

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix – Travail – Patrie

\*\*\*\*\*

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

\*\*\*\*\*

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION  
DOCTORALE EN SCIENCES TECHNOLOGIES  
ET GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION  
DOCTORALE EN PHYSIQUE ET APPLICATIONS

B.P 812 Yaoundé

Email : crfd\_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace – Work – Fatherland

\*\*\*\*\*

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

\*\*\*\*\*

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,  
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

RESEARCH AND POSTGRADUATE  
TRAINING UNIT FOR PHYSICS AND  
APPLICATIONS

P.O Box812 Yaounde

Email: crfd\_stg@uy1.uninet.cm

**ÉCOULEMENT LAMINAIRE LOCALISÉ DANS LE PLAN  
POLAIRE ET SITUÉ ENTRE DEUX CYLINDRES COAXIAUX  
À PAROIS POREUSES ET EN ROTATION ACCÉLÉRÉE.**

**THÈSE**

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat/Ph. D

Spécialité : Mécanique, Matériaux et Structures

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET D'HYDRAULIQUE

Par :

**MBAM MBAM Serge Benjamin**

Matricule : 10W0441

Titulaire du Master en Physique



Devant le jury composé ainsi qu'il suit :

**Président :** BEN-BOLIE Germain Hubert, Professeur, UYI

**Rapporteur :** NGO NYOBE Elisabeth, Professeur, UYI

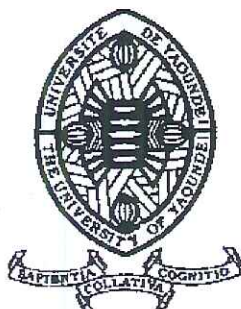
**Membres :** NJEUGNA Ebénézer, Professeur, U. Douala

NGOHE-EKAM Paul Salomon, Maître de Conférences, UYI

MBONO SAMBA Yves Christian, Maître de Conférences, UYI

Année 2025

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ  
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I



FACULTÉ DES SCIENCES  
FACULTY OF SCIENCES

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DEPARTMENT OF PHYSICS

## ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THÈSE DE DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeur **NGOHE-EKAM Paul Salomon** et Professeur **BEN-BOLIE Germain Hubert**, respectivement Examineur et Président du jury de la Thèse de Doctorat/Ph.D. de Monsieur **MBAM MBAM Serge Benjamin**, Matricule **10W0441**, préparée sous la direction du Professeur **NGO NYOBE Elisabeth** (Université de Yaoundé I), intitulée : **Écoulement laminaire localisé dans le plan polaire et situé entre deux cylindres coaxiaux à parois poreuses et en rotation accélérée** », soutenue le Vendredi, **23 Mai 2025**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D. en Physique, Spécialité **Mécanique, Matériaux et Structures**, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé, le **01 JUIL 2025**

Examineur

Pr NGOHE-EKAM Paul Salomon

Président du jury


Pr BEN-BOLIE Germain Hubert



Le Chef de Département de Physique

Pr NDJAKA Jean-Marie

**01 JUIL 2025**

<b>UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I</b> <b>Faculté des Sciences</b> Division de la Programmation et du Suivi des Activités Académiques		<b>THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I</b> <b>Faculty of Science</b> Division of Programming and Follow-up of Academic Affairs
<b>LISTE DES ENSEIGNANTS PERMANENTS</b>	<b>LIST OF PERMANENT TEACHING STAFF</b>	

## ANNÉE ACADEMIQUE 2024/2025

(Par Département et par Grade)

**DATE D'ACTUALISATION 30 septembre 2024**

### ADMINISTRATION

- 1. DOYEN : OWONO OWONO Luc Calvin, *Professeur***
- 2. VICE-DOYEN / DPSAA : NDJIGUI Paul-Désiré, *Professeur***
- 3. VICE-DOYEN / DSSE : NYEGUE Maximilienne Ascension, *Professeur***
- 4. VICE-DOYEN / DRC : NOUNDJEU Pierre, *Maître de Conférences***
- 5. Chef Division Administrative et Financière : NDOYE FOE Florentine Marie Chantal, *Maître de Conférences***
- 6. Chef Division des Affaires Académiques, de la Recherche et de la Scolarité DAARS : AJEAGAH Gideon AGHAINDUM, *Professeur***

#### 1- DÉPARTEMENT DE BIOCHIMIE (BC) (44)

N°	NOMS ET PRÉNOMS	GRADE	OBSERVATIONS
1.	BIGOGA DAIGA Jude	Professeur	En poste
2.	FEKAM BOYOM Fabrice	Professeur	En poste
3.	KANSKI Germain	Professeur	En poste
4.	MBACHAM FON Wilfred	Professeur	En poste
5.	MOUNDIPA FEWOU Paul	Professeur	<i>Chef de Département</i>
6.	NGUEFACK Julienne	Professeur	En poste
7.	NJAYOU Frédéric Nico	Professeur	En poste
8.	OBEN Julius ENYONG	Professeur	En poste

9.	ACHU Merci BIH	Maître de Conférences	En poste
10.	ATOGHO Barbara MMA	Maître de Conférences	En poste
11.	AZANTSA KINGUE GABIN BORIS	Maître de Conférences	En poste
12.	BELINGA née NDOYE FOE F. M. C.	Maître de Conférences	<i>Chef DAF / FS</i>
13.	DAKOLE DABOY Charles	Maître de Conférences	En poste
14.	DONGMO LEKAGNE Joseph Blaise	Maître de Conférences	En poste
15.	DJUIDJE NGOUNOU Marceline	Maître de Conférences	En poste
16.	DJUUKWO NKONGA Ruth Viviane	Maître de Conférences	En poste
17.	EFFA ONOMO Pierre	Maître de Conférences	<i>VD/FS/Univ Ebwa</i>
18.	EWANE Cécile Annie	Maître de Conférences	En poste
19.	KENGNE NOUEMSI Anne Pascale	Maître de Conférences	En poste
20.	KOTUE TAPTUE Charles	Maître de Conférences	En poste
21.	LUNGA Paul KEILAH	Maître de Conférences	En poste
22.	MANANGA Marlyse Joséphine	Maître de Conférences	En poste
23.	MBONG ANGIE M. Mary Anne	Maître de Conférences	En poste
24.	MOFOR née TEUGWA Clotilde	Maître de Conférences	<i>Doyen FS / UDs</i>
25.	NANA Louise épouse WAKAM	Maître de Conférences	En poste
26.	NGONDI Judith Laure	Maître de Conférences	En poste
27.	Palmer MASUMBE NETONGO	Maître de Conférences	En poste
28.	PECHANGOU NSANGOU Sylvain	Maître de Conférences	En poste
29.	TCHANA KOUATCHOUA Angèle	Maître de Conférences	En poste

30.	BEBEE Fadimatou	Chargée de Cours	En poste
31.	BEBOY EDJENGUELE Sara N.	Chargé de Cours	En poste
32.	FONKOUA Martin	Chargé de Cours	En poste
33.	FOUPOUPOUOGNIGNI Yacouba	Chargé de Cours	En poste
34.	KOUOH ELOMBO Ferdinand	Chargé de Cours	En poste
35.	MBOUCHE FANMOE Marceline J.	Chargé de Cours	En poste
36.	OWONA AYISSI Vincent Brice	Chargé de Cours	En poste
37.	WILFRED ANGIE ABIA	Chargé de Cours	En poste
38.	AKINDEH MBUH NJI	Chargé de Cours	En poste

39.	BAKWU BASSOGOG Christian Bernard	Assistant	En Poste
40.	ELLA Fils Armand	Assistant	En Poste
41.	EYENGA Eliane Flore	Assistant	En Poste
42.	MADIESSÉ KEMGNE Eugénie Aimée	Assistant	En Poste
43.	MANJIA NJIKAM Jacqueline	Assistant	En Poste
44.	WOGUIA Alice Louise	Assistant	En Poste

## 2- DÉPARTEMENT DE BIOLOGIE ET PHYSIOLOGIE ANIMALES (BPA) (50)

1.	AJEAGAH Gideon AGHAINDUM	Professeur	<i>DAARS/FS</i>
2.	DIMO Théophile	Professeur	En Poste
3.	DJIETO LORDON Champlain	Professeur	En Poste
4.	DZEUFIET DJOMENI Paul Désiré	Professeur	En Poste
5.	ESSOMBA née NTSAMA MBALA	Professeur	<i>CD et Vice Doyen/FMSB/UYI</i>
6.	KEKEUNOU Sévilor	Professeur	<i>Chef de Département</i>
7.	NJAMEN Dieudonné	Professeur	En poste
8.	NOLA Moïse	Professeur	En poste
9.	TAN Paul VERNYUY	Professeur	En poste
10.	TCHUEM TCHUENTE Louis Albert	Professeur	<i>Inspecteur de service / Coord.Progr. /MINSANTE</i>

11.	ZEBAZE TOGOUET Serge Hubert	Professeur	En poste
12.	ALENE Désirée Chantal	Maître de Conférences	<i>Vice Doyen/ Uté Ebwa</i>
13.	ATSAMO Albert Donatien	Maître de Conférences	En poste
14.	BILANDA Danielle Claude	Maître de Conférences	En poste
15.	DJIOGUE Séfirin	Maître de Conférences	En poste
16.	GOUNOUE KAMKUMO Raceline épse FOTSING	Maître de Conférences	En poste
17.	JATSA BOUKENG Hermine épse MEGAPTCHE	Maître de Conférences	En Poste
18.	KANDEDA KAVAYE Antoine	Maître de Conférences	En poste
19.	LEKEUFACK FOLEFACK Guy B.	Maître de Conférences	En poste
20.	MAHOB Raymond Joseph	Maître de Conférences	En poste
21.	MBENOUN MASSE Paul Serge	Maître de Conférences	En poste
22.	MEGNEKOU Rosette	Maître de Conférences	En poste
23.	MOUNGANG Luciane Marlyse	Maître de Conférences	En poste
24.	NOAH EWOTI Olive Vivien	Maître de Conférences	En poste
25.	MONY Ruth épse NTONE	Maître de Conférences	En Poste
26.	MVEYO NDANKEU Yves Patrick	Maître de Conférences	En poste
27.	NGUEGUIM TSOFAK Florence	Maître de Conférences	En poste
28.	NGUEMBOCK	Maître de Conférences	En poste
29.	TAMSA ARFAO Antoine	Maître de Conférences	En poste
30.	TOMBI Jeannette	Maître de Conférences	En poste

31.	AMBADA NDZENGUE GEORGIA ELNA	Chargé de Cours	En poste
32.	BASSOCK BAYIHA Etienne Didier	Chargé de Cours	En poste
33.	ETEME ENAMA Serge	Chargé de Cours	En poste
34.	FEUGANG YOUMSSI François	Chargé de Cours	En poste
35.	FOKAM Alvine Christelle Epse KENGNE	Chargé de Cours	En poste
36.	FOSSI TANKOUA Olivia Epse DJEUTCHOUANG SAYANG	Chargé de Cours	En poste (transfert Uté de Dla)
37.	GONWOUO NONO Legrand	Chargé de Cours	En poste
38.	KOGA MANG DOBARA	Chargé de Cours	En poste
39.	LEME BANOCK Lucie	Chargé de Cours	En poste
40.	MAPON NSANGO Indou	Chargé de Cours	En poste
41.	METCHI DONFACK MIREILLE FLAURE EPSE GHOUMO	Chargé de Cours	En poste
42.	NGOULATEU KENFACK Omer Bébé	Chargé de Cours	En poste
43.	NJUA Clarisse YAFI	Chargée de Cours	<i>Chef Div. Uté Bamenda</i>
44.	NWANE Philippe Bienvenu	Chargé de Cours	En poste
45.	TADU Zephyrin	Chargé de Cours	En poste
46.	YEDE	Chargé de Cours	En poste
47.	YOUNOUSSA LAME	Chargé de Cours	En poste

48.	KODJOM WANCHE Jacguy Joyce	Assistante	En poste
49.	NDENGUE Jean De Matha	Assistant	En poste
50.	ZEMO GAMO Franklin	Assistant	En poste

### 3- DÉPARTEMENT DE BIOLOGIE ET PHYSIOLOGIE VÉGÉTALES (BPV) (32)

1.	AMBANG Zachée	Professeur	<i>Chef de Département</i>
2.	DJOCGOUE Pierre François	Professeur	En poste
3.	MBOLO Marie	Professeur	En poste
4.	MOSSEBO Dominique Claude	Professeur	En poste

5.	NDONGO BEKOLO	Professeur	En poste
6.	ZAPFACK Louis	Professeur	En poste

7.	ANGONI Hyacinthe	Maître de Conférences	En poste
8.	BIYE Elvire Hortense	Maître de Conférences	En poste
9.	MAHBOU SOMO TOUKAM. Gabriel	Maître de Conférences	En poste
10.	MALA Armand William	Maître de Conférences	En poste
11.	MBARGA BINDZI Marie Alain	Maître de Conférences	DAAC /UDla
12.	NGALLE Hermine BILLE	Maître de Conférences	En poste
13.	NGONKEU MAGAPTCHE Eddy L.	Maître de Conférences	CT / MINRESI
14.	TONFACK Libert Brice	Maître de Conférences	En poste
15.	TSOATA Esaïe	Maître de Conférences	En poste
16.	ONANA JEAN MICHEL	Maître de Conférences	En poste

17.	DJEUANI Astride Carole	Chargé de Cours	En poste
18.	GONMADGE CHRISTELLE	Chargé de Cours	En poste
19.	MAFFO MAFFO Nicole Liliane	Chargé de Cours	En poste
20.	MANGA NDJAGA JUDE	Chargé de Cours	En poste
21.	NNANGA MEBENGA Ruth Laure	Chargé de Cours	En poste
22.	NOUKEU KOUAKAM Armelle	Chargé de Cours	En poste
23.	NSOM ZAMBO EPSE PIAL ANNIE CLAUDE	Chargé de Cours	En détachement/UNESCO MALI
24.	GODSWILL NTSOMBOH NTSEFONG	Chargé de Cours	En poste
25.	KABELONG BANAHOU Louis-Paul-Roger	Chargé de Cours	En poste
26.	KONO Léon Dieudonné	Chargé de Cours	En poste
27.	LIBALAH Moses BAKONCK	Chargé de Cours	En poste
28.	LIKENG-LI-NGUE Benoit C	Chargé de Cours	En poste
29.	TAEDOUNG Evariste Hermann	Chargé de Cours	En poste
30.	TEMEGNE NONO Carine	Chargé de Cours	En poste
31.	DIDA LONTSI Sylvere Landry	Assistant	En poste
32.	METSEBING Blondo-Pascal	Assistant	En poste

#### 4- DÉPARTEMENT DE CHIMIE INORGANIQUE (CI) (27)

1.	GHOGOMU Paul MINGO	Professeur	Ministre Chargé de Mission PR
2.	NANSEU NJIKI Charles Péguy	Professeur	En poste
3.	NDIFON Peter TEKE	Professeur	CT MINRESI
4.	NENWA Justin	Professeur	En poste
5.	NGOMO Horace MANGA	Professeur	Vice Chancellor/UB
6.	NJIOMOU C. épse DJANGANG	Professeur	En poste
7.	NJOYA Dayirou	Professeur	En poste

8.	ACAYANKA Elie	Maître de Conférences	En poste
9.	EMADAK Alphonse	Maître de Conférences	En poste
10.	KAMGANG YOUBI Georges	Maître de Conférences	En poste
11.	KEMMEGNE MBOUGUEM Jean C.	Maître de Conférences	En poste
12.	KENNE DEDZO GUSTAVE	Maître de Conférences	En poste
13.	MBEY Jean Aime	Maître de Conférences	En poste
14.	NDI NSAMI Julius	Maître de Conférences	Chef de Département
15.	NEBAH Née NDOIRI Bridget NDOYE	Maître de Conférences	Sénatrice/SENAT
16.	NYAMEN Linda Dyorisse	Maître de Conférences	En poste
17.	PABOUDAM GBAMBIE AWAWOU	Maître de Conférences	En poste
18.	TCHAKOUTE KOUAMO Hervé	Maître de Conférences	En poste
19.	BELIBI BELIBI Placide Désiré	Maître de Conférences	Chef Service/ ENS Bertoua

20.	CHEUMANI YONA Arnaud M.	Maître de Conférences	En poste
21.	KOUOTOU DAOUDA	Maître de Conférences	En poste

22.	MAKON Thomas Beauregard	Chargé de Cours	En poste
23.	NCHIMI NONO KATIA	Chargée de Cours	En poste
24.	NJANKWA NJABONG N. Eric	Chargé de Cours	En poste
25.	PATOUOSSA ISSOFA	Chargé de Cours	En poste
26.	SIEWE Jean Mermoz	Chargé de Cours	En Poste
27.	BOYOM TATCHEMO Franck W.	Assistant	En Poste

#### 5- DÉPARTEMENT DE CHIMIE ORGANIQUE (CO) (33)

1.	Alex de Théodore ATCHADE	Professeur	<i>DEPE/Univ. Bertoua</i>
2.	DONGO Etienne	Professeur	<i>Vice-Doyen/FSE/UYI</i>
3.	NGOUELA Silvère Augustin	Professeur	<i>Chef de Département UDS</i>
4.	PEGNYEMB Dieudonné Emmanuel	Professeur	<i>Recteur UBertoua/ Chef de Département</i>
5.	MBAZOA née DJAMA Céline	Professeur	En poste
6.	MKOUNGA Pierre	Professeur	En poste

7.	AMBASSA Pantaléon	Maître de Conférences	En poste
8.	EYONG Kenneth OBEN	Maître de Conférences	En poste
9.	FOTSO WABO Ghislain	Maître de Conférences	En poste
10.	KAMTO Eutrophe Le Doux	Maître de Conférences	En poste
11.	KENMOGNE Marguerite	Maître de Conférences	En poste
12.	MVOT AKAK CARINE	Maître de Conférences	En poste
13.	NGO MBING Joséphine	Maître de Conférences	<i>Chef de Cellule MINRESI</i>
14.	NGONO BIKOBO Dominique Serge	Maître de Conférences	<i>C.E.A/ MINESUP</i>
15.	NOTE LOUGBOT Olivier Placide	Maître de Conférences	<i>Dir ENS/Uté Bertoua</i>
16.	NOUNGOUE TCHAMO Diderot	Maître de Conférences	En poste
17.	TABOPDA KUATE Turibio	Maître de Conférences	En poste
18.	TAGATSING FOTSING Maurice	Maître de Conférences	En poste
19.	OUAHOUE WACHE Blandine M.	Maître de Conférences	En poste
20.	ZONDEGOUMBA Ernestine	Maître de Conférences	En poste

21.	MESSI Angélique Nicolas	Chargé de Cours	En poste
22.	MUNVERA MFIFEN Aristide	Chargé de Cours	En poste
23.	NGNINTEDO Dominique	Chargé de Cours	En poste
24.	NGOMO Orléans	Chargée de Cours	En poste
25.	NONO NONO Éric Carly	Chargé de Cours	En poste
26.	OUETE NANTCHOUANG Judith Laure	Chargée de Cours	En poste
27.	SIELINOUE TEDJON Valérie	Chargé de Cours	En poste
28.	TCHAMGOUE Joseph	Chargé de Cours	En poste
29.	TSAFFACK Maurice	Chargé de Cours	En poste
30.	TSAMO TONTSA Armelle	Chargé de Cours	En poste
31.	TSEMEUGNE Joseph	Chargé de Cours	En poste

32.	NDOGO ETEME Olivier	Assistant	En poste
-----	---------------------	-----------	----------

**6- DEPARTEMENT DES ENERGIES RENOUVELABLES (ER) (1)**

1.	BODO Bertrand	Professeur	<i>Chef de Département</i>
----	---------------	------------	----------------------------

**7- DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE (IN) (22)**

5.	ABESOLO ALO'O Gislain	Chargé de Cours	<i>Chef de Cellule MINFOPRA</i>
6.	AMINO HALIDOU	Chargé de Cours	<i>Chef de Département</i>

1.	ATSA ETOUNDI Roger	Professeur	<i>Chef de Division des SI/ MINESUP</i>
2.	FOUDA NDJODO Marcel Laurent	Professeur	<i>Inspecteur Général Académique/ MINESUP</i>

3.	NDOUNDAM René	Maître de Conférences	En poste
4.	TSOPZE Norbert	Maître de Conférences	En poste

7.	DJAM XAVIERA YOUH - KIMBI	Chargé de Cours	En Poste
8.	DOMGA KOMGUEM Rodrigue	Chargé de Cours	En poste
9.	EBELE Serge Alain	Chargé de Cours	En poste
10.	EKODECK Stéphane Gaël Raymond	Chargé de Cours	En poste
11.	HAMZA Adamou	Chargé de Cours	En poste
12.	JIOMEKONG AZANZI Fidel	Chargé de Cours	En poste
13.	KOUOKAM KOUOKAM E. A.	Chargé de Cours	En poste
14.	MELATAGIA YONTA Paulin	Chargé de Cours	En poste
15.	MESSI NGUELE Thomas	Chargé de Cours	En poste
16.	MONTHÉ DJIADEU Valéry M.	Chargé de Cours	En poste
17.	NZEKON NZEKO'O ARMEL JACQUES	Chargé de Cours	En poste
18.	OLLE OLLE Daniel Claude Georges Delort	Chargé de Cours	<i>Directeur Adjoint ENSET Ebolowa</i>
19.	TAPAMO Hyppolite	Chargé de Cours	En poste

20.	BAYEM Jacques Narcisse	Assistant	En poste
21.	MAKEMBE. S . Oswald	Assistant	<i>Directeur CUTI</i>
22.	NKONDOCK. MI. BAHANACK.N.	Assistant	En poste

**8- DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES (MA) (34)**

1.	AYISSI Raoult Domingo	Professeur	<i>Chef de Département</i>
----	-----------------------	------------	----------------------------

2.	KIANPI Maurice	Maître de Conférences	En poste
3.	MBANG Joseph	Maître de Conférences	En poste
4.	MBEHOU Mohamed	Maître de Conférences	<i>Chef de Division/ENSPY</i>
5.	MBELE BIDIMA Martin Ledoux	Maître de Conférences	<i>Chef de Département de modélisation et applications industrielles/ENSPY</i>
6.	NOUNDJEU Pierre	Maître de Conférences	<i>VDRC/FS/UYI</i>
7.	TAKAM SOH Patrice	Maître de Conférences	En poste
8.	TCHAPNDA NJABO Sophonie B.	Maître de Conférences	<i>Directeur/AIMS Rwanda</i>
9.	TCHOUNDJA Edgar Landry	Maître de Conférences	En poste

10.	AGHOUKENG JIOFACK Jean Gérard	Chargé de Cours	<i>Chef Cellule MINEPAT</i>
-----	-------------------------------	-----------------	-----------------------------

11.	BOGSO ANTOINE Marie	Chargé de Cours	En poste
12.	BITYE MVONDO Esther Claudine	Chargé de Cours	En poste
13.	CHENDJOU Gilbert	Chargé de Cours	En poste
14.	DJIADEU NGAHA Michel	Chargé de Cours	En poste
15.	DOUANLA YONTA Herman	Chargé de Cours	En poste
16.	KIKI Maxime Armand	Chargé de Cours	En poste
17.	KOKOMO AYISSI Eric Brice	Chargé de Cours	En poste (transfert de l'université de Douala)
18.	LOUMNGAM KAMGA Victor	Chargé de Cours	En poste
19.	MBAKOP Guy Merlin	Chargé de Cours	En poste
20.	MBATAKOU Salomon Joseph	Chargé de Cours	En poste
21.	MENGUE MENGUE David Joël	Chargé de Cours	<i>Chef Dpt /ENS Université d'Ebolowa</i>
22.	MBIAKOP Hilaire George	Chargé de Cours	En poste
23.	NGUEFACK Bernard	Chargé de Cours	En poste
24.	NIMPA PEFOUKEU Romain	Chargée de Cours	En poste
25.	OGADOA AMASSAYOGA	Chargée de Cours	En poste
26.	POLA DOUNDOU Emmanuel	Chargé de Cours	<i>En stage</i>
27.	TENKEU JEUFACK Yannick Léa	Chargé de Cours	En poste
28.	TCHEUTIA Daniel Duviol	Chargé de Cours	En poste
29.	TETSADJIO TCHILEPECK M. Eric.	Chargé de Cours	En poste

30.	FOKAM Jean Marcel	Assistant	En poste
31.	GUIDZAVAI KOUCHERE Albert	Assistant	En poste
32.	MANN MANYOMBE Martin Luther	Assistant	En poste
33.	MEFENZA NOUNTU Thiery	Assistant	En poste
34.	NYOUMBI DLEUNA Christelle	Assistant	En poste

### 9- DÉPARTEMENT DE MICROBIOLOGIE (MIB) (24)

1.	ESSIA NGANG Jean Justin	Professeur	<i>Chef de Département</i>
2.	NYEGUE Maximilienne Ascension	Professeur	<i>Vice-Doyen / DSSE</i>
3.	SADO KAMDEM Sylvain Leroy	Professeur	En poste

4.	ASSAM ASSAM Jean Paul	Maître de Conférences	En poste
5.	BOUGNOM Blaise Pascal	Maître de Conférences	En poste
6.	KOUITCHEU MABEKU Epse KOUAM Laure Brigitte	Maître de Conférences	En poste
7.	MUNE MUNE Martin Alain	Maître de Conférences	En poste
8.	RIWOM Sara Honorine	Maître de Conférences	En poste
9.	NJIKI BIKOÏ Jacky	Maître de Conférences	En poste
10.	TCHIKOUA Roger	Maître de Conférences	<i>Chef de Service de la Scolarité</i>

11.	ESSONO Damien Marie	Chargé de Cours	En poste
-----	---------------------	-----------------	----------

12.	LAMYE Glory MOH	Chargé de Cours	En poste
13.	MEYIN A EBONG Solange	Chargé de Cours	En poste
14.	MONI NDEDI Esther Del Florence	Chargé de Cours	En poste
15.	NKOUDOU ZE Nardis	Chargé de Cours	En poste
16.	NKOUJE TONG Abraham	Chargé de Cours	En poste
17.	TAMATCHO KWEYANG Blandine Pulchérie	Chargé de Cours	En poste
18.	SAKE NGANE Carole Stéphanie	Chargé de Cours	En poste
19.	TOBOLBAÏ Richard	Chargé de Cours	En poste

20.	EZO'O MENGO Fabrice Télésfor	Assistant	En poste
21.	EHETH Jean Samuel	Assistant	En poste
22.	MAYI Marie Paule Audrey	Assistant	En poste
23.	NGOUENAM Romial Joël	Assistant	En poste
24.	NJAPNDOUNKE Bilkissou	Assistant	En poste

#### 10. DEPARTEMENT DE PHYSIQUE (PHY) (42)

1.	BEN- BOLIE Germain Hubert	Professeur	En poste
2.	BIYA MOTTO Frédéric	Professeur	<i>DG/HYDRO Mekin</i>
3.	DJUIDJE KENMOE épouse ALOYEM	Professeur	En poste
4.	EKOBENA FOU DA Henri Paul	Professeur	<i>Vice-Recteur. Uté Ngaoundéré</i>
5.	ESSIMBI ZOBO Bernard	Professeur	En poste
6.	EYEBE FOU DA Jean sire	Professeur	En poste
7.	HONA Jacques	Professeur	En poste
8.	NANA ENGO Serge Guy	Professeur	En poste
9.	NANA NBENDJO Blaise	Professeur	En poste
10.	NDJAKA Jean Marie Bienvenu	Professeur	<i>Chef de Département</i>
11.	NJANDJOCK NOUCK Philippe	Professeur	En poste
12.	SAIDOU	Professeur	<i>Chef de centre/IRGM/MINRESI</i>
13.	SIMO Elie	Professeur	En poste
14.	TABOD Charles TABOD	Professeur	<i>Doyen FSUniv/Bda</i>
15.	TCHAWOUA Clément	Professeur	En poste
16.	WOAFO Paul	Professeur	En poste
17.	ZEKENG Serge Sylvain	Professeur	En poste

18.	ENYEGUE A NYAM épse BELINGA	Maître de Conférences	<i>Chef de Division de la formation continue et à distance/ENSPY</i>
19.	FEWO Serge Ibraïd	Maître de Conférences	En poste
20.	FOUEJIO David	Maître de Conférences	<i>Chef Cell/ MINADER</i>
21.	MBINACK Clément	Maître de Conférences	En poste

22.	MBONO SAMBA Yves Christian U.	Maître de Conférences	En poste
23.	MELI'I Joelle Larissa	Maître de Conférences	En poste
24.	MVOGO ALAIN	Maître de Conférences	En poste
25.	NDOP Joseph	Maître de Conférences	En poste
26.	SIEWE SIEWE Martin	Maître de Conférences	En poste
27.	VONDOU Derbetini Appolinaire	Maître de Conférences	En poste
28.	WAKATA née BEYA Annie Sylvie	Maître de Conférences	<i>Directeur/ENS/Uyi</i>
29.	WOULACHE Rosalie Laure	Maître de Conférences	<i>En stage depuis février 2023</i>
30.	ABDOURAHIMI	Chargé de Cours	En poste
31.	AYISSI EYEBE Guy François Valérie	Chargé de Cours	En poste
32.	CHAMANI Roméo	Chargé de Cours	En poste
33.	DJIOTANG TCHOTCHOU Lucie Angennes	Chargée de Cours	En poste
34.	EDONGUE HERVAIS	Chargé de Cours	En poste
35.	KAMENI NEMATCHOUA Modeste	Chargé de Cours	En poste
36.	LAMARA Maurice	Chargé de Cours	En poste
37.	NGA ONGODO Dieudonné	Chargé de Cours	En poste
38.	OTTOU ABE Martin Thierry	Chargé de Cours	<i>Directeur Unité de production des réactifs/IMPM</i>
39.	TEYOU NGOUPO Ariel	Chargé de Cours	En poste
40.	TOGUEU MOTCHEYO Alain Bertrand	Chargé de Cours	En poste
41.	WANDJI NYAMSI William	Chargé de Cours	En poste

42.	SOUFFO TAGUEU Merimé	Assistant	En poste
-----	----------------------	-----------	----------

#### 11- DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA TERRE (ST) (34)

1.	EKOMANE Emile	Professeur	<i>Chef Div./Uté Ebolowa</i>
2.	GANNO Sylvestre	Professeur	En poste
3.	NDJIGUI Paul-Désiré	Professeur	<i>Vice-Doyen /DPSAA</i>
4.	NGOS III Simon	Professeur	En poste
5.	NKOUMBOU Charles	Professeur	En poste
6.	ONANA Vincent Laurent	Professeur	<i>Chef de Département/Uté. Eb.</i>
7.	YENE ATANGANA Joseph Q.	Professeur	<i>Chef Div. /MINTP</i>

8.	BISSO Dieudonné	Maître de Conférences	<i>Chef de Département</i>
9.	Elisé SABABA	Maitre de Conférences	En poste
10.	EYONG John TAKEM	Maître de Conférences	En poste
11.	FUH Calistus Gentry	Maître de Conférences	<i>Sec. D'Etat/MINMIDT(ai)</i>
12.	MBIDA YEM	Maitre de Conférences	En poste
13.	MBESSE Cécile Olive	Maitre de Conférences	En poste
14.	METANG Victor	Maître de Conférences	En poste
15.	NGO BIDJECK Louise Marie	Maître de Conférences	En poste
16.	NGUEUTCHOUA Gabriel	Maître de Conférences	<i>CEA/MINRESI</i>
17.	NJILAH Isaac KONFOR	Maître de Conférences	En poste
18.	TCHAKOUNTE Jacqueline épse NUMBEM	Maître de Conférences	<i>Chef. Cell /MINRESI</i>

19.	TCHOUANKOUE Jean-Pierre	Maître de Conférences	En poste
20.	TEMGA Jean Pierre	Maître de Conférences	En poste
21.	ZO'O ZAME Philémon	Maître de Conférences	DG/ART

22.	ANABA ONANA Achille Basile	Chargé de Cours	En poste
23.	BEKOA Etienne	Chargé de Cours	En poste
24.	MAMDEM TAMTO Lionelle Estelle, épouse BITOM	Chargée de Cours	En poste
25.	NGO BELNOUN Rose Noël	Chargée de Cours	En poste
26.	NGO'O ZE ARNAUD	Chargé de Cours	En poste
27.	NOMO NEGUE Emmanuel	Chargé de Cours	En poste
28.	NTSAMA ATANGANA Jacqueline	Chargée de Cours	En poste
29.	TCHAPTCHET TCHATO De P.	Chargé de Cours	En poste
30.	TEHNA Nathanaël	Chargé de Cours	En poste
31.	FEUMBA Roger	Chargé de Cours	En poste
32.	MBANGA NYOBE Jules	Chargé de Cours	En poste

33.	KOAH NA LEBOGO Serge P.	Assistant	En poste
34.	TENE DJOUKAM Joëlle Flore, épouse KOUANKAP NONO	Assistante	En poste

### Répartition chiffrée des Enseignants de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I

#### NOMBRE D'ENSEIGNANTS

DÉPARTEMENT	Professeurs	Maîtres de Conférences	Chargés de Cours	Assistants	Total
BCH	08 (01)	22 (13)	08 (03)	06 (04)	<b>44 (20)</b>
BPA	11 (01)	19 (09)	16 (05)	03 (01)	<b>49 (16)</b>
BPV	06 (01)	10 (02)	14 (07)	02 (00)	<b>32 (10)</b>
CI	07 (01)	14 (03)	05 (01)	01 (00)	<b>27 (05)</b>
CO	06 (01)	14 (05)	11 (03)	02 (00)	<b>33 (09)</b>
ER	01 (00)		/	/	<b>01 (0)</b>
IN	02 (00)	02 (00)	15 (01)	03 (00)	<b>22 (01)</b>
MAT	01 (00)	08 (00)	20 (01)	05 (01)	<b>34 (02)</b>
MIB	03 (01)	07 (03)	09 (05)	05 (02)	<b>24 (11)</b>
PHY	17 (01)	12 (04)	12 (01)	01 (00)	<b>42 (06)</b>
ST	07 (00)	14 (03)	11 (03)	02 (01)	<b>34 (07)</b>
<b>Total</b>	<b>69 (07)</b>	<b>122 (42)</b>	<b>121 (30)</b>	<b>30 (09)</b>	<b>342 (88)</b>

Soit un total de

**342 (88)** dont :

- Professeurs : **69 (07)**
- Maîtres de Conférences : **123 (41)**
- Chargés de Cours : **120 (30)**
- Assistants : **30 (09)**

( ) = Nombre de Femmes : **88**

**ENSEIGNANTS SOUS CONTRAT DE COLLABORATION**

1.	BELL JOSEPH MARTIN	547019 U	17/06/ 1957	Sakbayeme	M	10/11/ 1986	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	PR
2.	DJOUFAC WOUMFO EMMANUEL	547069Z	09/01/ 1957	Ngaoundéré	M	04/05/ 1990	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	PR
3.	ELIMBI ANOINE.	546958 X	30/11/ 1955		M		RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	PR
4.	FOMENA ABRAHAM	546778 X	10/11/ 1958	Batcham	M	01/12/ 1986	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	PR
5.	GHOGOMU TIH RAPH	547004- K	23/12/ 1956	BAMBALANG	M	13/10/ 1982	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	PR
6.	KAMTCHOU NG PIERRES	143299 X	13/09/ 1955	Nkongsamba	M	01/10/ 1988	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	PR
7.	LAMINSI SAMUEL	143149J	30/1/ 2/195 3		M		RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	PR
8.	NGADJUI TCHALEU BONAVENTU RE	546959- G	15/09/ 1953	FONTSIGA	M	12/08/ 1982	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	PR
9.	NGO BILONG ANASTASIE épse TIH	546164- I	27/12/ 1955	MBANGA	F	28/07/ 2000	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	MC
10.	NKENGFAK EPHRAIM AUGUSTIN	546948- F	17/06/ 1955	YAOUNDE	M	01/09/ 1983	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION	PR
11.	NDIKONTAR MAURICE KOR	169784 G	09/05/ 1958	Mbaa	M	10/01/ 1991	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION- EN COURS DE SIGNATURE	PR

12.	NJIOKOU FLOBERT	547321 H	11/06/ 1958	Nkongsamba	M	03/05/ 1993	RETRAITE - CONTRAT DE COLLABORATION- EN COURS DE SIGNATURE	PR
13.	BENG NEE NINTCHOM PENLAP VERONIQUE	546643 B	07/01/ 1957	Melong I	F	02/10/ 1992	RETRAITE-CONTRAT DE COLLABORATION	PR
14.	FOKOU ELIE	546725J	08/06/ 1957	Fiéla- Bamendjinda	M	01/04/ 1988	RETRAITE-CONTRAT DE COLLABORATION EN COURS DE FINALISATION	PR
15.	TCHOUANKE U JEAN CLAUDE	547295- E	06/01/ 1959	Douala	M	01/12/ 1989	RETRAITE-CONTRAT DE COLLABORATION EN COURS DE FINALISATION	PR
16.	BOYOMO ONANA						CONTRATS TRAITES LORS DU CONSEIL D'UNIVERSITE DU 12 JUILLET 2024	MC
17.	WANDJI JEAN	162242 M	09/06/ 1958	Bangou	M			UYI
18.	YOUMBI EMMANUEL	547332Z	12/02/ 1959	Bangou	M	Bango u		PR
19.	NGODO MELINGUI JEAN	500475 X	05/09/ 1958	Endoum		20/10/ 2005		MC
20.	KOFANE TIMOLEON CREPIN							PR
21.	NGAMENI EMMANUEL	547277- C	24/04/ 1959	Mbanga	M			PR
22.	BITOM DIEUDONNE	547050 X	23/11/ 1958	Ambam	M			PR



**TABLE DES MATIÈRES**



<b>DÉDICACE</b>	.....	<b>i</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	.....	<b>iii</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b>	.....	<b>vii</b>
<b>LISTE DES SYMBOLES</b>	.....	<b>xii</b>
<b>RÉSUMÉ</b>	.....	<b>xiv</b>
<b>ABSTRACT</b>	.....	<b>xvi</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	.....	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : REVUE DE LA LITTÉRATURE</b>	.....	<b>13</b>
<b>I-1 Aperçu sur les écoulements entre deux cylindres</b>	.....	<b>14</b>
I-1-1 Machine de Taylor	.....	<b>14</b>
I-1-2 Résultats expérimentaux, numériques et analytiques	.....	<b>15</b>
<b>I-2 Etat de l'art</b>	.....	<b>21</b>
<b>CHAPITRE II : MATÉRIELS ET MÉTHODES</b>	.....	<b>24</b>
<b>II-1 Position du problème</b>	.....	<b>25</b>
II-1-1 Enoncé du problème	.....	<b>25</b>
II-1-2 Conditions aux limites du problème	.....	<b>25</b>
<b>II-2 Conservation de la masse dans le fluide</b>	.....	<b>28</b>
II-2-1 Enoncé du principe	.....	<b>28</b>
II-2-2 Équation de continuité avec débits entrant et sortant	.....	<b>28</b>
II-2-3 Fonction de courant	.....	<b>34</b>
II-2-4 Prérequis pour l'existence de l'écoulement laminaire étudié	.....	<b>36</b>
II-2-5 Conditions entre les vitesses en amont et en aval pour le problème à résoudre	.....	<b>37</b>
<b>II-3 Conservation de la quantité de mouvement</b>	.....	<b>40</b>
II-3-1 Enoncé du principe de conservation de la quantité de mouvement	.....	<b>40</b>

II-3-2	Équations de Cauchy.....	45
II-3-3	Loi de comportement d'un fluide Newtonien.....	47
II-3-4	Équations de Navier-Stokes.....	49
<b>II-4</b>	<b>Équation de vorticité.....</b>	<b>49</b>
II-4-1	Méthode de démonstration classique.....	49
II-4-2	Nouvelle méthode de démonstration.....	52
II-4-3	Forme adimensionnelle.....	56
II-4-4	Conditions aux limites adimensionnelles.....	58
II-4-5	Formulation adimensionnelle efficace du problème.....	59
II-4-6	Hypothèse de solution semblable (Berman, 1953) .....	61
<b>II-5</b>	<b>Méthode numérique de tir pour la fonction de courant par unité d'angle polaire.....</b>	<b>63</b>
II-5-1	Principe général de la méthode.....	63
II-5-2	Algorithme de Runge-Kutta.....	64
II-5-3	Algorithme de Newton-Raphson : calcul de la matrice Jacobienne.....	64
<b>CHAPITRE III:</b>	<b>RÉSULTATS ET DISCUSSION.....</b>	<b>71</b>
<b>III-1</b>	<b>Validation du code de calcul.....</b>	<b>72</b>
III-1-1	Validation qualitative à partir d'un problème de solution analytique connue.....	72
III-1-2	Validation à partir des résultats trouvés pour des cylindres immobiles par Makon et al. (2022) .....	76
<b>III-2</b>	<b>Lignes de courant ou trajectoires des particules de fluide.....</b>	<b>77</b>
III-2-1	Équations trouvées pour les lignes de courant.....	77
III-2-2	Figures des lignes de courant.....	79
III-2-3	Conditions d'existence de l'écoulement étudié.....	85
<b>III-3</b>	<b>Effets du rapport de vitesse <math>\beta</math> sur la vitesse radiale...85</b>	
<b>III-4</b>	<b>Effets du rapport de vitesse <math>\beta</math> sur la vitesse ortho- radiale.....</b>	<b>88</b>
<b>III-5</b>	<b>Effets du rapport de gap <math>\delta</math> sur la vitesse radiale.....</b>	<b>91</b>
<b>III-6</b>	<b>Effets du rapport de vitesse <math>\delta</math> sur la vitesse radiale.</b>	<b>92</b>

<b>III-7 Effets du coefficient de vitesse <math>\alpha</math> sur sur la vitesse radiale.....</b>	<b>94</b>
<b>III-8 Résultats sur la pression dans le fluide.....</b>	<b>97</b>
III-8-1 Formules numériques trouvées pour les gradients de pression.....	97
III-8-2 Gradient de pression radiale le long des cercles concentriques.....	101
III-8-3 Gradient de pression radiale le long des rayons.....	104
III-8-4 Effets du coefficient de vitesse sur le gradient de pression orthoradiale.....	107
III-8-5 Effets du rapport de gap sur le gradientde pression orthoradiale.....	109
III-8-6 Distribution de pression dans le fluide.....	112
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>116</b>
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>121</b>
<b>PUBLICATION ISSUE DE LA THÈSE.....</b>	<b>131</b>

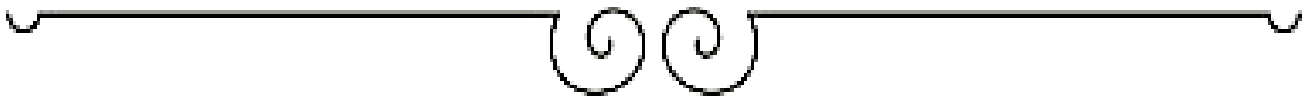


**DÉDICACE**

C'est avec profonde gratitude et sincères mots que je dédie ce travail à mes chers parents, qui ont sacrifié leur vie pour notre réussite et m'ont éclairé le chemin par leurs conseils judicieux. J'espère qu'un jour je pourrai leur rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi, que Dieu leur accorde tout le bonheur.



# REMERCIEMENTS



Je rends infiniment grâce à Dieu Tout Puissant pour la santé et la sagesse qu'il m'a accordées afin de pouvoir réaliser ce travail.

À l'issue de la rédaction de cette thèse, je suis convaincu que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de « **l'apprenti chercheur** ».

Je tiens à adresser également mes sincères remerciements aux **membres du jury** (Pré-soutenance, Audition et Soutenance) qui ont pris de leur temps précieux pour lire ce travail et accepter de faire partie des examinateurs. Qu'ils en soient particulièrement remerciés.

Je tiens à exprimer, ma profonde reconnaissance et ma grande estime à ma Directrice de thèse **Pr NGO NYOBE Elisabeth**, Professeur Titulaire de Génie Mécanique de l'École Nationale Supérieure de Polytechnique de l'Université de Yaoundé I, pour la confiance qu'elle m'a accordée, en acceptant d'encadrer ce travail doctoral au sein du Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique, pour ses conseils et pour toutes les heures qu'elle a consacrées, malgré ses occupations, à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié ses encouragements et ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail.

Ce travail n'aurait pu être possible sans l'apport du **Pr. PEMHA Elkana, HDR** Professeur Titulaire de Génie Mécanique de l'Université de Yaoundé I, avec qui j'ai pu interagir tout au long de ces années, comme guide et Responsable du Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique ; et sur qui j'ai pu

compter en permanence pour avancer dans mes recherches. Je tiens à le remercier tout particulièrement.

Je tiens également à remercier les coordonnateurs : le **Pr. OWONO OWONO Luc Calvin** et le **Pr. PEGNYEMB Dieudonné** respectivement de l'Unité de Recherche et de Formation de Physique et Applications et du Centre de Recherche et de Formation Doctorale de, pour leurs services au profit de la recherche et pour avoir mis sur pied des nouvelles réformes administratives permettant de diligenter les dossiers.

Merci encore au Chef de Département de Physique, le **Pr. NDJAKA Jean-Marie Bienvenu** pour avoir réuni toutes les conditions administratives pour que mon dossier de thèse puisse être diligenter et connaître un avis favorable.

Mes remerciements vont à l'endroit de tous les Enseignants de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I en général et en particulier à tous les Enseignants du Département de Physique pour toute contribution durant mes années passées au sein de leur contrôle, qu'ils soient vivement remerciés.

À toute l'équipe du Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Hydraulique : **Dr LAMARA Maurice, Dr. MAKON Noé Richard, Dr. MBOGBA Guy, Dr. GAZAMBETI Yvon, BAYIHA Paul Arnaud, TISSIBE Jacques Bernard, KALIBE Bernard**, et tous ceux que je n'ai pas nommés. Leur présence, leur bonne humeur et leurs compétences techniques m'auront été très précieuses au cours de ces années.

A ma très chère mère **NGO NYECK Cathérine**, autant de phrases aussi expressives soient-elles ne sauraient montrer le degré d'amour et d'affection que

j'éprouve pour toi. Tu m'as comblé avec ta tendresse et affection tout au long de mon parcours. Tu n'as cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, tu as toujours été présente à mes cotés pour me consoler quand il fallait, toute ton économie a toujours été mise à ma disposition. En ce jour mémorable, pour moi ainsi que pour toi, recoit ce travail en signe de ma vive reconnaissance et ma profonde estime. J'implore le Tout Puissant de t'accorder santé, bonheur et longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.

A mon très cher père **MBAM Marcel**, tu es l'exemple à suivre et je t'admire énormément t'es mon modèle. En témoignage de plusieurs années de sacrifices, de sollicitudes, d'encouragements et de prières. Je ne saurais tout dire seule remercier le Tout Puissant de me donner un père comme toi. Aucune dédicace ne saurait exprimer mes respects, ma reconnaissance et mon profond amour.

Qu'il me soit permis ici de mentionner le soutien de ma famille (**NGOON Simon, NYECK Bell Benoit, TUM André**), mon parrain **Mrs l'Abbé NLEGLA Fils Dieudonné, Abbé MINKA Hubert** et mes amis plus particulièrement à **NGUIMBOUS Alex** pour le soutien indéfectible qu'ils m'ont accordé. Il me serait difficile de vous citer tous, vous êtes dans mon cœur, affectueusement. Que ce travail soit le symbole de ce que je ressens envers vous.

Je souhaite exprimer ma gratitude à Monsieur **VOUNDI AKONO Jean Désiré** pour son hospitalité, ses généreux secours au cours de certains de mes moments difficiles ont été d'une grande qualité, et d'un immense réconfort.

Enfin, je tiens à remercier **Madame OBAMA ONANA Mélanie** pour le soutien inconditionnel et le support tout au long de ces années.

Merci à tous les autres qui de près ou de loin m'ont soutenu dans de ce travail. Que Dieu vous bénisse et vous accorde longue vie pleine de joie et de réussite.



## LISTE DES FIGURES



Figure 1 : La configuration de Taylor-Couette étudiée : cylindre de rayon intérieur $R_1$ en rotation, vitesse de rotation $\omega_1$ , cylindre de rayon extérieur $R_2$ au repos, le rayon moyen de l'entrefer $R_m$ et une longueur du cylindre $h$ .....	14
Figure 2 : La symétrie de l'écoulement de Taylor-Couette est cassée et déformée dans l'écoulement de Taylor-Couette Poiseuille. ....	20
Figure 3 : Plan polaire annulaire rempli de fluide newtonien entre deux cylindres poreux coaxiaux (C1) et (C2) avec une paroi en rotation accélérée en (C1). ....	27
Figure 4 : Plan polaire annulaire rempli de fluide newtonien entre deux cylindres poreux coaxiaux (C1) et (C2) avec une paroi en rotation accélérée en (C2). ....	27
Figure 5 : Domaine de fluide ( $D$ ) délimité par la surface ( $S$ ) .....	28
Figure 6 : Conservation de la masse avec débits entrant et sortant. ....	33
Figure 7 : Élément de surface $dS$ .....	41
Figure 8 : Portion de fluide ( $D$ ) délimitée par une surface ( $S$ ) .....	42
Figure 9 : Surface formant un trièdre triangulaire. ....	43
Figure 10 : Courbes comparatives des résultats numériques et analytiques .....	75
Figure 11a : Lignes de courant de l'écoulement radial, des deux cylindres (C1) et (C2) au repos ( $a_1 = 0, a_2 = 0$ ) pour $Q = 1$ .....	76
Figure 11b : Lignes de courant de l'écoulement radial, des deux cylindres (C1) et (C2) au repos ( $a_1 = 0, a_2 = 0$ ) pour $Q = -1$ . ....	77
Figure 12a : Lignes de courant du cylindre intérieur (C1) amont en rotation et du cylindre extérieur (C2) au repos ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ) pour $\beta = 0.05$ .....	81
Figure 12b : Lignes de courant du cylindre intérieur (C1) amont en rotation et du cylindre extérieur (C2) au repos ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ) pour $\beta = 0.1$ .....	81
Figure 12c : Lignes de courant du cylindre intérieur (C1) amont en rotation et du cylindre extérieur (C2) au repos ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ) pour $\beta = 0.2$ .....	82
Figure 12d : Lignes de courant du cylindre intérieur (C1) amont en rotation et du cylindre extérieur (C2) au repos ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ) pour $\beta = 1.0$ .....	82

- Figure 13a : Lignes de courant du cylindre extérieur(C2) amont en rotation et du cylindre intérieur (C1) au repos ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ) pour  $\beta = 0.01$  ..... 83
- Figure 13b : Lignes de courant du cylindre extérieur(C2) amont en rotation et du cylindre intérieur(C1) au repos ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ) pour  $\beta = 0.02$  ..... 83
- Figure 13c : Lignes de courant du cylindre extérieur (C2) amont en rotation et du cylindre intérieur (C1) au repos ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ) pour  $\beta = 0.04$  ..... 84
- Figure 13d : Lignes de courant du cylindre extérieur (C2) amont en rotation et du cylindre intérieur (C1) au repos ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ) pour  $\beta = 0.08$  ..... 84
- Figure 14a : Profil de vitesses radiales pour les valeurs du rapport de vitesses autorisées ( $\beta$ ) lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ) ..... 86
- Figure 14b : Profil de vitesses radiales pour les valeurs du rapport de vitesse autorisées ( $\beta$ ) lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ) ..... 86
- Figure 15a : Profil de vitesses orthoradiales par unité d'angle polaire pour différentes valeurs de rapport de vitesse autorisées ( $\beta$ ) lorsque le cylindre intérieur(C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ) ..... 90
- Figure 15b : Profil de vitesses orthoradiales par unité d'angle polaire pour différentes valeurs de rapport de vitesse autorisée ( $\beta$ ) lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ) ..... 90
- Figure 16a : Profil de vitesses radiales pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) tracé dans le cas où le cylindre (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 6.2$ ) ..... 91
- Figure 16b : Profil de vitesses radiales pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) tracé dans le cas où le cylindre (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ) ..... 92

- Figure 17a : Profil de vitesses orthoradiales pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) tracé dans le cas où le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 6.2$ ) ..... 93
- Figure 17b : Profil de vitesses orthoradiales pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) tracé dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ) ..... 93
- Figure 18b: Profil de vitesses radiales pour différentes valeurs du coefficient de vitesse  $\alpha$  dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \beta = 0.02$ ) ..... 95
- Figure 18c : Profil de vitesses orthoradiales par unité d'angle polaire pour différentes valeurs de  $\alpha$  dans le cas où le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \beta = 0.1$ ) ..... 96
- Figure 18d : Profil de vitesses orthoradiales par unité d'angle polaire pour différentes valeurs de  $\alpha$  dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \beta = 0.02$ ) ..... 96
- Figure 19a : Gradient de pressions radiales en fonction de l'angle polaire le long des couches de fluide circulaire concentré  $z - axe$  lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation..... 103
- Figure 19b : Gradient de pressions radiales en fonction de l'angle polaire le long des couches de fluide circulaire concentré  $z - axe$  lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation. .... 103
- Figure 19c : Gradient de pressions radiales en fonction de  $\xi$  le long des couches de fluide radiales lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation avec le cylindre intérieur (C1) en aval et au repos. .... 106
- Figure 19d : Gradient de pressions radiales en fonction des  $\xi$  le long des couches de fluide radiales lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation avec le cylindre extérieur (C2) en aval et au repos. .... 106
- Figure 20a : Gradient de pressions orthoradiales par unité d'angle polaire en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs du coefficient de vitesse ( $\alpha$ ) dans le cas où le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation 108
- Figure 20b : Gradient de pressions orthoradiales par unité d'angle polaire en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs du coefficient de vitesse ( $\alpha$ ) dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation. .... 108

- Figure 20c : Gradient de pressions orthoradiales par unité d'angle polaire en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) dans le cas où le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation. .... 111
- Figure 20d : Gradient de pressions orthoradiales par unité d'angle polaire en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation..... 111
- Figure 21a : Différence de pressions en fonction de  $\xi$  le long des couches radiales de fluide lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation avec le cylindre extérieur (C2) en aval et au repos. .... 113
- Figure 21b : Différence de pressions en fonction de  $\xi$  le long des couches radiales de fluide lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation avec le cylindre intérieur (C1) en aval et au repos. .... 113
- Figure 21c : Différence de pression sen fonction de l'angle polaire  $\theta$  le long des couches de fluide circulaire concentré  $z - axe$  lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation avec le cylindre extérieur (C2) en aval et au repos..... 114
- Figure 21d : Différence de pressions en fonction de l'angle polaire  $\theta$  le long des couches de fluide circulaire concentré  $z - axe$  lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation avec le cylindre extérieur (C1) en aval et au repos..... 114



## LISTE DES SYMBOLES





**Lettres grecques**

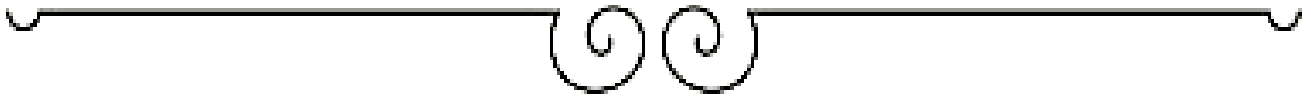
$\Omega$	Vitesse de rotation du cylindre
$\rho$	Masse volumique
$\delta$	Rapport de gap de la conduite annulaire
$\varphi$	Fonction de courant par unité d'angle polaire
$\lambda_1$	Longueur d'onde du cylindre intérieur (C1)
$\lambda_2$	Longueur d'onde du cylindre extérieur (C2)
$\beta$	Rapport de vitesses
$\xi$	Longueur adimensionnelle
$\alpha$	Coefficient de vitesses
$\tau_{r\theta}$	Contrainte de cisaillement
$\mu$	Viscosité dynamique
$\nu$	Viscosité cinématique
$\psi$	Fonction de courant

**Lettres latines**

$R_1$	Rayon du cylindre intérieur (C1)
$R_2$	Rayon du cylindre extérieur (C2)
$h$	Moitié de la largeur de l'entrefer
$R_m$	Rayon moyen de l'espace annulaire
<b>Re</b>	Nombre de Reynolds
$q_i$	Débit de masse par unité de masse de fluide du flux entrant
$q_s$	Débit de masse par unité de masse de fluide du flux sortant
$N_1$	Nombre des pores du cylindre intérieur (C1)
$N_2$	Nombre des pores du cylindre extérieur (C2)
$s_1$	Surface du cylindre intérieur (C1)
$s_2$	Surface du cylindre extérieur (C2)
$U$	Vitesse constance et uniforme
$V_r$	Composante du champ de vitesse radiale
$V_\theta$	Composante du champ de vitesse orthoradiale
$V_{ref}$	Vitesse de référence
<b>P</b>	Pression
<b>L</b>	Longueur commune des cylindres

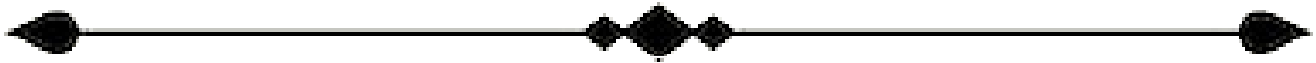


# RÉSUMÉ

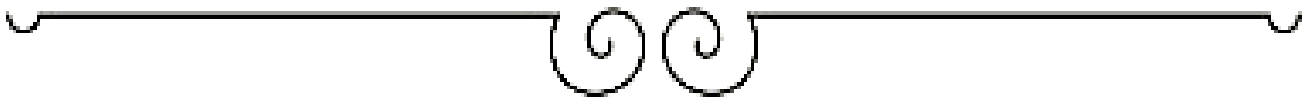


Dans ce travail, l'écoulement laminaire permanent d'un fluide newtonien incompressible dans une conduite annulaire poreuse avec des parois en rotation accélérée est étudié. L'écoulement est localisé dans le plan polaire et est entraîné par aspiration et injection au niveau des parois. Conformément à la conservation de la masse avec vitesse axiale nulle, le fluide est injecté dans l'un des cylindres qui devient le cylindre amont, et est aspiré dans l'autre, qui représente le cylindre aval. Le rapport de gap de la conduite, le rapport de vitesse comparant les vitesses radiale et orthoradiale, le nombre de Reynolds et le coefficient de vitesse qui compare la vitesse du fluide aux cylindres amont et aval sont les quatre paramètres adimensionnels qui gouvernent le problème. Le but de cette recherche est d'identifier les conditions préalables à l'existence de l'écoulement étudié et de déterminer comment les variables susmentionnées affectent la vitesse de l'écoulement et les gradients de pression pour un nombre de Reynolds fixe. Les équations de Navier-Stokes sont remplacées par l'équation de vorticité dans le plan polaire, qui est résolue en utilisant de la méthode des solutions semblables. La méthode de tir, comprenant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre, est utilisée pour obtenir des solutions numériques. A partir des résultats, des compréhensions physiques de l'écoulement sont déduites. Plus spécifiquement, nous découvrons une zone intérieure inattendue où le fluide est perpétuellement au repos même en présence de l'écoulement. La seule solution trouvée correspond au cas du cylindre intérieur est en amont et en rotation   condition que le rapport de vitesse ne dépasse pas le seuil de 0.1 avec un coefficient de vitesse supérieur   1.

