r)\sigma(r)}. \quad (\text{II.88})$$

Par conséquent, la fonction $\pi(r)$ est un polynôme du second degré, et sur cette base nous devons avoir $G(r)$ sous la forme

$$G(r) = Ar + B, \quad (\text{II.89})$$

où A et B sont des constantes à déterminer en fonction des paramètres du problème. La fonction $h_n(r)$ requise pour cette méthode est déterminée à partir de la relation suivante

$$h_n(r) = -\frac{n}{2}\tau'(r) - \frac{n(n-1)}{6}\sigma''(r) + C_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.90})$$

où C_n est une constante à déterminer. De l'égalité entre les équations (II.84) et (II.90) nous obtenons l'équation des valeurs propres de l'énergie.

II.2.4.2 Méthode d'itération asymptotique fractionnaire conformable

La méthode d'itération asymptotique fractionnaire conformable a été développée pour la toute première fois dans le cadre de cette thèse. Pour formuler la méthode classique d'itération asymptotique [91] dans le domaine fractionnaire, nous avons fait recours à quelques outils du calcul fractionnaire, pour pouvoir exprimer les opérateurs différentiels dans l'espace fractionnaire. La motivation derrière le choix du domaine fractionnaire pour la méthode d'itération asymptotique est due au fait que l'effet du paramètre fractionnaire dans l'espace plat, est similaire à celui que produirait le champ gravitationnel d'un défaut topologique dans l'espace courbe. Dans la littérature, il existe plusieurs définitions du concept de dérivée fractionnaire [30]. Parmi celles-ci, nous pouvons citer la définition de Riemann-Liouville, la formulation de Grunwald-Letnikovs, les dérivées fractionnaires de Caputo et de Riesz. La définition de Caputo [30, 92] est la plus intéressante en sciences appliquées car elle permet de manipuler facilement les conditions aux limites et initiales. Afin de redéfinir les dérivées fractionnaires en utilisant des noyaux exponentiels lisses non singuliers, Caputo et Fabrizio [30, 92] ont proposé une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire de la forme

$$D_t^\nu \psi(t) = \frac{M(\nu)}{(1-\nu)} \int_{t_0}^t \exp\left[-\frac{\nu(t-y)}{1-\nu}\right] \dot{\psi}(y) dy, \quad (\text{II.91})$$

où $M(\nu)$ est une fonction de normalisation vérifiant $M(0) = M(1) = 1$. Récemment, le concept de dérivée fractionnaire conformable a été proposé par Khalil [30, 93]. Bien que sa définition ne soit pas rigoureusement établie du point de vue des mathématiques (Non violation de la règle de Leibniz), la dérivée fractionnaire conformable offre une alternative intéressante et plus simple à certaines dérivées fractionnaires traditionnelles, surtout pour des problèmes mathématiques simples ou des applications où la règle de Leibniz est nécessaire. Elle permet de bénéficier des avantages des dérivées fractionnaires tout en maintenant une certaine simplicité dans les calculs. Pour une fonction donnée $\psi(t)$, la dérivée fractionnaire conformable d'ordre ν est donnée par

$$D_t^\nu \psi(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(t - \epsilon t^{1-\nu}) - \psi(t)}{\epsilon}, \quad 0 < t \quad (\text{II.92})$$

$$\psi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(t), \quad (\text{II.93})$$

et donc,

$$D^\nu [\psi_{nl}(t^\nu)] = t^{1-\nu} \psi_{nl}(t^\nu), \quad (\text{II.94})$$

$$D^\nu [D^\nu \psi_{nl}(t^\nu)] = (1 - \nu) t^{1-2\nu} \psi'_{nl}(t^\nu) + t^{2-2\nu} \psi''_{nl}(t^\nu), \quad (\text{II.95})$$

avec $0 < \nu \leq 1$. Cette formulation est très simple et fournit une extension naturelle de la dérivée classique à l'ordre non entier. De plus, l'opérateur différentiel fractionnaire conformable est linéaire et satisfait les propriétés de la dérivée classique telles que la dérivée d'un produit et du quotient de deux fonctions [94].

La méthode d'itération asymptotique [91, 95] est une technique principalement utilisée en physique quantique pour obtenir les énergies propres des équations de type Schrödinger. Cette méthode résout analytiquement et approximativement les problèmes de valeurs propres résultant des équations différentielles linéaires du second ordre, qui apparaissent généralement en physique théorique et mathématique. Dans cette partie, l'objectif est de généraliser la méthode d'itération asymptotique, dans le cadre du calcul fractionnaire conformable, ce qui n'a jamais été fait dans les précédentes études. À cette fin, on considère l'équation différentielle fractionnaire conformable de la forme [30, 95]

$$D^\nu [D^\nu y(r)] = \lambda_0(r) D^\nu [y(r)] + s_0(r) y(r), \quad (\text{II.96})$$

où $\lambda_0(r)$ et $s_0(r)$ sont des fonctions différentiables avec $\lambda_0 \neq 0$. En utilisant les propriétés clés de la dérivée fractionnaire conformable, et après quelques manipulations, l'équation (II.96) devient :

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} = \left[\frac{\lambda_0(r)}{r^{1-\nu}} - \frac{1-\nu}{r} \right] \frac{dy(r)}{dr} + \frac{s_0(r)}{r^{2-2\nu}} y(r). \quad (\text{II.97})$$

En introduisant les fonctions généralisées suivantes

$$\lambda_0^f(r) = \left[\frac{\lambda_0(r)}{r^{1-\nu}} - \frac{1-\nu}{r} \right], \quad s_0^f(r) = \frac{s_0(r)}{r^{2-2\nu}} \quad (\text{II.98})$$

nous pouvons réécrire l'équation (II.97) sous la forme :

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} = \lambda_0^f(r) \frac{dy(r)}{dr} + s_0^f(r) y(r), \quad (\text{II.99})$$

où l'indice f fait référence au domaine fractionnaire. La solution générale de l'équation (II.99) a la forme :

$$y(r) = \exp \left[- \int_0^r \alpha_f(r_1) dr_1 \left(C_2 + C_1 \int_0^r \exp \left(\int_0^{r_1} (\lambda_0^f(r_2) + 2\alpha_f(r_2)) dr_2 \right) dr_1 \right) \right]. \quad (\text{II.100})$$

Etant donné les relations de récurrence sur les fonctions de coefficients $\lambda_k^f(r)$ et $s_k^f(r)$,

$$\begin{aligned} \lambda_k^f(r) &= \frac{d}{dr} \lambda_{k-1}^f(r) + s_{k-1}^f(r) + \lambda_0^f(r) \lambda_{k-1}^f(r) \\ s_k^f(r) &= \frac{d}{dr} s_{k-1}^f(r) + s_0^f(r) \lambda_{k-1}^f(r) \end{aligned} \quad (\text{II.101})$$

et pour une valeur suffisamment grande du nombre d'itérations k , la condition de terminaison peut s'écrire [30] :

$$\Delta_k(r) = \lambda_k^f(r) s_{k-1}^f(r) - \lambda_{k-1}^f(r) s_k^f(r) = 0 \quad (\text{II.102})$$

avec

$$\alpha_f(r) = \frac{s_k^f(r)}{\lambda_k^f(r)} = \frac{s_{k-1}^f(r)}{\lambda_{k-1}^f(r)}. \quad (\text{II.103})$$

II.2.4.3 Solution dans l'espace-temps à corde cosmique

L'opérateur de Laplace-Beltrami introduit dans la section précédente permet d'écrire l'opérateur Hamiltonien en unités naturelles ($\hbar = c = 1$), qui dans l'espace-temps à corde cosmique peut se mettre sous la forme :

$$H = -\frac{1}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + V(r, \theta, \varphi), \quad (\text{II.104})$$

où $M = m_q m_{\bar{q}} / (m_q + m_{\bar{q}})$ est la masse réduite du of the méson, m_q et $m_{\bar{q}}$ sont respectivement la masse du quark et de l'antiquark [54]. L'équation de Schrödinger pour une particule évoluant dans un espace-temps à corde cosmique est donc donnée par [10, 83]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{II.105})$$

Dans le cas non relativiste de Schrödinger, nous considérons des états liés de deux particules, un quark et un antiquark interagissant avec le potentiel

$$V(r) = -\frac{K}{r} + ar + \frac{g}{r^2} + br^2 \quad (\text{II.106})$$

qui est une forme étendue du potentiel de Cornell [8, 30, 32, 96]. Le premier terme est un potentiel de type Coulombien décrivant le processus d'échange de gluon entre le quark et son antiquark [96], le second terme est un potentiel linéaire de confinement. La partie additionnelle a été ajoutée pour améliorer les propriétés de confinement du système quark-antiquark (voir [8, 30, 32, 96, 97]). Dans la littérature, le potentiel de Cornell étendu a été largement utilisé par de nombreux auteurs. Il peut être obtenu via un développement de Taylor du potentiel de Yukawa, typique des interactions fortes. Pour plus de détails, on peut consulter la référence [98] et les références à l'intérieur. En cherchant la fonction d'onde Ψ sous la forme

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{\psi_{nl}(r)}{r} H_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi) e^{-iE_{nl}t}, \quad (\text{II.107})$$

et en remplaçant (II.107) dans (II.105) on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \frac{\psi_{nl}(r)}{r} H_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi) \quad (\text{II.108})$$

$$+ V(r) \frac{\psi_{nl}(r)}{r} H_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi) = E_{nl} \frac{\psi_{nl}(r)}{r} H_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi). \quad (\text{II.109})$$

À partir de la séparation des variables, nous obtenons le système d'équations différentielles du second ordre ci-après,

$$\frac{d^2 \psi_{nl}(r)}{dr^2} + \left[-\frac{2M}{\hbar^2} V(r) + \frac{2M}{\hbar^2} E_{nl} - \frac{\delta}{r^2} \right] \psi_{nl}(r) = 0, \quad (\text{II.110})$$

$$\frac{d^2 H_l^m(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dH_l^m(\theta)}{d\theta} + \left[\delta - \frac{m^2}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \right] H_l^m(\theta) = 0, \quad (\text{II.111})$$

$$\frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi_m(\varphi) = 0, \quad (\text{II.112})$$

où δ et m^2 sont les constantes de séparation. On peut facilement trouver la solution de l'équation (II.112) à partir de la condition aux limites de périodique suivante : $\Phi_m(\varphi + 2\pi) = \Phi_m(\varphi)$,

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{II.113})$$

Pour trouver les solutions de l'équation (II.111), nous introduisons la variable $\eta = \cos \theta$, qui transforme l'équation (II.111) en

$$\frac{d^2 H_l^m(\eta)}{d\eta^2} - \frac{2\eta}{(1-\eta^2)} \frac{dH_l^m(\eta)}{d\eta} + \left[\delta - \frac{m^2}{\alpha^2(1-\eta^2)} \right] H_l^m(\eta) = 0. \quad (\text{II.114})$$

Pour obtenir des solutions convenables de l'équation (II.114), il est donc nécessaire d'analyser le comportement des solutions autour de points singuliers, à savoir $\eta = \pm 1$. On suppose alors la forme suivante pour la solution

$$H_l^m(\eta) = (1-\eta^2)^{\frac{m}{2\alpha}} g_l(\eta), \quad (\text{II.115})$$

où la fonction $g_l(\eta)$ est analytique partout excepté à $\eta \rightarrow \pm\infty$, et ne s'annule pas en $\eta = \pm 1$. À partir des équations (II.114) et (II.115), et en introduisant les nombres quantiques généralisés suivants $l_{(\alpha)}, m_{(\alpha)} = \frac{m}{\alpha}$ issus de la géométrie de l'espace à cordes cosmiques, on obtient l'équation suivante :

$$(1-\eta^2) \frac{d^2 g_{l_{(\alpha)}}(\eta)}{d\eta^2} - 2(m_{(\alpha)} + 1)\eta \frac{dg_{l_{(\alpha)}}(\eta)}{d\eta} - \left[m_{(\alpha)}^2 + m_{(\alpha)} - \delta \right] g_{l_{(\alpha)}}(\eta). \quad (\text{II.116})$$

À partir du développement en séries de $g_{l_{(\alpha)}}(\eta)$, l'équation (II.116) nous fournit la relation de récurrence ci-après :

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1) + 2(m_{(\alpha)} + 1)n - \delta + m_{(\alpha)}(m_{(\alpha)} + 1)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (\text{II.117})$$

où $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Pour des solutions physiquement acceptables, la série doit être tronquée à une certaine valeur de n . Ainsi, nous avons

$$n(n-1) + m_{(\alpha)}(m_{(\alpha)} + 1) + 2(m_{(\alpha)} + 1)n - \delta = 0. \quad (\text{II.118})$$

La résolution de l'équation (II.118) par rapport à δ donne :

$$\delta = l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1) \quad \text{avec} \quad l_{(\alpha)} = m_{(\alpha)} + n, \quad (\text{II.119})$$

$l_{(\alpha)}$ étant le nombre quantique généralisé du moment angulaire orbital. Contrairement à la limite classique, les nombres quantiques généralisés $l_{(\alpha)}$ et $m_{(\alpha)}$ ne sont pas toujours des entiers, $l_{(\alpha)} = m_{(\alpha)} + n = \frac{m}{\alpha} + n = l - (1 - \frac{1}{\alpha}) m$, où $l = 0, 1, 2, \dots$. Ayant déterminé la constante de séparation δ , l'équation (II.114) peut alors prendre la forme :

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 H_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta)}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dH_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta)}{d\eta} + \left[l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1) - \frac{[m_{(\alpha)}]^2}{(1 - \eta^2)} \right] H_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta). \quad (\text{II.120})$$

Notons que l'équation (II.114) est l'équation de Legendre généralisée au cas des espaces-temps à cordes cosmiques et $H_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta)$ sont les polynômes de Legendre généralisés, donnés par la formule [8, 9] :

$$H_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta) = P_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta) = \frac{(-1)^{l_{(\alpha)}}}{2^{l_{(\alpha)}} l_{(\alpha)}!} (1 - \eta)^{\frac{m_{(\alpha)}}{2}} \frac{d^{l_{(\alpha)} + m_{(\alpha)}}}{d\eta^{l_{(\alpha)} + m_{(\alpha)}}} \left[(1 - \eta^2)^{l_{(\alpha)}} \right]. \quad (\text{II.121})$$

Passons maintenant à la partie radiale de l'équation de Schrödinger, que nous allons résoudre à l'aide de la MNUE. En effet, en remplaçant le potentiel proposé dans l'équation (II.110) et en choisissant la constante de séparation $\delta = l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1)$, l'équation radiale devient

$$\frac{d^2 \psi_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2} [-2Mg - l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1) + 2MKr + 2M(E_{nl} - d)r^2 - 2Mar^3 - 2Mbr^4] \psi_{nl}(r) = (\text{II.122})$$

que nous mettons sous une forme plus simple en introduisant les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1) + 2Mg, & \xi_1 &= 2MK, & \xi_2 &= 2M(E_{nl} - d), \\ \xi_3 &= 2Ma, & \xi_4 &= 2Mb. \end{aligned} \quad (\text{II.123})$$

Les fonctions requises pour la mise en oeuvre de la MNUE sont données par [9] :

$$\bar{\tau}(r) = 0, \quad (\text{II.124})$$

$$\sigma(r) = r^2, \quad (\text{II.125})$$

$$\bar{\sigma}(r) = -\xi_0 + \xi_1 r + \xi_2 r^2 - \xi_3 r^3 - \xi_4 r^4. \quad (\text{II.126})$$

La fonction $\pi(r)$ quant à elle peut s'obtenir sous la forme

$$\pi(r) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4} - \xi_1 r - \xi_2 r^2 + \xi_3 r^3 + \xi_4 r^4 + rG(r)}. \quad (\text{II.127})$$

En supposant que le terme sous la racine carré de l'expression ci-dessus devient quadratique, la fonction $\pi(r)$ prend la forme

$$\pi(r) = \frac{1}{2} \pm (\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2). \quad (\text{II.128})$$

Choisissons la fonction $G(r)$ sous la forme $G(r) = Ar + B$. Par comparaison entre l'équation (II.127) et l'équation (II.128), nous obtenons les quatre ensembles de solutions suivants pour les inconnues $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, A$ et B en termes des paramètres du problème :

$$\begin{array}{l} \text{I :} \\ \text{II :} \\ \text{III :} \\ \text{IV :} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \sqrt{\xi_4} \\ \alpha_1 = \frac{\xi_3}{2\sqrt{\xi_4}} \\ \alpha_0 = \sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ A = \xi_2 + \frac{[\xi_3]^2}{4\sqrt{\xi_4}} + 2\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ B = \xi_1 + \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_4}}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = -\sqrt{\xi_4} \\ \alpha_1 = -\frac{\xi_3}{2\sqrt{\xi_4}} \\ \alpha_0 = \sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ A = \xi_2 + \frac{[\xi_3]^2}{4\sqrt{\xi_4}} - 2\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ B = \xi_1 - \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_4}}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \sqrt{\xi_4} \\ \alpha_1 = \frac{\xi_3}{2\sqrt{\xi_4}} \\ \alpha_0 = -\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ A = \xi_2 + \frac{[\xi_3]^2}{4\sqrt{\xi_4}} - 2\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ B = \xi_1 - \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_4}}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = -\sqrt{\xi_4} \\ \alpha_1 = -\frac{\xi_3}{2\sqrt{\xi_4}} \\ \alpha_0 = -\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ A = \xi_2 + \frac{[\xi_3]^2}{4\sqrt{\xi_4}} + 2\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ B = \xi_1 + \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_4}}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \end{array} \right. \quad (\text{II.129})$$

Ainsi, nous obtenons deux solutions pour la fonction $\phi(r)$ de Nikiforov-Uvarov, qui sont données par :

$$\phi_{\pm}(r) = K_{\pm} r^{\frac{1}{2} \mp \alpha_0} \exp\left(\pm \frac{1}{2}(\alpha_2 r^2 + 2\alpha_1 r)\right), \quad (\text{II.130})$$

et qui sera physiquement acceptable si $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$ et $\alpha_0 > 0$. De cette façon, l'ensemble II de paramètres est celui qui convient dans la détermination des valeurs propres et des fonctions propres du problème. Comme les fonctions $h(r)$ et $h_n(r)$ doivent être égales, l'équation de

l'énergie s'obtient comme

$$Ar + B \pm (2\alpha_2 r + \alpha_1) = C_n - n [\pm(2\alpha_2 r + \alpha_1)], \quad (\text{II.131})$$

où C_n est une constante d'intégration qui couple les paramètres du potentiel. L'équation (II.131) nous amène à considérer deux choix distincts à savoir ++ et --, qui sont donnés par **I** et **II** ainsi qu'il suit

$$\mathbf{I} : \begin{cases} 2\alpha_2 + A = -2n\alpha_2 \\ B + \alpha_1 = C_n - n\alpha_1 \end{cases} \quad \mathbf{II} : \begin{cases} -2\alpha_2 + A = 2n\alpha_2 \\ B - \alpha_1 = C_n + n\alpha_1 \end{cases}. \quad (\text{II.132})$$

Le choix de -- et de l'ensemble **II** des paramètres fournit la relation $A + 2(n+1)\alpha_2 = 0$ à partir de laquelle on peut écrire :

$$\frac{4\xi_4\xi_2 + [\xi_3]^2 - 4\xi_4\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0+1}}{4\xi_4} = 2(n+1)\sqrt{\xi_4}. \quad (\text{II.133})$$

En utilisant les équations (II.123) et (II.129), on obtient l'expression ci-dessous :

$$E_{nlm} = -\frac{a^2}{4b} + 2\sqrt{\frac{2b}{M}} \left(2(n+1) + 2\sqrt{2Mg + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right). \quad (\text{II.134})$$

Comme attendu, la résolution directe par la MNUE, donne une énergie sous la forme d'une fonction affine du nombre quantique principal n comme dans les référence [8, 32, 97] et les références à l'intérieur. Or il existe dans la littérature une approximation qui améliore la prise en compte de l'effet du potentiel de Coulomb. Cette approximation est basée sur une transformation qui permet d'obtenir des résultats sous la forme $E = A/(2n+1+B)^2$. Pour plus de détails, voir la références [60] et ses références. Nous notons que la présence du paramètre de corde cosmique α lève la dégénérescence des états avec $l \neq 0$. Lorsque $\alpha \rightarrow 1$ et $d \rightarrow 0$, on retrouve les résultats obtenus dans [32, 97]. De plus, pour $\alpha \rightarrow 1$, $d \rightarrow 0$, $a = 0$ et $g = 0$ on obtient le spectre d'énergie d'un oscillateur harmonique quantique sphérique [32].

Passons maintenant à l'expression de la fonction d'onde, $\psi_{nl}(r) = \phi(r)Y_n(r)$ où ϕ a été déterminé comme $\phi(r) = r^{\frac{1}{2}+\alpha_0} e^{\frac{1}{2}(\alpha_2 r^2 + 2\alpha_1 r)}$. Des solutions physiquement acceptables sont obtenues

en utilisant l'ensemble II de paramètres,

$$\phi(r) = K_+ r^{\frac{1}{2} + \sqrt{l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)}+1) + 2Mg + \frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2Mb}r^2 + \frac{2Ma}{\sqrt{2Mb}}r)} \quad (\text{II.135})$$

. De l'autre côté, à partir de l'équation (II.82) nous pouvons écrire que

$$r \frac{d^2 Y(r)}{dr^2} + [1 \pm 2(\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2)] \frac{dY(r)}{dr} + [\pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 r) + Ar + B] Y(r) = 0. \quad (\text{II.136})$$

En utilisant les relations $A = -2(n+1)\alpha_2$ et $B = C_n + (n+1)\alpha_1$, l'équation (II.136) devient

$$r \frac{d^2 Y(r)}{dr^2} + [1 \pm 2(\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2)] \frac{dY(r)}{dr} + [\pm(-n\alpha_1 - 2n\alpha_2 r)] Y(r) = 0. \quad (\text{II.137})$$

En utilisant le changement de variables $z = (\xi_4)^{\frac{1}{4}} r$, l'équation (II.137) avec le signe " + " devient

$$z \frac{d^2 Y(z)}{dz^2} + \left[1 + 2\alpha_0 + 2\alpha_1 \xi_4^{-\frac{1}{4}} z - 2z \right] \frac{dY(z)}{dz} + \left[2nz - n\alpha_1 \xi_4^{-\frac{1}{4}} \right] Y(z) = 0. \quad (\text{II.138})$$

Cette équation est équivalente à l'équation bi-confluente de Heun [32, 99, 100] dont la forme générale est

$$z \frac{d^2 Y(z)}{dz^2} + (1 + c - \beta z - 2z^2) \frac{dY(z)}{dz} + \left[(\gamma - c - 2)z - \frac{1}{2} [\delta + (1 + c)\beta] \right] Y(z) = 0. \quad (\text{II.139})$$

La comparaison des équations (II.138) et (II.139) donne les expressions suivantes :

$$c = 2\alpha_0 = 2l_{(\alpha)} + 1, \quad (\text{II.140})$$

$$\beta = -2\alpha_1 \xi_4^{-\frac{1}{4}} = (2M)^{-\frac{1}{4}} ab^{-\frac{3}{4}}, \quad (\text{II.141})$$

$$\gamma = 2n + 2 + c = 2n + 2 + 2l_{(\alpha)} + 1, \quad (\text{II.142})$$

$$\delta = -\beta(1 + c) + 2n\alpha_1 \xi_4^{-\frac{1}{4}} = (2M)^{-\frac{1}{4}} ab^{-\frac{3}{4}} [n + 2 + 2l_{(\alpha)}]. \quad (\text{II.143})$$

D'après la technique de développement en séries de puissances, il existe une solution polynomiale $N_{nl}(c, \beta, \gamma, \delta, z)$ de degré n (voir [32, 99, 100]) si et seulement si $\gamma - c - 2 = 2n$. Cette

condition est déjà remplie pour le cas présent. On peut alors écrire la solution sous la forme :

$$Y_{nl}(r) = N_{nl}(c, \beta, \gamma, \delta, r) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+c)A_k}{\Gamma(1+c+k)} \frac{(\sqrt[4]{\xi_4}r)^k}{k!}, \quad (\text{II.144})$$

les trois premiers coefficients du développement en série étant donnés par $A_0 = 1$, $A_1 = \frac{1}{2}[\delta + \beta(1+c)]$ et $A_2 = \left(\frac{1}{4\sqrt{2b}}\right) - 4(2l_{(\alpha)} + 1)\sqrt[4]{2b}$. Pour les détails des calculs, on peut se référer aux travaux de Caruso [99]. En utilisant les expressions des paramètres et la substitution $R_{nl}(r) = \frac{1}{r}\psi_{nl}(r)$, nous obtenons la fonction d'onde radiale dans l'espace-temps de la corde cosmique comme

$$R_{nl}(r) = N_n r^{l(\alpha)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2Mbr^2} + \frac{2Ma}{\sqrt{2Mb}}r\right)\right] \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+c)A_k}{\Gamma(1+c+k)} \frac{(\sqrt[4]{\xi_4}r)^k}{k!}, \quad (\text{II.145})$$

où N_n est la constante de normalisation.

II.2.4.4 Solution dans l'espace fractionnaire conformable

De même que dans le cas des espaces-temps à défauts topologiques, nous allons résoudre l'équation de Schrödinger en absence de courbure c'est-à-dire dans un espace plat, mais en tenant compte des effets mémoire. La résolution de l'équation sera faite par la méthode d'itération asymptotique, qui est généralisée pour la toute première fois au domaine fractionnaire conformable, ce qui constitue l'un des grands accomplissements de cette thèse. Ainsi, nous considérons un état lié d'un quark q et d'un antiquark \bar{q} interagissant avec le potentiel phénoménologique étendu de Cornell. L'équation radiale de Schrödinger dans l'espace tridimensionnel est :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2\mu\left(E_{nl} - ar^2 - br + \frac{c}{r} - \frac{d}{r^2}\right)\right]\psi_{nl}(r) = 0. \quad (\text{II.146})$$

En substituant $\psi_{nl}(r) = \frac{R_{nl}(r)}{r}$ par son expression dans (II.146) on obtient

$$\frac{d^2 R_{nl}(r)}{dr^2} + \left[-\frac{\xi^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \epsilon_{nl} - a_1 r^2 - b_1 r + \frac{c_1}{r}\right] R_{nl}(r) = 0 \quad (\text{II.147})$$

où $\xi = \frac{\sqrt{(2l+1)^2 + 4d_1}}{2}$, $d_1 = 2\mu d$, $a_1 = 2\mu a$, $c_1 = 2\mu c$, $\epsilon_{nl} = 2\mu E_{nl}$. Ensuite, la transition vers le domaine fractionnaire conformable donne l'équation de Schrödinger fractionnaire conformable

suivante

$$D^\nu [D^\nu R_{nl}(r)] + \left[-\frac{\xi^2 - \frac{1}{4}}{r^{2\nu}} + \epsilon_{nl} - a_1 r^{2\nu} - b_1 r^\nu + \frac{c_1}{r^\nu} \right] R_{nl}(r) = 0, \quad (\text{II.148})$$

où ν est l'ordre de la dérivée fractionnaire, et le potentiel $V(r)$ a été remplacé sa version fractionnaire conformable [30]

$$V(r^\nu) = ar^{2\nu} + br^\nu - \frac{c}{r^\nu} + \frac{d}{r^{2\nu}}. \quad (\text{II.149})$$

En utilisant la définition de l'opérateur de dérivation fractionnaire conformable, l'équation (II.148) devient :

$$\frac{d^2 R_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{1-\nu}{r} \frac{dR_{nl}(r)}{dr} + \left[-\frac{\xi^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \epsilon_{nl} r^{2\nu-2} - a_1 r^{4\nu-2} - b_1 r^{3\nu-2} + \frac{c_1}{r^{2-\nu}} \right] R_{nl}(r) = 0 \quad (\text{II.150})$$

Pour se débarrasser du terme de dérivé première, on fait la substitution $R_{nl}(r) = r^{\frac{\nu-1}{2}} \Phi_{nl}(r)$, qui transforme l'équation (II.150) en :

$$\frac{d^2 \Phi_{nl}(r)}{dr^2} + \left[-\frac{\xi^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \epsilon_{nl} r^{2\nu-2} - a_1 r^{4\nu-2} - b_1 r^{3\nu-2} + \frac{c_1}{r^{2-\nu}} \right] \Phi_{nl}(r) = 0. \quad (\text{II.151})$$

De plus, nous faisons l'ansatz suivant pour la fonction d'onde fractionnaire $\Phi_{nl}(r)$ comme

$$\Phi_{nl}(r) = r^{(\xi + \frac{1}{2})\nu} \exp[-\alpha r^{2\nu} - \beta r^\nu] f(r), \quad (\text{II.152})$$

qui traduit bien le comportement d'une fonction d'onde physiquement acceptable à grande et à petite distance. Les paramètres α et β sont des constantes positives réelles dont les valeurs peuvent être fixées à partir des paramètres du potentiel. Ainsi, en insérant l'équation (II.152) dans l'équation (II.151), on obtient :

$$\begin{aligned} r \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left[2\nu \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - 4\alpha\nu r^{2\nu} - 2\beta\nu r^\nu \right] \frac{df(r)}{dr} + \frac{\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \left(\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \right) - \xi^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{\nu-1}{2} \right)^2}{r} f(r) \\ + \left\{ \left[\epsilon_{nl} + \beta^2 \nu^2 - 4\alpha\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - 2\alpha\nu(2\nu-1) \right] r^{2\nu-1} + \left[c_1 - \beta\nu(\nu-1) - 2\beta\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right] r^{\nu-1} \right\} f(r) \\ + \left[(4\alpha^2 \nu^2 - a_1) r^{4\nu-1} + (4\alpha\beta\nu^2 - b_1) r^{3\nu-1} \right] f(r) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.153})$$

D'après la méthode d'itération asymptotique, on considère que pour l'état fondamental $f(r) = 1$ (voir [30, 91] et leurs références), et l'équation (II.153) se réduit à

$$\frac{\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \left(\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}\right) - \xi^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2}{r} + (4\alpha^2\nu^2 - a_1) r^{4\nu-1} + (4\alpha\beta\nu^2 - b_1) r^{3\nu-1} + \left[\epsilon_{nl} + \beta^2\nu^2 - 4\alpha\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2}\right) - 2\alpha\nu(2\nu - 1)\right] r^{2\nu-1} + \left[c_1 - \beta\nu(\nu - 1) - 2\beta\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right] r^{\nu-1} \quad (\text{II.154})$$

En égalant chaque coefficient de r^ν à zéro dans l'équation (II.154), on obtient les relations suivantes

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{a_1}{4}} = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\mu a}{2}} \\ \beta = \frac{b_1}{4\alpha\nu^2} = \frac{\mu b}{\sqrt{2\mu a}} \\ \epsilon_{0l} = -\beta^2\nu^2 + 4\alpha\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2}\right) + 2\alpha\nu(2\nu - 1) \\ c_1 = \beta\nu(\nu - 1) + 2\beta\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2}\right). \end{cases} \quad (\text{II.155})$$

Ensuite, en utilisant l'équation (II.155), l'énergie de l'état fondamental est obtenue comme suit :

$$E_{0l} = \sqrt{\frac{a}{2\mu}} \left[3\nu - 1 + \sqrt{(2l + 1)^2 + 8\mu d}\right] - \frac{b^2}{4a}. \quad (\text{II.156})$$

À partir de l'équation (II.155) on peut également obtenir la contrainte suivante sur le paramètre c :

$$c_{0l} = \frac{b}{2\sqrt{2\mu a}} \left[2\nu - 1 + \nu\sqrt{(2l + 1)^2 + 8\mu d}\right]. \quad (\text{II.157})$$

Pour déterminer la formule complète de l'énergie du système, nous étudions le comportement asymptotique de l'équation (II.153) c'est-à-dire pour $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$. En utilisant la condition donnée par l'équation (II.154), on peut écrire l'équation (II.153) sous la forme

$$r \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left[\nu(2\xi + 1) - 2\beta\nu r^\nu - 4\alpha\nu r^{2\nu}\right] \frac{df(r)}{dr} + \delta\epsilon_{nl} r^\nu f(r) = 0 \quad (\text{II.158})$$

où $\delta\epsilon_{nl} = \epsilon_{nl} - \epsilon_{0l}$. Maintenant, nous déterminons les solutions de l'équation (II.153) dans la limite des grandes valeurs de r . Comme $r \rightarrow \infty$, nous avons :

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left[\frac{\nu(2\xi + 1)}{r} - 2\beta\nu r^{\nu-1} - 4\alpha\nu r^{2\nu-1}\right] \frac{df(r)}{dr} + \delta\epsilon_{nl} r^{\nu-1} f(r) = 0. \quad (\text{II.159})$$

En comparant l'équation (II.159) à l'équation (II.99) et en se servant des relations de récurrence données par l'équation (II.101), les expressions suivantes sont obtenues

$$\begin{aligned}
\lambda_0^f(r) &= 2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1} \quad , \quad s_0^f(r) = -\delta\epsilon_{nl} r^{2\nu-2}, \\
\lambda_1^f(r) &= 2\beta\nu(\nu-1)r^{\nu-2} + 4\alpha\nu(2\nu-1)r^{2\nu-2} - \delta\epsilon_{nl} r^{2\nu-2} + (2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})^2, \\
s_1^f(r) &= -(2\nu-2)\delta\epsilon_{nl} r^{2\nu-3} - (2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1}) \delta\epsilon_{nl} r^{2\nu-2}, \\
\lambda_2^f(r) &= 2\beta\nu(\nu-1)(\nu-2)r^{\nu-3} + 4\alpha\nu(2\nu-1)(2\nu-2)r^{2\nu-3} - (\nu-1)\delta\epsilon_{nl} r^{\nu-2} - (\nu-1)\delta\epsilon_{nl} r^{\nu-2}(2\beta\nu r^{\nu-1}, \\
&\quad + 4\alpha\nu r^{2\nu-1}) \{12\alpha\nu(2\nu-1)r^{2\nu-2} + 6\beta\nu(\nu-1)r^{\nu-2} - 2\delta\epsilon_{nl} r^{\nu-1} + (2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})^2\}, \\
s_2^f(r) &= -\delta\epsilon_{nl} r^{\nu-1} [8\alpha\nu(2\nu-1)r^{2\nu-2} + 4\beta\nu(\nu-1)r^{\nu-2} - \delta\epsilon_{nl} r^{\nu-1} + (2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})^2], \\
&\quad - (\nu-1)(\nu-2)\delta\epsilon_{nl} r^{\nu-3} - (\nu-1)\delta\epsilon_{nl}(2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})r^{\nu-2}.
\end{aligned} \tag{II.160}$$

La substitution des relations ci-dessus dans l'équation (II.102) nous donne

$$\lambda_1^f(r)s_0^f(r) - \lambda_0^f(r)s_1^f(r) = 0 \quad , \quad \delta\epsilon_{1l} = 4\alpha\nu, \tag{II.161}$$

$$\lambda_2^f(r)s_1^f(r) - \lambda_1^f(r)s_2^f(r) = 0 \quad , \quad \delta\epsilon_{2l} = 8\alpha\nu, \tag{II.162}$$

et ainsi de suite. À partir des relations ci-dessus, l'équation suivante peut être dérivée :

$$\delta\epsilon_{nl} = 4n\alpha\nu \quad , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{II.163}$$

Par ailleurs, nous déterminons les solutions de l'équation (II.153) dans la limite des petites valeurs de r . Comme nous avons supposé que la distance interquark r est suffisamment petite, nous pouvons négliger les termes en $(r^\nu)^2$ c'est-à-dire $r^{2\nu}$. Par conséquent, l'équation (II.153) se réduit à :

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left[\frac{\nu(2\zeta + 1)}{r} - 2\beta\nu r^{\nu-1} \right] \frac{df(r)}{dr} + \delta\epsilon_{nl} r^{\nu-1} f(r) = 0. \tag{II.164}$$

En suivant la même procédure que dans le cas de $r \rightarrow \infty$, on compare l'équation (II.164) à l'équation (II.99), et en utilisant la relation de récurrence donnée par l'équation (II.101), on ob-

tient :

$$\begin{aligned}
\lambda_0^f(r) &= 2\beta\nu r^{\nu-1} - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r}, \quad s_0^f(r) = -\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1}, \\
\lambda_1^f(r) &= \frac{\nu(2\zeta+1)}{r^2} + 2\beta\nu(\nu-1)r^{\nu-2} - \delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} + \left[2\beta\nu - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r}\right]^2, \\
s_1^f(r) &= -\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} \left[\frac{\nu-1}{r} + 2\beta\nu - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r}\right], \\
\lambda_2^f(r) &= -\frac{2\nu(2\zeta+1)}{r^3} + 2\beta\nu(\nu-1)(\nu-2)r^{\nu-3} + \left(2\beta\nu r^{\nu-1} - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r}\right) \\
&\quad \times \left[\frac{3\nu(2\zeta+1)}{r^2} - 2\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} + \left(2\beta\nu r^{\nu-1} - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r}\right)^2\right], \\
s_2^f(r) &= -\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} \left[\frac{2\nu(2\zeta+1)}{r^2} - 2\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} + \left(2\beta\nu r^{\nu-1} - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{II.165}$$

D'après les expressions obtenues ci-dessus, la condition de terminaison ne peut pas être résolue de manière exacte. Il faut donc trouver la solution de l'équation $\lambda_0^f(r) = 0$ soit $r = \left[\frac{\zeta+\frac{1}{2}}{\beta}\right]^{1/\nu}$. Cette valeur correspond au minimum du potentiel. En utilisant l'équation (II.101), on obtient

$$\lambda_1^f(r)s_0^f(r) - \lambda_0^f(r)s_1^f(r) = 0, \quad \delta\epsilon_{1l} = 2\beta\nu^2 \left[\frac{\beta}{\zeta+\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{\nu}}, \tag{II.166}$$

$$\lambda_2^f(r)s_1^f(r) - \lambda_1^f(r)s_2^f(r) = 0, \quad \delta\epsilon_{2l} = 4\beta\nu^2 \left[\frac{\beta}{\zeta+\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{\nu}}, \tag{II.167}$$

et ainsi de suite. Enfin, les expressions ci-dessus permettent d'obtenir

$$\delta\epsilon_{nl} = \frac{2n\nu^2\beta^{\frac{\nu+1}{\nu}}}{\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{II.168}$$

En combinant les équations (II.163) et (II.168), l'équation complète de l'énergie du système est obtenue comme suit

$$\delta\epsilon_{nl} = \epsilon_{nl} - \epsilon_{0l} = 4n\alpha\nu + \frac{2n\nu^2\beta^{\frac{\nu+1}{\nu}}}{\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}}, \tag{II.169}$$

et ensuite les valeurs propres d'énergie sont données par

$$E_{nl} = \sqrt{\frac{a}{2\mu}} \left[2n + 3\nu - 1 + \sqrt{(2l + 1)^2 + 8\mu d} \right] - \frac{b^2}{4a} + \frac{2^{\frac{1+\nu}{\nu}} n \nu^2}{\left[1 + \sqrt{(2l + 1)^2 + 8\mu d} \right]^{\frac{1}{\nu}}} \times \frac{b^{\frac{1+\nu}{\nu}} \mu^{\frac{1-\nu}{2\nu}}}{2^{\frac{3\nu+1}{2\nu}} a^{\frac{1-\nu}{2\nu}}} \quad (\text{II.170})$$

et la contrainte sur le paramètre c comme

$$c_{nl} = \frac{b}{2\sqrt{2\mu a}} \left[2\nu(n + 1) - 1 + \nu \sqrt{(2l + 1)^2 + 8\mu d} \right]. \quad (\text{II.171})$$

II.3 Quelques propriétés des hadrons

À partir des formules obtenues dans les sections précédentes, nous allons déduire quelques propriétés des hadrons telles que les spectres de masse des quarkonia lourds et des mésons lourd-léger, la masse de l'état fondamental de quelques mésons et baryons, les constantes de désintégration pseudoscalaires et vectorielles des mésons lourd-léger, ainsi que les propriétés thermodynamiques des quarkonia lourds. En fin, via les équations obtenues dans l'espace-temps d'Einstein-Schwarzschild, nous sortirons quelques implications théoriques sur le confinement des quarks et des gluons.

II.3.1 Spectres des masses

II.3.1.1 Spectres de masse des mésons

En physique des particules, le spectre de masse d'un méson s'obtient à partir de la relation [8, 9, 30, 32, 97, 108]

$$M_{q\bar{q}} = m_q + m_{\bar{q}} + E_{nl}, \quad (\text{II.172})$$

où m_q est la masse du quark, $m_{\bar{q}}$ celle de l'antiquark et E_{nl} le niveau d'énergie du système quark-antiquark. Ainsi, pour le cas d'une particule évoluant dans un espace-temps décrit par la métrique de l'espace à corde cosmique sans torsion, l'équation de la masse tenant compte de (II.134) est donnée par

$$M_{q\bar{q}} = m_q + m_{\bar{q}} - \frac{a^2}{4b} + 2\sqrt{\frac{2b}{M}} \left(2(n + 1) + 2\sqrt{2Mg + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right). \quad (\text{II.173})$$

Dans le cas particulier de l'espace-temps plat, l'équation de la masse en tenant compte des effets mémoires est donnée par

$$M_{nl}(q\bar{q}) = m_q + m_{\bar{q}} + \sqrt{\frac{a}{2\mu}} \left[2n + 3\nu - 1 + \sqrt{(2l+1)^2 + 8\mu d} \right] - \frac{b^2}{4a} \quad (\text{II.174})$$

$$+ \frac{2^{\frac{1+\nu}{\nu}} n \nu^2}{\left[1 + \sqrt{(2l+1)^2 + 8\mu d} \right]^{\frac{1}{\nu}}} \times \frac{b^{\frac{1+\nu}{\nu}} \mu^{\frac{1-\nu}{2\nu}}}{2^{\frac{3\nu+1}{2\nu}} a^{\frac{1+\nu}{2\nu}}}.$$

Il est important de noter que les équations (II.173) et (II.174) sont respectivement la généralisation de l'équation de la masse obtenu dans les références [32] et [91]. En effet, on peut facilement vérifier qu'en remplaçant $\alpha = 1$ et $\nu = 1$ respectivement dans (II.173) et (II.174), on obtient l'équation de la masse obtenu respectivement par Ahmed Al-jamel [32] et Richa [91].

II.3.1.2 Spectres de masse des hadrons

En général, la masse d'un hadron peut être calculée à partir de la formule suivante [1, 16]

$$M_{hadron} = \sum_{j=1}^l E_{1,j}(m_q), \quad (\text{II.175})$$

où l est le nombre de quarks à l'intérieur du hadron et vaut 3 pour un baryon et 2 pour un méson, m_q est la masse effective du quark [161, 162]. Dans l'équation (II.175), l'énergie $E_{1,j}$ sera déduite de (II.71) en considérant le cas où $\mu \neq 0$. Les noyaux d'atomes étant les éléments constitués essentiellement de matière baryonique ordinaire, la masse d'un noyau atomique peut être calculée à partir de la formule [1, 16, 17]

$$M_{nucl} = \sum_{i=1}^l E_{1,i}(m_p^{eff}) + \sum_{j=1}^k E_{1,j}(m_n^{eff}), \quad (\text{II.176})$$

où l et k représentent respectivement le nombre de protons et de neutrons contenus dans le noyau considéré ; m_p^{eff} et m_n^{eff} sont les masses effectives du proton et du neutron dans le noyau et sont respectivement données par [1] :

$$m_p^{eff} \approx m_p - \frac{5}{3} \frac{q_F^3}{(2m_p^2 - q_F^2)}, \quad (\text{II.177})$$

$$m_n^{eff} \approx m_p - \frac{5}{3} \frac{q_F^3}{(2m_p^2 - q_F^2)}, \quad (\text{II.178})$$

où $m_p = 0.938$ GeV et $m_n = 0.940$ GeV sont respectivement la masse du proton et celle du neutron, q_F est le vecteur d'onde de Fermi. La valeur de q_F peut être obtenue par ajustement du spectre avec les données expérimentales. L'énergie de l'état fondamental internucléon est calculée à l'aide de la formule :

$$M_{int} = m_N - E_{(n=1)}(\alpha_s), \quad (\text{II.179})$$

où m_N est la masse d'un nucléon.

II.3.2 Constantes de désintégration des mésons

Les spectres de masse des mésons sont une riche source d'informations lorsqu'il s'agit d'étudier la nature des forces entre les quarks et les mécanismes de désintégration. Mais leur détermination seule ne suffit pas pour valider le modèle. Il est donc nécessaire d'étudier d'autres propriétés telles que les constantes de désintégration. Dans la littérature, les constantes de désintégration vectorielle et pseudo-scalaire sont généralement calculées à partir des éléments matriciels [30, 102] :

$$m_V f_V \epsilon^\mu = \langle 0 | \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi | V \rangle, \quad (\text{II.180})$$

$$p^\mu f_P = i \langle 0 | \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi | P \rangle. \quad (\text{II.181})$$

Cependant, dans le formalisme du modèle phénoménologique des quarks, ayant obtenu la fonction d'onde du méson, on peut facilement calculer les constantes de désintégration en utilisant les formules suivantes [30] :

$$f_P = \sqrt{\frac{3}{m_P}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{1 + \frac{m_q}{E_k}} \sqrt{1 + \frac{m_{\bar{q}}}{E_{\bar{k}}}} \left(1 - \frac{k^2}{(E_k + m_q)(E_{\bar{k}} + m_{\bar{q}})} \right) \phi(\vec{k}), \quad (\text{II.182})$$

pour les mésons pseudo-scalaires, et ensuite

$$f_V = \sqrt{\frac{3}{m_V}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{1 + \frac{m_q}{E_k}} \sqrt{1 + \frac{m_{\bar{q}}}{E_{\bar{k}}}} \left(1 - \frac{k^2}{(E_k + m_q)(E_{\bar{k}} + m_{\bar{q}})} \right) \phi(\vec{k}), \quad (\text{II.183})$$

pour mésons vecteurs, ϕ étant la fonction d'onde calculée dans l'espace des impulsions. Pour plus de détails, on peut se référer aux travaux de Lakhina [102] et aux références qu'ils contiennent. Dans la limite non relativiste, les équations ci-dessus sont réduites à une forme simple connue

sous le nom de formule de Van Royen et Weisskopf [103] :

$$f_{P/V}^2 = 12 \frac{|\psi_{P/V}(0)|^2}{m_{P/V}}, \quad (\text{II.184})$$

où $\psi_{P/V}(0)$ est la fonction d'onde calculée à l'origine et $m_{P/V}$ est la masse du méson pseudo-scalaire/vecteur. La correction au premier ordre, encore connu sous le nom de facteur de correction de la QCD est donnée par [103]

$$\bar{f}_{P/V}^2 = 12 \frac{|\psi_{P/V}(0)|^2}{m_{P/V}} \left[1 - \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\Delta_{P/V} - \frac{m_q - m_{\bar{q}}}{m_q + m_{\bar{q}}} \ln \frac{m_q}{m_{\bar{q}}} \right) \right]^2, \quad (\text{II.185})$$

avec $\Delta_P = 2$ pour les mésons pseudoscalaires $\Delta_V = 8/3$ pour les mésons vecteurs. Ces formules sont largement utilisées dans divers calculs de modèles de potentiels en raison du fait que la connaissance de la fonction d'onde est suffisante pour calculer les constantes de désintégration des mésons pseudo-scalaires et vectoriels. Cependant, il est très important de mentionner ici que l'effet du défaut topologique ou du paramètre de mémoire est pris en compte dans ces constantes de désintégration à travers la fonction d'onde calculée dans l'espace des impulsions.

II.3.3 Propriétés thermodynamiques quarkonia lourds

Dans cette sous-section, nous analysons l'effet du champs gravitationnel produit par un défaut topologique, notament une corde cosmique, sur les propriétés thermodynamiques des quarkonia lourds. Pour étudier les propriétés thermodynamiques d'un système, le point de départ est le calcul de la fonction de partition à partir des niveaux d'énergie du système [8, 104, 105]. Du point de vue de la physique statistique, la fonction de partition peut être obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \\ &= e^{-\beta \left[-\frac{a^2}{4b} + 4\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \left(1 + \sqrt{2\mu g + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right) \right]} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-4\beta \sqrt{\frac{2b}{\mu}} n} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\beta \left(2\sqrt{\frac{2b}{\mu}} + \left[-\frac{a^2}{4b} + 4\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \left(1 + \sqrt{2\mu g + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right) \right) \right)} \left(2\beta \sqrt{\frac{2b}{\mu}} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.186})$$

avec $\beta = k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann et T est la température absolue du système et l'énergie est donnée par la formule (II.134). Une fois la fonction de partition obtenue, l'énergie

libre de Helmholtz s'obtient comme :

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \\
&= \left[-\frac{a^2}{4b} + 4\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \left(1 + \sqrt{2\mu g + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right) \right] + \frac{1}{\beta} \ln \left(1 - e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \right) \\
&= \left[-\frac{a^2}{4b} + 4\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \left(1 + \sqrt{2\mu g + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right) \right] - 2\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \\
&+ \frac{1}{\beta} \ln \left(2 \sinh \left(2\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \right) \right). \tag{II.187}
\end{aligned}$$

À partir de l'énergie libre de Helmholtz, nous pouvons obtenir d'autres quantités statistiques de manière simple. L'entropie du système par exemple, peut s'obtenir de la manière suivante

$$\begin{aligned}
S &= -k_B \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} \\
&= -\ln \left[1 - e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \right] + 4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \frac{e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}}}{\left(1 - e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \right)} \\
&= -\ln \left[2e^{-2\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \sinh \left(2\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \right) \right] + 2\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}} e^{-2\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \left(2\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \right). \tag{II.188}
\end{aligned}$$

De même, l'énergie interne U du système est définie comme :

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F) = -\frac{\partial \ln Z(\beta)}{\partial \beta} \\
&= \left[-\frac{a^2}{4b} + 4\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \left(1 + \sqrt{2\mu g + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right) \right] \\
&+ \frac{4\sqrt{\frac{2b}{\mu}} e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}}}{\left(1 - e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \right)} \\
&= \left[-\frac{a^2}{4b} + 4\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \left(1 + \sqrt{2\mu g + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right) \right] \\
&+ \sqrt{\frac{2b}{\mu}} e^{-2\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \left(2\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}} \right). \tag{II.189}
\end{aligned}$$

Ayant l'énergie interne, nous pouvons calculer la capacité thermique spécifique à volume constant noté C_v comme suit

$$\begin{aligned}
C_v &= -\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta} \\
&= 16k_B \beta^2 \sqrt{\frac{2b}{\mu}} \frac{e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \left[1 + \left(\sqrt{\frac{2b}{\mu}} - 1 \right) e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \right]}{\left(1 - e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \right)^2} \\
&= 4k_B \beta^2 \sqrt{\frac{2b}{\mu}} \left[1 + \left(\sqrt{\frac{2b}{\mu}} - 1 \right) e^{-4\beta\sqrt{\frac{2b}{\mu}}} \right]^2 \left(2\beta \sqrt{\frac{2b}{\mu}} \right). \tag{II.190}
\end{aligned}$$

II.3.4 Confinement des quarks et gluons

Dans cette sous-section, nous déterminerons certaines propriétés de confinement des quarks et des gluons telles que leur rayon de Schwarzschild et leurs fonctions d'onde à l'intérieur du trou noir de Schwarzschild. A partir de la fonction de courbure établie dans la section II.2.1, nous expliquerons de manière purement géométrique le phénomène de confinement des quarks et gluons, ainsi que quelques implications théoriques. L'obtention de la fonction de courbure révèle que la théorie de C. C. Barros permet de prédire l'existence de trous noirs responsables du confinement des quarks à l'intérieur des hadrons. Cela permet de comprendre d'emblée pourquoi dans notre modèle de potentiel, nous n'avons pas eu besoin d'incorporer des termes de confinement. Cependant, le potentiel donné par l'équation (II.31) prend directement en compte deux aspects de l'interaction forte. Parmi ces aspects, nous avons notamment l'interaction forte résiduelle. Cette image de l'interaction forte est celle qui agit entre les nucléons et est dominée par le processus d'échange d'un pion. Ceci est bien décrit par un potentiel de Yukawa pur $-\alpha_s \frac{b \exp(\mu r -)}{r}$, μ étant la masse du pion échangé. D'autre part, nous avons l'interaction forte de base. Cette image de l'interaction forte est celle qui agit entre les quarks et est dominée par le processus d'échange d'un gluon, qui est décrit par un terme de type coulombien pur $-\alpha_s \frac{a}{r}$. Selon l'équation (II.39), le rayon de Schwarzschild d'un hadron sous l'influence du potentiel (II.31) est obtenu en annulant la fonction de courbure $\xi(r)$ de la métrique de Schwarzschild, c'est-à-dire pour un temps dilaté à l'infini. Ce qui nous donne

$$\xi(r) = 0 \Rightarrow r_s = \frac{2(a+b)\alpha_s}{2m_q c^2 + b^2 \mu \alpha_s}, \tag{II.191}$$

où m est la masse du hadron. En faisant un ajustement convenable des paramètres du potentiel, on retrouve les expressions du rayon de Schwarzschild obtenues dans les références [13, 17]. L'équation (II.191) montre clairement qu'il existe un lien entre la masse effective du quark à l'intérieur du hadron et la taille du trou noir. De plus, cette formule est valable sauf pour le cas particulier de l'équation (II.31) où $a = -b$, pour lequel le trou noir n'existe plus. Si on s'intéresse à l'interaction forte entre les quarks, soit $b = 0$, le boson médiateur étant le gluon, de masse $\mu = 0$, l'équation (II.191) devient

$$r_s = \frac{a\alpha_s}{m_q c^2}, \quad (\text{II.192})$$

où m_q est la masse du quark. Un aspect intéressant de cette approche est qu'il est absolument impossible pour un quark confiné à l'intérieur d'un hadron d'atteindre la surface $r = r_s$ de l'horizon des événements. Il est donc évident que la fonction d'onde associée au quark s'annule complètement à ce point et nous aurons

$$\psi(r_s) = \begin{pmatrix} F(r_s)\Omega_k^\mu(\theta, \varphi) \\ iG(r_s)\Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.193})$$

L'espace-temps est donc séparé en deux régions complètement déconnectées du fait de la discontinuité de la fonction d'onde à la surface $r = r_s$. À cet effet, une solution de chacune des équations radiales de Dirac, notamment les équations (II.57) et (II.58), au voisinage de l'horizon des événements peut être obtenue par un développement en série similaire aux développements proposés dans les références [?, 17]

$$F(X) = X^s \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(X - \frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3} \right)^3 H \left(\frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3} - X \right) e^{-X}, \quad (\text{II.194})$$

$$G(X) = X^s \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(X - \frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3} \right)^3 H \left(\frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3} - X \right) e^{-X}, \quad (\text{II.195})$$

où X a été remplacé dans les équations (II.57) et (II.58) par $X - \frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3}$, et la fonction H donnée par

$$H(A - X) = \begin{cases} 1 & \text{for } X \geq A \\ 0 & \text{pour } X < A, \end{cases} \quad (\text{II.196})$$

est la fonction échelon de Heaviside, qui est introduite ici pour s'assurer que le quark étant confiné à l'intérieur du hadron, la fonction d'onde doit s'annuler dans la région $r > r_s$. Un aspect important de cette théorie est que les quarks ne peuvent en aucun cas traverser l'horizon des événements, et par conséquent restent toujours piégés dans les hadrons. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que la théorie prédit l'existence d'un trou noir de Schwarzschild dont la forte gravité est responsable du phénomène de confinement des quarks dans les hadrons. Précisons en effet, qu'il ne s'agit pas de la gravité au sens de la relativité générale, mais par analogie, une odification du tissu de l'espace-temps causé par la présence non plus de la masse, mais d'une charge de couleur². De l'autre côté, qu'en est-il des gluons ? Subissent-ils le même effet que les quarks ? Les gluons sont des bosons vecteurs non massifs de spin 1, porteurs d'une charge de couleur. Les gluons sont décrits par un champ vectoriel A_μ^d ($\mu = 0, \dots, 3$), d étant la charge de couleur. Pour la métrique de type Schwarzschild, les composantes du champ de spin 1 obéissent à une équation de Klein-Gordon généralisée. En effet, suivant la procédure détaillée dans la référence [13], l'opérateur énergie est défini par

$$E = i\hbar\nabla_0 = \frac{i\hbar}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{i\hbar}{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{II.197})$$

Par ailleurs, le carré de la norme du quadri-vecteur énergie-impulsion, qui est un invariant de Lorentz, peut s'exprimer comme

$$p_\mu p^\mu = \vec{p}^2 c^2 - \frac{E^2}{\xi(r)} = m^2 c^4 \Rightarrow \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (\text{II.198})$$

avec

$$\vec{p}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\sqrt{\xi(r)}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (\text{II.199})$$

En se servant des équations (II.197)-(II.199), et du fait que le champ de gluons est un champ vectoriel non massif, l'équation de Klein-Gordon basée sur la relativité générale est :

$$-\left(\frac{\hbar}{\xi(r)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_\mu^d(\vec{r}, t) = -\hbar^2 c^2 \left\{ \frac{\sqrt{\xi(r)}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2} \right\} A_\mu^d(\vec{r}, t). \quad (\text{II.200})$$

2. Le mot couleur ici n'a rien à y voir avec le sens commun de ce mot.

En cherchant des solutions de la forme $A_\mu^d(\vec{r}, t) = B_\mu^d(r, \theta, \varphi)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ l'équation (II.200) devient

$$\frac{1}{r^2} \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_\mu^d(r, \theta, \varphi) + \left(\frac{E^2}{\hbar^2 c^2 \xi^2(r)} - \frac{\vec{L}^2}{r^2} \right) B_\mu^d(r, \theta, \varphi) = 0. \quad (\text{II.201})$$

A l'horizon des évènements ($r = r_s$) et au delà, le temps est dilaté à l'infini et la composante temporelle g_{00} du tenseur métrique s'annule $\xi(r_s) = 0$. Ainsi, il vient que

$$\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} B_\mu^d(r_s, \theta, \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_\mu^d(r_s, \theta, \varphi) = 0. \quad (\text{II.202})$$

Nous pouvons constater à partir de l'équation (II.202) que le champ de gluons présente lui aussi une discontinuité à l'horizon des évènements. À cet effet, le champ vectoriel $B_\mu^d(r, \theta, \varphi)$ peut être mis sous la forme :

$$\bar{B}_\mu^d(r, \theta, \varphi) = H(r_s - r) B_\mu^d(r, \theta, \varphi). \quad (\text{II.203})$$

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes penchés sur l'étude théorique des propriétés des hadrons en combinant les principes de la relativité générale et ceux de la mécanique quantique. Dans un premier temps, nous avons formulé les équations d'Einstein dont la résolution a fourni les composantes de la métrique, à partir des quelles l'équation de Dirac basée sur la relativité générale a pu être établie. Ensuite, l'équation de Schrödinger en espace-temps courbe a été présentée. Nous avons pour cela eu besoin de développer tout un tas d'outils mathématiques, pour pouvoir obtenir les solutions de ces équations d'ondes quantiques. À partir des composantes de la métrique, des valeurs propres d'énergies, et des fonctions d'ondes obtenues, nous avons pu déduire un certain nombre de propriétés et résultats théoriques que nous allons illustrer numériquement dans la suite, les commenter et les discuter.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous pencher sur les résultats numériques liés à l'étude théorique des propriétés des hadrons en présence des effets de la courbure et de la gravitation. Les valeurs théoriques des masses des différents états de quelques particules composites telles que le charmonium $c\bar{c}$, le bottomonium $b\bar{b}$, le méson $\bar{b}c$, les mésons lourds-légers tels que le $c\bar{s}$, $b\bar{s}$, $b\bar{u}$, $b\bar{d}$, les masses de quelques baryons tels que le proton p , le baryon Σ^- , le baryon Ξ^- , des mésons π^- , K^- , ρ^- , J/ψ et Υ ont été calculées ainsi que les constantes de désintégration pseudoscalaires et vectorielles des mésons, parmi lesquels les quarkonia lourds et les mésons lourd-léger tels que le D^0 , le D^+ , D_s^+ , B^- , \bar{B}^0 et le \bar{B}_s^0 . À partir de la valeur de la constante de couplage de l'interaction forte, et les valeurs obtenues des masses effectives du proton et du neutron, nous avons calculé numériquement la masse de quelques noyaux d'atomes, que nous avons comparé aux données de l'expérience et à d'autres travaux théoriques pertinents. De plus, les rayons de Schwarzschild associés aux quarks de quelques hadrons ont été calculés numériquement en fonction de la masse effective de chaque quark et de la constante de couplage α_s de l'interaction forte. Enfin, les résultats théoriques obtenus ont été comparés aux valeurs expérimentales des tailles de quelques hadrons, et une conséquence directe sera tirée de cette comparaison. Afin de rendre nos résultats plus expressifs, nous avons représenté graphiquement le potentiel d'interaction, les propriétés thermodynamiques des quarkonia lourds, les fonctions d'ondes et densités de probabilité radiales, ainsi que les spectres de masses des mésons dans l'espace à corde cosmique et dans l'espace fractionnaire.

