

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

PAIX – TRAVAIL – PATRIE

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES
TECHNOLOGIE ET GÉOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN PHYSIQUE
ET APPLICATIONS



REPUBLIC OF CAMEROON

PEACE- WORK – FATHERLAND

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

POST GRADUATE SCHOOL OF
SCIENCE, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE
UNIT FOR PHYSICS AND
APPLICATIONS

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

DEPARTMENT OF PHYSICS

LABORATOIRE DE MECANIQUE FONDAMENTALE ET SYSTEMES COMPLEXES

LABORATORY OF FUNDAMENTAL MECHANICS AND COMPLEX SYSTEMS

LE DÉTECTEUR À JONCTION JOSEPHSON D'UN
SIGNAL SINUSOÏDAL MASQUÉ PAR UN BRUIT

Thèse

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat/Ph.D en Physique

Spécialité : Mécanique, Matériaux et Structures

Option : Mécanique Fondamentale et Systèmes Complexes

Par :

POUNTOUGNIGNI Oberlin Valex

Master II recherche en Physique

Matricule : 05Y067

Sous la co-direction de :



YAMAPI René
Professeur
Université de Douala

TCHAWOUA Clément
Professeur
Université de Yaoundé I

Année académique : 2024-2025

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix – Travail – Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

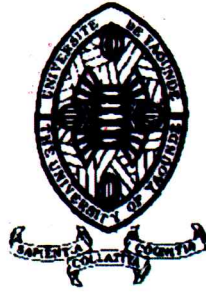
CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN
SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GEOSCIENCES

BP 812 Yaoundé

Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

secretariat@uy1researchstg.cm

Site web: www.uy1researchstg.cm



REPUBLIC OF CAMEROUN

Peace – Work – Fatherland

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCES,
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

P.O Box 812 Yaoundé

Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

secretariat@uy1researchstg.cm

Site web: www.uy1researchstg.cm

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE DOCTORAT/PhD

Nous soussignés, Professeur **ESSIMBI ZOGO Bernard** et Professeur **DJUIDJE KENMOE Germaine**, respectivement Président et Examineur du jury de la thèse de Doctorat de Monsieur **POUNTOUGNIGNI Oberlin Valex**, Matricule : **05Y067**, préparée sous la co-direction du Professeur **TCHAWOUA Clément** de l'Université de Yaoundé 1 et du Professeur **YAMAPI René** de l'Université de Douala, intitulée : « **LE DETECTEUR A JONCTION JOSEPHSON D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL MASQUE PAR UN BRUIT** », soutenue le **Lundi, 20 Janvier 2025** en vue de l'obtention du grade de Docteur/PhD en Physique, Spécialité : **Mécanique, Matériaux et Structures**, Option : **Mécanique Fondamentale et Systèmes Complexes**, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi la présente attestation lui est délivrée pour faire valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé, le **28 JAN 2025**

Examineur

Président du Jury

Le Chef de Département

DJUIDJE KENMOE Germaine

Professeure

ESSIMBI ZOGO Bernard

Professeur

NDJAKA Jean Marie Bienvenu

Professeur

REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

POSTGRADUATE SCHOOL FOR
SCIENCE, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE
TRAINING UNIT FOR PHYSIC AND
APPLICATIONS



REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

FACULTÉ DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN
SCIENCES TECHNOLOGIES ET
GÉOSCIENCES

UNITÉ DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE
PHYSIQUE ET APPLICATIONS

DEPARTMENT OF PHYSICS

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

LABORATORY OF FUNDAMENTAL MECHANICS AND COMPLEX SYSTEMS

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE FONDAMENTALE ET SYSTÈMES COMPLEXES

Le détecteur à jonction Josephson d'un signal sinusoïdal masqué par un bruit.

Thèse soumise en vue de l'obtention du diplôme
de Doctorat/ *PhD* en Physique
Specialité : Mécanique et matériaux

POUNTOUGNIGNI Oberlin Valex

Matricule : **05Y067**

MASTER II recherche en Physique

SOUS LA SUPERVISION DE

YAMAPI René

Professeur

Université de Douala

TCHAWOUA Clément

Professeur

Université de Yaoundé 1

Année 2025

Dédicace

Je dédie cette thèse à mes parents

Remerciements

Je remercie du fond du coeur mon Directeur de thèse, **Pr. René YAMAPI** qui m'a accompagné dans ce travail avec beaucoup d'attention et de rigueur. Malgré la durée de parcours il a cru en mes capacités et ne m'a pas abandonné. Je suis très reconnaissant pour son soutien moral et tous les efforts qu'il n'a ménagé pour que ce travail aille jusqu'à son terme. Je manifeste aussi toute ma gratitude envers le Superviseur de cette Thèse, j'ai nommé le **Pr. Clément TCHAWOUA** pour sa contribution à la réussite ce travail.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit du Doyen de la Faculté des Sciences le **Pr. OWONO OWONO Luc Calvin**.

Je remercie le Chef de Département de Physique à la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I, **Pr. Bienvenu Jean-Marie NDJAKA** ainsi que son prédécesseur **Pr. Timoléon Crépin KOFANE** pour de nombreux conseils qu'ils n'ont jamais cessé de prodiguer à l'endroit de tous les étudiants du département de Physique dont je suis bénéficiaire.

J'exprime toute ma gratitude au Président du Jury le **Pr. ESSIMBI ZOBO Bernard** sans oublier les membres le **Pr. FOTSIN Hilaire Bertrand** de l'Université de Dschang, le **Pr. DJUIDJE KENMOE Germaine** et le **Pr. FOTSA NGAFFO Fernande** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie également tous les enseignants du département de Physique pour tous les enseignements reçus depuis mon inscription en filière Physique.

Je remercie personnellement le **Pr. Filatrella Giovanni** de l'Université de Sannio, Benevento, Italie pour sa collaboration scientifique ainsi le soutien matériel qu'il m'a accordé en me faisant don de deux ordinateurs (un Laptop et un Desktop).

Je n'oublie pas mon tuteur, **Dr. André CHEAGE CHAMGOUE**, pour ses nombreuses interventions et des encouragements qu'il n'a cessé de manifester pour la réussite de ce travail.

Je suis très reconnaissant à l'endroit de mes camarades de promotion, plus particulièrement **Dr. MBAKOP YONKEU Raoul**, et le **Dr. MOKEM Igor Simplicie**, non seulement pour leurs encouragements mais aussi les débats scientifiques. Toute ma gratitude au groupe de recherche du **Pr. René YAMAPI** de l'Université de Douala constitué de : **Dr LEUKEFACK**, **Dr TSAFACK TAYONG Fred Legrand**, **Dr. TAGNE Innocent**, **Mr. MOUKO Aristide**, *M^{lle}*. **MESSEE Linda**, *M^{me}*. **NJINKEU Elvira**, **Mr. DANG-RA Christian**, **Mr. TEUMBOU Emmanuel Christian**, **Mr. KENFACK Cirille**. Ils constituent pour moi une nouvelle famille.

Une mention spéciale à ma grand-mère **YOUTEP Berthe**, mon oncle **M. KAPOUWOU Etienne**, mon père **MOUNKPUDAP Mama**, ma mère **NGAHILI Dorothée** et mon oncle **M. NSANGO Max**, pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

De façon spéciale je voudrais exprimer ma gratitude à :

- Mon tuteur **M. MOUICHO Etienne** et son épouse **ARETOUYAP Florence**, pour leur soutien infaillible sur le plan moral et financier pendant toute la durée de ce travail.
- Monsieur **M. NJIFON Samuel** son épouse **NJUKUYOU Elise Chantal** ainsi que leurs enfants, plus particulièrement leur fille **MENGOULOUNE Larissa Rachel**, pour leur soutien moral et leurs encouragements.
- Mes frères **KOUOTOU Arouna** et **MIMCHE Mounir**, pour de nombreux services rendus pendant la durée de ce travail.
- mes cousins **NGABEKET Alain César**, **NKUTNJEM MICHIREN Jean Luther**, **MOUNPEN Hervé Joel**, **Pr YAP Loudi**, **NJIKAM Abdel**, **MOUNCHILI Jérôme** et **NJOUOPAM Emmanuel**, pour leurs encouragements.
- Maman **NTEINTIE Aichetou** et son fils **KUMJEM NJIKAM Zounka**, pour leurs encouragements et leur soutien financier.
- **Mme MAYOUENMOUN Tapia** et ses enfants pour leurs différents encouragements.
- Mes amis **MBARGA Jean Claude**, **EMALEU Michael**, **Dr NGANGOUE Marcelle**, **MOUNCHIKPOU Valentin**, **MBOHOU NDAM Oumarou**, **FOFE Achille**, pour leur soutien et leurs encouragements.
- Ma fiancée *M^{lle}* **KONE Julienne Mabelle**, pour tous les efforts qu'elle n'a cessé de ménager pour la finalisation de ce travail.
- Tous les membres de la famille, tous mes amis qui ne sont pas cités et qui de près ou de loin ont contribué à l'accomplissement de ce travail.

Je n'oublie pas le groupe "**Etudes Bibliques**" de la paroisse de **EEC de Besséké** pour leurs nombreuses prières.

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des Abbreviations	vi
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	xii
Abstract	xiii
Résumé	xiv
Introduction générale	1
1 Revue de littérature et Motivation	4
1.1 Introduction	4
1.2 Effet Josephson	4
1.2.1 Supraconductivité	4
1.2.2 Jonction Josephson	6
1.2.3 Signification de l'effet Josephson	7
1.2.4 Equation de Josephson	8
1.3 Types et modèles des jonctions Josephson	10
1.3.1 Les différents types de jonctions Josephson	10
1.3.2 Notion de Jonction courte et Jonction longue	11
1.3.3 Caractéristiques de la jonction courte	12
1.3.4 Différents modèles de la jonction Josephson	14
1.4 Bruit dans les jonctions Josephson	19
1.4.1 Bruit thermique ou "thermal noise"	19
1.4.2 Bruit de grenaille ou "Shot noise"	20
1.4.3 Bruit de scintillement ou "Flicker noise"	20
1.5 Réseaux de jonctions Josephson	20
1.5.1 Motivations	20

1.5.2	Géométrie des réseaux des jonctions Josephson	21
1.6	Théorie de la détection appliquée aux jonctions Josephson	23
1.6.1	Principe de la détection associée aux jonctions Josephson	23
1.6.2	Etat de l'art et motivation	24
1.7	Conclusion	29
2	Modélisation, méthodes d'analyse et de simulations numériques	30
2.1	Introduction	30
2.2	Modélisation mathématique	30
2.2.1	Réseau linéaire de jonctions Josephson couplé à un résonateur RLC série	30
2.2.2	Détecteur de signal sinusoïdal à jonction Josephson	34
2.3	Méthode d'analyse	37
2.3.1	Stratégie d'acquisition des données	37
2.3.2	Outils d'analyse statistique	38
2.4	Méthodes de simulations numériques	40
2.4.1	Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4	40
2.4.2	Algorithme d'Euler	41
2.5	Conclusion	43
3	Résultats et discussions	44
3.1	Introduction	44
3.2	Stabilité du réseau linéaire des jonctions Josephson	44
3.2.1	Propriétés déterministes du réseau parfait	44
3.2.2	Propriétés stochastiques du réseau parfait	46
3.2.3	Propriétés dynamiques du réseau imparfait : effet du coefficient du désordre	51
3.2.4	Caractéristique courant-tension du réseau	51
3.2.5	Propriétés des attracteurs	52
3.3	Détecteur du signal sinusoïdal à Jonction Josephson	56
3.3.1	Effet de la vitesse de balayage v sur les propriétés du détecteur	56
3.3.2	Effet du temps de corrélation τ_c sur la distribution des temps de transition	63
3.4	Conclusion	68
	Conclusion générale	70
	Bibliographie	74
	Liste des publications	85
	Participation aux conférences	86

Liste des Abbreviations

BCS : Bardeen Cooper Schrieffer

CCDF : Complementary Cumulative Distributive Function

CDF : Cumulative Distributive Function

ddp : différence de potentiel

ET : Escape Time

GHz : GigaHertz

HTS : High Temperature Superconductor

I-V : Intensity-Voltage

JJ : Jonction Josephson

K-C : Kumar-Carrol

KDE : Kernel Density Estimation

LC : dipôle électrique constitué d'un solénoïde d'inductance (L) et d'un condensateur de capacité (C)

LRT : Likelyhood Ratio Test

MFPT : Mean First Passage Time

MQT : Microscopic Quantum Tunnel

OU : Ornstein-Uhlenbeck

PDF : Probability Density Function

RCSJ : Resistively and Capacitively Shunted Junction

RK4 : Runge-Kutta d'ordre 4

RLC : dipôle électrique constitué d'un résistor de résistance (R), d'un solénoïde d'inductance (L) et d'un condensateur de capacité (C)

RSJ : Resistively Shunted Junction

SIS : Superconducting-Insulator-Superconducting

SM : Sample Mean

SNS : Superconducting-Normal-Superconducting

SQUID : Superconducting Quantum Interference Devices

SNR : Signal-to-Noise-Ratio

SR : Stochastic Resonance

Tc : Température Critique

THz : TeraHertz

Liste des figures

1.1	Propriété supraconductrice du mercure [51].	5
1.2	Schéma de la jonction Josephson, mince couche d'isolant(insulator) séparant les deux blocs supraconducteurs. Les fonctions d'onde $\Psi_{1,2}$ décrivent les paires de <i>Cooper</i> (Cooper pairs) qui par effet tunnel peuvent traverser la couche d'isolant. [61].	6
1.3	Caractéristique courant-tension de la jonction Josephson. On observe bien le supercourant de Josephson en l'absence de la différence de potentiel (ddp) aux bornes de la jonction (observation de Shapiro en 1963 [68]).	7
1.4	Illustration de l'effet Josephson continu de l'échantillon Sn-SnO-Sn. [64]	9
1.5	Illustration de l'effet Josephson alternatif de l'échantillon Sn-SnO-Sn. [64]	9
1.6	Différents types de Jonction Josephson. [70]	10
1.7	Schéma d'une jonction Josephson longue(Long JJ) de largeur W et de longueur L . On observe les lignes du champ magnétique intrinsèque de la jonction \mathbf{B} qui par tourbillonnement pénètre les électrodes et s'étend même dans l'espace. Le champ magnétique errant crée à la surface des supraconducteurs un courant J_S . [74]	12
1.8	Circuit électrique du modèle RSJ (Resistively Shunted Junction) de la jonction Josephson. [75]	14
1.9	Circuit électrique du modèle RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction) de la jonction Josephson. [78]	15
1.10	Le profil du potentiel effectif ou "washboard potentiel" : au dessus de la ligne horizontale le cas $\gamma_b = 0$ et en dessous de la ligne $\gamma_b \neq 0$. [78]	18
1.11	La portion du profil du potentiel effectif indiquant la barrière d'énergie. [78]	19
1.12	Réseaux des jonctions Josephson et leur géométrie. [93]	22
1.13	Dynamique de la phase φ et de la ddp $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonction du temps. Les instants t_1 , t_2 et t_3 désignent les instants à partir desquels on observe le passage de l'état supraconducteur à l'état résistif. (adapté à partir de la référence [112]).	24
1.14	Fonction Densité de Probabilité des temps d'évasion. Trois courbes sont représentées : absence du signal(H_0 : trait en pointillé) ; présence du signal avec acquisition des données par stratégie cohérente (H_1 trait interrompu fort) ; présence du signal avec acquisition des données par stratégie incohérente (H_1 trait continu fort) (adapté à partir de la référence [107]).	26

1.15	Fonction Densité cumulative complémentaire des temps d'évasion. Trois courbes sont représentés : absence du signal(trait trait continu fort) ; présence du signal avec acquisition des données par stratégie cohérente (trait interrompu fort) ; présence du signal avec acquisition des données par stratégie incohérente (trait mixte fort) (adapté à partir de la référence [37]).	26
1.16	Indice de Kumar-Carroll normalisé en fonction de la fréquence du signal appliqué Ω : stratégie SM en trait interrompu fort ; stratégie LR en trait continu fort (adapté à partir de la référence [108]).	27
2.1	Circuit électrique du réseau linéaire des JJ couplé au résonateur RLC série.	31
2.2	Circuit électrique du détecteur de signal sinusoïdal.	35
2.3	<i>Phénomène de transition de la particule de phase initialement placée dans un puits du potentiel de Josephson "washboard potential" pour $\gamma = 0.5$. la barrière d'énergie $\Delta U(\gamma)$ est définie à la relation Eq.(1.30).</i>	36
3.1	<i>Courbe normalisée de la caractéristique courant-tension du modèle parfait du réseau. Le trait fort rouge indique le sens de balayage croissant du courant appliqué γ_G tandis que et le trait fort noir le sens de balayage décroissant. Les paramètres de simulations sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $D = 0$. (a) : $N = 1$, (b) : $N = 2$, (c) : $N = 5$, (d) : $N = 10$.</i>	45
3.2	<i>Mise en évidence du caractère hystérétique de la caractéristique courant-intensité à l'état de résonance. (a) : $N = 2$, (b) : $N = 5$ Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1</i>	46
3.3	<i>Portrait de phase et évolution temporelle de la charge q du résonateur. q_s indique la position estimée de la séparatrice. (a) et (b) comptent pour $N = 2$; (c) et (d) pour $N = 5$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1</i>	47
3.4	<i>Portrait de phase et évolution temporelle de la charge q du résonateur en présence du bruit, $D = 0.1$. q_s indique la position estimée de la séparatrice. (a) et (b) comptent pour $N = 2$; (c) et (d) pour $N = 5$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure.3.1</i>	48
3.5	<i>Exemple de transition du système de l'attracteur de fréquence Ω_1 vers l'attracteur de fréquence Ω_3. Après un temps de résidence du système dans l'orbite 1 approximativement à la valeur $\kappa = 10000$ unités de temps normalisés, la charge atteint la séparatrice q_s puis continue à osciller sur l'orbite 2. Ici $N = 2$ $D = 0.1$. q_s indique la position estimée de la séparatrice. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1</i>	48
3.6	<i>Exemple de courbes de MFPT en fonction du seuil q_s pour plusieurs valeurs de l'intensité du bruit D et du courant appliqué γ_G. (a) et (b) comptent pour $N = 2$; (c) et (d) pour $N = 5$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1.</i>	49

3.7	<i>Exemple du diagramme du logarithme de κ en fonction de l'inverse de l'intensité du bruit D. Pour (a) : $N = 2$, $\gamma_G = 1.50$; (b) : $N = 5$, $\gamma_G = 2.30$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1</i>	50
3.8	<i>Barrière d'énergie ΔU en fonction du courant appliqué γ_G. Pour (a) : $N = 2$; (b) : $N = 5$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1</i>	51
3.9	<i>Caractéristique courant-tension du modèle imparfait du réseau. Le trait fort rouge indique le balayage croissant du courant appliqué γ_G tandis que le trait fort noir le balayage décroissant. Les paramètres sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $\alpha = 0.1$, $N = 5$. (a) : $\sigma = 1\%$; (b) : $\sigma = 2\%$; (c) : $\sigma = 3\%$; (d) : $\sigma = 4\%$.</i>	52
3.10	<i>Variation de la tension en fonction de la variance σ. Le trait fort rouge indique le balayage croissant tandis que le trait fort noir le balayage décroissant. Les paramètres sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $N = 5$. (a) : $\gamma_G = 2.30$; (b) : $\gamma_G = 2.36$</i>	53
3.11	<i>Caractéristique courant-tension du modèle imparfait du réseau. Le trait fort rouge indique le balayage croissant du courant appliqué γ_G tandis que le trait fort noir le balayage décroissant. Les paramètres de simulation sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $N = 5$, $\sigma = 0.1\%$.</i>	54
3.12	<i>(a) : Projection dans le plan $q - dq/d\tau$ du portrait de phase et (b) : évolution temporelle de la charge q du système désordonné. Ici q_s indique une position arbitraire. Les paramètres sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $N = 5$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_G = 2.30$, $\sigma = 0.1\%$.</i>	54
3.13	<i>(a) : Projection dans le plan $q - dq/d\tau$ du portrait de phase et (b) : Evolution temporelle de la dynamique stochastique, $D = 0.1$, du système désordonné. Ici q_s indique une position arbitraire de la séparatrice. Les paramètres de simulation sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $N = 5$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_G = 2.30$, $\sigma = 0.1\%$.</i>	55
3.14	<i>Exemple de transition de l'attracteur de fréquence Ω_3 à l'attracteur synchronisé au circuit RLC de fréquence Ω_1 sous l'influence du bruit pour le système désordonné. Les paramètres sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_G = 2.30$, $\sigma = 0.1\%$, $D = 0.2$, $N = 5$.</i>	55
3.15	<i>Effet de la vitesse de balayage sur la Fonction complémentaire de distribution cumulative CCDF des temps de transition en absence du signal (trait fort noir) et en présence du signal ($\gamma_{ac} = 0.2$) pour la stratégie incohérente (trait fort bleu) et la stratégie cohérente (trait fort rouge). Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\omega = 0.86$, $\alpha = 0.2$ $\gamma_{ac} = 0.2$ avec (a) : $v = 10^{-3}$; (b) : $v = 10^{-4}$; (c) : $v = 10^{-5}$; (d) : $v = 10^{-6}$.</i>	57

3.16 Variation des valeurs moyennes des temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$ en fonction de la fréquence ω_{ac} du signal dans le cas de la stratégie incohérente, pour mettre en relief l'effet des différentes valeurs de l'amplitude du signal γ_{ac} . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes amplitudes sont : carré : $\gamma_{ac} = 0.1$, cercle : $\gamma_{ac} = 0.2$, losange : $\gamma_{ac} = 0.3$, triangle : $\gamma_{ac} = 0.4$. Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$ 57

3.17 Variation de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie incohérente. Ce diagramme met en relief l'effet des différentes valeurs de l'amplitude du signal γ_{ac} . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes amplitudes sont : carré : $\gamma_{ac} = 0.1$, cercle : $\gamma_{ac} = 0.2$, losange : $\gamma_{ac} = 0.3$, triangle bas : $\gamma_{ac} = 0.4$. Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$ 59

3.18 Valeur moyenne des temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$ en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie incohérente. Ce diagramme met en relief l'effet de la vitesse de balayage v . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes vitesses sont : étoile : $v = 10^{-2}$, carré : $v = 10^{-3}$, cercle : 10^{-4} , losange : 10^{-5} , triangle bas : 10^{-6} . Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$ 59

3.19 Variation de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie incohérente. Ce diagramme met en relief l'effet de la vitesse de balayage v . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes vitesses sont : carré : $v = 10^{-3}$, cercle : 10^{-4} , losange : 10^{-5} , triangle bas : 10^{-6} . Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$ 60

3.20 Variation de la valeur moyenne des temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$ en fonction de la fréquence ω du signal pour la stratégie cohérente. Ce diagramme met en relief l'effet de l'amplitude du signal γ_{ac} . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes amplitudes sont : carré : $\gamma_{ac} = 0.1$, cercle : $\gamma_{ac} = 0.2$, losange : $\gamma_{ac} = 0.3$, triangle : $\gamma_{ac} = 0.4$. Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$ 61

3.21 Variation de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie cohérente. Ce diagramme met en relief l'effet de l'amplitude du signal γ_{ac} . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes amplitudes sont : carré : $\gamma_{ac} = 0.1$, cercle : $\gamma_{ac} = 0.2$, losange : $\gamma_{ac} = 0.3$, triangle : $\gamma_{ac} = 0.4$. Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$ 61

3.22 Variation de la valeur moyenne des temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$ en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie cohérente, pour mettre en relief l'effet de la vitesse de balayage v . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes vitesses sont : étoile : $v = 10^{-2}$, carré : $v = 10^{-3}$, cercle : 10^{-4} , losange : 10^{-5} , triangle : 10^{-6} . Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$ 62

3.23 *Variation de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie cohérente, pour mettre en relief l'effet de la vitesse de balayage v . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes vitesses sont : étoile : carré : $v = 10^{-3}$, cercle : 10^{-4} , losange : 10^{-5} , triangle : 10^{-6} . Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$* 62

3.24 *Fonction densité de probabilité des différents temps de transition ou "escape time" "ET"; (a) : les transitions sont réalisées sous la seule action du bruit, (b) : les transitions sont réalisées sous l'action combinée du bruit et du signal. Les courbes sont obtenues pour plusieurs valeurs du temps de corrélation τ_c : le trait fort vert correspond à $\tau_c = 10^{-4}$, le trait fort rouge à $\tau_c = 0.5$ et le trait fort cyan à $\tau_c = 1$. Il est important de mentionner que l'échelle logarithmique est utilisée sur l'axe horizontal, ce qui déforme la distribution. Lorsque les valeurs des ET sont grandes l'aire recouverte par la distribution semble petite. Donc le PDF ainsi représenté est parfaitement normalisé.* 63

3.25 *Moyenne des temps de transition en fonction du temps de corrélation τ_c . Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\omega = 0.8$ * 64

3.26 *Variation de la fonction densité de probabilité en fonction du temps moyen de transition pour plusieurs valeurs du temps de corrélation τ_c : (a) $\tau_c = 1$, (b) $\tau_c = \frac{\pi}{\omega}$ (résonance stochastique), (c) $\tau_c = \frac{2\pi}{\omega}$ (période du signal), (d) $\tau_c = 9$, (e) $\tau_c = 10$, (f) $\tau_c = 20$. Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\omega = 0.8$ * 65

3.27 *Variation de la fonction densité de probabilité en fonction du temps moyen de transition pour plusieurs valeurs du temps de corrélation τ_c : (a) $\tau_c = 1$, (b) $\tau_c = \frac{\pi}{\omega}$ (résonance stochastique), (c) $\tau_c = \frac{2\pi}{\omega}$ (période du signal), (d) $\tau_c = 9$, (e) $\tau_c = 10$, (f) $\tau_c = 20$. Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.8$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.04$, $\omega = 0.8$ * 66

3.28 *Variation de la fonction densité de probabilité en fonction du temps moyen de transition pour plusieurs valeurs de la fréquence ω du signal : (a) $\omega = 0.1163$, (b) $\omega = 0.2326$, (c) $\omega = 0.4653$, (d) $\omega = 0.8000$, (e) $\omega = \omega_0$ (fréquence de résonance de l'élément JJ $\omega_0 = \sqrt[4]{1 - \gamma^2}$), (f) $\omega = 0.9753$. Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\tau_c = 1$ * 66

3.29 *Variation du temps moyen de transition en fonction de la fréquence du signal pour quelques valeurs du temps de corrélation τ_c : trait fort bleu $\tau_c = 10^{-4}$, trait fort vert $\tau_c = 0.5$, trait fort marron $\tau_c = 1$, trait fort rose $\tau_c = 2$, trait fort rouge $\tau_c = 3$. Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$ * 67

3.30 *Pic du PDF en fonction de τ_c pour deux valeurs de la fréquence du signal ω : (a) $\omega 0.8$, (b) $\omega 0.9306$ * 67

Liste des tableaux

1.1	Valeurs des températures critiques de quelques matériaux supraconducteurs. . . .	5
3.1	<i>Plage des valeurs du courant appliqué γ_G correspondant à l'état de résonance. Le tableau indique sur l'étendue de la plage correspondant à l'état de résonance. . . .</i>	45
3.2	<i>Couple de valeurs (courant appliqué ;séparatrice) pour deux valeurs de N. Les valeurs du courant appliqué sont prises dans la plage de résonance</i>	49
3.3	<i>Propriété de la région où on observe un minimum à basse fréquence en fonction de l'amplitude du signal pour la stratégie cohérente de détection.</i>	60
3.4	<i>Propriété de la région où on observe le minimum en fonction de la vitesse de balayage pour la stratégie cohérente de détection.</i>	63

Abstract

Signals detection is as far as other applications of Josephson junctions. It is shown that for the junctions to be useful for practical purposes, the arrays of junctions are efficient. This situation motivates in this thesis to model the Josephson junctions sinusoidal signals detector. The device is made up with the series array of Josephson junctions coupled through the RLC circuit. The array is defined in two different ways : identical array for which all the junctions have the same parameters and the disordered array in which some parameters vary from one junction to another. We have set two models of signal detection associated to the junctions of the array namely, the model of the non constant bias that is linearly ramping bias current at the speed v in one hand and in the other hand, the model of colored noise characterized by the correlation time. For identical series array, the deterministic dynamics reveals that the device exhibits birhythmic properties characterized by the coexistence of two stable attractors, each displaying a different frequency of oscillation. In the presence of noise, the attractors are deformed and still well separated. After a certain time, one observes a transition from one attractor to another, leading to the problem of stability which is studied through the use of the effective energy. The deterministic dynamics also reveals that the disordered array missed the birhythmic properties for large values of disorder parameter. For low values of disorder parameter, the deterministic dynamics is similar to the one of identical array. The effect of noise is also similar but the switch from one attractor to another is less neat and therefore it is difficult to locate the separatrix, hinting to a more complex effective energy. The detection properties are studied through the analysis of the escape times sample collected by the use of two strategies namely, the coherent strategy and the incoherent strategy. The bias ramping speed does not influence the performance of the detector at low speed but improves the performance of the detector when the speed becomes high. For the case of the detector with colored noise, it is shown that the distribution of the escape times, the probability density function depends up on the noise correlation time. A careful analysis reveals that two effects are preminent : the increase of stability (as measured by the average escape time from the metastable state) and the increase of the extreme events in the tail of the escape time distribution.

Keywords : Josephson junctions ; birhythmic properties ; effective energy ; identical array ; disorder array ; ramping speed ; colored noise ; correlation time.

Résumé

La détection du signal est l'une des applications de jonctions Josephson. Cependant les scientifiques ont démontré que les réseaux de jonctions sont efficaces pour les applications technologiques. C'est la raison pour laquelle dans cette thèse nous modélisons le détecteur à jonction Josephson d'un signal sinusoïdal. Le dispositif est constitué d'un réseau linéaire de jonction Josephson couplé au résonateur RLC. Dans le cadre de la dynamique du réseau, deux cas sont considérés à savoir le modèle parfait du réseau pour lequel toutes les jonctions sont identiques et le modèle imparfait pour lequel certains paramètres physiques diffèrent d'une jonction à une autre. Deux modèles de détection sont associés aux différentes jonctions du réseau à savoir le modèle à courant variable dans le temps caractérisé par la vitesse de balayage d'une part et le modèle à bruit coloré caractérisé par le temps de corrélation d'autre part. La dynamique déterministe du réseau a révélé qu'il possède les propriétés birythmiques à travers la coexistence de deux attracteurs d'amplitudes différentes associés à des fréquences d'oscillation différentes. L'effet du bruit sur le réseau montre que les attracteurs sont déformés et demeurent bien séparés. Après une certaine durée, on observe une transition d'un attracteur à un autre ; posant le problème de stabilité des attracteurs, laquelle stabilité est étudiée à travers la barrière d'énergie. La dynamique déterministe du réseau imparfait a révélé que le caractère birythmique est détruite lorsque le désordre est important. La birythmicité persiste lorsqu'on considère les faibles valeurs du paramètre de désordre. Dans ce cas, l'effet du bruit sur la dynamique du réseau imparfait est similaire à celui du cas précédent à la seule différence que la transition entre les attracteurs n'est pas nette, rendant difficile la localisation de la séparatrice et aussi la complexité à construire la barrière d'énergie. L'étude des propriétés de détection est faite grâce à l'analyse statistique des différents temps de transition ou "escape time". L'échantillonnage des différents temps de transition est faite à partir de deux stratégies à savoir la stratégie cohérente et la stratégie incohérente. Pour le cas du modèle de détection à courant variable, la performance du détecteur n'est pas influencée par la vitesse de balayage mais se trouve améliorée pour des valeurs élevées de cette dernière. Dans le cas du modèle de détection à bruit coloré, on observe une forte dépendance de la fonction densité de probabilité vis-à-vis du temps de corrélation. Le temps de corrélation modifie non seulement la forme de la fonction densité de probabilité mais maintient aussi longtemps que possible la jonction à l'état supraconducteur.

Mots clés : Jonctions Josephson ; propriétés birythmiques ; barrière d'énergie ; réseau parfait ; réseau imparfait ; vitesse de balayage ; bruit coloré ; temps de corrélation.

Introduction générale

Depuis quelques années, les scientifiques consacrent leurs travaux à la recherche des effets dûs aux excitations aléatoires ou non périodiques sur l'évolution nonlinéaire des systèmes dynamiques [1,2]. Nous pouvons citer la modélisation des neurones, la transmission du paludisme, l'interaction entre un système et son environnement etc. L'intérêt de cette étude se justifie par les phénomènes que l'on a pu observer :

- La stabilité : le bruit ou excitation aléatoire peut jouer le rôle de l'agent stabilisateur d'un ensemble d'oscillateurs couplés [3].
- La résonance stochastique [4] qui est le phénomène qui apparaît lorsqu'un système nonlinéaire est soumis simultanément au bruit et à une excitation périodique.
- La résonance cohérente [5,6] qui fait référence à l'apparition des oscillations cohérentes dans un système dynamique en présence du bruit.

Toutefois, l'observation de tous ces phénomènes est la preuve que le bruit n'a pas toujours un effet destructeur sur les systèmes dynamiques. Si le bruit peut induire l'ordre dans un système chaotique [7], si la synchronisation peut être induite par un bruit externe [8] ou si pour certains systèmes nonlinéaires le bruit peut améliorer la réponse du système aux signaux externes [2,4,9], les scientifiques gagneraient d'avantage à creuser dans ce domaine aussi riche en applications. Par ailleurs, les scientifiques ont pu démontrer que le bruit peut changer la dynamique des jonctions Josephson (JJ) dans ce sens qu'il peut amener la jonction à passer de l'état supraconducteur à l'état résistif même à des niveaux les plus faibles du courant appliqué relevant ainsi des effets quantiques [10]. C'est ce changement de dynamique que les scientifiques ont exploité pour attribuer à la JJ la fonction de détecteur des signaux fussent-ils sinusoidaux ou pas. Plus récemment, il a été démontré à travers les simulations des modèles neuronaux que le bruit est avantageux pour la détection du signal [11], quand bien même celui-ci est corrélié [12].

Dans cette thèse, il est question de modéliser un détecteur à JJ du signal sinusoïdal dont la particularité est de constituer les JJ en réseau. Ainsi donc, il serait intéressant tout d'abord d'examiner l'effet du bruit sur le réseau de JJ [13–16] car il a été précisé au paragraphe précédent que le bruit est l'élément essentiel dans le processus de détection. Cependant Il y a deux raisons qui font des JJ un excellent candidat pour la détection :

- i) Ce sont des éléments supraconducteurs pouvant opérer à de très basses températures (proche de la limite quantique [17]).
- ii) Les JJ sont des éléments extrêmement rapides ayant des fréquences d'oscillation allant de quelques centaines de GigaHertz (GHz) jusqu'au domaine du TéraHertz (THz) [18].

En ce qui concerne les JJ, on parle de détection seuil [19–21] qui est basée sur le fait qu'en présence du signal, un système peut changer de comportement lorsque l'un de ses paramètres passe par un seuil comme quitter d'un état métastable à un autre, lorsque la phase de la jonction excède une certaine valeur. Cette même dynamique se manifeste chez les JJ qui, sous l'action combinée du bruit et du signal, peuvent passer de l'état supraconducteur caractérisé par l'absence d'une différence de potentiel (ddp) aux bornes du dispositif à l'état résistif pour lequel une ddp mesurable apparaît aux bornes du dispositif. L'analyse de ce comportement permet de déduire la présence de toutes les perturbations existant dans l'environnement de la jonction. Cette technique est similaire à celle que l'on exploite depuis la découverte du mécanisme de la résonance stochastique [22] pour la détection des signaux digitaux sous seuil à travers la gachette de Schmitt [23, 24]. Depuis les premiers travaux [25, 26], plusieurs expériences ont été réalisées pour mettre en lumière le rôle du couple (signal sinusoïdal + bruit) dans les systèmes de JJ à l'instar de la localisation du point de comportement quantique [27, 28], de l'atteinte de la limite du photon célibataire [29–31] ou encore la détection de la phase du signal appliqué [32].

La caractérisation du détecteur à JJ se fait au moyen de l'analyse de la distribution des temps d'évasion [33–35] ou "escape time" (ET), temps nécessaire pour la jonction de quitter l'état supraconducteur pour l'état résistif. Depuis les premières expériences [26], il a été démontré que la distribution des temps d'évasion ("escape time") est très sensible à l'amplitude du signal et de ce fait l'on peut en construire un échantillon en considérant les cas suivants : le cas où la transition est causée par le bruit seul et le cas où la transition a lieu sous l'action combinée du bruit et du signal. Dans la théorie de la détection l'analyse quantitative est évaluée à travers la détermination de la performance du détecteur et l'outil le plus approprié est l'indice de Kumar-Carroll (K-C) [36–38]. Cet indice n'est qu'un indicateur approprié de la performance du détecteur dans ce sens qu'il permet de déterminer les conditions favorables en terme de courant appliqué, de la fréquence du signal et de la dissipation [38]. Cependant, la performance dépend aussi de la stratégie adaptée : on peut citer entre autre la stratégie "Sample Mean" (SM) ou encore la stratégie "Likelihood Ratio Test" (LRT) [39]. C'est ainsi que la recherche de la performance du détecteur doit tenir compte du dispositif tout entier, comme dans le cas pour lequel le courant appliqué est une fonction dépendant du temps [40]. La performance du détecteur dépend aussi de la façon dont le signal est appliquée et de ce fait on définit deux stratégies : la stratégie cohérente (la phase du signal appliqué est connue et est constante) et la stratégie incohérente (la phase du signal demeure inconnue car elle peut prendre des valeurs aléatoires uniformément réparties dans l'intervalle $[0; 2\pi)$) [37]. Par ailleurs, l'analyse de la distribution des temps d'évasion ou "ET" a vu émerger de nouveaux phénomènes tels que l'activation résonante ou "Resonant Activation" (RA) [41–43] et le phénomène d'amélioration de la stabilité induite par le bruit ou "Noise-Enhanced-Stability" (NES) [44–46, 168].

Cependant la question suivante demeure : sous quelle forme notre détecteur (réseau de JJ) pourra-t-il être défini et sous quelle condition doit-il être utilisé ? Tel est le défi à relever dans ce travail de thèse. Dans cette thèse, notre objectif principal est la modélisation d'un détecteur à JJ dont

les éléments sont disposés en réseau. Parmi les réseaux de JJ existant, nous avons opté pour le réseau linéaire. Comme précisé au paragraphe précédent, le bruit étant à la base de la théorie de la détection, il sera intéressant d'examiner le comportement du réseau en présence du bruit ainsi que les conditions de synchronisation du réseau. Dans la littérature, il est démontré que l'association du réseau de jonction au résonateur RLC peut favoriser la synchronisation des éléments du réseau [14]. De plus, l'association du résonateur RLC à une seule jonction a donné lieu à des effets stochastiques intéressants [15]. Ses effets stochastiques ont été exploités pour étudier la stabilité des attracteurs. Il serait aussi intéressant d'établir les conditions de stabilité du réseau afin d'identifier les conditions favorables d'utilisation du réseau comme détecteur. Pour atteindre nos objectifs, nous devons :

1. Etablir les conditions de synchronisation des éléments du réseau.
2. Examiner la dynamique du réseau sous l'influence du bruit par exemple l'existence du phénomène de la birhythmicité ; quand bien même cela est possible, peut-il exister les transitions entre les attracteurs ?
3. Examiner la stabilité des attracteurs à travers la construction de la barrière d'énergie.
4. Rechercher l'effet combiné du désordre et du bruit sur le comportement dynamique du réseau. Il est clair que dans la réalité on ne peut pas fabriquer un réseau de jonctions ayant des paramètres identiques.

Les objectifs spécifiques ci-dessus étant réalisés, l'on peut étudier les différentes formes de détecteur appropriées pour notre réseau en considérant les jonctions individuelles. C'est ainsi que nous avons considéré le cas pour lequel la jonction est à courant appliqué linéairement dépendant du temps. Ce détecteur a pour avantage qu'il est possible de fixer un temps prédéfini pour mener toute expérience. Une autre forme de détecteur proposé est le cas pour lequel l'excitation aléatoire est le bruit coloré exponentiellement corrélé. Ce dernier peut faire émerger de nouveaux phénomènes. Dans cette thèse, l'élément fondamental de notre étude est la jonction Josephson. Il serait donc intéressant de comprendre ce concept dans sa généralité et aussi la théorie de la détection. C'est ainsi qu'au premier Chapitre, une revue de la littérature est faite sur le phénomène de l'effet Josephson et ses conséquences, les différents types de réseaux ainsi que la théorie de la détection. Au deuxième Chapitre, nous avons présenté les modèles mathématiques, les méthodes d'analyse ainsi que les méthodes de simulations numériques. Le troisième Chapitre est consacré à l'analyse des résultats afin de dégager un jugement sur l'atteinte des objectifs. Cette thèse se termine par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Revue de littérature et Motivation

1.1 Introduction

La détection du signal sinusoïdal masqué par un bruit n'est pas un phénomène nouveau. La jonction Josephson (JJ) de part ses caractéristiques demeure un candidat idéal pour la détection. La dynamique de la JJ associée au processus de la détection constitue la base de notre travail. Nous rappelons que la JJ doit son nom à la découverte de l'effet Josephson par David Brian Josephson en 1962. Nous sommes donc tenus non seulement de rappeler ce qu'est l'effet Josephson et ses applications mais aussi de faire l'état de l'art en ce qui concerne la détection du signal sinusoïdal au moyen des dispositifs conçus à base des JJ. En relevant les points forts et les insuffisances des travaux antérieurs nous allons pouvoir justifier l'intérêt et la nécessité de ce travail pour l'évolution de la science. Ainsi, ce chapitre est organisé comme suit : la section 1.2 présente l'effet Josephson dans sa globalité en donnant plus de détails, la section 1.3 présente des différents types de JJ ainsi que des différents modèles permettant de les décrire, la section 1.4 fait étalage des sources de bruit ou perturbations aléatoires dans les JJ en tant que sources internes et aussi en tant que sources externes pouvant interagir avec les JJ, la section 1.5 donne des détails sur la théorie de la détection appliquée aux JJ ainsi que l'état de l'art. Cette partie conduit à la motivation et à la question de recherche soulignée à la section 1.6. Ce chapitre se termine par une petite conclusion à la section 1.7.

1.2 Effet Josephson

Il est difficile de traiter l'effet Josephson sans évoquer le phénomène de supraconductivité. Découvert Par *David Brian Josephson* en 1962 [48], l'effet Josephson est d'une importance indéniable de part de nombreuses applications qui en découlent dès la première décennie [49, 50] qui suit la découverte.

1.2.1 Supraconductivité

On peut définir la supraconductivité comme une soudaine disparition de la résistance électrique dans certaines substances lorsque la température se rapproche de zéro Kelvin. Ce phénomène est découvert en 1911 par le Physicien *Heike Karmeingh Onnes* pendant les travaux sur la liquéfaction de l'Hélium à pression ambiante et à une température de 4.2 K [51]. Au fait, *Onnes* a observé

qu'à basse température, la résistance de certains métaux tels que le mercure diminue voir même disparaît [52, 53]. Cette propriété des supraconducteurs est représentée à la Figure 1.1.

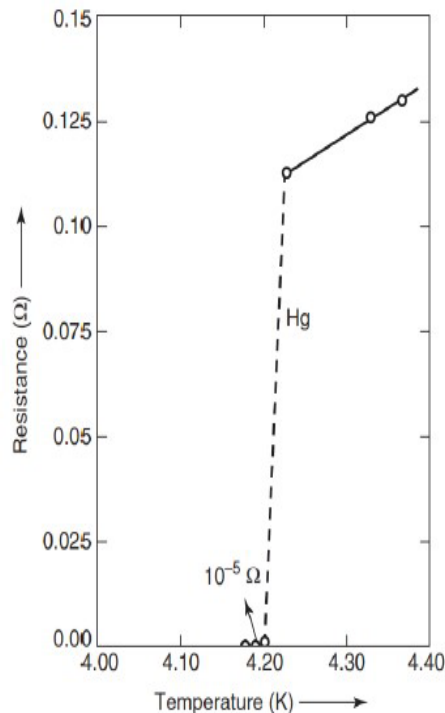


Figure 1.1 – Propriété supraconductrice du mercure [51].

Ce diagramme montre que lorsque le mercure est refroidi jusqu'à la température de 4.2K, sa résistance électrique chute subitement à zéro ou est quasi-nulle : l'on peut conclure que la température critique (T_c) du mercure est 4.2 K. On définit donc la température critique comme celle en dessous de laquelle un métal exhibe les propriétés supraconductrices. La Tableau 1.1 donne quelques matériaux supraconducteurs et indique leur température critique correspondante.

Tableau 1.1 – Valeurs des températures critiques de quelques matériaux supraconducteurs.

Matériaux	Température critique (k)
<i>Al</i>	1
<i>Pb</i>	7.2
<i>Nb - Ti</i>	9
<i>PbMo₆S₈</i>	15
<i>Nb₃Ge</i>	23
<i>La_{2-x}Sr_xCuO₄</i>	38
<i>MgB₂</i>	39
<i>La(Fe, F)As</i>	55
<i>YBa₂Cu₃O_{6,9}</i>	92
<i>Bi₂Ca₂Sr₂Cu₃O₁₀</i>	110

La recherche approfondie dans le domaine de la supraconductivité a conduit à la découverte d'une nouvelle propriété basée sur la théorie BCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer) [54, 55], inspirée des travaux de *Leon Cooper* [56]. Cette théorie stipule qu'à basse température, deux électrons

appartenant à la surface de Fermi peuvent manifester une interaction attractive formant ainsi une liaison appelée paire de *Cooper*. Elle démontre aussi qu'à basse température plusieurs électrons restent non appariés et il existe une barrière d'énergie entre les paires de *Cooper* et les électrons non appariés [57]. Ainsi, le nuage électronique des matériaux supraconducteurs est constitué des électrons appariés (paires de *Cooper*) et les électrons non appariés. Si l'on constitue donc deux blocs supraconducteurs séparés par une mince couche d'isolant il peut avoir échange par effet tunnel des paires de *Cooper* entre les deux blocs (Effet *Josephson*) ainsi que les électrons non appariés [58]. Par ailleurs, au cours de ces dernières années, les supraconducteurs à haute température (HTS) [59, 60] ont été découverts et ont des températures critiques au de-là de 23K (température critique la plus élevée avant la découverte). Comme exemple des HTS nous avons les matériaux fait à base du Lanthanium, Barium, Cuivre et Oxygène ($T_c = 40K$) des matériaux faits à base du Yttrium, Barium, Cuivre et Oxygène ($T_c = 80K$) etc... Cette nouvelle découverte permettra la mise sur pied des dispositifs réels à supraconducteurs bon marché car l'Azote liquide (température d'ébullition 77K) utilisé pour le refroidissement est moins cher que l'Hélium liquide utilisé auparavant.

1.2.2 Jonction Josephson

La jonction Josephson (JJ) représentée à la Figure 1.2 est constituée de deux blocs supracon-

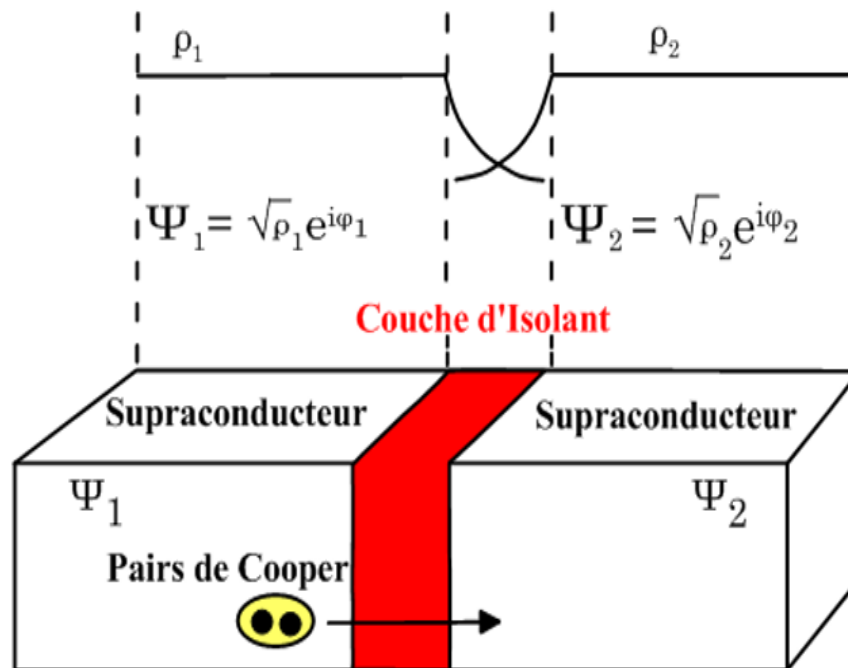


Figure 1.2 – Schéma de la jonction Josephson, mince couche d'isolant (insulator) séparant les deux blocs supraconducteurs. Les fonctions d'onde $\Psi_{1,2}$ décrivent les paires de Cooper (Cooper pairs) qui par effet tunnel peuvent traverser la couche d'isolant. [61]

ducteurs séparés par une mince couche d'isolant. En 1962, *David Brian Josephson* sur la base du développement de ses travaux sur le phénomène de supraconductivité, est arrivé à la conclusion

selon laquelle il est possible par effet tunnel que l'on observe un courant constitué des paires de *Cooper* circulant d'un bloc à un autre et vice-versa [48]. Ce phénomène est connu sous le nom de l'effet Josephson [49].

1.2.3 Signification de l'effet Josephson

La compréhension de l'effet Josephson peut se faire à plusieurs niveaux. Au départ il est apparu comme un instrument de mesure. D'ailleurs, le Directeur de thèse de *Josephson* rapporte dans l'article [50] que l'effet Josephson apparaît comme l'outil permettant de vérifier la théorie de la supraconductivité. En 1962, son groupe de recherche postule que la supraconductivité est constituée d'une cohérence des ondes de *Broglie* représentant les paires de *Cooper* des supraconducteurs. L'on comprend donc que l'effet Josephson ouvre la voie aux différentes applications de la supraconductivité. Dès les premières décennies, l'effet Josephson a eu entre autre comme applications la redéfinition standard du galvanomètre [62], la mesure du rapport e/h [63, 64], la démodulation des signaux à haute fréquence [65, 66] etc...

L'on peut aussi comprendre l'effet Josephson par l'observation du comportement du supercourant qui circule entre les deux blocs supraconducteurs. La première observation a été faite par *Anderson* en 1963 [67].

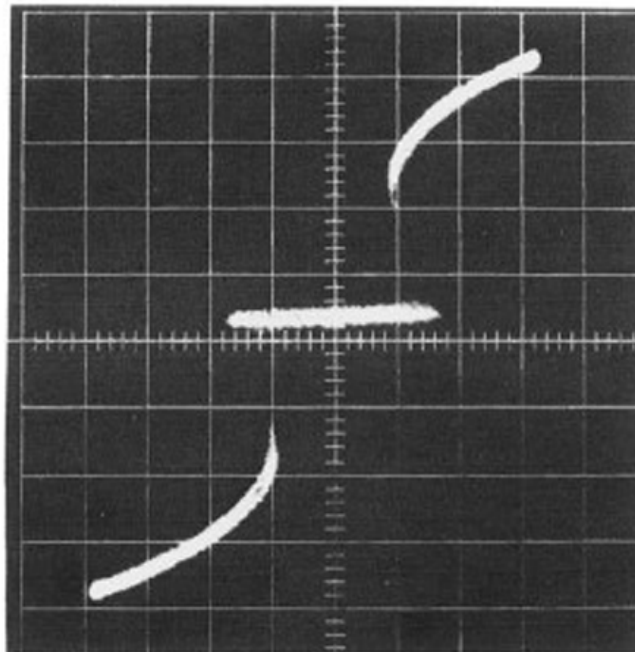


Figure 1.3 – Caractéristique courant-tension de la jonction Josephson. On observe bien le supercourant de Josephson en l'absence de la différence de potentiel (ddp) aux bornes de la jonction (observation de Shapiro en 1963 [68]).

