

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

\*\*\*\*\*

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

\*\*\*\*\*

CENTRE DE RECHERCHE ET DE  
FORMATION DOCTORALE EN  
SCIENCES TECHNOLOGIE ET  
GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

UNITÉ DE RECHERCHE ET DE  
FORMATION DOCTORALE EN  
PHYSIQUE ET APPLICATIONS

\*\*\*\*\*

B.P. 812 YAOUNDE

Email: crfdstg@uy1.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON

\*\*\*\*\*

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

\*\*\*\*\*

POSTGRADUATE SCHOOL OF  
SCIENCE, TECHNOLOGY &  
GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

RESEARCH AND POSTGRADUATE  
TRAINING UNIT FOR PHYSICS  
AND APPLICATIONS

\*\*\*\*\*

P.O.BOX 812 YAOUNDE

Email: crfdstg@uv1.uninet.cm

Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Structures  
*Laboratory of Mechanics, Materials and Structures*

# DYNAMIQUE DE L'OSCILLATEUR SALIN SOUS EXCITATION SINUSOÏDALE ET DE BRUIT BORNÉ.

THÈSE

Soumise et défendue publiquement en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat Ph.D. en  
Physique

**SPECIALITE : MÉCANIQUE, MATERIAUX ET STRUCTURES**  
**OPTION : MÉCANIQUE ET SYSTÈMES COMPLEXES**

Par

**OWONO BEKOA David Joël**

Matricule : **13B2795**

Master 2 en Physique

Sous la supervision de

**SIEWE SIEWE Martin**

Maître de Conférences, Université de Yaoundé I



*Année 2023*



DEPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE  
DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeur NANA NBENDJO Blaise Roméo et Professeur TCHAWOUA Clément , respectivement Examineur et Président du Jury de la thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur OWONO BEKOA David Joël Matricule 13B2795, préparée sous la direction de SIEWE SIEWE Martin, Professeur Université de Yaoundé I, intitulée : « Dynamique d'un modèle de l'oscillateur salin sous excitation sinusoïdale et de bruit borné », soutenue le vendredi 24 janvier 2025, en vue de l'obtention du grade de Docteur/PhD en Physique, Spécialité Mécanique, Matériaux et Structures, option Mécanique et Systèmes Complexes, attestons que toutes les corrections demandées par le Jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le 27 FEV 2025 .....

Examineur

Pr NANA NBENDJO Blaise Roméo

Le Président du Jury

Pr TCHAWOUA Clément



Le Chef de Département de Physique

Njaka Jean-Marie Bienvenu

Professeur

**DYNAMIQUE D'UN MODELE DE  
L'OSCILLATEUR SALIN SOUS  
EXCITATION SINUSOÏDALE ET DE BRUIT  
BORNÉ**

THÈSE

Soumise et défendue publiquement pour l'obtention  
du Diplôme de Doctorat/ Ph.D en Physique  
Spécialité : Mécanique, Matériaux et Structures  
Option : Mécanique et systèmes complexes

Par

**OWONO BEKOA David Joël**

MASTER 2 en Physique,

**Matricule :13B2795**

Sous la supervision de

**SIEWE SIEWE Martin**

*Maître de Conférences*

*Université de Yaoundé I*

©UYI 2023

# Dédicace

à la mémoire du Colonel **ANYOU Jean De Dieu**

*Dont le soutien indéfectible et les encouragements m'ont permis d'effectuer ce travail.*

*J'espère que du monde qui s'en maintenant, il apprécie cet humble geste comme preuve  
de ma reconnaissance.*

# REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord l'éternel Dieu créateur de toutes choses. Pour son don de vie et l'inspiration qu'il m'a faite grâce avant et pendant la réalisation de ce travail. Il est important pour moi de remercier également tous ceux qui, de près ou de loin, ont participé à son élaboration. Mes sincères remerciements vont :

- au Professeur **SIEWE SIEWE Martin**, enseignant au Département de Physique de l'Université de Yaoundé I. En tant que mon Directeur de recherche, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Son exigence m'a grandement stimulé ;
- au Professeur **NDJAKA Jean-Marie Bienvenu**, Chef du Département de Physique de l'Université de Yaoundé I, pour son accord et ses enseignements qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail ;
- À tous les enseignants du Département de Physique de l'Université de Yaoundé I pour le savoir qu'ils nous ont inculqué depuis la première année. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance ;
- au Président du jury le Professeur **TCHAWOUA Clément**, à qui j'exprime ma profonde gratitude pour son rôle crucial dans le bon déroulement la soutenance de ma thèse de doctorat ;
- aux membres du jury notamment les professeurs **NANA NBENDJO Blaise Roméo**, **ZEKENG Serge Sylvain**, **MAHAMAT SALEH**. Je tiens à exprimer ma reconnaissance la plus sincère à chacun d'entre vous, je suis honoré de pouvoir bénéficier de vos précieux conseils.
- au Dr **FOKOU KENFACK Wilson** pour ses conseils. Sa rigueur scientifique et sa disponibilité furent déterminantes pour la qualité de ce travail ;
- à **TENGA John Pamphile**, **NGNEDJO MOUNBE Yves Cédric**, **NNOMO**

**EKASSI Emelda Leurich** amis et camarades de promotion pour leur soutien moral et intellectuel tout au long de ce travail. À ces derniers, j'ajoute tous mes camarades de promotion pour les moments inoubliables que l'on a eus à partager durant notre cursus académique ;

— à **M. ANYOU Jean De Dieu** et **Mme EDANHA Claude Madeleine Lucie épouse ANYOU** pour les ressources matérielles, l'affection, les conseils et les encouragements à mon égard. Grâce à vous ce travail a été rendu possible ;

— à **Mlle AVODO Jeanne, M. BEKOA André Blaise** et **Mme BOLO Marie Anne épouse BEKOA** grâce à vous, j'ai compris que le succès vient au bout de l'effort ;

— aux grandes familles **BEKOA, EDANHA, MBIDA** pour leur soutien durant mon parcours.

Enfin, je resterai à jamais reconnaissant envers tous ces proches, famille, amis et autres. Qui, de près comme de loin et cela malgré la distance, ont toujours su m'apporter ces petites notes de réconfort me donnant la force d'accomplir ce travail. De tout mon cœur Merci.

# Table des matières

Dédicaces	ii
Remerciements	iii
Contents	v
Liste des Figures	viii
Nomenclature	xi
résumé	xii
Abstract	xiii
introduction générale	1
<b>Chapitre 1 Revue de la littérature</b>	<b>5</b>
1.1 Généralités sur les systèmes auto-entretenus . . . . .	5
1.2 Oscillateur Salin . . . . .	9
1.2.1 Définition et description . . . . .	9
1.2.2 Perspective historique de l'oscillateur salin . . . . .	10
1.2.3 Les applications de l'oscillateur salin . . . . .	13
1.3 Synchronisation d'oscillateurs non-linéaires . . . . .	14
1.3.1 Rappel sur la synchronisation . . . . .	15
1.3.2 Etude de la synchronisation dans un réseau d'oscillateurs salins . . . . .	17
1.4 Phénomènes induits par le bruit . . . . .	19
1.5 Généralités sur le modèle de type Filippov . . . . .	22

<b>Chapitre 2 Méthodologie : modélisation mathématique, analyse et simulations</b>	<b>26</b>
2.1 Modélisation du système . . . . .	27
2.1.1 <b>Présentation du dispositif</b> . . . . .	27
2.1.2 Hypothèses mises en jeu . . . . .	28
2.1.3 Formulation Mathématique . . . . .	28
2.2 Dynamique de l'oscillateur salin sous excitation sinusoïdale et de bruit borné.	35
2.2.1 <b>Évaluation analytique de l'amplitude des oscillations pour le cas non couplé</b> . . . . .	35
2.2.2 Évaluation analytique de l'amplitude des oscillations pour le couplage de deux récipients internes . . . . .	36
2.2.3 <b>Évaluation analytique de la densité de probabilité</b> . . . . .	38
2.3 Méthodes numériques . . . . .	41
2.3.1 Algorithme Runge-Kutta 4 . . . . .	41
2.3.2 Algorithme de Runge-Kutta pour des équations stochastiques . . .	43
2.3.3 Algorithme de Newton-Raphson . . . . .	44
2.4 Conclusion . . . . .	46
<b>Chapitre 3 Résultats et discussion</b>	<b>47</b>
3.1 Dynamique et stabilité du modèle d'un oscillateur salin soumis à une excitation sinusoïdale. . . . .	48
3.1.1 Réponse du modèle de l'oscillateur salin périodiquement excité. . .	48
3.1.2 Effet de l'excitateur sinusoïdal sur la réponse du modèle. . . . .	49
3.1.3 Étude de la stabilité linéaire au sens de Lyapunov . . . . .	54
3.2 Dynamique et stabilité de deux oscillateurs salins couplés soumis à une excitation sinusoidale. . . . .	58
3.2.1 Modèle des oscillateurs salins couplés périodiquement excités. . . .	58
3.2.2 Effet de l'excitateur sinusoïdal sur la réponse du modèle couplé. . .	60
3.3 Effets du bruit sur la réponse . . . . .	63
3.4 Conclusion . . . . .	66
<b>Conclusion Général et perspectives</b>	<b>68</b>

Bibliographie	71
Publication internationale	81

# Liste des figures

<b>Figure 1.1</b>	(a) Oscillateur salin (b) mouvement rythmique de l'oscillateur salin [50] . . . . .	11
<b>Figure 1.2</b>	Synoptique de la synchronisation de type maître-esclave[104]. . . . .	16
<b>Figure 1.3</b>	dispositif global de couplage de 36 oscillateurs salins [45] . . . . .	18
<b>Figure 1.4</b>	Schéma de principe du régime glissant selon une coupe de l'espace d'état. . . . .	24
<b>Figure 2.1</b>	Schéma des oscillateurs salins couplés périodiquement excités. . . . .	27
<b>Figure 2.2</b>	Forme de l'orifice du fond du récipient interne. . . . .	29
<b>Figure 3.1</b>	Évolution temporelle de la surface de l'eau salée. . . . .	48
<b>Figure 3.2</b>	Diagramme de l'espace de phase. . . . .	49
<b>Figure 3.3</b>	Évolutions temporelles en couleur rouge de l'oscillateur pour différentes valeurs du volume d'excitation et pour une fréquence d'excitation de $\Omega = \frac{2\pi}{40}$ . (a) oscillation de période $3T$ pour $V_0 = 2 \text{ cm}^3$ , (b) oscillation de période $2T$ pour $V_0 = 3.2 \text{ cm}^3$ et (c) oscillation de période $T$ pour $V_0 = 5 \text{ cm}^3$ . Les courbes en couleur noire donnent l'allure de l'excitation. . . . .	50
<b>Figure 3.4</b>	Évolutions temporelles de l'oscillateur pour différentes valeurs du volume d'excitation et pour une fréquence d'excitation de $\Omega = \frac{2\pi}{25}$ . (a) oscillation de période $7T$ pour $V_0 = 0.5 \text{ cm}^3$ , (b) oscillation de période $3T$ pour $V_0 = 5 \text{ cm}^3$ et (c) oscillation de période $T$ pour $V_0 = 10 \text{ cm}^3$ . . . . .	51
<b>Figure 3.5</b>	Variation de l'amplitude de l'oscillateur en fonction du volume d'excitation pour des fréquences $\Omega = \frac{2\pi}{40}$ et $\Omega = \frac{2\pi}{25}$ . . . . .	51

<b>Figure 3.6</b>	Concordance entre les résultats numériques (courbes continues) et les résultats analytiques (courbes de carrés) pour deux fréquences $\Omega = \frac{2\pi}{25}$ et $\Omega = \frac{2\pi}{40}$ .	52
<b>Figure 3.7</b>	Variation de l'amplitude de l'oscillateur en fonction de la fréquence de l'excitateur.	53
<b>Figure 3.8</b>	Dépendance de l'amplitude de l'oscillateur à l'égard du rayon $a$ et de la profondeur $d$ de l'orifice.	53
<b>Figure 3.9</b>	Variation du plus grand exposant de Lyapunov en fonction du volume et de la fréquence de l'excitateur.	55
<b>Figure 3.10</b>	Diagrammes de bifurcation.	56
<b>Figure 3.11</b>	Évolutions temporelles de la position de la surface libre pour différentes conditions initiales. Bleu : $(x_0, \dot{x}_0) = (-0.4, -0.000001)$ , vert : $(x_0, \dot{x}_0) = (-0.25, -0.000001)$ , rouge : $(x_0, \dot{x}_0) = (0.0, -0.000001)$	57
<b>Figure 3.12</b>	Variation du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de $a$ et $b$ .	58
<b>Figure 3.13</b>	Évolution temporelle de la position de la surface libre de chaque solution salée dans son récipient interne.	59
<b>Figure 3.14</b>	Évolution temporelle de la position de la surface libre de chaque solution salée dans son récipient interne.	60
<b>Figure 3.15</b>	Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction de la fréquence de l'excitateur.	61
<b>Figure 3.16</b>	Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction de la valeur du volume d'excitateur.	62
<b>Figure 3.17</b>	Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction du rayon des orifices.	62
<b>Figure 3.18</b>	Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction du rayon des recipients.	63
<b>Figure 3.19</b>	Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction du rapport des surfaces libres internes.	64

---

**Figure 3.20** Évolution temporelle de la vitesse de la surface libre de la solution salée dans son récipient interne  $\Omega = 1.25Hz$ . . . . . 65

**Figure 3.21** Fonction densité de probabilité en fonction de l'amplitude des oscillations. . . . . 65

**Figure 3.22** Fonction de densité de probabilité pour la position  $x$ . Ces courbes résultent de simulations. Les paramètres du système restent inchangés. . . . . 66

# NOMENCLATURE

- $\tau$  : temps ( $s$ ).
  - $a$  : rayon de l'orifice ( $cm$ ).
  - $d$  : profondeur de l'orifice ( $cm$ ).
  - $V$  : volume de l'orifice ( $cm^3$ ).
  - $b$  : rayon du récipient interne contenant initialement la solution salée ( $cm$ ).
  - $c$  : rayon du grand récipient contenant initialement l'eau pure ( $cm$ ).
  - $h_w$  : hauteur courante de l'eau pure dans le grand récipient ( $cm$ ).
  - $h_s$  : hauteur initiale de la solution salée dans le récipient interne ( $cm$ ).
  - $g$  : constante gravitationnelle ( $cm.s^{-2}$ ).
  - $r_0$  : épaisseur du récipient interne ( $cm$ ).
  - $V_0$  : volume d'eau pure injecté et retiré du grand récipient ( $cm^3$ ).
  - $S_i$  : aire de la surface libre de la solution salée contenue dans le  $i^{ieme}$  récipient interne ( $cm^2$ ).
  - $S_0$  : aire de la surface libre de l'eau pure ( $cm^2$ ).
  - $\rho_s$  : masse volumique de la solution salée ( $g.cm^{-3}$ ).
  - $\rho_w$  : masse volumique de l'eau pure ( $g.cm^{-3}$ ).
  - $\nu_s$  : viscosité cinématique de la solution salée ( $cm^2.s^{-1}$ ).
  - $\nu_w$  : viscosité cinématique de l'eau pure ( $cm^2.s^{-1}$ ).
  - $\Omega$  : fréquence de l'excitateur ( $Hz$ ).
  - $P$  : Pression ( $N.cm^{-2}$ ).
  - $\beta$  : coefficient d'ajustement de la dimension de la perte de pression ( $s^{-1}$ ).
  - $\gamma$  : coefficient d'ajustement de la dimension de la perte de pression ( $cm^{-2}.s$ ).
  - $\omega$  : vitesse d'écoulement du fluide dans l'orifice ( $cm.s^{-1}$ ).
-

# RÉSUMÉ

Les travaux de cette thèse s'articulent autour de l'oscillateur salin en présence d'une perturbation sinusoïdale et de bruit borné. Pour cela, l'oscillateur est modélisé en utilisant un système différentiel de type Filippov. Nous étudions la dynamique et la stabilité du système unique ainsi que la synchronisation dans le cas couplé. La réponse du modèle est évaluée ainsi que l'effet des paramètres de la perturbation, notamment son amplitude et sa fréquence sur la réponse du modèle. Il en ressort que l'amplitude de l'excitateur détermine considérablement l'amplitude de la réponse du système tout en influençant le mode de synchronisation unidirectionnel observé. Par des simulations numériques, nous constatons que sur une large gamme de paramètres d'excitation, l'oscillateur présente une période  $T$  d'oscillation dont l'amplitude augmente avec l'amplitude de l'excitateur. Le modèle présente principalement des oscillations sous harmoniques et quasi-harmoniques, celles-ci en fonction des valeurs du volume et de la fréquence d'excitation. La méthode de la balance des harmoniques est ensuite utilisée pour vérifier l'allure de la dépendance de l'amplitude à l'égard des paramètres de la perturbation. En utilisant l'évaluation du plus grand exposant de Lyapunov, nous étudions la stabilité pour déterminer dans quel régime de paramètres aurait-on un comportement chaotique. Il en ressort que l'oscillateur salin périodiquement excité présente dans le régime de paramètres admissibles des oscillations régulières. Au moyen de la méthode de la moyenne stochastique et des simulations de Monté-Carlo, la réponse probabiliste de l'oscillateur sous excitation de bruit borné est déterminée. Nous avons établi les équations de Fokker-Planck-Kolmogorov et l'expression de la fonction densité de probabilité du système. Cependant, nous constatons que l'excitation de bruit borné affecte la période d'oscillation, le point médian et l'amplitude.

**Mots clés :** oscillateur salin ; perturbation sinusoïdale bruitée ; méthode de la balance des harmoniques ; méthode de la moyenne stochastique.

# ABSTRACT

The work in this thesis is based on the saline oscillator in the presence of a harmonic and bounded noise excitation. For this purpose, the system is modeled by a differential system of the Filippov type. We study the dynamics and stability of the single system as well as the synchronisation in the coupled case. The response of the model is evaluated as well as the effect of the parameters of the excitation, namely its amplitude and frequency, on the response of the model. It is found that the amplitude of the exciter significantly determines the amplitude of the system response, while influencing the observed unidirectional synchronisation mode. Through numerical simulations, we find that over a wide range of excitation parameters, the oscillator exhibits a period  $T$  of oscillation whose amplitude increases with the amplitude of the exciter. Furthermore, the model shows mainly sub-harmonic and quasi-harmonic oscillations, these depending on the values of the excitation amplitude and frequency. The harmonic balance method is then used to check the shape of the amplitude dependence on the excitation parameters. A study of the stability of the oscillatory mode is then considered using the evaluation of the largest Lyapunov exponent in order to determine in which parameter regime chaotic behaviour would occur. It is found that the periodically excited salt oscillator exhibits regular oscillations in the admissible parameter regime. Using the stochastic averaging method and Monte Carlo simulations, the probabilistic response of the oscillator under bounded noise excitation is determined. The Fokker-Planck-Kolmogorov equations are established, so the statistical response at steady state is a probability density. We find that bounded noise excitation affects the oscillation period, midpoint and amplitude.

**Keywords :** Saline oscillator ; noisy sinusoidal excitation ; harmonic balance method ; stochastic mean method.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les oscillateurs excités périodiquement sont des systèmes physiques qui présentent des oscillations régulières en réponse à une force extérieure périodique. Bien que les oscillateurs linéaires soient bien compris, les oscillateurs non linéaires excités périodiquement présentent un comportement dynamique complexe et fascinant. Ces systèmes sont présents dans de nombreux domaines tels que l'électronique, la mécanique, la chimie et la biologie [1-7]. La littérature a largement exploré la modélisation de ces systèmes, notamment en utilisant des termes de forçage périodique [1,2,4,5,8] et/ou de bruit [9-20] pour étudier l'interaction de ces systèmes avec leur environnement. De nos jours, la réponse des systèmes dynamiques aux excitations aléatoires ou du bruit attire de plus en plus l'attention d'un large public, tout simplement parce que le bruit est omniprésent dans la vie de tous les jours. Depuis lors, beaucoup de progrès ont été réalisés dans ce domaine encore appelé dynamique stochastique, conduisant à des applications modernes dans divers domaines scientifiques. Les effets du bruit peuvent offrir des explications pour certains problèmes tels que la transmission des informations dans le système nerveux, le traitement de l'information au niveau cellulaire et moléculaire [21,22]. La préoccupation principale concerne les effets du bruit sur la dynamique du système auquel il perturbe. Ces perturbations peuvent conduire à un mouvement imprévisible, il est donc d'un grand intérêt d'analyser l'effet induit par ce dernier. Les effets induits par le bruit dans les systèmes dynamiques peuvent inclure la réduction de la stabilité et de la précision des oscillations, l'augmentation de la complexité et de la variabilité des comportements, la perturbation des synchronisations et des interactions entre les composants du système, ainsi que l'induction de transition entre différents états dynamiques. Certains de ces comportements induits par le bruit ont été appelés stabilité accrue par le bruit [24-26], formation de motifs induits par le bruit [27-29] et résonance stochastique [30-32].

Mathématiquement, le bruit est considéré comme un processus stochastique représenté par une variable aléatoire [33-34]. Ce processus possède un spectre continu dont la densité spectrale de puissance varie avec la fréquence de la bande de fréquences considérée. La terminologie de "couleurs" attribuée au bruit est liée à sa densité spectrale. Par exemple, on parle de bruit coloré lorsque la densité spectrale de puissance du bruit n'est pas uniforme sur l'ensemble du spectre de fréquences. Par conséquent, il existe plusieurs dénominations, à savoir : le bruit blanc [35], le bruit coloré [36], le bruit rose [37] et bien d'autres. En effet, dans le monde réel, il est difficile de modéliser toutes les interactions d'un système avec son environnement de manière déterministe. Les chercheurs ont donc fait recours à plusieurs modèles de fluctuations aléatoires pour rendre compte des interactions stochastiques du système avec son environnement. La réponse des systèmes dynamiques soumis à une excitation aléatoire a été largement étudiée dans la littérature [38, 39]. La situation dans laquelle un signal périodique perturbe un seul oscillateur, appelée couplage unidirectionnel [40], a été étudiée dans un système présentant de curieuses oscillations hydrodynamiques appelé oscillateur salin.

Ce système, découvert il y a quatre décennies [41], a jusqu'à présent été étudié à la fois expérimentalement et théoriquement dans la littérature et plusieurs articles lui ont été consacrés [40-56]. Certains de ces travaux ont été consacrés à la modélisation de ce curieux oscillateur. Notons que l'étude d'un système suppose l'établissement préalable d'un modèle mathématique suffisamment réaliste et précis. Ainsi, Une équation de Rayleigh a été utilisée comme modèle d'oscillateur salin par plusieurs chercheurs, car elle semble reproduire la tendance oscillatoire observée expérimentalement, bien qu'elle ne rende pas compte du changement alternatif de la nature du fluide au sein de l'orifice. Récemment, Kenfack et autres [42] ont affiné le modèle d'oscillateur salin d'Okamura en une équation différentielle non lisse de type Rayleigh qui prend en compte le changement alterné de la nature du fluide au sein de l'orifice et la différence entre les durées des flux descendants et ascendants, observée expérimentalement lorsque la solution salée est plus visqueuse que l'eau pure [42]. Ils ont également modélisé des oscillateurs salins couplés globalement et étudié leurs comportements de synchronisation. Il a été constaté que le modèle reproduisait les caractéristiques des oscillateurs non linéaires telles qu'un cycle limite, la bifurcation du mode oscillatoire ainsi que la synchronisation dans le cas couplé [47]. En effet, le modèle

d'oscillateur salin libre ne présente des oscillations périodiques que pour des ensembles appropriés de ses paramètres. Ce sont des oscillations de relaxations, ainsi nommées par Van der Pol [58]. L'oscillateur salin libre subit une bifurcation d'Hopf, car certains de ses paramètres varient [39]. En effet, des oscillations libres se produisent dans le système au-delà d'une valeur seuil du rayon de l'orifice. En dessous de cette valeur critique, le système s'installe sur un équilibre après une décharge transitoire du fluide le plus dense à l'intérieur du grand cylindre. Une observation similaire est faite lorsque la viscosité du fluide le plus dense varie. Kenfack et autres [55] montrent théoriquement que l'oscillateur salin libre peut être utilisé pour mesurer la densité d'un liquide. Kenfack et autres [39] ont pris en compte dans leur modèle des perturbations aléatoires environnementales sous la forme d'un bruit Gaussien blanc additif. Par des simulations numériques, ils ont étudié les effets de ces perturbations bruitées sur les oscillations. L'intérêt de plusieurs chercheurs à étudier des systèmes aussi simples que l'oscillateur de densité est d'obtenir une vue d'ensemble de systèmes biologiques plus complexes.

Les motivations derrière notre thème sont multiples. Tout d'abord, il s'agit de mieux comprendre les mécanismes sous-jacents qui gouvernent le comportement de ce système oscillant non linéaire en présence d'une perturbation extérieure. Ensuite, de développer des modèles plus précis et des méthodes de contrôle plus efficaces pour les systèmes oscillants réels. Face à ces motivations, la problématique qui se pose est de savoir : comment se caractérise la dynamique d'un oscillateur salin soumis à une excitation sinusoïdale et de bruit borné, et comment en tirer des conclusions utiles pour la modélisation et le contrôle des systèmes oscillants dans des conditions réelles ? Notre préoccupation ici, qui est un intérêt fondamental, est d'améliorer le modèle de Filippov établi dans la littérature, ensuite de rechercher des comportements plus riches en appliquant d'une part une excitation sinusoïdale et d'autre part une excitation à bruit borné. Nous visons à déterminer les effets de l'excitation sinusoïdale d'une part et l'excitation sinusoïdale de bruit borné d'autre part sur la dynamique du modèle établi. Notons que l'excitation du système se fera par un ajout et un retrait de l'eau pure dans le grand récipient selon une loi sinusoïdale du temps. Le choix du modèle de type Filippov est dû au fait qu'il permet d'établir une équation qui décrit le mouvement de la surface libre du récipient interne tout en respectant le changement alterné de la nature du fluide dans l'orifice du récipient interne pour

le cas non couplé. Pour atteindre nos objectifs, il s'agira pour nous :

- de dériver un nouveau modèle d'oscillateur salin périodiquement perturbé qui néglige le temps d'inversion du sens d'écoulement tout en prenant en compte le changement de la nature du fluide dans l'orifice d'écoulement pour les cas d'oscillateur couplé et non couplé ;
- d'étudier la dynamique et le comportement de synchronisation du modèle établi ;
- d'étudier la stabilité du modèle excité dérivé du point de vue de Lyapunov en évaluant le comportement de son plus grand exposant ;
- d'étudier le comportement de la densité de probabilité en présence du bruit borné ;
- d'étudier la stabilité du modèle excité en présence du bruit du point de vue de Lyapunov en évaluant le comportement de son plus grand exposant pour le cas couplé, en occurrence deux récipients internes.

La thèse est organisée comme suit : Le chapitre 1 intitulé revue de la littérature. Dans cette partie, nous faisons un rappel sur les domaines d'intérêt ainsi que les travaux qui ont été effectués là-dessus. Le chapitre 2 intitulé modélisation et méthodologie, est dédié à la modélisation d'un oscillateur salin et d'un système d'oscillateurs salins couplés périodiquement excités, Ainsi que les méthodes utilisées. Il s'agit de modifier le modèle introduit par Kenfack et autres [39,42,55] pour tenir compte de l'excitation. Ensuite, la méthode de la balance des harmoniques ainsi que la méthode de la moyenne stochastique sont développées et appliquées au modèle pour déterminer respectivement les réponses harmoniques et probabilistes. Les méthodes numériques utilisées dans ce travail sont ensuite présentées. Le chapitre 3 intitulé résultats et discussion, est consacré à la présentation et à la discussion des résultats obtenus dans cette thèse. Ainsi, ce travail s'achèvera par une conclusion générale où les principaux résultats obtenus seront résumés et les perspectives des recherches futures seront suggérées.