III.2 Propriétés des mesons dans l'espace-temps à corde cosmique

Dans cette section, nous présentons les prédictions de notre modèle en rapport avec les propriétés des mesons charmonium et bottomonium. En particulier, nous évaluons numériquement

les spectres de masse des quarkonia lourds, et étudions quelques propriétés thermodynamiques de ces derniers. Nous discutons en détail les effets du champ gravitationnel du DTCC sur les propriétés thermodynamiques et les spectres de masse des quarkonia lourds, en l'occurrence le charmonium et le bottomonium.

III.2.1 Spectres de masse des quarkonia lourds

Dans cette sous-section, nous présentons les résultats numériques des spectres de masse des quarkonia lourds ayant subi l'effet du champ gravitationnel produit par un défaut topologique, qui dans notre cas est une corde cosmique. Les paramètres du potentiel sont obtenus en ajustant les spectres de masse théoriques avec des données expérimentales et sont listés dans le Tableau 2. Dans notre modèle à corde cosmique, le paramètre K jouant le rôle de constante de couplage forte est de l'ordre de 0,5. Cette valeur est en bon accord avec les mesures faites dans les laboratoires tels que TRISTAN¹ (Transposable Ring Intersecting Storage Accelerator in Nippon) et LEP² (Large Electron Positron collider) qui donnent une valeur maximale de 0,3 à $Q = 2\text{GeV}$ [106]. Comme le montre le Tableau 2, pour les valeurs $K = 0,5$ et $\alpha = 0,99$ nous avons obtenu le meilleur ajustement pour les paramètres du potentiel. Dans les Tableaux 3 et 4, les valeurs numériques des masses sont rapportées de l'état $1S$ à l'état $4S$ pour le charmonium $c\bar{c}$ et le bottomonium $b\bar{b}$. Dans notre modèle, les valeurs propres d'énergie obtenues étaient réelles pour $\alpha \geq 0,5$ et uniquement pour les méson lourds, ce qui explique notre choix des quarkonia lourds. Par conséquent, notre étude s'est limitée à l'intervalle $[0.5; 1]$. La valeur $\alpha = 0.5$ est choisie car elle permet d'obtenir des résultats beaucoup plus précis.

TABLE 2 – Paramètres du potentiel. Les masses des quarks [9, 30, 32] : $m_c = 1.207\text{GeV}$ and $m_b = 4.823\text{GeV}$.

<i>parameters</i>	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$
$a(\text{GeV}^2)$	0.0405	0.2250
$b(\text{GeV}^3)$	0.0046	0.0140
$g(\text{GeV}^{-1})$	0.1384	0.1040
K	0.5	0.5

Dans le Tableau 3, les spectres de masse du méson charmonium $c\bar{c}$ ont été calculés de l'état $1S$ à

1. TRISTAN est un collisionneur électron-positon possédant trois détecteurs et ayant fonctionné de 1987 à 1995. L'objectif principal était de détecter le quark top. L'énergie des électrons et des positrons était de 30 GeV.

2. Le grand collisionneur électron-positron (en anglais : Large Electron Positron collider) était un accélérateur de particules circulaire de 27 km de circonférence, passant sous le site du CERN entre la France et la Suisse. En fonction de 1989 à 2000, le LEP demeure le plus puissant collisionneur de leptons jamais construit.

l'état $4S$ pour différentes valeurs du paramètre du défaut topologique. L'équation (II.173) a été utilisée pour évaluer numériquement le spectre de masse du charmonium en présence du défaut topologique à corde cosmique. Les constantes a , b , g et K sont calculées à l'aide de l'équation (II.173), et les valeurs des masses des quarks sont tirées des références [30, 32, 60]. N1 et N2 sont les prédictions de notre modèle respectivement pour $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.99$. Les prédictions théoriques de notre modèle à corde cosmique sont comparées aux données expérimentales disponibles et aux travaux antérieurs, à différentes valeurs du paramètre du défaut topologique. De la brisure de la symétrie sphérique, il en résulte une levée de dégénérescence sur les états avec $l \neq 0$ et qui se produit lorsque $0 < \alpha < 1$.

Les résultats théoriques fournis par notre modèle révèlent l'existence des états encore plus fondamentaux du charmonium. De plus, ceux-ci s'avèrent être en bon accord avec les données expérimentales [138], et sont améliorés par rapport aux travaux précédents, à l'occurrence ceux des références [32, 108, 109] pour l'état $1S$, [109] pour le $2S$, les références [32, 108, 109, 110, 111] pour l'état $2P$, [108, 111] pour l'état $2D$, [108, 109, 110] pour l'état $3S$ et les références [108, 109] pour l'état $4S$. Pendant ce temps, nos résultats sont très proches de ceux de la référence [112] pour les états $1P$ et $1D$. L'effet du champ gravitationnel du défaut topologique joue un rôle très important dans ce travail, en particulier lorsque $0.5 < \alpha \leq 1$. La présence du topologique induit un éclatement des niveaux de masse du méson $c\bar{c}$. En effet, le défaut topologique produit autour de lui un champ gravitationnel qui lève partiellement la dégénérescence des états nP et nD . Il est important de souligner que cette levée de dégénérescence n'apparaît pas dans les travaux antérieurs sur la phénoménologie des hadrons.

Dans le Tableau 4, les résultats numériques des spectres de masse du bottomonium sont rapportés de l'état $1S$ à l'état $4S$ pour différentes valeurs du défaut topologique α . Les paramètres du potentiel pour le bottomonium sont également calculés à partir de l'équation (II.173) et les valeurs des masses des quarks sont tirées des références [9, 30, 32, 60]. N1 et N2 sont les prédictions de notre modèle respectivement pour $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.99$. Les prédictions théoriques du présent travail pour les masses du bottomonium sont comparées aux données expérimentales disponibles et aux études antérieures. Comme dans le cas du méson charmonium, la brisure de la symétrie de rotation par le champ gravitationnel de la corde cosmique entraîne une levée de dégénérescence dans les états nP et nD du méson bottomonium. Cette brisure de symétrie se produit lorsque $0.5 < \alpha < 1$, entraînant ainsi une levée partielle de dégénérescence. Nous no-

TABLE 3 – Spectre de masse du charmonium (en GeV). Les masses des quarks sont $m_c = m_{\bar{c}} = 1.207$ GeV, et les paramètres du potentiel $a = 0.0407\text{GeV}^2$, $b = 0.0042\text{GeV}^3$ et $g = 0.1380\text{GeV}^{-1}$.

Etat (nL)	$N1$	$N2$	[32]	[108]	[110]	[109]	[111]	[112]	Exp.[138]
$1S$	3.141	3.141	3.095	3.078	3.096	3.078	3.096	3.096	3.096
	3.243	3.411							
$1P$	3.411	3.411	3.525	3.415	3.433	3.415	3.433	3.255	-
	3.413	3.411							
$1D$	3.324	3.591							
	3.472	3.591							
	3.591	3.591	3.986	3.749	3.767	3.752	3.770	3.504	-
	3.695	3.591							
$2S$	3.787	3.591							
	3.636	3.636	3.568	3.581	3.686	4.187	3.686	3.686	3.686
$2P$	3.737	3.905							
	3.905	3.905	3.997	3.917	3.910	4.143	4.023	3.779	3.773
$2D$	4.035	3.905							
	3.818	4.085							
	3.966	4.085							
	4.085	4.085	-	3.078	-	-	3.096	-	4.159
$3S$	4.189	4.085							
	4.281	4.085							
$4S$	4.130	4.130	4.040	4.085	3.984	5.297	4.040	4.040	4.040
$4S$	4.624	4.624	4.512	4.589	4.150	6.407	4.355	4.269	4.263

tons que dans le cas du bottomonium, pour les états dégénérés, nos résultats sont très proches des données expérimentales [113] et améliorés par rapport à ceux des références [109, 114] pour l'état $1S$, [32] pour l'état $2S$, [109, 110] pour l'état $3S$ et [32, 109, 114] pour l'état $4S$. Pendant ce temps, il n'existe pas de données expérimentales disponibles pour les niveaux $1P$, $1D$ et $2P$ du bottomonium. Les résultats fournis par notre modèle, nous révèlent que dans le cas du bottomonium également, il existe un niveau plus fondamental des états de masse. Dans le cas des états non dégénérés, ceux-ci sont proches des travaux précédents, à savoir [112] pour les états $1P$ et $1D$, et [32, 108, 109, 110, 112, 114] pour l'état $2P$. Pour $0.5 < \alpha < 1$, le spectre des énergies présente une séparation des niveaux de Minkowski habituels en un nombre impair de composantes, soit $2l + 1$ composantes.

De plus, lorsque $\alpha \rightarrow 1$, nous obtenons les niveaux d'énergies de l'espace-temps plat habituel de Minkowski en coordonnées sphériques [32]. Comme pour le charmonium, l'éclatement observé dans les spectres du bottomonium est dû à la courbure induite par la présence du défaut topologique.

Les densités de probabilité radiales à l'origine et les constantes de normalisation de chaque

TABLE 4 – Spectre de masse du bottomonium (en GeV). Les masses des quarks sont $m_b = m_{\bar{b}} = 4.823\text{GeV}$, et les paramètres du potentiel $a = 0.2566\text{GeV}^2$, $b = 0.0150\text{GeV}^3$ et $g = 0.1043\text{GeV}^{-1}$.

Etat (nL)	$N1$	$N2$	[32]	[114]	[108]	[110]	[109]	[112]	Exp.[113]
1S	9.551	9.551	9.460	9.510	9.460	9.460	9.510	9.460	9.460
	9.622	9.749							
1P	9.749	9.749	9.805	9.862	9.811	9.840	9.862	9.619	-
	9.853	9.749							
1D	9.681	9.893							
	9.797	9.893							
	9.893	9.893	10.232	10.214	10.161	10.140	10.214	9.864	-
	9.979	9.893							
	10.056	9.893							
2S	9.983	9.983	9.899	10.038	10.023	10.023	10.627	10.023	10.023
	10.052	10.180							
2P	10.180	10.180	10.260	10.396	10.374	10.160	10.944	10.114	-
	10.284	10.180							
2D	10.112	10.324							
	10.228	10.324							
	10.324	10.324	-	-	-	-	-	-	-
	10.410	10.324							
	10.487	10.324							
3S	10.413	10.413	10.355	10.566	10.355	10.280	11.726	10.355	10.355
4S	10.845	10.845	10.811	11.094	10.655	10.420	12.834	10.567	10.580

état des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ sont rapportées dans le Tableau 5. Le carré des fonctions d’onde à l’origine a été calculé, ainsi que les facteurs de normalisation pour chaque état de 1S à 3S.

TABLE 5 – Facteurs de normalisation et densités de probabilité radiales à l’origine pour les niveaux 1S, 2S et 3S des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$.

États	$c\bar{c}$		$b\bar{b}$	
	N_{nl}	$ R_{nl}(0) ^2$	N_{nl}	$ R_{nl}(0) ^2$
1S	0.95117	0.90472	0.04194	0.00175
2S	0.46676	0.21786	0.03474	0.00120
3S	0.26829	0.07197	0.01205	0.00014

L’effet du défaut topologique sur les spectres de masse est illustré sur les Figures 5-7. On peut observer que pour de faibles valeurs du paramètre de la corde cosmique α , les spectres de masse des états P sont décalés par rapport aux niveaux Minkowskiens habituels, et pour de grandes valeurs de α c’est-à-dire en absence du champ gravitationnel du défaut topologique, la dégénérescence est restaurée dans n’importe quel état P ou D des mésons charmonium et bottomonium.

Sur la Figure 5, on peut observer que pour les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$, les niveaux sont décalés par rapport aux niveaux de Minkowski avec $m_l = +1$. L'écart à la composante dégénérée augmente à mesure que α diminue, c'est-à-dire en champ gravitationnel intense. Ensuite l'état dégénéré est restauré lorsque $\alpha = 1$. Sur la Figure 6, la situation où $m_l = 0$ est considérée. On remarque que le système n'est pas sensible au champ gravitationnel du défaut topologique, et donc aucune décomposition n'est observée sur les niveaux d'énergie. La dégénérescence des états est donc restaurée pour toutes les valeurs prise par α . Ceci est similaire au comportement prédit dans la référence [32] pour $\gamma = 0$. La Figure 6 nous montre que les états S sont insensibles au champ gravitationnel du défaut topologique. Sur la Figure 7, le cas où $m_l = -1$ est considéré pour chaque quarkonium. On remarque que les niveaux ne sont décalés que pour les petites valeurs de α ; la levée de dégénérescence des états n'est pas produite pour les grandes valeurs de α . Certains niveaux n'apparaissent pas à cause des valeurs propres d'énergies complexes.

Sur les Figures 8-9, les variations des fonctions d'onde et des densités de probabilité radiales avec la coordonnée radiale r sont présentées pour chaque méson. Dans un premier temps, nous avons considérés les états avec $l = 0$ et $n = 1, 2, 3$ c'est-à-dire les états $1S, 2S$ et $3S$. La Figure 8 illustre le comportement de la fonction d'onde par rapport à la coordonnée radiale pour le méson $c\bar{c}$ et la figure 9 celle du méson $b\bar{b}$. Les Figures 10, 11 et 12 présentent les tracés des fonctions d'onde radiales du méson $c\bar{c}$, et les Figures 13, 14 et 15 sont celles des densités de probabilité radiales du méson $c\bar{c}$, pour les états $1P, 2P$ et $3P$. Tant dis que les Figures 16, 17 et 18, illustrent les variations des fonctions d'onde radiales du méson $b\bar{b}$, et les Figures 19, 20 et 21 illustrent celles des densités de probabilité radiales du méson $b\bar{b}$, pour les états $1P, 2P$ et $3P$, à différentes valeurs du paramètre du défaut. En regardant de près les états P , on remarque que les pics des fonctions d'onde sont décalés vers l'arrière pour les petites valeurs de α , et se déplacent vers des valeurs plus élevées en augmentant la valeur de α pour le charmonium, et en diminuant la valeur de α pour le bottomonium. En outre, pour les fonctions radiales de densités de probabilités, on observe que le comportement est le même pour les état P du charmonium et ceux du bottomonium, mais avec un certain déplacement des pics vers l'origine. En considérant les courbes de chaque méson, on s'aperçoit que les pics sont décalés vers l'origine à mesure que α diminue. Ensuite, les variations du potentiel d'interaction $V(r)$ en fonction de la séparation interquark r sont illustrées sur la Figure 22, pour chaque quarkonium considéré.

Les résultats obtenus montrent que les valeurs propres d'énergie données par l'équation

(II.134) sont décalées par rapport à celles de l'espace-temps plat de Minkowski [32]. Comme illustré dans les Tableaux 3 et 4 et les figures 5, 6 et 7, nous pouvons observer que les décalages sont étroitement liés à la géométrie courbe de espace-temps générée par la présence du défaut topologique [5, 6, 10, 11]. De plus, il apparaît que le champ gravitationnel du défaut topologique agit sur les spectres de masse des quarkonia lourds de façon similaire à l'effet Zeeman dû au champ magnétique [115, 116], qui divise les niveaux d'énergie de l'atome en $(2l+1)$ composantes [117], l étant le nombre quantique du moment angulaire orbital. Ce qu'on pourrait qualifier dans notre cas, "d'effet Zeeman gravitationnel".

Cependant, il est très important de mentionner ici que les effets dus au champ gravitationnel n'avaient pas encore été pris en compte dans les études antérieures sur les spectres de quarkonia lourds et même pour l'étude de d'autres particules subatomiques. Dans les références [32, 108, 109, 112, 114] les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ sont étudiés en présence d'effets tels que celui des dimensions spatiales supplémentaires, puis dans les références [113, 31, 118, 119, 120], les spectres de masse du méson $b\bar{c}$ ont été étudiés et dans les références [114, 31] le méson $c\bar{s}$ a été étudié en présence des dimensions spatiales supplémentaires et du paramètre mémoire. Dans la référence [8], les spectres des mésons lourds-légers et les constantes de désintégration ont été obtenus en utilisant la méthode d'itération asymptotique dans le cadre du calcul fractionnaire conformable. Dans toutes ces précédentes études, aucune n'a fait allusion à l'effet d'un défaut topologique sur les propriétés des quarkonia lourds. La levée de dégénérescence induite par le champ gravitationnel de la corde cosmique sur les états quantiques³ impose que la masse moyennée du spin et les taux de désintégration des mésons soient aussi influencés par la géométrie non triviale de l'espace-temps à corde cosmique. La brisure de symétrie provoquée par le défaut topologique pourrait également modifier les vitesses de transitions électromagnétiques de ces particules. Cependant, nous avons concentré nos efforts sur l'étude des effets du champ gravitationnel du défaut topologique sur les spectres de masse des mésons charmonium et bottomonium, ainsi que les propriétés qui en découlent directement, à l'instar des propriétés thermodynamiques. L'étude des transitions radiatives quant à elle n'a pas été abordé dans le cadre de cette thèse, car les corrections relativistes dues aux forces dépendantes du spin ne sont pas prises en compte ici, d'où la levée partielle de dégénérescence. Cette idée pourrait être étendue aux forces dépendantes du spin, dans le cadre d'un futur travail traitant de l'effet de la gravité d'un défaut topologique

3. Le nombre quantique orbital est modifié par rapport à sa valeur habituelle

sur les transitions électromagnétiques des quarkonias lourds.

Ensuite, nous analysons quelques propriétés statistiques des quarkonia lourds, tel qu'illustré dans les Figures 23-32. Dans notre modèle, l'effet du champ gravitationnel de la corde cosmique n'apparaît que lorsque $l \neq 0$. En effet, l'équation (II.173) montre clairement que les états S ne ressentent aucun effet de la part de la géométrie de l'espace à corde cosmique car lorsque $l = 0$ nous avons également $l_{(\alpha)} = 0$. Ainsi, les valeurs propres d'énergie, la fonction d'onde, ainsi que les propriétés dynamiques qui en découlent, deviennent indépendantes de α . En effet, fixer la valeur du paramètre topologique à 1 élimine automatiquement l'effet du champ gravitationnel du défaut topologique. Pour cette raison, une grande importance a été accordée à l'étude des états avec $l \neq 0$, c'est-à-dire les états P .

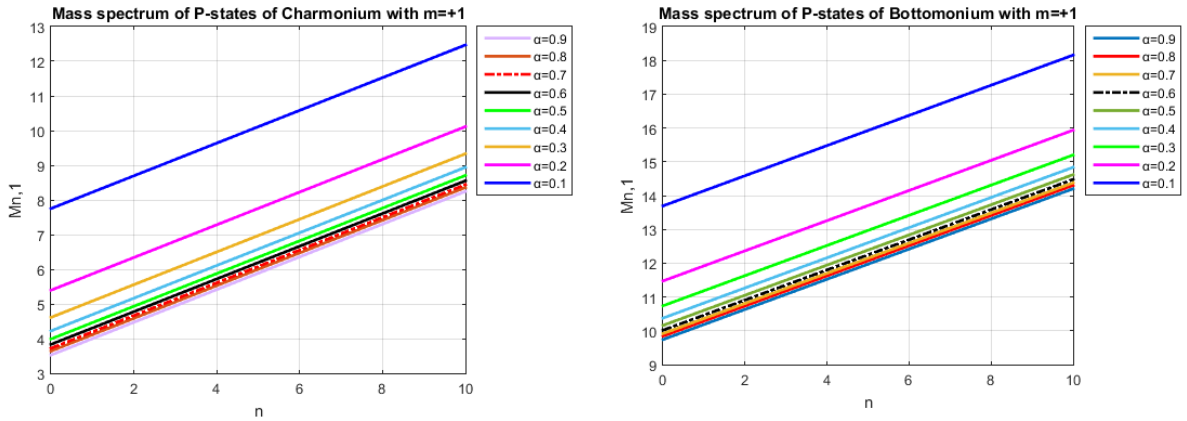


FIGURE 5 – Spectre de masse des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ (en GeV) en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs de α avec $m_l = +1$

III.2.2 Propriétés thermodynamiques des quarkonia lourds

À présent, nous allons analyser l'effet du champ gravitationnel de la corde cosmique sur les propriétés thermodynamiques des quarkonias lourds. L'étude des propriétés thermodynamiques des particules subatomiques est importante car elle nous permet de mieux comprendre les phénomènes qui se produisent à l'échelle subatomique. Les particules élémentaires, telles que les quarks et les leptons, ont des propriétés thermodynamiques qui peuvent être mesurées et utilisées pour comprendre leur comportement. Par exemple, la température à laquelle une particule subatomique se désintègre peut nous fournir des informations sur sa structure interne et sur les forces qui la maintiennent ensemble. De plus, l'étude des propriétés thermodynamiques des par-

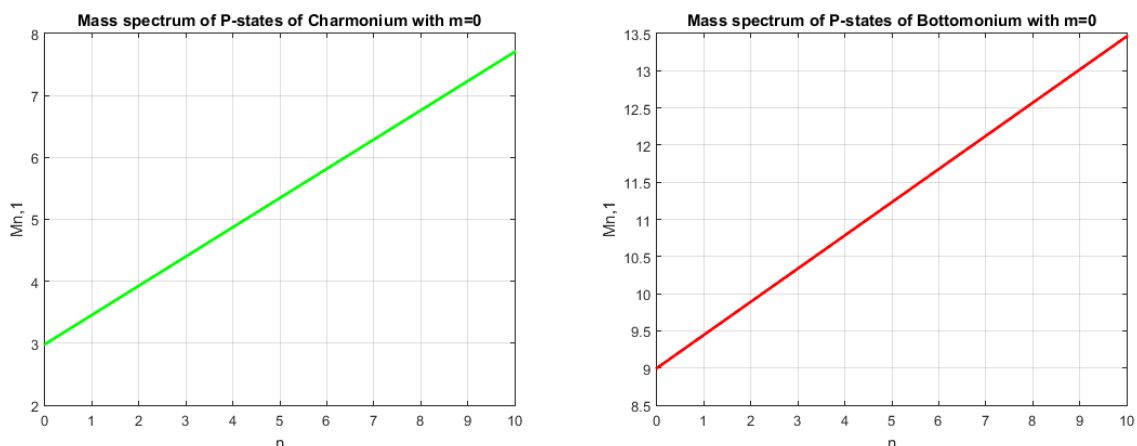


FIGURE 6 – Spectre de masse des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ (en GeV) en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs de α avec $m_l = 0$

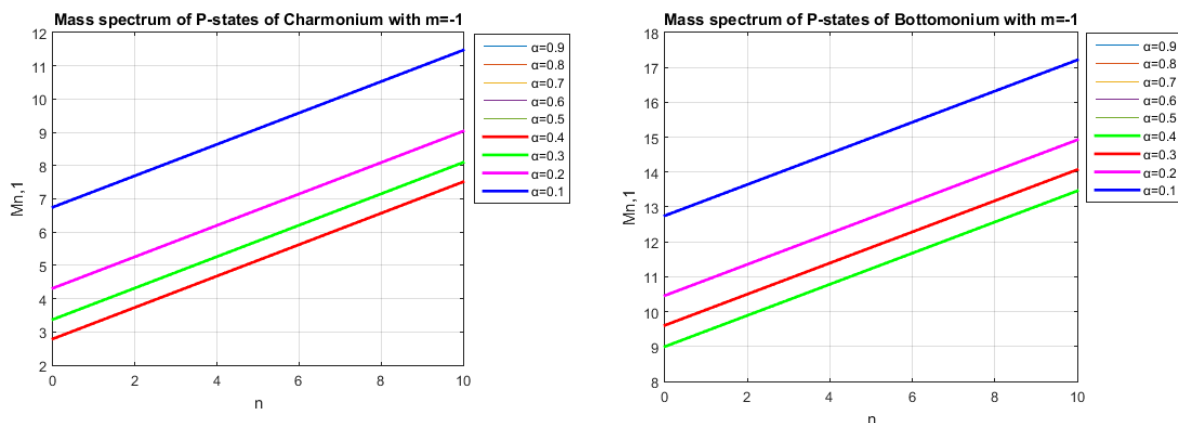


FIGURE 7 – Spectre de masse des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ (en GeV) en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs de α avec $m_l = -1$

ticules subatomiques peut nous aider à mieux comprendre les phénomènes tels que la création de paires particule-antiparticule et la transition de phase dans les plasmas de quark-gluon. Pour calculer les propriétés thermodynamiques des systèmes quark-antiquark par exemple, nous avons utilisé des outils issus de la mécanique statistique, en prenant comme point de départ la fonction de partition canonique du système, à partir de laquelle les autres grandeurs statistiques ont été calculées de manière simple. Nous n’avons considéré que les quarkonia lourds car lorsqu’on considère les autres états liés de quark-antiquark, nous obtenons des valeurs d’énergies complexes. Les Figures 23 et 24 représentent respectivement la fonction de partition canonique du charmonium et du bottomonium en fonction de β pour différentes valeurs du paramètre du

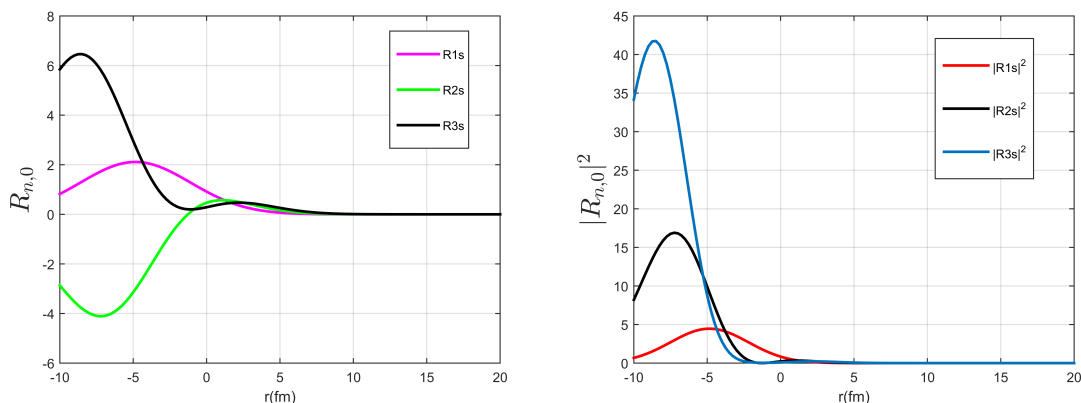


FIGURE 8 – Fonctions d’ondes radiales et densités radiales de probabilités du méson $c\bar{c}$ pour $l = 0$ et $n = 1, 2, 3$.

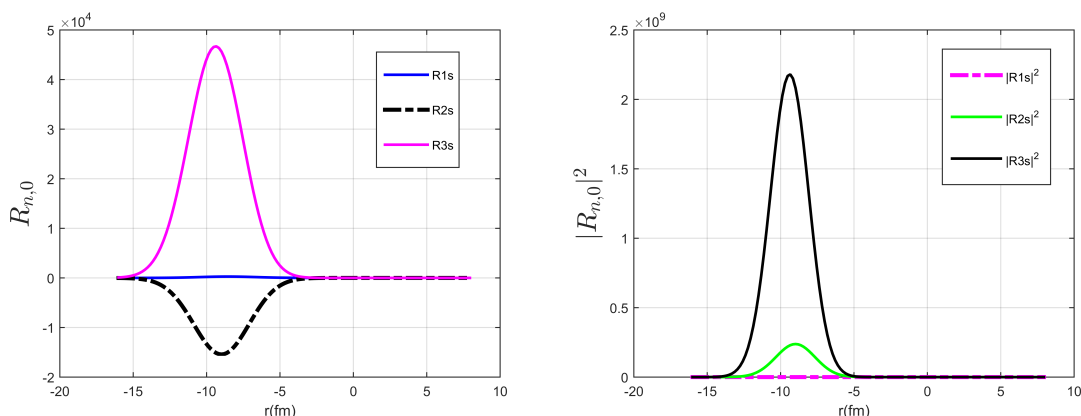


FIGURE 9 – Fonctions d’ondes radiales et densités radiales de probabilités du méson $b\bar{b}$ pour $l = 0$ et $n = 1, 2, 3$.

défaut topologique. Ainsi, on s’aperçoit donc qu’en diminuant la valeur de α , toutes les courbes ont tendance à s’éloigner de la courbe classique de Minkowski ($\alpha = 1$). Pour toutes les valeurs du paramètre topologique le comportement est le même mais avec des amplitudes différentes. De plus, l’écart à la courbe Minkowskienne augmente à mesure que α diminue, et la fonction de partition diminue avec l’augmentation de β , ce qui est en accord avec ce que prévoit les références [121, 122]. Dans la référence [121], l’auteur a utilisé le potentiel exponentiel déformé à cinq paramètres et a observé qu’avec l’augmentation de β , la fonction de partition canonique pour le cas minkowskien diminue de façon monotone.

Les Figures 25 et 26 présentent les variations de l’énergie libre de Helmholtz en fonction de β respectivement pour les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$. On constate que la fonction de Helmholtz augmente

FIGURE 27 -
de α avec l

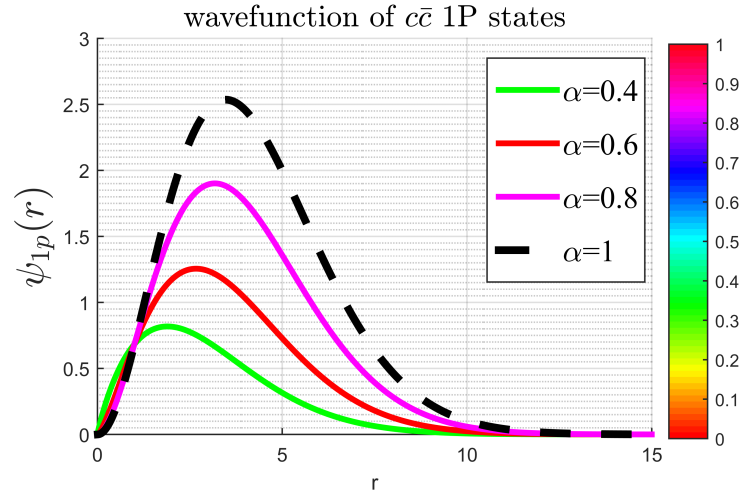


FIGURE 10 – Fonction d’onde de l’état fondamental du méson $c\bar{c}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

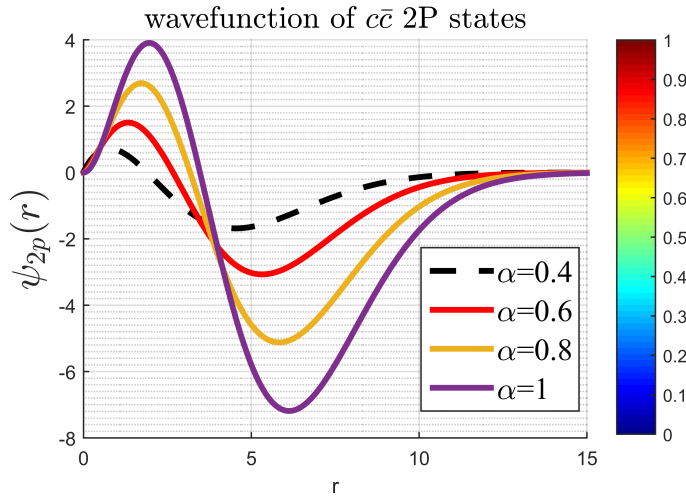


FIGURE 11 – Fonction d’onde du premier état excité du méson $c\bar{c}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

de façon monotone avec l’augmentation de β , et que les courbes avec $\alpha \neq 1$ sont séparées de la courbe classique de Minkowski. De plus, l’écart devient plus important pour les petites valeurs de α . Dans [104], l’auteur a traité le plasma quark-gluon comme étant composé uniquement de quarks légers, qui interagissent faiblement. Il a observé que l’énergie libre de Helmholtz diminue à mesure que la température augmente. Dans la référence [105], Modarres et Gholizade ont calculé la fonction de Helmholtz d’une particule neutre et ont observé que l’énergie libre du système diminue à mesure que la température augmente. Dans notre modèle, le comportement des mésons charmonium et bottomonium est en accord avec ce que prévoit les références

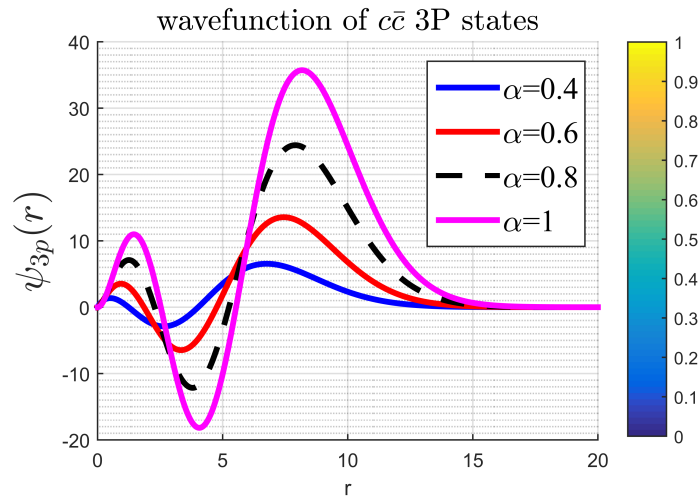


FIGURE 12 – Fonction d’onde du deuxième état excité du méson $c\bar{c}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

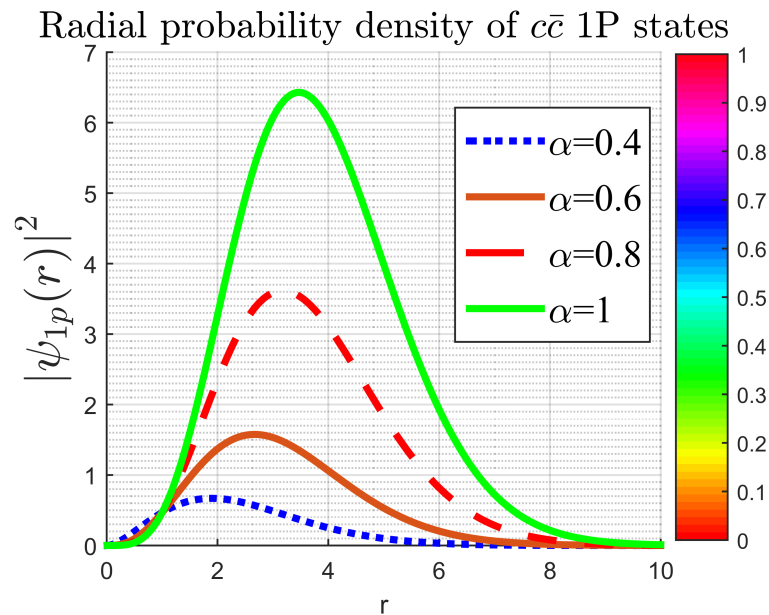


FIGURE 13 – Fonction densité de probabilité radiale de l’état fondamental du méson $c\bar{c}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

[104, 105, 123].

Sur les figures 27 et 28 sont représentés les variations de l’énergie interne en fonction de β pour différentes valeurs de α , respectivement pour les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$. Elles révèlent que $U(\beta)$ diminue avec l’augmentation de β , et l’énergie interne passe à des valeurs inférieures lorsqu’on augmente le paramètre du défaut. Dans la référence [123], les auteurs ont étudié les propriétés thermodynamiques de particules neutres dans un espace-temps à corde cosmique à partir de

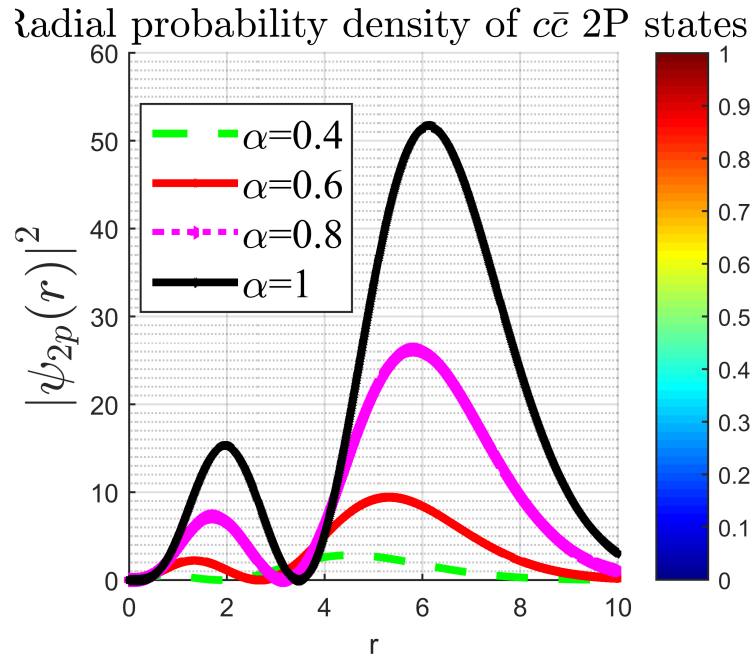


FIGURE 14 – Fonction densité de probabilité radiale du premier état excité du méson $c\bar{c}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

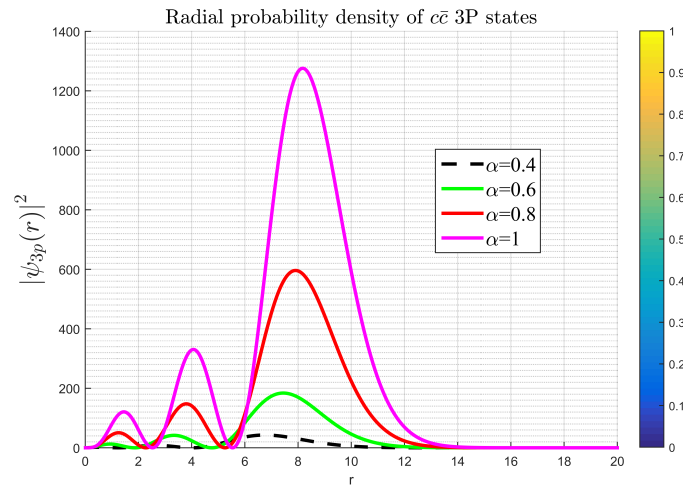


FIGURE 15 – Fonction densité de probabilité radiale du deuxième état excité du méson $c\bar{c}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

l'équation non relativiste de Schrödinger-Pauli. Ils ont observé que l'énergie interne du système augmente à mesure que la température augmente. Ainsi, la conclusion du présent travail sur l'énergie interne est la même que celle des travaux récents[121, 122, 123] en plus du fait que dans notre cas, la symétrie de rotation n'est pas préservée.

L'entropie $S(\beta)$ et la capacité calorifique spécifique à volume constant $C_v(\beta)$ sont tracées en

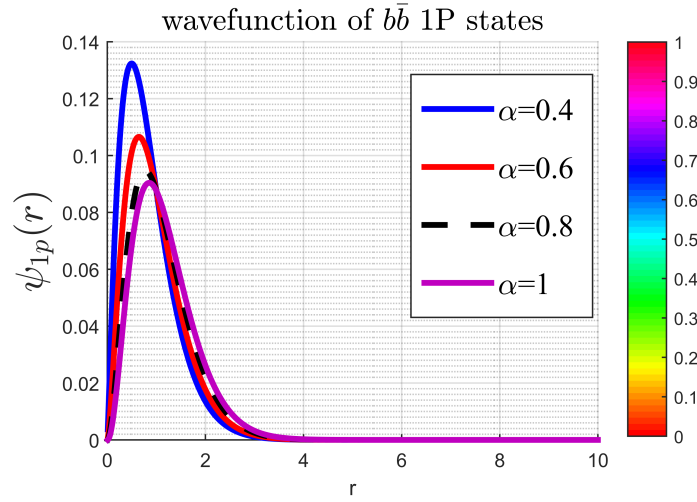


FIGURE 16 – Fonction d’onde de l’état fondamental du méson $b\bar{b}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

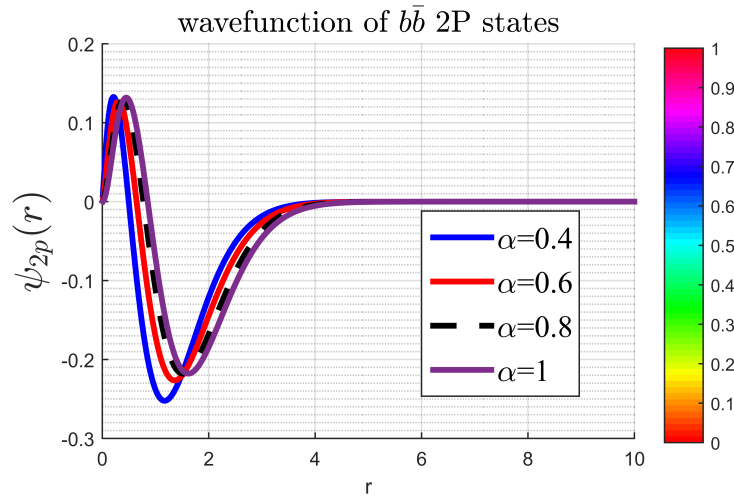


FIGURE 17 – Fonction d’onde du premier état excité du méson $b\bar{b}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

fonction de β respectivement sur la Figure 29 et la Figure 31 pour le méson $c\bar{c}$, et sur la Figure 30 et la Figure 32 pour le méson $b\bar{b}$. Ces figures révèlent que l’entropie et la capacité calorifique spécifique des quarkonia lourds ne sont pas influencées par le champ gravitationnel que génère la corde cosmique dans son voisinage et présentent donc des comportements similaires aux solutions dans l’espace-temps plat de Minkowski. Dans la référence [123] un résultat similaire a été obtenu pour les particules neutres, montrant la non-dépendance de la capacité calorifique et de l’entropie à la gravité du défaut topologique, ce qui est en parfait accord avec notre modèle.

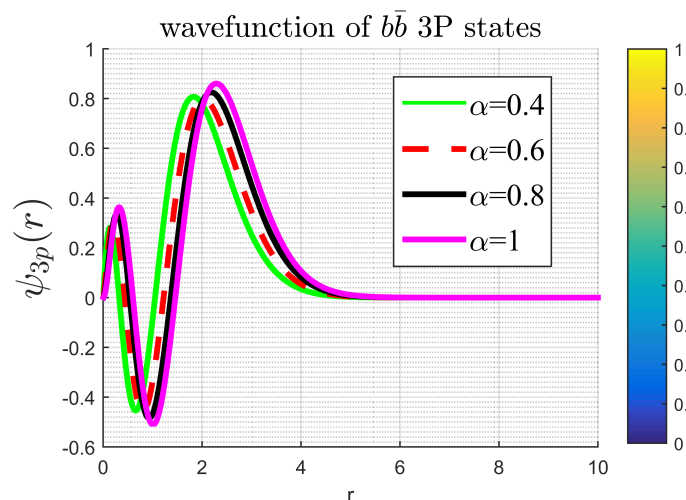


FIGURE 18 – Fonction d’onde du deuxième état excité du méson $b\bar{b}$ tracée en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

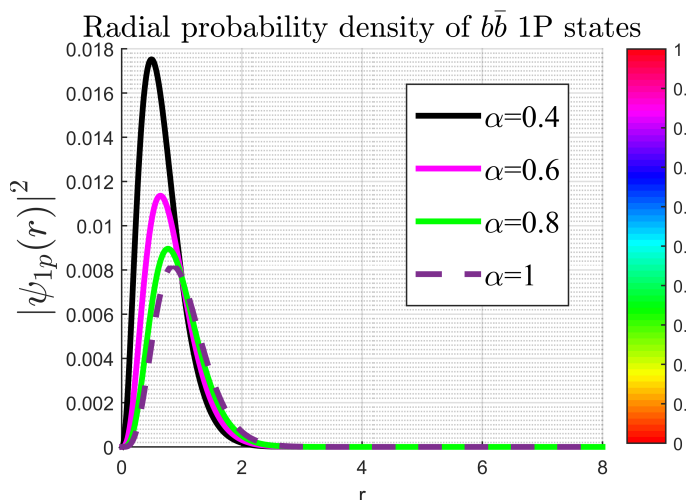


FIGURE 19 – Fonction densité de probabilité radiale de l’état fondamental du méson $b\bar{b}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

III.3 Propriétés des mésons dans l’espace plat fractionnaire

Dans cette partie, l’effet du champ gravitationnel est ignoré et l’effet mémoire dû au paramètre fractionnaire est considéré. Nous allons nous intéresser en détails à son influence sur les propriétés de quelques particules subatomiques, notamment les énergies, les spectres de masses, ainsi que les constantes de désintégration pseudoscalaires et vectorielles.

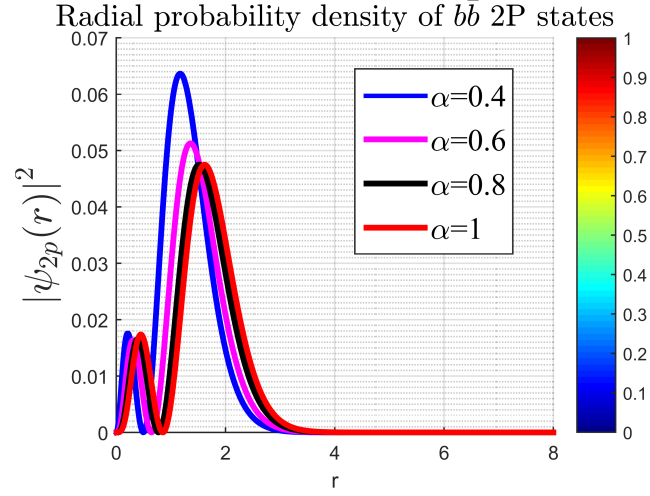


FIGURE 20 – Fonction densité de probabilité radiale du premier état excité du méson $b\bar{b}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

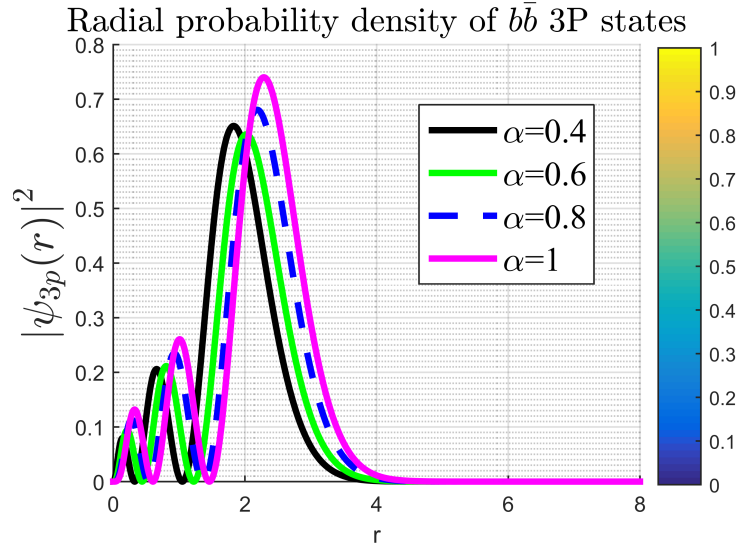


FIGURE 21 – Fonction densité de probabilité radiale du deuxième état excité du méson $b\bar{b}$ en fonction de r pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$

III.3.1 Spectres de masse des quarkonia lourds et des mésons lourds-légers

Dans cette sous-section, nous présentons les résultats numériques des spectres de masse des quarkonia lourds et quelques mésons lourds-légers. Les masses des quarks bottom et charm peuvent être trouvées dans la littérature et sont généralement prises entre 4,8GeV et 5,3GeV pour le quark bottom, et entre 1,2GeV et 1,8GeV pour le quark charm [113, 114, 119, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131]. Pour le présent travail, nous avons pris $m_c=1,209\text{GeV}$ [132, 133], $m_b=4,823\text{GeV}$

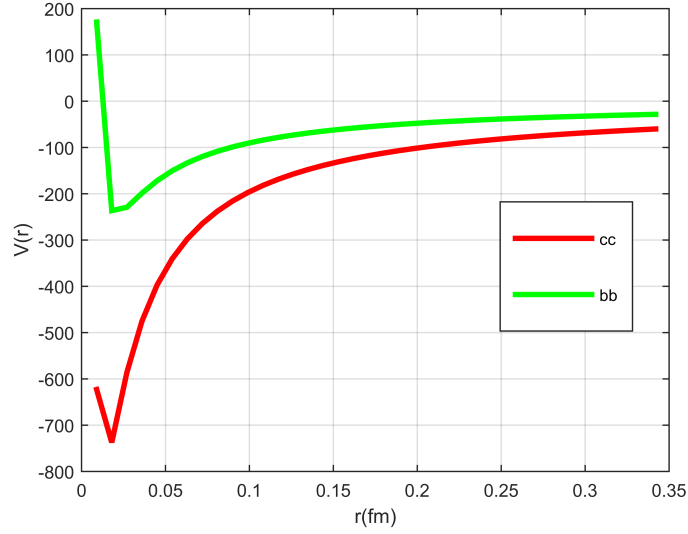
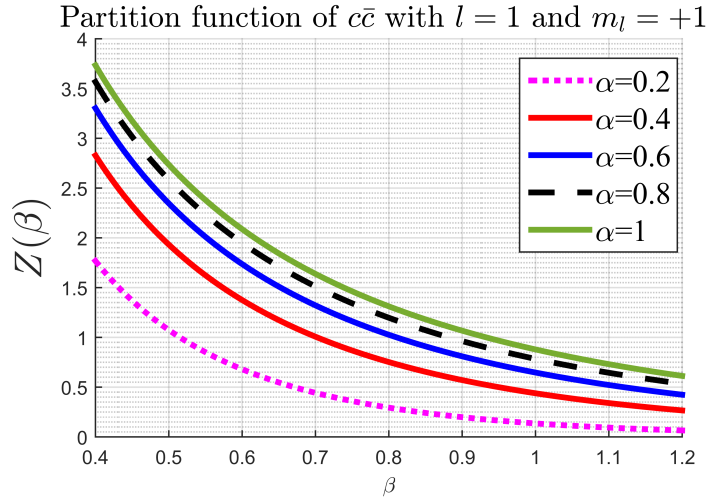

 TABLE 6 –
 $m_s = 0.419$

 FIGURE 22 – variations du potentiel de Cornell étendu (en GeV) pour les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ avec les paramètres du Tableau 2

 FIGURE 23 – Fonction de partition des états P du méson $c\bar{c}$, en fonction de β pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$.