La Figure 1.3 illustre bien l'observation de l'effet Josephson tel que prédit.

1.2.4 Equation de Josephson

De façon précise, les prédictions de *Josephson* se résument en deux points à savoir :

- En l'absence d'une ddp aux bornes des blocs supraconducteurs, il est possible qu'un supercourant circule à travers le diélectrique séparant les blocs supraconducteurs. Ce courant est une fonction sinusoïdale de la différence de phase entre les fonctions d'onde décrivant les paires de *Cooper* des blocs supraconducteurs correspondant.
- En présence d'une ddp aussi faible qu'elle soit, le supercourant devient dépendant de cette ddp.

Les équations de base de la jonction Josephson [48, 69] concernent le supercourant à travers le diélectrique et la ddp aux bornes des blocs supraconducteurs. Elles sont données par la relation suivante :

$$I_J = I_0 \sin \phi \quad (1.1a)$$

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt}. \quad (1.1b)$$

Dans les équations(1.1), ϕ est la différence de phase entre les fonctions d'onde Ψ_1 et Ψ_2 (comme indiqué à la Figure 1.2), d'expression :

$$\Psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\varphi_1} \quad (1.2a)$$

$$\Psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\varphi_2} \quad (1.2b)$$

Dans cette dernière ρ_1 et ρ_2 représentent les densités des paires de *Cooper* ; φ_1 et φ_2 les phases des fonctions d'onde décrivant les paires de *Cooper*. On peut donc écrire $\phi = \varphi_2 - \varphi_1$. I_J désigne le courant de Josephson d'intensité I_0 , \hbar la constante de *Planck*, e la charge élémentaire et V la ddp aux bornes des blocs supraconducteurs.

Ce sont les équations de Josephson qui permettent de définir les deux formes de l'effet Josephson à savoir l'effet Josephson continu illustré à la Figure.1.4 et l'effet Josephson alternatif illustré à la Figure.1.5. Concernant ce dernier, la ddp V est non nulle et par conséquent la phase et le courant de Josephson sont définis comme suit :

$$\phi = \phi_0 + \frac{2eV}{\hbar}t, \quad (1.3a)$$

$$I_J = I_0 \sin\left(\phi_0 + \frac{2eV}{\hbar}t\right). \quad (1.3b)$$

2

Le courant I_J oscille avec la pulsation $\omega_J = \frac{2eV}{\hbar} = 2\pi\nu_J$. ν_J est la fréquence de Josephson. Le rapport fréquence-tension est donné par la relation :

$$\frac{\nu_J}{V} = \frac{2e}{h} = 483.6 \text{MHz}/\mu\text{V} \quad (1.4)$$

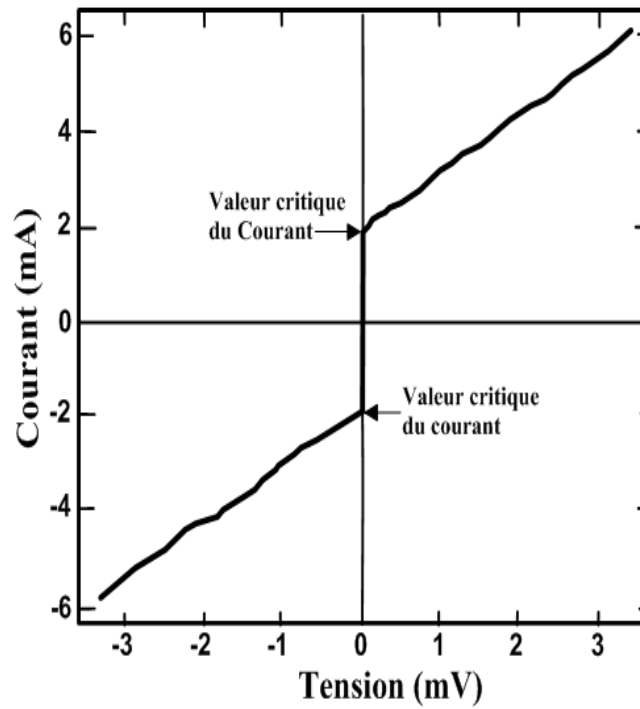


Figure 1.4 – Illustration de l'effet Josephson continu de l'échantillon Sn-SnO-Sn. [64]

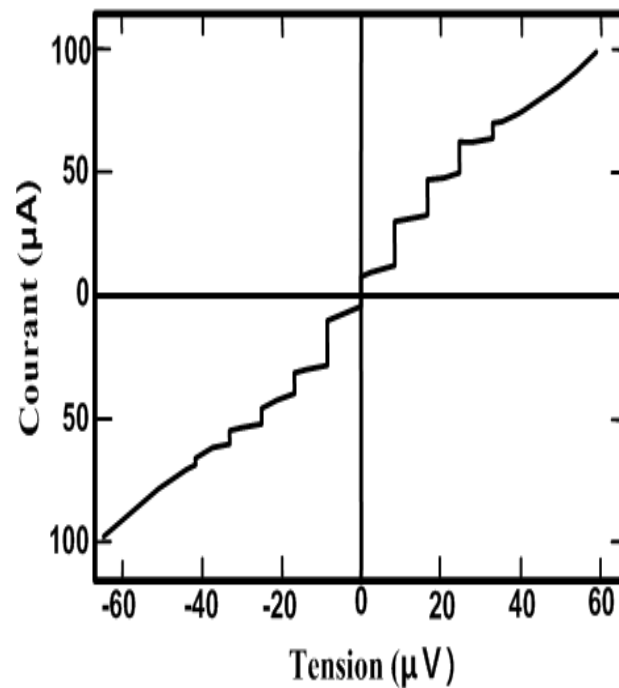


Figure 1.5 – Illustration de l'effet Josephson alternatif de l'échantillon Sn-SnO-Sn. [64]

L'équation(1.4) montre que le supercourant I_J est un oscillateur extrêmement rapide. On remarque aussi que les profils des diagrammes diffèrent l'un de l'autre. Dans la Ref. [64], l'observation des multiples plages (Shapiro steps) sur le profil de la Figure.1.5 est associée à la radiation à laquelle est exposée la jonction Josephson. A ces plages, les tensions sont de la forme :

$$V_n = \frac{nh}{2e} \nu_0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.5)$$

où ν_0 est la fréquence du signal.

1.3 Types et modèles des jonctions Josephson

Dans cette partie nous allons présenter les types de jonction déjà fabriquées jusqu'à nos jours ainsi que les différents modèles électriques permettant de décrire la jonction Josephson.

1.3.1 Les différents types de jonctions Josephson

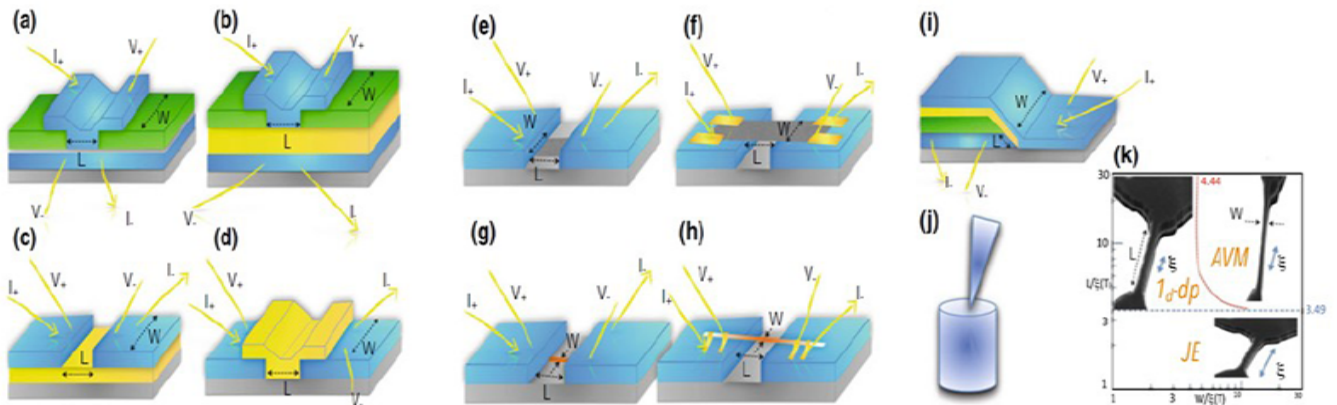


Figure 1.6 – Différents types de Jonction Josephson. [70]

La nature du diélectrique entre les blocs supraconducteurs dépend de l'application que l'on désire. A cet effet il existe plusieurs techniques de fabrication de la couche (barrière) séparant les blocs supraconducteurs. La Figure 1.6 montre une collection de différents types de jonctions. Pour chaque configuration chaque couleur a une signification précise. La couleur bleue est utilisée pour les supraconducteurs, la couleur jaune représente les métaux (semiconducteurs, ferromagnétiques), la couleur grise décrit la mince couche d'isolant qui constitue la barrière entre les blocs supraconducteurs tandis que la couleur verte la couche d'isolant permettant d'isoler les électrodes. La Figure 1.6(a) est celle d'une jonction dont la barrière est un isolant simple. Cette jonction est de type SIS (Superconducting-Insulator-Superconducting). La Figure 1.6(b) décrit une jonction dont la barrière est un métal simple (normal N). Cette jonction est de type SNS (Superconducting-Normal-Superconducting). La différence fondamentale entre les structures de type SIS et SNS réside au niveau de l'épaisseur de la barrière. Ainsi, l'épaisseur du type SIS est de l'ordre du nanomètre tandis que pour le type SNS la barrière est de l'ordre de quelques microns. Les Figures 1.6(c-h) sont des jonctions de configuration coplanaires c'est-à-dire les jonctions dont la barrière est d'épaisseur et de longueur égales. La Figure 1.6(c) est la configuration coplaire à barrière d'épaisseur variable. Dans cette configuration, la barrière est prioritaire sur la couche

supraconductrice. Après avoir disposé la couche supraconductrice, une partie est amputée pour pouvoir séparer les électrodes. Dans la Figure 1.6(d), les deux électrodes supraconductrices sont liées par une mince couche de matériau fixée aux extrémités de ces électrodes. Sur les Figures 1.6(f,h), la barrière est posée sur le supraconducteur. Les Figures 1.6(e,g) présentent les cas dont la barrière est soit un fragment de graphène, soit un fragment d'isolant topologique ou un nanofilament. La Figure 1.6(i) est le type de jonction de barrière à bord d'épaisseur variable. Ce type de jonction est approprié pour les dispositifs basés sur les supraconducteurs à haute température (HTS). La jonction de barrière point de contact est représentée à la Figure 1.6(j). Dans ce cas le métal est appuyé à la surface du supraconducteur [71]. Dans la configuration micropont, le courant qui circule à travers la barrière ne peut excéder la barrière que dans la région circonscrite au micropont [72].

1.3.2 Notion de Jonction courte et Jonction longue

Ces terminologies (jonction courte et jonctions longue) dépendent principalement de la profondeur de pénétration de Josephson λ_J .

1.3.2.1 Profondeur de pénétration de Josephson

Il est établi que le supercourant est une source de champ magnétique qui module la phase ϕ . Ceci entraîne une modification de l'effet *Meissner* [73] de longueur caractéristique λ_J que l'on appelle profondeur de pénétration de Josephson. Toute jonction plus large que λ_J se comporte comme un super supraconducteur. L'effet Meissner fait référence au phénomène d'exclusion totale de tout champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur lorsque sa température devient inférieure à sa température critique. Il a été découvert en 1933 par *Walther Meissner* et *Robert Ochsenfeld*. Ce phénomène est encore appelé diamagnétisme parfait. λ_J est donc la distance à laquelle un champ magnétique peut pénétrer la jonction.

1.3.2.2 Jonction Josephson courte (Short JJ)

Cette terminologie est liée à deux grandeurs à savoir le champ magnétique intrinsèque créé par le supercourant et les dimensions spatiales de la jonction. C'est ainsi que pour la jonction courte, le champ magnétique créé par le supercourant est négligeable comparativement au champ magnétique externe appliqué à la JJ. Les dimensions spatiales (W et L) sont faibles par rapport à λ_J .

1.3.2.3 Jonction Josephson Longue (Long JJ)

Par analogie, dans le cas des jonctions longues, le champ magnétique intrinsèque n'est plus négligeable et les dimensions spatiales sont plus grandes que λ_J .

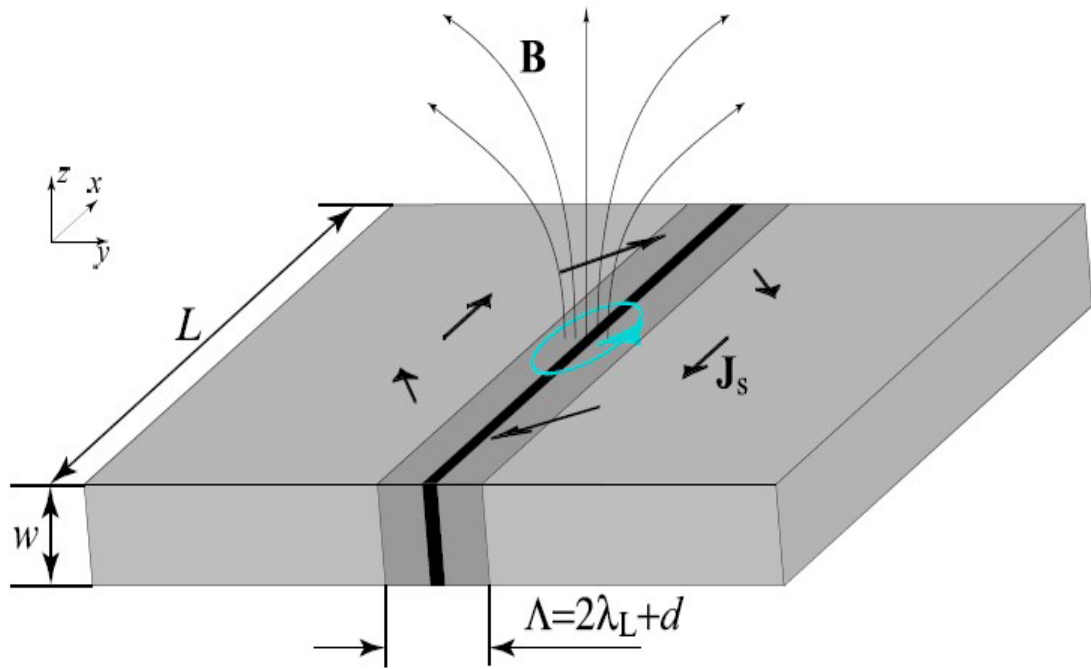


Figure 1.7 – Schéma d'une jonction Josephson longue (Long JJ) de largeur W et de longueur L . On observe les lignes du champ magnétique intrinsèque de la jonction \mathbf{B} qui par tourbillonnement pénètre les électrodes et s'étend même dans l'espace. Le champ magnétique errant créé à la surface des supraconducteurs un courant J_s . [74]

La Figure 1.7 est l'illustration de la jonction Josephson longue où l'effet du champ magnétique intrinsèque n'est plus négligé. Ce champ magnétique crée à la surface du supraconducteur un courant additionnel J_s . La profondeur de pénétration de Josephson a pour expression :

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\phi_0}{2\pi\mu_0 j_c \Lambda}}, \quad (1.6)$$

où ϕ_0 est le quantum du flux magnétique, j_c est la densité de courant critique à travers la barrière, $\Lambda = 2\lambda_L + d$ l'étendue du champ magnétique intrinsèque de la jonction, λ_L la profondeur de pénétration de London et d l'épaisseur de la barrière. En Supraconductivité, la profondeur de pénétration de London caractérise la distance à laquelle un champ magnétique pénètre à l'intérieur d'un supraconducteur. Elle devient proportionnelle à l'intensité du champ à la surface du supraconducteur à $1/e$ près.

1.3.3 Caractéristiques de la jonction courte

Certaines propriétés de la jonction courte doivent être évoquées compte tenu du fait que notre travail est basé sur la dynamique de la jonction courte.

1.3.3.1 Potentiel de Josephson

L'état supraconducteur pour la JJ est celui pour lequel le courant appliqué est en dessous du courant critique I_0 . Dans cet état, on ne détecte aucune dissipation d'énergie. Mais cependant il existe une énergie potentielle stockée dans la JJ que l'on peut assimiler à une énergie moléculaire de liaison. En effet lorsqu'aucun courant ne circule à travers la jonction, la différence de phase ϕ est nulle. Pour une petite variation du courant on observe un brusque changement de la différence de phase ϕ voir équation (1.1b). Cela correspond à une ddp finie. La source de courant externe fournit une énergie qui est l'intégrale de la puissance IV et qui correspond en quelque sorte à l'énergie cinétique des paires de *Cooper*. On assiste donc à une conversion de l'énergie potentielle en énergie cinétique. Pour toute valeur du courant équivalant au courant critique I_0 , toute l'énergie potentielle est convertie en énergie cinétique. L'énergie potentielle est définie par :

$$U = \int_0^{t_1} I_J V dt \quad (1.7)$$

En introduisant l'équation(2.1) dans l'équation(1.7), il vient :

$$U = \int_0^{t_1} I_0 \sin\phi \left(\frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt} \right) dt = \int_0^{t_1} I_0 \sin\phi \left(\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \right) dt \quad (1.8)$$

avec $\frac{\hbar}{2e}$.

Si $\phi(0) = 0$ et $\phi(t_1) = \phi$, alors :

$$U = \left(\frac{\phi_0}{2\pi} \right) I_0 \int_0^\phi \sin\phi d\phi = \frac{\phi_0}{2\pi} I_0 (1 - \cos\phi) \quad (1.9)$$

Le potentiel de Josephson est de la forme :

$$U(\phi) = E_J (1 - \cos\phi), \quad (1.10)$$

où $E_J = \frac{\phi_0}{2\pi} I_0$ est l'énergie stockée dans la JJ à l'état supraconducteur.

1.3.3.2 Inductance de Josephson

La jonction Josephson est considérée comme une inductance nonlinéaire à cause de l'énergie qui est stockée à l'état supraconducteur. En dérivant le courant de Josephson I_J par rapport au temps, il vient :

$$\frac{dI_J}{dt} = \frac{dI_J}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dI_J}{d\phi} \left(\frac{2\pi}{\phi_0} V \right). \quad (1.11)$$

Sachant que par définition,

$$V = L_J \frac{dI_J}{dt}, \quad (1.12)$$

la valeur de l'inductance est donnée par la relation :

$$L_J = \frac{\phi_0}{2\pi} \left(\frac{dI_J}{d\phi} \right)^{-1} \quad (1.13)$$

Pour la jonction courte, l'expression de l'inductance est :

$$L_J = \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{I_0 \cos \phi} = \frac{L_c}{\cos \phi}, \quad (1.14)$$

avec $L_c = \frac{\phi_0}{2\pi I_0}$.

1.3.4 Différents modèles de la jonction Josephson

Dans cette partie il est question de présenter les modèles électriques permettant de bien comprendre le comportement dynamique d'une JJ.

1.3.4.1 Modèle RSJ

Il est établi que dans la dynamique des JJ les paires de *Cooper* et les électrons non appariés peuvent par effet tunnel traverser la barrière qui séparent les blocs supraconducteurs. Dans cette configuration, la JJ peut être assimilée à une jonction idéale (J) connectée en dérivation avec un résistor (voir Figure 1.8). Le résistor ici fait met en exergue la capacité de la jonction à s'opposer au mouvement des électrons non appariés à travers le diélectrique.

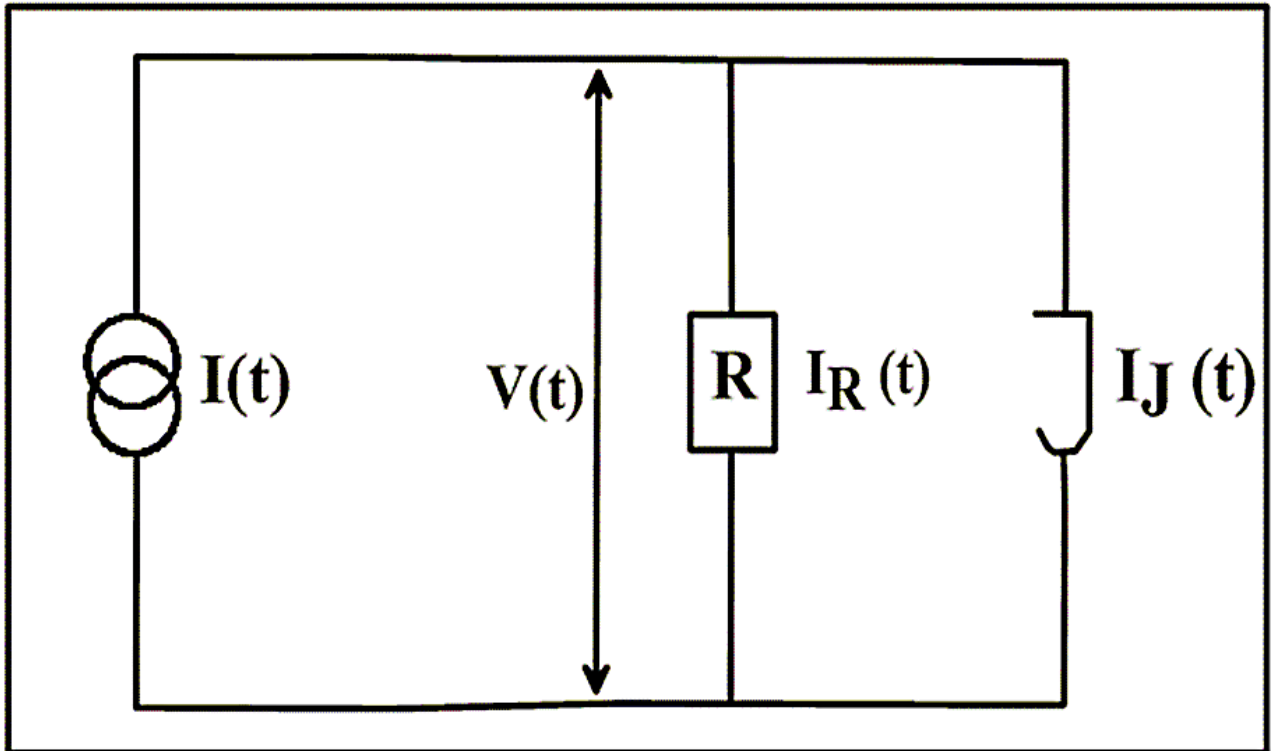


Figure 1.8 – Circuit électrique du modèle RSJ (*Resistively Shunted Junction*) de la jonction Josephson. [75]

Ce modèle a été proposé par *Stewart* [76] et *McCumber* [77] pour la description du comportement électrique des jonctions du type "Dayem bridge" et du type point de contact. En utilisant les lois de *Kirchhoff*, on aboutit à l'équation différentielle suivante : [75] :

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin \varphi = I(t), \quad (1.15)$$

où φ est la différence de phase entre les fonctions d'ondes des paires de *Cooper* des blocs supraconducteurs, $I(t)$ le courant appliqué, $I_c \sin \varphi$ le supercourant de Josephson et $\left(\frac{\hbar}{2e}\right) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ la valeur de la tension aux bornes de la jonction. Dans ce modèle, il est important de rappeler que la résistance R dépend de la température et de la ddp aux bornes de la jonction c'est-à-dire $R = R(V, T)$.

1.3.4.2 Modèle RCSJ

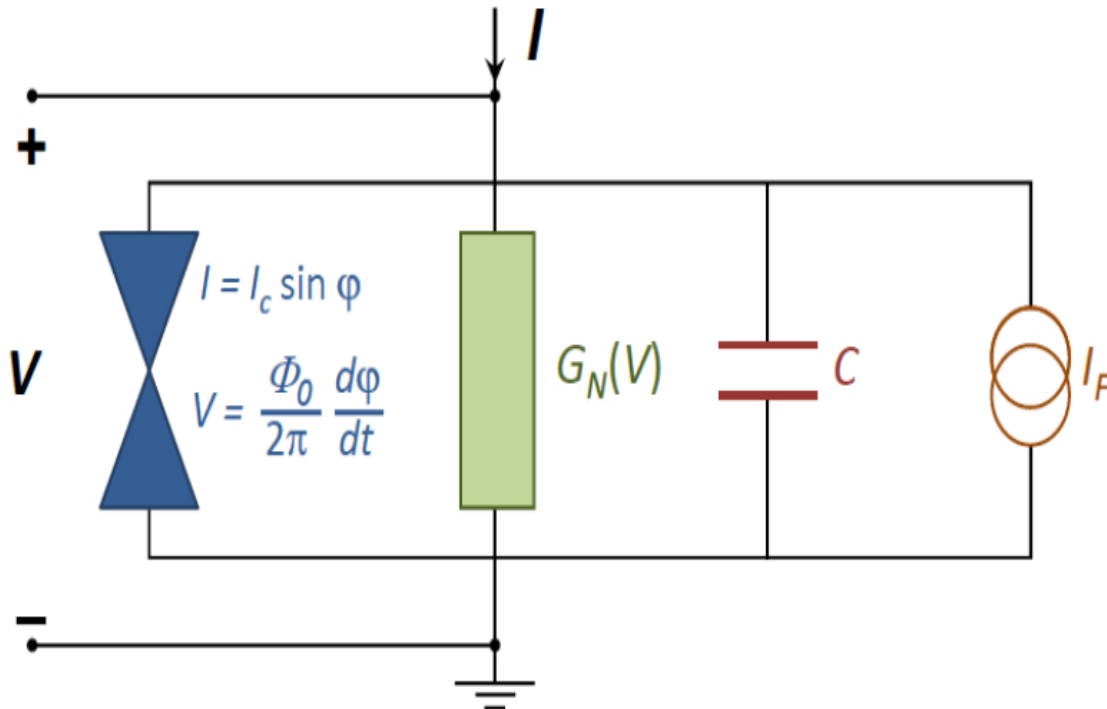


Figure 1.9 – Circuit électrique du modèle RCSJ (*Resistively and Capacitively Shunted Junction*) de la jonction Josephson. [78]

Le modèle a été introduit pour la première fois par *Stewart* et *McCumber* [76, 77] en 1968 qu'on appelle aussi modèle de Stewart-McCumber. Il est constitué de trois éléments connectés en parallèle à savoir la résistance R ou bien (G_N conductance), le condensateur de capacité C et la jonction idéale J (voir Figure 1.9). Le circuit électrique ainsi constitué comporte tous les éléments nécessaires à la description d'une jonction réelle. Ainsi :

- a) L'élément R ou (G_N) met en évidence la capacité du diélectrique à s'opposer au mouvement des électrons libres non appariés qui franchissent la barrière par effet tunnel. A ce mouvement est associé le courant normal (I_N) ou I_R . Lorsqu'on se réfère à la caractéristique courant-tension de la Figure.1.3, on peut dire que R n'est pas une fonction linéaire de la ddp V .

Ainsi, R prend des valeurs élevées lorsque la ddp est en dessous de la valeur $\frac{2\delta}{e}$ (où δ est le gap énergétique associé à la barrière) et des petites valeurs lorsque la ddp prend des valeurs élevées. Comme dans notre travail nous allons considérer le cas des faibles valeurs de la ddp, nous allons prendre R comme un simple résistor linéaire et dans ce cas on considère $I_N = \frac{V}{R}$.

- b) L'élément C dû peut être à la géométrie de la jonction que l'on peut assimiler à un condensateur plan. On lui associe donc un courant appelé courant de déplacement I_D ou I_c qui est d'une grande importance. Bien que ce courant ne circule pas directement à travers la jonction il est ajouté à d'autres composantes du courant total à travers la jonction pour une description complète de la dynamique. Son expression est $I_c = I_D = C \frac{dV}{dt}$.
- c) I_F est le courant de fluctuation qui tient compte des fluctuations thermiques qui accompagnent les électrons non appariés circulant par effet tunnel circulant d'un bloc supraconducteur à un autre.

Si le courant à travers l'élément de jonction est I et la ddp $V = \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}$, alors la loi des noeuds s'écrit :

$$I_J + I_N + I_c + I_F = I, \quad (1.16)$$

ou

$$I_J + \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt} + I_F = I. \quad (1.17)$$

Si l'on remplace le courant I_J et la ddp V par leurs expressions respectives, la dynamique est régie par l'équation :

$$\frac{\phi_0}{2\pi} C \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \left(\sin \varphi + \frac{I_F}{I_c} - \frac{I}{I_c} \right) = 0. \quad (1.18)$$

Comme tout système dynamique, cette dernière peut subir un adimensionnement dans le but d'avoir une équation ayant un nombre simplifié de paramètres physiques. Cette action est possible par l'utilisation des variables normalisées introduites par Johnson [79,80], McCumber [77], Stewart [76]. Ainsi, nous allons utiliser les fréquences suivantes : $\omega_p = \sqrt{\frac{2\pi I_c}{\phi_0 C}}$ la fréquence de plasma de la jonction et $\omega_c = \frac{2\pi}{\phi_0} I_c R$ la fréquence caractéristique de la jonction.

1. Adimensionnement selon Stewart-McCumber : il se fait par introduction dans l'équation(1.18) les différentes fréquences de la manière suivante :

$$\frac{\omega_c^2}{\omega_p^2} \frac{1}{\omega_c^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{\omega_c} \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi + \gamma_F - \gamma_b = 0, \quad (1.19)$$

avec $\gamma_F = \frac{I_F}{I_c}$ et $\gamma_b = \frac{I}{I_c}$ les courants de fluctuation et appliqué sous leur forme normalisée.

On définit la constante de Stewart-McCumber comme suit :

$$\beta_c = \frac{\omega_c^2}{\omega_p^2} = \left(\frac{2\pi}{\phi_0} I_c R \right)^2 \left(\frac{\phi_0 C}{2\pi I_c} \right) = \frac{2\pi}{\phi_0} I_c C R^2 \quad (1.20)$$

Enfin, l'équation adimensionnée selon Stewart-McCumber s'écrit :

$$\beta_c \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi + \gamma_F - \gamma_b = 0, \quad (1.21)$$

avec $\tau = \omega_c t$.

2. Adimensionnement selon Johnson : comme précédemment on introduit toujours les fréquences sus-citées mais de façon différente :

$$\frac{1}{\omega_p^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\omega_p}{\omega_c} \frac{1}{\omega_p} \frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi + \gamma_F - \gamma_b = 0. \quad (1.22)$$

On définit aussi la constante de Johnson par :

$$\beta_J = \frac{\omega_p}{\omega_c} = \sqrt{\frac{2\pi I_c}{\phi_0 C}} \bigg/ \left(\frac{2\pi}{\phi_0} I_c R \right) = \sqrt{\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{I_c C R^2}}, \quad (1.23)$$

et enfin l'équation adimensionnée selon Johnson s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \beta_J \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi + \gamma_F - \gamma_b = 0, \quad (1.24)$$

avec $\tau = \omega_p t$.

Lorsque $\beta_J = \sqrt{\frac{1}{\beta_c}} \gg 1$, la capacité et, ou la résistance sont faibles et le courant de déplacement est négligé. L'équation(1.24) se réduit à :

$$\beta_J \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi - \gamma_b = 0, \quad (1.25)$$

où γ_F n'est pas prise en considération.

On parle donc de jonction fortement amortie("Overdamped JJ").

Par contre, lorsque $\beta_J = \sqrt{\frac{1}{\beta_c}} \rightarrow 0$, la capacité et, ou la résistance sont grandes et l'équation de la dynamique est :

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \beta_J \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi - \gamma_b = 0, \quad (1.26)$$

où γ_F n'est pas prise en considération.

On parle de jonction faiblement amortie ("Underdamped JJ"). Dans la suite du travail nous allons utiliser le modèle ("Underdamped JJ"). Il est aussi important de se pencher sur certains éléments qui permettent de bien comprendre la dynamique du modèle *RCSJ* de la jonction Josephson. Il s'agit de :

Le potentiel effectif ou " Washboard potential".

Lorsque l'on néglige le courant de fluctuation, l'équation(1.18) peut se réécrire de la manière suivante :

$$\frac{\phi_0}{2\pi} C \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial}{\partial\varphi} U(\varphi, \gamma_b) = 0, \quad (1.27)$$

où U est le potentiel effectif ou "Washboard potential".

Pour déterminer l'expression du potentiel effectif, on considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} U(\varphi, \gamma_b) = \frac{\phi_0}{2\pi} I_c (\sin \varphi - \gamma_b). \quad (1.28)$$

Par intégration à une constante près on aboutit à la forme suivante :

$$U(\varphi, \gamma_b) = E_J (1 - \cos(\varphi) - \gamma_b \varphi), \quad (1.29)$$

où $E_J = \frac{\phi_0}{2\pi} I_c$

Dans cette configuration le courant externe contrôle la pente tandis que le supercourant donne le contour sinusoidal au potentiel. La Figure 1.10 est la représentation du profil du potentiel effectif.

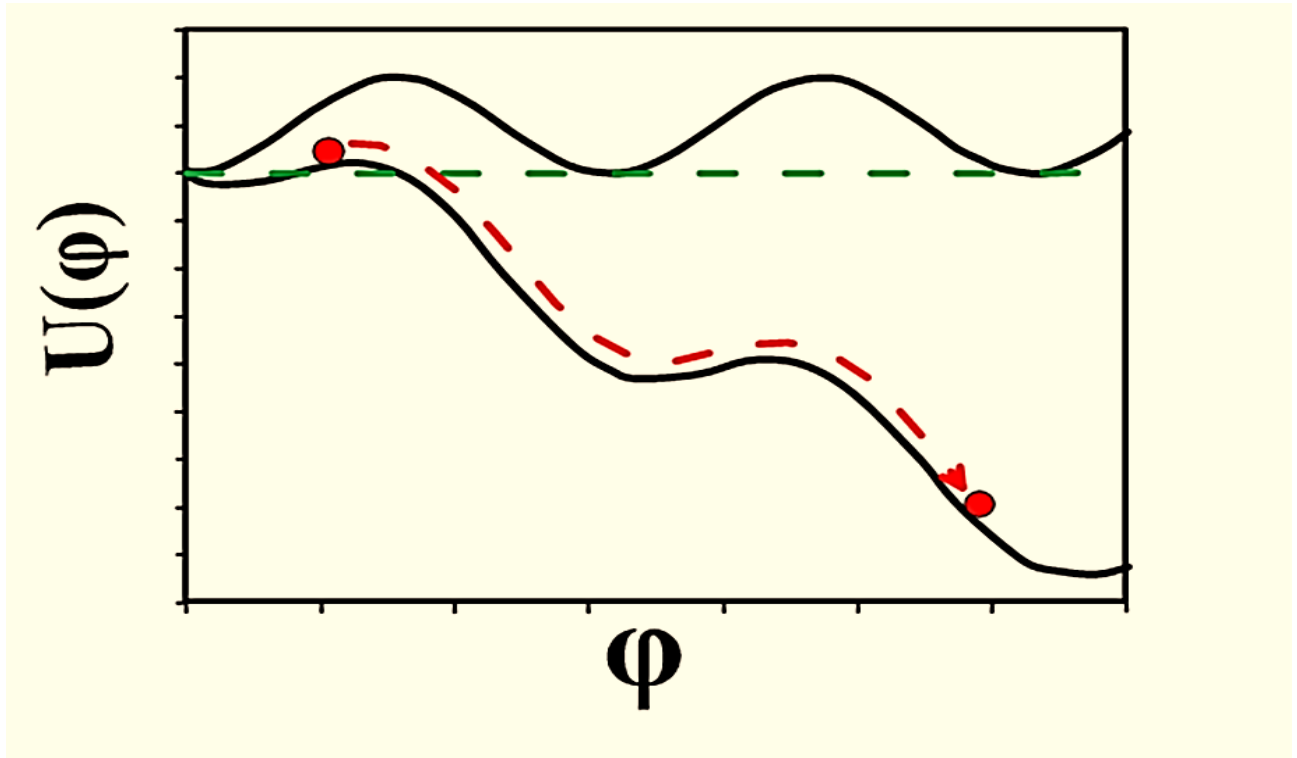


Figure 1.10 – Le profil du potentiel effectif ou "washboard potentiel" : au dessus de la ligne horizontale le cas $\gamma_b = 0$ et en dessous de la ligne $\gamma_b \neq 0$. [78]

Dans cette forme, la phase peut être assimilée à une particule virtuelle qui se déplace le long du potentiel effectif. Ainsi, lorsque le courant externe est nul, le potentiel a un profil horizontal et la particule reste piégée au fond du puits correspondant à la position $\varphi = 0$. A cet effet, la particule peut effectuer des petites oscillations autour de cette position à la fréquence $f_{J_0} = \frac{\omega_{J_0}}{2\pi}$. Par contre, lorsque le courant externe prend une valeur différente de 0, la particule se déplace vers les valeurs positives de la phase ($\varphi > 0$) et les différents puits deviennent progressivement peu profonds avec des fréquences de plasma correspondantes $f_J = f_{J_0} (1 - \gamma_b^2)^{1/4}$. La barrière de potentiel est donnée

par la formule :

$$\Delta U = 2E_J \left[\sqrt{1 - \gamma_b^2} - \gamma_b \cos^{-1}(\gamma_b) \right], \quad (1.30)$$

et donc le profil est indiqué à la Figure 1.11. Sous l'influence de certaines fluctuations, la particule de phase peut s'échapper du puits de potentiel en franchissant la barrière d'énergie ΔU . Ce comportement est exploité dans le cadre de la détection du signal.

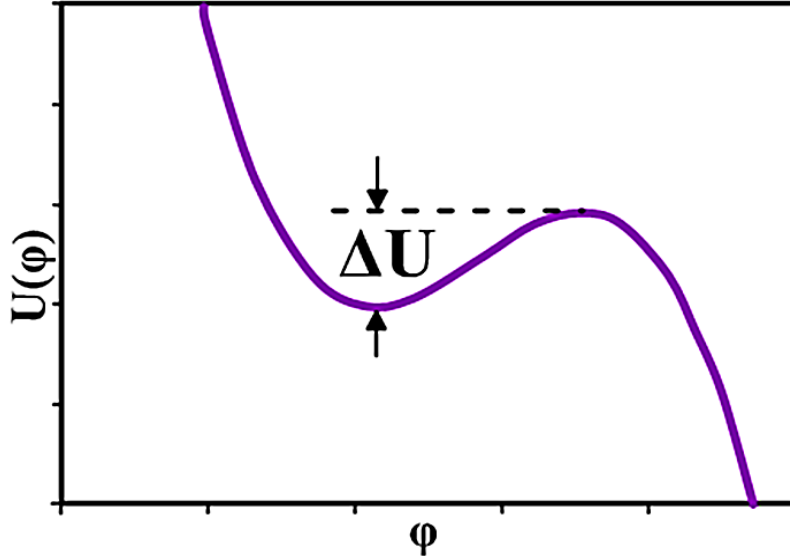


Figure 1.11 – La portion du profil du potentiel effectif indiquant la barrière d'énergie. [78]

Ces fluctuations sont à l'origine du bruit dans les jonctions Josephson.

1.4 Bruit dans les jonctions Josephson

La description du modèle électrique RCSJ a mis en évidence l'existence du courant de fluctuation I_F (ou γ_F en unité normalisée) qui peut modéliser le bruit dans la JJ. De façon générale, le courant de fluctuation peut être d'origine interne ou provient de l'environnement du système. Dans ce paragraphe il est question de présenter les sources du bruit les plus sollicitées dans la dynamique de la JJ.

1.4.1 Bruit thermique ou "thermal noise"

Le bruit thermique est dû au mouvement aléatoire des porteurs de charge dans un conducteur. Dans la JJ, son intensité est donnée par l'expression :

$$D = \frac{K_B T}{E_J} = \frac{2e K_B T}{\hbar I_c}, \quad (1.31)$$

où E_J est l'énergie de Josephson, K_B la constante de Boltzman, et T la température.

A l'aide des lois d'équilibre thermodynamique, la densité spectrale s'écrit à partir de la formule de Johnson-Nyquist [81, 82] :

$$S_I(f) = \frac{4K_B T}{R}. \quad (1.32)$$

1.4.2 Bruit de grenaille ou "Shot noise"

Encore appelé bruit de Schottky ou bruit quantique, il est dû à l'état discontinu du courant qui est constitué des charges élémentaires (électrons). Ce courant de fluctuation est pris en compte lorsque la ddp aux bornes de la jonction est très grande c'est-à-dire au-delà de l'équilibre thermodynamique ($eV \gg K_B T$). La densité spectrale de puissance est donnée par la formule [83] :

$$S_I(f) = 2eI_F. \quad (1.33)$$

1.4.3 Bruit de scintillement ou "Flicker noise"

La nature physique de ce bruit reste méconnu. Mais tel que défini aujourd'hui, il peut être considéré comme la superposition de deux états de porteurs de charge indépendants soumis à des fluctuations aléatoires (random telegraph noise) [84]. La densité spectrale est sous la forme $1/f^\alpha \sim 1/f$.

Dans la modélisation mathématique, ces différents types de bruit peuvent prendre diverses formes et sont pour la plus part classés en deux catégories à savoir les bruits de type gaussien [85, 86] et non-gaussien [87, 88].

1.5 Réseaux de jonctions Josephson

Depuis des années, la recherche sur les jonctions Josephson est effectuée dans le but d'obtenir des résultats utiles aux applications technologiques à l'instar du détecteur des signaux sinusoïdaux masqués par un bruit. Ce paragraphe indique non seulement les raisons ayant poussés les scientifiques à faire recours aux réseaux de jonctions mais aussi la description des différents réseaux qui existent dans la littérature.

1.5.1 Motivations

Les atouts technologiques qu'offrent les JJ constituent la principale motivation qui a poussé les scientifiques à faire recours aux réseaux de JJ. A titre de rappel l'examen des équations fondamentales de la JJ montre en toute évidence qu'elle peut être utile à la détection des radiations électromagnétiques et inversement (générateur des fréquences radio accordables [89]), elle peut aussi être utilisée comme un onduleur c'est-à-dire convertisseur du signal continu en signal alternatif. Les fréquences d'oscillations des JJ pouvant atteindre le TéraHertz (THz) et la puissance émise sont des caractéristiques technologiquement utiles. Malheureusement, en réalité l'utilisation

d'une seule jonction s'avère être limitée par la ddp (mV) et la puissance émise (nW) qui sont très faibles. Pour pallier à cette insuffisance il est nécessaire de fabriquer les réseaux de jonctions qui émettant de manière cohérente pourraient améliorer la puissance émise. Il serait donc évident de synchroniser plusieurs jonctions qui par effet additif des différents courant et tension permettrait d'atteindre la puissance émise convenable [90, 91]. En effet, un réseau de N jonctions émettant de manière cohérente voit son impédance (ddp) améliorée d'un facteur multiplicatif égal à N et la puissance émise d'un facteur multiplicatif égal à N^2 [92]. Ces réseaux de jonctions peuvent avoir plusieurs configurations.

1.5.2 Géométrie des réseaux des jonctions Josephson

La Figure 1.12 montre différentes configurations des réseaux de jonctions qu'on trouve dans la littérature. Dans le réseau les jonctions sont couplées via les contraintes physiques intrinsèques à savoir la loi de conservation du courant à chaque noeud ou loi de *Kirchhoff* et la condition de quantification des fluxoides (qui résulte de la restriction du nombre de jonctions enrôlées dans la phase quantique formant des îlots supraconducteurs). C'est ce qui se passe dans la configuration des SQUIDs (Superconducting Quantum Interference Devices) qui est un détecteur sensible au champ magnétique [94]. Le réseau unidimensionnel en série (1D series) est constitué par la juxtaposition des jonctions les unes après les autres ; il présente des propriétés dynamiques intéressantes car peut être classé comme un système intégrable [95]. Cette configuration est aussi un exemple classique relatif à la théorie de synchronisation des oscillateurs couplés développée par Kuramoto appelé "Kuramoto Model" [96, 97]. Cependant, le réseau unidimensionnel parallèle (1D parallel) a permis de modéliser les équations discrètes de Sine-Gordon [98, 99]. La configuration formée par un empilement de réseau unidimensionnel parallèle (Stacked 1D parallel) présente des propriétés technologiques intermédiaires entre le réseau unidimensionnel en série et le réseau bidimensionnel. Le réseau bidimensionnel carré (2D square) et triangulaire (2D triangular) [100] présentent des propriétés technologiques caractéristiques [101] c'est-à-dire la tendance à reproduire la synchronisation de phase [102] due au couplage intrinsèque intra ou inter ligne du réseau [103] ; La synchronisation d'un réseau de plusieurs jonctions peut être mise à mal par les disparités observées au niveau des paramètres caractéristiques des différentes jonctions [104].

Comme sur la Figure 1.12, le réseau bidimensionnel est caractérisé par la présence des jonctions horizontales perpendiculaires à la direction d'injection du courant dans le réseau. Lors des simulations numériques, on utilise l'approximation selon laquelle la phase et le courant des jonctions horizontales sont négligés en régime dynamique. En d'autres termes, le comportement dynamique du réseau bidimensionnel peut se réduire à celui des jonctions disposées suivant la verticale. Avec cette approximation, le réseau bidimensionnel se comporte comme une juxtaposition des réseaux unidimensionnels. Dans cette thèse, nous modélisons le détecteur du signal sinusoïdal constitué d'un réseau unidimensionnel de jonctions Josephson et pour les travaux ultérieurs, nous allons considérer le réseau bidimensionnel.

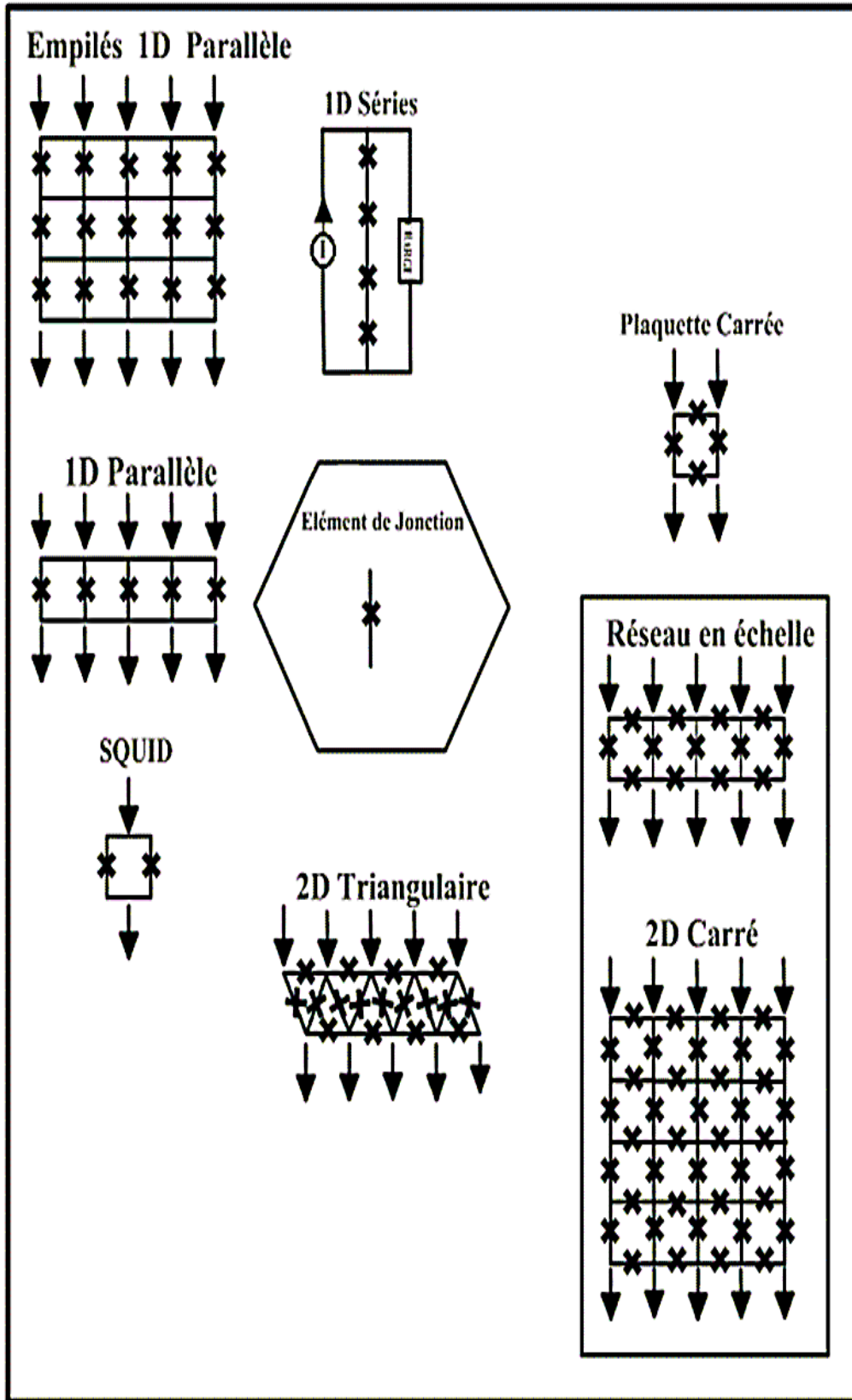


Figure 1.12 – Réseaux des jonctions Josephson et leur géométrie. [93]

1.6 Théorie de la détection appliquée aux jonctions Josephson

Dans cette partie, il s'agit de la description du principe de la détection, de définir les éléments de détection et aussi d'évoquer l'état de l'art dans la détection du signal sinusoïdal.

1.6.1 Principe de la détection associée aux jonctions Josephson

Les méthodes de la théorie de la détection visent à révéler la présence du signal dans un environnement brouillé par un signal aléatoire (le bruit). Dans cette configuration, le rôle du bruit est défini à deux niveaux comme dans la résonance stochastique [4] : d'une part, il contribue à surmonter la barrière d'énergie et d'autre part il masque le signal. Etant donné que nous avons défini la phase au paragraphe 1.3.4.2 comme une particule virtuelle qui se déplace le long du potentiel effectif (ayant plusieurs puits métastables), cette particule reste piégée dans l'un de ces puits à l'absence du bruit. L'effet du bruit serait donc de faire échapper la particule de ce puits en surmontant la barrière d'énergie, voir équation (1.30) après une certaine durée dans le puits appelé temps de résidence ou "Escape Time" (ET). Dans ce cas, l'analyse de la distribution des temps d'évasion permet de savoir si l'excitation aléatoire est combinée ou non à un autre signal (sinusoïdal par exemple caractérisé par son amplitude, sa fréquence et sa phase initiale) [107]. Ainsi dans la théorie de la détection, l'ET est une notion capitale. Il est rapporté dans la référence [108] que l'avantage d'utiliser les ET est dans la simplicité de la mesure qui n'est pas sans inconvénient : les ET raccourcissent les trajectoires et entraînent par la même occasion les pertes d'informations sur la dynamique du système. Cependant les ET se sont révélés efficaces dans la mise en évidence des effets subtiles tels que le passage par effet tunnel quantique entre différents attracteurs [25], la détermination de la nature granulaire de la charge [109] ainsi que l'établissement de la différence entre l'activation classique et quantique [110] dans les jonctions Josephson et même les exposants critiques de bifurcation dans les oscillateurs micromécaniques [111].