# Chapitre 1

## REVUE DE LA LITTÉRATURE

### Introduction

Les systèmes auto-entretenus sont des systèmes dynamiques qui présentent des comportements oscillatoires sans nécessiter une entrée externe. Ces systèmes sont souvent étudiés pour leur capacité à se synchroniser avec d'autres systèmes similaires, ce qui peut avoir des applications dans des domaines tels que la communication sans fil et la biologie. L'oscillateur salin est un exemple de système auto-entretenu couramment étudié en raison de sa simplicité et de son utilisation dans l'étude de la dynamique des fluides présentant une différence de densité. Le modèle de type Filippov est une approche pratique pour modéliser des systèmes non linéaires avec des discontinuités, telles que celles observées dans les systèmes auto-entretenus. Enfin, le phénomène induit par le bruit est également un aspect important de l'étude des systèmes auto-entretenus, car il peut influencer leur comportement et leur synchronisation. Cette revue de la littérature examine les généralités des systèmes auto-entretenus, en mettant l'accent sur l'oscillateur salin, la synchronisation, le phénomène induit par le bruit et le modèle de type Filippov.

### 1.1 Généralités sur les systèmes auto-entretenus

Les oscillations de relaxation sont communément associées au nom de Balthasar Van Der Pol [62], via son article paru en 1926 portant sur l'étude des générateurs électroniques [57], dans lequel il a introduit cette terminologie pour décrire les oscillations

non linéaires produites par des systèmes oscillants auto-entretenus tels qu'une triode. Bien avant les travaux de Van der Pol, Plusieurs systèmes auto-oscillants dans lesquels ces oscillations de relaxation se manifestaient ont été observés. Notamment la machine à dynamo conçue par Gérard-Lescuyer en 1880, l'arc musical découvert par Duddel en 1901. En 1893, Le physicien ingénieur français André Blondel inventa l'oscillographe bifilaire permettant de visualiser les tensions et les courants variables. À l'aide de ce puissant moyen d'investigation, il entreprend tout d'abord le phénomène de l'arc électrique, alors utilisé pour l'éclairage côtier et urbain, puis l'arc chantant employé comme émetteur d'ondes radio-électriques en T.S.F (Télégraphie sans fil). En 1905, il met en évidence un nouveau type d'oscillateurs non sinusoïdaux au sein de l'arc chantant. Vingt ans plus tard, Balthasar Van der Pol reconnaîtra qu'il s'agissait en réalité des oscillations de relaxation. Le physicien soviétique Aleksandr Andronov [63] apporta une grande contribution à la théorie des oscillations environ vingt ans après la découverte de Van der Pol. Il a remarqué que les oscillations périodiques des générateurs électroniques étudiés par van der Pol présentaient les cycles limites de Poincaré [64]. Il a qualifié d'oscillations automatiques les oscillations non amorties de certains systèmes autonomes, tels que les générateurs électriques de Van der Pol, qui sont générés et entretenus par une source d'énergie dépourvue de toute périodicité correspondante. Il a également montré que l'orbite de l'auto-oscillation était attirée par un cycle limite stable dans l'espace de phase, ce qui indiquait que le comportement dynamique du système auto-oscillatoire ne dépendait pas de la condition initiale mais de la propriété du système lui-même. Plus tard, Landa [65] a légèrement modifié la définition de l'auto-oscillation. Selon lui, un système auto-oscillatoire n'est pas nécessairement autonome. On appelle généralement "auto-oscillation" une oscillation non amortie prenant l'énergie d'une source telle que le spectre de fréquences de l'oscillation soit indépendant (ou faiblement dépendant) de celui de la source d'énergie. Les auto-oscillateurs sont donc distincts des oscillateurs forcés, dans lesquels les oscillations sont commandées et accordées par une force externe.

La particularité des oscillateurs auto-entretenus est que leurs caractéristiques (amplitude, fréquence, forme d'onde, etc.) ne dépendent pas des propriétés qui sont liées à une source d'énergie externe et ne tiennent pas compte d'une légère variation des conditions initiales [66]. Ils sont utilisés pour modéliser plusieurs systèmes notamment : les oscillations

biologiques telles que le battement de cœur ou les rythmes quotidiens de la température corporelle humaine et de la sécrétion hormonale, des oscillations chimiques spontanées [72], des oscillations démographiques telles que l'étude de la dynamique des modèles de population d'insectes pour plusieurs espèces et sur leur application [73]. Depuis sa découverte, l'oscillateur Van der Pol qui sert de prototype de l'oscillateur auto-entretenu a été utilisé pour modéliser plusieurs applications et son étude révèle différentes propriétés. Les propriétés d'un oscillateur auto-entretenu sont : la dissipation, la stabilité et la non-linéarité.

La dissipation dans un système non linéaire est un phénomène que l'on observe lorsque l'énergie de ce système est transformée sous forme de chaleur ou en rayonnement, réduisant ainsi son amplitude. L'effet de dissipation dans les systèmes non linéaires a été étudié pour comprendre comment les pertes d'énergie peuvent affecter le comportement dynamique de ces systèmes. La dissipation peut provenir de divers mécanismes tels que la friction, la viscosité ou la résistance électrique. Ainsi, la compréhension de l'effet de la dissipation dans les systèmes non linéaires est donc essentielle pour optimiser les performances et concevoir des systèmes plus efficaces. Des études théoriques et expérimentales ont été menées pour analyser l'effet de la dissipation sur différents types de systèmes non linéaires tels que les oscillateurs, les circuits électroniques et les systèmes biologiques[116,117]. La modélisation de la dissipation dans un système non linéaire nécessite de prendre en considération les principaux mécanismes de dissipation qui agissent sur le système, afin d'introduire des termes dissipatifs appropriés dans les équations qui décrivent son comportement. Par exemple, dans le cas d'un système mécanique, la dissipation peut être modélisée par l'introduction de termes de frottement dans les équations de mouvement. Ces termes de frottement peuvent dépendre de la vitesse ou de la position du système, et contribuent à la diminution de l'énergie cinétique du système au fil du temps. Dans le cas de systèmes électriques, la dissipation peut être modélisée par l'introduction de résistances dans les équations qui décrivent le comportement des circuits électriques. Ces résistances représentent la perte d'énergie sous forme de chaleur due au passage du courant électrique à travers les composants du circuit. Les systèmes macroscopiques naturels dissipent leur énergie. À moins qu'ils soient constamment alimentés en énergie, leurs oscillations diminuent jusqu'à s'arrêter. L'effet de la dissipation peut être bénéfique dans

certaines applications, car elle permet de stabiliser les oscillations et d'éviter les phénomènes indésirables tels que l'instabilité ou le chaos. Par exemple, la dissipation peut être utilisée pour contrôler les vibrations dans les structures mécaniques afin de réduire les dommages causés par les oscillations excessives [112]. Dans d'autres cas, la dissipation peut être indésirable car elle entraîne une perte d'énergie et une diminution de l'efficacité du système. Par exemple, dans les circuits électroniques, la dissipation d'énergie sous forme de chaleur peut limiter les performances et la durée de vie des composants [113].

La théorie de la stabilité joue un rôle central dans l'ingénierie des systèmes, en particulier dans le domaine des systèmes de contrôle et de l'automatisation, tant en ce qui concerne la dynamique que le contrôle. La stabilité d'un système dynamique, avec ou sans entrées de contrôle et de perturbation, est une exigence fondamentale pour sa valeur pratique, notamment dans la plupart des applications du monde réel. En gros, la stabilité signifie que les sorties du système et ses signaux internes sont limités à l'intérieur des limites admissibles (ce qu'on appelle la stabilité à l'entrée limitée/sortie limitée) ou, parfois plus strictement, que les sorties du système tendent vers un état d'équilibre d'intérêt (ce qu'on appelle la stabilité asymptotique). D'un point de vue conceptuel, il existe différents types de stabilités, parmi lesquels trois notions de base sont les principales préoccupations en matière de dynamique non linéaire et de systèmes de commande : la stabilité d'un système par rapport à ses équilibres, la stabilité orbitale d'une trajectoire de sortie du système et la stabilité structurelle d'un système lui-même.

Le concept de base de la stabilité est né de l'étude de l'état d'équilibre d'un système mécanique, qui remonte à 1644, lorsque E. Torricelli a étudié l'équilibre d'un corps rigide sous la force naturelle de la gravité. Le théorème de stabilité classique de G. Lagrange, formulé en 1788, est peut-être le résultat le plus connu sur la stabilité des systèmes mécaniques conservatifs. Il stipule que si l'énergie potentielle d'un système conservatif, actuellement à l'état d'équilibre, est supérieure à l'énergie potentielle de l'ensemble du système, la stabilité de l'ensemble du système ne sera pas compromise. L'évolution des concepts fondamentaux de stabilité des systèmes et des trajectoires a ensuite connu une longue histoire, avec de nombreux progrès et de développements fructueux, jusqu'à la célèbre thèse de doctorat de A. M. Lyapunov, the General problem of motion stability parue en 1892. Cette monographie est tellement passionnante que ses idées et ses techniques sont

à l'origine de toutes sortes de recherches fondamentales et d'applications concernant la stabilité des systèmes dynamiques. En fait, non seulement l'analyse du comportement dynamique en physique moderne, mais aussi la conception des contrôleurs dans les systèmes d'ingénierie dépendent des principes de la théorie de la stabilité de Lyapunov.

En ce qui concerne la non-linéarité, nous pouvons dire qu'un phénomène est non linéaire lorsque ses grandeurs caractéristiques reliées entre elles ne varient pas proportionnellement l'une à l'autre. Son comportement peut alors être décrit par une expression, un modèle ou des équations faisant intervenir les variables autrement qu'au premier degré. La non-linéarité dans les systèmes mécaniques se manifeste par des comportements complexes et non proportionnels, ce qui nécessite des approches spécifiques pour comprendre et modéliser leur dynamique. Les caractéristiques de la non-linéarité dans les systèmes mécaniques incluent des phénomènes tels que l'exhibition des phénomènes de bifurcation, où un petit changement dans les conditions initiales ou les paramètres peut entraîner des changements considérables dans le comportement du système. De plus, ces systèmes peuvent également présenter des comportements chaotiques, où de petites perturbations peuvent conduire à des trajectoires imprévisibles. Les systèmes mécaniques non linéaires peuvent présenter des phénomènes de résonance non linéaire, où les réponses du système à des excitations externes varient de manière non linéaire en fonction de la fréquence et de l'amplitude de l'excitation. La dissipation dans les systèmes mécaniques non linéaires peut également présenter des comportements non linéaires, tels que des effets de frottement non linéaire ou des pertes d'énergie non proportionnelles aux déformations. Dans le cas de phénomènes non-linéaires, la variation de la valeur initiale d'une des variables n'entraîne pas forcément une variation proportionnelle directement prévisible, voire totalement imprévisible ou chaotique du comportement du système.

## 1.2 Oscillateur Salin

### 1.2.1 Définition et description

L'oscillateur salin est un système dynamique non linéaire qui présente un écoulement oscillatoire d'amplitude finie de l'eau pure et d'une solution salée. Ceci lorsqu'une

solution salée contenue dans un tube droit doté d'un orifice est submergé dans un b cher contenant de l'eau pure dans certaines conditions appropriées. Ces oscillations apparaissent comme un jet d'eau salée vers le bas suivi d'un jet d'eau pure vers le haut dans l'orifice. L'écoulement dans l'orifice est de type Hagen-Poiseuille. L'oscillateur salin est constitué d'un réservoir contenant une solution salée et doté d'un orifice au fond. Ce réservoir est submergée dans un autre réservoir plus grand qui contient de l'eau pure (fig.1.1(a)). La surface et le volume du réservoir contenant de l'eau pure sont supposés plus grands que la section transversale et le volume du réservoir qui contient la solution salée. Les niveaux d'eau pure et d'eau salée sont presque identiques au début, avec la solution saline qui occupe tout l'orifice qui est initialement fermé. Dès l'ouverture de l'orifice, l'eau salée entame un écoulement descendant (fig.1.1(b)), lorsque le niveau de la surface libre de la solution salée atteint une hauteur critique  $x_{\min}$  dans son réservoir, le processus inverse se produit par un écoulement ascendant de l'eau pure (fig.1.1(b)). Ce phénomène est d u à un certain nombre d'effets, notamment :

- un effet moteur lié à la différence de pression qui tend vers l'équilibre en faisant couler vers le bas le fluide le plus lourd ;
- un effet dissipatif lié à la viscosité dans l'orifice, qui empêche l'eau pure de s'insérer dans l'orifice rempli d'eau salée et vice-versa ;
- la flottaison qui fait naître une force motrice traduisant les contrastes de densité. Son action tend à faire monter le liquide le plus léger en surface.

### 1.2.2 Perspective historique de l'oscillateur salin

En 1970, le géophysicien S. Martin menant des études portées sur les mouvements de convection océanique et sur l'instabilité associée au gradient de concentration, a observé un phénomène oscillatoire qu'il considère comme une curiosité hydrodynamique. Lorsqu'un récipient contenant une solution saline, muni d'un petit tube ayant les dimensions d'une aiguille à sa base, est placé dans un autre récipient contenant de l'eau douce, on observe des oscillations d'amplitude et de période constante qui se manifeste par un écoulement descendant de l'eau saline suivi d'un jet ascendant d'eau douce pendant une longue durée [41]. Théoriquement, il a établi un modèle d'écoulement de type Hagen-Poiseuille dépendant du temps , les oscillations peuvent être divisées en deux modes selon que

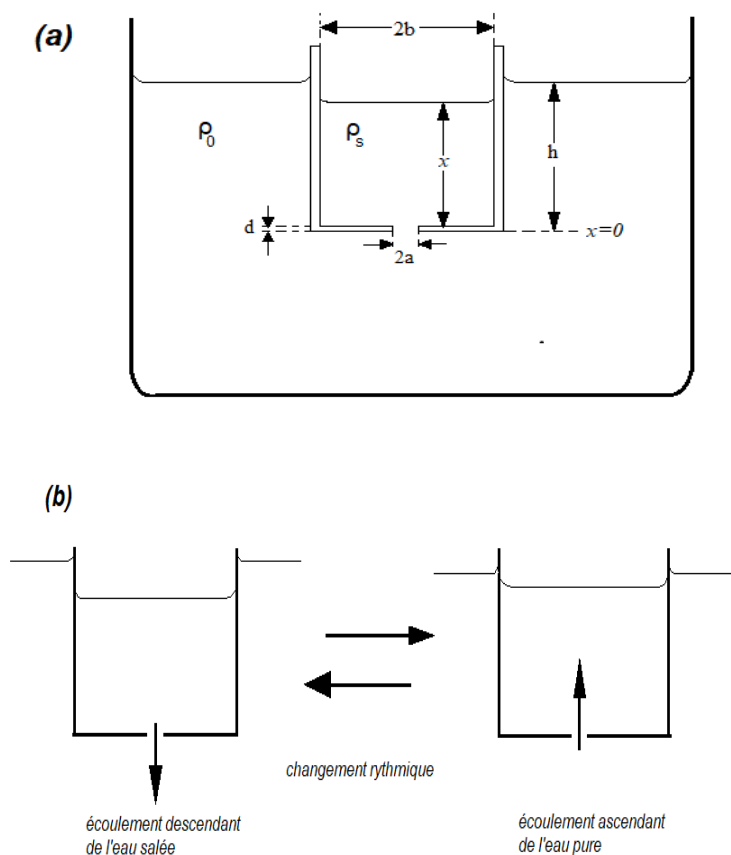


FIGURE 1.1 – (a) Oscillateur salin (b) mouvement rythmique de l’oscillateur salin [50]

l’amortissement visqueux ou non linéaire prédomine. Lorsque l’amortissement visqueux prédomine, la géométrie de la seringue détermine la période des oscillations, qui sont indépendantes de la différence de densité  $\Delta\rho$ , sauf que la viscosité varie avec la densité. Lorsque l’amortissement non linéaire prédomine, la période est proportionnelle à  $(\Delta\rho)^{1/2}$ . Le niveau de liquide à l’intérieur du cylindre intérieur oscille entre deux points d’équilibre où les forces qui génèrent le flux dans chaque direction sont exactement les mêmes. La première position est atteinte lorsque l’eau salée remplit le tube étroit, La deuxième position d’équilibre se produit lorsque l’eau pure remplit le tube étroit. Une décennie plus tard, P. H Alfredsson et autres [54] ont reproduit ses oscillations en remplaçant le tube par un trou au fond du récipient interne. Leur dispositif peut atteindre un nombre infini d’états d’équilibre hydrostatique. Expérimentalement, ils ont observé deux types d’impulsions. Pour des faibles valeurs du diamètre de l’orifice, le mouvement de l’impulsion était

très calme et se déplaçait comme un jet continu d'une longueur considérable (plus 100 fois le diamètre de l'orifice). En revanche, pour des valeurs importantes du diamètre de l'orifice, les impulsions étaient courtes et violentes. Leurs travaux ont également montré que : le liquide qui s'écoule du trou diminue progressivement et finit par cesser, la pression au-dessus de l'orifice augmente et le fluide des récipients extérieurs commence à pénétrer dans le récipient intérieur sur les bords du trou.

En 1988, lors d'une étude expérimentale et théorique portée sur des phénomènes oscillatoires, dans une interface huile-eau et dans un système solution salé-eau, en relation avec l'excitabilité dans les bio membranes, Yoshikawa et autres [50-53] ont observé des oscillations électriques rythmiques en utilisant un dispositif d'oscillateur salin et deux électrodes. La cause de l'oscillation électrique a longtemps attiré l'attention de plusieurs chercheurs, le potentiel électrique est généré par un transfert d'ions à travers l'interface solution salé-eau. Dans ces travaux, on trouve également un dispositif de couplage avec deux récipients internes ainsi qu'une formulation mathématique du comportement de l'oscillateur salin en s'appuyant sur l'équation de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles et visqueux. Ils ont pris en compte l'écoulement de type Hagen-Poiseuille. En utilisant d'autres approximations, ils ont établi une équation de Rayleigh, qui a donc été largement utilisée dans des simulations numériques qui reproduisent la tendance expérimentale du phénomène d'écoulement observé. Ils ont montré que, ce système présente diverses caractéristiques des systèmes non linéaires, notamment la synchronisation, le cycle limite et la bifurcation du flux oscillatoire. Il en résulte que le flux rythmique présente les caractéristiques typiques d'un oscillateur auto-excité déclenché par une instabilité de Rayleigh [41]. Plus tard, À partir d'expériences détaillées, Upadhyay et autres [71] ont conclu que les oscillations potentielles électriques peuvent être dues à des potentiels de courant oscillant. Okamura et Yoshikawa [46] ont découvert, par le biais d'une simulation complète de l'équation de Navier-Stokes en trois dimensions, que la dynamique de l'oscillateur salin était toujours décrite par l'équation de Rayleigh même lorsque la loi de poiseuille n'est pas considérée.

Des récentes études ont été menées par Kenfack et autres [39,42,55] sur les domaines visant la synchronisation, bifurcation et l'effet du bruit sur le comportement oscillatoire de l'oscillateur salin modélisé par une équation de type Filippov. Après avoir eu à décrire

mathématiquement le modèle par une équation différentielle non linéaire dont les coefficients dépendent de la géométrie du système, par des simulations numériques, la tendance oscillatoire observée dans la littérature fut respectée. Ces fluctuations augmentent avec l'intensité du bruit et il en résulte la transition de l'état synchrone à l'état asynchrone [10]. Plus tard, une bifurcation non conventionnelle d'Hopf fut révélée par des simulations numériques.

### 1.2.3 Les applications de l'oscillateur salin

Les applications de l'oscillateur salin sont nombreuses et diverses dans plusieurs domaines. Dans le domaine de l'enseignement, J. A. Moron-Villarreyes et autres [106] ont proposé plusieurs activités théoriques et expérimentales dans l'utilisation de l'oscillateur salin comme objet d'études. Certaines de ces activités peuvent porter sur l'étude de l'état transitoire, la modélisation mathématique des processus, l'analyse dimensionnelle, la conception et le dimensionnement des équipements et bien d'autres. Toutes ces activités peuvent permettre la visualisation des phénomènes et concepts fondamentaux dans le génie chimique. En biologie, lors d'un atelier sur la modélisation de l'électrophysique cardiaque, des étudiants ont utilisé l'oscillateur salin pour comprendre la dynamique cardiaque en général, et les arythmies, en particulier[115].

D'un point de vue électrochimique, d'après les travaux de Yoshikawa et autres [53], Une oscillation électrique rythmique et soutenue a été observée pour une membrane liquide eau-huile, contenant de l'oléate de sodium, un savon, dans l'une des phases aqueuses. Les oscillations ont été induites par le transfert de l'anion oléate et d'autres produits chimiques à travers l'interface huile-eau. R. Cervellati et autres ont construit et présenté les propriétés d'une batterie simple à tension alternative qui inverse périodiquement la valeur et le signe de sa force électromotrice [114]. Cette batterie se compose de deux oscillateurs couplés à concentration d'eau salée qui sont déphasés en extrayant initialement quelques gouttes de solution saline de l'un des deux oscillateurs. Bien que la fréquence réelle (période de l'ordre de 30 s) et la force électromagnétique ( $\pm 55$  mV) soient faibles, cette batterie est adaptée pour démontrer une application pratique des systèmes oscillants dans le laboratoire physique, chimique ou biologique pour les étudiants de premier cycle. L'oscillation du potentiel électrique enregistrée avec deux électrodes, plongées dans de

l'eau pure et de l'eau salée, a également fait l'objet d'études approfondies [70,72]. Une application récente de l'oscillateur salin est celle de la conception d'un dispositif de mesure de la masse volumique d'un fluide réalisé par W. Fokou et autres [55].

### 1.3 Synchronisation d'oscillateurs non-linéaires

D'une manière assez simple, parler de non-linéarité en physique implique la manipulation des expressions mathématiques comprenant des termes à exposants différents de l'unité, des dérivés d'ordre supérieur à un ou encore des fonctions ou applications mathématiques complexes. Au sens le plus large du terme, la synchronisation est l'action de coordonner plusieurs opérations entre elles en même temps. Dans cette définition large du mot, plusieurs types de comportements collectifs différents sont des exemples de synchronisation. Par exemple, les éclats de lucioles qui se produisent à l'unisson, un défilé civil ou militaire, l'organisation d'actions militaires dans le temps et dans l'espace lors d'une opération de sauvetage, l'ajustement de l'activité des agriculteurs en fonction des saisons, l'arrangement des applaudissements d'un public de théâtre, un groupe d'oiseaux parfaitement alignés qui coordonnent leurs mouvements dans le même sens. Les systèmes non-linéaires sont responsables de l'apparition de deux structures radicalement opposées d'un point de vue concernant purement l'ordre. À savoir, les systèmes chaotiques, produisant dans certaines conditions des comportements certes prévisibles mais naturellement turbulents et les structures cohérentes.

Dans le contexte des oscillateurs, qui imprègne également notre environnement, la synchronisation est le réglage de rythmes d'objets oscillants en raison de leur interaction [46], ou ajustement du rythme d'un oscillateur entraîné au rythme de la force externe périodique. Ainsi, synchroniser des oscillateurs non linéaires revient donc à ajuster leurs propriétés dynamiques évolutives à travers le couplage, ou un autre paramètre, dans le but final d'obtenir un comportement unifié de l'ensemble qu'ils forment. Bien qu'il existe d'autres facteurs pouvant être constitués des actions extérieures faibles ou fortes, Le couplage reste le moyen le plus adéquat lorsque l'objectif principal est d'atteindre un état coordonné entre les systèmes non linéaires d'un réseau. Les réseaux constitués de systèmes non-linéaires offrent un challenge conséquent dans le domaine de l'étude de la synchro-

nisation basée sur la conjugaison de la complexité des propriétés dynamiques inhérentes aux systèmes couplés et à la topologie du réseau considéré [94,95]. Les phénomènes de synchronisation abondent dans les sciences et l'ingénierie, ainsi que dans la nature et la vie sociale. Nous pouvons citer quelques applications de la synchronisation dans la sécurisation des communications en masquant l'information supportée par le signal [96,97], dans l'augmentation de la puissance des lasers [98,99], dans le contrôle des oscillations des réactions chimiques [49,100].

### 1.3.1 Rappel sur la synchronisation

La synchronisation est un phénomène universel pouvant se produire lorsque deux oscillateurs (ou une chaîne ou encore un anneau d'oscillateurs) sont couplés soit de façon unidirectionnelle, soit de façon bidirectionnelle [101,102]. La faculté des oscillateurs non linéaires à synchroniser entre eux est d'ailleurs utilisée pour expliquer divers phénomènes naturels, d'où son importance capitale dans divers domaines de la science, et particulièrement en ingénierie (hyperfréquence, alimentation, jonction Josephson, laser...) mais aussi dans le comptage du temps (réseaux de synchronisation d'horloges par signal radio), et même en biologie [103]. Dans le cas d'un couplage unidirectionnel, on a affaire à une configuration maître-esclave où un oscillateur (le maître) impose sa dynamique à un autre (esclave). Les oscillateurs en présence peuvent être synchronisés en phase (fréquence) seulement, ou en amplitude, ou être partiellement synchronisés (lorsque des variables d'état de l'un des systèmes sont fonction de certaines variables d'état de l'autre système) [102].

La synchronisation est complète si les états des systèmes en présence convergent vers le même état final. Pour qu'elle soit stable, la dynamique des erreurs de synchronisation doit également être stable. L'on sait que lorsque deux systèmes auto-entretenus démarrent, leurs états (amplitudes et phases) sont déterminés par les conditions initiales, lesquelles en général ne sont pas identiques, si bien que même étant identiques, deux systèmes non couplés seront rarement complètement synchronisés. La mise en œuvre concrète de la synchronisation unidirectionnelle fait appel à diverses techniques de couplage dont les méthodes basées sur la commande rétroactive [104] qui consistent à appliquer un signal de commande dépendant de l'erreur de synchronisation (en ceci, la synchronisation devient un processus de commande ou de contrôle) à l'oscillateur esclave, de façon à ce que lorsque

les états de l'esclave seront verrouillés sur ceux du maître, ce signal de commande s'annule [104,105]. La synoptique de la synchronisation maître-esclave est dans ce cas celui de la figure 1.2.

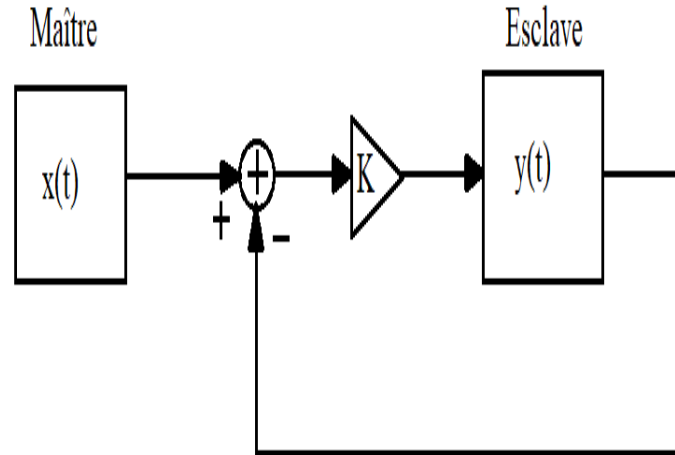


FIGURE 1.2 – Synoptique de la synchronisation de type maître-esclave[104].