**Mots clés :**  coulements laminaires polaires dans des conduites annulaires poreuses ; conservation de la masse avec les débits entrant et sortant ; écoulements laminaires délimités par des parois en rotation accélérée ; équation de vorticité en coordonnées polaires ; méthode des solutions semblables ; méthode numérique de tir   partir des résultats trouvés.



# ABSTRACT



In this work, the steady laminar flow of an incompressible Newtonian fluid in a porous annular duct with accelerated rotating walls is investigated. The flow is located in the polar plane and is driven by suction and injection at the walls. As required by conservation of the mass with zero axial velocity, the fluid is injected into one of the cylinders, which becomes the upstream cylinder, and suctioned into the other, which represents the downstream cylinder. Only the case of the downstream cylinder at rest is examined. The duct gap ratio, the velocity ratio comparing the radial and azimuthal velocities, the Reynolds number, and the velocity coefficient that compares the fluid velocity at the upstream and downstream cylinders are the four parameters of the problem. The purpose of this research is to identify the prerequisites for the flow's existence and determine how the aforementioned variables affect the flow velocity and pressure gradients at a fixed Reynolds number. The Navier-Stokes equations are replaced by the polar-plane vorticity equation, which is solved using the similarity solutions method. The shooting technique, including the fourth-order Runge-Kutta algorithm, is used to produce numerical solutions. From the findings, physical understandings of the flow are derived. More specifically, we discover an unexpected interior zone where the fluid is perpetually at rest even while flow is present. The only solution found corresponds to the case of the inner cylinder upstream and rotating provided that the velocity ratio does not exceed the threshold of 0.1 with a velocity coefficient greater than 1.

**Keywords:** polar laminar flows in porous annular duct; conservation of mass with incoming and out coming flow rates; laminar flows bounded by accelerated rotating walls; vorticity equation in polar coordinates; similarity-solutions method; numerical shooting technique.



# INRODUCTION GÉNÉRALE



Les anciens physiciens distinguaient quatre éléments : la terre, l'eau, l'air, et le feu. Cette tétralogie qui nous paraît bien simpliste avait une signification profonde, qui n'est d'ailleurs pas tellement éloignée de nos connaissances actuelles. En voici une traduction qui intègre ce que nous savons du monde matériel : la terre représente l'état solide, l'eau, l'état liquide, l'air, l'état gazeux et le feu est l'image même de l'énergie. Entre la terre, solide et support de notre domaine planétaire et le feu, feu et ciel ou feu des profondeurs il y a l'eau et l'air. Ce n'est pas le hasard qui met ici ces deux éléments, c'est parce qu'ils sont à la fois présents dans notre domaine fondamentalement nécessaire à notre vie. L'eau et l'air, en effet sont à la base de toute vie : l'air comme comburant dans les cycles bioénergétiques, l'eau comme principal constituant du corps vivant (de l'ordre de 70% en poids) et comme milieu interne nécessaire aux transferts ioniques à la base de la vie. Ainsi donc avant toute considération physique ou mathématique, les fluides sont en nous et leur rôle y est essentiel puisqu'ils sont le support de notre vie.

Dans les conditions normales pour l'homme, être d'interface, l'air est partout présent, mais l'eau ? Certaines contrées la possèdent en abondance, d'autres non. Dès lors la recherche de ce liquide, publié dans la référence [1], va essentiellement conduire à ces travaux qui mettent l'Hydraulique au premier rang des sciences les plus anciennes et les plus utiles.

Chaque civilisation depuis les plus lointaines jusqu'à nos jours laisse comme héritage les marques de son action sur l'eau. Ce sont les poteries préhistoriques, les canaux, les aqueducs des mésopotamiens aux romains ; ce sont aussi les récipients en plastique des amas de débris de nos jours.

C'est Poséidon et les Néréides des grecs, ce sont les nombreuses déesses des fontaines celtiques, c'est le rôle sacré de l'eau dans toutes les religions, c'est le jaillissement d'une source dans beaucoup d'événements miraculeux.

Le terme « fluide » qui fait partie du langage scientifique actuel est beaucoup plus général que celui de l'eau, quoique celle-ci en reste dans tous les esprits

l'exemple typique. Il y en a certes bien d'autres. L'air et tous les gaz en sont les plus subtils. Avec l'eau on placera tous les liquides courants, parmi lesquels le sang tient une place particulière et profondément intime. Mais la notion même du fluide peut s'étendre à quantité d'autres corps : les métaux en fusion ; la lave des volcans, les roches elles-mêmes dans les mouvements orogéniques comme le montrent les observations géologiques. Ceci simplement pour illustrer la diversité de la nature. Cependant par certains comportements, le terme « fluide » peut s'appliquer aussi bien à la matière stellaire constituant une nébuleuse qu'à une foule d'individus s'écoulant dans une rue ou à tout autre milieu homogène susceptible de déformation et de transfert.

La masse fluide se présentera sous forme d'une veine liquide coulant dans une canalisation, ou à l'inverse, contournant un obstacle. Dans les deux cas le volume considéré est limité par une paroi. Suivant un autre aspect le fluide sans limite sera le siège d'échanges cinétique, thermique, ionique. Un cas particulier fréquent de limite félicité est l'interface liquide-gaz dont la forme dépendra de l'état cinétique de l'un et de l'autre milieu. Dans la pratique courante ce sont les vagues de la mer ou les ondes d'un torrent.

Les rapports des hommes et des fluides ne sont pas seulement utilitaires ; ils revêtent bien des aspects, de la contemplation esthétique aux réflexions scientifiques. Les anciens grecs, ces hommes de génie créateurs de notre civilisation, surent passer de l'observation du fluide vital aux réalisations artistiques et voilà les savantes courbes qui ornent les frontons des temples, voilà le merveilleux chapiteau ionique dont la double volute est une anticipation du système des tourbillons marginaux que génère l'aile d'avion. Certes JOUKOWSKI ne pensait pas qu'il avait dans quelque PRAXITELE ionien un précurseur de ses conceptions. Mais l'eau n'est pas seulement un liquide nécessaire à la vie, elle offre bien d'autres possibilités. La voilà qui fournit l'énergie de ses chutes au moyen de machines rudimentaires qui écrasent le grain, la voilà qui entraîne une véritable centrale comme l'extraordinaire usine à

farine de Barbegal où les romains réunissent en double circuit de 16 groupes comprenant chacun une roue Hydraulique, des engrenages et une paire de meules. Et puis la surface ondulante des flots se prête à la navigation, de la simple pirogue à la trirème savamment carénée et vous avez la grâce à l'apport énergétique éolien l'instrument de toutes les explorations, ainsi d'ailleurs que celui de tant de combats d'ACTIUM à TRAFALGAR. On peut dire sans erreur que l'histoire de l'humanité est écrite avec beaucoup d'eau, et sans doute aussi avec beaucoup de sang, cet autre fluide secret que nous portons en nous.

La Mécanique des fluides est donc si intimement mêlée à la vie humaine qu'elle sera tout au long des siècles presque exclusivement entre les mains des artisans, comme le sont le travail du fer ou la taille de la pierre. Des savants cependant il y en a eu, et de fort célèbres, mais ces gens très supérieurs ne s'abaissaient guère au niveau des artisans, ils planaient comme l'esprit de DIEU au-dessus de flots à la veille de la Création. IL y eut certes un ACHIMÈDE qui en prenant son bain découvrit le principe qui porte son nom. Pendant des siècles tout développement des connaissances et des applications techniques reste entre les mains des artisans, dont certains s'élèvent déjà très haut dans le domaine de la réflexion, sans laisser pour autant un nom à la postérité.

En 1452 dans un village de Toscane naquit un enfant dont la vie fut d'une extraordinaire fécondité intellectuelle et qui passa à la postérité pour sa production artistique. C'est Léonard de VINCI. Certes ce fut un peintre de grande valeur, mais ce fut avant ses entreprises sur l'observation, la réflexion et l'expérience ; « *sono un huomo delle sperienza* » disait-il de lui-même.

VINCI n'abordait aucun sujet sans l'avoir disséqué, et c'est le mot qu'il employait ici car toutes les représentations de personnages qu'il fit furent précédées de longues études d'anatomie. C'est lui qui dessina une des premières turbines dans un projet de machine à aléser les canons. C'est lui qui fit pour François 1<sup>er</sup> un projet de canal le long de la Loire. C'est lui qui observa l'écoulement fluvial et torrentiel d'un cours d'eau. De cette dernière observation

et des croquis qu'il en fit il inspira pour dessiner par exemple la magnifique chevelure de l'ange de l'annonciation. C'est lui qui imagina machines volantes, parachute et scaphandre pour rester que dans le domaine de la mécanique des fluides. Avec VINCI, autant ingénieur qu'artiste, on est tenté de parler de l'esthétique des fluides comme d'une méthode d'analyse et de représentation.

Au XVI<sup>ème</sup> et au XVII<sup>ème</sup> siècle les théoriciens de la Mécanique des fluides restèrent dans une ombre prudente, se livrant presque à regret à quelques expériences comme le fit PASCAL. Les noms sont les plus souvent ignorés, mais les réalisations sont là. Un exemple parmi d'autres : c'est l'époque où la Hollande luttant contre les eaux envahissantes va protéger et créer son sol grâce aux innombrables moulins à vent entraînant les machines d'épuisement, moulins dont les dimensions, l'efficacité, la normalisation restent sujet d'admiration. Ces machines dont la puissance pouvait atteindre près de 50kW avec des roues de 20m de diamètre étaient construites presque exclusivement en bois avec l'outillage rudimentaire de l'époque.

Dans le domaine de l'Hydraulique, d'après les travaux de DARRIGOL [2] les réalisations furent aussi remarquables. Le lent travail des siècles fut tel que sous le règne de Louis XV la France possède plus de 100000 moulins à eau, sans compter les moulins à vent. Ces moulins fournissaient au total l'équivalent d'une puissance de l'ordre d'un à deux millions de kW suivant les saisons. Et tout cela sans l'aide d'aucun calcul en s'appuyant seulement sur la tradition et l'expérience.

Il se trouva cependant au début du XVIII<sup>ème</sup> siècle un homme de grand mérite pour transmettre tout ce savoir dispersé, C'est BELIDOR, ingénieur militaire et professeur de Mathématiques, qui, en 1737 publia les quatre tomes de son « Architecture Hydraulique » grâce auxquels nous découvrons tant de belles machines. Parmi celles-ci il faut citer les moulins de Basacle à Toulouse, véritable anticipation avec deux siècles d'avance des modernes centrales de basse chute avec bâcle vortex et roue hélice à axe vertical. C'est BELIDOR

également qui nous présente les détails des moulins à marée, autre anticipation de la célèbre usine marémotrice de la Rance.

Avec le XVIII<sup>ème</sup> siècle va enfin disparaître la longue ignorance qui séparait les savants des artisans. Daniel BERNOULLI [2], membre d'une célèbre famille de mathématiciens de Bâle, va enfin formuler l'expression de la conservation de l'énergie où figurent les trois termes de position, la pression et la vitesse (Traité d'Hydraulique de 1738). En cela il est vrai il avait été précédé en 1644 par TORICELLI qui cependant avait limité son travail aux jets d'eau des villas italiennes. Puis, toujours originaire de la ville de Bâle, Léonard EULER [3] en 1741 donne l'expression qui est à la base des calculs de toutes les turbomachines. Si VINCI fut un exemple d'universalité, EULER en est un autre ; On oublie généralement qu'il est parti de la théologie, mais les voies du Seigneur le conduisirent ensuite aux mathématiques, à la topologie, à l'optique, à l'astronomie et à la mécanique des fluides sans jamais quitter la philosophie.

Cette universalité toute opposée à la spécialisation à outrance des modernes chercheurs est bien la marque du vrai génie. Ce génie fut honoré par la Banque Nationale Suisse qui fait figurer sur son billet de 10F le portrait d'EULER des dessins à ses principales activités, dont sa machine Hydraulique. Mais si EULER fut un philosophe et un savant, il n'était pas un ingénieur, aussi la réalisation qu'il fit faire de sa machine Hydraulique resta à l'état embryonnaire, tel qu'on peut contempler au musée technique de Winterthur.

Il faut attendre une bonne cinquantaine d'années pour que le rêve d'EULER prenne corps grâce au génie de Benoît FOURNEYON. Mais FOURNEYON était ingénieur et de plus un industriel, ce qui lui apportait non seulement le sens de la Mécanique mais aussi celui de la faisabilité économique. Aussi le succès fut-il atteint dès les premières machines. En l'espace de quelques années FOURNEYON passe de chutes en 1827 à la première haute chute dépassant 100m en 1837 dans la forêt noire. La voie est ouverte ; dans le sillage de FOURNEYON s'engage quantité de réalisateurs : GIRAD, JONVAL, FRANCIS, PELTON, KAPLAN. Des 100m

de 1837 on passe à l'impressionnant record de 1650m atteint en 1914 à la centrale de Fully. L'eau attaque les roues par le centre, par le côté, par la périphérie.

Dans un autre domaine, la vapeur se substitue à l'eau et ce sont : De LAVAL, PARSONS, ZOELLY, STODOLA, RATEAU. Les turbines à vapeur remplacent les belles machines à piston. Ces remarquables réussites vont entraîner à leur suite le monde des mathématiciens, des scientifiques, des expérimentateurs cette fois au service des constructeurs. Mais, revanche des artisans, c'est du bureau d'étude des industriels qu'apparait le mouvement. Ainsi les réflexions de BERNOULLI et d'EULER ne sont plus de simples formules livresques, elles sont chaque jour concrétisées. Toutes deux s'attachent à des milieux différents dont l'un dit fluide parfait ignore les difficultés que présente l'autre, le fluide réel. Le phénomène essentiel qui caractérise le fluide réel est la combinaison des effets cinétiques d'inertie et de la viscosité génératrice de forces de tangentes aux lignes de courants, forces qui vont engendrer des gradients de vitesse perpendiculairement aux parois limitant l'écoulement. Curieusement les premières études sur la viscosité sont dues à un médecin, POISEUILLE auteur de la formule classique des écoulements dans les tubes de petite dimension, tels les vaisseaux sanguins ; son nom fut d'ailleurs retenu pour désigner l'unité de viscosité.

Deux notions très importantes des fluides réels découlent de l'influence de la viscosité. C'est ici que se situent les travaux de REYNOLDS et en particulier son célèbre nombre sans dimension (nombre de Reynolds  $Re$ ) qui sépare les écoulements dits laminaires où la viscosité joue un rôle stabilisant, des écoulements dits turbulents où les forces d'inertie l'emportent et créent une stabilité interne. L'influence prépondérante de la viscosité au voisinage des parois est à l'origine de la couche limite, à l'étude de laquelle s'illustrèrent entre autres PRANDTL et VON KARMAN. Toutes les questions de sillage et décollement se déduisent de ces considérations.

Fluide réel, fluide parfait ; voilà une frontière entre deux conceptions, entre deux mondes de chercheurs, une frontière qui sépare deux représentations, deux pédagogies et donc deux descendance d'hydrauliciens, ceux de l'expérience et ceux de la machine à calculer. Fluide réel, fluide parfait, ce sont bien deux philosophies de la matière, l'une rattachée à la nature et l'autre au produit du raisonnement. Fluide réel qui rappelle l'observateur, l'expérience, qui fut le maître des artisans et des ingénieurs. Fluide parfait, image engendrée par les calculs, mais aussi image d'autres domaines qui vont s'ouvrir par analogie. Comme un pont établi entre ces deux modes de représentation, certains concepts offrent une vision nouvelle des phénomènes physiques et à travers eux s'établit une analogie avec d'autres domaines. Tel est le concept de « flux », d'une perception immédiate. Tel est aussi le concept plus subtil de « circulation » qui s'applique aussi bien à un profil d'aile qu'à un conducteur électrique.

À l'origine, œuvres de rêveurs audacieux, les premières machines volantes se lancèrent dans l'air alors que leurs constructeurs ignoraient totalement la physique des profils d'aile. C'est ici le concept de « circulation » imaginé (ou utilisé) par JOUKOWSKI va jouer un grand rôle dans la représentation des phénomènes en faisant apparaître la portance d'une aile comme le produit d'une circulation par vitesse de déplacement. Il se trouve que cette forme est la même que celle de l'expression de LAPLACE déterminant la force exercée par un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant électrique, ou inversement que celle de LENZ définissant le courant induit en fonction du flux magnétique balayé. Voici ainsi réalisée l'homogénéité physicomathématique d'un groupe turbo-alternateur.

La synthèse des techniques Hydraulique et Electrique peut même aller plus loin par l'emploi d'un liquide conducteur (métal liquide, eau salée). On réalise ainsi en un seul appareil un moteur fluide-générateur électrique ou un moteur électrique-pompe fluide.

Dans le domaine des turbomachines il convient d'évoquer les notions élémentaires de cinématique qui aboutissent aux triangles de vitesses combinant les vecteurs vitesses : absolue, entraînement et relative. De ces notions découle la distinction très féconde entre mouvement absolu auquel s'applique le théorème d'EULER [3] et mouvement relatif auquel s'appliquent les règles de tracé d'aubages. Le principe de fonctionnement de l'étrange rotor de DARRIEUS découle directement de l'application de ces règles avec renversement d'incidence deux fois par tour.

Avec le XX<sup>ème</sup> siècle les connaissances acquises offrent des méthodes différentes et complémentaires de représentation de fluide, qu'elles soient physiques ou mathématiques. La représentation physique s'enrichit des possibilités de la similitude qui rendent accessible l'étude des phénomènes indépendamment des échelles de dimension et qui donnent au terme « fluide » des applications physiques variées passant des liquides aux gaz, ou des fluides habituels à des milieux matériels inattendus.

La représentation Mathématique elle aussi va nous offrir des superbes images. Avec elle s'ouvre le vaste domaine des analogies où se tissent les liens entre différentes techniques : Hydraulique, Aérodynamique, Thermodynamique, Electromagnétique. La multiplicité des possibilités de représentation élargit le sens du mot « fluide ». S'agit-il d'un fluide qui coule, d'un milieu où règne un champ de forces, s'agit-il de transferts ioniques, énergétiques, et, pourquoi pas économiques ? Les turbulences qu'on y rencontre sont familières à l'hydraulicien.

La géométrie des champs laplaciens offre des images harmonieuses à la création de l'ingénieur, mais aussi à la création de l'artiste, ce qui ramène la Mécanique des fluides à l'esthétique, ou inversement. Un exemple inattendu, emprunté aussi à la peinture de la fin du XV<sup>ème</sup> siècle va montrer l'usage qui fut fait des champs laplaciens bien avant que ceux-ci ne soient mathématiquement analysés. Hieronymus BOSCH, peintre hollandais bien connu pour ses compositions

fantasmagoriques, réalisa cependant une œuvre apaisante « la montée dans l'Empyrée » où l'on voit les âmes des défunts quittant leurs tombes pour rejoindre la lumière céleste. Cette composition est entièrement bâtie sur le dessin laplacien du champ d'un puits combiné à un mouvement tourbillonnaire, à telle enseigne que l'on peut mettre en parallèle le tableau et le tracé, l'un découle de l'autre d'une façon évidente.

La fonction Biologique de fluide sanguin, fonction essentielle de transfert, se manifeste à deux échelles étroitement combinées. Tout d'abord, phénomène le plus évident, la circulation comporte un circuit fermé où l'énergie fournie par la pompe cardiaque assure le mouvement et compense les pertes dues à la viscosité dans le réseau vasculaire. Ce réseau est un exemple parfait de système ramifié distributeur et collecteur ; le degré de ramification y est poussé à un point de division tel que longtemps on ignora que le circuit était fermé par suite de l'impossibilité d'observer les plus fines branches.

Pour aborder le monde de la Mécanique des fluides, nous avons pris Léonard de VINCI comme guide, pour terminer cet examen nous adresserons à un autre artiste de la même époque, Albert DÜRER. Celui-ci dans une célèbre gravure intitulée « Mélancolie » [4] nous présente un personnage plongé dans ses réflexions faces à l'incertitude d'un choix et à l'ignorance des conséquences. Ce personnage est là entre les sciences rationnelles symbolisées par le compas, le polyèdre ou le célèbre carré magique, et la contemplation des beautés d'une nature où l'on voit briller dans l'atmosphère avec un arc en ciel, l'éclatante lumière qui réfléchit dans une vaste étendue liquide, symbole de l'eau, de l'air et du feu, les trois acteurs de la Mécanique des fluides.

Les développements techniques au fil des siècles ont vu l'apparition d'une classe de systèmes Mécaniques appelés « turbomachines » c'est-à-dire de dispositifs impliquant un fluide interagissant avec un ou plusieurs éléments en rotation. On peut citer parmi les exemples plus récents les turbines, dynamos ou

alternateurs de centrales électriques, les turbines présentes dans les turboréacteurs d'avion, ou encore les pompes à centrifugation.

La nécessité industrielle d'améliorer le rendement des turbomachines a tout naturellement amené le besoin de mieux comprendre la physique en jeu dans les écoulements qui se développent entre des parois en rotation. Pour mieux saisir les mécanismes fondamentaux qui pilotent ces classes d'écoulements. La communauté scientifique s'est tout d'abord intéressée à l'étude de configuration simplifiées, plus facilement modélisables par la théorie, et plus facilement abordables par des dispositifs expérimentaux.

Notre recherche se concentre sur l'écoulement laminaire permanent entre deux cylindres poreux et coaxiaux, situés dans le plan polaire orthogonal à l'axe commun des deux cylindres. Les parois des cylindres subissent une aspiration et une injection ainsi qu'une rotation accélérée. Etant donné que l'écoulement pris en compte se produit dans le plan polaire, il n'a pas de vitesse axiale. La conservation de la masse dans la conduite annulaire, qui nécessite un champ de vitesse à divergence nulle pour un fluide incompressible, oblige l'un des cylindres à subir une injection puis à assumer le rôle du cylindre amont, tandis que l'autre cylindre subir une aspiration et représente le cylindre aval. Les écoulements laminaires dans des conduites cylindriques poreuses comme l'écoulement étudié sont rencontrés dans diverses applications thermiques et en génie des fluides notamment le refroidissement des moteurs de fusées et de jets, le séchage industriel, le refroidissement ou le chauffage industriel, le génie alimentaire, et la production de textile, papier, cuir et caoutchouc. Plus spécifiquement en génie alimentaire, la configuration des cylindres prise en compte dans le travail présent est rencontrée dans les dispositifs techniques de certains procédés artisanaux d'extraction d'huile de palme.

Auteurs	Années						
	-300	0	1500	1600	1700	1800	1900
<b>ARCHIMEDE</b>	-287 ; 212	-					
<b>LEONARD DE VINCI</b>		1452-1519					
<b>Albert DÜRER</b>		1471-1528					
<b>NEWTON</b>				1643-1727			
<b>EULER</b>				1707-1783			
<b>LAGRANGE</b>					1736-1813		
<b>LAPLACE</b>					1749-1827		
<b>HELMHOLTZ</b>							1821-1894
<b>RAYLEIGH</b>							1842-1919
<b>REYNOLDS</b>							1842-1912
<b>NAVIER</b>					1785-1836		
<b>STOKES</b>							1819-1903
<b>BOLTZMANN</b>							1844-1906
<b>COUETTE</b>							1858-1943
<b>POISEUILLE</b>					1799-1869		
<b>KOLMOGOROV</b>							1903-1987
<b>TAYLOR</b>							1886-1975
<b>MALLOCK</b>							1851-1933
<b>MARGULES</b>							1856-1930
<b>PRANDTL</b>							1875-1979
<b>KARMAN</b>							1881-1963
<b>BERNARD</b>							1874-1939
<b>BATCHELOR</b>							1920

Personnalités historiques de la Mécanique des fluides avant l'année 2000.



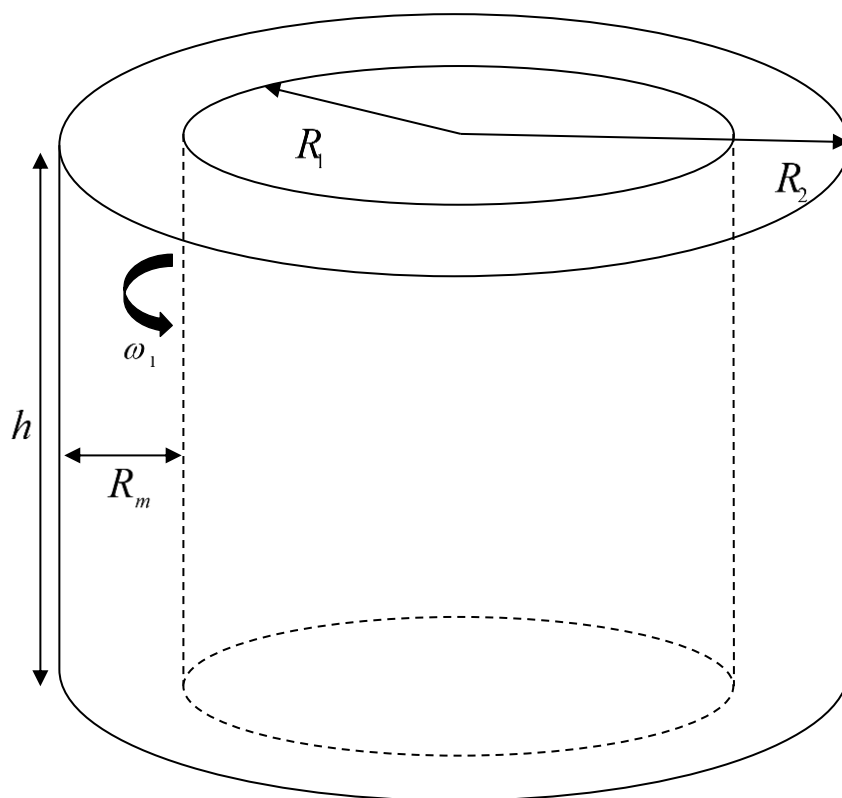
**CHAPITRE I : REVUE DE LA  
LITTÉRATURE**



## I-1 Aperçu sur les écoulements entre deux cylindres

Nous pouvons faire remonter la première étude d'un fluide entraîné par la rotation d'un cylindre à Isaac Newton qui, dans ses « *Principia* » en 1687, s'intéressa aux fluides en rotation. Plus tard, dans un article de 1848, George Gabriel Stokes évoqua le problème d'un fluide en mouvement entre deux cylindres mobiles coaxiaux ; il suggéra que la mise en rotation de la paroi cylindrique interne devait produire la situation la moins stable, puisqu'elle engendrait une force centrifuge qui projette le fluide vers la paroi externe, contribuant ainsi à déstabiliser l'écoulement. C'est à Lord Rayleigh que l'on doit, en 1880, une première formulation théorique de ce problème, pour le cas particulier de fluides non visqueux.

### I-1-1 Machine de Taylor-Couette



**Figure 1** : La configuration de Taylor-Couette étudiée : cylindre de rayon intérieur  $R_1$  en rotation, vitesse de rotation  $\omega_1$ , cylindre de rayon extérieur  $R_2$  au repos, le rayon moyen de l'entrefer  $R_m$  et une longueur du cylindre  $h$  .

L'écoulement entre deux cylindres coaxiaux est un modèle Dynamique d'une grande importance. En conséquence, il apparaît nécessaire d'établir une brève revue historique des études de la fin du 19<sup>ème</sup> siècle de l'écoulement de Taylor-Couette. Le régime de l'écoulement est identifié en fonction du couple et sa relation avec le nombre de Reynolds  $Re$  [5-6]. Le régime laminaire n'est toujours pas observé et ceci change très vite pour un régime turbulent ce qui rend peu aisée l'identification des pertes aérauliques dans ce type de machines ultra compacte et ultra rapide.

### **I-1-2 Résultats expérimentaux, numériques et analytiques**

En 1888 Max Margules, est le premier à proposer, la construction d'un viscosimètre à partir d'un cylindre en rotation. Sept ans après la publication de Margules [7] ; Mallock et Couette ont commencé la construction du viscosimètre à cylindre en rotation. Il semblerait qu'ils ignoraient chacun le travail de l'autre et que Couette avait connaissance des travaux de Margules. En 1876, Mallock a travaillé comme assistant à Lord Rayleigh, alors secrétaire de la société royale de Londres, a fait un communiqué sur un papier de Mallock sous le nom de "Détermination of the Viscosity of Water". D'après ses essais, le couple n'est pas lié linéairement à la vitesse de rotation lorsque le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur est au repos. Il conclut à ce que l'écoulement, pour ce cas-là, est toujours instable. Ce qui était totalement en adéquation avec le critère de Rayleigh. Or, ceci se révélera inexact et sera prouvé par Taylor en 1923. Dans l'hypothèse contraire, c'est-à-dire dès lors que le cylindre extérieur est en rotation et le cylindre intérieur est au repos, les essais de Taylor, ont démontré que l'écoulement est stable à vitesses de rotation faibles et instables à grandes vitesses de rotation ce qui contredisait le critère de Rayleigh.

Pour un écoulement cisailé entre deux cylindriques en rotation et de longueur infinie, les équations de Navier-Stokes, qui régissent la dynamique du fluide, admettent une solution analytique axisymétrique et stationnaire, dépendant uniquement de la coordonnée radiale  $r$  : c'est le profil de Couette, défini par :

$$u_{\theta}(r) = Ar + \frac{B}{r}, \text{ avec } A = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \text{ et } B = \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (1.1)$$

Le cylindre intérieur étant caractérisé par son rayon  $R_1$  et sa vitesse de rotation  $\omega_1$ , le cylindre extérieur par son rayon  $R_2$  et sa vitesse de rotation  $\omega_2$ . Les cylindres peuvent être en rotation dans le même sens, ou sens opposé. Si l'un des cylindres est immobile, le système est dit rotor-stator.

La description des régimes d'écoulement se base sur les valeurs des paramètres de contrôle qui sont des nombres adimensionnels : soit le nombre de Reynolds ou soit le nombre de Taylor qui sont fonction de la vitesse linéaire  $V = \omega_1 R_1$  du cylindre en rotation, l'espace annulaire étant  $R_2 - R_1$  et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

À partir de l'équation(1.1), nous pouvons déduire les contraintes de cisaillement pour le cas d'un cylindre intérieur qui tourne et un cylindre extérieur fixe comme suit :

$$\tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right) = -\frac{2\mu B}{r^2} = -\frac{2\Omega_1 R_1^2 \mu}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (1.2)$$

nous pouvons déduire l'équation (1.2) donnant le couple laminaire :

$$M = 2\pi R_i^2 L \tau_{r\theta} = -4\pi\mu BL = \frac{-4\pi\mu R_1^2 R_2^2 L \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (1.3)$$

L'histoire remonte à Isaac Newton, en 1687, qui s'est intéressé dans ses "principa" aux fluides en rotation [8]. Il a commencé par définir ce que nous appelons aujourd'hui 'un fluide newtonien', on appelle fluide newtonien un fluide dont la loi exprimant la contrainte de cisaillement est proportionnelle au taux de déformation du fluide. La constante de proportionnalité est appelée viscosité. Son hypothèse se résume aujourd'hui ainsi : les contraintes de viscosité son directement proportionnelles au gradient de vitesse d'un fluide newtonien.

L'instabilité d'un écoulement correspond à la transition du mouvement de l'état de base stable à l'état perturbé. Cette transition est le résultat d'une perturbation du champ de vitesse et de la pression au sein du fluide. Pour caractériser le domaine d'existence du phénomène d'instabilité, nous faisons appel aux paramètres régissant l'écoulement [9].

Tout d'abord, dans le cas de l'écoulement d'un fluide parfait : l'action de la viscosité est négligée dans les équations du mouvement. L'instabilité d'un écoulement en rotation résulte d'un déséquilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression centripète. Comme présenté par Sir George Gabriel Stokes en 1848 [10], pour deux cylindres coaxiaux en rotation, chacun devrait être en rotation dans un même sens pour avoir un écoulement stable. Si un cylindre extérieur est en rotation, et si le cylindre intérieur est en rotation, le fluide situé près de la paroi aura tendance à centrifuger. Cet effet est une conséquence de la force centrifuge, qui entraîne beaucoup de vortex et d'instabilité. Pour déterminer si l'état d'un écoulement est stable ou instable, il est nécessaire d'observer la force de déplacement infinitésimal d'une particule fluide dans la direction radiale, c'est-à-dire, de la position ( $r$ ) où la vitesse est  $\omega(r)$  à la position ( $r + dr$ ). où la vitesse angulaire  $\omega$  [11-12]. On considère une particule fluide en mouvement en rotation sur une ligne de courant de rayon de courbure ( $r$ ), ayant une vitesse radiale  $V_r$  et en équilibre sous l'action d'une force dérivant d'un gradient de pression  $\partial P/\partial r$ .

En raison de l'absence de dissipation de la viscosité dans cette analyse, le moment cinétique de la particule est conservé et s'écrit comme suit :

$$M_c = V r = \Omega r^2. \quad (1.4)$$

Deux cas peuvent se présenter :

- Lorsque le moment cinétique  $M_c = M_c(r + dr)$  est supérieur à celui en  $r$ ,  $M_c(r)$  le gradient de pression en ( $r + dr$ ) aura tendance à ramener la particule de fluide à sa position initiale : le mouvement est dit stable.

- Si  $M_c(r + dr) < M_c$ , la force centrifuge agissant sur la particule fluide est supérieure au gradient de pression centripète environnant, et la particule s'écarte de sa position d'équilibre dans la direction de  $(r)$  croissant, l'écoulement est alors instable.

Ce raisonnement peut se traduire par le critère de stabilité de Rayleigh qui s'écrit suivant que l'écoulement est stable pour un fluide parfait si,  $d|M_c|/dr > 0$ , qui est la formulation du premier critère d'instabilité soit :  $d|\Omega r^2|/dr > 0$ .

Dans le cas d'un écoulement entre deux cylindres coaxiaux de rayon intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2$  ( $\eta = R_1/R_2$ ), en mouvement de rotation avec une vitesse angulaire  $R_1$  et  $\Omega_1$  avec ( $\zeta = \Omega_2/\Omega_1$ ), cette condition de stabilité se traduit par l'inégalité suivante :  $\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2 \geq 0$ . Ce critère de stabilité de Rayleigh indique que l'écoulement dans la configuration rotor-stator avec seul le cylindre intérieur en rotation  $\Omega_2 = 0$  et  $\Omega_1 \neq 0$  (rotor interne/stator externe, noté  $R_i - S_0$ ) correspond à un mouvement qui est fondamentalement instable. Il suffit donc, selon ce modèle, que le cylindre amont rote à n'importe quelle vitesse angulaire pour générer une situation d'instabilité (ce qui corrobore l'intuition de Stokes). Alors que dans le cas du seul cylindre extérieur en rotation  $\Omega_1 = 0$  et  $\Omega_2 \neq 0$  (configuration stator interne, rotor externe, noté  $S_i - R_0$ ) le mouvement est globalement stable.

Ce problème remonte à la publication historique de Taylor en 1923. En raison de la richesse des structures qui apparaissent dans le cas où le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire  $\Omega_1$  (écoulement Taylor-Couette), de nombreux auteurs se sont intéressés à la description des bifurcations par des analyses de la stabilité de l'écoulement.

Lorsque les cylindres sont en rotation en sens opposés deux couches de fluides tournant en sens contraire. La portion de cavité comprise entre le cylindre interne et la surface cylindrique de rayon  $r_c$  et assimilable à un système  $R_i - S_0$ , instable.

Par conséquent, le modèle prédit que la situation contrarotative est toujours instable.

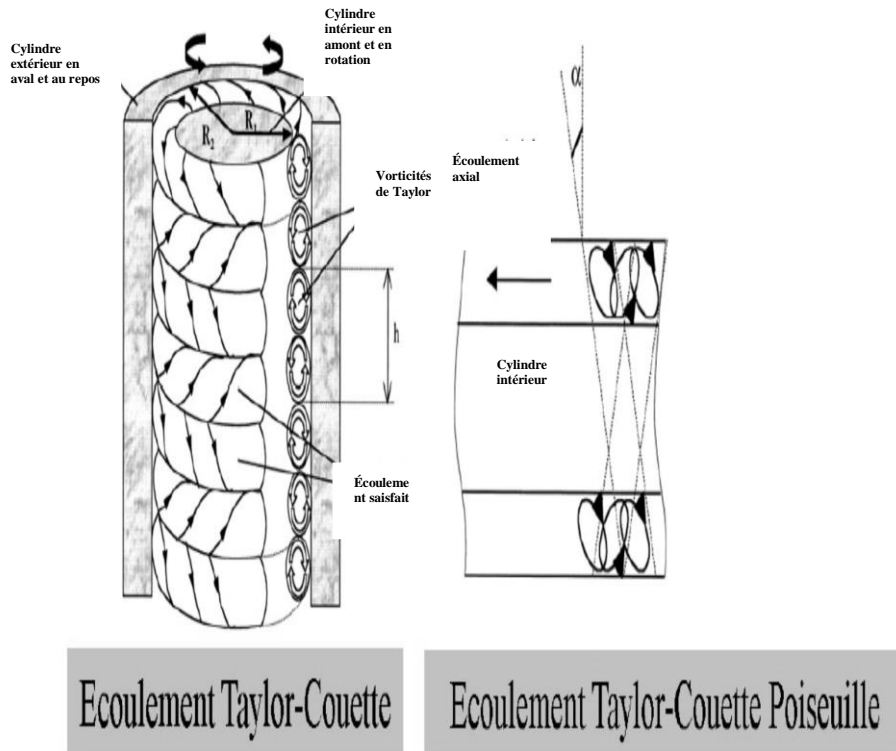
Des résultats postérieurs à la modélisation de Rayleigh vont cependant montrer les limites : négligée dans le bilan des forces, la viscosité contribue en fait à dissiper une part de l'énergie de la particule fluide, ce qui ne conserve pas le moment cinétique et retarde l'apparition de l'instabilité centrifuge. Ce n'est donc qu'à partir d'une certaine vitesse de rotation du cylindre que l'instabilité peut se développer. Dans le cas d'un fluide visqueux, le critère de Rayleigh ne permet donc pas de prédire les instabilités du mouvement en raison de la présence du frottement visqueux qui a un effet stabilisant. Dans ces conditions, il est nécessaire d'employer :

- L'approche théorique qui consiste à appliquer la théorie de la stabilité linéaire aux équations du mouvement pour prédire l'évolution de l'instabilité au voisinage du seuil critique de son apparition.
- L'approche expérimentale permet d'élaborer le diagramme de stabilité pour situer les régions d'écoulement stable et instable.

Le nom de Maurice Couette a été adopté en France et dans le monde entier par la communauté scientifique pour désigner les écoulements de cisaillement, usuellement créés entre deux qui se déplacent parallèlement l'une par rapport à l'autre, ainsi que pour le type d'écoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation qu'il a lui-même construit, et les corrections d'entrée dans les canaux annulaires poreuses qu'il a introduites et calculées. Couette a mené un travail remarquable à la fois théorique et expérimental ; autour de corps oscillants, dans les annulaires, et entre cylindres, et sur leur stabilité.

En 1888, à Paris, Couette a annoncé pour sa première fois expérience avec le viscosimètre [14] : le premier appareil à cylindres coaxiaux en rotation continue à être opérationnel et qui mesure avec précision la viscosité de l'eau et de l'air. L'appareil constituait deux cylindriques, le cylindre extérieur en rotation et le cylindre intérieur suspendu pour mesurer le couple. La figure 2 montre une coupe

de l'appareil de Couette avec son rotor suspendue de la fibre de torsion en acier. L'entrefer entre le rotor et stator était de 2.5mm. Couette a été le premier à prendre compte le problème d'excentricité des cylindres pour l'estimer en tant qu'une erreur de désalignement pour le cylindre suspendu. Il a en outre pu identifier les conditions de validité des équations de Navier-Stokes et faire apparaître les régimes instables.



**Figure 2 :** La symétrie de l'écoulement de Taylor-Couette est cassée et déformée dans l'écoulement de Taylor-Couette Poiseuille.

Les écoulements laminaires situés entre deux cylindres coaxiaux à poreux, comme celui étudié, sont trouvés dans diverses applications de réchauffement des fluides thermiques comprenant le refroidissement des roquettes et des moteurs à jet, le séchage industriel, le rafraîchissement industriel de la sueur ou de la chaleur, l'ingénierie alimentaire, et la production du textile, de papier, de cuir et de caoutchouc. Plus précisément dans le domaine de l'ingénierie alimentaire, l'installation des cylindres envisagés dans le travail est rencontrée dans les dispositifs techniques de certains processus artisanaux pour l'extraction d'huile de palme.

## I-2 Etat de l'art

En raison de ces nombreuses applications, les écoulements laminaires localisés dans le plan polaire et situé entre deux cylindres coaxiaux à pores et en rotation continuent d'attirer la recherche [15-16]. En utilisant une méthode de perturbation analytique pour une équation de solutions semblables, Yuan et Finkelstein [17] ont suivi le travail révolutionnaire et pionnier de Berman [18] et ont abordé pour la première fois, la question de l'écoulement laminaire dans une conduite annulaire poreuse avec aspiration ou injection appliquée aux parois. Ils ont obtenu des solutions analytiques valables pour la grande injection, en utilisant une technique de perturbation, sans indication de solutions semblables. À partir de l'approche des solutions semblables précédemment exploitée dans [17], Terril et Thomas [19] ont rapporté des solutions numériques et théoriques complètes au problème ci-dessus et ont découvert qu'il existe deux solutions pour toutes les valeurs d'injection.

La même approche des solutions semblables a été utilisée par Banks et Zatorska [20] pour effectuer une étude approfondie de l'écoulement dans une conduite annulaire poreuse, les écoulements étant laminaires étant égaux à travers chaque conduite. À la lumière de la théorie des bifurcations dans les systèmes dynamiques, ils ont trouvé des solutions stables, instables et périodiques, en utilisant l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires résultantes obtenues par l'équation de Navier-Stokes.

Bouyges et al [21] ont rapporté les résultats de leurs investissements de l'écoulement dans une conduite annulaire poreuse avec une section croisée non cylindrique. En supposant une perte de déviation radiale à partir d'un rayon fixe, ils ont effectué des expansions asymptotiques dans le second ordre du rapport de gap pour déduire les vitesses axiales, radiales et tangentielles et les champs de pression.

Pour simuler le champ d'écoulement en brûlant la surface intérieure d'un grain cylindrique dans un moteur à fusée solide, Goto et Uchida [22] ont publié les

résultats pour les écoulements instables dans une conduite annulaire poreuse et semi-infinie avec un rayon variable dans le temps. En se basant sur les travaux réalisés par Uchida et Aoki [23], qui ont montré comment faire face au mouvement accéléré dans les directions transversales, ils ont calculé numériquement une solution semblable exacte aux équations de Navier-Stokes, et ont dérivé les propriétés de l'écoulement comme une fonction du coefficient de dilatation de la paroi d'une conduite et du paramètre d'injection.

Dans le travail précédent [24], notre équipe de recherche a examiné un écoulement laminaire incompressible stable situé dans la conduite annulaire semi-poreuse, où les deux cylindres coaxiaux subissent un gradient de pression constant et favorable, la paroi intérieure est imperméable et le fluide est aspiré ou injecté à travers la paroi extérieure à une vitesse constante et uniforme. En utilisant l'approche des solutions semblables, le champ de la vitesse et la contrainte de cisaillement à la paroi ont été déterminés en fonction du gradient de pression externe constant.

Même si elles ont été consacrées aux milieux poreux, certaines études [25-26] peuvent terminer la liste de fond parce que la géométrie du cylindre poreux pour laquelle ils ont été réalisés est semblable à la géométrie examinée dans le travail actuel, Galowin et al [25] ont développé un modèle analytique pour prédire l'écoulement dans les régions de condensation d'une conduite thermique, ont déterminé les distributions des propriétés de l'écoulement en utilisant une intégrale de moment de Karma-Pohlhausen, et comparé les résultats obtenus à des données expérimentales publiées.

Sankar et al [26,27] et Kiran et al [28] ont étudié la convection naturelle [26-29,28] et la convection à double diffusion [27] dans les conduites annulaires poreuses verticales avec des sources de chaleur discrètes [26, 30, 35, 49,50] et un chauffage non uniforme [28, 29, 55,62, 70,76], en adoptant un modèle physique, modèle dans lequel l'équation de Darcy étendue par Brinkman a été utilisée. En appliquant une méthode implicite des différences finies, ils ont résolu

numériquement les équations régissant, et l'influence des paramètres physiques et géométriques sur l'écoulement et les caractéristiques d'écoulement de transfert de chaleur dans la conduite annulaire poreuse ont été découvertes et analysées. Dans la référence [16], le cas de la convection naturelle dans une conduite annulaire entre deux cylindres coaxiaux et en rotation a été examiné. En utilisant la méthode implicite de direction alternée et la méthode des lignes successives de relaxation, la forme de l'équation de vorticité issu des équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie ont été résolues numériquement, et les effets de la rotation sur les écoulements axisymétriques entraînés par la poussée d'Archimède ont été analysés [16].

Un bon accord a été trouvé    partir de la comparaison des modèles de transfert de chaleur et de l'écoulement calculés avec les résultats disponibles pour un écoulement laminaire de la conduite annulaire lorsque les deux cylindres sont immobiles [16].

Notre motivation pour ce travail est renforcée par l'observation que l'écoulement laminaire dans le plan polaire localisé par des cylindres coaxiaux en rotation accélérée avec des poreuses n'a pas encore été exploré dans aucune des publications mentionnées dans ce document.

Les recherches rapportées dans le présent document représentent la continuation des travaux effectués précédemment pour la même configuration, mais avec les deux cylindres immobiles [15]. La seule configuration examinée dans le présent ouvrage est celle où le cylindre en aval est au repos tandis que le cylindre en amont est en rotation.

Pour une meilleure compréhension du travail actuel, ce document sera structuré en trois parties comme suit. Les équations r  glementaires, les conditions aux limites, la stratégie et la méthode des solutions seront élaborées au chapitre II. Le chapitre III est concentré    la présentation des résultats obtenus et leur discussion. Les observations finales seront données au chapitre IV tous ces chapitres meubleront notre développement.



**CHAPITRE II : MATÉRIELS ET  
MÉTHODES**



## II-1 Position du problème

Considérons un fluide newtonien incompressible localisé entre deux cylindres coaxiaux poreux (C1) et (C2), ayant la même longueur  $L$  et un axe commun horizontal. Le rayon du cylindre intérieur (C1) est désigné par  $R_1$ , et celui du cylindre (C2) est représenté par  $R_2$ . La masse volumique du fluide  $\rho$  et sa viscosité cinématique  $\nu$  demeurent constantes. Il est important de souligner que cette disposition ne doit en aucun cas être confondue avec celui d'un canal poreux contenant un milieu poreux.

### II-1-1 Enoncé du problème

L'écoulement laminaire à vitesse zéro axiale situé dans le plan polaire entre les deux cylindres est alimenté par le processus d'aspiration et d'injection sur les comme axe commun des cylindres et le système de vecteurs unitaires  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  pour parois. Cet écoulement est accéléré par le cylindre amont en rotation, le cylindre aval restant au repos. Les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  sont ensuite adoptées en utilisant l'axe  $z$  les directions radiales, orthoradiales et axiales. Les différentes composantes correspondantes au champ de la vitesse  $\mathbf{V}(V_r, V_\theta, V_z)$  sont représentées en tenant compte de l'équation de conservation de la masse des débits entrant et sortant.

### II-1-2 Conditions aux limites du problème

Nous définissons l'accélération du cylindre amont en rotation d'une manière appropriée afin d'obtenir des conditions aux limites qui conviennent à l'approche des solutions semblables adoptées. À cet égard, nous nous inspirons des travaux de Brady et d'Acivros [31] qui sont faits pour les canaux et tubes imperméables et montrant comment faire face aux mobiles longitudinales accélérées. En conséquence, la vitesse orthoradiale du cylindre amont est supposée être proportionnelle à la coordonnée orthoradiale  $\theta$ , qui joue le rôle de variable dynamique et représente ensuite le temps. En utilisant la condition de conservation de la masse et en cherchant la configuration dans laquelle le cylindre aval est maintenue en repos pendant que le cylindre amont est en rotation.

En introduisant le paramètre  $Q$  pour tenir compte des deux orientations possibles que prendra l'écoulement. Les conditions aux limites obtenues sont les suivantes :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = QV_1 \quad \text{et} \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = a_1 U \theta, \quad \text{pour } r = R_1, \quad (2.1)$$

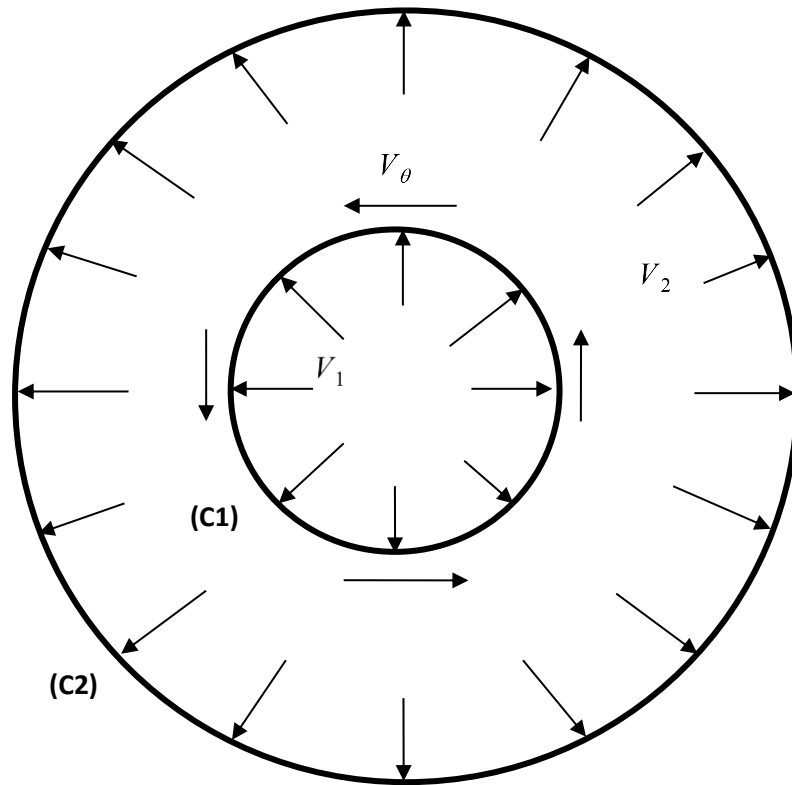
$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = QV_2 = Q\alpha \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right) V_1 \quad \text{et} \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = a_2 U \theta, \quad \text{pour } r = R_2, \quad (2.2)$$

$$Q = +1 \quad \text{avec} \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_2 = 0, \quad (2.3)$$

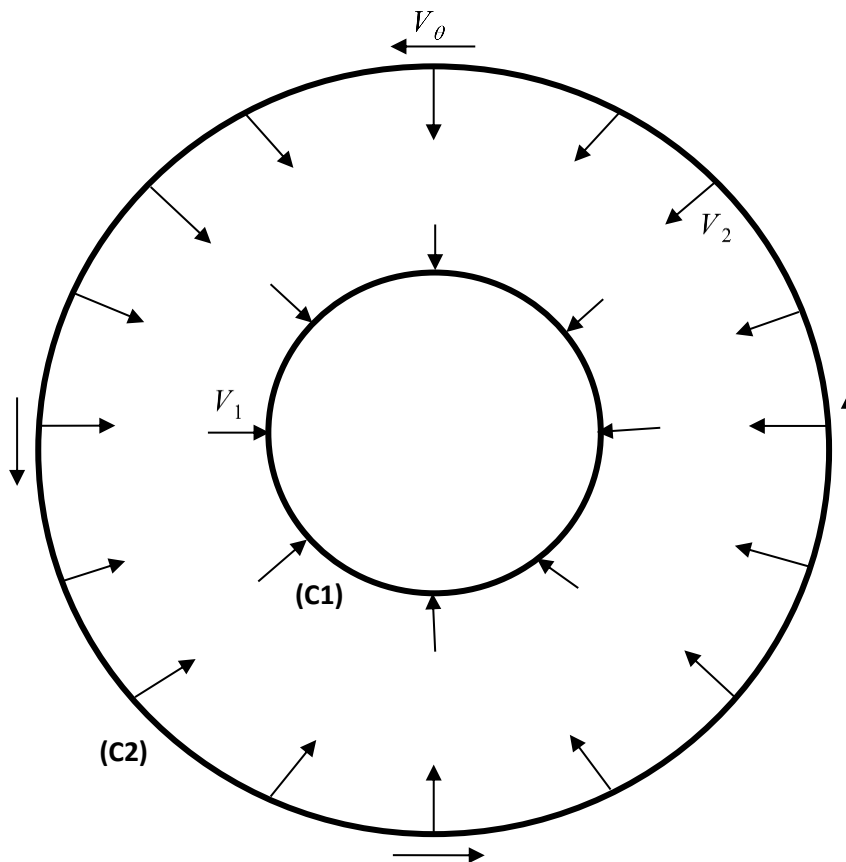
$$Q = -1 \quad \text{avec} \quad a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 = 1. \quad (2.4)$$

La force d'accélération du cylindre amont en rotation est déterminée par le paramètre positif dimensionnel  $U$  qui agit comme une vitesse, selon (2.1) et (2.2). Dans la relation envisagée, deux paramètres sans dimension ( $a_1, a_2$ ) sont introduits pour permettre à l'un de traiter les canevas souhaités dans lesquels le cylindre en aval (C1) ou (C2) est maintenu au repos tandis que le cylindre en amont est en rotation. Plus précisément, nous avons  $a_1 = 1$  et  $a_2 = 0$  si le cylindre intérieur est en rotation tandis que celui extérieur est immobile. Dans le sens opposé, le cylindre extérieur est en rotation et celui intérieur est au repos, et nous avons  $a_1 = 0$  et  $a_2 = 1$ . Comme on le voit dans (2.3) et (2.4) le paramètre  $Q$  nous permet de prendre en considération les deux orientations possibles du débit, à savoir celle pour laquelle  $Q = +1$  et qui correspond à l'injection à (C1) avec aspiration à (C2), et l'autre  $Q = -1$  dans laquelle l'injection est appliquée à (C2) avec l'aspiration à (C1).

Les figures ci-dessous montrent le plan polaire annulaire rempli de fluide newtonien entre les deux cylindres coaxiaux poreux (C1) et (C2), avec ((C1) ou (C2)) comme cylindre en rotation en amont et ((C1) ou (C2)) comme cylindre en aval au repos.



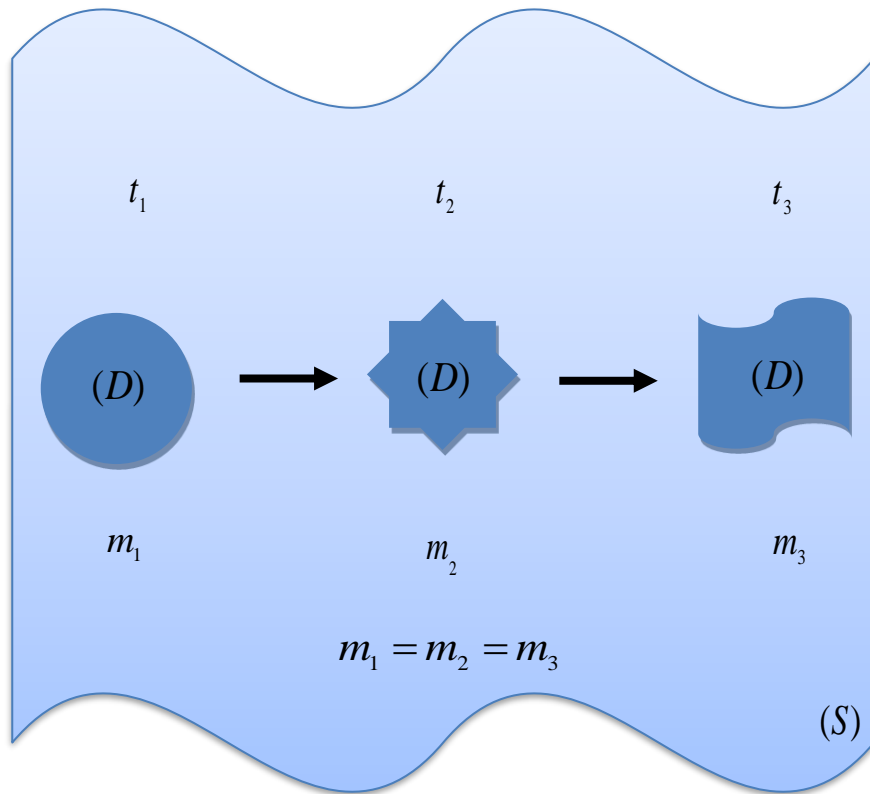
**Figure 3** : Plan polaire annulaire rempli de fluide newtonien entre deux cylindres poreux coaxiaux (C1) et (C2) avec une paroi en rotation accélérée en (C1).