[134, 135], $m_s = 0,419\text{GeV}$ et $m_u = m_d = 0,220\text{GeV}$ [126, 127]. Les paramètres libres a, b et d du potentiel ont été obtenus en ajustant les spectres avec les données expérimentales et sont rapportés dans le Tableau 6. Les résultats numériques des spectres de masse des mésons lourds-légers sont rapportés dans les Tableaux 7-12 de l'état $1S$ à l'état $4S$. Nous avons choisi les valeurs $\nu = 0.9$ et $\nu = 1$ car elles permettent d'obtenir des résultats beaucoup plus précis. Notre étude s'est donc limitée à l'ensemble $\{0.9; 1\}$. Ainsi $\nu = 1$ étant le cas classique.

Dans le Tableau 7, les spectres de masse fractionnaires du charmonium sont rapportés de

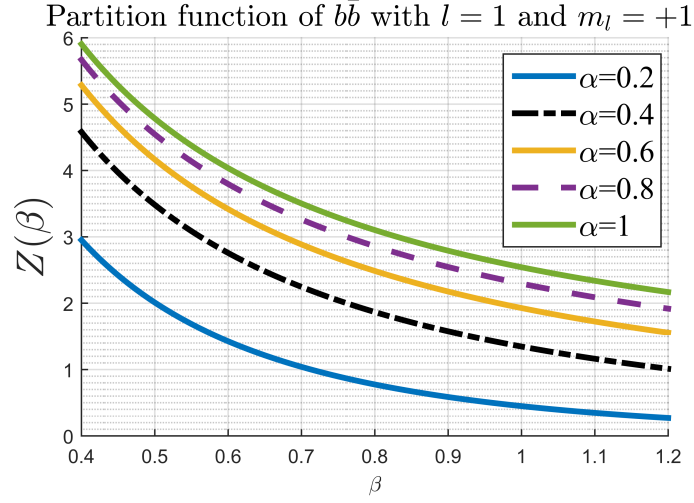


FIGURE 24 – Fonction de partition des états P du méson $b\bar{b}$, en fonction de β pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$.

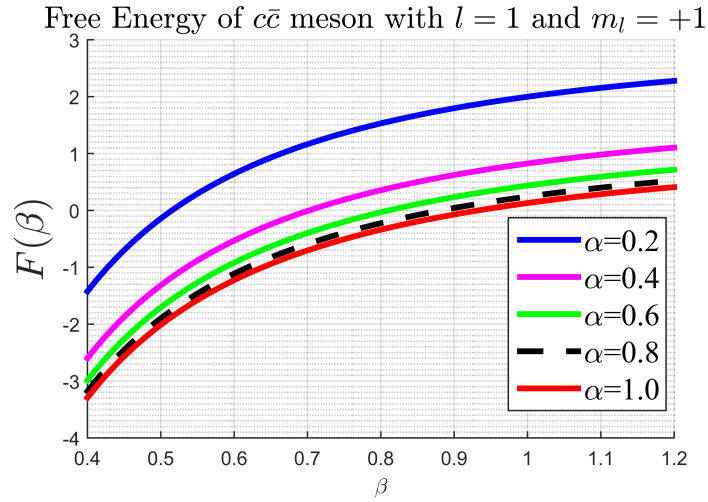


FIGURE 25 – Energie libre des états P du méson $c\bar{c}$, en fonction de β pour différentes valeurs de α avec $l = 1, m_l = +1$.

l'état 1S à 4S pour différentes valeurs du paramètre ν . L'équation (II.174) a été utilisée pour obtenir les valeurs des paramètres du potentiel pour le méson $c\bar{c}$ en ajustant les masses théoriques avec des données expérimentales [113]. N1 et N2 représentent nos prédictions respectivement pour $\nu = 1$ et $\nu = 0.9$. Les résultats fournis par notre modèle s'avèrent être en bon accord avec la masse moyennée de spin expérimentale [128] et est également en bon accord avec les prédictions des études théoriques antérieures telles que [119, 132, 133] pour l'état 3S ; cependant, notre résultat pour l'état $2P$ est proche de celui de la référence [133] pour $\nu = 0,9$. L'effet du paramètre fractionnaire conforme joue un rôle important dans l'obtention de nos résultats. La

présence du paramètre d'ordre fractionnaire permet d'accéder aux spectres de masse d'autres modèles inexplorés à chaque fois que l'on modifie la valeur de ν .

TABLE 7 – Spectre de masse fractionnaire du charmonium (en GeV). Les masses des quarks sont $m_c = 1.207\text{GeV}$, $m_{\bar{c}} = 1.207\text{GeV}$, et les paramètres du potentiel $a = 0.0297\text{GeV}^3$, $b = 0.2209\text{GeV}^2$ and $d = 4.8542\text{GeV}^{-1}$.

Etats	N1($\nu = 1$)	N2($\nu = 0.9$)	Ref.[133]	Exp[128]	Relativistic[119]	Ref.[132]
1S	3.096	3.063	3.063	3.068	3.066	3.067
1P	3.213	3.180	3.500	3.501	3.504	3.504
1D	3.411	3.379	3.797	3.798	3.809	3.795
2S	3.686	3.624	3.661	3.674	3.661	3.660
2P	3.773	3.712	3.920	-	3.925	3.897
3S	4.274	4.185	4.064		4.063	4.014
4S	4.864	4.747	4.400		-	4.267

Dans le Tableau 8, sont rapportés les spectres de masse du bottomonium de l'état 1S à l'état 4S pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire. Les spectres de masse fractionnaires et les paramètres du potentiel ont été calculés à l'aide de l'équation (II.174). Il a été observé que les résultats fournis par notre modèle sont en bon accord avec la masse moyennée de spin expérimentale [128] et améliorés par rapport aux résultats des références [119, 134, 135] pour les états 1S et 2S, puis proches de ceux des références [119, 135] pour les états 2S et 2P. Nous constatons également que lorsque $\nu \rightarrow 1$, nos résultats sont proches de ceux du traitement classique utilisant la méthode d'itération asymptotique [91]. Comme illustré sur la Figure 33, les variations des spectres de masse des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ en fonction du nombre quantique radial n pour différents valeurs de ν . Nous notons que l'écartement entre ces courbes augmente à mesure que n tend vers des valeurs plus élevées. Cependant, les courbes se rejoignent à mesure que n tend vers des valeurs inférieures.

TABLE 8 – Spectre de mass fractionnaire du bottomonium (en GeV). Les masses des quarks sont $m_b = 4.823\text{GeV}$, $m_{\bar{b}} = 4.823\text{GeV}$, et les paramètres du potentiel sont $a = 0.0289\text{GeV}^3$, $b = 0.3555\text{GeV}^2$ and $d = 4.8542\text{GeV}^{-1}$.

Etats	N1($\nu = 1$)	N2($\nu = 0.9$)	Ref.[134]	Exp[128]	Relativistic[119]	Ref.[135]
1S	9.460	9.444	9.442	9.444	9.445	9.490
1P	9.491	9.475	9.895	9.890	9.892	9.873
1D	9.550	9.534	10.151	-	10.157	10.122
2S	10.023	9.981	10.008	10.017	10.015	10.008
2P	10.039	9.998	10.250	10.254	10.254	10.235
3S	10.585	10.518	10.345	-	10.348	10.344
4S	11.147	11.055	10.607		-	-

Dans le Tableau 9, les spectres de masse du méson $\bar{b}c$ sont rapportés jusqu'à l'état 4S. Dans l'état fondamental, nos résultats sont proches de ceux du traitement relativiste [119] et proches de ceux des références [119, 130, 138] pour les états excités. Par ailleurs, il n'existe pas encore de masse moyennée de spin expérimentale pour les états étudiés.

TABLE 9 – Spectre de masse fractionnaire du méson $\bar{b}c$ (en GeV). Les masses des quarks sont $m_c = 1.207\text{GeV}$, $m_{\bar{b}} = 4.823\text{GeV}$, et les paramètres du potentiel sont $a = 0.0204\text{GeV}^3$, $b = 0.2209\text{GeV}^2$ et $d = 4.8542\text{GeV}^{-1}$.

Etats	N1($\nu = 1$)	N2($\nu = 0.9$)	Ref.[130]	Relativiste[119]	Ref.[138]
1S	6.277	6.252	6.301	6.316	6.318
1P	6.340	6.315	6.718	6.736	6.728
1D	6.451	6.427	7.008	7.077	7.009
2S	6.814	6.756	6.893	6.869	6.888
2P	6.851	6.794	7.114	7.129	7.134
3S	7.351	7.260	-	7.224	7.271
4S	7.889	7.764	-	-	-

Dans le tableau 10, les spectres de masse du méson $c\bar{s}$ sont rapportés jusqu'à l'état 4S. En observant les valeurs des masses des états 1S et 1P, on constate que nos résultats sont globalement en bon accord avec les valeurs expérimentales de masses moyennées de spin [113], et révèlent une amélioration comparées aux prédictions de [136, 137]. Pour l'état 2S en particulier, nos résultats sont très proches des prédictions théoriques de la référence [136] lorsque $\nu = 1$, et de la référence [137] pour $\nu = 0,9$. Ces prédictions sont assez proches de la valeur expérimentale de la masse moyennée de spin qui est de 2,690 GeV [113]. Il n'y a pas encore de données expérimentales disponibles pour d'autres états tels que 1D, 2P, 3S et 4S par exemple. Le comportement des spectres de masse des mésons $\bar{b}c$ et $c\bar{s}$ dans le domaine fractionnaire conforme est illustré sur la Figure 34. Il a été observé que, pour des petites valeurs de ν , les courbes sont décalées vers le bas à mesure que n augmente.

Dans le Tableau 11, les spectres de masse du méson $b\bar{s}$ sont rapportés de l'état 1S à l'état 4S pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire. Nos résultats sont en bon accord avec les données expérimentales de la référence [129] pour l'état 1S, améliorés par rapport à ceux du modèle relativiste de Godfrey [127] et proches des résultats des références [139, 140] pour $\nu = 1$. Les données expérimentales ne sont pas disponibles pour les états 1P, 1D, 2S, 2P, 3S et 4S.

Les résultats numériques des spectres de masse du méson $b\bar{q}$ sont présentés dans le Tableau 12, de l'état 1S à l'état 4S pour différentes valeurs du paramètre d'ordre fractionnaire. Pour l'état 1S, notre prédiction est assez proche de la valeur expérimentale de la masse moyennée de spin

TABLE 10 – Spectre de masse fractionnaire du méson $c\bar{s}$ (en GeV). Les masses des quarks sont $m_c = 1.207\text{GeV}$, $m_{\bar{s}} = 0.419\text{GeV}$, et les paramètres du potentiel $a = 0.01282\text{GeV}^3$, $b = 0.0670\text{GeV}^2$ and $d = 4.8546\text{GeV}^{-1}$.

Etats	N1($\nu = 1$)	N2($\nu = 0.9$)	Ref.[136]	Exp [113]	Ref.[?]
1S	2.346	2.307	-	2.077	2.075
1P	2.486	2.447	-	2.470	2.547
1D	2.701	2.662	2.855	-	2.720
2S	2.709	2.655	2.710	2.690	2.720
2P	2.836	2.783	3.018	-	3.104
3S	3.072	3.002	3.185		3.236
4S	3.435	3.350	-		-

TABLE 11 – Spectre de masse fractionnaire du méson $b\bar{s}$ (en GeV). Les masses des quarks sont $m_b = 4.823\text{GeV}$, $m_{\bar{s}} = 0.419\text{GeV}$, et les paramètres du potentiel sont $a = 0.03725\text{GeV}^3$, $b = 0.2796\text{GeV}^2$ et $d = 0.1255\text{GeV}^{-1}$.

Etats	N1($\nu = 1$)	N2($\nu = 0.9$)	Ref.[139]	Exp[129]	Ref.[140]
1S	5.415	5.349	5.400	5.402	5.402
1P	5.830	5.764	5.811	-	5.830
1D	6.264	6.198	6.121		6.189
2S	6.819	6.697	5.996		5.951
2P	6.786	6.657	6.262		6.221
3S	8.222	8.044	6.430		6.425
4S	9.625	9.392	-		6.862

qui est de 5,313 GeV [129] et améliorée par rapport au modèle relativiste [129]. Étant donné que les valeurs expérimentales de la masse moyennée de spin ne sont pas disponibles pour d'autres états, nous avons comparé nos prédictions à celles de certains travaux théoriques pertinents. En effet, nos prédictions reproduisent fidèlement celles des références [139, 140] pour les états 1P, 1D et 2P lorsque $\nu = 1$. De plus, la Figure 35 illustre les variations des spectres de masse en fonction du nombre quantique principal n , pour différentes valeurs du paramètre d'ordre fractionnaire ν pour les mésons $b\bar{s}$ et $b\bar{q}$.

Au regard des travaux réalisés dans la référence [110] par Ahmed Al-Jamel, nous pouvons constater que le potentiel qu'ils ont utilisé est un cas particulier du modèle de potentiel que nous avons utilisé pour l'obtention de nos résultats. Il nous est donc possible d'obtenir les expressions des énergies et des fonctions d'onde de la référence [110] simplement en ajustant de façon convenable les paramètres de notre modèle de potentiel ainsi que l'ordre de la dérivée fractionnaire. En outre, les résultats actuels sont globalement améliorés par rapport aux résultats des références [110, 127] et s'avèrent être en bon accord avec les données expérimentales. De plus, nous constatons qu'en augmentant l'ordre de la dérivée fractionnaire, les valeurs des masses des

TABLE 12 – Spectre de masse fractionnaire du méson $b\bar{q}$ (en GeV). Les masses des quarks sont $m_b = 4.823\text{GeV}$, $m_q = m_{\bar{q}} = 0.220\text{GeV}$, ($q = u, d$). Les paramètres du potentiel sont $a = 0.01779\text{GeV}^3$, $b = 0.1589\text{GeV}^2$ et $d = 0.1232\text{GeV}^{-1}$.

Etats	N1($\nu = 1$)	N2($\nu = 0.9$)	Ref.[139]	Exp[129]	Ref.[140]
1S	5.325	5.269	5.316	5.313	5.313
1P	5.723	5.667	5.733	-	5.728
1D	6.131	6.076	6.056		6.071
2S	6.412	6.293	5.931		5.819
2P	6.846	6.377	6.206		6.110
3S	7.500	7.317	6.358		6.251
4S	8.587	8.341	-		6.647

mésons lourds-légers augmentent également, telque illustré sur les Figures 33, 34 et 35. Le paramètre d'ordre fractionnaire n'est pas mentionné dans les travaux précédents [110, 32, 91, 127] sur les spectres des mésons lourd-léger. Dans la référence [91], les auteurs ont utilisés le même modèle de potentiel et ont résolu l'équation de Schrödinger par la méthode d'itération asymptotique classique. Dans le présent travail, nous avons cet avantage que grace à la méthode utilisée, l'équation de Schrödinger peut être étendue à l'espace fractionnaire conformable. Par conséquent, les valeurs propres d'énergie des mésons lourds-légers et les fonctions d'onde sont étendues à l'ordre fractionnaire, conduisant à une expression des l'énergies propre, beaucoup plus générale que celles obtenues dans les travaux précédents. Par conséquent, les résultats actuels sont améliorés par rapport à ceux des références [110, 32, 91, 127] et sont en bon accord avec les données expérimentales [113, 125, 128]. Il est important de mentionner que les prédictions de notre modèle sont très sensibles au paramètre d'ordre fractionnaire. En effet, le pourcentage maximum d'erreur relative est de 6,1% pour $\nu = 1$ et de 5,3% pour $\nu = 0,9$ pour le méson $c\bar{c}$, 5,3% pour $\nu = 1$ et 4,4% pour $\nu = 0,9$ pour le méson $b\bar{b}$, 0% pour $\nu = 1$ et 0,3% pour $\nu = 0,9$ pour le méson $\bar{b}c$, 5,5% pour $\nu = 1$ et 6,8% pour $\nu = 0,9$ dans le cas du méson $c\bar{s}$, 0% pour $\nu = 1$ et 1,1% pour $\nu = 0,9$ pour le méson $b\bar{s}$, et en fin pour ce qui est du méson $b\bar{q}$ nous avons, 0% pour $\nu = 1$ et 0,9% pour $\nu = 0,9$.

Par ailleurs, comme nous l'avons indiqué précédemment, le potentiel de Cornell étendu est la généralisation de nombreux modèles de potentiels existants dans la littérature. De plus, sa forme fractionnaire introduite dans le cadre de cette thèse le rend encore plus général. Le potentiel d'interaction fractionnaire conforme donné par l'équation (II.149) est tracé en fonction de la séparation inter quark r , sur la Figure 36 pour les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$, sur la Figure 37 pour les mésons $\bar{b}c$ et $b\bar{s}$, et sur la Figure 38 pour les mésons $c\bar{s}$ et $b\bar{q}$. Pour tous les mésons couverts

par cette étude, le potentiel d'interaction présente généralement un comportement similaire à l'exception des mésons $b\bar{s}$ et $b\bar{q}$. Ce résultat n'est point surprenant, il est en accord avec l'étude classique faite dans la référence [91] pour le même modèle de potentiel. Pour d'autres mésons comme $b\bar{b}$, $c\bar{c}$, $c\bar{s}$ et $\bar{b}c$ nous pouvons voir que le potentiel se limite davantage aux grandes valeurs du paramètre d'ordre fractionnaire. Un tel comportement révèle que nous pouvons utiliser des modèles fractionnaires pour étudier les effets de confinement des quarks dans les hadrons et même dans certains cas la matière hadronique déconfinée ou plasma de quark-gluon.

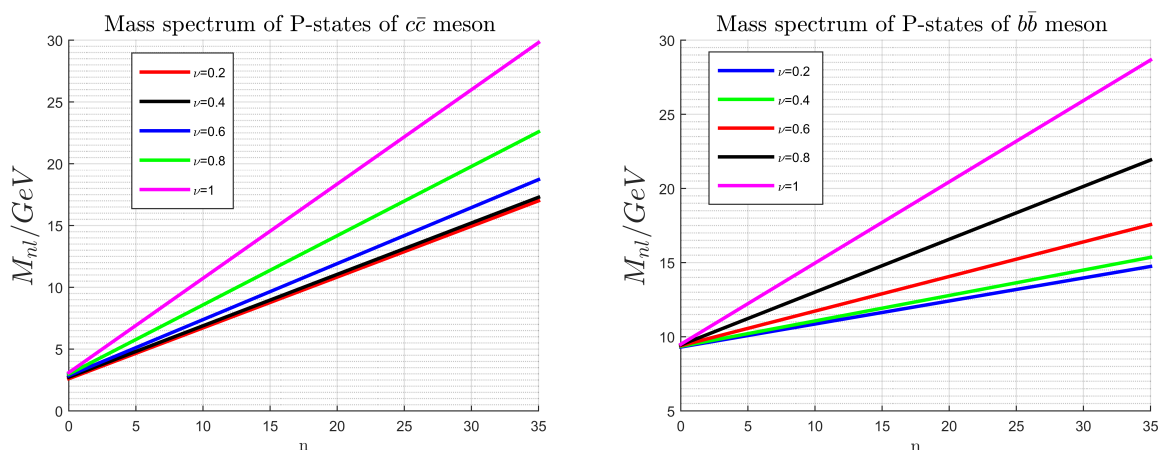


FIGURE 33 – Spectres de masse fractionnaires des mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ en fonction du nombre quantique radial n pour différentes valeurs de ν et pour $l = 1$.

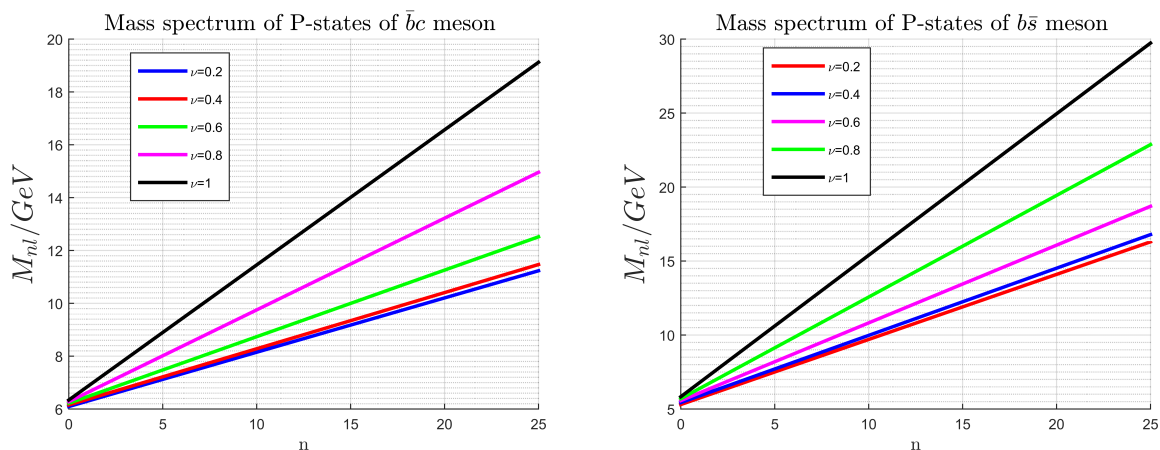


FIGURE 34 – Spectres de masse fractionnaires des mésons $\bar{b}c$ et $b\bar{s}$ en fonction du nombre quantique radial n pour différentes valeurs de ν et pour $l = 1$.

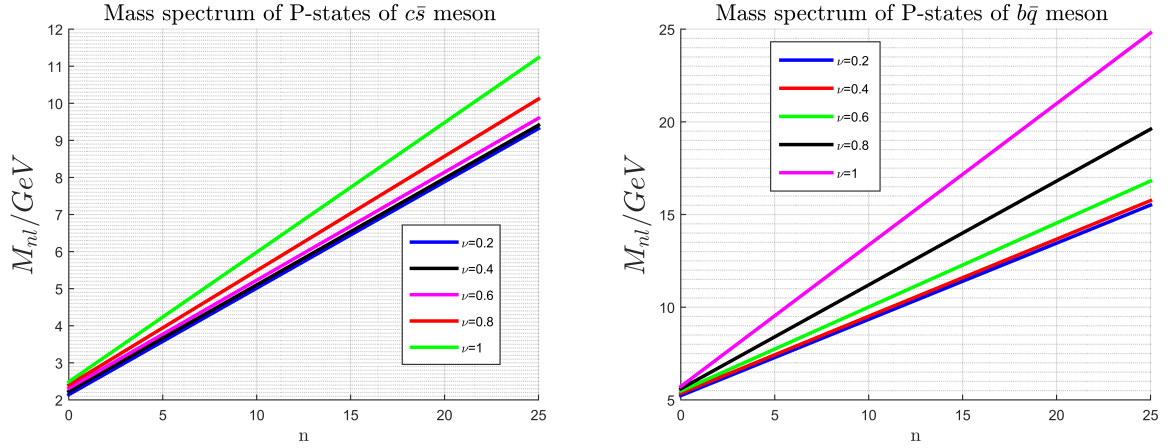


FIGURE 35 – Spectres de masse fractionnaires des mésons $c\bar{s}$ et $b\bar{q}$ en fonction du nombre quantique radial n pour différentes valeurs de ν et pour $l = 1$.

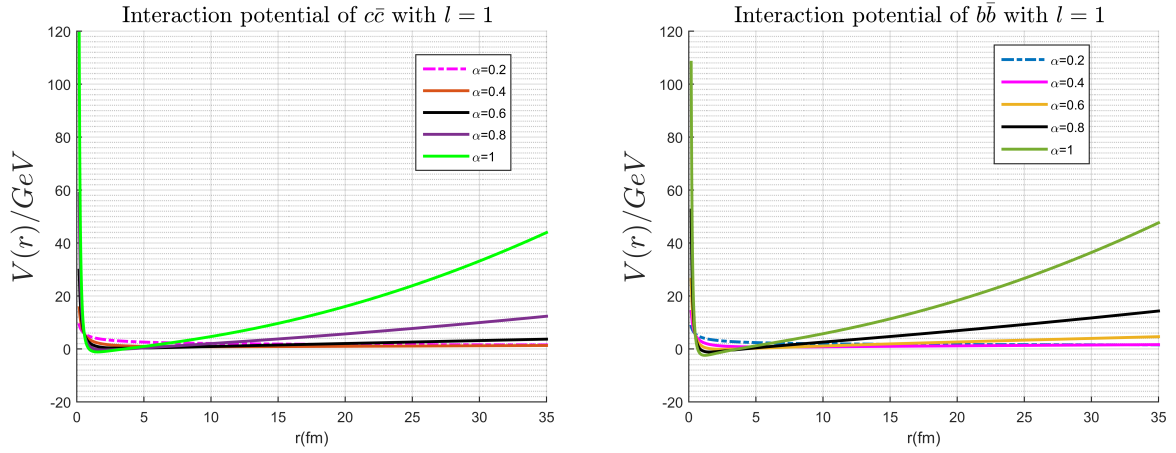


FIGURE 36 – Variations du potentiel d'interaction par rapport à la distance inter quark r pour les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ pour différentes valeurs de ν .

III.3.2 Constantes de désintégration de quelques mésons

La prédiction des spectres de masse en bon accord avec l'expérience n'est pas toujours suffisante pour attester de la validité du modèle et de son aptitude à décrire les propriétés des hadrons. Il est donc nécessaire de considérer également d'autres propriétés telles que les constantes de désintégration. En spectroscopie hadronique, l'un des aspects les plus intéressants des modèles de potentiel est qu'ils permettent d'obtenir très simplement les constantes pseudo-scalaires et vectorielles de désintégration d'un méson. Les constantes de désintégration jouent un rôle important dans la spectroscopie des hadrons car elles sont utilisées pour mesurer la durée de vie des particules subatomiques. La spectroscopie des hadrons est une technique utilisée pour étudier

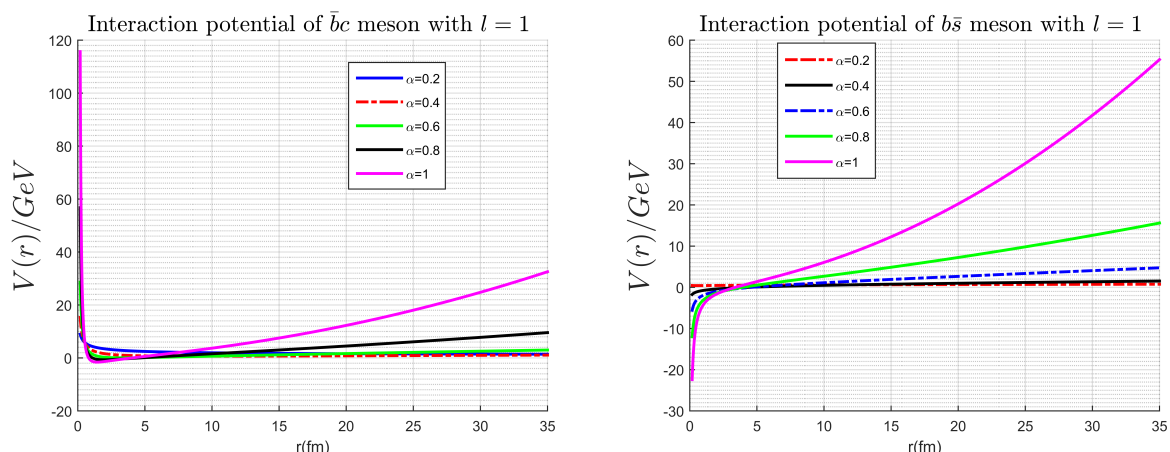


FIGURE 37 – Variations du potentiel d’interaction par rapport à la distance inter quark r pour les mésons $\bar{b}c$ et $b\bar{s}$ pour différentes valeurs de ν .

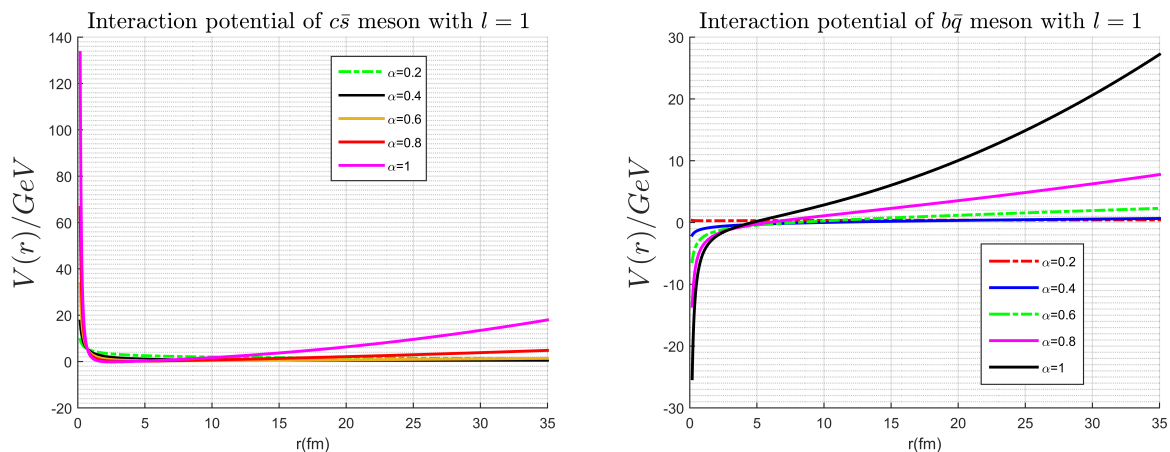


FIGURE 38 – Variations du potentiel d’interaction par rapport à la distance inter quark r pour les mésons $c\bar{s}$ et $b\bar{q}$ pour différentes valeurs de ν .

la structure interne des hadrons, tels que les protons et les neutrons, en analysant les émissions de particules lorsqu’ils se désintègrent. La durée de vie des hadrons est mesurée à l’aide de leurs constantes de désintégration, qui sont des paramètres qui indiquent la probabilité qu’une particule donnée se désintègre à un moment donné. Ces constantes sont importantes car elles permettent aux physiciens de mieux comprendre la structure interne des hadrons et les forces qui les maintiennent ensemble. En outre, il est important de noter que la notion de constante de désintégration est un outil d’une grande efficacité lorsqu’il s’agit d’estimer les composantes de la matrice hadronique ou d’extraire des informations précises concernant la structure des mésons et des baryons à courte distance [102, 141]. De plus, la connaissance de leurs valeurs joue un

rôle très important dans le calcul des éléments de la matrice Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, lors de l'étude de processus comme les désintégrations faibles [142, 143] et dans diverses mesures expérimentales [144, 145].

Telque mentionné précédemment, afin de rendre cette étude plus complète, nous avons calculé les constantes de désintégration pseudoscalaires et vectorielles des mésons $D^0, D^+, D_s^+, B^-, \bar{B}^0$ et \bar{B}_s^0 en tennant compte de l'effet du paramètre d'ordre fractionnaire conformable, dans un modèle de quarks non relativiste. En physique des particules, les mésons B sont des particules subatomiques constituées d'un antiquark bottom \bar{b} et soit d'un quark charm pour (B_c^+), strange pour (B_s^0), up pour (B^+) ou d'un quark down pour (B^0) [146]. Cependant, pour chaque méson B , il existe une antiparticule composée d'un quark bottom et d'un quark charm pour (B_c^-), d'un quark bottom et d'un quark strange pour (\bar{B}_s^0), d'un quark bottom et d'un antiquark up pour (B^-) et en fin, d'un quark bottom et d'un antiquark down pour (\bar{B}^0). Les mésons D quant à eux, sont les particules les plus légères contenant des quarks charm. Ils sont principalement étudiés pour obtenir plus d'informations sur l'interaction faible [147]. En particulier, notre approche a le mérite de rapprocher les valeurs théoriques des valeurs expérimentales grace à l'introduction de la dérivée fractionnaire. En effet, le rôle du paramètre d'ordre fractionnaire est très important dans ce travail, dans le sens où il permet d'obtenir des valeurs beaucoup plus précises des constantes de désintégration pseudoscalaire et vectorielle. À partir du Tableau 13, où N1 et N2 représentent nos prédictions respectivement pour $\nu = 0,5$ et $\nu = 1$, nous pouvons observer que les valeurs classiques obtenues dans notre approche et celles d'autres travaux théoriques sont moins bonnes que les valeurs fractionnaires. En particulier, la valeur $\nu = 0,5$ a été choisie car c'est elle qui a fournit des résultats beaucoup plus précis.

TABLE 13 – Constantes de désintégration pseudoscalaires et vectorielles des mésons lourd-léger en MeV.

Particule	Composition	N1	N2	Exp.[148]	[149]	[150]	[151]
D^0	$c\bar{u}$	205.4	204.1	206 ± 8.9	207.53	$206.2 \pm 7.3 \pm 5.1$	205.14
D^+	$c\bar{d}$	205.4	204.1	206 ± 8.9	207.53	$206.2 \pm 7.3 \pm 5.1$	205.14
D_s^+	$c\bar{s}$	247.3	246.2	249	262.56	$243.3 \pm 15.7 \pm 4.5$	241.84
B^-	$b\bar{u}$	207.9	206.1	204 ± 31	208.13	$193.4 \pm 12.3 \pm 4.3$	201.09
\bar{B}^0	$b\bar{d}$	207.9	206.1	204 ± 31	208.13	$193.4 \pm 12.3 \pm 4.3$	201.09
\bar{B}_s^0	$b\bar{s}$	270.6	269.3		262.39	$232.5 \pm 18.6 \pm 2.4$	292.04

Pour chacun des mésons lourd-léger que nous avons considéré dans cette étude, à savoir

les mésons D^0 , D^+ , D_s^+ , B^- , \bar{B}^0 et \bar{B}_s^0 , nos prédictions des constantes de désintégration pseudoscalaire et vectorielle sont globalement en bon accord avec les données expérimentales [148]. Il convient de mentionner que pour le méson \bar{B}_s^0 , les résultats expérimentaux ne sont pas encore disponibles. C'est la raison pour laquelle nous avons comparé nos résultats avec d'autres prédictions théoriques telles que celles des références [149, 150, 151] et nous avons trouvé un bon accord dans l'ensemble. Notons également que les corrections relativistes ne sont pas prises en compte dans ce travail. C'est la principale raison pour laquelle les constantes de désintégration pseudoscalaire et vectorielle des mésons lourds-légers ont des valeurs pratiquement égales.

III.4 Propriétés des baryons et mésons dans l'espace-temps de Schwarzschild

Dans cette section, nous utilisons les résultats obtenus au chapitre II, sur l'espace d'Einstein-Schwarzschild pour évaluer quelques propriétés des baryons, mésons et de quelques noyaux atomiques. Dans le cadre de cette approche nouvellement proposée, et pour des cas particuliers du champ scalaire de Yukawa et donc du potentiel d'interaction auquel il se couple, nous allons estimer la masse de quelques noyaux d'atomes, le rayon de Schwarzschild associé à certains baryons et mésons, ainsi que leurs masses. En outre, nous proposons d'expliquer le phénomène de confinement des quarks et des gluons à l'intérieur des hadrons à partir de la courbure de l'espace-temps.

III.4.1 Masses de quelques noyaux atomiques et de quelques hadrons

Comme mentionné au chapitre précédent, les noyaux atomiques interagissent via l'échange d'une particule subatomique, le méson π^0 , encore appelé pion neutre, et dont la masse est d'environ 0,134977 GeV [17, 152]. Pour calculer la masse des noyaux considérés dans notre étude, nous allons utiliser l'équation (II.71) dans le cas particulier de l'interaction forte résiduelle ($a = 0, \mu \neq 0$). La masse d'un noyau atomique peut être calculée à partir de l'équation (II.176). En physique nucléaire, les masses effectives des nucléons sont inférieures à leurs masses libres et sont d'environ 0,8 GeV [153, 154, 155]. En effet, dans le cas du proton par exemple on trouve $m_p^{eff} = 0,811$ GeV, et dans le cas du neutron on trouve $m_n^{eff} = 0,845$ GeV. Plus de détails peuvent être trouvés dans les références [153, 154, 155] et les références qui y sont contenues.

Au vu de ces valeurs de masses effectives, on remarque que le proton ou le neutron en interaction avec un autre nucléon perd une quantité de sa masse, qui se transforme en énergie de liaison. Ce défaut de masse correspond approximativement à la masse d'un pion neutre, à savoir le méson π^0 , et est d'environ $\mu = 0,134977$ GeV [152]. Il est bien connu que l'échange de mésons π virtuels, ainsi que l'échange de mésons vectoriels ω et ρ , fournit une bonne explication de l'interaction forte résiduelle entre les nucléons [156]. Cependant, dans le cadre de cette thèse, il n'est pas possible d'estimer la contribution des mésons vecteurs aux masses nucléaires, puisque l'image physique qui est cachée derrière l'emploi d'un champ scalaire fort de type Yukawa est justement l'échange d'un champ massif sans spin, comme celui d'un pion. Néanmoins, la contribution des mésons vecteurs aux masses nucléaires pourrait être étudiée dans de futures études en utilisant un potentiel plus général prenant en compte les forces dépendant du spin ou des termes encore plus complexes. Dans cette étude, nous considérons les états π^\pm et π^0 du méson π de masses respectives $m_{\pi^\pm} = 139,570$ MeV et $m_{\pi^0} = 134,977$ MeV. Les masses des noyaux atomiques considérés dans cette thèse sont reportées dans le Tableau 14. Les calculs ont été effectués pour le cas particulier du potentiel pour lequel $a = 0$. Les résultats numériques ont été obtenus pour différentes valeurs du paramètre b , puis comparés aux données expérimentales de la référence [152] et à des études théoriques antérieures. M1 et M2 représentent les valeurs de nos masses respectivement pour $b = 0,95$ et $b = 0,96$.

TABLE 14 – Masses de quelques noyaux atomiques en MeV, calculées à partir des masses effectives $m_p^{eff} = 0,811$ GeV et $m_n^{eff} = 0,845$ GeV.

Noyau	Symbole	α_s	M1($b = 0.95$)	M2($b = 0.96$)	[17]	Exp.[152]	Err 1	Err 2
Deuterium	${}^2_1\text{H}$	0.97	1873.971	1866.873	1867.754	1875.613	0.087%	0.465%
Tritium	${}^3_1\text{H}$	0.97	2813.515	2789.031	2804.918	2809.432	0.145 %	0.726 %
Helium	${}^4_2\text{H}_e$	0.94	3729.217	3713.179	3726.932	3728.4013	0.021%	0.408%
Lithium	${}^7_3\text{L}_i$	0.92	6537.229	6507.283	5711.532	6465.501	1.109%	0.646%
Beryllium	${}^9_4\text{B}_e$	0.92	8385.818	8347.107	8395.323	8394.794	0.106%	0.568%
Boron	${}^{11}_4\text{B}$	0.88	10447.963	10396.719	9519.22	10069.451	3.759%	3.250%
Carbon	${}^{12}_6\text{C}$	0.92	11157.413	11105.839	11180.796	11177.929	0.183%	0.644%

Le Tableau 14 montre que nos résultats sur les spectres d'énergie d'interaction internucléon sont plus proches des données expérimentales quand le paramètre b tend vers l'unité. La notation $Err = |\Delta M| / M_{exp}$, désigne l'erreur relative calculée par rapport aux données expérimentales. Err 1 et Err 2 sont le pourcentage d'erreur relative associé à $b = 0,95$ et $b = 0,96$ respectivement. En particulier, pour la valeur $b = 0,95$, le pourcentage d'erreur relative est réduit jusqu'à

0,021%. Globalement, les valeurs de la constante de couplage forte α_s pour lesquelles de bons résultats sont obtenus sont comprises entre 0,88 et 0,97, qui sont des valeurs raisonnables pour l'interaction forte résiduelle. De plus, on note un écart maximum de 3,759% pour $b = 0,95$ et 3,250% pour $b = 0,96$ puis un écart minimum de 0,021% pour $b = 0,95$ et 0,408% pour $b = 0,96$ par rapport aux résultats expérimentaux. De plus, les résultats obtenus dans la référence [17] correspondent à la valeur $b = 1$. Ainsi, en considérant les noyaux atomiques ${}^7_3\text{Li}$ et ${}^{11}_4\text{B}$, nos résultats sont meilleurs que ceux de la référence [17] pour toutes nos valeurs du paramètre b . Puis pour les noyaux atomiques tels que ${}^2_1\text{H}$, ${}^3_1\text{H}$ et ${}^4_2\text{He}$, et pour la valeur $b = 0,96$, les résultats de la référence [17] sont meilleurs que les nôtres. Alors que pour les mêmes noyaux atomiques, et pour la valeur $b = 0,95$, nos résultats sont meilleurs que ceux de la référence [17]. Ensuite, pour les noyaux atomiques tels que ${}^9_4\text{Be}$ et ${}^{12}_6\text{C}$, les résultats de la référence [17] sont meilleurs que les nôtres pour toutes les valeurs du paramètre b . Globalement, pour les noyaux les plus légers, nos résultats reproduisent mieux les données expérimentales. Alors que pour les noyaux les plus lourds, comme ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{11}_4\text{B}$ et ${}^{12}_6\text{C}$, les résultats de la référence [17] sont plus satisfaisants.

En outre, les masses des noyaux atomiques et l'erreur relative sur le calcul des masses, présentent une certaine sensibilité vis-à-vis du paramètre b . En effet, on se rend compte qu'à l'exception des noyaux atomiques de Lithium et de Bore, l'erreur augmente globalement pour tous les autres noyaux atomiques, de la plage 0,021% – 0,183% à la plage 0,408% – 0,726% à mesure que la valeur de b augmente de 0,95 à 0,96. En revanche, pour les atomes de Lithium et de Bore, c'est tout le contraire, l'erreur diminue lorsque la valeur de b passe de 0,95 à 0,96. L'erreur relative assez importante pour ces derniers, pourrait être attribuée au fait qu'il existe des contributions associées à des processus plus complexes [157, 158, 159], comme le processus d'échange à deux pions [160], ou des forces dépendantes du spin, qui ne sont pas prises en compte dans notre travail.

Dans le cas de l'interaction forte de base, c'est-à-dire celle qui agit entre les quarks via le processus d'échange d'un gluon, la masse d'un hadron peut être calculée par la formule (II.175). Cette formule implique le nombre de quarks à l'intérieur du hadron et la masse effective du quark [161, 162]. Dans l'équation (II.175), l'énergie $E_{1,j}$ est déduite de l'équation (II.71) en considérant le cas particulier où $b = \mu = 0$. Les valeurs numériques des masses de quelques baryons et mésons sont rapportées dans le Tableau 15. L'énergie de l'état fondamental inter-nucléon est calculée à l'aide de la formule (II.179) où m_N représente la masse d'un nucléon et $E_{(n=1)}(\alpha_s)$ est

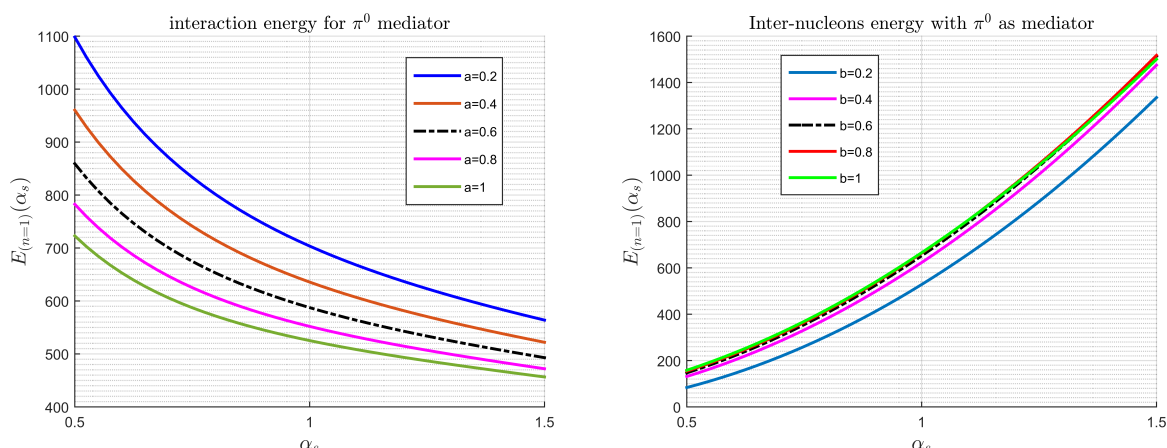


FIGURE 39 – Variation de l'énergie de l'état fondamental d'un nucléon à l'intérieur d'un noyau atomique et de l'énergie de l'état fondamental inter-nucléon en fonction de la constante de couplage forte α_s , en considérant le méson π^0 comme médiateur de l'interaction forte.

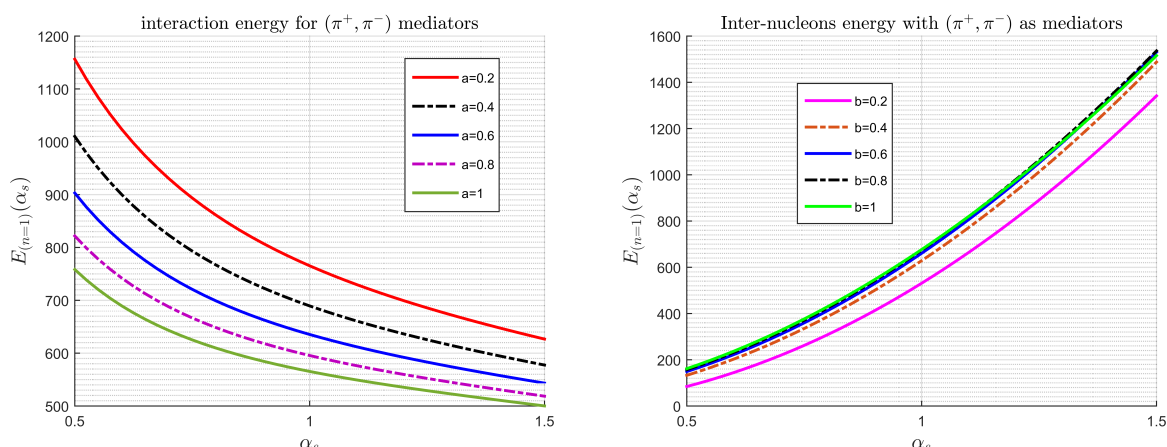


FIGURE 40 – Variation de l'énergie de l'état fondamental d'un nucléon à l'intérieur d'un noyau atomique et de l'énergie de l'état fondamental inter-nucléon en fonction de la constante de couplage forte α_s , en considérant les mésons π^\pm comme médiateurs de l'interaction forte.

donné par l'équation (II.71). Les variations de l'énergie de l'état fondamental inter-nucléon et de l'énergie d'interaction d'un nucléon, en fonction de α_s , sont présentées dans les Figures 39, 40 et 41, pour différentes valeurs des paramètres a et b respectivement, en considérant différents médiateurs de l'interaction forte, notamment pour les deux aspects de l'interaction forte. Les premiers bosons considérés sont les médiateurs de l'interaction forte résiduelle, tandis que les seconds bosons considérés sont les médiateurs de l'interaction forte de base. Pour tracer ces courbes, nous avons utilisé l'équation (II.71) pour l'énergie de l'état fondamental d'un nucléon. Ensuite, pour l'énergie d'interaction nucléon-nucléon, nous avons utilisé l'équation (II.179). D'après

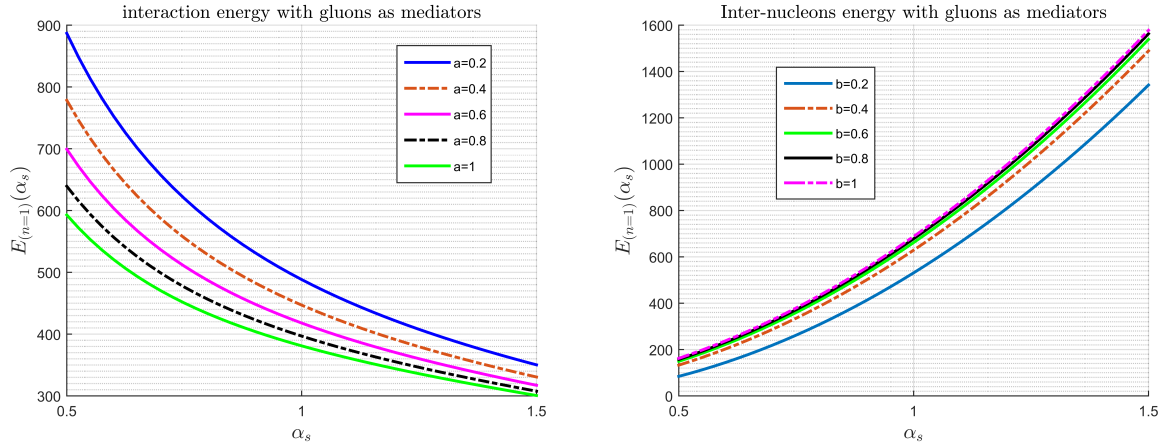


FIGURE 41 – Variation de l'énergie de l'état fondamental d'un nucléon à l'intérieur d'un noyau atomique et de l'énergie de l'état fondamental inter-nucléon en fonction de la constante de couplage forte α_s , en considérant les gluons comme médiateurs de l'interaction forte.

ces courbes, il apparaît clairement que l'énergie d'interaction inter-nucléon augmente avec la forte constante de couplage et présente le même comportement quel que soit le type de boson échangé. D'autre part, l'énergie d'interaction d'un nucléon dans l'état fondamental diminue avec l'augmentation de la constante de couplage. Néanmoins, cette diminution est d'autant plus prononcée que la particule échangée a une masse plus importante. Cela pourrait s'expliquer par le fait que l'intensité du potentiel d'interaction inter-nucléon, caractérisée par la constante de couplage, est proportionnelle à l'énergie du porteur de force. En d'autres termes, plus le couplage entre les nucléons est important, plus la particule d'échange transporte de l'énergie ou son équivalent en masse, et donc l'énergie fondamentale d'interaction d'un nucléon au sein du noyau sera moins importante. Les calculs ont été effectués en utilisant α_s , a et m_q comme pa-

TABLE 15 – Masses (en GeV) de quelques baryons et mésons, calculées pour différentes valeurs du paramètre a .