Considérons deux systèmes non linéaires respectivement décrits par les équations d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ \dot{y}^* &= g(y^*) \end{aligned} \quad (1.1)$$

que l'on peut coupler à travers une stratégie rétroactive de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ \dot{y} &= g(y) - K(x - y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Où  $x, y^* \in \mathfrak{R}^n$ ,  $f, g \in \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ,  $K \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  étant une matrice diagonale constante. La dynamique des erreurs de synchronisation s'écrira

$$\dot{e} = \dot{y} - \dot{x} = g(x + e) - f(x) - Ke \quad (1.3)$$

La fonction  $g(x + e)$  peut être développée en série de Taylor au voisinage de  $x$ , de façon que

$$\dot{e} = g(x) - f(x) + [(J_g(y))_x - K]e + T.O.S \quad (1.4)$$

Où  $(J_g(y))_x$  est la matrice jacobienne de  $g(y)$  évaluée en  $x$ , et  $T.O.S$  désigne les termes d'ordre supérieur. Si l'on suppose les  $T.O.S$  négligeable devant les termes linéaires, la dynamique des erreurs devient :

$$\dot{e} = g(x) - f(x) + [(J_g(y))_x - K]e \quad (1.5)$$

Sous l'hypothèse précédente, cette équation montre que la matrice  $K$  joue un rôle déterminant dans le degré de synchronisation des deux systèmes. En fait, l'annulation des non-linéarités dépendra du choix de ses éléments [101]. On supposera toujours  $K$  assez grand si bien que par exemple dans le cas où les éléments  $k_i$  de la matrice  $K$  sont identiques et égaux à  $k$ , si la synchronisation se produit ( $e \rightarrow 0$ ) on pourra écrire

$$\lim_{K \rightarrow \infty} K(x - y) = f(x) - g(x) \quad (1.6)$$

Il s'ensuit que dans la pratique, si les systèmes maître et esclave ne sont pas identiques ( $f(x) \neq g(x)$ ), le terme  $K(x - y)$  parfois appelé "coût de la synchronisation" supportera les termes d'interaction et ne pourra par conséquent s'annuler.

### 1.3.2 Etude de la synchronisation dans un réseau d'oscillateurs salins

Dans cette sous-section, nous faisons une revue exhaustive sur les travaux menés dans l'étude du processus de synchronisation au sein de l'oscillateur salin Suite à la découverte de Yoshikawa et autres [53] sur le caractère synchronisable des oscillateurs salins. Le dispositif expérimental est composé de plusieurs récipients internes comportant initialement des solutions salines plongées dans un grand récipient externe contenant de l'eau pure telle que présenté à la figure 1.3.

**Nakata** et autres [49] ont étudié expérimentalement et numériquement un modèle d'oscillateur salin couplé avec deux récipients internes lors de l'expérience de mesure du

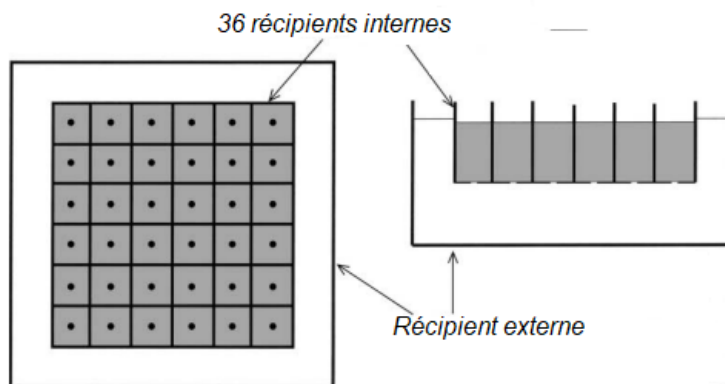


FIGURE 1.3 – dispositif global de couplage de 36 oscillateurs salins [45]

potentiel électrochimique généré par le modèle. Ils ont montré que le mode de synchronisation change en fonction de la surface libre de l'eau pure ensuite que, le facteur de couplage est caractérisé par le rapport des surfaces dans le cas où les réservoirs internes ne possèderaient qu'un orifice. Ils ont également rapporté plus tard une expérience avec laquelle ils observaient un couplage entre les écoulements à travers deux orifices distincts au fond du même récipient interne en fonction de différence de hauteur entre les deux orifices et de la viscosité de la phase d'eau salée.

**Miyakawa** et autres [48] ont étudié expérimentalement et numériquement, en utilisant les équations différentielles non linéaires couplées, les propriétés de l'entraînement de deux oscillateurs à eaux salées couplés à travers la fenêtre du mur de séparation. Leur étude a montré que, avec une augmentation de la surface de la fenêtre, le mode quasi périodique, le mode en phase, le mode bistable et le mode déphasé sont apparus successivement. Ces modes étaient assez stables contre les perturbations externes et indépendantes de la condition initiale. De plus, l'effet de la viscosité sur les comportements de couplage a été étudié. Dans la région limitée entre le couplage quasi périodique et le couplage en phase, le mode couplé avec la différence de phases d'environ  $\pi/4$  a été trouvé.

**Yoshikawa** et autres [50] ont examiné le couplage entre deux et trois oscillateurs couplés. Ils ont constaté que l'entraînement d'un ordre 1 : 1 avec un espacement de phase égal, était présenté dans le cas d'oscillateurs couplés ayant la même période intrinsèque.

**Miyakawa** et autres [45], ont rapporté une expérience dans laquelle ils considéraient

le couplage global entre pas moins de 36 oscillateurs salins. Les états d'antiphase et de grappe sont observés en tant qu'états ordonnés à un paramètre de couplage important. L'apparition de ces états est limitée au cas d'un petit nombre d'oscillateurs constitutifs. Pour une grande population d'oscillateurs, on constate que le couplage entre oscillateurs est favorisé par la force de couplage, mais qu'il y a une certaine limitation dans le degré de couplage induit.

**W. F. Kenfack** et autres [45] ont dérivé les équations d'un modèle de  $N$  oscillateurs salins globalement couplés et ensuite, ils ont étudié les propriétés de synchronisation d'un nombre limité d'oscillateurs couplés. Ils ont proposé un modèle consistant en une équation différentielle non autonome, dont les coefficients dépendent de la géométrie et des paramètres physiques du système, et qui reproduit la tendance oscillatoire observée dans la configuration de l'oscillateur de densité avec l'avantage de présenter un flux descendant plus long par rapport à la durée du flux ascendant. Ils ont trouvé que des oscillateurs identiques couplés se synchronisent complètement quelle que soit la force du couplage si les conditions initiales sont strictement identiques. Au contraire, lorsque les conditions initiales sont différentes, même légèrement, l'état d'antiphase se produit dans le système avec une différence de phases verrouillée et dépendant des conditions initiales, des facteurs de couplage et du nombre d'oscillateurs. Dans les cas particuliers de deux ou trois oscillateurs couplés, la différence de phases est respectivement verrouillée à  $\pi$  ou  $\frac{2\pi}{3}$

## 1.4 Phénomènes induits par le bruit

Le bruit ambiant est omniprésent dans la nature. Chant d'oiseau, ronflement des voitures dans la rue, sont émis par des appareils électroniques autour de nous : tous ces éléments contribuent à perturber notre environnement acoustique. Beaucoup de recherches expérimentales communes montrent que le bruit est présent dans chaque mesure expérimentale [22,74]. Cela se produit, car les systèmes réels sont parfois intégrés dans un environnement complexe. Ces fluctuations peuvent avoir diverses origines, telles que des perturbations externes, des erreurs de mesure, des incertitudes dans les paramètres ou les conditions initiales, ou encore des interactions non linéaires entre les composants du système complexe. Dans l'étude théorique, Le bruit est modélisé par des fonctions aléatoires

et traité par les lois de la théorie des probabilités, aussi bien dans le domaine temporel (distribution en amplitude) que dans le domaine spectral (densités spectrales) [75,76]. Selon leur forme spectrale et leur comportement statistique, on distingue différents types de bruit.

Les bruits colorés sont des signaux aléatoires dont le spectre de puissance dépend de la fréquence. Par exemple, le bruit blanc [35], a un spectre de puissance uniforme sur toute la bande de fréquences, ce qui signifie qu'il contient toutes les fréquences avec la même intensité. C'est le type de bruit que l'on entend dans un téléviseur sans signal. Le bruit rose [37], a un spectre de puissance inversement proportionnel à la fréquence, ce qui signifie qu'il contient plus d'énergie dans les basses fréquences que dans les hautes fréquences. C'est le type de bruit que l'on trouve souvent dans la nature, comme le bruit du vent ou des cascades. D'autres types de bruits colorés sont le bruit brun, qui a un spectre de puissance encore plus accentué vers les basses fréquences, le bruit bleu, qui a un spectre de puissance proportionnel à la fréquence, le bruit violet, qui a un spectre de puissance proportionnel au carré de la fréquence et le bruit gris, qui a un spectre de puissance adapté à la perception auditive humaine. Un bruit borné est un type de bruit aléatoire qui a une amplitude maximale et minimale fixe. Il peut être modélisé par une variable aléatoire dont la distribution est uniforme sur un intervalle donné. Le bruit borné est habituellement utilisé pour simuler des perturbations ou des erreurs de mesure dans les systèmes dynamiques. L'utilité du bruit borné est qu'il permet de tester la robustesse et la stabilité des systèmes face à des variations aléatoires de leur environnement ou de leurs paramètres.

L'étude de l'influence des forces aléatoires (bruit) sur les systèmes dynamiques non linéaires est l'une des directions de recherche les plus pertinentes et le plus en développement dans la dynamique non linéaire. Plusieurs méthodes théoriques ont été développées et adaptées pour étudier des équations différentielles stochastiques [77]. Particulièrement vis-à-vis de la stabilité des systèmes dynamiques, plusieurs travaux ont étudié les effets des fluctuations aléatoires [22,77]. Certains résultats des nombreux travaux effectués montrent la présence de phénomènes contre-intuitifs, telle que la résonance stochastique [78,79], la stabilité renforcée par le bruit [80,81] et l'extinction retardée par le bruit [82,83]. Les phénomènes induits par le bruit peuvent avoir des applications dans de nombreux domaines

scientifiques et technologiques, tels que la physique, la chimie, la biologie, l'ingénierie, l'informatique ou les sciences sociales.

La résonance stochastique est observée lorsque le bruit ajouté à un système modifie le comportement du système d'une manière ou d'une autre. Plus techniquement, elle se produit si le rapport signal sur bruit d'un système ou d'un dispositif non linéaire augmente pour des valeurs modérées d'intensité de bruit [84]. Cela se produit souvent dans les systèmes bistables ou dans les systèmes avec un seuil sensoriel et lorsque le signal d'entrée du système est "inférieur au seuil". Pour des intensités de bruit plus faibles, le signal ne peut pas franchir le seuil à l'appareil, donc peu de signal le traverse. Ce phénomène paradoxal a été introduit au début des années 1980, dans le contexte de la physique non linéaire [85]. Progressivement, la résonance stochastique a été observée et analysée dans une variété grandissante de processus, incluant notamment des systèmes de traitement de l'information comme des circuits électroniques [86,87], des dispositifs optiques [88], des systèmes neuronaux [89]. Un exemple de résonance stochastique est la détection d'un signal électromagnétique faible par une antenne qui est soumise à du bruit thermique. Mis en évidence dans différents systèmes dynamiques bistables, il a été montré que la bistabilité n'était pas indispensable pour l'apparition de résonance stochastique. En fait, cela peut se produire dans des systèmes dynamiques non linéaires gouvernés par un potentiel monostable, c'est-à-dire présentant un seul état stable [90]. Un exemple de bistabilité induite par le bruit est le comportement d'un interrupteur électronique qui peut basculer entre l'état allumé et l'état éteint sous l'effet de fluctuations thermiques. La résonance stochastique apparait donc désormais comme un phénomène non linéaire général.

Le concept de stabilité a été largement et longtemps utilisé dans diverses sciences. Cependant, il n'existe pas de définition universelle de la stabilité, souvent adaptée aux besoins spécifiques d'une discipline scientifique particulière ou au problème particulier posé. La notion de stabilité ou d'instabilité existe dans la théorie des modèles stochastiques [91]. Il a été montré que la présence du bruit dans un système mécanique peut améliorer son état de stabilité, ce phénomène a été appelé stabilité renforcée par le bruit. Il a été étudié expérimentalement et numériquement dans divers systèmes physiques [25,92]. Il a été démontré que, en faisant varier la valeur de l'intensité du bruit thermique, la durée de

vie moyenne de l'état métastable d'une particule brownienne se déplaçant dans un champ potentiel peut être allongée ou raccourcie. Dans une étude théorique de la dynamique transitoire d'une particule brownienne dans un potentiel cubique dépendant du temps avec un état métastable, Dayan et autres [93] ont montré que la stabilité du système est améliorée pour un large choix de valeurs du paramètre de contrôle. Leurs études de simulation ont montré que dans un tel système, l'ajout d'une petite quantité de bruit peut en fait augmenter la vitesse de la particule, que dans un tel système, l'ajout d'une petite quantité de bruit peut en fait augmenter le temps moyen nécessaire à la particule pour s'échapper du puits. Cet effet dépend de la fréquence bien choisie de la force motrice périodique. D'autres phénomènes induits par le bruit peuvent être évoqués, notamment la suppression du bruit est un phénomène qui se produit lorsque le bruit atténue un signal fort en désynchronisant les oscillations du système avec la fréquence du signal. Un exemple de suppression du bruit est la réduction du son émis par un haut-parleur qui est soumis à du bruit acoustique. La synchronisation est un phénomène qui se produit lorsque le bruit synchronise les oscillations de plusieurs systèmes couplés entre eux. Un exemple de synchronisation induite par le bruit est la synchronisation des battements cardiaques de deux personnes qui sont soumises à un bruit sonore commun. En conclusion, le bruit n'est pas toujours nuisible et peut avoir des applications utiles dans différents domaines scientifiques ou technologiques. Le bruit peut en effet modifier le comportement des systèmes physiques ou biologiques et créer des phénomènes intéressants.

## 1.5 Généralités sur le modèle de type Filippov

Les modèles de type Filippov sont des outils mathématiques qui permettent d'étudier le comportement des systèmes dynamiques non linéaires soumis à des commutations. Par commutation, on entend le passage brusque d'un état à un autre, qui peut être provoqué par diverses causes physiques ou logiques. Ces commutations peuvent être dues à des changements de régime, des contraintes, des frottements ou des impacts. Les oscillateurs non linéaires sont des exemples de systèmes dynamiques qui présentent des phénomènes complexes tels que le chaos, les bifurcations ou les multistabilités. L'application des modèles de type Filippov aux oscillateurs non linéaires permet de décrire et d'analyser ces

phénomènes en tenant compte des effets de la commutation. Dans cette partie du travail, nous présenterons les principes généraux des modèles de type Filippov, ainsi que quelques exemples d'oscillateurs non linéaires qui les utilisent.

Le principe général des modèles de type Filippov est de considérer que le système dynamique peut être décrit par plusieurs sous-systèmes, chacun étant caractérisé par une équation différentielle spécifique. Ces sous-systèmes sont définis en fonction des différentes zones du domaine de phase où le système évolue. Dans chaque zone, le comportement du système est différent en raison des discontinuités qui peuvent s'y produire. Pour modéliser ces discontinuités, les modèles de type Filippov utilisent des fonctions de commutation qui déterminent les conditions dans lesquelles le système passe d'un sous-système à l'autre. Ces fonctions de commutation sont souvent discontinues et peuvent être définies en fonction de seuils ou de conditions spécifiques. L'analyse des modèles de type Filippov repose sur la notion de solution généralisée, qui est définie par une équation différentielle ordinaire sur chaque domaine sur lequel la donnée est continue, et par une condition supplémentaire sur la frontière sur laquelle la donnée est discontinue. Cette condition peut être une condition de glissement, qui force la solution à rester sur la frontière, ou une condition de saut, qui permet à la solution de passer d'un domaine à un autre.

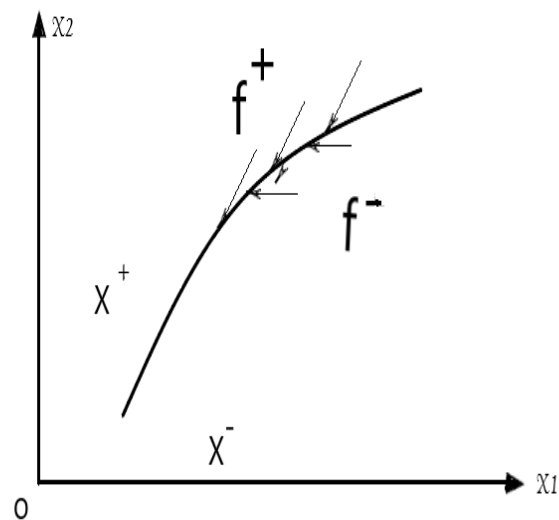
On présente l'approche de Filippov dans le cas d'une seule surface de discontinuité, afin de résoudre le problème de solution sur la surface de discontinuité  $S$ , il est nécessaire de chercher une fonction continue du temps qui évolue sur  $S$ . Pour cela, il faut prolonger le champ  $f$  sur la surface  $S$ , c'est-à-dire qu'il faut que  $f$  appartienne à l'espace tangent à  $S$  en  $x$ . Par la suite, les vecteurs vitesses doivent être dirigés vers la surface  $S$ , en d'autres termes, la surface  $S$  doit être attractive au moins dans un voisinage.

$$x = \begin{cases} X^+ & \text{si } S(x) > 0 \\ X^- & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Ce qui nous donne au voisinage de  $S(x) = 0$  deux valeurs de  $f$  :

$$f = \begin{cases} f^+ & \text{si } S(x) > 0 \\ f^- & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Nous appellerons  $f_N^+$  et  $f_N^-$  les projections respectives de  $f^+$  et  $f^-$  sur la normale à la



**FIGURE 1.4** – Schéma de principe du régime glissant selon une coupe de l'espace d'état.

surface  $S(x) = 0$ , orientée de  $X^-$  vers  $X^+$ .

Le modèle de Filippov est utilisé dans de nombreux domaines scientifiques tels que l'électromécanique, la biologie, l'écologie ou la physique, pour modéliser des systèmes non linéaires avec des discontinuités. Par exemple, en écologie, sachant que Les infections grippales comptent actuellement parmi les zoonoses les plus coûteuses et les plus mortelles en raison de la pathogénicité du virus et de sa capacité à se propager et à évoluer rapidement [107], les modèles de type Filippov peuvent être utilisés pour évaluer les effets de la couverture médiatique et de la quarantaine sur la dynamique de transmission de la grippe [108]. En biologie, Le développement de la science de la neuro-informatique met en évidence la nécessité et la nouvelle tendance d'établir divers modèles de neurones fonctionnels réalisables. En conséquence, un modèle de neurone hybride de Filippov a été utilisé pour révéler le mécanisme de déclenchement des neurones néocorticaux de mammifères afin de décrire l'effet dépendant de l'état de l'induction électromagnétique des neurones [109]. En chimie, le modèle de Filippov a été utilisé pour étudier et simuler un système gaz-liquide fermé idéal incluant une formulation DAE du système avec une réaction chimique [110]. Notons que DEA signifie diéthanolamine, Une formulation en chimie est un mélange de plusieurs produits qui a des propriétés particulières. Ainsi, Les formulations DEA sont des mélanges chimiques avec le groupe DEA, elles sont utilisées dans les cosmétiques, les

détergents, les textiles ou les produits pharmaceutiques, pour modifier le pH, émulsifier, stabiliser ou solubiliser. En physique, le modèle de Filippov permet aussi de rendre compte de divers phénomènes physiques impliquant des discontinuités, comme la friction sèche, le frottement fluide, les circuits électriques commutés, les oscillateurs à relaxation, les lasers à pompage optique ou les systèmes quantiques ouverts. Ces modèles peuvent exhiber des comportements complexes, comme des attracteurs étranges, des bifurcations codimension 2 ou des phénomènes stochastiques. Ces exemples montrent que le modèle de Filippov est un outil puissant et polyvalent pour comprendre et prédire le comportement des systèmes dynamiques discontinus. Il offre une vision unifiée et rigoureuse des phénomènes complexes qui se manifestent dans la nature.

## Conclusion

Pour conclure, cette revue de la littérature a présenté les principaux concepts et résultats relatifs aux systèmes auto-entretenus, à la synchronisation, à l'oscillateur salin, au modèle de type Filippov et aux phénomènes induits par le bruit. Nous avons montré comment ces notions se rejoignent et s'appliquent à l'étude du comportement dynamique de l'oscillateur salin, un dispositif expérimental simple mais riche en phénomènes complexes. Globalement, nous retenons que l'oscillateur salin qui est un oscillateur auto-entretenu possède diverses caractéristiques des systèmes non linéaires. Sa formulation mathématique a permis d'effectuer des simulations numériques dont les résultats sont en accord avec les résultats expérimentaux.

# Chapitre 2

## MÉTHODOLOGIE : MODÉLISATION MATHÉMATIQUE, ANALYSE ET SIMULATIONS

### Introduction

L'oscillateur salin est un système auto-entretenu qui présente les caractéristiques des systèmes non linéaires [41]. La prise en compte d'une excitation extérieure lui confère une formulation mathématique adaptée qui sera exploitée par des simulations numériques afin de produire une analyse des résultats observés. Dans ce chapitre, nous présenterons la formulation mathématique de l'oscillateur salin excité en utilisant le modèle de Filippov pour décrire sa dynamique. Pour cela, il sera question pour nous de présenter le dispositif expérimental, de donner les hypothèses simplificatrices prises en compte et s'appuyer sur l'équation de Navier-Stokes qui traduit l'écoulement des fluides pour établir la formulation mathématique de l'oscillateur salin périodiquement excité. Par la suite, nous allons présenter les méthodes analytiques ainsi que les méthodes numériques utilisées dans le cadre des travaux de calcul de cette thèse.

## 2.1 Modélisation du système

### 2.1.1 Présentation du dispositif

Le dispositif du cas couplé étudié ici est formé d'un réservoir cylindrique de rayon  $c$  contenant de l'eau pure à une hauteur  $h_w$  avec une masse volumique  $\rho_w$  ( figure 2.1), à l'intérieur de ce réservoir sont submergés un nombre  $N$  de réservoirs cylindriques contenant chacun une solution saline et un orifice ayant les dimensions du trou d'une aiguille au fond. Les paramètres géométriques ainsi que les paramètres de chaque fluide des réservoirs internes seront pris individuellement de telle sorte que pour le cas du  $i^{ieme}$  cylindre interne, son rayon interne est  $b_i$ , la masse volumique de la solution saline qu'il contient est  $\rho_{si}$ , la hauteur de la solution saline est prise à  $h_{si}$ , le rayon de son orifice est  $a_i$  et  $d_i$  est la hauteur de l'orifice. L'excitateur associé à ce dispositif a pour rôle l'infusion et le retrait d'un volume constant d'eau pure dans le grand récipient de façon périodique. Initialement, les niveaux des surfaces libres de l'eau pure et des solutions salées sont identiques.

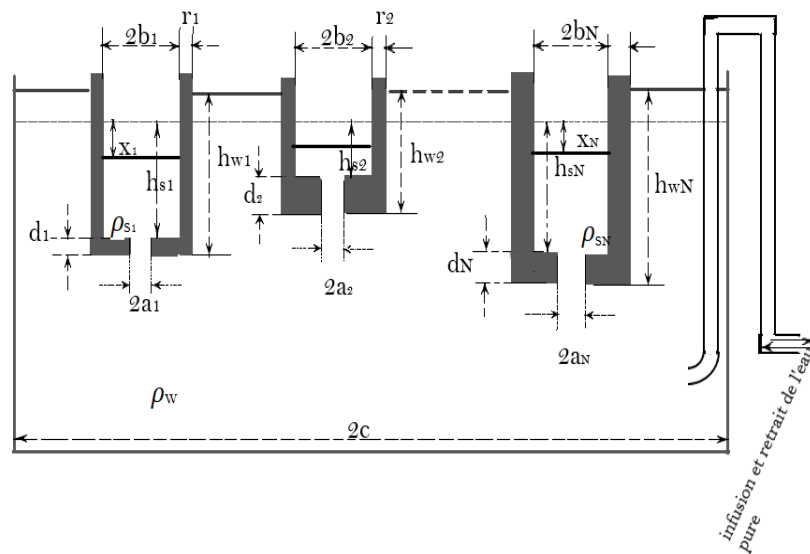


FIGURE 2.1 – Schéma des oscillateurs salins couplés périodiquement excités.

### 2.1.2 Hypothèses mises en jeu

Pour effectuer l'étude de notre système dynamique, cinq hypothèses simplificatrices sont prises en considération, à savoir :

- nous supposons les masses volumiques d'eau pure et de solution saline constantes durant les écoulements ;
- nous supposons qu'il s'écoule uniquement l'eau salée (respectivement l'eau pure) dans l'orifice pendant toute la durée de l'écoulement descendant (respectivement ascendant). Nous négligeons ainsi le temps de transition entre les deux phases d'écoulement dans l'orifice ;
- nous supposons l'écoulement dans l'orifice de type Hagen-Poiseuille, car son rayon est supposé très faible ;
- les écoulements sont unidirectionnels ;
- nous négligeons les variations de température des fluides au cours des écoulements.

### 2.1.3 Formulation Mathématique

Le début du processus des écoulements se présente par un écoulement lent et descendant de la solution salée dans le grand réservoir à travers le trou d'aiguille au fond du récipient interne. Cette décharge d'eau salée dans le grand récipient est due à un déséquilibre de la pression hydrostatique à l'interface des deux fluides [55]. Lorsque la surface libre de la solution salée atteint une hauteur critique inférieure à la hauteur initiale, on observe une montée de l'eau pure dans le trou d'aiguille. Ceci jusqu'à ce que la surface libre du récipient interne atteigne une hauteur critique qui fera basculer de nouveau le sens d'écoulement vers le bas. L'écoulement rythmique vertical observé dans le  $i^{ieme}$  orifice cylindrique (figure 2.2) est décrit dans un repère cylindrique associé à l'orifice par l'équation de Navier-Stokes notamment :

$$\frac{\partial \omega_i(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial P_i(z, \tau)}{\partial z} + \frac{\nu_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_i(z, \tau)}{\partial r} \right) - g, \quad (2.1)$$

où

$\rho_i$  représente la masse volumique du fluide,

$r$  représente le rayon de l'orifice,

$\nu_i$  représente la viscosité cinématique,

$g$  représente l'accélération gravitationnelle,

$\omega_i(z, \tau)$  représente la composante suivant  $z$  de la vitesse d'écoulement,

$P_i(z, \tau)$  représente la composante suivant  $z$  de la pression hydrostatique.

L'écoulement est unidirectionnel suivant la composante  $z$ . La principale force motrice de l'oscillation est volumique notamment, la force gravitationnelle [50].

En évaluant la moyenne des deux membres de l'équation (2.1) dans le volume  $V$  de l'orifice cylindrique ainsi qu'il suit :

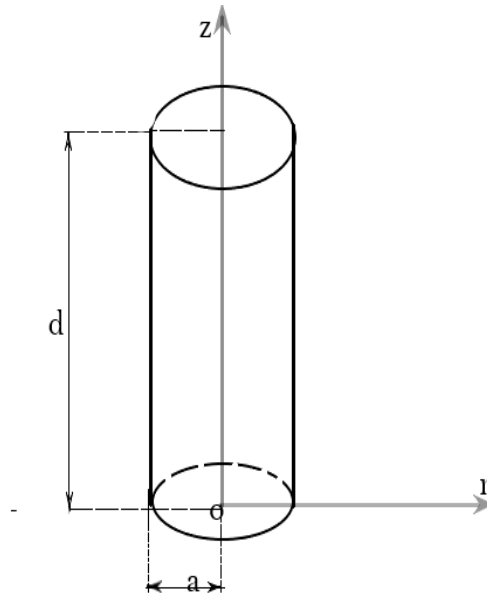


FIGURE 2.2 – Forme de l'orifice du fond du récipient interne.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_i} \iiint_{V_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} dV_i &= -\frac{1}{V_i} \iiint_{V_i} \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial P_i}{\partial z} dV_i + \frac{1}{V_i} \iiint_{V_i} \frac{\nu_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \right) dV_i \\ &\quad - \frac{1}{V_i} \iiint_{V_i} g dV_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'écoulement étant considéré de type Hagen-Poiseuille, on a :

$$\left( \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \right)_{r=a_i} = -\frac{4 \langle \omega_i \rangle}{a_i}. \quad (2.3)$$

Après le calcul intégral de la relation (2.2) et après avoir utilisé l'équation (2.3), nous obtenons :

$$\frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{P_i(d_i, \tau) - P_i(0, \tau)}{d_i} - \frac{8\nu_i}{a_i^2} \langle \omega_i \rangle - g. \quad (2.4)$$

Où

$$\langle \omega_i \rangle = \frac{2}{a_i^2} \int_0^{a_i} \omega_i r dr, \quad (2.5)$$

représente la vitesse moyenne d'écoulement.