**Figure 4** : Plan polaire annulaire rempli de fluide newtonien entre deux cylindres poreux coaxiaux (C1) et (C2) avec une paroi en rotation accélérée en (C2).

## II-2 Conservation de la masse dans le fluide

### II-2-1 Enoncé du principe



**Figure 5** : Domaine de fluide ( $D$ ) délimité par la surface ( $S$ ).

Formulé pour la première fois, par LÉONARD DE VINCI, ensuite par HERON [34], le principe de conservation de la masse stipule l'énoncé suivant : quel que soit le domaine ( $D$ ) de fluide limité par une surface fermée ( $S$ ), ne contenant aucune source ni puits de masse, et entièrement contenu dans le fluide, la masse de fluide contenue dans ( $D$ ) reste constante quand on suit le domaine ( $D$ ) dans son mouvement.

### II-2-2 Équation de continuité avec débits entrant et sortant

L'équation de conservation de la masse avec débit entrant et sortant [35] s'écrit :

$$dm = dm_1 - dm_2, \quad (2.5a)$$

en dérivant  $dm$  (masse de la particule de volume  $dv$  placée en un point  $M$  à l'instant à  $t$  où la masse volumique du fluide est  $\rho(M, t)$ ), la relation (2.5a) devient :

$$\frac{dm}{dt} = |Q_i| - |Q_s|, \quad (2.5b)$$

avec  $|Q_i| = dm_i/dt$  et  $|Q_s| = dm_s/dt$  où  $Q_i$  et  $Q_s$  représentent respectivement les débits de masse entrant et sortant.

En remplaçant la relation :  $m = \iiint_{(D)} dm$ , on a :

$$m \iiint_{(D)} dm = \iiint_{(D)} \rho dv, \quad (2.5c)$$

en substituant la relation (2.5b) dans la relation (2.5a), on aboutit à :

$$\iiint_{(D)} \left( \frac{d}{dt} (\rho dv) \right) = |Q_i| - |Q_s|, \quad (2.5d)$$

en différentiant la relation (2.5d) on obtient alors :

$$\iiint_{(D)} \left( \frac{d\rho}{dt} dv + \rho \frac{d(dv)}{dt} \right) = |Q_i| - |Q_s|. \quad (2.6)$$

La dilatation volumique est l'accroissement de volume que subit un corps dont la température s'élève. De ce fait, la variation de volume d'un corps sous l'effet de la chaleur est proportionnelle au volume initial et à la variation de la température.

Or au point  $M(x, y, z)$  de  $v_0$ , se transforme en un point  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  de  $v_1$  et est lié par la relation [43] :

$$\mathbf{MM}_1 = \mathbf{V}(M)dt, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{OM}_1 = \mathbf{OM} + \mathbf{V}(M)dt \quad (2.7b)$$

Les relations (2.7a) et (2.7b) peuvent être envisagées comme des formules de transformation continues et bijectives entre les deux régions de l'espace  $v_0$  et  $v_1$  occupées par la même masse de fluide aux instants  $(t)$  et  $(t + dt)$ .

Les deux éléments de volume  $dv_0 = dx dy dz$  et  $dv_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ . Le rapport  $dv_1/dv_0$  est appelé Jacobien de la transformation ponctuelle envisagée, celle qui permet de passer du point  $M$  au point  $M_1$ . On note :

$$\frac{dv_1}{dv_0} = \frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x_0, y_0, z_0)}, \quad (2.8a)$$

démontrons que ce Jacobien est égal :

$$\frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial x} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ \frac{\partial x_1}{\partial z} & \frac{\partial y_1}{\partial z} & \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (2.8b)$$

en calculant le déterminant et en négligeant tous les termes en  $dt^2$  et  $dt^3$  devant ceux qui sont en  $dt$ , le calcul de déterminant donne :

$$\frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x_0, y_0, z_0)} = \frac{dv_1}{dv_0} = 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt, \quad (2.8c)$$

En utilisant les transformations mathématiques il vient :

$$\frac{dv_1 - dv_0}{dv_0} = \text{div} \vec{V}(M) dt. \quad (2.9)$$

Où l'expression (2.9) est le taux de dilatation volumique relative.

En remplaçant la relation (2.9) dans (2.6) l'expression se met sous la forme :

$$\iiint_{(D)} \left( \frac{d\rho}{dt} dv + \rho \text{div} \vec{V} \right) = |Q_i| - |Q_s|. \quad (2.10)$$

En définissant respectivement les débits de masse entrant et sortant par unité de masse du fluide, on a :

$$|Q_i| = \iiint_{(D)} \rho |q_i| dv \quad \text{et} \quad |Q_s| = \iiint_{(D)} \rho |q_s| dv, \quad (2.11)$$

Où  $q_i$  et  $q_s$  sont respectivement les débits de masse entrant et sortant par unité de masse du fluide. En remplaçant (2.11) dans la relation (2.10) il vient :

$$\iiint_{(D)} \left( \frac{d\rho}{dt} dv + \rho \text{div} \vec{V} \right) = \iiint_{(D)} \rho (|q_i| - |q_s|) dv. \quad (2.12)$$

La relation ci-dessus étant vraie quel que soit le domaine du fluide, on obtient 1

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = \rho(|q_i| - |q_s|), \quad (2.13)$$

où  $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $q_i$  et  $q_s$  désignent respectivement la masse volumique du fluide, le champ de vitesse du fluide, débits massiques d'injection et d'aspiration par unité de masse avec  $q_i \geq 0$  et  $q_s \leq 0$ .

Si le vecteur  $\mathbf{V}(M, t)$  désigne la vitesse du fluide au point  $M$  l'instant  $t$ . On appelle vecteur du courant de fluide au point  $M$  à l'instant  $t$  le vecteur noté  $\mathbf{j}(M, t)$  suivant l'expression :

$$\mathbf{j}(M, t) = \rho(M, t) \mathbf{V}(M, t), \quad (2.14a)$$

où  $\rho$  est la masse spécifique du fluide au point  $M$  l'instant  $t$ .

Soit  $(S)$  une surface fermée ou non, entièrement contenue dans le domaine occupé par le fluide. On appelle débit massique ou débit de masse à travers  $(S)$  la quantité de masse de fluide  $q_m$  traversant  $(S)$  par unité de temps. En d'autres termes le débit massique  $q_m$  est égal au flux du vecteur courant de fluide  $\mathbf{j}$  à travers la surface  $(S)$  considérée suivant l'équation :

$$q_m = \iint_{(S)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(S)} \rho(M, t) \mathbf{V}(M, t) \cdot \mathbf{n}(M) ds = q_m(t). \quad (2.14b)$$

Avec  $\mathbf{n}(M)$  le vecteur unitaire normal à la surface  $(S)$  au point  $M$ .

Soit le volume  $v$  du fluide contenu dans le domaine  $(D)$  et soit  $dv$  le volume élémentaire pris autour d'une particule de fluide contenu dans  $(D)$  à l'instant  $t$ . Le principe de conservation de la masse nous permet d'écrire  $m = cte$  : (la masse de fluide reste constante pendant l'écoulement) [35].

Pour une particule de fluide de masse  $dm$  contenue dans le domaine  $(D)$ , la masse totale du fluide dans le domaine  $(D)$  est donnée par la relation suivante :

$$m = \iiint_{(D)} dm, \quad (2.15a)$$

en tenant compte du fait que  $dm = \rho(M, t) dv$ , on obtient la relation suivante :

$$m = \iiint_{(D)} \rho(M,t) dv, \quad (2.15b)$$

où  $\rho(M,t)$  désigne la masse volumique du fluide.

D'après le principe de conservation de la masse, la masse reste constante au cours du temps. Ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{(D)} \rho(M,t) dv = 0, \quad (2.15c)$$

en utilisant la dérivée lagrangienne définie par :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}, \quad (2.15d)$$

en tenant compte de l'expression (2.6) donnant la relation entre la divergence du vecteur vitesse et le taux de dilatation cubique, l'équation (2.15b) devient :

$$\iiint_{(D)} \left[ \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \text{div} \rho(M,t) \mathbf{V} \right] dv = 0, \quad (2.15e)$$

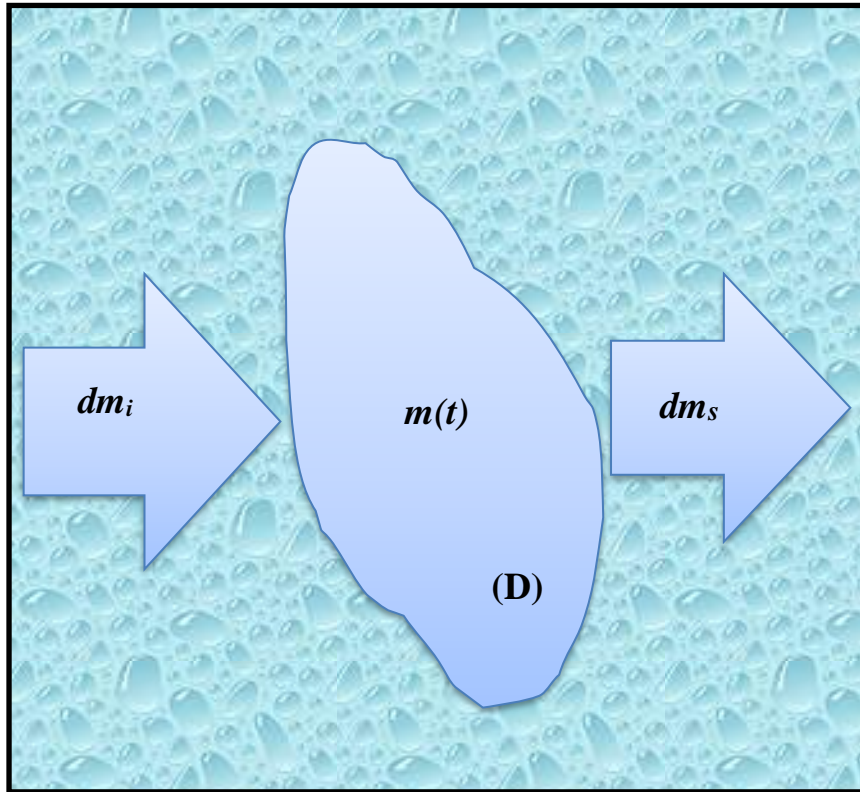
la relation (2.15e) est vraie quel que soit le domaine  $(D)$ , le théorème de l'intégrale multiple permet d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \text{div} [\rho(M,t) \mathbf{V}] = 0. \quad (2.16)$$

Où  $\text{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho \text{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} \rho$ , et l'équation (2.16) est appelée équation de continuité.

Pour un fluide incompressible, une particule fluide conserve son volume au cours du mouvement dont sa masse volumique. Par conséquent la dérivée totale de la masse volumique est nulle c'est-à-dire  $d\rho/dt$ . Pour un fluide incompressible en transformation isotherme, la masse volumique varie très faiblement avec la pression ainsi  $\rho = \rho_0 = \text{cte}$  l'équation (2.16) devient :

$$\text{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2.17a)$$



**Figure 6** : Conservation de la masse avec débits entrant et sortant.

Pour un fluide incompressible, la masse volumique est constante (ou supposée constante) alors la relation  $\partial\rho/\partial t = 0$  et l'équation (2.17a) se réduit :

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = |q_i| - |q_s|, \quad (2.17b)$$

la contrainte incontournable lors de la détermination du champ de vitesse de l'écoulement est l'équation de conservation de la masse écrite pour les débits entrant et sortant sous la forme (2.17b) où  $q_i$  et  $q_s$  représentent les débits de masse par unité de masse de fluide des flux entrant et sortant respectivement, avec  $q_i \leq 0$  et  $q_s \geq 0$ . Pour un fluide incompressible avec transfert thermique et masse volumique variant très faiblement (dans le cas où  $\rho = \rho_0 = cte$  et en situation isotherme). Lorsqu'il y'a compensation entre un débit entrant par unité de masse et un débit sortant par unité de masse c'est-à-dire  $|q_i| = |q_s|$ , on dit alors que le flux est conservatif, alors l'équation (2.17b) devient l'équation (2.17a) comme on le rencontre dans des écoulements environnementaux ou industriels qui ne sont pas

des processus de vidange, les taux de masse entrant et sortant sont généralement égaux, de sorte que l'équation ci-dessus donne un champ de vitesse à divergence nulle.

Lorsqu'il n'existe pas le débit entrant de masse dans le domaine ( $D$ ) c'est-à-dire ( $q_i = 0$ ), l'équation (2.17b) se réduit à :

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = -|q_s|. \quad (2.18)$$

Cette relation importante est utilisée dans toutes les œuvres consacrées au mouvement de tout fluide incompressible isotherme. Bien qu'elle soit parfois appliquée automatiquement, elle nécessite, comme on l'a vu, de vérifier que les écoulements entrant et sortant ont des taux de masses égaux dans le dispositif étudié.

Dans le cas contraire où le domaine se comporte comme une source ( $q_s = 0$ ), alors l'équation (2.17b) se réduit alors :

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = +|q_i|. \quad (2.19)$$

La relation (2.17b) montre que le champ de vitesse  $\mathbf{V}$  est à flux conservatif pour un fluide incompressible (C'est-à-dire la somme des débits volumiques à travers une surface fermée est nulle). Si on considère un écoulement de fluide avec un débit entrant et un débit sortant, la masse de fluide contenue dans le domaine ( $D$ ) donne une autre forme à l'équation de continuité. La figure 6 montre le domaine ( $D$ ) de fluide évoluant dans le temps avec les débits entrant et sortant.

### II-2-3 Fonction de courant

Continuons par la suite de cette partie à étudier les conséquences de l'équation de continuité pour un fluide incompressible (2.17b). En utilisant ce théorème de la divergence, il est important de remarquer l'absence de débit volumique total à une surface fermée, autant de flux sortant que de flux entrant. Pour rendre la formulation agréable tout en étant en régime permanent avec la dépendance temporelle négligeable. L'objectif de notre étude est orienté vers  $V(r, \theta, t)$  ou  $V(r, z, t)$  avec les résultats donnés pour chaque valeur du temps  $t$ . Dans le souci

de simplicité mathématique, nous avons choisi d'étudier des écoulements dans lesquels il n'y a que deux composantes de vitesse non nulles et deux coordonnées effectives. Les écoulements bidimensionnels dans le plan polaire présentent un champ de vitesse sous la forme suivante :

$$\mathbf{V} = V_r(r, \theta)\mathbf{e}_r + V_\theta(r, \theta)\mathbf{e}_\theta. \quad (2.20)$$

Un tel écoulement nous permet d'avoir deux composantes de vitesse et une équation différentielle (2.17b) le reliant. Nous pouvons utiliser cette équation différentielle pour éliminer une composante de vitesse, et donc réduire les mathématiques aux considérations d'une seule fonction. Il est en effet plus commode de ne pas faire exactement cela, mais on voit ici la raison pour laquelle cet écoulement est particulièrement trivial.

Les écoulements bidimensionnels sont plus faciles à visualiser. Pour un écoulement polaire de fluide incompressible donc le champ de vitesse à des composantes  $(V_r, V_\theta)$ , d'après l'équation (2.20) et avec (2.21b) l'existence de la fonction de courant peut se présenter sous forme suivante :

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (2.21a)$$

cette relation (2.21a) est satisfaite si l'on impose :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \text{ et } V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.21b)$$

Où  $\psi$  représente la fonction de courant et cette relation montre l'existence de la fonction de courant. Cette existence de la fonction courant nous conduit à chercher une relation entre la fonction de courant et le rotationnel du champ de vitesse car celle-ci nous servira dans la suite pour l'établissement de l'équation de vorticité, pour cela nous procédons par le calcul du rotationnel du champ de vitesse, nous avons :

$$\mathbf{rotV} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_z, \quad (2.22a)$$

en remplaçant les relations de  $\psi$  posées à l'équation (2.21b) dans la relation (2.21a) il vient :

$$\mathbf{rotV} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}\right) \mathbf{e}_z, \quad (2.22b)$$

la relation obtenue ci-dessus s'écrit alors :

$$\mathbf{rotV} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z, \text{ avec } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2.22c)$$

## II-2-4 Prérequis pour l'existence de l'écoulement laminaire étudié

L'objectif du travail est de minimiser la composante axiale du champ de vitesse de l'écoulement par rapport à ses composantes radiale et orthoradiale, il est permis d'affirmer que l'écoulement étudié se produit dans le plan polaire de la conduite annulaire.

$$\mathit{divV} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (2.23)$$

Considérons ensuite que les critères suivants doivent être satisfaits à travers les relations :

$$\frac{V_z}{V_r} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r}. \quad (2.24)$$

$$\frac{V_z}{V_\theta} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}. \quad (2.25)$$

Exprimons les critères (2.24) et (2.25) en termes de longueur  $L$  des cylindres, de rayon moyen de la conduite annulaire  $R_m = (R_1 + R_2)/2$  et la moitié de la largeur de l'entrefer  $h = (R_1 - R_2)/2$ . Il vient :

$$\frac{V_z}{V_r} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{V_z}{V_r} \ll \frac{L}{2h}. \quad (2.26)$$

$$\frac{V_z}{V_\theta} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{V_z}{V_\theta} \ll \frac{1}{2\pi R_m}. \quad (2.27)$$

En utilisant (2.26) et (2.27), le champ de vitesse de l'écoulement peut être simplifié sous la forme  $\mathbf{V}(V_r, V_\theta, 0)$ . Nous obtenons :

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (2.28)$$

La conservation de la masse, qui impose un champ de vitesse de divergence nulle pour un fluide incompressible, nécessite que l'un des cylindres subisse une injection puis assume le rôle du cylindre amont, tandis que l'autre doit subir une aspiration et assume le rôle de cylindre aval. De ce fait, il n'y a pas d'écoulement de fluide conduit dans la direction axiale des deux cylindres. Les valeurs absolues de la vitesse de l'écoulement pour l'injection et l'aspiration à travers les cylindres (C1) et (C2) sont désignées par  $V_1$  et  $V_2$  respectivement.

### II-2-5 Conditions entre les vitesses en amont et en aval pour le problème à résoudre

En tenant compte des débits entrant et sortant dans la conduite, l'expression complète de l'équation (2.13) doit être remplacée avec les paramètres des termes de la configuration définie avec le cylindre intérieur (C1) et pour le cylindre extérieur (C2), c'est-à-dire les rayons  $R_1$  et  $R_2$ , les surfaces  $s_1$  et  $s_2$  des pores supposées être de même pour tous les pores d'un même cylindre, le nombre total de pores  $N_1$  et  $N_2$ , la vitesse  $V_1$  pour aspiration ou injection et la vitesse  $V_2$  pour injection ou aspiration et  $L$  la longueur des deux cylindres.

Comme cela se fait habituellement pour les écoulements axisymétriques dans les conduites annulaires, l'aspect géométrique de la conduite est caractérisé par le paramètre de rapport d'entrefer  $\delta$ , qui est défini pour permettre la comparaison de la demi-largeur  $h$  de l'entrefer et du rayon moyen de la conduite annulaire, ainsi nous avons :

$$\delta = \frac{h}{R_m} = \frac{\frac{(R_2 - R_1)}{2}}{\frac{(R_1 + R_2)}{2}} = \frac{h}{R_1 + h}, \quad \text{avec } h = \frac{R_2 - R_1}{2}. \quad (2.29)$$

Où  $h = (R_2 - R_1)/2$  et  $R_m = (R_1 + R_2)/2$  représentent les moitiés de l'entrefer et du rayon moyen respectivement. Comme les vitesses d'aspiration et d'injection sont

orthogonales à la surface des cylindres, le débit de masse par unité de masse du fluide par définition est donné :

$$q = \iint_{(S)} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.30a)$$

si la surface ( $S$ ) est élémentaire comme le cas d'un pore de surface quasi-ponctuelle ( $S$ ), la formule ci-dessus donne :

$$q = \rho \mathbf{V} s \quad (2.30b)$$

en introduisant le cosinus de l'angle  $\alpha$  entre la normale unitaire  $\mathbf{n}_p$  aux pores et le champ de vitesse  $\mathbf{V}$ , nous obtenons :

$$q = \rho |\mathbf{V}| |\mathbf{n}_p| s \cos \alpha, \quad (2.30c)$$

en tenant compte du fait que le fluide est injecté ou extorqué orthogonalement à la paroi, on a  $\alpha = 0$  dans le cas de la succion et  $\alpha = \pi$  dans le cas de l'injection. La relation (2.30c) se réduit alors :

$$q = \pm \rho V s. \quad (2.31)$$

En introduisant le nombre total des pores des deux cylindres  $N_1$  et  $N_2$  respectivement, et la surface des pores des deux cylindres  $s_1$  et  $s_2$  respectivement, il vient :

$$q_i = \rho N_1 V_1 s_1 \quad \text{et} \quad q_s = -\rho N_2 V_2 s_2 \quad (2.32a)$$

En considérant que le volume total entre les deux cylindres est calculé de la manière suivante  $\pi(R_1^2 - R_2^2)L$ , alors les débits massiques par unité de masse sont ainsi trouvés :

$$|q_i| = \frac{\rho N_1 (V_1 s_1)}{\rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L} \quad \text{et} \quad |q_s| = \frac{\rho N_2 (V_2 s_2)}{\rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L}. \quad (2.32b)$$

En insérant ces débits massiques trouvés ci-dessus dans la relation (2.28) et en tenant compte du fait que, le débit est additif, il vient :

$$\text{div} \mathbf{V} = \left| \frac{\rho N_2 (V_2 s_2)}{\rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L} \right| - \left| \frac{\rho N_1 (V_1 s_1)}{\rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L} \right| = 0, \quad (2.33a)$$

si nous considérons que le fluide est injecté par le cylindre extérieur (C2) et aspiré par le cylindre intérieur (C1). En introduisant les densités de pores  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  qui sont définies comme le nombre total de pores par unité de surface  $N_1 = 2\pi R_1 L \lambda_1$  pour le cylindre intérieur et  $N_2 = 2\pi R_2 L \lambda_2$  pour le cylindre extérieur, l'équation (2.33a) devient alors :

$$\text{div}\mathbf{V} = \frac{2}{(R_2^2 - R_1^2)} (\lambda_2 R_2 V_2 s_2 - \lambda_1 R_1 V_1 s_1) = 0, \quad (2.33b)$$

en factorisant l'expression posée ci-dessus, on obtient alors la relation entre les vitesses et définie ainsi :

$$V_2 = \left( \frac{\lambda_1 s_1}{\lambda_2 s_2} \right) \left( \frac{R_1}{R_2} \right) V_1. \quad (2.33c)$$

Pour un coefficient supplémentaire de vitesse choisi de façon arbitraire entre les vitesses amont et aval respectivement  $V_1$  et  $V_2$ , la relation obtenue dans l'équation (2.33c) peut se mettre sous la forme :

$$V_2 = c \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \left( \frac{s_1}{s_2} \right) \left( \frac{R_1}{R_2} \right) V_1, \quad (2.33e)$$

où  $c$  est un coefficient adimensionnel, le rapport  $R_1/R_2 = (1 - \delta)/(1 + \delta)$ , et l'équation obtenue à la relation (2.33e) se réduit alors :

$$V_2 = \alpha \left( \frac{R_1}{R_2} \right) V_1 = \alpha \left( \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right) V_1. \quad (2.34)$$

Avec  $\alpha = c(\lambda_1/\lambda_2)(s_1/s_2)$ ,  $\delta$  représente le paramètre qui est défini comme  $\delta = h/R_m = h/(R_1 + h)$  et permet de comparer la moitié de la largeur de l'entrefer jusqu'au rayon moyen du conduit. Le paramètre sans dimension  $\alpha$  qui dépend de la densité de la surface des pores des deux cylindres, représente le coefficient de vitesse du problème.

### II-3 Conservation de la quantité de mouvement

Les équations de Navier-Stokes (ensemble d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement des fluides) sont une conséquence du principe de conservation de la quantité de mouvement qui découle de l'inventaire des forces appliquées au fluide notamment les forces de masses et de contact qui font partie des actions extérieures ; les forces intérieures d'origine moléculaire s'annulent deux à deux et dont la résultante équivaut à un torseur nul. En effet, les forces de masse sont proportionnelles à la masse et sont dues à l'existence d'un champ de forces de pesanteur dans le domaine occupé par le fluide. Les forces de contact ou de surface proviennent du fluide extérieur et s'appliquent sur la surface frontière du fluide intérieur au domaine d'un champ de contraintes responsable du caractère déformable du fluide. Ces contraintes sont tangentielles et normales. Les premières génèrent les forces de viscosité qui naissent du mouvement relatif des particules fluides entre elles et les secondes traduisent les forces de pression normales à la surface frontière du domaine fluide.

### II-3-1 Enoncé du principe de la conservation de la quantité de mouvement

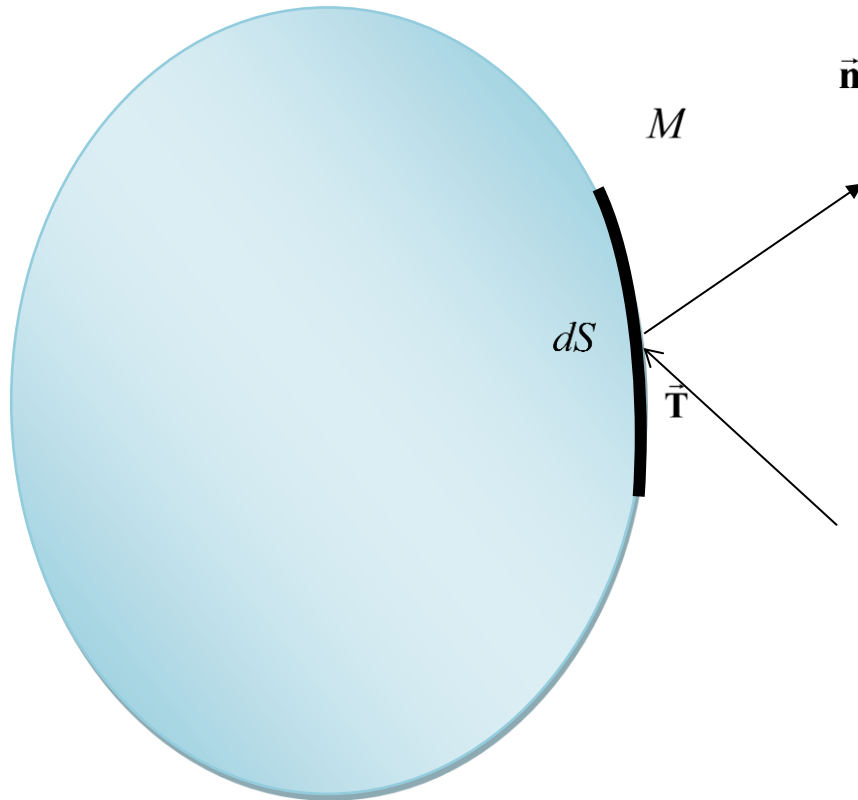
Ce principe stipule que, quel que soit le domaine ( $D$ ) de fluide que l'on suit dans son mouvement, la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement dans un référentiel galiléen est égale au torseur des forces extérieures appliquées au fluide contenu dans le domaine ( $D$ ) [35].

### II-3-2 Equations de Cauchy

Dans un fluide au repos, la tension sur un élément de surface  $d\mathbf{S}$  est toujours normale à cet élément de surface et sa valeur ne dépend pas de l'orientation de  $d\mathbf{S}$ . On a :

$$\mathbf{T}(M) = -P(M) \mathbf{n}. \quad (2.35)$$

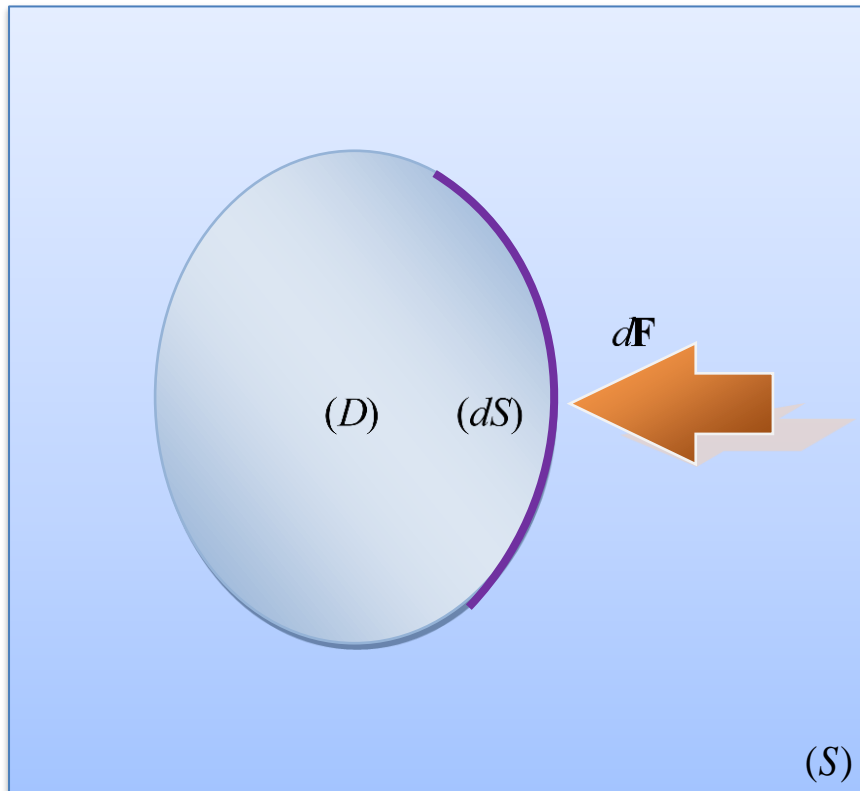
Avec  $P(M)$  la pression, définie comme étant la valeur au point  $M$  et le fluide est au repos.



**Figure 7 :** Elément de surface  $dS$ .

On appelle force de contact sur une portion de fluide ( $D$ ) limitée par une surface fermée ( $S$ ), la force exercée par le fluide extérieur sur le fluide intérieur à ( $D$ ) et qui s'applique sur la surface ( $S$ ) à raison de  $\mathbf{T}(dS)$  sur l'élément de surface ( $dS$ ) telle que  $d\mathbf{F} = \mathbf{T}(M)dS$  où  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{T}(M)$  sont respectivement la force de contact sur ( $dS$ ) et la tension ou contrainte au point  $M$  [35].

La figure 8 ci-dessous illustre une particule fluide ( $D$ ) sur laquelle est appliquée la force de contact  $\mathbf{T}dS$  sur l'élément de la surface ( $dS$ ). La contrainte  $\mathbf{T}$  contient une composante normale ou contrainte normale à ( $dS$ ) et une composante parallèle ou composante tangentielle à ( $dS$ ) (ou contrainte de glissement, ou contrainte de cisaillement) et est égale à :  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_n + \mathbf{T}_f$ .



**Figure 8** : Portion de fluide  $(D)$  délimitée par une surface  $(S)$ .

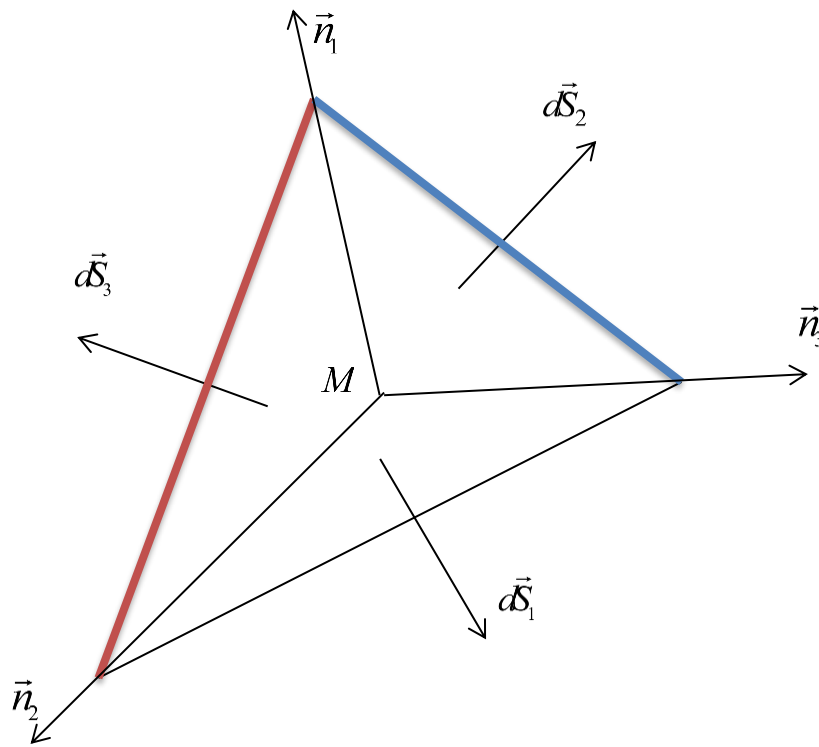
Introduit par CAUCHY vers 1822, le tenseur des contraintes est un tenseur d'ordre 2 utilisé en Mécanique des Milieux Continus pour caractériser l'état de contrainte c'est-à-dire les efforts intérieurs mis en jeu entre les portions déformées d'un milieu.

Dans un fluide visqueux, les forces de contact entre les éléments fluides comprennent à la fois les forces de pression et les scissions dues à la viscosité. Les scissions dépendent du taux de déformation des particules de fluide.

Pour l'étude des fluides de notre travail, deux propriétés suivantes sont vérifiées.

Propriété 1 : la distribution des contraintes  $\mathbf{T}(M)$ , en tout point  $M$  du fluide, est totalement déterminée dès que l'on connaît les contraintes qui s'exercent sur les trois éléments de surface formant un trièdre trirectangle. Soit en  $M$  la surface  $d\mathbf{S}$  orientée sur laquelle s'applique la contrainte  $\mathbf{T}(M)$ ; soient  $d\mathbf{S}_1$ ,  $d\mathbf{S}_2$  et  $d\mathbf{S}_3$  trois éléments de surface trirectangle ayant  $d\mathbf{S}_i$  pour normale  $\mathbf{n}_i$  telle que :

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{S}_1 + d\mathbf{S}_2 + d\mathbf{S}_3. \quad (2.36)$$



**Figure 9** : Surface formant un trièdre triangulaire.

$dS_1$ ,  $dS_2$  et  $dS_3$  sont les trois projections de l'élément de surface normale  $dS$  suivant les axes du repère. Posons que  $\sigma_k$  est la contrainte sur l'élément de normale  $n_k$ . On montre après développement que :

$$\mathbf{T}(M) = \sum_{k=1}^3 \sigma_k(M) n_k, \tag{2.37a}$$

dans une base orthonormée directe  $(x_j)$  avec  $j=1,2,3$  la  $j$  nième composante  $\mathbf{T}_j$  de la contrainte  $\mathbf{T}$  est donnée par :

$$\sum_{j=1}^3 T_j(M) x_j = \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \sigma_{kj} x_j \right) n_k, \tag{2.37b}$$

comme la base est orthonormée, la  $j$  nième composante  $\mathbf{T}_j$  au point  $M$  sont les composantes d'un vecteur de second ordre appelé tenseur de contrainte noté  $\overline{\sigma}$ . La contrainte  $\sigma_{kj}$  est dirigée suivant l'axe  $x_j$  et appliquée sur l'élément de surface perpendiculaire à la composante  $x_k$ .

Propriété 2 : si l'on considère maintenant un petit parallélépipède rectangle bâti sur le point  $M$  et aux arrêts parallèles aux axes de coordonnées et qu'on exprime

l'équilibre des moments des forces appliquées, on trouve que le tenseur des contraintes  $\overline{\sigma}$  est symétrique, c'est-à-dire  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

On démontre que la contrainte  $\mathbf{T}$  sur un élément de surface pris autour du point  $M$  du fluide est liée à la normale unitaire  $\mathbf{n}$  de cet élément de surface par la relation suivante :

$$\mathbf{T} = \overline{\sigma} \mathbf{n}. \quad (2.38)$$

Dans laquelle  $\overline{\sigma}$  est le tenseur d'ordre 2 des contraintes. La composante  $\sigma_{kj}$  de ce tenseur s'interprète comme la contrainte suivant l'axe  $x_j$  sur une surface de normale  $x_k$ . Pour  $j = k$ , la composante  $\sigma_{jj}$  est appelée contrainte normale et pour  $j \neq k$ , la composante  $\sigma_{jk}$  est appelée contrainte tangentielle.

En exploitant l'énoncé de conservation de la quantité de mouvement, nous avons :

$$\frac{dC}{dt} = \mathbf{F}_{ext}, \quad (2.39a)$$

Où  $C$  représente le torseur des quantités de mouvement dont la dérivée par rapport au temps équivaut encore à l'égalité entre les moments résultants :

$$\frac{dC}{dt} = \begin{cases} \mathbf{R}_{ext} = \iiint_{(D)} \rho \mathbf{F} dv + \oiint_{(D)} \overline{\sigma} \mathbf{n} dS \\ M_{ext} = \iiint_{(D)} \rho \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F} dv + \oiint_{(S)} \mathbf{OM} \wedge (\overline{\sigma} \mathbf{n}) dS \end{cases}. \quad (2.39b)$$

Montrons que la deuxième égalité n'apporte aucune information supplémentaire sur la détermination du champ de vitesse du fluide, car elle aboutit à la symétrie du tenseur des contraintes. Donc seule la première égalité est intéressante :

$$\iiint_{(D)} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_{(D)} \rho \mathbf{F} dv + \oiint_{(S)} \overline{\sigma} \mathbf{n} dS. \quad (2.40a)$$

La relation  $\rho \mathbf{F} dv$  est la force de masse qui s'applique sur une particule de fluide de masse  $dm$ ; les forces de masse qui sont proportionnelles à la masse et qui sont

dues à l'existence d'un ou plusieurs champs de forces dans le domaine où se trouve le fluide. En utilisant le théorème d'Ostrogradsky on a :

$$\iint_{(S)} \overline{\sigma} \mathbf{n} dS = \iiint_{(D)} \text{div} \overline{\sigma} dv, \quad (2.40b)$$

la relation (2.40b) devient alors :

$$\iiint_{(D)} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_{(D)} \rho \mathbf{F} dv + \iiint_{(D)} \text{div} \overline{\sigma} dv, \quad (2.40c)$$

soit :

$$\iiint_{(D)} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_{(D)} (\rho \mathbf{F} + \text{div} \overline{\sigma}) dv. \quad (2.40d)$$

Le domaine (D) pouvant être quelconque et arbitrairement choisi dans le fluide en mouvement, on aboutit à l'équation locale de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \text{div} \overline{\sigma}, \quad (2.41a)$$

cette relation obtenue ci-dessus peut aussi se mettre sous forme d'une notation indicielle suivante :

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.41b)$$

L'équation (2.14b) est appelé relation de Cauchy. Cette relation est valable quel que soit le fluide, qu'il soit newtonien ou pas.

### II-3-3 Loi de comportement d'un fluide newtonien

Un fluide est dit newtonien si, en tout point, le tenseur des contraintes est une fonction affine d'un tenseur symétrique lié aux gradients des vitesses en ce point. Ainsi donc, la loi de comportement d'un fluide newtonien n'est complètement déterminée que quand on a relié la pression et la viscosité aux autres caractéristiques thermodynamiques du fluide et l'ensemble des fluides newtoniens trouvent une vérification à travers une hypothèse appelée hypothèse de Stokes.

Pour de nombreux fluides usuels comme le liquide et le gaz :

Hypothèse (1) : le tenseur des contraintes est une fonction continue du tenseur des taux de déformations et l'état thermodynamique local (pression, température) du fluide, il est indépendant du temps de la translation et de la rotation de l'élément de fluide local.

Hypothèse (2) : le fluide est entièrement dénué d'élasticité, c'est-à-dire il ne possède aucune mémoire du passé.

Hypothèse (3) : le fluide est dit homogène : un même état des contraintes conduit à un même état des déformations quel que soit le point considéré dans le fluide. Le tenseur des contraintes ne dépend pas explicitement des coordonnées locales.

Hypothèse (4) : le fluide est isotrope c'est-à-dire les relations entre contraintes et déformations n'ont pas de direction privilégiée dans le fluide.

Selon Pierre Curie, entre les causes (contraintes) et effets (taux de déformation), les taux de déformation ont en plus d'autres symétries éventuelles, toutes les symétriques que possèdent les contraintes. Par conséquent, les plans principaux et les directions principales du tenseur  $\overline{\sigma}$  des contraintes sont confondus avec ceux du tenseur  $\overline{\varepsilon}$  (taux de déformation).

Les contraintes sont les fonctions linéaires des taux de déformations c'est-à-dire une composante quelconque  $\sigma_{ij}$  du tenseur  $\overline{\sigma}$  est associée linéairement à toutes les composantes  $\varepsilon_{kl}$  du tenseur  $\overline{\varepsilon}$  ;

$$\sigma_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \alpha_{ijkl} \varepsilon_{kl} . \quad (2.42)$$

Où  $\alpha_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre quatre qui contient 81 composantes. Un fluide Newtonien est tout fluide de Stokes vérifiant l'hypothèse de Newton. Les fluides usuels que l'on rencontre dans la nature (liquide, gaz) sont Newtoniens. En utilisant l'hypothèse d'isotropie du fluide [33], nous avons :

$$\sigma_{jk} = (a + c \operatorname{div} \mathbf{V}) \delta_{jk} + (b - c) \varepsilon_{jk} , \quad (2.43a)$$

où  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker.

La relation précédente étant valable pour toutes les valeurs d'indices  $j$  et  $k$  nous pouvons écrire que :

$$\overline{\overline{\sigma}} = (a + c \operatorname{div} \mathbf{V}) \overline{\overline{I}} + (b - c) \overline{\overline{\varepsilon}}. \quad (2.43b)$$

Avec  $c$  la viscosité de dilatation du fluide ; et on montre expérimentalement à partir de l'expérience de Couette que le terme  $(b - c)$  s'identifie à  $2\mu$  où ( $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide).

Dans le cas particulier où le fluide est en équilibre au repos, il n'y a pas de mouvement c'est-à-dire il n'existe aucune déformation partout dans le fluide.

Nous avons alors la vitesse  $\mathbf{V} = 0$  qui annule  $\operatorname{div} \mathbf{V}$  et  $\varepsilon_{jk}$  de la relation (2.43b).

Ensuite nous obtenons donc  $\sigma_{jk} = a \delta_{jk}$ . Ceci permet d'écrire  $T_j$  sous la forme

$T_j = a \delta_{ij} n_k = a n_j$ . Ainsi  $\mathbf{T}$  prend la forme :

$$\mathbf{T} = a \mathbf{n}, \quad (2.43c)$$

Lorsqu'un fluide est en équilibre au repos, il existe une seule contrainte en tout point du fluide : c'est la pression  $p$  telle que  $\mathbf{T} = -p \mathbf{n}$  Par identification avec la relation (2.42), on obtient  $a = -p$ , alors nous aboutissons finalement à la relation :

$$\sigma_{ij} = (-p + \eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \quad (2.44)$$

### II-3-4 Équations de Navier-Stokes

En Mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens. La résolution de ces équations modélisant un fluide comme un milieu continu à une seule phase est difficile, et l'existence mathématique des ces solutions n'est pas démontrée. Elles proviennent de l'œuvre des deux physiciens du XIX<sup>ème</sup> siècle, Claude NAVIER et Georges STOKES.

En appliquant l'opérateur de divergence sur la relation (2.44), on obtient :

$$\operatorname{div} \overline{\overline{\sigma}} = -\operatorname{grad} P + \operatorname{grad} (\eta \operatorname{div} \mathbf{V}) + 2\mu \operatorname{div} \overline{\overline{\varepsilon}} + 2\varepsilon \operatorname{grad} \mu, \quad (2.45a)$$

compte tenu des propriétés sur les opérateurs, l'équation (2.45a) devient

$$\overline{\text{div}\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{grad}P + \mathbf{grad}(\eta\text{div}\mathbf{V}) + 2\text{div}(\mu\overline{\boldsymbol{\Sigma}}), \quad (2.45b)$$

en substituant l'équation (2.45b) dans l'équation (2.45a), on obtient :

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) = \rho\mathbf{F} - \mathbf{grad}P + \mathbf{grad}(\eta\text{div}\mathbf{V}) + 2\text{div}(\mu\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}). \quad (2.45c)$$

Le tenseur des taux de déformation  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est lié au gradient de vitesse par :

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\text{grad}\mathbf{V}} + {}^t\overline{\text{grad}\mathbf{V}}\right), \quad (2.45e)$$

en éliminant le tenseur des taux de déformation dans l'équation (2.45e), on obtient alors des nouvelles équations appelées équations de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\right) = \rho\mathbf{F} - \mathbf{grad}P + (\eta + \mu)\mathbf{grad}(\text{div}\mathbf{V}) + \mu\Delta\mathbf{V}, \quad (2.46a)$$

avec  $\rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad}\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\right)$ ,  $\rho\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{grad}P$  et  $(\mu + \eta)\mathbf{grad}(\text{div}\mathbf{V}) + \mu\Delta\mathbf{V}$  représentant respectivement les forces d'inertie, les forces de masse, les forces de pression et les forces de viscosité appliquées à l'unité de volume. Alors que  $\nu$  et  $\mu$  sont respectivement les viscosités cinématique et dynamique.

Pour les fluides incompressibles en transformation isotherme ou de faibles variations de masse volumique ; et de plus  $\nu$  et  $\mu$  sont constants liés par une relation  $\mu = \rho\nu$  Les équations suivantes qui sont les équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles se réduisent :

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{V}\right] = \rho\mathbf{F} - \mathbf{grad}P + \mu\Delta\mathbf{V}, \quad (2.47b)$$

Dans la relation (2.47b) obtenue ci-dessus le premier terme de gauche (forces d'inertie) peut se mettre sous la forme suivante, quel que soit le système de coordonnées (coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques), nous avons :

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right) + \mathbf{rot}\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}\right]. \quad (2.47c)$$

En insérant cette relation dans l'équation (2.47c), on obtient d'autres nouvelles formes d'équations de Navier-Stokes quel que soit le système de coordonnées.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (2.47d)$$

Si nous négligeons l'action du poids en supposant que le mouvement du fluide a lieu dans une direction orthogonale que celle du poids alors les forces de masse seront alors négligeables et la relation (2.47d) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P + \nu \Delta \mathbf{V}. \quad (2.48)$$

L'écoulement de fluide étant dans un plan, les coordonnées cylindriques de ce plan sont confondues à ces coordonnées polaires, ainsi, les équations de Navier-Stokes peuvent être détaillées en coordonnées polaires définies par le couple  $(r, \theta)$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{V_\theta^2}{r^2} - \frac{2 \partial V_\theta}{r^2 \partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (2.49a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r V_\theta}{r} = \\ -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{V_\theta^2}{r^2} - \frac{2 \partial V_r}{r^2 \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.49b)$$

## II-4 Équations de vorticité

En Mécanique des fluides l'équation de HELMHOLTZ (1858) est l'équation de transport de la vorticité pour l'écoulement d'un fluide incompressible. Pour l'obtention de celle-ci, nous utiliserons deux techniques de résolution : la première consiste   utiliser des dérivées partielles sur les équations de Navier-Stokes établies et détaillées au chapitre précédent en coordonnées cylindriques et la seconde utilise l'application du rotationnel du champ de vitesse   travers les équations de Navier-Stokes.

### II-4-1 Méthode de démonstration classique

L'écoulement laminaire se produisant dans le plan polaire  $(r, \theta)$ , les équations de

Navier-Stokes déjà établies précédemment à travers des relations (2.49a) et (2.49b) en coordonnées polaires avec le terme  $\nu = \mu/\rho$  représentant la viscosité cinématique. En les conservant puis en multipliant l'équation (2.49b) par  $r$ , nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{V_\theta^2}{r^2} - \frac{2 \partial V_\theta}{r^2 \partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.50a)$$

$$\begin{aligned} r \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + r V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - V_r V_\theta = \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{2 \partial V_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.50b)$$

En dérivant l'équation (2.50a) par rapport à la variable  $\theta$  et l'équation (2.50b) par rapport à la variable  $r$ , en considérant que la masse volumique  $\rho$  ne dépend pas de

$r$  et  $\theta$ , et en effectuant les factorisations en même temps sur les dérivées trouvées pour réduire les expressions calculées, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + V_r \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2 V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 V_r}{\partial \theta^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned} \quad (2.51a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + r V_r \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + V_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) - V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial r} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.51b)$$

En soustrayant la relation (2.51a) par la relation (2.51b) et en effectuant plusieurs factorisations pour réduire les différentes expressions calculées, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \frac{V_r}{r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + r V_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) \\
& + \frac{V_\theta}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{r \partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) - \frac{V_\theta}{r^2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \frac{2V_r}{r^2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) = \quad .(2.52) \\
& + v \left[ -\frac{r \partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

En introduisant les expressions de la fonction de courant obtenues de la relation (2.21b) dans la relation (2.52) pour remplacer les composantes du champ de vitesse et obtenir une forme finale de la relation de la fonction de courant. Nous procédons par les calculs des termes de la relation ci-dessus :

$$\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad (2.53a)$$

la variable  $r$  ne dépendant pas de la variable  $\theta$  alors la relation (2.53a) s'écrit

$$\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = r \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right). \quad (2.53b)$$

La relation (2.53b) ainsi obtenue peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = r D^2 \psi, \text{ avec } D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (2.54)$$

Il en découle autres termes en utilisant la même procédure et en remplaçant le terme calculé ci-dessus dans chaque expression, il vient :

$$\frac{V_r}{r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} (r D^2 \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial r} (D^2 \psi), \quad (2.55a)$$

$$\frac{V_\theta}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (D^2 \psi), \quad (2.55b)$$

$$r V_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} (D^2 \psi) + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}, \quad (2.55c)$$

$$\frac{V_r}{r^2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} (D^2 \psi), \quad (2.55d)$$

$$\frac{V_r}{r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (2.55e)$$

Comme  $\rho$  ne dépend pas de la variable  $r$  et de la variable  $\theta$ , il en a de même pour la viscosité cinématique  $\nu$  le terme de la relation (2.54) se calcule alors aisément :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) = - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (D^2 \psi), \quad (2.56a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D^2 \psi). \quad (2.56b)$$

En remplaçant toutes les relations trouvées ci-dessus dans la relation (2.52), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + r D^2 \psi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} D^2 \psi \\ + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = r \nu \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (D^2 \psi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D^2 \psi) \right], \end{aligned} \quad (2.57a)$$

en simplifiant la relation ci-dessus par  $r$ , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + D^2 \psi \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi \right) = \nu D^2 D^2 \psi, \quad (2.57b)$$

l'écoulement laminaire se produisant dans le plan polaire avec un débit de masse constant ( $\partial \psi / \partial t = \partial D^2 \psi / \partial t = 0$ ) alors la relation (2.57b) se réduit :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi \right) = \nu D^2 D^2 \psi. \quad (2.58)$$

L'équation obtenue ci-dessus est une équation de vorticité de l'écoulement laminaire en régime permanent d'un fluide incompressible dans le plan polaire.

#### II-4-2 Nouvelle méthode de démonstration

L'écoulement du problème, provenant par l'équation du transport de la vorticité (2.48), avec le vecteur vitesse  $\mathbf{V}$ , la pression  $P$ , l'opérateur vecteur laplacien  $\Delta$  et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. L'écoulement présent a lieu dans le plan polaire, pour cela nous chercherons à établir l'équation de vorticité. Pour obtenir l'équation différentielle partielle d'un écoulement polaire se produisant dans le

plan polaire satisfaite par  $\psi$  et appelée équation de vorticité ou équation de transport de vorticité, nous prenons le rotationnel des deux membres de l'équation (2.48). Après l'avoir fait, nous utilisons l'équation (2.22c) et nous appliquons ensuite les formules mathématiques valables pour tout champ vectoriel en coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right) + \mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)\right) + \mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) \\ = \mathbf{rot}\left(-\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}P\right) + \mathbf{rot}(v\Delta\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Après avoir introduit l'expression du  $\mathbf{rotV}$  sur la relation (2.59), on procède par le calcul de chaque terme de l'équation (2.48) on a :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rotV}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)\mathbf{e}_z, \quad (2.60a)$$

en ce qui concerne le terme suivant, nous allons appliquer les propriétés mathématiques connues sur les opérateurs :

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)\right) = \mathbf{0}, \quad (2.60b)$$

Concernant le calcul du terme  $\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V})$ , on cherche d'abord à trouver le terme  $(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V})$  puis on applique le rotationnel à la relation obtenue pour avoir l'expression finale, pour cela on a :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = -(\nabla^2\psi)\mathbf{e}_z \wedge (V_r\mathbf{e}_r + V_\theta\mathbf{e}_\theta) = (\nabla^2\psi)V_\theta\mathbf{e}_r - (\nabla^2\psi)V_r\mathbf{e}_\theta, \quad (2.60c)$$

en remplaçant  $V_r$  et  $V_\theta$  de leurs expressions qui lient à  $\psi$ , il vient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = \nabla^2\psi\left(-\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\mathbf{e}_r - \nabla^2\psi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\theta, \quad (2.60d)$$

en factorisant la relation ci-dessus, on a :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = -\nabla^2\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\right), \quad (2.60e)$$

La relation ainsi obtenue prend la forme :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{grad} \psi. \quad (2.61a)$$

Avec  $\mathbf{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$ , en appliquant le rotationnel à l'équation (2.61a),

obtenue, on a :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{rot}(-(\nabla^2 \psi) \mathbf{grad} \psi), \quad (2.61b)$$

en se servant de la propriété mathématique connue sur les opérateurs suivants :

$\mathbf{rot}(f\mathbf{A}) = f\mathbf{rot} \mathbf{A} + \mathbf{grad} f \wedge \mathbf{A}$  et en l'appliquant à la relation (2.61b) on obtient

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{grad} \psi + \mathbf{grad}(-\nabla^2 \psi) \wedge \mathbf{grad} \psi, \quad (2.61c)$$

or d'après les différentes propriétés mathématiques connues comme étant les opérateurs de  $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} \psi) = 0$ , l'équation (2.61c) se réduit :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) = -\mathbf{grad}(\nabla^2 \psi) \wedge \mathbf{grad} \psi, \quad (2.61d)$$

en remplaçant le gradient défini en coordonnées polaires dans la relation ci-dessus, on a :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) = -\left( \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \wedge \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \quad (2.61e)$$

en effectuant le calcul vectoriel à la relation (2.61e), il vient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) = -\left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) \mathbf{e}_z, \quad (2.61f)$$

un fluide est dit incompressible lorsque sa masse volumique ne dépend pas de la pression et celle-ci varie faiblement quand la température varie aussi très peu. Dans le cas de notre travail, le fluide est un liquide et isotherme alors sa masse volumique est rigoureusement constante. En appliquant cette définition du fluide incompressible, on a alors :

$$\mathbf{rot} \left( -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P \right) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{rot}(\mathbf{grad} P) = \mathbf{0}, \quad (2.62a)$$

le calcul du terme  $\mathbf{rot}(\nu \Delta \mathbf{V})$ : En général, pour un fluide incompressible lorsque  $\rho$  est constant, les coefficients de viscosités  $\mu$  et  $\nu$  sont aussi constants. On a :

$$\mathbf{rot}(v\Delta\mathbf{V}) = v \mathbf{rot}(\Delta\mathbf{V}), \quad (2.62b)$$

Nous appliquons préalablement la relation suivante pour avoir l'expression vectorielle équivalente de  $\Delta\mathbf{V}$  valable quel que soit le système de coordonnées, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) &= \mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \\ \Delta\mathbf{A} &= \mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{A}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (2.62c)$$

ensuite :

$$\Delta\mathbf{V} = \mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{V}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{V}) \quad (2.62d)$$

or pour un écoulement laminaire d'un fluide incompressible (2.62a) à travers l'équation (2.62c) se réduit :

$$\Delta\mathbf{V} = -\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{V}), \quad (2.62e)$$

en remplaçant le rotationnel du champ de vitesse trouvé à la relation (2.22c), alors la relation (2.62e) s'écrit :

$$\Delta\mathbf{V} = -\mathbf{rot}(-\nabla^2\psi)\mathbf{e}_z \quad (2.63a)$$

en appliquant la propriété mathématique connue sur les opérateurs suivants :

$\mathbf{rot}(f\mathbf{A}) = f\mathbf{rot}\mathbf{A} + \mathbf{grad}f \wedge \mathbf{A}$  à la relation obtenue ci-dessus, celle-ci prend une nouvelle forme :

$$\Delta\mathbf{V} = -\mathbf{rot}(\nabla^2\psi)\mathbf{e}_z = (\nabla^2\psi)\mathbf{rot}\mathbf{e}_z + \mathit{grad}(\nabla^2\psi) \wedge \mathbf{e}_z. \quad (2.63b)$$

or après le calcul, on trouve  $\mathbf{rot}(\mathbf{e}_z) = 0$  en remplaçant ce terme et en arrangeant la relation (2.63b) on obtient :

$$\Delta\mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (\nabla^2\psi)\mathbf{e}_r - \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2\psi)\mathbf{e}_\theta, \quad (2.63c)$$

en insérant le rotationnel à l'équation (2.62c), il vient :

$$\mathbf{rot}(\Delta\mathbf{V}) = -\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2\psi \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \nabla^2\psi \right) \right] \mathbf{e}_z, \quad (2.63d)$$

la relation (2.63d) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{rot}(\Delta\mathbf{V}) = -(\nabla^2\nabla^2\psi)\mathbf{e}_z \text{ avec } \nabla^2 = \frac{\partial}{r\partial r} \left( \frac{r\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}. \quad (2.64)$$

En remplaçant les relations trouvées de chaque terme dans l'équation (2.48), on obtient alors l'équation suivante appelée équation de vorticité ou équation de rotationnel du champ de vitesse  $\mathbf{V}$  d'un écoulement polaire et se produisant dans le plan polaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (2.65a)$$

L'équation obtenue est l'équation de vorticité. Pour un écoulement laminaire en régime permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = 0$ ) alors l'équation obtenue ci-dessus se réduit   :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi, \quad (2.65b)$$

nous remarquons qu'un écoulement laminaire se produisant dans le plan polaire, l'équation de vorticité issue du plan polaire prend la forme suivante et vérifiée par la fonction de courant :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi \quad (2.66)$$

### II-4-3 Forme adimensionnelle

L'équation de vorticité (2.66) convient   adimensionnaliser les variables utilisées pour ressortir les paramètres qui gouvernent le problème. Le but de l'adimensionnalisation est de rendre plus commode la modélisation d'une part, d'autre part d'effectuer une similitude des nombres sans dimensions entre l'écoulement industriel et l'analyse expérimentale de l'écoulement dans le canal   paroi poreuse. Ceci a trois intérêts majeurs :

- Les équations obtenues sont simples ;
- Les équations étant normalisées, elles ne prennent pas de valeurs numériques trop faibles ou trop élevées, ce qui permet de mieux maîtriser les erreurs numériques ;
- La solution calculée pour un jeu de nombres caractéristiques est valable pour tous les systèmes naturels ayant le même jeu de nombres caractéristiques :

c'est le principe similitude.