La détection est basée sur la probabilité de déterminer la présence d'un signal à travers le passage d'un état métastable à un autre. Il est évident que les jonctions Josephson (JJ) correspondent bien à cette description car étant à deux états, elles peuvent sous l'effet non seulement du bruit mais aussi du signal appliqué externe, passer de l'état supraconducteur (caractérisée par l'absence d'une ddp aux bornes de la jonction) à l'état résistif (caractérisée par l'apparition d'une ddp mesurable) comme sur la Figure 1.13

La procédure de détection est qualifiée de seuil de détection car la transition entre les états n'est constatée que lorsque la phase de Josephson dépasse un certain seuil : c'est-à-dire la valeur de la phase correspondant au maximum de potentiel, lequel maintient la JJ à l'état supraconducteur. L'apparition de la ddp est le signe qui indique que la phase de la JJ a dépassé un certain seuil et par conséquent rend possible l'évaluation du temps mis par la JJ à l'état supraconducteur avant de franchir la barrière d'énergie. La mesure du temps d'évasion des JJ est une technique

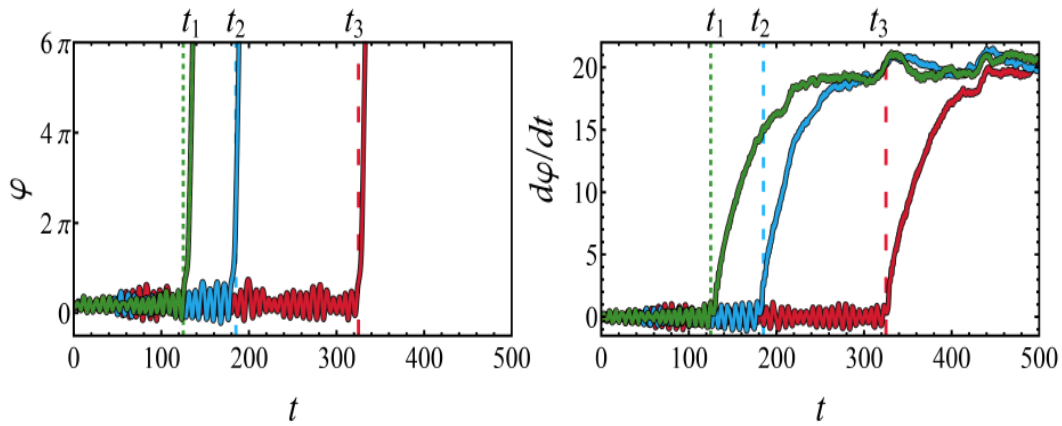


Figure 1.13 – Dynamique de la phase φ et de la ddp $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonction du temps. Les instants t_1 , t_2 et t_3 désignent les instants à partir desquels on observe le passage de l'état supraconducteur à l'état résistif. (adapté à partir de la référence [112]).

bien établie dans la mesure où elle a été pendant plusieurs décennies un outil standard dans la caractérisation des propriétés de l'état métastable [113]. Par exemple cette technique a été utilisée pour prouver l'existence de l'effet Tunnel Quantique Macroscopique (MQT) [25], c'est-à-dire la possibilité qu'on observe une transition à des basses températures proche du zéro Kelvin mettant en évidence la nature quantique de la phase de Josephson [114]. Nous rappelons que la phase de Josephson n'est pas une quantité directement observable, il n'est possible que de détecter l'apparition de la ddp (proportionnelle à la dérivée temporelle de la phase) associée au franchissement de la barrière d'énergie. De plus il n'est pas possible de recouvrir la phase de Josephson en échantillonnant sa dérivée (c'est-à-dire la tension aux bornes de la jonction). En effet, le signal mesuré est altéré par l'application d'un étage de filtre sélectif pour empêcher le bruit environnant d'atteindre le dispositif. De plus les fréquences d'oscillations des tensions sont à une échelle (proche de la fréquence de Josephson) en dehors de la bande des fréquences conventionnelles des équipements électroniques. Il est donc judicieux d'affirmer que l'essentiel des informations reste limiter aux temps d'évasion.

1.6.2 Etat de l'art et motivation

Les systèmes stochastiques (systèmes soumis à l'action des excitations aléatoires) dont la réponse est caractérisée par la mesure des temps de transition entre deux états dynamiques ont été largement étudiés dans le cadre de la théorie de la décision statistique [115]. Ainsi, plusieurs approches ont été expérimentées dans le but de révéler la présence du signal dans le système. Les pionniers dans le domaine [115, 116], ont développé la méthode de filtrage adapté appliqué au signal fourni basée sur la transformation de Fourier. Malheureusement cette méthode s'est avérée inefficace lorsque la quantité de données à traiter est très volumineuse ou lorsque l'amplitude du signal à détecter est très faible, ou même lorsque la trajectoire complète du signal est difficile à retracer comme le cas de la détection des ondes gravitationnelles basée sur les pendules de Fabry-

Perot [108, 117]. C'est pour cette raison que l'on a adopté une méthode suboptimale basée sur la résonance stochastique (Stochastic resonance or SR). A cet égard, Adesso et al [39] ont montré comment exploiter la résonance stochastique dans le cadre de la théorie de la décision statistique afin d'améliorer la détection. A cet effet, ils ont utilisé deux outils d'analyse à savoir : l'analyse des ET et l'analyse stroboscopique. Il en ressort que l'analyse des ET a une meilleure performance à la fréquence de résonance géométrique tandis que la méthode stroboscopique exhibe un pique de performance pour une intensité de bruit particulière prévue par la théorie de la résonance stochastique.

Pour cette partie, nous nous sommes focalisés sur la méthode d'analyse des ET. L'essentiel pour la suite consiste à relever les propriétés caractéristiques de cette méthode ainsi que certains travaux sur la détection des signaux de type sinusoïdal.

1.6.2.1 Caractérisation des ET de Josephson pour la détection du signal

La description des états métastables au moyen de l'analyse des ET s'est avérée être un outil puissant pour de nombreuses applications dans les JJ, à l'instar du fait qu'il est possible de détecter les transitions même à des basses températures donnant naissance à l'effet Tunnel Quantique Macroscopique [25]. Dans le cadre de la théorie de détection des signaux, l'analyse des ET fournit les informations selon lesquelles le courant appliqué est brouillé uniquement par le bruit ou par la présence d'un autre signal. Les différentes transitions étant distribuées suivant une certaine statistique qui peut être modifiée par la présence d'un signal. P. Adesso et al. [38] ont étudié la manière dont les ET sont distribués et par quelles stratégies ils sont acquis. La Fonction Densité de Probabilité (Probability Density Function PDF) a été exploitée pour montrer comment les ET peuvent être utilisés pour révéler la présence du signal (voir Figure 1.14) et cela témoigne que l'analyse doit être affinée pour effectuer une étude quantitative de la performance du détecteur. Il est clair que la présence du signal est révélée par l'analyse de la distribution (Figure 1.14). Ici, elle est révélée par l'apparition des oscillations sur le profil de la Fonction Densité de Probabilité. L'autre outil statistique d'analyse des ET est la Fonction Complémentaire de la Densité Cumulative (Complementary Cumulative Density Function CCDF) pour lequel on observe le même effet [37] c'est-à-dire l'apparition des oscillations le profil du CCDF induite par la présence du signal sinusoïdal.(Figure.1.15)

Il existe deux stratégies pour évaluer de façon qualitative l'efficacité de la détection à savoir la stratégie Sample Mean (SM) d'une part et la stratégie Likelihood Ratio (LR) technique ou la technique du rapport vraisemblable d'autre part.

La stratégie SM comme son nom l'indique est construite à l'aide des valeurs moyennes d'un échantillon des ET. Cette stratégie permet d'évaluer l'effet du signal périodique sur les JJ [32, 118] en observant le changement sur la distribution des valeurs moyennes des ET en absence du signal d'une part et en présence du signal d'autre part. La stratégie SM peut être optimisée par un choix approprié des caractéristiques du détecteur qui dépendent de l'intensité du bruit et les propriétés du signal pour obtenir une correspondance entre la valeur moyenne de l'ET et la période du signal :

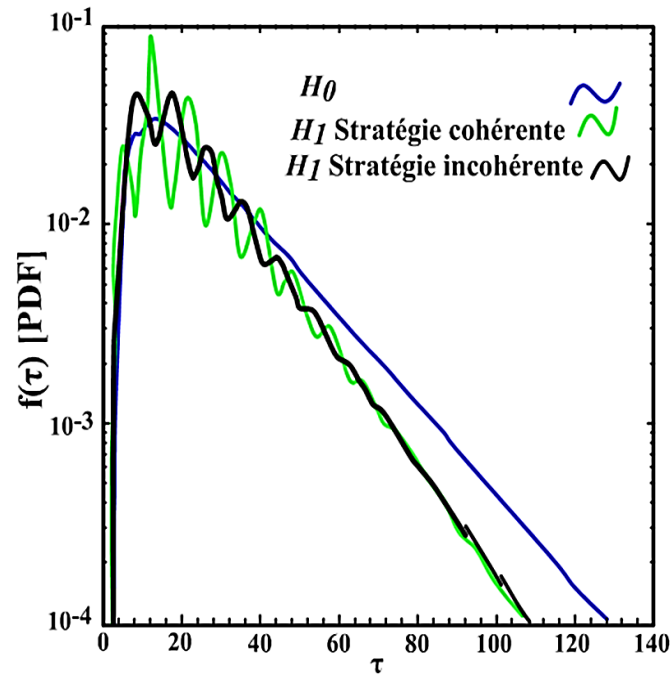


Figure 1.14 – Fonction Densité de Probabilité des temps d'évasion. Trois courbes sont représentés : absence du signal (H_0 : trait en pointillé) ; présence du signal avec acquisition des données par stratégie cohérente (H_1 trait interrompu fort) ; présence du signal avec acquisition des données par stratégie incohérente (H_1 trait continu fort) (adapté à partir de la référence [107]).

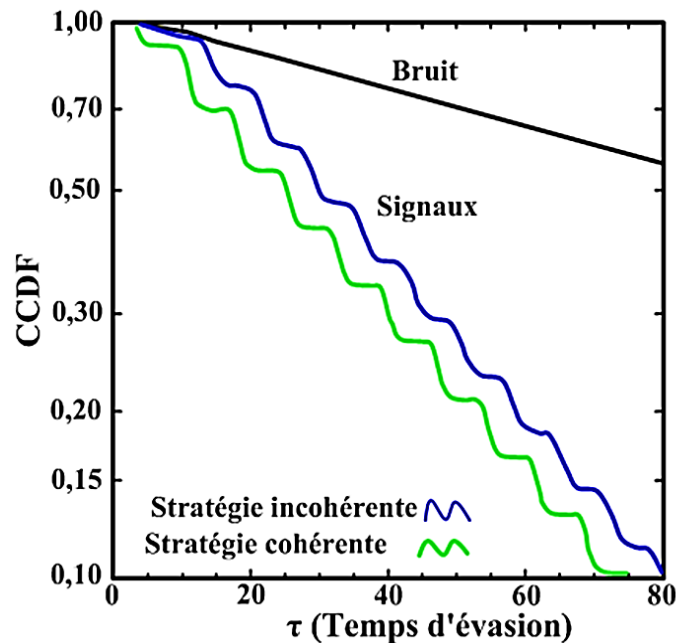


Figure 1.15 – Fonction Densité cumulative complémentaire des temps d'évasion. Trois courbes sont représentés : absence du signal (trait continu fort) ; présence du signal avec acquisition des données par stratégie cohérente (trait interrompu fort) ; présence du signal avec acquisition des données par stratégie incohérente (trait mixte fort) (adapté à partir de la référence [37]).

$\langle \tau \rangle \simeq \frac{2\pi}{\Omega}$ (Ω est la fréquence du signal périodique). Cette dernière est la condition de l'activation résonante c'est-à-dire la possibilité d'exploiter le bruit dans la détection du signal [4].

Cependant, pour améliorer la détection, la stratégie LR apparait comme une stratégie optimale d'après le Lemme de Neyman-Pearson [119]. L'analyse s'effectue en tenant compte de toutes les valeurs des ET. Cette stratégie consiste à effectuer un test statistique permettant de juger si l'échantillon construit à partir de l'expérience est mieux ajusté en absence du signal d'une part ou en présence du signal d'autre part. Elle est basée sur la variable aléatoire Λ qui définit le rapport entre la Fonction Densité de Probabilité construite en présence du signal et celle construite en absence du signal. Cette variable aléatoire est définie par :

$$\Lambda = \ln \left[\frac{f_{\varepsilon}(\tau)}{f(\tau)} \right], \quad (1.34)$$

où $f_{\varepsilon}(\tau)$ et $f(\tau)$ sont des Fonctions de Densité de Probabilité construite par une méthode appropriée [38]. La stratégie LR conduit à une amélioration remarquable de la performance du détecteur par rapport à l'analyse des valeurs moyennes des ET car les variables $\langle \Lambda \rangle$ et $\langle \Lambda_{\varepsilon} \rangle$ (en absence et en présence du signal respectivement) contiennent plusieurs informations. L'exemple palpable est présenté dans la référence [108] à travers l'évaluation de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} [36] de l'interféromètre de Fabry-Perot qui est nettement amélioré pour la stratégie LR par rapport à la stratégie SM (voir Figure 1.16)

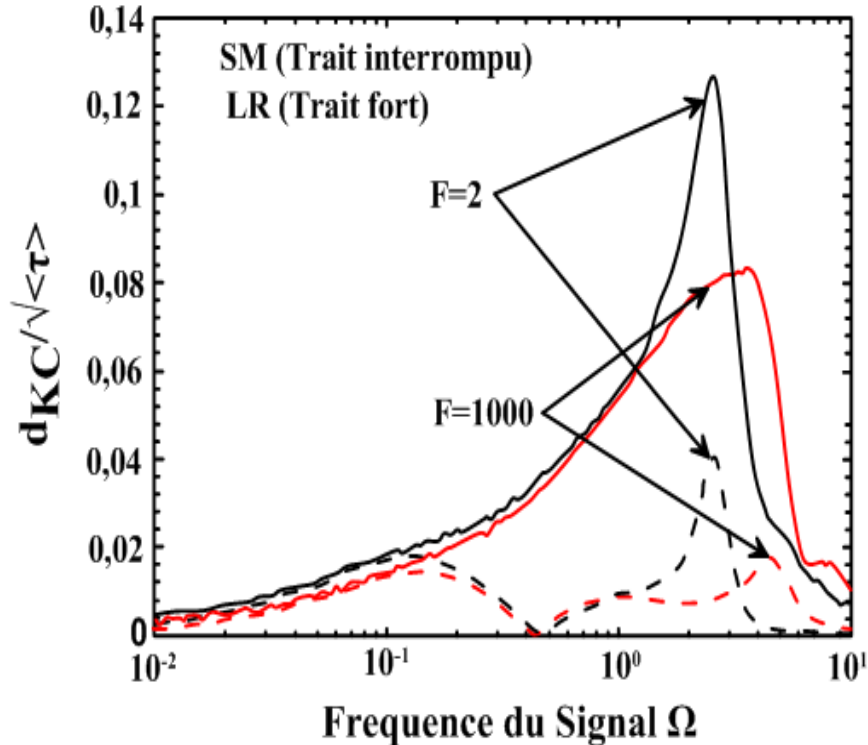


Figure 1.16 – Indice de Kumar-Carroll normalisé en fonction de la fréquence du signal appliqué Ω : stratégie SM en trait interrompu fort ; stratégie LR en trait continu fort (adapté à partir de la référence [108]).

En effet l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} , est un outil utilisé pour évaluer de façon quantitative la performance du détecteur. Si l'on considère par exemple les variables statistiques $Y = \{\tau, \Lambda\}$ et $Y_\varepsilon = \{\tau_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon\}$ (en absence et en présence du signal respectivement) la formule du calcul de d_{KC} s'écrit :

$$d_{KC} = \frac{|\langle Y_\varepsilon \rangle - \langle Y \rangle|}{\sqrt{\frac{1}{2}[\sigma^2(Y_\varepsilon) + \sigma^2(Y)]}}, \quad (1.35)$$

où $\sigma^2(Y_\varepsilon)$ et $\sigma^2(Y)$ définissent les variances des variables Y_ε et Y respectivement.

Pour tenir compte de la durée nécessaire pour observer une évacion du puits de potentiel, l'indice d_{KC} peut être normalisé par rapport à la racine carrée de la valeur moyenne des temps d'évasion comme sur la Figure 1.16.

1.6.2.2 Motivation

Le défi qui nous anime pour les travaux de cette thèse est celui de mettre sur pied un détecteur des signaux de type sinusoïdal fabriqué à partir d'un réseau à plusieurs JJ. Cela pose l'épineux problème de synchronisation du réseau de JJ [92] capital dans l'exploitation des propriétés technologiques du réseau. Partir du fait que les SQUIDS (formés d'une boucle ayant deux jonctions) sont sensibles au champ magnétique et peuvent être considérés comme des détecteurs. Ce constat nous a motivé à étudier la possibilité de fabriquer un détecteur constitué d'un réseau de JJ. La théorie de détection met l'accent sur deux éléments importants à savoir le bruit et le signal à détecter car ces deux éléments peuvent altérer le comportement dynamique du réseau. Il est donc nécessaire d'étudier non seulement le comportement dynamique du réseau en présence du bruit mais aussi de ressortir les conditions de synchronisation du réseau. Dans ce travail, la méthode de synchronisation consiste à associer le réseau de JJ au résonateur RLC comme dans les travaux antérieurs de *Yamapi et al.* [15]. Dans ce cas la synchronisation est constatée lorsque la jonction Josephson oscille à la fréquence du résonateur. Partant des modèles classiques de détection [37, 38] dans lesquels le courant appliqué est constant, nous proposons non seulement le modèle dans lequel le courant appliqué est linéairement dépendant du temps mais aussi le modèle à bruit coloré exponentiellement corrélé. Nous pensons dans le cadre de cette thèse qu'il serait intéressant d' :

1. Etablir les conditions de synchronisation d'un réseau linéaire de JJ associé au résonateur RLC.
2. Etudier les propriétés dynamiques du réseau en absence du bruit d'une part et en présence du bruit d'autre part.
3. Etudier les propriétés du détecteur à une seule jonction dont le courant appliqué est fonction linéairement dépendant du temps.
4. Exploiter les propriétés du modèle de détection à bruit coloré exponentiellement corrélé.
5. Etudier si possible les propriétés du détecteur de réseau de JJ.

1.7 Conclusion

Au terme de ce chapitre, un grand nombre d'informations concernant le concept de jonction Josephson (JJ) a été mis exègue. En effet nous avons tour à tour défini les grandes lignes suivantes : la notion de l'effet Josephson qui a donné naissance à la jonction Josephson, les types et les modèles de JJ qui rendent possible les études expérimentale et théorique ; la notion de bruit dans les JJ qui est source de nombreux phénomènes ; la notion de réseaux de JJ nécessaires pour des applications technologiques ; et enfin la théorie de la détection qui constitue la pierre angulaire des travaux de cette thèse.

Chapitre 2

Modélisation, méthodes d'analyse et de simulations numériques

2.1 Introduction

Pour donner corps à l'atteinte des objectifs de cette thèse, nous avons besoin de nous appuyer sur des modèles (mathématiques, électrique ou mécanique) afin d'avoir un visuel sur les résultats. Ces résultats qui du moins pour cette thèse sont obtenus à partir des simulations numériques des équations différentielles décrivant le comportement dynamique des systèmes étudiés. L'interprétation des résultats requiert la connaissance et la maîtrise d'un certain nombre d'outils appropriés. Pour ces travaux de thèse, nous avons deux systèmes de jonctions Josephson (JJ) : le réseau linéaire de JJ couplé à un résonateur RLC série et le modèle de détecteur du signal sinusoïdal à une seule jonction. Dans ce chapitre, il est judicieux de présenter les modèles électriques et les équations différentielles associées, les outils d'analyse qui ont pour vocation de donner un sens aux données et aux solutions des équations différentielles et enfin les méthodes de simulations numériques qui permettent d'estimer des solutions des équations différentielles.

2.2 Modélisation mathématique

Dans cette partie on doit présenter les modèles électriques ainsi que les équations différentielles associées.

2.2.1 Réseau linéaire de jonctions Josephson couplé à un résonateur RLC série

Le dispositif décrivant le réseau est présenté sur la Figure 2.1. Il est constitué d'un réseau linéaire de JJ connecté en dérivation à un circuit RLC série. Les jonctions sont juxtaposées les unes après les autres et chacune des jonctions subit l'influence de tous les autres jonctions du réseau. Le réseau de JJ et le résonateur sont maintenus dans un type de couplage que l'on appelle le "mean field approach" [106]. Dans ce type de couplage tous les éléments du réseau sont liées de la même façon au résonateur et chaque jonction du réseau subit l'effet de la fréquence moyenne de l'ensemble des jonctions du réseau. Le mécanisme de synchronisation est détaillé dans la référence [120]. Pour avoir un modèle qui se rapproche de la réalité, il est nécessaire de tenir compte des imperfections qu'occasionnerait le processus de fabrication d'un prototype réel. On peut par exemple supposer

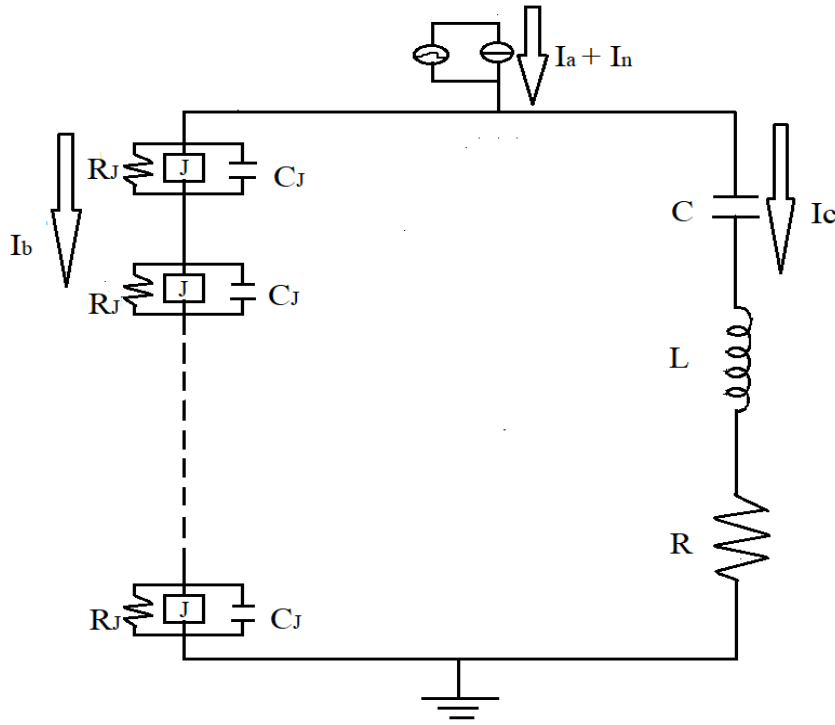


Figure 2.1 – *Circuit électrique du réseau linéaire des JJ couplé au résonateur RLC série.*

que le supercourant diffère d'une jonction à une autre [105]. Nous avons pour ce travail défini deux modèles : l'un pour lequel toutes les jonctions du réseau ont des paramètres identiques (modèle parfait) et l'autre que l'on qualifie de modèle imparfait pour lequel les jonctions ont des paramètres non identiques et qui peuvent varier de manière aléatoire d'une jonction à une autre.

2.2.1.1 Modèle parfait du réseau

Pour la modélisation mathématique, nous désignons par I_a le courant principal (provenant du générateur) affecté par le courant I_n qui représente le bruit. Le dispositif est alimenté par le couple (I_a, I_n) qui se subdivise en I_b qui est le courant à travers le réseau de JJ et I_c à travers le résonateur RLC série. Chaque jonction du réseau est décrite par le modèle RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction) dont on connaît bien la dynamique (voir paragraphe 1.3.4.2). Ainsi pour une jonction de position i , nous désignons par I_J^i le supercourant de la jonction idéale, I_{C_J} le courant à travers le condensateur de Josephson de capacité C_J et I_{R_J} et le courant à travers le résistor de résistance de R_J et les équations fondamentales de Josephson sont données par :

$$I_J^i = I_0 \sin \phi^i \quad (2.1a)$$

$$V_J^i = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi^i}{dt}. \quad (2.1b)$$

La loi des noeuds permet d'écrire :

$$I_b = I_a + I_n - I_c, \quad (2.2a)$$

$$I_b = I_J^i + I_{R_J} + I_{C_J}. \quad (2.2b)$$

Les deux équations ci-dessus peuvent se réduire en une seule c'est-à-dire :

$$I_{C_J} + I_{R_J} + I_J^i = I_a + I_n - I_c \quad (2.3)$$

La loi des mailles permet aussi d'écrire :

$$\sum_{i=1}^N V_J^i = V_L + V_R + V_c, \quad (2.4)$$

où V_L est la ddp aux bornes de la bobine du résonateur, V_R la ddp aux bornes du résistor du résonateur et V_c aux bornes du condensateur du résonateur.

Si l'on désigne par \tilde{q} la charge du condensateur du résonateur nous avons les relations :

$$I_c = \frac{d\tilde{q}}{dt}, \quad V_L = L \frac{d^2\tilde{q}}{dt^2}, \quad V_R = R \frac{d\tilde{q}}{dt}, \quad V_c = \frac{\tilde{q}}{C}. \quad (2.5)$$

En tenant compte de toutes les considérations et en remplaçant tous les termes des équations (2.3) et (2.4) par leurs expressions respectives nous parvenons au système d'équations différentielles suivantes régissant la dynamique du dispositif :

$$\begin{cases} \frac{C_J \hbar}{2e} \frac{d^2 \phi^i}{dt^2} + \frac{\hbar}{R_J 2e} \frac{d\phi^i}{dt} + I_0 \sin \phi^i + \frac{d\tilde{q}}{dt} = I_a + I_n, & i = 1, 2, \dots, N \\ \frac{d^2 \tilde{q}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\tilde{q}}{dt} + \frac{1}{LC} \tilde{q} - \frac{\hbar}{2eL} \sum_{i=1}^N \frac{d\phi^i}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

L'utilisation de la fréquence de Josephson $\omega_J = \sqrt{2eI_0/C_J \hbar}$ permet d'obtenir les variables normalisées de temps $\tau = \omega_J t$ et de la charge $q = \omega_J \tilde{q} / I_0$. Ces deux variables facilitent l'adimensionnement du système d'équations (2.6). Il vient donc :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi^i}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\phi^i}{d\tau} + \sin \phi^i + \frac{dq}{d\tau} = \gamma_G + \zeta^i(\tau), & i = 1, 2, \dots, N \\ \frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{dq}{d\tau} + \Omega^2 q - \frac{1}{\beta_L} \sum_{i=1}^N \frac{d\phi^i}{d\tau} = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où les paramètres sont définis comme suit :

- $Q = \frac{L\omega_J}{R}$, le facteur de qualité normalisé du résonateur ;
- $\alpha = \frac{1}{C_J \omega_J} \sqrt{\frac{1}{R_J}}$, est le coefficient de dissipation des jonctions ;
- $\beta_L = \frac{\omega_J^2 C_J}{L}$, le coefficient de couplage entre le résonateur et le réseau de jonctions ;
- $\Omega = \frac{1}{\omega_J \sqrt{LC}}$, la fréquence propre du résonateur ;

- $\gamma_G = \frac{I_a}{I_0}$, le courant principal normalisé.

ζ^i désigne le bruit blanc gaussien. Il est le même pour toutes les jonctions du réseau puisque le bruit n'est pas intrinsèque au réseau (de type Johnson), il est plutôt injecté dans le système à partir du générateur. Ces propriétés statistiques sont :

$$\begin{aligned} \langle \zeta^i(\tau) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta^i(\tau)\zeta^i(\tau') \rangle &= 4D\delta(\tau - \tau'), \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $D = k_B T \omega_J / (R I_0^2)$ est l'intensité normalisé du bruit (k_B la constante de *Boltzman* et T la température absolue).

Le modèle parfait est donc complètement décrit par les équations (2.7) et (2.8). Cependant, dans la matérialisation du réseau de jonctions, il est difficile d'obtenir un réseau dans lequel les paramètres physiques sont identiques. L'erreur qui se glisse le plus souvent est la différence de taille de la barrière diélectrique séparant les blocs supraconducteurs. Comme conséquence, le supercourant varie d'un élément à un autre comme dans la référence [80], dans lequel le réseau est constitué des jonctions ayant les supercourants variant exponentiellement en fonction du gap d'énergie Δ associé à la barrière diélectrique. Ces imperfections peuvent aussi se manifester à travers les résistances R_J associées à chaque jonction du réseau. De ce fait, il est nécessaire de proposer un modèle tenant compte de ces différentes imperfections.

2.2.1.2 Modèle imparfait du réseau

Ce modèle est conçu pour tenir compte des imperfections que l'on peut avoir dans le processus de fabrication d'un réseau réel. Comme relevé à la fin du paragraphe précédent, on associe à chaque jonction la résistance R_J^i et le supercourant d'amplitude I_0^i de telle sorte que l'on ait :

$$R_J^i I_0^i = \frac{\Delta}{e}. \quad (2.9)$$

Ainsi, dans le réseau, les amplitude des différents supercourants suivent une distribution aléatoire d'expression :

$$I_0^i = I_0 (1 + \varepsilon^i). \quad (2.10)$$

La variable ε^i est distribuée dans un intervalle d'amplitude 2σ , c'est-à-dire :

$$\varepsilon^i \in [-\sigma; +\sigma], \quad (2.11)$$

où σ est le paramètre de désordre qui mesure la dispersion des paramètres des différentes jonctions du réseau. Récemment, il a été démontré que la distribution des paramètres des jonctions du réseau suit une loi de distribution gaussienne [121, 122]. Par considération des relations (2.9) et (2.10), il s'en suit que la distribution des résistances des différentes jonctions du réseau est donnée par la

relation :

$$R_J^i = \frac{\Delta}{e} \frac{1}{I_0(1 + \varepsilon^i)}. \quad (2.12)$$

Au regard du modèle parfait du dispositif décrite par l'équation (2.7), force est de constater tous les paramètres restent constants excepté le paramètre de dissipation α :

$$\alpha^i = \frac{1}{C_J \omega_J} \sqrt{\frac{1}{R_J^i}} = \frac{1}{C_J \omega_J} \sqrt{\frac{e I_0 (1 + \varepsilon^i)}{\Delta}} = \frac{1}{C_J \omega_J} \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon^i)}{R_J^i}} = \alpha (1 + \varepsilon^i). \quad (2.13)$$

On peut ainsi définir le système d'équations décrivant le modèle imparfait par la relation :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi^i}{d\tau^2} + \alpha (1 + \varepsilon^i) \frac{d\phi^i}{d\tau} + (1 + \varepsilon^i) \sin \phi^i + \frac{dq}{d\tau} = \gamma_G + \zeta^i(\tau), & i = 1, 2, \dots, N \\ \frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{dq}{d\tau} + \Omega^2 q - \frac{1}{\beta_L} \sum_{i=1}^N \frac{d\phi^i}{d\tau} = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Pour la suite, sachant que ε^i est distribuée uniformément dans l'intervalle $[-\sigma; +\sigma]$, nous définissons la variable ε^i par l'expression :

$$\varepsilon^i = -\sigma + 2(i-1) \frac{\sigma}{N-1}. \quad (2.15)$$

2.2.2 Détecteur de signal sinusoïdal à jonction Josephson

Le détecteur réel est constitué d'un réseau de détecteurs individuels de signal sinusoïdal. Pour une bonne compréhension du fonctionnement du réseau réel, il est important de le réduire au niveau individuel. C'est ce qui justifie la modélisation du détecteur à une seule jonction.

La Figure 2.2 présente le circuit électrique du détecteur du signal [37, 38] qui est le modèle RCSJ [78, 123] de la jonction dont la description a été faite au Chapitre 1, paragraphe 1.3.4.2. Pour établir l'équation différentielle décrivant le comportement dynamique du détecteur, il convient de faire certaines considérations. On désigne par I_b le courant appliqué auquel on associe le courant sinusoïdal $I_{ac} \sin(\Omega t + \theta)$ (que l'on veut détecter) brouillé ou masqué par le courant I_n qui est la source du bruit dans le système qui est d'origine externe. La présence du terme sinusoïdal a permis récemment non seulement l'émergence des comportements quantiques [124, 125], mais aussi la dépendance aux conditions initiales [126] du comportement dynamique du détecteur. Si l'on désigne par I_J le supercourant à travers la jonction idéale, I_{R_J} le courant à travers la résistance R_J et I_{C_J} celui à travers le condensateur de capacité C_J la loi des noeuds s'écrit :

$$I_{C_J} + I_{R_J} + I_J = I_b + I_{ac} \sin(\Omega t + \theta) + I_n. \quad (2.16)$$

Cette dernière conduit à l'équation différentielle dite de Langevin [127] :

$$\frac{C_J \hbar}{2e} \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{\hbar}{R_J 2e} \frac{d\phi}{dt} + I_0 \sin \phi = I_b + I_{ac} \sin(\Omega t + \theta) + I_n. \quad (2.17)$$

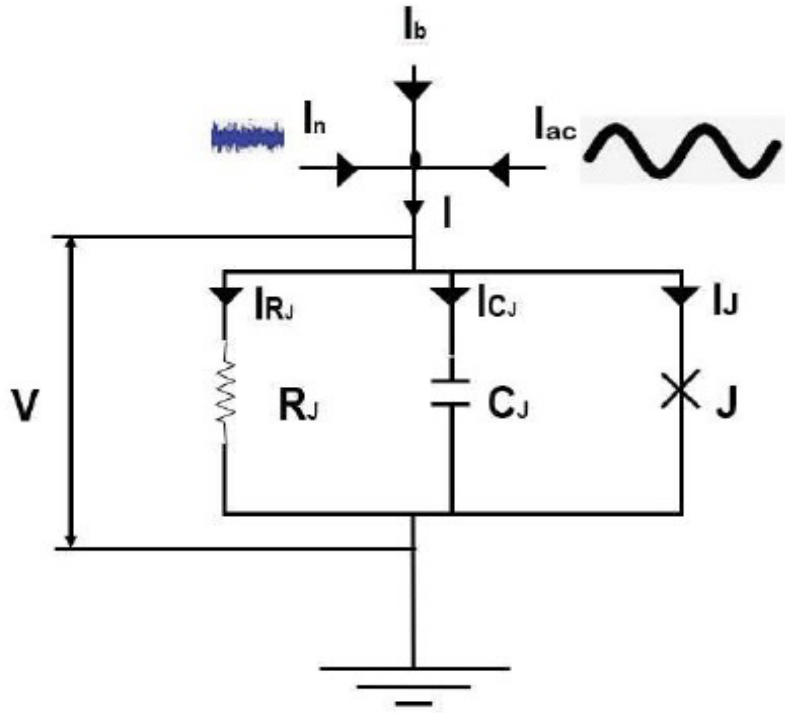


Figure 2.2 – *Circuit électrique du détecteur de signal sinusoïdal.*

Comme précédemment, elle est adimensionnée à travers la variable de temps normalisée $\tau = \omega_J t$ selon l'équation :

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\phi}{d\tau} + \sin\phi = \gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) + \zeta(\tau), \quad (2.18)$$

où $\alpha = (R_J C_J \omega_J)^{-1}$ est le coefficient de dissipation, $\gamma = I_b/I_0$, le courant appliqué normalisé, $\gamma_{ac} = I_{ac}/I_0$ l'intensité normalisée du signal sinusoïdal, $\omega = \Omega/\omega_J$ la fréquence normalisée du signal, $\zeta(\tau) = I_n/I_0$ le bruit. Dans notre travail, nous étudions deux modèles de détection :

1. Dans un premier temps, $\zeta(\tau)$ est le bruit blanc gaussien dont les propriétés statistiques sont données à l'équation (2.8). La particularité de ce modèle est liée au fait que le courant appliqué γ n'est pas constant. Il varie linéairement dans le temps suivant l'équation :

$$\gamma(\tau) = v\tau \quad (2.19)$$

v est la vitesse de balayage qui fait varier le courant appliqué de zéro jusqu'à la valeur critique pour $\tau = \frac{1}{v}$, c'est-à-dire $\gamma = 1$. Pour cette valeur, le puits de potentiel est peu profond et il est possible que la particule de phase s'échappe du puits même en l'absence du bruit ou du signal [128]. La vitesse de balayage est normalisée à l'unité de fréquence de l'ordre de 100 GHz raison pour laquelle cette vitesse varie de l'ordre de 10^{-3} jusqu'à 10^{-6} en unité normalisée. L'avantage de ce modèle est le fait que la probabilité d'observer une transition est élevée dans un intervalle de temps prédéfini car il est fort probable qu'elle se produise

pour $\tau = \frac{1}{v}$. Ce modèle est approprié pour établir la distribution des courants de transition "switching current" car à chaque temps de transition τ_{sw} , on associe le courant de transition γ_{sw} qui sont liés par la relation :

$$\gamma_{sw} = v\tau_{sw}. \quad (2.20)$$

2. Le deuxième cas de figure consiste à considérer que le bruit $\zeta(\tau)$ obéit au processus de Orstein-Uhlembeck (OU) [86, 129]. Dans ce cas, $\zeta(\tau)$ a les propriétés statistiques suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\tau) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta(\tau), \zeta(\tau') \rangle &= \frac{D}{\tau_c} \exp\left(-\frac{|\tau - \tau'|}{\tau_c}\right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

C'est le bruit coloré exponentiellement corrélé caractérisé par le temps de corrélation τ_c . Dans notre travail, nous étudions l'influence du temps de corrélation sur la distribution des différents temps de transition.

Que l'on considère l'un ou l'autre cas, nous rappelons que dans la théorie de la détection, la phase est assimilée à une particule virtuelle qui se meut le long du profil du potentiel de Josephson comme sur la Figure.2.3 qui met en lumière un exemple de transition. Cette transition survient lorsque la particule de phase, sous l'action du bruit ou d'une combinaison (bruit + signal) s'échappe du puits de potentiel après une certaine durée appelée temps de transition ou "Escape Time" (ET) après avoir accumulé une énergie supérieure ou égale à $\Delta U(\gamma)$.

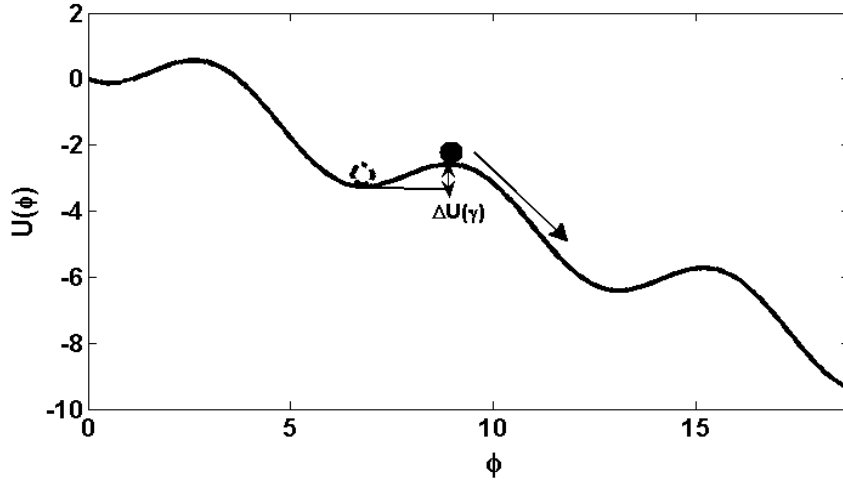


Figure 2.3 – Phénomène de transition de la particule de phase initialement placée dans un puits du potentiel de Josephson "washboard potential" pour $\gamma = 0.5$. la barrière d'énergie $\Delta U(\gamma)$ est définie à la relation Eq.(1.30).

Lorsque la transition est provoquée par la seule contribution du bruit blanc gaussien, la fréquence de transition est donnée par l'approximation de *Kramer* [130] :

$$r_k \propto \Gamma \exp\left(-\frac{\Delta U}{D}\right), \quad (2.22)$$

où Γ est le préfacteur de *Kramer*. Dans cette formule, le régime de diffusion de phase [28] n'est pas pris en compte. Les propriétés statistiques des différentes distributions peuvent permettre de révéler aussi les autres composantes du bruit à l'instar de la corrélation si tout au moins ces propriétés sont sensibles au temps de corrélation τ_c . La construction d'un échantillon de temps de transition ou ET est donc capitale et requiert une stratégie spécifique. L'analyse statistique de ces données permet de caractériser le détecteur.

2.3 Méthode d'analyse

Nous avons montré au premier Chapitre que la théorie de la détection est basée sur la caractérisation des différents temps de transition. Encore faut-il en construire l'échantillon qui doit faire l'objet d'analyse afin d'en déduire les propriétés du détecteur. Dans cette partie, il est nécessaire de définir les stratégies d'acquisition des données de l'échantillon et les différents outils d'analyse statistique.

2.3.1 Stratégie d'acquisition des données

Dans le cadre de la détection du signal sinusoïdal la phase initiale du signal θ en réalité n'est pas connue ainsi que d'autres paramètres qui caractérisent le signal. Dans le souci de compréhension de la technique d'approche nous avons suggéré dans un premier temps que la phase du signal est inconnue (ce qui est proche de la réalité) : il s'agit de la stratégie incohérente de détection. Dans un second temps, on peut attribuer de façon arbitraire la valeur de la phase du signal à détecter : il s'agit de la stratégie cohérente de détection.

1. Stratégie incohérente de détection

Elle correspond au cas où la JJ est exposée à une source de radiation incontrôlée. Dans ce cas, l'on considère que la valeur de θ est distribuée de façon aléatoire dans l'intervalle $[0; 2\pi]$. Pendant la simulation numérique, l'on procède comme suit :

- La particule est initialement placée dans l'un des puits de potentiel et le signal est appliquée avec une phase initiale arbitraire.
- Lorsqu'une transition est détectée (passage de l'état supraconducteur à l'état résistif), on arrête le processus puis on enregistre le temps correspondant τ_i .
- A la prochaine étape, on remet la particule dans les mêmes conditions que précédemment à la seule différence que l'on ajoute à la phase initiale précédente du signal la quantité $\omega\tau_i$. Le processus se poursuit jusqu'à l'obtention de la taille convenable de l'échantillon.

2. Stratégie cohérente de détection

Par opposition à la stratégie précédente, on affecte tout au long du processus une valeur fixe à la phase initiale telle que $\theta \in [0; 2\pi]$ (par exemple $\theta = 0$). Comme précédemment, lorsqu'une transition est détectée, l'on enregistre le temps correspondant τ_i . A la prochaine étape, on

conserve les mêmes conditions initiales que précédemment. Comme toujours le processus se poursuit jusqu'à l'obtention de la taille convenable l'échantillon.

Que ce soit l'une ou l'autre stratégie, on constitue à la fin de chaque processus l'ensemble des temps de transition ou ET noté $\mathcal{T} = \{\tau_i\}_{i \in 1 \dots N}$. C'est cet échantillon qui contient les informations nécessaires à la caractérisation du détecteur.

2.3.2 Outils d'analyse statistique

Ces outils permettent de révéler l'influence du signal sur la distribution des différents temps de transition et aussi d'évaluer de façon quantitative la performance du détecteur.

2.3.2.1 Fonction Complémentaire de la Distribution Cumulative

La Fonction Complémentaire de la distribution Cumulative (CCDF) est une fonction de probabilité d'une variable aléatoire X . Sa construction graphique permet d'avoir un visuel sur l'effet de la présence du signal. Dans les manuels de probabilité, on le définit comme le complémentaire de la fonction de distribution cumulative (CDF). Le CDF est une fonction de répartition qui calcule la probabilité cumulée d'une variable aléatoire x . Il mesure donc la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure ou égale à une valeur x , noté :

$$CDF(x) = P(X \leq x). \quad (2.23)$$

Quand le CDF est déterminée, on en déduit le CCDF à partir de la formule :

$$CCDF(x) = 1 - CDF(x). \quad (2.24)$$

2.3.2.2 Fonction Densité de Probabilité

La Fonction Densité de Probabilité (PDF) est un concept fondamental en analyse statistique. Sa construction graphique permet aussi de visualiser l'effet du signal sur la distribution des différents ET. Pour comprendre l'importance de cet outil, on considère une variable aléatoire X à laquelle on associe la fonction de densité f . La connaissance de f donne une description naturelle de la distribution de la variable aléatoire X et permet donc de calculer toute probabilité associée à la variable aléatoire travers la relation :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{pour tout } a < b. \quad (2.25)$$

Nous considérons l'ensemble des ET comme une variable aléatoire dont la Fonction Densité de Probabilité est méconnue. Il est possible de l'estimer numériquement en utilisant la technique statistique non paramétrique qu'on appelle l'estimation par noyau de la densité ou "Kernel Density Estimation" (KDE) [131]. Cette méthode s'appuie sur un échantillon (ici $\mathcal{T} = \{\tau_i\}_{i \in 1 \dots N}$) et

permet d'estimer la densité en tout point du support. Elle généralise la méthode d'estimation par l'histogramme.

Considérons l'ensemble x_1, x_2, \dots, x_N un échantillon indépendant et identiquement distribué d'une variable aléatoire, l'estimateur non-paramétrique par la méthode du noyau de la densité est donné par :

$$f_h(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{k=1}^N K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad (2.26)$$

où K est le noyau et h le degré de lissage. Le plus souvent, le noyau que l'on utilise est la fonction de densité gaussienne standard (espérance nulle et variance nulle) :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (2.27)$$

En rappel, il existe dans la littérature plusieurs noyaux [131] dont le choix n'a pas d'influence significative sur l'estimateur. L'accent doit être mis sur le choix approprié du paramètre h , car un h trop faible provoque l'apparition des détails artificiels sur le graphe de l'estimateur et pour une valeur de h trop grande, la majorité des caractéristiques est effacée. De façon générale, le choix optimal de h s'opère à travers la formule :

$$h = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \hat{\sigma} N^{-\frac{1}{5}}, \quad (2.28)$$

où $\hat{\sigma}$ est l'écart-type de l'échantillon.

Pour l'échantillon $\tau = \{\tau_i\}_{i \in 1 \dots N}$, le PDF ne peut pas satisfaire à la condition :

$$f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x < 0, \quad (2.29)$$

car constitué essentiellement des quantités positives. Pour remédier à cette insuffisance, on emploie la transformation connue sous le nom de "Log-transform Kernel Density Estimation" [132, 133]. Cette transformation consiste à construire un nouvel échantillon à partir du premier en procédant comme suit :

$$X = \log(\tau) \quad (2.30)$$

Pour ce nouvel échantillon, le PDF satisfait la condition (2.29) et par conséquent l'estimateur est défini par la formule :

$$\hat{f}_{\log(\tau)} = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \tau^{-1} K\left(\frac{\log(\tau) - \log(\tau_i)}{h}\right). \quad (2.31)$$

2.3.2.3 Indice de Kumar-Carroll

L'indice de Kumar-Carroll (d_{KC}) est le paramètre statistique permettant de faire l'analyse quantitative de l'échantillon. Il évalue la performance du détecteur. Il est donné par la formule [36] :

$$d_{KC} = \frac{|\langle \tau_{sw} \rangle_{sig} - \langle \tau_{sw} \rangle_{noi}|}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma^2(\tau_{sw})_{sig} + \sigma^2(\tau_{sw})_{noi})}}, \quad (2.32)$$

où $\langle \tau_{sw} \rangle_{sig}$ et $\langle \tau_{sw} \rangle_{noi}$ sont les valeurs moyennes des ET mesurées respectivement en présence et en absence du signal ; avec $\sigma(\tau_{sw})_{sig}$ et $\sigma(\tau_{sw})_{noi}$ les écarts-type correspondants.

2.4 Méthodes de simulations numériques

De façon générale, les méthodes de simulations numériques permettent d'approximer les solutions des équations différentielles décrivant le comportement dynamique des systèmes. Dans cette partie, nous définissons tous les algorithmes qui permettent de résoudre de façon numérique les équations différentielles des différents systèmes décrits précédemment.

2.4.1 Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4

Le schéma itératif de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) [134, 135] est le plus utilisé dans la résolution numérique des systèmes déterministes. Pour définir ce schéma, considérons un système dynamique décrit par l'équation différentielle ordinaire de premier ordre suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t)), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2.33)$$

où, $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ est le vecteur des variables du système ;

$F = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^T$, le vecteur définissant les fonctions du second membre.

à chaque pas temporel h , la solution de l'équation différentielle est approximée par la relation :

$$X(t+h) = X(t) + \frac{1}{6}(d_1 + 2*d_2 + 2*d_3 + d_4) \quad (2.34)$$

où les $d_i (i = 1, \dots, 4)$ sont les coefficients de Runge-Kutta calculés à partir des formules suivantes :

$$d_1 = h * F(t, X(t)) \quad (2.35a)$$

$$d_2 = h * F\left(t + \frac{h}{2}, X(t) + \frac{d_1}{2}\right) \quad (2.35b)$$

$$d_3 = h * F\left(t + \frac{h}{2}, X(t) + \frac{d_2}{2}\right) \quad (2.35c)$$

$$d_4 = h * F(t+h, X(t) + d_3). \quad (2.35d)$$

A partir de ce schéma, on calcule de proche en proche toutes les solutions prises par la variable X partant d'une valeur initiale quelconque X_0 pendant une période d'observation arbitrairement choisie.

2.4.2 Algorithme d'Euler

L'algorithme d'Euler est beaucoup plus utile à la résolution numérique des équations différentielles stochastiques qui sont caractérisées par la présence dans leurs expressions du terme du bruit. Pendant la résolution numérique, il existe un algorithme spécial permettant de générer les nombres aléatoires représentant le bruit. Il s'agit de l'algorithme de Box-Müller [136].

2.4.2.1 Algorithme de Box-Müller

Cet algorithme permet de générer les nombres aléatoires lors des simulations numériques. A partir de deux nombres aléatoires m et n uniformément distribués dans l'intervalle $[0; 1]$, on génère à chaque intervalle de temps h deux nombres aléatoires représentant le terme de bruit ζ :

$$m = \text{random number} \quad (2.36a)$$

$$n = \text{random number} \quad (2.36b)$$

$$\zeta_1 = \sqrt{-4Dh \log(m)} \cos(2\pi n) \quad (2.36c)$$

$$\zeta_2 = \sqrt{-4Dh \log(m)} \sin(2\pi n) \quad (2.36d)$$

Il existe un avantage à générer les deux nombres ζ_1 et ζ_2 en terme de coût en durée d'exécution du programme complet. Car on utilise l'un à une étape et l'autre à l'étape suivante. Ce processus réduit considérablement la durée d'exécution du programme. Cependant, il existe un autre algorithme beaucoup plus avantageux que celui défini précédemment qu' appelle "Box-Müller transformation algorithm" [137]. Le processus est identique à l'algorithme décrit précédemment à la seule différence que l'on utilise plus les fonctions trigonométriques. On a le définit comme suit :

$$m = \text{random number} \quad (2.37a)$$

$$n = \text{random number} \quad (2.37b)$$

$$v_1 = 2 * m - 1 \quad (2.37c)$$

$$v_2 = 2 * n - 1 \quad (2.37d)$$

$$r = v_1^2 + v_2^2 \quad (2.37e)$$

$$fac = \sqrt{-4Dh \frac{\log(r)}{r}} \quad (r < 1 \quad \text{et} \quad r > 0) \quad (2.37f)$$

$$\zeta_1 = v_1 * fac \quad (2.37g)$$

$$\zeta_2 = v_2 * fac \quad (2.37h)$$

2.4.2.2 Algorithme d'Euler à bruit blanc gaussien

Ce schéma itératif est utilisé pour intégrer l'équation différentielle (2.18) lorsque le bruit ζ est décrit par le bruit blanc gaussien. Pour ce faire, il faut décomposer l'équation (2.18) en deux équations comme suit :

$$\frac{d\phi}{d\tau} = u \quad (2.38a)$$

$$\frac{du}{d\tau} = \gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) - \alpha u - \sin \phi + \zeta(\tau). \quad (2.38b)$$

A chaque intervalle $\Delta\tau$, on a :

$$\phi_{|\tau+\Delta\tau} = \phi_{|\tau} + u_{|\tau} \Delta\tau \quad (2.39a)$$

$$u_{|\tau+\Delta\tau} = u_{|\tau} + (\gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) - \alpha u_{|\tau} - \sin \phi_{|\tau}) \Delta\tau + \zeta_i. \quad i = 1, 2 \quad (2.39b)$$

avec ζ_i généré par l'algorithme de Box-Müller.