En évaluant les pressions  $P_i(d_i, \tau)$  et  $P_i(0, \tau)$  aux extrémités du  $i^{ieme}$  orifice, nous avons :

$$P_i(d_i, \tau) = \rho_{si}g(h_{si} + x_i(\tau)) + P_i^*(d_i, \tau), \quad (2.6)$$

$$P_i(0, \tau) = \rho_wgh_{wi} + P_i^*(0, \tau), \quad (2.7)$$

soit,

$$P_i(d_i, \tau) - P_i(0, \tau) = \rho_{si}g(h_{si} + x_i(\tau)) - \rho_wgh_{wi} - \Delta P_i^*(\tau), \quad (2.8)$$

où

$$\Delta P_i^*(\tau) = P_i^*(d_i, \tau) - P_i^*(0, \tau) \quad (2.9)$$

représente les pertes de pression qui seront considérées sous la forme évoquée par Okamura et Yoshikawa [46] notamment :

$$\Delta P_i^*(\tau) = \rho_i(\tau)(\beta_i \langle \omega_i \rangle - \gamma_i \langle \omega_i \rangle^3)d_i. \quad (2.10)$$

En remplaçant l'équation (2.10) dans l'équation (2.8) nous obtenons :

$$P_i(d_i, \tau) - P_i(0, \tau) = \rho_{si}g(h_{si} + x_i(\tau)) - \rho_wgh_{wi} - \rho_i(\tau)(\beta_i \langle \omega_i \rangle - \gamma_i \langle \omega_i \rangle^3)d_i, \quad (2.11)$$

$\beta_i$  et  $\gamma_i$  sont des coefficients pour l'ajustement de la dimension de la perte de pression qui dépendent de la forme du  $i^{ieme}$  orifice.

La variation du volume total du système étant définie comme suit :

$$S_0(h_w(\tau) - h_{si} - d_i) + \sum_{k=1}^N S_k x_k(\tau) = V_0 f(\tau), \quad (2.12)$$

Où :

$S_k$  représente la surface libre de la solution saline dans le  $k^{ieme}$  récipient interne,  
 $x_k$  représente la position de la surface libre de la solution saline dans le  $k^{ieme}$  récipient

interne,

$S_i$  représente la surface libre de la solution saline dans le  $i^{ieme}$  récipient interne,

$x_i$  représente la position de la surface libre de la solution saline dans le  $i^{ieme}$  récipient

interne,  $S_0$  représente la surface libre de l'eau pure dans le grand réservoir,

$V_0$  représente le volume d'excitation.

$f(\tau)$  est la forme temporelle d'excitation prise sous la forme sinusoïdale.

soit

$$h_{wi}(\tau) = h_{si} + d_i + \frac{V_0}{S_0} f(\tau) - \sum_{k=1}^N \frac{S_k}{S_0} x_k(\tau), \quad (2.13)$$

ou encore

$$h_{wi}(\tau) = h_{si} + d_i + \frac{V_0}{S_0} f(\tau) - \frac{S_i}{S_0} x_i(\tau) - \sum_{k \neq i}^N \frac{S_k}{S_0} x_k(\tau) \quad (2.14)$$

où :

$$f(\tau) = \frac{1 + \cos(\Omega t + \pi)}{2}, \quad (2.15)$$

où  $\Omega$  représente la fréquence de l'excitation. Le choix de cette forme est un cas de figure dans lequel nous pouvons avoir une perturbation interagissant avec l'oscillateur salin par une fonction sinusoïdale du temps. Il serait alors intéressant d'étudier la réponse du système face à cette forme de perturbation, d'où l'objet de notre recherche. Nous rappelons ici que la perturbation sinusoïdale se matérialise par l'ajout et le retrait d'un volume constant d'eau pure de façon sinusoïdale dans le grand réservoir contenant de l'eau pure. Dans une certaine mesure, nous considérons que la perturbation est bruitée, l'origine de ce bruit est due à l'écoulement lors de l'ajout et du retrait de l'eau pure. Lors des deux phases d'écoulement, la vitesse de déplacement de la  $i^{ieme}$  surface libre de la solution salée considérée est liée à sa vitesse moyenne de l'écoulement dans l'orifice par :

$$\langle \omega_i \rangle = \left( \frac{b_i}{a_i} \right)^2 \frac{dx_i}{d\tau}, \quad (2.16)$$

En remplaçant les équations (2.3) et (2.11) dans l'équation (2.4) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial \tau} = & - \frac{1}{\rho_i d_i} \left( \rho_{si} g (h_{si} + x_i(\tau)) - \rho_w g h_{wi} - \rho_i d_i (\beta_i \langle \omega_i \rangle - \gamma_i \langle \omega_i \rangle^3) \right) \\ & - \frac{8\nu_i}{a_i^2} \langle \omega_i \rangle - g. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En remplaçant les équations (2.14) et (2.16) dans l'équation (2.17) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i = & \left( \beta_i - \frac{8\nu_i}{a_i^2} \right) \dot{x}_i - \gamma_i \frac{b_i^4}{a_i^4} \dot{x}_i^3 - \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( \frac{\rho_{si}}{\rho_i} + \frac{\rho_w S_i}{\rho_i S_0} \right) \frac{g}{d_i} x_i - \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{\rho_w g}{\rho_i d_i} \sum_{k \neq i}^N \frac{S_k x_k}{S_0} \\ & - \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( \frac{\rho_{si} - \rho_w}{\rho_i} \frac{h_{si}}{d_i} - \frac{\rho_w}{\rho_i} + 1 \right) g + \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{\rho_w h_0}{\rho_i d_i} g f(\tau), i = 1, 2, \dots, N; \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $h_0 = \frac{V_0}{S_0}$ .

L'équation (2.18) décrit le mouvement de la surface libre de la solution salée dans le  $i^{ieme}$  récipient interne. En comparaison avec la modélisation établie par Fokou et al [42], nous remarquons que la prise en compte d'une excitation externe apporte un terme supplémentaire qui dépend de la géométrie du récipient interne, de la masse volumique de l'eau pure et de la nature du fluide qui se trouve dans l'orifice. Étant donné que la nature du fluide s'écoulant à travers l'orifice change, nous avons deux cas de figure. Le cas où l'eau salée s'écoule dans l'orifice, c'est-à-dire la phase de l'écoulement descendant et le cas où l'eau pure s'écoule à travers l'orifice ou phase de l'écoulement ascendant. Nous supposons le rapport  $\frac{a_i}{b_i}$  suffisamment petit tout au long de nos travaux afin de négliger le temps de transition entre les deux écoulements [56]. Dans cette transition instantanée des écoulements, la densité et la viscosité du fluide à l'intérieur du  $i^{ieme}$  orifice sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \rho_{si} & si & \dot{x}_i < 0 \\ \rho_w & si & \dot{x}_i > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \nu_{si} & si & \dot{x}_i < 0 \\ \nu_w & si & \dot{x}_i > 0. \end{cases}$$

↔ **Cas de l'écoulement descendant de la solution salée dans le  $i^{ieme}$  orifice.**

Dans ce cas,

$$\dot{x}_i < 0, \quad \nu_i = \nu_{si}, \quad \rho_i = \rho_{si}.$$

L'équation (2.18) après transformation devient :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i = & \left( \beta_i - \frac{8\nu_{si}}{a_i^2} \right) \dot{x}_i - \gamma_i \frac{b_i^4}{a_i^4} \dot{x}_i^3 - \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( 1 + \frac{\rho_{wi} S_i}{\rho_{si} S_0} \right) \frac{g}{d_i} x_i \\ & - \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( \left( 1 - \frac{\rho_w}{\rho_{si}} \right) \frac{h_{si}}{d_i} - \frac{\rho_w}{\rho_{si}} + 1 \right) g - \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{\rho_w g}{\rho_{si} d_i} \sum_{k \neq i}^N \frac{S_k x_k}{S_0} + \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{\rho_w h_0}{\rho_{si} d_i} g f(\tau). \end{aligned} \quad (2.19)$$

L'équation (2.16) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\ddot{x}_i = A_{si}\dot{x}_i - B_i\dot{x}_i^3 - \omega_{si}^2 x_i - C_{si} - \sum_{k \neq i}^N \lambda_{sik} x_k + H_{si} f(\tau), \quad (2.20)$$

Où

$$A_{si} = \beta_i - \frac{8\nu_{si}}{a_i^2}, \quad B_i = \gamma_i \frac{b_i^4}{a_i^4}, \quad \omega_{si}^2 = \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( 1 + \frac{\rho_w S_i}{\rho_{si} S_0} \right) \frac{g}{d_i}, \quad \lambda_{sik} = \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{\rho_w}{\rho_{si}} \frac{g}{d_i} \frac{S_k}{S_0},$$

$$H_{si} = \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{\rho_w}{\rho_{si}} \frac{h_0}{d_i} g, \quad C_{si} = \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( \left( 1 - \frac{\rho_w}{\rho_{si}} \right) \frac{h_{si}}{d_i} - \frac{\rho_w}{\rho_{si}} + 1 \right) g,$$

↪ **Cas de l'écoulement ascendant de l'eau pure.**

Dans ce cas, nous avons :

$$\dot{x} > 0, \quad \nu_i = \nu_w, \quad \rho_i = \rho_w.$$

L'équation (2.18) après transformation devient :

$$\ddot{x}_i = \left( \beta_i - \frac{8\nu_w}{a_i^2} \right) \dot{x}_i - \gamma_i \frac{b_i^4}{a_i^4} \dot{x}_i^3 - \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( \frac{\rho_{si}}{\rho_w} + \frac{S_i}{S_0} \right) \frac{g}{d_i} x_i - \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( \frac{\rho_{si} - \rho_w}{\rho_w} \frac{h_{si}}{d_i} \right) g$$

$$- \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{g}{d_i} \sum_{k \neq i}^N \frac{S_k x_k}{S_0} + \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{h_0}{d_i} g f(\tau), \quad (2.21)$$

l'équation (2.21) peut être réécrite sous la forme :

$$\ddot{x}_i = A_{wi}\dot{x}_i - B_i\dot{x}_i^3 - \omega_{wi}^2 x_i - C_{wi} - \sum_{k \neq i}^N \lambda_{wik} x_k + H_{wi} f(\tau), \quad (2.22)$$

Où

$$A_{wi} = \beta_i - \frac{8\nu_w}{a_i^2}, \quad B_i = \gamma_i \frac{b_i^4}{a_i^4}, \quad \omega_{wi}^2 = \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( \frac{\rho_{si}}{\rho_w} + \frac{S_i}{S_0} \right) \frac{g}{d_i}, \quad H_{wi} = \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{h_0}{d_i} g,$$

$$C_{wi} = \frac{a_i^2}{b_i^2} \left( \frac{(\rho_{si} - \rho_w) h_{si}}{\rho_w d_i} \right) g, \quad \lambda_{wik} = \frac{a_i^2}{b_i^2} \frac{g}{d_i} \frac{S_k}{S_0}.$$

Après la phase transitoire, une oscillation étant constituée d'un écoulement descendant de l'eau salée suivi d'un écoulement ascendant de l'eau pure ou vice versa. De ce fait, la dynamique de l'oscillateur est complètement décrite par le système formé des deux équations différentielles (2.20) et (2.22), notamment :

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = A_{wi}\dot{x}_i - B_i\dot{x}_i^3 - \omega_{wi}^2 x_i - C_{wi} - \sum_{k \neq i}^N \lambda_{wik} x_k + H_{wi} f(\tau) & si \quad \dot{x} > 0, \\ \ddot{x}_i = A_{si}\dot{x}_i - B_i\dot{x}_i^3 - \omega_{si}^2 x_i - C_{si} - \sum_{k \neq i}^N \lambda_{sik} x_k + H_{si} f(\tau) & si \quad \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Le système (2.23) est un composé de  $2N$  équations différentielles couplées de type Filippov. Étant donné que le second membre de cette équation possède deux formes fonctionnelles, chacune valide dans l'un des domaines de l'espace de phase limité par l'hyper-surface d'équation  $\dot{x}_i = 0$ . Ce système d'équation peut être réécrit néanmoins en tenant compte de la discontinuité que présente l'écoulement dans le  $i^{ieme}$  orifice, notamment :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i = & A_i \dot{x}_i - B_i \dot{x}_i^3 - \omega_i^2 x_i - C_i - \sum_{k \neq i}^N \lambda_{ik} x_k + H_i f(\tau) \\ & + \text{sign}(\dot{x}_i) \left( \alpha_i \dot{x}_i + \delta_i x_i + \kappa_i + \sum_{k \neq i}^N \eta_{ik} x_k + \mu_i f(\tau) \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Où

$$\begin{aligned} A_i = & \frac{A_{si} + A_{wi}}{2}, \quad \alpha_i = \frac{A_{wi} - A_{si}}{2}, \quad \omega_i^2 = \frac{\omega_{si}^2 + \omega_{wi}^2}{2}, \quad \delta_i = \frac{\omega_{si}^2 - \omega_{wi}^2}{2}, \quad C_i = \frac{C_{si} + C_{wi}}{2}, \\ \kappa_i = & \frac{C_{si} - C_{wi}}{2}, \quad H_i = \frac{H_{si} + H_{wi}}{2}, \quad \mu_i = \frac{H_{wi} - H_{si}}{2}, \quad \lambda_{ik} = \frac{\lambda_{sik} + \lambda_{wik}}{2}, \quad \eta_{ik} = \frac{\lambda_{sik} - \lambda_{wik}}{2}. \end{aligned}$$

L'équation (2.24) pour le cas couplé est un système de  $N$  équations différentielles non-linéaires de type Filippov globalement couplées. C'est le modèle mathématique qui traduit la dynamique des oscillateurs salins couplés à  $N$  récipients internes et périodiquement excités.  $x_i$  représente le déplacement de la surface libre de la solution saline dans le  $i^{ieme}$  récipient interne. Le modèle non couplé qui est matérialisé par l'existence d'un récipient interne peut être obtenu en utilisant l'équation (2.24) ceci en prenant  $S_k = 0$  rendant ainsi les coefficients de couplages  $\lambda_{ik}$  et  $\eta_{ik}$  nuls. L'équation qui décrit la dynamique de l'oscillateur non couplé est donnée par :

$$\ddot{x} = A\dot{x} - B\dot{x}^3 - \omega^2 x - C + Hf(\tau) + \text{sign}(\dot{x})(\alpha\dot{x} + \delta x + \kappa + \mu f(\tau)), \quad (2.25)$$

où les coefficients  $A, B, \omega^2, C, H, \alpha, \delta, \kappa$  et  $\mu$  sont obtenus en utilisant les formules données à la suite de l'équation (2.24).

La fonction  $\text{sign}(\dot{x})$  est défini ainsi qu'il suit :

$$\begin{cases} \text{sign}(\dot{x}) = 1 & \text{si } \dot{x} > 0, \\ \text{sign}(\dot{x}) = -1 & \text{si } \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

## 2.2 Dynamique de l'oscillateur salin sous excitation sinusoïdale et de bruit borné.

### 2.2.1 Évaluation analytique de l'amplitude des oscillations pour le cas non couplé

Pour évaluer analytiquement le comportement de l'amplitude des oscillations en fonction de certains paramètres, pour le cas non couplé, nous utilisons la méthode de la balance des harmoniques. La méthode de la balance des harmoniques est une approche fréquentielle utilisée pour calculer des solutions périodiques de systèmes dynamiques non linéaires. Son principe est basé sur la décomposition des variables en séries de Fourier, supposer que les solutions périodiques peuvent être exprimées comme une somme de termes harmoniques, transformer les équations du système en équations algébriques pour chaque fréquence harmonique.

Considérons que l'équation (2.25) admet une solution harmonique sous la forme suivante :

$$x(\tau) = m \cos(\Omega\tau) + n \sin(\Omega\tau) \quad (2.27)$$

Avec  $\chi = \sqrt{m^2 + n^2}$  l'amplitude de  $x(\tau)$ . En utilisant l'équation (2.27) dans l'équation (2.25) de telle sorte que, nous assimilons les termes en cosinus et sinus tout en négligeant les termes d'harmoniques supérieurs à un. Ainsi, nous prenons en compte les cas où nous avons  $\text{sign}(\dot{x}) = 1$  et  $\text{sign}(\dot{x}) = -1$  et par la suite nous obtenons :

—  $\text{sign}(\dot{x}) = 1$

$$\begin{cases} (-\Omega^2 - (-\omega^2 + \delta)) m + \left(\frac{3}{4}B\Omega^3\chi^2 - (A + \alpha)\Omega\right) n + \frac{1}{2}(H + \mu) = 0 \\ -\left(\frac{3}{4}B\Omega^3\chi^2 - (A + \alpha)\Omega\right) m + (-\Omega^2 - (-\omega^2 + \delta)) n = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

—  $\text{sign}(\dot{x}) = -1$

$$\begin{cases} (-\Omega^2 - (-\omega^2 - \delta)) m + \left(\frac{3}{4}B\Omega^3\chi^2 - (A - \alpha)\Omega\right) n + \frac{1}{2}(H - \mu) = 0 \\ -\left(\frac{3}{4}B\Omega^3\chi^2 - (A - \alpha)\Omega\right) m + (-\Omega^2 - (-\omega^2 - \delta)) n = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Nous associons les deux de la manière suivante :

$$\begin{cases} (\omega^2 - \Omega^2 \mp \delta) m + \left(\frac{3}{4}B\Omega^3\chi^2 - (A \pm \alpha)\Omega\right) n + \frac{1}{2}(H \pm \mu) = 0 \\ -\left(\frac{3}{4}B\Omega^3\chi^2 - (A \pm \alpha)\Omega\right) m + (\omega^2 - \Omega^2 \mp \delta) n = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

En posant

$$E = \frac{3}{4}B\Omega^3, L^\pm = (A \pm \alpha)\Omega, Q^\pm = \omega^2 - \Omega^2 \mp \delta, F^\pm = \frac{1}{2}(H \pm \mu).$$

Par la suite nous attribuons à  $j$  le signe + ou - selon la valeur de la fonction  $sign(\dot{x})$  ainsi, nous obtenons de façon générale :

$$\begin{cases} Q^j m + (E\chi^2 - L^j) n + F^j = 0 \\ -(E\chi^2 - L^j) m + Q^j n = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Après des manipulations mathématiques, nous obtenons deux équations d'amplitude correspondant aux différents signes pris pour évaluer la fonction  $sign(\dot{x})$  que nous généralisons dans l'équation suivante :

$$E^2\chi^6 - 2EL^j\chi^4 + (Q^{j2} + L^{j2})\chi^2 - F^{j2} = 0 \quad (2.32)$$

### 2.2.2 Évaluation analytique de l'amplitude des oscillations pour le couplage de deux récipients internes

Dans ce paragraphe, nous avons pour objectif d'établir les équations d'amplitude analytiquement dans le modèle couplé avec deux récipients internes. Nous employons la méthode de la balance des harmoniques. Notons que, les équations qui traduisent la dynamique d'un modèle couplé avec deux récipients internes sont données par :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = A_1\dot{x}_1 - B_1\dot{x}_1^3 - \omega_1^2 x_1 - C_1 - \lambda_{12}x_2 + H_1f(\tau) \\ + sign(\dot{x}_1) (\alpha_1\dot{x}_1 + \delta_1x_1 + \kappa_1 + \eta_{12}x_2 + \mu_1f(\tau)) \\ \ddot{x}_2 = A_2\dot{x}_2 - B_2\dot{x}_2^3 - \omega_2^2 x_2 - C_2 - \lambda_{21}x_1 + H_2f(\tau) \\ + sign(\dot{x}_2) (\alpha_2\dot{x}_2 + \delta_2x_2 + \kappa_2 + \eta_{21}x_1 + \mu_2f(\tau)) \end{cases} \quad (2.33)$$

Nous supposons les solutions  $x_i(\tau)$  sous forme harmonique telle que :

$$x_1(\tau) = m_1 \cos(\Omega\tau) + n_1 \sin(\Omega\tau) \quad (2.34)$$

$$x_2(\tau) = m_2 \cos(\Omega\tau) + n_2 \sin(\Omega\tau) \quad (2.35)$$

avec  $\chi_1 = \sqrt{m_1^2 + n_1^2}$  et  $\chi_2 = \sqrt{m_2^2 + n_2^2}$ . En utilisant les équations (2.34)-(2.35) dans l'équation (2.33) de telle sorte que, nous assimilons les termes en cosinus et sinus tout en négligeant les termes d'harmoniques supérieurs à un. Ainsi, en prenant en compte les cas où nous avons  $sign(\dot{x}) = 1$  et  $sign(\dot{x}) = -1$  nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}B_1\Omega^3\chi_1^2n_1 + (\omega_1^2 - \Omega^2 - \delta_1)m_1 - (A_1 + \alpha_1)\Omega n_1 - (\eta_{12} - \lambda_{12})m_2 + \frac{(H_1 + \mu_1)}{2} = 0 \\ -\frac{3}{4}B_1\Omega^3\chi_1^2m_1 + (\omega_1^2 - \Omega^2 - \delta_1)n_1 - (A_1 + \alpha_1)\Omega m_1 - (\eta_{12} - \lambda_{12})n_2 = 0 \\ \frac{3}{4}B_1\Omega^3\chi_1^2n_1 + (\omega_1^2 - \Omega^2 + \delta_1)m_1 - (A_1 - \alpha_1)\Omega n_1 - (-\eta_{12} - \lambda_{12})m_2 + \frac{(H_1 - \mu_1)}{2} = 0 \\ -\frac{3}{4}B_1\Omega^3\chi_1^2m_1 + (\omega_1^2 - \Omega^2 + \delta_1)n_1 - (A_1 - \alpha_1)\Omega m_1 - (-\eta_{12} - \lambda_{12})n_2 = 0 \\ \frac{3}{4}B_2\Omega^3\chi_2^2n_2 + (\omega_2^2 - \Omega^2 - \delta_2)m_2 - (A_2 + \alpha_2)\Omega n_2 - (\eta_{21} - \lambda_{21})m_1 + \frac{(H_2 + \mu_2)}{2} = 0 \\ -\frac{3}{4}B_2\Omega^3\chi_2^2m_2 + (\omega_2^2 - \Omega^2 - \delta_2)n_2 - (A_2 + \alpha_2)\Omega m_2 - (\eta_{21} - \lambda_{21})n_1 = 0 \\ \frac{3}{4}B_2\Omega^3\chi_2^2n_2 + (\omega_2^2 - \Omega^2 + \delta_2)m_2 - (A_2 - \alpha_2)\Omega n_2 - (-\eta_{21} - \lambda_{21})m_1 + \frac{(H_2 - \mu_2)}{2} = 0 \\ -\frac{3}{4}B_2\Omega^3\chi_2^2m_2 + (\omega_2^2 - \Omega^2 + \delta_2)n_2 - (A_2 - \alpha_2)\Omega m_2 - (-\eta_{21} - \lambda_{21})n_1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Le système (2.36) est réduit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\omega_1^2 - \Omega^2 \mp \delta_1) m_1 + \left(\frac{3}{4}B_1\Omega^3\chi_1^2 - (A_1 \pm \alpha_1)\Omega\right) n_1 + (\lambda_{12} \mp \eta_{12}) m_2 + \frac{(H_1 \pm \mu_1)}{2} = 0 \\ -\left(\frac{3}{4}B_1\Omega^3\chi_1^2 - (A_1 \pm \alpha_1)\Omega\right) m_1 + (\omega_1^2 - \Omega^2 \mp \delta_1) n_1 + (\lambda_{12} \mp \eta_{12}) n_2 = 0 \\ (\omega_2^2 - \Omega^2 \mp \delta_2) m_2 + \left(\frac{3}{4}B_2\Omega^3\chi_2^2 - (A_2 \pm \alpha_2)\Omega\right) n_2 + (\lambda_{21} \mp \eta_{21}) m_1 + \frac{(H_2 \pm \mu_2)}{2} = 0 \\ -\left(\frac{3}{4}B_2\Omega^3\chi_2^2 - (A_2 \pm \alpha_2)\Omega\right) m_2 + (\omega_2^2 - \Omega^2 \mp \delta_2) n_2 + (\lambda_{21} \mp \eta_{21}) n_1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.37)$$

En posant

$$E_i = \frac{3}{4}B_i\Omega^3, L_i^j = (A_i \pm \alpha_i)\Omega, Q_i^j = \omega_i^2 - \Omega^2 \mp \delta_i, R_i^j = \lambda_{ik} \mp \eta_{ik}, \text{ et } F_i^j = \frac{1}{2}(H_i \pm \mu_i).$$

$i \in \{1; 2\}$  et  $k \in \{1; 2\}$  avec  $k \neq i$ .

Notons que  $j$  représente l'exposant soit  $-$ , soit  $+$  selon la valeur prise par la fonction  $sign$ .

En combinant les équations du système (2.37), après les calculs nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_1^2 E_2^2 \chi_2^4 - 2E_1^2 L_2^j E_2 \chi_2^2 + E_1^2 L_2^{j2} + E_1^2 Q_2^{j2}) \chi_1^6 + [-2R_1^j R_2^j L_2^j E_1 - 2L_1^j E_1 L_2^{j2} \\ - 2L_1^j E_1 Q_2^{j2} + (2R_1^j R_2^j E_1 E_2 + 4L_1^j L_2^j E_1 E_2) \chi_2^2 - 2L_1^j E_1 E_2^2 \chi_2^4] \chi_1^4 \\ + [L_1^{j2} L_2^{j2} + L_1^{j2} Q_2^{j2} + 2R_1^j R_2^j L_1^j L_2^j + Q_1^{j2} L_2^{j2} + (Q_1^j Q_2^j - R_1^j R_2^j)^2 \\ + (-2L_1^{j2} L_2^j E_2 - 2L_1^j R_1^j R_2^j E_2 - 2L_2^j Q_1^{j2} E_2) \chi_2^2 + (L_1^{j2} E_2^2 + E_2^2 Q_1^{j2}) \chi_2^4] \chi_1^2 \\ - F_1^{j2} E_2^2 \chi_2^4 + 2F_1^{j2} L_2^j E_2 \chi_2^2 - (-R_1^j F_2^j + F_1^j Q_2^j)^2 - F_1^{j2} L_2^{j2} = 0 \\ (E_1^2 E_2^2 \chi_1^4 - 2E_2^2 L_1^j E_1 \chi_1^2 + E_2^2 L_1^{j2} + E_2^2 Q_1^{j2}) \chi_2^6 + [-2R_1^j R_2^j L_1^j E_2 - 2L_2^j E_2 L_1^{j2} \\ - 2L_2^j E_2 Q_1^{j2} + (2R_1^j R_2^j E_1 E_2 + 4L_1^j L_2^j E_1 E_2) \chi_1^2 - 2L_2^j E_2 E_1^2 \chi_1^4] \chi_2^4 \\ + [L_1^{j2} L_2^{j2} + L_1^{j2} Q_1^{j2} + 2R_1^j R_2^j L_1^j L_2^j + Q_2^{j2} L_1^{j2} + (Q_1^j Q_2^j - R_1^j R_2^j)^2 \\ + (-2L_2^{j2} L_1^j E_1 - 2L_2^j R_1^j R_2^j E_1 - 2L_1^j Q_2^{j2} E_1) \chi_1^2 + (L_2^{j2} E_1^2 + E_1^2 Q_2^{j2}) \chi_1^4] \chi_2^2 \\ - F_2^{j2} E_1^2 \chi_1^4 + 2F_2^{j2} L_1^j E_1 \chi_1^2 - (-R_2^j F_1^j + F_2^j Q_1^j)^2 - F_2^{j2} L_1^{j2} = 0 \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Les amplitudes approximatives des oscillations peuvent être prises comme les moyennes des racines fournies par le système (2.38). Ces racines sont obtenues en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson.