Nous devons construire des variables sans dimension cela est généralement requis. Ainsi, la longueur, la fonction de courant la pression et le gradient de pression deviennent des variables sans dimension par  $h = (R_2 - R_1)/2$ ,  $V_{réf} h$ ,  $\rho V_{réf}^2$  et  $\rho V_{réf}^2 / h$ , respectivement, où  $V_{réf}$  est la vitesse de référence. Cette vitesse doit être bien établie en prenant en considération les causes du mouvement du fluide. Il est alors crucial de noter que l'écoulement étudié est gouverné par deux processus différents : le processus d'injection et d'aspiration au niveau des parois, et la rotation accélérée du cylindre amont. Par conséquent, nous avons :  $V_{réf} = V_1 + U$ . En utilisant les mêmes notations pour les paramètres dimensionnels et sans dimension, ces variables adimensionnelles sont alors définies :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r^*} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}, \quad (2.67a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta^*} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}}, \quad (2.67b)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{h^2} \nabla^{*2}. \quad (2.67c)$$

En insérant ces expressions trouvées ci-dessus dans la relation (2.66), on a :

$$\frac{V_{réf}^2}{h} \frac{1}{r^*} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta^*} \cdot \frac{\partial}{\partial r^*} \nabla^{*2} \psi - \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^*} \nabla^{*2} \psi^* \right) = \frac{V_{réf}}{h^2} \nu \nabla^{*2} \nabla^{*2} \psi. \quad (2.68a)$$

En simplifiant la relation (2.68a) par  $h/V_{réf}^2$ , il vient :

$$\frac{1}{r^*} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \nabla^{*2} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \nabla^{*2} \psi^* \right) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \nabla^{*2} \psi^*, \quad (2.68b)$$

où  $\text{Re} = V_{réf} h / \nu = (V_1 + U) h / \nu$  est le nombre de Reynolds. Ainsi l'équation (2.68b) obtenue est l'équation de vorticité avec les variables adimensionnelles.

En utilisant les mêmes notations que celles des paramètres adimensionnels, l'équation de vorticité s'écrit alors :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \nabla^2 \psi, \quad (2.69)$$

Dans la suite de notre travail, l'équation de vorticit e  etablie ci-dessus avec les variables adimensionnelles sera consid er ee dans la suite pour un  ecoulement laminaire d'un fluide incompressible se produisant dans le plan polaire en r egime permanent.

#### II-4-4 Conditions aux limites adimensionnelles

En utilisant les m emes d enotations comme dans II-2-3 pour les param etres dimensionnels et sans dimension, il vient :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta^*} = QV_1, \text{ et } -\frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} = a_1 Q, \text{  a } r^* = \frac{R_1}{h}, \quad (2.70a)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta^*} = \alpha Q \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right) V_1, \text{ et } -\frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} = a_2 U \theta, \text{  a } r^* = \frac{R_1}{h}, \quad (2.70b)$$

en r ecrivant les conditions aux limites en termes de  $\psi$  dans la forme sans dimension suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Q(1+\beta)^{-1}(\delta^{-1}-1) \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial r} = -a_1 \beta(1+\beta)^{-1} \theta, \text{  a } r = \delta^{-1}-1, \quad (2.71a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Q\alpha(1+\beta)^{-1}(\delta^{-1}-1) \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial r} = -a_2 \beta(1+\beta)^{-1} \theta, \text{  a } r = \delta^{-1}+1, \quad (2.71b)$$

Avec  $\beta = U/V_1$  est un param etre qui permet de comparer la vitesse de rotation des cylindres  $U$  par rapport  a la vitesse d'injection ou d'aspiration  $V_1$ .

Partant des  equations (2.71a), (2.71b) les conditions limites susmentionn ees sont d efinies pour les deux limites radiales  $\delta^{-1}-1$  et  $\delta^{-1}+1$ , qui d ependent ensuite du rapport de gap. Toutefois, des limites fixes pour la coordonn ee radiale doivent  etre utilis ees lors de la recherche num erique. En cons equance, nous effectuons un changement de variable impliquant une nouvelle variable  $\xi = Ar^2 + B$  telle que les conditions de limitation de  $r$ ,  $\delta^{-1}-1 \leq r \leq \delta^{-1}+1$ , correspondant  a  $-1 \leq \xi \leq +1$ .  
D'o u :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Q(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1), \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = a_1 \beta(1 + \beta)^{-1}(1 - \delta)^{-1} \theta, \text{ à } \xi = -1, \quad (2.72a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Q\alpha(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1), \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -a_2 \beta(1 + \beta)^{-1}(1 + \delta)^{-1} \theta, \text{ à } \xi = 1. \quad (2.72b)$$

Par la suite, nous introduisant  $\xi$  dans les équations (2.72a), (2.72b) tout en respectant les mêmes conditions ( $\psi = 0$  et  $\theta = 0$ ), nous obtenons la forme adaptée au problème suivante  $\psi = \theta\varphi(r)$ . Ainsi :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \theta\varphi^{(1)}, \quad (2.73a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \varphi, \quad (2.73b)$$

avec  $\varphi$  la fonction de courant par unité d'angle polaire, en remplaçant ces expressions (2.73a) et (2.73b) dans (2.72a) et (2.72b), nous obtenons les conditions aux limites provenant de l'équation différentielle d'ordre quatre à savoir

$$\varphi = \varphi(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1), \text{ et } \varphi^{(1)} = -a_1 \beta(1 + \beta)^{-1}(1 - \delta)^{-1}, \text{ à } \xi = -1, \quad (2.74a)$$

$$\varphi = \alpha\varphi(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1)^{-1}, \text{ et } \varphi^{(1)} = -a_2 \beta(1 + \beta)^{-1}(1 - \delta)^{-1}, \text{ à } \xi = +1. \quad (2.74b)$$

#### II-4-5 Formulation adimensionnelle efficace du problème

Pour les investigations numériques, nous utiliserons une valeur limite fixe  $r$  jouant le rôle d'un paramètre permettant de comparer les mêmes figures, les différentes courbes numériques tracées en fonction de la distance radiale pour les valeurs différentes de  $\delta$ . En conséquence, nous effectuons un changement de variable impliquant une nouvelle variable  $\xi = Ar^2 + B$  telle que les conditions de limitation de  $r$  à savoir :  $\delta^{-1} - 1 \leq r \leq \delta^{-1} + 1$ , correspondant à  $-1 \leq \xi \leq +1$ . On trouve  $A$  et  $B$  de la manière suivante :

$$A = \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1 + \delta^2}{2\delta}, \quad (2.75a)$$

en substituant  $A$  et  $B$  dans l'expression de  $\xi$ , le résultat est de la forme :

$$\xi = \left( \frac{\delta}{2} \right) r^2 - \left( \frac{1 + \delta^2}{2\delta} \right). \quad (2.75b)$$

Ainsi, on cherche une nouvelle formulation efficace sans dimension de l'équation de vorticité (2.48) vérifiée par la fonction de courant  $\psi$  en fonction de la variable du problème  $\xi$ . On a par la suite :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} = 2Ar \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (2.76a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi = 8A^2 r \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 8A^3 r^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + \frac{2A}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}, \quad (2.76b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \nabla^2 \psi = 8A^2 r \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + 8A^3 r^3 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{2A}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}, \quad (2.76c)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \psi = & 16A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 16A^3 r^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + \frac{4A}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 16A^3 r^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} \\ & + 16A^4 r^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + 4A^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{4A}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 4A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4}, \end{aligned} \quad (2.76d)$$

en remplaçant les expressions (2.76a), (2.76b), (2.76c) et (2.76d) dans l'équation (2.48) il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( 8A^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 8A^3 r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{2A}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \left( 8A^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 8A^3 r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{2A}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \\ & = \text{Re}^{-1} \left[ \begin{aligned} & 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( 8A^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 8A^3 r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{2A}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \\ & + 2Ar^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( 8A^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 8A^3 r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{2A}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \right] \\ & + \text{Re}^{-1} \left( \frac{1}{2Ar^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( 8A^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 8A^3 r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{2A}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.77a)$$

L'équation de vorticit e v erifi ee par la fonction du courant  $\psi$   a travers la variable  $\xi$  apr es simplification, avec,  $Ar^2 = (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)/2\delta$  s' ecrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\xi} D^2\psi - \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} D^2\psi = \text{Re}^{-1} \left( 2 \frac{\partial}{\partial\xi} D^2\psi + \delta^{-1} (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} D^2\psi \right) \\ + \text{Re}^{-1} \left( \delta (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} D^2\psi \right). \end{aligned} \quad (2.77b)$$

$$\text{Avec } D^2\psi = \left( 8A^2 \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + 8A^3 r^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{2A}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} \right).$$

#### II-4-6 Hypoth ese de solution semblable (Berman, 1953)

 Etant donnée que la vitesse transversale  $V_r$  ne varie pas de la coordonn ee orthoradiale  $\theta$  et le processus d'injection ou aspiration du fluide  a travers la paroi de la conduite est op er e uniform ement dans le sens radial, il est d' evoquer l'hypoth ese de solution semblable, qui a  et e examin ee pour la premi ere fois par Berman [18]. Selon cette th eorie, la vitesse radiale  $V_r$  de l' ecoulement transversal est ind ependante de la coordonn ee orthoradiale  $\theta$ , les param etres  etant sans dimension.

En  ecrivant la forme sans dimension de la d efinition de la vitesse radiale de l' equation (2.21b), et en l'int egrant avec les conditions,  $\psi = 0$   a  $\theta = 0$ , on obtient alors :

$$\psi(r, \theta) = \theta\varphi(r), \text{ avec } \varphi(r) = rV_r(r), \quad (2.78a)$$

o u  $\varphi$  d esigne la fonction de courant par unit e d'angle polaire.

En introduisant le terme  $\xi$  dans l' equation (2.78a) tout en respectant les m eme conditions,  $\psi = 0$   a  $\theta = 0$ , on obtient la forme adapt ee au probl eme suivante :

$$\psi(\xi, \theta) = \theta\varphi(\xi), \text{ avec } \varphi(\xi) = \xi V_\xi(\xi). \quad (2.78b)$$

Avec  $\varphi$  la fonction de courant adapt ee au probl eme  a r esoudre par unit e d'angle polaire.

Nous cherchons une nouvelle  equation v erifi ee par le terme  $\varphi$  en fonction de  $\xi$ .

En introduisant l'équation (2.78b) dans (2.77b) à travers des différents calculs, on procède comme suite :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad (2.79a)$$

$$D^2 \psi = 8A^2 \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + Ar^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right). \quad (2.79b)$$

En substituant les relations (2.79a) et (2.79b) dans l'équation (2.77b), on a :

$$\begin{aligned} & \varphi \left( 8A^2 \theta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 8A^3 r^2 \theta^2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^3} \right) \\ & - \left( 8A^2 \theta^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + 8A^3 r^2 \theta^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) = \\ & + \text{Re}^{-1} \left( 64A^4 \theta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 128A^5 r^2 \theta^2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^3} + 64A^5 r^2 \theta^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \xi^4} \right) \end{aligned} \quad (2.80a)$$

En simplifiant la relation (2.80a) par  $8A^2 \theta^2$  on obtient :

$$\begin{aligned} & \varphi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + Ar^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) - \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + Ar^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) \\ & = \text{Re}^{-1} \left( 8A^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 16A^3 r^2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^3} + 8A^4 r^4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \xi^4} \right) \end{aligned} \quad (2.80b)$$

En tenant compte que  $Ar^2 = (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)/2\delta$  et en l'insérant dans (2.80b) on obtient la relation :

$$\begin{aligned} & \delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)(\varphi\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}\varphi^{(2)}) + 2\delta^2(2\varphi\varphi^{(2)} - (\varphi^{(1)})^2) \\ & = \text{Re}^{-1}(8\delta^2\varphi^{(2)} + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)\varphi^{(3)} + (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2\varphi^{(4)}) \end{aligned} \quad (2.81)$$

avec :  $\partial\varphi/\partial\xi = \varphi^{(1)}$  ,  $\partial^2\varphi/\partial\xi^2 = \varphi^{(2)}$  ,  $\partial^3\varphi/\partial\xi^3 = \varphi^{(3)}$  ,  $\partial^4\varphi/\partial\xi^4 = \varphi^{(4)}$  , qui conduit à la notation :  $\partial^m\varphi/\partial\xi^m = \varphi^{(m)}$  .

En résumé, l'équation (2.81) est la nouvelle forme de l'équation différentielle ordinaire de quatrième ordre adaptée à notre domaine d'étude.

## II-5 Méthode numérique de tir pour la fonction de courant par unité d'angle polaire

### II-5-1 Principe général de la méthode.

C'est une méthode numérique utilisée pour résoudre des problèmes de valeurs initiales pour les équations différentielles ordinaires et consiste à transformer le problème aux limites en deux points en un problème à condition aux limites initiales.

Pour résoudre le problème posé par l'équation (2.81) avec les équations (2.74a) et (2.74b) des conditions aux limites; on transforme le problème posé en un problème à valeur initiale en introduisant deux conditions manquantes librement choisie sur la deuxième et la troisième dérivée  $v_1$  et  $v_2$  à la frontière initiale  $\xi = -1$ , il vient:

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)(H^{(1)}H^{(2)} - HH^{(3)}) + 2\operatorname{Re}\delta^2\left((H^{(1)})^2 - 2HH^{(2)}\right) \\ & \operatorname{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)(H^{(1)}H^{(2)} - HH^{(3)}) \\ & + 2\operatorname{Re}\delta^2\left((H^{(1)})^2 - 2HH^{(2)}\right) = 0 \end{aligned} \quad , \quad (2.82a)$$

les nouvelles conditions aux limites sont alors dictées :

$$\begin{aligned} H &= Q(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1), \quad H^{(1)} = -a_1\beta(1 + \beta)^{-1}(1 - \delta^{-1}), \\ H^{(2)} &= v_1, \text{ et } \quad H^{(3)} = v_2 \end{aligned} \quad . \quad (2.82b)$$

Pour toutes les valeurs considérées  $v_1$  et  $v_2$ , le problème à conditions initiales ci-dessus est résolu en utilisant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre.[29] Pour cela, nous allons adopter 101 valeurs discrétisées pour le paramètre  $\xi$  couvrant tout son intervalle  $[-1,1]$  et formant 100 intervalles de même pas  $\Delta\xi = 2 \cdot 10^{-2}$ . Les paramètres  $v_1$  et  $v_2$  sont ensuite mis à jour et ajustés afin d'obtenir les valeurs  $v_1^*$  et  $v_2^*$  qui sont les valeurs optimales pour lesquelles  $H$  correspond aux conditions requise pour  $H$  à la frontière finale  $\xi = 1$ . Les valeurs optimales étant atteintes

avec une bonne précision, la solution  $H$  calculée est identique à la solution  $\varphi$  souhaitée. La méthode de calcul est effectuée par l'algorithme d'optimisation de Newton-Raphson.

### II-5-2 Algorithme de Runge-Kutta

C'est une méthode itérative pour trouver numériquement une approximation précise d'un zéro d'une fonction réelle d'une variable réelle. Cet algorithme consiste à la définition du vecteur  $\mathbf{E}(E_1, E_2)$  dont les composantes permettent de calculer la distance à laquelle les valeurs de la fonction  $\phi$  sont satisfaites à la borne supérieure  $\xi = 1$ . Il vient :

$$E_1(v_1, v_2) = H(\xi = 1) - Q\alpha(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1), \quad (2.83a)$$

$$E_2(v_1, v_2) = H(\xi = 1) - (-a_2\beta(1 + \beta)^{-1}(1 + \delta)^{-1}). \quad (2.83b)$$

Ensuite, nous procédons à minimiser la fonction coût défini comme suite :

$$J(v_1, v_2) = |\mathbf{E}|^2 = E_1^2(v_1, v_2) + E_2^2(v_1, v_2). \quad (2.84)$$

Dans le but de minimiser  $J$ , c'est-à-dire  $E_1$  et  $E_2$  on démarre avec un couple de valeurs initiales  $(v_1, v_2)_0$  puis on applique l'algorithme d'optimisation de Newton-Raphson pour trouver les zéros des composants du vecteur de divergence  $\mathbf{E}$ , qui mesure combien la solution calculée est loin de satisfaire les conditions requises à la limite de fin et cela passe par le calcul des composants de la matrice Jacobienne.

### II-5-3 Algorithme de Newton-Raphson : calcul de la matrice Jacobienne

Partant de la définition du couple  $(v_1, v_2)$  et de son écart  $(\delta v_1, \delta v_2)$  tel que le Couple  $(v_1 + \delta v_1, v_2 + \delta v_2)$  donne une valeur de  $E_1$  et une valeur de  $E_2$  minimale. En utilisant le développement limité de Taylor à l'ordre 1 en  $E_1$  et  $E_2$ , on a :

$$E_1(v_1 + \delta v_1, v_2 + \delta v_2) = E_1(v_1, v_2) + \left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\right)\delta v_1 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial v_2}\right)\delta v_2, \quad (2.85a)$$

$$E_2(v_1 + \delta v_1, v_2 + \delta v_2) = E_2(v_1, v_2) + \left(\frac{\partial E_2}{\partial v_1}\right)\delta v_1 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial v_2}\right)\delta v_2. \quad (2.85b)$$

On désire avoir  $E_1$  et  $E_2$ , pour cela on pose :

$$E_1(v_1 + \delta v_1, v_2 + \delta v_2) = 0 \quad \text{et} \quad E_2(v_1 + \delta v_1, v_2 + \delta v_2) = 0. \quad (2.86)$$

Pour le choix de  $\delta v_1$  et  $\delta v_2$ ; on a alors :

$$\left( \frac{\partial E_1}{\partial v_1} \right) \delta v_1 + \left( \frac{\partial E_1}{\partial v_2} \right) \delta v_2 = -E_1(v_1, v_2), \quad (2.87a)$$

$$\left( \frac{\partial E_2}{\partial v_1} \right) \delta v_1 + \left( \frac{\partial E_2}{\partial v_2} \right) \delta v_2 = -E_2(v_1, v_2). \quad (2.87b)$$

Les relations (2.87a) et (2.87b) obtenues ci-dessus peuvent encore se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[J] \begin{pmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_1 \\ -E_2 \end{pmatrix}, \quad (2.88a)$$

où  $[J]$  est une matrice Jacobienne construite à partir de  $E_1$  et  $E_2$  telle que :

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial v_1} & \frac{\partial E_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial E_2}{\partial v_1} & \frac{\partial E_2}{\partial v_2} \end{pmatrix}. \quad (2.88b)$$

Posons :

$$J_{1,1} = \frac{\partial E_1}{\partial v_1}, \quad J_{1,2} = \frac{\partial E_1}{\partial v_2}, \quad (2.89a)$$

$$J_{2,1} = \frac{\partial E_2}{\partial v_1}, \quad J_{2,2} = \frac{\partial E_2}{\partial v_2}. \quad (2.89b)$$

Ainsi :

$$[J]^{(n)} \begin{pmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{pmatrix}^{(n)} = - \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}^{(n)}. \quad (2.90)$$

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^{(n)} - ([J]^{(q)})^{-1} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}^{(n)}, \quad (2.91a)$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^{(n)} + \begin{pmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{pmatrix}^{(n)}. \quad (2.91b)$$

Dans la relation ci-dessus,  $n$  représente l'indice d'itération. Ainsi, les calculs des composantes de la matrice Jacobienne  $J_{1,j}$  ( $i=1,2; j=1,2$ ) nous amènent à chercher les fonctions  $\partial H/\partial v_1$  et  $\partial H/\partial v_2$ , pour cela on pose :

$$J_{1,j} = \frac{\partial E_1}{\partial v_j} = \frac{\partial}{\partial v_j} (H^{(1)}(\xi=1)) \text{ pour } j=1,2, \quad (2.92a)$$

$$J_{2,j} = \frac{\partial E_1}{\partial v_j} = \frac{\partial}{\partial v_j} (H^{(2)}(\xi=1)) \text{ pour } j=1,2,. \quad (2.92b)$$

Cela conduit à définir deux fonctions  $p_j$  et  $q_j$  dépendante de  $\xi$  et paramétrées par le couple  $(v_1, v_2)$ , pour cela posons :

$$p_j = \frac{\partial H}{\partial v_j} \text{ et } q_j = \frac{\partial H}{\partial v_j} \text{ pour } j=1,2, \quad (2.93)$$

En admettant que :

$$\frac{\partial}{\partial v_1} (H(\xi=1)) = \left( \frac{\partial H}{\partial v_1} \right)_{\xi=1} = p_j(\xi=1), \quad (2.94a)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} (H(\xi=1)) = \left( \frac{\partial H}{\partial v_2} \right)_{\xi=1} = q_j(\xi=1), \quad (2.94b)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial H}{\partial v_1} \right) = \frac{\partial p}{\partial \xi} = p_j^{(1)}, \quad (2.94c)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial H}{\partial v_2} \right) = \frac{\partial q}{\partial \xi} = q_j^{(1)}. \quad (2.94d)$$

Les composantes de la matrice Jacobienne de  $J_{i,j}$  sont données par :

$$J_{1,1} = p_j(\xi=1); J_{1,2} = q_j(\xi=1), \quad (2.95a)$$

$$J_{2,1} = p_j^{(1)}(\xi=1); J_{2,2} = q_j^{(1)}(\xi=1). \quad (2.95b)$$

Par conséquent, le calcul de  $J_{i,j}$  nécessite de connaître  $p$ ,  $q$  et leurs dérivées premières  $p_j^i$  et  $q_j^i$  à la borne finale  $\xi=1$ . Pour obtenir ces valeurs, nous différencions l'équation (2.82a) par rapport à  $v_1$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
& (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2 \frac{\partial}{\partial v_1} (H^{(4)}) + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \frac{\partial}{\partial v_1} (H^{(3)}) \\
& + 2\text{Re}\delta^2 \frac{\partial}{\partial v_1} \left( (H^{(1)})^2 - 2HH^{(3)} \right) , \\
& + \text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \frac{\partial}{\partial v_1} (H^{(1)}H^{(2)} - HH^{(3)}) = 0
\end{aligned} \tag{2.96a}$$

de même pour  $q_j$  par rapport à  $v_2$  il vient :

$$\begin{aligned}
& (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2 \frac{\partial}{\partial v_2} (H^{(4)}) + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \frac{\partial}{\partial v_2} (H^{(3)}) \\
& + 2\text{Re}\delta^2 \frac{\partial}{\partial v_2} \left( (H^{(1)})^2 - 2HH^{(3)} \right) . \\
& + \text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \frac{\partial}{\partial v_2} (H^{(1)}H^{(2)} - HH^{(3)}) = 0
\end{aligned} \tag{2.96b}$$

En évaluant les dérivées liant  $p_j$  et  $q_j$  à  $H$  par rapport à  $\xi$ , nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial v_1} H^{(4)} = \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{d^4 H}{d\xi^4} \right) = \frac{d^4}{d\xi^4} \left( \frac{\partial H}{\partial v_1} \right) = \frac{d^4}{d\xi^4} p_j = p_j^{(4)} , \tag{2.97a}$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} H^{(3)} = \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{d^3 H}{d\xi^3} \right) = \frac{d^3}{d\xi^3} \left( \frac{\partial H}{\partial v_1} \right) = \frac{d^3}{d\xi^3} p_j = p_j^{(3)} , \tag{2.97b}$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} H^{(2)} = \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{d^2 H}{d\xi^2} \right) = \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{\partial H}{\partial v_1} \right) = \frac{d^2}{d\xi^2} p_j = p_j^{(2)} , \tag{2.97c}$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} H^{(1)} = \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{d^1 H}{d\xi^1} \right) = \frac{d^1}{d\xi^1} \left( \frac{\partial H}{\partial v_1} \right) = \frac{d^1}{d\xi^1} p_j = p_j^{(1)} . \tag{2.97d}$$

De la même manière analogue avec  $q$ , nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial v_2} H^{(4)} = \frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{d^4 H}{d\xi^4} \right) = \frac{d^4}{d\xi^4} \left( \frac{\partial H}{\partial v_2} \right) = \frac{d^4}{d\xi^4} q_j = q_j^{(4)} , \tag{2.98a}$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} H^{(3)} = \frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{d^3 H}{d\xi^3} \right) = \frac{d^3}{d\xi^3} \left( \frac{\partial H}{\partial v_2} \right) = \frac{d^3}{d\xi^3} q_j = q_j^{(3)} , \tag{2.98b}$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} H^{(2)} = \frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{d^2 H}{d\xi^2} \right) = \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{\partial H}{\partial v_2} \right) = \frac{d^2}{d\xi^2} q_j = q_j^{(2)}, \quad (2.98c)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} H^{(1)} = \frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{d^1 H}{d\xi^1} \right) = \frac{d^1}{d\xi^1} \left( \frac{\partial H}{\partial v_2} \right) = \frac{d^1}{d\xi^1} q_j = q_j^{(1)}. \quad (2.98d)$$

En remplaçant les relations ci-dessus à savoir (2.97a), (2.97b), (2.97c), et (2.97b) dans l'équation (2.96a), il vient :

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2 p_j^{(4)} + \delta((1 + \delta^2 + 2\delta\xi)(8 - \text{Re}H))p_j^{(3)} \\ & + (4\delta^2(2 - \text{Re}H) + \text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)H^{(1)})p_j^{(2)} \\ & + (4\text{Re}\delta^2 H^{(1)} + \text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)H^{(1)})p_j^{(1)}, \quad (2.99a) \\ & - (4\text{Re}\delta^2 H^{(2)} + 4\text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)H^{(2)})p_j = 0 \end{aligned}$$

de même pour (2.98a), (2.98b), (2.98c), et (2.98d) dans l'équation (2.96b), nous avons aussi :

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2 q_j^{(4)} + \delta((1 + \delta^2 + 2\delta\xi)(8 - \text{Re}H))q_j^{(3)} \\ & + (4\delta^2(2 - \text{Re}H) + \text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)H^{(1)})q_j^{(2)} \\ & + (4\text{Re}\delta^2 H^{(1)} + \text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)H^{(1)})q_j^{(1)}, \quad (2.99b) \\ & - (4\text{Re}\delta^2 H^{(2)} + 4\text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)H^{(2)})q_j = 0 \end{aligned}$$

Alors, les relations (2.99a) et (2.99b) sont appelées équations de perturbations vérifiées par  $p_j$  et  $q_j$ . Par la suite, trouvons les conditions initiales vérifiées par  $p_j$  et  $q_j$  pour cela on dérive par rapport à  $v_1$  en  $\xi = -1$ , nous avons :

$$H(-1) = Q(1 + \beta)^{-1}(1 - \delta^{-1}), \frac{\partial H}{\partial v_1}(-1) = 0, \quad (2.100a)$$

En tenant compte de l'expression de  $p_j$  posée  $p_j = \partial H / \partial v_1$ , la relation (2.100a) devient :

$$p_j(-1) = 0 \quad (2.100b)$$

De même on continue à opérer ces dérivées pour obtenir les conditions aux limites définies par  $p_j$ , nous avons :

$$H^{(1)}(-1) = -a_1 \beta (1 + \beta)^{-1} (1 - \delta^{-1})^{-1}, \frac{\partial}{\partial v_1} (H^{(1)}(-1)) = 0, \quad (2.101a)$$

$$H^{(2)}(-1) = v_1, \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{d^2 H}{d\xi^2} (-1) \right) = \frac{d^2 P_j}{d\xi^2} (-1) = 1, \quad (2.101b)$$

$$H^{(3)}(-1) = v_2, \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{d^3 H}{d\xi^3} (-1) \right) = \frac{d^3 P_j}{d\xi^3} (-1) = 0, \quad (2.101c)$$

Pour les conditions aux limites à valeur initiale vérifiée par  $q_j$ , on dérive la relation (2.74b) par rapport à  $v_2$  en  $\xi = 1$  nous avons :

$$H(-1) = Q(1 + \beta)^{-1} (1 - \delta^{-1}), \frac{\partial H}{\partial v_2} (1) = 0 \quad (2.102a)$$

En tenant compte de l'expression de  $q_j$  posée  $q_j = \partial H / \partial v_2$ , la relation (2.102a) devient :

$$q_j(-1) = 0, \quad (2.102b)$$

De même on continue à opérer ces dérivées pour obtenir les conditions aux limites définies par  $q_j$ , nous avons :

$$H^{(1)}(-1) = -a_1 \beta (1 + \beta)^{-1} (1 - \delta^{-1})^{-1}, \frac{\partial}{\partial v_2} (H^{(1)}(-1)) = 0, \quad (2.1033a)$$

$$H^{(2)}(-1) = v_1, \frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{d^2 H}{d\xi^2} (-1) \right) = \frac{d^2 P_j}{d\xi^2} (-1) = 0, \quad (2.103b)$$

$$H^{(2)}(-1) = v_2, \frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{d^3 H}{d\xi^3} (-1) \right) = \frac{d^3 P_j}{d\xi^3} (-1) = 1. \quad (2.103c)$$

Alors les fonctions  $p_j$  et  $q_j$  sont des solutions du problème linéaire de valeur initiale donnée par la même équation différentielle ordinaire  $y = p_i$  ou  $y = p_j$  :

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2 y^{(4)} + \delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)(8 - \text{Re}H)y^{(3)} \\ & + (4\delta^2(2 - \text{Re}H) + \text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)H^{(1)})y^{(2)} \\ & + (4\text{Re}\delta^2 H^{(1)} + \text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)H^{(2)})y^{(1)} \\ & - (4\text{Re}\delta^2 H^{(2)} + \text{Re}\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)H^{(3)})y = 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Les conditions aux limites à valeur initiale de l'équation (2.104) sont résumées par :

$$p_i = 0, p_i^{(1)} = 0, p_i^{(2)} = 1, p_i^{(3)} = 0, \text{ à } \xi = -1 \quad (2.105a)$$

$$q_j = 0, q_j^{(1)} = 0, q_j^{(2)} = 1, q_j^{(3)} = 1, \text{ à } \xi = -1 \quad (2.105b)$$

où :  $p_i^{(1)} = dp_i/d\xi$ ,  $p_i^{(2)} = d^2 p_i/d\xi^2$ ,  $p_i^{(3)} = d^3 p_i/d\xi^3$ ,

$$q_j^{(1)} = dq_j/d\xi, q_j^{(2)} = d^2 q_j/d\xi^2, q_j^{(3)} = d^3 q_j/d\xi^3.$$

En résumé, il a été question pour nous de déterminer les équations pouvant conduire à la résolution du problème posé dans ce travail. À cet effet, à partir des équations de Navier-Stokes, nous avons déterminé l'équation de vorticité en coordonnées polaires avec des paramètres adimensionnels gouvernant le problème, ainsi que ses conditions aux limites. Le problème obtenu est un problème aux limites en deux points. Pour le résoudre, nous avons fait recours à la méthode de tir car cette méthode a largement été utilisée en Génie Mécanique et en Mathématiques appliquées. La méthode de tir nous a permis de transformer le problème aux limites en deux points en un problème aux limites à condition initiale. Dans cette méthode, les algorithmes de Runge-Kutta et d'optimisation de Newton-Raphson ont été appliqués pour la résolution du problème posé. Il nous reste à présenter les résultats obtenus de la méthode de tir.



**CHAPITRE III : RÉSULTATS ET  
DISCUSSIONS**



### III-1 Validation du code de calcul

Dans cette partie, il est question pour nous de montrer la bonne démarche et de faire valoir la méthode de tir utilisée pour l'obtention des résultats numériques au problème posé dans le chapitre II précédent. Pour cela, il va falloir procéder par deux méthodes considérées au problème ci-dessous à savoir la méthode analytique et la méthode numérique de tir, les solutions analytiques et numériques obtenus seront comparées et discutées. À cet égard, considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre quatre et ses conditions aux limites définies par :

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(2)}(x) + y(x) = 0, \quad (3.1a)$$

$$y(-1) = 1, y^{(1)}(-1) = -1, y(1) = 0, y^{(1)}(1) = 0. \quad (3.1b)$$

Avec :  $d^4 y/dx^4 = y^{(4)}(x)$ ,  $d^2 y/dx^2 = y^{(2)}(x)$  et  $-1 \leq x \leq 1$

#### III-1-1 Validation qualitative à partir d'un problème de solution analytique Connue

L'équation (3.1) a pour équation caractéristique :

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0, \quad (3.2a)$$

cette relation peut s'écrire de la forme :

$$(r^2 - 1)^2 = 0, \quad (3.2b)$$

la résolution de l'équation (3.2b) caractéristique admet des solutions telles que: -1 et +1 et la solution générale de l'équation (3.1a) s'écrit sous la forme suivante:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) \exp(x) + (C_3 + C_4 x) \exp(-x). \quad (3.3)$$

En utilisant les conditions aux limites données à la relation (3.1b), on obtient alors un système de quatre équations aux quatre inconnues :

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + e^2 C_3 - e^2 C_4 = e \\ C_1 - e^2 C_3 + 2e^2 C_4 = -e \\ e^2 C_1 + e^2 C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ 2C_1 + 2e^2 C_2 - C_3 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

ou  $e^1 = \exp(1)$ ,  $e^2 = \exp(2)$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , et  $C_4$  des constantes à déterminer :

$$C_1 = \frac{-3e^2 - e}{e^4 - 18e^4 + 1}, \quad (3.5a)$$

$$C_2 = \frac{2e^5 - 2e}{e^4 - 18e^4 + 1}, \quad (3.5b)$$

$$C_3 = \frac{e^7 - 5e^3}{e^4 - 18e^4 + 1}, \quad (3.5c)$$

$$C_4 = \frac{8e^3}{e^4 - 18e^4 + 1}, \quad (3.5d)$$

Elle implique généralement de supposer une condition initiale, de résoudre l'équation différentielle avec cette condition initiale supposée.

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(2)}(x) + y(x) = 0, \quad (3.6a)$$

$$y(1) = 1, y^{(1)}(-1) = -1, y(1) = 0, y^{(1)}(1) = 0, \quad (3.6b)$$

pour débiter, nous transformons d'abord l'équation différentielle d'ordre quatre ci-dessus en une équation différentielle d'ordre 1, pour cela on pose :

$$y = y_1, y^{(1)} = y_2, y^{(2)} = y_3, y^{(3)} = y_4, \quad (3.6c)$$

En injectant les relations (3.6c) et (3.6b) dans l'équation (3.6a), on obtient :

$$y_4^{(1)}(x) - 2y_3(x) + y_1(x) = 0. \quad (3.7)$$

Pour transformer l'équation différentielle (3.7) qui est un problème à valeurs aux limites en deux points, en un problème à conditions initiales, il faut donc pour cela ajouter deux autres conditions supplémentaires sur la borne  $x = -1$  afin

que le problème soit bien posé. Ainsi on introduit deux valeurs  $a$  et  $b$  pour remplacer les conditions initiales manquantes, on obtient :

$$y_4^{(1)}(x) - 2y_3(x) + y_1(x) = 0, \quad (3.8a)$$

$$y(-1) = 1, y_2(-1) = -1, y_3(-1) = a, y_4(-1) = b. \quad (3.8b)$$

L'objectif est de trouver les valeurs  $a = a^*$  et  $b = b^*$  pour lesquelles les conditions à la borne finale  $x = +1$  imposées sont vérifiées. À cet effet, une technique d'optimisation est nécessaire à la borne finale  $x = +1$ . On cherche à trouver les équations de perturbation ainsi que leurs conditions à valeur initiale comme à la technique utilisée au chapitre précédent aux relations (2.96a) et (2.96b), pour cela, la relation (3.8a) est différenciée par  $v_1$  et puis par  $v_2$  respectivement on a :

$$\frac{\partial y_4^{(1)}(x)}{\partial v_1} - 2 \frac{\partial y_3(x)}{\partial v_1} + \frac{\partial y_1(x)}{\partial v_1} = 0, \quad (3.9a)$$

dans la même lancée avec  $v_2$ , on obtient :

$$\frac{\partial y_4^{(1)}(x)}{\partial v_2} - 2 \frac{\partial y_3(x)}{\partial v_2} + \frac{\partial y_2(x)}{\partial v_2} = 0. \quad (3.9b)$$

En posant  $(\partial y_1 / \partial v_1 = p_1)$  et  $(\partial y_2 / \partial v_2 = p_2)$  alors les équations de perturbation vérifiées par  $p$  et  $q$  sont :

$$p_4^{(1)} - 2p_3 + p_1 = 0, \quad (3.10a)$$

$$q_4^{(1)} - 2q_3 + q_1 = 0. \quad (3.10b)$$

Les conditions à valeur initiale s'obtiennent en utilisant la méthode de l'expression (2.99a) comme au chapitre précédent :

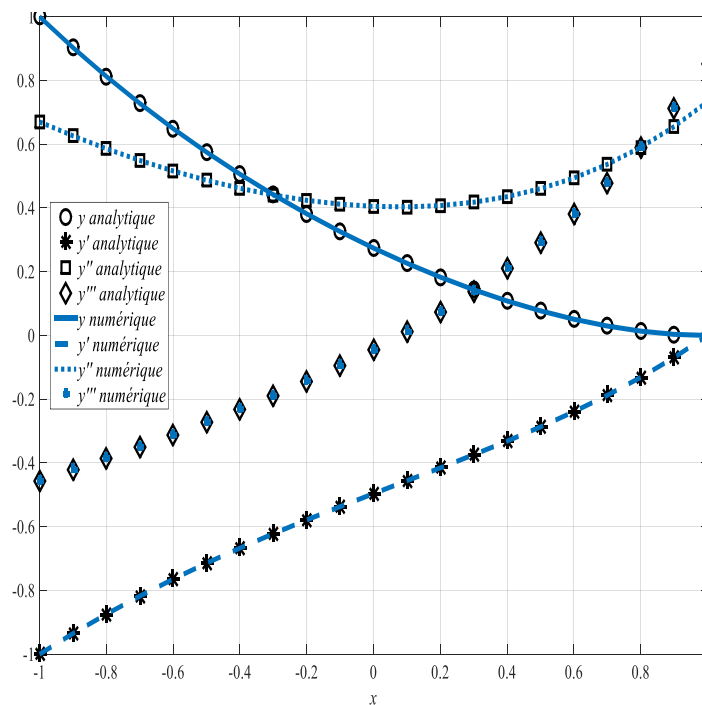
$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1, p_4 = 0 \text{ à } x = -1, \quad (3.11a)$$

$$q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 1, \text{ à } x = 1. \quad (3.11b)$$

Les solutions analytiques et numériques montrent les parfaits accords entre elles. Les courbes tracées en noir représentent les solutions analytiques et celles en

bleu des solutions numériques comme montre la figure ci-dessous. L'évolution de la solution analytique en  $y$  présente la même allure, la même similitude que celle de la solution numérique et ces solutions sont représentées en cercle et en barre respectivement.

De même, les solutions analytique et numérique de la première dérivée  $y^{(1)}$  présentent aussi la même allure et similitude et rencontrant celles de  $y$  en  $x = 0$  représentées en étoile et tiret de 6 respectivement. Alors que les courbes en square et trait interrompu sont celles de la solution analytique et de la solution numérique de la deuxième dérivée  $y^{(2)}$  respectivement et présentent la même allure et similitude et rencontrent celles de  $y$  en un point de  $x = -0.3$ . Quant aux courbes de la troisième dérivée  $y^{(3)}$  en losange des solutions analytique et numérique respectivement et qui présentent la même allure et similitude se rencontrent  $y$  en  $x = 0.3$  et  $y^{(1)}$  en  $x = 0.8$ .

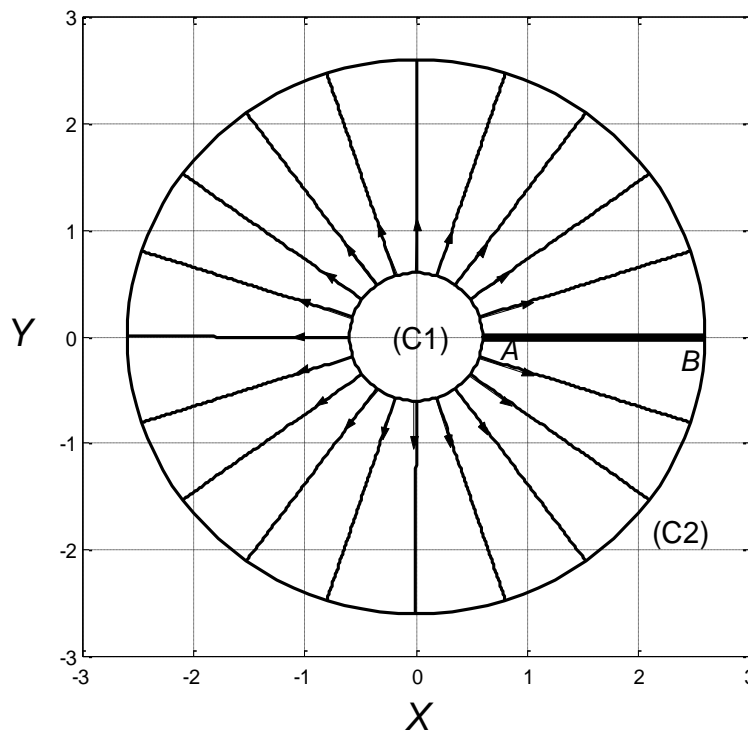


**Figure 10** : Courbes comparatives des résultats numériques et analytiques

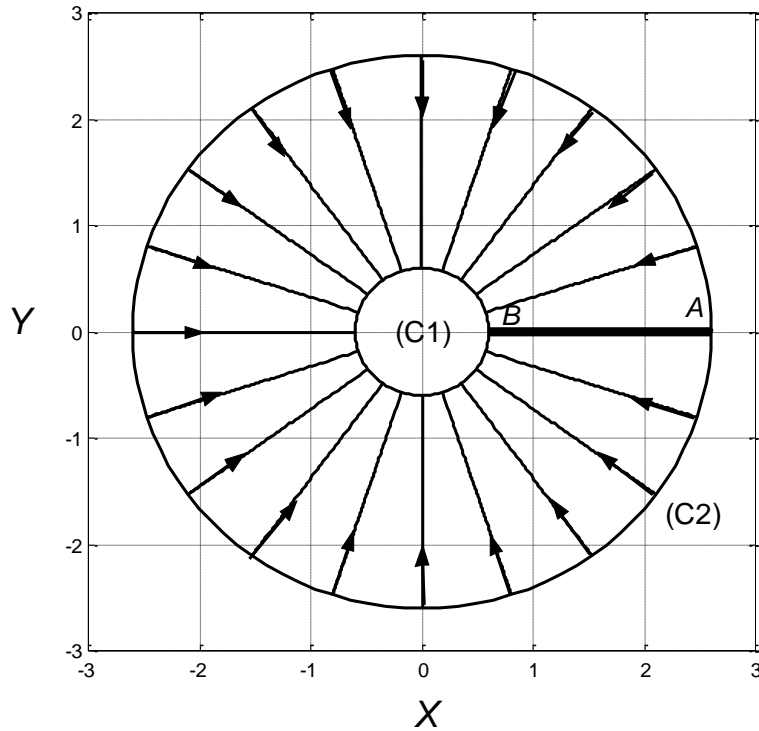
### III-1-2 Validation à partir des résultats trouvés pour des cylindres immobiles par Makon et al. (2022)

Nous fixons :  $a_1 = 0$  et  $a_2 = 0$ , avec  $\beta = 0$ , afin d'examiner pour la configuration dans laquelle les deux cylindres sont maintenus au repos. Nous constatons que l'écoulement laminaire permanent existe lorsque le cylindre intérieur est en amont ( $Q = +1$ ) et si  $\alpha > 1$ . Pour la configuration inverse ( $Q = -1$ ), l'écoulement laminaire est présent lorsque le cylindre intérieur est en aval et si  $0 < \alpha < 1$ . Pour la valeur du coefficient de vitesse  $\alpha = 1$ , les deux orientations de l'écoulement montrent un écoulement laminaire permanent radial.

Les lignes de courant produites pour le cas des cylindres intérieur et extérieur en amont (figure 11a et 11b). À partir de ce qui a été discuté précédemment, on peut en déduire que nos calculs confirment les résultats trouvés précédemment dans la référence [15].



**Figure 11a** : Lignes de courant de l'écoulement radial, des deux cylindres (C1) et (C2) au repos ( $a_1 = 0, a_2 = 0$ ) pour  $Q = 1$



**Figure 11b** : Lignes de courant de l'écoulement radial, des deux cylindres (C1) et (C2) au repos ( $a_1 = 0, a_2 = 0$ ) pour  $Q = -1$ .

### III-2 Lignes de courant ou trajectoires des particules de fluide

Les trajectoires des particules fluides, qui servent de lignes pour tout écoulement laminaire constant, sont déterminées par la relation :

$$\psi = cte = K. \quad (3.12)$$

En utilisant la définition de  $\psi$  donnée par l'équation (2.79b), nous trouvons que les équations des lignes de courant pour un  $\xi$  donné sont :  $\theta\varphi(\xi) = K$ .

Puisque les calculs numériques donnent une valeur nulle pour  $\psi$ , l'équation de n'importe quelle ligne de courant peut alors être écrite dans la forme.

$$\theta = \frac{K}{\varphi(\xi)}. \quad (3.13)$$

Où  $K$  est une constante d'intégration dont la valeur est dérivée des coordonnées d'au moins un point à travers lequel la ligne considérée passe.

#### III-2-1 Équations trouvées pour les lignes de courant

Des investigations sont alors effectuées pour les deux cas selon la valeur de

$Q(Q = -1$  ou  $Q = 1)$ . Le cas  $Q = 1$ , pour lequel le cylindre intérieur (C1) est en amont, correspond aux lignes de courant qui se terminent par aspiration à l'extérieur du cylindre (C2) et commencent par injection à n'importe quel point ( $\theta = \lambda_i, \xi = -1$ ); de la paroi intérieure, c'est-à-dire,  $K = \lambda_i \varphi(-1) = K_i$ .

Pour les simplifications qui se terminent par aspiration à l'intérieur du cylindre (C1) et commence par l'injection à n'importe quel point ( $\theta = \mu_j, \xi = +1$ ) de la paroi extérieure du cylindre (C1), nous avons :  $Q = -1$  et  $K = \mu_j \varphi(+1) = K_j$ . Puisque l'équation (2.69b) donne l'expression de la coordonnée radiale dans la forme  $r = \delta^{-1}(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{1/2}$ .

Nous trouvons que les trajectoires des particules fluides peuvent être définies à partir des coordonnées cartésiennes telles que  $X = r \cos \theta$ ,  $Y = r \sin \theta$  à partir des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de toute particule de fluide, on constate que pour une valeur donnée du rapport de gap  $\delta$ , les trajectoires des particules de fluide sont définies par les équations cartésiennes paramétriques suivantes, et le paramètre  $\xi$  jouant le rôle de paramètre il vient :

$$X = \delta^{-1} \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \cos\left(\frac{\lambda_i \varphi(-1)}{\varphi(\xi)}\right), \quad (3.14a)$$

$$Y = \delta^{-1} \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \sin\left(\frac{\lambda_i \varphi(-1)}{\varphi(\xi)}\right). \quad (3.14b)$$

Pour le cas des lignes de courant partant du cylindre intérieur (C1).

$$X = \delta^{-1} \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \cos\left(\frac{\mu_j \varphi(1)}{\varphi(\xi)}\right), \quad (3.15a)$$

$$Y = \delta^{-1} \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \sin\left(\frac{\mu_j \varphi(1)}{\varphi(\xi)}\right). \quad (3.15b)$$

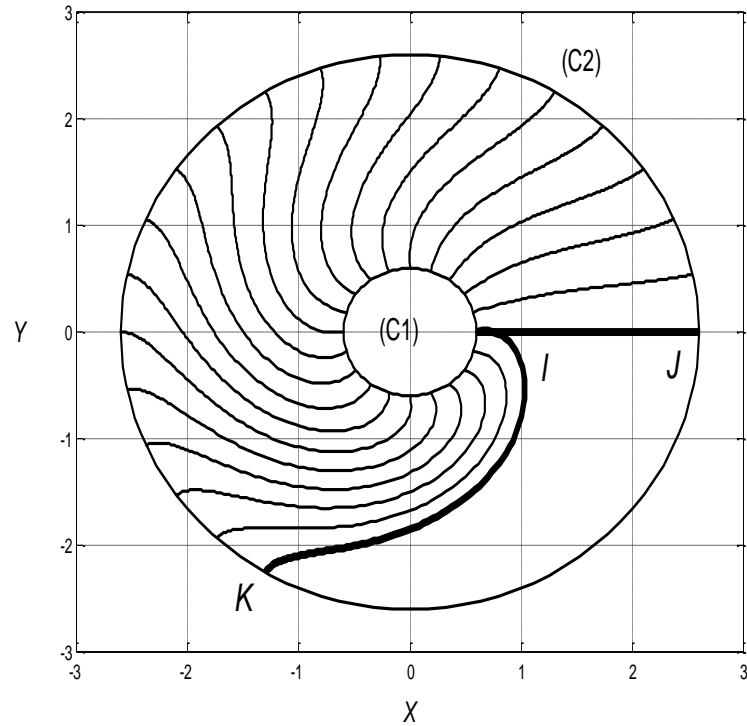
### III-2-2 Figures des lignes de courant

Les calculs démontrent que l'écoulement étudié continue d'exister pour les mêmes combinaisons  $(Q, \alpha)$  que celles découvertes dans la configuration précédente où les deux cylindres sont au repos, si le rapport de vitesse  $\beta$  est correctement sélectionné. Plus précisément, les lignes de courant acceptables sont obtenues pour  $\beta$  inférieur ou égal à la valeur critique  $(\beta_c)_1 = 0.1$  lorsque le cylindre intérieur est en amont, c'est-à-dire  $Q=1$  et  $\alpha > 1$ , comme le montre la figure 12a et 12b, tracées pour  $\beta = 0.05$  et  $\beta = 0.1$ , respectivement.

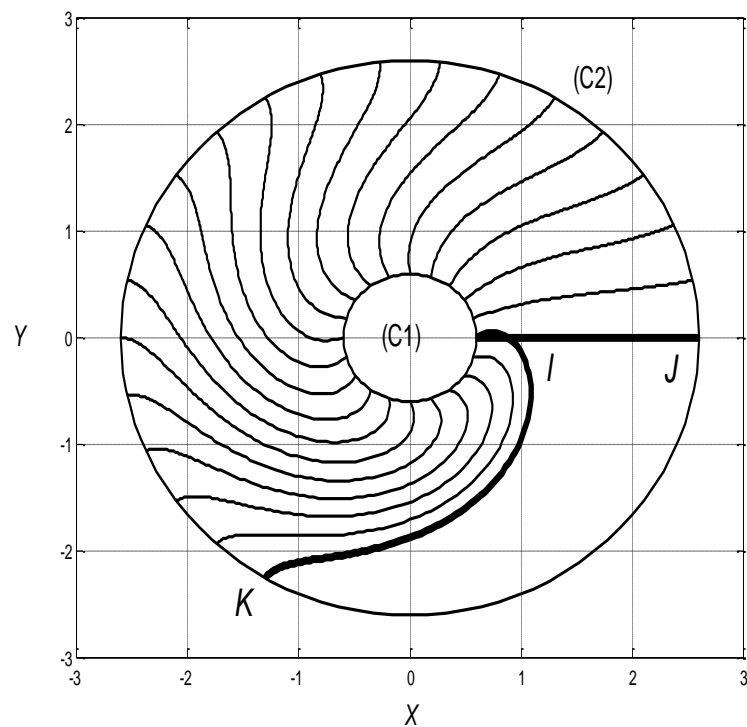
Dans les figures 12c et 12d représentées respectivement pour  $\beta = 0.02$  et  $\beta = 1.0$ , on peut observer que pour  $\beta > 0.1$ , les lignes de courant calculées s'intersectent et sont donc inacceptables.

À l'exception des valeurs de  $\beta$  inférieures ou égales à la valeur critique  $(\beta_c)_2 = 0.02$ , les lignes de courant calculées sont inacceptables pour les dispositions inversées où le cylindre extérieur est en amont et en rotation. Les lignes de courant acceptables sont montrées pour  $\beta = 0.01$  et  $\beta = 0.02$  dans les figures 13a et 13b. Les figures 13c et 13d exposent des lignes de courant inacceptables pour les deux valeurs  $\beta = 0.04$  et  $\beta = 0.08$  qui dépassent  $(\beta_c)_2$ . Nous observons que l'écoulement total entrant par injection du cylindre amont est évacué par aspiration à travers une partie de la surface du cylindre en aval. Dans toutes les figures illustrant les trajectoires des lignes de courant admissibles de l'écoulement laminaire stationnaire analysé, cet écoulement évacué laisse la zone restante de cette surface libre de toute aspiration de fluide. Les trajectoires des lignes de courant affichées sur ces figures révèlent ensuite deux zones distinctes d'écoulement de fluide : une zone interne où le fluide est au repos, et la zone restante où l'écoulement est présent et présente des lignes de courant régulières qui ne se croisent pas. Comme on le montre ces figures, ces deux zones sont séparées par la ligne  $IJK$ , qui relie les trois points caractéristiques  $I$ ,  $J$  et  $K$  est composée des deux lignes de courant singulières  $IJ$

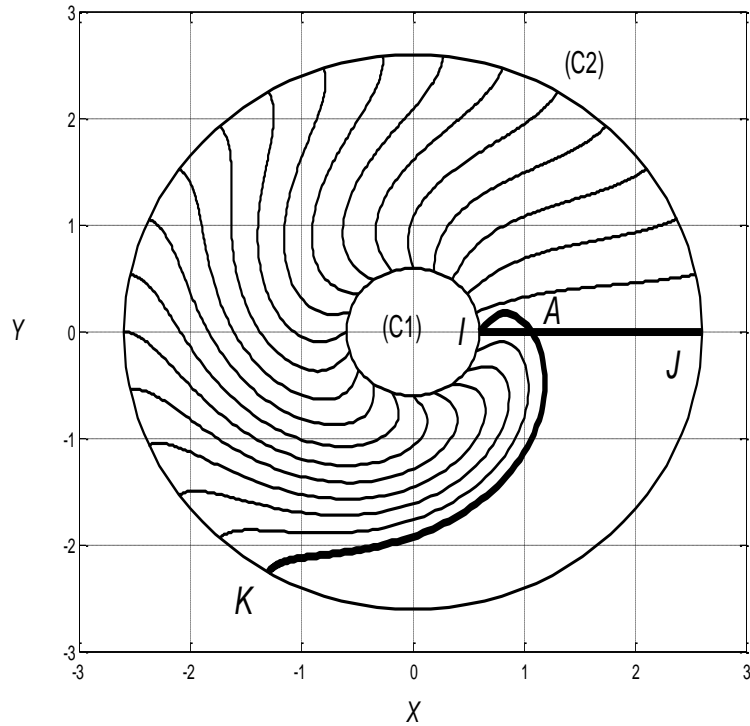
et  $IK$ . Le point  $I$  est un point singulier placé sur le cylindre amont, tandis que les points  $J$  et  $K$  sont sur le cylindre aval. Les calculs démontrent que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  restent fixes indépendamment des changements du rapport de vitesses  $\beta$ . En raison du principe de conservation de la masse, ces positions sont uniquement définies en fonction des valeurs du coefficient de vitesse  $\alpha$ , qui sont en relation avec la surface du cylindre aval à travers laquelle toute la masse de fluide entrante est aspirée (figures 12c, 13c et 13d). Pour les valeurs de  $\beta$  situées dans la proximité de la valeur critique  $\beta_c$ , nous observons, comme on peut le voir dans ces figures, que la ligne singulière  $IJK$  met en évidence un point critique supplémentaire ( $A$ ) dont l'existence annonce la proximité de l'inacceptabilité des lignes de courant, c'est-à-dire la présence de points d'intersection entre les lignes de courant. En examinant attentivement les trajectoires des lignes de courant acceptables (figures 12a, 12b et 13a, 13b), on observe que les lignes de courant sont presque orthogonales au cylindre amont et en rotation pour de très petites valeurs de la coordonnée angulaire  $\theta$ . En outre à mesure que  $\theta$  augmente, l'angle entre la normale au cylindre en amont et en rotation et les lignes de courant augmente en tout point de la surface de ce cylindre. Cela est conforme aux conditions aux limites énoncées dans les équations (2.1) et (2.2), qui prédisent que la composante orthoradiale du champ de vitesse est proportionnelle à  $\theta$  pour l'écoulement laminaire permanent en question. On comprend alors pourquoi, pour les petites valeurs de l'angle polaire, la vitesse orthoradiale est si faible que les lignes de courant sont observées comme presque orthogonales au cylindre en amont et en rotation. Il est également clair pourquoi l'angle entre les lignes de courant et la normale au cylindre en rotation augmente à mesure que l'angle polaire augmente. De plus, on constate que les lignes de courant approchant le cylindre en aval qui est immobile sont strictement orthogonales à celui-ci. Cela démontre que, pour les particules de fluide sont en contact avec la surface du cylindre immobile, la composante orthoradiale du champ de vitesse s'annule.