Hadron	Symbole	m_q	α_s	M1	M2	[17]	Exp.[152]	Err 1	Err 2
Proton	$p(uud)$	0.380	1.47	0.93824	0.93708	0.93832	0.93827	0.002%	0.126%
Sigma	$\Sigma^-(dds)$	0.495	1.71	1.19773	1.19645	1.19736	1.19745	0.023 %	0.082 %
Xi	$\Xi^-(dss)$	0.550	1.81	1.32170	1.32037	1.32850	1.32171	0.0001%	0.101%
Pion	$\pi^-(d\bar{u})$	0.071	0.66	0.13960	0.13920	0.13861	0.13957	0.024%	0.258%
Kaon	$K^-(s\bar{u})$	0.280	0.99	0.49408	0.49317	0.49252	0.49368	0.081%	0.102%
Rho	$\rho^-(u\bar{d})$	0.475	1.56	0.77541	0.77450	0.77597	0.77526	0.019%	0.096%
J/Psi	$J/\psi(c\bar{c})$	1.79	1.09	3.09738	3.09223	3.10037	3.09690	0.015%	0.150%
Upsilon	$\Upsilon(b\bar{b})$	5.500	1.12	9.46793	9.45261	11180.796	11177.929	0.080%	0.081%

ramètres. M1 et M2 représentent les prédictions des masses par notre modèle respectivement pour $a = 0,922$ et $a = 0,930$. Le Tableau 15 montre que nos résultats sur les spectres d'énergie d'interaction inter-quarks sont plus proches des données expérimentales lorsque le paramètre a tend vers l'unité. Les notations Err 1 et Err 2 représentent le pourcentage d'erreur relative associé à $a = 0,922$ et $a = 0,930$ respectivement. Dans le cas du méson J/ψ , avec une constante de couplage $\alpha_s = 1,09$ et une masse effective $m_q = 1,79$, le pourcentage d'erreur relative est de $0,032\%$ pour $a = 0,922$ et $0,129\%$ pour $a = 0,930$ et révèle un très bon accord avec la valeur expérimentale $m_{J/\psi} = 3,09690\text{GeV}$ [152, 163]. Dans le cas du méson Υ , pour une constante de couplage forte de $\alpha_s = 1,12$ et masse effective du quark $m_q = 5,5\text{ GeV}$, la masse est obtenue avec un écart de $0,080\%$ pour $a = 0,922$ et $0,081\%$ pour $a = 0,930$, ce qui montre un bon accord avec la valeur expérimentale $m_{\Upsilon(1S)} = 9,46030\text{GeV}$ [152, 163]. De plus, on peut globalement observer que, dans le cas général des mésons, le pourcentage d'erreur relative est situé dans les plages $0,015\% - 0,080\%$ pour $a = 0,922$ et $0,081\% - 0,258\%$ pour $a = 0,930$. Pour les mésons K^- et π^- , la constante de couplage forte α_s est inférieure à 1, alors que pour les mésons ρ^- , J/ψ et Υ , la constante de couplage forte est supérieure à 1. Globalement, les valeurs de la constante de couplage pour lesquelles nous avons obtenu de bons résultats sont comprises entre 0,66 et 1,56, qui sont des valeurs raisonnables pour la description de la forte interaction forte entre les quarks d'un méson. D'autre part, les masses des baryons tels que le proton p , et les baryons Σ^- et Ξ^- ont également été calculées. Pour le baryon Ξ^- par exemple, on peut observer un assez bon accord avec la valeur expérimentale $m_{\Xi^-(1S)} = 1,32171\text{ GeV}$ [152]. Dans l'ensemble, le pourcentage d'erreur relative est situé dans les plages $0,0001\% - 0,023\%$ pour $a = 0,922$ et $0,082\% - 0,126\%$ pour $a = 0,930$. Ce qui révèle une bonne précision dans nos résultats. Les valeurs de la constante de couplage pour lesquelles de bons résultats sont obtenus sont comprises entre 1,47 et 1,81. Ces valeurs ont un ordre de grandeur approprié pour l'interaction forte entre les quarks dans un baryon. Pour une approche aussi simpliste, la bonne précision de nos résultats peut être attribuée au potentiel choisi qui possède quatre paramètres libres a, μ, b, α_s . Par ailleurs, l'absence des termes de confinement dans le potentiel de type Yukawa n'a pas été justifiée a priori mais plutôt a posteriori par le succès du modèle à faire d'excellentes prédictions. On a donc pas peu besoin d'insérer les termes décrivant le confinement tel que recommandé par la QCD, car celui-ci se manifeste directement à travers la structure même de l'espace-temps.

III.4.2 Confinement des quarks et des gluons dans les hadrons

À la fin du chapitre précédent, nous avons vu que la théorie prédit l'existence d'un trou noir de Schwarzschild dont la forte gravité est responsable du phénomène de confinement des quarks à l'intérieur des hadrons. Nous avons ensuite remarqué que la théorie prédit que les gluons subissent le même effet que les quarks. Pour vérifier la pertinence de notre théorie, nous avons évalué numériquement certaines observables physiques et donner une interprétation des résultats numérique obtenus afin de comprendre la physique derrière cette théorie. En effet, dans le cas des nucléons par exemple, en utilisant l'équation (II.191) on se rend compte que la valeur de la taille d'un nucléon est proche de la valeur du rayon de Schwarzschild calculé. En effet, pour un proton par exemple, on trouve que $r_s = 0,857210 fm$ pour $a = 0,92$ et $r_s = 0,838575 fm$ pour $a = 0,90$. Tant dis que pour un neutron, on trouve $r_s = 0,856178 fm$ pour $a = 0,92$ et $r_s = 0,837566 fm$ pour $a = 0,90$. En effet, ces valeurs sont du même ordre de grandeur que le rayon d'un nucléon [167, 168]. D'autre part, il est bien connu que la taille d'un quark est inférieure à $10^{-18}m$ [167]. Ainsi, de manière analogue au cas habituel de l'interaction gravitationnelle, le rayon de Schwarzschild associé à l'interaction forte entre les quarks délimite une région au sein des hadrons dans laquelle les quarks restent piégés. Ce qui permettra par exemple de comprendre pourquoi les quarks et les gluons ne sont jamais observés isolés, car étant piégés par la forte "gravité", ils ne peuvent s'en échapper.

Les valeurs numériques des rayons de Schwarzschild r_s associés aux quarks de quelques baryons et mésons sont calculées d'après l'équation (II.191) pour différentes valeurs du paramètre a et sont rapportées dans le Tableau 16. R1 et R2 représentent les prédictions des rayons de Schwarzschild par notre modèle respectivement pour $a = 1,05$ et $a = 1,06$. À des fins de comparaison, les valeurs expérimentales des rayons des hadrons sélectionnés [161, 162, 164, 165, 166, 167, 168], sont également rapportées dans le Tableau 16. La notation $Err = |\Delta r|/r_{exp}$, désigne l'erreur relative calculée par rapport au rayon expérimental. Err 1 et Err 2 sont les pourcentages d'erreur relative associés à $a = 1,05$ et $a = 1,06$ respectivement. Les données expérimentales sont tirées des références [161, 166], et les valeurs des rayons Schwarzschild sont exprimée en fm . À partir des résultats obtenus, on se rend compte que le rayon de Schwarzschild associé aux quarks dans un hadron a approximativement la même valeur que le rayon du hadron considéré. En effet, en observant de près les données du Tableau 16, on remarque facilement que nos résultats sont très proches des valeurs expérimentales des références [167, 168, 161, 162, 164,

TABLE 16 – Rayons de Schwarzschild r_s (en fm) associés aux quarks de quelques baryons et mésons, calculés pour différentes valeurs du paramètre a .

Hadron	Symbôle	m_q	α_s	R1	R2	[17]	Exp.[161]-[166]	Err 1	Err 2
Proton	$p(uud)$	0.380	1.47	0.83081	0.83095	0.83058	0.831	0.022%	0.006%
Sigma	$\Sigma^-(dds)$	0.495	1.71	0.78540	0.78579	0.78507	0.79372	1.048 %	0.999 %
Xi	$\Xi^-(dss)$	0.550	1.81	0.71836	0.71897	0.717322	0.72111	0.381%	0.296%
Pion	$\pi^-(d\bar{u})$	0.071	0.66	0.67176	0.67201	0.66681	0.67082	0.140%	0.177%
Kaon	$K^-(s\bar{u})$	0.280	0.99	0.61467	0.61493	0.61293	0.61644	0.287%	0.244%
Rho	$\rho^-(u\bar{d})$	0.475	1.56	0.74703	0.74756	0.74439	0.74833	0.173%	0.102%
J/Psi	$J/\psi(c\bar{c})$	1.79	1.09	0.11132	0.11168	0.11020	-	-	-
Upsilon	$\Upsilon(b\bar{b})$	5.500	1.12	0.05117	0.05146	0.04950	-	-	-

165, 166]. Dans le cas des baryons par exemple, on observe un écart de 0,022% à 1,048% pour $a = 1,05$ et de 0,006% à 0,999% pour $a = 1,06$. Globalement, le rayon de Schwarzschild augmente à mesure que le paramètre a atteint des valeurs plus élevées. Dans le cas des mésons, un comportement similaire est enregistré. On observe un écart dans la fourchette 0,140% – 0,287% pour $a = 1,05$ et 0,102% – 0,244% pour $a = 1,06$. Les données expérimentales ne sont pas disponibles pour les mésons J/ψ et Υ . Pour ces particules, nous avons comparé nos résultats avec ceux de la référence [17] et nous avons trouvé un bon accord avec les rayons moyens de ces particules. De plus, en fixant $a = 1$, on retrouve intégralement les résultats de la référence [17]. En revanche, le rayon de Schwarzschild associé aux quarks de ces hadrons diminue à mesure que les masses de ces derniers augmentent. Outre le fait de considérer les hadrons comme des trous noirs quantiques dans lesquels les quarks sont piégés et ne peuvent pas s'échapper, une conséquence liée aux résultats du Tableau 16 est que plus la masse du quark est grande, plus le trou noir devient compact. Ainsi le quark top par exemple, compte tenu de sa masse élevée aurait donc un rayon de confinement bien plus faible que ceux des autres hadrons. Cela expliquerait peut-être pourquoi il est si rare dans la nature et se désintègre aussi vite.

Par ailleurs, un aspect particulièrement intéressant de notre modèle est qu'on pourrait se baser sur ses résultats pour postuler notamment l'émission de rayonnements par le type de trou noir dont il prédit l'existence, d'une manière analogue au rayonnement Hawking. Cependant, ces rayonnements ne proviendraient pas des fluctuations quantiques du vide dans la région externe proche de l'horizon des événements, mais plutôt de l'intérieur du trou noir, c'est-à-dire à l'intérieur de la région $r < r_s$. En effet, un quark up peut émettre un boson W^+ et se désintégrer en quark down. Le boson W^+ qui a été émis se désintègre rapidement à son tour, en un positron

e^+ et un neutrino électronique ν_e , qui est une désintégration β^+ . Grâce au même processus, un quark down peut émettre un boson W^- et se désintégrer en un quark up. Le boson W^- qui a été émis se désintègre rapidement en un électron e^- et un antineutrino électronique $\bar{\nu}_e$, qui est une désintégration β^- . Ces différents mécanismes de désintégration sont illustrés par des diagrammes de Feynman sur la figure 42. Puisque les particules $W^-, W^+, e^-, e^+, \nu_e$ et $\bar{\nu}_e$ ne portent pas de charge de couleur, elles pourront s'échapper du puits gravitationnel ainsi créé et le trou noir pourra rayonner. Ce type de rayonnement expliquerait par exemple la désintégration d'un proton en neutron et vice-versa (voir la Figure 42). En outre, un pion neutre au repos peut

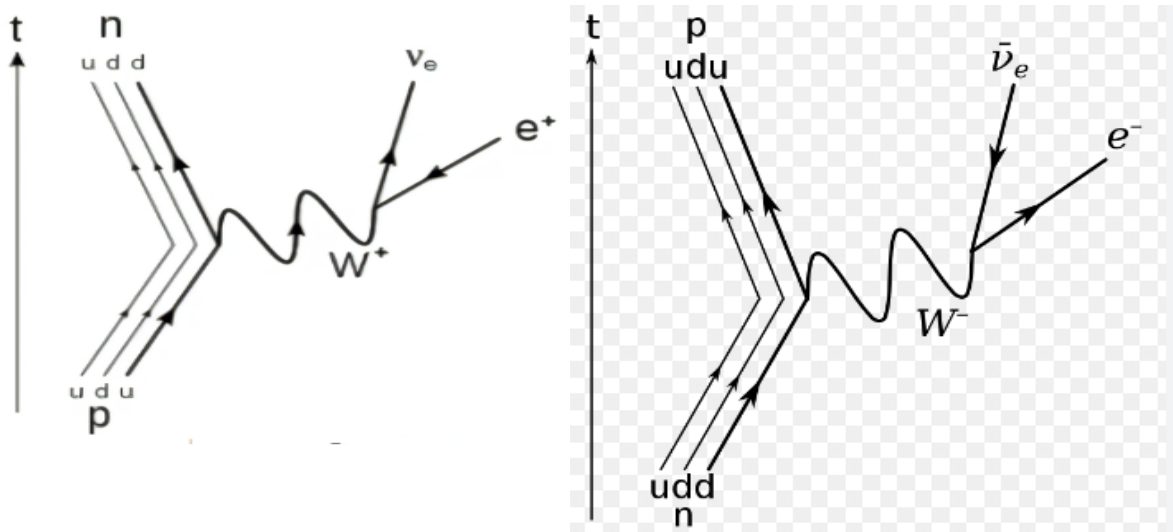
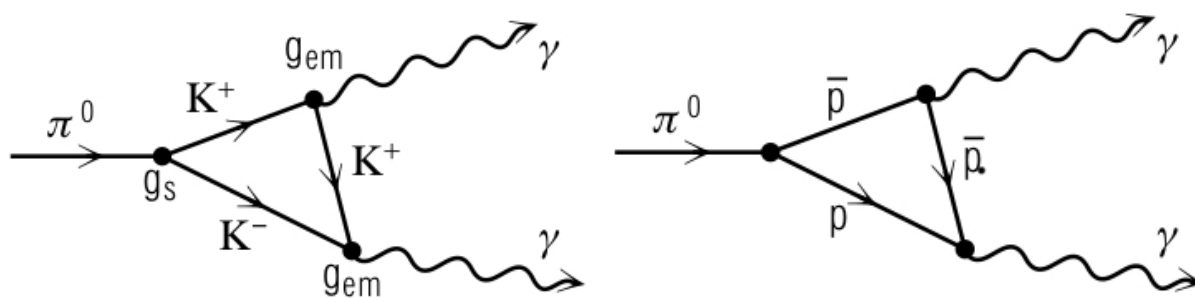


FIGURE 42 – Désintégration du quark up en quark down, du proton en neutron et vice-versa.

se désintégrer en deux photons selon l'équation $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Il est à noter que la désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ne peut pas se produire directement puisque le pion π^0 est un méson neutre. On sait que les particules neutres ne sont pas sensibles à l'interaction électromagnétique, qui est l'unique interaction à laquelle le photon est sensible, il en est d'ailleurs le médiateur. Ainsi, le pion neutre doit d'abord passer par une désintégration forte en deux mésons chargés ou en une paire baryon anti-baryon chargée. Le passage par la paire lepton anti-lepton n'est cependant pas possible en raison de la limitation évoquée plus haut. Puisque la forte courbure évoquée dans cette thèse n'est perceptible que par des particules portant une charge de couleur, les particules telles que la famille des leptons, les photons γ et les bosons de jauge W^+, W^-, Z^0 , ne ressentiraient donc aucun effet produit par cette forte courbure, et seraient en même de s'échapper du trou noir une fois émis lors des désintégrations.

FIGURE 43 – Désintégration du méson π neutre en deux photons γ .

Ainsi, il apparaît que les particules en désintégration étant des hadrons, elles restent confinées à l'intérieur du trou noir, alors que les photons, les leptons et certains bosons massifs pourront s'échapper hors du trou noir, car vus par eux l'espace-temps est plat et ne présente donc aucune courbure. Cependant, décrire les hadrons comme des configurations de trous noirs soulève un certain nombre de questions à l'occurrence : comment ces trous noirs quantiques de hadrons peuvent-ils interagir les uns avec les autres ? En effet, la description classique des trous noirs prédit qu'ils peuvent interagir avec d'autres objets célestes mais aussi entre eux par attraction gravitationnelle ou en formant un système binaire, ou encore en fusionnant tout en libérant de l'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles. On aura donc un mécanisme similaire dans le cas des hadrons comme configurations de trous noirs. Les gluons et les quarks interagissent les uns avec les autres à travers un fort champ de couleurs, qui est la source du tenseur énergie-impulsion du système et qui affecte directement la structure de l'espace-temps. Ainsi, dans le cas de l'interaction forte, l'espace-temps est divisé en deux régions qui ne communiquent pas et qui sont séparées par un horizon des événements à l'intérieur duquel les gluons et les quarks restent liés et ne peuvent communiquer avec l'extérieur. De plus, la description classique prédit que toute matière au-delà de l'horizon des événements s'effondrera inévitablement dans la singularité située en $r = 0$. Dans le cadre de notre théorie il est inutile de s'en inquiéter, puisqu'il s'agit d'un système quantique, le principe d'incertitude empêchera tout effondrement.

III.5 Conclusion

Parvenus au terme de ce chapitre, ou il était question de présenter les résultats numériques liés à l'étude théorique des propriétés des hadrons en présence des effets de la courbure et de

la gravitation. Nous avons présentés les résultats numériques selon les différentes approches du problème les valeurs théoriques des masses des différents états de quelques particules composites telles que le charmonium $c\bar{c}$, le bottomonium $b\bar{b}$, le méson $\bar{b}c$, les mésons lourds-légers tels que le $c\bar{s}$, $b\bar{s}$, $b\bar{u}$, $b\bar{d}$, les masses de quelques baryons tels que le proton p , le Σ^- , le Ξ^- , des mésons π^- , K^- , ρ^- , J/ψ et Υ sont calculés ainsi que les constantes de désintégration pseudoscalaires et vectorielles des mésons pour les quarkonia lourds et les mésons lourd-léger tels que le D^0 , le D^+ , D_s^+ , B^- , \bar{B}^0 et le \bar{B}_s^0 . Dans l'espace-temps à corde cosmique, nous avons évalué numériquement les spectres de masse des quarkonia lourds, et nous avons étudié quelques propriétés thermodynamiques de ces derniers. Nous avons discuté en détail l'influence du défaut topologique sur les propriétés thermodynamiques et les spectres de masse des quarkonia lourds. Cependant, le modèle ne décrit pas les mésons contenant un quark léger. Pour corriger ce manquement, nous avons remplacé le défaut topologique par un paramètre mémoire. Celui-ci nous a permis d'étendre l'étude au cas des mésons contenant un quark léger. Nous nous sommes intéressés à l'influence du paramètre d'ordre fractionnaire sur les propriétés de quelques mésons lourd-léger, notamment les énergies, les spectres de masses, ainsi que les constantes de désintégration pseudoscalaires et vectorielles.

Dans le cadre de l'approche de Barros, et pour des cas particuliers du champ scalaire de Yukawa et donc du potentiel d'interaction auquel il se couple, nous avons estimé la masse de quelques noyaux d'atomes, le rayon de Schwarzschild associé à certains baryons et mésons, ainsi que leurs masses. En outre, nous nous sommes proposés d'expliquer le phénomène de confinement des quarks et des gluons à l'intérieur des hadrons à partir de la courbure de l'espace-temps. Ainsi, dans cette approche, le phénomène de confinement apparaît comme une propriété même de l'espace-temps lorsque des interactions avec de grandes constantes de couplage sont considérées. De plus, la résolution des équations radiales de Dirac, au voisinage de l'horizon des événements, pour une particule portant une charge de couleur (c'est-à-dire quark ou gluon), évoluant dans un espace-temps courbé par la présence d'un champ scalaire fort de couleur, montre que la fonction d'onde qui lui est associée présente une discontinuité et s'estompe complètement sur cette surface. Par conséquent, l'espace-temps est divisé en deux régions complètement déconnectées séparées par une surface à l'intérieur de laquelle les quarks et les gluons resteront piégés. Cela a permis de conclure que la source de la force forte de couleur qui est située à l'intérieur de l'horizon des événements, qu'elle soit un quark ou un gluon, sera tou-

jours soumise à l'effet de piégeage indépendamment de sa masse ou de sa charge électrique. Cela suggère également que cette courbure de l'espace-temps, induite par la présence d'un champ fort de couleur, ne sera ressentie que par des particules portant une charge de couleur, en l'occurrence les quarks et les gluons.

Conclusion générale et perspectives

Dans notre travail intitulé «Effet d'un défaut topologique sur les spectres des hadrons et confinement des quarks dans un espace-temps avec une métrique de type Schwarzschild induite par un champ scalaire non gravitationnel », nous nous proposons d'élaborer un modèle qui combine les principes de la RG et ceux de la MQ pour montrer que :

→ la prise en compte de l'influence de la structure de l'espace-temps en mécanique quantique permet de mieux prendre en compte les aspects de la QCD, et d'entrevoir de nouveaux effets tels que l'effet Zeeman dû au champ gravitationnel, qui apparaît en mécanique quantique dans le cas d'un champ magnétique.

→ l'insertion de la dynamique quantique dans la structure de l'espace-temps permet de donner une explication simple et cohérente au phénomène de confinement des quarks et des gluons, dont le mécanisme n'est pas encore clairement compris en QCD.

Ce travail a été bâti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la revue de la littérature sur la physique des particules subatomiques, de la naissance de l'univers au modèle de quarks constituants. Nous avons présenté les différentes phases ayant suivies la naissance de l'univers, l'apparition des particules élémentaires et la brisure de symétrie ayant conduit aux quatre forces fondamentales observées dans la nature aujourd'hui. Nous avons ensuite présenté le cadre théorique à travers lequel chacune des quatre interactions fondamentales est décrite. Le modèle standard, qui regroupe toutes les particules élémentaires connues, a été présenté en détails ainsi que ses limites, notamment celles en rapport avec le mécanisme de confinement des quarks et des gluons, de la description des états à haute et à basse énergie en QCD. Enfin, les modèles de quarks non-relativistes, pertinents pour ce travail, seront présentés ainsi que l'état de l'art sur ces modèles, et quelques limites, notamment en ce qui concerne la description des propriétés des hadrons contenant des quarks légers.

Ensuite dans le deuxième chapitre, nous avons proposé deux approches ayant comme point commun la combinaison des lois de la RG et celles de la MQ pour d'une part accéder à une nouvelle physique et d'autre part pour comprendre comment fonctionne le confinement des quarks, ou du moins proposer une explication. Pour cela, nous avons présenté le cadre théorique ainsi que les méthodes mathématiques nécessaires pour l'étude des propriétés des hadrons sous l'influence de la courbure de l'espace-temps. Nous avons pour cela formulé dans un premier temps les équations de la MQ en espace-temps courbes c'est-à-dire basées sur la RG, que nous avons résolu par des méthodes analytiques bien connues. Pour le cas relativiste de Dirac, nous avons introduire les effets quantiques en RG en utilisant un champ non-gravitationnel qui a affecté la

métrique et notamment la courbure de l'espace. À partir du champs scalaire et de la métrique donnée implicitement, nous avons construits d'une part le tenseur d'Einstein et d'autre part le tenseur énergie-impulsion de la matière et du champ. Les équations d'Einstein ainsi obtenues ont été résolues pour obtenir explicitement le tenseur métrique. À partir des composantes de la métrique, nous avons pu exprimer les opérateurs différentiels, qui a leur tour ont permis de construire l'équation relativiste de Dirac basée sur la RG et la résoudre. De l'autre côté, nous avons introduit les effets du champ gravitationnel et donc de la courbure sur la dynamique quantique via l'équation non-relativiste de Schrödinger. Contrairement au cas relativiste, l'expression de la métrique a été donnée explicitement, à savoir celle d'un défaut topologique linéaire. À partir de la métrique, les opérateurs différentiels ont été construits ainsi que l'opérateur Hamiltonien du système. Pour décrire les interactions en prenant en compte les différents aspects de la QCD, nous avons fait le choix du potentiel de Cornell étendu, qui a été injecté dans l'équation de Schrödinger et résolue analytiquement. Ensuite, à partir des équations dérivées de nos différentes approches, nous avons déduit quelques propriétés des hadrons.

En fin dans le chapitre trois, nous nous sommes penchés sur les résultats numériques liés à l'étude théorique des propriétés des hadrons en présence des effets de la courbure et de la gravitation. Les prédictions théoriques des masses des différents états de quelques particules composites telles que le charmonium $c\bar{c}$, le bottomonium $b\bar{b}$, le méson $\bar{b}c$, les mésons lourds-légers tels que le $c\bar{s}$, $b\bar{s}$, $b\bar{u}$, $b\bar{d}$, les masses de quelques baryons tels que le proton p , le Σ^- , le Ξ^- , des mésons π^- , K^- , ρ^- , J/ψ et Υ ont été présentés ainsi que nos prédictions des constantes de désintégration pseudoscalaires et vectorielles des mésons tels que le D^0 , le D^+ , D_s^+ , B^- , \bar{B}^0 et le \bar{B}_s^0 . À partir de la valeur de la constante de couplage forte, et les valeurs théoriques des masses effectives du proton et du neutron, nous avons calculé numériquement la masse de quelques noyaux d'atomes et avons comparé nos prédictions aux données de l'expérience et à d'autres travaux théoriques pertinents. De plus, les rayons de Schwarzschild associés aux quarks de quelques hadrons ont été calculés en fonction de la masse effective de chaque quark et de la constante de couplage de l'interaction forte. À partir des valeurs numériques des rayons de Schwarzschild, nous avons pu tirer quelques conclusions sur le plan de la théorie. Enfin, les résultats théoriques obtenus ont été comparés avec les résultats expérimentaux et les valeurs théoriques de d'autres modèles pertinents. Nous avons illustré graphiquement les variations du potentiel d'interaction, des propriétés thermodynamiques, des fonctions radiales de densité de probabilité et celles des spectres de masses des mésons dans l'espace à corde cosmique et dans l'espace fractionnaire. .

La présente étude nous a permis :

- D'améliorer les prédictions des précédents modèles de quarks non-relativistes, grâce à l'introduction d'un défaut topologique linéaire ;
- De prédire l'existence d'un effet Zeemann gravitationnel qui ne se produit que lorsque les effets de la courbure causé par la présence d'un défaut topologique sont considérés ;
- De décrire correctement les propriétés des mésons contenant un quark léger à l'aide d'un MQNR, grâce à la formulation fractionnaire ;
- De formuler pour la toute première fois la méthode d'itération asymptotique au domaine fractionnaire ;

- De comprendre que tout comme l'interaction gravitationnelle, l'interaction forte peut aussi se manifester à travers la structure de l'espace-temps ;
- Donner d'une part une interprétation à la fois élégante et purement géométrique du confinement des quarks et des gluons dans les hadrons et d'autre part, de donner, en conséquence, une estimation assez précise de leurs tailles.
- D'améliorer notre compréhension de la structure et des propriétés des hadrons, et de rendre plus claire notre perception de l'interaction nucléaire forte.

Les résultats de cette thèse sont intéressants de part leur qualité et leur potentielle applicabilité dans divers problèmes de Physique Nucléaire et des Particules. En particulier, ce travail peut être utile pour l'étude des scénarios où il est nécessaire de combiner les principes de la RG et ceux de la MQ, et peut également être approfondi pour étudier des phénomènes encore plus complexes tels que la contribution des mésons vecteurs aux masses nucléaires, les processus d'échanges à plus d'un pion entre les nucléons, l'étude de l'influence du défaut topologique sur les transitions radiative des quarkonia lourds, des baryons et des particules encore plus exotiques.

Liste des publications issue de la thèse

[1] A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, Quark confinement in Schwarzschild-like space-time with a metric generated by a non gravitational Yukawa-like strong field, *Int. J. Mod. Phys. A*, **10**, 2350141 (2023).

[2] A. Atangana Likéné, D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, Effects of gravitational field of a topological defect on heavy quarkonia spectra in non-relativistic quark model, *Few. Bod. Syst.* **64**, 83 (2023).

[3] A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, Non-relativistic quark model for mass spectra and decay constants of heavy-light mesons using conformable fractional derivative and asymptotic iteration method, *Int. J. Mod. Phys. A*, **37** 2250229 (2022).

[4] A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, Dirac particles with screened Kratzer- Hulthen plus ring-shaped potential in non compact extra dimensions, *Int. J. Mod. Phys. B*, 2450385 (2023).

Bibliographie

- [1] A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. A*, -, 2350141 (2023).
- [2] L. M. Krauss and F. Wilczek, *Phys. Rev. D*, **89**(4), 047501 (2014).
- [3] J. R. Klauder, *J. Math. Phys.* **40** 5860-5882 (1999).
- [4] V. Barger, V. Langacker, P. Mccaskey, et al. CERN LHC phenomenology of an extended standard model with a real scalar singlet. *Phys. Rev. D* **77**, 035005 (2008).
- [5] K. W. B. Kibble, *J. Phys. A : Math. Gen.* **9**, 1387 (1976).
- [6] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1994).
- [7] A. C. Davis and T. W. Kibble, *Contemp. Phys.* **46**, 313 (2005).
- [8] A. Atangana Likéné, Ali Zarma, D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Eur. J. Phys.* **3**, 129-141 (2022).
- [9] A. Atangana Likéné, D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Few. Bod. Syst.* **64**, 83 (2023).
- [10] K. W. B. Kibble, *Phys. Rev. D* **26**, 435 (1982).
- [11] J. Rocher, *thse de Doctorat, Contraintes cosmologiques sur la physique de l'univers primordial*, Universit de Paris XI-Orsay, septembre 2005.
- [12] L. Bergström and A. Goobar, *Cosmology and Particle Astrophysics*
- [13] C. C. Barros Jr., *Eur. Phys. J. C* **42**, 119 (2005).
- [14] C. C. Barros Jr., *Eur. Phys. J. C* **45**, 421 (2006).
- [15] C. C. Barros Jr., physics/0609115 (2006).
- [16] C. C. Barros, *Braz. J. Phys.* **37**, 17 (2007).
- [17] T. Abdellah, *Confinement des quarks et structure de l'espace-temps*, (2020).
- [18] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964).
- [19] G. Zweig, CERN Rept. 8182/Th401 (1964).
- [20] A. D. Rujula, H. Georgi, and S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **12**, 147 (1975).
- [21] N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev. D* **18**, 4187 (1978).
- [22] N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev. D* **19**, 2653 (1979).
- [23] M. V. N. Murthy, J. D. M. Dey, and R. K. Bhaduri, *Phys. Rev. D* **30**, 152 (1984).

- [24] R. H. Dalitz, reprinted in Selected Lectures of Hawaii Topical Conf., Vol 1 (eds. S. Pakvasa and S. F. Tuan, World Scientific, Singapore 1982) (1967).
- [25] D. Faiman and A. W. Hendry, *Phys. Rev.* **173**, 1720 (1968).
- [26] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan, *Phys. Rev.* **17**, 3090 (1978).
- [27] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan, *Phys. Rev.* **21**, 203 (1980).
- [28] E. Eichten and F. Feinberg, *Phys. Rev. D* **23**, 2724 (1981).
- [29] M. Abu-Shady, *J. Egypt Math. Society* **25**, 86 (2017).
- [30] A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. A* **37**, 2250229 (2022).
- [31] Abu-Shady et al : *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **27** :14(2019).
- [32] Al-Jamel, *Mod. Phys. Lett. A* **33**, 1850185 (2018).
- [33] Al-Jamel, *Mod. Phys. Lett. A* **34**, 1950054 (2019).
- [34] R. Penrose, *Phys. Rev. Lett* **14**, 57 (1965).
- [35] N. R. Napolitano, S. Capozziello, A. J. Romanowsky, M. Capaccioli, C. Tortora, *Astro phys. J.*, **748**(2), 87 (2012).
- [36] S. M. Ikhdaïr, M. Hamzavi, *Few. Bod. Syst.*, **53** (3-4), 487-498 (2012).
- [37] C. Lam and Y. Varshni, *Phys. Rev. A* **4**, 1875 (1971).
- [38] A. Linde, D. Linde, and A. Mezhlumian, From the Big Bang theory to the theory of a stationary universe. *Phys. Rev. D* **49**, (1994) 1783.
- [39] D. E. OSTERBROCK, J. A. GWINN, and R. S. BRASHEAR. Edwin Hubble and the expanding universe. *Scientific American* **269**, 84-89 (1993).
- [40] FABER, Sandra M. (ed.). Nearly normal galaxies : From the Planck time to the present. Springer Science Business Media, 2012.
- [41] HOLLIK, Wolfgang. Electroweak theory. In : *Journal of Physics : Conference Series*. IOP Publishing, (2006).
- [42] P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508 (1964).
- [43] W. Buchmüller and S. H. Tye. Quarkonia and quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D* **24**, 132 (1981).
- [44] C. Rosenzweig, J. Schechter and C. G. Trahern. Is the effective Lagrangian for quantum chromodynamics model, *Physical Review D* **21**, 3388 (1980).
- [45] R. M. Wald. General relativity. University of Chicago press, (2010).
- [46] S. Narison, [?] **270-272**, 143-153 (2016).
- [47] D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **28**, 1950106 (2019).
- [48] C. Albertus, J. Nieves, J.M. Verde-Velasco, E. Hernandez, *Eur. Phys. J. A* **32** , 183(2007).

- [49] A. Valcarce, H. Garcilazo and J. Vijande, *Phys. Rev. C* **72**, 025206 (2005).
- [50] D. Erbert, R. N. Faustov, V. O. Galkin and A. P. Martynenko, *Phys. Rev. D* **66**, 014008 (2002).
- [51] J. -R. Zhang and M. -Q. Huang, *Phys. Rev. D* **78**, 094015 (2008).
- [52] E598 Collaboration : J. J. Aubert et al, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1404 (1974).
- [53] SLAC-SP-017 Collaboration : J. E. Augustin et al, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1406 (1974).
- [54] Quarkonium Working Group (N. Brambilla et al.), arXiv :hep-ph/0412158v2.
- [55] N. Brambilla, arXiv :1106.1051v1.
- [56] M. B. Voloshin, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **61**, 455 (2008).
- [57] C. Patrignani, T. K. Pedlar and J. L. Rosner, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **63**, 21 (2013).
- [58] N. Brambilla, S. Eidelman, B. K. Heltsley, R. Vogt, G. T. Bodwin, E. Eichten, A. D. Frawley, A. B. Meyer et al., *Eur. Phys. J. C* **71**, 1534 (2011).
- [59] A. Manohar, and H. Georgi, *Nucl. Phys. B* **234**(1), 189 (1984).
- [60] M. Abu-Shady, and E. M. Khokha, *Adv. High Energy Phys.* **2018**, (2018).
- [61] J. M. Richard, and P. Taxil, *Ann. of Phys.* **150**(1), 267 (1983).
- [62] R. Bonnaz, B. Silvestre-Brac, and C. Gignoux, *Eur. Phys. J. A* **13**(3), 363 (2002).
- [63] M. Abu-Shady, C. O. Edet, and A. N. Ikot, *Canadian J. Phys.* **99**(11), 1024 (2021).
- [64] P. C. Vinodkumar, T. Bhavsar, M. Shah, and S. Patel, *Symp. on Nucl. Phys* **64** 663 (2019).
- [65] A. Ranjan, *J. Phys. G : Nucl. and Part. Phys.* (2023).
- [66] A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. B*, **1**, 2450385 (2023).
- [67] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. Kogut, K. D. Lane, and T. M. Yan, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 369-372 (1975).
- [68] A. Martin, *Phys. Lett. B* **100**, 511 (1981).
- [69] S. Capstick, S. Godfrey, N. Isgur, and J. Paton, *Phys. Lett. B* **175**, 457-461 (1986).
- [70] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, (Pergamon, oxford, 1975).
- [71] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*, (John Wiley andsons, New York, 1972).
- [72] H. Andrillat, *La théorie de la relativité générale*, 1994.
- [73] M. Hobson, G. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *Relativité générale*, De Boeck Supérieur, 2009.
- [74] E.ourgoulhon, *Relativité générale*, Année universitaire 2013/2014, Observatoire de Paris, 2014, Lecture.
- [75] D. Langlois, *Relativité générale : des fondements géométriques aux applications astrophysiques*, Vuibert, 2013.
- [76] S. Ray et al., *Phys. Rev. D* **68**, 084004 (2003).
- [77] Moffat, *J. Cosm. Astro part. Phys.*, **2006**(03), 004 (2006).

- [78] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London A* **117**, 610 (1930).
- [79] W. E. Lamb Jr, *Phys. Rev.*, **85**, 259 (1952).
- [80] M. E. Rose, *Relativistic electron theory*, Wiley New York, 1961.
- [81] Shi-Hai Dong, *Wave equations in higher dimensions*, Springer Dordrecht Heidelberg (2010).
- [82] Tapas Das, arXiv :1409.1457v1
- [83] M. D. Katanaev and I. V. Volovich, *Ann. Phys.* **216**, 1-28 (1992).
- [84] C. Furtado and F. Moraes, *Phys. Lett. A* **188**, 394-396 (1994).
- [85] B. Kumar, M. Paranjape and U. Yajnik, *Phys. Rev. D* **82**, 025022 (2010).
- [86] Bum-Hoon Lee, et al., *Phys. Rev. D* **88**, 105008 (2013).
- [87] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *J. math. Phys.* **59**, 053501 (2008).
- [88] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *J. math. Phys.* **56**, 063504 (2015).
- [89] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *Rep. Math. Phys.* **76**, 271-281 (2015).
- [90] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *J. Math. Phys.* **59**, 053501 (2018).
- [91] R. Richa, S. B. Bhardwaj and F. Chand, *Commun. Theor. Phys.* **70**, (2018) 179-184.
- [92] M. Caputo and M. Fabrizio, *Prog. Fract. Dier. Appl.* **1**, (2015) 73.
- [93] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh, *J. Comp. Appl. Math.* **264**, (2014) 6570.
- [94] H. Karayer, D. Demirhan, F. Büyükkiliç, *Commun. Theor. Phys.* **66** (2016) 12.
- [95] H. Ciftci, R. L. Hall, and N. Saad, *J. Phys. A* **38** (2005) 1147.
- [96] J. L. Domenech-Garret and M. A. Sanchis-Lozano, arXiv :0805.2916.
- [97] Y. Cancelik and B. Gönül, *Mod. Phys. Lett. A* **29**, 1450170 (2014).
- [98] E. P. Inyang et al. *Canadian. J. Phys.* **99**, 4 (2021).
- [99] F. Caruso, J. Martins, and V. Oguri, *Ann. Phys.* **347**, 130 (2014).
- [100] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations* (Oxford University Press, New York, 1995).
- [101] Z. Ghalenovi, A. A. Rajabi, S. Qin and H. Rischke, *hep-Ph /14034582* (2014).
- [102] O. Lakhina, E. S. Swanson, *Phys. Rev. D* **74**, (2006) 1.
- [103] R. Van Royen, V. F. Weisskopf, *Nuovo Cim.* **50**, (1967) 617.
- [104] M. Modarres, A. Mohamadnejad : *Phys. Part. Nucl. Lett.* **10**, 99(2013)
- [105] M. Modarres, H. Gholizade : *Int. J. Mod. Phys. E* **17**, 1335(2008)
- [106] Y. Ohnishi et al., *Phys. Lett. B* **313**, 475 (1993).
- [107] E. J. Eichten and C. Quigg, *Phys. Rev. D* **49**, 5845 (1994).
- [108] Z. Ghalenovi, A. A. Rajabi, S. Qin and H. Rischke, *hep-Ph /14034582* (2014).
- [109] R. Kumar and F. Chand, *Comm. Theor. Phys.* **59**, 528 (2013).
- [110] A. Al-Jamel and H. Widyan, *Appl. Phys. Rese.* **4**, 94 (2013).

- [111] N. V. Maksimenko and S. M. Kuchin, *Russ. Phys. J.* **54**, 57 (2011).
- [112] S. M. Kuchin and N. V. Maksimenko, *Univ. J. Phys. Appl.* **7**, 295 (2013).
- [113] J. Beringer et al., Particle Data Group *Phys. Rev. D* **86**, 0100011 (2012).
- [114] R. Kumar and F. Chand, *Phys. Scr.* **85**, 055008 (2012).
- [115] E. U. Condon and G.H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, (1970).
- [116] J. C. Slater, *Quantum Theory of Atomic Structure*, McGraw-Hill, New York, (1960).
- [117] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Wiley, New York.
- [118] A. Kumar Rey and P. C. VinodKumar, *J. Phys.* **66**, 958 (2006).
- [119] D. Erbert, R. N. Faustov and V. O. Galkin, *Phys. Rev. D* **67**, 014027 (2003).
- [120] L. I. Abou-Salem, *Int. J. Mod. Phys. A.* **20**, 4113 (2005).
- [121] A. N. Ikot, B. C. Lutfuoglu, M. I. Ngweke, M. E. Udoh, S. Zare, H. Hassanabadi : *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 419(2016)
- [122] W. A. Yah, K. J. Oyew : *Asso. Arab. Univ, Bas. App. Scie* **21**, 53(2016)
- [123] H. Hassanabadi, M. Hosseinpoura : *Eur. Phys. J. C* **76**, 553 (2016).
- [124] H. Hassanabadi, S. Rahmani, and S. Zarrinkamar, *Phys. Rev. D* **90**, (2014) 074024.
- [125] S. Godfrey and K. Moats, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 117501.
- [126] S. Godfrey and K. Moats, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 054034.
- [127] S. Godfrey and K. Moats, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 034035.
- [128] K. A. Olive, et al., *Chin. Phys. C* **38** (2014) 090001.
- [129] C. P. et al (Particle Data Group), *Chin. Phys. C* **40** (2016) 100001.
- [130] S. S. Gershtein, V. V. Kiselev, A. K. Likhoded, and A. V. Tkabladze, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 3613.
- [131] P. Gupta and I. Mehrotra, *J. Mod. Phys.* **3** (2012) 1530.
- [132] B. Q. Li and K. T. Chao, *Phys. Rev. D* **79**, (2009) 094004.
- [133] T. Barnes, S. Godfrey and E. S. Swanson, *Phys. Rev. D* **72**, (2005) 054026.
- [134] B. Q. Li and K. T. Chao, *Commun. Theor. Phys.* **52**, (2009) 653.
- [135] J. Segovia, P. G. Ortega, D. R. Entem and F. Fernandez, *Phys. Rev. D* **93**, (2016) 074027.
- [136] A. M. Badalian, B. L. G. Bakker, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 034006.
- [137] D. Erbert, R. N. Faustov and V. O. Galkin, *Eur. Phys. J. C* **66** (2010) 197.
- [138] E. J. Eichten and C. Quigg, *Phys. Rev. D* **49**, (1994) 5845.
- [139] Q. F. Lu, T. T. Pan, Y. Y. Wang, E. Wang, and D. M. Li, *Phys. Rev. D*, **94** (2016) 074012.
- [140] M. Shah, B. Patel, and P. Vinodkumar, *Phys. Rev. D*, **93** (2016) 094028.
- [141] D. Becirevic, G. Duplancic, B. Klajn, B. Melic and F. Sanfilippo, *Nucl. Phys. B* **883**, (2014) 306.

- [142] G. L. Wang, *Phys. Lett. B* **633**, (2006) 492.
- [143] H. M. Choi, *Phys. Rev. D* **75**, (2007) 073016.
- [144] F. F. Mojica, C. E. Vera, E. Rojas, B. El-Bennich, *Phys. Rev. D* **96**, (2017) 014012.
- [145] G. Bailas, B. Blossier, V. Morenas, *Eur. Phys. J. C* **78**, 1018 (2018) 1018.
- [146] S. Godfrey, K. Moats, and E. S. Swanson, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 054025.
- [147] G. Nave, *Department of Physics and Astronomy*. HyperPhysics, Atlanta, Ed. (2016).
- [148] Halil Mutuk, *Adv. High. Ener. Phys.* **2018** (2018) 8095653.
- [149] S. Nam, *Phys. Rev. D*, **85**, (2012) 034019.
- [150] W. Lucha, D. Melikhov, and S. Simula, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.*, **38** (2011) 105002.
- [151] K. K. Pathak, D. K. Choudhury, and N. S. Bordoloi, *Int. J. Mod. Phys. A*, **28**, (2013) 1350010.
- [152] K. Nakamura et al., *Particle physics booklet*, *Phys. Rev. D*, (2018).
- [153] P. E. Hodgson, *Contemp. Phys.* **24**, 491-503 (1983).
- [154] B. H. Bransden and R. G. Moorhouse, "*The Pion-Nucleon system*", Princeton University Press, (2015).
- [155] G. E. Brown, J. S. Dehesa and J. Speth, *Nucl. Phys. A.* **330**, 290 (1979).
- [156] M. Gell-Mann, The eightfold way : a theory of the strong interaction symmetry, *CalTech Synchrotron Laboratory*, (1961).
- [157] M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, R. Vinh Mau, J. Côte, P. Pires, R. de Tournail, *Phys. Rev. C*, **21**, 861 (1980).
- [158] R. V. Reid, *Ann. Phys.*, **50**, 411 (1968).
- [159] R. B. Wiringa, V. G. Stoks, R. Schiavilla, *Phys. Rev. C*, **51**, 38 (1995).
- [160] M. R. Robilotta, *Nucl. Phys. A*, **595**, 171 (1995).
- [161] A. C. Eduardo, E. H. Thomas, and G. Frederique, *Relativistic Aspects Of Nuclear Physics, Procs Of The 6th Intl Workshop*, World Scientific, (2001).
- [162] J. Arvieux and B. Pire, *Progr. Part. Nucl. Phys.* **35**, 299 (1995).
- [163] M. Tanabashi, "Particle Data Group", *Phys. Rev. D*, **98**, 030001, (2018).
- [164] B. Ananthanarayan, I. Caprini, and D. Das, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 132002 (2017).
- [165] S. Amendolia et al., *Phys. Lett. B* **178**, 435 (1986).
- [166] A. F. Krutov, R. G. Polezhaev, and V. E. Troitsky, *Phys. Rev. D* **93**, 036007 (2016).
- [167] N. Bezginov et al., *Science* **365**, 1007 (2019).
- [168] W. Xiong et al., *Nature* **575**, 147 (2019).

Dirac particles with screened Kratzer–Hulthen plus ring-shaped potential in noncompact extra dimensions

A. Atangana Likéné^{*,†,§}, J. M. Ema'a Ema'a^{*,¶}, P. Ele Abiama^{*,†,||}
and G. H. Ben-Bolie^{*,**}

**Laboratory of Atomic, Molecular and Nuclear Physics, Department of Physics,
Faculty of Science, University of Yaoundé I, P. O. Box 812, Yaoundé, Cameroon*

*†The Nuclear Technology Section (NTS),
Institute of Geological and Mining Research,
P. O. Box 4110, Yaoundé, Cameroon*

*‡Department of Physics, Bertoua Higher Teachers' Training College,
University of Bertoua, P. O. Box 55, Bertoua, Cameroon*

§aandreaime@yahoo.fr

¶emaajm@yahoo.fr

||eleabiama2003@yahoo.fr

***gbenbolie@yahoo.fr*

Received 5 February 2023

Revised 6 June 2023

Accepted 31 July 2023

Published 19 October 2023

To describe the four fundamental interactions observed in the universe, we used the Dirac equation containing an interaction of the screened Kratzer and the Hulthen potential with a ring-shaped term. We study the energy spectra of spin-1/2 particles in noncompact extra dimensions. The polar and angular parts of the N -dimensional Dirac equation are solved using the Nikiforov–Uvarov method. The transcendental energy equation and the associated two components spinor wavefunctions of the spin-1/2 particles are obtained. Moreover, we obtained the nonrelativistic limit of our results by mean of a specific mapping. Some special cases of the proposed potential have been discussed, and their corresponding eigenvalue energies were determined. Finally, we proposed that our results can be used in many branches of physics, to investigate scenarios in extra dimensions where spin-1/2 particles are involved. To test the reliability of our model, we computed the numerical values of the energy spectra of lithium hydride and hydrogen chloride diatomic molecules using a special case of the proposed potential. The energy spectra are calculated for different quantum numbers (n, l) at different values of the dimensionality of the space. The results of this research are overall in good agreement with the theoretical studies of similar investigation.

Keywords: Dirac equation; Nikiforov–Uvarov method; screened Kratzer plus Hulthen potential; ring-shaped potential; extra dimensions; diatomic molecules.

PACS numbers: 21.60.Fw, 21.10.Re, 70.25.+k, 04.10.Mn

§Corresponding author.

1. Introduction

In recent years, a particular attention has been accorded to study of theoretical models in which the space–time manifold has more dimensions than the usual four dimensions observable in our daily experience. Most of those models are analyzed in the framework of string theory.¹ In general relativity, the study of models in extra dimensions has attracted a lot of attention.^{2–4} One of the best-known approaches to the study of physical phenomena in extra dimensions is undoubtedly the Kaluza–Klein (KK) theory. The latter theory presents the universe as a space with the usual four dimensions, with a fifth dimension which would be compact, rolled up around itself.^{5,6} The existence of this dimension imposes certain restrictions. For example, because of its extremely small size, it is impossible for our senses to access this fifth dimension of the KK theory. Over time, and with the fundamental framework provided by KK theory, the quest for additional spatial dimensions has become a hot topic in modern science. In several research works, authors are interested in extending the knowledge of classical properties to their formulation in space–time with extra dimensions. This could be helpful when one needs to examine new properties that we cannot access in the usual four-dimensional space–time. Therefore, the investigation of quantum and relativistic phenomena in these extra dimensions is an active research field.

In higher-dimensional theories, extra dimensions are classified in two categories, namely large and compact extra dimensions.^{7–9} Compact extra dimensions are mostly used in string theory¹ and KK theory,^{5,6} and are presented by some authors as the more realistic approaches of extra dimensions. Whereas noncompact extra dimensions are mostly used in quantum mechanics to study solutions of quantum wave equations in higher dimensions. Nevertheless, there is a particular interesting reason why we need to explore noncompact or large extra dimensions (LEDs). Indeed, in M-theory¹⁰ and particle physics, the ADD model, which is still known as the model with LEDs, is a model that attempts to solve the hierarchy problem.^{a11–13} The latter model tries to solve the hierarchy problem by postulating that our universe, with three spacial dimensions and one dimension of time, exists on a membrane in a space with more than four dimensions. Therefore, it is suggested that the fundamental forces that operate at the quantum level, namely the electromagnetic force, strong interaction and weak interaction, operate within this membrane across its four dimensions, while gravitons propagate across the extra dimensions. Such a mechanism could explain why gravity is so weak compared to the other known interactions.¹² The size of the dimensions in ADD model is around the order of TeV scale.

To study the dynamics of microscopic phenomena in atomic, molecular, nuclear and particle physics requires obtaining solutions of quantum wave equations, which provides a complete description of considered system.¹⁴ However, wave equations

^aWhy is the gravitational interaction so weak compared to the electromagnetic force, strong and weak interactions?

such as Dirac equation, Klein–Gordon equation and Schrödinger equation are not exactly solvable for special potentials considering states with $l \neq 0$.^{15,16} Hence, in recent years, much interest has been given to the study of analytical solutions of quantum wave equations. For this purpose, various author have proposed new approximation schemes to deal with the centrifugal term with different techniques.^{17–19} There are many potential models that describe the force influencing the particles. These potentials include Pöschl–Teller potential,²⁰ Manning–Rosen potential,^{21,22} Wood–Saxon potential,²³ Eckart potential,^{24–26} Morse potential,²⁷ Mie-type potential,²⁸ pseudopotentials,²⁹ Hylleraas potential,³⁰ Hulthen potential,³¹ Aharonov–Bohm and magnetic monopole potentials,³² among others. To solve the differential equations arising from these investigations, various techniques have been used by the authors. These include the factorization method,^{33,34} asymptotic iteration method,³⁵ proper quantization rule,³⁶ Nikiforov–Uvarov (NU) method,^{37–39} supersymmetric quantum mechanics method (SUSY-QM)^{40–42} and others.

The Dirac equation is a quantum wave equation that describes the dynamics of spin-1/2 particles in a relativistic point of view.^{43–48} It contains a four-vector potential $A^\mu = (S(\mathbf{r}), \mathbf{V}(\mathbf{r}))$ which has two parts, namely the scalar potential $S(\mathbf{r})$ and the vector potential $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. To simplify the problem, we consider the component $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ of A^μ , oriented towards the radius vector. It has been shown that the Dirac equation possesses two particular symmetries: spin and pseudospin symmetries. The exact symmetry occurs when we have

$$V(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r}) = 0, \quad V(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

respectively, for spin and pseudospin symmetry. These symmetries have explained a large number of phenomena in the structure of atomic nuclei. These include magnetic moment interpretation,^{49–51} nucleus deformation,⁵² super-deformation of nuclei,⁵³ identical bands^{54,55} and the coupling scheme of effective shell-model.⁵⁶

The newly proposed screened Kratzer–Hulthen potential plus a ring-shaped term is a kind of noncentral potential, which consists in a screened Kratzer potential³⁸:

$$V_{\text{sk}}(r) = \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \right) e^{-\alpha r}, \quad (2)$$

a Hulthen potential^{57,58}:

$$V_H(r) = - \frac{V_0 e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})}, \quad (3)$$

and a ring-shaped potential:

$$V_{\text{rs}}(r, \theta) = - \frac{q}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4)$$

The screened Kratzer potential is usually employed to study the structure of triaxial nuclei.^{38,40} This potential is made up of long-range attractive and repulsive part of the Kratzer potential and a screening term. Whereas the Hulthen potential is a short-range potential that is usually employed to describe properties of atoms, molecules

and hadrons.^{59–61} Therefore, this work has a significant contribution in studying from a higher-dimensional point of view, the long- and short-range energy spectra of Dirac particles using the proposed potential, the combined screened Kratzer–Hulthen plus ring-shaped potential, which is expressed as

$$V(r, \theta) = \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \right) e^{-\alpha r} - \frac{V_0 e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})} - \frac{q}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (5)$$

This paper is arranged as follows. In Sec. 2, the Dirac equation is introduced and separated in spherical coordinates. In Sec. 3, the relativistic solutions and the transcendental equation are obtained and reduced to nonrelativistic cases. Then some results and applications of this work will be discussed. Then in Sec. 4, we give a brief conclusion of the study. Finally, a review of the NU method, relevant for this work, is briefly presented in Appendix A.