### 2.2.3 Évaluation analytique de la densité de probabilité

En raison des fluctuations aléatoires environnementales inhérentes aux systèmes naturels, l'infusion et le retrait d'eau pure dans le récipient sont sinusoïdaux au cours du temps et fluctuent assez bruyamment. Nous supposons que cet apport d'eau pure à l'intérieur de la grande cuve est d'amplitude constante avec un déphasage  $\varphi(\tau)$  fluctuant bruyamment avec une fréquence  $\Omega$  telle qu'utilisée par Siewe et autres. [58] et Sengha et autres. [59] notamment :

$$\varphi(\tau) = \Omega\tau + \sqrt{\frac{2}{s}}W(\tau) + \phi. \quad (2.39)$$

Il en ressort de l'hypothèse ci-dessus que, la fonction d'excitation  $f(\tau)$  prend la forme

$$f(\tau) = \frac{1 + \xi(\tau)}{2} \quad (2.40)$$

où

$$\xi(\tau) = \cos \left[ \Omega\tau + \sqrt{\frac{2}{s}}W(\tau) + \phi \right], \quad (2.41)$$

est appelé bruit borné [58-61] ayant pour corrélation

$$R(t) = \langle \xi(\tau) \xi(\tau + t) \rangle = \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{|t|}{s} \right) \cos(\Omega t). \quad (2.42)$$

Dans cette section du travail, nous ne considérons qu'un seul oscillateur. Au moyen de la méthode de la moyenne stochastique, nous dérivons la fonction de densité de probabilité stationnaire pour l'amplitude d'un oscillateur. À cet effet, nous utilisons l'équation (2.25) et nous posons les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned}\theta(\tau) &= \omega\tau + \phi(\tau), \\ x(\tau) &= \chi(\tau) \cos(\theta(\tau)), \\ \dot{x}(\tau) &= -\omega\chi(\tau) \sin(\theta(\tau)).\end{aligned}\tag{2.43}$$

En remplaçant les relations (2.43) dans l'équation (2.25), après des manipulations mathématiques, nous obtenons un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\chi} = f_1(\chi, \phi, \tau) + g_{11}(\chi, \phi, \tau) \xi(\tau) \\ \dot{\phi} = f_2(\chi, \phi, \tau) + g_{21}(\chi, \phi, \tau) \xi(\tau) \end{cases}\tag{2.44}$$

avec

$$\begin{aligned}f_1(\chi, \phi) &= A\chi(\sin\theta)^2 + \text{sign}(\sin\theta) \left( -\alpha\chi(\sin\theta)^2 + \frac{\delta\chi \cos\theta \sin\theta}{\omega} \right) \\ &+ \frac{(C - \frac{1}{2}H + \text{sign}(\sin\theta)(\kappa + \frac{1}{2}\mu)) \sin\theta}{\omega} - B\omega^2\chi^3(\sin\theta)^4,\end{aligned}\tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}f_2(\chi, \phi) &= A \sin\theta \cos\theta + \text{sign}(\sin\theta) \left( -\alpha \sin\theta \cos\theta + \frac{\delta(\cos\theta)^2}{\omega} \right) \\ &+ \frac{(C - \frac{1}{2}H + \text{sign}(\sin\theta)(\kappa + \frac{1}{2}\mu)) \cos\theta}{\omega\chi} - B\omega^2\chi^2(\sin\theta)^3 \cos\theta,\end{aligned}\tag{2.46}$$

$$g_{11}(\chi, \phi) = \frac{1}{2} (\text{sign}(\sin\theta) \mu - H) \frac{\sin\theta}{\omega},\tag{2.47}$$

$$g_{21}(\chi, \phi) = \frac{1}{2} (\text{sign}(\sin\theta) \mu - H) \frac{\cos\theta}{\omega\chi}.\tag{2.48}$$

En utilisant l'approximation de diffusion de Markov [111], nous obtenons les équations de Îto suivantes :

$$\begin{cases} d\chi = m_1 dt + \sigma_1 dW_1 \\ d\phi = m_2 dt + \sigma_2 dW_2 \end{cases}\tag{2.49}$$

avec

$$m_1 = \frac{A\chi}{2} + \frac{2\kappa + \mu}{\omega\pi} - \frac{3}{8}B\omega^2\chi^3 + \frac{1}{16} \frac{s(1 + s^2(\Omega^2 + \omega^2))(\mu^2 + H^2)}{\omega^2\chi(1 + (\Omega + \omega)^2 s^2)(1 + (\Omega - \omega)^2 s^2)},\tag{2.50}$$

$$m_2 = 0, \quad (2.51)$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{8} \frac{s(1+s^2(\Omega^2+\omega^2))(\mu^2+H^2)}{\omega^2(1+(\Omega+\omega)^2s^2)(1+(\Omega-\omega)^2s^2)}, \quad (2.52)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\chi}. \quad (2.53)$$

Obtenus en exploitant les formules suivantes :

$$m_j = \left\langle f_j(X, \tau) + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial g_{jr}(X, \tau)}{\partial X_k} g_{kl}(X, t + \tau) R_{rl}(\tau) d\tau \right\rangle, \quad (2.54)$$

$$\sigma_{jr}\sigma_{kr} = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} g_{jr}(X, \tau) g_{kl}(X, t + \tau) R_{rl}(\tau) d\tau \right\rangle. \quad (2.55)$$

Où

$R_{rl}(\tau)$  sont les composants de la matrice de la covariance du bruit,

$\langle \rangle$  désigne la valeur moyenne définie pour une fonction  $f$  de période  $T$  par :

$$\langle f(\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) d\tau. \quad (2.56)$$

Nous constatons à l'équation (2.49) que  $d\chi$  ne dépend pas de  $\phi$ . Ainsi, nous pouvons développer une densité de probabilité  $P(\chi, \tau)$  associée à l'amplitude des oscillations  $\chi$  à l'instant  $\tau$  qui est gouvernée par l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov donnée par :

$$\frac{\partial P(\chi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \chi} (m_1 P(\chi, \tau)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} (\sigma_1^2 P(\chi, \tau)) \quad (2.57)$$

Dans un état stationnaire, la solution de l'équation (2.57) est donnée par :

$$P(\chi) = \frac{N}{\sigma_1^2} \exp \left[ 2 \int \frac{m_1}{\sigma_1^2} d\chi \right], \quad (2.58)$$

ce qui nous permet d'établir la fonction de densité de probabilité pour l'amplitude  $\chi$  donnée par :

$$P(\chi) = \frac{N_0 \chi}{\sigma_1^2} \exp \left[ \frac{1}{\sigma_1^2} \left( \frac{1}{2} A \chi^2 - \frac{3}{16} B \omega^2 \chi^4 + \frac{(4\kappa + 2\mu) \chi}{\omega \pi} \right) \right], \quad (2.59)$$

où  $N_0$  est le coefficient de normalisation. Il est évalué comme suit :

$$N_0 = \left( \int_0^\infty \frac{\chi}{\sigma_1^2} \exp \left[ \frac{1}{\sigma_1^2} \left( \frac{1}{2} A \chi^2 - \frac{3}{16} B \omega^2 \chi^4 + \frac{(4\kappa + 2\mu) \chi}{\omega \pi} \right) \right] d\chi \right)^{-1} \quad (2.60)$$

Remarquons que nous pouvons recourir à un schéma numérique pour estimer le coefficient de normalisation  $N_0$ . Pour cela, nous utilisons l'algorithme de Simpson qui est une technique de calcul numérique d'une intégrale, c'est-à-dire le calcul approché de l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle défini.

## 2.3 Méthodes numériques

La simulation numérique est la principale voie qui a été utilisée pour l'évaluation des performances et la validité du modèle présenté. Ce choix est dû à la difficulté d'obtenir le matériel pour l'expérimentation, car le modèle prend en compte une précision de rigueur sur les dimensions des instruments de laboratoire. Ce matériel ne se vend pas dans les marchés locaux et ne peut qu'être importé, ce qui coûte cher. Dans cette partie, nous présenterons les méthodes de calcul utilisées. Comme logiciel de simulation, nous avons utilisé MATLAB version 2016a et le compilateur Fortran 95. Le logiciel de mise en forme du mémoire a été latex, associé à l'éditeur de texte WinEdit.

### 2.3.1 Algorithme Runge-Kutta 4

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 est une méthode numérique couramment utilisée pour résoudre des équations différentielles ordinaires. Elle permet d'obtenir une solution approchée d'un problème d'équation différentielle ordinaire avec une précision similaire à celle obtenue par le développement en série de Taylor d'ordre 4 et repose sur une idée d'itération. Elle utilise plusieurs points intermédiaires pour calculer la valeur de  $x_{i+1}$  à partir de la valeur  $x_i$ . Elle est dite d'ordre 4, car elle utilise un développement en série de Taylor d'ordre 4, suivi d'une moyenne pondérée sur toutes les estimations de  $x_{i+1}$  ainsi réalisées.

$$\text{Pour un problème de type } \begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = f(\tau, y), \\ y(\tau_0) = y_0, \end{cases}$$

une intégration avec un pas  $h$  sur le temps, avec un temps définie  $\tau_i = \tau_0 + ih$  aura une séquence d'opération suivante :

$$U_0 = y_0, \tag{2.61}$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.62)$$

pour  $i = 1, \dots, n-1$  le calcul sera fait pour une approximation de la solution  $U_n = y_n$ . Les coefficients  $k_1, k_2, k_3, k_4$  sont calculés à chaque itération par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(\tau_i, U_i), \\ k_2 &= f\left(\tau_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(\tau_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(\tau_i + h, U_i + hk_3). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Cette méthode est à pas constant, et est très utilisée pour réaliser les intégrations numériques. Elle a pour principal avantage d'avoir une précision en  $h^4$  et converge rapidement, néanmoins elle reste très coûteuse en durée de calcul. Elle nécessite de manière itérative 4 fois la fonction  $f$ . Nous l'employons dans nos travaux dans le but de procéder à l'intégration des équations non linéaires du second ordre dont nous faisons face dans le cadre de nos analyses. Notamment le cas non couplé, le cas couplé par deux récipients internes et le cas couplé à trois récipients internes.

#### ↔ Cas du modèle non couplé

L'équation (2.25) est transformé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{y} \\ \dot{y} = Ay - By^3 - \omega^2x - C + Hf(\tau) \\ + \text{sign}(y)(\alpha y + \delta x + \kappa + \mu f(\tau)) \end{cases} \quad (2.64)$$

#### ↔ Cas du modèle couplé avec deux récipients internes

L'équation (2.33) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y}_1 \\ \dot{y}_1 = A_1y_1 - B_1y_1^3 - \omega_1^2x_1 - C_1 - \lambda_{12}x_2 + H_1f(\tau) \\ + \text{sign}(y_1)(\alpha_1y_1 + \delta_1x_1 + \kappa_1 + \eta_{12}x_2 + \mu_1f(\tau)) \\ \dot{x}_2 = \dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 = A_2y_2 - B_2y_2^3 - \omega_2^2x_2 - C_2 - \lambda_{21}x_1 + H_2f(\tau) \\ + \text{sign}(y_2)(\alpha_2y_2 + \delta_2x_2 + \kappa_2 + \eta_{21}x_1 + \mu_2f(\tau)) \end{cases} \quad (2.65)$$

Les solutions obtenues par l'algorithme Runge-Kutta d'ordre 4 sur ces équations nous permettent d'anticiper sur le calcul numérique des quantités telles que l'amplitude des oscillations, la période des oscillations, le plus grand exposant de Lyapunov dans une certaine mesure.

### 2.3.2 Algorithme de Runge-Kutta pour des équations stochastiques

Bien qu'il existe plusieurs méthodes et algorithmes pour résoudre des équations différentielles stochastiques, nous avons opté pour l'algorithme de Runge-Kutta spécifiquement celui de Runge-Kutta d'ordre 2. En considérant le système d'équation stochastique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(\tau, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(\tau, x, y) + \xi(\tau) \end{cases}, \quad (2.66)$$

avec des conditions initiales telles que :

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}; \quad (2.67)$$

où  $\xi(\tau)$  est un bruit blanc gaussien qui fluctue avec le temps et avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \xi(\tau) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(\tau) \xi(\tau + t) \rangle &= 2D\delta(t) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Suivant Honeycutt [68] l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 donne les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} (F_1 + F_2), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} (G_1 + G_2) + (2Dh)^{\frac{1}{2}} \psi, \end{aligned} \quad (2.69)$$

pour  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Les coefficients  $F_1, F_2, G_1, G_2$  sont évalués par les termes suivants :

$$\begin{aligned}
F_1 &= f(t, x_i, y_i), \\
G_1 &= g(t, x_i, y_i), \\
F_2 &= f\left(t_i + h, x_i + hF_1, y_i + hG_1 + (2Dh)^{\frac{1}{2}}\psi\right), \\
G_2 &= g\left(t_i + h, x_i + hF_1, y_i + hG_1 + (2Dh)^{\frac{1}{2}}\psi\right)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

où  $h$  est le pas d'intégration,  $\psi$  est un nombre normalisé distribué aléatoirement.

Afin de vérifier l'efficacité de la méthode de la moyenne stochastique, la transition stationnaire pour l'amplitude  $\chi(\tau)$  est obtenue par le moyen des simulations de Monte-Carlo. Également connue sous le nom de méthode de Monte-Carlo, c'est une technique mathématique utilisée pour estimer les résultats possibles d'un événement incertain. Contrairement à un modèle de prévision classique, la simulation de Monte-Carlo prédit un ensemble de résultats basé sur une distribution de probabilité pour chaque variable incertaine. Elle utilise des nombres aléatoires pour générer des scénarios possibles. Ainsi en répétant le processus avec différentes valeurs aléatoires, elle produit un grand nombre de résultats probables. Suivant Honeycutt [68,69], l'équation (2.25) est transformée sous forme de système dynamique stochastique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = Ay - By^3 - \omega^2x - C + \frac{H}{2}(1 + \cos \varphi) \\ \quad + \text{sign}(y) \left( \alpha y + \delta x + \kappa + \frac{\mu}{2}(1 + \cos \varphi) \right) \\ \dot{\varphi} = \Omega + \sqrt{\frac{2}{s}} \zeta(\tau) \end{cases} \tag{2.71}$$

qui est ensuite résolu par l'algorithme de Runge-Kutta stochastique ordre 2 [68] avec le même temps que ci-dessus. Ensuite, une évaluation de l'amplitude aléatoire  $\chi(\tau)$  est calculée comme  $\chi(\tau) = \sqrt{(x(\tau))^2 + \frac{(\dot{x}(\tau))^2}{\omega^2}}$ .

### 2.3.3 Algorithme de Newton-Raphson

C'est une méthode largement utilisée pour résoudre les équations algébriques non linéaires. Elle consiste à introduire une suite  $(x_n)$  d'approximation successive de l'équation  $f(x) = 0$

— on part d'une valeur  $x_0$  proche de la solution.

- à partir de  $x_0$ , on calcule un nouveau terme  $x_1$  de la manière suivante : on trace la tangente à la courbe de  $f$  en  $x_0$ . Cette tangente coupe l'axe des abscisses en  $x_1$ .
- On réitère ce procédé en calculant  $x_2$  en remplaçant  $x_0$  par  $x_1$ , puis  $x_3$  remplaçant  $x_1$  par  $x_2$  et ainsi de suite .....

Pour établir la formule de récurrence,  $x_{n+1}$  est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe en  $x_n$  et l'axe des abscisses.

L'équation de la tangente en  $x_n$  est :

$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ . Cette tangente coupe l'axe des abscisses en  $y = 0$ , On obtient la formule de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.72)$$

Lorsque la suite converge, elle converge de façon quadratique. C'est-à-dire que le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération. On prendra comme critère d'arrêt pour une précision  $\varepsilon$  avec

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 10^\varepsilon. \quad (2.73)$$

Nous utiliserons cet algorithme pour résoudre les équations d'amplitudes obtenues, à fin d'apporter une analyse sur leur comportement de certain paramètre du modèle. Le choix de cet algorithme pour nos travaux est dû à ces multiples avantages notamment :

- La convergence rapide vers la racine de la fonction, en particulier lorsque la valeur initiale est choisie judicieusement.
- Efficacité : Une fois que l'algorithme a convergé, il peut fournir une approximation très précise de la racine de la fonction en un nombre relativement faible d'itérations.
- Adaptabilité : L'algorithme de Newton-Raphson peut être utilisé pour trouver des racines de fonctions non linéaires, ce qui le rend applicable à une grande variété de problèmes mathématiques et scientifiques.

En résumé, bien que l'algorithme de Newton-Raphson soit une méthode puissante pour trouver les zéros de fonctions réelles, il présente des limitations liées à la sensibilité à la valeur initiale, au calcul de la dérivée, à la convergence et à la complexité des fonctions à résoudre. Ces limitations doivent être prises en compte lors de l'utilisation de cet algorithme dans des contextes pratiques. Il est important

de noter que l'algorithme de Newton-Raphson peut ne pas converger dans certaines situations, notamment si la valeur initiale est mal choisie ou si la fonction présente des singularités ou des points d'inflexion à proximité de la racine recherchée.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le dispositif de l'oscillateur salin soumis à une perturbation sinusoïdale et/ou avec un bruit coloré borné, ainsi que celui des oscillateurs salins couplés périodiquement excités. Les équations régissant les mouvements oscillatoires qui ont lieu dans ces deux dispositifs ont été établis. Ceci après avoir eu à évoquer les hypothèses simplificatrices prises en considération. Par la suite, à partir des méthodes analytiques, nous avons établi les équations d'amplitude, la densité de probabilité qui nous permettront d'étudier l'influence du bruit d'une part et de la force périodique d'autre part dans notre système. Les méthodes de calculs numériques utilisées ont été décrites ainsi leurs implémentations au modèle. Enfin, nous avons présenté les logiciels utilisés pour la simulation numérique des équations de ces systèmes dynamiques à fin d'obtenir des résultats que nous analyserons par des discussions au chapitre 3.

# Chapitre 3

## RÉSULTATS ET DISCUSSION

### Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus de l'étude de la réponse dynamique et probabiliste de l'oscillateur salin périodiquement excité grâce à une perturbation sinusoïdale associée à un bruit borné au moyen des simulations numériques. Nous rappelons que la perturbation consiste à introduire et retirer un volume constant d'eau pure dans le réservoir large contenant de l'eau pure. À la suite de ces résultats, nous formulons des interprétations relatives au comportement observé. Pour ce faire, l'oscillateur a été modélisé dans le chapitre précédent grâce à un système d'équations différentielles non linéaires de type Filippov. Dans les paragraphes qui suivent, nous étudierons d'abord la réponse et la stabilité du modèle d'un oscillateur unique, ensuite la réponse du modèle des oscillateurs salins couplés. Nous nous limiterons au cas de deux et trois oscillateurs internes couplés dans le cadre de ce travail. Par la suite, nous présenterons les résultats relatifs à l'effet de l'excitation sinusoïdale sur la dynamique du modèle simple tout en évaluant également l'effet de la géométrie de l'orifice. La réponse probabiliste du modèle soumis au bruit borné est explorée en utilisant la méthode de la moyenne stochastique.

### 3.1 Dynamique et stabilité du modèle d'un oscillateur salin soumis à une excitation sinusoïdale.

#### 3.1.1 Réponse du modèle de l'oscillateur salin périodiquement excité.

Nous considérons dans cette sous-section qu'un seul réservoir est plongé dans l'eau pure. Ce dispositif expérimental a été présenté au second chapitre et modélisé par une équation différentielle du second ordre non linéaire de type Filippov (équation (2.25)). En prenant les conditions initiales à  $\tau = 0.0$ ,  $x(0) = 0.0$ ,  $y(0) = -0.000001$  et un pas d'intégration  $h = 0.0005$ . Le calcul numérique est basé sur une intégration du système d'équations (2.64) en utilisant l'algorithme de Runge Kutta d'ordre 4 afin de déterminer la réponse du modèle. Tout en prenant les valeurs des paramètres du système telles que :  $a = 0.05\text{cm}$ ,  $b = 3.00\text{cm}$ ,  $c = 10.0\text{cm}$ ,  $d = 0.2\text{cm}$ ,  $r_0 = 0.25\text{cm}$ ,  $h_s = 5.0\text{cm}$ ,  $\rho_s = 1.11\text{g/cm}^3$ ,  $\rho_w = 1.00\text{g/cm}^3$ ,  $\nu_s = 1.23 \times 10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $\nu_w = 1.00 \times 10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $g = 980.0\text{cm/s}^2$ ,  $\beta = 46.0\text{s}^{-1}$ ,  $\gamma = 12.0\text{cm}^{-2}.\text{s}$ ,  $V_0 = 2\text{cm}^3$ ,  $\Omega = 0.26\text{Hz}$ . Notont que  $S_i = \pi b^2$  et  $S_0 = \pi (c^2 - (b + r_0)^2)$ .

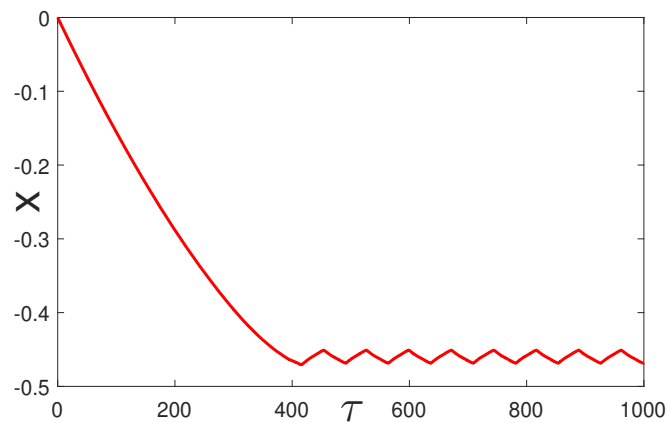


FIGURE 3.1 – Évolution temporelle de la surface de l'eau salée.

La figure 3.1 présente le mouvement de la surface libre de la solution salée dans le récipient interne qui est oscillatoire et uniforme à partir d'un certain temps d'écoulement.

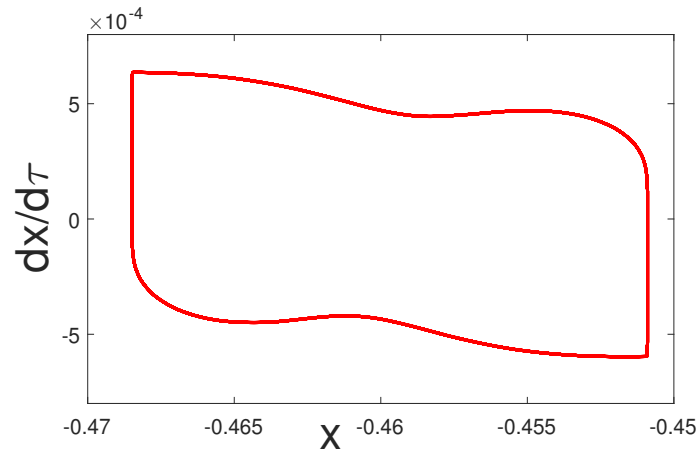
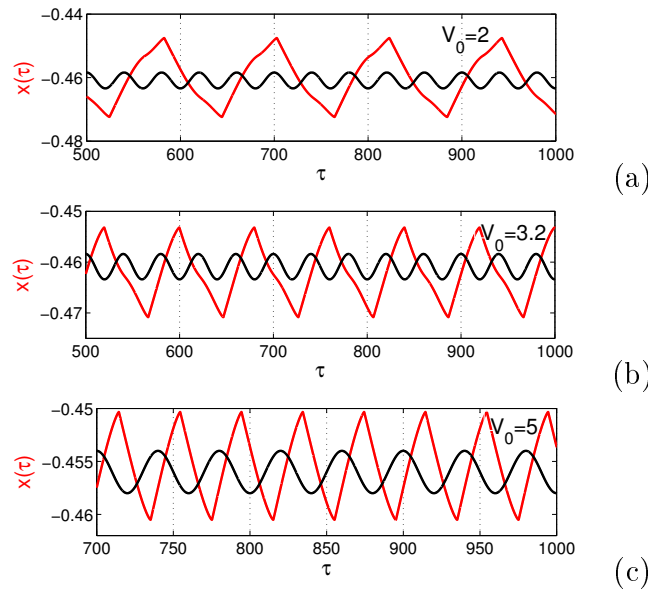


FIGURE 3.2 – Diagramme de l'espace de phase.

Sur cette figure, nous observons premièrement une décharge lente de la solution salée dans le grand réservoir contenant de l'eau pure, ce qui correspond à la phase transitoire. Cet écoulement est dû à la différence de densité des deux fluides qui créaient une instabilité dite de Rayleigh. Ensuite le système entame une série d'oscillations périodiques à cycle limite dans l'espace de phase (voire figure 3.2), donc les caractéristiques sont influencées par la perturbation. Ces oscillations se manifestent par un jet d'eau pure orienté du bas vers le haut à travers l'orifice, suivi d'un jet d'eau salée dans le sens contraire de la solution salée dans l'orifice. Le modèle de Filippov établi qui prend en compte le changement alterné de la nature du fluide dans l'orifice, imite la tendance expérimentale qui se manifeste premièrement par un long écoulement ascendant de la solution salée suivit des oscillations.