2.4.2.3 Algorithme d'Euler associé au bruit coloré exponentiellement corrélé

Pour ce schéma, on procède toujours comme précédemment à la différence que l'équation (2.18) se décompose comme suit :

$$\frac{d\phi}{d\tau} = u \quad (2.40a)$$

$$\frac{du}{d\tau} = \gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) - \alpha u - \sin \phi + \zeta(\tau) \quad (2.40b)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{\zeta}{\tau_c} + \frac{G_{wn}}{\tau_c}, \quad (2.40c)$$

où G_{wn} est le bruit blanc gaussien dont les propriétés statistiques sont :

$$\langle G_{wn}(\tau) \rangle = 0, \quad (2.41a)$$

$$\langle G_{wn}(\tau), G_{wn}(\tau') \rangle = 2D\delta(\tau - \tau'). \quad (2.41b)$$

En se référant à l'article [138], les étapes suivantes sont nécessaires afin d'établir l'algorithme d'Euler correspondant au processus de *Orstein-Uhlenbeck* (OU) :

1. Déterminer la valeur initiale de $\zeta(\tau)$ à partir de deux nombres aléatoires :

$$m = \text{random number} \quad (2.42a)$$

$$n = \text{random number} \quad (2.42b)$$

$$\zeta(0) = \left[-\frac{2D}{\tau_c} \ln(m) \right]^{1/2} \cos(2\pi n). \quad (2.42c)$$

2. Poser

$$E = \exp\left(-\frac{\Delta\tau}{\tau_c}\right). \quad (2.43)$$

3. A chaque pas temporel $\Delta\tau$, le bruit coloré exponentiellement corrélé est généré comme suit :

$$m = \text{random number} \quad (2.44a)$$

$$n = \text{random number} \quad (2.44b)$$

$$\zeta_{|\tau+\Delta\tau} = E\zeta_{|\tau} + \left[-\frac{2D}{\tau_c}(1-E^2)\ln(m)\right]^{1/2} \cos(2\pi n). \quad (2.44c)$$

4. Le schéma d'Euler associé au processus Orstein-Uhlenbeck (OU) est :

$$\phi_{|\tau+\Delta\tau} = \phi_{|\tau} + u_{|\tau} \Delta\tau \quad (2.45a)$$

$$u_{|\tau+\Delta\tau} = u_{|\tau} + \left[\gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) - \alpha u_{|\tau} - \sin\phi_{|\tau} + \zeta_{|\tau}\right] \Delta\tau \quad (2.45b)$$

$$\zeta_{|\tau+\Delta\tau} = E\zeta_{|\tau} + \left[-\frac{2D}{\tau_c}(1-E^2)\ln(m)\right]^{1/2} \cos(2\pi n). \quad (2.45c)$$

Pour plus de finesse des solutions numériques, on définit $\Delta\tau = 10^{-3}$ ou 10^{-4} pour l'algorithme d'Euler et pour l'algorithme de Runge-Kutta $\Delta\tau = 10^{-2}$.

De façon générale, pour implémenter numériquement les différents algorithmes, nous avons utilisé les logiciels de calcul tels que FORTRAN 90, MATLAB 2014....

2.5 Conclusion

En somme, ce chapitre a présenté tout d'abord les modèles mathématiques des différents systèmes étudiés. Ensuite il a été présenté en détails les différents outils d'analyse des données ainsi que les schémas itératifs nécessaires pour la résolution numérique des équations différentielles décrivant la dynamique des systèmes étudiés.

Chapitre 3

Résultats et discussions

3.1 Introduction

Au chapitre précédent nous avons établi les équations différentielles décrivant les systèmes à étudier dans le cadre de ces travaux de thèse ainsi que les outils numériques permettant d'approximer ces solutions. Ce chapitre présente les résultats concernant la stabilité du réseau linéaire des JJ ainsi que les propriétés du détecteur du signal sinusoïdal à jonction Josephson.

3.2 Stabilité du réseau linéaire des jonctions Josephson

3.2.1 Propriétés déterministes du réseau parfait

Pour mieux évaluer les effets du bruit dans le réseau, il est nécessaire en première approximation de considérer un système déterministe (qualité des systèmes, des processus dont l'issue ne dépend que des conditions initiales). Dans ce cas, le terme $\zeta = 0$.

3.2.1.1 Caractéristique courant-tension du réseau

Comme pour l'observation de l'effet Josephson, la caractéristique courant-tension est un indicateur important dans l'évaluation de la réponse du réseau suite à son couplage au résonateur. Cette caractéristique permet de déterminer les conditions de synchronisation du réseau à travers le résonateur RLC. La Figure 3.1 représente la caractéristique courant-tension du modèle parfait réseau (jonctions identiques) pour plusieurs valeurs du nombre N d'éléments qui constituent le réseau ; partant de $N = 1$ jusqu'à $N = 10$. En plus de l'effet Josephson que l'on observe (plage de valeurs du courant γ_G pour lequel $V = 0$), on observe aussi la présence d'une autre plage correspondant à une valeur constante de la ddp V différente de zéro. Cette plage matérialise l'état de résonance du réseau mettant en évidence le phénomène de synchronisation de fréquence [139] (c'est-à-dire que dans le réseau chaque jonction oscille à la fréquence du résonateur) et par conséquent, tous les éléments du réseau ont un comportement cohérent. Ce phénomène résulte du couplage globale qui existe entre les éléments du réseau (couplage dans lequel chaque élément du réseau subit l'influence de ses pairs). Plus on augmente le nombre N des jonctions du réseau, plus l'étendue de la plage diminue et les valeurs de la ddp du réseau et du courant appliqué correspondantes se déplacent vers les valeurs de plus en plus élevées.

Le tableau 3.1 confirme le constat selon lequel plus le nombre de jonctions du réseau augmente,

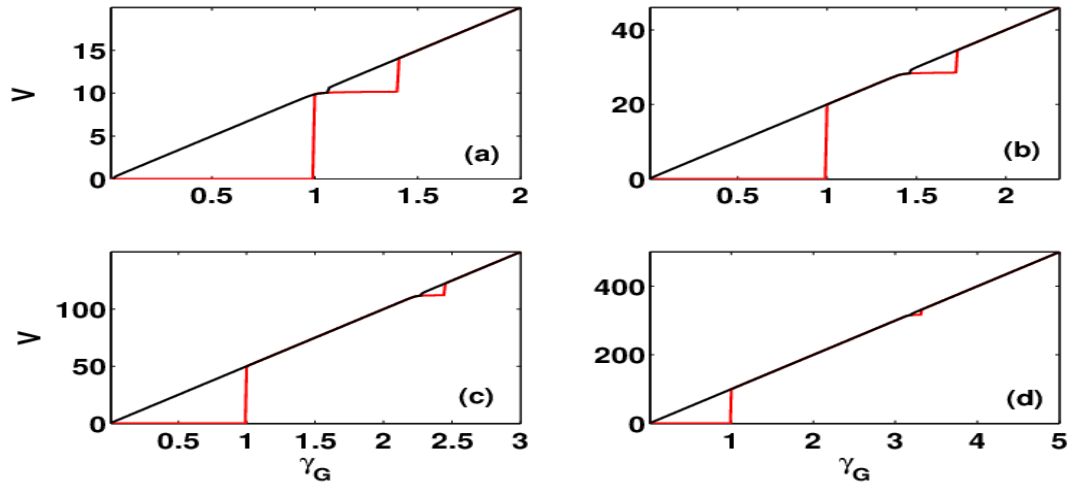


Figure 3.1 – Courbe normalisée de la caractéristique courant-tension du modèle parfait du réseau. Le trait fort rouge indique le sens de balayage croissant du courant appliqué γ_G tandis que le trait fort noir le sens de balayage décroissant. Les paramètres de simulations sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $D = 0$. (a) : $N = 1$, (b) : $N = 2$, (c) : $N = 5$, (d) : $N = 10$.

Tableau 3.1 – Plage des valeurs du courant appliqué γ_G correspondant à l'état de résonance. Le tableau indique sur l'étendue de la plage correspondant à l'état de résonance.

N	γ_G	
	valeur minimale	valeur maximale
1	1.05	1.40
2	1.47	1.72
5	2.28	2.42
10	3.2	3.31

plus l'étendue de la plage diminue. La Figure 3.2 met en exègue le caractère hystérétique de la caractéristique courant-tension à la plage de résonance. De ce fait, si l'on prend une valeur arbitraire du courant appliqué γ_G appartenant à la plage, on constate que le réseau a deux fréquences d'oscillations Ω_1 et Ω_3 . Ainsi, Ω_3 désigne la fréquence relative à la branche non perturbée de la caractéristique encore appelé branche de McCumber et Ω_1 celle relative à la fréquence de résonance du circuit RLC. Cette situation confère au réseau les propriétés birythmiques. La principale caractéristique de la birythmicité est la coexistence de deux attracteurs d'amplitudes et de fréquences différentes. En fonction des conditions initiales, le système peut produire des oscillations de périodes différentes. Cette propriété a déjà été observée pour certains systèmes biochimiques [140–144], certains circuits électroniques nonlinéaires [145–150] et bien d'autres systèmes [151, 152]. Etant donné que la plage indique l'état de synchronisation du réseau au résonateur, nous pouvons dire que les propriétés birythmiques sont induites par le circuit RLC.

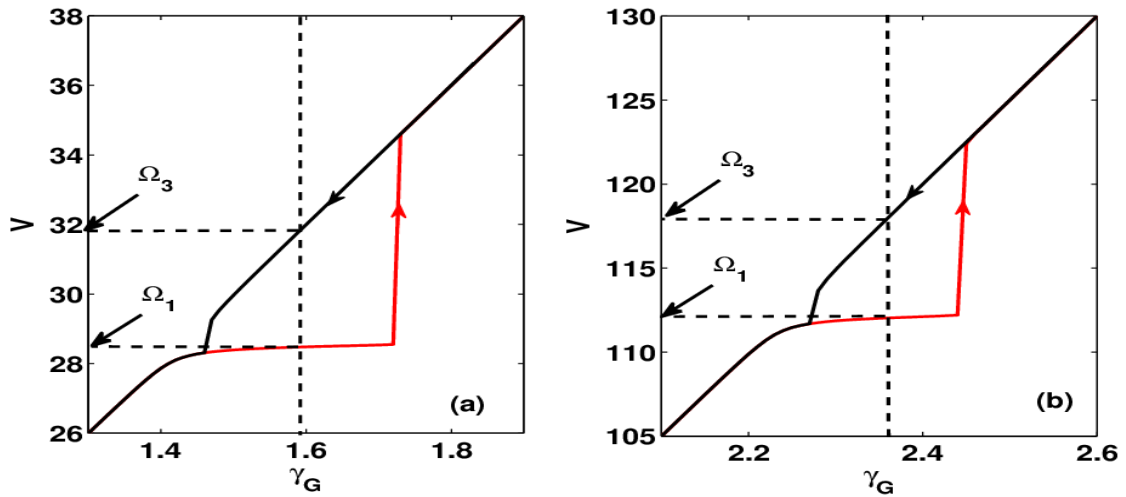


Figure 3.2 – Mise en évidence du caractère hystérétique de la caractéristique courant-intensité à l'état de résonance. (a) : $N = 2$, (b) : $N = 5$ Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1

3.2.1.2 Propriétés des attracteurs

Pour le système étudié et par comparaison au circuit RLC conventionnel, le réseau de jonctions peut être assimilé au générateur qui pompe le circuit résonant. Dans ce cas, la réponse du circuit résonant est mesurée à travers la dynamique de sa charge. C'est par cette analogie que le comportement birythmique du réseau est illustré à travers la dynamique de la charge du résonateur. Il est important de rappeler que seules les valeurs du courant γ_G de la zone hystérétique de la caractéristique courant-tension sont prises en compte.

La Figure 3.3 présente le diagramme de phase et l'évolution temporelle de la charge q du condensateur. On observe les mêmes caractéristiques obtenues dans le cas d'une seule jonction [15]. L'attracteur relatif à la fréquence Ω_1 est de grande amplitude tandis que celui relatif à la fréquence Ω_3 est de petite amplitude. Entre ces deux orbites on suppose qu'il existe une orbite instable de fréquence correspondante Ω_2 . Cette orbite représente la séparatrice q_s dont la position exacte ne peut qu'être estimée [15]. Il est clair que plus le nombre de jonction du réseau croît, la résonance se déplace vers les valeurs de plus en plus grande de la charge du résonateur mais sans changement d'amplitude d'oscillations. On peut conclure que les caractéristiques des attracteurs sont indépendantes du nombre de jonctions du réseau.

3.2.2 Propriétés stochastiques du réseau parfait

Dans la théorie de la détection, le bruit est capital. Il est nécessaire d'étudier les effets du bruit sur le comportement dynamique du réseau. Dans ce cas, $\zeta \neq 0$.

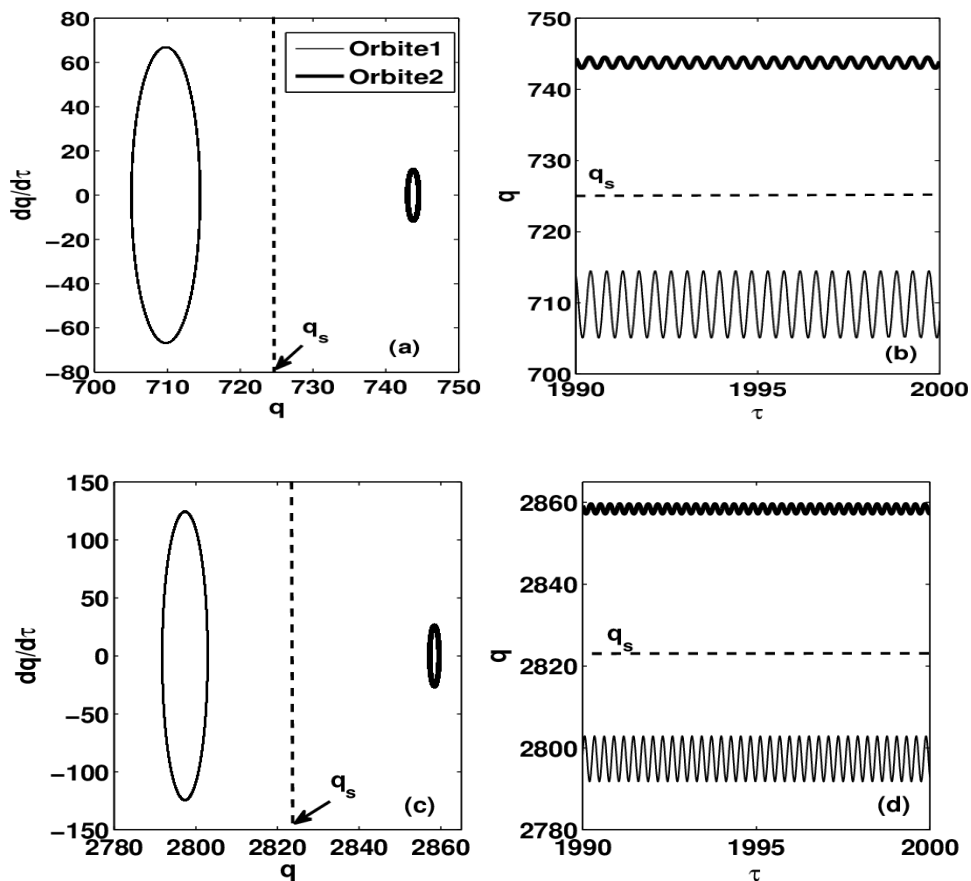


Figure 3.3 — Portrait de phase et évolution temporelle de la charge q du résonateur. q_s indique la position estimée de la séparatrice. (a) et (b) comptent pour $N = 2$; (c) et (d) pour $N = 5$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1

3.2.2.1 Propriétés des attracteurs sous l'effet du bruit

Lorsqu'on introduit le bruit dans le réseau, le système n'est plus confiné sur un seul cycle limite comme précédemment c'est-à-dire caractérisé par une fréquence et ayant une forme bien définie (Figure 3.3). Sous l'influence du bruit, les cycles limites ou attracteurs deviennent déformés (Figure 3.4) prêtant même à confusion l'appellation cycle limite dans son essence. Néanmoins, ces pseudo-cycles limites ou pseudo-attracteurs restent bien séparés. Cette déformation rend possible la détermination de la séparatrice q_s [15]. En effet, l'examen de l'évolution de la charge q révèle qu'après une certaine durée, le système quitte subitement l'orbite de fréquence Ω_1 vers l'orbite de fréquence Ω_3 (voir Figure 3.5). Ainsi durant cette transition, la charge q passe à travers un seuil q_s ; puis pour tout $q > q_s$, la charge varie rapidement pour ensuite évoluer sur une autre orbite. A travers ces observations, force est de constater qu'il est possible d'estimer la meilleure position de la séparatrice par exploitation des propriétés du "Mean First Passage Time" (MFPT). En effet, cela consiste à tracer la courbe du MFPT en fonction du seuil q_s (défini arbitrairement sur un intervalle) (Figure 3.6). Ce diagramme présente un changement de pente à partir d'une certaine valeur de q_s et par conséquent au delà de cette valeur, le diagramme subit une variation indépendamment de la valeur de q_s .

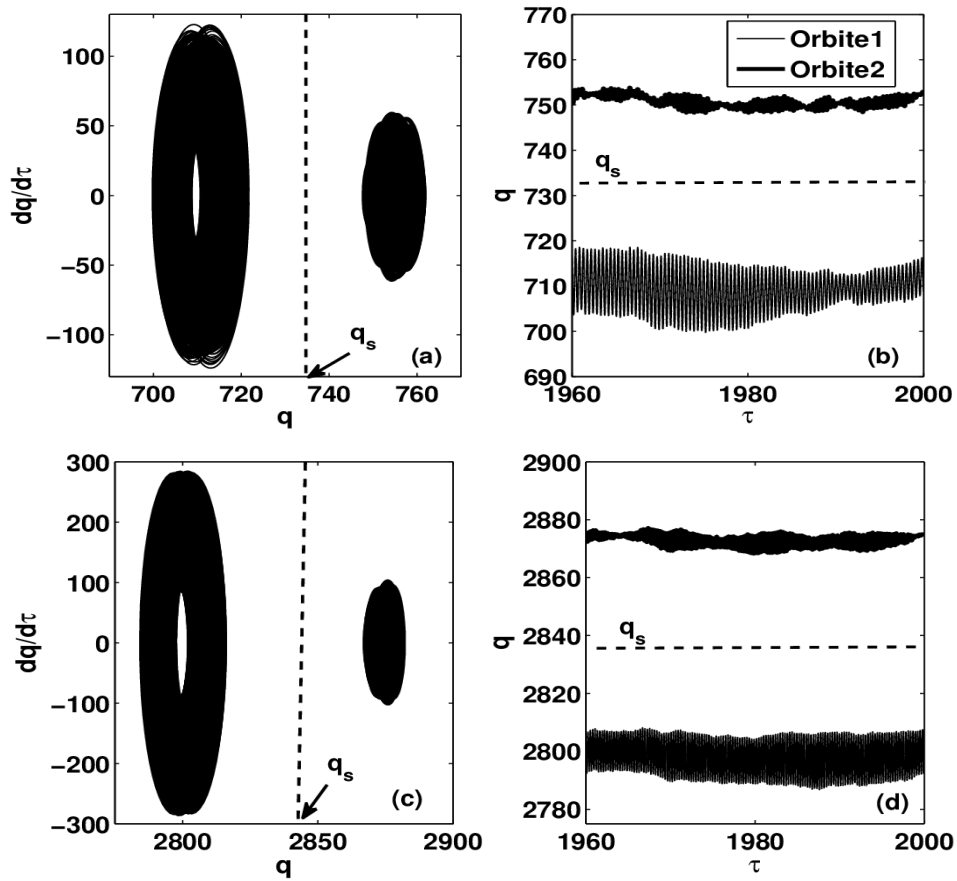


Figure 3.4 – Portrait de phase et évolution temporelle de la charge q du résonateur en présence du bruit, $D = 0.1$. q_s indique la position estimée de la séparatrice. (a) et (b) comptent pour $N = 2$; (c) et (d) pour $N = 5$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure.3.1

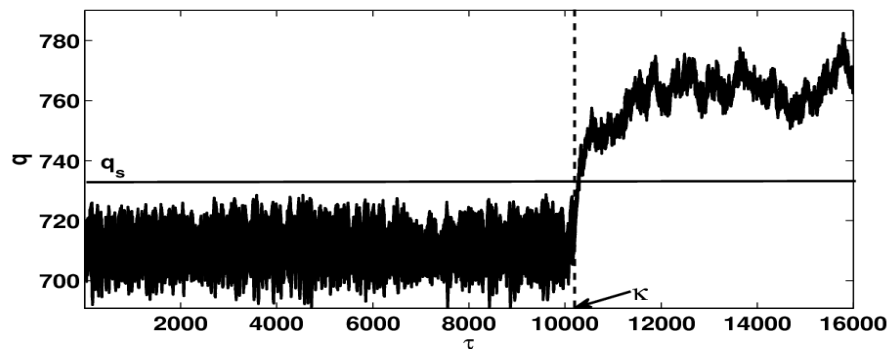


Figure 3.5 – Exemple de transition du système de l'attracteur de fréquence Ω_1 vers l'attracteur de fréquence Ω_3 . Après un temps de résidence du système dans l'orbite 1 approximativement à la valeur $\kappa = 10000$ unités de temps normalisés, la charge atteint la séparatrice q_s puis continue à osciller sur l'orbite 2. Ici $N = 2$ $D = 0.1$. q_s indique la position estimée de la séparatrice. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1

En résumé, lorsque le seuil q_s est en deçà de la séparatrice, la courbe du MFPT varie de façon exponentielle et pour tout seuil au delà de la séparatrice, la courbe du MFPT varie faiblement. On peut donc conclure que la meilleure estimation de la séparatrice est prise au coude du diagramme

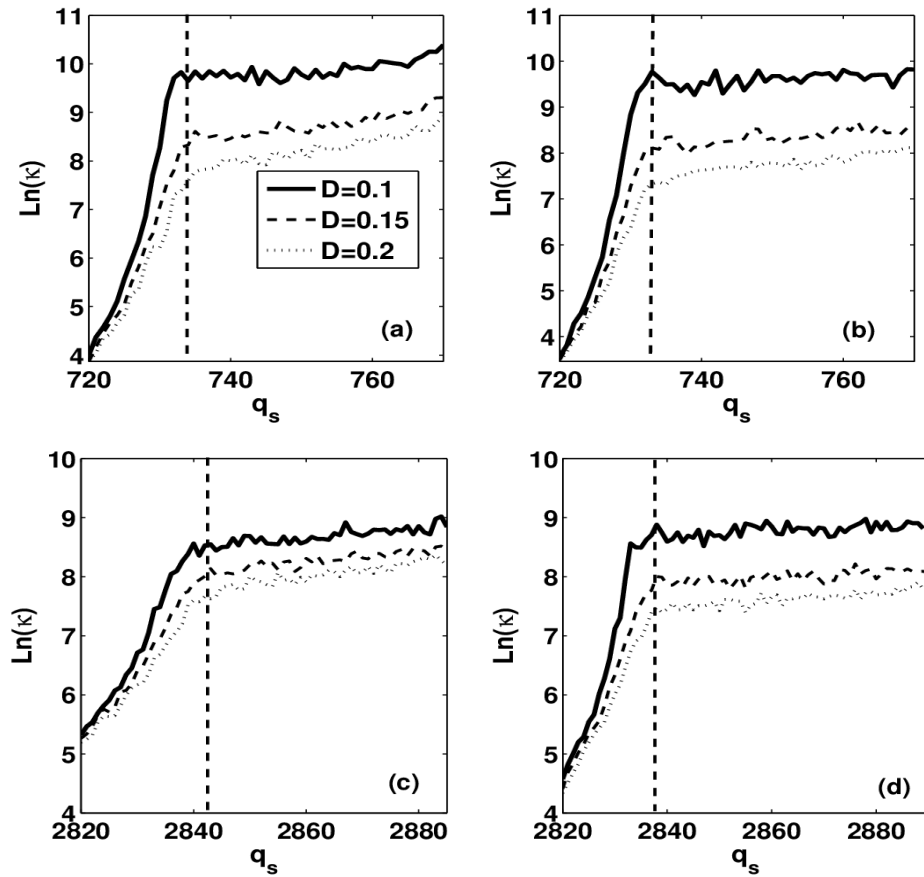


Figure 3.6 – Exemple de courbes de MFPT en fonction du seuil q_s pour plusieurs valeurs de l'intensité du bruit D et du courant appliqué γ_G . (a) et (b) comptent pour $N = 2$; (c) et (d) pour $N = 5$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1.

qui est indiqué sur les différentes figures par le trait interrompu court vertical (Figure 3.6). La séparatrice est très indispensable dans l'étude de la stabilité du réseau car permet de construire la barrière d'énergie associée au réseau, outil d'évaluation de la stabilité. Par le même procédé nous avons établi le tableau des couples (γ_G, q_s) (Tableau 3.2).

Tableau 3.2 – Couple de valeurs (courant appliqué ; séparatrice) pour deux valeurs de N . Les valeurs du courant appliqué sont prises dans la plage de résonance

N	(γ_G, q_s)					
2	(1.50, 733)	(1.53, 733)	(1.55, 731)	(1.58, 730)	(1.60, 729)	(1.65, 728)
5	(2.30, 2840)	(2.33, 2840)	(2.36, 2838)	(2.38, 2836)	(2.39, 2835)	(2.41, 2834)

Le Tableau 3.2 permet de construire la barrière d'énergie.

3.2.2.2 Etude de la stabilité

L'analyse de la stabilité du comportement dynamique de notre système incombe à la construction de la barrière d'énergie ou du pseudo-potentiel [153, 154] associé à la transition entre les

attracteurs. C'est une approche propre aux systèmes dont les forces en présence ne dérivent pas du gradient d'un potentiel. On définit la barrière de potentiel comme la profondeur des puits des états métastables. Tout fluctuation aléatoire aussi petit qu'il soit peut provoquer l'évasion de la particule du puits si cette dernière acquiert suffisamment d'énergie supérieure ou égale à la barrière d'énergie. Dans le cas échéant, nous observons une transition entre les orbites (voir Figure 3.5); la barrière d'énergie représente ainsi le gap énergétique associé à la distance séparant les deux orbites. Ce qui entraîne le problème de stabilité du système sur une orbite d'autant plus que le réseau se trouve à l'état synchrone. La construction de la barrière d'énergie requiert la connaissance du temps de résidence sur une orbite avant de transiter vers une autre orbite. En principe, pour les systèmes en déséquilibre dynamique, le temps de résidence dépend exponentiellement du ratio barrière d'énergie sur intensité du bruit [155] en se référant à la prédiction d'*Arrhenius* :

$$\kappa \propto \exp\left(\frac{\Delta U}{D}\right), \quad (3.1)$$

où κ désigne le temps de résidence sur une orbite, ΔU la barrière d'énergie et D l'intensité du bruit. Pour une description complète de la prédiction d'*Arrhenius*, il est possible d'utiliser la relation linéaire entre le logarithme du temps de résidence κ et l'inverse de l'intensité du bruit pour évaluer la barrière d'énergie [153, 156–159] via :

$$\Delta U \equiv \lim_{D \rightarrow 0} \ln(\kappa). \quad (3.2)$$

Cette approche a été utilisée dans la détermination de la barrière d'énergie du mouvement tourbillonnaire dans les réseaux des JJ [160, 161] et la barrière d'énergie des oscillateurs anharmoniques avec des nonlinearités cubique [158] et quintique [147, 149]. Dans la pratique, on trace d'abord la variation du logarithme de κ en fonction de l'inverse de l'intensité du bruit (Figure 3.7) De cette

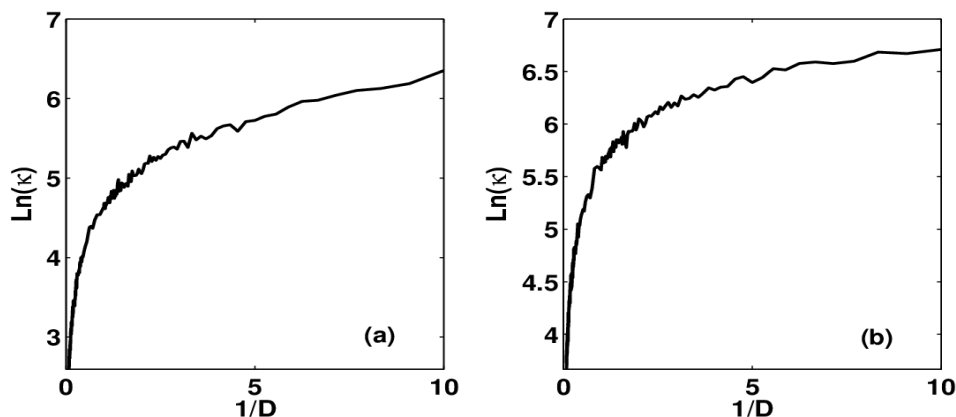


Figure 3.7 – Exemple du diagramme du logarithme de κ en fonction de l'inverse de l'intensité du bruit D . Pour (a) : $N = 2$, $\gamma_G = 1.50$; (b) : $N = 5$, $\gamma_G = 2.30$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure 3.1

figure on considère la partie linéaire de ce diagramme qui correspond bien aux faibles valeurs de l'intensité du bruit. Cette partie du diagramme obéit à la prédiction d'*Arrhenius* donnée à l'équation(3.2). Dans ce cas, la valeur de la barrière d'énergie ΔU est la pente de cette partie linéaire

du diagramme qui se calcule via la formule :

$$\Delta U = \frac{\Delta \ln(\kappa)}{\Delta(\frac{1}{D})}. \quad (3.3)$$

Ce processus est répété pour plusieurs valeurs de γ_G de la zone de résonance de la caractéristique courant-tension. La Figure 3.8 indique la variation de la barrière d'énergie en fonction du courant

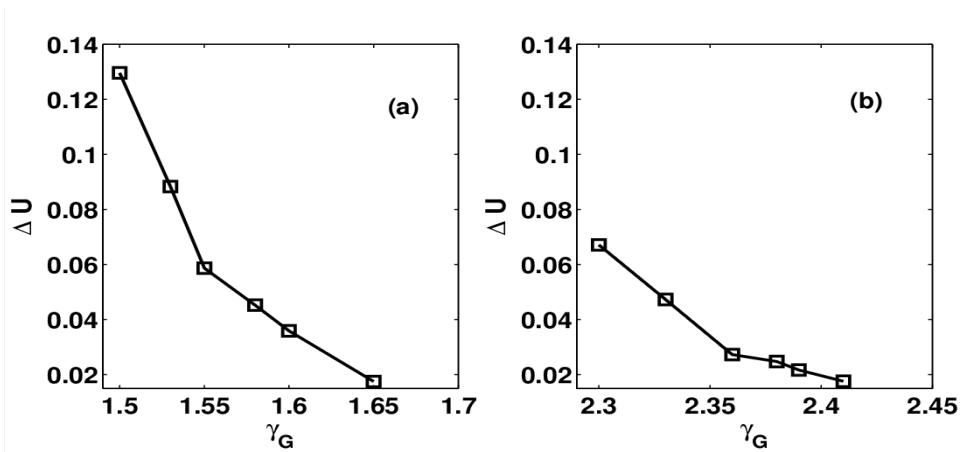


Figure 3.8 – Barrière d'énergie ΔU en fonction du courant appliqué γ_G . Pour (a) : $N = 2$; (b) : $N = 5$. Les paramètres de simulations sont identiques à ceux de la Figure.3.1

γ_G . Dans les deux cas, on observe que $0.02 \leq \Delta U \leq 0.14$ en (a) et $0.02 \leq \Delta U \leq 0.07$ en (b). On constate aussi pour les deux cas que la barrière d'énergie décroît le long de la plage de résonance. Ainsi au début de la plage de résonance, la barrière d'énergie est au maximum c'est-à-dire que le système plus stable sur une orbite ; puis elle décroît tout au long de la plage jusqu'à disparaître à la fin de la plage c'est-à-dire que le réseau est moins stable. Il est aussi clair que la barrière d'énergie décroît avec le nombre de JJ du réseau. Ainsi, plus on augmente le nombre de JJ du réseau moins le système est stable.

3.2.3 Propriétés dynamiques du réseau imparfait : effet du coefficient du désordre

On rappelle que la prise en compte du désordre dans le réseau a pour but de se rapprocher de la réalité car le processus de fabrication (la photolithographie) peut entraîner les disparités dans les paramètres des jonctions [121, 122]. Nous allons dans cette partie étudier les effets que peuvent induire la présence du désordre dans la dynamique du réseau.

3.2.4 Caractéristique courant-tension du réseau

Comme précédemment, il est nécessaire d'observer d'abord l'effet du paramètre de désordre sur la courbe de la caractéristique courant-tension (voir Figure 3.9). On remarque que le désordre change drastiquement l'aspect de la caractéristique courant-tension. La caractéristique perd son caractère hystéretique pour des valeurs du paramètre $\sigma \geq 2\%$. Pour ce même ensemble de valeurs

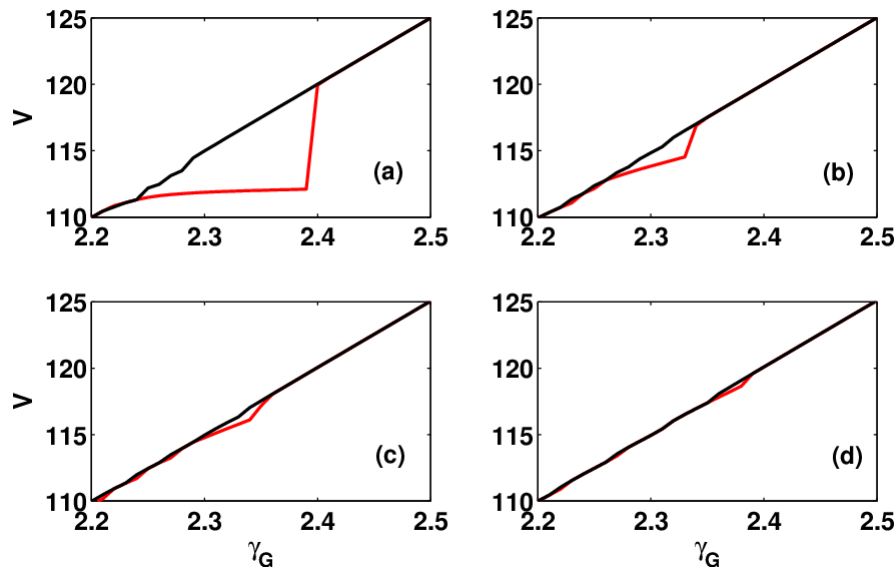


Figure 3.9 – Caractéristique courant-tension du modèle imparfait du réseau. Le trait fort rouge indique le balayage croissant du courant appliqué γ_G tandis que le trait fort noir le balayage décroissant. Les paramètres sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $\alpha = 0.1$, $N = 5$. (a) : $\sigma = 1\%$; (b) : $\sigma = 2\%$; (c) : $\sigma = 3\%$; (d) : $\sigma = 4\%$.

du paramètre de désordre on n’observe non plus la plage pour laquelle le réseau est synchronisé à travers le résonateur. On peut dire que les valeurs importantes du paramètre de désordre empêchent la synchronisation du système entraînant ainsi la destruction de la birythmicité du réseau. On ne peut donc tirer aucun avantage du modèle imparfait du réseau lorsque les valeurs du paramètre de désordre sont fortes. Néanmoins, lorsque le paramètre du désordre est $< 1\%$, la caractéristique est semblable à celle obtenue dans le cas du modèle parfait. Ainsi l’on ne peut exploiter le modèle imparfait que pour les valeurs du paramètre de désordre de l’ordre de 1% en évoluant vers les valeurs de plus en plus faible. Ceci est confirmé par le diagramme de la variation de la tension en fonction du paramètre de désordre (Figure.3.10). Dans cette figure le diagramme présente un caractère hystéretique pour les valeurs du paramètre $< 1\%$.

La procédure d’obtention de ces courbes est la suivante : tout d’abord on considère le système synchronisé au circuit *RLC* (le courant appliqué est pris dans la région de résonance) constitué de jonctions identiques ($\sigma = 0$), puis on fait croître σ jusqu’à 10% . Ensuite la procédure est effectuée en sens inverse en faisant décroître σ jusqu’à zéro. Ces diagrammes confirment que les fortes valeurs du paramètre de désordre empêchent la synchronisation du réseau et détruisent aussi le caractère birythmique de ce dernier.

3.2.5 Propriétés des attracteurs

Au paragraphe précédent, on a observé que le désordre détruit la birythmicité. Néanmoins il s’est avéré que le réseau demeure birythmique pour les faibles valeurs du paramètre de désordre σ . Pour étudier les propriétés des attracteurs, on a effectué les simulations pour plusieurs valeurs

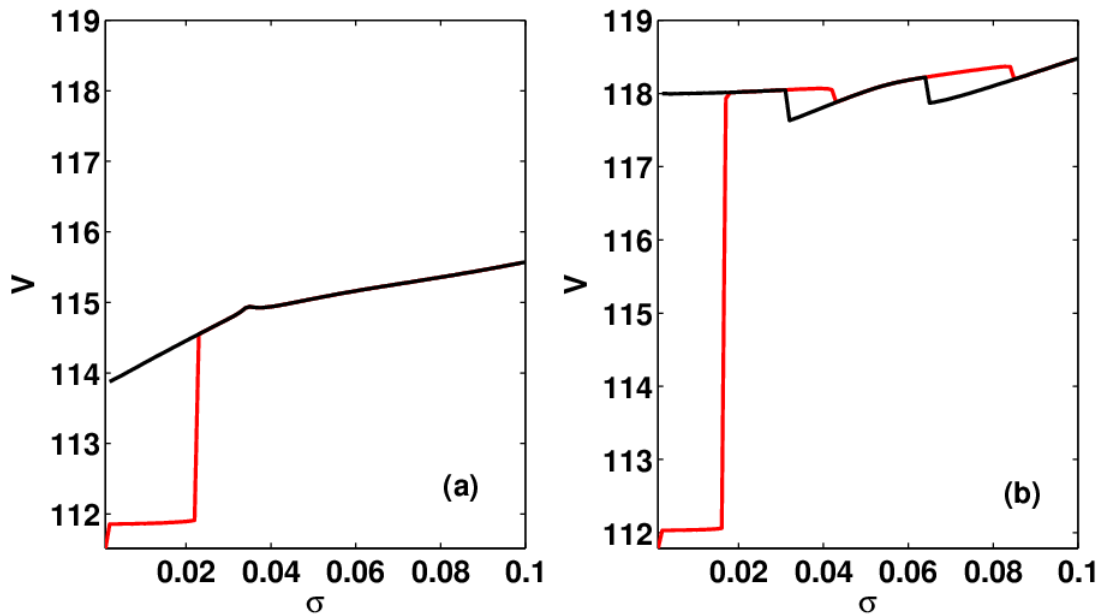


Figure 3.10 – Variation de la tension en fonction de la variance σ . Le trait fort rouge indique le balayage croissant tandis que le trait fort noir le balayage décroissant. Les paramètres sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $N = 5$. (a) : $\gamma_G = 2.30$; (b) : $\gamma_G = 2.36$.

de σ ($\sigma = 0.1\%, 0.3\%, 0.55\% \dots$). Pour toutes ces valeurs les propriétés des attracteurs sont qualitativement similaires et par conséquent dans cette partie une attention particulière est accordée pour $\sigma = 0.1\%$. Dans ces conditions, la caractéristique courant-tension obtenue est représentée à la Figure.3.11. Cette caractéristique est similaire à celle de la Figure.3.2. Pour toute valeur prise dans la plage de résonance, on étudie les propriétés des attracteurs. La Figure. 3.12 représente le diagramme de phase et l'évolution temporelle de la charge q du condensateur du modèle imparfait. Bien que le système soit birythmique, il existe une caractéristique particulière : l'orbite de fréquence Ω_1 est de grande amplitude tandis que l'orbite de fréquence Ω_3 est d'amplitude quasi-nulle. Une fois de plus, on constate que le désordre étouffe les oscillations de de fréquence Ω_3 .

Comme pour le modèle parfait, il est nécessaire d'étudier aussi le comportement du réseau en présence du bruit. La Figure 3.13 présente le diagramme de phase et l'évolution temporelle de la charge q en présence du bruit. Nous observons une fois de plus la déformation des attracteurs et aussi la réanimation des oscillations de fréquence Ω_3 . Ces attracteurs restent séparés mais sont très proches l'un de l'autre. Pendant une durée plus ou moins longue, le système peut aussi passer d'un attracteur à un autre (voir Figure 3.14). Nous remarquons que la transition n'est pas brusque comme dans le cas du modèle parfait. Cette situation rend la tâche difficile dans le processus de détermination de la séparatrice. Dans ce cas, la méthode "MFPT" n'est plus applicable. L'étude de la stabilité des attracteurs est donc compromise car il est difficile dans ces conditions de construire la barrière d'énergie.

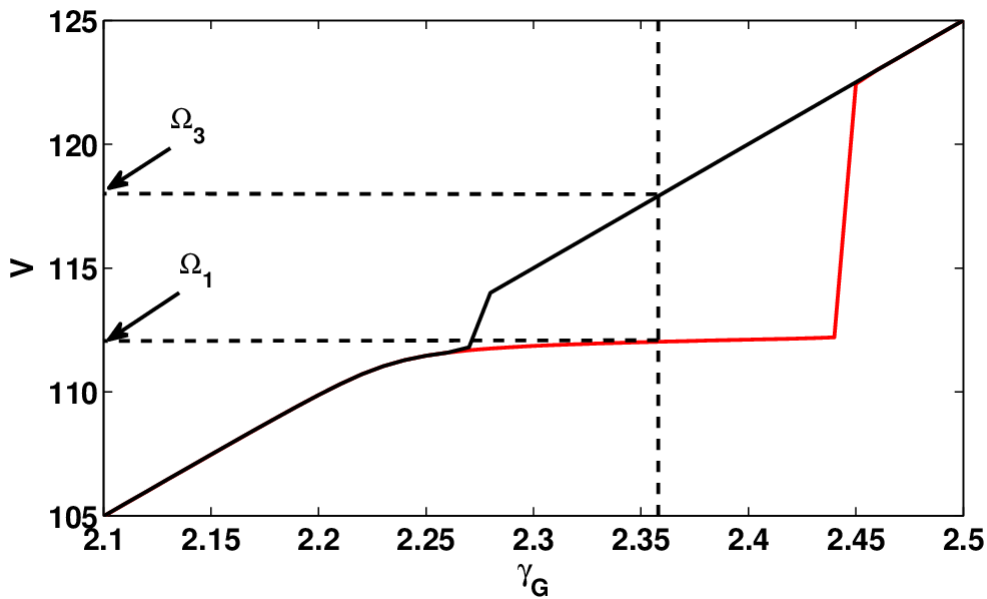


Figure 3.11 – Caractéristique courant-tension du modèle imparfait du réseau. Le trait fort rouge indique le balayage croissant du courant appliqué γ_G tandis que le trait fort noir le balayage décroissant. Les paramètres de simulation sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $N = 5$, $\sigma = 0.1\%$.

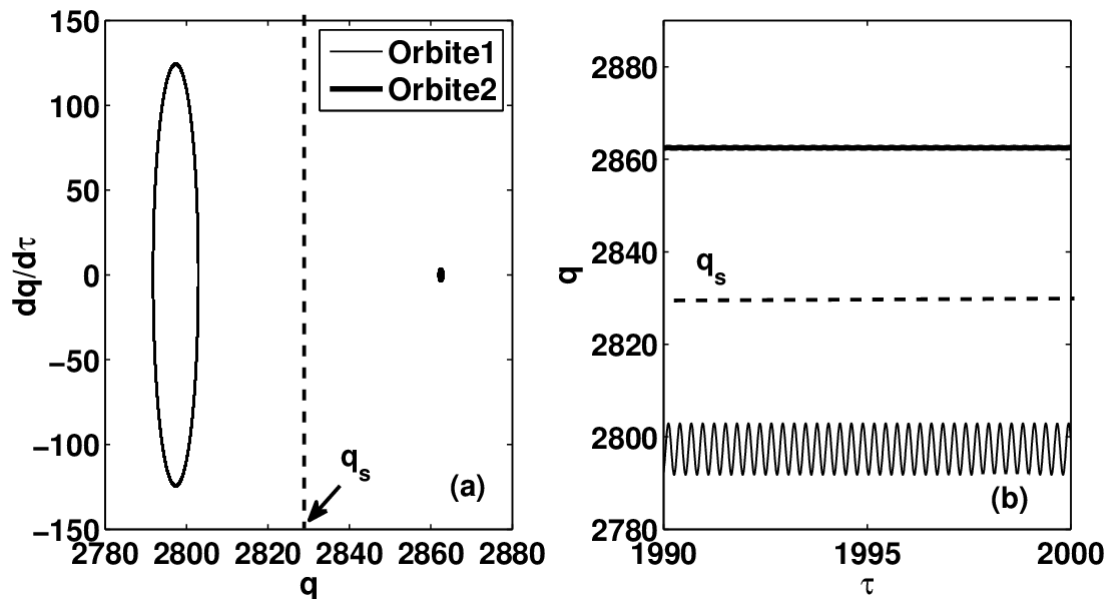


Figure 3.12 – (a) : Projection dans le plan $q-dq/d\tau$ du portrait de phase et (b) : évolution temporelle de la charge q du système désordonné. Ici q_s indique une position arbitraire. Les paramètres sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $N = 5$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_G = 2.30$, $\sigma = 0.1\%$.

En résumé, la présence du désordre dans le système n'est pas favorable si l'on s'en tient aux observations des effets qu'il induit dans le réseau. En absence du bruit, le désordre tend à étouffer les oscillations de fréquence Ω_3 . Le second effet qui est lié au fait que la transition entre les attracteurs n'est plus nette comme dans le cas du modèle parfait. Ce changement induit par le désordre entraîne la difficulté dans l'évaluation de la barrière d'énergie et l'étude globale de la

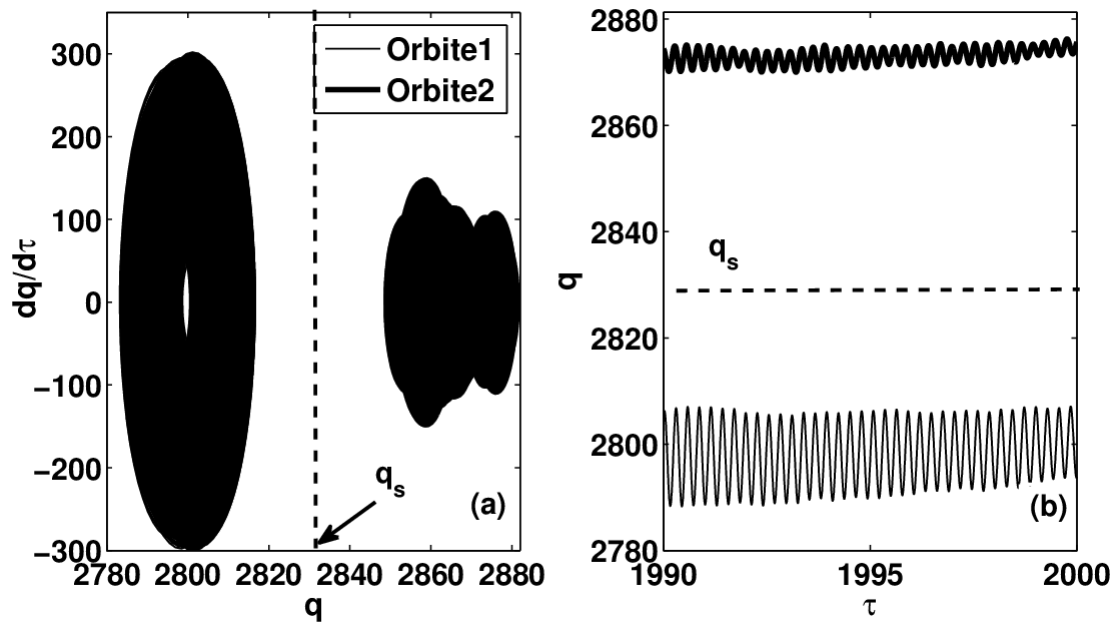


Figure 3.13 – (a) : Projection dans le plan $q - dq/d\tau$ du portrait de phase et (b) : Evolution temporelle de la dynamique stochastique, $D = 0.1$, du système désordonné. Ici q_s indique une position arbitraire de la séparatrice. Les paramètres de simulation sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $N = 5$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_G = 2.30$, $\sigma = 0.1\%$.

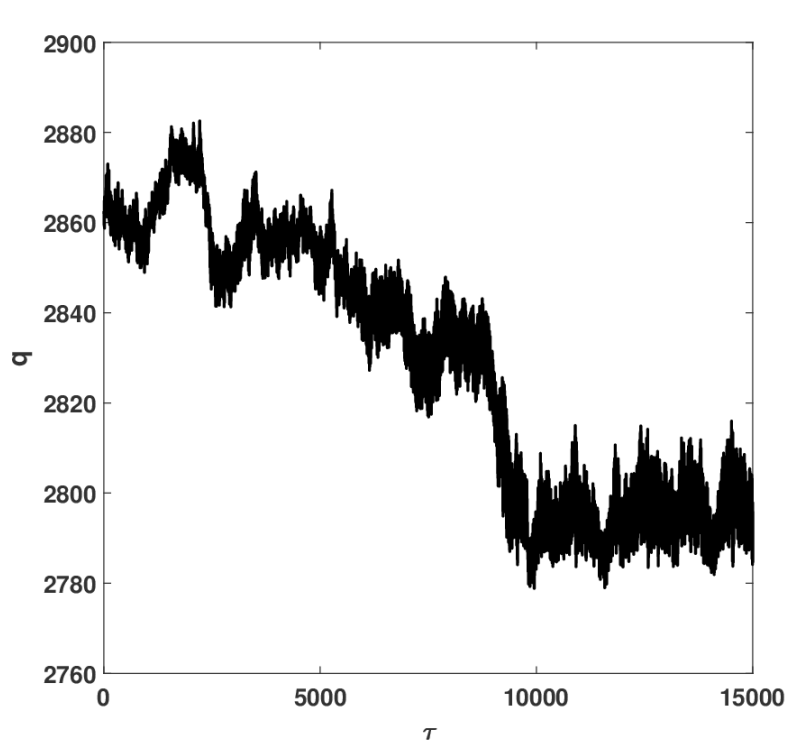


Figure 3.14 – Exemple de transition de l'attracteur de fréquence Ω_3 à l'attracteur synchronisé au circuit RLC de fréquence Ω_1 sous l'influence du bruit pour le système désordonné. Les paramètres sont : $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_G = 2.30$, $\sigma = 0.1\%$, $D = 0.2$, $N = 5$.

stabilité. Par ces observations, le modèle imparfait ne peut être un modèle sur lequel on peut s'appuyer pour la conception du détecteur. Il serait donc nécessaire de trouver les moyens de contourner cette difficulté.

3.3 Détecteur du signal sinusoïdal à Jonction Josephson

Au paragraphe précédent, nous avons établi les conditions de synchronisation du réseau à travers le résonateur RLC ainsi que l'étude de la stabilité globale tant du modèle parfait qu'imparfait. Dans cette partie, on s'apesantit sur les modèles de détection que l'on peut associer à chaque jonction du réseau. Tout d'abord, nous étudions le modèle de détection à courant appliqué variable dans le temps pour lequel l'intérêt est orienté vers l'évaluation de l'effet de la vitesse de balayage sur les outils de caractérisation du détecteur. Ensuite, nous étudions le modèle à bruit coloré exponentiellement corrélé pour lequel une attention particulière est accordée à l'évaluation de l'effet du temps de corrélation sur la distribution des temps de transition.

3.3.1 Effet de la vitesse de balayage v sur les propriétés du détecteur

Le détecteur est décrit par l'équation (2.18) pour lequel $\gamma = vt$ où v est la vitesse de balayage. Il est donc question dans cette partie d'examiner l'effet de v sur les outils de caractérisation du détecteur à savoir le CCDF et l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} . Les résultats obtenus dépendent des conditions sous lesquelles le signal est appliqué. C'est la raison pour laquelle nous adoptons la stratégie incohérente et la stratégie cohérente (stratégies décrites au deuxième chapitre).