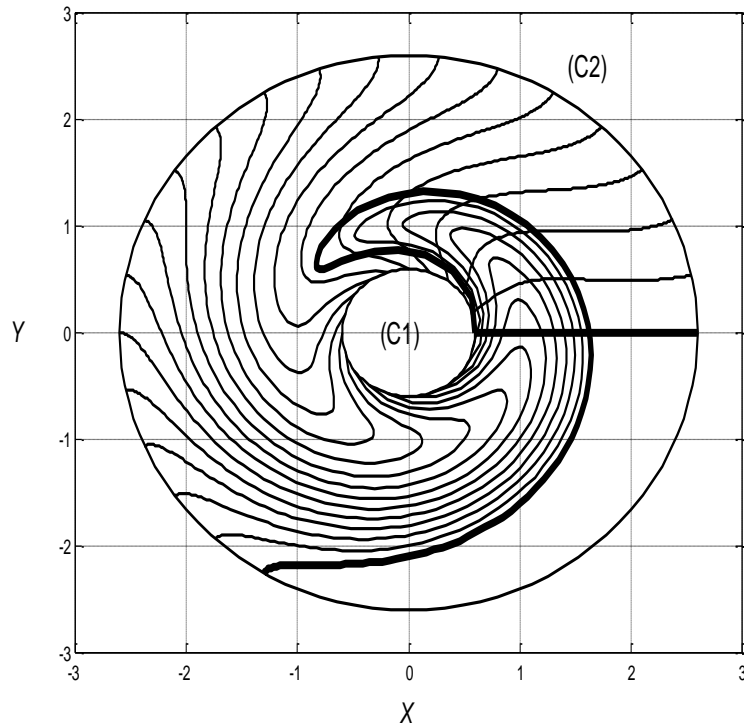
**Figure 12a :** Lignes de courant du cylindre intérieur (C1) amont en rotation et du cylindre extérieur (C2) au repos ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $\alpha = 1.5$ ) pour  $\beta = 0.05$ .



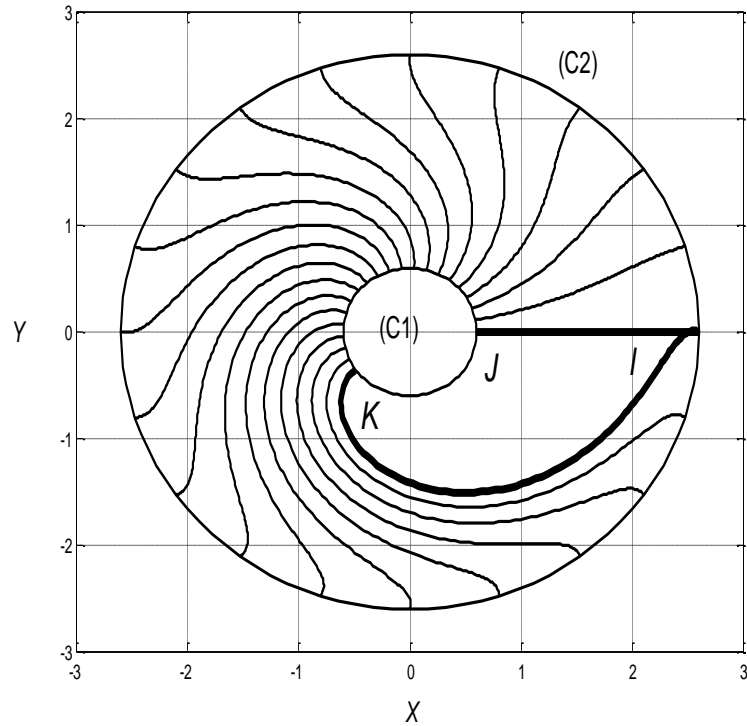
**Figure 12b :** Lignes de courant du cylindre intérieur(C1) amont en rotation et du cylindre extérieur(C2) au repos ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $\alpha = 1.5$ ) pour  $\beta = 0.1$



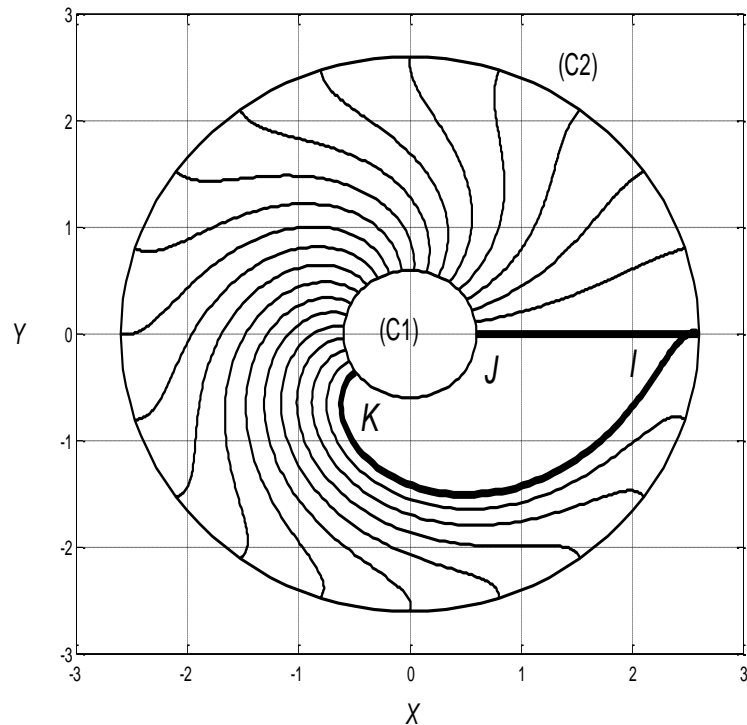
**Figure 12c :** Lignes de courant du cylindre intérieur(C1) amont en rotation et du cylindre extérieur(C2) au repos ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $\alpha = 1.5$ ) pour  $\beta = 0.2$ .



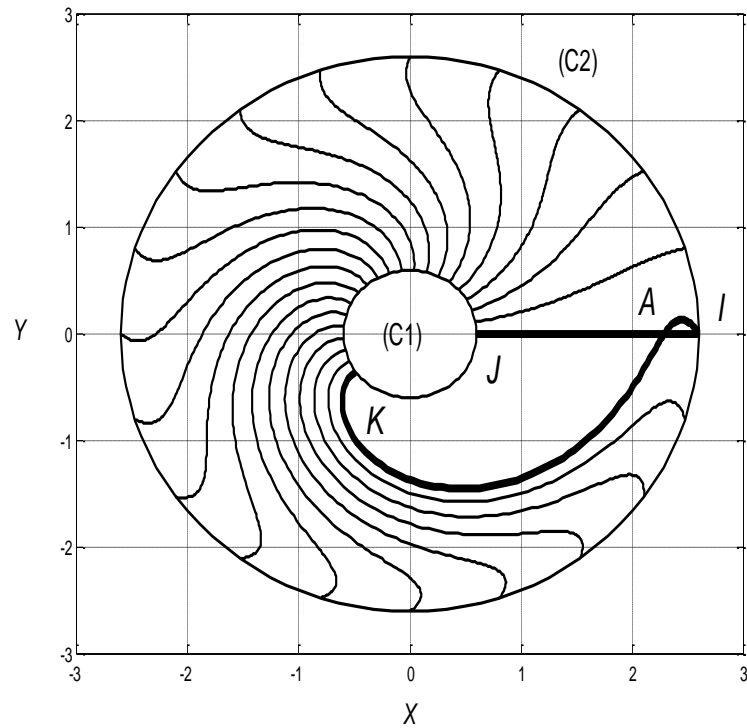
**Figure 12d :** Lignes de courant du cylindre intérieur(C1) amont en rotation et du cylindre extérieur (C2) au repos ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $\alpha = 1.5$ ) pour  $\beta = 1.0$ .



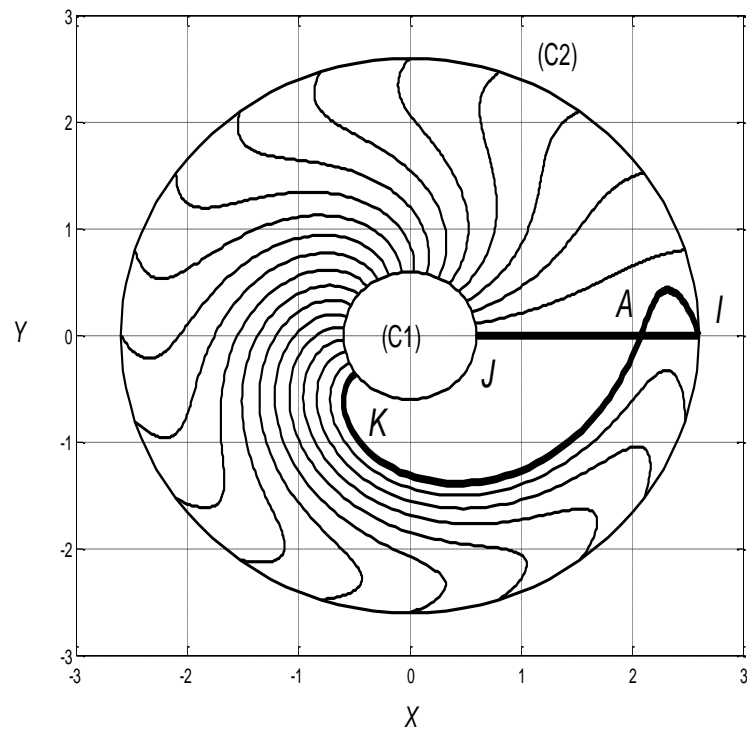
**Figure 13a** : Lignes de courant du cylindre extérieur(C2) amont en rotation et du cylindre intérieur (C1) au repos ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $Q = -1$ ,  $\alpha = 0.6$ ) pour  $\beta = 0.01$ .



**Figure 13b** : Lignes de courant du cylindre extérieur(C2) amont en rotation et du cylindre intérieur(C1) au repos ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $Q = -1$ ,  $\alpha = 0.6$ ) pour  $\beta = 0.02$



**Figure 13c :** Lignes de courant du cylindre extérieur (C2) amont en rotation et du cylindre intérieur (C1) au repos ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $Q = -1$ ,  $\alpha = 0.6$ ) pour  $\beta = 0.04$



**Figure 13d :** Lignes de courant du cylindre extérieur (C2) amont en rotation et du cylindre intérieur (C1) au repos ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $Q = -1$ ,  $\alpha = 0.6$ ) pour  $\beta = 0.08$ .

### III-2-3 Conditions d'existence de l'écoulement étudié

Nous retenons que, la seule configuration examinée est celle où le cylindre aval est au repos. Les lignes de courant sont vérifiées pour différentes valeurs des paramètres adimensionnels  $\delta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  qui gouvernent le problème tandis que le nombre de Reynolds est maintenu constant et égal à la valeur de  $Re = 2$ . Pour rendre le modèle de l'écoulement plus visible, nous présenterons la trajectoire des lignes de courant pour un rapport de gap  $\delta = 0.625$ . En prenant en considération trois configurations suivantes pour réaliser une étude organisée.

Premièrement, les deux cylindres sont initialement au repos. Deuxièmement, le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation tandis que le cylindre extérieur (C2) est en aval et au repos.

Troisièmement, le cylindre intérieur (C1) est en aval et au repos alors que le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation.

Pour obtenir les résultats clairs au cas où les lignes de courant partent du cylindre extérieur (C2), nous calculons 21 lignes pour des modèles distincts en utilisant les équations suivantes (3.14a), (3.14b) et (3.15a), (3.15b). Pour chaque modèle, cela donne les valeurs ( $\lambda_i$ ) et ( $\mu_i$ ), définies par les constantes ( $\lambda$ ) et ( $\mu$ ) données par :

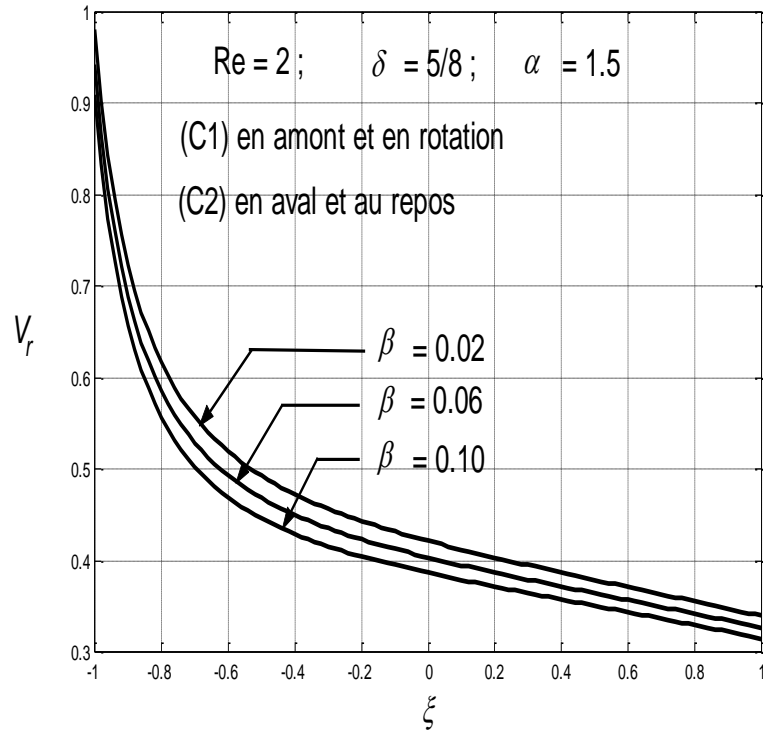
$$\lambda_i = i \frac{(2\pi)}{20}, \text{ avec } i = 0,1,\dots,20 \text{ et pour } Q = -1, \quad (3.16a)$$

$$\mu_j = j \frac{(2\pi)}{20}, \text{ avec } j = 0,1,\dots,20 \text{ et pour } Q = -1. \quad (3.16b)$$

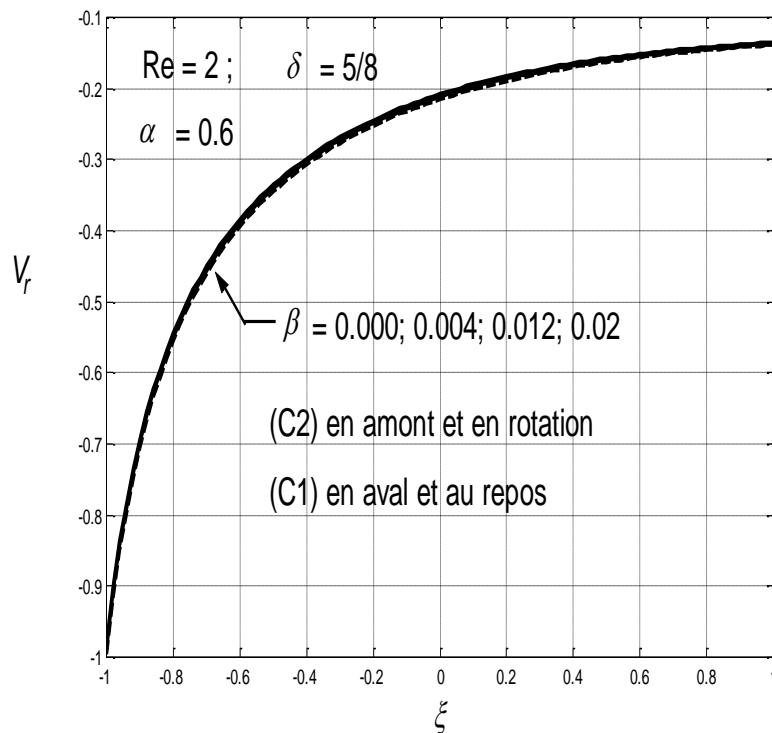
Puisqu'il est bien connu que les lignes de courant de tout écoulement laminaire permanent ne se croisent pas, nous utiliserons cette condition pour déterminer si l'écoulement laminaire étudié se produit ou non. Par conséquent, les lignes de courant calculées sont acceptables lorsqu'elles ne se croisent pas.

### III-3 Effets du rapport de vitesse $\beta$ sur la vitesse radiale

La solution acceptable est exploitée pour calculer la composante radiale du champ de vitesse dans la zone d'écoulement du fluide, les valeurs ainsi



**Figure 14a** : Profil de vitesses radiales pour les valeurs du rapport de vitesses autorisées ( $\beta$ ) lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ).



**Figure 14b** : Profil de vitesses radiales pour les valeurs du rapport de vitesse autorisées ( $\beta$ ) lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ).

obtenues sont représentées (figures 14a et 14b) en appliquant la relation suivante :

$$V_r(\xi) = \delta \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi}} \varphi(\xi). \quad (3.17)$$

Tout d'abord, en fonction des deux orientations possibles de l'écoulement étudié, ces figures confirment que les valeurs  $V_r$  sont positives pour  $Q = 1$  et négative pour  $Q = -1$ .

Deuxièmement, pour commencer, nous nous positionnons près du cylindre aval au repos, où la vitesse orthoradiale doit s'annuler conformément à l'exigence de la zone de stagnation. En raison de la conservation de la masse, la vitesse radiale commence alors avec sa valeur maximale à cet endroit, (figures 14a et 14b).

En s'éloignant du cylindre en aval, la vitesse orthoradiale augmente et la vitesse radiale diminue jusqu'à atteindre sa valeur minimale imposée par injection sur le cylindre en amont. Cela explique pourquoi les graphiques de la vitesse radiale montrent que les valeurs de cette composante de vitesse diminuent lorsque  $\xi$  augmente, pour une valeur donnée de  $\beta$ .

Nous devons maintenant étudier comment le rapport de vitesse affecte la composante de vitesse radiale. Ainsi, la prochaine étape est d'analyser les valeurs de  $V_r$  en fonction de  $\xi$ , pour différentes valeurs de  $\beta$  tandis que  $\delta$  et  $\alpha$  sont maintenus constants.

Commencer par considérer la configuration dans laquelle le cylindre intérieur (C1) est en amont et tourne tandis que le cylindre extérieur est en aval et au repos, soit

$Q = 1$ ,  $\alpha > 1$ ,  $a_1 = 1$  et  $a_2 = 0$ . À cet égard, la Figure 14a montre le profil de vitesse radiale calculé pour  $Q = 1$ ,  $\delta = 5/8$ ,  $\alpha = 1.5$ , et tracé pour trois valeurs de  $\beta$  qui ne dépassent pas la valeur critique  $(\beta_c)_1 = 0.1$ , c'est-à-dire les valeurs de  $\beta$  qui satisfont l'exigence nécessaire pour obtenir des lignes de courant acceptables, telles que décrites dans III.1.2. Lorsque le rapport de vitesse  $\beta$  augmente, avec la vitesse d'aspiration et d'injection demeurant inchangée, la

composante de vitesse orthoradiale augmente en valeur absolue en raison de la définition de  $\beta$ . Ainsi, en raison de la conservation de la masse, la composante de vitesse radiale diminue ensuite lorsque  $\beta$  augmente pour toute couche de fluide ( $\xi = cte$ ). Cela explique les effets des valeurs croissantes de  $\beta$  sur la composante de vitesse radiale de toute couche de fluide ( $\xi = cte$ ), comme on peut le voir dans la Figure 14a. Pour la configuration dans laquelle le cylindre interne (C1) est en aval et immobile tandis que le cylindre externe (C2) est en amont et en rotation, les valeurs de  $V_r$  sont calculées en fonction de  $\xi$ , pour différentes valeurs de  $\beta$  inférieures ou égales à la valeur critique  $(\beta_c)_2 = 0.02$ . Les graphiques ainsi obtenus sont présentés dans la Figure 14b pour trois valeurs de  $\beta$ ,  $\beta = 0.004$ ,  $\beta = 0.012$ , et  $\beta = 0.02$ . Nous notons que ces profils de vitesse calculés sont tous identiques, comme le montre la Figure 14b. De plus, ils sont presque égaux à celui obtenu pour la valeur  $\beta = 0.000$ , qui correspond à la configuration dans laquelle les deux cylindres sont immobiles. Par conséquent, suite à ce qui a été discuté précédemment, on peut déduire des Figures 14a et 14b que, dans le cas d'un cylindre en amont en rotation avec un cylindre en aval immobile, la seule solution viable de l'écoulement laminaire stable, qui diffère de la solution obtenue pour des cylindres immobiles, est celle pour laquelle le cylindre intérieur est en amont et le cylindre extérieur est en aval, à condition que le rapport de vitesse  $\beta$  soit inférieur à la valeur critique  $(\beta_c)_1 = 0.1$ .

### III-4 Effets du rapport de vitesse $\beta$ sur la vitesse orthoradiale

Les valeurs de la composante de vitesse orthoradiale par unité d'angle polaire

$V_\theta/\theta$  sont calculées en fonction de  $\xi$ , selon la formule suivante :

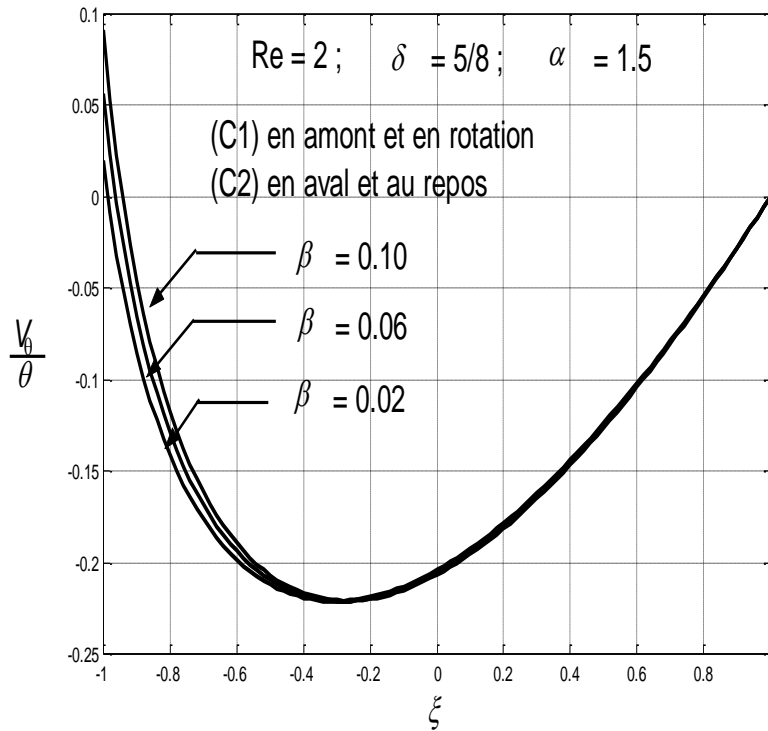
$$V_\theta = -\theta \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \varphi^{(1)}(\xi). \quad (3.18)$$

Les deux orientations de l'écoulement sont prises en compte : le cylindre intérieur est en amont et en rotation (figure 15a) tandis le cylindre extérieur est en amont et en rotation (figure 15b).

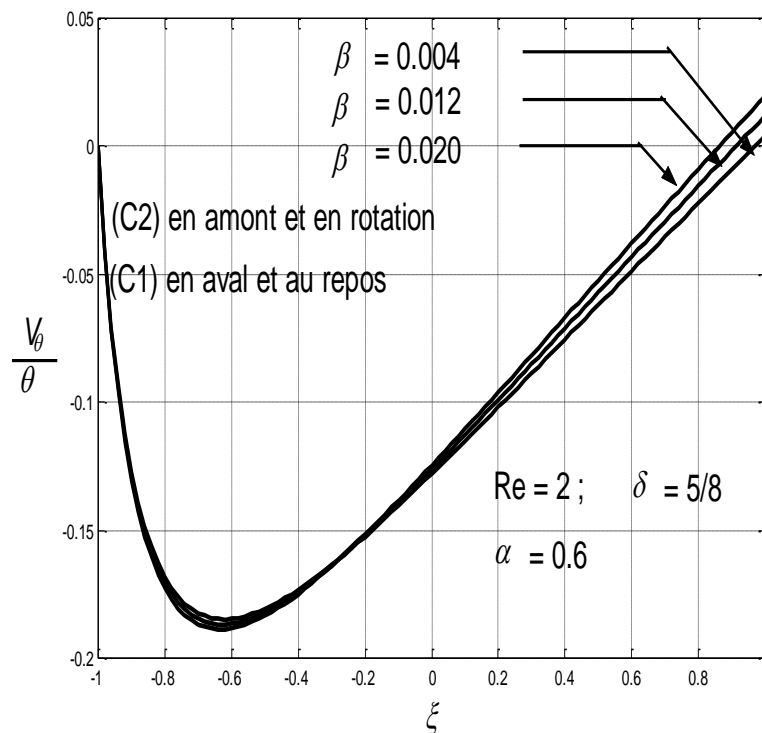
Ces Figures montrent que, pour le cas où le cylindre extérieur est au repos, ou pour l'autre cas où dans l'autre cas où cylindre extérieur est en rotation, la couche de fluide en contact avec le cylindre amont est en rotation avec la couche de fluide située à  $\xi = -0.6$  et à  $\xi = 0.2$  sont seulement minimalement différentes en termes de leurs valeurs de  $V_\theta / \theta$  alors que le rapport de vitesse  $\beta$  augmente.

Les valeurs de  $V_\theta / \theta$  pour les couches de fluide restantes dans les différentes configurations sont les mêmes qu'elles sont augmentées. Comme prévu par la configuration où il n'y a pas de glissement, les Figures 15a et 15b montrent que la vitesse orthoradiale atteint sa valeur maximale positive aux couches de fluide en contact avec le cylindre en rotation amont, et s'annule aux couches de fluide en contact avec le cylindre en aval immobile. La valeur de cette vitesse chute à un minimum négatif qui est situé plus près du cylindre intérieur que du cylindre extérieur minimum. De manière inattendue, la vitesse orthoradiale prend une valeur nulle qui est située entre les deux cylindres. Les couches de fluide pour lesquelles cela se produit sont situées à proximité du cylindre en rotation. Au-delà du minimum, la valeur absolue de la vitesse azimutale diminue lorsque l'on se rapproche du cylindre immobile.

D'un point de vue physique, le comportement susmentionné de la vitesse d'écoulement orthoradiale révélé par les Figures 15a et 15b est expliqué par les graphiques de la vitesse radiale montrés dans les Figures 14a et 14b, ainsi que par la conservation de la masse dans le fluide. De plus, ces données montrent que la vitesse oertoradiale calculée est presque identique à celle obtenue en résultat, lorsque les deux cylindres sont au repos, pour toute couche de fluide sauf dans les environs immédiats du cylindre en rotation.



**Figure 15a :** Profil de vitesses orthoradiales par unité d'angle polaire pour différentes valeurs de rapport de vitesse autorisées ( $\beta$ ) lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ).

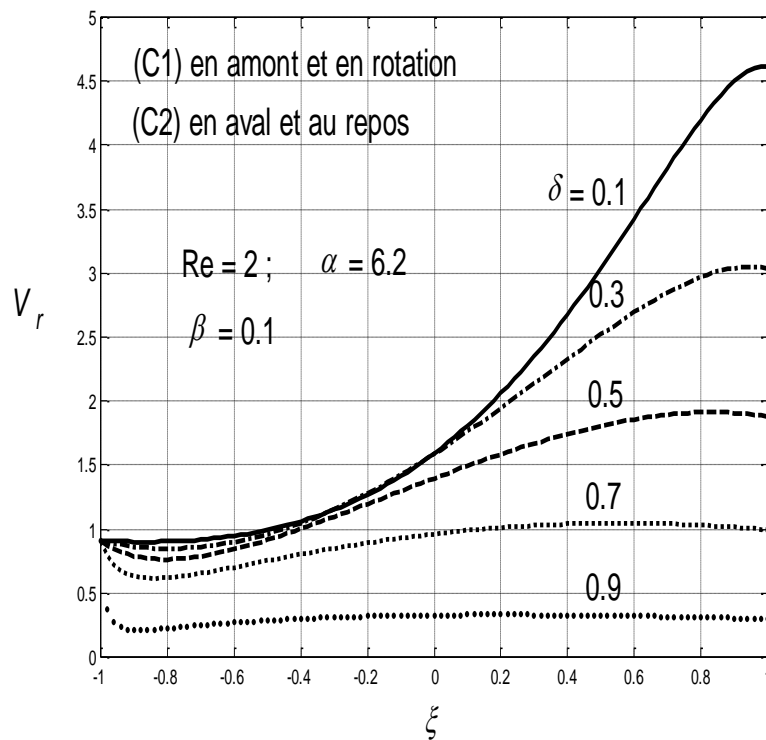


**Figure 15b :** Profil de vitesses orthoradiales par unité d'angle polaire pour différentes valeurs de rapport de vitesse autorisée ( $\beta$ ) lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ).

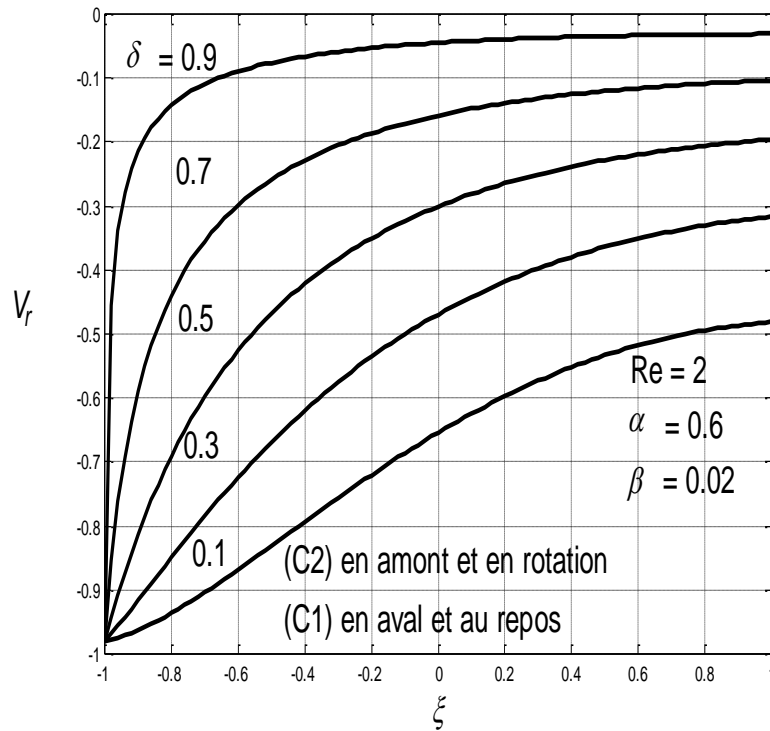
### III-5 Effets du rapport de gap $\delta$ sur la vitesse radiale

En prenant différentes valeurs de rapport de gap, tout en gardant les rapports  $\alpha$  et  $\beta$  constants, la vitesse radiale de l'écoulement étant une fonction de  $\xi$  est calculée.

Les valeurs ainsi obtenues sont tracées dans la Figure 16a pour le cylindre intérieur (C1) amont et en rotation, et sur la Figure 16b pour le cylindre extérieur (C2) en amont et en rotation. Pour une valeur du rapport de gap donnée, la vitesse radiale  $V_r$  de l'écoulement est faible pour toute couche de fluide situées près du cylindre en amont et en rotation, (figures 16a et 16b). Cela s'explique par la conservation de la masse et est dû aux valeurs plus élevées subies par la composante de vitesse orthoradiale  $V_\theta$  à proximité de ce cylindre. Ces valeurs de la vitesse orthoradiale  $V_\theta$  restent élevées en raison de la rotation de ce cylindre. En approchant du cylindre en aval et au repos, la vitesse orthoradiale diminue, et par conséquent, la valeur absolue de la vitesse radiale augmente.



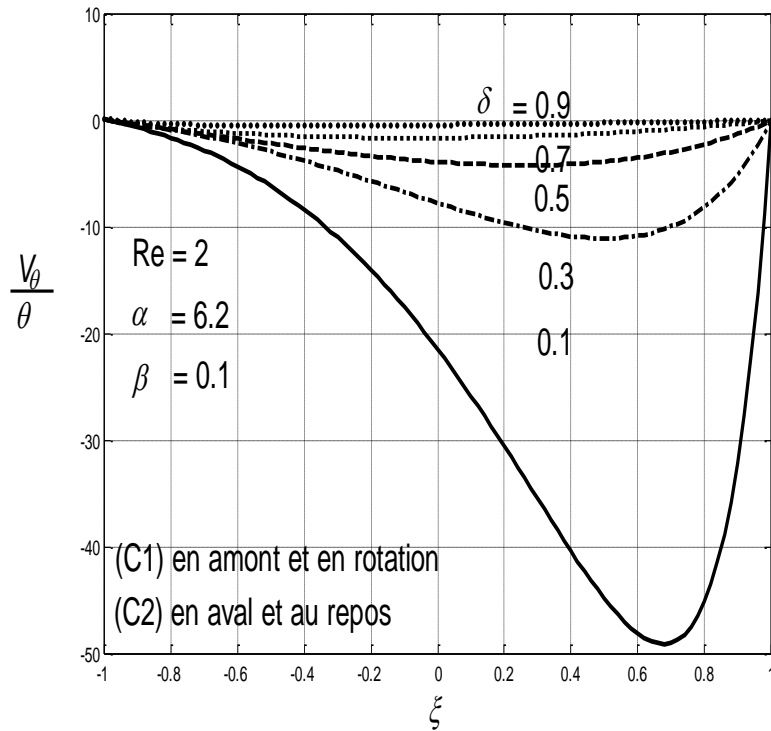
**Figure 16a :** Profil de vitesses radiales pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) tracé dans le cas où le cylindre (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 6.2$ ).



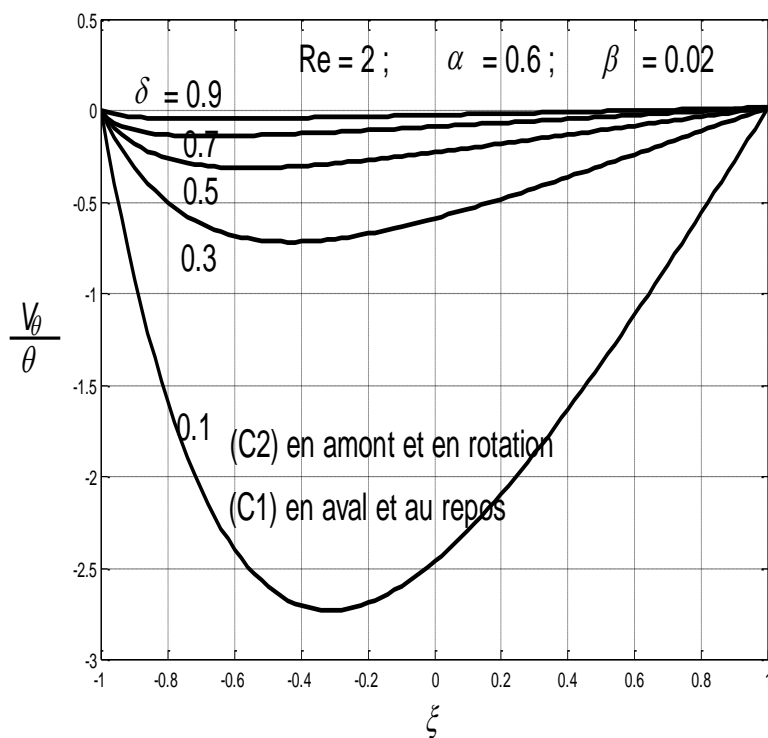
**Figure 16b** : Profil de vitesses radiales pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) tracé dans le cas où le cylindre (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $Q = -1$ ,  $\alpha = 0.6$ ).

### III-6 Effets du rapport de gap $\delta$ sur la vitesse orthoradiale

Les valeurs de la vitesse orthoradiale  $V_\theta/\theta$  par unité d'angle polaire sont présentées comme une fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs du rapport de gap  $\delta$  (Figures 17a et 17b), tandis que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont maintenus constants et fixés aux niveaux appropriés qui produisent des configurations acceptables. Les profils de vitesse orthoradiale que nous avons obtenus présentent un comportement pour une valeur de rapport de gap  $\delta$  donnée, qui ressemble à celle des profils vus et discutés. Les Figures 16a et 17a, contrairement aux Figures 16b et 17b, montrent un point d'inflexion que l'on trouve dans les profils des composantes radiale et orthoradiale de la vitesse de l'écoulement. Nous pouvons par conséquent conclure que la configuration de l'écoulement par laquelle le cylindre extérieur est en amont et en rotation est plus stable que l'opposée configuration dans laquelle le cylindre intérieur est en amont et en rotation, sur la base du critère du point d'inflexion de Rayleigh.



**Figure 17a :** Profil de vitesses orthoradiales pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) tracé dans le cas où le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $\alpha = 6.2$ ).



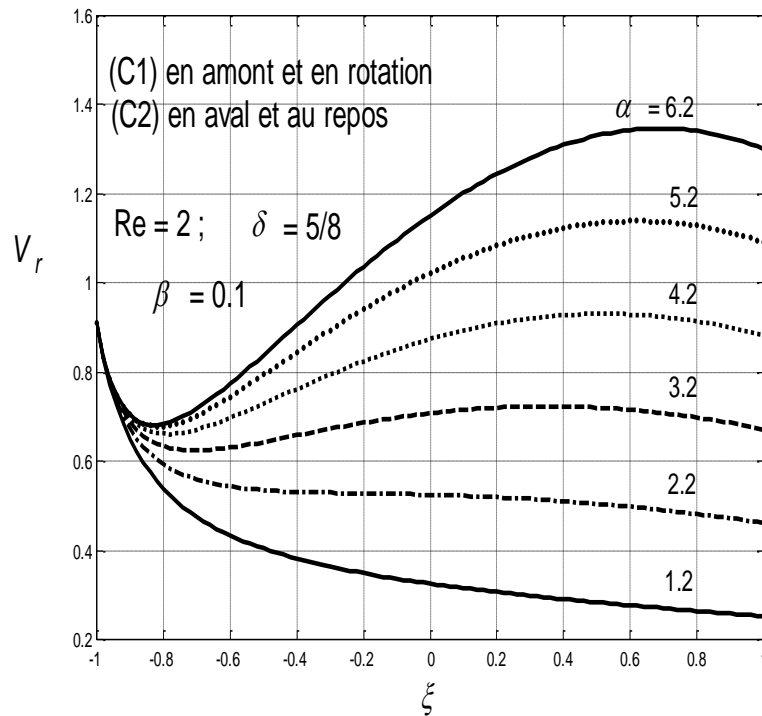
**Figure 17b :** Profil de vitesses orthoradiales pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) tracé dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $Q = -1$ ,  $\alpha = 0.6$ ).

Ce critère est reconnu pour être valable pour les écoulements parallèles non visqueux et nous souhaitons pouvoir l'étendre à l'écoulement examiné. Alors que le rapport de gap augmente à partir de sa valeur minimale proche de zéro, la largeur de l'entrefer augmente tandis que le rayon du cylindre intérieur est maintenu constant à travers l'expression (2.29), qui spécifie le rapport de gap. Comme les conditions aux limites restent constantes en même temps, les particules de fluide avec la vitesse la plus faible augmentent alors en nombre et en masse dans l'écoulement, entraînant la diminution de l'élan du fluide. C'est pourquoi les valeurs absolues des composantes radiales et orthoradiale de la vitesse de l'écoulement diminuent avec les valeurs croissantes du rapport de gap (figures 16a, 16b, 17a et 17b). Nous comprenons également pourquoi, lorsque le rapport de gap est proche de sa valeur maximale égale à 1, la largeur de l'entrefer des cylindres se rapproche asymptotiquement à l'infini, et les valeurs absolues des composantes du champ de vitesse diminuent alors considérablement et sont presque égales à zéro.

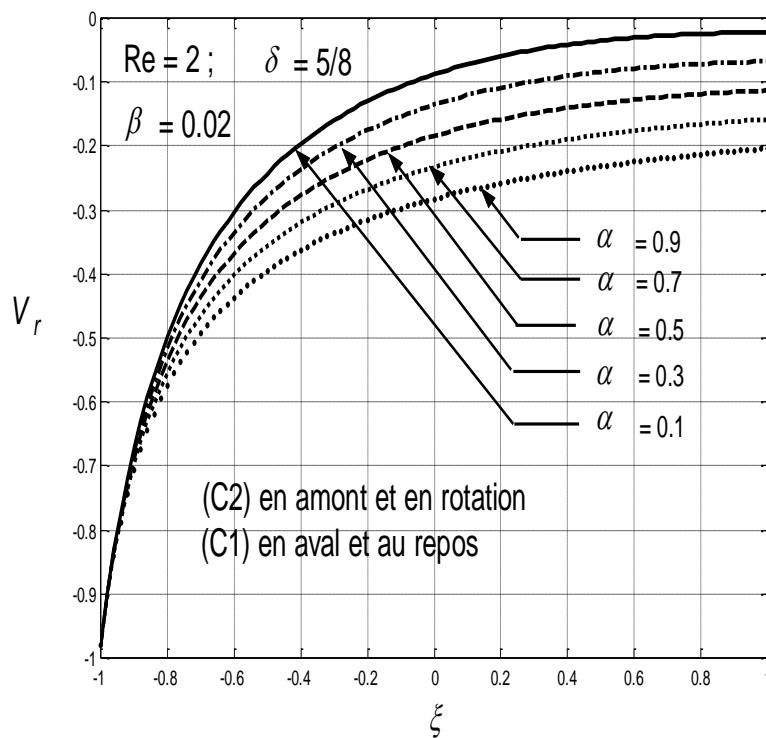
### **III-7 Effets du coefficient de vitesse $\alpha$ sur la vitesse radiale**

La recherche des impacts du coefficient de vitesses  $\alpha$ , sur le champ de vitesse de l'écoulement situé dans le plan polaire d'une conduite annulaire poreuse lorsque les deux cylindres sont au repos, a été entièrement menée dans nos travaux précédents [15] pour les deux directions de l'écoulement.

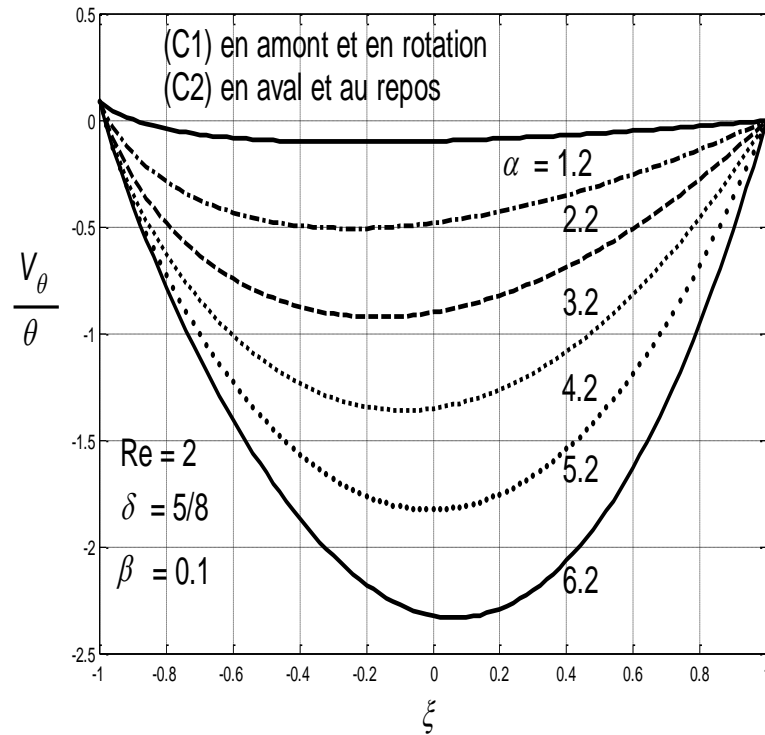
Bien que le cylindre en aval soit au repos et le cylindre en amont en rotation, le comportement en fonction de  $\xi$ , qui est déjà observé et discuté dans la référence [15], est confirmé pour les composantes radiale et orthoradiale des composantes du champ de vitesse et pour les deux directions de l'écoulement (figures 18a et 18d).



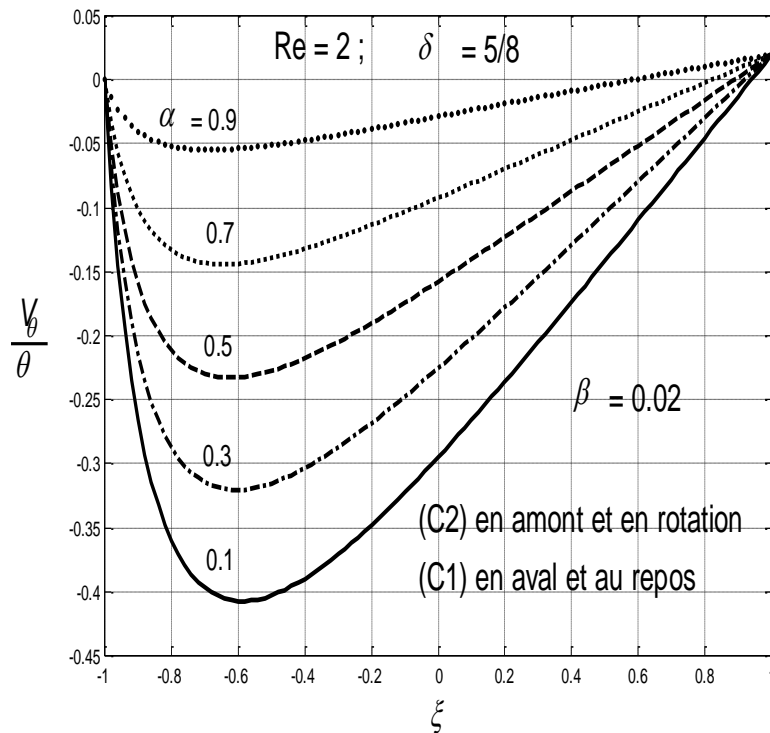
**Figure 18a :** Profil de vitesses radiales pour différentes valeurs du coefficient de vitesse  $\alpha$  dans le cas où le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ).



**Figure 18b :** Profil de vitesses radiales pour différentes valeurs du coefficient de vitesse  $\alpha$  dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $Q = -1$ ,  $\beta = 0.02$ ).



**Figure 18c :** Profil de vitesses orthoradiales par unité d'angle polaire pour différentes valeurs de  $\alpha$  dans le cas où le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $Q = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ).



**Figure 18d :** Profil de vitesses orthoradiales par unité d'angle polaire pour différentes valeurs de  $\alpha$  dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation ( $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $Q = -1$ ,  $\beta = 0.02$ ).

### III-8. Résultats sur la pression dans le fluide

#### III-8-1 Formules numériques trouvées pour les gradients de pression

Les gradients de pression radiale et orthoradiale adimensionnels en termes de  $r$  et  $\theta$  nécessitent de prendre les équations (2.49a), (2.49b) de quantité de mouvement sans dimension en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  le long de ces directions. Or avec l'expression (2.65b) obtenue, et en l'insérant dans les deux expressions de vitesses  $V_r$  et  $V_\theta$ , il vient :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r^{-1} \varphi, \quad (3.19a)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = r^{-1} \varphi^{(1)}. \quad (3.19b)$$

En remplaçant les expressions (2.19a), (2.19b) dans (2.49a), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{r} \left( \frac{\varphi}{r} \right)^{(1)} + (-\theta \varphi^{(1)}) \frac{1}{r} (0) - \frac{1}{r} \theta^2 (\varphi^{(1)})^2 = \\ -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{r} \left( \varphi^{(1)} - \frac{\varphi}{r} \right)^{(1)} + 0 - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\varphi}{r} \right) - \frac{2}{r^2} (-\varphi^{(1)}) \right), \end{aligned} \quad (3.20a)$$

en simplifiant l'équation (3.20a), nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \varphi \varphi^{(1)} + \frac{1}{r^3} \varphi^2 + \theta^2 (\varphi^{(1)})^2 + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{r} \varphi^{(2)} + \frac{1}{r^2} \varphi^{(1)} \right). \quad (3.20b)$$

Procédons de la même manière (3.19a), (3.19b) dans l'équation (2.49b) :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{r} (-\theta \varphi^{(2)}) + (-\theta \varphi^{(1)}) \frac{1}{r} (-\varphi^{(1)}) + \frac{1}{r} \left( \frac{\varphi}{r} \right) (-\theta \varphi^{(1)}) = \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left( -\theta \varphi^{(3)} - \frac{\theta \varphi^{(2)}}{r} + \frac{\theta \varphi^{(1)}}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (3.21a)$$

de la même manière en simplifiant (3.21a) il vient :

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \theta \left( \varphi \varphi^{(2)} - (\varphi^{(1)})^2 + \frac{1}{r} \varphi \varphi^{(1)} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \theta \left( \frac{1}{r} \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} - r \varphi^{(3)} \right). \quad (3.21b)$$

Ensuite, déduisons l'équation vérifiée par  $\varphi$  à partir des expressions (3.20a) et (3.21b), en utilisant les dérivées partielles pour chaque cas par rapport à  $r$  et  $\theta$ . Il vient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta \partial r} = 2\theta \frac{1}{r} (\varphi^{(1)})^2, \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} = & \theta \left( \varphi \varphi^{(3)} - \varphi^{(1)} \varphi^{(2)} + \frac{1}{r} \varphi \varphi^{(2)} + \frac{1}{r} (\varphi^{(1)})^2 - \frac{1}{r^2} \varphi \varphi^{(1)} \right) \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \theta \left( -\frac{1}{r^2} \varphi^{(1)} + \frac{1}{r} \varphi^{(2)} - 2\varphi^{(3)} - r\varphi^{(4)} \right), \end{aligned} \quad (3.22b)$$

en comparant (3.22a), (3.22b) pour confirmer et s'assurer que les calculs sont justes: posons,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta}, \quad (3.23a)$$

en remplaçant (3.22a), (3.22b) dans (3.23a) et en simplifiant par  $\theta$  nous avons:

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{r} (\varphi^{(1)})^2 = & \left( \varphi \varphi^{(3)} - \varphi^{(1)} \varphi^{(2)} + \frac{1}{r} \varphi \varphi^{(2)} + \frac{1}{r} (\varphi^{(1)})^2 - \frac{1}{r^2} \varphi \varphi^{(1)} \right) \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left( -\frac{1}{r^2} \varphi^{(1)} + \frac{1}{r} \varphi^{(2)} - 2\varphi^{(3)} - r\varphi^{(4)} \right), \end{aligned} \quad (3.23b)$$

nous retrouvons l'équation de vorticité vérifiée en termes de  $\varphi$  et  $r$  donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (\varphi^{(1)})^2 - \varphi \varphi^{(3)} + \varphi^{(1)} \varphi^{(2)} - \frac{1}{r} \varphi \varphi^{(2)} \\ + \frac{1}{r} \varphi \varphi^{(1)} + \frac{1}{\text{Re}} \left( -\frac{1}{r^2} \varphi^{(2)} - 2\varphi^{(3)} - r\varphi^{(4)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.23c)$$

Nous retenons uniquement les relations (3.20b), (3.21b) donnant aux gradients de pression radiale et orthoradiale. Avec  $r = \delta^{-1} (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{1/2}$ , en l'insérant dans l'équation (3.20b) tout en simplifiant il vient :

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \theta^2 \delta (\varphi^{(1)})^2 - \delta^2 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-1} \varphi \varphi^{(1)} + \delta^2 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-2} \varphi^2 + \text{Re}^{-1} (2\delta^2 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(1)} + \delta \varphi^{(2)}) \quad (3.24a)$$

compte tenu des changements de variables cités dans l'équation (3.24a), l'équation (3.21b) on a :

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 2\theta \delta \varphi \varphi^{(1)} + \theta (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) (\varphi \varphi^{(2)} - (\varphi^{(1)})^2) + \text{Re}^{-1} (-4\theta (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(2)} - \theta \delta^{-1} (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2 \varphi^{(3)}) \quad (3.24b)$$

de même, la relation (3.23a) vérifie l'équation de vorticité (3.23c) en termes de  $\varphi$  et  $\xi$  et donnée par :

$$\delta (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) (\varphi \varphi^{(3)} - \varphi^{(1)} \varphi^{(2)}) + 2\delta^2 (2\varphi \varphi^{(2)} - (\varphi^{(1)})^2) = + \text{Re}^{-1} (8\delta^2 \varphi^{(2)} + 8\delta (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(3)} + (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(4)}) \quad (3.24c)$$

Ainsi les expressions  $\partial P/\partial \xi$  et  $\partial P/\partial \theta$  montrent qu'il existe un gradient de pression interne dans l'écoulement.

La répartition sans dimension de la pression dans le fluide est obtenue par l'intégration de (3.24b), d'où :

$$P(\xi, \theta) = \frac{\theta^2}{2} (2\delta \varphi \varphi^{(1)} + (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) (\varphi \varphi^{(2)} - (\varphi^{(1)})^2)) + \text{Re}^{-1} \left( \frac{\theta^2}{2} (-4(1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(2)} - \delta^{-1} (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2 \varphi^{(3)}) + f(\xi) \right) \quad (3.25a)$$

posons :

$$G(\xi) = 2\delta \varphi \varphi^{(1)} + (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) (\varphi \varphi^{(2)} - (\varphi^{(1)})^2) + \text{Re}^{-1} (-4(1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(2)} - \delta^{-1} (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2 \varphi^{(3)}) \quad (3.25b)$$

l'expression (3.25a) devient :

$$P(\xi, \theta) = \frac{\theta^2}{2} G(\xi) + F(\xi), \quad (3.25c)$$

en dérivant cette expression (3.23a), (3.24b) par  $\xi$  et  $\theta$  il vient :

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\theta^2}{2} \frac{dG}{d\xi} + \frac{dF}{d\xi}, \quad (3.25d)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \theta G(\xi), \quad (3.25e)$$

en égalant la relation (3.25d) avec (3.24a), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\theta^2}{2} \frac{dG}{d\xi} + \frac{dA}{d\xi} &= \theta^2 \delta (\varphi^{(1)}) - \delta^2 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-1} \varphi \varphi^{(1)} \\ &+ \delta^3 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-2} \varphi^2 + \text{Re}^{-1} (2\delta^2 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(1)} + \delta \varphi^{(2)}) \end{aligned}, \quad (3.25f)$$

Posons :

$$\begin{aligned} H(\xi) &= -\delta^2 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-1} \varphi \varphi^{(1)} + \delta^3 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-2} \varphi^2 \\ &+ \text{Re}^{-1} (2\delta^2 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(1)} + \delta \varphi^{(2)}) \end{aligned}. \quad (3.25g)$$

L'équation (3.25f) devient :

$$\frac{\theta^2 dG}{2d\xi} + \frac{dA}{d\xi} = \theta^2 \delta (\varphi^{(1)})^2 + H(\xi). \quad (3.26)$$

En simplifiant (3.26), nous avons les expressions suivantes :

$$\frac{dF}{d\xi} = H(\xi), \quad (3.27a)$$

$$2\delta (\varphi^{(1)})^2 = \frac{dG}{d\xi}. \quad (3.27b)$$

Compte tenu des conditions de  $-1 \leq \xi \leq +1$ , l'équation (3.27a) devient :

$$F(\xi) = \int_{-1}^{\xi} H(\xi) d\xi + P_0, \quad (3.27c)$$

en insérant la relation (3.27c) dans l'équation (3.25c), on obtient

$$P(\xi, \theta) = \frac{\theta^2}{2} G(\xi) + \int_{-1}^{\xi} H(\xi) d\xi + P_0, \quad (3.28a)$$

avec,

$$P_0 = P(\xi = -1, \theta = 0). \quad (3.28b)$$

Pour évaluer numériquement les gradients de pression et la répartition de la pression dans l'écoulement à l'aide des relations (3.24a) et (3.24b), nous utiliserons l'ensemble  $(\xi_j)$  des valeurs discrétisées qui étaient précédemment utilisées dans l'algorithme de Runge-Kutta et nous devons introduire l'ensemble  $(\theta_k)$  des valeurs discrétisées nécessaires pour l'angle polaire. La forme numérique de (3.28a) donne alors les valeurs numériques suivantes au point  $(\xi_j, \theta_k)$  pour l'excès de pression dans l'écoulement sont :

$$P_{jK} = P(\xi_j, \theta_K) - P_0 = \frac{\theta_K^2}{2} G_j + F_j, \quad (3.29a)$$

avec :

$$G_j = G(\xi_j) \text{ et } F_j = F(\xi_j) = \int_{-1}^{\xi_j} H(\xi) d\xi. \quad (3.29b)$$

Pour réduire la durée du calcul des valeurs  $F_j$  dans (3.29a), nous procédons par la méthode des différences finies basée sur la relation (3.27a). Utilisons l'itération suivante :

$$\frac{F_{j+1} - F_j}{\Delta \xi_j} = H(\xi_j), \text{ pour } j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.30a)$$

soit ;

$$F_{j+1} = F_j + \Delta \xi_j H(\xi_j), \quad (3.30b)$$

avec ;

$$F_0 = F(\xi = -1) = 0. \quad (3.30c)$$

### III-8-2 Gradient de pression radiale le long des cercles concentriques

La composante radiale du vecteur de gradient de pression est calculée pour les deux orientations de l'écoulement laminaire du fluide,  $(Q = 1, \alpha > 1, \beta \leq 0.1)$  et  $(Q = -1, 0 < \alpha < 1, \beta \leq 0.2)$  en utilisant les relations que nous avons trouvées dans l'équation (3.24a).

La possibilité à déterminer le comportement de la composante radiale du vecteur de gradient de pression (Figures 19a et 19d) le long de toute la paroi circulaire

centrée sur l'axe  $z$ , en gardant le paramètre  $\xi$  constant et en variant continuellement l'angle polaire entre les valeurs de 0 et  $2\pi$ .

De la même manière, en maintenant l'angle polaire constant et en augmentant continuellement le paramètre  $\xi$  entre les valeurs -1 et 1, on se donne les moyens de déterminer le comportement du gradient de pression radiale le long de l'écoulement radiale considérée.