### 3.1.2 Effet de l'excitateur sinusoïdal sur la réponse du modèle.

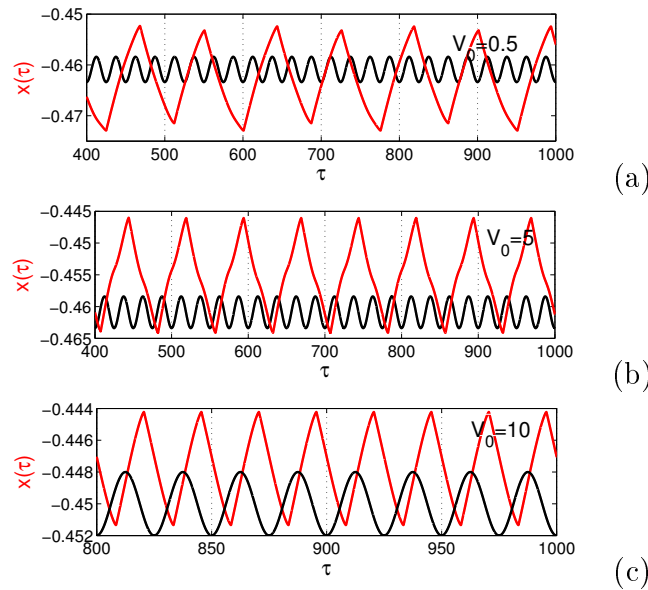
Par des simulations numériques, nous observons que l'excitation harmonique influence qualitativement la dynamique de l'oscillateur salin. En effet, pour une période  $T$  de l'excitateur, l'oscillateur salin peut exhiber sous l'influence de l'excitation sinusoïdale, des oscillations quasi-périodiques, des oscillations sous-harmoniques et des oscillations de période  $T$ . Tout dépend considérablement de la valeur du volume  $V_0$  de l'excitateur. Les figures 3.3 (a, b, c) illustrent des évolutions temporelles de période  $3T$ ,  $2T$  et  $T$ , obtenues pour  $V_0 = 2\text{cm}^3$ ,  $V_0 = 3.2\text{cm}^3$  et  $V_0 = 5\text{cm}^3$  respectivement. Il est à noter que  $T = 40\text{s}$  pour ces figures. Il en ressort de ces résultats que lorsque le volume  $V_0$  de l'excitation



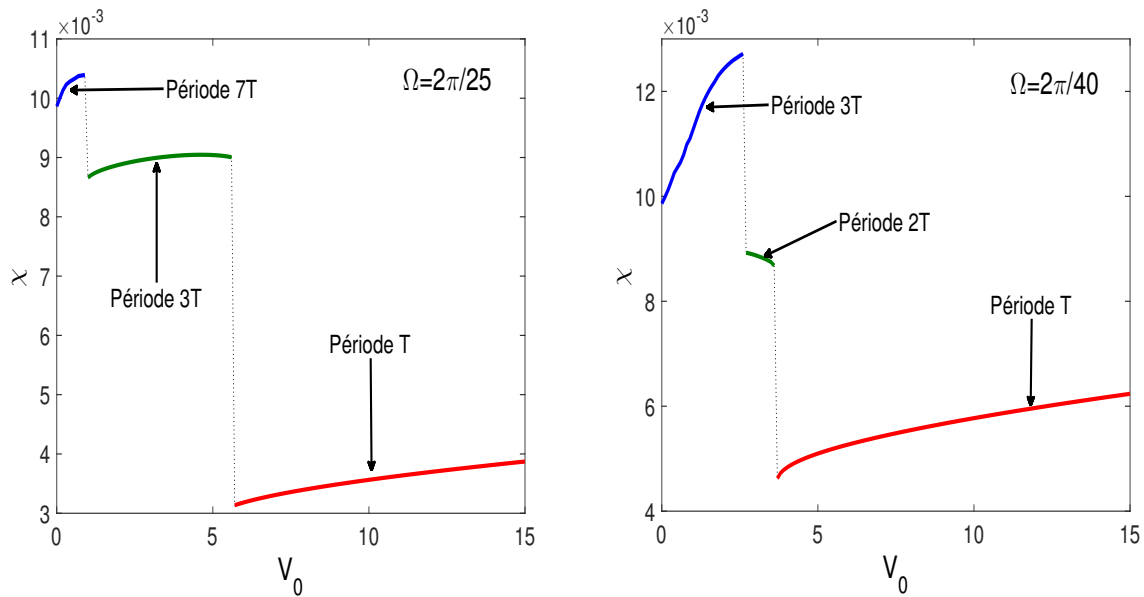
**FIGURE 3.3** – Évolutions temporelles en couleur rouge de l'oscillateur pour différentes valeurs du volume d'excitation et pour une fréquence d'excitation de  $\Omega = \frac{2\pi}{40}$ . (a) oscillation de période  $3T$  pour  $V_0 = 2 \text{ cm}^3$ , (b) oscillation de période  $2T$  pour  $V_0 = 3.2 \text{ cm}^3$  et (c) oscillation de période  $T$  pour  $V_0 = 5 \text{ cm}^3$ . Les courbes en couleur noire donnent l'allure de l'excitation.

est assez faible, les oscillations sous-harmoniques sont attendues. Cependant, on observe une réponse oscillatoire de période  $T$  lorsque le volume  $V_0$  de l'excitation est suffisamment grand ce qui traduit une résonance d'amplitude. Pour une valeur de la fréquence de  $\Omega = \frac{2\pi}{25}$ , nous avons d'autres modes d'oscillations sous-harmoniques pour des faibles valeurs de  $V_0$  comme illustré à la figure 3.4. Ces oscillations sous-harmoniques sont également remplacées par des oscillations de période  $T$  à mesure que  $V_0$  croît.

Dans le but d'examiner l'impact du volume  $V_0$  de l'excitation sur l'amplitude de la réponse de l'oscillateur, la figure 3.5 nous donne l'évolution de l'amplitude des oscillations en fonction du volume d'excitation  $V_0$ . Cette figure révèle que l'amplitude varie de façon continue avec  $V_0$  lorsque ce dernier demeure dans un mode d'oscillation bien précis. Cependant, il apparaît un saut d'amplitude à la limite de deux modes d'oscillations différentes. Les valeurs de  $V_0$  pour lesquelles ces sauts apparaissent dépendent de la fréquence comme on peut le voir sur la figure 3.5. De toute évidence, l'amplitude de l'oscillateur croît en fonction de  $V_0$  pour des oscillations de période  $T$  comme illustré sur la figure



**FIGURE 3.4** – Évolutions temporelles de l'oscillateur pour différentes valeurs du volume d'excitation et pour une fréquence d'excitation de  $\Omega = \frac{2\pi}{25}$ . (a) oscillation de période  $7T$  pour  $V_0 = 0.5 \text{ cm}^3$ , (b) oscillation de période  $3T$  pour  $V_0 = 5 \text{ cm}^3$  et (c) oscillation de période  $T$  pour  $V_0 = 10 \text{ cm}^3$ .



**FIGURE 3.5** – Variation de l'amplitude de l'oscillateur en fonction du volume d'excitation pour des fréquences  $\Omega = \frac{2\pi}{40}$  et  $\Omega = \frac{2\pi}{25}$

3.6. Dans ce mode d'oscillation, l'amplitude de la réponse croît avec le rayon de l'orifice tout comme en absence de l'excitation (voir figure 3.8) Concernant l'effet de la fréquence

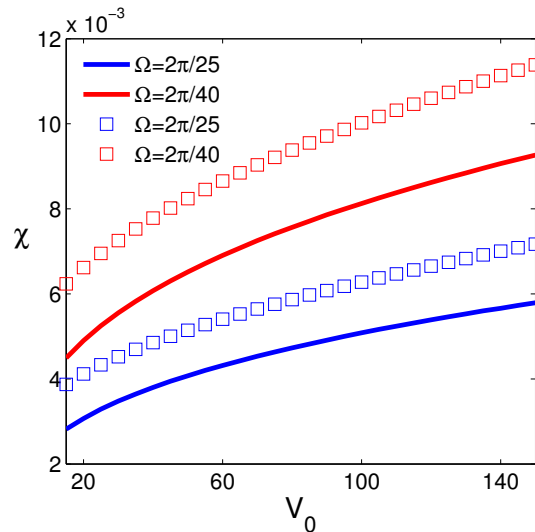


FIGURE 3.6 – Concordance entre les résultats numériques (courbes continues) et les résultats analytiques (courbes de carrés) pour deux fréquences  $\Omega = \frac{2\pi}{25}$  et  $\Omega = \frac{2\pi}{40}$ .

de l'excitation, la figure 3.7 présente une courbe de réponse de l'amplitude en fonction de la fréquence où l'on observe une décroissance de l'amplitude sur une large bande de fréquences, à partir d'une valeur maximale de l'amplitude pour une fréquence très basse. Ce résultat a été vérifié en utilisant une méthode analytique, notamment la balance des harmoniques qui a permis au second chapitre d'obtenir les équations d'amplitudes.

L'utilisation de l'algorithme de Newton-Raphson permet de résoudre chacune des équations du système d'équations (2.32) constituant le système d'équations aux amplitudes. Pour chaque valeur de la fréquence de l'excitateur, nous calculons la moyenne des amplitudes obtenues. Les résultats obtenus sont en accord avec la méthode numérique, cela est présenté par la figure 3.7. La littérature a révélé que l'amplitude finie des oscillations dépendait également de la géométrie des réservoirs. Pour ce modèle, l'amplitude des oscillations augmente avec le rayon de l'orifice (voir figure 3.8). Cette croissance est plus significative par rapport au cas où l'excitation est retirée, ce qui correspond à  $V_0 = 0$ . En ce qui concerne la profondeur de l'orifice, on observe plutôt une décroissance de l'amplitude lorsque la longueur de l'orifice augmente en présence de l'excitateur et une croissance en absence de l'excitateur.

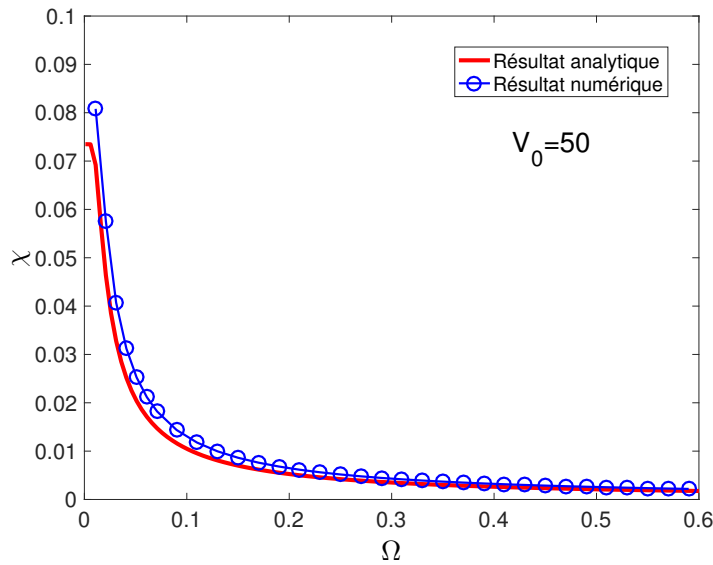


FIGURE 3.7 – Variation de l'amplitude de l'oscillateur en fonction de la fréquence de l'excitateur.

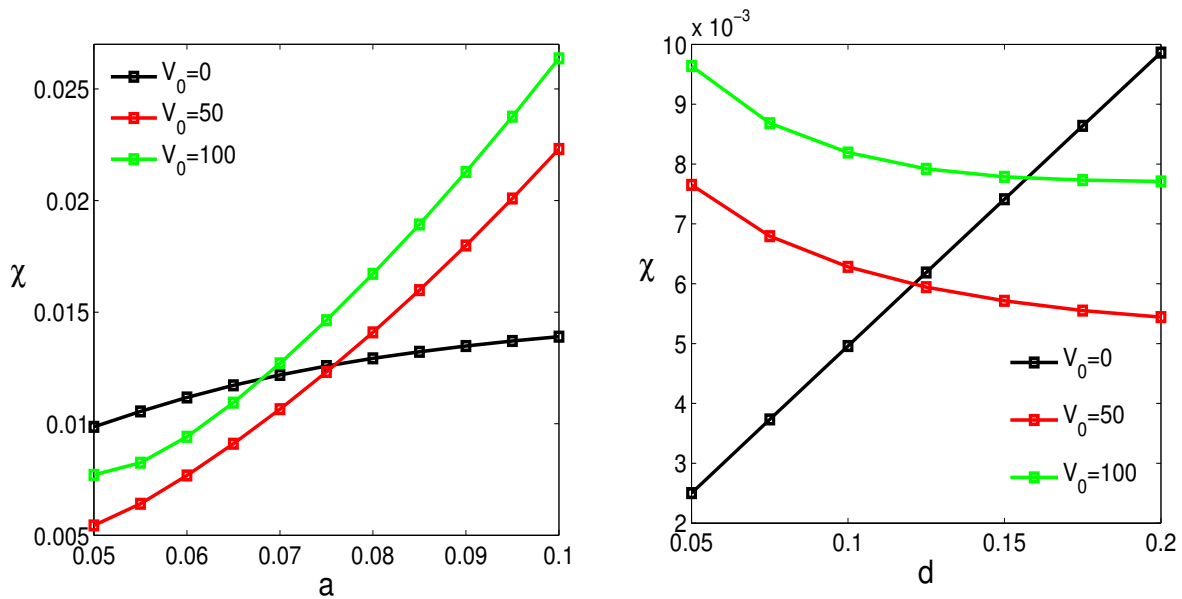


FIGURE 3.8 – Dépendance de l'amplitude de l'oscillateur à l'égard du rayon  $a$  et de la profondeur  $d$  de l'orifice.

En somme, l'effet de l'excitateur agit d'une manière ou d'une autre sur l'écoulement rythmique observé dans l'orifice du récipient. Il serait intéressant d'analyser l'état de stabilité de l'oscillateur salin en présence de l'excitation sinusoïdale. Pour atteindre

cet objectif, nous utilisons le plus grand exposant de Lyapunov qui quantifie le taux de divergence exponentiel des trajectoires initialement proches et constitue donc un outil majeur de prédiction de l'instabilité et de l'émergence du chaos.

### 3.1.3 Étude de la stabilité linéaire au sens de Lyapunov

Il a été montré que l'oscillateur salin non perturbé est assez stable. Toute trajectoire converge très rapidement vers le cycle limite [23,24,28,31]. Il est d'un grand intérêt d'analyser la stabilité de l'oscillateur excité périodiquement. En conséquence, nous avons calculé le plus grand exposant de Lyapunov [57]. En soumettant le système à de faibles perturbations, il subit de faible variation. Notre modèle étant défini par l'équation (2.25), l'effet de perturbation ferait varier la position de la surface libre de la solution salée. Dans la mesure où à un instant  $\tau$  la surface est repérée à une certaine position  $x$ . À la suite d'une perturbation pendant un court instant  $t_1$  le système subit un déplacement  $u$ , ainsi à l'instant  $\tau + t_1$  la position de cette surface sera repérée à la position  $x + u$ . Ce formalisme nous permet grâce à l'équation du modèle d'établir l'équation variationnelle due à la perturbation qui est donnée par :

$$\ddot{u} = A\dot{u} - 3B\dot{x}^2u - \omega^2u + \text{sign}(\dot{u})(\alpha\dot{u} + \delta u), \tag{3.1}$$

d'où le système :

$$\begin{cases} \ddot{u} = A\dot{u} - 3B\dot{x}^2u - \omega^2u + \text{sign}(\dot{u})(\alpha\dot{u} + \delta u), \\ \ddot{x} = A\dot{x} - B\dot{x}^3 - \omega^2x - C + Hf(\tau) + \text{sign}(\dot{x})(\alpha\dot{x} + \delta x + \kappa + \xi f(\tau)). \end{cases} \tag{3.2}$$

Ce système pourra permettre après intégration grâce à l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 de calculer le plus grand exposant de Lyapunov en utilisant par la formule suivante :

$$\Lambda = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \ln \left( \frac{\|\vec{w}(\tau)\|}{\|\vec{w}(0)\|} \right). \tag{3.3}$$

Où  $\overrightarrow{w}(\tau)$  de coordonnées  $(\dot{u}(\tau), u(\tau))$  représente le vecteur perturbation qui sera pris comme de valeurs aléatoires et de norme unitaire à un instant  $\tau$  et  $\|\overrightarrow{w}(\tau)\|$  sa norme euclidienne, et  $\overrightarrow{w}(0)$  représente ce vecteur de perturbation à l'instant  $\tau = 0$ .

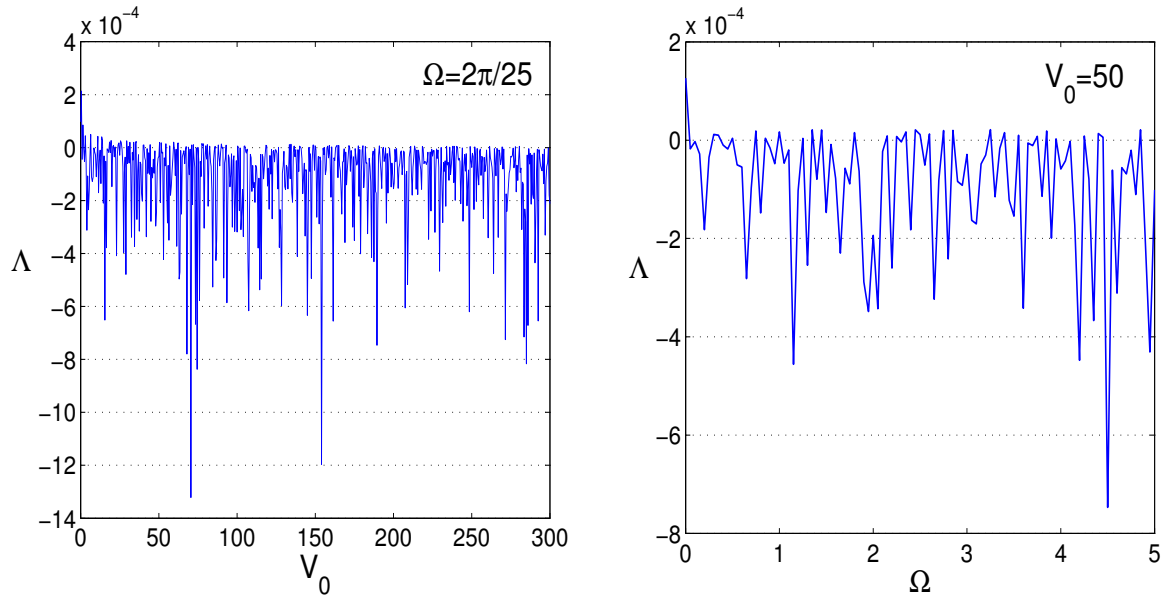


FIGURE 3.9 – Variation du plus grand exposant de Lyapunov en fonction du volume et de la fréquence de l'excitateur.

Le résultat de la figure 3.9 montre que le plus grand exposant de Lyapunov reste globalement négatif lorsque le volume  $V_0$  ou la fréquence de l'excitateur varient. Cependant,  $\Lambda$  s'avère positif dans plusieurs petites plages de valeurs de  $V_0$  et  $\Omega$ . Ainsi, en utilisant des faibles valeurs de  $V_0$  et  $\Omega$ , nous avons tracé les diagrammes de bifurcation du système dans le but de mettre en évidence les points où le comportement du système change de manière significative. Cette analyse permet de mieux comprendre le comportement global du système et peut être utile pour prédire son évolution dans différentes conditions. Le diagramme de bifurcation en fonction de  $V_0$  de la figure 10 pour une faible valeur de la fréquence d'excitation présente plusieurs trajectoires convergentes vers une seule trajectoire ce qui peut être interprété comme suite. Le système subit une bifurcation où plusieurs états oscillants coexistent avant de converger vers un seul état oscillant. L'autre résultat de la figure 10 prise pour  $V_0 = 5 \text{ cm}^3$  présente des zones où nous observons une répartition moins dense de points qui indique un comportement régulier.

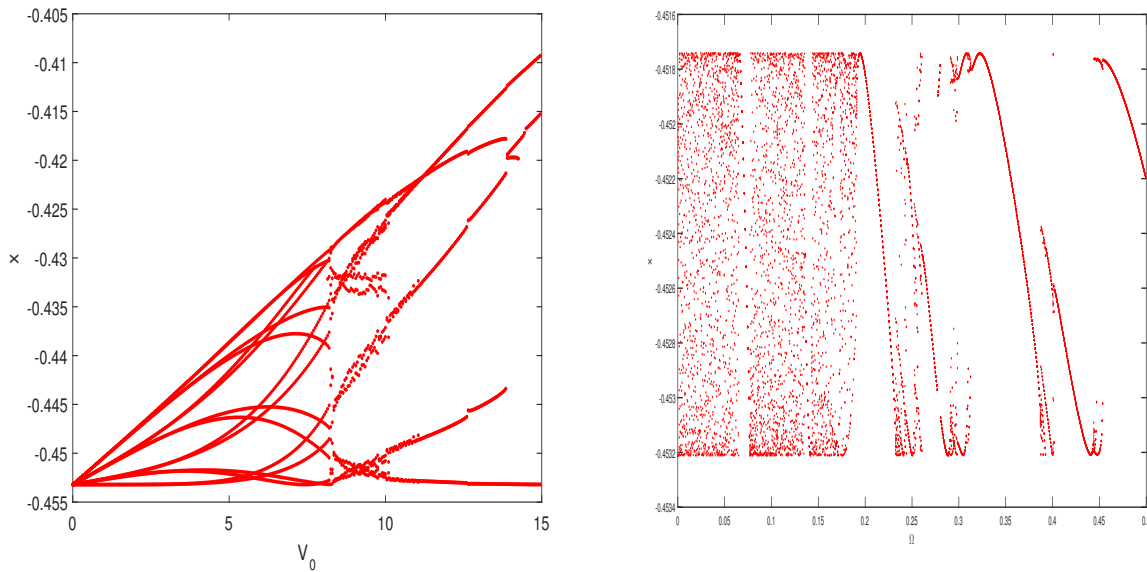
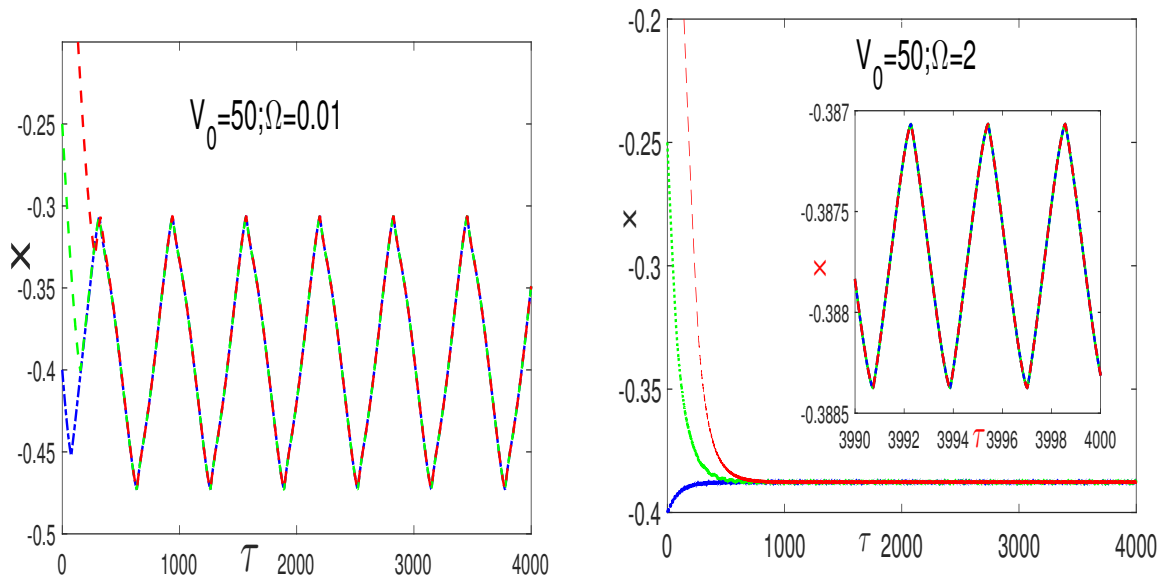


FIGURE 3.10 – Diagrammes de bifurcation.

Pour des valeurs de  $V_0$  et  $\Omega$  présent dans l'une des plages où le plus grand exposant de Lyapunov est positif, en évaluant les séries temporelles de l'oscillateur pour plusieurs conditions initiales, il ressort que ces oscillations sont quasiment insensibles aux faibles variations des conditions initiales. En fait, les conditions initiales ne peuvent influencer que la phase des oscillations, de sorte que les trajectoires de l'espace de phase convergent vers le même cycle limite lorsque les conditions initiales varient. Dans le domaine des paramètres où  $\Lambda$  reste négatif, les oscillations sont insensibles à la variation aux conditions initiales.

Néanmoins, nous observons des valeurs du plus grand exposant de Lyapunov positifs pour certaines valeurs très faibles de  $V_0$  et  $\Omega$ . Pour une telle fréquence, nous observons des oscillations régulières stables qui sont moins sensibles aux conditions initiales comme nous présente la figure 3.11 où nous avons utilisé trois ensembles différents de conditions initiales. Sur cette figure, nous avons pris deux valeurs de la fréquence de l'excitateur pour les cas où le plus grand exposant de Lyapunov est positif et négatif selon la figure 3.9. Globalement les deux cas de figure ne présentent aucune sensibilité aux conditions initiales et convergent vers un cycle limite. Pour rechercher l'effet des paramètres géométriques sur la stabilité du modèle actuel, nous avons évalué le plus grand exposant de Lyapunov du modèle en fonction de ces paramètres géométriques et nous présentons ici quelques résultats. La figure 3.12 nous montre que le plus exposant de Lyapunov demeure



**FIGURE 3.11** – Évolutions temporelles de la position de la surface libre pour différentes conditions initiales. Bleu :  $(x_0, \dot{x}_0) = (-0.4, -0.000001)$ , vert :  $(x_0, \dot{x}_0) = (-0.25, -0.000001)$ , rouge :  $(x_0, \dot{x}_0) = (0.0, -0.000001)$

globalement négatif. En bref, l'analyse numérique suggère que l'oscillateur salin forcé ne présente que des mouvements réguliers qui sont soit des oscillations périodiques stables, soit des oscillations quasi-périodiques stables. Kenfack et al. [36] montrent que l'oscillateur salin libre subit des bifurcations de Hopf lorsque le rayon d'orifice ou la viscosité cinématique de la solution saline varient. Pour certains paramètres, l'oscillateur s'installe donc dans un équilibre après le mouvement transitoire. Cependant, l'application de l'excitation sinusoïdale externe donne lieu à des oscillations dans ces paramètres Régimes. C'est un autre effet du forçage externe.

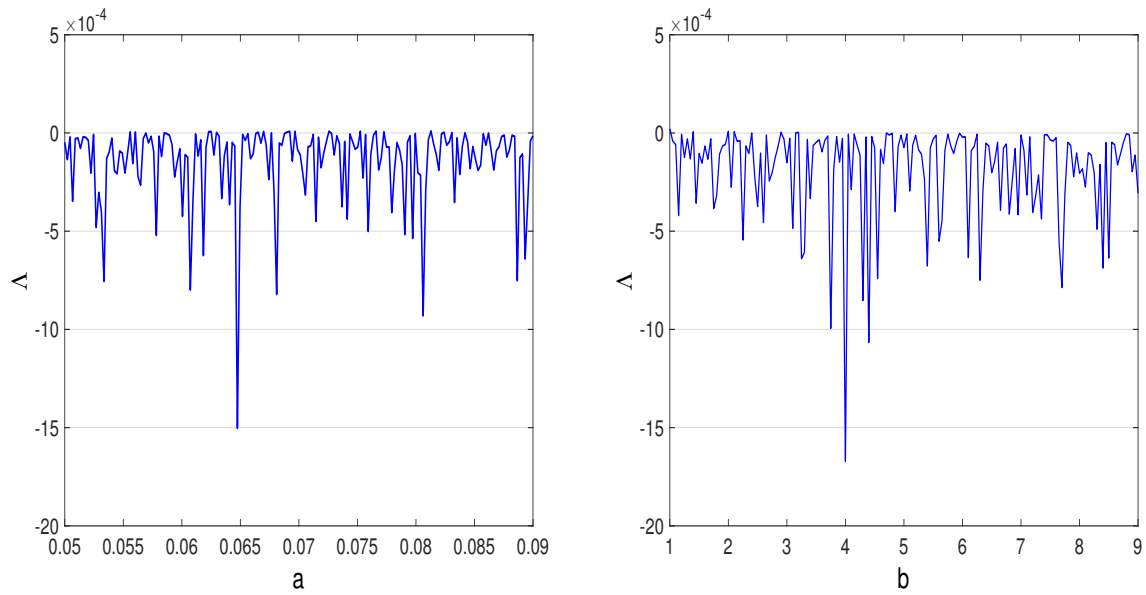


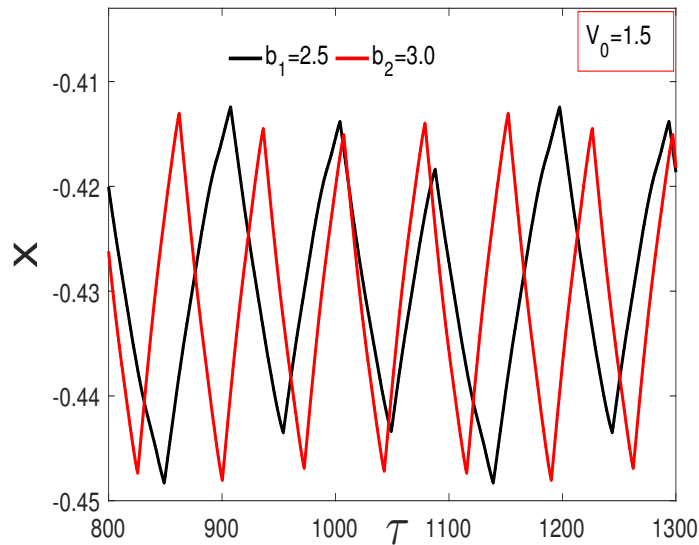
FIGURE 3.12 – Variation du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de a et b.