2. Dirac Equation in Noncompact Extra Dimensions

The Dirac equation with scalar potential $S(\mathbf{r})$ and vector potential $V(\mathbf{r})$ in natural units ($\hbar = c = 1$) is⁶²

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta(M + S(\mathbf{r}))][\Psi(\mathbf{r}) = (E - V(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r}), \quad (6)$$

where E is the relativistic energy of the particle, and $\mathbf{p} = -i\nabla$ is the momentum operator, $\boldsymbol{\alpha}$ and β are the well-known 4×4 Dirac matrices defined as

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{array} \right) \right), \quad \beta = \left(\left(\begin{array}{cc} \mathcal{K} & 0 \\ 0 & -\mathcal{K} \end{array} \right) \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

where \mathcal{K} is the 2×2 unit matrix and σ_i are the 2×2 Pauli matrices given by

$$\sigma_1 = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right), \quad \sigma_2 = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -i \\ -i & 0 \end{array} \right) \right), \quad \sigma_3 = \left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \right). \quad (8)$$

The Pauli matrices satisfy the following algebra:

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathcal{K}, \quad (9)$$

such that $\sigma^2 = \mathcal{K}$. In the Pauli–Dirac representation, the two-component spinor can be classified in terms of the spinor upper $\varphi(\mathbf{r})$ and the spinor lower $\chi(\mathbf{r})$ as follows^{63,64}:

$$\Psi(\mathbf{r}) = (\varphi(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})) = \left(\begin{array}{c} \frac{\psi_{nk}^+(r)}{r^{\frac{N-1}{2}}} Y_{l_1 \dots l_{N-1}}^l(\hat{x} = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}) \\ \frac{i\psi_{nk}^-(r)}{r^{\frac{N-1}{2}}} Y_{\bar{l}_1 \dots \bar{l}_{N-1}}^{\bar{l}}(\hat{x} = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}), \end{array} \right) \quad (10)$$

where N is the number of space dimension. By substituting Eqs. (7)–(10) into Eq. (6), we obtain

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\varphi(\mathbf{r}) = [E - V(\mathbf{r}) - M - S(\mathbf{r})]\chi(\mathbf{r}), \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi(\mathbf{r}) = [E - V(\mathbf{r}) + M + S(\mathbf{r})]\varphi(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Considering spin symmetry conditions, Eq. (11) becomes

$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{(E + M)} \varphi(\mathbf{r}), \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi(\mathbf{r}) = [E - 2V(\mathbf{r}) - M] \varphi(\mathbf{r}). \quad (14)$$

Substituting Eq. (13) into Eq. (14) yields

$$[\mathbf{p}^2 + 2V(\mathbf{r})(E + M)] \varphi(\mathbf{r}) = [E^2 - M^2] \varphi(\mathbf{r}). \quad (15)$$

In spherical coordinates, the screened Kratzer–Hulthen plus ring-shaped potential is given by Eq. (5). Then, substituting Eq. (5) into Eq. (15) and considering $\varphi(\mathbf{r})$ on the form

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\psi_{nk}^+(r)}{r^{\frac{N-1}{2}}} H(\theta) \Phi(\phi) \quad (16)$$

we get

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{\psi_{nk}^+(r)} \frac{r^{\frac{N-1}{2}}}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\psi_{nk}^+(r)}{r^{\frac{N-1}{2}}} \right) + r^2 (E_{nk} + M) \left(-\frac{V_0 e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}} \right. \\ \left. + \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \right) e^{-\alpha r} \right) - (E_{nk}^2 + M^2) r^2 = \left(l_N + \frac{N-1}{2} \right) \left(l_N + \frac{N-3}{2} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{1}{H_{l_N}(\theta)} \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) H_{l_N}(\theta) + \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_2}{\sin^2(\theta)} - (E_{nk} + M)V(\theta) \right) = 0, \quad (18)$$

which can be solved by the well-known NU method.

3. Solution of the Dirac Equation for the Proposed Potential

3.1. Solution of the radial part

The radial part of the Dirac equation given by Eq. (17) can be rearranged as

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_{nk}^+(r)}{dr^2} + \left[(E_{nk}^2 - M^2) - (E_{nk} + M) \left(-\frac{V_0 e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}} + \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \right) e^{-\alpha r} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \left(l_N + \frac{N-1}{2} \right) \left(l_N + \frac{N-3}{2} \right) \right] \psi_{nk}^+(r) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

To deal with the centrifugal barrier in the above equation, we make use of the Greene–Aldrich approximation scheme, which is given as¹⁸

$$\frac{1}{r} \approx \frac{\alpha}{(1 - e^{-\alpha r})}, \quad \frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2}{(1 - e^{-\alpha r})^2}. \quad (20)$$

Substituting Eq. (20) into Eq. (19), and using the transformation $X = e^{-\alpha x}$ we obtain

$$\frac{d^2\psi_{nk}^+(X)}{dX^2} + \frac{(1-X)}{X(1-X)} \frac{d\psi_{nk}^+(X)}{dX} + \frac{1}{X^2(1-X)^2} \times [-(\epsilon_{nk}^2 + \beta)X^2 + (2\epsilon_{nk}^2 + \beta - \delta)X - (\Lambda + \epsilon_{nk}^2 - \delta)]\psi_{nk}^+(X) = 0, \quad (21)$$

where the following notations have been introduced:

$$\begin{aligned} -\epsilon_{nk}^2 &= \frac{E_{nk}^2 - M^2}{\alpha^2} + \frac{a(E_{nk} + M)}{\alpha}, \\ \beta &= -\frac{V_0}{b\alpha^2} \delta = \frac{V_0(E_{nk} + M)}{\alpha^2}, \\ \Lambda &= \frac{a(E_{nk} - M)}{\alpha} + b(E_{nk} + M) + \left(l_N + \frac{N-1}{2}\right) \left(l_N + \frac{N-3}{2}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Comparing Eq. (21) with the standard form of the NU equation, we obtain the following expressions of the polynomials $\bar{\tau}(X)$, $\sigma(X)$ and $\bar{\sigma}(X)$, respectively:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(X) &= 1 - X, \\ \sigma(X) &= X(1 - X), \\ \bar{\sigma}(X) &= -(E_{nk}^2 + \beta)X^2 + (2E_{nk}^2 + \beta - \delta)X - (E_{nk}^2 + \Lambda - \delta). \end{aligned} \quad (23)$$

The function $\pi(X)$ required for this method is given by

$$\pi(X) = -\frac{X}{2} \pm \sqrt{\left(\epsilon_{nk}^2 + \beta + \frac{1}{4} - K\right)X^2 + (K - 2\epsilon_{nk}^2 - \beta + \delta)X + \epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta}. \quad (24)$$

To find the value of K , the expression under the square root in Eq. (24) must have a vanishing determinant. So, the possible values of K are obtained as follows:

$$K_{\pm} = -(2\Lambda - \beta - \delta) \pm 2\sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda} \sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta}. \quad (25)$$

Substituting Eq. (25) into Eq. (24), we get

$$\pi(X) = -\frac{X}{2} \pm \begin{cases} \left(\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda}\right)X - \sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} & \text{for } K = K_+, \\ \left(\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda}\right)X + \sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} & \text{for } K = K_-. \end{cases} \quad (26)$$

At this stage, we choose the expression of $\pi(X)$ such that $\tau(X)$ must have a negative derivative. From this restriction, the function $\pi(X)$ is given by

$$\pi(X) = - \left[\sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda} + \frac{1}{2} + \sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} \right] X - \sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta}. \quad (27)$$

Then, the function $\tau(X)$ is obtained as

$$\tau(X) = - \left[2\sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda} + 2 + 2\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} \right] X + 1 + 2\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta}. \quad (28)$$

From the NU method, λ and λ_n can be obtained, respectively, as

$$\begin{aligned} \lambda = & - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda} \right) \\ & - (2\Lambda - \beta - \delta) - 2\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\lambda_n = n(n-1) + \left[2\sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda} + 2 + 2\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} \right]. \quad (30)$$

By equating the above equations, we obtain the radial energy equation as

$$\epsilon_{nk}^2 = \delta - \Lambda + \frac{1}{4} \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda} \right)^2 + \Lambda - \beta - \delta}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda} \right)} \right]^2. \quad (31)$$

Then, using Eq. (22), one can write Eq. (31) as

$$\begin{aligned} & - \frac{E_{nk}^2 - M^2}{\alpha^2} - \frac{a(E_{nk} + M)}{\alpha} \\ & = -2b(E_{nk} + M) - \frac{a(E_{nk} + M)}{\alpha} - \left(l_N + \frac{N-1}{2} \right) \left(l_N + \frac{N-3}{2} \right) \\ & \quad + \frac{1}{4} \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + b(E_{nk} + M) + \left(l_N + \frac{N-1}{2} \right) \left(l_N + \frac{N-3}{2} \right)} \right)^2}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + b(E_{nk} + M) + \left(l_N + \frac{N-1}{2} \right) \left(l_N + \frac{N-3}{2} \right)}} \right]^2. \end{aligned} \quad (32)$$

The nonrelativistic limit is obtained from the following mappings:

$$E_{nk} + M \rightarrow 2M, \quad E_{nk} - M \rightarrow E_{nk} \quad (33)$$

which allow us to write the corresponding N -dimensional nonrelativistic radial energy eigenvalue equation for the screened Kratzer–Hulthen plus ring-shaped

potential as

$$E_{nk} = 2b\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2M} \left(l_N + \frac{N-1}{2} \right) \left(l_N + \frac{N-3}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{8M} \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2Mb + \left(l_N + \frac{N-1}{2} \right) \left(l_N + \frac{N-3}{2} \right)} \right)^2}{+ 2M \left(\frac{a}{\alpha} + 2b - \frac{V_0}{\alpha^2} \right) + \left(l_N + \frac{N-1}{2} \right) \left(l_N + \frac{N-3}{2} \right)} \right]^2. \quad (34)$$

To find the expression of the radial wavefunction, we use the expressions of $\pi(X)$ with negative sign and $\sigma(X)$ from Eqs. (27) and (23), respectively, to construct the function $\phi(X)$ as

$$\phi(X) = X^{\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta}} (1 - X)^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda}}. \quad (35)$$

The weight function can be obtained as follows:

$$\rho(X) = X^{2\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta}} (1 - X)^{2\sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda}}. \quad (36)$$

Using the following definition of Jacobi polynomials:

$$P_{\mu}^{(\nu, \vartheta)}(\omega) = \frac{\Gamma(\mu + \nu + 1)}{\mu! \Gamma(\nu + 1)} {}_2F_1 \left(-\mu, \nu + \mu + \vartheta + 1, \nu + 1; \frac{1 - \omega}{2} \right), \quad (37)$$

the radial wavefunction can be written in terms of hypergeometric functions as

$$\psi_{nk}^+(X) = B_{nk} X^{\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta}} (1 - X)^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda}} \frac{\Gamma(n + 1 + 2\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta})}{n! \Gamma(1 + 2\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta})} \times {}_2F_1 \left(-n, 2\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} + 1 + n + 2\sqrt{\frac{1}{4} + \Lambda}, 2\sqrt{\epsilon_{nk}^2 + \Lambda - \delta} + 1; X \right). \quad (38)$$

3.2. Solution of the angular part

To obtain solution of the angular part, the following equation is considered:

$$\frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) H_{l_N}(\theta) + \left[L(L + 1) - \frac{(E_{nk} + M)q + m^2}{\sin^2(\theta)} \right] H_{l_N}(\theta) = 0, \quad (39)$$

where $L = l_N + \frac{N-3}{2}$ is the orbital angular momentum in the N -dimensional space. Using the transformation $s = \cos \theta$, Eq. (39) becomes

$$\frac{d^2 H_{l_N}(s)}{ds^2} + \frac{-2s}{1-s^2} \frac{dH_{l_N}(s)}{ds} + \frac{1}{(1-s^2)} \times [-L(L+1)s^2 + L(L+1) - (m^2 + q(E_{nk} + M))] H_{l_N}(s) = 0. \quad (40)$$

Comparing Eq. (40) with the standard form of the NU method, we obtain the following expressions:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(s) &= -2s, \\ \sigma(s) &= 1 - s^2, \\ \bar{\sigma}(s) &= -L(L+1)s^2 + L(L+1) - (m^2 + q(E_{nk} + M)). \end{aligned} \quad (41)$$

The function $\pi(s)$ required for the NU method can be obtained as

$$\pi(s) = \begin{cases} \pm(\sqrt{m^2 + q(E_{nk} + M)})s & \text{for } K = L(L+1) - m^2 - q(E_{nk} + M), \\ \pm\sqrt{m^2 + q(E_{nk} + M)} & \text{for } K = L(L+1). \end{cases} \quad (42)$$

Under the condition that $\tau'(s)$ is negative, the function $\pi(s)$ is chosen as

$$\pi(s) = -\sqrt{m^2 + q(E_{nk} + M)}. \quad (43)$$

Then, λ and $\lambda_{\bar{n}}$ can be obtained, respectively, as

$$\lambda = L(L+1) - \sqrt{m^2 + q(E_{nk} + M)}(\sqrt{m^2 + q(E_{nk} + M)} + 1), \quad (44)$$

$$\lambda_{\bar{n}} = 2\bar{n}(\sqrt{m^2 + q(E_{nk} + M)} + 1) + \bar{n}(\bar{n} - 1). \quad (45)$$

By equating the above equations, one obtains

$$L = l_N + \frac{N-3}{2} = \bar{n} + \sqrt{m^2 + q(E_{nk} + M)}. \quad (46)$$

Considering the nonrelativistic limit, one can write

$$L = l_N + \frac{N-3}{2} = \bar{n} + \sqrt{m^2 + 2Mq}. \quad (47)$$

The final expression of the energy eigenvalues of screened Kratzer–Hulthen plus ring-shaped potential can be obtained by substituting Eq. (47) into Eq. (34). Next, for the wavefunction of the polar angular part, using the expressions of $\sigma(s)$ and $\pi(s)$ from Eqs. (41) and (43) one obtains

$$\begin{aligned} \phi(s) &= (1-s^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{m^2 + 2Mq}, \\ \rho(s) &= (1-s^2) \sqrt{m^2 + 2Mq}, \\ y_{\bar{n}}(s) &= \frac{A_{\bar{n}}}{(1-s^2) \sqrt{m^2 + 2Mq}} \frac{d^{\bar{n}}}{ds^{\bar{n}}} \left[(1-s^2) \sqrt{\bar{n} + m^2 + 2Mq} \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

Substituting Eq. (48) into $H_{\bar{n}}(\theta) = \phi(\theta)y_{\bar{n}}(s)$, we obtain

$$H_{\bar{n}}(\theta) = N_{\bar{n}}(1 - \cos^2\theta)\sqrt{m^2+2Mq}P_{\bar{n}}\left(\sqrt{m^2+2Mq};\sqrt{m^2+2Mq}\right)(\cos\theta). \quad (49)$$

Special Cases

(a) Coulomb potential

The proposed potential is reduced to Coulomb potential when $\alpha = V_0 = b = q = 0$. Using Eq. (34), we obtain the energy spectrum of the Coulomb potential as

$$E_{nk} = \frac{M}{2} \left[\frac{a}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + L(L+1)}} \right]^2, \quad (50)$$

which is in good agreement with the expressions existing in the literature.^{65,66}

(b) Kratzer potential

The Kratzer potential has been extensively used by several authors to describe nuclear, atomic and molecular structures.^{67,68} Now, setting the values of parameters $\alpha = V_0 = q = 0$ results in

$$E_{nk} = \frac{1}{8M} \left[\frac{2Ma}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2Mb + L(L+1)}} \right]^2. \quad (51)$$

(c) Screened Kratzer potential

By setting the values of parameters $V_0 = q = 0$, we obtain the energy eigenvalues of the screened Kratzer potential as³⁸

$$E_{nk} = 2b\alpha + \frac{\alpha^2}{2M}L(L+1) + \frac{\alpha^2}{8M} \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2Mb + L(L+1)} \right)^2 + 2M\left(2b + \frac{a}{\alpha}\right) + L(L+1)}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2Mb + L(L+1)}} \right]^2. \quad (52)$$

(d) Hulthen potential

Hulthen potential is a short-range potential that has been extensively employed to describe properties of hadrons, atoms and molecules.⁵⁹⁻⁶¹ By setting the values of parameters $a = b = q = 0$, we obtain the energy eigenvalues of the screened Kratzer

potential as

$$E_{nk} = \frac{\alpha^2}{2M} L(L+1) + \frac{\alpha^2}{8M} \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + L(L+1)} \right)^2 - \frac{2MV_0}{\alpha^2} + L(L+1)}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + L(L+1)}} \right]^2. \quad (53)$$

4. Results and Discussion

In this section, we apply the results of our calculations to study the nonrelativistic energy levels of some diatomic molecules in the presence of noncompact extra dimensions. We study the symmetries and the effect of these extra dimensions and the combined potential on the spectra of the considered molecules. It has been shown that for diatomic molecules, the potential parameters can be related to the spectroscopic parameters.⁶⁹ Indeed, for the Hulthen plus screened Kratzer potential, we have $a = -2D_e r_e$, $b = D_e r_e^2$, $V_0 = D_e r_e \alpha$, where α is an adjustable screening parameter, D_e is known as the dissociation energy between the two atoms of the molecule and r_e is the intermolecular separation at equilibrium. For more details, one can refer to Ref. 69 and references therein. The spectroscopic parameters employed for lithium hydride (LiH) and hydrogen chloride (HCl) molecules and the potential parameters are listed in Table 1.

This work has analytically solved the Dirac equation in noncompact extra dimensions with the combination of screened Kratzer potential, Hulthen potential and ring-shaped potential using the NU method. The bound state energy spectra of the nonrelativistic Dirac equation are obtained as well as the corresponding wavefunctions. To validate the approach employ in this work, we deduce Coulomb, Kratzer, Hulthen and screened Kratzer potentials as special cases of the proposed potential. Next, we compute the numerical values of the particular case of the screened Kratzer plus Hulthen potential for LiH and HCl diatomic molecules for different quantum numbers at different values of the dimensionality of the space. Moreover, the results of this study are in agreement with the tables in Refs. 65 and 66 and other relevant theoretical studies of either Kratzer or Hulthen potentials. The numerical results of the screened Kratzer plus Hulthen potential for HCl and LiH are presented explicitly in Tables 2 and 3, respectively, and are compared with the outcomes from other relevant theoretical calculations of the same investigation.

Table 1. The potential and spectroscopic parameters employed for the considered diatomic molecules.

Molecules	D_e (eV)	r_e (Å)	α (Å ⁻¹)	a (eV · Å)	b (eV · Å ²)	V_0 (eV)
LiH	2.1261	1.4336	1.7684	-6.0959	4.3695	5.3900
HCl	4.6188	1.2748	1.9867	-11.776	7.5060	10.997

Table 2. Comparison of the energy eigenvalues (eV) of the screened Kratzer plus Hulthen potential for LiH at different values of N .

n	l	Our ($N = 8$)	Our ($N = 6$)	Our ($N = 4$)	Our ($N = 3$)	Ref. 66	Ref. 65
0	0	-3.556384293	-3.161272572	-2.656384293	-2.467222572	-2.467293778	-2.4673103040
1	0	-3.382314813	-2.981224814	-2.581090314	-2.380978114	-2.375802636	-2.3758192144
	1	-3.292542647	-2.980524682	-2.571524520	-2.380426410	-2.374091378	-2.3741079726
2	0	-3.282414813	-2.881222501	-2.482314813	-2.281224814	-2.289307674	-2.2893242662
	1	-3.232546279	-2.830629533	-2.472546279	-2.280628413	-2.287688996	-2.2877056028
	2	-3.208201774	-2.802146241	-2.467585264	-2.272142567	-2.284458584	-2.2844752153
3	0	-3.188510374	-2.789100247	-2.387542017	-2.189524682	-2.207451626	-2.2074682002
	1	-3.187305214	-2.787032572	-2.387350180	-2.187003612	-2.205918968	-2.2059355557
	2	-3.186162201	-2.786002452	-2.386162201	-2.186002542	-2.202860140	-2.2028767491
	3	-3.185120510	-2.785102732	-2.384125485	-2.184569052	-2.198288040	-2.1983046791
4	0	-3.099873152	-2.699018374	-2.298901052	-2.099528374	-2.129908602	-2.1299251286
	1	-3.098916453	-2.698120248	-2.298246511	-2.099171164	-2.128455976	-2.1284725145
	2	-3.098754100	-2.698115603	-2.298194310	-2.098110603	-2.125556792	-2.1255733505
	3	-3.096743104	-2.696720541	-2.296741415	-2.096720145	-2.121223116	-2.1212397014
	4	-3.094810252	-2.694871531	-2.294812576	-2.094882641	-2.115472884	-2.1154895057
5	0	-3.016812975	-2.616819474	-2.216811427	-2.016821485	-2.056380834	-2.0563972865
	1	-3.014312360	-2.614324571	-2.217084252	-2.016320051	-2.055002762	-2.0550192265
	2	-3.014128012	-2.614151228	-2.215425710	-2.015401520	-2.052252304	-2.0522687859
	3	-3.013158232	-2.614125021	-2.214102192	-2.014125770	-2.048140758	-2.0481572648
	4	-3.012350174	-2.612302813	-2.212350107	-2.012320057	-2.042684928	-2.0427014665
	5	-3.010372014	-2.610322514	-2.210171232	-2.010125014	-2.035906942	-2.0359235246

Table 3. Comparison of the energy eigenvalues (eV) of the screened Kratzer plus Hulthen potential for HCl at different values of N .

n	l	Our ($N = 8$)	Our ($N = 6$)	Our ($N = 4$)	Our ($N = 3$)	Ref. 66	Ref. 65
0	0	-6.403212875	-5.674322775	-5.074312875	-4.574322775	-4.541847882	-4.5418482111
1	0	-6.221002451	-5.402102481	-4.721011441	-4.402121441	-4.393727024	-4.3937279560
	1	-6.212014010	-5.401302145	-4.710294710	-4.401307410	-4.391292904	-4.3912938505
2	0	-6.181028921	-5.339402471	-4.698355021	-4.239465911	-4.252735636	-4.2527371123
	1	-6.088595677	-5.238695476	-4.688595677	-4.238695476	-4.250417718	-4.2504192087
	2	-6.061244577	-5.138695476	-4.536947764	-4.237156653	-4.245789526	-4.2457910529
3	0	-6.021201021	-5.134415204	-4.425440214	-4.085661964	-4.118423404	-4.1184253715
	1	-6.017012457	-5.121002147	-4.415020144	-4.084932990	-4.116214408	-4.1162163895
	2	-6.015102745	-5.119023578	-4.410020113	-4.083477985	-4.111803616	-4.1118056312
	3	-6.011006136	-5.115131215	-4.408011543	-4.081286693	-4.105205380	-4.1052074492
4	0	-6.008214587	-5.095234527	-4.401201345	-3.940065164	-3.990375014	-3.9903774250
	1	-6.006524476	-5.069123555	-4.401131034	-3.939375865	-3.988268222	-3.9882706455
	2	-6.004652410	-5.052120147	-4.401129125	-3.938098014	-3.984061424	-3.9840638794
	3	-6.002501147	-5.069123555	-4.401117038	-3.935954074	-3.977768152	-3.9777706575
	4	-6.000424365	-5.021250013	-4.382547038	-3.933183264	-3.969408570	-3.9694111386
5	0	-5.910241258	-4.901512145	-4.370332012	-3.802126123	-3.868206938	-3.8682097494
	1	-5.907128635	-4.901200147	-4.368201004	-3.801474414	-3.866196140	-3.8661989636
	2	-5.904521445	-4.896211456	-4.362055155	-3.800165049	-3.862180950	-3.8621838020
	3	-5.892140212	-4.893102145	-4.358752142	-3.798209574	-3.856174134	-3.8561770327
	4	-5.887125400	-4.885624125	-4.352145578	-3.795628703	-3.848194720	-3.8481976799
	5	-5.883021457	-4.880302274	-4.349284631	-3.792360689	-3.838267840	-3.8382708721

Looking at these tables, it can be observed that the numerical values nonrelativistic ro-vibrational energies of the screened Kratzer plus Hulthen potential increase as quantum numbers (n, l) increase for the selected molecules. Energies of much extra dimensions like $D = 6$ and $D = 8$ have also been computed to actually see the influence of the extra dimensions on the energy eigenvalues. In addition, for any quantum state (n, l) , the ro-vibrational energies decrease as the space dimension increases. Considering the generalized N -dimensional angular momentum introduced in Sec. 3, namely $L = l + \frac{N-3}{2}$, one would deduce from it the theoretical possibility of the existence of an interdimensional degeneracy for any quantum state. Indeed, one can easily check that using the mapping $(N \rightarrow N + 2; l \rightarrow l - 1)$, the nonrelativistic energy spectra for screened Kratzer plus Hulthen potential would be invariant. Hence, we have the hidden symmetry $(E_{n,l}^N = E_{n,l-1}^{N+2})$ for the diatomic molecules considered in this work. The role of the dimensionality number is very significant in this study. Indeed, its presence reveals the possible existence of a hidden symmetry in the quantum states and thus means that there is an even more fundamental state of the quantum particles which would be accessible via the breaking of this symmetry.

5. Conclusion

In this study, we have obtained the relativistic energy of the Dirac equation with screened Kratzer plus Hulthen plus ring-shaped potential, in noncompact extra dimensions. We have shown that the obtained energy relation reduces to the one obtained using Schrödinger wave equation in the nonrelativistic limit. We analyzed the behaviors of selected diatomic molecules such as LiH and HCl subjected to the special case of screened Kratzer plus Hulthen potential. The ro-vibrational energy spectra of diatomic molecules were computed for different quantum numbers (n, l) at different values of the dimensionality number, and the results are overall in good agreement with similar theoretical investigations. The role of the dimensionality number was very significant in this research. Its presence revealed the possible existence of a hidden symmetry in the quantum states and thus making the study more rich. Special cases of the screened Kratzer plus Hulthen potential were investigated and their corresponding energy equations were deduced and were found in good agreement with the literature.

Appendix A. The Nikiforov–Uvarov Method in Brief

The NU method is usually employed to solve second-order differential equations of the following form³⁷:

$$\psi''(s) + \frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)} \psi'(s) + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi(s) = 0, \quad (\text{A.1})$$

where $\sigma(s)$ and $\bar{\sigma}(s)$ are polynomials of at most second degree, $\bar{\tau}(s)$ is a first-degree polynomial and $\psi(s)$ is a hypergeometric-type function. To obtain the exact solution

of Eq. (6), one can use the transformation

$$\psi(s) = \phi(s)Y_n(s). \quad (\text{A.2})$$

It reduces Eq. (6) to an equation of hypergeometric type of the following form:

$$\sigma(s)Y_n''(s) + \tau(s)Y_n'(s) + \lambda(s)Y_n(s) = 0. \quad (\text{A.3})$$

The function $\phi(s)$ is defined as a logarithmic derivative

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}, \quad (\text{A.4})$$

where

$$\pi(s) = \frac{1}{2}[\tau(s) - \bar{\tau}(s)] \quad (\text{A.5})$$

is at most a first-degree polynomial. $Y_n(s)$ is the hypergeometric-type function with its polynomial solutions given by the well-known Rodrigues relation^{38,37}

$$Y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)]. \quad (\text{A.6})$$

In Eq. (11), B_n is the normalization factor and $\rho(s)$ is the weight function, which most satisfy the condition

$$\frac{d}{ds}\omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}\omega(s), \quad \omega(s) = \sigma(s)\rho(s). \quad (\text{A.7})$$

The function $\pi(s)$ in Eq. (10) and the parameter λ required for this method are defined as follows:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \bar{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \bar{\tau}}{2}\right)^2 - \bar{\sigma}(s) + k\sigma}, \quad (\text{A.8})$$

$$\lambda = k + \pi'(s). \quad (\text{A.9})$$

The value of k can be obtained from the condition that the expression under the square root must equal the square of the polynomial. Thus, the eigenvalue equation is given as

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s), \quad (\text{A.10})$$

where the function $\bar{\tau}(s)$ and its derivative must be negative.³⁷

References

1. J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).
2. R. Emparan and H. S. Reall, *Living Rev. Relativ.* **11**, 6 (2008), arXiv:0801.3471 [hep-th].
3. K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, *Living Rev. Relativ.* **2**, 2 (1999).
4. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford, 1983).

5. T. Kaluza and K. Sitzungsber, *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss.* **K1**, 966 (1921).
6. O. Z. Klein, *Z. Phys.* **37**, 895 (1926).
7. G. Gabadadze, arXiv:hep-ph/0308112.
8. G. Dvali and M. Shifman, *Phys. Lett. B* **396**, 64 (1997).
9. R. Barbieri, P. Creminelli and A. Strumia, *Nucl. Phys. B* **585**, 28 (2000).
10. P. Horava and E. Witten, *Nucl. Phys. B* **460**, 3 (1996).
11. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998).
12. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Rev. D* **59**, 086004 (1999).
13. M. Shifman, *Int. J. Mod. Phys. A* **25**, 199 (2010).
14. A. Svidzinsky *et al.*, *Int. Rev. Phys. Chem.* **27**, 665 (2008).
15. O. A. Awoga *et al.*, *Ind. J. Pure Appl. Phys.* **50**, 217 (2012).
16. P. K. Bera, *Pramana J. Phys.* **78**, 91 (2012).
17. C. Pekeris, *Phys. Rev.* **45**, 98 (1934).
18. R. L. Greene and A. Aldrich, *Phys. Rev. A* **14**, 2363 (1976).
19. B. J. Falaye *et al.*, *Can. J. Phys.* **91**, 98 (2013).
20. G. Poschl and E. Teller, *Z. Phys.* **83**, 143 (1933).
21. M. F. Manning and N. Rosen, *Phys. Rev.* **44**, 953 (1933).
22. F. Taskin, *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 1142 (2009).
23. R. D. Woods and D. S. Saxon, *Phys. Rev.* **92**, 577 (1954).
24. C. Eckart, *Phys. Rev.* **35**, 1303 (1930).
25. G. F. Wei, S. H. Dong and V. B. Bezerra, *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 161 (2009).
26. A. D. Alhaidari, *Found. Phys.* **40**, 1088 (2010).
27. P. M. Morse, *Phys. Rev.* **34**, 57 (1929).
28. D. Agboola, *Acta Phys. Pol. A* **120**, 3 (2011).
29. S. M. Ikhdair and R. Sever, *Cent. Eur. J. Phys.* **6**, 685 (2008).
30. A. N. Ikot *et al.*, *Few-Body Syst.* **54**, 2041 (2013).
31. S. M. Ikhdair, *J. Math. Phys.* **51**, 023525 (2010).
32. A. D. Alhaidari, *Ann. Phys.* **320**, 453 (2005).
33. S. H. Dong, *Factorization Method in Quantum Mechanics* (Springer, Amsterdam, 2007).
34. J. Sadeghi, *Acta Phys. Pol. A* **112**, 23 (2007).
35. H. Ciftci, R. L. Hall and N. Saad, *J. Phys. A, Math. Gen.* **36**, 11807 (2003).
36. S. H. Dong, D. Morales and J. Garcia-Ravelo, *Int. J. Mod. Phys. E* **16**, 189 (2007).
37. A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, ed. A. Jaffe (Birkhäuser Verlag, Basel, 1988), p. 317.
38. Y. Omon *et al.*, *Int. J. Mod. Phys. E* **2920**, 2050082 (2020).
39. A. N. Ikot, O. A. Awoga and A. D. Antia, *Chin. Phys. B* **22**, 020304 (2013).
40. P. Mah Tsila *et al.*, *Int. J. Mod. Phys. E.* (2022), publication in progress.
41. E. Witten, *Nucl. Phys. B* **188**, 513 (1981).
42. A. N. Ikot *et al.*, *J. Assoc. Arab Univ. Basic Appl. Sci.* **18**, 46 (2015).
43. W. Gereiner, *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations*, 3rd edn. (Springer, 2000).
44. M. C. Zhang and Z. B. Wang, *Chin. Phys. Lett.* **22**, 2994 (2005).
45. S. Haouat and L. Chetouani, *Phys. Scr.* **77**, 025005 (2008).
46. C. Quense, *Int. J. Mod. Phys. A* **6**, 1567 (1991).
47. T. Chen, Y. F. Diao and C. S. Jia, *Phys. Scr.* **79**, 065014 (2009).
48. C. S. Jia, X. L. Zeng and L. T. Sun, *Phys. Lett. A* **294**, 185 (2002).
49. D. Troltenier *et al.*, *Nucl. Phys. A* **567**, 591 (1994).
50. A. E. Stuchbery, *J. Phys. G* **25**, 611 (1999).
51. A. E. Stuchbery, *Nucl. Phys. A* **700**, 83 (2002).
52. A. Bohr, I. Hamamoto and B. R. Mottelson, *Phys. Scr.* **26**, 267 (1982).

53. J. Dudek et al., *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1405 (1987).
54. F. S. Stephens et al., *Phys. Rev. Lett.* **65**, 301 (1990).
55. F. S. Stephens et al., *Phys. Rev. C* **57**, R1565 (1998).
56. D. Troltenier, C. Bahri and J. P. Draayer, *Nucl. Phys. A* **586**, 53 (1995).
57. C. Chen, *Phys. Scr.* **69**, 257 (2004).
58. O. Bayrak, G. Kocak and I. Boztosun, *J. Phys. A, Math. Theor.* **39**, 11521 (2006).
59. O. Bayrak and I. Boztosun, *Phys. Scr.* **76**, 92 (2007).
60. M. C. Onyeaju et al., *Few-Body Syst.* **59**, 793 (2016).
61. M. Hosseinpour et al., *Eur. Phys. J. C* **77**, 270 (2017).
62. X. Q. Xu et al., *Commun. Theor. Phys.* **53**, 242 (2010).
63. S.-H. Dong, *Wave Equations in Higher Dimensions* (Springer, Dordrecht, Heidelberg, 2010).
64. T. Das, arXiv:1409.1457v1.
65. S. M. Ikhdair and R. Sever, *J. Math. Chem.* **45**, 1137 (2009).
66. A. N. Ikot et al., *Eur. Phys. J. Plus* **134**, 386 (2019).
67. E. E. Ibekwe et al., *Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci.* **44**, 1191 (2020).
68. R. Rani and F. Chand, *Indian J. Phys.* **92**, 145 (2018).
69. A. D. Antia and O. P. Akpan, *J. Appl. Comput. Math.* **6**, 54 (2017).

Quark confinement in Schwarzschild-like space–time with a metric generated by a nongravitational Yukawa-like strong field

A. Atangana Likéné,^{*,†,§} J. M. Ema'a Ema'a,^{‡,¶}
P. Ele Abiama^{*,†,||} and G. H. Ben-Bolie^{*,**}

**Laboratory of Atomic, Molecular and Nuclear Physics,
Department of Physics, Faculty of Science,
University of Yaounde I, P. O. Box 812, Yaounde, Cameroon*

*†The Nuclear Technology Section (NTS),
Institute of Geological and Mining Research,
P. O. Box 4110, Yaounde, Cameroon*

*‡Bertoua Higher Teachers' Training College,
Department of Physics, University of Bertoua,
P. O. Box 55, Bertoua, Cameroon*

§andreaime@yahoo.fr

¶emaajm@yahoo.fr

||eleabiama2003@yahoo.fr

***gbenbolie@yahoo.fr*

Received 13 April 2023

Revised 24 August 2023

Accepted 10 September 2023

Published 26 October 2023

In this work, we use the approach recently introduced by Barros to study hadron spectra and some quark confinement properties in a Schwarzschild-like space–time generated by a nongravitational field. As a starting point, for the nongravitational field, we make the choice of a strong Yukawa-like field whose associated potential is a generalized Yukawa-like potential, typical of strong interactions. Then, from the latter field, the energy momentum tensor is constructed, the Einstein field equations are solved and the curvature function of the Schwarzschild metric is obtained. The correspondence principle applied to the Schwarzschild metric has enable us to construct the Dirac equation in the latter space. The resolution of the coupled differential equations of Dirac made it possible to obtain the energy spectrum of the strong interaction. The latter is obtained in a more general form than in the previous investigations. Then, the energy spectrum, masses and confinement radius of few hadrons are estimated and compared with experimental data and other theoretical studies. In most considered cases, our predictions are found to be in good agreement with experimental data. The good agreement observed between our outcomes and the experiment can be attributed to the choice of our potential, which has more free parameters than in past studies with the same approach.

Keywords: Dirac equation; Schwarzschild metric; space–time; quark; confinement; hadrons; curvature; Yukawa potential.

PACS numbers: 14.40.Pq, 13.20.Gd, 12.39.Jh

[§]Corresponding author.

1. Introduction

The effect of quantum dynamics in the structure of space–time, and the effect of the structure of space–time in quantum mechanics, are subjects which until today have not yet been formally theorized. The amount of efforts made by theoretical physicists to attempt to quantize gravity sufficiently illustrates this fact.^{1,2} In most investigations of quantum systems and particle physics studies in particular, this question is not considered, and the manifold is simply the flat Minkowski space–time^{3,4} and no interaction is considered to affect the structure of the space–time. However, there is a fundamental question that remains, whether nongravitational interactions can also affect the space–time structure in a way analogous to the role of a gravitational field in general relativity, on the one hand. On the other hand, there is another fundamental question whether these effects can be observed. It is with so many questions in mind that a theory has recently been introduced.^{3–6} In the latter theory, the effects mentioned above have been taken into account, in the case for example of electromagnetic and strong interactions,^{3,7} leading to very interesting results in agreement with experiment. With the introduction of potential models by Gell-Mann⁸ and Zweig⁹ in 1964, many authors have proposed potential models to describe the structure of hadrons in terms of confined particles: quarks. Among these models, we can cite the deformed oscillator model,^{10–13} models with nonrelativistic potentials such as the oscillator model,^{14,15} which states that baryons are particles composed of three quarks confined in a harmonic potential, the Cornell model,^{16–19} the extended Cornell model^{20–23} and many others. Despite the success of these models of nonrelativistic potentials in the description of the properties of hadrons, it remains however more reasonable to treat quarks as relativistic particles.

Recently, Barros^{3–5} proposed a new approach by postulating that the other fundamental interactions of nature can also manifest through the structure of space–time in a manner analogous to the gravitational interaction. According to this approach, the particles describe geodesics in a curved space–time not by the presence of a mass but by the presence of an electric charge or a color charge.⁷ The nongravitational interaction potential is incorporated into the metric purely geometrically.^{3–5} By thus establishing via the principle of correspondence the Dirac equation for an electron evolving in a curved space–time,^{4,6} endowed with a static metric with spherical symmetry similar to that of Schwarzschild, due to the presence of the Coulomb potential, Barros was able to describe the hydrogen atom in a whole new way and obtained results in good agreement with the experimental data. However, in an article from the early 2000s,³ a relativistic quantum wave equation taking into account principles of general relativity was derived. The results of this work were obtained by incorporating the effects of two different types of nongravitational interactions namely the electromagnetic interaction and the strong interaction, into the metric. Following the same approach, a recent work has suggested the Yukawa potential as source of the Schwarzschild curvature to study the

confinement of quarks in hadrons.⁷ One interesting fact that comes from this new theory, is the existence of black holes inside these quantum systems, whose horizon is the confinement radius, with nonnegligible sizes.³ This propriety is related to the existence of a trapping surface at the Schwarzschild radius, as it was defined by Penrose.²⁴ Motivated by these advances, this work is devoted to study the mass spectra and confinement properties of quarks with this theory by using a more general potential.

In this work, we are looking for a geometric description of the strong interactions starting from a fairly simple assumption that the interaction energy of a color charge can have some direct effects on the structure of space-time,^{3,7} in the same way as in the case of gravitation where the properties of space-time are modified in the presence of a mass. In order to compliment this newly proposed theory, and implement all these ideas in a simple way, we will consider a nonrelativistic quark potential, namely a Yukawa-type interaction potential in a more general form as in Refs. 25 and 26 and references therein. The latter is an improved version of the potential used in Ref. 7. Indeed, it combines the classical Coulomb potential^{3,4,6,7} which is typical of electromagnetic interactions and the classical Yukawa potential^{7,27} which is typical of strong interactions.

This paper is structured as follows. In Sec. 2, a brief review of Einstein's field equation, its solutions and the solutions of the Dirac equation for a generalized Yukawa potential are presented. In Sec. 3, energy spectra, hadrons masses and confinement properties coming from this theory are presented. In Sec. 4, the obtained results and their implications on dynamical properties of hadrons are discussed, then compared with experimental data and other relevant theoretical works. Finally, in Sec. 5, we present our conclusions.

2. Review of the Theory and Solutions of the Equation

In this section, Einstein's field equations for particles subjected to a Yukawa-like potential, neglecting the effect of the gravitational field, are obtained. For this purpose, a brief review of the results of Ref. 3, is presented and then, we relate them by introducing the energy-momentum tensor associated with the strong Yukawa-like field. The Schwarzschild metric will be fully determined by solving the Einstein equations. By applying the correspondence principle to the Schwarzschild metric, an equation similar to the Dirac equation will be derived and solved using series method.

2.1. Einstein's field equations and metric

Let us consider a time-independent system with spherical symmetry. The space-time manifold can be described by a Schwarzschild-like metric^{3,28,29}

$$ds^2 = \xi(r)c^2 dt^2 - \frac{1}{\xi(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

which can be written in the following compact form:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2)$$

The factor $\xi(r)$ in Eq. (1) is a radial function that describes the way the nongravitational potential $V(r)$ affects the space-time curvature. The coefficients $g_{\mu\nu}$ in Eq. (2) are the covariant components of the metric tensor whose matrix representation is

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \xi(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\xi(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3)$$

The contravariant components $g^{\mu\nu}$ of the metric tensor are obtained from the relation

$$\sum_{\beta=0}^3 g_{\mu\beta} g^{\beta\nu} = \delta_\mu^\nu, \quad (4)$$

with δ_μ^ν being the Kronecker delta. Then, Eq. (4) implies that

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Apart from the metric tensor, the basic objects of a manifold are the Christoffel symbols, the Riemann and Ricci tensors, as well as the scalar curvature.^{28–32} The Christoffel symbols of the second kind $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ are calculated by using to the following formula:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\mu\rho} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} g_{\mu\nu} \right] = g^{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu\rho} \quad (6)$$

$\Gamma_{\mu\nu\rho}$ are Christoffel symbols^a of the first kind. From Eq. (6), the Riemann tensor, Ricci tensor, and the Scalar curvature can be calculated, respectively, as follows:

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (7)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho, \quad (8)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (9)$$

^aThe Christoffel symbols are also called connection coefficients.

Following the approach of Barros on Einstein equations for the electromagnetic interaction,³ Einstein equations for the strong interaction can be written as

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4}T_{\mu\nu}, \quad (10)$$

where $G_{\mu\nu}$ is the Einstein tensor,^{29,33} $\alpha_s \equiv g^2/4\pi$ is the strong coupling constant and m is the mass of a hadron. On the right-hand side of Eq. (10), we have the energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ which describes the energy and matter content of a system. In the case of a perfect fluid, the energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ is written as²⁹

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (11)$$

where p is the pressure of the fluid, ρ is the matter density and u^μ is the speed of the fluid in the space-time continuum. In the case of a single particle in a stationary state, the energy-momentum tensor takes the following form²⁹:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho}{c^2}\beta^\mu\beta^\nu = \rho e^{-A(r)}\delta^{\mu 0}\delta^{\nu 0}, \quad (12)$$

from which we can deduce using the properties of the Kronecker delta that the only nonvanishing component of the energy-momentum tensor will be T^{00} . In this case, the Einstein equation to be solved is the following:

$$g_{00}R^{00} - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4}g_{00}T^{00} = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4}T_0^0, \quad (13)$$

where the mixed component of the energy-momentum tensor can be deduced from Eq. (12) in the form

$$T_0^0 = g_{00}T^{00} = \rho. \quad (14)$$

In what follows, we are searching for solutions of Einstein equations for a moving particle in a space-time curved by the presence of a strong field of the following form:

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{\alpha_s}{4\pi}} \frac{(a + b\exp(-\mu r))}{r}, \quad (15)$$

where a, b are arbitrary constants and μ is the rest mass of the mediator of the interaction associated with the scalar field $\phi(r)$. The Yukawa-like potential associated with the strong field ϕ can be written as

$$V(r) = -g\phi(r) = -\frac{\alpha_s}{r}(a + b\exp(-\mu r)). \quad (16)$$

For a suitable choice of the parameter, one can recover the expressions of the interaction potential used in Refs. 3 and 7. Due to the spherical symmetry of the problem, we will look for a Schwarzschild-like static metric of the following form:

$$ds^2 = e^{A(r)}c^2dt^2 - e^{-A(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (17)$$

where A is an arbitrary function of r . In this way, the Einstein equation to be solved takes the following form^{7,34}:

$$\frac{e^{A(r)}}{r^2} \left(r \frac{dA(r)}{dr} + 1 \right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi\alpha_s}{m^2 c^4} \rho(r), \quad (18)$$

whose solution is³⁴

$$\xi(r) = e^{A(r)} = 1 - \frac{2\alpha_s}{m^2 c^4 r} M(r) \quad (19)$$

with

$$M(r) = M_0 + \int_{r_0}^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr', \quad (20)$$

where M_0 is a constant of integration and r_s is the Schwarzschild radius. In Eq. (20), the domain of integration has been separated into two regions: the internal region $0 \leq r' \leq r_s$ and the external region $r_s \leq r' \leq r$ of the horizon of events.

The expression of the energy density $T_0^0 = \rho$ of the boson mediator of the strong interaction, is given by the Hamiltonian density of the Yukawa scalar field associated with it³⁵

$$\rho = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla}\phi)^2 + \mu^2 \phi^2]. \quad (21)$$

The explicit expression of ρ is needed to compute the function $\xi(r)$ and thus find the explicit form of the metric for the Yukawa-like strong field. Taking into account Eq. (15), one can write Eq. (21) in the following more explicit form:

$$\rho = \frac{\alpha_s}{8\pi} \left\{ \left(\frac{2b^2\mu^2}{r^2} + \frac{2b^2\mu}{r^3} + \frac{b^2}{r^4} \right) e^{-2\mu r} + \left(\frac{2ab}{r^4} + \frac{2ab\mu}{r^3} + \frac{2ab\mu^2}{r^2} \right) e^{-\mu r} + \left(\frac{a^2}{r^4} + \frac{a^2\mu^2}{r^2} \right) \right\}. \quad (22)$$

The above equation is a generalization of the expression of the energy density obtained in Refs. 3 and 7. Indeed, by setting $a = \alpha Z$ and $b = \mu = 0$, we obtain the expression of Ref. 3. Whereas if we set $a = 0$, $b = 1$ and $\mu \neq 0$, we obtain the expression of Ref. 7. By evaluating the integral in Eq. (20) by parts using Eq. (22) and transferring all of this into Eq. (19), the latter becomes after simplifications

$$e^{A(r)} = 1 - \frac{2\chi}{r} + \left(\frac{\alpha_s b}{m c^2} \right)^2 (1 + \mu r) \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} + \frac{2ab\alpha_s^2}{m^2 c^4} (1 + \mu r) \frac{e^{-\mu r}}{r^2} + \left(\frac{\alpha_s a}{m c^2} \right)^2 \left(\frac{1}{r^2} - \mu^2 \right), \quad (23)$$

where χ is a parameter having the dimensions of a length. It is important to note that these expressions are derived in the limit of small distances ($\mu r \ll 1$). We want to rewrite Eq. (23) in the following form:

$$e^{A(r)} = \left(1 - \frac{\eta}{r} \right)^2 = 1 - \frac{2\eta}{r} + \frac{\eta^2}{r^2}. \quad (24)$$

By comparing Eqs. (23) and (24) term by term, it comes that

$$\eta = \chi = \sqrt{\left(\frac{\alpha_s a}{mc^2}\right)^2 + \frac{2ab\alpha_s^2}{m^2 c^4} (1 + \mu r)e^{-\mu r} + \left(\frac{\alpha_s b}{mc^2}\right)^2 (1 + \mu r)e^{-2\mu r}} \quad (25)$$

and therefore the curvature function of the Yukawa-like potential can be written as

$$\begin{aligned} \xi(r) &= e^{A(r)} \\ &= \left[1 - \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\alpha_s a}{mc^2}\right)^2 + \frac{2ab\alpha_s^2}{m^2 c^4} (1 + \mu r)e^{-\mu r} + \left(\frac{\alpha_s b}{mc^2}\right)^2 (1 + \mu r)e^{-2\mu r}} \right]^2, \end{aligned} \quad (26)$$

and its square root after simplifications gives

$$\sqrt{\xi(r)} \approx 1 + \frac{b^2 \mu \alpha_s}{2mc^2} - \frac{(a+b)\alpha_s}{mc^2 r}. \quad (27)$$

The curvature function of the present work is obtained in a more general form than those found in previous work. Indeed, by a suitable choice of the parameters of the potential, one can find the expressions of the curvature function obtained in Refs. 3 and 7. Having the full expression of the metric tensor in hand, we are now able to establish quantum wave equations in a curved space-time with Schwarzschild-like metric.

2.2. Dirac equation in Schwarzschild-like space-time

For a massive spin 1/2 particle moving in a curved space-time endowed with a Schwarzschild-like metric, it is quite possible to establish a quantum wave equation by applying the correspondence principle to the Dirac Hamiltonian associated with the particle.^{36,37} The latter is given by^{3,7,36,37}

$$H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}c + \beta mc^2 \quad (28)$$

with $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{e}_i$, where $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ and β are the well-known 4×4 Dirac matrices defined as

$$\vec{\alpha} = \left(\left(\begin{array}{cc} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{array} \right) \right), \quad \beta = \left(\left(\begin{array}{cc} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & -\mathbb{K} \end{array} \right) \right), \quad (29)$$

where \mathbb{K} is the 2×2 unit matrix and $\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \vec{e}_i$, where σ_i are the 2×2 Pauli matrices given by

$$\sigma_1 = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right), \quad \sigma_2 = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array} \right) \right), \quad \sigma_3 = \left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \right). \quad (30)$$

Now, by using the correspondence principle, and then applying the Dirac Hamiltonian (28) on a 4 components wave function $\Psi(\vec{r}, t)$, we obtain the following generalized Dirac equation^{3,4}:

$$\frac{i\hbar}{\sqrt{\xi(r)}} \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \{-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{\text{Sch}} + \beta mc^2\} \Psi(\vec{r}, t). \quad (31)$$

In what follows, we are looking for a solution of Eq. (31) of the following form:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right). \quad (32)$$

By substituting Eq. (32) into Eq. (31), and after simplification, the following equation is obtained:

$$\left\{ -i\hbar\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{\text{Sch}} + \beta mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \right\} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (33)$$

Making use of some little algebra, one can easily show that the kinetic term $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{\text{Sch}}$ associated with the Laplace–Beltrami operator for the Schwarzschild-like metric can be put in the following form:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{\text{Sch}} = \frac{\xi(r)}{r} \vec{\alpha} \cdot \vec{r} \left\{ \sqrt{\xi(r)} r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\alpha^\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right\}, \quad (34)$$

where $\xi(r)$ is given by Eq. (27). Taking Eq. (34) into account, Eq. (33) becomes

$$\left\{ -i\hbar\alpha_r \left(\sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{\hbar r} \right) + \beta mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \right\} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (35)$$

At this stage, it is convenient to write the wave function $\psi(\vec{r})$ in terms of the spinor upper $\Sigma(\vec{r})$ and the spinor lower $\Xi(\vec{r})$ as follows^{38–40}:

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \Sigma(\vec{r}) \\ \Xi(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(r)\Omega_k^\mu(\theta, \varphi) \\ iG(r)\Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

where $F(r)$ and $G(r)$ are arbitrary functions of r and $\Omega_{\pm k}^\mu$ are the spherical spinors.^{38–40} These spinors can be expanded in the basis of the well-known spherical harmonics as follows:

$$\Omega_{\pm k}^\mu(\theta, \varphi) = \sum_{m=-1/2}^{+1/2} C\left(l, \frac{1}{2}, j; \mu - m, m\right) Y_l^{\mu-m}(\theta, \varphi) \chi^m, \quad k = j + \frac{1}{2}, \quad (37)$$

where $C(l, \frac{1}{2}, j; \mu - m, m)$ and χ^m stand, respectively, for the Clebsch–Gordan coefficients and the Pauli spinors. Further, in order to make use of the properties of spherical spinor in a simple way, we introduce the operator \hat{K} defined by

$$\hat{K} = \hbar\mathcal{K} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \quad (38)$$

which satisfies the following eigenvalue equation:

$$\hat{K}\Omega_k^\mu(\theta, \varphi) = -\hbar k \Omega_k^\mu(\theta, \varphi), \quad k = j + \frac{1}{2}. \quad (39)$$

Next, taking into account Eq. (36) and the definitions of β and $\alpha_r = \alpha_1$ Dirac matrices, Eq. (35) takes the following matrix form:

$$\left(\left(\begin{array}{cc} mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} & -i c \sigma_1 \left(\hbar \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{K} - \hbar \not{K}}{r} \right) \\ -i c \sigma_1 \left(\hbar \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{K} - \hbar \not{K}}{r} \right) & -mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \end{array} \right) \right) \times \begin{pmatrix} F(r) \Omega_k^\mu(\theta, \varphi) \\ i G(r) \Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

from which we can deduce the following system of two coupled differential equations:

$$\left(mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \right) F(r) \Omega_k^\mu(\theta, \varphi) + c \sigma_1 \left\{ \hbar \sqrt{\xi(r)} \frac{dG(r)}{dr} \Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) - G(r) \frac{\hat{K} - \hbar \not{K}}{r} \Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) \right\} = 0, \quad (41)$$

$$c \sigma_1 \left\{ \hbar \sqrt{\xi(r)} \frac{dF(r)}{dr} \Omega_k^\mu(\theta, \varphi) - F(r) \frac{\hat{K} - \hbar \not{K}}{r} \Omega_k^\mu(\theta, \varphi) \right\} + \left(mc^2 + \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} \right) G(r) \Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) = 0. \quad (42)$$

Using Eq. (39) together with the identity $\sigma_1 \Omega_k^\mu(\theta, \varphi) = -\Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi)$, and after rearrangement and simplifications, Eqs. (41)–(42) become

$$\sqrt{\xi(r)} \frac{dG(r)}{dr} + (1 - k) \frac{G(r)}{r} = -\frac{1}{\hbar c} \left(\frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} - mc^2 \right) F(r), \quad (43)$$

$$\sqrt{\xi(r)} \frac{dF(r)}{dr} + (1 + k) \frac{F(r)}{r} = -\frac{1}{\hbar c} \left(\frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} + mc^2 \right) G(r). \quad (44)$$

We are looking for solutions of the type

$$F(X) = X^s \sum_{n=0}^N a_n X^n e^{-X}, \quad (a_0 \neq 0), \quad (45)$$

$$G(X) = X^s \sum_{n=0}^N b_n X^n e^{-X}, \quad (b_0 \neq 0), \quad (46)$$

which are the well-known Frobenius series, with $X = \frac{\delta}{\hbar c} r$. Their first derivatives are, respectively, obtained in the following form:

$$\frac{dF(X)}{dX} = \sum_{n=0}^N a_n [(n + s) X^{n+s-1} - X^{n+s}] e^{-X}, \quad (47)$$

$$\frac{dG(X)}{dX} = \sum_{n=0}^N b_n [(n+s)X^{n+s-1} - X^{n+s}] e^{-X}. \quad (48)$$

By inserting Eqs. (45)–(48) and (27) into Eqs. (43)–(44), after simplification and rearrangement, we get

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{E - mc^2\Lambda}{\delta} a_n - \Lambda^2 b_n \right\} X^n \\ & + \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{mc^2\omega}{\hbar c} a_n + \left[(n+s)\Lambda^2 + (1-k)\Lambda + \frac{2\Lambda\delta\omega}{\hbar c} \right] b_n \right\} X^{n-1} \\ & - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{2\Lambda\delta(n+s)\omega}{\hbar c} + \left(\frac{\delta\omega}{\hbar c} \right)^2 + \frac{\delta(1-k)\omega}{\hbar c} \right\} b_n X^{n-2} \\ & + \sum_{n=0}^N \frac{\delta^2\omega^2(n+s)}{\hbar^2 c^2} b_n X^{n-3} = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{E + mc^2\Lambda}{\delta} b_n + \Lambda^2 a_n \right\} X^n \\ & + \sum_{n=0}^N \left\{ \left[(n+s)\Lambda^2 + (1+k)\Lambda + \frac{2\Lambda\delta\omega}{\hbar c} \right] a_n + \frac{mc^2\omega}{\hbar c} b_n \right\} X^{n-1} \\ & - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{2\Lambda\delta(n+s)\omega}{\hbar c} + \left(\frac{\delta\omega}{\hbar c} \right)^2 + \frac{\delta(1+k)\omega}{\hbar c} \right\} a_n X^{n-2} \\ & + \sum_{n=0}^N \frac{\delta^2\omega^2}{\hbar^2 c^2} (n+s) a_n X^{n-3} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

where $\Lambda = 1 + \frac{i^2\mu\alpha_s}{2mc^2}$ and $\omega = \frac{(a+b)\alpha_s}{mc^2}$. By grouping the terms of the same power of X , then equating each power coefficient to zero, and by performing some little algebra, we can deduce the following recurrence relations:

$$\frac{E - mc^2\Lambda}{\delta} a_n = \Lambda^2 b_n, \quad (51)$$

$$\frac{mc^2\omega}{\hbar c} b_n = - \left[n\Lambda^2 + (1+k)\Lambda + \frac{2\Lambda\delta\omega}{\hbar c} \right] a_n \quad (52)$$

for Eq. (49), and then for Eq. (50) we have

$$\frac{E + mc^2\Lambda}{\delta} b_n = -\Lambda^2 a_n, \quad (53)$$

$$\frac{mc^2\omega}{\hbar c} a_n = - \left[n\Lambda^2 + (1-k)\Lambda + \frac{2\Lambda\delta\omega}{\hbar c} \right] b_n \quad (54)$$

with $\delta = \frac{\sqrt{m^2c^4\Lambda^2 - E^2}}{\Lambda^2}$. By eliminating the coefficients a_n and b_n in Eqs. (51)–(52) as well as in Eqs. (53)–(54), and then by adding the relations obtained term by term,

we obtain

$$\frac{2\omega}{\hbar c} \delta^2 + (n\Lambda + 1)\delta - \frac{m^2 c^4 \omega}{\hbar c \Lambda^2} = 0. \quad (55)$$

The latter equation admits two real solutions given by

$$\delta_{\pm} = -\frac{\hbar m c^3}{4(a+b)\alpha_s} (n\Lambda + 1) \pm \frac{m c^2}{2\Lambda} \sqrt{\frac{\Lambda^2}{4(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + 2}. \quad (56)$$

On the other hand, we have

$$\delta = \frac{\sqrt{m^2 c^4 \Lambda^2 - E^2}}{\Lambda^2}. \quad (57)$$

By comparing Eqs. (56) and (57) knowing that δ is positive, we deduce that

$$E^2 = m^2 c^4 \left[\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{(\hbar c)^2 \Lambda^4}{8(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + \frac{\hbar c \Lambda^3 (n\Lambda + 1)}{4(a+b)\alpha_s} \sqrt{\frac{(\hbar c)^2 \Lambda^2}{4(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + 2} \right]. \quad (58)$$

By considering the positive solutions, the energy eigenvalues are then

$$E_n = m c^2 \left[\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{(\hbar c)^2 \Lambda^4}{8(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + \frac{\hbar c \Lambda^3 (n\Lambda + 1)}{4(a+b)\alpha_s} \sqrt{\frac{(\hbar c)^2 \Lambda^2}{4(a+b)^2 \alpha_s^2} (n\Lambda + 1)^2 + 2} \right]^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (59)$$

Special cases By making some adjustments in Eqs. (15)–(16), the following special cases can be obtained:

- **Coulomb potential**

For $a = 1$, $b = 0$ and therefore $\Lambda = 1$ and $\omega = \alpha_s/mc^2$, the strong field $\phi(r)$ is reduced to a Coulomb-like field and the nongravitational interaction potential is reduced to the Coulomb potential.^{3,4,6,7} In this case, Eq. (59) is reduced to

$$E_n = m c^2 \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{n^2}{8\alpha_s^2} + \frac{n}{4\alpha_s} \sqrt{\frac{n^2}{4\alpha_s^2} + 2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (60)$$

which is similar to the results obtained by Barros for the coulomb potential, α_s being replaced by the fine structure constant α . For more details, one can refer to Refs. 3–5 and 7.