3.3.1.1 Fonction complémentaire de la distribution cumulative (CCDF)

La Figure 3.15 montre une série de quatre diagrammes du CCDF pour plusieurs valeurs de la vitesse de balayage (a) : $v = 10^{-3}$; (b) : $v = 10^{-4}$; (c) : $v = 10^{-5}$; (d) : $v = 10^{-6}$. Ces diagrammes sont déterminées dans les cas suivants : absence du signal (trait fort noir); présence du signal stratégie incohérente (trait fort bleu) et stratégie cohérente (trait fort rouge). La compréhension de ces diagrammes est établie à deux niveaux. Tout d'abord, on constate en observant son aspect que le CCDF permet de révéler la présence du signal. Ainsi, l'apparition des oscillations sur le profil du diagramme est due par la présence du signal. Ensuite, les formes des diagrammes sont similaires tant pour la stratégie incohérente que cohérente; les diagrammes diffèrent seulement au niveau des pentes. En somme, l'on constate que le CCDF permet de révéler la présence du signal quelque soit la vitesse de balayage.

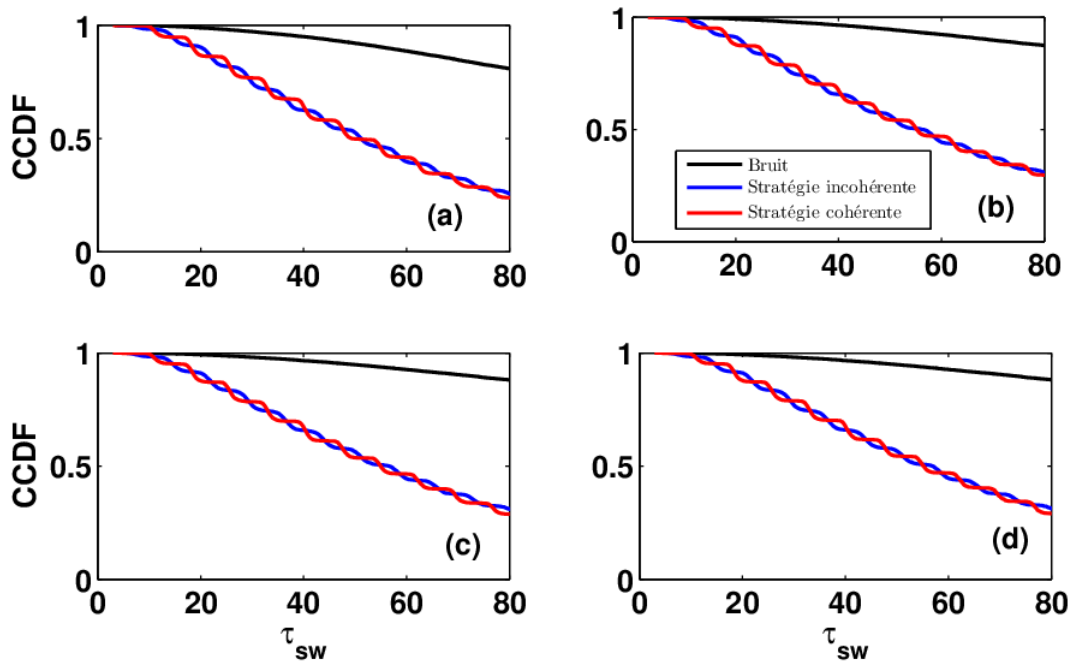


Figure 3.15 – Effet de la vitesse de balayage sur la Fonction complémentaire de distribution cumulative CCDF des temps de transition en absence du signal (trait fort noir) et en présence du signal ($\gamma_{ac} = 0.2$) pour la stratégie incohérente (trait fort bleu) et la stratégie cohérente (trait fort rouge). Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\omega = 0.86$, $\alpha = 0.2$, $\gamma_{ac} = 0.2$ avec (a) : $v = 10^{-3}$; (b) : $v = 10^{-4}$; (c) : $v = 10^{-5}$; (d) : $v = 10^{-6}$.

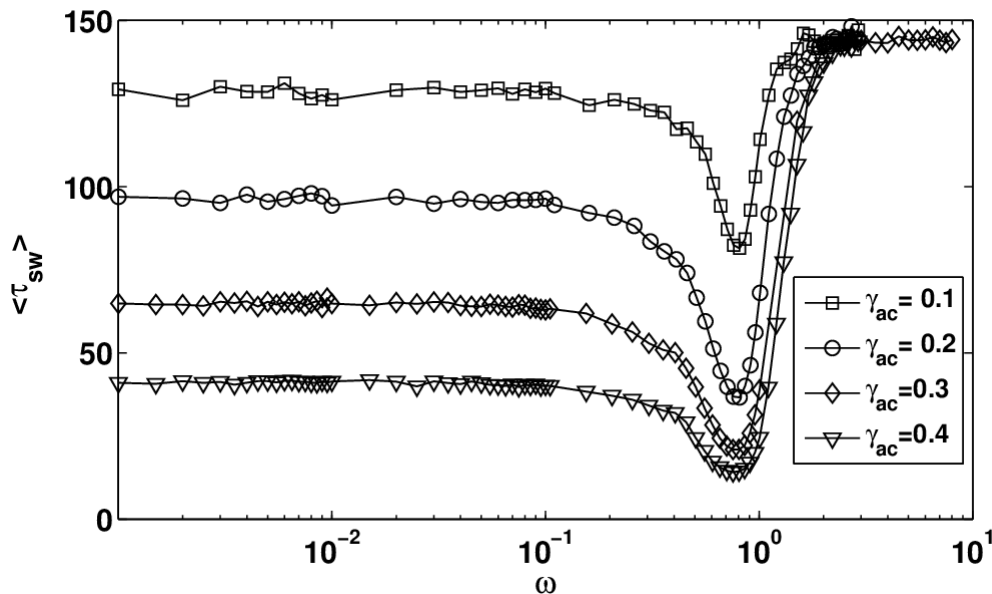


Figure 3.16 – Variation des valeurs moyennes des temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$ en fonction de la fréquence ω_{ac} du signal dans le cas de la stratégie incohérente, pour mettre en relief l'effet des différentes valeurs de l'amplitude du signal γ_{ac} . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes amplitudes sont : carré : $\gamma_{ac} = 0.1$, cercle : $\gamma_{ac} = 0.2$, losange : $\gamma_{ac} = 0.3$, triangle : $\gamma_{ac} = 0.4$. Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$.

3.3.1.2 Evaluation de la performance du détecteur

a) Cas de la stratégie incohérente

La Figure 3.16 indique la variation de la valeur moyenne de temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$ pour la stratégie incohérente en fonction de la fréquence ω du signal sinusoïdal pour plusieurs valeurs de l'amplitude γ_{ac} . C'est à travers ces courbes que l'on évalue la réponse des JJ en présence du signal. Les différentes courbes exhibent le phénomène d'activation résonante [37] à la fréquence $\omega_0 \approx 0.80$. Ce phénomène met en évidence le rôle constructif du bruit [167]. Il correspond au minimum du temps moyen de transition et indique clairement la condition à laquelle la détection du signal est possible, c'est-à-dire que la probabilité de détection est élevée [168, 169]. Il est à préciser que la fréquence à laquelle on observe la résonance ne dépend pas absolument de l'intensité du signal, comme espéré pour un oscillateur nonlinéaire. Toutefois, pour obtenir les meilleures conditions de détection d'un signal, son amplitude est mise à contribution. C'est ainsi qu'à la Figure.3.16, lorsque l'amplitude du signal augmente, le minimum de la moyenne de temps de transition diminue. Par contre, pour la fréquence du signal à partir de $\omega \approx 2.0$, le comportement asymptotique que l'on observe est approximativement indépendant de l'amplitude du signal.

La réponse de la JJ en terme des variations de la valeur moyenne des temps de transition, est cependant une indication qualitative de la détection du signal au moyen des JJ. Les performances des détecteurs peuvent être caractérisées de façon précise grâce au SNR (rapport Signal-Bruit) estimées à travers l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} [36]. Le d_{KC} évalue donc de façon quantitative la performance du détecteur. La Figure.3.17 indique la variation du d_{KC} en fonction de la fréquence du signal pour plusieurs valeurs de l'amplitude. A la fréquence de résonance, le d_{KC} augmente avec l'amplitude du signal. Par exemple, on lit $d_{kc} \approx 0.80$ pour $\gamma_{ac} = 0.1$ et qui passe ensuite à ≈ 1.93 pour $\gamma_{ac} = 0.4$. Dans la région des fréquences élevées, $\omega \gtrsim 2$, la valeur moyenne des temps de transition est approximativement indépendante de l'amplitude du signal et par conséquent, le d_{KC} qui disparaît nous renseigne que cette région n'est pas favorable à la détection.

Les Figures.3.18 et 3.19 permettent d'observer l'effet de la vitesse de balayage v sur la détection. La meilleure performance est observée pour $v = 10^{-3}$ ($d_{KC} = 1.76$ à la fréquence de la résonance). Nous espérons obtenir une meilleure performance pour $v = 10^{-2}$. Cependant pour cette vitesse, le diagramme de la Figure 3.18 signale les données manquantes. Cela est peut être dû au fait que la transition n'a lieu que pour des valeurs du courant appliqué qui approchent la valeur critique. Néanmoins, il est évident que la performance du détecteur soit améliorée pour les valeurs élevées de la vitesse de balayage. Sachant que le temps de l'observation est l'inverse de la vitesse de balayage, ce temps est raccourci pour des valeurs élevées de la vitesse de balayage.

En conclusion, ces résultats indiquent deux effets favorables de la vitesse de balayage : plus la vitesse de balayage est grande, plus la performance du détecteur s'améliore ; ensuite, une valeur élevée de la vitesse de balayage raccourcit le temps d'observation.

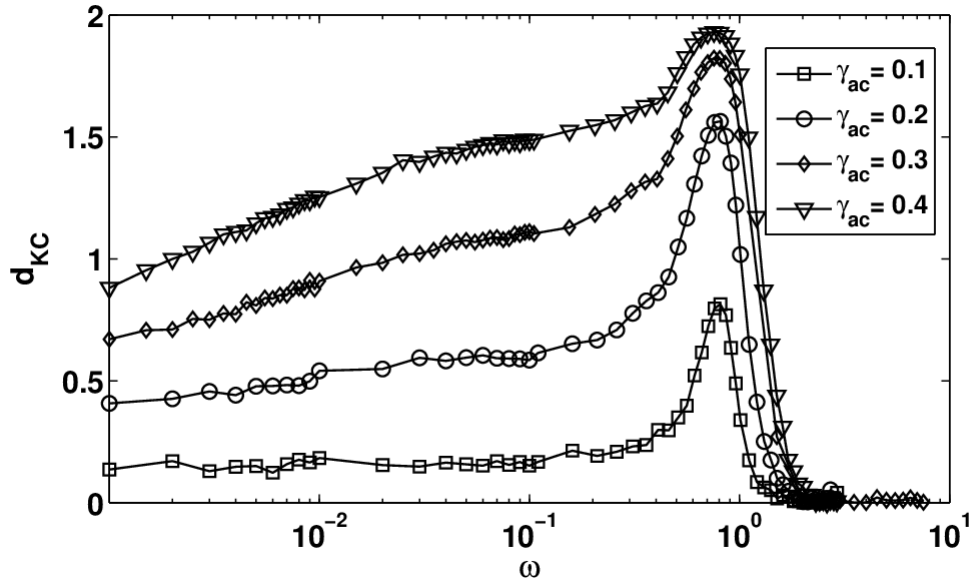


Figure 3.17 – Variation de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie incohérente. Ce diagramme met en relief l'effet des différentes valeurs de l'amplitude du signal γ_{ac} . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes amplitudes sont : carré : $\gamma_{ac} = 0.1$, cercle : $\gamma_{ac} = 0.2$, losange : $\gamma_{ac} = 0.3$, triangle bas : $\gamma_{ac} = 0.4$. Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$.

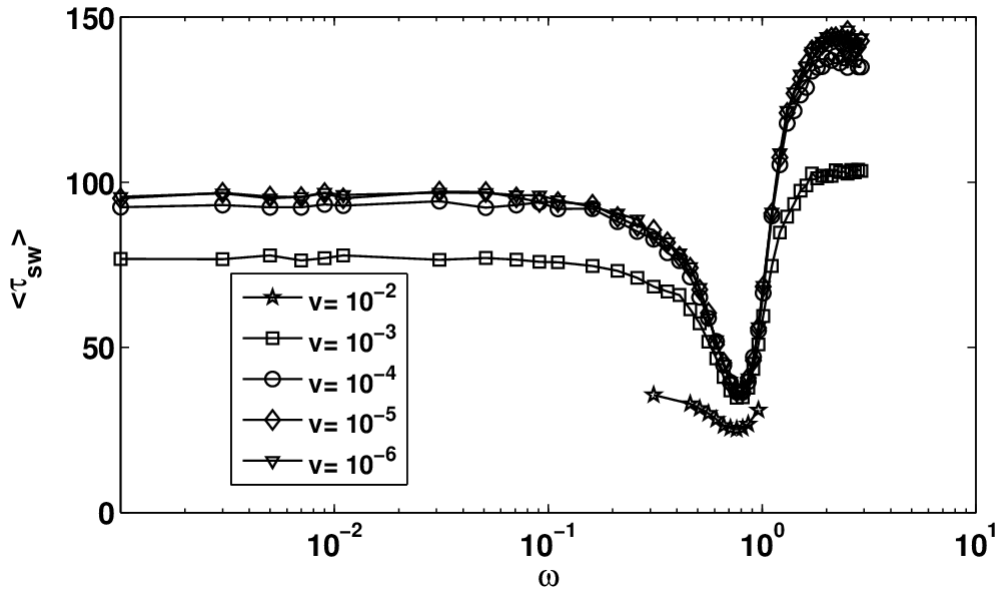


Figure 3.18 – Valeur moyenne des temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$ en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie incohérente. Ce diagramme met en relief l'effet de la vitesse de balayage v . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes vitesses sont : étoile : $v = 10^{-2}$, carré : $v = 10^{-3}$, cercle : 10^{-4} , losange : 10^{-5} , triangle bas : 10^{-6} . Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$.

b) Cas de la stratégie cohérente

En opposition à la stratégie incohérente pour laquelle la phase initiale du signal est aléatoire, chaque séquence commence avec la même phase initiale $\theta = 0$. La Figure.3.20 montre la variation

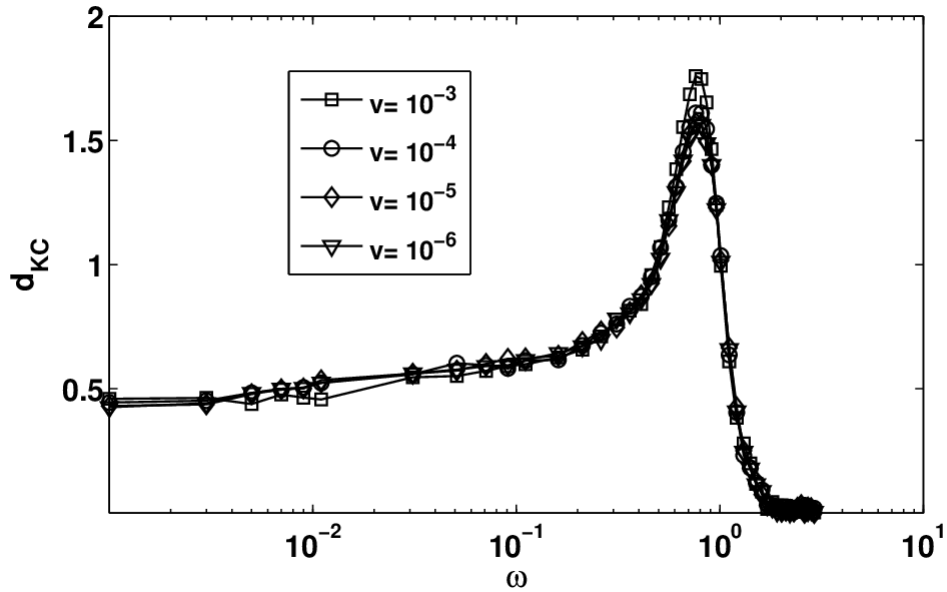


Figure 3.19 – Variation de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie incohérente. Ce diagramme met en relief l'effet de la vitesse de balayage v . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes vitesses sont : carré : $v = 10^{-3}$, cercle : 10^{-4} , losange : 10^{-5} , triangle bas : 10^{-6} . Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$.

Tableau 3.3 – Propriété de la région où on observe un minimum à basse fréquence en fonction de l'amplitude du signal pour la stratégie cohérente de détection.

Amplitude γ_{ac}	Fréquence ω	d_{KC}
0.1	0.009	0.586
0.2	0.012	1.122
0.3	0.032	1.468
0.4	0.052	1.722

des temps moyens de transition en fonction de la fréquence ω du signal pour plusieurs valeurs de l'amplitude du signal. L'analyse de ces courbes révèle la présence d'une région où l'on observe un minimum à des basses fréquences. Cette caractéristique n'apparaît pas dans le cas de la stratégie incohérente. La Figure.3.21 est celle de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} pour la stratégie cohérente. On observe aussi une région sur le profil du d_{KC} à basse fréquence pour laquelle on a un maximum relatif, caractéristique qui n'apparaît sur le diagramme de la stratégie incohérente. Les propriétés de cette région sont consignées dans le Tableau.3.3. L'analyse de ce tableau montre que le d_{KC} augmente avec l'amplitude du signal.

En comparaison à la stratégie incohérente, les résultats obtenus montrent seulement quelques différences marginales. On observe toujours le phénomène de l'activation résonante à la fréquence $\omega_0 \approx 0.80$ et le comportement asymptotique lorsque la fréquence du signal approche la valeur $\omega = 2$.

L'effet de la vitesse de balayage est rapporté dans les figures 3.22 et 3.23. Une fois de plus, la

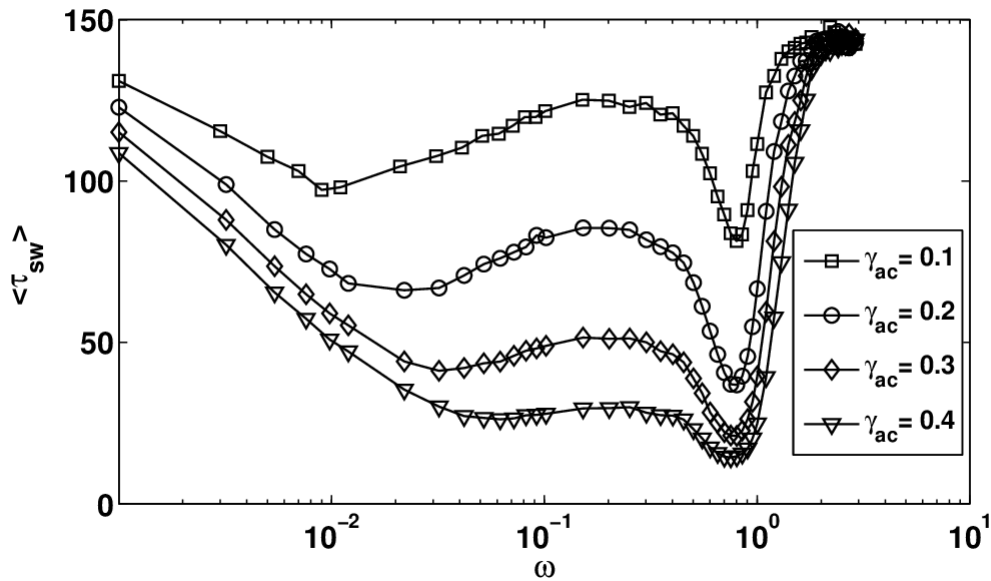


Figure 3.20 – Variation de la valeur moyenne des temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$ en fonction de la fréquence ω du signal pour la stratégie cohérente. Ce diagramme met en relief l'effet de l'amplitude du signal γ_{ac} . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes amplitudes sont : carré : $\gamma_{ac} = 0.1$, cercle : $\gamma_{ac} = 0.2$, losange : $\gamma_{ac} = 0.3$, triangle : $\gamma_{ac} = 0.4$. Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$.

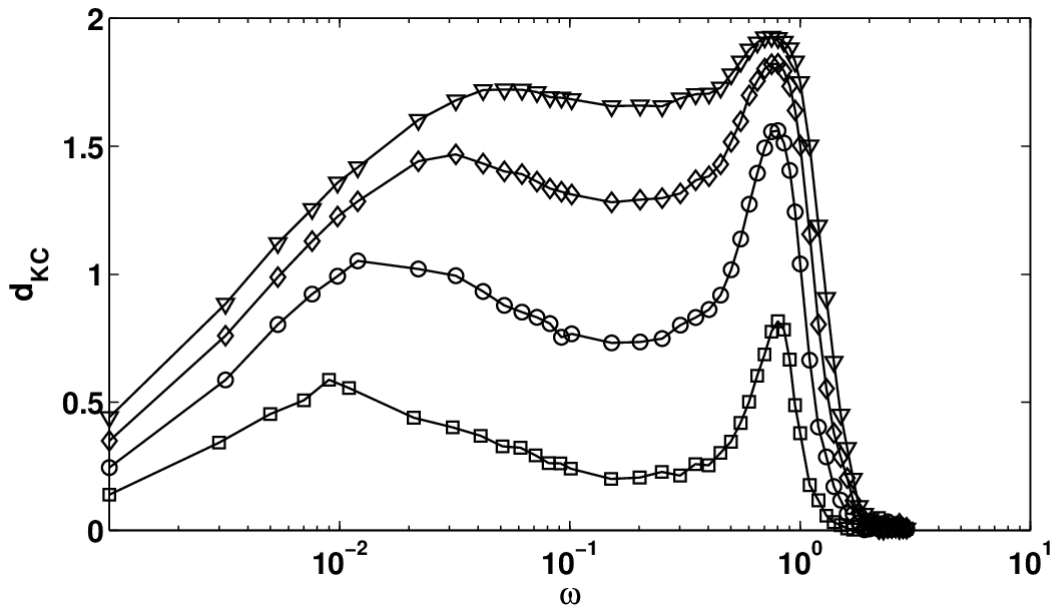


Figure 3.21 – Variation de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie cohérente. Ce diagramme met en relief l'effet de l'amplitude du signal γ_{ac} . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes amplitudes sont : carré : $\gamma_{ac} = 0.1$, cercle : $\gamma_{ac} = 0.2$, losange : $\gamma_{ac} = 0.3$, triangle : $\gamma_{ac} = 0.4$. Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$.

réponse est similaire à celle de la stratégie incohérente. On observe aussi les données manquantes pour le cas $v = 10^{-2}$. Néanmoins, l'analyse des différentes courbes révèle une région intéressante (faible fréquence) où l'on observe un minimum pour chaque vitesse considérée. Les caractéristiques de cette région sont consignées dans le Tableau.3.4. L'analyse de ce tableau confirme que le d_{KC}

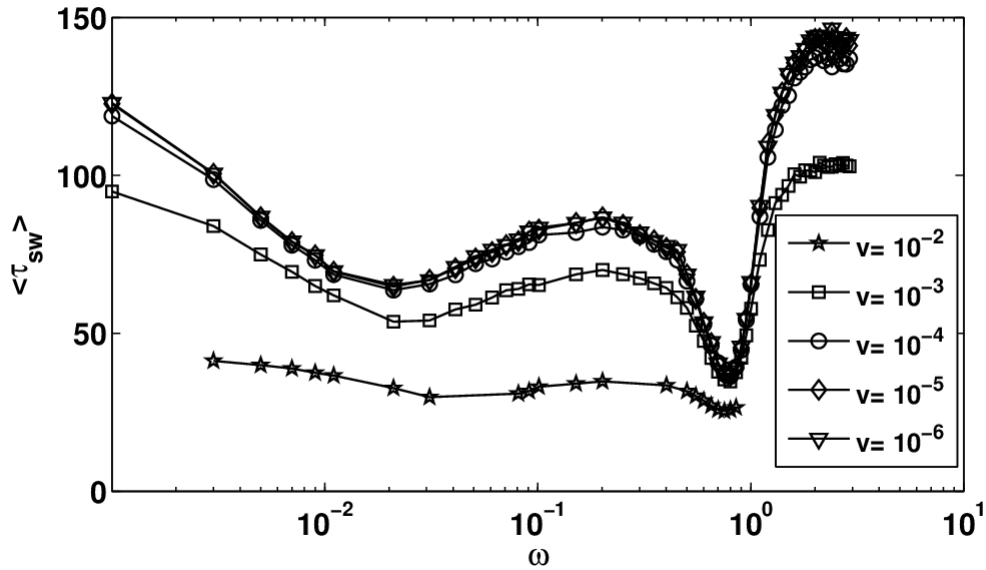


Figure 3.22 – Variation de la valeur moyenne des temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$ en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie cohérente, pour mettre en relief l'effet de la vitesse de balayage v . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes vitesses sont : étoile : $v = 10^{-2}$, carré : $v = 10^{-3}$, cercle : 10^{-4} , losange : 10^{-5} , triangle : 10^{-6} . Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$.

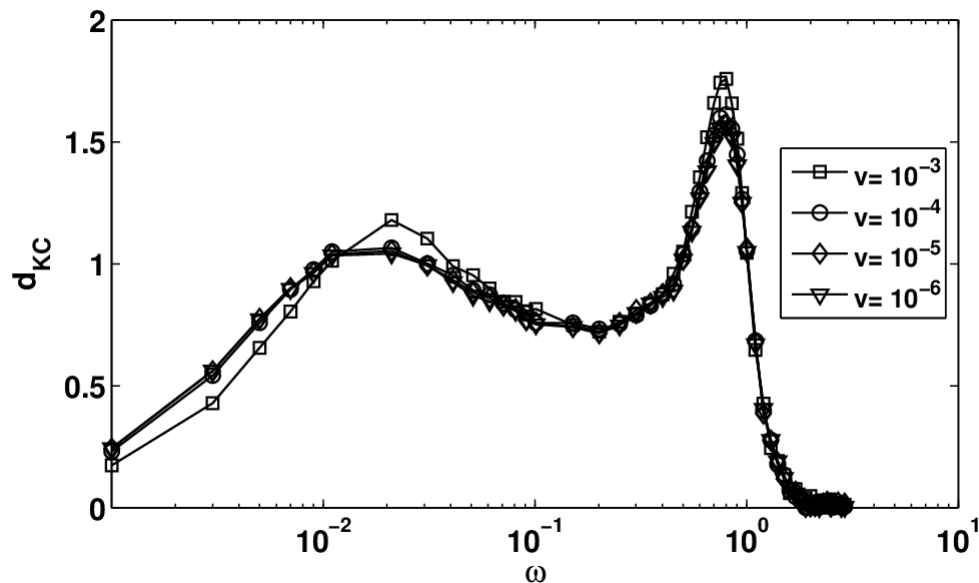


Figure 3.23 – Variation de l'indice de Kumar-Carroll d_{KC} en fonction de la fréquence ω du signal dans le cas de la stratégie cohérente, pour mettre en relief l'effet de la vitesse de balayage v . Les symboles utilisés pour indiquer les différentes vitesses sont : étoile : carré : $v = 10^{-3}$, cercle : 10^{-4} , losange : 10^{-5} , triangle : 10^{-6} . Les paramètres de simulation sont : $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$.

s'améliore pour les valeurs élevées de la vitesse de balayage et par conséquent la considération des vitesses élevées est favorable à la détection du signal dans le cas de la stratégie cohérente.

Tableau 3.4 – Propriété de la région où on observe le minimum en fonction de la vitesse de balayage pour la stratégie cohérente de détection.

Vitesse de balayage v	Fréquence ω	moyenne de temps de transition $\langle \tau_{sw} \rangle$	d_{KC}
10^{-3}	0.021	53.65	1.180
10^{-4}	0.021	63.63	1.065
10^{-5}	0.021	64.78	1.042
10^{-6}	0.021	65.27	1.042

3.3.2 Effet du temps de corrélation τ_c sur la distribution des temps de transition

Dans cette partie il est question d'évaluer l'empreinte de la corrélation sur la distribution des différents temps d'évasion. Nous avons choisi de le faire à l'aide de la fonction densité de probabilité (PDF). L'échantillon des temps de transition est obtenu à partir de la résolution numérique de l'équation (2.40) et la construction de la distribution à l'aide de la méthode d'estimation par noyau ou "Kernel density estimation" (KDE) [131].

3.3.2.1 Fonction de la Densité de Probabilité (PDF)

La fonction densité de probabilité (PDF) tout comme le CCDF est un outil que nous utilisons pour révéler la présence du signal sinusoidal.

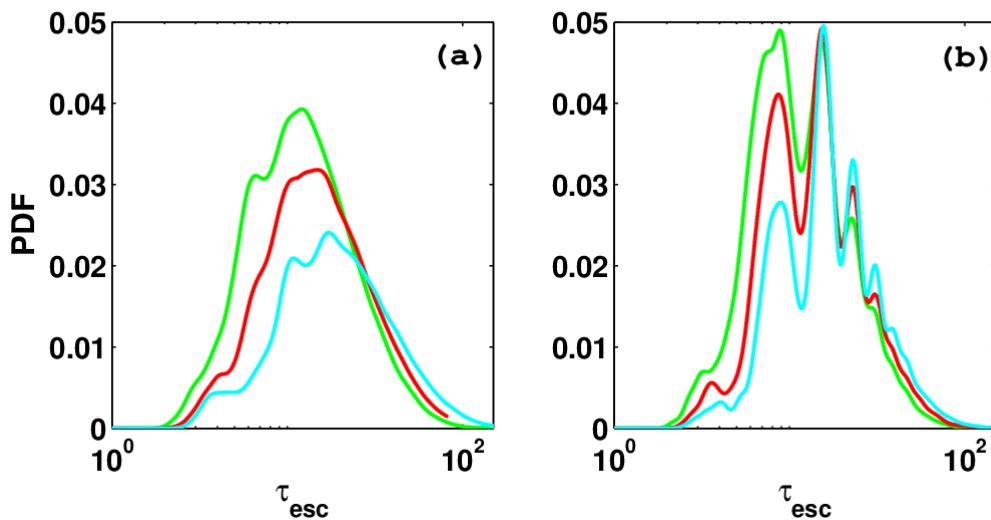


Figure 3.24 – Fonction densité de probabilité des différents temps de transition ou "escape time" "ET"; (a) : les transitions sont réalisées sous la seule action du bruit, (b) : les transitions sont réalisées sous l'action combinée du bruit et du signal. Les courbes sont obtenues pour plusieurs valeurs du temps de corrélation τ_c : le trait fort vert correspond à $\tau_c = 10^{-4}$, le trait fort rouge à $\tau_c = 0.5$ et le trait fort cyan à $\tau_c = 1$. Il est important de mentionner que l'échelle logarithmique est utilisée sur l'axe horizontal, ce qui déforme la distribution. Lorsque les valeurs des ET sont grandes l'aire recouverte par la distribution semble petite. Donc le PDF ainsi représenté est parfaitement normalisé.

La Figure 3.24 est le diagramme de la fonction densité de probabilité (PDF). Sur la Figure 3.24 (a) est mise en exègue l'effet du temps de corrélation ($\tau_c = 10^4, 0.5, 1$) et à la Figure 3.24 (b) l'effet combinée du bruit et du signal sinusoïdal ($\gamma_{ac} = 0.1$). Comme espéré, il est clair que le signal sinusoïdal induit les oscillations sur le profil du diagramme du PDF [107, 163, 169]. Ce changement drastique du profil du PDF est un indicateur de la présence du signal sinusoïdal. Dans la suite nous allons nous atteler sur l'effet de la corrélation sur la distribution ainsi que les conséquences y afférentes.

3.3.2.2 Analyse de la signature du temps de corrélation τ_c sur la distribution des temps d'évasion ou "escape time"

Le paragraphe précédant a permis de confirmer la propriété selon laquelle les JJ sont un excellent candidat pour la détection du signal sinusoïdal. Néanmoins elles peuvent être utilisées pour caractériser les composants d'un bruit [164–166] (comme par exemple mesurer la corrélation dans un bruit). Ceci est possible à travers l'analyse de la signature du temps de corrélation.

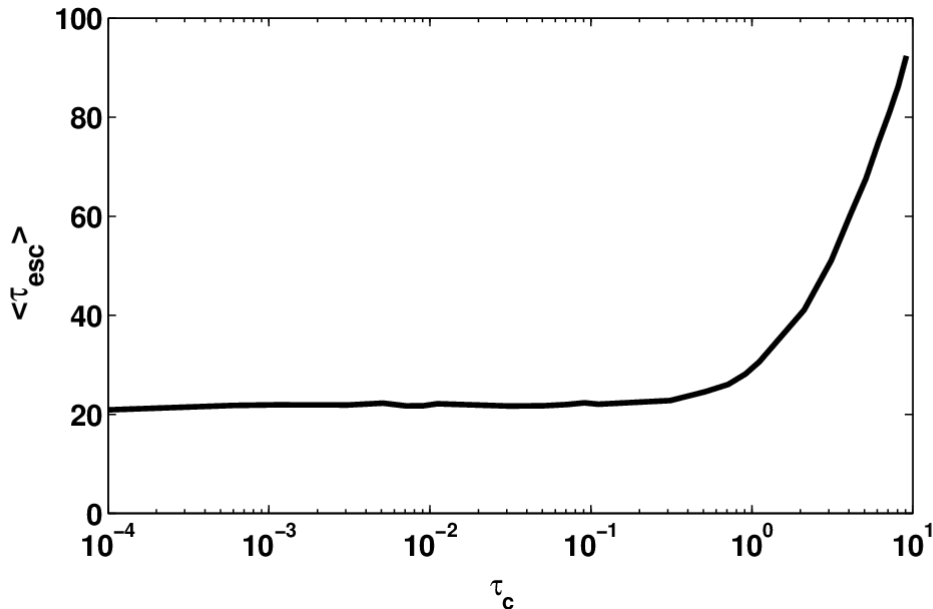


Figure 3.25 – Moyenne des temps de transition en fonction du temps de corrélation τ_c . Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\omega = 0.8$

La Figure 3.25 révèle une caractéristique importante du temps de corrélation. En effet cette figure montre la variation du temps moyen de transition en fonction du temps de corrélation τ_c . Il en ressort que lorsque τ_c est relativement faible ($\tau_c < 1$) on n'observe pas de variation significative du temps moyen de transition ; ce résultat est en accord avec ce que l'on observe avec le bruit blanc Gaussien confirmant la propriété selon laquelle lorsque le temps de corrélation est relativement faible le bruit coloré peut être assimilé au bruit blanc Gaussien [86]. Cependant lorsque $\tau_c > 1$, on observe une variation exponentielle de $\langle \tau_{esc} \rangle$. À partir de cette caractéristique on peut estimer

la valeur de la corrélation pour un bruit quelconque. Cette méthode s'avère être limitée car elle exige que la valeur de l'intensité D soit connue dans l'équation (2.21).

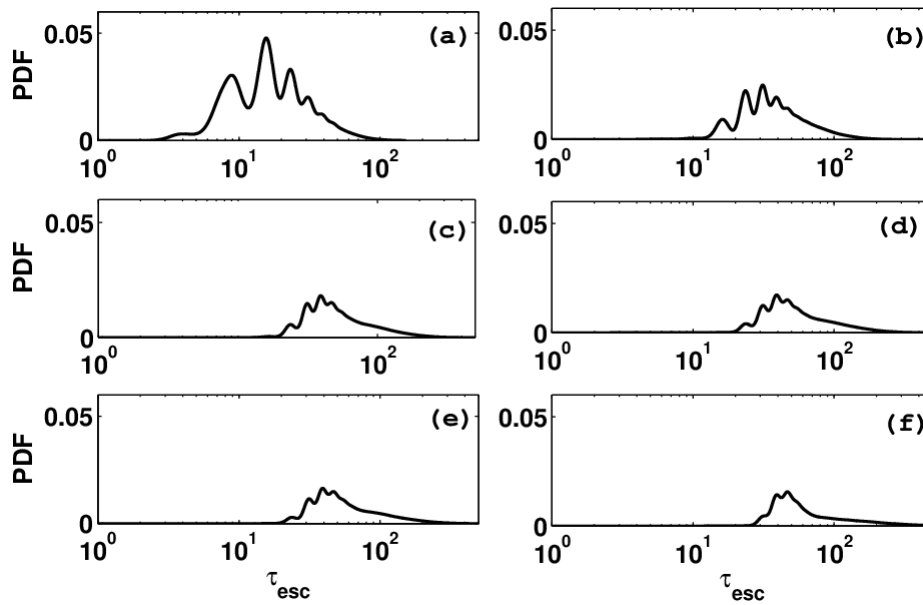


Figure 3.26 – Variation de la fonction densité de probabilité en fonction du temps moyen de transition pour plusieurs valeurs du temps de corrélation τ_c : (a) $\tau_c = 1$, (b) $\tau_c = \frac{\pi}{\omega}$ (résonance stochastique), (c) $\tau_c = \frac{2\pi}{\omega}$ (période du signal), (d) $\tau_c = 9$, (e) $\tau_c = 10$, (f) $\tau_c = 20$. Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\omega = 0.8$

Une autre empreinte du temps de corrélation est observée à la Figure.3.26. Il en ressort que le temps de corrélation altère l'aspect du PDF. On observe la suppression des oscillations lorsque la valeur de τ_c augmente et une probabilité considérable au niveau de la queue de la distribution.

La Figure.3.27 est obtenue en changeant la valeur de γ c'est-à-dire la taille de la barrière d'énergie ainsi que l'intensité du bruit dans le but de vérifier si le phénomène observé à la figure précédente est général. Il en ressort que le profil du PDF est altéré et que l'influence du temps de corrélation demeure qualitativement le même. Le choix des paramètres est très crucial pour explorer d'avantage l'effet de la corrélation. La Figure.3.28 démontre que le choix de la fréquence du signal ω peut influencer sur le profil du PDF. L'apparition des oscillations n'est pas automatiquement due à la simple présence du signal mais aussi liée à une certaine gamme de fréquence. Ceci montre que le PDF très sensible à la fréquence du signal.

Pour mieux apprécier cette sensibilité à la fréquence du signal, on a tracé le diagramme de la Figure.3.29. Cette figure représente la variation du temps moyen de transition en fonction de la fréquence ω du signal pour plusieurs valeurs du temps de corrélation τ_c . De première vue, le diagramme reproduit le comportement attendu pour les faibles valeurs du temps de corrélation [37]. On observe le phénomène de l'activation résonante [41]. Selon la classification de la référence [167] est l'activation résonante stochastique. On remarque que la profondeur du creux correspondant au minimum de temps de transition augmente avec le temps de corrélation. Cette remarque définit une autre signature du temps de corrélation.

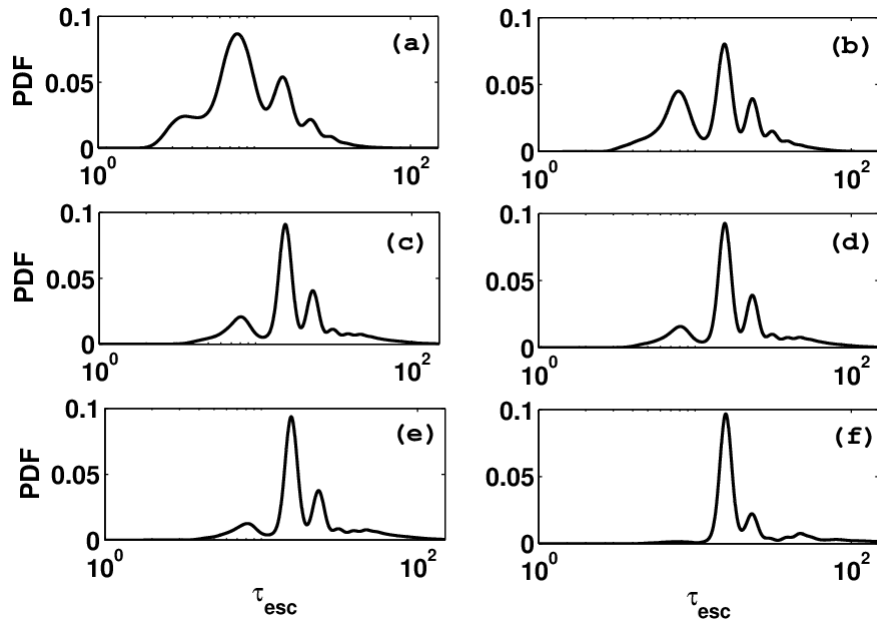


Figure 3.27 – Variation de la fonction densité de probabilité en fonction du temps moyen de transition pour plusieurs valeurs du temps de corrélation τ_c : (a) $\tau_c = 1$, (b) $\tau_c = \frac{\pi}{\omega}$ (résonance stochastique), (c) $\tau_c = \frac{2\pi}{\omega}$ (période du signal), (d) $\tau_c = 9$, (e) $\tau_c = 10$, (f) $\tau_c = 20$. Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.8$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.04$, $\omega = 0.8$

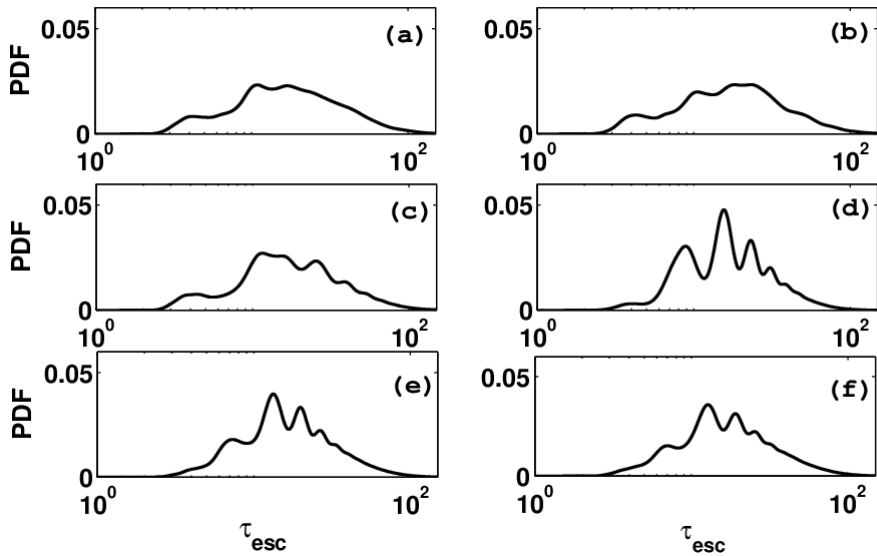


Figure 3.28 – Variation de la fonction densité de probabilité en fonction du temps moyen de transition pour plusieurs valeurs de la fréquence ω du signal : (a) $\omega = 0.1163$, (b) $\omega = 0.2326$, (c) $\omega = 0.4653$, (d) $\omega = 0.8000$, (e) $\omega = \omega_0$ (fréquence de résonance de l'élément JJ $\omega_0 = \sqrt[4]{1-\gamma^2}$), (f) $\omega = 0.9753$. Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\tau_{sc} = 1$

3.3.2.3 Application

Une autre dimension de ce travail est la possibilité de proposer une méthode pour estimer la valeur du temps de corrélation dans un bruit quelconque. Cela consiste à mesurer la probabilité

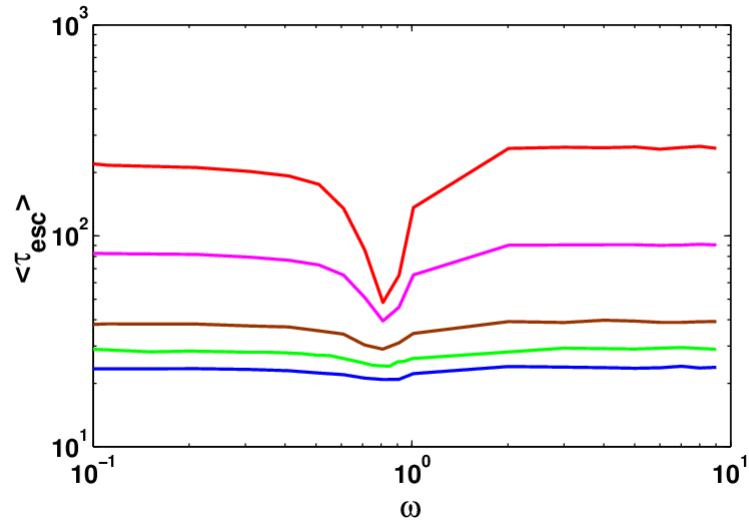


Figure 3.29 – Variation du temps moyen de transition en fonction de la fréquence du signal pour quelques valeurs du temps de corrélation τ_c : trait fort bleu $\tau_c = 10^{-4}$, trait fort vert $\tau_c = 0.5$, trait fort marron $\tau_c = 1$, trait fort rose $\tau_c = 2$, trait fort rouge $\tau_c = 3$. Les paramètres de simulation sont : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$

correspondante au pic d'oscillations le plus élevé (Figure 3.26) puis tracer le diagramme de ces probabilités en fonction du temps de corrélation comme à la Figure 3.30.

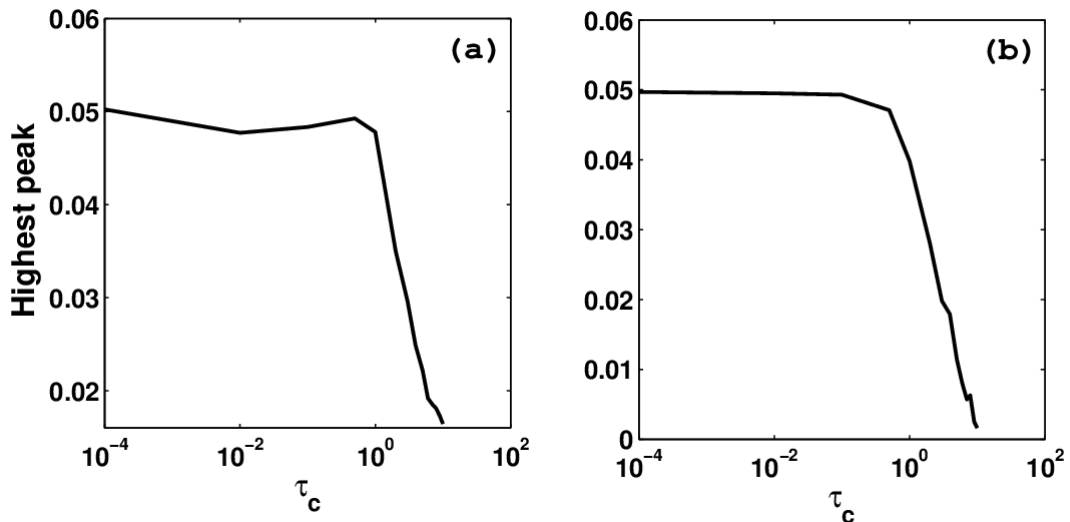


Figure 3.30 – Pic du PDF en fonction de τ_c pour deux valeurs de la fréquence du signal ω : (a) $\omega = 0.8$, (b) $\omega = 0.9306$

De façon pratique, pour un bruit quelconque, on trace son diagramme de PDF correspondant, puis on mesure la valeur du pic d'oscillation le plus élevé. En se servant du diagramme de la Figure 3.30 on peut estimer la valeur de la corrélation (on pourrait par exemple estimer si le temps de

correlation est inférieur ou supérieur à 1).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et commenté les résultats de notre travail. D'entrée de jeu, nous avons étudié la dynamique déterministe du réseau de JJ couplé à un résonateur RLC pour les modèles parfait et imparfait du réseau. L'analyse de la dynamique révèle un comportement birythmique caractérisé par l'existence de deux attracteurs dans le portrait de phase de la charge q (modèle parfait). L'un des attracteurs correspond à la fréquence de synchronisation et l'autre à la fréquence de désynchronisation. Nous avons aussi étudié l'effet du bruit sur la dynamique du réseau ainsi que la stabilité des attracteurs. Il en ressort d'abord qu'en présence bruit, on observe la déformation des attracteurs qui restent bien séparés. Entre les deux on a supposé l'existence d'une orbite instable appelée séparatrice. Pour déterminer cette séparatrice on a utilisé la méthode du "Mean First Passabe Time" (MFPT) ; condition nécessaire à l'évaluation de la barrière d'énergie. L'analyse de la barrière d'énergie révèle que le système est plus stable en début de la plage de résonance de la caractéristique courant-tension. Nous avons remarqué que la prise en compte du désordre détruit la birythmicité du réseau. Néanmoins la birythmicité subsiste pour les valeurs du paramètre de désordre de l'ordre 0.1%. Dans ce cas, le comportement dynamique du système déterministe est similaire à celui du modèle parfait. L'analyse du portrait de phase montre que le désordre tend à faire disparaître les oscillations de fréquence Ω_3 de désynchronisation. Combiné au bruit la transition de l'attracteur de fréquence Ω_3 à l'attracteur de fréquence Ω_1 n'est plus brusque comme dans le cas du modèle parfait . Ce qui rend difficile la détermination de la séparatrice par la méthode du "MFPT" et par conséquent celle de la barrière d'énergie aussi. Ainsi cette situation rend impossible l'étude la stabilité du modèle imparfait. En ce qui concerne la partie consacrée à la détection, nous avons développé deux modèles : le modèle à courant variable dans le temps à la vitesse de balayage v et le modèle à bruit coloré. Pour ce qui est du modèle à courant variable dans le temps, il a été question d'étudier l'effet de la vitesse de balayage sur les outils de caractérisation du détecteur : la variation de la valeur moyenne des temps de transition en fonction de la fréquence et la variation de l'indice *Kumar-Carrol* d_{KC} en fonction de la fréquence du signal. Le premier évalue l'aspect qualitatif de la détection tandis que le second l'aspect quantitatif. Ainsi, la performance du détecteur est évaluée grâce au d_{KC} . Les résultats sont obtenus pour les deux stratégies de détection (cohérente et incohérente). On constate que les conditions de détection s'améliore pour une vitesse de balayage élevée car on a accès rapidement aux données. La performance du détecteur n'est pas influencée pour les vitesses de balayage faibles mais celle-ci s'améliore pour les valeurs élevées de la vitesse de balayage (10^{-3} unités normalisées). La vitesse de balayage n'influence ni la fréquence du signal à la résonance, ni la moyenne des temps de transition. Par contre bien que la variation de l'amplitude du signal n'influence pas la fréquence du signal à la résonance il induit plutôt une variation significative la moyenne des temps de transition. Et quelle que soit la stratégie utilisée les résultats obtenus sont similaires et on note seulement quelques

différences marginales. En ce qui concerne l'effet du temps de corrélation, l'on a constaté que ce dernier change drastiquement l'aspect du PDF qui caractérise la distribution des ET. Les pics d'oscillations du PDF sont très sensibles au temps de corrélation. Plus ce dernier augmente, on assiste à la diminution de ces pics et à la suppression des oscillations. On a aussi noté que le PDF développe aussi une sensibilité par rapport à la fréquence du signal qui se manifeste par l'apparition ou non des oscillations sur le profil du PDF pour certaines valeurs de la fréquence. Enfin à partir de cette étude on a aussi proposé une méthode de détection et d'estimation de la corrélation dans un bruit quelconque.

Conclusion générale

Rappel de la problématique

Dans cette thèse il a été question de la conception d'un détecteur des signaux de type sinusoïdal à jonction Josephson (JJ) dont les éléments sont disposés en réseau. Parmi les réseaux existant dans la littérature, nous avons opté pour le réseau linéaire de jonctions. Comme tout système mis en réseau, on se heurte toujours au problème de synchronisation. Dans le cas échéant, nous avons trouvé judicieux d'établir les conditions de synchronisation du réseau de JJ à travers le résonateur RLC. Sachant que le bruit est un élément essentiel dans le processus de détection, un autre problème s'est posé : celui du comportement dynamique du réseau en présence du bruit. Il est donc question de l'étude de la stabilité du système ainsi constitué. Cependant il n'est plus à démontrer que les JJ sont d'excellents candidats pour la détection du signal car leur dynamique peut être altérée en présence du bruit ou tout autre signal et aussi à cause de certaines caractéristiques qui leur sont propres. Ceci conduit donc au problème choix du modèle de détection approprié aux jonctions individuelles afin de voir comment les constituer en réseau dont on connaît les conditions de synchronisation et de stabilité.