## 3.2 Dynamique et stabilité de deux oscillateurs salins couplés soumis à une excitation sinusoidale.

### 3.2.1 Modèle des oscillateurs salins couplés périodiquement excités.

Nous nous limitons ici au cas des couplages à deux et trois récipients internes contenant des solutions salées identiques. Dans la configuration du modèle couplé constitué de deux récipients internes, le système d'équations 2.33 décrit le mouvement des surfaces libres des solutions salées dans les récipients internes. Nous travaillons avec deux récipients internes qui ne diffèrent que par leurs rayons, soit  $b_1 = 2.5cm$  et  $b_2 = 3.0cm$ . Les paramètres récemment utilisés dans le cas simple sont conservés pour le couplage. Ainsi la solution salée sera identique dans les deux récipients internes. Dans le cas de trois récipients internes, nous conservons les paramètres de deux récipients internes et nous ajoutons un troisième récipient avec un rayon  $b_3 = 3.5cm$ . En dehors du rayon, les autres paramètres du récipient interne sont identiques aux deux autres.

En utilisant l'algorithme de Runge Kutta 4 l'intégration numérique du système d'équa-



**FIGURE 3.13** – Évolution temporelle de la position de la surface libre de chaque solution salée dans son récipient interne.

tions 2.65, le résultat révèle une synchronisation des mouvements des surfaces libres des solutions salées. Nous remarquons que l'amplitude  $V_0$  de l'excitateur influence cette synchronisation. Cette influence se manifeste sur le déphasage qui existe entre les mouvements ainsi que l'amplitude des oscillations. En effet, nous remarquons que pour certaines valeurs faibles du volume  $V_0$  d'excitation, les surfaces libres oscillent avec des amplitudes qui ne sont pas fixes dans le temps comme présente la figure 3.13. Par ailleurs, pour certaines valeurs de  $V_0$ , les amplitudes d'oscillations deviennent constantes au cours du temps.

Cela est également vérifiée pour le couplage à trois récipients internes présentés à la figure 3.14. Nous observons que les écoulements synchronisés ont toutes une même période qui est plus grande que celle de l'excitateur. L'effet de la valeur du volume  $V_0$  peut être utilisé comme paramètre de contrôle du système dans le besoin de synchroniser les écoulements.

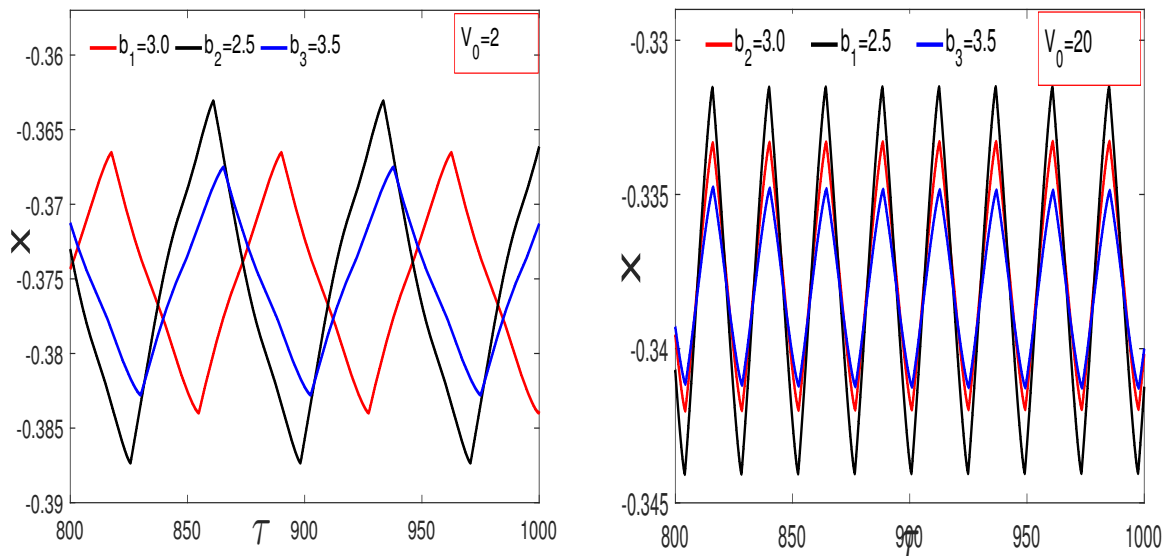


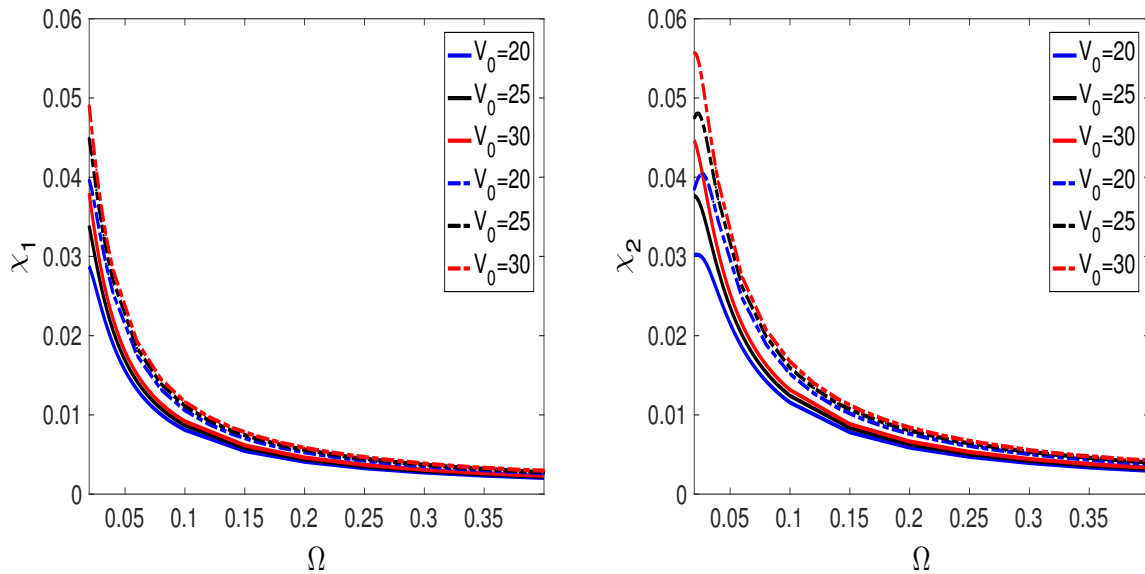
FIGURE 3.14 – Évolution temporelle de la position de la surface libre de chaque solution salée dans son récipient interne.

### 3.2.2 Effet de l'excitateur sinusoïdal sur la réponse du modèle couplé.

Dans cette partie du travail, nous étudions l'effet de l'excitation périodique sur le modèle couplé avec deux récipients internes plongés dans un récipient contenant de l'eau pure. Par des mêmes procédés évoqués dans le cas non couplé, nous déterminons le comportement des amplitudes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  de la réponse du modèle en fonction des paramètres de l'excitateur périodique ainsi que les paramètres géométriques du système. De ces résultats, nous ferons des commentaires.

La figure 3.15 montre que les deux amplitudes diminuent avec l'augmentation de  $\Omega$ . Ce comportement est similaire à celui du cas unique présenté à la fig 3.7. Nous avons évalué ces amplitudes pour plusieurs valeurs de  $V_0$  amplitude d'excitation, et nous observons que pour une valeur fixée de  $\Omega$  les valeurs de  $V_0$  élevés correspondent aux amplitudes élevées. De plus, l'évolution des amplitudes en fonction de  $V_0$  ont également une allure similaire au cas non couplé où nous notons que le mode oscillatoire des deux oscillateurs bifurque également pour des faibles valeurs du volume  $V_0$  d'excitation.

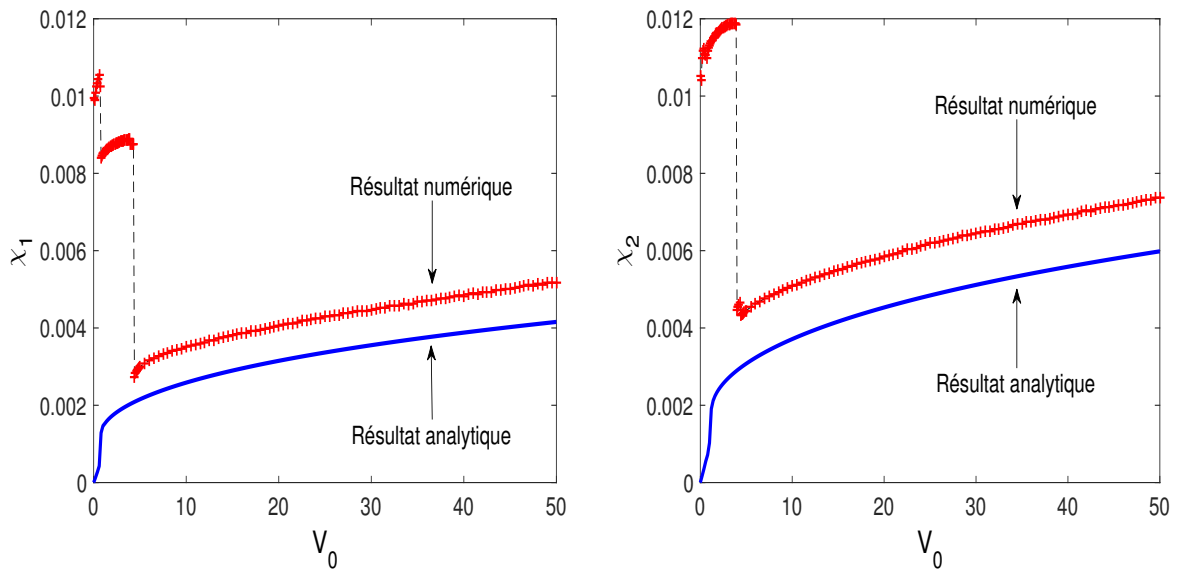
Pour des valeurs considérables de  $V_0$  on observe une augmentation des amplitudes



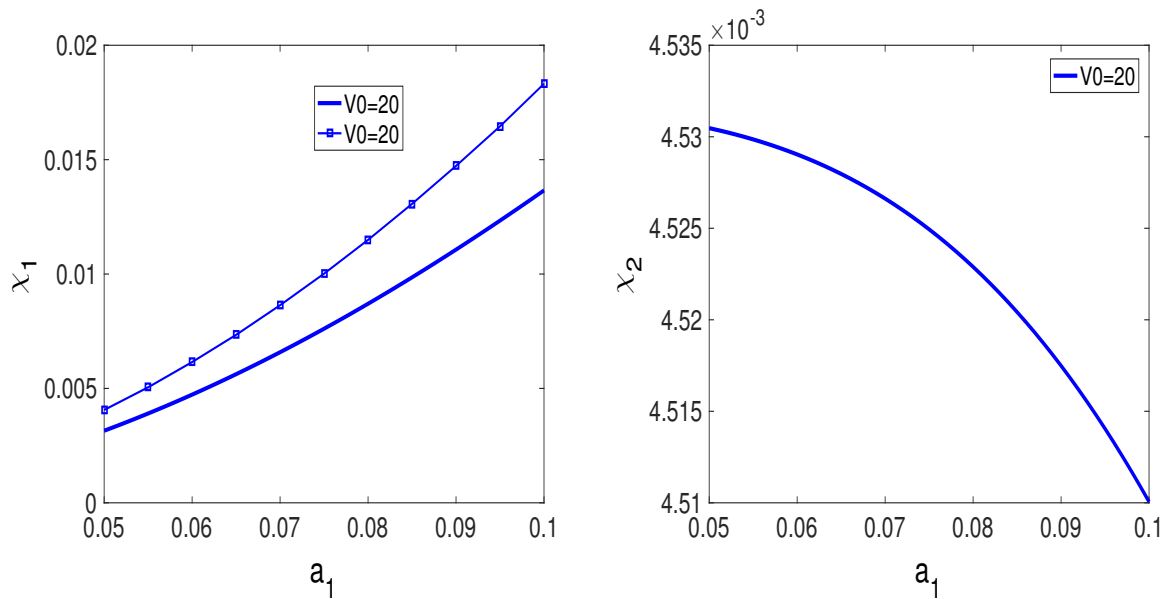
**FIGURE 3.15** – Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction de la fréquence de l’excitateur.

de la réponse du système. Globalement, les résultats obtenus par intégration numérique sont en accord avec les résultats obtenus par la méthode analytique de la balance des harmoniques, car les deux résultats ont la même allure. Ces résultats montrent que les deux oscillateurs sont entraînés par l’excitation périodique pour des grandes valeurs de  $V_0$  et pour des fréquences d’excitation importante. Nous notons également en observant la figure 3.16 que les deux oscillateurs peuvent également présenter des oscillations quasi-périodiques et sous-harmoniques. Sur cette figure, nous remarquons que la concordance de résultat numérique et du résultat analytique à partir d’une certaine valeur de  $V_0$ . Cela montre la sensibilité du système aux faibles valeurs de  $V_0$  tout en rappelant que le système présente une forte non-linéarité qui pourrait impacter sur le résultat analytique par rapport à l’hypothèse de négliger les harmoniques supérieures à un. Cet impact ne se manifeste pas sur d’autres paramètres tels que la fréquence de l’excitateur (figure 3.15) où nous observons la même allure pour toutes les valeurs de  $\Omega$ .

Dans nos calculs, nous avons constaté que la dépendance de l’amplitude des oscillations pour le cas couplé dans un récipient en fonction des paramètres géométriques est similaire à la dépendance du cas simple comme le présente la figure 3.17. Où nous observons que  $\chi_1$  possède la même allure qu’à la figure 3.8. Dans le second récipient, l’évolution de  $\chi_2$

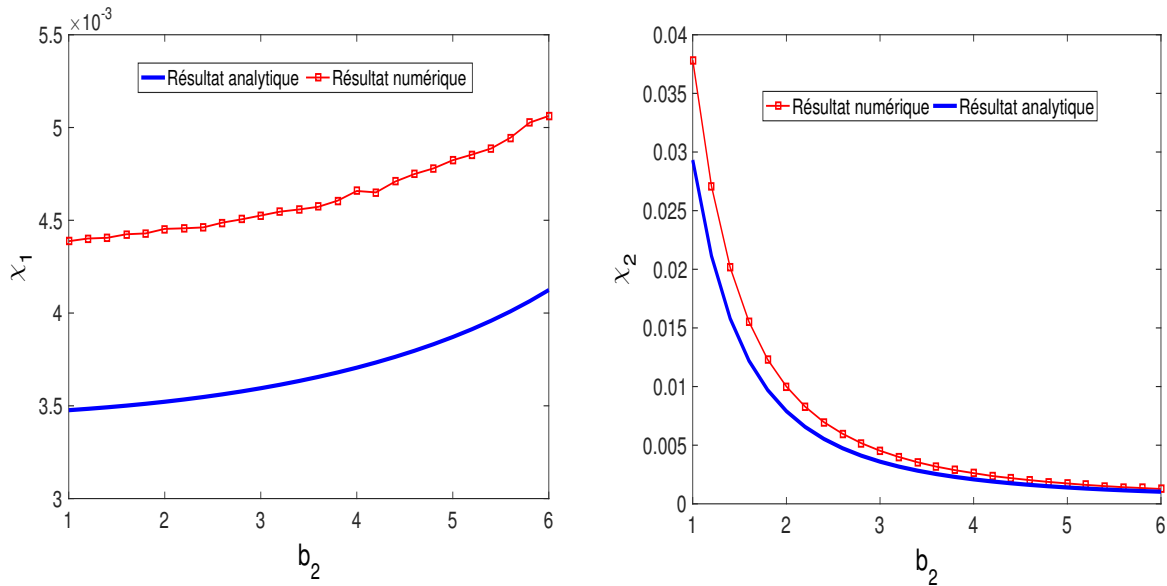


**FIGURE 3.16** – Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction de la valeur du volume d'excitateur.



**FIGURE 3.17** – Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction du rayon des orifices.

est différente de  $\chi_1$ . On note que les deux amplitudes affichent un comportement différent lorsque  $b_2$  varie. Ce comportement ressort également dans la figure 3.19 où la variation

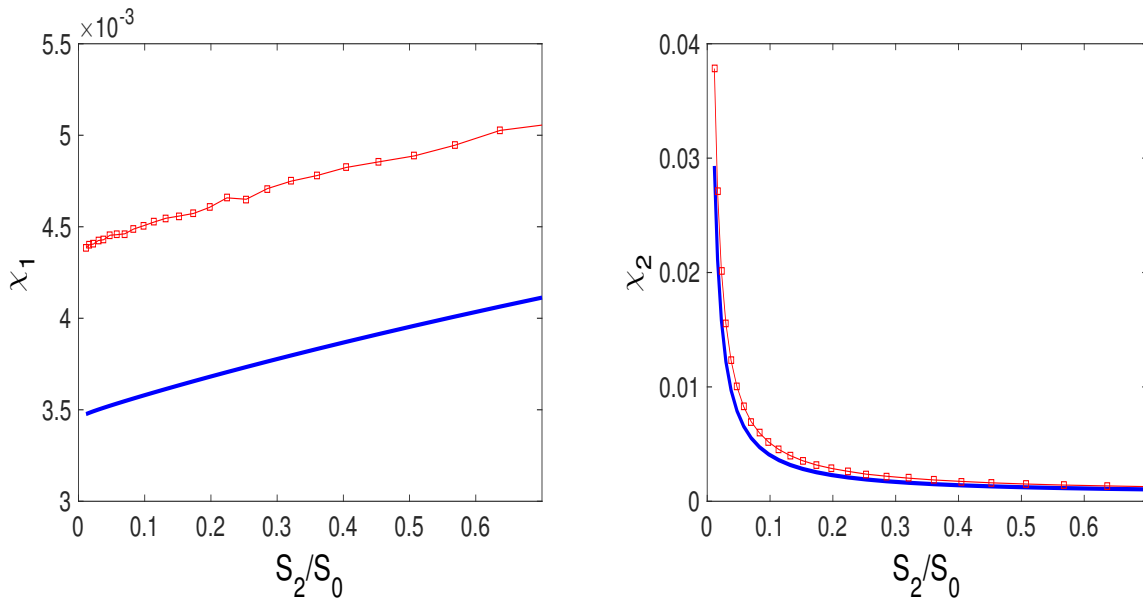


**FIGURE 3.18** – Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction du rayon des recipients.

des amplitudes des oscillations ont été évaluées en fonction de la progression du rapport des surfaces libres. La superposition des résultats analytiques et numériques ont la même tendance. Nous retenons que l'association de plusieurs recipients internes présente des oscillations donc le comportement est influencé par le couplage établi. Par la suite, nous avons évalué l'effet de la perturbation ainsi que celle des paramètres géométriques sur la stabilité du modèle couplé en évaluant le plus grand exposant de Lyapunov. Tous les résultats de simulation sont similaires au cas non couplé.

### 3.3 Effets du bruit sur la réponse

Dans ce paragraphe, nous considérons un seul oscillateur soumis à une excitation de bruit borné. Au moyen de l'algorithme de type Runge Kutta [68] pour les systèmes stochastiques, nous calculons les séries temporelles de l'oscillateur. Ainsi pour un très faible volume d'excitation  $V_0$  et pour une grande valeur du temps de corrélation  $s$ , l'excitation de bruit borné apporte de faible désordre dans la dynamique du système tout en affectant sa périodicité tel qu'observé sur la figure 3.20. Nous remarquons en effet que, la période moyenne d'oscillation sous excitation sonore borné (courbe de couleur bleue) est inférieure



**FIGURE 3.19** – Variation des amplitudes des oscillateurs couplés en fonction du rapport des surfaces libres internes.

à la période libre des oscillations (courbe de couleur rouge). Cette période moyenne diminue au fur à mesure que l'intensité du bruit augmente, jusqu'à ce que les fluctuations bruyantes s'installent complètement dans le système. Le même comportement a été rapporté par Kenfack et al [39], lors de l'étude de la dynamique d'un oscillateur salin sous un bruit blanc gaussien.

La fonction de densité de probabilité pour l'amplitude de l'équation 2.56 présente globalement un pic unique lorsque les paramètres physiques du système varient dans une plage admissible. Ainsi, pour le modèle de l'oscillateur salin, la fonction densité de probabilité pour l'amplitude présente un mode à pic unique. Cependant, des transitions phénoménologiques courantes, consistant en une modification de la position et de la largeur du pic de la fonction de la densité de probabilité, sont également observées dans le présent modèle. En fait, la position du pic devient plus basse et sa largeur devient plus grande lorsque le volume d'excitation  $V_0$  augmente (voir Fig.3.21). Des transitions similaires apparaissent lorsque le temps de corrélation  $s$  et la fréquence du bruit bornée  $\Omega$  diminuent.

Sur cette figure, nous observons que les résultats analytiques (en traits continus) et numériques (en carré) concordent. Le résultat numérique est obtenu par les simulations de Monté Carlo. Il est important de souligner que la cohérence entre ces résultats est assez

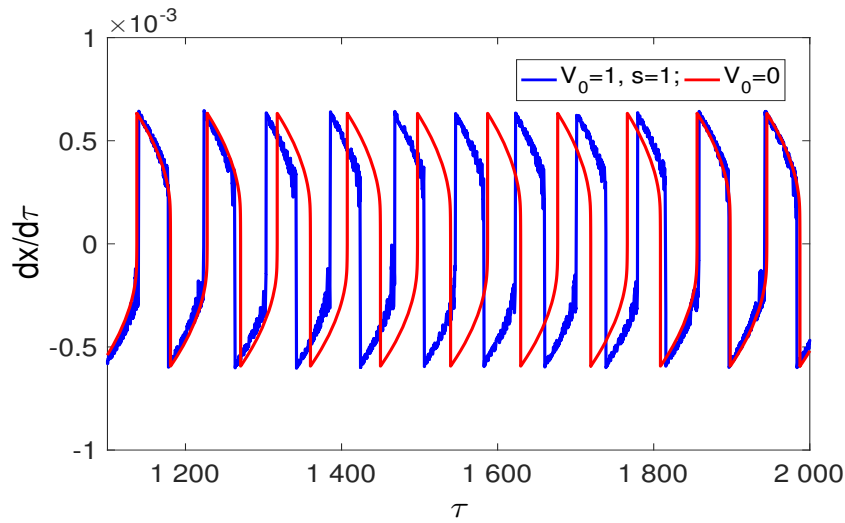


FIGURE 3.20 – Évolution temporelle de la vitesse de la surface libre de la solution salée dans son récipient interne  $\Omega = 1.25Hz$ .

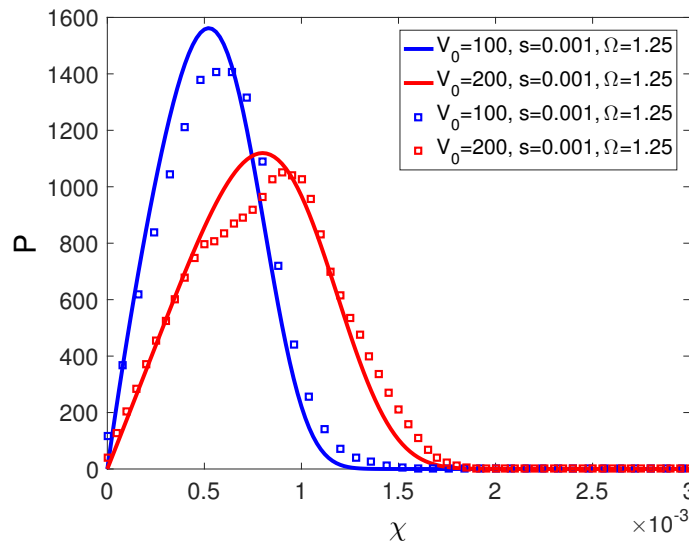
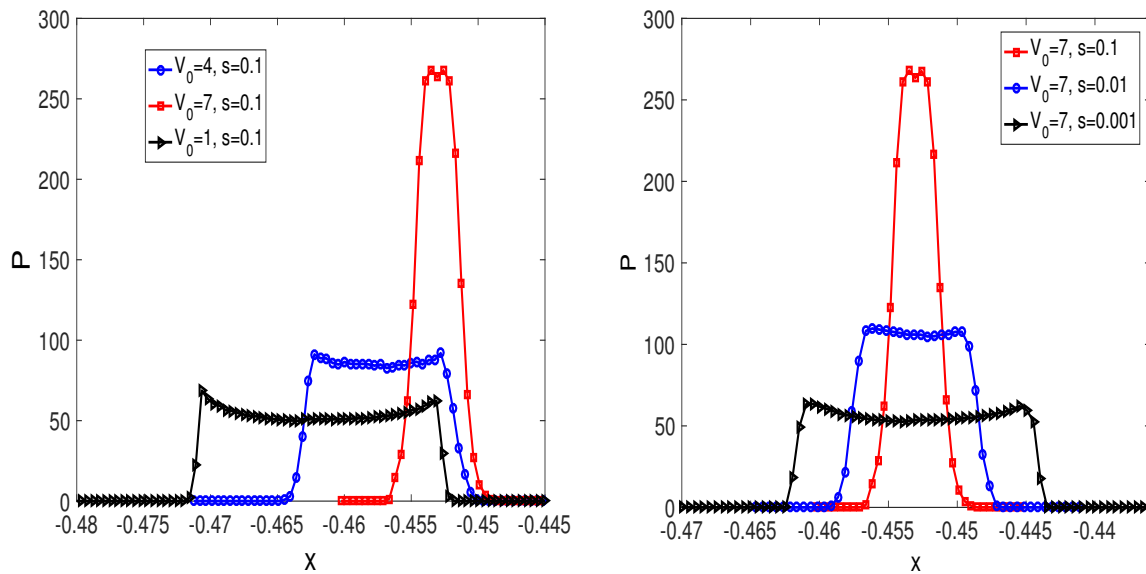


FIGURE 3.21 – Fonction densité de probabilité en fonction de l'amplitude des oscillations.

dépendante à la fois du temps de corrélation  $s$  et de l'intensité  $V_0$  du bruit. Il convient de noter que, pour une valeur élevée de  $V_0$ , à mesure que le temps de corrélation diminue, la concordance entre les deux résultats devrait s'améliorer. Cela est dû au fait que pour un temps de corrélation faible, le bruit borné est un processus à large bande [111]. La fonction

de densité de probabilité pour l'amplitude des oscillations est évaluée numériquement et représentée sur la figure 3.22. On constate que l'intensité de l'excitation et le temps de corrélation ont une influence considérable sur la position de la surface libre de l'eau salée. En fait, la Fig. 3.22 démontre que la courbe de la fonction densité de probabilité se déplace de gauche à droite et que sa largeur se réduit lorsque l'intensité du bruit augmente. Ces transitions peuvent être interprétées comme suit : le point médian moyen de l'oscillation augmente et l'amplitude moyenne de l'oscillation baisse lorsque l'intensité du bruit augmente. Ces transitions peuvent être interprétées comme suit : le point médian moyen de l'oscillation augmente et l'amplitude moyenne de l'oscillation diminue lorsque l'intensité du bruit augmente. La Fig. 3.22 montre également que l'amplitude moyenne de l'oscillation diminue avec l'augmentation du temps de corrélation avec l'augmentation du temps de corrélation, mais le point médian de l'oscillation n'est pas affecté.