• **Yukawa potential**

For $a = 0, b = 1$ and therefore $\Lambda = 1 + \frac{\mu\alpha_s}{2mc^2}$ and $\omega = \alpha_s/mc^2$, the strong field $\phi(r)$ is reduced to a pure Yukawa field and the nongravitational interaction potential is reduced to the Yukawa potential.^{7,27} The energy equation is then

$$E_n = mc^2 \sqrt{\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{\Lambda^4 n^2}{8\alpha_s^2} + \frac{n\Lambda^3}{4\alpha_s} \sqrt{\frac{n^2 \Lambda^2}{4\alpha_s^2} + 2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (61)$$

which is similar to the result obtained in Refs. 4 and 7.

3. Quarks and Gluons Confinement Properties

In this section, we will determine some confinement properties of quarks and gluons such as their Schwarzschild radius and their wave functions inside the black hole. From the curvature function established in the previous section, we will explain in a purely geometrical way the phenomenon of confinement and some theoretical implications. Obtaining the curvature function reveals that the theory of Barros makes it possible to predict the existence of black holes responsible for the confinement of quarks in hadrons. This allows to understand from the outset why in our potential model, we did not need to incorporate confinement terms. However, the potential given by Eq. (16) directly takes into account two aspects of the strong interaction. Among these aspects, we have in particular the residual strong interaction. This picture of the strong interaction is that which acts between nucleons and is dominated by the one-pion exchange process described by a pure Yukawa potential $-\alpha_s \frac{b \exp(\mu r^-)}{r}$, μ being the pion mass. On the other hand, the basic strong interaction. This picture of the strong interaction acts between quarks and is dominated by the one-gluon exchange process, which is usually described by a pure Coulomb-like term $-\alpha_s \frac{a}{r}$. According to Eq. (27), the Schwarzschild radius of a hadron under the influence of the potential equation (16) is obtained by canceling the curvature function $\xi(r)$, which gives us

$$\xi(r) = 0 \Rightarrow r_s = \frac{2(a + b)\alpha_s}{2m_q c^2 + b^2 \mu \alpha_s}, \quad (62)$$

where m_q is the quark effective mass. By making a suitable adjustment of the potential parameters, we find the expressions of Schwarzschild radius obtained in Refs. 3 and 7. In addition, Eq. (62) clearly shows that there is a link between the quark effective mass inside the hadron and the size of the black hole. Moreover, this formula is valid except for the special case of Eq. (16) where $a = -b$, for which the black hole no longer exists. If we are interested in the strong interaction between the quarks, that is to say $b = 0$, the mediator boson being the gluon, of mass $\mu = 0$,

Eq. (62) becomes

$$r_s = \frac{a\alpha_s}{m_q c^2}, \quad (63)$$

where m_q is the quark mass. For a proton for example, we find that $r_s = 0.857210$ fm for $a = 0.92$ and $r_s = 0.838575$ fm for $a = 0.90$. Then for a neutron, we find $r_s = 0.856178$ fm for $a = 0.92$ and $r_s = 0.837566$ fm for $a = 0.90$. Indeed, these values are of the same order of magnitude as the radius of a nucleon.^{41,42} On the other hand, the size of a quark is smaller than 10^{-18} m. Thus, analogously to the usual case of the gravitational interaction, the Schwarzschild radius associated with the strong interaction between the quarks delimits a region within the hadrons in which the quarks remain trapped. An interesting aspect of this approach is that it is absolutely impossible for a quark confined inside a hadron to reach the surface $r = r_s$ of the horizon of events. It is therefore obvious that the wave function associated with the quark vanishes completely at this point and we will have

$$\psi(r_s) = \begin{pmatrix} F(r_s)\Omega_k^\mu(\theta, \varphi) \\ iG(r_s)\Omega_{-k}^\mu(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Space-time is therefore separated into two completely disconnected regions due to the discontinuity of the wave function at the surface $r = r_s$. For this purpose, a solution of the radial equations of Dirac, notably Eqs. (43)–(44), near the horizon of events can be obtained by a series expansion similar to the developments proposed in Refs. 4 and 7

$$F(X) = X^s \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(X - \frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3} \right)^n H \left(\frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3} - X \right) e^{-X}, \quad (65)$$

$$G(X) = X^s \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(X - \frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3} \right)^n H \left(\frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3} - X \right) e^{-X}, \quad (66)$$

where X has been replaced in Eqs. (45)–(46) by $X - \frac{a\alpha_s \delta}{m_q \hbar c^3}$, and the function H given by

$$H(A - X) = \begin{cases} 1 & \text{for } X \geq A \\ 0 & \text{for } X < A \end{cases}, \quad (67)$$

is the Heaviside step function, which is introduced here to ensure that the quark being confined inside the hadron, the wave function must vanish in the region $r > r_s$. In the previous paragraph, we have seen that the theory predicts the existence of a Schwarzschild black hole whose strong gravity is responsible for the phenomenon of quarks confinement inside hadrons. However, what about gluons? Do they undergo the same effect as quarks? Gluons are nonmassive vector bosons of spin 1, carrying a color charge. Gluons are described by a vector field A_μ^d ($\mu = 0, \dots, 3$), d being the color charge. For the metric given by Eq. (1), the components of the spin 1 field obey a generalized Klein–Gordon equation. Indeed, following the procedure detailed in

Ref. 3, the energy operator is defined as

$$E = i\hbar\nabla_0 = \frac{i\hbar}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{i\hbar}{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (68)$$

On the other hand, the scalar product of the momentum four-vector, which is a Lorentz invariant, can be expressed as

$$p_\mu p^\mu = \vec{p}^2 c^2 - \frac{E^2}{\xi(r)} = m^2 c^4 \Rightarrow \frac{E}{\sqrt{\xi(r)}} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (69)$$

with

$$\vec{p}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\sqrt{\xi(r)}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (70)$$

Using Eqs. (68)–(70), and the fact that the gluon field is a massless field, the Klein–Gordon equation based on general relativity is

$$-\left(\frac{\hbar}{\xi(r)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_\mu^d(\vec{r}, t) = -\hbar^2 c^2 \left\{ \frac{\sqrt{\xi(r)}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}}{r^2} \right\} A_\mu^d(\vec{r}, t). \quad (71)$$

Looking for a solution of the form $A_\mu^d(\vec{r}, t) = B_\mu^d(r, \theta, \varphi) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$, Eq. (71) becomes

$$\frac{1}{r^2} \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_\mu^d(r, \theta, \varphi) + \left(\frac{E^2}{\hbar^2 c^2 \xi^2(r)} - \frac{\vec{L}}{r^2} \right) B_\mu^d(r, \theta, \varphi) = 0. \quad (72)$$

On the horizon of events $r = r_s$ and beyond, time is dilated to infinity and the time component g_{00} of the metric tensor given by Eq. (1) vanishes $\xi(r_s) = 0$, then it comes that

$$\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} B_\mu^d(r_s, \theta, \varphi) = 0 \Rightarrow B_\mu^d(r_s, \theta, \varphi) = 0. \quad (73)$$

We see here that the gluon field also presents a discontinuity on the horizon of events. Therefore, the vector field $B_\mu^d(r, \theta, \varphi)$ can be put in the form

$$\bar{B}_\mu^d(r, \theta, \varphi) = H(r_s - r) B_\mu^d(r, \theta, \varphi). \quad (74)$$

Moreover, one could use this approach to postulate in particular the emission of a soft radiation by this type of black hole, in a manner analogous to Hawking radiation. However, the latter would not come from quantum fluctuations of the vacuum in the external region near the horizon of events, but rather inside the region $r < r_s$. Indeed, an up quark can emit a W^+ boson and decay into a down quark. The W^+ boson which was emitted, rapidly decays into a positron e^+ and electron neutrino ν_e , which is a β^+ decay. Since the particles W^+ , e^+ and ν_e do not carry a color charge, they will be able to escape from the gravitational well thus created and the black hole will be able to radiate. On the other hand, a neutral pion at rest can decay into two

photons according to $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Since the strong curvature mentioned in this work is only perceptible by particles carrying a color charge, particles such as the lepton family, photons and massive vector bosons, would therefore feel no effect produced by this strong curvature. In addition, the decaying particles being hadrons, they remain confined inside the black hole, whereas photons, leptons and some massive bosons will be able to escape out of the black hole, because seen by them space-time is flat. However, describing a hadron as a black holes configuration raises a number of questions, namely how can they interact with each other? Indeed, the classic description of black holes predicts that they can interact with other celestial objects but also with each other by gravitational attraction or by forming a binary system, or even by merging while releasing energy in the form of gravitational waves. We will therefore have a similar mechanism in the case of hadrons as black holes configurations. Gluons and quarks interact with each other through a strong color field, which directly affects the structure of space-time. Thus, in the case of the strong interaction, space-time is divided into two regions which do not communicate and which are separated by an event horizon inside which the gluons and quarks remain trapped. Furthermore, the classical description predicts that any matter beyond the horizon of events will inevitably collapse into the singularity located at $r = 0$. However, since we are dealing with a quantum system, the uncertainty principle will prevent any collapse.

4. Numerical Results and Discussion

In this section, we use the results obtained in the previous sections to evaluate the properties of some baryons, mesons and atomic nuclei. In the case of this newly proposed approach, and for particular cases of the potential given by Eq. (16), we will estimate the mass of some atomic nuclei, the Schwarzschild radius associated with some baryons and mesons, as well as their masses. As previously mentioned, inside the atomic nucleus, the nucleons interact via the exchange of a virtual π^0 meson whose mass is about 0.134977 GeV.^{7,43} To test the reliability of our model, we will among other things calculate the mass of selected nuclei. Thus, we will use Eq. (59) in the particular case of the residual strong interaction ($a = 0$). The mass of an atomic nucleus can be calculated from the formula^{7,43}

$$M_{\text{nucl}} = \sum_{i=1}^l E_{1,i}(m_p^{\text{eff}}) + \sum_{j=1}^k E_{1,j}(m_n^{\text{eff}}), \quad (75)$$

where l and k , respectively, stand for the number of protons and neutrons contained in the considered nucleus; m_p^{eff} and m_n^{eff} are the effective masses of the proton and neutron in the nucleus and are, respectively, given by⁴⁴

$$m_p^{\text{eff}} \approx m_p - \frac{5}{3} \frac{q_F^3}{(2m_p^2 - q_F^2)}, \quad (76)$$

$$m_n^{\text{eff}} \approx m_p - \frac{5}{3} \frac{q_F^3}{(2m_p^2 - q_F^2)}, \quad (77)$$

where $m_p = 0.938$ GeV and $m_n = 0.940$ GeV are, respectively, the mass of the proton and that of the neutron, q_F is the Fermi wave vector, which can be determined from fitting the spectra with experimental data. In nuclear physics, the effective masses of nucleons are smaller than their free masses, and are around 0.8 GeV.^{45–47} Indeed, in the case of the proton for example we find $m_p^{\text{eff}} = 0.811$ GeV, and in the case of the neutron we find $m_n^{\text{eff}} = 0.845$ GeV. More details can be found in Refs. 45–47 and references therein. In view of these values of effective masses, we notice that the proton or the neutron in interaction with another nucleon loses a quantity of its mass, which is transformed into binding energy. This mass defect corresponds approximately to the mass of the π^0 meson and is approximately $\mu = 0.134977$ GeV.⁴³ It is well known that the exchange of virtual π mesons, along with vector ω and ρ mesons, provides a good explanation of the residual strong interaction between nucleons.⁴⁸ However, within the framework of this study, it is not possible to estimate the contribution of the vector mesons to the nuclear masses, since the physical picture behind the use of the Yukawa potential is the exchange of a massive scalar field like that of a pion. Nevertheless, the contribution of vector mesons to the nuclear masses could be investigated in future studies using a more general potential which takes into account the spin-dependent forces or even more complex terms. In this study, we consider the states π^\pm and π^0 of the π meson with respective masses $m_{\pi^\pm} = 139.570$ MeV and $m_{\pi^0} = 134.977$ MeV. The masses of the atomic nuclei considered in this study are reported in Table 1. The calculations were done for the particular case of the potential for which $a = 0$. The numerical results were obtained at different values of the parameter b , and then compared with experimental data from Ref. 43 and previous theoretical studies.

Table 1 shows that our outcomes of inter nucleon interaction energy spectra are closer to the experimental data as the parameter b tends to unity. The notation $\text{Err} = |\Delta M|/M_{\text{exp}}$, designates the relative error calculated with respect to the experimental data. Err 1 and Err 2 are the percentage of relative error associated with $b = 0.95$ and $b = 0.96$, respectively. In particular, for the value $b = 0.95$, the

Table 1. Masses of some atomic nuclei, calculated at different values of the parameter b , with $m_p^{\text{eff}} = 0.811$ GeV and $m_n^{\text{eff}} = 0.845$ GeV. Experimental data are taken from Ref. 43. The masses are in MeV.

Nuclei	Symbol	α_s	Our($b = 0.95$)	Our($b = 0.96$)	Ref. 7	Exp. ⁴³	Err 1	Err 2
Deuterium	${}^2_1\text{H}$	0.97	1873.971	1866.873	1867.754	1875.613	0.087%	0.465%
Tritium	${}^3_1\text{H}$	0.97	2813.515	2789.031	2804.918	2809.432	0.145%	0.726%
Helium	${}^4_2\text{He}$	0.94	3729.217	3713.179	3726.932	3728.4013	0.021%	0.408%
Lithium	${}^7_3\text{Li}$	0.92	6537.229	6507.283	5711.532	6465.501	1.109%	0.646%
Beryllium	${}^9_4\text{Be}$	0.92	8385.818	8347.107	8395.323	8394.794	0.106%	0.568%
Boron	${}^{11}_5\text{B}$	0.88	10447.963	10396.719	9519.22	10069.451	3.759%	3.250%
Carbon	${}^{12}_6\text{C}$	0.92	11157.413	11105.839	11180.796	11177.929	0.183%	0.644%

percentage of relative error is reduced up to 0.021%. Overall, the values of the coupling constant α_s for which good results are obtained, are in the range 0.88–0.97, which are reasonable values for the residual strong interaction. In addition, we note a maximum deviation of 3.759% for $b = 0.95$ and 3.250% for $b = 0.96$ and then a minimum deviation of 0.021% for $b = 0.95$ and 0.408% for $b = 0.96$ with respect to the experimental results. Moreover, the results obtained in Ref. 7 correspond to the value $b = 1$. Thus, considering ${}^7_3\text{Li}$ and ${}^{11}_4\text{B}$ atomic nuclei, our results are better than those of Ref. 7 for all our values of the parameter b . Then for atomic nuclei such as ${}^2_1\text{H}$, ${}^3_1\text{H}$ and ${}^4_2\text{He}$, and for the value $b = 0.96$, the results of Ref. 7 are better than ours. While for the same atomic nuclei, and for the value $b = 0.95$, our results are better than those of Ref. 7. Then for atomic nuclei such as ${}^9_4\text{Be}$ and ${}^{12}_6\text{C}$, the results of Ref. 7 are better than ours for all our values of the parameter b . Overall, for the lightest nuclei, our results best reproduce the experimental data. While for the heavier nuclei, such as ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{11}_4\text{B}$ and ${}^{12}_6\text{C}$, the results of Ref. 7 are more satisfactory.

In addition, the masses of the atomic nuclei and the relative error on the calculation of the masses, present a certain sensitivity with respect to the parameter b . Indeed, we realize that except for the Lithium and Boron atomic nuclei, the error increases globally from the range 0.021%–0.183% to the range 0.408%–0.726% as the value of b is increased from 0.95 to 0.96. On the other hand, for Lithium and Boron atoms, it is just the opposite, the error decreases when the value of b is increased from 0.95 to 0.96. The rather large relative error for the latter nuclei could be attributed to the fact that there are contributions associated with more complex processes,^{49–51} such as the two-pion exchange process,⁵² or spin-dependent forces, which are not taken into account in our potential.

In the case of the basic strong interaction, that is to say the one which acts between the quarks via the one gluon exchange process, the mass of a hadron can be calculated by the following formula⁶:

$$M_{\text{hadron}} = \sum_{j=1}^l E_{1,j}(m_q), \quad (78)$$

Table 2. Masses of some selected baryons and mesons, calculated at different values of the parameter a . Experimental data are taken from Ref. 43. The masses are in GeV.

Hadron	Symbol	m_q	α_s	Our($a = 0.922$)	Our($a = 0.930$)	Ref. 7	Exp. ⁴³	Err 1	Err 2
Proton	$p(uud)$	0.380	1.47	0.93824	0.93708	0.93832	0.93827	0.002%	0.126%
Sigma	$\Sigma^-(dds)$	0.495	1.71	1.19773	1.19645	1.19736	1.19745	0.023%	0.082%
Xi	$\Xi^-(dss)$	0.550	1.81	1.32170	1.32037	1.32850	1.32171	0.0001%	0.101%
Pion	$\pi^-(d\bar{u})$	0.071	0.66	0.13960	0.13920	0.13861	0.13957	0.024%	0.258%
Kaon	$K^-(s\bar{u})$	0.280	0.99	0.49408	0.49317	0.49252	0.49368	0.081%	0.102%
Rho	$\rho^-(u\bar{d})$	0.475	1.56	0.77541	0.77450	0.77597	0.77526	0.019%	0.096%
J/Psi	$J/\psi(c\bar{c})$	1.79	1.09	3.09738	3.09223	3.10037	3.09690	0.015%	0.150%
Upsilon	$\Upsilon(b\bar{b})$	5.500	1.12	9.46793	9.45261	11180.796	11177.929	0.080%	0.081%

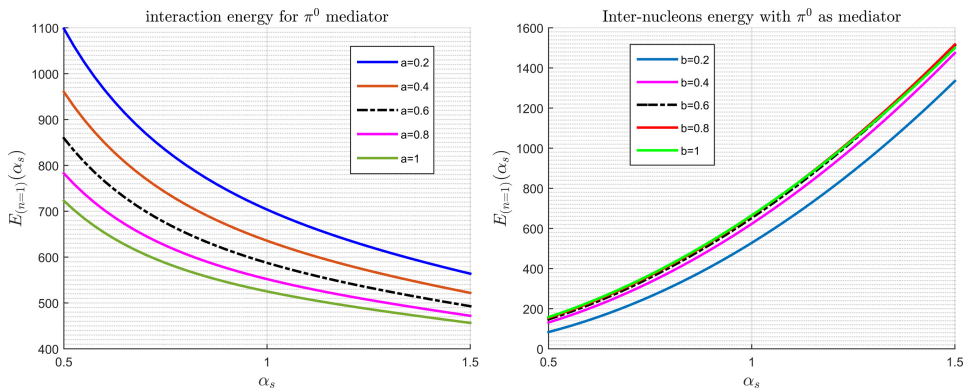


Fig. 1. Variation of the ground state energy of a nucleon inside an atomic nucleus and inter-nucleon ground state energy as functions of the strong coupling constant α_s , at different values of the parameters a and b , respectively, considering π^0 meson as the mediator of the strong interaction.

where l is the number of quarks inside the hadron and m_q is the effective mass of the quark.^{53,54} In Eq. (78), the energy $E_{1,j}$ will be deduced from Eq. (59) by considering the particular case where $b = \mu = 0$. The numerical values of the masses of few baryons and mesons are reported in Table 2. The inter-nucleon ground state energy is calculated using the following formula:

$$M_{\text{int}}(\alpha_s) = m_N - E_{(n=1)}(\alpha_s), \quad (79)$$

where m_N is the mass of a nucleon and $E_{(n=1)}(\alpha_s)$ is given by Eq. (59). Variations of the inter-nucleon ground state energy and interaction energy of a nucleon, as functions of α_s are presented in Figs. 1–3, at different values of the parameters a and b , respectively, considering different mediators of the strong interaction.^b To plot these figures, we used Eq. (59) for the ground states energy of a nucleon. Then for the inter-nucleon ground state energy, Eq. (79) was used. From the latter curves, it clearly appears that the inter-nucleon interaction energy increases with the strong coupling constant and exhibits the same behavior regardless of the type of boson exchanged. On the other hand, the interaction energy of a nucleon in the ground state decreases with increasing coupling constant. Nevertheless, this decrease is all the more pronounced when the exchanged particle has a larger mass. This could be explained by the fact that the intensity of the inter-nucleon interaction potential, characterized by the coupling constant, is proportional to the energy of the force carrier. In other words, the greater the coupling between the nucleons, the more energy the exchange particle carries or its equivalent in mass, and therefore the ground state interaction energy of a nucleon within the nucleus will be less important.

Calculations are done using α_s , a and m_q as parameters. Table 2 shows that our outcomes of inter quark interaction energy spectra are closer to the experimental

^bNotably the two aspects of the strong interaction, the first bosons considered are the mediators of the residual strong interaction. The second bosons considered are the mediators of the basic strong interaction.

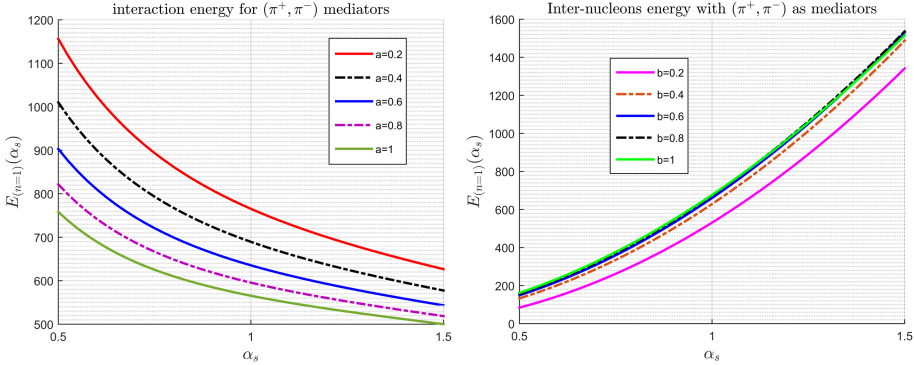


Fig. 2. Variation of the ground state energy of a nucleon inside an atomic nucleus and inter-nucleon ground state energy as functions of the strong coupling constant α_s , at different values of the parameters a and b , respectively, considering π^\pm mesons as mediators of the strong interaction.

data as the parameter a tends to unity. The notations Err 1 and Err 2 are the percentage of relative error associated with $a = 0.922$ and $a = 0.930$, respectively. In the case of J/ψ meson, with a coupling constant $\alpha_s = 1.09$ and effective mass $m_q = 1.79$, the percentage of relative error is 0.032% for $a = 0.922$ and 0.129% for $a = 0.930$ and reveals a very good agreement with experimental result.^{43,55} In the case of Υ meson, for coupling constant $\alpha_s = 1.12$ and quark effective mass $m_q = 5.5$ GeV, the mass is obtained with a deviation of 0.080% for $a = 0.922$ and 0.081% for $a = 0.930$, which shows a good agreement with the experimental value $m_{\Upsilon(1S)} = 9.46030$ GeV.^{43,55} Moreover, we can overall observe that, in the general case of mesons, the percentage of relative error is in the range 0.015%–0.080% for $a = 0.922$ and 0.081%–0.258% for $a = 0.930$. For K^- and π^- mesons, the coupling

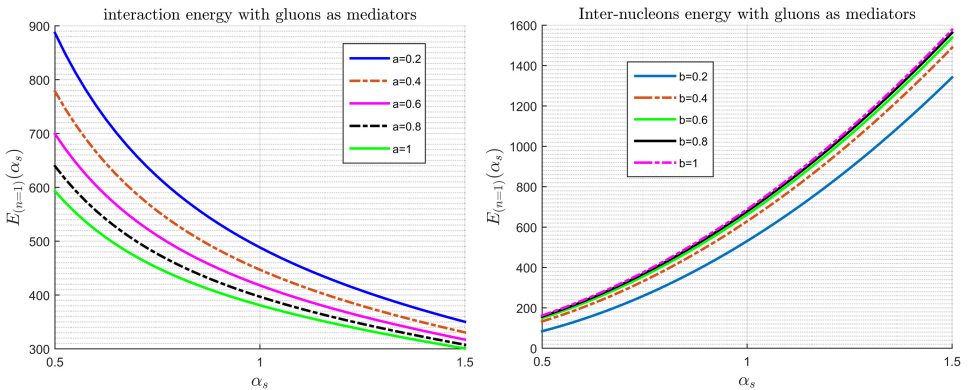


Fig. 3. Variation of the ground state energy of a nucleon inside an atomic nucleus and inter-nucleon ground state energy as functions of the strong coupling constant α_s , at different values of the parameters a and b , respectively, considering gluons as mediators of the strong interaction.

Table 3. Schwarzschild radius r_s associated with quarks of few baryons and mesons, calculated at different values of the parameter a . Experimental data are taken from Refs. 53–58. The Schwarzschild radius r_s are in fm.

Hadron	Symbol	m_q	α_s	Our($a = 1.05$)	Our($a = 1.06$)	Ref. 7	Exp. ^{53–58}	Err 1	Err 2
Proton	$p(uud)$	0.380	1.47	0.83081	0.83095	0.83058	0.831	0.022%	0.006%
Sigma	$\Sigma^-(dds)$	0.495	1.71	0.78540	0.78579	0.78507	0.79372	1.048 %	0.999%
Xi	$\Xi^-(dss)$	0.550	1.81	0.71836	0.71897	0.717322	0.72111	0.381%	0.296%
Pion	$\pi^-(d\bar{u})$	0.071	0.66	0.67176	0.67201	0.66681	0.67082	0.140%	0.177%
Kaon	$K^-(s\bar{u})$	0.280	0.99	0.61467	0.61493	0.61293	0.61644	0.287%	0.244%
Rho	$\rho^-(u\bar{d})$	0.475	1.56	0.74703	0.74756	0.74439	0.74833	0.173%	0.102%
J/Psi	$J/\psi(c\bar{c})$	1.79	1.09	0.11132	0.11168	0.11020	—	—	—
Upsilon	$\Upsilon(b\bar{b})$	5.500	1.12	0.05117	0.05146	0.04950	—	—	—

constant α_s is smaller than 1, whereas for ρ^- , J/ψ and Υ mesons, the coupling constant is greater than 1. Overall, the values of the coupling constant for which we have obtained good results are in the range 0.66–1.56, which are reasonable values for the description of the strong interaction between the quarks of a meson. On the other hand, the masses of the proton p , Σ^- and Ξ^- baryons have also been calculated. For the Ξ^- meson for instance, we can observe a quite perfect agreement with the experimental val $m_{\Xi^-(1S)} = 1.32171$ GeV.⁴³ Overall, the percentage of relative error is in the range 0.0001%–0.023% for $a = 0.922$ and 0.082%–0.126% for $a = 0.930$. The values of the coupling constant for which good results are obtained are in the range 1.47–1.81. These values have suitable magnitude for the strong interaction between quarks in a baryon. For such a simplistic approach, the good accuracy of our results can be attributed to the chosen potential which posses four free parameters a , μ , b , α_s .

The numerical values of Schwarzschild radius r_s associated with quarks of few baryons and mesons are calculated according to Eq. (63) at different values of the parameter a , and are reported in Table 3. For sake of comparison, the values of radius of the selected hadrons, measured experimentally,^{41,42,53,54,56–58} are also reported in Table 3. The notation $\text{Err} = |\Delta r|/r_{\text{exp}}$, designates the relative error calculated with respect to the experimental radius. Err 1 and Err 2 are the percentage of relative error associated with $a = 1.05$ and $a = 1.06$, respectively.

From the obtained results, we realize that the Schwarzschild radius associated with quarks in a hadron has approximately the same value as the radius of the considered hadron. Indeed, looking at Table 3, one can observe that our outcomes are very close to the experimental values of Refs. 41, 42, 53, 54 and 56–58. In the case of baryons for instance, we observe a deviation from 0.022% to 1.048% for $a = 1.05$ and from 0.006% to 0.999% for $a = 1.06$. Globally, the Schwarzschild radius increase as the parameter a goes to higher values. In the case of mesons, a similar behavior is recorded. We observe a deviation in range 0.140%–0.287% for $a = 1.05$ and 0.102%–0.244% for $a = 1.06$. Experimental data are not available for J/ψ and Υ mesons. For the latter particles, we have compared our outcomes with those of Ref. 7 and we

found a good agreement. In addition, by setting $a = 1$, we recover the results of Ref. 7. On the other hand, the Schwarzschild radius associated with the quarks of these hadrons decreases as the masses of the latter increases. Apart from viewing hadrons as quantum black holes in which quarks are trapped and can't escape, a consequence related to the results of Table 3 is that the greater the quark mass, the more compact the black hole becomes. Thus the top quark, given its high mass would therefore have a much smaller confinement radius than those of the other hadrons.

5. Conclusion

This paper was devoted to the study of hadrons spectra and their confinement properties in the framework of the approach recently introduced by Barros. Based on a surprisingly simple idea, this approach postulates that just like gravity, nongravitational interactions can also manifest through space-time curvature. We started from the results available in the literature and we proposed a more complete form for the nongravitational potential. The latter turned out to be a general form, whose special cases can be applied to the study of strong and electromagnetic interactions. The use of a central field with spherical symmetry led us to adopt a static metric with spherical symmetry of the Schwarzschild type. The metric tensor and the central scalar field $\phi(r)$ being fixed, we were able to obtain the associated Hamiltonian density and the energy-momentum tensor of matter and field. At this point, we were able to write the Einstein's field equations for the strong interaction, which we solved to have the curvature function of our metric. Having obtained the metric explicitly, we could express the differential operators in Schwarzschild coordinates and thus via the correspondence principle, the quantum wave equation for spin 1/2 particles has been established and solved by the Frobenius method, and then we obtained the energy spectra. The shape of our potential and the availability of many free parameters that it provided allowed us to obtain a general case of previously obtained energy spectra and applicable to both aspects of the strong interaction. The numerical calculations gave results in good agreement with the experiment and presenting a clear improvement compared to the previous theoretical work. Within the framework of the basic strong interaction, which is responsible for the color confinement, we were interested in two quantities, namely the masses of few hadrons and the confinement radius associated with them. In view of the results obtained on the calculation of the Schwarzschild radii, a purely geometric interpretation of the quarks confinement phenomenon has been considered. We noticed that there was a link between the effective mass of the quark inside the hadron and the size of the black hole. Thanks to Barros approach, and the introduction of generalized Yukawa potential, we obtained more general results. These results are interesting because of their quality and are applicable in many problems in particle physics, especially in situations where it is necessary to combine the principles of quantum mechanics and those of general relativity. The results of this research have improved our knowledge of the properties of hadrons, and further shed light on our understanding of the

strong interaction. However, it should be noted that we could correct the imperfections of the present study in future research where we could, for example, consider even more complex geometries or more complete potentials.

References

1. L. M. Krauss and F. Wilczek, *Phys. Rev. D* **89**(4), 047501 (2014).
2. J. R. Klauder, *J. Math. Phys.* **40** 5860 (u1999).
3. C. C. Barros Jr., *Eur. Phys. J. C* **42**, 119 (2005).
4. C. C. Barros Jr., *Eur. Phys. J. C* **45**, 421 (2006).
5. C. C. Barros Jr., arXiv:physics/0609115.
6. C. C. Barros, *Braz. J. Phys.* **37**, 17 (2007).
7. T. Abdellah, Confinement des quarks et structure de l'espace-temps, thesis (2020).
8. M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964).
9. G. Zweig, CERN Rept. 8182/Th401 (1964).
10. A. D. Rujula, H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **12**, 147 (1975).
11. N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev. D* **18**, 4187 (1978).
12. N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev. D* **19**, 2653 (1979).
13. M. V. N. Murthy, J. D. M. Dey and R. K. Bhaduri, *Phys. Rev. D* **30**, 152 (1984).
14. R. H. Dalitz, reprinted in *Selected Lectures of Hawaii Topical Conf.*, Vol. **1**, eds. S. Pakvasa and S. F. Tuan (World Scientific, Singapore, 1967).
15. D. Faiman and A. W. Hendry, *Phys. Rev.* **173**, 1720 (1968).
16. E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane and T. M. Yan, *Phys. Rev.* **17**, 3090 (1978).
17. E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane and T. M. Yan, *Phys. Rev.* **21**, 203 (1980).
18. E. Eichten and F. Feinberg, *Phys. Rev. D* **23**, 2724 (1981).
19. M. Abu-Shady, *J. Egypt. Math. Soc.* **25**, 86 (2017).
20. A. A. A. Likéné, A. Zarma, D. N. Ongodo, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama and G. H. Ben-Bolie, *East Eur. J. Phys.* **3**, 129 (2022).
21. A. A. A. Likéné, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. A* **37**, 2250229 (2022).
22. M. Abu-Shady et al. *J. Egypt. Math. Soc.* **27**, 14 (2019).
23. A. Al-Jamel, *Mod. Phys. Lett. A* **33**, 1850185 (2018).
24. R. Penrose, *Phys. Rev. Lett* **14**, 57 (1965).
25. N. R. Napolitano, S. Capozziello, A. J. Romanowsky, M. Capaccioli and C. Tortora, *Astrophys. J.* **748**, 87 (2012).
26. S. M. Ikhdaïr and M. Hamzavi, *Few-Body Syst.* **53**, 487 (2012).
27. C. Lam and Y. Varshni, *Phys. Rev. A* **4**, 1875 (1971).
28. L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, Oxford, 1975).
29. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley and Sons, New York, 1972).
30. H. Andrillat, *La Théorie de la Relativité Générale* (Bulletin de l'Union des Physiciens, 1994).
31. M. Hobson, G. Efstathiou and A. N. Lasenby, *Relativité Générale* (De Boeck Supérieur, 2009).
32. E.ourgoulhon, Relativité générale, Lecture, Année Universitaire 2013/2014, Observatoire de Paris (2014).
33. D. Langlois, *Relativité Générale: Des Fondements Géométriques Aux Applications Astrophysiques* (Vuibert, 2013).

34. S. Ray *et al.* *Phys. Rev. D* **68**, 084004 (2003).
35. J. Moffat, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2006**, 004 (2006).
36. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London A* **117**, 610 (1930).
37. W. E. Lamb Jr, *Phys. Rev.* **85**, 259 (1952).
38. M. E. Rose, *Relativistic Electron Theory* (Wiley, New York, 1961).
39. S.-H. Dong, *Wave Equations in Higher Dimensions* (Springer, Dordrecht, 2010).
40. T. Das, arXiv:1409.1457v1.
41. N. Bezginov *et al.* *Science* **365**, 1007 (2019).
42. W. Xiong *et al.* *Nature* **575**, 147 (2019).
43. K. Nakamura *et al.* *Phys. Rev. D* **98**(3), 1 (2018).
44. R. L. Bowers and R. L. Zimmerman, *Astrophys. J.* **184**, 305 (1973).
45. P. E. Hodgson, *Contemp. Phys.* **24**, 491 (1983).
46. B. H. Bransden and R. G. Moorhouse, *The Pion-Nucleon System* (Princeton University Press, 2015).
47. G. E. Brown, J. S. Dehesa and J. Speth, *Nucl. Phys. A.* **330**, 290 (1979).
48. M. Gell-Mann, The eightfold way: A theory of the strong interaction symmetry, Technical Report, CalTech Synchrotron Laboratory (1961).
49. M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, R. V. Mau, J. Côte, P. Pires and R. de Tourreil, *Phys. Rev. C* **21**, 861 (1980).
50. R. V. Reid, *Ann. Phys.* **50**, 411 (1968).
51. R. B. Wiringa, V. G. Stoks and R. Schiavilla, *Phys. Rev. C* **51**, 38 (1995).
52. M. R. Robilotta, *Nucl. Phys. A* **595**, 171 (1995).
53. A. C. Eduardo, E. H. Thomas and G. Frederique, *Relativistic Aspects Of Nuclear Physics, Proc. 6th Int. Workshop* (World Scientific, 2001).
54. J. Arvieux and B. Pire, *Progr. Part. Nucl. Phys.* **35**, 299 (1995).
55. M. Tanabashi, *Phys. Rev. D* **98**, 030001 (2018).
56. B. Ananthanarayan, I. Caprini and D. Das, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 132002 (2017).
57. S. Amendolia *et al.* *Phys. Lett. B* **178**, 435 (1986).
58. A. F. Krutov, R. G. Polezhaev and V. E. Troitsky, *Phys. Rev. D* **93**, 036007 (2016).

Nonrelativistic quark model for mass spectra and decay constants of heavy-light mesons using conformable fractional derivative and asymptotic iteration method

A. Atangana Likéné,^{*,‡,§} J. M. Ema'a Ema'a,^{†,¶}
P. Ele Abiama^{*,‡,||} and G. H. Ben-Bolie^{*,**}

**Laboratory of Atomic,
Molecular and Nuclear Physics,
Department of Physics, Faculty of Science,
University of Yaounde I, P. O. Box 812, Yaounde, Cameroon*

*†Bertoua Higher Teachers' Training College,
Department of Physics, University of Bertoua,
P. O. Box 55, Bertoua, Cameroon*

*‡The Nuclear Technology Section (NTS),
Institute of Geological and Mining Research,
P. O. Box 4110, Yaounde, Cameroon*

§aandreaime@yahoo.fr

¶emaajm@yahoo.fr

||eleabiama2003@yahoo.fr

***gbenbolie@yahoo.fr*

Received 1 July 2022

Revised 15 December 2022

Accepted 28 December 2022

Published 3 February 2023

In this paper, we use the concept of conformable fractional derivative to study the nonrelativistic radial Schrödinger equation. We suggest an extended version of the Cornell potential as the quark–antiquark interaction of light and heavy mesons. We generalize the asymptotic iteration method to the fractional domain. The latter is used to calculate the energy eigenvalues, as well as the effect of the fractional order ν on energy spectra. To test the applicability of our model, we use the obtained results to reproduce the mass spectra of some light and heavy mesons such as $b\bar{b}$, $c\bar{c}$, $c\bar{s}$, $\bar{b}c$, $b\bar{q}$ and $b\bar{s}$ quarks. The mass spectra are obtained at different values of the fractional order parameter ν and were compared with experimental results and other relevant theoretical works. Using the wave function, we calculated the decay constants for heavy-light D^0 , D^+ , D_s^+ , B^- , \bar{B}^0 and \bar{B}_s^0 mesons. Our results are found to be in good agreement with the experimental data, and improved in comparison with other theoretical previsions.

Keywords: Quark; Schrödinger equation; asymptotic iteration method; conformable fractional derivative; decay constants; extended Cornell potential; heavy-light meson.

PACS numbers: 21.60.Fw, 21.10.Re, 70.25.+k, 04.10.Mn

[§]Corresponding author.

1. Introduction

In recent years, more attention has been given to the spectroscopy of heavy and light mesons. This has been mainly due to the availability of experimental facilities from DELPI, BABAR, CLEO, BELLE, BES, etc. These various facilities have been contributing continuously to new and more accurate information about hadron structure from light flavor to heavy flavor sectors.^{1,2} To explain the behavior of quark–antiquark systems, theoretical physicists employ different techniques and models such as lattice quantum chromodynamics (QCD),^{3–7} the semi-relativistic approaches^{8,9} and the nonrelativistic approaches^{10,11} which use different phenomenological potentials. Calculations with lattice QCD are very complex and very expensive in a computational point of view; whereas the non-relativistic approach uses potential models to study the bound states. In nonrelativistic quantum mechanics, the observed mass spectra of the meson can be reproduced with a simple interaction potential $V(r)$, which is a function of the interquark separation r . Thus, the problem is reduced to solving the time independent Schrödinger equation (SE) for the potential $V(r)$. The nonrelativistic SE is employed because: (b, c) quarks have relatively high masses and then the motion of the $q\bar{q}$ system is nonrelativistic. Therefore, a nonrelativistic treatment is more suitable to solve the problem.

One of the most commonly used potentials when we study the structure of heavy and light mesons is the Cornell interaction potential^{12,13}

$$V(r) = ar - \frac{b}{r}, \quad (1)$$

where r is the relative separation between a quark and an antiquark, a and b are parameters. This potential has two parts. The first term ar represents the confinement part of the potential $V(r)$, and parametrizes the nonperturbative effects of QCD, which are still poorly understood. The second term $-\frac{b}{r}$ is the coulombic part of the potential, which represents the one-gluon exchange process between the quark and its antiquark. In the literature, the Cornell potential has been widely used by many authors as the quark–antiquark interaction, in the framework of heavy and light mesons spectroscopy. Indeed, in Ref. 12, the authors studied mass spectra and radiative decays of $c\bar{c}$, $b\bar{b}$ and $\bar{b}c$ mesons in the framework of nonrelativistic quark model using quasi-potential approach. In Ref. 13, the properties of heavy and light mesons were studied by Hassanabadi *et al.* using Cornell interaction. In Ref. 14, the author studied $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons using temperature-dependent Yukawa model. Klein–Gordon equation was solved using the Cornell potential which was chosen as the interaction potential between mesons in Ref. 15. Then in Ref. 16, the wave function and mass spectra of heavy baryons were obtained by solving the SE using time independent perturbation theory. In Ref. 17, the author used a numerical approach to calculate the mass spectra of heavy mesons using SE with Cornell potential. In Refs. 18–21, the N -dimensional SE is solved analytically, respectively, for

the Cornell potential and the Cornell plus harmonic potential. The obtained results are applied to calculate the mass spectra of $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons.

In order to improve the mass spectra of quark–antiquark systems, the Cornell potential is extended by adding the terms $\frac{d}{r^2}$ and ar^2 giving the general potential:

$$V(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r} + \frac{d}{r^2}, \quad (2)$$

where a , b , c and d are real positive constants, which will be fixed by fitting the spectra with experimental data. The term $\frac{d}{r^2}$ was added to Cornell plus harmonic potential in order to improve the behavior of the potential around the region $r \rightarrow 0$. This mechanism provides better confinement and makes it possible to obtain improved results as compared to Cornell potential or Cornell plus harmonic potential.²⁰ The additional part $ar^2 + \frac{d}{r^2}$ was added for sake of completeness. Indeed, these additional terms have the effect of breaking the degeneracy of states, thereby enriching the spectroscopy of particles. For more details on the topic, one can refer to Ref. 22 and references therein. Recently, the N -dimensional radial SE for the extended Cornell potential has been solved analytically by Khokha *et al.*²³ using exact iteration method. Then, the latter equation was analytically solved by Abu-Shady *et al.*²⁴ and Al-Jamel²⁵ using Nikiforov–Uvarov (NU) and extended Nikiforov–Uvarov (ENU) methods, respectively. Many more relevant studies and results on heavy mesons spectra can be found in Refs. 26–32. In the literature, there exists a large number of approximate and exact analytical methods to find solutions of the SE for potential models. Recently, Richa *et al.*³³ calculated the mass spectra of light and heavy mesons by solving the SE with extended Cornell potential using the analytic iteration method (AIM). Indeed, compared to other methods, AIM enables us to avoid too many constraint relationships between potential parameters. Performing its generalization to the conformable fractional domain could allow access to many other unexplored models, each time we modify the fractional order parameter ν , and could contribute in improving the results. For this reason, we found it interesting to undertake this study.

In this work, we extend the AIM to the conformable fractional (CF) domain, and we extend the applications of our model to heavy-light mesons. In fractional analysis, the main objective is to generalize the notion of ordinary derivative to noninteger orders.^{34,35} Indeed, there are many dynamical systems that are better understood by fractional order models, generally based on the notion of integration or differentiation whose order is not an integer. The analysis of systems of fractional order presents a certain difficulty which does not appear in the study of their classical versions of integer order. In the literature, there are many definitions of the concept of fractional derivative such as Caputo, Riemann–Liouville and Riesz fractional derivatives. Caputo derivative³⁴ is more applicable to the use of initial and boundary conditions and is of great interest in fundamental and applied science. The conformable fractional derivative (CFD) is a new concept introduced by Khalil *et al.*³⁶ This new definition is simple, well-behaved and provides a natural extension of derivative with

integer order to derivative with fractional order. The concept of CFD has been widely used by many authors to find solutions of the SE^{37,38} and other equations of physical interest. In Ref. 39, Hosseini *et al.* applied the time-CFD on the nonlinear Boussinesq equation to obtain analytical solutions of a wide variety of nonlinear differential equations. In Ref. 38, Al-Jamel used the CFD to solve SE, but restricted the application of the results to heavy quarkonia. In Ref. 40, the authors studied the Benney–Luke fractional equation in the conformable fractional space by employing two reliable calculation methods.

This paper is organized as follows; in Sec. 2, we present the theoretical tools needed for this work. The fractional analysis relevant to this study will be briefly reviewed. The AIM will be modified to the conformable fractional domain. In Sec. 3, the concept of CFD will be implemented to the radial SE for the potential $V(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r} + \frac{d}{r^2}$ to obtain the conformable fractional Schrödinger equation (CFSE), and then solve it using the AIM. In Sec. 4, we briefly present the theoretical tools needed to calculate the decay constants of heavy-light mesons. In Sec. 5, the model will be tested with heavy-light mesons. In Sec. 6, summary and conclusions will be presented.

2. Theoretical Tools

2.1. Conformable fractional derivative

In the literature, there are several definitions of the concept of fractional derivative. Among them one can name the Riemann–Liouville definition, Grunwald–Letnikos formulation, Caputo and Riesz fractional derivatives. Caputo’s definition³⁵ is the most interesting in applied sciences because it makes it easy to handle the boundary and initial conditions. For this reason, it is more applicable to real physical systems. For a given function $\psi : [0, +\infty]$, the Riemann–Liouville fractional derivative of order ν is defined by

$$D_t^\nu \psi(t) = \frac{1}{(\Gamma - \nu)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t - y)^{n-\nu-1} \psi(y) dy, \quad n - 1 < \nu \leq n, \quad (3)$$

and for the Grunwald–Letnikos fractional derivative, the definition is

$${}_a D_t^\nu \psi(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^\nu} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\nu}{j} \psi(t - jh) \right\}, \quad n - 1 < \nu \leq n. \quad (4)$$

The Caputo derivative of a function $\psi(t)$ is defined as follows:

$${}^C D_t^\nu \psi(t) = \int_{t_0}^t K_\nu(t - y) \psi^{(n)}(y) dy, \quad t_0 < t, \quad (5)$$

with

$$K_\nu(t - y) = \frac{(t - y)^{n-\nu-1}}{\Gamma(n - \nu)}, \quad (6)$$

where $\psi^{(n)}(t)$ is the n th derivative of the function $\psi(t)$ and $K_\nu(t - y)$ is the kernel. The kernel $K_\nu(t - y)$ is fixed for a given real number ν , and has a singularity at $t = y$. In order to redefine fractional derivatives, using nonsingular smooth exponential kernels, Caputo and Fabrizio³⁵ proposed a new definition of fractional derivative of the form

$$D_t^\nu \psi(t) = \frac{M(\nu)}{(1 - \nu)} \int_{t_0}^t \exp\left[-\frac{\nu(t - y)}{1 - \nu}\right] \dot{\psi}(y) dy, \tag{7}$$

where $M(\nu)$ is a normalization function satisfying $M(0) = M(1) = 1$. Recently, the concept of CFD was proposed by Khalil *et al.*³⁶ For a given function $\psi(t)$ the CFD of order ν is given by

$$D_t^\nu \psi(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(t - \epsilon t^{1-\nu}) - \psi(t)}{\epsilon}, \quad 0 < t \tag{8}$$

$$\psi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(t), \tag{9}$$

and then,

$$D^\nu[\psi_{nl}(t^\nu)] = t^{1-\nu} \psi_{nl}(t^\nu), \tag{10}$$

$$D^\nu[D^\nu \psi_{nl}(t^\nu)] = (1 - \nu)t^{1-2\nu} \psi'_{nl}(t^\nu) + t^{2-2\nu} \psi''_{nl}(t^\nu), \tag{11}$$

with $0 < \nu \leq 1$. This formulation is very simple and it provides a natural extension of classical derivative to noninteger order. Moreover, conformable fractional differential operator is linear and satisfies the properties of classical derivative such as the derivative of a product and the quotient of two functions.⁴¹

2.2. Conformable fractional analytic iteration method

The AIM⁴² is a technique mainly used in quantum physics to obtain the eigen energies of Schrödinger-type equations. This method solves analytically and approximately eigenvalue problems arising from second-order linear differential equations, which usually appear in theoretical and mathematical physics. In this section, the objective is to generalize the AIM into the framework of CFD. We consider the conformable fractional differential equation of the form⁴²

$$D^\nu[D^\nu y(r)] = \lambda_0(r)D^\nu[y(r)] + s_0(r)y(r), \tag{12}$$

where $\lambda_0(r)$ and $s_0(r)$ are differentiable functions with $\lambda_0 \neq 0$. By making use of the key properties of the CFD given by Eqs. (10) and (11), and after a little algebra, Eq. (12) becomes:

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} = \left[\frac{\lambda_0(r)}{r^{1-\nu}} - \frac{1 - \nu}{r} \right] \frac{dy(r)}{dr} + \frac{s_0(r)}{r^{2-2\nu}} y(r). \tag{13}$$

By introducing the following generalized functions:

$$\lambda_0^f(r) = \left[\frac{\lambda_0(r)}{r^{1-\nu}} - \frac{1 - \nu}{r} \right], \quad s_0^f(r) = \frac{s_0(r)}{r^{2-2\nu}} \tag{14}$$

we can rewrite Eq. (13) in the form:

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} = \lambda_0^f(r) \frac{dy(r)}{dr} + s_0^f(r) y(r), \quad (15)$$

where the subscript f stands for the fractional domain.