La relation entre l'angle polaire et le gradient de pression radiale (Figures 19a et 19b) le long de paroi circulaire et coaxiale ( $\xi = cte$ ) centrées sur l'axe commun des cylindres pour les deux configurations d'écoulement.

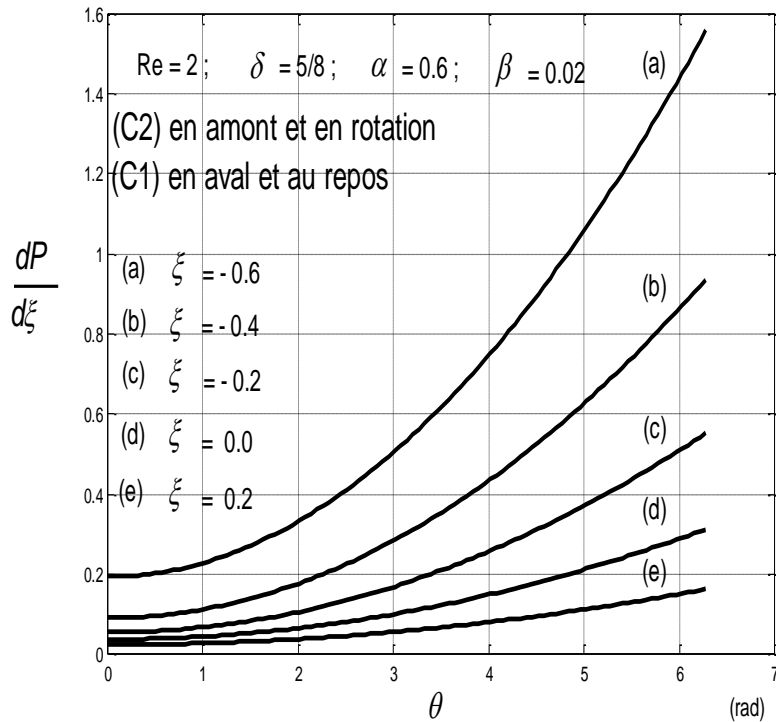
Les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien, tel que celui dont le mouvement est étudié dans le présent travail, démontrent qu'en l'absence des forces corporelles comme dans l'écoulement considéré, le gradient de pression qui agit par une unité de volume d'un fluide visqueux peut être considéré comme une action dynamique, qui résulte de la superposition des forces de viscosité et des forces d'inertie opposées.

À la lumière de cela, le signe du gradient de pression, que nous pouvons déduire directement est un élément d'information capitale qui est utilisé pour construire des compréhensions de l'écoulement qui sont basées sur la comparaison entre les forces d'inertie et de viscosité (Figures 19a et 20d).

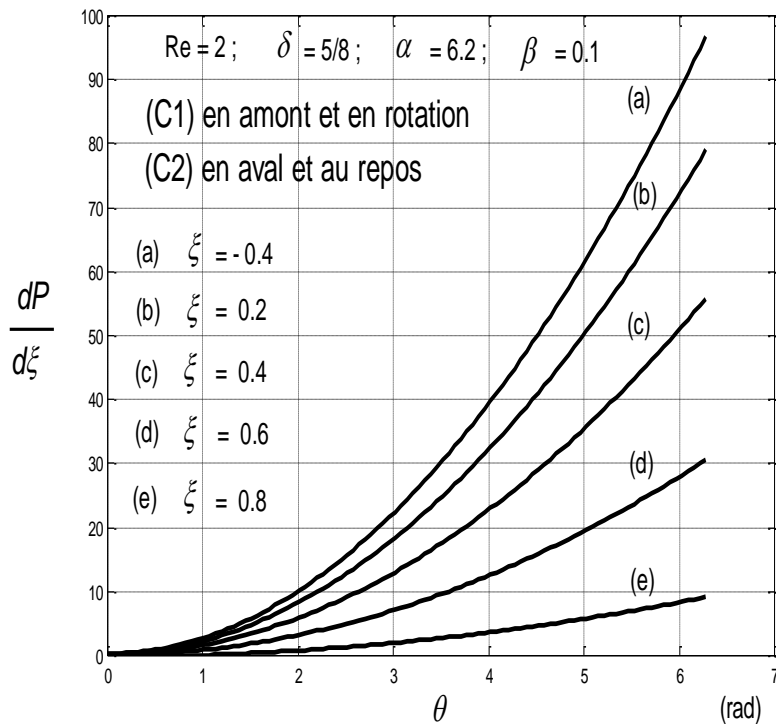
En conséquence, nous remarquons que, dans les deux configurations de l'écoulement, le gradient de pression radiale reste positif (Figures 19a et 19d) Cela conduit à la conclusion que la contribution radiale des forces de viscosité exercées sur l'écoulement est plus grande que celle des forces d'inertie.

Pour en savoir plus sur les composantes radiales de l'inertie et des forces de viscosité, commençons par les conclusions présentées (Figures 19a et 19b). Considérons une paroi qui est circulaire et coaxiale aux deux cylindres.

Le paramètre  $\xi$  reste constant le long de cette couche fluide à mesure que l'angle polaire augmente et la valeur absolue de la contrainte du taux de



**Figure 19a** : Gradient de pressions radiales en fonction de l'angle polaire le long des couches de fluide circulaire concentré  $z$ -axe lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation.



**Figure 19b** : Gradient de pressions radiales en fonction de l'angle polaire le long des couches de fluide circulaire concentré  $z$ -axe lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation.

cisaillement  $\tau_{r\theta} = -\nu\rho\theta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)\rho^{(2)}(\xi)$  augmente, intensifiant les forces de viscosité.

En outre, à mesure que l'angle polaire augmente, les particules de fluide sur la couche circulaire de fluide sont accélérées orthogonalement, augmentant les forces d'inertie.

Nous concluons que l'augmentation des forces de viscosité radiales dépasse celle des forces d'inertie et radiale lorsqu'on se déplace le long de la couche circulaire susmentionnée, car la composante radiale du gradient de pression à une distance radiale fixe augmente avec l'angle polaire (Figures 19a et 19d).

Le gradient de pression illustre la différence entre les deux forces significatives : fort si le cylindre (C1) est en aval et au repos, et faible si le cylindre (C1) est en amont et en rotation, lorsque cette paroi circulaire est proche du cylindre intérieur (C1) (Figures 19c et 19d).

### III-8-3 Gradient de pression radiale le long des rayons

La couche circulaire considérée est positionnée près du cylindre extérieur (C2) (Figures 19c et 19d). Le gradient de pression radial est essentiellement négligeable et les contributions radiales des deux forces (inertie et viscosité) sont approximativement égales en ordre de grandeurs que le cylindre extérieur soit amont en rotation ou aval au repos.

Ainsi, le gradient de pression s'annule près de la valeur  $\xi = 1$  pour n'importe quelle valeur de l'angle polaire (Figure 19c). Pour les Figures 19a et 19d, explorons une paroi radiale le long de laquelle on avance en maintenant un angle polaire constant tout en suivant des valeurs croissantes de  $\xi$ , du cylindre intérieur (C1) au cylindre extérieur (C2).

La première configuration dans laquelle le cylindre intérieur est en aval et en repos, en raison de la présence d'une couche de fluide à proximité de ce cylindre, les forces de viscosité sont croissantes, et les forces d'inertie sont décroissantes à cause de la faible convection des gradients de pression

provoquée par l'état du reste du cylindre en aval ainsi que les conditions aux limites.

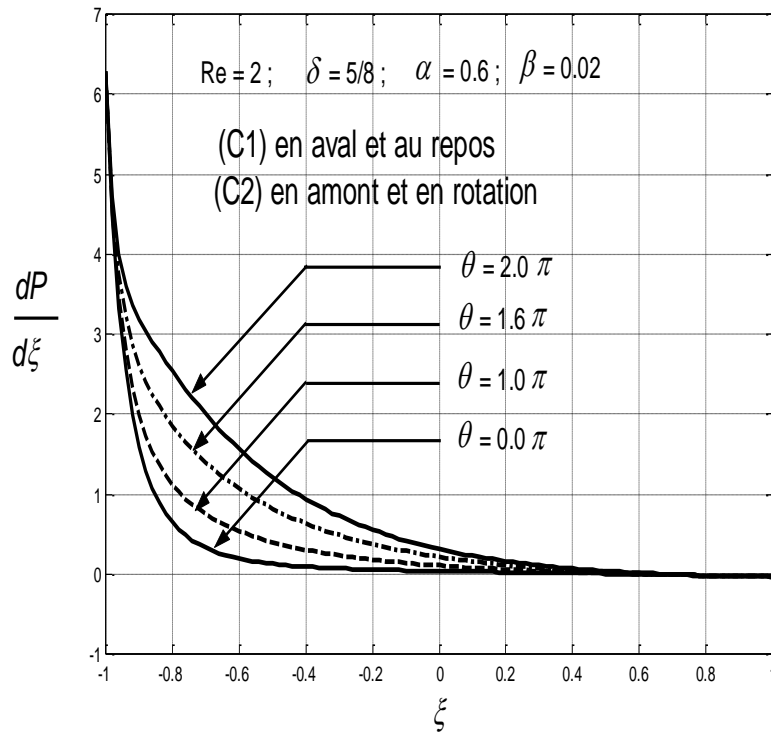
En raison de ce qui a déjà été discuté, les forces de viscosité sont plus grandes que les forces d'inertie lorsqu'on est proche du cylindre intérieur en aval, et cela provoque un gradient de pression positif en raison de la différence de l'ordre de grandeur entre les deux forces. Les forces de viscosité diminuent alors que les forces d'inertie augmentent au fur et à mesure que l'on s'approche de la zone de stagnation, en s'éloignant du cylindre intérieur en aval ou en se dirigeant vers celui en amont. Pour des valeurs plus élevées de  $\xi$ , cela conduit à une diminution progressive du gradient de pression positif (Figure 19c), pour toutes les valeurs de l'angle polaire. Lorsque l'on s'éloigne du cylindre extérieur amont est rotation (C2), les forces d'inertie augmentent également en raison de la forte convection des gradients de pression provoquée par la rotation du cylindre extérieur, et les forces de viscosité augmentent aussi à cause de la présence de la couche de fluide près de la surface du cylindre extérieur (C2).

Lorsque le cylindre intérieur (C1) amont est en rotation (Figure 19d), les choses se passent différemment. Contrairement au cas précédent mentionné ci-dessus, la couche limite du cylindre intérieur (C1) et son mouvement de rotation entraînent les forces de viscosité et les forces d'inertie élevées dans la zone où le cylindre intérieur (C1) est en rotation.

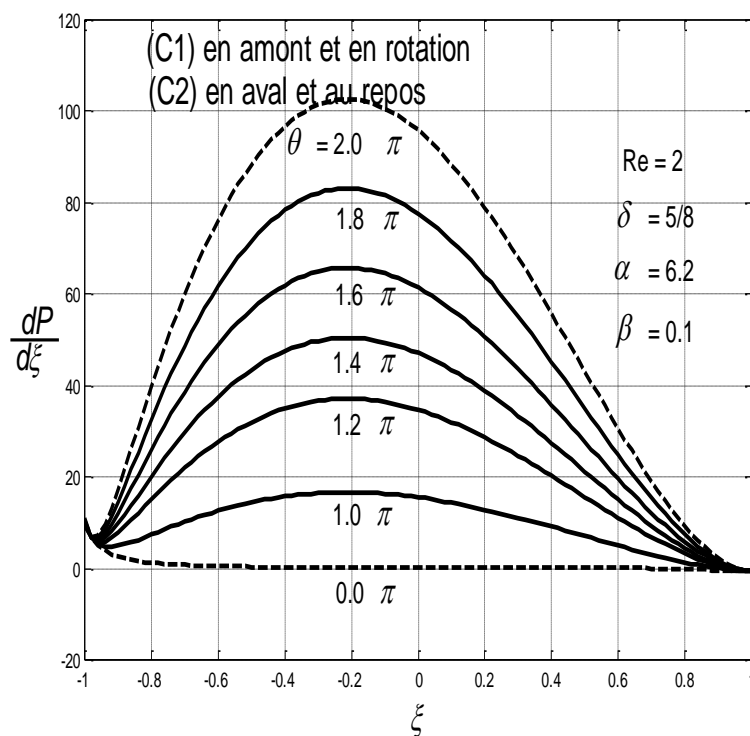
Néanmoins, la différence des deux forces montre que : la force de viscosité est légèrement plus grande que les forces d'inertie. Cela explique pourquoi le gradient de pression est positif et faible lorsqu'on se dirige vers la valeur  $\xi = -1$  (Figure 19d). En s'éloignant du cylindre intérieur en rotation, on s'en éloigne simultanément de sa couche limite.

Lorsque la région de stagnation située entre les deux cylindres n'est pas dépassée, les forces de viscosité diminuent, et cette diminution se poursuit.

Les forces d'inertie diminuent également, mais leur diminution, qui correspond à une augmentation du gradient de pression, supérieure à la diminution des forces de viscosité.



**Figure 19c** : Gradient de pressions radiales en fonction de  $\xi$  le long des couches de fluide radiales lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation avec le cylindre intérieur (C1) en aval et au repos.



**Figure 19d** : Gradient de pressions radiales en fonction des  $\xi$  le long des couches de fluide radiales lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation avec le cylindre extérieur (C2) en aval et au repos.

Cet argument explique pourquoi le gradient de pression montre une première phase croissante (Figure 19d). Cette augmentation atteint sa valeur maximale proche de la valeur  $\xi = -0.2$ , dans la zone de stagnation où les forces de viscosité sont presque négligeables (Figure 19d).

La convection interne des gradients de pression qui caractérise cette zone fait que les forces d'inertie commencent à augmenter dès que la zone de stagnation est dépassée, tandis que la force de viscosité continue à diminuer (Figure 19d), le gradient de pression commence à diminuer au fur et à mesure que la résultante des deux forces diminue.

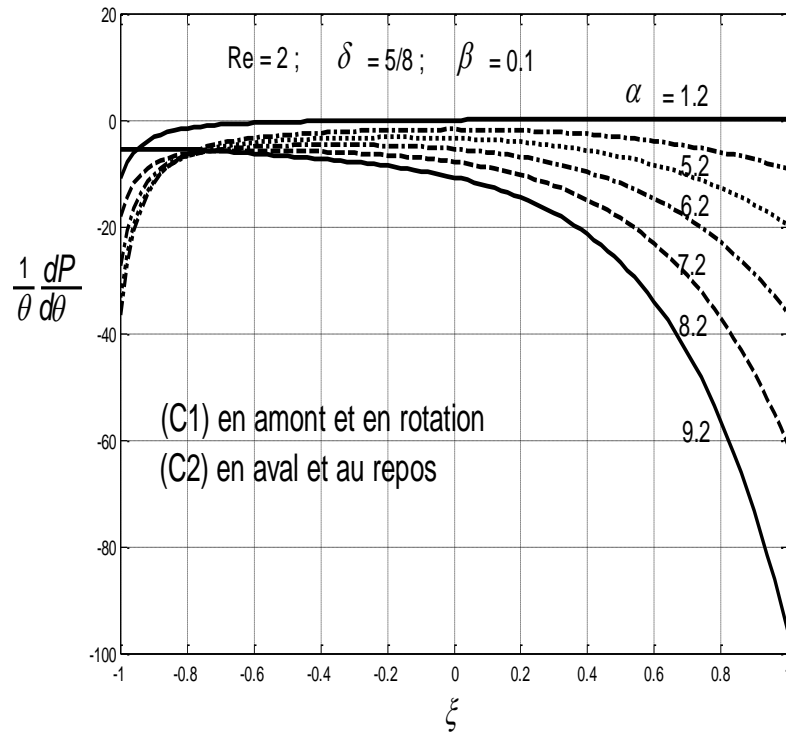
Les forces d'inertie commencent à diminuer au fur et à mesure que l'on s'approche de la paroi du cylindre extérieur au repos, ce qui provoque l'augmentation des forces de viscosité jusqu'à ce qu'elles soient égales aux grandeurs des forces d'inertie et que le résultat soit annulé (figure 19d), cela entraîne un gradient de pression à zéro.

#### **III-8-4 Effets du coefficient de vitesse $\alpha$ sur le gradient de pression orthoradiale**

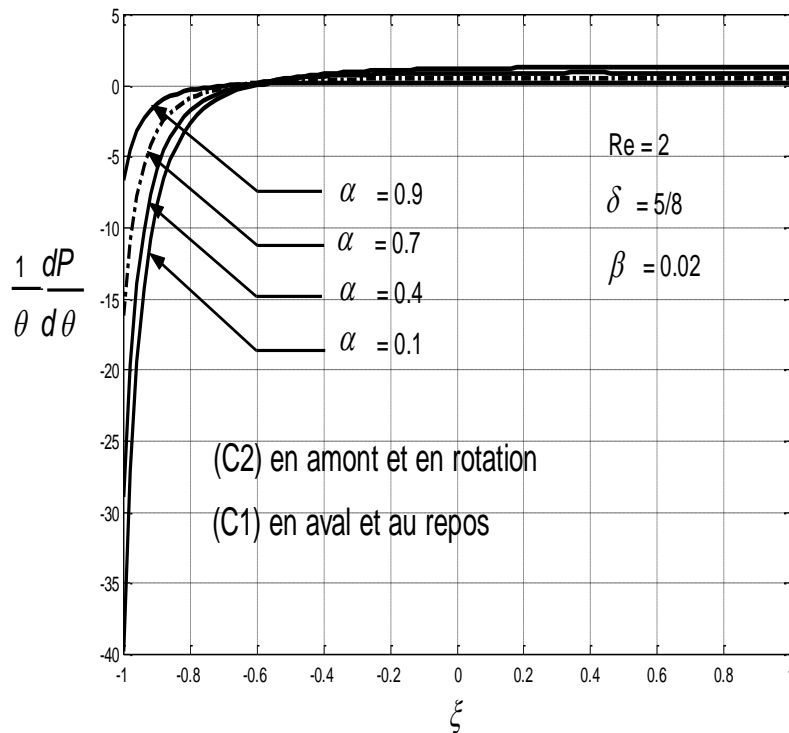
Étant donné que le gradient de pression orthoradiale adimensionnel est proportionnel à la coordonnée  $\theta$  en (3.24b), il ne peut être tracé qu'en fonction de  $\xi$ , sous la forme  $\theta^{-1} \partial P / \partial \theta$ , (Figures 20a et 20d).

Le comportement du gradient de pression orthoradiale est utilisé pour obtenir une compréhension de l'écoulement en ce qui concerne la résultante orthoradiale des forces d'inertie et des forces de viscosité (Figures 20a et 20d), comme cela a été fait dans (III-8-2) pour le gradient de pression radiale. Nous examinerons également comment le coefficient de vitesse et le rapport de gap affectent le gradient de pression orthoradiale.

Pour commencer, nous notons que le gradient de pression orthoradiale est toujours négatif pour les deux configurations d'écoulement et commence à augmenter au fur et à mesure que le paramètre  $\xi$  augmente du cylindre intérieur



**Figure 20a :** Gradient de pressions orthoradiales par unité d'angle polaire en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs du coefficient de vitesse ( $\alpha$ ) dans le cas où le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation.



**Figure 20b :** Gradient de pressions orthoradiales par unité d'angle polaire en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs du coefficient de vitesse ( $\alpha$ ) dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation.

(C1) (Figures 19d et 20d), indépendamment du fait que le cylindre intérieur (C1) soit en aval au repos ou en rotation en amont.

Cela indique que, contrairement à leurs composantes radiales décrites dans (III-8-2). Les forces de viscosité sont plus faibles que les forces d'inertie pour leurs composantes orthoradiales.

Pour les raisons déjà indiquées, les composantes radiale et orthoradiale des forces de viscosité commencent à diminuer au fur et à mesure que l'on s'éloigne de (C1).

Du fait que le gradient de pression orthoradiale augmente dans la même région, il est clair que la composante orthoradiale des forces d'inertie diminuent en toutes circonstances et que cette diminution dépasse celle des forces de viscosité orthoradiale.

### **III-8-5 Effets du rapport de gap $\delta$ sur le gradient de pression orthoradiale**

Concernant le comportement du gradient de pression orthoradiale comme fonction du rapport de gap, nous argumentons comme suit. Nous devons élargir l'entrefer tout en maintenant un rayon intérieur du cylindre constant afin d'augmenter le rapport de gap. À mesure que le rapport de gap augmente et que les conditions aux limites de vitesses restent inchangées, nous notons alors que les particules de fluide les plus lentes augmentent en nombre et en masse dans l'écoulement. Ensuite, les forces de viscosité et d'inertie diminuent dans tout le fluide et tendent à disparaître pour les valeurs de rapport de gap les plus élevées. À l'exception de la région proche du cylindre en amont, où le mouvement de rotation compense la petitesse du gradient de pression d'une manière qui rend la compensation d'autant plus grande que le rapport de gap est petit, le fluide subit par conséquent de faibles gradients de pression absolue pour grandes valeurs de rapport de gap. En conséquence, et plus particulièrement, on comprend comment le gradient de pression orthoradiale se comporte autour des deux cylindres lorsque le rapport de gap varie (Figures 20c et 20d).

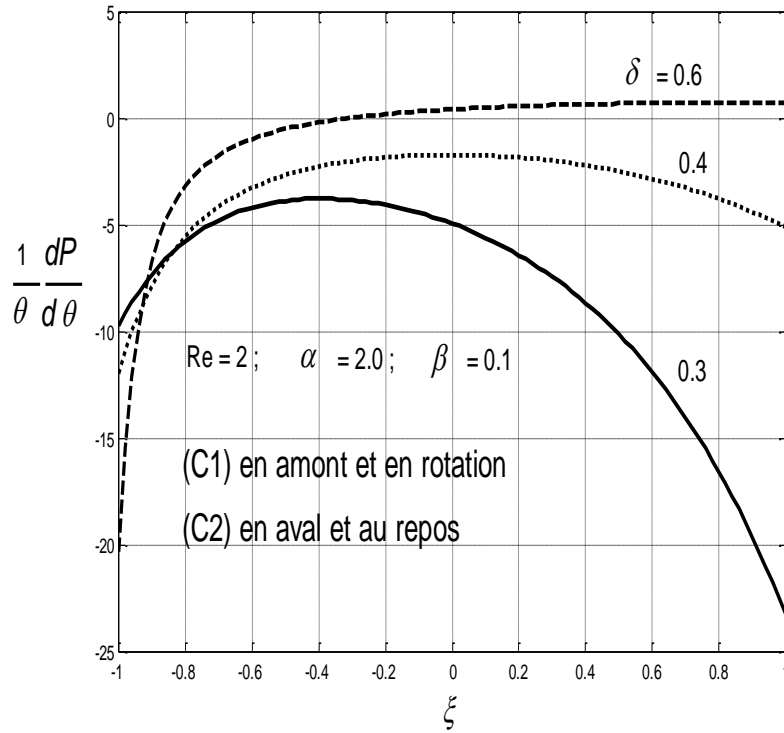
En raison du fait que le gradient de pression orthoradiale augmente dans la même zone, ainsi, la composante orthoradiale des forces d'inertie doit diminuer en toutes circonstances et que cette diminution dépasse celle des forces de viscosité orthoradiale en valeur absolue au cours de la phase d'augmentation initiale du gradient de pression orthoradiale est décrite (Figures 19d et 20d.)

Le gradient de pression algébrique orthoradiale diminue tout en restant négatif dans la deuxième configuration, où le cylindre intérieur en amont est en rotation (Figures 20a et 20b). Cette diminution se poursuit jusqu'à ce que le gradient de pression orthoradiale atteigne sa valeur absolue maximale, qui est proche du cylindre extérieur en aval et au repos.

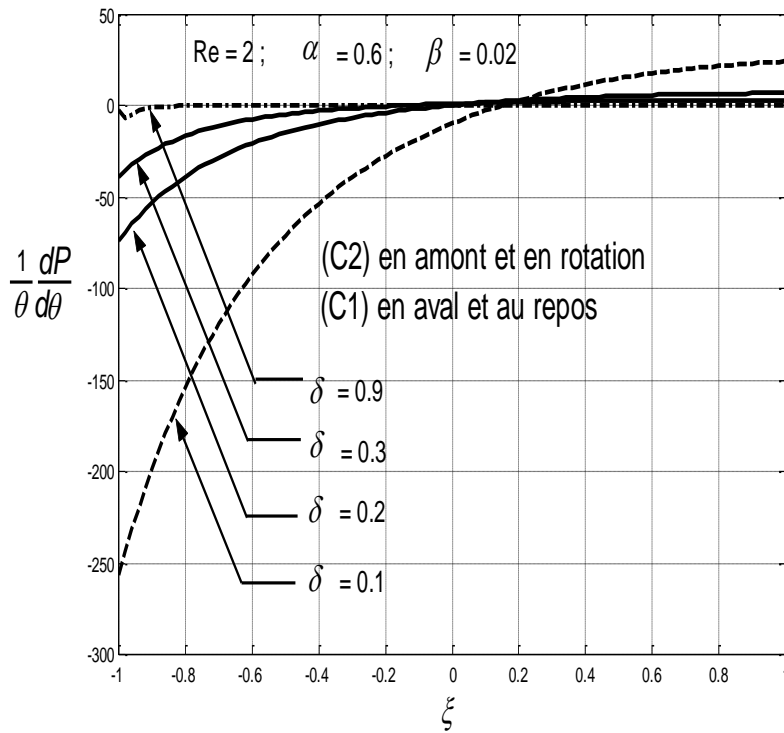
Nous pouvons déduire que, l'ordre de grandeur du gradient de pression orthoradiale seule est suffisant pour équilibrer les forces de viscosité de toute particule fluide située à proximité du cylindre en aval, parce que les forces d'inertie sont si faibles dans cette zone et la composante radiale du gradient de pression disparaît (Figure 20d).

Enfin, le coefficient de vitesse et le rapport de gap affectent le gradient de pression orthoradiale dans l'écoulement. Selon la formule donnée à travers l'expression (2.34), les valeurs plus élevées du coefficient de vitesse ( $\alpha$ ) avec des valeurs du rapport de gap constant ( $\delta$ ) entraînent une augmentation de la vitesse d'aspiration du cylindre intérieur (C1), pour une vitesse donnée d'injection au cylindre extérieur (C2), lorsque le cylindre intérieur est en aval et au repos. En raison de la conservation de la masse, la vitesse radiale augmente à proximité du cylindre en aval, ce qui entraîne une diminution de la vitesse orthoradiale.

De ce fait, les forces d'inertie et de viscosité sont réduites à proximité du cylindre aval. La diminution des forces d'inertie orthoradiale dans cette zone est supérieure à la diminution des forces de viscosité, augmentant la résultante algébrique entre les forces de viscosité et l'opposé des forces d'inertie. Cela explique pourquoi, au fur et à mesure que le coefficient de vitesse ( $\alpha$ )



**Figure 20c :** Gradient de pressions orthoradiales par unité d’angle polaire en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) dans le cas où le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation.



**Figure 20d :** Gradient de pressions orthoradiales par unité d’angle polaire en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ) dans le cas où le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation.

augmente, le gradient de pression algébrique orthoradiale augmente près du cylindre en aval (Figure 20b).

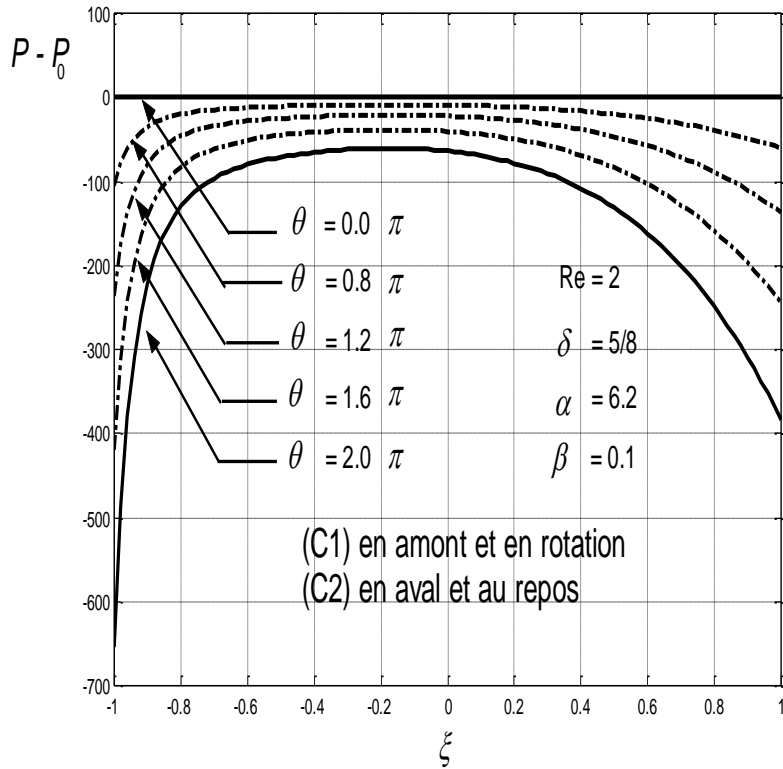
Lorsque l'écoulement du cylindre en aval (C1) est traversé, l'impulsion fournie par le mouvement de rotation du cylindre en amont (C2) arrête la diminution des forces d'inertie, ce qui entraîne un équilibre entre les deux à proximité du cylindre en amont (C2) (Figure 20b). Des logiques similaires expliquent pourquoi le gradient de pression orthoradiale diminue suivant les valeurs du coefficient de vitesse ( $\alpha$ ), lorsque le cylindre intérieur en amont est en rotation (Figure 20a).

### III-8-6 Distribution de pression dans le fluide

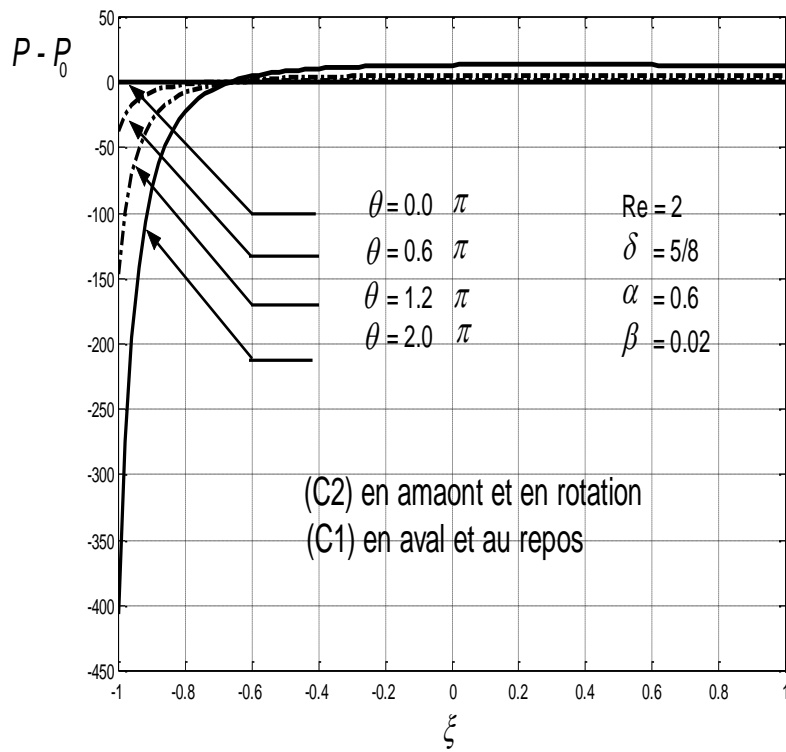
En utilisant les résultats des gradients de pression radiale et orthoradiale, l'excès de pression sans dimension dans l'écoulement  $P(\xi, \theta) - P_0$  est déduit des calculs effectués en (3.29a), (3.29b), (3.30a), (3.30b) et (3.30c), où  $P_0$  est une constante définie dans (3.28b) comme  $P_0(\xi=1, \theta=0)$ . Les valeurs ainsi obtenues sont représentées pour les deux orientations de l'écoulement dans les (Figures 21a et 21b).

Les graphiques sont obtenus en fonction de la variable  $\xi$  en conservant l'angle polaire constant (Figures 21a et 21b).

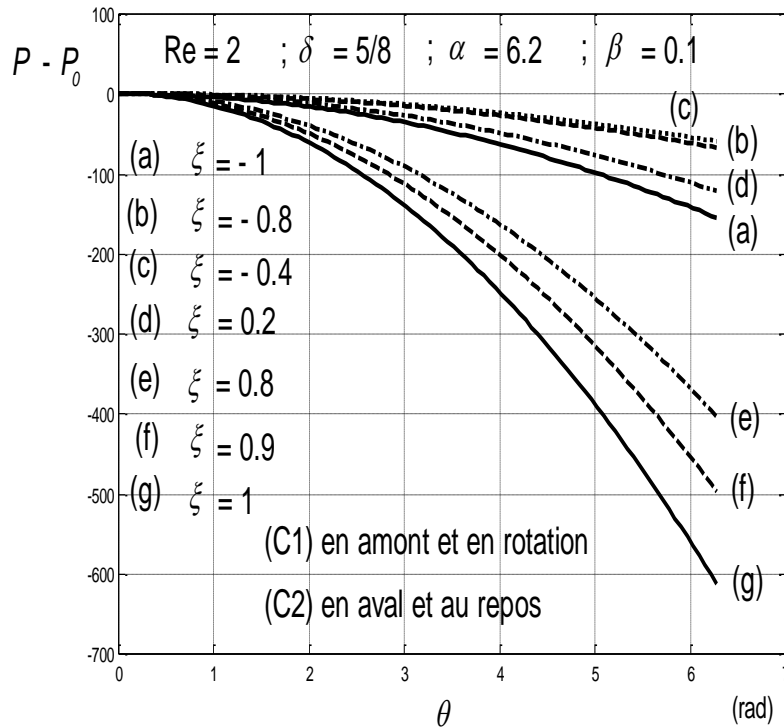
Plus spécifiquement, la différence de pression,  $P(\xi, \theta) - P_0$ , entre le point ( $\xi=-1, \theta=0$ ) situé sur le cylindre intérieur et tout autre point de l'écoulement reste négatif (Figures 21a et 21b).



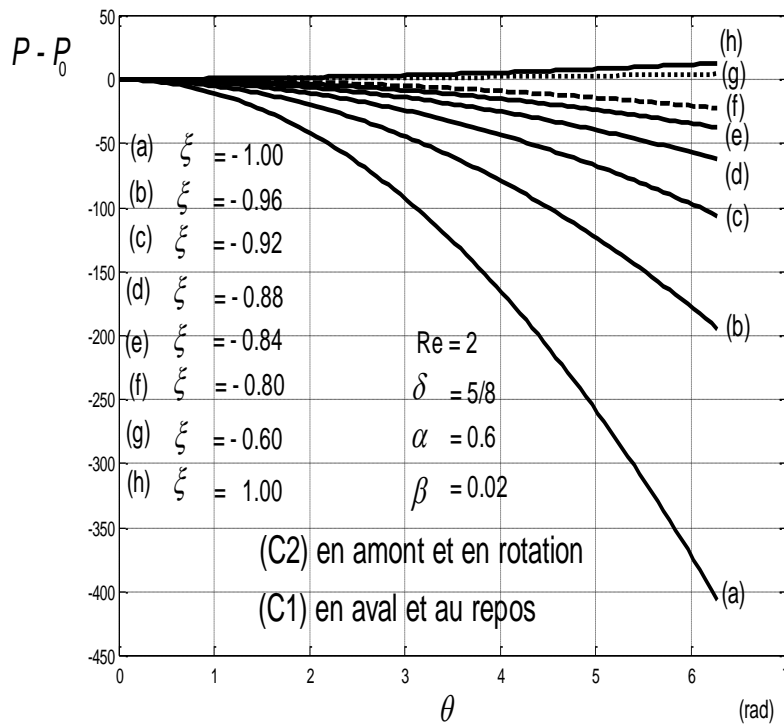
**Figure 21a :** Différence de pressions en fonction de  $\xi$  le long des couches radiales de fluide lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation avec le cylindre extérieur (C2) en aval et au repos.



**Figure 21b :** Différence de pressions en fonction de  $\xi$  le long des couches radiales de fluide lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation avec le cylindre intérieur (C1) en aval et au repos.



**Figure 21c :** Différence de pression sen fonction de l’angle polaire  $\theta$  le long des couches de fluide circulaire concentré  $z - axe$  lorsque le cylindre intérieur (C1) est en amont et en rotation avec le cylindre extérieur (C2) en aval au repos.



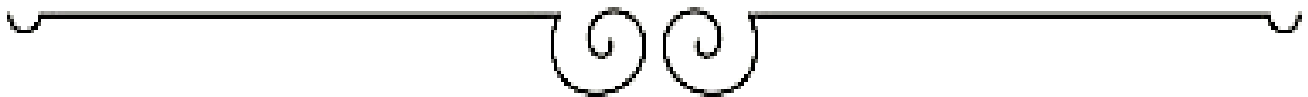
**Figure 21d :** Différence de pressions en fonction de l’angle polaire  $\theta$  le long des couches de fluide circulaire concentré  $z - axe$  lorsque le cylindre extérieur (C2) est en amont et en rotation avec le cylindre extérieur (C1) en aval au repos.

La valeur absolue de cette différence de pression reste élevée à proximité du cylindre intérieur, que ce cylindre en amont et en rotation ou en aval et au repos. Sur les Figures 21c et 21d, les graphiques sont présentés en fonction de l'angle polaire pour différentes valeurs de  $\xi$ .

Les résultats obtenus pour l'excès de pression dans l'écoulement sont conformes aux discussions menées dans (III-8-2) et (III-8-4) lors de l'analyse des résultats pour les gradients de pression radial et orthoradial.



## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES



Dans le travail actuel, nous avons étudié l'écoulement laminaire permanent entre deux cylindres poreux et coaxiaux, situé dans le plan polaire orthogonal à l'axe commun des deux cylindres. Les parois des cylindres subissent une aspiration et une injection ainsi qu'une rotation accélérée. Le rapport de gap ( $\delta$ ) de la conduite annulaire, le coefficient de vitesse ( $\alpha$ ) qui compare les vitesses d'aspiration et d'injection en amont et en aval des parois pour assurer la conservation de la masse dans la conduite, le rapport de vitesse ( $\beta$ ) qui compare l'ordre de grandeur des vitesses radiale et orthoradiale dans l'écoulement, et le nombre de Reynolds  $Re$  construit en ajoutant les vitesses radiale et orthoradiale, sont les quatre paramètres qui déterminent la forme adimensionnelle du problème étudié, et ayant les intervalles définis comme suit :  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < \delta < 1$ , et  $0 < Re < 6$ .

Pour la résolution du problème examiné, les équations de Navier-Stokes sont remplacées par l'équation de vorticité de la fonction de courant dans le plan polaire, dont les solutions sont trouvées en utilisant la méthode de solutions semblables. La méthode de tir, y compris l'algorithme de Runge-Kutta du quatrième ordre, est ensuite utilisée pour produire des solutions numériques pour l'équation différentielle ordinaire résultante. Pour les écoulements où la fonction de courant existe, la formulation d'équation de vorticité de la fonction de courant est recommandée car elle donne la solution exacte aux équations de Navier-Stokes, bien qu'elle se trouve dans sa forme numérique.

Le cas du cylindre en amont et en rotation et du cylindre en aval et au repos est la seule configuration étudiée dans le présent travail. Il serait intéressant d'étudier l'écoulement laminaire situé dans le plan polaire pour le cas du cylindre en aval et en rotation avec le cylindre en amont et au repos, ainsi que dans le cas où les deux cylindres sont en rotation.

Examiner l'effet des variations du nombre de Reynolds sur l'écoulement laminaire étudié serait également fascinant.

Les limites du travail actuel, qui imposent l'écoulement étudié soit contenu dans le plan polaire, ont été trouvées comme suit :

$V_z/V_r \ll 1$ ,  $V_z/V_r \ll (L/2h)$ ,  $V_z/V_\theta \ll 1$ , et  $V_z/V_\theta \ll (L/2\pi R_m)$ , où  $V_r$ ,  $V_\theta$ , et  $V_z$  représentent les composantes radiales, orthoradiales et axiales de la vitesse de l'écoulement, respectivement,  $L$  est la longueur commune des deux cylindres,  $h$  est la moitié de la largeur de l'entrefer,  $R_m$  est le rayon moyen de la conduite annulaire.

Les principales conclusions de la présente étude peuvent être résumées comme suites :

- Pour que l'écoulement laminaire existe avec des lignes de courant régulières qui ne se croisent pas, le rapport de vitesses ( $\beta$ ) et le coefficient de vitesse ( $\alpha$ ) doivent satisfaire aux exigences de  $\alpha > 1$  et  $\beta \leq 0.1$  lorsque le cylindre en amont et en rotation est le cylindre intérieur (C1). Si ce cylindre est le cylindre extérieur (C2), les conditions requises deviennent :  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta \leq 0.02$ .
- Le nombre de Reynolds de l'écoulement est construit en ajoutant les vitesses radiale et orthoradiale de l'écoulement, pour tenir compte des deux moteurs de l'écoulement, à savoir l'injection ou l'aspiration au niveau des parois et la rotation accélérée des cylindres.
- Pour que la conservation de la masse soit satisfaite avec une vitesse axiale nulle dans la conduite annulaire, l'un des cylindres reçoit l'injection et joue ensuite le rôle du cylindre en amont, tandis que l'autre subit une aspiration et assume alors le rôle du cylindre en aval.

- Malgré le mouvement de rotation cylindre en amont et malgré les processus d'aspiration et d'injection du fluide au niveau des parois, une zone de stagnation est révélée à l'intérieur de l'écoulement où le fluide reste en état de repos. Cette zone est délimitée par le cylindre en aval et deux lignes distinctes et singulières.
- Pour une valeur donnée du rapport de gap, la valeur absolue de la vitesse radiale est faible à proximité du cylindre en amont et en rotation et augmente au fur et à mesure que l'on approche du cylindre en aval et au repos.
- La configuration de l'écoulement dans laquelle le cylindre extérieur est en amont et en rotation est plus stable que la configuration opposée dans laquelle le cylindre intérieur est en amont et en rotation. Cette découverte est la même que celle trouvée pour les cylindres immobiles.
- Malgré la rotation du cylindre en amont qui devrait augmenter les forces d'inertie, la contribution radiale des forces de viscosité domine celle des forces d'inertie tout au long de l'écoulement, excepté à proximité du cylindre extérieur où les contributions radiales des deux forces sont égales que ce cylindre soit en aval et au repos ou en amont et en rotation.
- Dans le cas où le cylindre intérieur est en amont et en rotation tandis que le cylindre extérieur en aval et au repos, le gradient de pression radiale atteint sa valeur maximale dans la zone médiane entre les deux cylindres.
- La contribution orthoradiale des forces d'inertie dépasse celle des forces de viscosité tout au long de l'écoulement, sauf à proximité du cylindre extérieur où les contributions orthoradiales des deux forces sont égales.

Cette exception s'applique à toute valeur de coefficient de vitesse ( $\delta$ ) lorsque le cylindre extérieur est en amont et en rotation, et pour l'intervalle  $1 < \alpha < 1.2$  lorsque ce cylindre est en aval et au repos.

- Pour les grandes valeurs du rapport de gap ( $\delta$ ), l'écoulement étudié connaît de faibles gradients de pression absolus à mesure que le rapport de gap augmente, sauf à proximité du cylindre en amont, où le mouvement de rotation de ce cylindre compense la faiblesse du gradient de pression de telle manière que la compensation est d'autant plus importante que le rapport de gap est faible.
- Dans le cas d'un cylindre en amont et en rotation avec un cylindre en aval et au repos, la seule solution, qui diffère de la solution des cylindres immobiles et correspond à un écoulement laminaire permanent, est celle dans laquelle le cylindre intérieur est en amont, à condition que le rapport de vitesse ( $\beta$ ) soit inférieur au seuil critique de 0.1 et que le coefficient de vitesse soit supérieur à 1.



## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES



- 
- [1] **B. Belidor**, “Architecture Hydraulique,” *Chez Charles-Antoine Jombert*, vol.1, pp. 4 1737.
- [2] **D. Bernoulli**, “Hydrodynamica-fluidorum” De Viribus et mortibus *Commentari*, 1738.
- [3] **G. Bouligand**, “L’œuvre d’Euler et la mécanique des fluides au XVIII<sup>ème</sup> siècle,” *Revue d’histoire des sciences et de leurs applications*, vol. 13, no.2, pp. 105-113, 1960.
- [4] **A. Durer**, “Mélancolie,” 1514.
- [5] **M. Burin, E. Schartman, and H. Ji**, “Local measurements of turbulent angular momentum transport circular couette flow,” *Experiments in fluids*, vol. 48, no. 5, pp. 763-769, 2010.
- [6] **P. Tong, W. Goldburg, J. Huang, and T. Witten**, “Anisotropy in turbulent drag reduction,” *Physical review letters*, vol. 65, no.6, pp. 763-769, 1933.
- [7] **M. Margules**, “Uber die bestimmung des reibung-und gleitungs-coefficient,” *WinerBerichte (second series)*, vol. 83, no.2, pp. 588-602, 1881.
- [8] **I. Newton**, “Mathematical principles. 1713. Available as: F. cajori,” 1946.
- [9] **A. Daimallah**, “Etude des phénomènes d’instabilités en présence d’une suspension dans l’écoulement de Taylor-Dean,” *PhD thesis, Université de Bretagne occidentale- Brest ; Université des sciences et de la technologie Houari Boumédiène (alger)*, 2013.
- [10] **G. Stokes**, “Mathematical and physical papers,” 5 vols 1880.
- [11] **S. Chandrasekhar**, » *Hydrodynamic and hydro magnetic stability*,” Courier Corporation, 2013.

- [12] **L. Rayleigh**, “On the dynamics of revolving fluids,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and physical Character*, pp. 148-154, 1917.
- [13] **G. I. Taylor**, “Stability of a viscous liquid contained between two rotations cylinders,” vol.223, no. 1923, pp. 289-343, 1923.
- [14] **M. Couette**, “Etudes sur les frottements liquides,” *Annales de Chimie et de Physique*, no 6-21, pp. 433-510, 1890.
- [15] **N. R. Makon, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, Y. C. Mbono Samba, and E. Pemha**, “On the existence and determination of the incompressible laminar flow located in the polar plane of a porous annular pipe,” *Alexandria Engineering Journal*, vol. 61, no. 4, pp. 2637-2650, 2022.
- [16] **M. Venkatachalappa, M. Sankar, and A. A. Natarajan**, “Convection in an annulus between two rotating vertical cylinders,” *Acta Mech.*, vol. 147, pp. 173-196, 2001.
- [17] **S. W. Yuan, and A. B. Finkelstein**, “Stability of pipe flow with blowing,” *Trans. ASME*, vol. 78, pp. 719-727, 1956.
- [18] **A. S. Berman**, “Laminar flow in channels with porous walls,” *J. Appl. Phys.*, vol. 24, pp. 1232-1235, 1953.
- [19] **R. M. Terrill, and P. W. Thomas**, “On laminar flow through a uniformly porous pipe,” *App. Sci. Res.*, vol. 21, pp. 37- 67, 1969.
- [20] **W. H. H. Banks, and M. B. Zaturka**, “On flow through a porous annular pipe,” *Phys. Fluids A.*, vol. 4, no. 6, pp. 1131-1141, 1992.
- [21] **M. Bouyges, F. Chedevergne, G. Casalis, and J. Majdalani**, “Asymptotically based self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous tube with a non-circular cross-section,” *J. Fluid Mech.*, vol. 826, pp. 396-420, 2017.
- [22] **E. Koschmieder**, “Taylor vortices between eccentric cylinders,” *Physics of Fluids* (1958-1988) vol. 19 no. 1, vol.1, pp. 1-4, 1976.

- [23] **M. Goto and S. Uchida**, “Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall,” *Trans. Japan Soc. Aeronaut.Space Sci.*, vol. 33, p. 14, 1990.
- [24] **S. Uchida, and H. Aoki**, “Unsteady flow in a semi-infinite contracting or expanding pipe,” *J. Fluid Mech.*, vol. 82, pp. 371-387, 1977.
- [25] **C. Jones**, “The transition to wavy Taylor vortices,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 157, pp. 135-162, 1985.
- [26] **G. L. Mbogba, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, Y. C. Mbono Samba, and E. Pemha**, “Effects of an external constant pressure gradient on a steady incompressible laminar flow through a semi-porous annular pipe,” *Zeitschrift für Naturforschung A*, vol. 77, no. 2, pp. 131-141, 2022.
- [27] **L. S. Galowin, L. S. Fletcher, and M. J. DeSantis**. “Investigation of laminar flow in a porous pipe with variable wall suction,” *AIAA J.*, vol. 12, pp.1585-1589, 1974.
- [28] **M. Sankar, Y. Park, J. M. Lopez, and Y. Do**, “Numerical study of natural convection in a vertical porous annulus with discrete heating,” *Int.J. Mass and Heat Transfer*, vol. 54, pp. 1493-1505, 2011.
- [29] **M. Sankar, J. Park, M. Lopez, and Y. Do**, “Double- diffusive convection from a discrete heat and solute source in a vertical porous annulus,” *Transp. Porous Med*, vol. 91, pp.753-775, 2012.
- [30] **S. Kiran, M. Sankar, H. A. Kumara Swamy, and O. D. Makinda**, “Unsteady buoyant convective flow and thermal transport analysis in a non uniformly heated annular geometry,” *Comput. Therm. Sci.*, vol. 14, no.2, pp. 1-17, 2022.
- [31] **M. Sankar, S. Kiran, and Y. Do**, “Effect of non uniform heating on natural convection in a vertical porous annulus,” in *Flow and transport in Subsurface Environment*, N. Narayanan, B. Monanadhas, and V. Mangottiri, Eds., Singapore, Springer Transactions in Civil and Environmental Engineering. Springer, pp. 251-278, 2018.

- [32] **M. Sankar, J. Park, and Y. Do**, “Natural convection in vertical annuli with discrete heat sources,” *Numer. Heat Trans., A: Appl.*, vol. 59, no.8 pp. 594-615, 2011.
- [33] **J. F. Brady, and A. Acrivos**, “Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 112, pp. 127-150, 1981.
- [34] **Viollet, Chabard, and P. Esposito**, “Mécanique des fluides appliquée : Écoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières autour des structures et dans l’environnement,” *Presse des Ponts*, 2003.
- [35] **E. Pemha**, “Notes de cours de Mécanique des Fluides,» *Niveau 4, Université de Yaoundé I, Laboratoire de Mécanique Appliquée et d’Hydraulique*, 2016.
- [36] **E. C. Dauenhauer, and J. Majdalani**, “Exact self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls,” *Phys. Fluids.*, vol. 15, no.6, pp. 1485-1495, 2003.
- [37] **S. M. Cox**, “Two-dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous wall,” *J. Fluid Mech.*, vol. 227, pp. 1-33, 1991.
- [38] **W. A. Robinson**, “The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls,” *J. Eng. Math.*, vol.10, no.1, pp. 23-40, 1976.
- [39] **S. T. Mohyud-Din, A. Yildirim, and S. A. Sezer**, “Analytical approach to a slowly deforming channel flow with weak permeability,” *Z. Naturforsch.*, vol. 59, no.65, pp. 1033-1038, 2010.
- [40] **E. B. B. Watson, W. H. H. Banks, M. B. Zaturka, and P. G. Drazin**, “On transition to chaos in two- dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls,” *J. Fluid Mech.*, vol.212, pp. 451-485, 1990.
- [41] **W. H. H. Banks, and M. B. Zaturka**, “On flow through a porous annular pipe,” *Phys. Fluids A.*, vol. 4, no. 6, pp. 1131-1141, 1992.

- [42] **A. T. Akinshilo, J.O. Olofinkua, and O. Olaye**, “Flow and heat transfer analysis of sodium alginate conveying copper nanoparticles between two parallel plates,” *J. Appl. Comput Mech.*, vol. 3, pp. 258-266, 2017.
- [43] **Y. Gazambeti, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, and E. Pemha**, “Pressure-exerted steady laminar flow of an incompressible fluid along a porous parallel-walled channel with an impermeable,” *Zeitschrift für Naturforschung A*, vol. 7, no.7, pp. 675-687, 2022.
- [44] **T. Aziz, A. Aziz, and C. M. Khalique**, “Exact solution for Stokes flow of a non-Newtonian Nano fluid model: A Lie similarity approach,” *Z. Naturforsch.*, vol. 71, no.7 pp. 621-630, 2016.
- [45] **H. Schlichting**, *Boundary Layer Theory*, New-York, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1968.
- [46] **B. Bernales, and P. Haldenwang**, “Laminar flow analysis in a pipe with locally pressure-dependent leakage through the wall”, *Eur. J. Mech. B-Fluid.*, vol. 43, pp. 100-109, 2014.
- [47] **M. B. Zatorska, P. G. Drazin, and W.H.H. Banks**, “On the flow of a viscous fluid driven a long a channel by suction at porous walls,” *Fluid Dynam. Res.*, vol.4, no.8 p. 151, 1988.
- [48] **M. Slavashi, H. Rasam, and A. Izadi**, “Similarity solution of air and Nano fluid impingement cooling of cylindrical porous heat sink,” *J. Therm. Anal. Calorim*, vol. 135, no.7, pp. 1399-1415, 2019.
- [49] **H. W. Press, A. S. Teukolsky, T. W. Vetterling, and P. B. Flannery**, *Numerical Recipes in FORTRAN, 2<sup>nd</sup> Ed Cambridge, Cambridge University Press*, 1992.
- [50] **G. K. Batchelor**, *An introduction to fluid Dynamics, Cambridge, Cambridge University Press*, 1967.
- [51] **S. Goldstein**, *Modern Developments in fluid dynamics*, vol. 1, New York, *Dover Publications Inc.*, 1965.

- [51] **R. C. Buck, and E. F. Buck**, Advance calculus, 3<sup>rd</sup>Ed. New York, Mc Graw-Hill College, 1978.
- [52] **L. Euler**, “Principes généraux du mouvement des fluides,”*Nouveaux Mémoires de l’Académie royale des sciences et des belles lettres de berlin*, vol.11, 1757.
- [53] **W. Thomson**,“On vortex Motion,”*Transactions of the royal society of Edinburgh*, vol.25, pp.217-260, 1868.
- [54] **A. N. Kolmogorov**, “On the generation of isotropic turbulence In anincompressible viscous fluid,”*DokladyAcademicNauk*, vol.31, pp.319-323, 1941.
- [55] **E. Pemha**, “Markovian model for the propagation of a light wave in a heated turbulent jet of air,” *PhD Thesis, Ecully, France, Laboratory of Fluid Mechanics, Ecole Centrale de Lyon, 1990.*
- [56] **E. Pemha, B. Gay, and A. Tailland**, “Measurement of the diffusion coefficient in a heated plane airstream,” *Phys. Fluids A.*, vol. 5, no. 6, pp. 1289-1295, 1993.
- [57] **E. Ngo Nyobe**, “A new laser-based diagnostic technique using genetic algorithms for the optical and thermal turbulence in a hot turbulent jet of air,” *PhD Thesis, Yaoundé, Applied Mechanics Laboratory of the Faculty of Science, University of Yaoundé I, 2008.*
- [58] **M. Lamara, E. Ngo Nyobe, and E. Pemha**, “Engineering laser-based diagnostic in a hot wind tunnel jet: measurement of the temperature structure coefficient by using an optimization Prog. *Electromagn. Res. M, Vontechnique*,” vol.74, pp. 93-103, 2018.
- [59] **J.B. Tissibe, N. R. Makon, M. Lamara, E. N. Nyobe, and E. Pemha**, “Laser-Based Estimation of the Diffusion Coefficient profile for the Karman Turbulence Spectrum in Heated Wind Tunnel Jets Using Genetic Algorithm computation,”*Prog. Electromagn. Res. C.*, vol. 139, pp. 139-174, 2024.

- [60] **E. Ngo Nyobe, and E. Pemha**, “Shape optimization using genetic algorithms and laser beam propagation for the determination of the diffusion coefficient in a hot turbulent jet of air,” *Prog. Electromagn. Res. B.*, vol. 4, pp. 211-221, 2008.
- [61] **E. Pemha, and E. Ngo Nyobe**, “Genetic algorithm approach and experimental confirmation of a laser-based diagnostic technique for the local thermal turbulence in a hot wind tunnel jet,” *Prog. Electromagn. Res. B.*, vol. 28, pp. 325-350, 2011.
- [62] **E. Pemha, B. Gay, A. Tailland**, “Measurement of the diffusion coefficient in a heated plane airstream.” *Phys Fluids* vol 6, pp 1289-1295, 1991.
- [63] **S. Dong**, “Taylor numerical simulation of turbulence Taylor-Couette flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 587, pp. 373-393, 2007.
- [64] **A. Szeri and A. Al-Sharif**, “Flow between finite, steadily rotating eccentric cylinders,” *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 7, no. 1, pp. 1-28, 1995.
- [65] **C. Leclercq, B. Pier, and J. F. Scott**, “Temporal stability of eccentric Taylor-Couette-poiseuille flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 741, pp. 543-566, 2014.
- [66] **B. Kalibé, M. Lamara, E. N. Nyobe, and E. Pemha**, “Effects of porous-wall acceleration on laminar flows in semi-porous channels with a rectangular cross section,” *Chinese Journal of Physics*. 2024.
- [67] **T.T. Lim, and K. S. Tan**, “A note on power-law scaling in a Taylor-Couette flow,” *Physics of Fluids*, vol. 16, no. 1, p. 140, 2004.
- [68] **B. Dubrulle, O. Dauchot, F. Daviaud, P. Y. Longaretti, D. Richard, and J. P. Zahn**, “Stability and turbulent transport in Taylor Couette flow from analysis of experimental data,” *Physics of Fluids* (1994-present), vol. 17, no. 9, p. 095103, 2005.