**FIGURE 3.22** – Fonction de densité de probabilité pour la position  $x$ . Ces courbes résultent de simulations. Les paramètres du système restent inchangés.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats avec quelques discussions de l'étude de la dynamique de l'oscillateur salin périodiquement excité et d'un système d'oscilla-

---

teurs salins couplés périodiquement excités. Ces résultats répondent au comportement du système sous l'effet de l'excitateur sinusoïdal, telle que la bifurcation, la stabilité, la synchronisation. Cela permet de donner une conclusion générale qui résume notre travail.

# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, il s'agissait d'étudier les effets d'une excitation périodique et stochastique sur la dynamique d'oscillateur salin couplé, constitué d'au plus deux récipients internes. Pour ce faire, nous avons organisé notre travail en trois chapitres. Dans le chapitre 1, nous avons fait une revue de la littérature sur l'oscillateur auto-entretenu, l'oscillateur salin, la synchronisation et le modèle de type Filippov. Le chapitre 2 a été consacré à la modélisation du système et à la méthodologie utilisée pour l'étude. Nous y avons dérivé le modèle en s'appuyant sur le modèle existant dans la littérature, décrit les méthodes numériques et analytiques utilisées. Pour terminer, le chapitre 3 était destiné aux résultats suivis des interprétations. Nous avons dérivé un modèle d'oscillateur salin périodiquement excité, en prenant en compte l'écoulement unidirectionnel de type Hagen-Poiseuille, en négligeant le temps de transition des deux phases d'écoulements des fluides à masses volumiques constantes. Grâce à l'équation de Navier-Stokes, nous avons formulé mathématiquement les équations qui gouvernent la dynamique d'un oscillateur salin et celle d'un oscillateur salin couplé périodiquement excité. Comme la différence entre la durée du flux descendant et celle du flux ascendant réside dans le changement alternatif de la nature fluide à l'intérieur de l'orifice, il était naturel de modéliser l'oscillateur avec une équation qui imite ce changement alternatif de la nature du fluide : c'est l'équation différentielle de type Filippov. Nous avons finalement obtenu une équation différentielle de Filippov qui traduit le mouvement des surfaces libres des solutions salines et dont les coefficients dépendent de la géométrie et des paramètres physiques du système. Nous avons ainsi montré la dépendance des facteurs de couplage sur les paramètres du système. Concernant l'étude portée sur la dynamique de l'oscillateur salin périodiquement

excité, nous avons constaté que la réponse du présent modèle est similaire à la tendance expérimentale observée dans le dispositif de l'oscillateur salin libre, bien qu'elle soit fortement influencée par l'amplitude de l'excitation. En fait, des simulations numériques avec l'équation modèle de type Filippov ont montré que la période intrinsèque et l'amplitude des oscillations sont fonction de la période et de l'amplitude de l'excitateur, et également des paramètres propres tels que le rayon et la hauteur de l'orifice. L'amplitude des oscillations augmente de façon monotone avec le volume d'eau pure qui est périodiquement infusé puis retiré au fond du grand récipient. Cette amplitude diminue pour des fréquences considérables, à partir d'une valeur maximale qui est observée à très basse fréquence. Du point de vue de la synchronisation, nous avons constaté que les oscillateurs identiques couplés se synchronisent pour des récipients internes contenant des solutions salines identiques. Du point de vue de la bifurcation, nous constatons que certaine valeur de fréquence de l'excitateur causent une chute d'amplitude. Concernant l'état de stabilité, la réponse du modèle est stable du point de vue de Lyapunov. En présence de l'excitateur à bruit borné, l'utilisation de la méthode de la moyenne stochastique nous a permis de dériver la fonction densité de probabilité pour l'amplitude des oscillations. Nous avons constaté que le modèle d'oscillateur démontre des transitions phénoménologiques qui apparaissent couramment dans les modèles stochastiques. Cependant, il ne présente pas de bifurcation stochastique lorsque ses paramètres varient dans des plages physiquement admissibles. De plus, nous avons constaté que l'excitation par un bruit borné crée des désordres dans le flux qui se traduit par la diminution de la période d'oscillation moyenne, l'augmentation du point médian de l'oscillation et la diminution de l'amplitude moyenne de l'oscillation.

En matière de perspective future pour ce travail, l'application des résultats obtenus dans cette thèse qui met en avant l'effet d'un excitateur bruité à des domaines spécifiques, tels que la biologie ou la chimie, ou des systèmes oscillants similaires. Cela pourrait contribuer à une meilleure compréhension de ces systèmes naturels et à leur utilisation potentielle dans des applications pratiques. Une perspective prometteuse serait de convertir les oscillations mécaniques produites par l'oscillateur salin en oscillation électrique en utilisant par exemple un dispositif piézoélectrique afin de construire un accumulateur d'énergie. Il est vrai que la conception de ce dispositif de récupération poserait des difficultés sur le caractère réversible des dispositifs piézoélectrique, Peut être la prise en compte d'un re-

tard entre les oscillations électriques et mécaniques permettrait de remédier à cette limite du dispositif. Il serait également intéressant du point de vue la modélisation d'établir une formulation mathématique plus adapter au comportement réel de l'oscillateur salin. Nous faisons allusion ici à l'atténuation de l'amplitude des oscillations du modèle au cours du temps, cela pourrait révéler d'autres comportements riches à exploiter.

# Bibliographie

- [1] M. Dolnik, I. Schreiber and M. Marek, "*Dynamic regimes in a periodically forced reaction cell with oscillatory chemical reaction*". *Physica D* **21** (1986) 78.
- [2] M. Eiswirth and G. Eirtl, "*Forced Oscillations of a Self-Oscillating Surface Reaction*". *Physical review letters* **60** (1988) 1526.
- [3] B. Deng, J. Wang, X. Wei, K.M Tsang and W.L. Chan, "*Vibrational resonance in neuron populations*". *Chaos* **20** (2010) 013113.
- [4] L. Glass, M.R. Guevara and A. Shrier, "*Bifurcation and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator*". *Physica D* **7** (1983) 89.
- [5] L. Glass, M.R. Guevara, J. Belair and A. Shrier, "*Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator*". *Physical Review A* **29** (1984) 1348.
- [6] M. S. Siewe , F. M. M. Kakmeni , S. Bowong and C. Tchawoua, "*Non-linear response of a self-sustained electromechanical seismographs to fifth resonance excitations and chaos control*". *Chaos, Solitons and Fractals* **29** (2006) 431.
- [7] M. S. Siewe, S. B. Yamgou. M. Moukam and C. Tchawoua "*Chaos controlling self-sustained electromechanical seismograph system based on the Melnikov theory*". *Non-linear Dynamics* **62** (2010) 379.
- [8] R. Perez and L. Glass, "*Bistability, period doubling bifurcations and chaos in a periodically forced oscillator*". *Physics Letters A* **90** (1982) 441.
- [9] J. L. Beck and C. Papadimitriou, "*Moving resonance in nonlinear response to fully nonstationary stochastic ground motion*". *Probabilistic Engineering Mechanics* **8** (1993) 157.
- [10] O. A. Chichigina, A. A. Dubkov, D. Valenti and B. Spagnolo, "*Stability in a system subject to noise with regulated periodicity*". *Physical Review E* **84** (2011) 021134.

- [11] G. Augello, D. Valenti and B. Spagnolo, "*Non-Gaussian noise effects in the dynamics of a short overdamped Josephson junction*". The European Physical Journal B **78** (2010) 225.
- [12] M. Saha and T. C. Kofane, "*DNA base pairs openings perturbed by the surrounding medium*". Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **23** (2015) 1.
- [13] D. Huber and L. S. Tsimring, "*Dynamics of an Ensemble of Noisy Bistable Elements with Global Time-Delayed Coupling*". Physical Review Letters **91** (2003) 260601.
- [14] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera and A. Vulpiani, "*Stochastic resonance in climatic change*". Tellus **34** (1982) 10.
- [15] R. N. Mantegna and B. Spagnolo, "*Stochastic resonance in a tunnel diode*". Physical Review E **49** (1994) R1792.
- [16] D. Valenti, A. Fiasconaro and B. Spagnolo, "*Stochastic resonance for two competing species in the presence of colored noise*". Modern Problems in Statistical Physics **2** (2003) 91.
- [17] M. I. Dykman and P. V. E. McClintock, "*Power spectra of noise-driven nonlinear systems and stochastic resonance*". Physica D **58** (1992) 10.
- [18] J. L. Sharpe, N. Sungar and N. Macaria, "*Observation of stochastic resonance using an optically addressed amorphous silicon/ferroelectric liquid crystal spatial light modulator*". Optics Communications **114** (1995) 25.
- [19] H. Niaoqing, C. Min and W. Xisen, "*The application of stochastic resonance theory for early detecting rub-impact fault of rotor system*". Mechanical Systems and Signal Processing **17** (2003) 883.
- [20] J. A. Freund, L. Schimansky-Geier, B. Beisner, A. Neiman, D. F. Russell, T. Yakusheva and F. Moss, "*Behavioral Stochastic Resonance : How the Noise from a Daphnia Swarm Enhances Individual Prey Capture by Juvenile Paddlefish*". Journal of Theoretical Biology **71** (2002) 214.
- [21] L. Zeng, J. Li, J. Shi, "*M-ary signal detection via a bistable system in the presence of levy noise*". Chaos, Solitons Fractals **45** (2012) 378.

- [22] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "*Noise-assisted signal transmission in a nonlinear electronic comparator : Experiment and theory*". Signal Processing **56** (1997) 293.
- [23] T. J. Walker "*Acoustic synchrony : two mechanisms in the snowy tree tricket*". Science. **166** (2016) 891.
- [24] N. V. Augdov and B. Spagnolo, "*Noise-enhanced stability of periodically driven metastable states*". Physical Review E **64** (2001) 035102.
- [25] R. N. Mantegna and B. Spagnolo, "*Noise enhanced stability in an unstable system*". Physical Review Letters. **76** (1996) 563.
- [26] A. Fiasconaro, D. Valenti and B. Spagnolo, "*Role of the initial conditions on the enhancement of the escape time in static and fluctuating potentials*". Physica A **325** (2003) 136.
- [27] J. Garcia-Ojalvo, A. Hernandez-Machado and J. M. Sancho, "*Effects of external noise on the Swift-Hohenberg equation*". Physical review letters **71** (1993) 1542.
- [28] J. M. R. Parrondo, C. Van den Broeck, J. Buceta and F. J. de la Rubia, "*Noise-induced spatial patterns*". Physica A **224** (1996) 153.
- [29] A. Becker and L. Kramer, "*Linear stability analysis for bifurcations in spatially extended systems with fluctuating control parameter*". Physical Review Letters **73** (1994) 955.
- [30] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, F. Marchesoni, "*Stochastic resonance*". Reviews of Modern Physics **70** (1998) 223.
- [31] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera and A. Vulpiani, "*Stochastic resonance in climatic change*". Tellus **34** (1982) 10.
- [32] R. N. Mantegna, B. Spagnolo and M. Trapanese, "*Linear and nonlinear experimental regimes of stochastic resonance*". Physical Review E **63** (2001) 011101.
- [33] R. M. Yonkeu, R. Yamapi, G. Filatrella, C. Tchawoua, "*Stochastic bifurcations induced by correlated noise in a birhythmic Van der Pol systems*". Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulations **33** (2016) 70.

- [34] R. M. Yonkeu, R. Yamapi, G. Filatrella, C. Tchawoua, "*Effects of a periodic drive and correlated noise on the birhythmic Van der Pol systems*". Physica A **466** (2017) 552.
- [35] A. C. Changoue, R. Yamapi, and P. Wofo, "*Dynamics of a biological system with time-delayed noise*". The European Physical Journal Plus **127** (2012) 59.
- [36] P. Hanggi, P. Jung, C. Zerbe, F. Moss, "*Can colored noise improve stochastic resonance ?*". Journal of Statistical Physics **70** (1993) 25.
- [37] C. S. Wasserman, N. Segool, "*Working in and with noise : The impact of audio environment on attention*". Journal of Neurotherapy **17** (2013) 203.
- [38] I. S. M. Fokou, C. N. D. Buckjohn, M. S. Siewe, C. Tchawoua, "*Probabilistic distribution and stochastic P-bifurcation of a hybrid energy harvester under colored noise*". Communications in nonlinear Sciences and numerical simulations **56** (2018) 177.
- [39] W. F. Kenfack, M. S. Siewe and T.C. Kofane, "*Noise effect on the dynamics and synchronization of saline oscillator's model*". Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **43** (2017) 37.
- [40] H. González, H. Arce, and M.R. Guevara, "*Phase resetting, phase locking, and bistability in the periodically driven saline oscillator : Experiment and model*". Physical Review E **78** (2008) 036217.
- [41] M. Seely, "*A hydrodynamic curiosity : The salt oscillator*". Geophysical Fluid Dynamics **1** (1970) 143.
- [42] W. F. Kenfack, M. S. Siewe and T. C. Kofane, "*Nonlinear dynamics and synchronization of saline oscillator's model*". Chaos, Solitons et Fractals **82** (2016) 72.
- [43] C. Màlaga, H. Arce and H. González, "*A density oscillator model*". Revista Mexicana de Física **58** (2012) 438.
- [44] T. Kano and S. Kinoshita, "*Modeling of a density oscillator*". Physical Review E **80** (2009) 046217.
- [45] K. Miyakawa and K. Yamada, "*Synchronization and clustering in globally coupled salt-water oscillators*". Physica D **151** (2001) 217.
- [46] M. Okamura and K. Yoshikawa, "*Rhythm in a saline oscillator*". Physical Review E **61** (2000) 2445.

- [47] K. Aoki, "*Mathematical model of a saline oscillator*". Physica D **147** (2000) 187.
- [48] K. Miyakawa and K. Yamada, "*Entrainment in coupled salt-water oscillators*". Physica D **127** (1999) 177.
- [49] S. Nakata, T. Miyata, N. Ojima and K. Yoshikawa, "*Self-synchronization in coupled salt-water oscillators*". Physica D **115** (1998) 313.
- [50] K. Yoshikawa, N. Oyama, M. Shoji and S. Nakata, "*Use of a saline oscillator as a simple nonlinear dynamical system : Rhythms, bifurcation, and entrainment*". American Journal of Physics **59** (1991) 137.
- [51] K. Yoshikawa, S. Nakata, M. Yamanaka and T. Waki, "*Amusement with a salt-water oscillator*". Journal of Chemical Education **66** (1989) 205.
- [52] K. Yoshikawa, K. Fukunaga and M. Kawakami, "*A tri-phasic mode is stable when three non-linear oscillators interact with each other*". Chemical Physics Letters **174** (1990) 203.
- [53] K. Yoshikawa, S. Maeda and H. Kamakami, "*Various oscillatory regimes and bifurcations in a dynamic chemical system at an interface K Yoshikawa*". Ferroelectrics **86** (1988) 281.
- [54] P. H. Alfredsson and T. Lagerstedt, "*The behavior of the density oscillator*". Physics of Fluids **24** (1981) 10.
- [55] W. F. Kenfack, M. S. Siewe and T. C. Kofane, "*Sliding motion and bifurcation in saline oscillator's model and liquid's density measurement using saline oscillator*". Chaos, Solitons et Fractals **114** (2018) 321.
- [56] N. Takeda, N. Kurata, H. Ito, H. Kutahata, "*Bifurcation analysis of a density oscillator using two-dimensional hydrodynamic simulation*". Phys Rev **101** (2020) 042216.
- [57] B. Van der Pol, "*On relaxation-oscillations*". The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **2** (1926) 978.
- [58] M. S. Siewe, W. K. Fokou, T. C. Kofane, "*Probabilistic response of an electromagnetic transducer with nonlinear magnetic coupling under bounded noise excitation*". Chaos Solitons Fractals **124** (2019) 26.

- [59] G. G. Sengha, W. K. Fokou, M. S. Siewe, C. B. Tabi, T. C. Kofane, "*Dynamics of a non-smooth type hybrid energy harvester with nonlinear magnetic coupling*". Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations **90** (2020) 105364.
- [60] R. V. Bobryk, A. Chruszczyk, "*Transition induced by bounded noise*". Physica A **358** (2005) 263.
- [61] J. R. Li, W. Xu, X. L. Yang, Z. K. Sun, "*Chaotic motion of Van der pol-Mathieu-duffing system under bounded noise parametric excitation*". J sound Vib **309** (2008) 330.
- [62] J. M. Ginoux, C. Letellier, "*Van Der Pol and history of relaxation oscillations : toward the emergence of a concept*". Chaos : An interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **22** (2012) 023120.
- [63] A. A. Andronov and C. C. Chaikin, "*Theory of oscillations*". Princeton, New Jersey, 1949.
- [64] H. Poincaré, "*Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*". Gauthier-Villars, Paris, 1892
- [65] P. S. Landa, "*Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems*". Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [66] A.A Andronov, A.A Vitt and S. E Khaikin, Pergamon Press, Oxford (1966).
- [67] H. Schlichting, "*Boundary Layer Theory*". McGraw-Hill, 1960.
- [68] R. L. Honeycutt, "*Stochastic Runge-Kutta algorithms.I. White noise*". Phys Rev A **45** (1992) 600.
- [69] R. L. Honeycutt, "*Stochastic Runge-Kutta algorithms.II. colored noise*". Phys Rev A **45** (1992) 604.
- [70] R. M. Noyes, "*A simple explanation of the salt water oscillator*". Journal of Chemical Education **66** (1989) 207.
- [71] S. Upadhyay, A.K. Das, V. Agarwala, and R.C. Srivastava, "*Oscillations of electrical potential differences in the salt-water oscillator*". Langmuir **8** (1992) 2567.
- [72] S. H. Strogatz, "*Nonlinear Dynamics And Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering(studies in nonlinearity)*". 1 st edition, Studies in nonlinearity, Westview Press, 2001.

- [73] R. H. Ju, Z. R. Shen, *"Review on insect population dynamics simulation models"*. Acta Ecologica Sinica , **10** (2005) 2709.
- [74] S. Herrmann, P. Imkeller, *"Barrier crossings characterize stochastic resonance"*. Stochastics and dynamics , **2** (2002) 413.
- [75] G. J. Fezeu, I. S. M. Fokou, C. N. D Buckjohn, M. S. Siewe, C. Tchawoua, *"Resistance induced P-bifurcation and Ghost-Stochastic resonance of a hybrid energy harvester under colored noise"*. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, **557** (2020) 124857.
- [76] O. Foupouapouognigni, C. N. D Buckjohn, C. N. D. Buckjohn, M. S. Siewe, C. Tchawoua, *"Hybrid Electromagnetic and Piezoelectric Vibration Energy Harvester with Gaussian white noise excitation"*. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, **509** (2018) 346.
- [77] R. Yamapi, R. M. Yonkeu, G. Filatrella, C. Tchawoua, *"Effect of noise correlation on the coherence of a forced Van der Pol type birhythmic system"*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **62** (2018) 1.
- [78] A. Fiasconaro, A. Ochab-Marcinek, B. Spagnolo, E. Gudowska-Nowak, *"Monitoring noise-resonant effects in cancer growth influenced by spontaneous fluctuations and periodic treatment"*. The European Physical Journal B **65** (2008) 435.
- [79] E. Lanzara, R.N. Mantegna, B. Spagnolo, R. Zangara. *"Experimental Study of a Nonlinear System in the Presence of Noise : The Stochastic Resonance"*. American Journal of Physics **65** (1997) 341.
- [80] B. Spagnolo, A. A. Dubkov, N. V. Agudov, *" Noise Enhanced Stability"*. Acta Physica Polonica B **35** (2004) 1419.
- [81] B. Spagnolo, A. A. Dubkov, A. L. Pankratov, E. V. Pankratova, A. Fiasconaro, A. Ochab-Marcinek, *"Lifetime of metastable states and suppression of noise in Interdisciplinary Physical Models"*. Acta Physica Polonica B **38** (2007) 1925.
- [82] A. La Barbera, B. Spagnolo, *"Spatio-Temporal Patterns in Population Dynamics"*. Physica A **314** (2002) 120.
- [83] D. Valenti, A. Fiasconaro, B. Spagnolo, *"Stochastic resonance and noise delayed extinction in a model of two competing species"*. Physica A **331** (2004) 477

- [84] W. Dubitzky, O. Wolkenhauer, KH. Cho, H. Yokota, "*Encyclopedia of Systems Biology*". Springer-Verlag, New York, 2013.
- [85] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, "*The mechanism of stochastic resonance*". J. Phys. A : Math. Gen. **14** (1981) L453.
- [86] S. Morfu, J. M. Bilbault, J. C. Comte, "*Noise-enhanced propagation in a dissipative chain of triggers*". International Journal of Bifurcation and Chaos . **12** (2002) 629.
- [87] V. S. Anishchenko, M. A. Safonova et L. O. Chua, "*Stochastic resonance in the nonautonomous Chua's circuit*". Journal of Circuits, Systems and Computers. **3** (1993) 553.
- [88] B. M. Jost, B. E. A. Saleh, "*Signal-to-noise ratio improvement by stochastic resonance in a unidirectional photorefractive ring resonator*". Optics Letters, **21** (1996) 287.
- [89] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier, N. Chambet, "*Stochastic resonance in a neuron model that transmits spike trains*". Physical Review E, **53** (1996) 1273.
- [90] N.V. Agudov, A.V. Krichigin, "*Stochastic resonance and antiresonance in monostable systems*". Radiophys Quantum El, **51** (2008) 812.
- [91] E. Tornatore, S. M. Buccellato, P. Vetro, "*Stability of a stochastic SIR system*". Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, **354** (2005) 111.
- [92] A. Mielke, "*Noise Induced Stability in Fluctuating, Bistable Potentials*". Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 818.
- [93] I. Dayan, M. Gitterman and G. H. Weiss, "*Stochastic Resonance in Transient Dynamics*". Physical Review A. **46** (1992) 757.
- [94] M. Chavez, D. U. Hwang and S. Boccaletti, "*Synchronization processes in complex networks*". Eur. Phys. J. Special Topics. **146** (2007) 129.
- [95] M. Chen and D. Zhou, "*Synchronization in uncertain complex networks*". Chaos. **16** (2006) 1.
- [96] P. Woafu, "*Transitions to chaos and synchronization in a non linear emitter-receiver system*". Physics Letters A **267** (2000) 39.
- [97] G. Perez and H. A. Cerdeira, "*Extracting messages masked by chaos*". Physical Review Letter **74** (1995) 1970.

- [98] W. Lauterborn, V. Ahlers, U. Parlitz, "*Hyperchaotic dynamics and synchronization of external-cavity semiconductor lasers*". Physical Review E **58** (1998) 7208.
- [99] Y. C. Kouomou, P. Colet, N. Gastaud and L. Larger, "*Effect of parameter mismatch on the synchronization of chaotic semiconductor lasers with eletro-optical feedback*". Physical Review E **69** (2004) 1.
- [100] K. Miyakawa and K. Yamada, "*Synchronization and clustering in globally coupled salt-water oscillators*". Physica D **105** (2001) 217.
- [101] C. Sarasola, F. J. Torrealda, A. D'Anjou, A. Moujahid, M. Grana, "*Feedback synchronization of chaotic systems*". Int. J. Bif. Chaos **13** (2003) 177.
- [102] D. J. Wagg, "*Partial synchronization of nonidentical chaotic systems via adaptive control with application to modelling coupled nonlinear systems*". Int. J. Bif. Chaos **12** (2002) 561.
- [103] I. P. Marino, "*Synchronization and control of chaotic systems. Spatio-temporal structures and applications to communications*". Thèse de Doctorat, Université de Santiago, 1999.
- [104] K. Pyragas, "*Continuous control of chaos by self-controlling feedback*". Phys. Lett. A, **170** (1992) 421.
- [105] J. F. Linder, W. Ditto, "*Removal, suppression and control of chaos by nonlinear design*". Appl. Mech. Rev **48** (1995) 795.
- [106] J. A. Moron-Villarreyes \*, H. J. Brum da Costa, F. Kokubun, L. C. Schmitz, J. A. Castro, "*Some applications of salt-water oscillator in Chemical Engineering teaching and process equipment design*". Computers and Chemical Engineering **24** (2000) 1753.
- [107] Y. Wang, J. Qu , Q. Ba, J. Dong , L. Zhang , H. Zhang, A. Wu, D. Wang, Z. Xia, D. Peng, Y. Shu, B. Cao, T. Jiang, "*Detection and typing of human-infecting influenza viruses in China by using a multiplex DNA biochip assay*". Journal of Virological Methods. **234** (2016) 178.
- [108] C. Chen, N. S. Chong , R. Smith, "*A Filippov model describing the effects of media coverage and quarantine on the spread of human influenza*". Mathematical Biosciences. **296** (2018) 98.

- [109] S. Qiao, C. Gao and X. An, "*Hidden dynamics and control of a Filippov memristive hybrid neuron model*". *Nonlinear Dyn.* **111** (2023) 10529.
- [110] M. Bi T. Hanus, D. Janovska, "*Some applications of Filippov's dynamical systems*". *Journal of Computational and Applied Mathematics* **254** (2013) 132.
- [111] J. B. Roberts, P. D. Spanos, "*Stochastic averaging : An approximate method of solving random vibration problems*". *Int J Non Linear Mech of Computational and Applied Mathematics* **21** (1986) 111.
- [112] G. Song, H. Li, S. Cai, "*Editorial for Special Issue "Energy Dissipation and Vibration Control : Materials, Modeling, Algorithm, and Devices"*". *Appl. Sci.***10** (2020) 572.
- [113] D. Lumbreras, M. Vilella, J. Zaragoza, N. Berbel, J. Jord. Collado, "*Effect of the Heat Dissipation System on Hard-Switching GaN-Based Power Converters for Energy conversion*". *Energies.* **14** (2021) 6287.
- [114] R. Cervellati, R. Soldà, "*An alternating voltage battery with two salt-water oscillators*". *American Journal of Physics Phys.* **69** (2001) 543.
- [115] E. Bartocci, R. Singh, F. B. von Stein, A. Amedome, J. Caceres, J. Castillo, E. Closser, G. Deards, A. Goltsev, R. Sta. Ines, C. Isbilir, K. Marc, D. Moore, D. Pardi, S. Sadhu, S. Sanchez, P. Sharma, A. Singh, J. Rogers, A. Wolinetz, T. Grosso-Applewhite, K. Zhao, B. Filipinski, F. Gilmour, R. Grosu, J. Glimm, A. Smolka, M. Cherry, M. Clarke, N. Griffith and H. Fenton, "*Teaching cardiac electrophysiology modeling to undergraduate students : laboratory exercises and GPU programming for the study of arrhythmias and spiral wave dynamics*". *American Journal of Physics Phys.* **35** (2011) 427.
- [116] L. Chen, F. Xu, Y. Min, M. Wang, W. Hu, "*Transient energy dissipation of resistances and its effect on power system damping*". *International Journal of Electrical Power Energy Systems.* **91** (2017) 201.
- [117] Z. Yin, Z. Huang, H. Zhang, D. Feng, "*Experimental Study on Energy Dissipation Performance and Failure Mode of Web-Connected Replaceable Energy Dissipation Link*". *Applied Sciences.* **9** (2019) 3200.

# Publication internationale

**D. J. OWONO BEKOA** , W. Fokou Kenfack, M. Siewe Siewe , *Dynamics of saline oscillator under sinusoidal and bounded noise excitation*. *Chaos, Solitons & Fractals* **158** (2022) 112054.