The general solution of Eq. (15) has the form:

$$y(r) = \exp \left[- \int_0^r \alpha_f(r_1) dr_1 \left(C_2 + C_1 \int_0^r \exp \left(\int_0^{r_1} (\lambda_0^f(r_2) + 2\alpha_f(r_2)) dr_2 \right) dr_1 \right) \right]. \quad (16)$$

Given the recurrence relations on the coefficient functions $\lambda_k^f(r)$ and $s_k^f(r)$,

$$\begin{aligned} \lambda_k^f(r) &= \frac{d}{dr} \lambda_{k-1}^f(r) + s_{k-1}^f(r) + \lambda_0^f(r) \lambda_{k-1}^f(r), \\ s_k^f(r) &= \frac{d}{dr} s_{k-1}^f(r) + s_0^f(r) \lambda_{k-1}^f(r), \end{aligned} \quad (17)$$

and for sufficiently large value of the iteration number k , the termination condition can be written as

$$\Delta_k(r) = \lambda_k^f(r) s_{k-1}^f(r) - \lambda_{k-1}^f(r) s_k^f(r) = 0 \quad (18)$$

with

$$\alpha_f(r) = \frac{s_k^f(r)}{\lambda_k^f(r)} = \frac{s_{k-1}^f(r)}{\lambda_{k-1}^f(r)}. \quad (19)$$

3. Solving the CFSE Using the CF-AIM

In this section, we consider a bound state of a meson, namely a quark q and an antiquark \bar{q} interacting with the phenomenologically extended Cornell potential given by Eq. (2). The 3-dimensional radial SE is

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2\mu \left(E_{nl} - ar^2 - br + \frac{c}{r} - \frac{d}{r^2} \right) \right] \psi_{nl}(r) = 0. \quad (20)$$

Substituting $\psi_{nl}(r) = \frac{R_{nl}(r)}{r}$ in Eq. (20), we obtain

$$\frac{d^2 R_{nl}(r)}{dr^2} + \left[-\frac{\xi^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \epsilon_{nl} - a_1 r^2 - b_1 r + \frac{c_1}{r} \right] R_{nl}(r) = 0, \quad (21)$$

where $\xi = \frac{\sqrt{(2l+1)^2 + 4d_1}}{2}$, $d_1 = 2\mu d$, $a_1 = 2\mu a$, $c_1 = 2\mu c$, $\epsilon_{nl} = 2\mu E_{nl}$. Next, the transition to the conformable fractional domain gives the following CFSE:

$$D^\nu [D^\nu R_{nl}(r)] + \left[-\frac{\xi^2 - \frac{1}{4}}{r^{2\nu}} + \epsilon_{nl} - a_1 r^{2\nu} - b_1 r^\nu + \frac{c_1}{r^\nu} \right] R_{nl}(r) = 0, \quad (22)$$

where the potential given by Eq. (2) was replaced by the corresponding conformable fractional potential

$$V(r^\nu) = ar^{2\nu} + br^\nu - \frac{c}{r^\nu} + \frac{d}{r^{2\nu}}. \quad (23)$$

Using Eqs. (10) and (11), we have

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{1-\nu}{r} \frac{dR_{nl}(r)}{dr} + \left[-\frac{\xi^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \epsilon_{nl} r^{2\nu-2} - a_1 r^{4\nu-2} \right. \\ \left. - b_1 r^{3\nu-2} + \frac{c_1}{r^{2-\nu}} \right] R_{nl}(r) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

To get rid of the first derivative term, we make the substitution $R_{nl}(r) = r^{\frac{\nu-1}{2}} \Phi_{nl}(r)$, which transforms Eq. (24) into:

$$\frac{d^2 \Phi_{nl}(r)}{dr^2} + \left[-\frac{\xi^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \epsilon_{nl} r^{2\nu-2} - a_1 r^{4\nu-2} - b_1 r^{3\nu-2} + \frac{c_1}{r^{2-\nu}} \right] \Phi_{nl}(r) = 0. \quad (25)$$

Further, we make the following ansatz for the fractional wave function $\Phi_{nl}(r)$ as

$$\Phi_{nl}(r) = r^{(\xi+\frac{1}{2})\nu} \exp[-\alpha r^{2\nu} - \beta r^\nu] f(r), \quad (26)$$

where α and β are real positive constants whose values can be in terms of potential parameters. Next, inserting Eq. (26) into Eq. (25), we obtain

$$\begin{aligned} r \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left[2\nu \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - 4\alpha\nu r^{2\nu} - 2\beta\nu r^\nu \right] \frac{df(r)}{dr} \\ + \left\{ \frac{\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \left(\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \right) - \xi^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{\nu-1}{2} \right)^2}{r} + (4\alpha^2\nu^2 - a_1) r^{4\nu-1} \right. \\ + (4\alpha\beta\nu^2 - b_1) r^{3\nu-1} + \left[\epsilon_{nl} + \beta^2\nu^2 - 4\alpha\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - 2\alpha\nu(2\nu-1) \right] r^{2\nu-1} \\ \left. + \left[c_1 - \beta\nu(\nu-1) - 2\beta\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right] r^{\nu-1} \right\} f(r) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Considering that $f(r) = 1$ for the ground state, Eq. (27) is reduced to

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \left(\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \right) - \xi^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{\nu-1}{2} \right)^2}{r} + (4\alpha^2\nu^2 - a_1) r^{4\nu-1} \\ + (4\alpha\beta\nu^2 - b_1) r^{3\nu-1} + \left[\epsilon_{nl} + \beta^2\nu^2 - 4\alpha\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - 2\alpha\nu(2\nu-1) \right] r^{2\nu-1} \\ + \left[c_1 - \beta\nu(\nu-1) - 2\beta\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right] r^{\nu-1} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

By equating each coefficient of r^ν to zero in Eq. (29), we obtain the following relations:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{a_1}{4}} = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\mu a}{2}}, \\ \beta = \frac{b_1}{4\alpha\nu^2} = \frac{\mu b}{\sqrt{2\mu a}}, \\ \epsilon_{0l} = -\beta^2\nu^2 + 4\alpha\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right) + 2\alpha\nu(2\nu - 1), \\ c_1 = \beta\nu(\nu - 1) + 2\beta\nu^2 \left(\xi + \frac{1}{2} \right). \end{cases} \quad (29)$$

Then, using Eq. (30), the ground state energy is written as

$$E_{0l} = \sqrt{\frac{a}{2\mu}} \left[3\nu - 1 + \sqrt{(2l + 1)^2 + 8\mu d} \right] - \frac{b^2}{4a}. \quad (30)$$

From Eq. (30), we can equally obtain the following constraint on the parameter c as

$$c_{0l} = \frac{b}{2\sqrt{2\mu a}} \left[2\nu - 1 + \nu\sqrt{(2l + 1)^2 + 8\mu d} \right]. \quad (31)$$

To determine the complete energy formula of the system, we find the asymptotic behavior of Eq. (28), i.e. for $r \rightarrow 0$ and $r \rightarrow \infty$. Using the condition given by Eq. (29), we can write Eq. (28) in the form

$$r \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + [\nu(2\xi + 1) - 2\beta\nu r^\nu - 4\alpha\nu r^{2\nu}] \frac{df(r)}{dr} + \delta\epsilon_{nl} r^\nu f(r) = 0, \quad (32)$$

where $\delta\epsilon_{nl} = \epsilon_{nl} - \epsilon_{0l}$. Now, we determine solutions of Eq. (32) under the limit of large values of r . As $r \rightarrow \infty$, we have

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left[\frac{\nu(2\xi + 1)}{r} - 2\beta\nu r^{\nu-1} - 4\alpha\nu r^{2\nu-1} \right] \frac{df(r)}{dr} + \delta\epsilon_{nl} r^{\nu-1} f(r) = 0. \quad (33)$$

By comparing Eq. (33) with Eq. (15) and using recursion relations given by Eq. (17), the following expressions are obtained

$$\begin{aligned} \lambda_0^f(r) &= 2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1}, & s_0^f(r) &= -\delta\epsilon_{nl} r^{2\nu-2}, \\ \lambda_1^f(r) &= 2\beta\nu(\nu - 1)r^{\nu-2} + 4\alpha\nu(2\nu - 1)r^{2\nu-2} - \delta\epsilon_{nl} r^{2\nu-2} \\ &\quad + (2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})^2, \\ s_1^f(r) &= -(2\nu - 2)\delta\epsilon_{nl} r^{2\nu-3} - (2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})\delta\epsilon_{nl} r^{2\nu-2}, \\ \lambda_2^f(r) &= 2\beta\nu(\nu - 1)(\nu - 2)r^{\nu-3} + 4\alpha\nu(2\nu - 1)(2\nu - 2)r^{2\nu-3} - (\nu - 1)\delta\epsilon_{nl} r^{\nu-2} \\ &\quad - (\nu - 1)\delta\epsilon_{nl} r^{\nu-2}(2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})\{12\alpha\nu(2\nu - 1)r^{2\nu-2} \\ &\quad + 6\beta\nu(\nu - 1)r^{\nu-2} - 2\delta\epsilon_{nl} r^{\nu-1} + (2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})^2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_2^f(r) = & -\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1}[8\alpha\nu(2\nu-1)r^{2\nu-2} + 4\beta\nu(\nu-1)r^{\nu-2} - \delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} \\
 & + (2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})^2], -(\nu-1)(\nu-2)\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-3} \\
 & - (\nu-1)\delta\epsilon_{nl}(2\beta\nu r^{\nu-1} + 4\alpha\nu r^{2\nu-1})r^{\nu-2}.
 \end{aligned} \tag{34}$$

The substitution of the above relations into Eq. (18) gives us

$$\lambda_1^f(r)s_0^f(r) - \lambda_0^f(r)s_1^f(r) = 0, \quad \delta\epsilon_{1l} = 4\alpha\nu, \tag{35}$$

$$\lambda_2^f(r)s_1^f(r) - \lambda_1^f(r)s_2^f(r) = 0, \quad \delta\epsilon_{2l} = 8\alpha\nu, \tag{36}$$

and so on. From the above relations, the following equation can be derived:

$$\delta\epsilon_{nl} = 4n\alpha\nu, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

Further, we determine solutions of Eq. (27) in the limit of small values of r . As we assumed that the interquark distance r is sufficiently small, we can neglect the terms in $(r^\nu)^2$, i.e. $r^{2\nu}$. Therefore, Eq. (27) reduces to

$$\frac{d^2f(r)}{dr^2} + \left[\frac{\nu(2\zeta+1)}{r} - 2\beta\nu r^{\nu-1} \right] \frac{df(r)}{dr} + \delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1}f(r) = 0. \tag{38}$$

Following the same procedure as in the case of $r \rightarrow \infty$, we compare Eq. (39) with Eq. (15), and using the recursion relation given by Eq. (17), we obtain

$$\begin{aligned}
 \lambda_0^f(r) &= 2\beta\nu r^{\nu-1} - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r}, \quad s_0^f(r) = -\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1}, \\
 \lambda_1^f(r) &= \frac{\nu(2\zeta+1)}{r^2} + 2\beta\nu(\nu-1)r^{\nu-2} - \delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} + \left[2\beta\nu - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r} \right]^2, \\
 s_1^f(r) &= -\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} \left[\frac{\nu-1}{r} + 2\beta\nu - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r} \right], \\
 \lambda_2^f(r) &= -\frac{2\nu(2\zeta+1)}{r^3} + 2\beta\nu(\nu-1)(\nu-2)r^{\nu-3} + \left(2\beta\nu r^{\nu-1} - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r} \right) \\
 &\quad \times \left[\frac{3\nu(2\zeta+1)}{r^2} - 2\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} + \left(2\beta\nu r^{\nu-1} - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r} \right)^2 \right], \\
 s_2^f(r) &= -\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} \left[\frac{2\nu(2\zeta+1)}{r^2} - 2\delta\epsilon_{nl}r^{\nu-1} + \left(2\beta\nu r^{\nu-1} - \frac{\nu(2\zeta+1)}{r} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{39}$$

According to the expressions obtained above, the termination condition is not exactly solvable. It is therefore necessary to find solution of equation $\lambda_0^f(r) = 0$, i.e. $r = \left[\frac{\zeta+\frac{1}{2}}{\beta} \right]^{1/\nu}$. This value corresponds to the minimum value of the potential. Using Eq. (18), we obtain

$$\lambda_1^f(r)s_0^f(r) - \lambda_0^f(r)s_1^f(r) = 0, \quad \delta\epsilon_{1l} = 2\beta\nu^2 \left[\frac{\beta}{\zeta + \frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{\nu}}, \tag{40}$$

$$\lambda_2^f(r)s_1^f(r) - \lambda_1^f(r)s_2^f(r) = 0, \quad \delta\epsilon_{2l} = 4\beta\nu^2 \left[\frac{\beta}{\varsigma + \frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{\nu}}, \quad (41)$$

and so on. Finally, the above values give us

$$\delta\epsilon_{nl} = \frac{2n\nu^2\beta^{\frac{\nu+1}{\nu}}}{\left(\varsigma + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (42)$$

By combining Eqs. (38) and (43), the complete spectra are obtained as follows:

$$\delta\epsilon_{nl} = \epsilon_{nl} - \epsilon_{0l} = 4n\alpha\nu + \frac{2n\nu^2\beta^{\frac{\nu+1}{\nu}}}{\left(\varsigma + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}}, \quad (43)$$

and then the energy eigenvalues are:

$$E_{nl} = \sqrt{\frac{a}{2\mu}} \left[2n + 3\nu - 1 + \sqrt{(2l+1)^2 + 8\mu d} \right] - \frac{b^2}{4a} \\ + \frac{2^{\frac{1+\nu}{\nu}} n \nu^2}{\left[1 + \sqrt{(2l+1)^2 + 8\mu d} \right]^{\frac{1}{\nu}}} \times \frac{b^{\frac{1+\nu}{\nu}} \mu^{\frac{1-\nu}{2\nu}}}{2^{\frac{3\nu+1}{2\nu}} a^{\frac{1+\nu}{2\nu}}}, \quad (44)$$

with the constraint on the parameter c as

$$c_{nl} = \frac{b}{2\sqrt{2\mu a}} \left[2\nu(n+1) - 1 + \nu\sqrt{(2l+1)^2 + 8\mu d} \right]. \quad (45)$$

4. Decay Constants of Heavy-Light Mesons

One of the very interesting aspects of potential models is that they make it easy to obtain vector and pseudoscalar decay constants of mesons. Indeed, decay constants are a tool of great efficiency when it comes to estimating the matrix elements of the hadronic operator or to extract precise information on the structure of baryons and mesons at short distance.^{5,43} Moreover, the knowledge of their values plays a major role in the calculation of the matrix elements of the Cabbio–Kobayashi–Maskawa (CKM) operator in the study of weak decays processes^{6,44} and in various experimental measurements.^{45,46} In the literature, the pseudoscalar and vector decay constants are usually calculated through the matrix elements⁵:

$$m_V f_V \epsilon^\mu = \langle 0 | \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi | V \rangle, \quad (46)$$

$$p^\mu f_P = i \langle 0 | \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi | P \rangle. \quad (47)$$

However, in quark model formalism, having the wave function in hand one can easily obtain decay constants of heavy-light mesons by using the following formulas:

$$f_P = \sqrt{\frac{3}{m_P}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{1 + \frac{m_q}{E_k}} \sqrt{1 + \frac{m_{\bar{q}}}{E_{\bar{k}}}} \left(1 - \frac{k^2}{(E_k + m_q)(E_{\bar{k}} + m_{\bar{q}})} \right) \phi(\mathbf{k}), \quad (48)$$

for pseudoscalar mesons and

$$f_V = \sqrt{\frac{3}{m_V}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{1 + \frac{m_q}{E_k}} \sqrt{1 + \frac{m_{\bar{q}}}{E_{\bar{k}}}} \left(1 - \frac{k^2}{(E_k + m_q)(E_{\bar{k}} + m_{\bar{q}})} \right) \phi(\mathbf{k}), \quad (49)$$

for the vector meson. For more details on the topic, one can refer to the work of Lakhina and Swanson.⁵ In the nonrelativistic limit, the above equations can be reduced to a simple form known as the Van Royen and Weisskopf formula⁴⁷:

$$f_{P/V}^2 = 12 \frac{|\psi_{P/V}(0)|^2}{m_{P/V}}, \quad (50)$$

where $m_{P/V}$ is the mass of the pseudoscalar/vector meson and $\psi_{P/V}(0)$ is the associated wave function calculated at the origin. This formula is widely employed in potential model calculations because of the fact that the wave function of the system is sufficient to calculate the decay constants of vector and pseudoscalar mesons. However, it is important to note here that the effect of conformable fractional space will manifest in these decay constants through the conformable fractional wave function.

5. Results and Discussion

In this section, we compute the mass spectra of light and heavy mesons using the mass relation

$$M_{nl}(q\bar{q}) = m_q + m_{\bar{q}} + E_{nl}, \quad (51)$$

where m_q and $m_{\bar{q}}$ are the masses of the quark and the antiquark, respectively, and E_{nl} is given by Eq. (45). By using Eq. (45) the mass relation can be written as

$$\begin{aligned} M_{nl}(q\bar{q}) = & m_q + m_{\bar{q}} + \sqrt{\frac{a}{2\mu}} \left[2n + 3\nu - 1 + \sqrt{(2l+1)^2 + 8\mu d} \right] - \frac{b^2}{4a} \\ & + \frac{2^{\frac{1+\nu}{\nu}} n \nu^2}{\left[1 + \sqrt{(2l+1)^2 + 8\mu d} \right]^{\frac{1}{\nu}}} \times \frac{b^{\frac{1+\nu}{\nu}} \mu^{\frac{1-\nu}{2\nu}}}{2^{\frac{3\nu+1}{2\nu}} a^{\frac{1+\nu}{2\nu}}}. \end{aligned} \quad (52)$$

It is important to note that our result is a generalization of the result obtained in Ref. 33. Indeed, one can easily check that by replacing $\nu = 1$ in Eq. (48), one obtains the mass formula recently obtained by Richa *et al.*³³

The masses of bottom and charm quarks can be found in the literature and are generally taken between 4.8 GeV and 5.3 GeV for bottom quark and 1.2–1.8 GeV for charm quark.^{12,16,48–56} For this work, we have taken $m_c = 1.209$ GeV,^{57,58} $m_b = 4.823$ GeV,^{59,60} $m_s = 0.419$ GeV and $m_u = m_d = 0.220$ GeV.^{51,52} The potential parameters a , b , d were obtained from fitting the spectra with the experimental data, and are reported in Table 1. Numerical results of mass spectra of heavy-light mesons are reported in Tables 2–7 from 1S to 4S. Our study was therefore restricted to the

Table 1. The potential parameters are found from fitting the mass spectra with experimental data. The quark masses used $m_c = 1.209$ GeV, $m_b = 4.823$ GeV, $m_s = 0.419$ GeV and $m_u = m_d = 0.220$ GeV.⁵⁰⁻⁵²

Parameters	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$	$\bar{b}c$	$c\bar{s}$	$b\bar{s}$	$b\bar{q}$
$a(\text{GeV}^3)$	0.0297	0.0289	0.0204	0.01282	0.03725	0.01779
$b(\text{GeV}^2)$	0.2209	0.3555	0.2209	0.0670	0.2796	0.1589
$d(\text{GeV}^{-1})$	4.8542	4.8542	4.8542	4.8546	0.1255	0.1232

Table 2. Mass spectra of charmonium (in GeV/c^2). The quark masses used $m_c = 1.207$ GeV, $m_{\bar{c}} = 1.207$ GeV, the potential parameters $a = 0.0297$ GeV^3 , $b = 0.2209$ GeV^2 and $d = 4.8542$ GeV^{-1} .

States	Our($\nu = 1$)	Our($\nu = 0.9$)	Ref. 58	Exp ⁵³	Relativistic ¹²	Ref. 57
1S	3.096	3.063	3.063	3.068	3.066	3.067
1P	3.213	3.180	3.500	3.501	3.504	3.504
1D	3.411	3.379	3.797	3.798	3.809	3.795
2S	3.686	3.624	3.661	3.674	3.661	3.660
2P	3.773	3.712	3.920	—	3.925	3.897
3S	4.274	4.185	4.064	—	4.063	4.014
4S	4.864	4.747	4.400	—	—	4.267

set $\{0.9; 1\}$. Thus, $\nu = 1$ being the classic case, we chose the values $\nu = 0.9$ and $\nu = 1$ because they enabled to obtain much more precise results.

In Table 2, mass spectra of charmonium are reported from 1S to 4S state at different values of the fractional parameter. Then Eq. (48) has been used to obtain the values of the potential parameters for $c\bar{c}$ meson by fitting the spectrum with experimental data.⁴⁸ The results provided by our model are found to be in good agreement with the available experimental spin averaged mass⁵³ and also with previous theoretical studies such as Refs. 12, 57 and 58 for 3S; meanwhile our outcome for 2P state is close to that of Ref. 58 as $\nu \rightarrow 0.9$. The effect of conformable

Table 3. Mass spectra of bottomonium (in GeV/c^2). The quark masses used $m_b = 4.823$ GeV, $m_{\bar{b}} = 4.823$ GeV, the potential parameters $a = 0.0289$ GeV^3 , $b = 0.3555$ GeV^2 and $d = 4.8542$ GeV^{-1} .

States	Our($\nu = 1$)	Our($\nu = 0.9$)	Ref. 59	Exp ⁵³	Relativistic ¹²	Ref. 60
1S	9.460	9.444	9.442	9.444	9.445	9.490
1P	9.491	9.475	9.895	9.890	9.892	9.873
1D	9.550	9.534	10.151	—	10.157	10.122
2S	10.023	9.981	10.008	10.017	10.015	10.008
2P	10.039	9.998	10.250	10.254	10.254	10.235
3S	10.585	10.518	10.345	—	10.348	10.344
4S	11.147	11.055	10.607	—	—	—

Table 4. Mass spectra of $\bar{b}c$ meson (in GeV/c^2). The quark masses used $m_c = 1.207 \text{ GeV}$, $m_{\bar{b}} = 4.823 \text{ GeV}$, the potential parameters $a = 0.0204 \text{ GeV}^3$, $b = 0.2209 \text{ GeV}^2$ and $d = 4.8542 \text{ GeV}^{-1}$.

States	Our($\nu = 1$)	Our($\nu = 0.9$)	Ref. 55	Relativistic ¹²	Ref. 61
1S	6.277	6.252	6.301	6.316	6.318
1P	6.340	6.315	6.718	6.736	6.728
1D	6.451	6.427	7.008	7.077	7.009
2S	6.814	6.756	6.893	6.869	6.888
2P	6.851	6.794	7.114	7.129	7.134
3S	7.351	7.260	—	7.224	7.271
4S	7.889	7.764	—	—	—

 Table 5. Mass spectra of $c\bar{s}$ meson (in GeV/c^2). The quark masses used $m_c = 1.207 \text{ GeV}$, $m_{\bar{s}} = 0.419 \text{ GeV}$, the potential parameters $a = 0.01282 \text{ GeV}^3$, $b = 0.0670 \text{ GeV}^2$ and $d = 4.8546 \text{ GeV}^{-1}$.

States	Our($\nu = 1$)	Our($\nu = 0.9$)	Ref. 62	Exp ⁴⁸	Ref. 63
1S	2.346	2.307	—	2.077	2.075
1P	2.486	2.447	—	2.470	2.547
1D	2.701	2.662	2.855	—	2.720
2S	2.709	2.655	2.710	2.690	2.720
2P	2.836	2.783	3.018	—	3.104
3S	3.072	3.002	3.185	—	3.236
4S	3.435	3.350	—	—	—

 Table 6. Mass spectra of $b\bar{s}$ meson (in GeV/c^2). The quark masses used $m_b = 4.823 \text{ GeV}$, $m_{\bar{s}} = 0.419 \text{ GeV}$, the potential parameters $a = 0.03725 \text{ GeV}^3$, $b = 0.2796 \text{ GeV}^2$ and $d = 0.1255 \text{ GeV}^{-1}$.

States	Our($\nu = 1$)	Our($\nu = 0.9$)	Ref. 64	Exp ⁵⁴	Ref. 65
1S	5.415	5.349	5.400	5.402	5.402
1P	5.830	5.764	5.811	—	5.830
1D	6.264	6.198	6.121	—	6.189
2S	6.819	6.697	5.996	—	5.951
2P	6.786	6.657	6.262	—	6.221
3S	8.222	8.044	6.430	—	6.425
4S	9.625	9.392	—	—	6.862

fractional formulation plays a significant role in this study. The presence of fractional parameter allows to access mass spectra of other unexplored models each time we change the value of ν .

Table 3 reports mass spectra of bottomonium from 1S to 4S state at different values of the fractional parameter. Mass spectra and potential parameters were

Table 7. Mass spectra of $b\bar{q}$ meson (in GeV/c^2). The quark masses used $m_b = 4.823 \text{ GeV}$, $m_q = m_{\bar{q}} = 0.220 \text{ GeV}$, ($q = u, d$). The potential parameters $a = 0.01779 \text{ GeV}^3$, $b = 0.1589 \text{ GeV}^2$ and $d = 0.1232 \text{ GeV}^{-1}$.

States	Our($\nu = 1$)	Our($\nu = 0.9$)	Ref. 64	Exp ⁵⁴	Ref. 65
1S	5.325	5.269	5.316	5.313	5.313
1P	5.723	5.667	5.733	—	5.728
1D	6.131	6.076	6.056		6.071
2S	6.412	6.293	5.931		5.819
2P	6.846	6.377	6.206		6.110
3S	7.500	7.317	6.358		6.251
4S	8.587	8.341	—		6.647

Table 8. Decay constants of vector and pseudoscalar heavy-light mesons in MeV.

Particle	Quark content	Our ($\nu = 0.5$)	Our ($\nu = 1$)	Exp. ⁶⁸	Ref. 69	Ref. 70	Ref. 71
D^0/D^+	$c\bar{u}/c\bar{d}$	205.4	204.1	206 ± 8.9	207.53	$206.2 \pm 7.3 \pm 5.1$	205.14
D_s^+	$c\bar{s}$	247.3	246.2	249	262.56	$243.3 \pm 15.7 \pm 4.5$	241.84
B^-/\bar{B}^0	$b\bar{u}/b\bar{d}$	207.9	206.1	204 ± 31	208.13	$193.4 \pm 12.3 \pm 4.3$	201.09
\bar{B}_s^0	$b\bar{s}$	270.6	269.3		262.39	$232.5 \pm 18.6 \pm 2.4$	292.04

calculated using Eq. (48). It was observed that the results provided by our model are in good agreement with the available experimental spin averaged mass⁵³ and improved in comparison with the results from Refs. 12, 59 and 60 for 1S and 2S, then close to those of Refs. 12 and 60 for 2S and 2P. We also find that when $\nu \rightarrow 1$, our results are close to those from the classical treatment using asymptotic iteration method.³³ Figure 1 illustrates the variations of mass spectra of $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons as a function of the radial quantum number n at different values of ν . We note that the splitting between these curves increases as n goes to higher values; meanwhile, the curves join together as n goes to lower values.

In Table 4, mass spectra of $\bar{b}c$ meson are reported up to 4S state. In the ground state, our results are close to those from relativistic prediction¹² and close to those from Refs. 12, 55 and 61 for excited states; meanwhile, there are no experimental spin average mass for the investigated states.

In Table 5, mass spectra of $c\bar{s}$ meson are reported up to 4S state. Looking at 1S and 1P states, our results are overall in good agreement with the experimental values of spin averaged mass,⁴⁸ and are found to be improved in comparison with prediction from.^{62,63} For 2S state particularly, our outcomes are very close to theoretical predictions from Ref. 62 for $\nu = 1$ and Ref. 63 for $\nu = 0.9$. The later predictions are quite close to the experimental value of spin averaged mass which is 2.690 GeV.⁴⁸ There are no available experimental data for other states like 1D, 2P, 3S and 4S for instance. The behavior of mass spectra of $\bar{b}c$ and $c\bar{s}$ mesons within the conformable

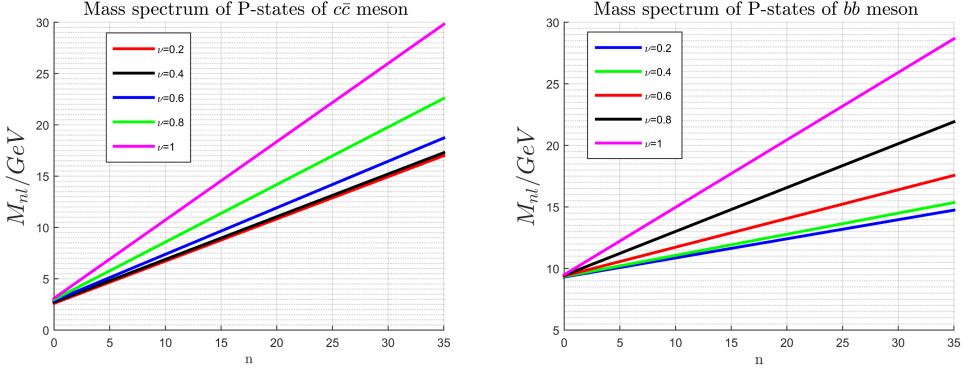


Fig. 1. The mass spectra of $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons as a function of the radial quantum number n at different values of the fractional parameter for $l = 1$.

fractional domain is illustrated in Fig. 2. It was observed that for small values of ν the lines are shifted downward as n increases.

In Table 6, mass spectra of $b\bar{s}$ meson are reported from 1S to 4S state for different values of the fractional parameter. Our results are in good agreement with the experimental data from Ref. 54 for 1S state and improved in comparison with those from the relativistic model⁵² and close to the results of Refs. 64 and 65 when $\nu \rightarrow 1$. Experimental data are not available for 1P, 1D, 2S, 2P, 3S and 4S states.

Numerical results of mass spectra of $b\bar{q}$ meson are displayed in Table 7, from 1S to 4S state at different values of the fractional parameter. For 1S state, our prediction is quite close to the experimental value of spin averaged mass which is 5.313 GeV⁵⁴ and improved in comparison with the relativistic model.⁵⁴ Due to the fact that experimental values of spin averaged mass are not available for other states, we have compared our results with some relevant theoretical studies. Indeed, our predictions reproduce the predictions from Refs. 64 and 65 for 1P, 1D and 2P when $\nu = 1$.

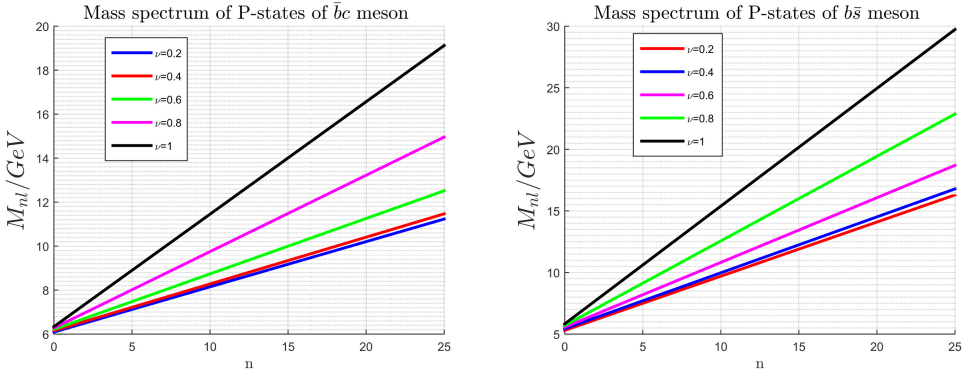


Fig. 2. The mass spectra of $b\bar{c}$ and $b\bar{s}$ mesons as a function of the radial quantum number n at different values of the fractional parameter for $l = 1$.

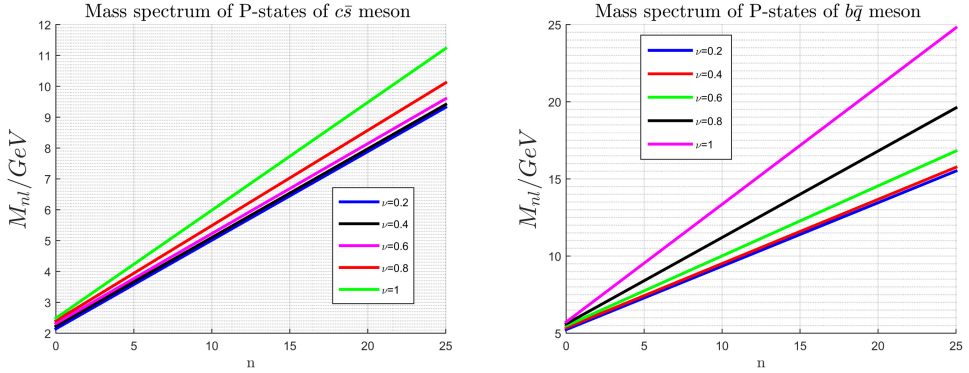


Fig. 3. The mass spectra of $c\bar{s}$ and $b\bar{q}$ mesons as a function of the radial quantum number n at different values of the fractional parameter for $l = 1$.

Moreover, Fig. 3 illustrates the variations of mass spectra with the principal quantum number n at different values of the parameter ν for $b\bar{s}$ and $b\bar{q}$ mesons.

Looking at the work carried out in Ref. 21, we can see that the potential they used is a particular case of the present potential model. It is therefore possible for us to obtain the expressions of the energies and the wave functions of Ref. 21 simply by suitably adjusting the parameters of the potential of this work. Moreover, the present results are overall improved in comparison with results in Refs. 21 and 52 and are found to be in good agreement with the experimental data. In addition, we find that by increasing the fractional order parameter the masses of heavy-light meson also increase as illustrated in Figs. 1–3. The fractional order parameter is not found in Refs. 21, 25, 33 and 52. In comparison with Ref. 33, the authors used the same potential model and solved the SE with the classical AIM. In this work, we have some advantages that the SE is extended to the conformable fractional space. Hence, energy eigen values of heavy-light mesons and wave functions are extended to

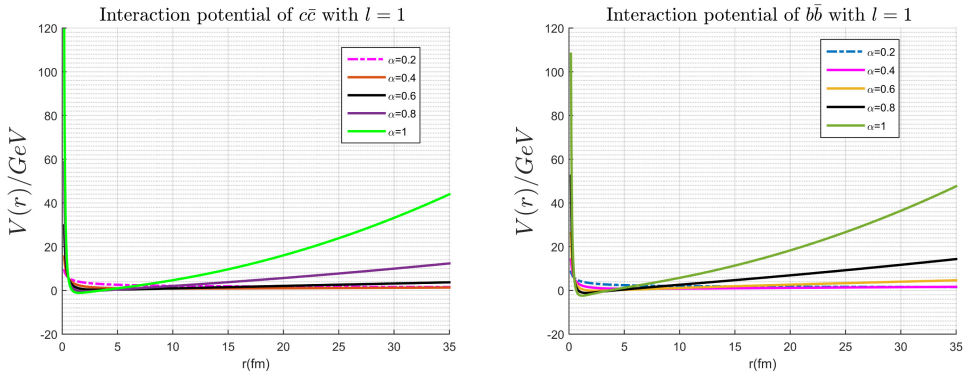


Fig. 4. Variations of the interaction potential against the radius r for $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons at the ground state level, at different values of the fractional parameter.

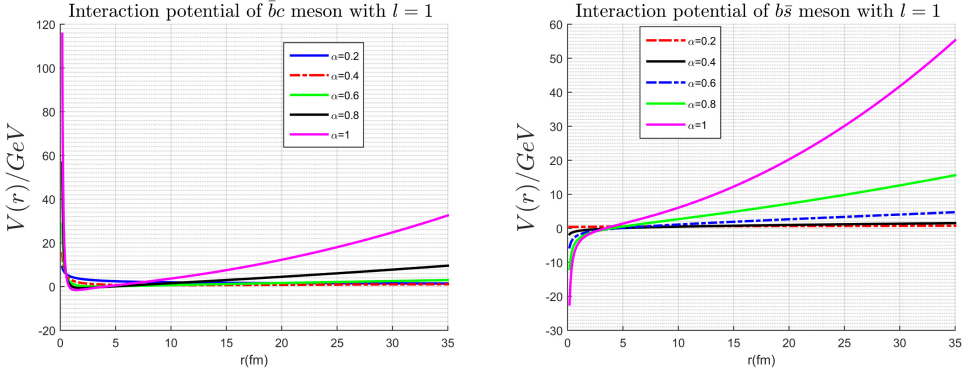


Fig. 5. Variations of the interaction potential against the radius r for $\bar{b}c$ and $\bar{b}s$ mesons at the ground state level, at different values of the fractional parameter.

fractional order, leading to different expression of energy eigen values and wave functions. Hence, the present results are improved in comparison with Refs. 21, 25, 33 and 52 and are in good agreement with the experimental data.^{48,50,53} In addition, it is important to mention here that the predictions of the present model are sensitive to the fractional order parameter. Indeed, the maximum percentages of relative errors are 6.1% at $\nu = 1$ and 5.3% at $\nu = 0.9$ for $c\bar{c}$ meson, 5.3% at $\nu = 1$ and 4.4% at $\nu = 0.9$ for $b\bar{b}$ meson, 0% at $\nu = 1$ and 0.3% at $\nu = 0.9$ for $\bar{b}c$ meson, 5.5% at $\nu = 1$ and 6.8% at $\nu = 0.9$ for $c\bar{s}$ meson, 0% at $\nu = 1$ and 1.1% at $\nu = 0.9$ for $\bar{b}s$ meson and then 0% at $\nu = 1$ and 0.9% at $\nu = 0.9$ for $b\bar{q}$ meson.

Indeed, as previously said, the extended Cornell potential is a general case of many existing potentials in the literature. Moreover, its fractional form makes it even more general. The conformable fractional interaction potential given by Eq. (23) is plotted against the inter-quark separation r , in Fig. 4 for $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons, Fig. 5 for $\bar{b}c$ and $\bar{b}s$ mesons and Fig. 6 for $c\bar{s}$ and $b\bar{q}$ mesons. For all the mesons covered

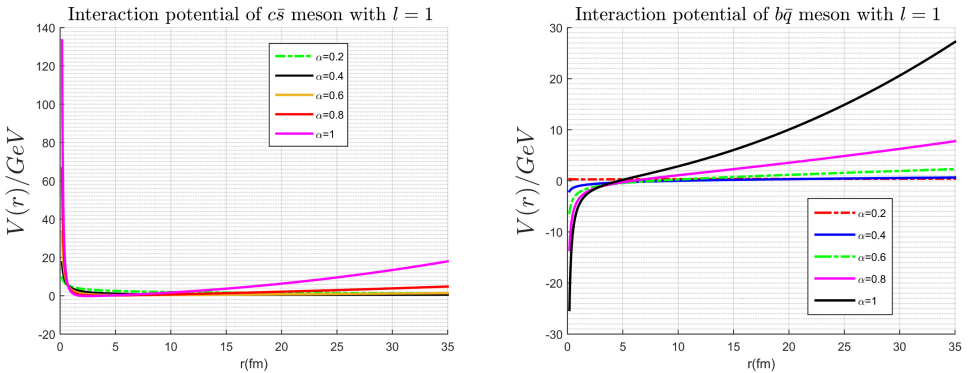


Fig. 6. Variations of the interaction potential against the radius r for $c\bar{s}$ and $b\bar{q}$ mesons at the ground state level, at different values of the fractional parameter.

by this study, the interaction potential generally exhibits a similar behavior except for $b\bar{s}$ and $b\bar{q}$ meson. This result is in agreement with the classic study of Ref. 33 for the same potential model. For other mesons like $b\bar{b}$, $c\bar{c}$, $c\bar{s}$ and $\bar{b}c$ we can see that the potential confines more for large values of the fractional order parameter. Such behavior suggests that we can use fractional models to study confinement effects.

In order to make this study more complete, we have calculated the pseudoscalar and vector decay constants of D^0 , D^+ , D_s^+ , B^- , \bar{B}^0 and \bar{B}_s^0 mesons in the framework of conformable fractional derivative in a nonrelativistic quark model. In particle physics, B mesons are particles made up of a bottom antiquark \bar{b} and either a charm (B_c^+), strange (B_s^0), up (B^+) or down quark (B^0).⁶⁶ However, for each B meson there exists an antiparticle that is composed of a bottom quark and charm (B_c^-), strange (\bar{B}_s^0), up (B^-) or down (\bar{B}^0) antiquark, respectively. Whereas D mesons are the lightest particles containing charm quarks. They are mainly studied to gain more information about the weak interaction.⁶⁷ In particular, our approach has the merit of bringing the calculated values closer to the experimental values because of the fractional formulation. Indeed, the role of the fractional parameter is very significant in obtaining much more precise values of decay constants. From Table 8, we can observe that the classical values obtained in our approach and those from other theoretical works are less good than the fractional values. The value $\nu = 0.5$ was chosen because it gave much more precise results. For the investigated particles, namely D^0 , D^+ , D_s^+ , B^- , \bar{B}^0 and \bar{B}_s^0 mesons, our predictions of pseudoscalar and vector decay constants are overall in good agreement with the experimental data.⁶⁸ It should be mentioned that for \bar{B}_s^0 meson, the experimental results are not yet available. For this reason, we compared our results with other theoretical predictions^{69–71} and found good agreement overall. Note also that relativistic corrections are not considered in this work. This is the main reason why pseudoscalar and vector decay constants of heavy-light mesons have almost equal values.

6. Conclusion

In this work, we studied the mass spectra and decay constants of heavy-light mesons within the framework of the new concept of CFD. We started by introducing the concept of fractional derivative in general, and then a formulation of the AIM in conformable fractional domain was presented. By using this new generalized method, we analytically solved the CFSE for the interaction potential $V(r) = ar^{2\nu} + br^\nu - \frac{c}{r^\nu} + \frac{d}{r^{2\nu}}$. The classical version of this potential is an extended version of the Cornell potential which is typical of strong interactions. From the conformable fractional asymptotic iteration method, energy eigenvalues were obtained and applied to calculate the mass spectra of $c\bar{c}$, $b\bar{b}$, $c\bar{s}$, $\bar{b}c$, $b\bar{s}$ and $b\bar{q}$. With the wave function in hand one can obtain the decay constants for heavy-light D^0 , D^+ , D_s^+ , B^- , \bar{B}^0 and \bar{B}_s^0 mesons. The obtained results provided by our model are found to be in good agreement with the experimental data and improved in comparison with other

theoretical results particularly for excited states. The results of this work could be used by future studies on the spectroscopy of other mesons.

References

1. Particle Data Group (K. Nakamura *et al.*), *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37**, 075021 (2010).
2. Particle Data Group (C. Amsler *et al.*), *Phys. Lett. B* **667**, 1 (2008).
3. C. McNeil, C. H. Davies, E. Follana, K. Hornbostel and G. P. Lepage, *Phys. Rev. D* **86**, 7 (2012).
4. J. J. Dudek, R. G. Edwards, N. Mathur and D. G. Richards, *Phys. Rev. D* **77**, 3 (2008).
5. O. Lakhina and E. S. Swanson, *Phys. Rev. D* **74**, 1 (2006).
6. G. L. Wang, *Phys. Lett. B* **633**, 492 (2006).
7. S. Meinel, *Phys. Rev. D* **79**, 9 (2009).
8. S. F. Radford and W. W. Repko, *Phys. Rev. D* **75**, 7 (2007).
9. J. Morishita, M. Kawaguchi and T. Morii, *Phys. Rev. D* **31**, 1 (1988).
10. A. K. Rai, B. Patel and P. C. Vinodkumar, *Phys. Rev. C* **78**, 55202 (2008).
11. B. Patel and P. C. Vinodkumar, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **36**, 3 (2009).
12. D. Ebert, R. N. Faustov and V. O. Galkin, *Phys. Rev. D* **67**, 14027 (2003).
13. H. Hassanabadi, M. Ghafourian and S. Rahmani, *Few Body Syst.* **57**, 249 (2018).
14. C. Y. Wong, *Phys. Rev. C* **65**, 34902 (2002).
15. H. Hassanabadi, S. Rahmani and S. Zarrinkamar, *Ind. J. Phys.* **88**, 211 (2014).
16. H. Hassanabadi, S. Rahmani and S. Zarrinkamar, *Phys. Rev. D* **90**, 74024 (2014).
17. P. Gupta and I. Mehrotra, *Ind. J. Phys.* **85**, 111 (2011).
18. M. A. Shady, *J. Egypt. Math. Soc.* 111 (2011).
19. M. A. Shady, *Int. J. Appl. Math. Theor. Phys.* **2**, 16 (2016).
20. R. Kumar and F. Chand, *Commun. Theor. Phys.* **59**, 528 (2013).
21. A. Al-Jamel and H. Widyan, *Appl. Phys. Res.* **4**, 94 (2013).
22. J. L. Domenech-Garret and M. A. Sanchis-Lozano, arXiv:0805.2916.
23. E. M. Khokha, M. A. Shady and T. A. A. Karim, *Int. J. Theor. Appl. Math.* **2**, 86 (2016).
24. M. Abu-Shady, T. A. Abdel-Karim and E. M. Khokha, *Quant. Phys.* **2**, 1000017 (2018).
25. A. Al-Jamel, *Mod. Phys. Lett. A* **33**, 1850185 (2018).
26. S. M. Ikhdair and R. Sever, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 1771 (2014).
27. S. N. Gupta and S. F. Radford, *Phys. Rev. D* **26**, 3305 (1982).
28. K. Igi and S. Ono, *Phys. Rev. D* **33**, 3349 (1986).
29. S. M. Ikhdair and R. Sever, *Int. J. Mod. Phys. A* **18**, 4215 (2003).
30. E. Eichten, K. Gottfried and T. Kinoshita, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 369 (1975).
31. S. M. Ikhdair and R. Sever, *Int. J. Mod. Phys. E* **17**, 669 (2008).
32. B. J. Hazarika, K. K. Pathak and D. K. Choudhury, *Mod. Phys. Lett. A* **26**, 1547 (2011).
33. R. Richa, S. B. Bhardwaj and F. Chand, *Commun. Theor. Phys.* **70**, 179 (2018).
34. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations* (Academic Press, 1999).
35. M. Caputo and M. Fabrizio, *Prog. Fract. Dier. Appl.* **1**, 73 (2015).
36. R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, *J. Comp. Appl. Math.* **264**, 65 (2014).
37. H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkılıç, *Commun. Theor. Phys.* **66**, 12 (2018).
38. A. Al-Jamel, *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1950054 (2019).
39. K. Hosseini, A. Bekir and R. Ansari, *Opt. Quant. Electron.* **49**, 131 (2017).
40. M. Eslami, H. Rezazadeh, M. Rezazadeh and S. S. Mosavi, *Opt. Quant. Electron.* **49**, 279 (2017).
41. H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkılıç, *Commun. Theor. Phys.* **66**, 12 (2016).

42. H. Ciftci, R. L. Hall and N. Saad, *J. Phys. A* **38**, 1147 (2005).
43. D. Becirevic, G. Duplancic, B. Klajn, B. Melic and F. Sanfilippo, *Nucl. Phys. B* **883**, 306 (2014).
44. H. M. Choi, *Phys. Rev. D* **75**, 73016 (2007).
45. F. F. Mojica, C. E. Vera, E. Rojas and B. El-Bennich, *Phys. Rev. D* **96**, 14012 (2017).
46. G. Bailas, B. Blossier and V. Morenas, *Eur. Phys. J. C* **78**, 1018 (2018).
47. R. Van Royen and V. F. Weisskopf, *Nuovo Cimento* **50**, 617 (1967).
48. J. Beringer et al., *Phys. Rev. D* **86**, 10001 (2012).
49. R. Kumar and F. Chand, *Phys. Scr.* **85**, 55008 (2012).
50. S. Godfrey and K. Moats, *Phys. Rev. D* **90**, 117501 (2014).
51. S. Godfrey and K. Moats, *Phys. Rev. D* **92**, 54034 (2015).
52. S. Godfrey and K. Moats, *Phys. Rev. D* **93**, 34035 (2016).
53. K. A. Olive et al., *Chin. Phys. C* **38**, 90001 (2014).
54. Particle Data Group (C. Patrignani et al.), *Chin. Phys. C* **40**, 100001 (2016).
55. S. S. Gershtein, V. V. Kiselev, A. K. Likhoded and A. V. Tkabladze, *Phys. Rev. D* **51**, 3613 (1995).
56. P. Gupta and I. Mehrotra, *J. Mod. Phys.* **3**, 1530 (2012).
57. B. Q. Li and K. T. Chao, *Phys. Rev. D* **79**, 94004 (2009).
58. T. Barnes, S. Godfrey and E. S. Swanson, *Phys. Rev. D* **72**, 54026 (2005).
59. B. Q. Li and K. T. Chao, *Commun. Theor. Phys.* **52**, 653 (2009).
60. J. Segovia, P. G. Ortega, D. R. Entem and F. Fernandez, *Phys. Rev. D* **93**, 74027 (2016).
61. E. J. Eichten and C. Quigg, *Phys. Rev. D* **49**, 5845 (1994).
62. A. M. Badalian and B. L. G. Bakker, *Phys. Rev. D* **84**, 34006 (2011).
63. D. Ebert, R. N. Faustov and V. O. Galkin, *Eur. Phys. J. C* **66**, 197 (2010).
64. Q. F. Lu, T. T. Pan, Y. Y. Wang, E. Wang and D. M. Li, *Phys. Rev. D* **94**, 74012 (2016).
65. M. Shah, B. Patel and P. Vinodkumar, *Phys. Rev. D* **93**, 94028 (2016).
66. S. Godfrey, K. Moats and E. S. Swanson, *Phys. Rev. D* **94**, 54025 (2016).
67. R. J. Morrison and M. S. Witherell, D mesons, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **39**, 183 (1989).
68. H. Mutuk, *Adv. High Energy Phys.* **2018**, 8095653 (2018).
69. S. Nam, *Phys. Rev. D* **85**, 34019 (2012).
70. W. Lucha, D. Melikhov and S. Simula, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **38**, 105002 (2011).
71. K. K. Pathak, D. K. Choudhury and N. S. Bordoloi, *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1350010 (2013).



A. Atangana Likéné · D. Nga Ongodo · J. M. Ema'a Ema'a ·
P. Ele Abiama · G. H. Ben-Bolie

Effects of Gravitational Field of a Topological Defect on Heavy Quarkonia Spectra in a Non-relativistic Quark Model

Received: 29 April 2023 / Accepted: 16 September 2023

© The Author(s), under exclusive licence to Springer-Verlag GmbH Austria, part of Springer Nature 2023

Abstract In this paper, we analyze the properties of heavy quarkonia in a curved space-time with conical geometry induced by a topological defect, namely a cosmic string. The particles moving within the latter space are under the influence of an extended version of the Cornell potential. Assuming that the cosmic string space time is torsion free, the full spectrum of each particle is obtained by solving the Schrödinger equation using the extended Nikiforov–Uvarov method. It is observed that the gravitational field of the topological defect acts on the energy levels in a manner similar to the Zeeman effect due to the magnetic field. However, in the limit of the flat Minkowski space-time ($\alpha \rightarrow 1$), we recover the classical mass spectra of heavy quarkonia for the extended Cornell potential. The numerical outcomes of this study are overall found in good agreement with experimental data and other relevant theoretical works. Thus, to illustrate the effect of the topological defect graphically, mass spectra, wave functions and radial probability densities are plotted for P -states at different values of α . It is found that, at large values of the quantum number n , the mass spectra of heavy quarkonia exhibit saturation effect governed by the topological parameter.

1 Introduction

In recent years, one of the most relevant interrogation raised in nuclear and particle physics concerns the complete description of hadrons properties. In order to analyze and describe certain properties of nucleus and quarks, many potential models have been used in previous works [1–7]. Since the discovery of the J/ψ meson by the Brookhaven National Laboratory (BNL) in 1974 [8,9] and the putting in place of the ϵ meson, the study of heavy mesons has drawn a particular attention in the sense that it has become a way for quantitative tests of the standard model of particle physics [10,11]. In addition to the large set of available experimental data [12–14], the dynamics of heavy quarkonia can be treated with non-relativistic quark models [15–19] or non perturbatively with Quantum Chromodynamics (QCD), thus making their study particularly interesting.

A. A. Likéné (✉) · D. Nga Ongodo · G. H. Ben-Bolie
Laboratory of Atomic, Molecular and Nuclear Physics, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaounde I, P.O. Box 812, Yaounde, Cameroon
E-mail: aandreaime@yahoo.fr; ngadieudonne@yahoo.fr; gbenbolie@yahoo.fr

J. M. Ema'a Ema'a
Bertoua Higher Teacher's Training College, Department of Physics, University of Bertoua, P.O. Box 55, Bertoua, Cameroon
E-mail: emaejm@yahoo.fr

A. A. Likéné · P. Ele Abiama
The Research Centre of Nuclear Science and Technology (RCNST), Institute of Geological and Mining Research, P.O. Box 4110, Yaounde, Cameroon
E-mail: eleabiama2003@yahoo.fr

By the end of the 1970's, Kibble [20] has predicted within the framework of Grand Unification Theories (GUT) that during a cooling phase of the primordial universe, after the big bang, our universe would have known a series of spontaneous symmetry breaking [20,21]. These symmetry breaking were accompanied by phase transition. According to the mechanism that was introduced by Kibble, some topological defects would have generally been formed during these phase transitions. These defects are regions of space in which a very high density of energy is concentrated. Their natures are determined by their spatial dimensions. These depend on the topology of the set of empty spaces accessible to the Higgs fields, present in the GUT. In past studies, a wide variety of topological defects have been studied namely: point defects [20,22] called monopoles, linear defects or cosmic strings [1,20,21,23], surface defects or domain walls [22], and combinations between these different defects [20]. Topological defects are often stable; it is therefore absolutely possible that some of them would have survived, perhaps to the present day [22]. Topological defects are observable in cosmology. Monopoles and domain walls are so massive that they would quickly come to dominate the dynamics of our universe, which is in total disagreement with the observations [24].

However, cosmic strings are compatible with current observations and their cosmological effects could be confirmed with current and future works. Among all the topological defects, cosmic strings are the most remarkable ones, in the sense that the geometry is flat everywhere except from the symmetry axis [22,24]. They have been formed in the early history of the universe. Although there is no fundamental evidence of their existence, the richness of ideas developed from general relativity theory, is quite a great motivation to study the behavior of particles on these geometrical structures. It is therefore quite logical to give special interest to the study of quantum systems on space-times with cosmic string geometry, because they are said to be the most important topological defect in our universe [23]. As an important consequence of the probable existence of cosmic strings, we can cite for example, the compression of matter during the passage of a moving string [25], temperature fluctuations in the Cosmic Microwave Background (CMB). The gravitational field generated by a cosmic string has very unusual properties. Indeed, a quantum particle which would be at rest in the neighborhood of a straight, static string of infinite dimension would not be attracted by it, and would therefore not feel any local gravitational field. This means that the space is locally flat in the neighborhood of a cosmic string [22]. However, it is a local flatness and not global. Due to this particular geometry, a cosmic string can generate a certain number of effects on quantum particle dynamics such as the bremsstrahlung process in the neighborhood of a static nucleus, the creation or annihilation of the (e^+, e^-) pair. These fluctuations of quantum observables due to cosmic strings lead us to be interested in the properties of hadrons in such spaces under the action of a central field.