En récapitulatif nous avons étudié d'une part le dispositif constitué d'un réseau linéaire de JJ couplé au résonateur RLC et d'autre part le modèle de détection constitué d'une seule jonction pour les cas suivants : le cas du courant appliqué variant linéairement dans le temps et le cas du bruit coloré.

Explication de la démarche

Pour atteindre nos objectifs, nous avons commencé au premier chapitre par passer en revue le concept de JJ. Ce qui a permis de comprendre l'effet Josephson. Nous avons ressorti les propriétés des JJ, les types de JJ ainsi que les différents modèles électriques qui permettent de décrire la dynamique de l'élément de JJ. Nous avons aussi évoqué le concept de la théorie de la détection associée aux JJ.

Au deuxième chapitre, nous nous sommes focalisés sur la modélisation mathématique des différents systèmes étudiés. C'est ainsi que nous avons établi les équations différentielles décrivant la dynamique stochastique du réseau linéaire des JJ. Nous avons défini le modèle parfait constitué des jonctions identiques et le modèle imparfait du réseau pour lequel les jonctions présentent des paramètres qui varient d'une jonction à une autre (le supercourant I_j et la résistance intrinsèque R_j). Nous avons établi l'équation différentielle dite de Langevin pour la description des modèles de détection (à courant variable dans le temps et à bruit coloré). Nous avons enfin présenté les

algorithmes de simulations numériques ainsi que les différents outils d'analyse statistique des données.

Le troisième chapitre est consacré aux différents résultats que nous avons obtenus dans ce travail de recherche. Tout d'abord, il a été nécessaire d'établir les conditions de synchronisation du réseau linéaire de JJ identiques à travers le résonateur *RLC*. Notre approche a été de tracer la caractéristique courant-tension du réseau. Ce qui a permis de trouver la plage de résonance qui est constitué d'une gamme de courant appliqué pour lequel les différents oscillateurs (JJ) du réseau ont la même fréquence que le résonateur : on parle de résonance ou de synchronisation de phase. Ainsi on peut dire que les JJ sont synchronisées lorsque le courant appliqué au dispositif leur permettent d'osciller à la fréquence du résonateur. L'analyse de la plage de résonance révèle que le réseau exhibe des propriétés birythmiques caractérisées par l'existence de deux fréquences d'oscillation pour un même courant appliqué pris dans la plage de résonance. Cette propriété se confirme lorsqu'on analyse le comportement de la charge du résonateur. Le portrait de phase montre deux attracteurs bien définis et séparés (modèle déterministe) et déformés (modèle stochastique). Nous précisons que les deux attracteurs sont d'amplitudes différentes : celui de plus grande amplitude correspond à la fréquence de synchronisation et celui de petite amplitude correspond à la fréquence de désynchronisation. Une remarque importante est de noter que plus on augmente le nombre de jonctions du réseau, l'amplitude des oscillations de la charge ne change pas. On observe plutôt le déplacement des fréquences des oscillations vers les valeurs de plus en plus grandes. On remarque aussi que plus le nombre de jonctions du réseau augmente la zone de résonance devient de plus en plus petite et à la limite même disparaît. Le premier effet du bruit est la déformation des orbites régulières du réseau dans le cadre de la dynamique déterministe. Ce qui engendre cependant le problème la stabilité des attracteurs. Pour étudier la stabilité, il a été nécessaire de déterminer la séparatrice qui marque la frontière entre les deux attracteurs. Nous avons donc utilisé une méthode approximative en supposant que la région de séparation est juste un plan identifié par une seule coordonnée (la charge du résonateur) ; il est donc possible de calculer le "MFPT" qui est la durée nécessaire pour atteindre et traverser la séparatrice comme une fonction de la charge seuil. Par analogie avec le cas d'une seule jonction, l'on a observé un changement brusque du comportement du "MFPT" lorsqu'on a franchi le seuil. Ce changement brusque de la pente est un indicateur de la séparatrice. Par cette approximation nous avons pu tracer la barrière d'énergie et l'analyse des résultats a révélé deux caractéristiques importantes. Premièrement, le comportement de la barrière d'énergie est similaire au cas d'une seule jonction ; elle est élevée en début de la plage de résonance et diminue au fur et à mesure que l'on balaie la plage de résonance. Deuxièmement la barrière d'énergie décroît avec le nombre de JJ. On peut donc conclure qu'un réseau ayant un nombre d'éléments élevé est moins stable que celui qui en a moins. Par ailleurs, l'étude du modèle imparfait a révélé que le désordre dans le réseau est un facteur désavantageux pour la synchronisation et même la stabilité du réseau. Nous avons remarqué que le paramètre du désordre détruit la birythmicité du réseau et quand même il est faible la subsistance de la birythmicité ne garantit pas une transparence dans l'étude de la stabilité du

réseau.

En ce qui concerne les propriétés de détection, nous avons considéré l'évaluation de l'effet de la vitesse de balayage v sur les outils d'analyse statistique d'une part et d'autre part l'effet du temps de corrélation. Dans le premier cas, nous avons utilisé deux stratégies de détection à savoir la stratégie cohérente et la stratégie incohérente. Les résultats obtenus pour ces deux stratégies sont similaires. On relève seulement quelques différences marginales. Nous précisons que la vitesse de balayage garantit l'obtention au moins d'une transition. Les conditions de détection restent constantes ou varient faiblement pour les petites valeurs de la vitesse de balayage. Ces conditions s'améliorent pour les valeurs élevées de la vitesse de balayage. La performance du détecteur est évaluée grâce à l'indice *Kumar-Carrol* (d_{KC}). Cette performance n'est pas influencée pour les faibles valeurs de la vitesse de balayage mais se trouve améliorer pour les valeurs élevées de la vitesse de balayage. La dynamique exhibe un comportement asymétrique : une performance relativement appréciable pour les faibles valeurs de la fréquence du signal et une faible sensibilité au dessus de la résonance (à la résonance la courbe de variation de la valeur moyenne du temps d'évasion passe par un minimum). Aussi le changement d'amplitude du signal influence peu la fréquence à la résonance, il induit plutôt une variation significative de la moyenne des temps de transition. Enfin la variation de la vitesse de balayage n'influence ni la fréquence de résonance, ni la moyenne des temps de transition à la résonance. On retient donc qu'il est bénéfique pour la détection du signal d'utiliser le modèle à courant variable, car on observe au moins une transition dans un intervalle de temps d'amplitude $1/v$ et que la performance du détecteur s'améliore lorsque la vitesse de balayage augmente.

Pour le cas du modèle à bruit coloré, il a été question d'évaluer l'effet de la corrélation sur la distribution des temps d'évasion. Il en ressort que le PDF est très sensible au temps de corrélation. Ce dernier diminue non seulement la hauteur de la densité de probabilité mais supprime aussi les oscillations lorsque qu'il devient important dans le bruit. Il en est de même de la variation de la valeur moyenne des temps de transition en fonction du temps de corrélation. Ce dernier varie faiblement pour les faibles valeurs du temps de corrélation et lorsque le temps de corrélation devient important on observe une croissance exponentielle. Ceci signifie que le temps corrélation augmente la stabilité de la jonction à l'état supraconducteur. A partir aussi du diagramme du PDF on a pu proposer une méthode permettant de détecter et d'estimer la valeur de corrélation dans un bruit quelconque.

Apport Scientifique

Ce travail de recherche est d'une portée scientifique considérable. Nous avons pu démontrer qu'il est possible de synchroniser un réseau de jonction à travers le résonateur RLC. Nous pouvons affirmer que le modèle étudié est un prototype de synchronisation. Le système ainsi synchronisé permet dont l'augmentation de la puissance rayonnée par le résonateur pour pallier à l'insuffisance de la puissance rayonnée constatée dans le cas d'une seule JJ. Nous avons aussi découvert que

lorsqu'un système a un nombre élevé de degré de liberté, on peut approximer la séparatrice entre les attracteurs à travers une seule coordonnée en utilisant la méthode du "MFPT". Enfin on a proposé un autre prototype de détection du signal sinusoïdal en utilisant les JJ à travers les modèles à courant variable dans le temps et à bruit coloré. A partir de ces résultats, on a pu définir une méthode permettant de détecter et d'estimer la valeur de corrélation dans un bruit quelconque.

Limites et perspectives

Dans cette thèse nous reconnaissons que certains points n'ont pas été bien abordés :

- Il est important de rappeler que concernant le réseau de jonctions nous avons limité à quelques jonctions seulement. Nous nous interrogeons sur la validité des méthodes que nous avons appliquées lorsque nous serons en présence de plusieurs jonctions.
- Nous avons aussi effectué les études pour une configuration particulière du résonateur (Le circuit *RLC*). Que peut il en être si l' on utilisait d'autres types de résonateurs.
- Nous n'avons pu étudier le modèle détection constitué d'un réseau de JJ connecté au résonateur *RLC*.

En guise de perspective, nous allons orienter les recherches futures par l'extension de l'étude à d'autres types de résonateurs. Ce qui permettra de connaître le rôle du résonateur dans la dynamique de la ligne de JJ. Nous devons aussi développer une méthode appropriée afin d'étudier la performance du détecteur formé d'un réseau de JJ couplé à un résonateur *RLC*.

Bibliographie

- [1] L. S. Tsimring, Noise in Biology, Rep. Prog. Phys. **77**, 026601 (2014).
- [2] B. Lindner, J. Garcia-Ojalvo, A. Neimand, L. Schimansky-Geiere, Effects of noise in excitable systems, Physics Reports **392**, 321-424 (2004).
- [3] A. Simon and A. Libchaber, Escape and synchronization of a brownian particle, Phys. Rev. Lett. **68**, 3375 (1992).
- [4] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, Stochastic resonance, Rev. Mod. Phys. **70**, 233-287, (1998).
- [5] A. S. Pikovski and J. Kurths, coherence resonance-driven excitable, Phys. Rev. Lett. **78**, 775 (1997).
- [6] B. Lindner and L. Schimansky-Geier, Analytical approach to the FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance, Phys. Rev. E **60**, 720-727 (1999).
- [7] K. Matsumoto and I. Tsuda, Noise induced order, J. Stat Phys. **31**, 87-106 (1983)
- [8] A. S. Pikovsky, Synchronization and stochastization of nonlinear oscillations by external noise in : Nonlinear and Turbulent processes in Physics, ed. by R. Z. Sagdeev (Hardwood Academic Publishers, Singapore, 1984), pp. 1601-1604.
- [9] P. Jung, Periodically driven stochastic system, Phys. Rep. **234**, 175-295 (1993).
- [10] J. M. Martinis, M. H. Devoret, and J. Clarke, Experimental tests for the quantum behavior of a macroscopic degree of freedom : the phase difference across a Josephson junction, Phys. Rev. B **35**, 4682 (1987).
- [11] E. V. Pankratova, A. V. Polovinkin, and B. Spagnolo, Suppression of noise in FitzHugh-Nagumo model driven by a strong periodic signal, Phys. Lett. A **344**, 43-50 (2005).
- [12] D. Valenti, G. Augello, and B. Spagnolo, Dynamics of FitzHugh-Nagumo system subjected to autocorrelated noise, Eur. Phys. J. B **65**, 443-451 (2008).
- [13] R. S. Newrock, C. J. Lobb, U. Geigenmuller, and M. Octavio, The two-dimensional Physics of Josephson junction arrays, Solid State Physics **54**, 263 (1999).
- [14] G. Filatrella, N. F. Pedersen, and K. Wiesenfeld, High-Q cavity-induced synchronization in oscillator arrays, Phys. Rev. E **61**, 2513 (2000).
- [15] R. Yamapi and G. Filatrella, Noise effects on a birhythmic Josephson junction coupled to a resonator, Phys. Rev. E **89**, 052905 (2014).
- [16] G. Filatrella, Josephson junctions as prototypes for synchronization of nonlinear oscillators in : New Developments in Josephson Junction Research, Sergei Sergeenkov, Transworld Research Network, pp. 83-105 (2010).

- [17] M. G. Castellano, R. Leoni, G. Torridi, F. Chiarello, C. Cosmelli, A. Costantini, G. Diombrini-Palazzi, P. Carelli, R. Cristiano, and L. Funzio, Switching dynamics of $Nb/AlO_x/Nb$ Josephson junctions : Measurements for an experiment of macroscopic quantum coherence, *J. Appl. Phys.* **80**, 2922 (1996).
- [18] L. Ozyuzer, A. E. Koshelev, C. Kurter, N. Gopalsami, Q. Li, M. Tachiki, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H. Yamaguchi, T. Tachiki, K. E. Gray, K. W. Kwok, and U. Wel, Emission of coherent THz radiation from supercondors, *Science* **318**, 1291-1293 (2007).
- [19] I. Goychuck and P. Hänggi, Nonstationary stochastic resonance viewed through the lens of information theory, *Eur. Phys. J. B* **69**, 29-35 (2009)
- [20] V. Galdi, V. Pierro, and I. M. Pinto, Evaluation of stochastic-resonance-based detectors of weak harmonic signals in additive white Gaussian noise, *Phys. Rev. E* **57**, 6470 (1998).
- [21] A. R. Bulsara, C. Seberino, L. Gammaitoni, M. F. Karlsson, B. Lundqvist, and J. C. W. Robinson, Signal detection via residence-time asymmetry in noisy bistable devices, *Phys. Rev. E* **67**, 016120 (2003).
- [22] S. Fauve and F. Heslot, Stochastic resonsnce in a bistable system, *Phys. Lett. A* **97**, 5-7 (1983).
- [23] J. C. Comte and S. Morfu, Stochastic resonance : another way to retrieve subthreshold digital data, *Phys. Lett. A* **309**, 39-43 (2003).
- [24] S. Morfu, J. M. Bilbault, and J. C. Comte, Digital information receiver based on stochastic resonance, *Int. J. Bifucation and chaos* **13**, 233-236 (2003).
- [25] M. H. Devoret, J. M. Martinis, and J. Clarke, Measurements of Macroscopic Quantum Tunnelling out of the Zero-voltage state of a Current Biased Josephson Junction, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1908-1911 (1985).
- [26] M. H. Devoret, D. Esteve, J. M. Martinis, A. Cleland, and J. Clarke, Resonant activation of Brownian particle out of a potential well : Microwave-enhanced escape from the zero-voltage state of a Josephson junction, *Phys. Rev. B* **36**, 58 (1987).
- [27] A. Barone, F. Lombardi, G. Rotoli, and T. Tafuri, Macroscopic quantum phenomena in Josephson structures, *J. Low Temp. Phys.* **36**, 876-883 (2010).
- [28] L. Longobardi, D. Massarotti, D. Stornaiuolo, L. Galleti, G. Rotoli, F. Lombardi and F. Tafuri, Direct Transition from Quantum Escape to Phase Diffusion Regime in YBaCuO Biepitaxial Josephson Junction, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 050601 (2012).
- [29] R. Leoni, F. Mattioli, M. G. Castellano, S. Cibella, P. Carelli, S. Pagano, D. Perez de Lara, M. Ejrnaes, M. P. Lisitskiy, E. Esposito, R. Cristiano, and C. Nappi, Fabrication and test of superconducting single photon detectors, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **559**, 564-566 (2006).

- [30] G. Oelsner, L. S. Revin, E. Il'ichev, A. L. Pankratov, H.-G. Meyer, L. Grönberg, J. Hassel, and L. S. Kuzmin, Underdamped Josephson junction as a switching current detector, *Appl. Phys. Lett.* **103**, 142605 (2013).
- [31] D. Alesini, D. Babusci, C. Barone, B. Buonomo, M. M. Beretta, L. Bianchini, G. Castellano, F. Chiarello, D. Di Gioacchino, P. Falferi, G. Felici, G. Filatrella, L. G. Foggetta, A. Gallo, C. Gatti, F. Giazotto, G. Lamanna, F. Ligabue, N. Ligato, C. Ligi, G. Maccarrone, B. Margesin, F. Mattioli, E. Monticone, L. Oberto, S. Pagano, F. Paolucci, M. Rajteri, A. Rettaroli, L. Rolandi, P. Spagnolo, A. Toncelli, G. Torriol, Status of the SIMP Project : Toward the single photon detection, *J. Low Temp. Phys.* **199**, 348-354 (2020)
- [32] Y. Yu and S. Han, Resonant escape over an oscillating barrier in underdamped Josephson junctions, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 127003 (2003).
- [33] J. Tobiska and Yu. V. Nazarov, Josephson junctions as threshold detector for full counting statistics, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 106801 (2004).
- [34] J. P. Pekola, T. E. Nieminen, M. Meschke, J. M. Kivioja, A. O. Niskanen, and J. J. Vartiainen, Shot-noise-driven escape in hysteretic Josephson junctions, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 197004 (2005).
- [35] B. Huard, H. Pothier, Norman O. Birge, D. Esteve, X. Wainta, and J. Ankerhold, Josephson junctions as detectors for non-Gaussian noise, *Ann. Phys. (Leipzig)* **519**, 736-750 (2007).
- [36] B. V. K. V. Kumar and C. W. Carroll, Performance of Wigner Distribution Function Based Detection Methods, *Optical Engineering* **23**, 732-737 (1984).
- [37] G. Filatrella and V. Pierro, Detection of noise-corrupted sinusoidal signals with Josephson junctions, *Phys. Rev. E* **82** 046712 (2010).
- [38] P. Adesso, G. Filatrella, and V. Pierro, Characterization of escape times of Josephson junctions for signal detection *Phys. Rev. E* **85** 016708 (2012).
- [39] P. Adesso, V. Pierro, and G. Filatrella, Interplay between detection strategies and stochastic resonance properties, *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **30**, 15-31 (2016).
- [40] M. Zgirski, M. Foltyn, A. Savin, and K. Norowski, *Phys. Rev. Appl.* **11**, 054070 (2019).
- [41] C. R. Doering, J. C. Gadoua, Resonant activation over a fluctuating barrier, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2318 (1992).
- [42] R. N. Mantegna, B. Spagnolo, Experimental investigation of resonant activation, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3025 (2000).
- [43] A. L. Pankratov, and M. Salerno, Resonant activation in overdamped system with noise subjected to strong periodic driving, *Phys. Lett. A* **273**, 162-166 (2000).
- [44] A. N. Malakhov, and A. L. Pankratov, Influence of thermal fluctuation on time characteristics of a single Josephson element with high damping exact solution, *Physica C* **269**, 46 (1996).

- [45] R.N. Mantegna, and B. Spagnolo, Noise Enhanced Stability in an unstable system, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 563 (1996).
- [46] A. Fiasconaro, D. Valenti, B. Spagnolo, Role of initial conditions on enhancement of the escape time in static and fluctuating potential, *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **325**, 136-143 (2003).
- [47] C. Guarcello et al., The role of non-gaussian sources in the transient dynamics of long Josephson junction, *Acta Phys. Polonica B* **44**, 997-1005 (2013).
- [48] B. D. Josephson, Possible new effects in superconductive tunnelling, *Phys. Letters* **1**, 251-253, (1962).
- [49] D. N. Langenberg, D. J. Scalapino, and B. N. Taylor, The Josephson effects, *Scientific American* **214**, 30-39, (1966).
- [50] P. W. Anderson, How Josephson discover its effect, *Physics Today*, 23-29, (1970).
- [51] H. K. Onnes, On the change of electric resistance of pure metals at very low temperature, *Comm. Leiden* **120b**, 1911.
- [52] M. Tinkham, Introduction to superconductivity, English, Mc Grow-Hill New York, (1975).
- [53] W. Buckel and R. Kleiner, Superconductivity : fundamentals and applications, Physics textbook, (Wiley 2008).
- [54] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Scfrieffer, Microscopic theory of superconductivity, *Phys. Rev* **10**, 162-164, (1957).
- [55] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Scfrieffer, Theory of superconductivity, *Phys. Rev* **10**, 1175-1204, (1957).
- [56] L. N. Cooper, Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas, *Phys. Rev.* **104**, 1189-1190 (1956).
- [57] R. Kleiner, R. Hott, T. Wolf, G. Zwicknagl, M. Belogolovskii, S. T. Ruggiero, S. G. Wimbush, F. Grilli, and F. Sirois, Fundamentals in Applied Superconductivity, (John Wiley Sons, Ltd, 2015), Chap1, pp 1-104.
- [58] I. Gaiver, Energy gap in superconductors measured by electron tunnelling, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 147-148, (1960).
- [59] J. G. Bednorz and K. A. Müller, Possible high Tc superconductivity in the balacuo system, *Zeitschrift für Physik B condensed matter* **64**, 189-193 (1986).
- [60] G. A. Ovsyannikov, I. V. Borisenko, K. I. Konstantinyan, A. D. Mashtakov and E. A. Stepantsov, Phase dependence, of the superconducting current in YBCO Josephson junction on a bicrystal substrate, *Tech. Phys. Lett.* **25**, 913-916, (1999).
- [61] A. Vettoliere, P. Silvestrini, and C. Granata, Superconducting quantum magnetic sensing, *Quantum Materials, Devices and applications*, 43-85, (2023).

- [62] J. Clarke, A superconducting galvanometer employing Josephson tunnelling, *Phil. Mag.* **13**, 115, (1966).
- [63] W. H. Parker, B. N. Taylor, D. N. Langenberg, Measurement of $2e/h$ using the ac-Josephson effect and its implication for quantum electrodynamics, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 287, (1967).
- [64] J. Clarke, The Josephson effect and e/h , *Ame. Jour. Phys.*, (1970).
- [65] C. C. Grims, P. L. Richards, and S. Shapiro, Far infrared response of point contact Josephson junction, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 431, (1966).
- [66] A. H. Dayem, and C. C. Grims, Microwave emission from superconducting point-contacts, *Appl. Phys. Lett.* **9**, 47-49, (1966).
- [67] P. W. Anderson, and J. M. Rowell, Probable observation of the Josephson superconducting tunneling effect, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 230, (1963).
- [68] S. Shapiro, Josephson current in superconducting tunnelling : the effect of microwaves and other observations, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 80-82, (1963).
- [69] B. D. Josephson, The discovery of tunnelling supercurrents, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 251, (1974).
- [70] F. Tafui, Fundamentals and frontiers of the Josephson effect, (Springer International Publishing, Jan 2019).
- [71] C. Guarcello, Noisy dynamics in long and short Josephson junction, PhD Thesis, (Università degli studi di Palermo, Palermo 2015).
- [72] R. L. Fagaly, Superconducting quantum interference device instruments and application, *Review of Scientific instruments* **77**, 101101, (2006).
- [73] W. Meissner and R. Ochsenfeld, Ein neuer Effekt beim Eintritt der Supraleitfähigkeit, *Die Naturwissenschaften*, Vol.2, n°44, Novembre1933, p. 787-788.
- [74] A. A. Abdumalikov Jr, V. V. Kurin, C. Helm, A. De Col, Y. Koval, and A. V. Ustinov, Nonlocal electrodynamics of long ultra-narrow Josephson junction : Experience and theory, *Phys. Rev. B* **74**, 13, (2004).
- [75] M. J. Renne and D. Polder, Some analytical results for the Resistively Shunted Josephson Junction, *Revue de Physique Appliquée T.9*, N°1 (1974).
- [76] W. C. Stewart, Current-Voltage characteristics of Josephson junction, *Appl. Phys. Lett.* **12**, 277-280 (1968).
- [77] D. E. McCumber, Effect of ac impedance on dc Voltage-Current characteristics of superconductor weak-link junction, *J. Appl. Phys.* **39**, 3113-3118 (1968).
- [78] J. A. Blackburn, M. Cirillo, N. Grønbech-Jensen, A survey of classical and quantum interpretation of experiments on Josephson junction at very low temperatures, *Physics Reports* **611**, 1-33, (2016).
- [79] W. Johnson, Nonlinear propagation on superconducting tunneling junctions, PhD thesis, (University of Wisconsin, Madison 1968).

- [80] A. Barone, and G. Paterno, Physics and applications Josephson effect, (John Wiley, New York, 1982).
- [81] J. B. Johnson, Thermal agitation of electricity in conductors, *Nature* **119**, 50-51 (1927).
- [82] H. Nyquist, Thermal agitation of electric charge in conductors, *Phys. Rev.* **32**, 110-113 (1928).
- [83] W. Schottky, Small shot effect and flicker effect, *Phys. Rev.* **28**, 74-103 (1926).
- [84] M. Mück, M. Korn, C. G. A. Mugford, J. B. Kycia, and J. Clarke, Measurement of $1/f$ noise in Josephson junction at zero voltage : implication for decoherence in superconducting quantum bitr, *Applied Physics Letters* **86** 012510 (2005).
- [85] A. Longtin, Effects of Noise on Nonlinear Dynamics in : A. Beuter, L. Glass, M. C. Mackey, M. S. Titcombe, *Nonlinear Dynamics in Physiology and Medecine, Interdisciplinary Applied Mathematics* **25**, (Springer, New York, NY 2003).
- [86] P. Hanggi and P. Jung, Colored Noise in Dynamical Systems, in *Advances in Chemical Physics* **89** , Wiley and Sons, pp. 239-326. 1995.
- [87] R. Weron, Lévy-stable distribution revisited : tail index > 2 does not exclude the lévy-stable regime, *Internatinal Journal of Modern Physics C* **12**, 209-223 (2001).
- [88] A. Janicki, A. Weron, *Simulation and Chaotic Behavior of α -Stable Stochastic Process*, Marcel Dekker, New York (1994).
- [89] A. K. Jain, K. K. Likharev, J. E. Lukens, and J. E. Sauvageau, Mutual Phase-locking in Josephson junction array, *Phys. Rep.* **109**, 309-426 (1984).
- [90] P. Barbara, A. B. Cawthorne, S. V. Shitov, and C. J. Lobb, Stimulated emission and amplification in Josephson junction arrays, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 163-1665 (1999).
- [91] S. P. Benz and C. J. Burroughs, Coherent emission from two-dimensional Josephson Junction arrays, *Appl. Phys. Lett.* **58**, 2162-2164 (1991).
- [92] D. R. Tilley, Superradiance in arrays of superconducting weak links, *Phys. Lett. A* **33**, 205-206 (1970).
- [93] M. B. García, *Nonlinear Dynamics of Two-Dimensional Josephson Junction Arrays*, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, May 1996.
- [94] T. P. Orlando and K. A. Delin, *Foundations of Applied Superconductivity*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1991.
- [95] S. Watanabe and S. H. Strogatz, Constants of motion for superconducting Josephson arrays, *Physica D* **74**, 197-253 (1994).
- [96] Y. Kuramoto, Self-entrainment of coupled nonlinear oscillators. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, ed. by H. Araki (Springer, New York), **39** :420 (1975).

- [97] K. Wiensfeld, P. Colet, and S. H. Strogatz, Frequency locking in Josephson arrays : Connection with the Kuramoto model, *Phys. Rev. E* **57**, 1563-1569 (1998).
- [98] S. Watanabe, S. H. Strogatz, H. S. J. van der Zant, and T. P. Orlando, Whirling mode and parametric instabilities in discrete Sine-Gordon equation : Experimental tests in Josephson rings, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 379- (1995).
- [99] H. S. J. van der Zant, T. P. Orlando, S. Watanabe, and S. H. Watanabe, Kink propagation highly discrete system : observation of phase locking to linear wave, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 174- (1995).
- [100] S. P. Yukon and N. C. H. Lin, Dynamics of triangular and tetrahedral Josephson junction oscillators arrays, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **5**, 2951- (1995).
- [101] P. A. A. Booi and J. P. Benz, Emission linewidth measurements of two dimensional array Josephson oscillator. *Appl. Phys. Lett.* **64**, 2163 (1994).
- [102] P. Hadley and M. R. Beasley, Phase locking of Josephson junction arrays, *Appl. Phys. Lett.* **52**, 1619-1621 (1988).
- [103] K. Wiensfeld, S. P. Benz, and P. A. A. Booi, Phase-locked oscillator optimization for arrays of Josephson junctions, *J. Appl. Phys.* **76**, 3835 (1994).
- [104] M. Octavio, C. B. Whan, and C. J. Lobb, Phase coherence and disorder in Josephson junction arrays, *Appl. Phys. Lett.* **60**, 766- (1992).
- [105] G. Filatrella, N. F. Pedersen, C. J. Lobb, and P. Barbara, Synchronization of underdamped Josephson junction arrays, *Eur. Phys. J. B* **34**, 3-8 (2003).
- [106] S. H. Strogatz, *SYNC : The emerging Science of spontaneous order*, Hyperion, New York (2003).
- [107] P. Adesso, G. Filatrella, and V. Pierro, Escape Time of Josephson junction for signal detection, in *Spontaneous symmetry breaking, self-trapping, and Josephson oscillations*, edited by B. A. Malomed (Springer Berlin Heidelberg, Berlin Heidelberg, 2013) pp 657-678 (2013).
- [108] P. Adesso, V. Pierro, and G. Filatrella, Escape Time Characterization of Pendular Fabry-Perot, *EPL* **101**, 20005, (2013).
- [109] J. P. Pekola, Josephson junction as a detector of Poissonian Charge Injection, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 206601 (2004).
- [110] G. Rotoli, T. Bauch, T. Lindstrom, D. Stornaiuolo, F. Tafuri, and F. Lombardi, Classical resonant activation of Josephson junction embedded in LC circuit, *Phys. Rev. B* **75**, 144501 (2007).
- [111] H. B. Chan, and C. Stambaugh, Activation barrier and crossover for noise-induced switching in micromechanical parametric oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 060601 (2007).
- [112] G. Filatrella, C. Barone, C. Guarcello, A. S. Piedjou Komnang, V. Pierro, A. Rettaroli, and S. Pagano, Analysis of thermal and quantum escape times of Josephson junction for signal

- detection, in 13th chaotic modelling and simulation international conference, edited by C. H. Skiadas and Y. Dimoticalis, Springer Proceedings in complexity (2021).
- [113] J. T. Anderson, A. M. Goldman, Thermal fluctuation and the Josephson supercurrent, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 128-131 (1969).
- [114] A. J. Berkley, H. Xu, R. C. Ramos, M. A. Gubrud, F. W. Strauch, P. R. Johnson, J. R. Anderson, A. J. Dragt, C. J. Lobb, and F. C. Wellstood, Entangle macroscopic quantum states in two superconducting qubits, *Science* **300**, 1548-1550 (2003).
- [115] C. W. Helstrom, *Elements of signal detection and estimation* (Printice-Hall, Inc, 1994).
- [116] P. Jaranowski, A. Królak, and B. F. Schutz, Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars : the signal and its detection, *Phys. Rev. D* **58**, 063001 (1998).
- [117] P. Adesso, V. Pierro, and G. Filatrella, Noise estimate of pendular Fabry-Perot through reflectivity change, in 2014 IEEE Metrology for aerospace (MetroAeroSpace) (2014).
- [118] G. Sun, N. Dong, G. Mao, J. Chen, W. Xu, Z. Ji, L. Kang, P. Wu, Y. Yu, and D. Xing, Thermal escape from a metastable state in periodically driven Josephson junctions, *Phys. Rev. E* **75**, 021107 (2007).
- [119] J. Shao, *Mathematical Statistics*, (Springer, New York 2003).
- [120] G. Filatrella et N. F. Pedersen, The mechanism of synchronization of Josephson arrays coupled to a cavity, *Physica C : Superconductivity*, vol 372-376 Part 1, 11-13 (2002).
- [121] S. K. Tolpygo, V. Bolkhovskiy, T. J. Weir, L. M. Johnson, M. A. Gouker, and W. D. Oliver, Fabrication Process and properties of fully-planarized deep-submicron $Nb/Al - AlO_x/Nb$ Josephson junction for VLSI circuits, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **25**, 1101312 (2015).
- [122] S. K. Tolpygo, V. Bolkhovskiy, S. Zarr, T. J. Weir, A. Wynn, A. L. Day, L.M. Johnson, and M. A. Gouker, Properties of unshunted and resistively shunted $AlO_x/Nb - Nb/Al$ Josephson junction with critical current densities from 0.1 to $1mA/\mu m^2$, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **27**, 1 (2017).
- [123] R. W. Henry, D. E. Prober and A. Davidson, Simple electronic analog of a Josephson junction, *Am. J. Phys.* **49**, 1035-1046 (1981).
- [124] P. Silvestrini, V. G. Palmieri, B. Ruggiero, and M. Russo, Observing of energy levels quantization in underdamped Josephson junctions above the classical-quantum regime crossover temperature, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3046 (1997).
- [125] J. A. Blackburn, M. Cirillo, and N. Grønbech-Jensen, Classical statistical model of escape events in swept-bias Josephson junctions, *Phys. Rev. B* **85**, 104501 (2012).
- [126] C. Cheng, M. Cirillo, G. Salina, and N. Grønbech-Jensen, Nonequilibrium transient phenomena in the washboard potential, *Phys. Rev. E* **98**, 012140 (2018).
- [127] E. Ben-Jacob and D.J Bergman, Thermal noise effects on the microwave-induced steps of a current-driven Josephson junction, *Phys. Rev. A* **29**, 2021 (1984) .

- [128] A. Wallraff, A. Lukashenko, C. Coqui, A. Kemp, T. Duty, and A. V. Ustinov, Switching current measurements of large area Josephson tunnel junctions *Rev. Sci. Instrum.* **74**, 3740-3748 (2003).
- [129] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag Berlin (2004).
- [130] H. Kramers, Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions, *Physica* **7**, 284-304 (1940).
- [131] B. W. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall/CRC (1998).
- [132] A. Charpentier, E. Flachaire, Log Transformation Kernel Density Estimation of incomes distribution, *L'activité économique* **91**, 141-159 (2015).
- [133] H. D. Nguyen, A. T. Jones, and G. J. McLachlan, Positive data Kernel Density Estimation via the LogKDE Package for R in : R. Islam et al., *Data Mining, AUSDM2018.* , Communications in computer and information science, vol 996, Springer, (2019)
- [134] L. Lapidus and J. H. Seinfeld, *Numerical solution of differential equations*, (Academic Press, New York, London 1971).
- [135] P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations of application of mathematics*, (Springer-Verlag, Berlin, volume 23, 1992).
- [136] D. E. Knuth, *The art of computer programming*, Addison-Wesley, Reading vol2, (1969).
- [137] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77 in : The Art of Scientific Computing*, Second edition, volume 1, (1986).
- [138] R. F. Fox, I. R. Gatland, R. Roy, and G. Vemuri, Fast, accurate algorithm for simulation of exponentially correlated colored noise, *Phys. Rev. A* **38** 5938 (1988).
- [139] E. Almaas and D. Stroud, Resonant-cavity-induced phase locking and voltage steps in a Josephson array, *Phys. Rev. B* **63**, 144522 (2001).
- [140] O. Decroly and A. Goldbeter, Birhythmicity, chaos and other patterns of temporal self-organization in a multiply regulated biochemical system, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **79**, 6917-6921 (1982).
- [141] M. Morita, K. Iwamoto, and M. Senō, Transition sequence and birhythmicity in a chemical oscillation model showing chaos, *Phys. Rev. A* **40**, 6592 (1989).
- [142] T. Haberichter, M. Warhl, and R. Heinrich, Birhythmicity, trirhythmicity and chaos in bursting calcium oscillations, *Biophys. Chem.* **90**, 17-30 (2001).
- [143] O. V. Sosnovtseva, D. Setsinsky, A. Fausboll, and E. Mosekilde, Transition between β and γ rhythms in neural systems, *Phys. Rev. E* **66**, 041901 (2002)
- [144] W. Abou-Jaoudé, M. Chaves, and J.-L. Gouzé, A theoretical exploration of birhythmicity in the p53-Mdm2 network, *PLoS ONE* **6**, e17075 (2011).

- [145] H. G. Enjieu Kadji, J. Chabi Orou, R. Yamapi, and P. Woafu, Nonlinear dynamics and strange attractors in the biological system, *Chaos, Solitons Fractals* **32**, 862 (2007)
- [146] A. Zakharova, T. Vadivasova, V. Anishchenko, A. Koseska, and J. Kurths, Stochastic bifurcation and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator, *Phys. Rev. E* **81**, 011106 (2010).
- [147] R. Yamapi, G. Filatrella, and M. A. Aziz-Alaoui, Global stability analysis of a self-sustained oscillator, *Chaos* **20**, 013114 (2010).
- [148] P. Ghosh, S. Sen, S. S. Riaz, and D. S. Ray, Controlling birhythmicity, in a self-sustained oscillator by time-delayed feedback, *Phys. Rev. E* **83**, 036205 (2011).
- [149] R. Yamapi, G. Filatrella, and M. A. Aziz-Alaoui, and H. A. Cerdeira, Effective Fokker-Planck equation for birhythmic modified van der Pol oscillator, *Chaos* **22**, 043114 (2012).
- [150] X. L. Yue, W. Xu, L. Wang, and B. Zhou, Transient and steady-state responses in a self-sustained oscillator with harmonic and bounded noise excitations, *Prob. Eng. Mech.* **30**, 70-77 (2012).
- [151] M. Stich, M. Ipsen, and A. S. Mikhailov, Self-organized stable pacemakers near the onset of birhythmicity, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4406 (2001)
- [152] V. Casagrande and A. S. Mikhailov, Birhythmicity, synchronization and turbulence in an oscillatory system with nonlocal inertial coupling, *Physica D* **205**, 154 (2005).
- [153] R. Graham and T. Tél, Nonequilibrium potential for coexisting attractors, *Phys. Rev. A* **33**, 1322 (1986).
- [154] F. Bouchet, K. Gawedski, and C. Nardini, Perturbative calculation of quasi-potential in a non-equilibrium diffusions : a meanfield example, *J. Stat. Phys.* **163**, 1157 (2016).
- [155] P. Hänggi, P. Talkner, and M. Borkovec, Reaction rate theory, fifty years after Kramer, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 251 (1990).
- [156] M. I. Dykman and M. A. Krivoglaz, Theory of fluctuational transitions between stable states of a nonlinear oscillation, *Zh. Eksp. Fiz.* **77**, 60 (1979) [*Sov. Phys. - JETP* **50**, 30 (1979)].
- [157] R. Graham and T. Tél, Weak-noise limit of Fokker-Planck models and nondifferentiable potentials for dissipative dynamical system, *Phys. Rev. A* **31**, 1109 (1985).
- [158] M. I. Dykman, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. D. Stein, and N. G. Stocks, Supernarrow spectral peaks and high frequency stochastic resonance in systems with coexisting periodic attractors, *Phys. Rev. E* **49**, 1198 (1994).
- [159] M. I. Dykman, B. Golding, L. I. McCann, V. N. Smelyanskiy, D. G. Luchinsky, R. Mannella, and P. V. E. McClintock, *Chaos* **11**, 587 (2001).
- [160] R. L. Kautz, Quasipotential and the stability of phase lock in nonhysteretic Josephson junctions, *J. Appl. Phys.* **76**, 5538-5544 (1994).

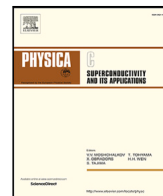
- [161] G. Filatrella, S. Girotti, and G. Rotoli, Thermal propagation of fluxons in two-dimensional Josephson arrays, *Phys. Rev. B* **75**, 054510 (2007).
- [162] A. L. Pankratov, M. Salerno, Adiabatic approximation and parametric stochastic resonance in a bistable system with periodically driven barrier, *Phys. Rev. E* **61**, 1206 (2000) .
- [163] A.A. Yablokov, V.M. Mylnikov, A.L. Pankratov, E.V. Pankratova, A.V. Gordeeva, Suppression of switching errors in weakly damped josephson junctions, *Chaos Solitons Fractals* **136**, 109817 (2020).
- [164] C. Guarcello, D. valenti, B. Spagnolo, V. Pierro, G. Filatrella, Josephson-based threshold detector for Lévy-distributed current fluctuation, *Phys. Rev. A* **11**, 044078 (2019).
- [165] C. Guarcello, D. Valenti, B. Spagnolo, G. Filatrella, Anomalous transport effects on switching currents of graphene-based josephson junctions, *Nanotechnology* **28** 134001 (2017).
- [166] C. Guarcello, G. Filatrella, B. Spagnolo, V. Pierro, D. Valenti, Voltage drop across josephson junctions for Lévy noise detection, *Phys. Rev. Res.* **2** 043332 (2020).
- [167] D.A. Ladeynov, D.G. Egorov, A.L. Pankratov, Stochastic versus dynamic resonant activation to enhance threshold detector sensitivity, *Chaos Solitons Fractals* **171**, 113506 (2023).
- [168] C. Guarcello et al., The role of non-gaussian sources in the transient dynamics of long Josephson junction, *Acta Phys. Polonica B* **44**, 997-1005 (2013).
- [169] A. L. Pankratov and M. Salerno, Adiabatic approximation and parametric stochastic resonance in a bistable system with periodically driven barrier, *Phys. Rev. E* **61**, 1206 (2000).

Liste des publications

- 1) **O. V. Pountounigni**, R. Yamapi, G. Filatrella and C. Tchawoua, *Noise and disorder effects in a series of birhythmic Josephson junctions coupled to a resonator*, Phys. Rev. E **99**, 032220 (2019).
- 2) **O. V. Pountounigni**, R. Yamapi, C. Tchawoua, V. Pierro, and G. Filatrella, *Detection of signals in presence of noise through Josephson junction switching currents*, Phys. Rev. E **101**, 052205 (2020).
- 3) **O. V. Pountounigni**, C. Barone, G. Carapella, V. Granata, C. Guarcello, C. Mauro, S. Pagano, V. Pierro, C. Tchawoua, R. Yamapi, G. Filatrella, *Measurement of Noise Correlation Through Superconducting Josephson junctions*, 2023 IEEE International Workshop on Metrology for Living Environment (MetroLivEnv) | 978-1-6654-5693-7/23/31.00©2023IEEE|DOI : 10.1109/MetroLivEnv56897.2023.10164055
- 4) **O. V. Pountounigni**, R. Yamapi, G. Filatrella and C. Tchawoua, *Detection of colored noise correlation time with Josephson junctions*, Physica C : Superconductivity and its applications **614** (2023) 1354379.

Participation aux conférences

1. First annual Symposium on physics of Complex System, on July 31, 2022 University of Douala. *Participant*.
2. AIMS seminar on millenium problems in Mathematics, on April 7, 2017 University of Douala, Cameroon. *Participant*
3. 3rd International Conference on, «High level physics and appropriate solutions to real life problems in developing countries», November 25-to 29 2013 Yaoundé- Cameroon. *Participant*.



Detection of colored noise correlation time with Josephson junctions

O.V. Pountougnigni^{a,*}, R. Yamapi^b, G. Filatrella^c, C. Tchawoua^a

^a Laboratory of Mechanics and Materials, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaoundé I, Yaoundé, Box 812, Cameroon

^b Fundamental Physics Laboratory, Physics of Complex System group, Department of Physics, Faculty of Science, University of Douala, Douala, Box 24 157, Cameroon

^c INFN - Napoli, Salerno group, Department of Science and Technology University of Sannio, Via Port'Arso 11, Benevento, I-82100, Italy

ARTICLE INFO

Keywords:

Josephson junction
Noise correlation
Detection
Escape time

ABSTRACT

It is shown that the effect of an exponentially correlated noisy source on the escape times of a Josephson junction depends upon the noise correlation time. A careful analysis reveals that two effects are preeminent: the increase of the stability (as measured by the average escape time from the metastable state) and the increase of the extreme events in the tails of the escape time distribution. The changes occur if the noise correlation exceeds the characteristic time of the Josephson junction. As the superconducting device is very fast, with a characteristic time easily below the nanosecond, the device is responsive even to very short noise correlation. We speculate that it is thus possible to estimate *in situ* noise correlation with a superconducting Josephson junction through the measurements of the escapes, without a high-frequency sampling of the noise. Moreover, as the superconducting circuit can be cooled as much as necessary, the device offers the further advantage to be intrinsically very quiet.

1. Introduction

Josephson Junctions (JJs) have been at the frontier of research in several fields during the past decades. Electronic applications are especially important [1,2], and innovative configurations are emerging [3,4]. The sensitivity of JJs has been exploited for single photon detectors [5–10] and JJs can be employed as basic elements for quantum computation [11,12] or traditional electronic through Rapid Single Flux Quantum [13]. Great attention has been paid to the possibility of JJs escaping from the superconducting state (S-state), characterized by zero voltage across the junctions, to the resistive state (R-state) in which there is a measurable voltage across the junctions.

In fact it is well known that the JJ's phase is a quantum variable which can be assimilated to a virtual particle moving along the washboard potential [14] whose profile shows metastable wells. The escape from the well can be due to the sole action of noise [15] or to the combined action of noise and some signal, for instance a sinusoidal drive [16,17] or a pulse drive [6,18]. In the noisy case, the phase remains trapped in one of the well for a certain time, called the lifetime or escape time. In quantum computation, the commuting time of JJs and the decoherence phenomenon [12] are related to the mean lifetime of the phase in the well. Therefore, the analysis of the distribution of the mean lifetime's collection can exhibit noise-induced

phenomenon such as Resonant Activation (RA) [19–21] and Noise-Enhanced-Stability (NES) or Noise Delayed Switching (NDS) [22–25]. It is also possible to exploit the statistical features of the escape times' distribution to reveal the presence of a signal [16,17], for instance through the histogram of the observed frequencies [17] or through the complementary cumulative distribution function [16].

The statistics of the escape time is influenced by the nature of the noise. Probably, the type of noise mostly used is Gaussian, either correlated or uncorrelated. In this paper, we aim to investigate the effect of correlation in the distribution of the escape time of underdamped JJ. Similar works have been already performed for overdamped JJ [26,27], to demonstrate that the presence of colored noise alters the behavior of noise-induced phenomenon. For instance, it is reported that varying the noise correlation time leads to a non-monotonic behavior of the mean escape time [26,27].

The present study is also oriented towards applications. In fact to detect the length of the correlation can be challenging for fast phenomena. If the correlation time of the noise is very short, the high-frequency components that can be detected are limited by the Nyquist frequency, that is half the sampling frequency. It is therefore necessary to sample the data with a frequency that is at least twice the correlation that one wants to detect, for insufficiently sampled data may not accurately capture the high-frequency fluctuations, leading

* Corresponding author.

E-mail addresses: oberlin.valex@yahoo.fr (O.V. Pountougnigni), ryamapi@yahoo.fr (R. Yamapi), filatrella@unisannio.it (G. Filatrella), ctchawa@yahoo.fr (C. Tchawoua).

<https://doi.org/10.1016/j.physc.2023.1354379>

Received 10 July 2023; Received in revised form 6 October 2023; Accepted 7 October 2023

0921-4534/© 2023 Elsevier B.V. All rights reserved.

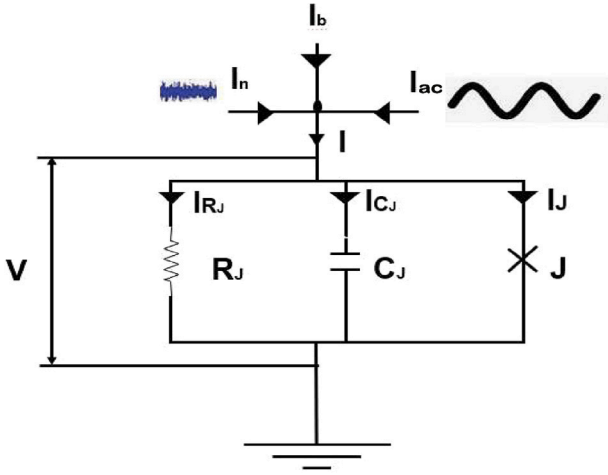


Fig. 1. Scheme of the electrical circuit model for the JJ that includes the intrinsic capacitance C_J and the resistance R_J , as well as the noise current whose correlation time one wants to estimate (I_n), the constant bias (I_b) and an additional oscillating term (I_{ac}).

to underestimated correlation times or an inaccurate estimate of the correlation properties at high frequencies. The approach we propose is instead indirect: to investigate the consequences of noise correlation, and from these consequences, without a direct sampling of the noise, one can estimate the duration of the correlation.

In summary, we find it is interesting to study the effect of the noise correlation on the distribution of the escape times of underdamped JJ to detect the features of the correlated noise namely the correlation time. The interest of a detailed analysis of the effects of noise in JJ is motivated by two reasons. On one hand, JJ being superconducting elements, can be cooled as much as necessary, thus taming noise down to very low levels, even to reveal single photons [28,29]. Moreover, JJs are very fast elements, that operate in the scale of GHz, and can therefore be useful to investigate features that are very fast, even in the nanoseconds scale.

The paper is organized as follows: in Section 2, we sketch the basic equation to model the system and we also define the detection strategies and the algorithm for numerical simulations. In Section 3, we demonstrate, through numerical simulations, that the length of the correlation of noise, associated to an ac-drive, affects the distribution of the escape times. Conclusions are collected in the last Section 4.

2. Model, detection strategies, and numerical simulation methods

This Section is instrumental in the search for a detection method that estimates the noise correlation. In Section 2.1 the electrical model for the active element, the JJ, is presented. The data analysis is proposed in Section 2.2, and the numerical method in Section 2.3.

2.1. Model of Josephson junctions dynamics

In threshold detection, the model probably used for JJ is the RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction) [30,31]. It consists of the geometrical capacitance C_J between the bulk superconductors that form the JJ, the resistance R_J to model the quasiparticle losses, and the Josephson supercurrent I_J due to the tunneling of Cooper pairs, see Fig. 1. The junction current and the voltage difference between the two superconductors depend on the phase difference between the wave functions of the two superconductors, as dictated by the fundamental equations of the Josephson effect [32,33]:

$$I_J = I_0 \sin \phi, \quad V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt}. \quad (1)$$

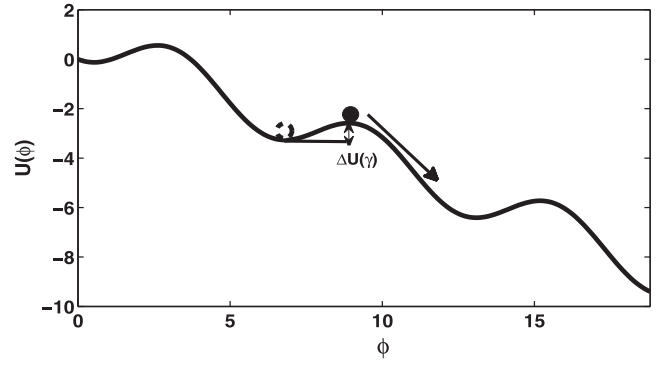


Fig. 2. The washboard potential for $\gamma = 0.5$. The energy barrier $\Delta U(\gamma)$ is given by Eq. (7).

Here, I_0 is the maximum supercurrent I_J that can flow in the JJ element, \hbar the Planck constant, and e the elementary charge. To derive the equation governing the dynamics of the detector, we denote with I_b the current of the generator, with I_{ac} an applied sinusoidal signal, and with I_n the noise current to be characterized. If I_{C_J} is the capacitor current, I_{R_J} the normal current, and $I_{ac} = I_{ac} \sin(\Omega t + \theta)$ the applied oscillating current, the *Kirchhoff* current law reads:

$$I_{C_J} + I_{R_J} + I_J = I_b + I_{ac} + I_n. \quad (2)$$

From the above current balance it follows the *Langevin* equation [34]

$$\frac{C_J \hbar}{2e} \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{\hbar}{R_J 2e} \frac{d\phi}{dt} + I_0 \sin \phi = I_b + I_{ac} \sin(\Omega t + \theta) + I_n. \quad (3)$$

Eq. (3) can be re-cast, if one considers the time $\tau = \omega_J t$ normalized with respect to the inverse of the Josephson plasma frequency $\omega_J = \sqrt{2eI_0/C_J \hbar}$, as:

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\phi}{d\tau} + \sin \phi = \gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega \tau + \theta) + \zeta(\tau), \quad (4)$$

where $\alpha = (R_J C_J \omega_J)^{-1}$ is the damping parameter, $\gamma = I_b/I_0$ the normalized bias current, $\gamma_{ac} = I_{ac}/I_0$ the normalized amplitude of the signal, $\omega = \Omega/\omega_J$ the frequency of the signal in normalized units. The noise term $\zeta(\tau) = I_n/I_0$ has the following statistical properties:

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\tau) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta(\tau), \zeta(\tau') \rangle &= \frac{D}{\tau_c} \exp\left(-\frac{|\tau - \tau'|}{\tau_c}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Here, $\zeta(\tau)$ is an *Orstein-Uhlenbeck* process [35,36] characterized by the correlation time τ_c , it is the colored noise source, exponentially correlated.