- [69] **R. Ostilla, R. J. Stevens, S. Grossman, R. Verzicco, and D. Lohse**, “Optimal Taylor-Couette flow: direct numerical simulations,” *Journals of Fluid mechanics*, vol. 719, p. 14-46, 2013.
- [70] **J. L. Lagrange**, Introduction à la notion d’écoulements à potentiel de vitesse, formaliser la notion de lignes de courant et précise la notion d’onde dans le fluide à la surface libre, 1781.
- [71] **M. Fénot, E. Dorignac, A. Giret, and G. Lalizel**, “Convective heat Transfer in theen- try region fan annular channel with slotted rotating Inner cylinder,” *Applied Thermal Engineering*, vol.54, no.1, pp.345–358, 2013.
- [72] **S.Merbold, S. Fischer, and C. Egbers**, “Torques caling in Taylor-Couette flow an experimental investigation,” *in Journal of Physics : Conference Series*, vol.318, p.082017, IOP Publishing, 2011.
- [74] **S. Merbold, H. Brauckmann, and C.Egbers**, “Torque measurements And numerical determination indifferentially rotating wide gapTaylor-Couetteflow,” *PhysicalReviewE*, vol.87, no.2, p.023014,2013.
- [73] **X. Zhu, R. O. Mónico, R. Verzicco, and D. Lohse**, “Direct numerical simulation of Taylor-Couette flow with grooved walls:torques caling and flow structure,” *arXivpre- printer Xiv: 1510.01608*,2015.
- [74] **H. W. Press, A. Steukolsky, T. W. Vettering, P. B. Flannery**, *Numerical Recipes in FORTRAN, 2<sup>nd</sup>Ed Cambridge, Cambridge University Press*, 1992.
- [75] **Y. YAMADA**, “On the pressure oss of flow between rotating co-axial Cylinder swith rectangular grooves,” *Bulletin of JSME*, vol.5, no.20, pp. 642–651, 1962.
- [76] **S.Khelladi, C. Sarraf, F. Bakir, and R. Rey**, “Study of a high rotational Speed shrouded centrifugalfan: Aerodynamics and effects of a shroud-Associated cavity on the performance,” *Proceedings of the Institution Of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Powe rand Energy*, vol. 224, no.5, pp.691–700,2010.



**PUBLICATION ISSUE DE LA THÈSE**



**“Polar-plane flow in porous annular ducts with accelerated rotating walls.  
A region of stagnation inside the fluid”**

*Zeitschrift für Naturforschung A*, vol. 79, no. 3, 2024, pp. 229-251.

**Auteurs** : Serge Benjamin MBAM MBAM, Maurice LAMARA, Noé Richard MAKON, Elisabeth NGO NYOBE, and Elkana PEMHA.

Serge Benjamin Mbam Mbam, Maurice Lamara, Noé Richard Makon, Elisabeth Ngo Nyobe and Elkana Pemha\*

# Polar-plane flow in porous annular ducts with accelerated rotating walls. A region of stagnation inside the fluid

<https://doi.org/10.1515/zna-2023-0197>

Received July 22, 2023; accepted October 18, 2023;

published online November 10, 2023

**Abstract:** The steady laminar flow of an incompressible Newtonian fluid in a porous annular duct with accelerated rotating walls is investigated. The flow is located in the polar plane and is driven by suction and injection at the walls. As required by conservation of mass with zero axial velocity, the fluid is injected into one of the cylinders, which becomes the upstream cylinder, and suctioned into the other, which represents the downstream cylinder. Only the case of the downstream cylinder at rest is examined. The duct gap ratio, the velocity ratio comparing the radial and azimuthal velocities, the Reynolds number, and the velocity coefficient that compares the fluid velocity at the upstream and downstream cylinders are the four parameters of the problem. The purpose of this research is to identify the prerequisites for the flow's existence and determine how the aforementioned variables affect the flow velocity and pressure gradients at a fixed Reynolds number. The Navier–Stokes equations are replaced by the polar-plane vorticity equation, which is solved using the similarity-solutions method. The shooting technique, including the

fourth-order Runge–Kutta algorithm, is used to produce numerical solutions. From the findings, physical understandings of the flow are derived. More specifically, we discover an unexpected interior zone where the fluid is perpetually at rest even while flow is present. The only solution found corresponds to the case of the inner cylinder upstream and rotating provided that the velocity ratio does not exceed the threshold of 0.1 with a velocity coefficient greater than 1.

**Keywords:** polar laminar flows in porous annular ducts; conservation of mass with incoming and outgoing flow rates; laminar flows bounded by accelerated rotating walls; vorticity equation in polar coordinates; similarity-solutions method; numerical shooting technique

## 1 Introduction

This research focuses on the steady laminar flow between two coaxial porous cylinders, which is located in the polar plane orthogonal to the common axis of both cylinders. The walls of the cylinders experience suction and injection along with an accelerated rotation. Due to the fact that the flow under consideration takes place in the polar plane, it has no axial velocity. The conservation of mass in the annular duct, which requires a zero-divergence velocity field for an incompressible fluid, forces one of the cylinders to undergo injection and then assume the role of the upstream cylinder, while the other cylinder must undergo suction and represents the downstream cylinder [1].

Laminar flows in porous cylindrical boundaries like the flow studied are encountered in various thermal fluid engineering applications, including the cooling of rocket and jet motors, industrial drying, industrial sweat cooling or heating, food engineering, and the production of textile, paper, leather, and rubber. More specifically in food engineering, the setup of the cylinders under consideration in the present work is met in technical devices of some artisanal processes for palm oil extraction.

---

\*Corresponding author: **Elkana Pemha**, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon, E-mail: [elkanaderbeau@yahoo.fr](mailto:elkanaderbeau@yahoo.fr).

<https://orcid.org/0000-0002-1867-2708>

**Serge Benjamin Mbam Mbam and Maurice Lamara**, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon

**Noé Richard Makon**, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon; and Department of Gaseous and Mechanical Engineering, National Advanced School of Mines and Petroleum Industries of Kaélé, University of Maroua, P.O. Box 06, Kaélé, Cameroon

**Elisabeth Ngo Nyobe**, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon; and Department of Mathematics and Physical Science, National Advanced School of Engineering of Yaoundé, University of Yaoundé I, P.O. Box 8390, Yaoundé, Cameroon

Due to these numerous applications, laminar flows bounded by porous cylinder walls continue to attract research [1–16]. By using an analytical perturbation method for a similarity-solution equation, Yuan and Finkelstein [2] followed the groundbreaking and pionier work of Berman [3] and addressed for the first time, the issue of the steady laminar flow in a porous circular pipe with constant suction or injection applied at the wall. They obtained analytic solutions valid for large injection and for small suction and injection, by using a perturbation technique, with no indication of dual solutions. From the similarity-solutions approach previously exploited in [2], Terrill and Thomas [4] reported complete numerical and theoretical solutions to the above problem and found that two solutions exist for all values of injection.

The same similarity approach was used by Banks and Zaturka [5] to carry out a thorough examination of the flow in a porous annular pipe with constant and equal fluxes through each pipe. In the light of the theory of bifurcations in dynamic systems, they found steady, unsteady, and periodic solutions, using numerical integration of the resulting ordinary differential equations given by the vorticity-stream function form of the Navier–Stokes equations.

Bouyges et al. [6] reported the results of their investigations of flow in a porous tube with a non-circular cross-section. Assuming a small radial deviation from a fixed radius, they performed asymptotic expansions in the second order in the radial deviation amplitude to derive the axial, radial and tangential velocities and pressure gradient fields.

To simulate the flow field by burning the inner surface of a cylindrical grain in a solid-rocket motor, Goto and Uchida [7] published the findings for unsteady flows in a semi-infinite porous pipe with a time-varying radius. Following the work done by Uchida and Aoki [8], which showed how to deal with moving accelerating wall in transverse directions, they numerically calculated an exact similarity-solution to the Navier–Stokes equations and derived the properties of the flow as a function of the expansion coefficient of the pipe wall and the injection parameter.

In a previous work [9], our research team examined a steady laminar incompressible flow located in a semi porous annular pipe, where the two borders of the pipe experience a favorable constant pressure gradient, the inner wall is impermeable and the fluid is suctioned or injected through the outer wall at constant and uniform velocity. Using the similarity-solutions approach, the velocity field and the wall shear stress were determined as a function of the external constant pressure gradient.

Even though they were devoted to porous media, some studies [10–16] can finish the background list because the

porous geometry for which they were conducted is similar to the geometry examined in the present work. Galowin et al. [10] developed an analytical model to predict the flow in the condensing regions of a heat pipe, determined the flow properties distributions using a Karman-Pohlhausen momentum integral, and compared the results obtained to published experimental data.

Sankar et al. [11–14] and Kiran et al. [15] investigated natural convection [11–13, 15] and double-diffusive convection [14] in vertical porous annulus with discrete heat sources [11, 12] and non uniform heating [13, 15], by adopting a physical model in which the Brinkman-extended Darcy equation was used. Applying an implicit finite difference method, they solved numerically the resulting governing equations, and the influence of physical and geometrical parameters on the flow and heat transfer characteristics in the porous annulus were found and analyzed. In [16], the case of the natural convection in an annulus between two rotating vertical cylinders was examined. Using the alternating direction implicit method and the successive line over relaxation method, the vorticity form of the Navier–Stokes equations and the energy equation were solved numerically, and the effects of rotation on the axially symmetrical buoyancy-driven flow were then analyzed [16]. A good agreement was found from the comparison of the computed heat transfer and flow patterns with the available results for a nonrotating cylindrical annulus [16].

Our motivation for the current work is strengthened by the observation that the laminar flow in the polar plane bounded by accelerated rotating coaxial cylinders with porous walls has not yet been explored in any of the publications mentioned in the list of background studies, as well as in others cited in these papers.

The research reported in the present paper represents the continuation of the work that was previously done for the same configuration, but with the two cylinders at rest [1]. The only configuration examined in the present work is that where the downstream cylinder is at rest while the upstream cylinder is rotating. The annular duct gap ratio ( $\delta$ ), the velocity coefficient ( $\alpha$ ) that ensures mass conservation in the duct by comparing the upstream and downstream velocities of suction and injection at the walls, the velocity ratio ( $\beta$ ) that is used to compare the order of magnitude of radial and azimuthal velocities in the flow, and the Reynolds number  $Re$  that is calculated by adding the radial and azimuthal velocities, are the four parameters that determine the dimensionless form of the problem under study. The purpose of this research is to identify the prerequisites

for the flow's existence and determine how the aforementioned variables affect the flow velocity and pressure gradients at a fixed Reynolds number.

Calculations are done for  $Re = 2$ . To achieve a laminar flow, small Reynolds number values are required. The value  $Re = 2$  is selected in order to avoid multiple solutions to the Navier Stokes equations, which exist when the Reynolds number exceeds the critical value  $Re \approx 6$ , as predicted by Banks and Zaturka in Ref. [5] for suction-driven flows in porous annular pipes. Therefore, for the Reynolds numbers whose values do not exceed the above critical value, the solution sought for the problem under examination is unique.

Since this solution is unique, it can be found either by the vorticity-stream function formulation of the Navier–Stokes (NS) equations if this stream function exists, or by Computational Fluid Dynamics (CFD) algorithms whether the stream function exists or not. As it will be seen in Section 2, the stream function exists in the current study and the model based on the vorticity-stream function formulation is then allowed. It is known that pressure gradients are often removed from the momentum equation by using this formulation. Although these pressure gradients are sought in our current study, we have decided to adopt this model, due to the following reason. Unlike CFD programs, regardless of their high precision, the vorticity-stream function formulation enables one to derive the exact solutions to the NS equations. The pressure gradients that are calculated using these exact solutions are also exact.

Therefore, in the so-called two-dimensional flows where mass conservation allows the stream function to exist, the vorticity-stream function formulation is advised. This approach has been widely used in applied mathematics [17–21] as well as in mechanical engineering [1,9,22–28] for two-dimensional flows, which can be Cartesian, polar or axially symmetrical.

Since the physical hypothesis that justifies the applicability of the similarity-solutions method is true, as it will be seen in Section 2, this method is allowed. The present study then demonstrates how the vorticity-stream function equation leads to a two-point boundary value problem, which is resolved using the numerical shooting technique [29] in which the fourth-order Runge–Kutta and Newton–Raphson algorithms are applied. The patterns of the streamlines are computed based on the data that are obtained, and they show the circumstances under which the steady polar-plane laminar flow under investigation exists. Moreover, these streamlines reveal a surprising interior region where the fluid is still at rest. The distribution of pressure gradients

are determined for the zone where the flow is present and the profiles of the radial and azimuthal components of the velocity field are found, as a function of the parameters of the problem, at a fixed Reynolds number,  $Re = 2$ .

To achieve a better understanding of the present work, this paper is structured into five sections as follows. The governing equations and boundary conditions are given in Section 2. The strategy and method of solution are developed in Section 3. Section 4 is devoted to the presentation of the results obtained and their discussion. The concluding remarks given in Section 5 end the paper.

## 2 Governing equations and boundary conditions

### 2.1 Conservation of mass of the fluid

Consider a Newtonian incompressible fluid that is sandwiched between two porous coaxial cylinders (C1) and (C2), having the same length  $L$  and a horizontal common axis. The radius of the inner cylinder (C1) is denoted by  $R_1$ , and that of the outer cylinder (C2) is represented by  $R_2$ . The specific mass  $\rho$  of the fluid and its kinematic viscosity  $\nu$  remain constant. This setup of the issue under examination should not be confused with the scenario in which we would be dealing with a porous walled pipe containing a porous medium, as in [11, 14].

We examine the zero-axial-velocity laminar flow that is located in the polar plane between the two cylinders. This flow is driven by suction and injection at the walls. It is accelerated by the rotating upstream cylinder while the downstream cylinder is at rest. The cylindrical-polar coordinates  $(r, \theta, z)$  are then adopted using the  $z$  axis as the common axis of the cylinders and the system of unit vectors  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  for the radial, azimuthal, and axial directions. The corresponding components of the flow velocity field  $\mathbf{V}$  are represented by the symbols  $V_r$ ,  $V_\theta$  and  $V_z$ , respectively.

The equation of conservation of mass that takes into consideration incoming and outgoing flows is provided in [1, 9, 22, 30–32] and is known as the following complete equation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho(|q_i| - |q_s|), \quad (1)$$

where  $|q_i|$  and  $|q_s|$  stand for the rates of fluid mass per unit mass that are injected at the upstream cylinder and suctioned at the downstream cylinder, respectively. Since the fluid is incompressible, one can see from (1) that there are two ways to express the conservation of mass in the annular duct:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = |q_i| - |q_s| = 0, \quad (2a)$$

and

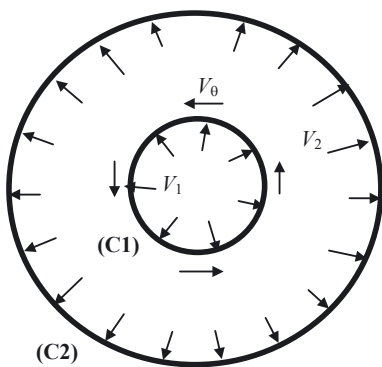
$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (2b)$$

If the axial component of the flow velocity field is very small in comparison to its radial and azimuthal components, it is permissible to assert that the flow under study occurs in the polar plane of the annular duct. We then find that the following criteria must be met in light of the relation stated in (2b):  $(V_z/V_r \ll 1, \partial V_z/\partial z \ll r^{-1} \partial(rV_r)/\partial r)$  and  $(V_z/V_\theta \ll 1, \partial V_z/\partial z \ll r^{-1} \partial V_\theta/\partial \theta)$ . Let us express the aforementioned criteria in terms of the length ( $L$ ) of the cylinders, the mean radius of the annular duct,  $R_m = (R_1 + R_2)/2$ , and the half-width of the air gap,  $h = (R_2 - R_1)/2$ . The result is:

$$\frac{V_z}{V_r} \ll 1 \text{ and } \frac{V_z}{V_r} \ll \frac{L}{2h}, \quad (3)$$

$$\frac{V_z}{V_\theta} \ll 1 \text{ and } \frac{V_z}{V_\theta} \ll \frac{L}{2\pi R_m}. \quad (4)$$

Using (3) and (4), the flow velocity field can be simplified in the form  $\mathbf{V}(V_r, V_\theta, 0)$ . Conservation of mass, which imposes a zero divergence velocity field for an incompressible fluid, requires one of the cylinders to undergo injection and then assume the role of the upstream cylinder, while the other cylinder must undergo suction and assume the role of the downstream cylinder. As a result, there is no fluid flow conducted in the axial direction of the two cylinders. The absolute values of the flow velocity for the injection and suction through the cylinders (C1) and (C2) are denoted by  $V_1$  and  $V_2$ , respectively, as shown in Figure 1. This figure shows the annular polar plane filled with Newtonian fluid between the two coaxial porous cylinders C1 and C2, with C1



**Figure 1:** Newtonian fluid-filled annular polar plane between two coaxial porous cylinders (C1 and C2) with an accelerated rotating wall at C1. The fluid is injected orthogonally to the walls at the upstream cylinder (C1) with uniform velocity  $V_1$ , and it is suctioned at the downstream cylinder (C2) with uniform velocity  $V_2$ . These velocities are depicted along with the rotating velocity of the upstream cylinder.

as the rotating upstream cylinder and C2 as the downstream cylinder at rest.

As a result of what has been discussed to obtain the prerequisites stated in (3) and (4), (2b) is transformed into its simplified form,

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (5)$$

Let us now concentrate our attention on (2a). We use the almost point-like surface of the pores of the cylinders and apply the fact that the fluid is injected or suctioned at uniform velocity, orthogonally to the walls. If one considers the case where the fluid is injected through the inner cylinder (C1) and suctioned through the outer cylinder (C2), the calculations of the rates  $|q_i|$  and  $|q_s|$  then give [1]:  $|q_i| = \rho N_1 (V_1 s_1) / (\rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L)$  and  $|q_s| = \rho N_2 (V_2 s_2) / (\rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L)$ , where the parameters of the setup are defined by the subscripts (1) and (2) for the cylinders (C1) and (C2), respectively, with  $N_1$  and  $N_2$  the number of pores, and  $s_1$  and  $s_2$  the pore surfaces.

Applying (2a), one gets the relationship that connects the flow velocities  $V_1$  and  $V_2$ ,  $V_2/V_1 = \lambda_1 R_1 s_1 / (\lambda_2 R_2 s_2)$ , where  $\lambda_1 = N_1 / (2\pi R_1 L)$  and  $\lambda_2 = N_2 / (2\pi R_2 L)$  represent the surface density of the pores. Writing the ratio  $R_1/R_2$  in terms of  $\delta$ , and introducing an additional arbitrary coefficient ( $c$ ) that the experimenter could apply between  $V_1$  and  $V_2$ , the aforementioned connection between  $V_1$  and  $V_2$  leads to the crucial formula:

$$V_2 = \alpha \left( \frac{R_1}{R_2} \right) V_1 = \alpha \left( \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right) V_1. \quad (6)$$

In (6),  $\delta$  represents the parameter that is defined as  $\delta = h/R_m = h/(R_1 + h)$  and enables one to compare the half-width of the air gap to the mean radius of the duct. The dimensionless parameter  $\alpha$  that is defined as  $\alpha = c(\lambda_1/\lambda_2)(s_1/s_2)$  depends on the surface and density of the pores of the two cylinders. It stands for the problem's velocity coefficient, which was revealed in the introduction.

## 2.2 Unusual equation for the polar-plane vorticity

The Navier–Stokes equation, which is expressed in the following form [1, 31, 32]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \operatorname{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (7)$$

is the momentum equation that controls the flow in the absence of body forces, with  $P$  representing the pressure,  $\operatorname{Curl}$  the rotational of the velocity field  $\mathbf{V}$ ,  $\times$  the vector product,  $\Delta$  the vector Laplacian operator, and  $t$  the time. The

stream function  $\psi$  dictated by (5) must exist, according to the formulas [1, 31, 32],

$$V_r = r^{-1}\partial\psi/\partial\theta \text{ and } V_\theta = -\partial\psi/\partial r, \quad (8)$$

which lead to the relationship known in Cartesian coordinates and valid for the polar plane:

$$\begin{aligned} \text{Curl}\mathbf{V} &= -(\nabla^2\psi)\mathbf{e}_z, \text{ with} \\ \nabla^2\psi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Let us employ a novel strategy to demonstrate the vorticity equation, which is novel in that it is thought of in polar coordinates. For this purpose, we use (9) together with the following formulas that we have initiated for any polar velocity field (see Appendix):

$$\text{Curl}\mathbf{V} \times \mathbf{V} = -(\nabla^2\psi)\mathbf{grad}\psi, \quad (10a)$$

$$\text{Curl}(\text{Curl}\mathbf{V} \times \mathbf{V}) = -\mathbf{grad}(\nabla^2\psi) \times \mathbf{grad}\psi, \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{V} &= \mathbf{grad}(\text{div}\mathbf{V}) - \text{Curl}(\text{Curl}\mathbf{V}) \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2\psi)\mathbf{e}_r - \frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2\psi)\mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (10c)$$

$$\text{Curl}(\Delta\mathbf{V}) = -(\nabla^2\nabla^2\psi)\mathbf{e}_z. \quad (10d)$$

Applying the rotational to (7) and using (10a), (10b), (10c), and (10d), one gets the steady polar plane vorticity equation (see Appendix), which we previously found in [1],

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\psi - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2\psi\right) = \nu\nabla^2\nabla^2\psi. \quad (11)$$

### 2.3 Boundary conditions

We define the acceleration of the rotating upstream cylinder in an appropriate manner in order to obtain boundary conditions that are suited to the similarity-solutions approach we adopt. In this regard, we draw inspiration from the works of Brady and Acrivos [23], which are done for impermeable channels and tubes and show how to deal with longitudinally accelerated moving walls.

As a consequence, the azimuthal velocity of the upstream cylinder is assumed to be proportional to the angular coordinate  $\theta$ , which plays the role of dynamic variable and then represents time. Using the condition of conservation of mass found in (6) and looking only for the configuration in which the downstream cylinder is kept at rest while the upstream cylinder rotates, the dimensional boundary conditions therefore turn out to be the following:

$$V_r = QV_1 \text{ and } V_\theta = a_1U\theta, \text{ at } r = R_1, \quad (12a)$$

$$V_r = QV_2 = Q\alpha\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)V_1 \text{ and } V_\theta = a_2U\theta, \text{ at } r = R_2, \quad (12b)$$

$$Q = 1 \text{ with } a_1 = 1 \text{ and } a_2 = 0, \quad (12c)$$

$$Q = -1 \text{ with } a_1 = 0 \text{ and } a_2 = 1. \quad (12d)$$

The strength of the acceleration of the rotating upstream cylinder is determined by the dimensional positive parameter  $U$  that acts like a velocity, according to (12a) and (12b). In the aforementioned relationship, two dimensionless parameters ( $a_1$ ,  $a_2$ ) are introduced to enable one to treat the desired scenarios in which the downstream cylinder C1 or C2 is kept at rest while the upstream cylinder rotates. More specifically, we have  $a_1 = 1$  and  $a_2 = 0$  if the inner cylinder is rotating while the outer cylinder is immobile. In the opposite scenario, the outer cylinder is rotating and the inner cylinder is at rest, and we have  $a_1 = 0$  and  $a_2 = 1$ . As seen in (12c) and (12d), the parameter  $Q$  enables us to take into consideration the two possible orientations of the flow, namely the one for which  $Q = 1$  and which corresponds to the injection at (C1) with the suction at (C2), and the other ( $Q = -1$ ) in which the injection is applied at (C2) with the suction at (C1).

### 2.4 Dimensionless governing equations

We need to construct dimensionless variables as commonly required. For this purpose, length, stream function, pressure and pressure gradient are made dimensionless by  $h = (R_2 - R_1)/2$ ,  $V_{ref}h$ ,  $\rho V_{ref}^2$ , and  $\rho V_{ref}^2/h$ , respectively, where  $V_{ref}$  is the reference velocity. This velocity must be properly established by taking into consideration the causes of the movement of the fluid. It is then crucial to note that the flow under study is driven by two different processes: the process of injection and suction at the walls, and the accelerated rotation of the upstream cylinder. Therefore, the reference velocity is constructed by adding the velocities provided by each driver of the flow, as we have done in our previous works [9, 22]. As a result, we have:

$$V_{ref} = V_1 + U. \quad (13)$$

Using the same denotations for both dimensional and dimensionless parameters, the dimensionless version of (11) is then determined:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\psi - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2\psi\right) = \frac{1}{\text{Re}}\nabla^2\nabla^2\psi, \quad (14)$$

where  $\text{Re} = V_{ref}h/\nu = (V_1 + U)h/\nu$  represents the Reynolds number. Applying (12a) and (12b), it is possible

to rewrite the boundary conditions in terms of  $\psi$  in the following dimensionless form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= Q(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1) \text{ and} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -a_1\beta(1 + \beta)^{-1}\theta, \text{ at } r = \delta^{-1} - 1, \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= Q\alpha(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1) \text{ and} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -a_2\beta(1 + \beta)^{-1}\theta, \text{ at } r = \delta^{-1} + 1, \end{aligned} \quad (15b)$$

where  $\beta = U/V_1$  is a parameter that is used to compare the orders of magnitude of the radial and azimuthal velocities, due to the two different scalings of the velocity components.

### 3 Strategy and method of solution

#### 3.1 Effective dimensionless formulation of the problem

As shown in (15a) and (15b), the aforementioned boundary conditions are defined for the two radial boundaries,  $\delta^{-1} - 1$  and  $\delta^{-1} + 1$ , which then depend on the gap ratio. However, fixed boundaries for the radial coordinate must be used when doing numerical research. As a result, we perform a change of variable that involves a new variable  $\xi = Ar^2 + B$  such that the bounding conditions of  $r$ ,  $\delta^{-1} - 1 \leq r \leq \delta^{-1} + 1$ , correspond to  $-1 \leq \xi \leq 1$ . The result is:

$$\xi = \frac{\delta}{2}r^2 - \frac{1 + \delta^2}{2\delta}. \quad (16)$$

The key equation (14) can therefore be rewritten in terms of  $\xi$  as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \xi} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi \\ = \text{Re}^{-1} \left( 2 \frac{\partial}{\partial \xi} D^2 \psi + \delta^{-1} (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} D^2 \psi \right) \\ + \text{Re}^{-1} \delta (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} D^2 \psi \end{aligned} \quad (17)$$

where the second-order differential operator  $D^2$  is defined as

$$\begin{aligned} D^2 \psi &= 2\delta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \\ &+ \left( \frac{\delta^2}{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

The boundary conditions (15a) and (15b) become,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Q(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1) \text{ and}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -a_1\beta(1 + \beta)^{-1}(1 - \delta)^{-1}\theta, \text{ at } \xi = -1, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Q\alpha(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1) \text{ and}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -a_2\beta(1 + \beta)^{-1}(1 + \delta)^{-1}\theta, \text{ at } \xi = 1. \quad (19b)$$

#### 3.2 Derivation of an ordinary differential equation for the issue under study

Since the duct's radius does not vary in the streamwise direction ( $\theta$ ) and the fluid's injection or suction is evenly performed in the radial direction, it is permissible to assume the so-called similarity-solutions hypothesis, which was first considered by Berman [3].

According to this theory, the transverse flow velocity  $V_r$  is independent of the streamwise coordinate  $\theta$ , all parameters being dimensionless. Rewriting the dimensionless form of the definition of  $V_r$  from (8), and integrating with the condition,  $\psi = 0$  at  $\theta = 0$ , one then obtains  $\psi(r, \theta) = \theta\varphi(r)$ , where  $\varphi(r) = rV_r(r)$ . When  $\xi$  is introduced, one gets:

$$\psi(\xi, \theta) = \theta\varphi(\xi). \quad (20)$$

Introducing (20) into (17), the unknown function  $\varphi$ , which represents the stream function per unit polar angle, satisfies the fourth-order ordinary differential equation,

$$\begin{aligned} \delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)(\varphi\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}\varphi^{(2)}) + 2\delta^2(2\varphi\varphi^{(2)} - (\varphi^{(1)})^2) \\ = \text{Re}^{-1}(8\delta^2\varphi^{(2)} + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)\varphi^{(3)} + (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2\varphi^{(4)}) \end{aligned} \quad (21)$$

under the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} \varphi &= Q(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1) \text{ and} \\ \varphi^{(1)} &= -a_1\beta(1 + \beta)^{-1}(1 - \delta)^{-1}, \text{ at } \xi = -1, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= Q\alpha(1 + \beta)^{-1}(\delta^{-1} - 1) \text{ and} \\ \varphi^{(1)} &= -a_2\beta(1 + \beta)^{-1}(1 + \delta)^{-1}, \text{ at } \xi = 1, \end{aligned} \quad (22b)$$

where  $\varphi^{(m)}$  represents the derivative  $d^m\varphi/d\xi^m$ .

#### 3.3 The method for calculating the stream function per unit polar angle

Using the numerical shooting technique described in [29] and explained in detail in our prior works [1, 9, 22], we are able to obtain the solution to the equation found in (21), which satisfies the boundary constraints stated in (22a) and (22b).

The shooting technique includes an initial boundary value problem for the starting bound,  $\xi = -1$ , and an optimization problem at the ending bound,  $\xi = 1$ . More specifically, we use the fourth-order Runge–Kutta algorithm [29] to solve the first problem, and for the second one, the Newton-Raphson algorithm [1, 9, 22, 29] is used to find the zeros of the components of the discrepancy vector  $\mathbf{E}$ , which measures how far the computed solution is from satisfying the required conditions at the ending bound. The Runge–Kutta algorithm is advised when performing the shooting technique for the problem at hand, as this algorithm provides the numerical values of the derivatives of the stream function per unit polar angle, which are required to calculate flow velocity components and pressure gradients.

The definition interval of the parameter  $\xi$  is then discretized into 100 identically sized sub-intervals, with length  $\Delta\xi = 0.02$ , in order to achieve convergence of the Runge–Kutta and Newton-Raphson algorithms. It is well known that the numerical shooting technique is even more precise when the minimal value of the cost function  $J = |\mathbf{E}|^2$ , is very small and close to zero. For this reason, we have succeeded in reducing the cost function  $J$  to the minimum  $J_{min} \sim 10^{-25}$  thanks to the stop criterion we applied to the Newton-Raphson optimization technique. The very high accuracy of the method of solution we have chosen is demonstrated by the extreme smallness acquired for the aforementioned minimum, which also verifies that the solution produced is truly the exact solution in its numerical form.

### 3.4 Streamlines or trajectories of fluid particles

The trajectories of fluid particles, which serve as the streamlines for any steady laminar flow, are determined by the relation  $\psi = cte = K$ , as is well known [1, 9, 22]. This can be expressed as  $\theta = K/\varphi(\xi)$  using (20), where  $K$  is an integration constant whose value is derived from the coordinates of at least one point through which the considered streamline passes.

The case  $Q = 1$ , for which the inner cylinder (C1) is upstream, corresponds to the streamlines that finish by suction at the outer cylinder (C2) and start by injection at any point ( $\theta = \lambda_i, \xi = -1$ ) of the inner-cylinder wall, that is,  $K = \lambda_i\varphi(-1) = K_i$ . For the streamlines that end by suction at the inner cylinder and begin by injection at any point ( $\theta = \mu_i, \xi = 1$ ) of the outer-cylinder wall, we have:  $Q = -1$  and  $K = \mu_j\varphi(1) = K_j$ . Since (16) gives the radial

coordinate in the form  $r = \delta^{-1}\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi}$ , we find that the trajectories of the fluid particles can be defined from the Cartesian coordinates ( $X = r \cos \theta, Y = r \sin \theta$ ). They are then given by the following parametrical equations in which  $\xi$  plays the role of parameter:

$$X = \delta^{-1}\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \cos(\lambda_i\varphi(-1)/\varphi(\xi)), \quad (23a)$$

$$Y = \delta^{-1}\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \sin(\lambda_i\varphi(-1)/\varphi(\xi)). \quad (23b)$$

Equations (23a) and (23b) are valid for the streamlines that begin from the inner cylinder (C1). For those where the outer cylinder (C2) is upstream, we have:

$$X = \delta^{-1}\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \cos(\mu_j\varphi(1)/\varphi(\xi)), \quad (24a)$$

$$Y = \delta^{-1}\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\xi} \sin(\mu_j\varphi(1)/\varphi(\xi)). \quad (24b)$$

### 3.5 Pressure distribution in the flow

Finding the dimensionless radial and azimuthal pressure gradients in terms of  $\xi$  and  $\theta$  requires taking the dimensionless momentum equation in polar coordinates when projected along the radial and azimuthal directions. This yields

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= \theta^2 \delta (\varphi^{(1)})^2 - \delta^2 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-1} \varphi \varphi^{(1)} \\ &\quad + \delta^3 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-2} \varphi^2 \\ &\quad + \text{Re}^{-1} (2\delta^2 (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(1)} + \delta \varphi^{(2)}), \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= \theta (2\delta \varphi \varphi^{(1)} + (1 + \delta^2 + 2\delta\xi) (\varphi \varphi^{(2)} - (\varphi^{(1)})^2)) \\ &\quad + \text{Re}^{-1} \theta (-4(1 + \delta^2 + 2\delta\xi) \varphi^{(2)} - \delta^{-1} (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2 \varphi^{(3)}), \end{aligned} \quad (25b)$$

where  $\varphi$  satisfies (21). The result presented in (25a) directly provides the radial pressure gradient  $G_\xi = \partial P / \partial \xi$  and the result that is outlined in Equation (25b) can be exploited to compute the azimuthal pressure gradient as  $G_\theta = r^{-1} \partial P / \partial \theta = \delta (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-1/2} \partial P / \partial \theta$ .

It is worth pointing out that there is a further approach for obtaining Equation (21) that governs  $\varphi$  by equating the results of the derivatives,  $\partial^2 P / \partial \xi \partial \theta$ , which can be calculated from (25a) on the one hand and (25b) on the other hand. This method can be used to verify the accuracy of the pressure gradients calculated in (25a) and (25b). After that,

one may demonstrate that the dimensionless distribution of pressure in the fluid is derived by integrating (25b) and taking into consideration (25a) and (21). This yields:

$$P(\xi, \theta) = \frac{\theta^2}{2} G(\xi) + \int_{-1}^{\xi} H(\xi) d\xi + p_0, \quad (26a)$$

where  $P_0$ ,  $G$  and  $H$  are defined by the following expressions:

$$P_0 = p(\xi = -1, \theta = 0), \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} G(\xi) = & 2\delta\varphi\varphi^{(1)} + (1 + \delta^2 + 2\delta\xi)(\varphi\varphi^{(2)} - (\varphi^{(1)})^2) \\ & + \text{Re}^{-1}(-4(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)\varphi^{(2)} - \delta^{-1}(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^2\varphi^{(3)}), \end{aligned} \quad (26c)$$

$$\begin{aligned} H(\xi) = & -\delta^2(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-1}\varphi\varphi^{(1)} \\ & + \delta^3(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-2}\varphi^2 \\ & + \text{Re}^{-1}(2\delta^2(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)\varphi^{(1)} + \delta\varphi^{(2)}). \end{aligned} \quad (26d)$$

For the aforementioned relations to be valid, it is demonstrated that  $G$  and  $\varphi$  are connected by the relation,  $2\delta(\varphi^{(1)})^2 = dG/d\xi$ , which is proven to be an equivalent form of (21).

To numerically evaluate pressure gradients and pressure distribution in the flow using (25a) and (25b), we have to reuse the set  $(\xi_j)$  of the discretized values that were previously utilized in the Runge–Kutta algorithm and we must also introduce the set  $(\theta_k)$  of the necessary discretized values for the polar angle. The numerical form of (26) then gives the following numerical values at the point  $(\xi_j, \theta_k)$  for the excess in pressure in the flow:

$$P_{jk} = P(\xi_j, \theta_k) - P_0 = \frac{\theta_k^2}{2} G_j + F_j \quad (27a)$$

where

$$G_j = G(\xi_j) \text{ and } F_j = F(\xi_j) = \int_{-1}^{\xi_j} H(\xi) d\xi \quad (27b)$$

To reduce the time duration for the machine calculation of the  $F_j$  values that are required in (27a), we avoid running any algorithm of integration such as the Simpson algorithm [25], and adopt the following procedure based on the relation,  $dF/d\xi = H(\xi)$ , in order to use the resulting iterative formula:

$$F_{j+1} = F_j + (\Delta\xi)H_j \text{ and } H_j = H(\xi_j), \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \dots, \quad (28a)$$

$$\text{with } F_0 = F(\xi = -1) = 0. \quad (28b)$$

## 4 Results and discussion

### 4.1 Conditions of existence of the steady laminar flow under study

As already mentioned, the only configuration examined is that where the downstream cylinder is at rest. The streamlines are checked for various values of the dimensionless parameters  $\delta$ ,  $\alpha$  and  $\beta$  while the Reynolds number is kept constant and equal to the value  $\text{Re} = 2$ . To make the flow pattern more visible, these streamlines are displayed for  $\delta = 5/8$ .

We take into consideration the following three configurations to achieve an organized study. First, both cylinders are initially at rest. Second, the outer cylinder (C2) is downstream and at rest while the inner cylinder (C1) is upstream and rotating. Third, the inner cylinder (C1) is downstream and at rest when the outer cylinder (C2) is upstream and rotating.

We compute 21 streamlines for distinct patterns using (23a), (23b), (24a), and (24b). For each pattern, this gives the values  $\lambda_i = i(2\pi)/20$  and  $\mu_j = j(2\pi)/20$  with  $i, j = 0, 1, \dots, 20$ . Since it is well known that the streamlines of any steady laminar flow must not intersect, we use this condition to ascertain if the steady laminar flow under study occurs or not. Therefore, the computed streamlines are acceptable when they do not intersect.

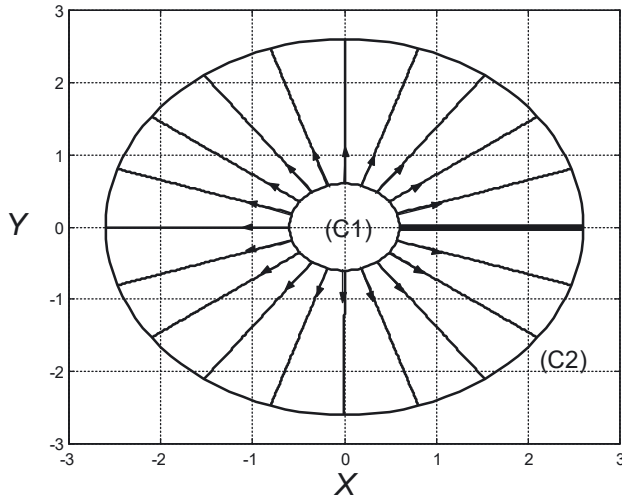
#### 4.1.1 Both cylinders are at rest

We set:  $a_1 = 0$  and  $a_2 = 0$ , with  $\beta = 0$ , in order to examine the specific scenario where the two cylinders are kept at rest. We find that the steady laminar flow under discussion exists when the inner cylinder is upstream ( $Q = 1$ ) and if  $\alpha > 1$ . For the inverse configuration ( $Q = -1$ ), the flow is present when the inner cylinder is downstream and if  $0 < \alpha < 1$ .

For the specific value  $\alpha = 1$ , both orientations of the flow exhibit radial steady laminar flow. The streamlines that are produced for the case of the upstream inner cylinder are shown in Figure 2. From what has been discussed before, it can be inferred that our calculations support the outcomes previously found in Ref. [1].

#### 4.1.2 The downstream cylinder is at rest and the upstream cylinder is rotating

Calculations demonstrate that the flow under study continues to exist for the same combinations of values ( $Q, \alpha$ )



**Figure 2:** Radial flow that results from keeping both cylinders at rest ( $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \beta = 0$ ) while the inner cylinder is upstream ( $Q = 1$ ). The opposite arrangement in which the outer cylinder is upstream is obtained by setting  $Q = -1$ . These results support the findings that were previously published in Ref. [1].

as those discovered in the previous situation where the two cylinders are at rest, if the velocity ratio  $\beta$  is properly selected. More specifically, the acceptable streamlines are achieved for  $\beta$  less than or equal to the critical value  $(\beta_c)_1 = 0.1$  when the inner cylinder is upstream and rotating, that is  $Q = 1$  and  $\alpha > 1$ , as shown in Figure 3a and b, which are plotted for  $\beta = 0.05$  and  $\beta = 0.1$ , respectively. In Figure 3c and d shown for  $\beta = 0.2$  and  $\beta = 1.0$ , respectively, it can be observed that for  $\beta > 0.1$ , the computed streamlines intersect and are therefore unacceptable.

Except for the values of  $\beta$  less than or equal to the critical value  $(\beta_c)_2 = 0.02$ , the streamlines computed are unacceptable for the inverted arrangement where the outer cylinder is upstream and rotating. The acceptable streamlines are shown for  $\beta = 0.01$  and  $\beta = 0.02$  in Figure 4a and b. Figure 4c and d exhibit unacceptable streamlines for the two values,  $\beta = 0.04$  and  $\beta = 0.08$ , which exceed  $(\beta_c)_2$ .

One can see that the total incoming flow produced by injection at the upstream cylinder is evacuated by suction through a portion of the surface of the downstream cylinder. In all figures illustrating the patterns of allowable streamlines of the steady laminar flow analyzed, this evacuated flow leaves the remaining area of that surface free from fluid suction. The patterns of streamlines displayed in those figures then reveal two distinct zones of fluid flow: an internal zone where the fluid is at rest, and the remaining zone where the flow is present and exhibits regular streamlines that do not intersect. As seen in those figures, these two zones are separated by the line  $IJK$ , which connects the three

characteristic points  $I, J$ , and  $K$  and is composed of the two singular streamlines  $IJ$  and  $IK$ . Point  $I$  is a singular point that is placed on the upstream cylinder, while points  $J$  and  $K$  are on the downstream cylinder.

Calculations demonstrate that points  $I, J$ , and  $K$  remain in their positions regardless of changes in the velocity ratio  $\beta$ . Due to the principle of mass conservation, these positions are only set in accordance with the values of the velocity coefficient  $\alpha$ , which are in relation with the surface area of the downstream cylinder via which the entire incoming fluid mass is drawn away by suction, as seen in Figures 3c, 4c, and 4d. For the values of  $\beta$  that are located in the upper vicinity of the critical value  $\beta_c$ , we observe, as seen in these figures, that the singular line  $IJK$  highlights an additional critical point ( $A$ ) whose existence announces the proximity of the streamlines' unacceptability, that is, the presence of intersection points between streamlines.

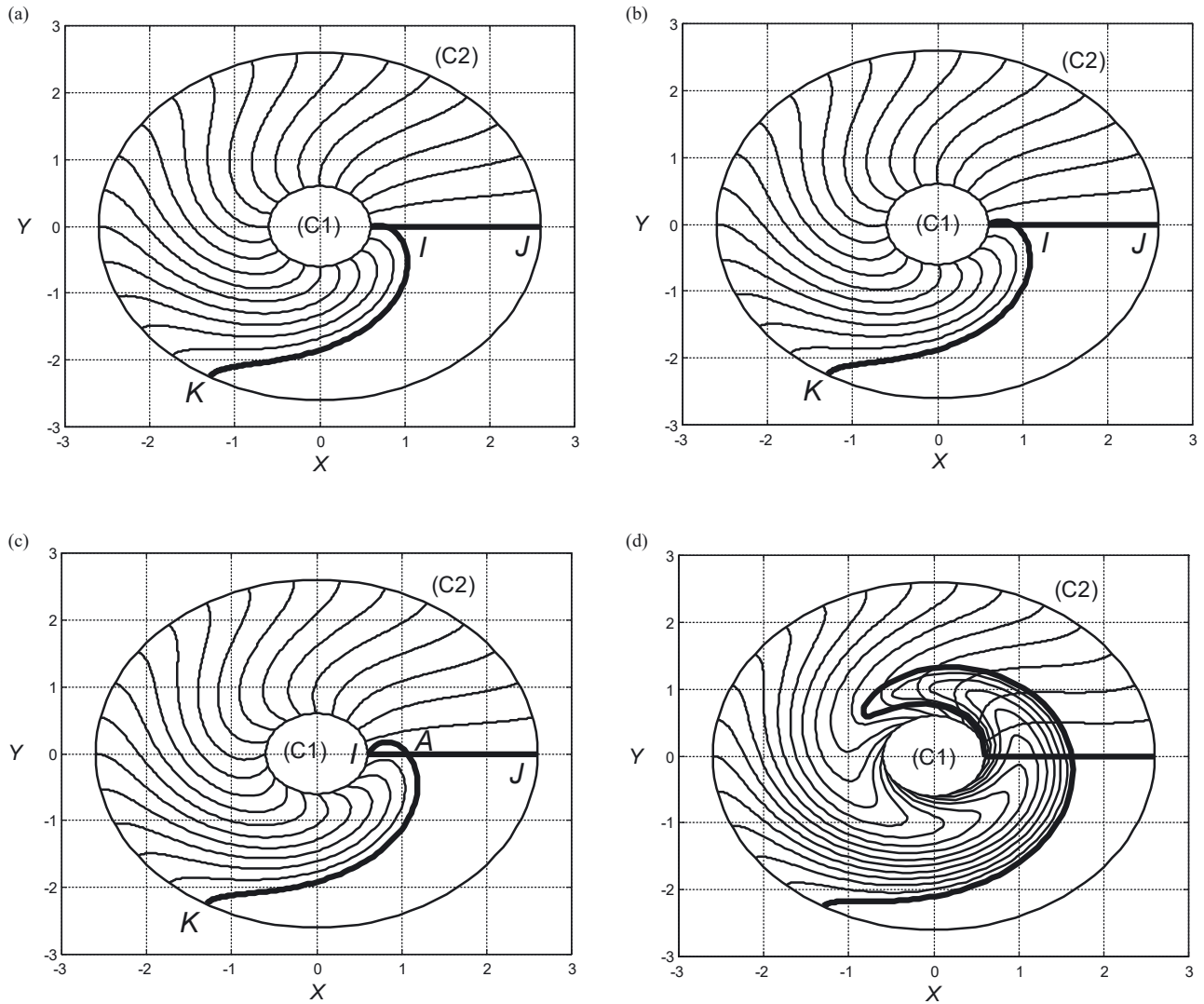
Examining thoroughly the plots of the acceptable streamlines shown in Figure 3a, b and 4a, b, one observes that the streamlines are almost orthogonal to the rotating upstream cylinder for very small values of the angular coordinate  $\theta$ . In addition, as  $\theta$  increases, the angle between the normal to the rotating upstream cylinder and the streamlines increases at any point of the surface of that cylinder. This is consistent with the boundary conditions stated in (12a) and (12b), which predict that the azimuthal component of the velocity field is proportional to  $\theta$  for the steady laminar flow under discussion.

Then, one understands why, for small values of the polar angle, the azimuthal velocity is so weak that the streamlines are observed to be nearly orthogonal to the upstream cylinder rotating. It is also clear why the angle between the streamlines and the normal to the rotating cylinder increases as the polar angle increases. Also, it can be seen that the streamlines approaching the downstream cylinder that is kept at rest are strictly orthogonal to it. This demonstrates that, for fluid particles in contact with the surface of the immobile cylinder, the azimuthal component of the velocity field cancels.

## 4.2 Effects of the velocity ratio $\beta$ on the radial velocity

By using the formula  $V_r(\xi) = \delta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{-1/2}\varphi(\xi)$ , the acceptable solution is exploited to compute the radial component of the velocity field in the fluid flow zone. The values thus obtained are plotted in Figures 5 and 6.

First, based on the two possible orientations of the flow under study, these figures confirm that the values of  $V_r$  are positive for  $Q = 1$  and negative for  $Q = -1$ . Second, to begin, we position ourselves near the downstream cylinder



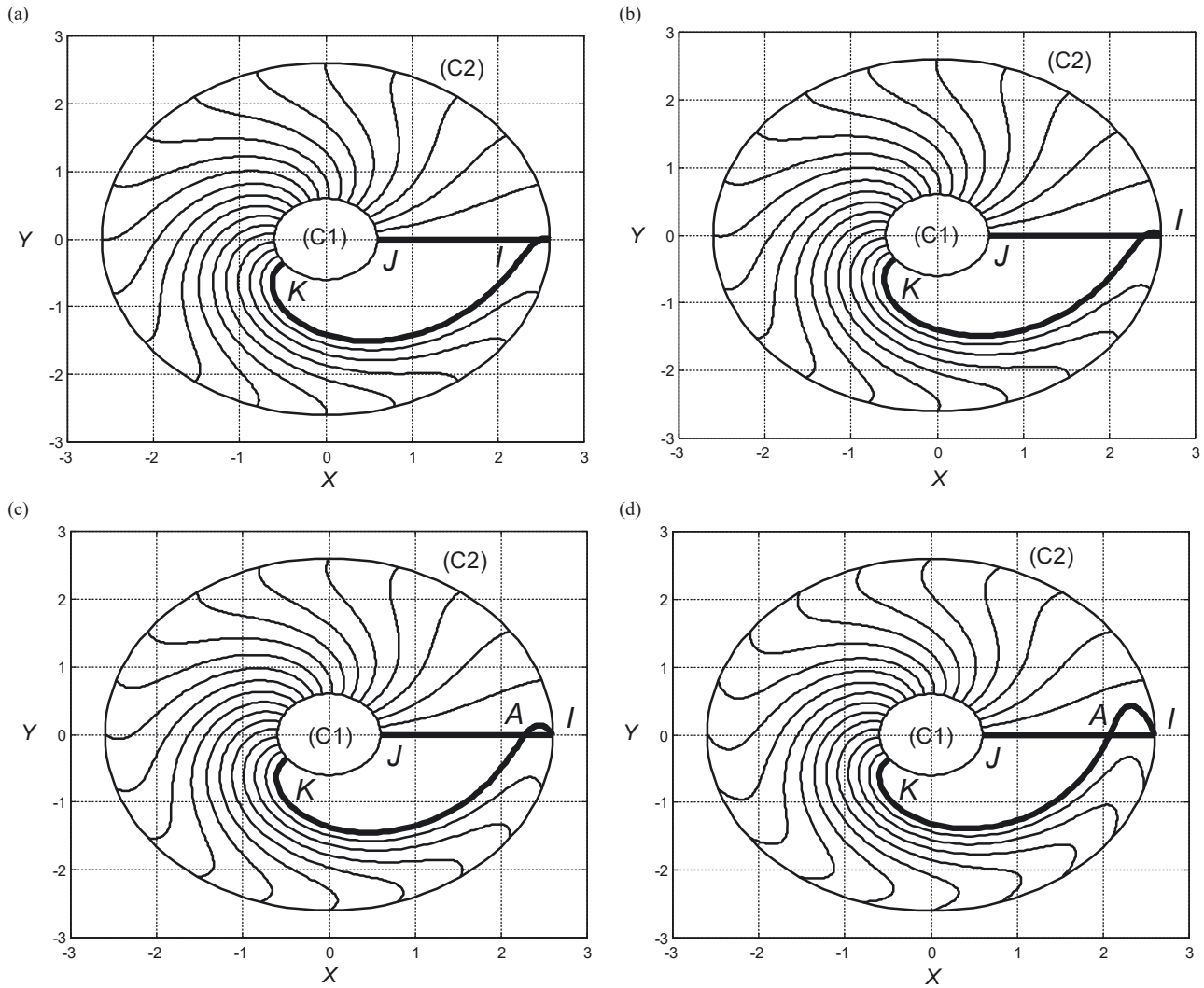
**Figure 3:** Streamlines for the upstream inner cylinder in rotation and the outer cylinder at rest ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ); for (a)  $\beta = 0.05$ , (b)  $\beta = 0.1$ , (c)  $\beta = 0.2$  and (d)  $\beta = 1$ .

at rest, where the azimuthal velocity must cancel according to the no-slip requirement. Because of conservation of mass, the radial velocity then start with its maximum value at this vicinity, as seen in Figures 5 and 6. As one moves away from the downstream cylinder, the azimuthal velocity increases and the radial velocity then decreases until it reaches its minimum value, which is imposed by injection on the upstream cylinder. This explains why the plots of the radial velocity presented in Figures 5 and 6 shows that the values of this velocity component decreases as  $\xi$  increases, for a given value of  $\beta$ .

We now need to investigate how the velocity ratio affects the radial velocity component. So, the next step is to analyze the values of  $V_r$ , as a function of  $\xi$ , for various values of  $\beta$  while  $\delta$  and  $\alpha$  are kept constant.

Let us start by considering the configuration in which the inner cylinder (C1) is upstream and spinning while the outer cylinder is downstream and at rest, that is  $Q = 1, \alpha > 1, a_1 = 1$ , and  $a_2 = 0$ . At this regard, Figure 5 shows the radial velocity profile that are computed for  $Q = 1, \delta = 5/8, \alpha = 1.5$ , and plotted for three values of  $\beta$  that do not exceed the critical value  $(\beta_c)_1 = 0.1$ , that is, the values of  $\beta$  that satisfy the necessary requirement to get acceptable streamlines found in Section 4.1.2.

As the velocity ratio  $\beta$  increases, with the suction and injection velocity kept unchanged, the azimuthal velocity component increases in absolute value due to the definition of  $\beta$ . Hence, because of conservation of mass, the radial velocity component then decreases as  $\beta$  increases for any fluid layer ( $\xi = cte$ ). This explains the effects of the



**Figure 4:** Streamlines for the upstream outer cylinder in rotation and the inner cylinder at rest ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ) for (a)  $\beta = 0.01$ , (b)  $\beta = 0.02$ , (c)  $\beta = 0.04$  and (d)  $\beta = 0.08$ .

increasing values of  $\beta$  on the radial velocity component of any fluid layer ( $\xi = cte$ ), as seen in Figure 5.

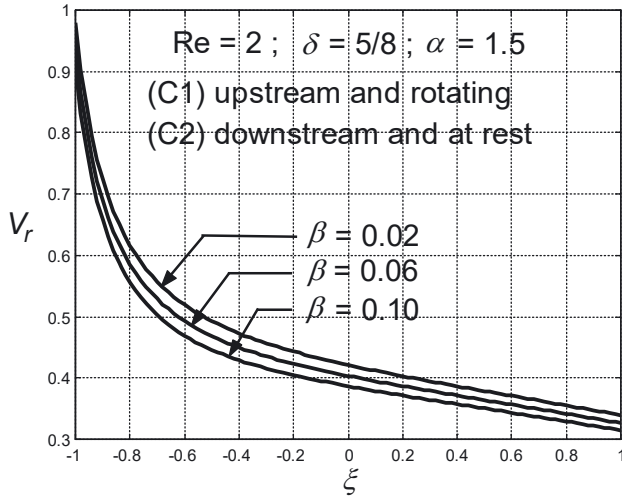
For the configuration in which the inner cylinder (C1) is downstream and at rest while the outer cylinder (C2) is upstream and rotating, the values of  $V_r$  are calculated as a function of  $\xi$ , for various values of  $\beta$  less than or equal to the critical value  $(\beta_c)_2 = 0.02$ . The plots thus obtained are presented in Figure 6 for three values of  $\beta$ ,  $\beta = 0.004$ ,  $\beta = 0.012$ , and  $\beta = 0.02$ . We note that these computed velocity profiles are all identical, as seen in Figure 6. In addition, they are almost equal to that obtained for the value  $\beta = 0.000$ , which corresponds to the configuration in which the two cylinders are at rest.

Therefore, as a result of what has been discussed before, it can be inferred from Figures 5 and 6 that, in the case of a rotating upstream cylinder with a downstream

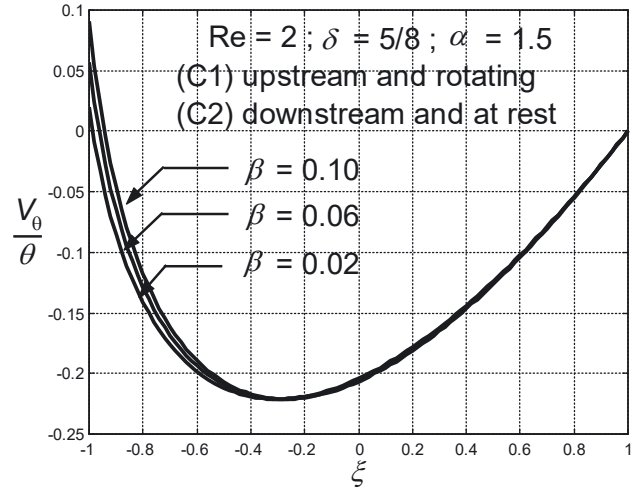
cylinder at rest, the only feasible steady-laminar-flow solution, which differs from the solution obtained for immobile cylinders, is one for which the inner cylinder is upstream and the outer cylinder is downstream, provided that the velocity ratio  $\beta$  is below the critical value  $(\beta_c)_1 = 0.1$ .

### 4.3 Effects of the velocity ratio $\beta$ on the azimuthal velocity

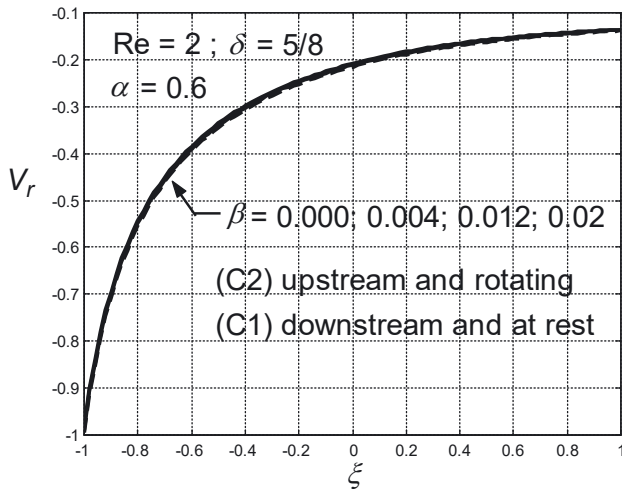
Figures 7 and 8 display the values of azimuthal velocity per unit polar angle  $V_\theta/\theta$  that are calculated using the relation  $V_\theta = -\theta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)^{1/2} \varphi^{(1)}(\xi)$ . The two orientations of the flow are taken into consideration: in Figure 7, the inner cylinder is upstream and rotating while in Figure 8, the outer cylinder is upstream and rotating. These figures show that, for the case where the outer cylinder is at rest, or for



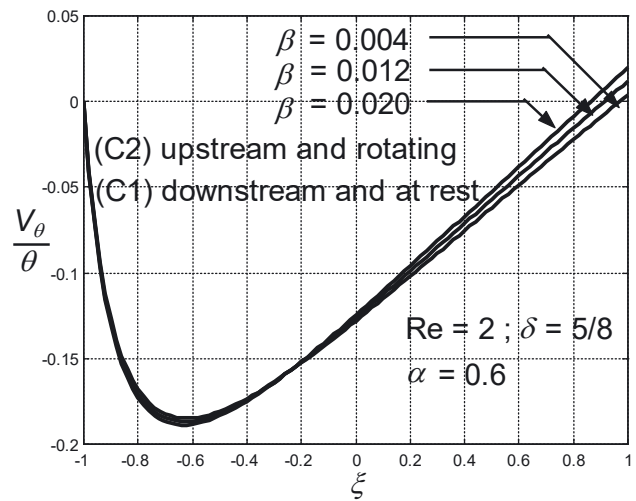
**Figure 5:** Radial velocity profile for allowed velocity ratio values ( $\beta$ ) when the inner cylinder is upstream and rotating ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ).