In this article, we aim to compute the solution of the Schrödinger wave equation with an extended version of the Cornell interaction in the space-time of a torsion free cosmic string. We consider a quark-antiquark system interacting with the extended Cornell potential and examine how the energy levels are modified by the non trivial topology of the later space-time. The Schrödinger equation is solved analytically using the extended Nikiforov–Uvarov method. The full spectrum is obtained and we apply the results to study some properties of heavy mesons.

This paper is structured as follow, Sect. 2 briefly presents the extended Nikiforov–Uvarov method. In Sect. 3, we introduce the Schrödinger equation in a curved background space-time, the latter is solved analytically for heavy quarkonia subject to the extended Cornell potential, the energy spectra and the wave functions are computed in the cosmic-string space time. In Sect. 4, the results are presented and discussed. Finally Sect. 5, concludes the paper.

2 Basics of the Extended Nikiforov–Uvarov Method

The Nikiforov–Uvarov [1,3,26–29] method helps to find the eigenvalues and eigenfunctions of Schrödinger type equations for various potentials. The extended Nikiforov–Uvarov (ENU) method is an extension of the Nikiforov–Uvarov (NU) method. In this section, we briefly present the basics of the extended Nikiforov–Uvarov method. For more details on the method, one can refer to Refs. [1,3,30–32]. We consider a second order differential equation of the form

$$\psi''(r) + \frac{\bar{\tau}(r)}{\sigma(r)}\psi'(r) + \frac{\bar{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)}\psi(r) = 0, \quad (1)$$

where $\bar{\tau}(r)$, $\sigma(r)$ and $\bar{\sigma}(r)$ are polynomials, of at most second, third and fourth degrees respectively. To obtain the particular solution of Eq. (1), we use the following transformation

$$\psi(r) = \phi(r)Y(r), \quad (2)$$

which reduces Eq. (1) to an equation of hypergeometric type,

$$Y''(r) + \left(2\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} + \frac{\bar{\tau}(r)}{\sigma(r)}\right)Y'(r) + \left(\frac{\phi''(r)}{\phi(r)} + \frac{\phi'(r)\bar{\tau}(r)}{\phi(r)\sigma(r)} + \frac{\bar{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)}\right)Y(r) = 0. \quad (3)$$

The above equation can be put in a simpler form [26,30], namely

$$Y''(r) + \frac{\tau(r)}{\sigma(r)}Y'(r) + \frac{h(r)}{\sigma(r)}Y(r) = 0. \quad (4)$$

The function ϕ in Eq. (3) and the function h in Eq. (4) satisfy the following equations,

$$\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} = \frac{\pi(r)}{\sigma(r)}, \quad (5)$$

$$h(r) = \pi'(r) + G(r), \quad (6)$$

and $Y(r)$ is the solution of hypergeometric equation. The polynomial solutions of the function $Y(r)$ satisfies the Rodrigues-like formula [30–32]

$$Y_n(r) = \frac{B_n}{\rho(r)} \frac{d^n}{dr^n} [\sigma^n(r)\rho(r)], \quad (7)$$

where $\rho(r)$ is the weight function and B_n is the normalization constant. The weight function must satisfy the condition

$$(\sigma(r)\rho(r))' = \tau(r)\rho(r), \quad (8)$$

with $\tau(r)$ being defined as

$$\tau(r) = \bar{\tau}(r) + 2\pi(r). \quad (9)$$

The extended Nikiforov–Uvarov requires the two functions $\pi(r)$ and $G(r)$ defined as

$$\pi(r) = \left(\frac{\sigma'(r) - \bar{\tau}(r)}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(r) - \bar{\tau}(r)}{2}\right)^2 - \bar{\sigma}(r) + G(r)\sigma(r)}. \quad (10)$$

Hence, the function $\pi(r)$ is a second degree polynomial, and based on this, we must have $G(r)$ on the form

$$G(r) = Ar + B, \quad (11)$$

where A and B are constants to be determined later. The function $h_n(r)$ required for this method is determined from the following relation

$$h_n(r) = -\frac{n}{2}\tau'(r) - \frac{n(n-1)}{6}\sigma''(r) + C_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

where C_n is a constant to be determined. From equating Eq. (6) with Eq. (12) we obtain the energy eigenvalues equation.

3 Heavy Quarkonia in Cosmic String Background

In spherical coordinates, the line element which describes the cosmic string space-time without an internal structure [21] is given by ($x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + [\chi d\theta + \alpha r \sin \theta d\varphi]^2, \quad (13)$$

where $0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi$, and $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \alpha = 1 - 4J$ is the topological parameter of the cosmic string, $\chi = \frac{4GJ}{c^3}$ is the torsion [33] parameter and J denotes the linear mass density of the cosmic string. We know from General Relativity (GR) that the values of J varies in the interval $J \in]0, 1[$ [33,34].

For $\alpha \rightarrow 1$ and $\chi \rightarrow 0$, the space-time manifold reduces to the usual Minkowski space-time in spherical coordinates. The direction of the cosmic-string is chosen oriented along the z axis, thus generating a breaking of the spherical symmetry and consequently the invariance by rotation is broken. Such a mechanism is necessary for the formation of the topological defect in question. For more details on the topic, one can refer to Refs. [35,36]. The metric tensor for the space-time described by Eq. (13) is:

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^2 + r^2 & \chi\alpha r \sin \theta \\ 0 & 0 & \chi\alpha r \sin \theta & \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (g_{ij}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

with the inverse metric,

$$g^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & -\frac{\chi}{\alpha r^3 \sin \theta} \\ 0 & 0 & -\frac{\chi}{\alpha r^3 \sin \theta} & \frac{\chi^2 + r^2}{\alpha^2 r^4 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

The metric tensor has a signature $(-, +, +, +)$, and its determinant is given by $g = \det(g^{\mu\nu}) = -\alpha^2 r^4 \sin^2 \theta$, with $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. To derive the expression of differential operators, we use the curvilinear coordinates system $ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ such that $r \rightarrow x^1, \theta \rightarrow x^2, \varphi \rightarrow x^3$ and the metric tensor of the internal 3-dimensional Euclidean space is:

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2 + r^2 & \chi\alpha r \sin \theta \\ 0 & \chi\alpha r \sin \theta & \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (16)$$

The basic objects of a metric tensor are the Christoffel symbols,¹ the tetrad basis, the Riemann and Ricci tensors, as well as the Ricci scalar. The Christoffel symbols of the second kind $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ are computed according to the formula:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\mu\rho} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} g_{\mu\nu} \right] = g^{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu\rho}, \quad (17)$$

where $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ are the Christoffel symbols of the first kind. In the limit of small values of the torsion parameter $\chi \ll 1$, the non-vanishing connection coefficients for the cosmic string space-time Eq. (13) are:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r\alpha^2 \sin^2 \theta, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\alpha^2 \sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \cot \theta, \end{aligned} \quad (18)$$

¹ The Christoffel symbols are also called connection coefficients.

and their partial derivatives:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\theta,r}^r &= -1, \quad \Gamma_{\varphi\varphi,\theta}^r = -2\alpha^2 \sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi,r}^r = -\alpha^2 \sin^2\theta, \quad \Gamma_{r\theta,r}^\theta = -\frac{1}{r^2} \\ \Gamma_{\varphi\varphi,\theta}^\theta &= -\alpha^2 \cos 2\theta, \quad \Gamma_{r\varphi,r}^\varphi = -\frac{1}{r^2}, \quad \Gamma_{\theta\varphi,\theta}^\varphi = -\frac{1}{\sin^2\theta}.\end{aligned}\quad (19)$$

Having the Christoffel symbols at hand, one can easily obtain the expressions of Riemann tensor, Ricci tensor, and the Scalar curvature respectively as

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\mu - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^\mu + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (20)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho, \quad (21)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right). \quad (22)$$

The space-time curvature depends on the values of the cosmic-string parameter² α . Obviously, the flat Minkowski space-time is recovered as $\alpha \rightarrow 1$ since the Ricci scalar R vanishes. The local tetrad is constructed as follow:

$$e_{(t)} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad e_{(r)} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_{(\theta)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad e_{(\varphi)} = \frac{1}{\alpha r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (23)$$

and the dual basis

$$\vartheta^{(t)} = c dt, \quad \vartheta^{(r)} = dr, \quad \vartheta^{(\theta)} = r d\theta, \quad \vartheta^{(\varphi)} = \alpha r \sin\theta d\varphi. \quad (24)$$

For small values of the torsion parameter χ , the Laplace-Beltrami operator of the local coordinates system can be expressed as:

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{and} \quad g = \det(g_{ij}) = \alpha^2 r^4 \sin^2\theta. \quad (25)$$

Considering Eq. (16) with the condition $\chi \ll 1$, the Laplace-Beltrami operator becomes:

$$\begin{aligned}\Delta_{LB} &= \frac{1}{\sqrt{r^4 \alpha^2 \sin^2\theta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha r^2 \sin\theta \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\alpha^2 r^2 \sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{r^4 \alpha^2 \sin^2\theta}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\alpha r^2 \sin\theta}{\alpha^2 r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right] + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\},\end{aligned}\quad (26)$$

which allows us to write the Hamiltonian operator in natural units ($\hbar = c = 1$) as:

$$H = -\frac{1}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\alpha^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + V(r, \theta, \varphi), \quad (27)$$

where $M = m_q m_{\bar{q}} / (m_q + m_{\bar{q}})$ is the reduced mass of the meson, m_q and $m_{\bar{q}}$ are the mass of quark and antiquark respectively [10]. The non-relativistic Schrödinger equation in curved background space-time is [23,33]

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\alpha^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t). \quad (28)$$

² The cosmic string parameter or topological defect.

In what follows, we consider a bound state of two heavy quarks interacting with the potential

$$V(r) = -\frac{K}{r} + ar + \frac{g}{r^2} + br^2 + d \quad (29)$$

which is an extended version of the Cornell potential (see [1,2,37,38]). The first term is a Coulomb-like potential due to one-gluon exchange processes between the quark and its antiquark [37], the second term is a linear confinement term. The additional part was added to improve quark-antiquark properties (see [1,2,37–39]). In the literature, the extended Cornell potential has been widely studied by many authors. It can be obtained via a Taylor expansion of the Yukawa potential, which is typical of strong interactions. For more details, one can see Ref. [40] and references therein. As $V = V(r)$, the following commutation relations must be satisfied

$$[L_z, V(r)] = 0, \quad [L^2, V(r)] = 0. \quad (30)$$

Consequently, L_z and L^2 are good quantum numbers to describe the quantum states of the system under the influence of this potential. Inserting the new form of Ψ as

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{\psi_{nl}(r)}{r} H_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi) e^{-iE_{nl}t}, \quad (31)$$

and substituting in Eq. (28) gives:

$$-\frac{1}{2M} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \frac{\psi_{nl}(r)}{r} H_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi) \quad (32)$$

$$+ V(r) \frac{\psi_{nl}(r)}{r} H_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi) = E_{nl} \frac{\psi_{nl}(r)}{r} H_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi). \quad (33)$$

From separation of variables, we obtain the following set of second-order differential equations,

$$\frac{d^2 \psi_{nl}(r)}{dr^2} + \left[-2MV(r) + 2ME_{nl} - \frac{\delta}{r^2} \right] \psi_{nl}(r) = 0, \quad (34)$$

$$\frac{d^2 H_l^m(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dH_l^m(\theta)}{d\theta} + \left[\delta - \frac{m^2}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \right] H_l^m(\theta) = 0, \quad (35)$$

$$\frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi_m(\varphi) = 0, \quad (36)$$

where δ and m^2 are the separation constants. We can easily find the solution of Eq. (36) from the following boundary condition: $\Phi_m(\varphi + 2\pi) = \Phi_m(\varphi)$,

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (37)$$

To find the solutions of Eq. (35), we introduce the variable $\eta = \cos \theta$, which transforms Eq. (35) into

$$\frac{d^2 H_l^m(\eta)}{d\eta^2} - \frac{2\eta}{(1-\eta^2)} \frac{dH_l^m(\eta)}{d\eta} + \left[\delta - \frac{m^2}{\alpha^2(1-\eta^2)} \right] H_l^m(\eta) = 0. \quad (38)$$

To obtain suitable solutions of Eq. (38), it is therefore necessary to analyze the way the solutions behave around singular points, namely $\eta = \pm 1$. Then we assume the following form for the solution

$$H_l^m(\eta) = (1-\eta^2)^{\frac{m}{2\alpha}} g_l(\eta), \quad (39)$$

where the function $g_l(\eta)$ is analytic everywhere except at $\eta \rightarrow \pm\infty$, and does not vanish at $\eta = \pm 1$. From Eqs. (38) and (39), and introducing the following generalized quantum numbers $l_{(\alpha)}$, $m_{(\alpha)} = \frac{m}{\alpha}$ from the cosmic string geometry, we obtain the following equation:

$$(1-\eta^2) \frac{d^2 g_{l_{(\alpha)}}(\eta)}{d\eta^2} - 2(m_{(\alpha)}+1)\eta \frac{dg_{l_{(\alpha)}}(\eta)}{d\eta} - \left[m_{(\alpha)}^2 + m_{(\alpha)} - \delta \right] g_{l_{(\alpha)}}(\eta). \quad (40)$$

From the expansion of $g_{l(\alpha)}(\eta)$ into a power series, the above equation gives us the following recurrence relation:

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1) + 2(m_{(\alpha)} + 1)n - \delta + m_{(\alpha)}(m_{(\alpha)} + 1)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (41)$$

where $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. For physically acceptable solutions, the series must be truncated at a certain value of n . Thus we have

$$n(n-1) + m_{(\alpha)}(m_{(\alpha)} + 1) + 2(m_{(\alpha)} + 1)n - \delta = 0. \quad (42)$$

Solving Eq. (42) for δ gives:

$$\delta = l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1) \quad \text{with} \quad l_{(\alpha)} = m_{(\alpha)} + n \quad (43)$$

$l_{(\alpha)}$ being the generalized angular orbital quantum number. Contrary to the classical limit, the generalized quantum numbers $l_{(\alpha)}$ and $m_{(\alpha)}$ are not always integers. $l_{(\alpha)} = m_{(\alpha)} + n = \frac{m}{\alpha} + n = l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m$, where $l = 0, 1, 2, \dots$. Eq. (38) can therefore take the form:

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 H_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta)}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d H_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta)}{d\eta} + \left[l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1) - \frac{[m_{(\alpha)}]^2}{(1 - \eta^2)} \right] H_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta). \quad (44)$$

Note that Eq. (44) is the Legendre's equation generalized to the case of cosmic string space-times and $H_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta)$ are the generalized Legendre polynomials given by the formula:

$$H_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta) = P_{l_{(\alpha)}}^{m_{(\alpha)}}(\eta) = \frac{(-1)^{l_{(\alpha)}}}{2^{l_{(\alpha)}} l_{(\alpha)}!} (1 - \eta)^{\frac{m_{(\alpha)}}{2}} \frac{d^{l_{(\alpha)} + m_{(\alpha)}}}{d\eta^{l_{(\alpha)} + m_{(\alpha)}} \left[(1 - \eta^2)^{l_{(\alpha)}} \right]. \quad (45)$$

Let's now turn to the radial equation.

Substituting the proposed potential in Eq. (34) and choosing the separation constant being $\delta = l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1)$, the radial equation becomes

$$\frac{d^2 \psi_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \left[-2Mg - l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1) + 2MKr + 2M(E_{nl} - d)r^2 - 2Mar^3 - 2Mbr^4 \right] \psi_{nl}(r) = 0, \quad (46)$$

that we put in a simpler form by introducing the following constants:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1) + 2Mg, & \xi_1 &= 2MK, & \xi_2 &= 2M(E_{nl} - d), \\ \xi_3 &= 2Ma, & \xi_4 &= 2Mb. \end{aligned} \quad (47)$$

The functions required for the extended Nikiforov–Uvarov method are:

$$\bar{\tau}(r) = 0, \quad (48)$$

$$\sigma(r) = r^2, \quad (49)$$

$$\bar{\sigma}(r) = -\xi_0 + \xi_1 r + \xi_2 r^2 - \xi_3 r^3 - \xi_4 r^4. \quad (50)$$

Using equation Eq. (10), $\pi(r)$ is found as

$$\pi(r) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4} - \xi_1 r - \xi_2 r^2 + \xi_3 r^3 + \xi_4 r^4 + rG(r)}. \quad (51)$$

Assuming that the term under the square root of the above expression becomes quadratic, the function $\pi(r)$ takes the form

$$\pi(r) = \frac{1}{2} \pm (\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2). \quad (52)$$

Let's take the function $G(r)$ in the form $G(r) = Ar + B$. By comparison between Eqs. (51) and (52), we obtain the following four sets of solutions for the unknowns $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, A$ and B in terms of the problem parameters:

$$\begin{aligned} \text{I : } & \begin{cases} \alpha_2 = \sqrt{\xi_4} \\ \alpha_1 = \frac{\xi_3}{2\sqrt{\xi_4}} \\ \alpha_0 = \sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ A = \xi_2 + \frac{[\xi_3]^2}{4\sqrt{\xi_4}} + 2\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ B = \xi_1 + \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_4}}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \end{cases} & \text{II : } & \begin{cases} \alpha_2 = -\sqrt{\xi_4} \\ \alpha_1 = -\frac{\xi_3}{2\sqrt{\xi_4}} \\ \alpha_0 = \sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ A = \xi_2 + \frac{[\xi_3]^2}{4\sqrt{\xi_4}} - 2\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ B = \xi_1 - \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_4}}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \end{cases} \\ \text{III : } & \begin{cases} \alpha_2 = \sqrt{\xi_4} \\ \alpha_1 = \frac{\xi_3}{2\sqrt{\xi_4}} \\ \alpha_0 = -\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ A = \xi_2 + \frac{[\xi_3]^2}{4\sqrt{\xi_4}} - 2\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ B = \xi_1 - \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_4}}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \end{cases} & \text{IV : } & \begin{cases} \alpha_2 = -\sqrt{\xi_4} \\ \alpha_1 = -\frac{\xi_3}{2\sqrt{\xi_4}} \\ \alpha_0 = -\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ A = \xi_2 + \frac{[\xi_3]^2}{4\sqrt{\xi_4}} + 2\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \\ B = \xi_1 + \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_4}}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}} \end{cases} \end{aligned} \quad (53)$$

Considering Eq. (5), we have two solutions for $\phi(r)$ which are given by:

$$\phi_{\pm}(r) = K_{\pm} r^{\frac{1}{2} \mp \alpha_0} \exp\left(\pm \frac{1}{2}(\alpha_2 r^2 + 2\alpha_1 r)\right). \quad (54)$$

The wave function will be physically acceptable if $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$ and $\alpha_0 > 0$ and then the set **II** of parameters is the suitable one in the determination of the eigenvalue and the eigenfunction of the problem. As the functions $h(r)$ and $h_n(r)$ are equal, we use Eqs. (6) and (12) to obtain the energy equation as

$$Ar + B \pm (2\alpha_2 r + \alpha_1) = C_n - n[\pm(2\alpha_2 r + \alpha_1)], \quad (55)$$

where C_n is an integration constant which couples with the parameters of the potential. Equation (55) leads us to have two distinct choices $++$ and $--$, which are given by **I** and **II** as follows

$$\text{I : } \begin{cases} 2\alpha_2 + A = -2n\alpha_2 \\ B + \alpha_1 = C_n - n\alpha_1 \end{cases} \quad \text{II : } \begin{cases} -2\alpha_2 + A = 2n\alpha_2 \\ B - \alpha_1 = C_n + n\alpha_1 \end{cases}. \quad (56)$$

The choice of $--$ and set **II** results on the relation $A + 2(n+1)\alpha_2 = 0$ from which we can write:

$$\frac{4\xi_4\xi_2 + [\xi_3]^2 - 4\xi_4\sqrt{\xi_4}\sqrt{\xi_0 + \frac{1}{4}}}{4\xi_4} = 2(n+1)\sqrt{\xi_4}. \quad (57)$$

Using Eqs. (47) and (57), we obtain the expression below:

$$E_{nlm} = d - \frac{a^2}{4b} + 2\sqrt{\frac{2b}{M}} \left(2(n+1) + 2\sqrt{2Mg + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right). \quad (58)$$

As expected, the direct resolution by the extended Nikiforov–Uvarov method, gives an energy in the form of an affine function of the principal quantum number $E = An + B$ as in refs. [1, 38, 39] and references there in. However there exists in literature an approximation which improves the taking into account of the effect of the Coulomb potential. The latter approximation is based on a transformation which makes it possible to obtain results in the form $E = A/(2n+1+B)^2$. See ref. [41] and references there in. We note that the presence of the cosmic string parameter α breaks the degeneracy in the states with $l \neq 0$. When $\alpha \rightarrow 1$ and $d \rightarrow 0$, we find the results obtained in [38, 39]. Moreover, for $\alpha \rightarrow 1, d \rightarrow 0, a = 0$ and $g = 0$ we obtain the energy spectrum of a spherical quantum harmonic oscillator [38]. Next, the mass spectra of the heavy meson is obtained through the formula [1, 2, 38, 39, 42]

$$M_{q\bar{q}} = m_q + m_{\bar{q}} + E_{nl}. \quad (59)$$

Then for the present case

$$M_{q\bar{q}} = m_q + m_{\bar{q}} + d - \frac{a^2}{4b} + 2\sqrt{\frac{2b}{M}} \left(2(n+1) + 2\sqrt{2Mg + \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m \right] \left[l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m + 1 \right] + \frac{1}{4}} \right). \quad (60)$$

Let's now turn to the expression of the wave function, $\psi_{nl}(r) = \phi(r)Y_n(r)$ where ϕ is determined from Eq.(5) as $\phi(r) = r^{\frac{1}{2} + \alpha_0} e^{\frac{1}{2}(\alpha_2 r^2 + 2\alpha_1 r)}$. Physically acceptable solutions are obtained using set **II** of parameters,

$$\phi(r) = K_+ r^{\frac{1}{2} + \sqrt{l_{(\alpha)}(l_{(\alpha)} + 1) + 2Mg + \frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2Mbr^2 + \frac{2Ma}{\sqrt{2Mb}}}r)} \quad (61)$$

. For the special case of Eq. (29) where $g = 0$, we have

$$\phi(r) = K_+ r^{1+l_{(\alpha)}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2Mbr^2 + \frac{2Ma}{\sqrt{2Mb}}}r)} \quad (62)$$

. On the other hand, using Eq. (4) we have

$$r \frac{d^2 Y(r)}{dr^2} + [1 \pm 2(\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2)] \frac{dY(r)}{dr} + [\pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 r) + Ar + B] Y(r) = 0. \quad (63)$$

Using the relations $A = -2(n+1)\alpha_2$ and $B = C_n + (n+1)\alpha_1$, Eq. (63) becomes

$$r \frac{d^2 Y(r)}{dr^2} + [1 \pm 2(\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2)] \frac{dY(r)}{dr} + [\pm(-n\alpha_1 - 2n\alpha_2 r)] Y(r) = 0. \quad (64)$$

Using the substitution $z = (\xi_4)^{\frac{1}{4}} r$, Eq. (64) with the sign "+" becomes

$$z \frac{d^2 Y(z)}{dz^2} + \left[1 + 2\alpha_0 + 2\alpha_1 \xi_4^{-\frac{1}{4}} z - 2z \right] \frac{dY(z)}{dz} + \left[2nz - n\alpha_1 \xi_4^{-\frac{1}{4}} \right] Y(z) = 0. \quad (65)$$

This equation is equivalent to the standard Bi-confluent Heun Equation (BHE) [38,43] whose general form is

$$z \frac{d^2 Y(z)}{dz^2} + (1 + c - \beta z - 2z^2) \frac{dY(z)}{dz} + \left[(\gamma - c - 2)z - \frac{1}{2}[\delta + (1 + c)\beta] \right] Y(z) = 0, \quad (66)$$

which is derived from the Heun equation by coalescence of two singular points with infinity [43,44]. Comparing Eqs. (65) and (66) yields the following expressions:

$$c = 2\alpha_0 = 2l_{(\alpha)} + 1, \quad (67)$$

$$\beta = -2\alpha_1 \xi_4^{-\frac{1}{4}} = (2M)^{-\frac{1}{4}} ab^{-\frac{3}{4}}, \quad (68)$$

$$\gamma = 2n + 2 + c = 2n + 2 + 2l_{(\alpha)} + 1, \quad (69)$$

$$\delta = -\beta(1 + c) + 2n\alpha_1 \xi_4^{-\frac{1}{4}} = (2M)^{-\frac{1}{4}} ab^{-\frac{3}{4}} [n + 2 + 2l_{(\alpha)}]. \quad (70)$$

From the power series expansion technique, there is a polynomial solution $N_{nl}(c, \beta, \gamma, \delta, z)$ of degree n (see [38,43,44]) if and only if $\gamma - c - 2 = 2n$. This condition is already satisfied for our case. Then we can write the solution as:

$$Y_{nl}(z) = N_{nl}(c, \beta, \gamma, \delta, z) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+c)A_k}{\Gamma(1+c+k)} \frac{(\sqrt[4]{\xi_4}r)^k}{k!}, \quad (71)$$

while the three first coefficients given by $A_0 = 1$, $A_1 = \frac{1}{2}[\delta + \beta(1+c)]$ and $A_2 = \left(\frac{1}{4\sqrt{2b}}\right) - 4(2l_{(\alpha)} + 1)\sqrt[4]{2b}$. For detailed computations, one can refer to [43]. Using the expressions of the parameters and the substitution $R_{nl}(r) = \frac{1}{r}\psi_{nl}(r)$, we obtain the radial wave function within the cosmic string space-time as

$$R_{nl}(r) = N_n r^{l_{(\alpha)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{2Mbr^2 + \frac{2Ma}{\sqrt{2Mb}}}r \right) \right] \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+c)A_k}{\Gamma(1+c+k)} \frac{(\sqrt[4]{\xi_4}r)^k}{k!}, \quad (72)$$

where N_n is the normalization constant and $l_{(\alpha)} = l - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m$, is the generalized orbital angular momentum. We will place emphasis on the fundamental and first excited S -states for the wave function.

Table 1 The potential parameters. The quark masses used are taken from ref. [2,38]: $m_c = 1.207\text{GeV}$ and $m_b = 4.823\text{GeV}$

Parameters	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$
$a(\text{GeV}^2)$	0.0405	0.2250
$b(\text{GeV}^3)$	0.0046	0.0140
$g(\text{GeV}^{-1})$	0.1384	0.1040
K	0.5	0.5
$d(\text{GeV})$	0.0048	0.0055

Table 2 Mass spectra of charmonium (in GeV). The quark masses used $m_c = 1.207\text{GeV}$, the potential parameters $a = 0.0407\text{GeV}^2$, $b = 0.0042\text{GeV}^3$, $g = 0.1380\text{GeV}^{-1}$ and $d = 0.005\text{GeV}$

State(nL)	Our($\alpha = 0.5$)	Our($\alpha = 0.99$)	[38]	[42]	[48]	[47]	[49]	[50]	Exp [46]
1S	3.141 3.243	3.141 3.411	3.095	3.078	3.096	3.078	3.096	3.096	3.096
1P	3.411 3.413 3.324 3.472	3.411 3.411 3.591 3.591	3.525	3.415	3.433	3.415	3.433	3.255	–
1D	3.591 3.695 3.787	3.591 3.591 3.591	3.986	3.749	3.767	3.752	3.770	3.504	–
2S	3.636 3.737	3.636 3.905	3.568	3.581	3.686	4.187	3.686	3.686	3.686
2P	3.905 4.035 3.818 3.966	3.905 3.905 4.085 4.085	3.997	3.917	3.910	4.143	4.023	3.779	3.773
2D	4.085 4.189 4.281	4.085 4.085 4.085	–	3.078	–	–	3.096	–	4.159
3S	4.130	4.130	4.040	4.085	3.984	5.297	4.040	4.040	4.040
4S	4.624	4.624	4.512	4.589	4.150	6.407	4.355	4.269	4.263

4 Results and Discussion

In this section, we evaluate numerically the mass spectra of heavy quarkonia, namely charmonium and bottomonium. The potential parameters are obtained from fitting the mass spectra with experimental data and are listed in Table 1. In our model, the parameter K playing the role of the strong coupling constant is of the order 0.5. This value is in agreement with measurements at TRISTAN and LEP which give a maximal value of 0.3 at $Q = 2\text{GeV}$ [45]. As shown in Table 1, for the values $K = 0.5$ and $\alpha = 0.99$ we have obtained the best fit for the parameters of the potential.

In Tables 2 and 3, the numerical values of masses are reported from 1S to 4S states for $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ systems. In our model, the energy eigenvalues obtained were real for $\alpha \geq 0.5$. Therefore, our study was restricted to the interval $[0.5; 1]$. The value $\alpha = 0.5$ is chosen because it allowed to obtain much more precise results.

In Table 2, the mass spectra of $c\bar{c}$ meson have been computed from 1S to 4S for various values of the topological defect. Then, Eq. (60) have been used to numerically evaluate the mass spectrum of charmonium in the presence of the topological defect. The constants a , b , d , g and K are calculated using Eq. (60), and the quark mass are taken from refs. [2,38,41]. The theoretical predictions of our model are compared with available experimental data and previous works, at different values of the parameter of the cosmic string. The degeneracy breaking occurs when $0 < \alpha < 1$.

The results provided by our model are found to be acceptable in comparison with experimental data [46], and are improved in comparison with previous works [38,42,47] for 1S, [47] for 2S, [38,42,47–49] for 2P, [42,49] for 2D, [42,47,48] for 3S and [42,47] for 4S. Meanwhile, our results are very close to those from ref. [50] for 1P and 1D. The effect of the gravitational field of the topological defect plays a significant role in this research when $0 < \alpha \leq 1$. The presence of the topological induces a splitting in the mass spectrum of $c\bar{c}$ meson in the sense that it breaks the degeneracy in nP and nD states, degeneracy that does not appear in previous works.

Table 3 Mass spectra of bottomonium (in GeV). The quark masses used $m_b = 4.823\text{GeV}$, the potential parameters $a = 0.2566\text{GeV}^2$, $b = 0.0150\text{GeV}^3$, $g = 0.1043\text{GeV}^{-1}$ and $d = 0.079\text{GeV}$

$State(nL)$	Our($\alpha = 0.5$)	Our($\alpha = 0.99$)	[38]	[52]	[42]	[48]	[47]	[50]	Exp [51]
1S	9.551 9.622	9.551 9.749	9.460	9.510	9.460	9.460	9.510	9.460	9.460
1P	9.749 9.853 9.681 9.797	9.749 9.749 9.893 9.893	9.805	9.862	9.811	9.840	9.862	9.619	–
1D	9.893 9.979 10.056	9.893 9.893 9.893	10.232	10.214	10.161	10.140	10.214	9.864	–
2S	9.983 10.052	9.983 10.180	9.899	10.038	10.023	10.023	10.627	10.023	10.023
2P	10.180 10.284 10.112 10.228	10.180 10.180 10.324 10.324	10.260	10.396	10.374	10.160	10.944	10.114	–
2D	10.324 10.410 10.487	10.324 10.324 10.324	–	–	–	–	–	–	–
3S	10.413	10.413	10.355	10.566	10.355	10.280	11.726	10.355	10.355
4S	10.845	10.845	10.811	11.094	10.655	10.420	12.834	10.567	10.580

Table 4 Normalization factors and radial probability densities at the origin for 1S, 2S and 3S levels of $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons

States	$c\bar{c}$		$b\bar{b}$	
	N_{nl}	$ R_{nl}(0) ^2$	N_{nl}	$ R_{nl}(0) ^2$
1S	0.95117	0.90472	0.04194	0.00175
2S	0.46676	0.21786	0.03474	0.00120
3S	0.26829	0.07197	0.01205	0.00014

In Table 3, the numerical results of bottomonium mass spectra are reported from 1S to 4S for different values of the topological defect α . The potential parameters for bottomonium are calculated using Eq. (60), and the quarks mass are taken from refs. [2,38,41]. As in the case of charmonium meson, the degeneracy breaking in nP and nD states of bottomonium meson occurs when $0 < \alpha < 1$. We note that our results are very close to experimental data [51] especially when $\alpha = 0.5$ and improved in comparison with [47,52] for 1S, [38] for 2S, [47,48] for 3S and [38,47,52] for 4S. Meanwhile, there are not available experimental data for 1P, 1D and 2P levels. The results provided by our model are close with previous works, namely [50] for 1P and 1D, then [38,42,47,48,50,52] for 2P. For $0 < \alpha < 1$ the energy spectrum exhibit a splitting from the usual Minkowski levels into $2l + 1$ components. Moreover, when $\alpha \rightarrow 1$, we obtain the results of the usual flat Minkowski space-time in spherical coordinates. As for charmonium, the observed splitting in bottomonium spectra is due to the conical geometry induced by the topological defect.

The radial probability densities at the origin and normalization constants of each state of $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons are reported in Table 4. The square of the wave functions at the origin were calculated as well as the normalization factors.

The effect of the topological defect on the mass spectra is displayed in Figs. 1, 2, and 3. It can be observed that for small values of the cosmic string parameter α , the mass spectra of P -states are shifted from the usual Minkowski levels, and for large values of α ($\alpha \rightarrow 1$) the degeneracy is restored in any P-state of charmonium and bottomonium mesons.

In Fig. 1, it can be observed that for $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons, the levels are shifted from the Minkowski levels with $m_l = +1$. The splitting increases as α decreases, then the degenerated levels appear as $\alpha \rightarrow 1$. In Fig. 2, the situation where $m_l = 0$ is considered. We note that the system is not sensitive to the gravitational field of the topological defect, and then no splitting is observed. The degeneracy of the states is restored. This is similar to the curve obtained in ref. [38] for $\gamma = 0$. In Fig. 3, the case where $m_l = -1$ is considered for $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons. We notice that the levels are shifted only for small values of α ; the degeneracy is not seen for large

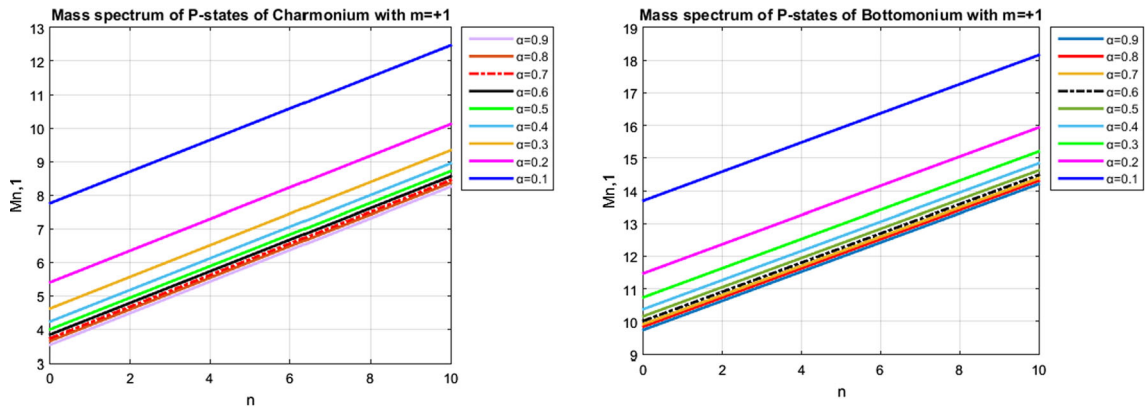


Fig. 1 The mass spectra (in GeV) of $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons as a function of the quantum number n at different values of α for $m_l = +1$

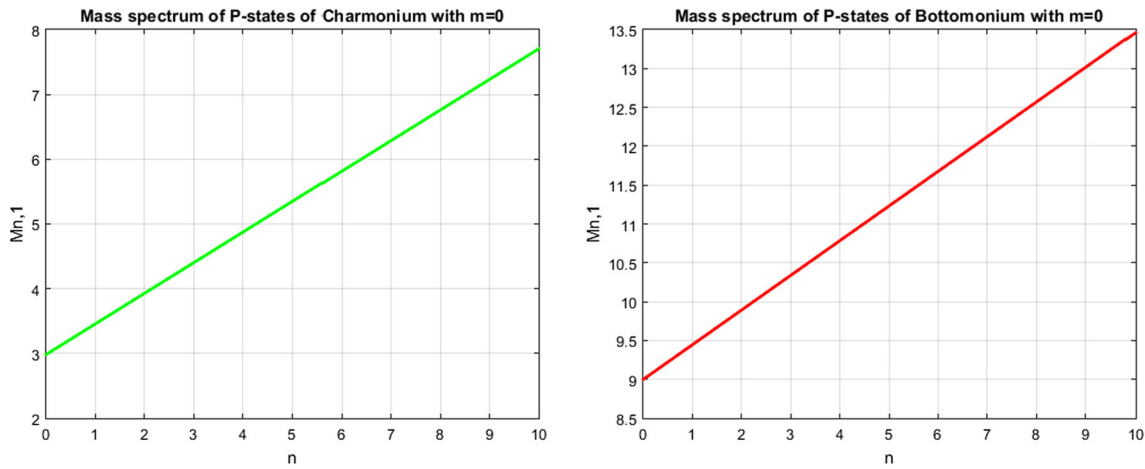


Fig. 2 The mass spectra (in GeV) of $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons as a function of the quantum number n at different values of α for $m_l = 0$

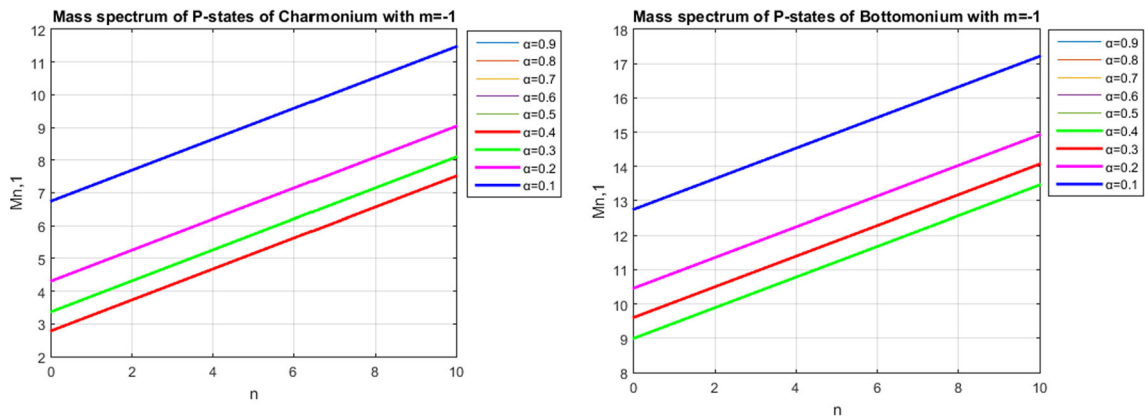


Fig. 3 The mass spectra (in GeV) of $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons as a function of the quantum number n at different values of α for $m_l = -1$

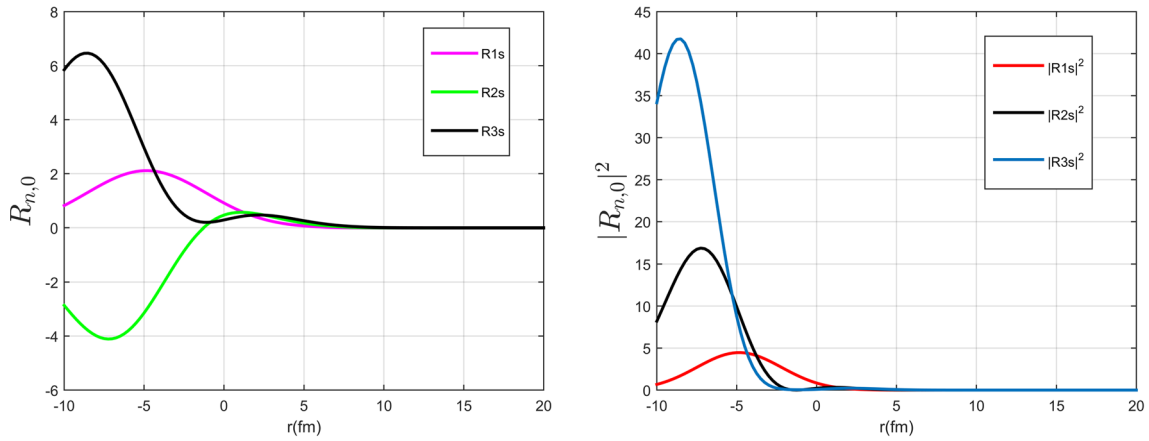


Fig. 4 Radial wave function and radial probability density of $c\bar{c}$ meson for $l = 0, n = 1, 2, 3$

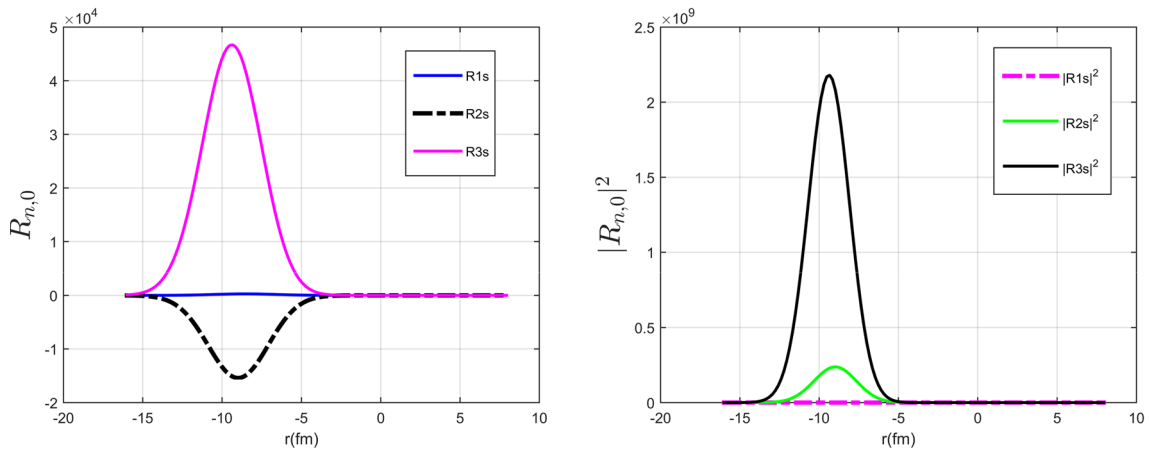


Fig. 5 Radial wave function and radial probability density of $b\bar{b}$ meson for $l = 0, n = 1, 2, 3$

values of α . Some levels do not appear because of complex eigen energies generated by the negative sign of m_l .

In Figs. 4 and 5, the variations of radial wave functions and radial probability densities with the radial coordinate are presented for each mesons. We have considered states with $l = 0$ and $n = 1, 2, 3$ namely $1S, 2S$ and $3S$ states. Figure 4 illustrates the behavior of the wave function against the radial coordinate for $c\bar{c}$ meson and Fig. 5 for $b\bar{b}$ meson. Then, variations of the interaction potential $V(r)$ against the interquark separation r is displayed in Fig. 6.

The obtained results show that the energy eigen values given by Eq. (62) are shifted in comparison with that of the flat Minkowski space-time [38]. As illustrated in Tables 2 and 3 and Figs. 1, 2 and 3, we can observe that the shifts are closely connected to the space-time conical geometry which is generated by the presence of the topological defect [20, 21, 23, 24]. Moreover, it appears that the gravitational field of the topological defect acts on the mass spectra of heavy quarkonia like the Zeeman effect due to the magnetic field [53, 54], that splits the energy level into $(2l + 1)$ components [55], l being the orbital angular momentum quantum number.

However, it is quite important to mention here that these effects due to gravitational field were not considered in past studies in heavy quarkonia spectra. In refs. [38, 42, 47, 50, 52] $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ mesons are studied, then [51, 56–59] studied the mass spectra of $b\bar{c}$ meson and [52, 56] for $c\bar{s}$ meson. In ref. [1], heavy-light mesons spectra and decay constants are investigated using the asymptotic iteration method in the framework of conformable fractional calculus. In all the past studies, none of them has ever investigated the effect of a topological defect on the mass spectra of heavy quarkonia. The degeneracy breaking induced by the cosmic string on the orbital quantum number imposes that the spin average mass and decay rates would be influenced by the conical geometry. The symmetry breaking caused by the topological defect could also modify the electromagnetic transitions rates. However, we focused the present work on the study of the effects of the gravitational field

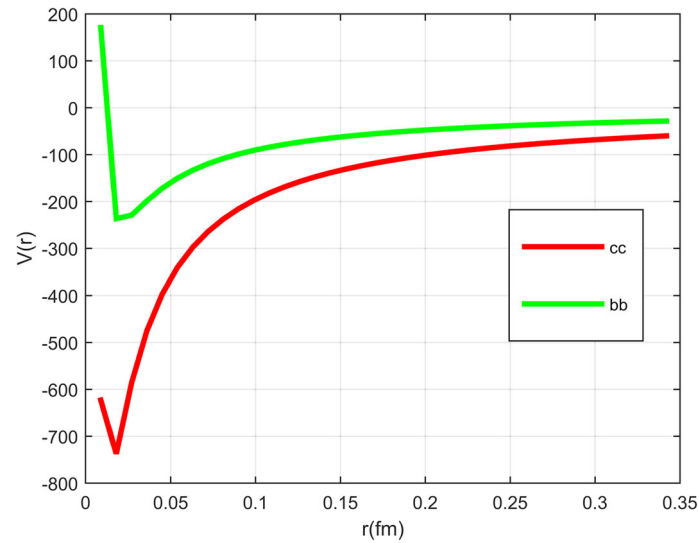


Fig. 6 variation of extended Cornell potential (in GeV) for $c\bar{c}$, $b\bar{b}$ systems. Parameters are taken from Table 1

of a topological defect on the mass spectra of charmonium and bottomonium mesons. The study of radiative transitions could not be considered within the framework of this study because the relativistic corrections due to spin-dependent forces is not taken into account here. This idea could be developed in a future work on effect of gravity of a topological defect on electromagnetic transitions of heavy quarkonia.

5 Conclusion

The present work was devoted to the study of effects caused by the gravitational field of a topological defect on mass spectra of heavy quarkonia in a non-relativistic quark model. We started by introducing the concept of topological defect, then we presented heavy quarkonia in cosmic-string background. The Schrödinger equation was formulated within the later space-time then solved analytically using the extended Nikiforov–Uvarov (ENU) method. Next, energy eigenvalues were obtained, and the wave function of each quarkonium was derived using the well known bi-confluent Heun functions. It was observed that, for small values of α , a splitting is observed between the states which are separated in $2l + 1$ components. As a result, in the limit $\alpha \rightarrow 1$, the mass spectra of heavy quarkonia for the usual Minkowski space-time, were obtained and found in good agreement with experimental data. Moreover, it was observed that for small values of the cosmic string parameter α , the mass spectra of P -states are shifted from the usual Minkowski levels, and for large values of α ($\alpha \rightarrow 1$) the degeneracy is restored in any P -state of charmonium and bottomonium mesons. We note that our results are very close to experimental data [51] especially when $\alpha = 0.5$ and improved in comparison with previous studies. In addition, considering each particle, we have the radial probability densities of the fundamental level, the first and the second excited S -states, were plotted against the interquark separation r . To this end, this work could be considered as a proof that the gravitational field of a topological defect shifts the energy levels like the Zeeman effect due to the magnetic field.

Author Contributions A. Atangana Likéné made all the calculations of the manuscript, A. Atangana Likéné and D. Nga Ongodo wrote the main text, J.M. Ema’a Ema’a prepared all the figures of the document. All authors reviewed the manuscript.

Data availability The data that support the findings of this research are available from the corresponding author upon reasonable request.

Declarations

Conflict of interest The authors declare no competing interests.

References

1. A. A. Atangana Likéné, Ali Zarma, D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie. *Eur. J. Phys.* **3**, 129–141 (2022)
2. A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. A*, **37** (35), 2250229 (2022)
3. D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **28**, 1950106 (2019)
4. C. Albertus, J. Nieves, J.M. Verde-Velasco, E. Hernandez, *Eur. Phys. J. A* **32**, 183 (2007)
5. A. Valcarce, H. Garcilazo, J. Vijande, *Phys. Rev. C* **72**, 025206 (2005)
6. D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, A.P. Martynenko, *Phys. Rev. D* **66**, 014008 (2002)
7. J.-R. Zhang, M.-Q. Huang, *Phys. Rev. D* **78**, 094015 (2008)
8. J.J. Aubert et al., *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1404 (1974). (**E598 Collaboration**;))
9. J.E. Augustin et al., *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1406 (1974). (**SLAC-SP-017 Collaboration**;))
10. Quarkonium Working Group (N. Brambilla et al.), [arXiv:hep-ph/0412158v2](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0412158v2)
11. N. Brambilla, [arXiv:1106.1051v1](https://arxiv.org/abs/1106.1051v1)
12. M.B. Voloshin, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **61**, 455 (2008)
13. C. Patrignani, T.K. Pedlar, J.L. Rosner, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **63**, 21 (2013)
14. N. Brambilla, S. Eidelman, B.K. Heltsley, R. Vogt, G.T. Bodwin, E. Eichten, A.D. Frawley, A.B. Meyer et al., *Eur. Phys. J. C* **71**, 1534 (2011)
15. A. Manohar, H. Georgi, *Nucl. Phys. B* **234**(1), 189 (1984)
16. M. Abu-Shady, and E. M. Khokha, *Adv. High Energy Phys.* **2018**, (2018)
17. J.M. Richard, P. Taxil, *Ann. of Phys.* **150**(1), 267 (1983)
18. R. Bonnaz, B. Silvestre-Brac, C. Gignoux, *Eur. Phys. J. A* **13**(3), 363 (2002)
19. M. Abu-Shady, C.O. Edet, A.N. Ikot, *Canadian. J. Phys.* **99**(11), 1024 (2021)
20. K.W.B. Kibble, *J. Phys. A?: Math. Gen.* **9**, 1387 (1976)
21. A. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1994)
22. A.-C. Davis, T.W. Kibble, *Contemp. Phys.* **46**, 313 (2005)
23. K.W.B. Kibble, *Phys. Rev. D* **26**, 435 (1982)
24. J. Rocher, thèse de Doctorat, Contraintes cosmologiques sur la physique de l'univers primordial, Université de Paris XI-Orsay, septembre 2005
25. L. Bergström and A. Goobar, *Cosmology and Particle Astrophysics*
26. H. Karayer, D. Demirhan, F. Büyükkiliç, *J. math. Phys.* **59**, 053501 (2008)
27. A. F. Nikiforov, and V. B. Uvarov : *Special functions of mathematical physics*. Birkhauser, Basel (1988). <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1595-8>
28. I. Haouam, *Int. J. Theor. Phys.* **62**(6), 111 (2023)
29. H.I. Alrebdi et al., *Phys. Scr.* **98**, 015712 (2023)
30. H. Karayer, D. Demirhan, F. Büyükkiliç, *J. math. Phys.* **56**, 063504 (2015)
31. H. Karayer, D. Demirhan, F. Büyükkiliç, *Rep. Math. Phys.* **76**, 271–281 (2015)
32. H. Karayer, D. Demirhan, F. Büyükkiliç, *J. Math. Phys.* **59**, 053501 (2018)
33. M.D. Katanaev, I.V. Volovich, *Ann. Phys.* **216**, 1–28 (1992)
34. C. Furtado, F. Moraes, *Phys. Lett. A* **188**, 394–396 (1994)
35. B. Kumar, M. Paranjape, U. Yajnik, *Phys. Rev. D* **82**, 025022 (2010)
36. Bum-Hoon. Lee et al., *Phys. Rev. D* **88**, 105008 (2013)
37. J. L. Domenech-Garret and M. A. Sanchis-Lozano, [arXiv:0805.2916](https://arxiv.org/abs/0805.2916)
38. Mod Al-Jamel, *Phys. Lett. A* **33**, 1850185 (2018)
39. Y. Cancelik, B. GönülMod, *Phys. Lett. A* **29**, 1450170 (2014)
40. E.P. Inyang et al., *Canadian. J. Phys.* **99**, 4 (2021)
41. M. Abu-Shady, T.A. Abdel-Karim, E.M. Khokha, *J. Quant. Phys.* **2**, 1000017 (2018)
42. Z. Ghalenovi, A. A. Rajabi, S. Qin and H. Rischke, *hep-Ph /14034582* (2014)
43. F. Caruso, J. Martins, V. Oguri, *Ann. Phys.* **347**, 130 (2014)
44. A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations* (Oxford University Press, New York, 1995)
45. Y. Ohnishi et al., *Phys. Lett. B* **313**, 475 (1993)
46. E.J. Eichten, C. Quigg, *Phys. Rev. D* **49**, 5845 (1994)
47. R. Kumar, F. Chand, *Comm. Theor. Phys.* **59**, 528 (2013)
48. A. Al-Jamel, H. Widyan, *Appl. Phys. Rese.* **4**, 94 (2013)
49. N.V. Maksimenko, S.M. Kuchin, *Russ. Phys. J.* **54**, 57 (2011)
50. S.M. Kuchin, N.V. Maksimenko, *Univ. J. Phys. Appl.* **7**, 295 (2013)
51. J. Beringer et al., Particle Data Group. *Phys. Rev. D* **86**, 0100011 (2012)
52. R. Kumar, F. Chand, *Phys. Scr.* **85**, 055008 (2012)
53. E. U. Condon and G.H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, (1970)
54. J.C. Slater, *Quantum Theory of Atomic Structure* (McGraw-Hill, New York, 1960)
55. A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Wiley, New York
56. M. Abu-Shady et al., *J. Egypt. Math. Soc.* **27**, 14 (2019)
57. A. Kumar Rey and P. C. VinodKumar, *J. Phys.* **66**, 958 (2006)
58. D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, *Phys. Rev. D* **67**, 014027 (2003)
59. L.I. Abou-Salem, *Int. J. Mod. Phys. A*, **20**, 4113 (2005)
60. H. Manso, A. Gamal, *Adv. High. Ener. Phys.* **7**, 7269657 (2018)

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

Springer Nature or its licensor (e.g. a society or other partner) holds exclusive rights to this article under a publishing agreement with the author(s) or other rightsholder(s); author self-archiving of the accepted manuscript version of this article is solely governed by the terms of such publishing agreement and applicable law.