The Josephson phase is confined by the potential profile associated to Eq. (4), that is, a washboard profile given by [14,37]:

$$U(\phi) = E_J [1 - \cos \phi - \gamma \phi], \quad (6)$$

where $E_J = \hbar I_0 / 2e$. For $\gamma < 1$ the potential exhibits metastable wells (see Fig. 2) with energy barrier height given by:

$$\Delta U(\gamma) = 2E_J \left[\sqrt{1 - \gamma^2} - \gamma \cos^{-1}(\gamma) \right]. \quad (7)$$

The main idea of the detection process has been discussed at length by many authors [16,17,38]; we here just outline the reasoning. The dynamics of the Josephson phase, as already discussed, amounts to a virtual particle that for $\gamma < 1$ can be placed in one of the metastable minima of the well potential profile (see Fig. 2). Under the effect of noise, the particle can switch (or escape) from the minimum (where it lays in the superconductive state at $V = 0$) to the running resistive region with the appearance of a measurable voltage $V \neq 0$. Therefore, one measures the time necessary to the phase escaping from one state to another (escape time). Repeating the process for a desired number N ,

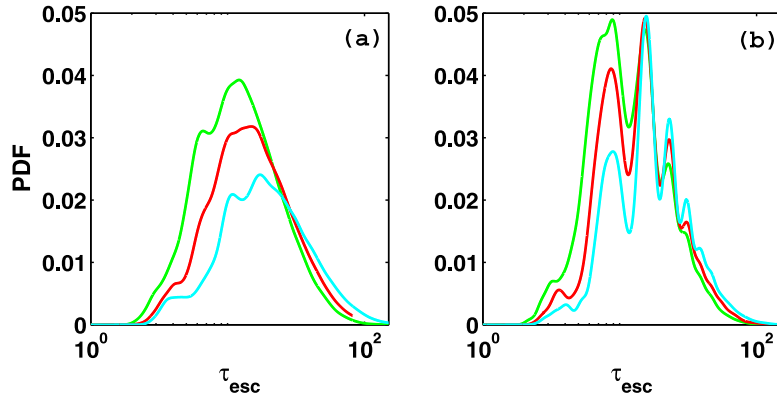


Fig. 3. Probability Density Function of the escape times (a): the JJ is only driven by noise ($\gamma_{ac} = 0$) and (b): the JJ system is driven by a combination of noise and sinusoidal excitation ($\gamma_{ac} = 0.1$). The simulations report different values of correlation times τ_c ; solid green line corresponds to $\tau_c = 10^{-4}$; solid red line to $\tau_c = 0.5$; solid cyan line $\tau_c = 1$. Parameters of simulations are : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $D = 0.07$, $\omega = 0.8$. It is worth mentioning that the nonlinear log scale of the horizontal axis distorts the distributions, and the area covered by the histogram is smaller when the escape times are larger. However, the PDF is correctly normalized.

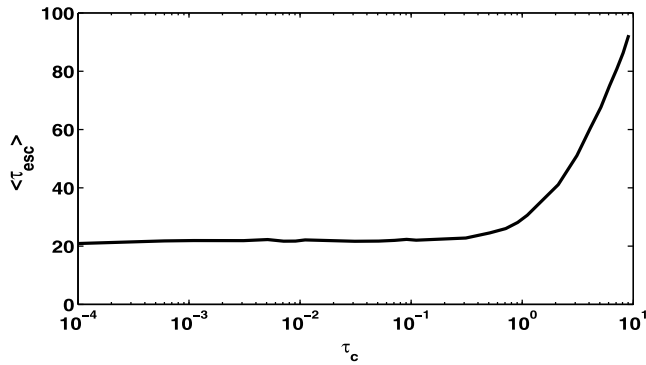


Fig. 4. Average of escape times as a function of correlation times τ_c . Parameters of simulation are: $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\omega = 0.8$.

one can collect an ensemble of switching time. Finally, the statistical properties of the escape times' distribution can be exploited to infer the properties of the noise. If the escapes occur by the sole action of uncorrelated white noise, the escape rate is given by the *Kramers* approximation [39]:

$$r_k \propto \Gamma \exp\left(-\frac{\Delta U}{D}\right), \quad (8)$$

where Γ is the *Kramers* prefactor. The above formula in Eq. (8) does not take into account the phase diffusion regime [40]. Deviations from the *Kramers*' statistics can be used to determine the presence of other components, as correlation in the noise, if the resulting distribution is sensitive to the parameter τ_c of Eq. (5). In the following, it is described the method employed to determine the form of the escape times' distribution, Section 2.2, and in Section 2.3 it is described the numerical method employed to simulate Eqs. (4), (5).

2.2. Detection strategies and data analysis

The detection theory aims to reveal the absence or the presence of a signal [38,41], or to characterize the noise component [15,42,43]. The latter is the case here, as one tries to determine the value of a characteristic parameter of the noise, namely the correlation length. However, a most important step is the preliminary acquisition of the escape times. The JJ is initially placed at rest in the potential minimum $\phi = \sin^{-1}\gamma$ and subject to noise and to the sinusoidal drive. The numerical procedure requires to wait for a maximum measurement time T_{max} to observe the passage from the S-state (zero voltage) to the R-state (finite voltage); the escape time is computed as the instant at which the Josephson particle (or phase) passes the maximum,

$\phi > \pi/2 - \sin^{-1}(\gamma)$. Then the corresponding time τ_i is recorded, the simulation is interrupted, and the JJ phase is reset with the same initial conditions. The sinusoidal signal is applied adding the quantity $\omega\tau_i$ to the previous initial phase, the so-called incoherent strategy [16], for the resulting drive phase is essentially random. The process is repeated N times to retrieve a collection of N escape times $\underline{\tau} = \{\tau_i\}_{i \in 1 \dots N}$ to be analyzed. One of the powerful tool used to analyze the sequence is the non-parametric technique named kernel density estimation [44]. The method is the generalization of the histogram by means of the so-called kernel function $K(\cdot)$, usually a symmetric probability density function. For random samples $\underline{\tau} = \{\tau_i\}_{i \in 1 \dots N}$ of size N , the kernel estimator is:

$$\hat{g}(\tau) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{\tau - \tau_i}{h}\right), \quad (9)$$

where h is the smooth parameter or the bandwidth, which depends on the sample size N . The optimum value of h is computed by means of the relation:

$$h = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \times \sigma \times (N)^{-\frac{1}{5}}, \quad (10)$$

where σ is the standard deviation of the sample.

In the present case, the escape times are positive, it is therefore necessary to use the log-transform kernel density estimation [45] which is given by the formula:

$$\hat{f}_{\log(\tau)} = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \tau^{-1} K\left(\frac{\log(\tau) - \log(\tau_i)}{h}\right). \quad (11)$$

Among various kernel function, we choose the standard Gaussian density:

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (12)$$

The data are collected with the numerical simulations described in the Next Section.

2.3. Algorithm for numerical simulations

To numerically integrate Eq. (4), it is rewritten as follows:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= u, \\ \frac{du}{d\tau} &= \gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) - au - \sin\phi + \zeta(\tau), \\ \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} &= -\frac{\zeta(\tau)}{\tau_c} + \frac{G_{wn}}{\tau_c}, \end{aligned} \quad (13)$$

where G_{wn} is Gaussian white noise with the following statistical properties:

$$\langle G_{wn}(\tau) \rangle = 0,$$

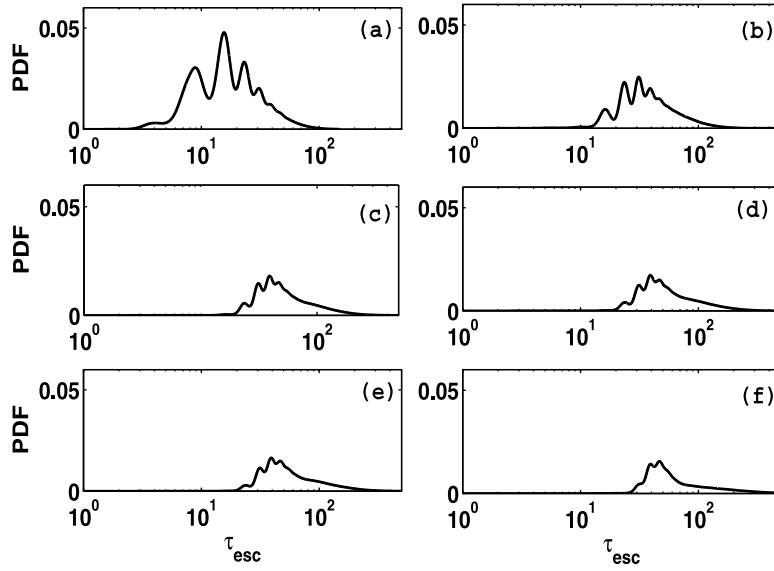


Fig. 5. Variation of the normalized Probability Density Function of the escape times for different correlation times τ_c : (a) $\tau_c = 1$, (b) $\tau_c = \frac{\pi}{\omega}$, (c) $\tau_c = \frac{2\pi}{\omega}$ (signal period), (d) $\tau_c = 9$, (e) $\tau_c = 10$, (f) $\tau_c = 20$. Parameters of simulations are : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\omega = 0.8$.

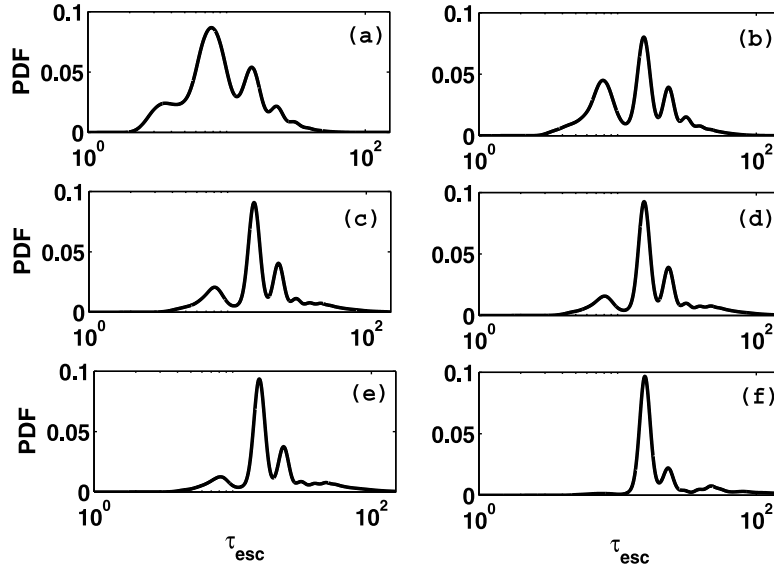


Fig. 6. Variation of the normalized Probability Density Function of the escape times for different applied correlation times τ_c : (a) $\tau_c = 1$, (b) $\tau_c = \frac{\pi}{\omega}$ (stochastic resonance), (c) $\tau_c = \frac{2\pi}{\omega}$ (signal period), (d) $\tau_c = 9$, (e) $\tau_c = 10$, (f) $\tau_c = 20$. Parameters of simulations are : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.8$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.04$, $\omega = 0.8$.

$$\langle G_{un}(\tau), G_{un}(\tau') \rangle = 2D\delta(\tau - \tau'). \quad (14)$$

Following Ref. [46], one deduces the Euler version scheme to numerically integrate Eqs. (13) through the steps:

1. Set the initial value of $\zeta(\tau)$ from two random numbers:

$$\begin{aligned} m &= \text{random number} \\ n &= \text{random number} \\ \zeta(0) &= \left[-\frac{2D}{\tau_c} \ln(m) \right]^{1/2} \cos(2\pi n). \end{aligned} \quad (15)$$

2. Set

$$E = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_c}\right). \quad (16)$$

3. For each step size Δt , the exponential correlated colored noise is given by:

$$\begin{aligned} m &= \text{random number} \\ n &= \text{random number} \\ \zeta_{l+\Delta t} &= E\zeta + \left[-\frac{2D}{\tau_c} (1 - E^2) \ln(m) \right]^{1/2} \cos(2\pi n). \end{aligned} \quad (17)$$

4. Thus the Euler scheme of Eqs. (14) reads:

$$\begin{aligned} \phi_{l+\Delta t} &= \phi + u\Delta t \\ u_{l+\Delta t} &= u + [\gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) - \alpha u - \sin\phi + \zeta] \Delta t \\ \zeta_{l+\Delta t} &= E\zeta + \left[-\frac{2D}{\tau_c} (1 - E^2) \ln(m) \right]^{1/2} \cos(2\pi n). \end{aligned} \quad (18)$$

With this approach one obtains the desired spectral density at the cost of increasing the dimension of the system, that is to integrate a third order system (18). However, the increase of the computational

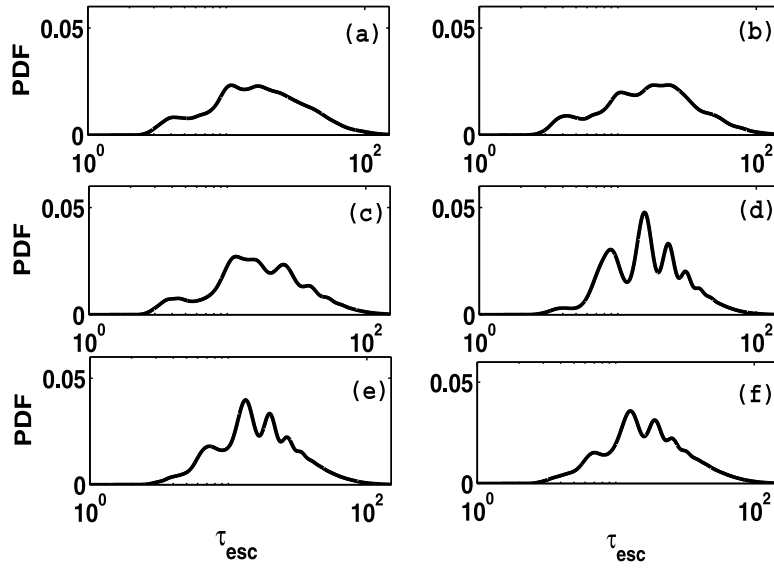


Fig. 7. Variation of the normalized Probability Density Function of the escape times for different applied frequency ω :(a) $\omega = 0.1163$, (b) $\omega = 0.2326$, (c) $\omega = 0.4653$, (d) $\omega = 0.8000$, (e) $\omega = \omega_0$ (the resonant frequency of the JJ element reads $\omega_0 = \sqrt[4]{1-\gamma^2}$), (f) $\omega = 0.9700$. Parameters of the simulations are: $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\tau_c = 1$.

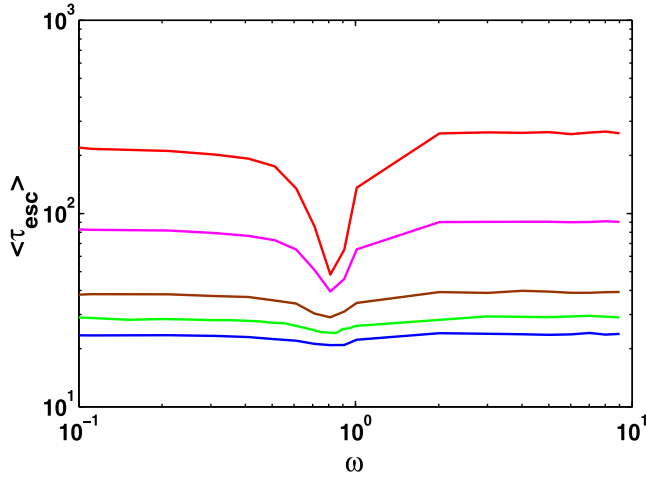


Fig. 8. Average escape times as a function of the frequency of the applied drive, ω , for some correlation times. Solid blue line: $\tau_c = 10^{-4}$, solid green line: $\tau_c = 0.5$, solid brown line: $\tau_c = 1$, solid pink line: $\tau_c = 2$, solid red line: $\tau_c = 3$. Parameters of the simulations are: $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$.

cost is marginal, for the random number generation is the most demanding task. To obtain an ensemble of escape times the step size through all the simulations is $\Delta t = 10^{-4}$ – 10^{-3} and the process is repeated about $N = 10^4$ – 10^5 times. From the set of escape times one can analyze its distribution, as will be discussed below.

3. Results and discussions

In this Section, we identify the footprint of the time correlation noise on the distribution of the escape times.

Fig. 3 shows the diagram of the normalized Probability Density Function (PDF) under the sole effect of correlated noise ($\tau_c = 10^{-4}, 0.5, 1$) (a) or in the case in which the escapes are caused by the combined action of noise and an ac drive ($\gamma_{ac} = 0.1$) (b). From the diagrams it is evident that the sinusoidal drive induces oscillations, as expected also for uncorrelated noise [17,47,48], and thus a more drastic change in the PDF. Therefore we have chosen to exploit the case of an ac-driven JJ to reveal the presence of the noise correlation. This qualitative feature is the basic foundation of our investigation.

Fig. 4 shows the mean escape time as a function of the noise correlation time τ_c . For low correlation time $\tau_c < 1$ there is no relevant variation of the mean escape time, and the results are consistent with the case of white noise. Instead, for $\tau_c > 1$ the mean escape time increases sharply. This feature allows to estimate the correlation time from the distribution of the escape times. The method is however limited, for it is feasible only if the noise intensity D in Eq. (5) is known.

This feature leads to look for another signature of the correlation, as per Fig. 5, in which a qualitative change is observed in the aspect of the PDF for different values of τ_c : the correlation in noise suppresses the oscillations and increases the number of event in the tails.

The histogram in Fig. 6 is obtained changing the constant bias level γ and the noise intensity D to verify that the phenomenon is a general feature of correlated noise. The data confirm that the PDFs are altered and the influence of the noise correlation remains qualitatively the same.

The choice of the parameters is however crucial to enhance the effect of correlation time. In fact Fig. 7 demonstrates that the PDF is influenced by the value of the ac-drive's frequency. Therefore, the appearance of oscillations in the histogram is not just due to the presence of the ac-drive, but is also strongly sensitive to the ac-drive's frequency.

In fact in Fig. 8 it is shown the diagram of the average escape time as a function of the signal frequency ω for different values of the correlation time τ_c . In the first place, the figure reproduces the expected behavior for small correlation times [16]. The diagram exhibits the phenomenon of resonant activation [19], or more precisely stochastic rather than dynamic activation according to the classification of Ref. [49]. However, the frequency of the least stable state (that is, the state with the shortest escape time) is not influenced by the length of the correlation, but it is given by the geometric resonance of the minimum of the potential with the frequency $\omega_0 = \sqrt[4]{1-\gamma^2}$. We also remark that the ratio between the highest point and the lowest point increases as the correlation time increases, thus opening another opportunity to estimate the correlation length, for it is possible exploit this features of Fig. 9 too. To do so, one should collect the escape times of the Josephson junctions driven by noise and an alternate current and determine the height of the highest peak of the histogram. In fact, from Fig. 9, one can estimate whether the correlation is above the inverse of the Josephson frequency ($\tau_c > 1$) or not. Moreover, as the peak is depressed, the tails become more populated as shown in Fig. 5.

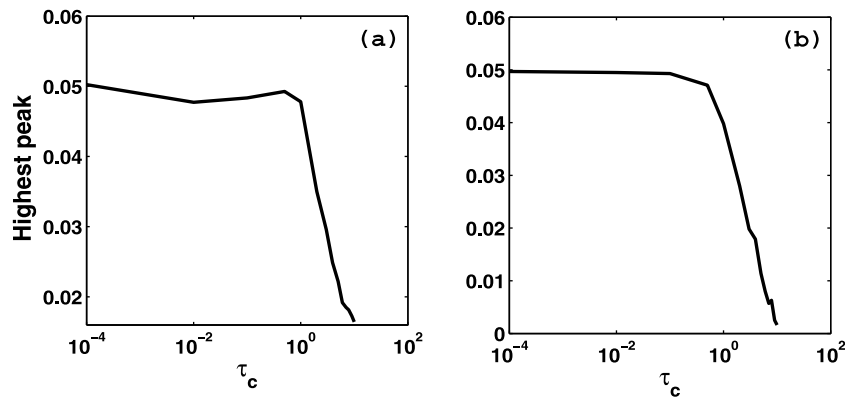


Fig. 9. Highest peak of the PDF as a function of τ_c for different values of the signal frequency; (a) : $\omega = 0.8$, (b) : $\omega = 0.9306$.

4. Conclusion

Superconducting Josephson junctions have the potentiality for high fidelity measurements, inasmuch they can be cooled as much as necessary. In this work we propose to exploit this feature exposing a JJ, also irradiated by a microwave term, to some noise source (much more intense than the intrinsic noise of the junction) to analyze the noise term. The purpose is to measure the correlation time of the noise, even if this time is as short as 1 ns, the inverse of the timescale of a typical JJ. We have identified two features of potential interest for the detection of noise correlation. If there is some clue of the value of the overall noise intensity D , in Eq. (5), the correlation time can be estimated by a sharp increase of the stability, that is of the average escape time. Alternatively, one can construct the histogram of the escape time to identify the peak of the distribution. We have shown that this peak is much sensitive to the correlation time of noise, and it is depressed by correlation, while the tails of the histogram become more populated.

CRediT authorship contribution statement

O.V. Pountounigni: Conceptualization, Methodology, Software, Writing – original draft, Writing – review & editing. **R. Yamapi:** Resources, Formal analysis, Visualization. **G. Filatrella:** Conceptualization, Visualization, Investigation, Validation, Writing – review & editing. **C. Tchawoua:** Supervision.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Data availability

The authors do not have permission to share data.

Acknowledgments

The authors acknowledge the Abdus Salam International Center for Theoretical Physics (ICTP), Italy for the support to the collaboration through the TRIL (Training in Italian Laboratories) program. OVP thanks the Department of Sciences and Technologies of the University of Sannio for hospitality and for financial support.

References

- [1] I. Askerzade, A. Bozbey, M. Canturk, *Modern Aspects of Josephson Dynamics and Superconductivity Electronics*, Springer, 2017.
- [2] A.I. Braginski, Superconductor electronics: Status and outlook, *J. Supercond. Nov. Magn.* 32 (2019) 23–44, <http://dx.doi.org/10.1007/s10948-018-4884-4>.
- [3] C. Guarcello, P. Solinas, A. Braggio, F. Giazotto, Solitonic josephson thermal transport, *Phys. Rev. A* 9 (2018) 034014, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.9.0>.
- [4] C. Guarcello, P. Solinas, A. Braggio, F. Giazotto, Phase-coherent solitonic josephson heat oscillator, *Sci. Rep.* 8 (2018) 12287, <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-018-30268-1>.
- [5] L.S. Revin, A.L. Pankratov, A.V. Gordeeva, A.A. Yablokov, I.V. Rakoud, V.O. Zbrozhek, L.S. Kuzmin, Microwave photon detection by an al josephson junction, *Beilstein J. Nanotechnol.* 11 (2020) 960–965, <http://dx.doi.org/10.3762/bjnano.11.80>.
- [6] A.S. Piedjou, C. Guarcello, C. Barone, C. Guatti, S. Pagano, V. Pierro, A. Rettaroli, G. Filatrella, Analysis of josephson junctions switching time distributions for the detection of single microwave photons, *Chaos Solitons Fractals* 142 (2021) 110496, <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110496>.
- [7] C. Guarcello, Lévy noise effects on josephson junctions, *Chaos Solitons Fractals* 153 (2021) 111531, <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111531>.
- [8] S. Pagano, C. Barone, M. Borghesi, W. Chung, G. Carapella, A.P. Caricato, I. Carusotto, A. Cian, D. Di Gioacchino, E. Enrico, P. Falferi, L. Fasolo, M. Faverzani, E. Ferri, G. Filatrella, C. Gatti, A. Giachero, D. Giubertoni, A. Greco, Kutlu, A. Leo, C. Ligi, G. Maccarrone, B. Margesin, G. Maruccio, A. Matlashov, C. Mauro, R. Mezzena, A.G. Monteduro, A. Nucciotti, L. Oberto, V. Pierro, L. Piersanti, M. Rajteri, A. Rettaroli, S. Rizzato, Y.K. Semertzidis, S. Uchaikin, A. Vinante, Development of quantum limited superconducting amplifiers for advanced detection, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* 32 (2022) 1–5, <http://dx.doi.org/10.1109/TASC.2022.3145782>.
- [9] C. Guarcello, G. Avallone, C. Barone, M. Borghesi, S. Capelli, G. Carapella, A.P. Caricato, I. Carusotto, A. Cian, D. Di Gioacchino, E. Enrico, P. Falferi, L. Fasolo, M. Faverzani, E. Ferri, G. Filatrella, C. Gatti, A. Giachero, D. Giubertoni, V. Granata, A. Greco, D. Labranca, A. Leo, C. Ligi, G. Maccarrone, F. Mantegazzini, B. Margesin, G. Maruccio, C. Mauro, R. Mezzena, A.G. Monteduro, A. Nucciotti, L. Oberto, L. Origo, S. Pagano, V. Pierro, L. Piersanti, M. Rajteri, A. Rettaroli, S. Rizzato, A. Vinante, M. Zannoni, Modeling of josephson traveling wave parametric amplifiers, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* 33 (2023) 1–7, <http://dx.doi.org/10.1109/TASC.2022.3214751>.
- [10] A.L. Pankratov, L.S. Revin, A.V. Gordeeva, A.A. Yablokov, L.S. Kuzmin, E. Il'ichev, Towards a microwave single-photon counter for searching axions, *Npj Quant. Inf.* (2022) 61, <http://dx.doi.org/10.1038/s41534-022-00569-5>.
- [11] C. cosmelli, P. Carelli, M.G. Castellano, F. Chiarello, R. Leoni, G. Torioli, A hysteretic dc SQUID reading the flux states of an rf SQUID, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* 11 (2001) 990–993, <http://dx.doi.org/10.1109/77.919515>.
- [12] A.J. Berkley, H. Xu, M.A. Gubrud, R.C. Ramos, J.R. Anderson, C.J. Lobb, F.C. Wellstood, Decoherence in josephson qubit, *Phys. Rev. B* 68 (2003) 060502, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.68.060502>, (R).
- [13] A. Pankratov, B. Spagnolo, Suppression of time errors in short overdamped josephson junction, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 177001-1, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.177001>.
- [14] A. Barone, G. Paternó, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley and Sons, New York, 1982.
- [15] C. Guarcello, D. valenti, B. Spagnolo, V. Pierro, G. Filatrella, Josephson-based threshold detector for Lévy-distributed current fluctuation, *Phys. Rev. A* 11 (2019) 044078, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.11.044078>.
- [16] G. Filatrella, V. Pierro, Detection of noise-corrupted sinusoidal signals with josephson junctions, *Phys. Rev. E* 82 (2010) 046712, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.82.046712>.

- [17] P. Adesso, G. Filatrella, V. Pierro, Characterization of escape times of josephson junctions for signal detection, *Phys. Rev. E* 85 (2012) 016708, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.85.016708>.
- [18] C. Guarcello, A.S. Piedjou Komnang, C. Barone, A. Rettaroli, C. Gatti, S. Pagano, G. Filatrella, Josephson-based scheme for the detection of microwave photons *phys. Rev. Appl.* 16 (2021) 054015, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.054015>.
- [19] C.R. Doering, J.C. Gadoua, Resonant activation over a fluctuating barrier, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 2318, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2318>.
- [20] R.N. Mantegna, B. Spagnolo, Experimental investigation of resonant activation, *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000) 3025, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.3025>.
- [21] A.L. Pankratov, M. Salerno, Resonant activation in overdamped system with noise subjected to strong periodic driving, *Phys. Lett. A* 273 (2000) 162–166, [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00493-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00493-X).
- [22] A.N. Malakhov, A.L. Pankratov, Influence of thermal fluctuation on time characteristics of a single josephson element with high damping exact solution, *Phys. C* 269 (1996) 46, [http://dx.doi.org/10.1016/0921-4534\(96\)00426-1](http://dx.doi.org/10.1016/0921-4534(96)00426-1).
- [23] R.N. Mantegna, B. Spagnolo, Noise enhanced stability in an unstable system, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 563, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.563>.
- [24] A. Fiasconaro, D. Valenti, B. Spagnolo, Role of initial conditions on enhancement of the escape time in static and fluctuating potential, *Physica A* 325 (2003) 136–143, [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00192-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00192-4).
- [25] C. Guarcello, D. Valenti, G. Augello, B. Spagnolo, The role of non-gaussian sources in the transient dynamics of long josephson junction, *Acta Phys. Pol. B* 44 (2013) 997–1005, <http://dx.doi.org/10.5506/APhysPolB.44.997>.
- [26] G. Augello, D. Valenti, B. Spagnolo, Effects of colored noise in short overdamped josephson junction, *Int. J. Quant. Inf.* 6 (2008) 801–806, <http://dx.doi.org/10.1142/S0219749908004134>.
- [27] G. Augello, D. Valenti, A.L. Pankratov, B. Spagnolo, Lifetime of the superconductive state in short and long josephson junction, *Eur. Phys. J. B* 70 (2009) 145–151, <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2009-00155-x>.
- [28] D. Alesini, D. Babusci, C. Barone, B. Buonomo, M.M. Beretta, L. Bianchini, G. Castellano, F. Chiarello, D. Di Gioacchino, P. Falferi, G. Felici, G. Filatrella, L.G. Foggetta, A. Gallo, C. Gatti, F. Giazotto, G. Lamanna, F. Ligabue, N. Ligato, C. Ligì, G. Maccarrone, B. Margesin, F. Mattioli, E. Monticone, L. Oberto, S. Pagano, F. Paolucci, M. Rajteri, A. Rettaroli, L. Rolandi, P. Spagnolo, A. Toncelli, G. Torrioli, Status of the SIMP project: Toward the single microwave photon detection, *J. Low. Temp. Phys.* 199 (2020) 348–354, <http://dx.doi.org/10.1007/s10909-020-02381-x>.
- [29] A.L. Pankratov, A.V. Gordeeva, L.S. Revin, D.A. Ladeynov, A.A. Yablokov, L.S. Kuzmin, Approaching microwave photon sensitivity with al josephson junctions, *Beilstein J. Nanotechnol.* 13 (2022) 582, <http://dx.doi.org/10.3762/bjnano.13.50>.
- [30] G. Filatrella, Josephson junctions as prototypes for synchronization of nonlinear oscillators in: *New developments in josephson junction research*, sergei sergeenkov, *Transw. Res. Netw.* (2010) 83–105.
- [31] R.W. Henry, D.E. Prober, A. Davidson, Simple electronic analog of a josephson junction, *Amer. J. Phys.* 49 (1981) 1035–1046, 0002-9505/61/111046-05500.50.
- [32] B.D. Josephson, Possible new effects in superconductive tunnelling, *Phys. Lett.* 1 (1962) 251–253, [http://dx.doi.org/10.1016/0031-9163\(62\)91369-0](http://dx.doi.org/10.1016/0031-9163(62)91369-0).
- [33] B.D. Josephson, The discovery of tunnelling supercurrents, *Rev. Modern Phys.* 46 (1974) 251, <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.46.251>.
- [34] E. Ben-Jacob, D.J. Bergman, Thermal noise effects on the microwave-induced steps of a current-driven josephson junction, *Phys. Rev. A* 29 (1984) 2021, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.29.2021>.
- [35] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag Berlin, 2004.
- [36] P. Hanggi, P. Jung, Colored noise in dynamical systems, in: *Advances in Chemical Physics* 89, Wiley and Sons, 1995, pp. 239–326.
- [37] K.K. Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*, Gordon and Breach Science Glasgow, 1986.
- [38] P. Adesso, V. Pierro, G. Filatrella, Interplay between detection strategies and stochastic resonance properties, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 30 (2016) 15–31, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.05.026>.
- [39] H. Kramers, Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions, *Physica* 7 (1940) 284–304, [http://dx.doi.org/10.1016/S0031-8914\(40\)90098-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0031-8914(40)90098-2).
- [40] L. Longobardi, D. Massarotti, D. Stornaiuolo, L. Galletti, G. Rotoli, F. Lombardi, F. Tafuri, Direct transition from quantum escape to phase diffusion regime in ybaco biepitaxial josephson junction, *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012) 050601, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.050601>.
- [41] O.V. Pountounigni, R. Yamapi, C. Tchawoua, V. Pierro, G. Filatrella, Detection of signals in presence of noise through josephson junction switching currents, *Phys. Rev. E* 101 (2020) 052205, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.101.052205>.
- [42] C. Guarcello, D. Valenti, B. Spagnolo, G. Filatrella, Anomalous transport effects on switching currents of graphene-based josephson junctions, *Nanotechnology* 28 (2017) 134001, <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6528/aa5e75>.
- [43] C. Guarcello, G. Filatrella, B. Spagnolo, V. Pierro, D. Valenti, Voltage drop across josephson junctions for Lévy noise detection, *Phys. Rev. Res.* 2 (2020) 043332, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.043332>, 1-11.
- [44] B.W. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall/CRC, 1998.
- [45] A. Charpentier, E. Flachaire, Log transformation kernel density estimation of incomes distribution, *L'act. Écon.* 91 (2015) 141–159.
- [46] R.F. Fox, I.R. Gatland, R. Roy, G. Vemuri, Fast, accurate algorithm for simulation of exponentially correlated colored noise, *Phys. Rev. A* 38 (1988) 5938, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.38.5938>.
- [47] A.L. Pankratov, M. Salerno, Adiabatic approximation and parametric stochastic resonance in a bistable system with periodically driven barrier, *Phys. Rev. E* 61 (2000) 1206, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.61.1206>.
- [48] A.A. Yablokov, V.M. Mylnikov, A.L. Pankratov, E.V. Pankratova, A.V. Gordeeva, Suppression of switching errors in weakly damped josephson junctions, *Chaos Solitons Fractals* 136 (2020) 109817, <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109817>.
- [49] D.A. Ladeynov, D.G. Egorov, A.L. Pankratov, Stochastic versus dynamic resonant activation to enhance threshold detector sensitivity, *Chaos Solitons Fractals* 171 (2023) 113506, <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113506>.

Measurement of Noise Correlation Through Superconducting Josephson junctions

O.V. Pountougnigni

*Department of Physics, Faculty of Science
University of Yaoundé I
Yaoundé, Cameroon
oberlin.valex@yahoo.fr*

C. Barone

*INFN - Napoli, Salerno group and
Department of Physics
University of Salerno
Fisciano, Salerno, Italy
cbarone@unisa.it*

G. Carapella

*INFN - Napoli, Salerno group and
Department of Physics
University of Salerno
Fisciano, Salerno, Italy
gcarapella@unisa.it*

V. Granata

*INFN - Napoli, Salerno group and
Department of Physics
University of Salerno
Fisciano, Salerno, Italy
vgranata@unisa.it*

C. Guarcello

*INFN - Napoli, Salerno group and
Department of Physics
University of Salerno
Fisciano, Salerno, Italy
cguarcello@unisa.it*

C. Mauro

*INFN - Napoli, Salerno group and
Department of Physics
University of Salerno
Fisciano, Salerno, Italy
cmauro@unisa.it*

S. Pagano

*INFN - Napoli, Salerno group and
Department of Physics
University of Salerno
Fisciano, Salerno, Italy
cmauro@unisa.it*

V. Pierro

*INFN - Napoli, Salerno group and
Department of Engineering
University of Sannio
Benevento, Italy
pierro@unisannio.it*

C. Tchawoua

*Department of Physics, Faculty of Science
University of Yaoundé I
Yaoundé, Cameroon
ctchawa@yahoo.fr*

R. Yamapi

*Department of Physics, Faculty of Science
University of Douala
Douala, Cameroon
ryamapi@yahoo.fr*

G. Filatrella

*INFN - Napoli, Salerno group and
Department of Science and Technology
University of Sannio
Benevento, Italy
filatrella@unisannio.it*

Abstract—We demonstrate that it is possible to measure the time correlation of a Gaussian noise through the analysis of the escape times of Josephson junctions. To do so we construct the histogram – through Kernel estimation, of the collected data and we observe that the structure depends upon the duration of the correlation in noise. This paves the way towards the possibility to measure *in situ* noise correlation with a superconducting device.

Index Terms—Correlated noise, Superconducting devices, Josephson junctions

I. INTRODUCTION

Noise is present in everyday life and affects practically each measurement of any environmental parameter. However noise is often approximated with the highly idealized case of Gaussian delta-correlated noise. In this work we purpose to identify the actual correlation time of a noise source. To measure the features of noise can be difficult for a number of reasons. On one hand, each measurement device adds some noise. In the second place, instrumentation alters the circuit,

for instance changing the effective impedance and hence the mismatch with the external world. This is particularly important in delicate experiments with superconducting electronics, that is intrinsically low noise and low impedance. The solution proposed is to use a superconducting device – Josephson Junctions (JJs) for instance [1], [2] – to be employed as a detector of noise, as it has been proposed for Lévy [3] and non-Gaussian noise [4]. Noise measurement in low dissipation system is in fact a long discussed topic [5], [6] that has recently been attracted a renewed interest for the emergence of applications to weak signals [7]–[10] down to single photon detectors [11]–[15]. We investigate the possibility to measure the properties of a noise source associated to a sinusoidal drive, that models the incoming photons, through the consequences of this noise source on a superconducting device (in this context the Josephson junction can be made of standard materials or innovative superconductors as graphene [16] or even layered electron doped [17], [18]. In particular, as the phase of a Josephson junction is a quantum variable not directly observable, the available information comes through

Identify applicable funding agency here. If none, delete this.

the voltage that is proportional to the derivative of the phase. The time in which a voltage appears, for a junction otherwise in the superconducting state, is an indication of a perturbation that has extracted the JJ phase from the superconducting state, and therefore it is the signal to be exploited [7], [15], as will be illustrated in this work. The paper is organized as follows: in Sect. II we will sketch the basic equations to model the system, and in Sect. III we will demonstrate, through numerical simulations, that the length of the correlations of the noise, associated to an ac-drive, affects the distributions of the escape times. Conclusions are briefly collected in the last Sect. IV.

II. THE MODEL

A model for JJ subject to an alternate drive and a current noise, as in Fig. 1, is as follows:

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\phi}{d\tau} + \sin\phi = \gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) + \zeta(\tau), \quad (1)$$

where one considers the time units $\tau = \omega_J t$ normalized respect to the inverse of the Josephson plasma frequency $\omega_J = \sqrt{2eI_0/C_J\hbar}$. Also, $\alpha = 1/R_J C_J \omega_J$ represents the damping parameter, $\gamma = I_b/I_0$ the normalized bias current I_b , $\gamma_{ac} = I_{ac}/I_0$ the normalized amplitude of the signal, $\omega = \Omega/\omega_J$ the frequency of the signal in normalized units. The noise term $\zeta(\tau) = I_n/I_0$, has the following statistical properties:

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\tau) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta(\tau), \zeta(\tau') \rangle &= \frac{D}{\tau_c} \exp\left(-\frac{|\tau - \tau'|}{\tau_c}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

(Thus, D represents the normalized intensity of the noise correlations.) In this setting, $\zeta(\tau)$ is an *Orstein-Uhlenbeck* process [19], [20] characterized by a correlation time τ_c , that is, a colored noise source exponentially correlated.

It is important to underline that the voltage V across the device (see Fig. 1) is connected to the time derivative of the Josephson phase:

$$V \propto \left\langle \frac{d\phi}{d\tau} \right\rangle. \quad (3)$$

Thus, if the junction just oscillates around the equilibrium position on average there is no finite voltage across the device. However, if one waits long enough, eventually the alternate current and the noise drive the system out of the equilibrium down to the running solution $\langle \frac{d\phi}{d\tau} \rangle \neq 0$, and a voltage can be measured. The idea of the detection process is to measure repeatedly the time it takes to switch from the minimum (superconductive state $V = 0$) to the running state which characterizes the resistive state signaled by the appearance of a measurable voltage ($V \neq 0$). Therefore one can collect the time corresponding to each escape. The statistical distribution of the escapes bears information on the nature of the perturbation (see, e.g., Refs. [7], [8], [15]). At variance

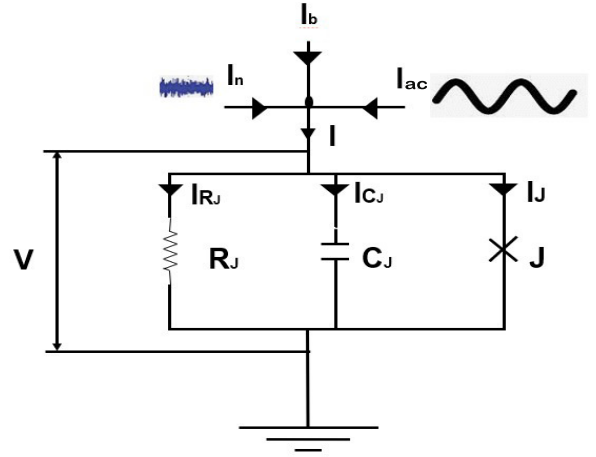


Fig. 1. Schematic of an electrical circuit of a JJ subject to noise (I_n) and an external drive sinusoidal drive (I_S), the RCSJ model Eq.(1). Here R_J is the resistance associated to the normal quasiparticles, C_J the capacitance between the superconducting electrodes, J the superconducting tunnel Josephson element. The currents in the three branches are denoted by $I_{R,J}$, $I_{C,J}$, and I_J , respectively.

with previous investigations, we here try to demonstrate that also the length of the correlation has an impact on the escapes distributions.

A. Numerical model

To simulate the system Eqs.(1,2) noise, we find it convenient to reduce the system to 3 coupled, first order differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= u, \\ \frac{du}{d\tau} &= \gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) - \alpha u - \sin\phi + \zeta(\tau), \\ \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} &= -\frac{\zeta(\tau)}{\tau_c} + \frac{G_{wn}}{\tau_c}. \end{aligned} \quad (4)$$

Where G_{wn} is Gaussian noise white noise with the following statistical properties:

$$\begin{aligned} \langle G_{wn}(\tau) \rangle &= 0, \\ \langle G_{wn}(\tau), G_{wn}(\tau') \rangle &= 2D\delta(\tau - \tau'). \end{aligned} \quad (5)$$

As described in details described in Ref. [21], one deduces the *Euler* version scheme to numerically integrate Eq.s(4), which is achieved through the following steps:

- 1) Set the initial value of $\zeta(\tau)$ from two random numbers:

$$\begin{aligned} m &= \text{random number} \\ n &= \text{random number} \\ \zeta(0) &= \left[-\frac{2D}{\tau_c} \ln(m) \right]^{1/2} \cos(2\pi n). \end{aligned} \quad (6)$$

- 2) Set

$$E = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_c}\right). \quad (7)$$

- 3) For each step size Δt , the exponential correlated colored noise is given by the following line:

$$\begin{aligned} a &= \text{random number,} \\ b &= \text{random number,} \\ \zeta_{|t+\Delta t} &= E\zeta + \left[-\frac{2D}{\tau_c} (1 - E^2) \ln(a) \right]^{1/2} \times \\ &\quad \cos(2\pi b). \end{aligned} \quad (8)$$

- 4) Thus the *Euler Scheme* of Eq.(4):

$$\begin{aligned} \phi_{|t+\Delta t} &= \phi + u\Delta t \\ u_{|t+\Delta t} &= u + \\ &\quad [\gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) - \alpha u - \sin \phi + \zeta] \Delta t \\ \zeta_{|t+\Delta t} &= E\zeta + \left[-\frac{2D}{\tau_c} (1 - E^2) \ln(a) \right]^{1/2} \times \\ &\quad \cos(2\pi b). \end{aligned} \quad (9)$$

To obtain an ensemble of escape times the step size through all the simulation is $\Delta t = 10^{-4}$ and the process is repeated about $N \in [10^4; 10^5]$ times. It is then possible to analyze the distribution of the escape times through some appropriated tools.

Finally, we recall that a parallel implementation on GPU might be very effective to compute the escape times [22], either with Numba-CUDA or C-CUDA [23].

B. Histogram estimate

After collecting the escape times one can proceed to the analysis of the escape times distribution. One of the powerful tool is the non-parametric technique named Kernel Density Estimation [24]. The technique is the generalization of the histogram by means of the so-called kernel function $K(\cdot)$ usually a symmetric probability density function. For a random sample $\underline{\tau} = \{\tau_i\}_{i \in 1 \dots N}$ of size N , the kernel estimator is :

$$\hat{g}(\tau) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{\tau - \tau_i}{h}\right), \quad (10)$$

where h is the smooth parameter or the bandwidth which depends on the size of N . The optimum value of h for Gaussian distributed variables is computed with the relation:

$$h = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \times \sigma \times (N)^{-\frac{1}{5}}, \quad (11)$$

where σ is the standard deviation of the sample. In this work, because of the deviations from the Gaussian distribution of the escape time distributions, we have tried several values for h until a suitable histogram has been achieved for $h = 0.07$.

As escape times are positive, it is necessary to use the log-transform kernel density estimation [25], which is given by the formula:

$$\hat{f}_{\log(\tau)} = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \tau^{-1} K\left(\frac{\log(\tau) - \log(\tau_i)}{h}\right). \quad (12)$$

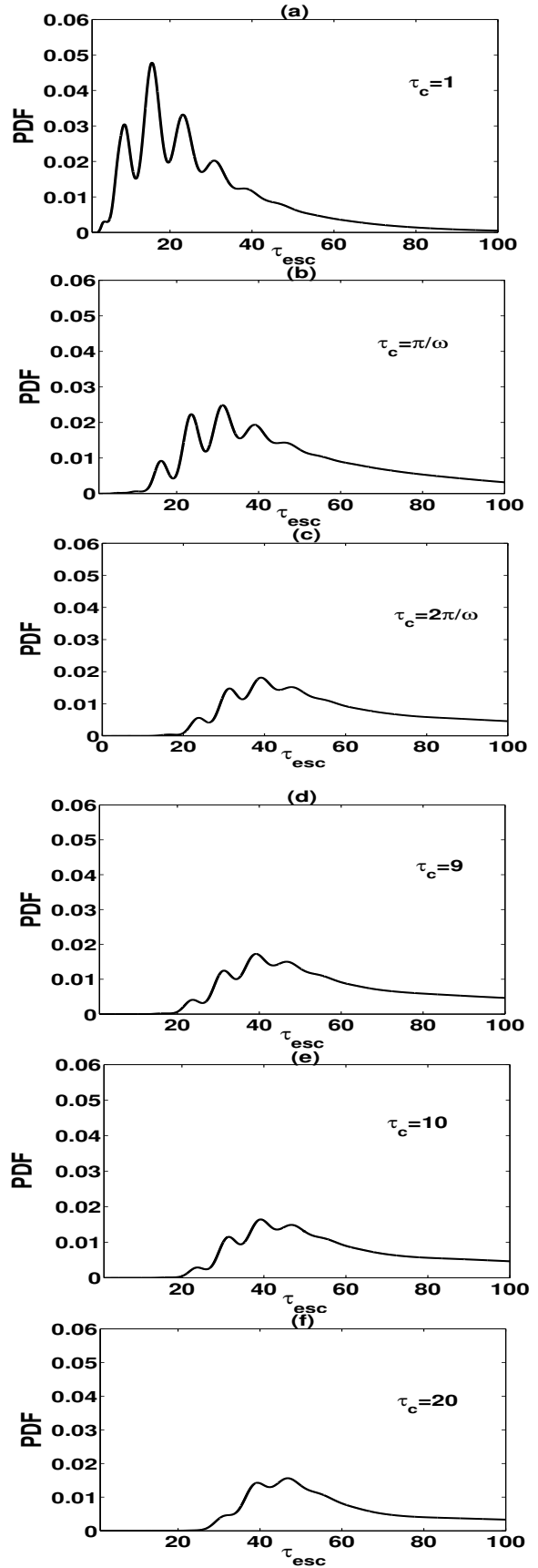


Fig. 2. Variation of the Probability Density Function of the escape times for different applied correlation times τ_c : (a) $\tau_c = 1$, (b) $\tau_c = \pi/\omega$ (corresponding to the frequency where stochastic resonance is expected), (c) $\tau_c = 2\pi/\omega$ (corresponding to the signal period), (d) $\tau_c = 9$, (e) $\tau_c = 10$, (f) $\tau_c = 20$. Parameters of simulations are : $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $\gamma_{ac} = 0.1$, $D = 0.07$, $\omega = 0.8$. In the kernel density estimation (12) we have used $h = 0.07$.

Among the Kernel functions, we choose the standard Gaussian density:

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (13)$$

The histograms that are so retrieved are the basic elements for the data analysis that we propose.

III. RESULTS

The main results are collected in Fig. 2. It is evident that the correlation of noise induces a qualitative change in the aspect of the histogram; It is therefore possible to deduce the presence of noise correlation by inspection of the histogram. In particular, there are two features that can be exploited to determine the correlation. On one hand, it is evident the suppression of the oscillations, and the changes are quantitative, it is therefore to devise a test to measure the correlation time. For instance, the maximum of the PDF reads about 0.05 for the relatively modest correlation time $\tau_c = 1$, decreases down to about 0.03 at half the period of the drive (the condition for stochastic resonance or activation [26]), and keeps decreasing down to 0.02 for the longest correlation time here explored ($\tau_c = 20$). Conversely, the probability that has “disappeared” from the peaks can be found in the tails. Therefore, one can think of an alternative test, in which one measures the increase of the number of events in the tails as a fingerprint of correlation. In both cases, It is important to underline that kernel estimation of Sect. II-B is crucial to accurately reconstruct the histograms with relatively few data ($\approx 10^5$). We feel it important to notice that for fast devices as Josephson junctions, that operate in the microwave region, 10^5 repetitions is not prohibitive. Another important remark is about the detection scheme. The escape times employed for the data displayed in Fig. 2 have been retrieved at a constant bias level γ . Alternatively, it might be convenient to use a current ramp as in [10].

IV. CONCLUSIONS

We have shown that the distribution of the escape times of a JJ, a quantity experimentally accessible for such quantum-based devices, is affected by the length of the correlation time of the noise source associated to an oscillating current, to mimic a photon train affected by a random current term. The changes are both qualitative, as the number of peaks changes, and quantitative, as the relative heights of the peaks change. Conversely, the probability of the tails increases as the correlation increases, and it is thus possible to measure the correlation time also through the analysis of the asymptotic behavior of the PDF. We therefore speculate that the change in the distribution can be exploited to estimate the correlation of the noise, providing that the problem is suitably formulated in the framework of signal analysis theory [27].

ACKNOWLEDGMENT

This work is supported by the Italian Institute of Nuclear Physics (INFN), within the Technological and Interdisciplinary research commission (CSN5), by the European Union’s H2020- MSCA Grant Agreement No. 101027746, and by the Joint Research Project PARAWAVE of the European Metrology Programme for Innovation and Research (EMPIR). PARAWAVE received funding from the EMPIR programme co-financed by the Participating States and from the European Union’s Horizon 2020 research and innovation programme. OVP thanks for financial support the program TRIL of the ICTP Trieste and the Department of Science and Technology (University of Sannio).