**Figure 7:** Azimuthal velocity profile per unit polar angle for different allowed velocity ratio values ( $\beta$ ) when the inner cylinder is upstream and rotating ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 1.5$ ).



**Figure 6:** Radial velocity profile for allowed velocity ratio values ( $\beta$ ) when the outer cylinder is upstream and rotating ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ).



**Figure 8:** Azimuthal velocity profile per unit polar angle for different allowed velocity ratio values ( $\beta$ ) when the outer cylinder is upstream and rotating ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ).

the other instance where the outer cylinder is rotating, the fluid layer in contact with the rotating upstream cylinder and the fluid layer located at  $\xi = -0.6$  or at  $\xi = 0.2$  are only minimally different in terms of their values of  $V_\theta/\theta$  as  $\beta$  increases. The values of  $V_\theta/\theta$  for the remaining fluid layers in each scenario are the same as they are as  $\beta$  increases.

As predicted from the no-slip scenario, Figures 7 and 8 show that the azimuthal velocity reaches its positive maximum value at the fluid layers in contact with the revolving upstream cylinder, and cancels at the fluid layers in contact with the immobile downstream cylinder. The value of this velocity drops to a negative minimum that is situated nearer the inner cylinder than the outer cylinder. As a result,

the azimuthal velocity unexpectedly takes on a zero value that is located between the two cylinders. The fluid layers for which this happens are situated in the close neighborhood of the rotating cylinder. Beyond the minimum, the azimuthal velocity's absolute value falls as one gets closer to the immobile cylinder.

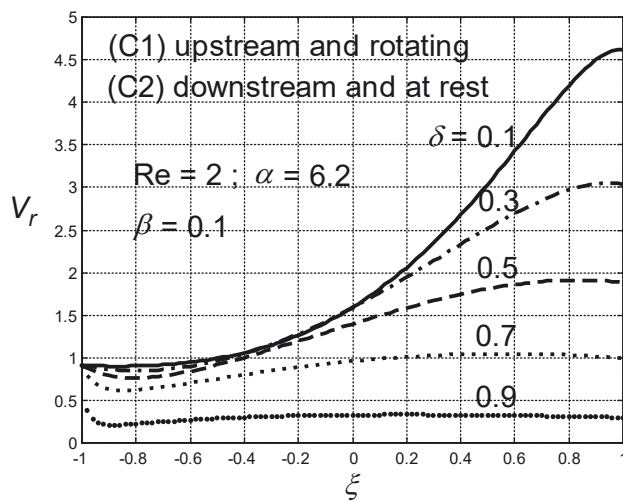
From the physical point of view, the aforementioned behaviour of the azimuthal flow velocity revealed by Figures 7 and 8 is explained by the plots of the radial velocity shown in Figures 5 and 6, together with the conservation of mass in the fluid. In addition, these data show that the computed azimuthal velocity is nearly identical to that obtained

when both cylinders are at rest, for any fluid layer except in the close vicinity of the rotating cylinder.

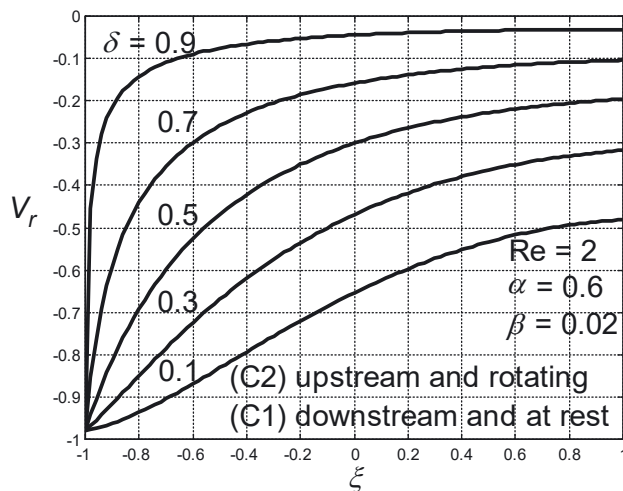
### 4.4 Effects of the gap ratio on the radial velocity

By taking various gap ratio values while keeping the ratios  $\alpha$  and  $\beta$  constant, the radial velocity of the flow is calculated as a function of  $\xi$ . The values thus obtained are plotted in Figure 9 for the inner cylinder upstream and rotating, and in Figure 10 for the outer cylinder upstream and revolving.

For a given gap ratio value, the radial velocity of the flow is low for any fluid layer located near the rotating



**Figure 9:** Radial velocity profile for different values of the gap ratio ( $\delta$ ) plotted in the case where the inner cylinder is upstream and rotating ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 6.2$ ).



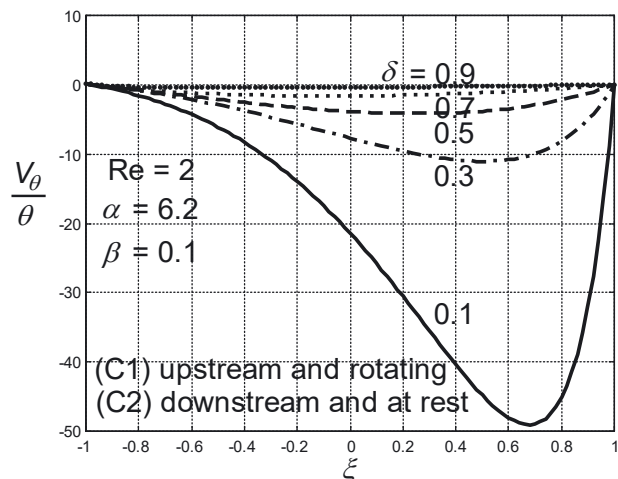
**Figure 10:** Radial velocity profile for different values of the gap ratio ( $\delta$ ) plotted in the case where the outer cylinder is upstream and rotating ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ).

upstream cylinder, as seen in Figures 9 and 10. This is explained by the conservation of mass and is due to the high values experienced by the azimuthal velocity component in the vicinity of this cylinder. These values of the azimuthal velocity remain high because of the rotation of this cylinder. As one approaches the downstream cylinder at rest, the azimuthal velocity decreases and as a consequence, the absolute value of the radial velocity increases, as seen in Figures 9 and 10.

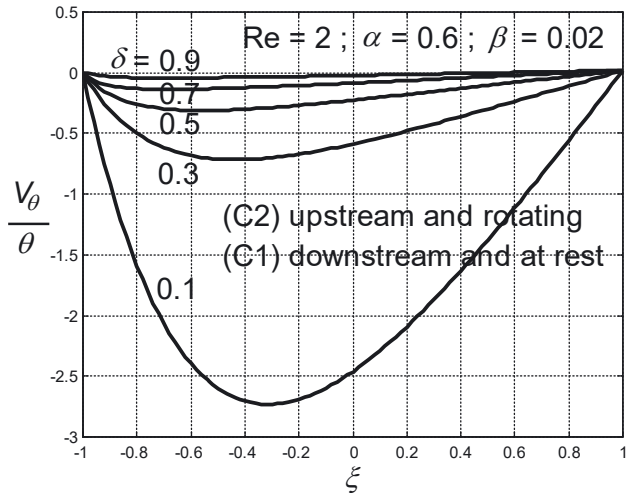
### 4.5 Effects of the gap ratio on the azimuthal velocity

The values of the azimuthal velocity per unit polar angle are presented as a function of  $\xi$  in Figures 11 and 12 for various values of the gap ratio while the parameters  $\alpha$  and  $\beta$  are kept constant and set to the suitable levels that produce acceptable streamlines. The azimuthal velocity profiles we obtained exhibit behavior for a given gap ratio value, which resembles that of the profiles seen and discussed in Figures 7 and 8.

Figures 9 and 11, in contrast to Figures 10 and 12, exhibit a point of inflexion that is found in the profiles of both radial and azimuthal components of the flow velocity. We can therefore conclude that the flow configuration in which the outer cylinder is upstream and rotating is more stable than the opposite configuration in which the inner cylinder is upstream and rotating, based on the Rayleigh inflexion point criterion. This criterion is known to be valid for parallel inviscid flows and we wish to be able to extend it to the flow under examination.



**Figure 11:** Azimuthal velocity profile for different values of the gap ratio ( $\delta$ ) plotted in the case where the inner cylinder is upstream and rotating ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \alpha = 6.2$ ).



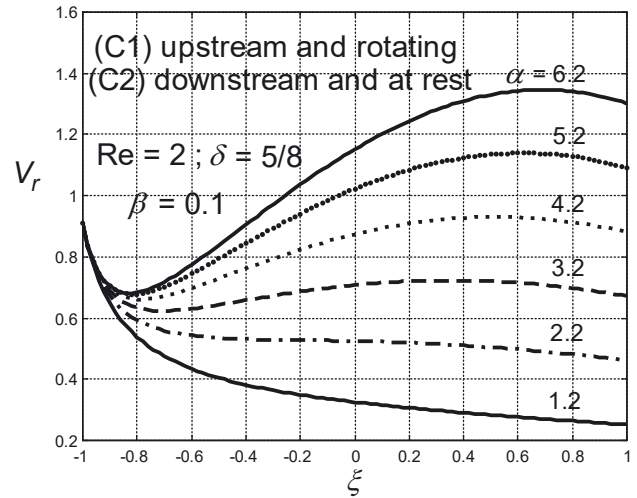
**Figure 12:** Azimuthal velocity profile for different values of the gap ratio ( $\delta$ ) plotted in the case where the outer cylinder is upstream and rotating ( $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, Q = -1, \alpha = 0.6$ ).

As the gap ratio increases from its minimum value near 0, the width of the air gap increases while the radius of the inner cylinder is kept constant according to the formula,  $\delta = h / (R_1 + h)$ , which specifies the gap ratio. Since the boundary conditions remain constant at the same time, the fluid particles with the lowest velocity then increase in number and mass in the flow, causing the decrease in the fluid momentum. Hence, one understands why the absolute values of the radial and azimuthal components of the flow velocity decrease with increasing values of the gap ratio, as demonstrated by Figures 9, 10, 11, and 12.

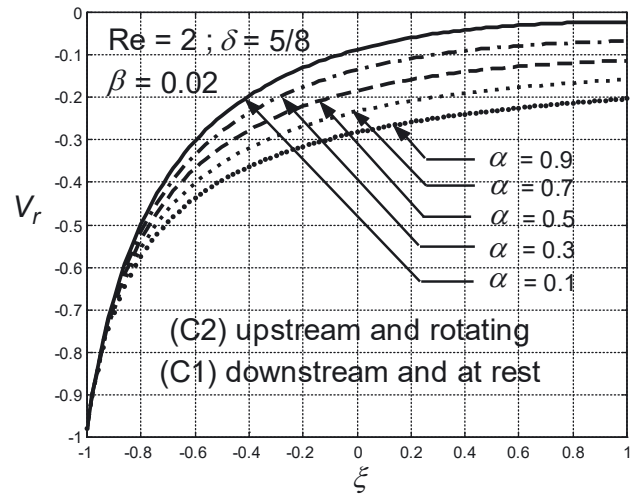
We also understand why, when the air gap ratio is close to its maximum value equal to 1, the width of the air gap asymptotically approaches infinity, and the absolute values of the components of the velocity field then decrease drastically and are almost equal to zero, as shown in Figures 9–12.

#### 4.6 Effects of the velocity coefficient $\alpha$ on the radial velocity

The research of the impacts of the velocity coefficient,  $\alpha$ , on the velocity field for the flow located in the polar plane of a porous annular pipe when the two cylinders are at rest, has been fully conducted in our previous work [1] for both directions of the flow. Although the downstream cylinder is at rest and the upstream cylinder is rotating, the behavior as a function of  $\xi$ , which is already observed and discussed in Ref. [1], is corroborated for the radial and azimuthal components of the velocity field and for both directions of the flow, as shown in Figures 13–16.



**Figure 13:** Radial velocity profile for different values of the velocity coefficient ( $\alpha$ ) in the case where the inner cylinder is upstream and rotating ( $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, Q = 1, \beta = 0.1$ ).

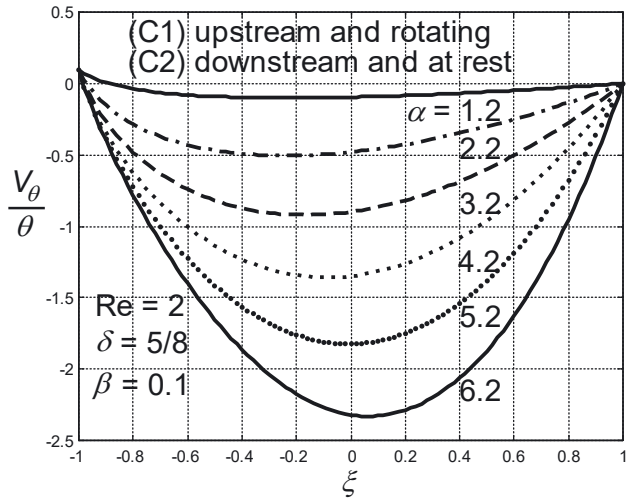


**Figure 14:** Radial velocity profile for different values of the velocity coefficient ( $\alpha$ ) in the case where the outer cylinder is upstream and rotating ( $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, Q = -1, \beta = 0.02$ ).

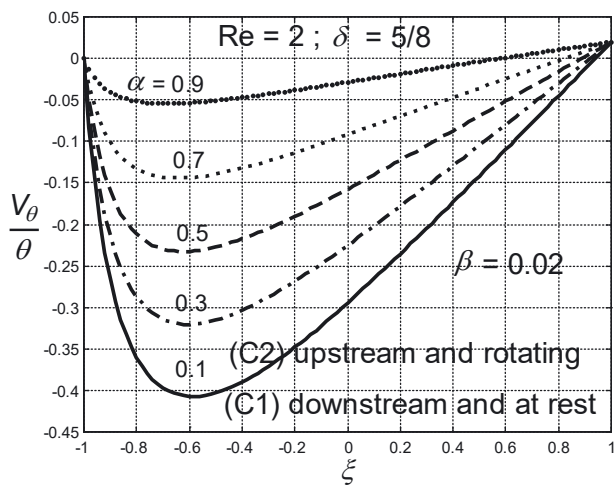
#### 4.7 Radial pressure gradient in the flow

The radial component of the pressure gradient vector is calculated for both orientations of the flow, ( $Q = 1, \alpha > 1, \beta \leq 0.1$ ) and ( $Q = -1, 0 < \alpha < 1, \beta \leq 0.02$ ), using the relations we found in (25a).

As shown in Figures 17–20, it is possible to determine how the radial component of the pressure gradient vector behaves along any circular fluid layer centered on the  $z$  axis by keeping the parameter  $\xi$  constant and continuously varying the polar angle between the values of 0 and  $2\pi$ . In a similar way, by keeping the polar angle constant and continuously increasing the parameter  $\xi$  between the values  $-1$



**Figure 15:** Azimuthal velocity profile per unit polar angle for different values of  $\alpha$  in the case where the inner cylinder is upstream and rotating ( $a_1 = 1, a_2 = 0, Q = 1, \beta = 0.1$ ).

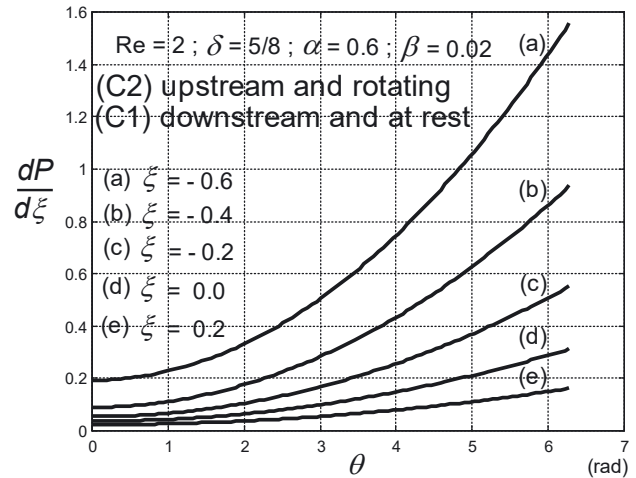


**Figure 16:** Azimuthal velocity profile per unit polar angle for different values of  $\alpha$  in the case where the outer cylinder is upstream and rotating ( $a_1 = 0, a_2 = 1, Q = -1, \beta = 0.02$ ).

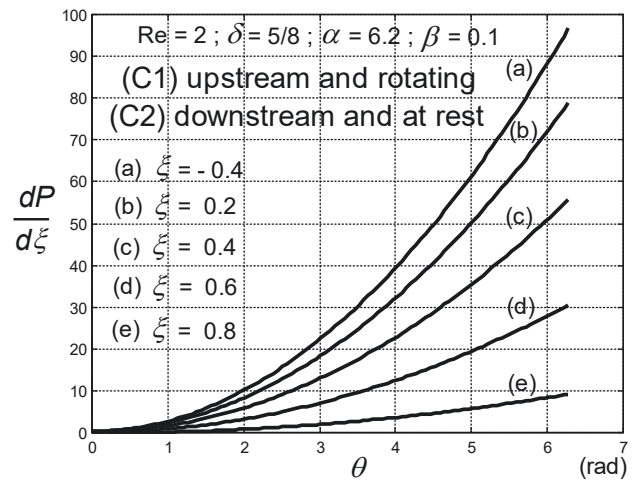
and 1, one gives itself the means to determine the behavior of the radial pressure gradient along the considered radial fluid layer, as seen in Figures 19 and 20.

Figures 17 and 18 illustrate the relationship between the polar angle and the radial pressure gradient along concentric circular fluid layers ( $\xi = cte$ ) centered on the common axis of the cylinders for the two configurations of the flow.

The Navier–Stokes equations for a Newtonian fluid, such as the one whose motion is studied in the present work, demonstrate that in the absence of body forces as in the flow considered, the pressure gradient that acts on a unit given volume of a viscous fluid can be considered as the



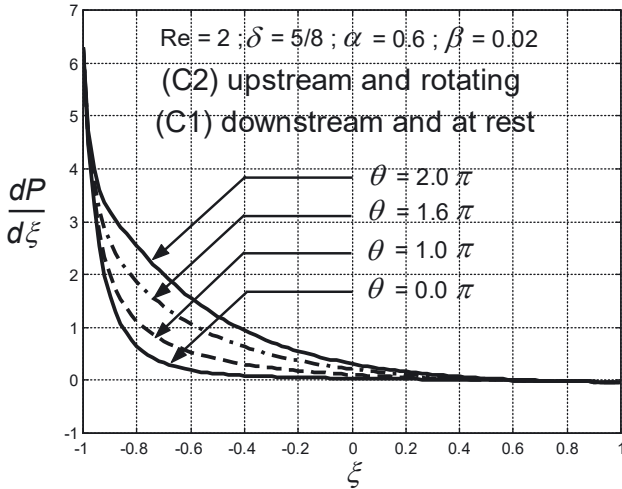
**Figure 17:** Radial pressure gradient as a function of the polar angle along z-axis concentric circular fluid layers when the outer cylinder is upstream and rotating.



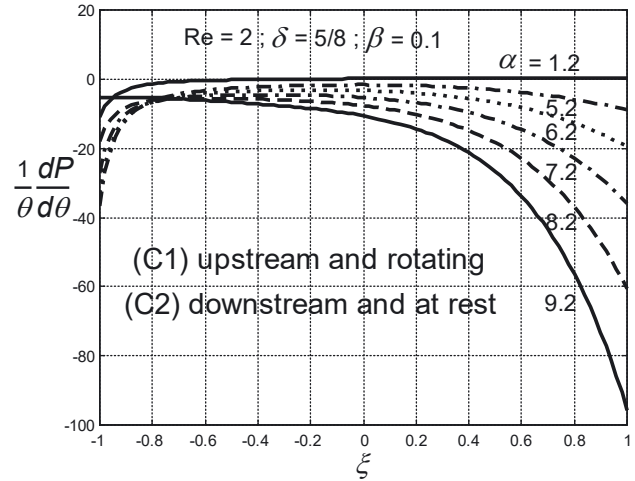
**Figure 18:** Radial pressure gradient as a function of the polar angle along z-axis concentric circular fluid layers when the inner cylinder is upstream and rotating.

dynamic action, which results from the superposition of viscous forces and opposing inertial forces. In light of this, the sign of the pressure gradient, which we can directly infer from Figures 17–24, is a key piece of information that is used to build flow understandings that concern the comparison between inertial and viscous forces. By way of consequence, we note that, in both configurations of the flow, the radial pressure gradient remains positive as seen in Figures 17–20. This leads to conclude that the radial contribution of the viscous forces to the flow exceeds that of the inertia forces.

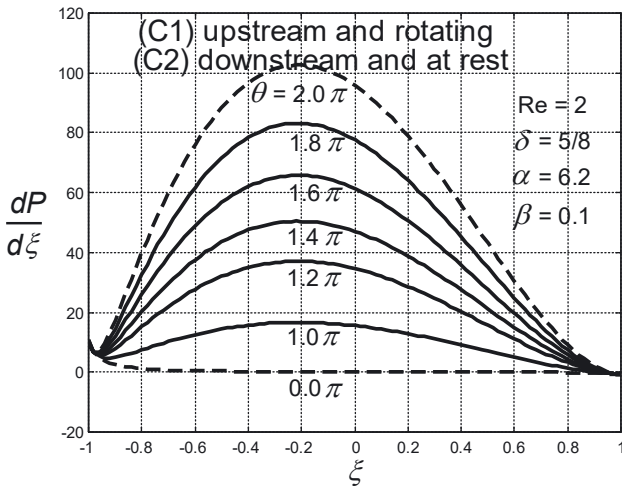
To learn more about the radial components of the inertia and viscous forces, let us start with the findings shown in Figures 17–18. Consider a fluid layer that is circular and coaxial to both cylinders. The parameter



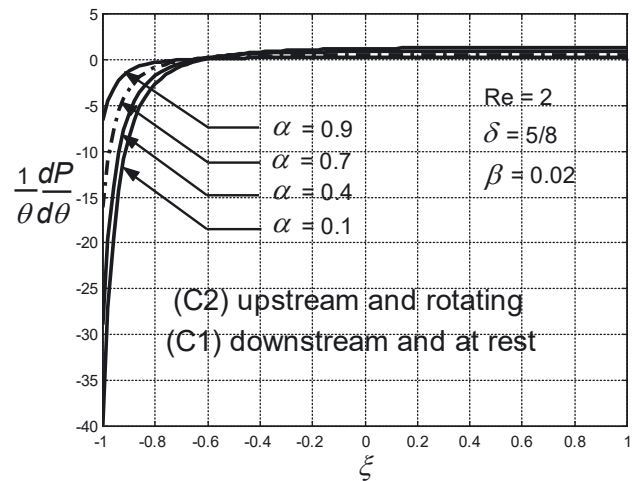
**Figure 19:** Radial pressure gradient as a function of  $\xi$  along radial fluid layers when the outer cylinder is upstream and rotating with the inner cylinder downstream and at rest.



**Figure 21:** Azimuthal pressure gradient per unit polar angle as a function of  $\xi$  for different values of the velocity coefficient ( $\alpha$ ) when the inner cylinder is upstream and rotating.



**Figure 20:** Radial pressure gradient as a function of  $\xi$  along radial fluid layers when the inner cylinder is upstream and rotating with the outer cylinder downstream and at rest.

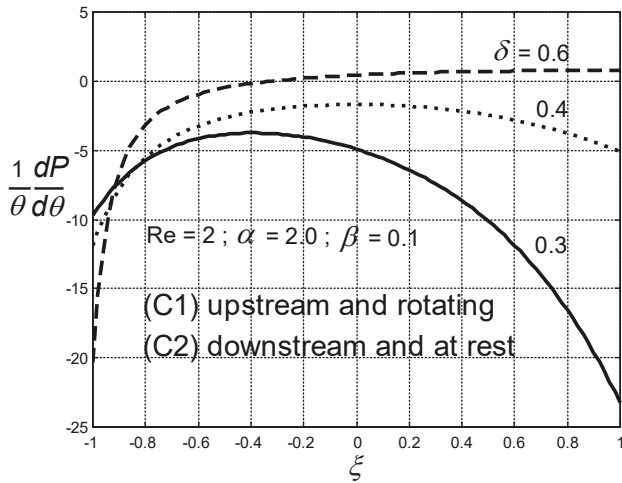


**Figure 22:** Azimuthal pressure gradient per unit polar angle as a function of  $\xi$  for different values of the velocity coefficient ( $\alpha$ ) when the outer cylinder is upstream and rotating.

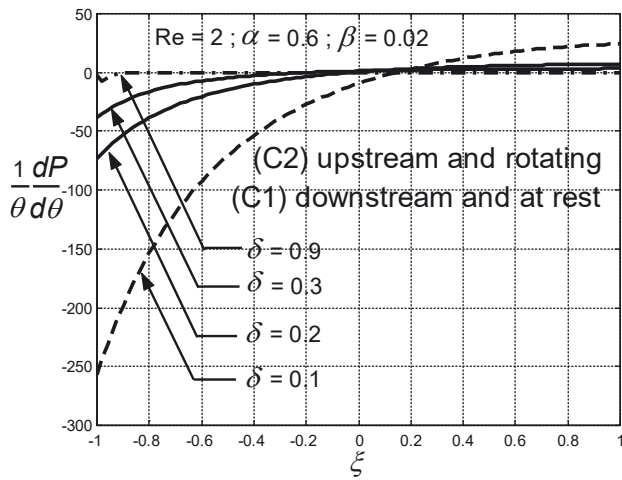
$\xi$  remains constant along this fluid layer as the polar angle increases and the absolute value of the shear stress  $\tau_{r\theta} = -\nu\rho\theta(1 + \delta^2 + 2\delta\xi)\varphi^{(2)}(\xi)$  increases, intensifying the viscous forces. Additionally, as the polar angle increases, the fluid particles on the circular fluid layer are accelerated azimuthally, increasing the inertia forces. We draw the conclusion that the increase of the radial viscous forces exceeds that of the radial inertia forces when one moves along the aforementioned circular fluid layer because Figures 17–20 show that the radial component of the pressure gradient at a fixed radial distance increases as the polar angle increases. The pressure gradient in Figures 19 and 20 illustrates how the difference between the two

forces is significant if (C1) is downstream and at rest, and weak if (C1) is upstream and revolving, when this circular fluid layer is close to the inner cylinder (C1).

Figures 19 and 20 show that if the considered circular fluid layer is positioned close to the outer cylinder (C2), the radial pressure gradient is essentially negligible and the radial contributions of the two forces are approximately equal in magnitude whether the outer cylinder is rotating upstream or at rest downstream. Thus, it becomes clear why, as shown in Figure 19, the pressure gradient vanishes near the value  $\xi = 1$  for any value of the polar angle.



**Figure 23:** Azimuthal pressure gradient per unit polar angle as a function of  $\xi$  for different values of the gap ratio ( $\delta$ ) when the inner cylinder is upstream and rotating.



**Figure 24:** Azimuthal pressure gradient per unit polar angle as a function of  $\xi$  for different values of the gap ratio ( $\delta$ ) when the outer cylinder is upstream and rotating.

We now turn our attention to Figures 17–20 and explore a radial fluid layer along which one advances by maintaining a constant polar angle while following increasing values of  $\xi$ , that is, from the inner cylinder (C1) to the outer cylinder (C2). Let us now look at the first configuration in which the inner cylinder is downstream and at rest. Due to the presence of a boundary layer in the vicinity of this cylinder, the viscous forces are strong, and the inertia forces are modest due to the weak convection of velocity gradients brought on by the state of rest of the downstream cylinder together with the no-slip condition. Because of what has already been discussed, the viscous forces are greater than

the inertia forces when one is close to the inner downstream cylinder, and this causes a positive pressure gradient as a result of the difference between the magnitude of the two forces. The viscous forces drop while the inertia forces rise as one approaches the zone of free flow, travelling away from the inner downstream cylinder or moving toward the rotating upstream cylinder. For higher values of  $\xi$ , this leads to a significant weakening of the positive pressure gradient, visible in Figure 19 for all values of the polar angle. When one reaches the rotating upstream outer cylinder (C2), the inertia forces also increase due to the strong convection of the velocity gradients brought on by the rotation of the outer cylinder, and the viscous forces also increase due to the presence of the boundary layer close to the surface of the outer wall. A zero pressure gradient is created when the two forces are in equilibrium near the outside cylinder, as was already seen in Figure 19.

When the inner cylinder (C1) is revolving upstream, as seen in Figure 20, things happen differently. Unlike the previous case mentioned above, the boundary layer of the cylinder (C1) and its rotational motion cause the viscous forces and inertia forces to be both high in the area where the inner cylinder is revolving. Nevertheless, the strength of the two forces differs significantly, with the viscous forces being slightly stronger than the inertia forces. This explains why the pressure gradient is positive and modest when one moves towards the value  $\xi = -1$ , as illustrated in Figure 20.

As one goes away from the rotating inner cylinder, one then goes away from its boundary layer simultaneously. When the zone of free flow situated between the two cylinders is not exceeded, the viscous forces diminish, and this decline continues. Inertia forces also diminish, but their decline—which corresponds to a rise in the pressure gradient—is higher than the decline of viscous forces. This argument explains why the pressure gradient shows a first increasing phase in Figure 20. This rise reaches its maximum value close to the value  $\xi = -0.2$ , in the zone of free flow where the viscous forces are almost negligible, as shown in Figure 20. The intense convection of velocity gradients that characterize this zone causes the inertia forces to start rising as soon as the region of free flow is exceeded, while the viscous forces continue to decline. As shown in Figure 20, the pressure gradient starts to diminish as the resultant of the two forces decreases. The inertia forces start to decrease as one approaches the boundary layer of the immobile outer cylinder, causing the viscous forces to increase until they are equal in magnitude to the inertia forces and the resultant then cancels. As can already

be seen in Figure 20, this results in a pressure gradient of zero.

#### 4.8 Azimuthal pressure gradient in the flow

Because the dimensionless azimuthal pressure gradient is proportional to  $\theta$  in (25b), it can only be plotted as a function of  $\xi$ , under the form  $\theta^{-1}(\partial P/\partial\theta)$ , as seen in Figures 21–24. The behavior of the azimuthal pressure gradient is taken advantage of to obtain, from Figures 21–24, flow understandings regarding the resultant of the azimuthal inertia and viscous forces, just as it was done in Section 4.7 for the radial pressure gradient. We also examine how the velocity coefficient and the gap ratio affect the azimuthal pressure gradient.

To start, we note that the azimuthal pressure gradient is always negative for both configurations of the flow and starts to rise as  $\xi$  increases from the inner cylinder (C1), as shown in Figures 21–24, regardless of whether the inner cylinder (C1) is downstream at rest or upstream rotating. This indicates that, contrary to their radial components discussed in Section 4.7, the viscous forces are weaker than the inertia forces for their azimuthal components. For the reasons already indicated, the radial and azimuthal components of viscous forces both start to decline as one gets away from (C1).

Due to the fact that the azimuthal pressure gradient rises in the same region, it is clear that the azimuthal component of inertia forces must diminish in all circumstances and that this decline exceeds that of azimuthal viscous forces in absolute value during the initial increasing phase of the algebraic azimuthal pressure gradient depicted in Figures 21–24.

Figures 21 and 23 show that the algebraic azimuthal pressure gradient diminishes while remaining negative in the second scenario, where the inner cylinder is spinning upstream. This decline continues until the azimuthal pressure gradient reaches its maximum absolute value, which is close to the outer downstream cylinder at rest. We can infer that the magnitude of the azimuthal pressure gradient is alone and sufficient to balance the viscous forces for any fluid particle located near the downstream cylinder because the inertia forces are so weak in this zone and Figure 20 shows that the radial component of the pressure gradient vanishes.

Finally, let us examine how the velocity coefficient and the gap ratio affect the azimuthal pressure gradient in the flow. According to the formula given in (6), higher values of the velocity coefficient ( $\alpha$ ) with constant gap ratio values ( $\delta$ ) cause an increase in the suction velocity at the inner cylinder (C1), for a given injection velocity at the outer

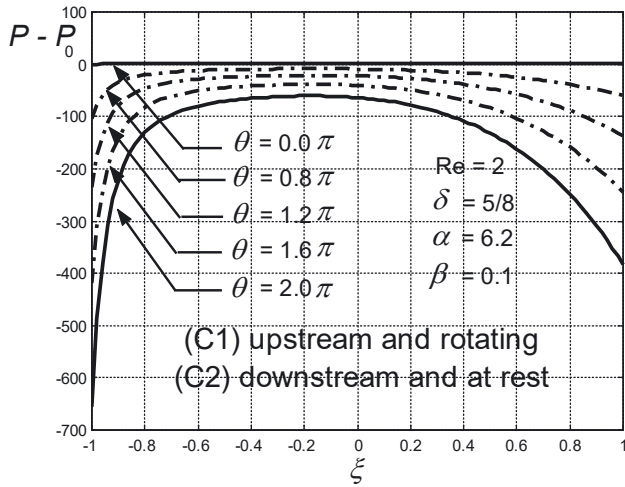
cylinder (C2), when the inner cylinder (C1) is downstream and at rest. Due to the conservation of mass, this causes the radial velocity to increase close to the downstream cylinder, which in turn causes the azimuthal velocity to decrease. As a result, the inertia and viscous forces are reduced near the downstream cylinder. The decrease of the azimuthal inertia forces in this region is greater than the decrease of the azimuthal viscous forces, increasing the algebraic resultant between the viscous forces and the opposite of inertia forces. This explains why, as the velocity coefficient  $\alpha$  increases, the algebraic azimuthal pressure gradient rises near the downstream cylinder, as seen in Figure 22.

When the boundary layer of the downstream cylinder (C1) is crossed, the momentum input from the rotational motion of the upstream cylinder (C2) stops the decrease in azimuthal inertia forces, which results in a balance between the two forces near the upstream cylinder (C2), as seen in Figure 22. Similar rationales explain why the azimuthal pressure gradient behaves as a function of the velocity coefficient, as shown in Figure 21 when the inner cylinder is upstream and rotating.

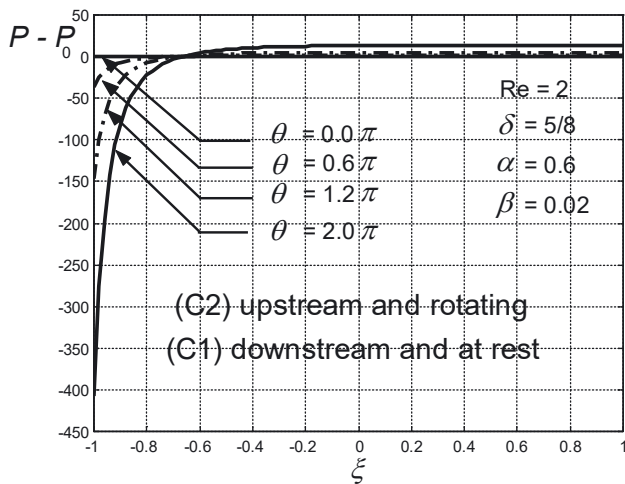
Regarding the behavior of the azimuthal pressure gradient as a function of the gap ratio, we argue as follows. We must widen the air gap while maintaining a constant inner cylinder radius in order to increase the gap ratio. As the gap ratio increases and the velocity boundary conditions are kept unchanged, we then note that the slowest fluid particles increase in number and mass in the flow, as a consequence. Then, the viscous and inertia forces both decrease throughout the fluid and tend to disappear for the highest gap ratio values. With the exception of the region near the upstream cylinder, where the rotational motion makes up for the smallness of the pressure gradient in a way that makes the compensation even greater as the gap ratio is small, the fluid consequently experiences small absolute pressure gradients for large gap ratio values. As a result, one can understand the plots shown in Figures 23 and 24, and more especially, one understands how the azimuthal pressure gradient behaves around the two cylinders as the gap ratio varies.

#### 4.9 Pressure distribution in the flow

Using the results of the radial and azimuthal pressure gradients, the dimensionless excess in pressure in the flow,  $P(\xi, \theta) - P_0$ , is deduced from the calculations done in (27a), (27b), (28a) and (28b), where  $P_0$  is a constant defined in (26b) as  $P_0 = P(\xi = -1, \theta = 0)$ . The values thus obtained are plotted for both orientations of the flow in Figures 25–28. The plots are obtained as a function of  $\xi$  by keeping the polar



**Figure 25:** Pressure difference as a function of  $\xi$  along radial fluid layers when the inner cylinder is upstream and rotating with the outer cylinder downstream and at rest.

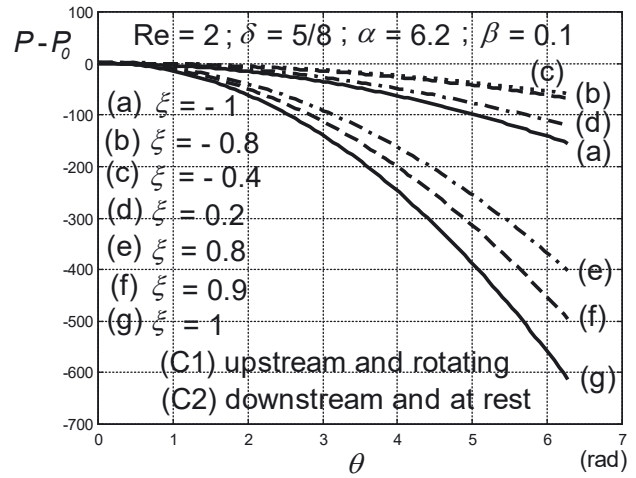


**Figure 26:** Pressure difference as a function of  $\xi$  along radial fluid layers when the outer cylinder is upstream and rotating with the inner cylinder downstream and at rest.

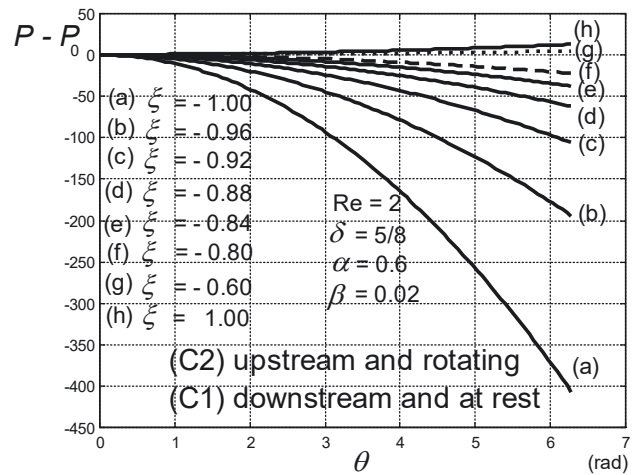
angle constant, as seen in Figures 25 and 26. In Figures 27 and 28, the plots are presented as a function of the polar angle for different values of  $\xi$ .

The results obtained for the excess in pressure in the flow are in agreement with the discussions carried out in Sections 4.7 and 4.8 when analyzing the results for radial and azimuthal pressure gradients. More specifically, the difference in pressure,  $P(\xi, \theta) - P_0$ , between point  $(\xi = -1, \theta = 0)$  located on the inner cylinder and any other point in the flow remains negative, as seen in Figures 25–28.

The absolute value of this difference in pressure remains high in the vicinity of the inner cylinder, whether this cylinder is upstream and rotating or downstream and at rest.



**Figure 27:** Pressure difference as a function of the polar angle along z-axis concentric circular fluid layers when the inner cylinder is upstream and rotating.



**Figure 28:** Pressure difference as a function of the polar angle along z-axis concentric circular fluid layers when the outer cylinder is upstream and rotating.

## 5 Concluding remarks

In the present work, we have investigated the steady laminar flow between two coaxial porous cylinders, which is located in the polar plane orthogonal to the common axis of both cylinders. The walls of the cylinders experience suction and injection along with an accelerated rotation. The annular duct gap ratio ( $\delta$ ), the velocity coefficient ( $\alpha$ ) that compares the upstream and downstream velocities of suction and injection at the walls to ensure mass conservation in the duct, the velocity ratio ( $\beta$ ) that compares the order of magnitude of radial and azimuthal velocities in the flow, and the Reynolds number  $Re$  that is constructed by adding the radial

and azimuthal velocities, are the four parameters that determine the dimensionless form of the problem under study. The range of the aforementioned parameters are defined as follows:  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < \delta < 1$ , and  $0 < \text{Re} < 6$ .

To resolve the problem under examination, the Navier–Stokes equations are replaced by the polar-plane vorticity-stream function equation, whose solutions are found using the similarity-solutions method. The shooting technique, including the fourth-order Runge–Kutta algorithm, is then used to produce numerical solutions for the resulting ordinary differential equation. For the flows where the stream function exists, the vorticity-stream function formulation is advised because it gives the exact solution to the Navier–Stokes equations, although it is found in its numerical form.

The case where the upstream cylinder rotates and the downstream cylinder is at rest is the only configuration studied in the present work. It would be interesting to study the steady laminar flow in the polar plane for the case of the downstream cylinder rotating with the upstream cylinder at rest, as well as in the case where both cylinders are rotating. Examining the effect of Reynolds number variations on the studied laminar flow would also be fascinating.

The limitations of present work, which impose the flow studied to be contained in the polar plane, have been found as follows:

$$V_z/V_r \ll 1, V_z/V_r \ll (L/2h), V_z/V_\theta \ll 1, \text{ and} \\ V_z/V_\theta \ll (L/2\pi R_m),$$

where  $V_r$ ,  $V_\theta$  and  $V_z$  represent the radial, azimuthal, and axial component of the flow velocity, respectively,  $L$  is the common length of the cylinders,  $h$  is the half-width of the air gap, and  $R_m$  the mean radius of the annular duct.

The key findings of the present study may be summarized as follows.

- For the laminar flow studied to exist with regular streamlines which do not intersect, the velocity ratio ( $\beta$ ) and the velocity coefficient ( $\alpha$ ) must satisfy the requirements  $\alpha > 1$  and  $\beta \leq 0.1$  when the rotating upstream cylinder is the inner cylinder. If this cylinder is the outer cylinder, the required conditions become:  $0 < \alpha < 1$  and  $\beta \leq 0.02$ .
- The Reynolds number of the flow is constructed by adding the radial and azimuthal velocities of the flow, to take into account the two drivers of the flow, namely the suction-injection at the level of the walls and the accelerated rotation of the cylinders.
- For the conservation of mass to be satisfied with zero axial velocity in the annular duct, one of the cylinders receives injection and then plays the role of upstream

cylinder, while the other undergoes suction and then assumes the role of downstream cylinder.

- Despite the upstream cylinder's rotational motion and despite the suction and injection processes at the level of the walls, a surprising region is revealed inside the flow where the fluid remains in a state of rest. This zone is delimited by the downstream cylinder and two distinct and singular streamlines.
- For a given value of the gap ratio, the absolute value of the radial velocity is low in the vicinity of the rotating upstream cylinder and increases as one approaches the downstream cylinder at rest.
- The flow configuration in which the outer cylinder is upstream and rotating is more stable than the opposite configuration in which the inner cylinder is upstream and rotating. This finding is the same as that found for immobile cylinders.
- Despite the upstream cylinder's rotation that should increase the inertia forces, the radial contribution of the viscous forces dominate that of the inertia forces throughout the flow, except in the vicinity of the outer cylinder where the radial contributions of both forces are equal whether this cylinder is downstream at rest or upstream rotating.
- In the case where the inner cylinder is upstream and rotating while the outer cylinder is downstream at rest, the radial pressure gradient reaches its maximum value in the median zone between the two cylinders.
- The azimuthal contribution of the inertia forces exceeds that of the viscous forces throughout the flow, except in the vicinity of the outer cylinder where the azimuthal contributions of both forces are equal. This exception occurs for any velocity coefficient value ( $\alpha$ ) when the outer cylinder is upstream and rotating, and for the range  $1 < \alpha \leq 1.2$  when this cylinder is downstream at rest.
- For large gap ratio values, the flow under study experiences small absolute pressure gradients as the gap ratio increases, except in the vicinity of the upstream cylinder, where the rotational motion of this cylinder makes up for the smallness of the pressure gradient in such a way that the compensation is greater as the gap ratio is small.
- In the case of a rotating upstream cylinder with a downstream cylinder at rest, the only solution, which differs from the immobile cylinders' solution and corresponds to a steady laminar flow, is one in which the inner cylinder is upstream, provided that the velocity ratio ( $\beta$ ) is below the crucial threshold of 0.1 and the velocity coefficient is greater than 1.

**Acknowledgments:** One of the authors (E. P.), who is a former student of the National Advanced School of Engineering in France known as “Ecole Centrale de Lyon,” takes the opportunity presented by this article to deeply thank Emeritus Professor Bernard Gay for his wonderful and unforgettable course, “Numerical Methods in Fluid Mechanics,” that he taught to PhD students in the Laboratory named “Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique.”

**Research ethics:** The authors confirm that all the research meets the ethical guidelines, including adherence to the legal requirements of the study country.

**Author contributions:** All the authors have accepted responsibility for the entire content of this manuscript and approved its submission.

**Competing interests:** The authors state no conflict of interest.

**Research funding:** None declared.

**Data availability:** The raw data can be obtained on request from the corresponding author.

## Appendix: Derivation of the polar-plane vorticity-stream function equation using the demonstration of relations (9), (10a), (10b), (10c), and (10d)

In this appendix, we explain the unusual and direct approach we have initiated to demonstrate the polar-plane vorticity-stream function equation using the vector form of the Navier–Stokes equations for incompressible fluids.

Consider an incompressible Newtonian fluid that flows in the polar plane of an annular duct and has constant physical properties, with its specific mass and kinematic viscosity denoted by  $\rho$  and  $\nu$ , respectively. The vector Navier–Stokes equation which governs the flow in the absence of body forces is given by the following relation [31, 32]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (\text{A1})$$

with  $p$  representing the pressure,  $t$  the time,  $\text{Curl} \mathbf{V}$  the rotational of the flow velocity field  $\mathbf{V}$ ,  $\Delta$  the vector Laplacian, and  $\times$  the vector-product symbol.

Taking the rotational of (A1), one obtains the equation of transport of vorticity:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Curl} \mathbf{V} + \text{Curl}(\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}) = \nu \text{Curl}(\Delta \mathbf{V}). \quad (\text{A2})$$

Let us adopt the cylindrical-coordinates system  $(r, \theta, z)$ , with the radial, azimuthal and axial unit vectors  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  respectively, and the origin located on the  $z$ -axis of the duct. Since the fluid flows in the polar plane, the velocity field  $\mathbf{V}$  has no axial component and is written as:

$$\mathbf{V} = V_r(r, \theta, t) \mathbf{e}_r + V_\theta(r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{A3})$$

where  $V_r$  and  $V_\theta$  represent its radial and azimuthal components respectively. The flow satisfies the criteria of existence of the stream function,  $\psi(r, \theta, t)$ , which is defined by the following relations using the velocity components [1, 31, 32]:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{and} \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (\text{A4})$$

We need to write the vectors  $\text{Curl} \mathbf{V}$ ,  $\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ ,  $\text{Curl}(\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V})$ , and  $\text{Curl}(\Delta \mathbf{V})$  in terms of  $\psi$  to obtain the vorticity-stream function equation. This is the purpose of relations (9), (10a), (10b), and (10d), which we have to demonstrate in this appendix. Let us begin by (9). Using (A3), the rotational of  $\mathbf{V}$  is given by [1, 33]:

$$\text{Curl} \mathbf{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{A5})$$

Using (A4), we obtain the result,  $\text{Curl} \mathbf{V} = -(r^{-1} \partial(r \partial \psi / \partial r) / \partial r + r^{-2} \partial^2 \psi / \partial \theta^2) \mathbf{e}_z$ , which can be written in the equivalent form found in (9):

$$\text{Curl} \mathbf{V} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z, \quad (\text{A6})$$

where  $\nabla^2$  represents the scalar Laplacian operator. To deduce the expression of  $\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ , we use (A3) and (A6), and we obtain:

$$\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = (\nabla^2 \psi) (V_\theta) \mathbf{e}_r - (\nabla^2 \psi) V_r \mathbf{e}_\theta \quad (\text{A7})$$

From the components of  $\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}$  found in (A7), the components of the vector  $\text{Curl}(\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V})$  can be directly calculated by using formula (A5) where one replaces the components of  $\mathbf{V}$  by those of  $\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ . This way results in longer and less elegant calculations. We prefer the approach that consists of writing  $\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}$  as a function of  $\psi$  alone. In (A7), we then replace  $V_r$  and  $V_\theta$  by their expressions given in (A4). This yields:

$$\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{grad} \psi. \quad (\text{A8})$$

The vector  $\text{Curl}(\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V})$  is expressed in terms of  $\psi$  by using (A8) and the well-known formula [33]:

$$\text{Curl}(f \mathbf{A}) = f \text{Curl} \mathbf{A} + \mathbf{grad} f \times \mathbf{A}, \quad (\text{A9})$$

which is valid for any differentiable scalar and vector fields  $f$  and  $\mathbf{A}$ . We then obtain the result found in (10b):

$$\text{Curl}(\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}) = -\mathbf{grad}(\nabla^2 \psi) \times \mathbf{grad} \psi, \quad (\text{A10})$$

which can be developed and becomes:

$$\text{Curl}(\text{Curl}\mathbf{V}\times\mathbf{V}) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\theta} \nabla^2\psi - \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2\psi \right) \mathbf{e}_z, \quad (\text{A11})$$

It remains to determine  $\text{Curl}(\Delta\mathbf{V})$  in terms of  $\psi$  alone. For this purpose, we apply the well-known relation [33]:  $\text{Curl}(\text{Curl}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\text{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$ , which enables one to obtain  $\Delta\mathbf{A}$  in the simplified form:  $\Delta\mathbf{A} = -\text{Curl}(\text{Curl}\mathbf{A})$ , if the vector field  $\mathbf{A}$  has zero divergence as in the case of the flow velocity field. The expression of  $\Delta\mathbf{V}$  is then deduced using (A6) and (A9):

$$\Delta\mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial\theta} \mathbf{e}_r - \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{A12})$$

From (A12), the rotational of  $\Delta\mathbf{V}$  can easily be calculated. For this purpose, we use the relation that is analogous to the form given in (A5) and obtain the result found in (10d):

$$\text{Curl}(\Delta\mathbf{V}) = -\nabla^2(\nabla^2\psi) \mathbf{e}_z \quad (\text{A13})$$

Replacing in (A2) the expressions found in (A6), (A11), and (A13), we finally get the vorticity-stream function equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2\psi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2\psi - \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\theta} \nabla^2\psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2\psi \quad (\text{A14})$$

For the steady flow studied, we find the dimensional governing equation presented in (11).

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2\psi - \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\theta} \nabla^2\psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2\psi \quad (\text{A15})$$

## References

- [1] N. R. Makon, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, Y. C. Mbono Samba, and E. Pemha, "On the existence and determination of the incompressible laminar flow located in the polar plane of a porous annular pipe," *Alex. Eng. J.*, vol. 61, no. 4, pp. 2637–2650, 2022.
- [2] S. W. Yuan and A. B. Finkelstein, "Stability of pipe flow with blowing," *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, vol. 78, pp. 719–727, 1956.
- [3] A. S. Berman, "Laminar flow in channels with porous walls," *J. Appl. Phys.*, vol. 24, pp. 1232–1235, 1953.
- [4] R. M. Terrill and P. W. Thomas, "On laminar flow through a uniformly porous pipe," *App. Sci. Res.*, vol. 21, pp. 37–67, 1969.
- [5] W. H. H. Banks and M. B. Zaturka, "On flow through a porous annular pipe," *Phys. Fluids A*, vol. 4, no. 6, pp. 1131–1141, 1992.
- [6] M. Bouyges, F. Chedevergne, G. Casalis, and J. Majdalani, "Asymptotically based self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous tube with a non-circular cross-section," *J. Fluid Mech.*, vol. 826, pp. 396–420, 2017.
- [7] M. Goto and S. Uchida, "Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall," *Trans. Jpn. Soc. Aeronaut. Space Sci.*, vol. 33, pp. 14–27, 1990.
- [8] S. Uchida and H. Aoki, "Unsteady flow in a semi-infinite contracting or expanding pipe," *J. Fluid Mech.*, vol. 82, pp. 371–387, 1977.
- [9] G. L. Mbogba, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, Y. C. Mbono Samba, and E. Pemha, "Effects of an external constant pressure gradient on a steady incompressible laminar flow through a semi-porous annular pipe," *Z. Naturforsch. A*, vol. 77, no. 2, pp. 131–141, 2022.
- [10] L. S. Galowin, L. S. Fletcher, and M. J. DeSantis, "Investigation of laminar flow in a porous pipe with variable wall suction," *AIAA J.*, vol. 12, pp. 1585–1589, 1974.
- [11] M. Sankar, Y. Park, J. M. Lopez, and Y. Do, "Numerical study of natural convection in a vertical porous annulus with discrete heating," *Int. J. Mass and Heat Transfer*, vol. 54, pp. 1493–1505, 2011.
- [12] M. Sankar, J. Park, and Y. Do, "Natural convection in a vertical annuli with discrete heat sources," *Numer. Heat Trans., A: Appl.*, vol. 59, no. 8, pp. 594–615, 2011.
- [13] M. Sankar, S. Kiran, and Y. Do, "Effect of nonuniform heating on natural convection in a vertical porous annulus," in *Flow and Transport in Subsurface Environment*, N. Narayanan, B. Mohanadhas, and V. Mangottiri, Eds., Singapore, Springer Transactions in Civil and Environmental Engineering. Springer, 2018, pp. 251–278.
- [14] M. Sankar, Y. Park, J. M. Lopez, and Y. Do, "Double-diffusive convection from a discrete heat and solute source in a vertical porous annulus," *Transp. Porous Med.*, vol. 91, pp. 753–775, 2012.
- [15] S. Kiran, M. Sankar, H. A. Kumara Swamy, and O. D. Makinda, "Unsteady buoyant convective flow and thermal transport analysis in a nonuniformly heated annular geometry," *Comput. Therm. Sci.*, vol. 14, no. 2, pp. 1–17, 2022.
- [16] M. Venkatachalappa, M. Sankar, and A. A. Natarajan, "Natural convection in an annulus between two rotating vertical cylinders," *Acta Mech.*, vol. 147, pp. 173–196, 2001.
- [17] W. A. Robinson, "The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls," *J. Eng. Math.*, vol. 10, no. 1, pp. 23–40, 1976.
- [18] S. M. Cox, "Two-dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous wall," *J. Fluid Mech.*, vol. 227, pp. 1–33, 1991.
- [19] C. Y. Wang, "Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations," *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, vol. 23, pp. 159–177, 1991.
- [20] M. B. Zaturka, P. G. Drazin, and W. H. H. Banks, "On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls," *Fluid Dynam. Res.*, vol. 4, p. 151, 1988.
- [21] E. B. B. Watson, W. H. H. Banks, M. B. Zaturka, and P. G. Drazin, "On transition to chaos in two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls," *J. Fluid Mech.*, vol. 212, pp. 451–485, 1990.
- [22] Y. Gazambeti, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, and E. Pemha, "Pressure-exerted steady laminar flow of an incompressible fluid along a porous parallel-walled channel with an impermeable wall," *Z. Naturforsch. A*, vol. 7, no. 7, pp. 675–687, 2022.
- [23] J. F. Brady and A. Acrivos, "Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow," *J. Fluid Mech.*, vol. 112, pp. 127–150, 1981.
- [24] E. C. Dauenhauer and J. Majdalani, "Exact self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls," *Phys. Fluids*, vol. 15, no. 6, pp. 1485–1495, 2003.

- [25] S. T. Mohyud-Din, A. Yıldırım, and S. A. Sezer, "Analytical approach to a slowly deforming channel flow with weak permeability," *Z. Naturforsch. A*, vol. 65, pp. 1033–1038, 2010.
- [26] M. Slavashi, H. Rasam, and A. Izadi, "Similarity solution of air and nanofluid impingement cooling of cylindrical porous heat sink," *J. Therm. Anal. Calorim.*, vol. 135, pp. 1399–1415, 2019.
- [27] T. Aziz, A. Aziz, and C. M. Khalique, "Exact solutions for Stokes flow of a non-Newtonian nanofluid model: a Lie similarity approach," *Z. Naturforsch.*, vol. 71, no. 7, pp. 621–630, 2016.
- [28] A. T. Akinshilo, J. O. Olofinkua, and O. Olaye, "Flow and heat transfer analysis of sodium alginate conveying copper nanoparticles between two parallel plates," *J. Appl. Comput. Mech.*, vol. 3, pp. 258–266, 2017.
- [29] H. W. Press, A. S. Teukolsky, T. W. Vetterling, and P. B. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, 2nd ed Cambridge, Cambridge University Press, 1992.
- [30] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1967.
- [31] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, New-York, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1968.
- [32] S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. 1, New York, Dover Publications Inc., 1965.
- [33] R. C. Buck and E. F. Buck, *Advanced Calculus*, 3rd ed. New York, McGraw-Hill College, 1978.