REFERENCES

- [1] A. Barone and G. Paternó, *Physics and applications of the Josephson effect*, Wiley and Sons, New York, 1982.
- [2] K.K.Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and circuits*, Gordon and Breach Science, Glasgow, 1986.
- [3] C. Guarcello, G. Filatrella, B. Spagnolo, V. Pierro, and D. Valenti, *Voltage drop across Josephson junctions for Lévy noise detection*, Phys. Rev. Research **2**, 043332 (2020).
- [4] B. Huard et al., *Josephson junctions as detectors for non-Gaussian noise*, Ann. Phys. (Leipzig), **16**, 736-750 (2007)
- [5] K. Furutani and L. Salasnich, *Quantum and thermal fluctuations in the dynamics of a resistively and capacitively shunted Josephson junction*, Phys. Rev. B **104**, 014519 (2021).
- [6] R.H. Koch, D.J. Van Harlinger, and J. Clarke, *Measurements of quantum noise in resistively shunted Josephson junctions*, Phys. Rev. B **26**, 74 (1982).
- [7] G. Filatrella and V. Pierro, *Detection of noise-corrupted sinusoidal signals with Josephson junctions* Phys. Rev. E **82**, 046712 (2010).
- [8] P. Adesso, G. Filatrella, and V. Pierro, *Characterization of escape times of Josephson junctions for signal detection* Phys. Rev. E **85**, 016708 (2012).
- [9] O. Yaakobi, L. Friedland, C. Macklin, and I. Siddiqi, *Parametric amplification in Josephson junction embedded transmission lines*, Phys. Rev. B **87**, 144301 (2013).
- [10] O.V. Pountounigni, R. Yamapi, C. Tchawoua, V. Pierro, and G. Filatrella, *Detection of signals in presence of noise through Josephson junction switching currents*, Phys. Rev. E, **101**, 052205 (2020).
- [11] L. S. Revin, et al., *Microwave photon detection by an Al Josephson junction*, Beilstein Journal of Nanotechnology, **11**, 960-965 (2020).
- [12] A.S. Piedjou Komnang, et al., *Analysis of Josephson junctions switching time distributions for the detection of single microwave photons*, Chaos Solitons Fract **142**, 110496 (2021).
- [13] S. Pagano et al., *Development of Quantum Limited Superconducting Amplifiers for Advanced Detection*, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, **32**, 1-5 (2022).
- [14] C. Guarcello et al., *Modeling of Josephson Traveling Wave Parametric Amplifiers*, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, **33**, 1-7 (2023).
- [15] C. Guarcello, et al. *Josephson-Based Scheme for the Detection of Microwave Photons*, Phys. Rev. Appl., **16**, 0540152021 (2021).
- [16] C. Guarcello, D. Valenti, B. Spagnolo, V. Pierro, and G. Filatrella, *Anomalous transport effects on switching currents of graphene-based Josephson junctions*. Nanotechnology **28**, 134001 (2017).
- [17] Guarino et al., *Characterization of Nd_{2-x}Ce_xCuO₄±δ (x= 0 and 0.15) ultrathin films grown by DC sputtering technique*, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, **27**, 1-4 (2017).
- [18] F. Giubileo, F. Romeo, A. Di Bartolomeo, Y. Mizuguchi, P. Romano, *Probing unconventional pairing in LaO_{0.5}F_{0.5}BiS₂ layered superconductor by point contact spectroscopy*. Journal of Physics and Chemistry of Solids, **118**, 192-199 (2018).
- [19] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [20] P. Hanggi and P. Jung, *Colored Noise in Dynamical Systems, in Advanced in Chemical Physics* **89**, 239-326, Wiley and Sons, 1995.

- [21] R. F. Fox, I. R. Gatland, R. Roy, and G. Vemuri, *Fast, accurate algorithm for simulation of exponentially correlated colored noise*, Phys. Rev. A **38** 5938 (1998)
- [22] V. Pierro, L. Troiano, E. Mejuto, and G. Filatrella, *Stochastic first passage time accelerated with CUDA*, Journal of Computational Physics, **361**, 136-149 (2018).
- [23] L. Oden, "Lessons learned from comparing C-CUDA and Python-Numba for GPU-Computing," 2020 28th Euromicro International Conference on Parallel, Distributed and Network-Based Processing (PDP), Västerås, Sweden, 2020, pp. 216-223.
- [24] B. W. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, (Chapman and Hall/CRC, 1998).
- [25] A. Charpentier and E. Flachaire, *Log Transformation Kernel Density Estimation of incomes distribution*, L'activité économique **91**, 2015.
- [26] A.A. Yablokov, E.I. Glushkov, A.L. Pankratov, A.V. Gordeeva, L.S. Kuzmin, and E.V. Il'ichev, *Resonant response drives sensitivity of Josephson escape detector*, Chaos, Solitons & Fractals, **148**, 111058 (2021).
- [27] C. W. Helstrom, *Statistical Theory of Signal Detection*, Pergamon, Oxford, 1968.

Detection of signals in presence of noise through Josephson junction switching currentsO. V. Pountougnigni,¹ R. Yamapi^{2,*}, C. Tchawoua,¹ V. Pierro³ and G. Filatrella⁴¹Laboratory of Mechanics and Materials, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaoundé I, Box 812, Yaoundé, Cameroon²Fundamental Physics Laboratory, Physics of Complex System Group, Department of Physics, Faculty of Science, University of Douala, Box 24 157 Douala, Cameroon³Department of Engineering, and Gruppo Collegato Salerno INFN, Corso Garibaldi, I-82100 Benevento, Italy⁴Department of Sciences and Technologies, and INFN, Gruppo Collegato Salerno, University of Sannio, Via F. De Sanctis, I-82100 Benevento, Italy

(Received 19 February 2020; accepted 13 April 2020; published 7 May 2020)

Josephson junctions can be employed to reveal a sinusoidal signal in presence of Gaussian noise. To mimic realistic setups, the detection is performed linearly ramping the bias current until a switch to the finite voltage occurs; the analysis of the resulting switching currents can be exploited to decide about the presence of the harmonic drive. The signal is applied in two conditions: with an unknown initial phase (incoherent strategy) and with a known initial phase (coherent strategy). In both conditions, the analysis of the efficiency of the detection, performed through the signal-to-noise ratio, as estimated by the Kumar-Carrol index, shows that the dependence upon the Josephson junction ramp rate is beneficial, especially for relatively fast speed. One can conclude that the collection of the switching currents is a robust technique, and thus it is possible to exploit the advantages of a predetermined finite time to collect the data.

DOI: [10.1103/PhysRevE.101.052205](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.052205)**I. INTRODUCTION**

The detection of a sinusoidal signal is a widespread problem in basic physics and applications. An example is threshold detection [1–3], based on the possibility of ascertaining the presence of a signal via the transition from one metastable state to another. For instance, Josephson junction (JJ) devices can move, under the effect of both the applied external signal and the unavoidable fluctuations from the metastable superconducting state to a finite voltage state; the analysis of the passages can be employed to infer the presence of a perturbation. The technique is similar to the one exploited since the early appearance of the mechanism of stochastic resonance [4] for the detection of digital subthreshold signals with Schmitt triggers [5,6]. More recently, it has been suggested, through simulations of neuronal models, that noise can be beneficial for signal detection [7], also in the presence of correlated noise [8].

There are some advantages in choosing JJs: (1) as superconducting elements JJs can operate at very low temperature (close to absolute zero or to the quantum limit [9]) and are therefore possibly affected by low intrinsic thermal noise and (2) JJs are extremely fast elements [10], as fast as a few hundred GHz or even close to the THz region [11]. Since the pioneering works [12,13] many experiments have been carried out to highlight the role of noise in ac-driven JJs, for instance, to pinpoint the quantum behavior [14,15], to reach the single photon limit [16–18], or to detect the phase of an applied signal [19]. More recently, JJs as threshold detectors

have been characterized through the analysis of the moments of the distribution of the events [20–22].

Since the pioneering experiments [13], the switching time distribution has proven very sensitive to the signal amplitude, and it is conceivable that one can collect the switching times to discriminate between two situations: (1) the exit is caused by pure noise (no signal is present), and (2) exit is caused by the combined action of noise and a sinusoidal excitation (the signal is present). In the theory of signal detection, the quantitative analysis is evaluated through the determination of the detector performance. A common tool for the estimate of the signal-to-noise ratio (SNR) of the detector is the Kumar-Carrol (K-C) index [23–25]. The index is a suitable indicator of the performances of the detector and allows one to determine the most favorable condition in terms of the applied frequency and bias current and of the device dissipation [25]. The performances, however, also depend on the adapted strategy, as the quantity that can be monitored varies from the sample mean to a more refined likelihood ratio test [26]. It is therefore natural to look for the performances in a widely employed setup, the case in which the bias current depends upon the time [27]. As the performances of the detector depend on the conditions in which the signal is applied, one can further consider two strategies: coherent (a prescribed phase relation between the applied signal and the current ramp) and incoherent (an unknown phase between the two drivers) [24].

In brief, the aim of the present work is to study the effect of time-dependent bias on JJs, employed as detectors, analyzing the performances through the K-C index. To do so, we proceed as follows. In Sec. II we describe the JJ model, modified to accommodate for the signal effect and the bias

*Corresponding author: ryamapi@yahoo.fr

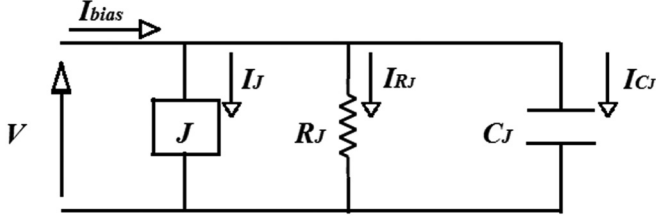


FIG. 1. Scheme of the electrical model of a Josephson junction element.

scheme. In Sec. III the methods to analyze the switching events is described, and in Sec. IV are collected the resulting performances of the sketched device. Section V summarizes the main findings and the outlook.

II. MODEL AND SIMULATIONS METHOD

In this section the model for the JJ dynamics, as modified by a sinusoidal signal and Gaussian noise, is laid down; furthermore, the numerical method employed in the simulations is also outlined.

A. Electrical model

The electrical model we deal with in the present analysis, displayed in Fig. 1, is the resistively shunted and capacitively junction model [10]. It consists of a capacitor C_J and a parallel connected resistor R_J , while J in the rectangle represents the ideal Josephson junction element (I_0 is the maximum Josephson current that describes the nonlinear relation between the current and the gauge invariant phase difference $\phi = \phi_1 - \phi_2$ across the two superconductors):

$$I_J = I_0 \sin \phi. \quad (1)$$

The Josephson element constitutive voltage equation reads

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt}. \quad (2)$$

The current bias consists of a continuous dc-current generator I_b , and the signal is modeled through an alternating (ac) term: $I_{ac} \sin(\Omega t + \theta)$, disturbed by a noise current I_n . A sinusoidal term is added on the top of noise, as well as to let the quantum behavior emerge [28,29] or to investigate the dependence upon the initial conditions [30]. Thus, denoting with I_J the current through the Josephson element, I_{R_J} the current through the JJ resistor, and I_{C_J} the current through the junction capacitance, the current balance reads

$$I_{C_J} + I_{R_J} + I_J = I_b + I_{ac} \sin(\Omega t + \theta) + I_n. \quad (3)$$

If we set

$$I_{C_J} = C_J \frac{dV}{dt} = \frac{C_J \hbar}{2e} \frac{d^2\phi}{dt^2}, \quad I_{R_J} = \frac{V}{R_J} = \frac{\hbar}{R_J 2e} \frac{d\phi}{dt}, \quad (4)$$

the model is described by the following second-order differential equation:

$$\frac{C_J \hbar}{2e} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\hbar}{R_J 2e} \frac{d\phi}{dt} + I_0 \sin \phi = I_b + I_{ac} \sin(\Omega t + \theta) + I_n, \quad (5)$$

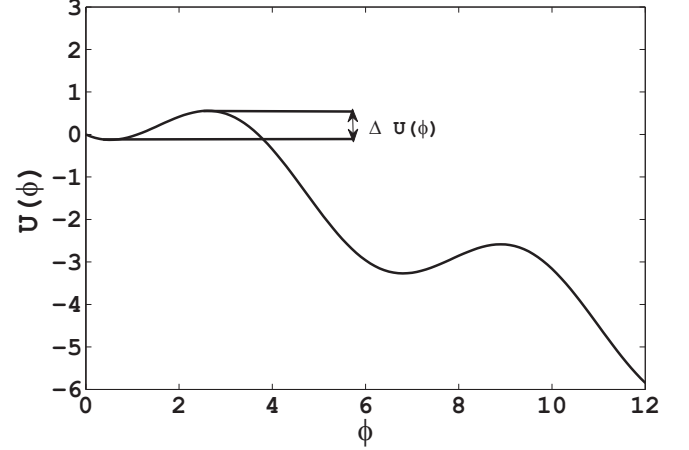


FIG. 2. The washboard potential for $\gamma = 0.5$. The energy barrier ΔU is given by Eq. (10).

which is a Langevin equation [31]. Introducing the Josephson frequency $\omega_J = \sqrt{2eI_0/C_J \hbar}$, Eq. (5) can be cast in time-normalized units ($\tau = \omega_J t$), as follows:

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\phi}{d\tau} + \sin \phi = \gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) + \zeta(\tau), \quad (6)$$

where the parameters are defined as

$$\alpha = \frac{1}{R_J C_J \omega_J}, \quad \gamma = \frac{I_b}{I_0}, \quad \gamma_{ac} = \frac{I_{ac}}{I_0}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_J}. \quad (7)$$

The statistical features of the noisy term $\zeta(\tau)$ are determined by

$$\langle \zeta(\tau) \rangle = 0,$$

$$\langle \zeta(\tau), \zeta(\tau') \rangle = 4D\delta(\tau - \tau'), \quad (8)$$

where $D = k_B T \omega_J / (R I_0^2)$ is the normalized noise intensity (k_B is the Boltzmann constant and T the absolute temperature).

A washboard potential is associated with Eq. (12) [10,31]:

$$U(\phi) = -\gamma\phi + [1 - \cos(\phi)]. \quad (9)$$

For $\gamma < 1$, the potential has metastable wells with a barrier height [31]:

$$\Delta U(\gamma) = 2 \left[\sqrt{1 - \gamma^2} - \gamma \cos^{-1}(\gamma) \right]. \quad (10)$$

The dependence of the potential ΔU versus the normalized current γ is shown in Fig. 2. For a constant energy barrier the resulting escape rate $\Gamma(\gamma)$ is given by the Kramers approximation:

$$\Gamma(\gamma) = (1 - \gamma^2)^{1/4} e^{-\frac{\Delta U(\gamma)}{D}}. \quad (11)$$

The prefactor depends upon the dissipation and the approximation employed [32]. In Eq. (11) is displayed a major contribution arising from the bias-dependent resonant mode [10].

Here one is interested to ascertain whether the detection of the sinusoidal term is enhanced if the external bias current includes a time-dependent term; consequently Eq. (6) becomes

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\phi}{d\tau} + \sin \phi = \gamma(\tau) + \gamma_{ac} \sin(\omega\tau + \theta) + \zeta(\tau). \quad (12)$$

Where the dc current is not constant anymore, for the bias γ is the ramp:

$$\gamma(\tau) = v\tau. \quad (13)$$

Here v is the speed at which the bias rises is swept from zero to the critical current; that is, in a time $1/v$ the bias reaches the normalized critical current $\gamma = 1$. At this current the JJ, in the absence of the signal and in the noiseless case ($\gamma_{ac} = 0$, $D = 0$) switches to a finite voltage $\langle d\phi/d\tau \rangle \neq 0$, and the current in correspondence of the event can be measured [33]. The ramp speed is normalized to the JJ characteristic time, which is in the order of 100 GHz, and therefore one can assume that in normalized units it should read at least 10^{-3} and that can be easily as slow as 10^{-6} . The bias ramp is convenient, for it guarantees that the switching events are collected in a predetermined time: at least a switch event occurs in a time $1/v$. It is therefore very common to encounter the data in the form of switching current distributions [34]. Moreover, the bias changes the potential; therefore the system explores a range of trapping energies, a feature that has proved convenient in the analysis of non-Gaussian, Lévy-type, noise sources [35,36]. Finally, the relation (13) converts the switching time τ_{sw} in a switching current through the relation

$$\gamma_{sw} = v\tau_{sw}. \quad (14)$$

Given the simple relation between time and switching currents, in this work the terms “switching times” and “switching currents” will be used as interchangeable words.

The switching currents’ distribution $P(\gamma)$ obtained with a bias ramp (13) and the escape rate $\Gamma(\gamma)$ from the static potential (10) are connected by the relation [37]

$$P(\gamma) = \Gamma(\gamma) \left(\frac{d\gamma}{d\tau} \right)^{-1} \left[1 - \int_0^\gamma P(u) du \right]. \quad (15)$$

The above relation between the escape rate $\Gamma(\gamma)$ and the switching current distribution $P(\gamma)$ highlights that the switching current distribution depends upon the escape rates of *all* barrier heights $0 \leq \Delta U \leq 2$. Because of the intricate relation between the properties of the escape at constant bias (11) and the distribution of the switching currents (15), it is not guaranteed that the detection performances are the same at constant bias in respect to the bias ramp; hence the call for a detailed analysis of the performances if the bias is swept. The results of the detection properties of the switching currents are the main objective of this paper and will be discussed in Sec. IV.

B. Algorithms for numerical simulations

For stochastic simulations of the differential equation (12) we use the Euler algorithm [38], and the Box-Muller method [39] is employed to generate Gaussian white noise from two random numbers a and b which are uniformly distributed in the unit interval $[0, 1]$:

$$a = \text{random number}, \quad b = \text{random number}, \\ \zeta_n^i = \sqrt{-4D\Delta\tau \log(a)} \cos(2\pi b). \quad (16)$$

The time step through all the simulation is $\Delta\tau = 0.0001$. The stochastic results are averaged over as many realizations as

are necessary to obtain reliable results, generally 10^4 . Two parameters that appear in Eq. (6), α and D , have been set to a constant value through all simulations, namely, $\alpha = 0.2$ and $D = 0.05$ to thoroughly explore the effects of the other parameters (the speed v , the signal amplitude γ_{ac} , and the frequency ω). For fast JJ (a frequency around 100 GHz) and realistic values of the temperature (around 1K to be below the low T_c transition temperature), the normalized parameters here chosen ($\alpha = 0.2$ and $D = 0.05$) entail very demanding values of the critical current (about $0.1 \mu\text{A}$), the shunt resistor (around $10 \text{ k}\Omega$), and of the capacitance (around 2 fF). The critical current and the capacitance would increase, while keeping the other parameters constant, decreasing both the normalized dissipation α and noise intensity D to explore a much wider range, possibly with parallel CUDA [40]. For instance, increasing by an order of magnitude the critical current and the capacitance would result in a decrease of an order of magnitude of the dissipation parameter ($\alpha \simeq 0.02$), and of two orders of magnitude of the noise correlator ($D \simeq 0.0005$).

III. DETECTION STRATEGIES

In the context of signal detection the phase θ of the signal in Eq. (12) might be known or not; in the following are described the two corresponding procedures.

Where the phase of the applied signal is unknown, one can mimic the ignorance of the initial conditions applying a signal with a random initial phase (*incoherent detection*). Physically, it corresponds to apply the signal to the junction with an unknown phase θ , for instance, if the junction is exposed to an uncontrolled source of radiation. Such blindness of the detection system can be modeled through an initial phase that reads

$$\theta \in [0, 2\pi[, \quad (17)$$

with uniform distribution. When the JJ switches to the running, finite voltage state, the switching time τ_i is recorded, the system is reset to the static state, and the signal is applied again adding $\omega\tau_i$ to the previous initial phase.

Alternatively, the second strategy is called *coherent*, for the sinusoidal signal is always applied with the same null initial phase, for instance, $\theta = 0$. It is known that the initial phase does have an impact on the distribution times [24,25,30], therefore the case of zero initial phase is but an example. When the switch occurs, the switching time is recorded and the system is shielded from the signal. Then the system is reset to the static state with the same initial phase.

Repeating the procedure N times, one retrieves a collection of switching times [24,25]:

$$\underline{\tau} = \{\tau_i\}_{i=1}^N. \quad (18)$$

The collected data are to be analyzed to decide whether or not a sinusoidal excitation is embedded into noise. The performances of the detection can be summarized by the index d_{KC} [23], such as

$$d_{KC} = \frac{|\langle \tau_{sw} \rangle_{\text{sig}} - \langle \tau_{sw} \rangle_{\text{noi}}|}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma^2(\tau_{sw})_{\text{sig}} + \sigma^2(\tau_{sw})_{\text{noi}})}}, \quad (19)$$

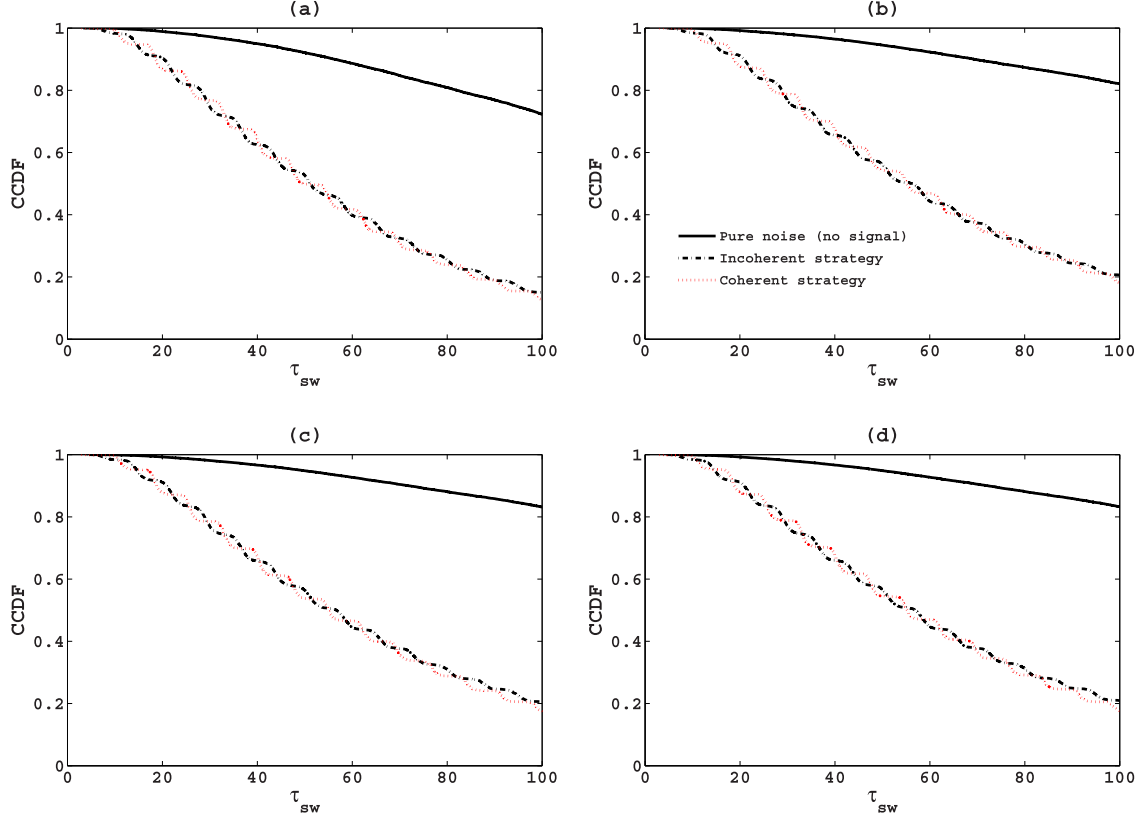


FIG. 3. Complementary cumulative distribution function, CCDF, of the escape time for pure noise (solid line) and for a combination of noise with a sinusoidal signal ($\gamma_{ac} = 0.2$) in the incoherent (dot-dashed line) and coherent (dashed red line) cases. Parameters of simulation are $D = 0.05$, $\omega = 0.86$, $\alpha = 0.2$ with (a) $v = 10^{-3}$; (b) $v = 10^{-4}$; (c) $v = 10^{-5}$; (d) $v = 10^{-6}$.

where $\langle \tau_{sw} \rangle_{sig}$ denotes the estimated average switching time in the presence of the signal and the estimate of the corresponding standard deviation $\sigma(\tau_{sw})_{sig}$. Analogously, $\langle \tau_{sw} \rangle_{noi}$ is the estimated average switching time without signal, and $\sigma(\tau_{sw})_{noi}$ the corresponding estimated standard deviation (all averages are taken over noise realizations). In the case of a Gaussian distribution—which is not exactly the case in the present collection of switching currents—the d_{KC} corresponds to the signal-to-noise ratio (SNR). In this work the index d_{KC} (19) is employed as an estimate, or a proxy, of the SNR.

IV. RESULTS AND DISCUSSION OF THE DETECTION PERFORMANCES

In the following section, the variable bias technique is characterized for the detection of a sinusoidal drive. Specifically, the performances are analyzed as a function of the intensity of signal and of the bias ramp speed v , for both the incoherent and coherent strategy. The detector is analyzed through the response of the average switching time and of an estimate of the SNR.

A. The complementary cumulative distribution function of the escape time

To emphasize the effect of the signal on the escape times, it is convenient to introduce the complementary cumulative distribution function $CCDF(X)$. For a random current that

depends upon a coordinate x , the CCDF shows the probability that the phenomenon occurs for $x > X$, which is complementary to the cumulative distribution function $CDF(X)$, which represents the probability that the phenomenon occurs for $x < X$. Thus, Fig. 3 shows the CCDF of the escape times in the presence of the sinusoidal signal ($\gamma_{ac} = 0.2$, broken line) and without a signal ($\gamma_{ac} = 0$, solid line) obtained simulating Eq. (12), for several different values of the speed v . The four panels, each corresponding to a velocity v of the current bias ramp $\gamma(\tau)$, visualize the effect of the ramp speed. The difference between the CCDF with and without the signal is a clear indication that JJ response to a drive is not much influenced by the ramp velocity v and can therefore be employed for signal detection. However, it is relevant for signal detection that the CCDFs in the presence of the sinusoidal signal for the two strategies are similar, with a little difference in slope.

B. Results for the incoherent strategy

Figure 4 displays for the incoherent strategy the average switching time $\langle \tau_{sw} \rangle$ as a function of the frequency ω of the sinusoidal signal for different values of signal intensity γ_{ac} . The curves exhibit the phenomenon of resonance at the frequency $\omega_0 \approx 0.80$ [24]. It is also to be noticed that the frequency at which the resonance occurs weakly depends upon the amplitude of the signal, as expected for a nonlinear oscillator. Therefore, the best conditions to detect a signal weakly also depend upon the amplitude of the signal itself.

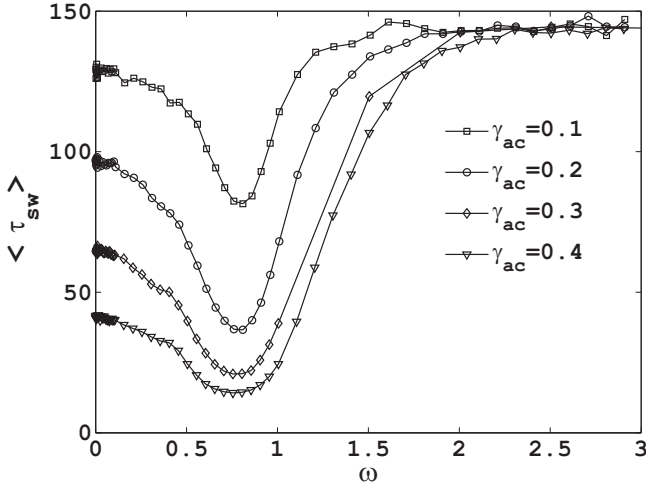


FIG. 4. Average escape time $\langle \tau_{sw} \rangle$ as a function of the driving frequency ω for the incoherent strategy, to highlight the different amplitudes of the signal. The symbols denote different amplitudes: square: $\gamma_{ac} = 0.1$, circle: $\gamma_{ac} = 0.2$, diamond: $\gamma_{ac} = 0.3$, down triangle: $\gamma_{ac} = 0.4$. Parameters of simulations are $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$.

Moreover, in Fig. 4 it is evident that as the signal intensity increases the minimum of the average switching time decreases. As the signal frequency approaches $\omega \approx 2.0$, the asymptotic behavior of different curves is approximately independent of the signal intensity.

The response of a JJ, in the form of a change of the average escape time, is therefore a qualitative indication that JJ can be employed as detectors. The performances of the detection can be characterized more accurately through the SNR as estimated by the K-C index [23]. This is shown in Fig. 5 for several different values of signal intensity. At the resonant frequency the K-C index increases with the signal amplitude. For example, one reads $d_{kc} \approx 0.8$ for $\gamma_{ac} =$

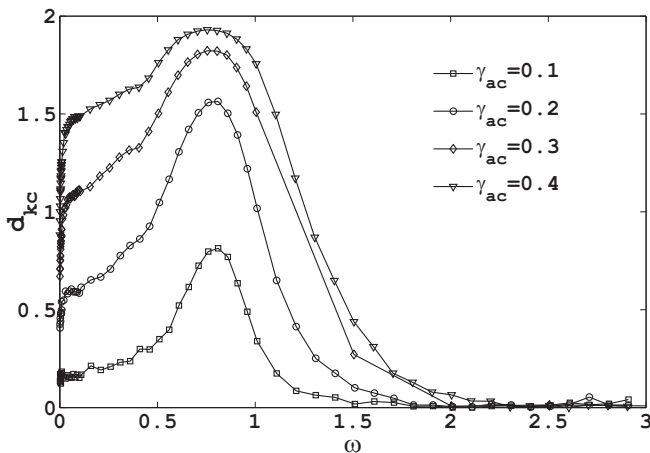


FIG. 5. K-C index d_{kc} as a function of the driving frequency ω for the incoherent strategy for several values of the sinusoidal amplitude γ_{ac} . The symbols denote different amplitudes: square: $\gamma_{ac} = 0.1$, circle: $\gamma_{ac} = 0.2$, diamond: $\gamma_{ac} = 0.3$, down triangle: $\gamma_{ac} = 0.4$. Parameters of simulations are $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$.

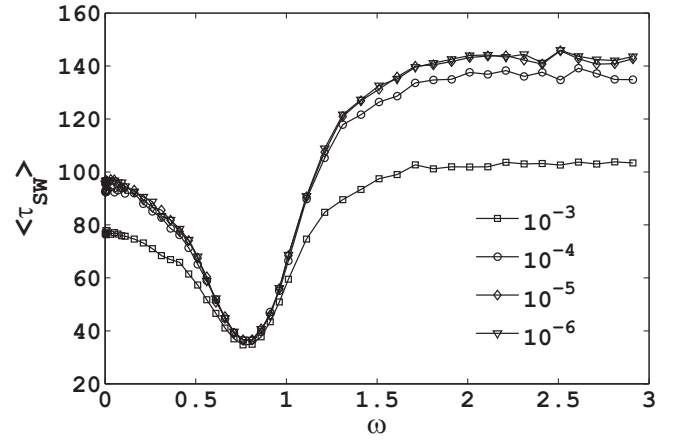


FIG. 6. Average escape time $\langle \tau_{sw} \rangle$ as a function of the driving frequency ω for the incoherent strategy, to highlight the different amplitudes of the signal. The markers for different curves are star: $v = 10^{-2}$, square: $v = 10^{-3}$, circle: 10^{-4} , diamond: 10^{-5} , down triangle: 10^{-6} . Parameters of the simulations are $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$.

0.1, while d_{kc} rises to ≈ 1.93 for $\gamma_{ac} = 0.4$. In the region at higher frequency, $\omega \gtrsim 2$, the average switching time is almost independent of the signal amplitude, and in fact the index d_{kc} vanishes, which tells us that this region is not suitable for detection.

The effect of the bias current ramp speed is reported in Figs. 6 and 7. For $v = 10^{-3}$ the detector's best performances read $d_{kc} = 1.76$ at the resonant state. Still better performances are expected for $v = 10^{-2}$, as the deviations of the average escape time are still more marked; see Fig. 6. We note that some data in correspondence of $v = 10^{-2}$ are missed, for the speed is so high that escape occurs when the ramp is almost completed, in the proximity of the critical current (it actually coincides with the critical current, within numerical accuracy). However, it is evident that the detector's performances

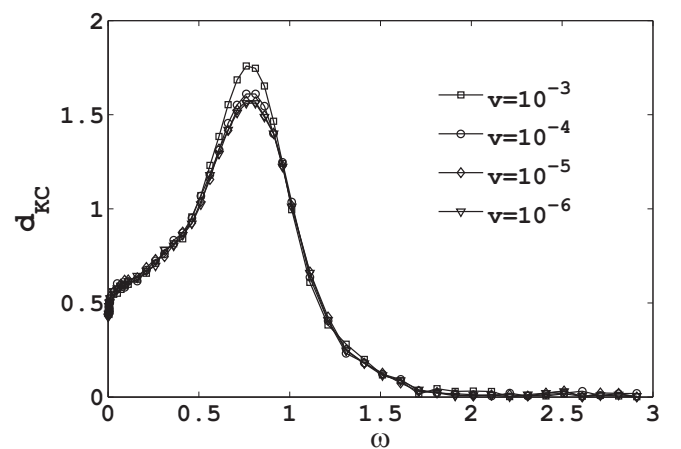


FIG. 7. K-C index d_{kc} as a function of the driving frequency ω for the incoherent strategy, to highlight the different amplitudes of the signal. The markers for different curves are square: $v = 10^{-3}$, circle: 10^{-4} , diamond: 10^{-5} , down triangle: 10^{-6} . Parameters of the simulations are $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$.

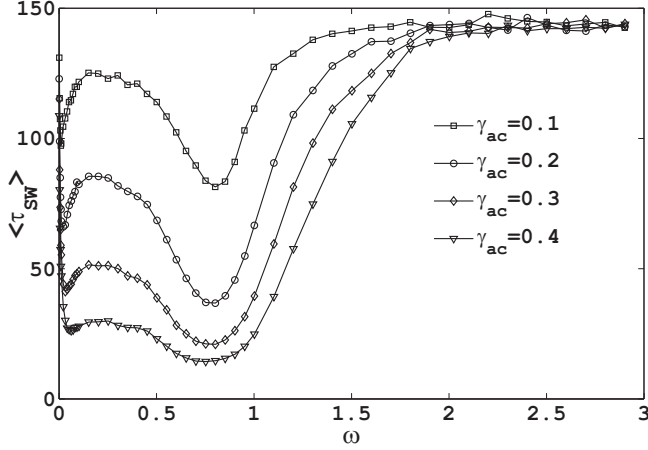


FIG. 8. Average escape time $\langle \tau_{sw} \rangle$ as a function of the driving frequency ω for the coherent strategy to highlight the different amplitudes of the signal. The markers for different curves are square: $\gamma_{ac} = 0.1$, circle: $\gamma_{ac} = 0.2$, diamond: $\gamma_{ac} = 0.3$, down triangle: $\gamma_{ac} = 0.4$. Parameters of the simulations are $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$.

are enhanced for fast ramp speed. The sweep bias speed is also related to the observation time $1/v$ necessary to retrieve a single escape, which obviously shortens for large speed. In conclusion, the results indicate that it is favorable to use a large ramp speed, for it results in two positive effects: it increases the SNR (as estimated through the K-C index) and shortens the observation time.

C. Results for the coherent strategy

In the coherent strategy case each sequence begins with the same initial phase $\theta = 0$. The analysis of the average switching time is reported in Fig. 8, which displays a dip at low frequencies which is not present in the incoherent strategy. The behavior of the dip amplitude as a function of the signal frequency is also reported in Table I.

As expected, the performance of the detection reveals that the SNR increases with the amplitude of the signal (see Fig. 9 and Table I). There are, however, only marginal differences with the incoherent strategy; for example, in both cases it is observed the phenomenon of noise-independent resonance at the frequency $\omega_0 \approx 0.80$ and the asymptotic behavior of different curves when the drive frequency approaches 2.

The effect of the ramp speed is reported in Figs. 10 and 11. Also the response to the bias ramp speed is similar to the

TABLE I. Frequency at which a dip is observed as a function of the signal amplitude γ_{ac} for the coherent detection strategy. The last column displays the SNR of the signal, as estimated through the K-C index.

Amplitude γ_{ac}	Frequency ω	K-C index d_{KC}
0.1	0.009	0.586
0.2	0.012	1.122
0.3	0.032	1.468
0.4	0.052	1.722

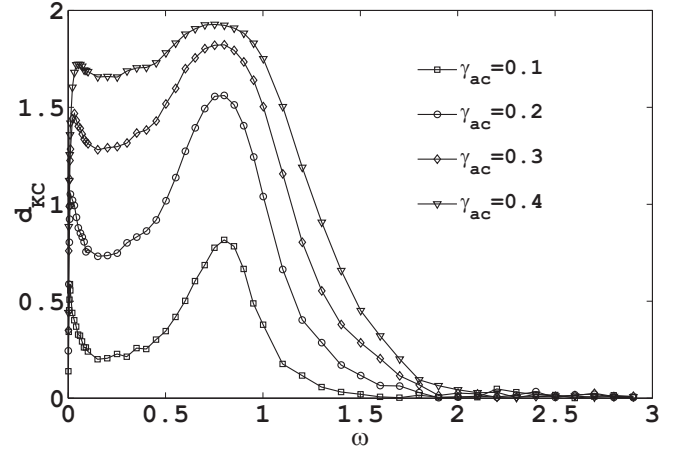


FIG. 9. K-C index d_{KC} as a function of the driving frequency ω for the coherent strategy, to highlight the different amplitudes of the signal. The markers for different curves are square: $\gamma_{ac} = 0.1$, circle: $\gamma_{ac} = 0.2$, diamond: $\gamma_{ac} = 0.3$, down triangle: $\gamma_{ac} = 0.4$. Parameters of the simulations are $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$.

incoherent strategy of Sec. IV C. As expected, in this case as well it is not possible to explore the whole parameter region for a very high speed, $v = 10^{-2}$, inasmuch as the escapes occur too close to the critical current at $\omega > 0.9$. However, the analysis shows an interesting region, reported in Table II, which does not exist for the incoherent strategy. Table II confirms that upon increasing the ramp speed the K-C index improves, or at least it stays constant, and therefore it can be concluded that a high ramp speed is favorable for signal detection also in the case of a coherent strategy.

V. CONCLUSIONS

In summary, the detection of sinusoidal signals using a nonlinear device, an underdamped Josephson junction, has

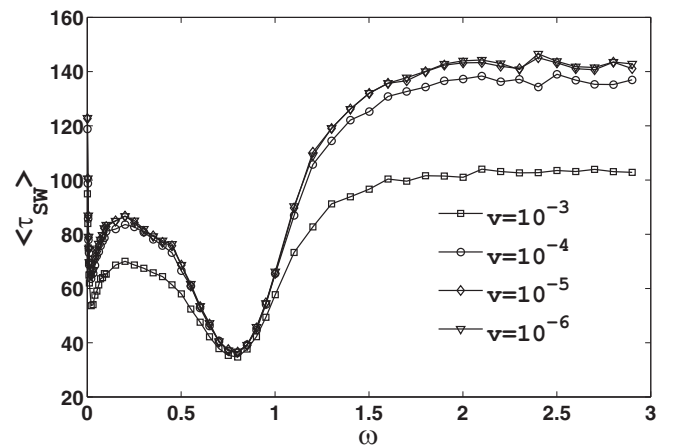


FIG. 10. Average escape time $\langle \tau_{sw} \rangle$ as a function of the driving frequency ω for the coherent strategy to highlight the effect of different bias ramp speed. The markers for different curves are star: $v = 10^{-2}$, square: $v = 10^{-3}$, circle: 10^{-4} , diamond: 10^{-5} , down triangle: 10^{-6} . Parameters of the simulations are $D = 0.05$, $\gamma_{ac} = 0.2$, $\alpha = 0.2$.

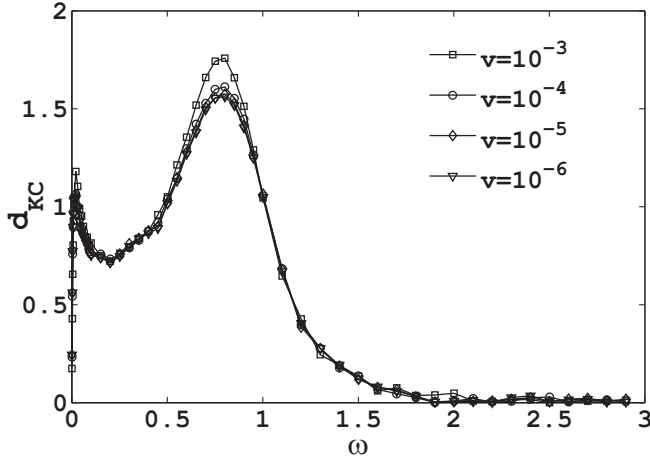


FIG. 11. K-C index d_{KC} as the function of the driving frequency ω for the coherent strategy to highlight the effect of different bias ramp speed. The markers for different curves are square: $v = 10^{-3}$, circle: 10^{-4} , diamond: 10^{-5} , down triangle: 10^{-6} . Parameters of the simulations are: $D = 0.05$, $v = 10^{-6}$, $\alpha = 0.2$.

been analyzed considering a ramp of the dc bias current at velocity v . The resulting distribution of the switching currents has been characterized as a function of the bias ramp speed in terms of the SNR to ascertain if it is suitable for effective detection. The underlying reason is that a nonconstant bias is convenient, for it guarantees that an escape is recorded each cycle of the bias current, thus securing the number of collected data per unit time of detection. However, two natural questions arise. First, do the switching times so collected allow us to detect the difference between the case of pure noise from the case in which a sinusoidal term is present? To this question the answer is positive, for we have confirmed that the average switching current [or the average escape time; as per Eq. (13) the two quantities are simply proportional] is indeed sensitive to an oscillatory term. The second question is how do we show the influence of the bias sweep velocity on the efficacy of the detection? Also in this case the answer is positive—actually twofold positive: the detection is possible, and it improves in the most favorable condition of large speed, in which the data are collected more quickly. One concludes that it is convenient to use the ramp current setting, and to employ as high of a value of the ramp speed as electronics allows. In fact, the speed of the bias ramp does not influence the performance at low speed and improves the performances when the speed becomes high, $v \approx 0.001$ (in normalized units). The point is quite delicate, for a normalized speed of 0.001 or above easily

TABLE II. Dependence of the frequency at which a dip is observed as a function of the bias ramp speed v . The last column displays the SNR of the signal, as estimated through the K-C index for the amplitude $\gamma_{ac} = 0.2$

Ramp speed v	Frequency ω	Average switching time $\langle \tau_{sw} \rangle$	K-C index d_{KC}
10^{-3}	0.021	53.65	1.180
10^{-4}	0.021	63.63	1.065
10^{-5}	0.021	64.78	1.042
10^{-6}	0.021	65.27	1.042

entails an actual bias frequency of several hundreds of MHz, which is not easy to reach in this context.

In more detail the findings are the following. Using two strategies [24], coherent and incoherent, to determine the statistical features of the detector through the Kumar-Carroll index d_{KC} [23], it is possible to determine the performances of JJ to reveal sinusoidal signals in the presence of noise. For both strategies the JJ appears to be very sensitive to the signal in proximity of the junction resonance. The dynamics shows an asymmetric behavior: relatively good performance for low frequencies and very low sensitivity above the resonance [24]. Also, the change in the amplitude of the signal weakly changes the resonant frequency and induces a significant variation of the average switching time (see Figs. 4 and 8). Finally, the change in the bias ramp speed changes neither the resonant frequency nor the average switching time at the resonance (see Figs. 6 and 10).

To wrap up in a sentence the main finding: it is definitively beneficial for signal detection to use the method of ramping the bias current, for each event occurs in a time span $1/v$, and the performances improve as the speed is increased.

Future research could be directed to analyze the detection performances of a Josephson junction series array, possibly coupled to a resonator [41–44], or to investigate the effect of non-Gaussian noise [35,36,45]. Also, having limited the exploration of the JJ parameters to the case $\alpha = 0.2$ and $D = 0.05$, our results should be regarded as indicative, rather than an experiment design. More values of the parameters, especially noise amplitude, should be considered, possibly performing the simulations with CUDA [40].

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank C. Barone, C. Guarcello, and S. Pagano for useful discussions.

[1] I. Goychuk and P. Hänggi, *Eur. Phys. J. B* **69**, 29 (2009).
 [2] V. Galdi, V. Pierro, and I. M. Pinto, *Phys. Rev. E* **57**, 6470 (1998).
 [3] A. R. Bulsara, C. Seberino, L. Gammaitoni, M. F. Karlsson, B. Lundqvist, and J. W. C. Robinson, *Phys. Rev. E* **67**, 016120 (2003).
 [4] S. Fauve and F. Heslot, *Phys. Lett. A* **97**, 5 (1983).
 [5] J. C. Comte and S. Morfu, *Phys. Lett. A* **309**, 39 (2003).

[6] S. Morfu, J. M. Bilbault, and J. C. Comte, *Int. J. Bifurcation Chaos* **13**, 233 (2003).
 [7] E. V. Pankratova, A. V. Polovinkin, and B. Spagnolo, *Phys. Lett. A* **344**, 43 (2005).
 [8] D. Valenti, G. Augello, and B. Spagnolo, *Eur. Phys. J. B* **65**, 443 (2008).
 [9] M. G. Castellano, R. Leoni, G. Torridi, F. Chiarello, C. Cosmelli, A. Costantini, G. Diambri-Palazzi, P. Carelli,

- R. Cristiano, and L. Frunzio, *J. Appl. Phys.* **80**, 2922 (1996).
- [10] A. Barone and G. Paternó, *Physics and Applications of Josephson Effect* (John Wiley, New York, 1982).
- [11] L. Ozyuzer, A. E. Koshelev, C. Kurter, N. Gopasalmi, Q. Li, M. Tachiki, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H. Yamaguchi, T. Tachiki, K. E. Gray, K. W. Kwok, and U. Wel, *Science* **318**, 1291 (2007).
- [12] M. H. Devoret, J. M. Martinis, and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1908 (1985).
- [13] M. H. Devoret, D. Esteve, J. M. Martinis, A. Cleland, and J. Clarke, *Phys. Rev. B* **36**, 58 (1987).
- [14] A. Barone, F. Lombardi, G. Rotoli, and F. Tafuri, *J. Low Temp. Phys.* **36**, 876 (2010).
- [15] L. Longobardi, D. Massarotti, D. Stornaiuolo, L. Galletti, G. Rotoli, F. Lombardi, and F. Tafuri, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 050601 (2012).
- [16] R. Leoni, F. Mattioli, M. G. Castellano, S. Cibella, P. Carelli, S. Pagano, D. Perez de Lara, M. Ejrnaes, M. P. Lisitskiy, E. Esposito, R. Cristiano, and C. Nappi, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **559**, 564 (2006).
- [17] G. Oelsner, L. S. Revin, E. Il'ichev, A. L. Pankratov, H.-G. Meyer, L. Grönberg, J. Hassel, and L. S. Kuzmin, *Appl. Phys. Lett.* **103**, 142605 (2013).
- [18] D. Alesini, D. Babusci, C. Barone *et al.*, *J. Low Temp. Phys.* **199**, 348 (2020).
- [19] Y. Yu and S. Han, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 127003 (2003).
- [20] J. Tobiska and Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 106801 (2004).
- [21] J. P. Pekola, T. E. Nieminen, M. Meschke, J. M. Kivioja, A. O. Niskanen, and J. J. Vartiainen, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 197004 (2005).
- [22] B. Huard, H. Pothier, Norman O. Birge, D. Esteve, X. Wainta, and J. Ankerhold, *Ann. Phys. (Leipzig)* **16**, 736 (2007).
- [23] B. V. K. Vijaya Kumar and C. W. Carroll, *Opt. Eng.* **23**, 236732 (1984).
- [24] G. Filatrella and V. Pierro, *Phys. Rev. E* **82**, 046712 (2010).
- [25] P. Addesso, G. Filatrella, and V. Pierro, *Phys. Rev. E* **85**, 016708 (2012).
- [26] P. Addesso, V. Pierro, and G. Filatrella, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **30**, 15 (2016).
- [27] M. Zgirski, M. Foltyn, A. Savin, and K. Norowski, *Phys. Rev. Appl.* **11**, 054070 (2019).
- [28] P. Silvestrini, V. G. Palmieri, B. Ruggiero, and M. Russo, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3046 (1997).
- [29] J. A. Blackburn, M. Cirillo, and N. Grønbech-Jensen, *Phys. Rev. B* **85**, 104501 (2012).
- [30] C. Cheng, M. Cirillo, G. Salina, and N. Grønbech-Jensen, *Phys. Rev. E* **98**, 012140 (2018).
- [31] E. Ben-Jacob and D. J. Bergman, *Phys. Rev. A* **29**, 2021 (1984).
- [32] P. Hänggi, P. Talkner, and M. Borkovec, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 251 (1990).
- [33] A. Wallraff, A. Lukashenko, C. Coqui, A. Kemp, T. Duty, and A. V. Ustinov, *Rev. Sci. Instrum.* **74**, 3740 (2003).
- [34] J. A. Blackburn, M. Cirillo, and N. Grønbech-Jensen, *Phys. Rep.* **611**, 1 (2016).
- [35] C. Guarcello, D. Valenti, B. Spagnolo, V. Pierro, and G. Filatrella, *Nanotechnology* **28**, 134001 (2017).
- [36] C. Guarcello, D. Valenti, B. Spagnolo, V. Pierro, and G. Filatrella, *Phys. Rev. Appl.* **11**, 044078 (2019).
- [37] T. A. Fulton and L. N. Dunkleberger, *Phys. Rev. B* **9**, 4760 (1974).
- [38] R. F. Fox, I. R. Gatland, R. Roy, and G. Vemuri, *Phys. Rev. A* **38**, 5938 (1988).
- [39] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 2 (Addison Wesley, Reading, MA, 1969).
- [40] V. Pierro, L. Troiano, E. Mejuto, and G. Filatrella, *J. Comput. Phys.* **361**, 136 (2018).
- [41] R. Yamapi and G. Filatrella, *Phys. Rev. E* **89**, 052905 (2014).
- [42] Yu M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. V. Kulikov, A. E. Botha, A. Plecenik, P. Seidel, and W. Nawrocki, *Supercond. Sci. Technol.* **30**, 024006 (2017).
- [43] O. V. Pountougnigni, R. Yamapi, G. Filatrella, and C. Tchawoua, *Phys. Rev. E* **99**, 032220 (2019).
- [44] K. Wiesenfeld, *J. Phys. A: Math. Theor.* **53**, 064002 (2020).
- [45] C. Guarcello, D. Valenti, A. Carollo, and B. Spagnolo, *J. Stat. Mech.* (2016) 054012.

Noise and disorder effects in a series of birhythmic Josephson junctions coupled to a resonatorO. V. Pountougnigni,¹ R. Yamapi,^{2,*} G. Filatrella,³ and C. Tchawoua¹¹Laboratory of Mechanics and Materials, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaoundé I, Box 812, Yaoundé, Cameroon²Fundamental Physics Laboratory, Physics of Complex System group, Department of Physics, Faculty of Science, University of Douala, Box 24 157 Douala, Cameroon³Department of Sciences and Technologies, and Salerno unit of CNSIM, University of Sannio, Via Port'Arsa 11, I-82100 Benevento, Italy

(Received 24 October 2018; revised manuscript received 7 January 2019; published 26 March 2019)

The effects of uncorrelated white noise on a series of Josephson junctions coupled to a linear RLC resonator are investigated. Both the cases of identical and nonidentical parameters are considered. The junctions are hysteretic, and hence can be considered birhythmic; that is, capable of oscillating at different frequencies for the same set of parameters. It is also found that, in the presence of noise, a uniform array behaves similarly to a single Josephson junction. However, the magnitude of the effective energy that characterizes the response to noise becomes smaller as the number of elements of the array increases, making the resonator less stable. Disorder in the parameters drastically changes the physics of the array. The disordered array of Josephson junctions misses the birhythmic properties for large values of the variance of the disorder parameter and remains birhythmic only for low values of the disorder parameter. Finally, disorder makes it difficult to locate the separatrix, hinting to a more complex structure of the effective energy landscape.

DOI: [10.1103/PhysRevE.99.032220](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.032220)**I. INTRODUCTION**

Hysteretic (large capacitance) Josephson junctions (JJs) can be considered as birhythmic systems, for they can produce oscillations at two distinct periods [1,2]. Birhythmicity is encountered in some biochemical [3–7] and nonlinear electronic systems [8–13]. In JJ physics, it occurs in single or multiple junctions coupled through an external circuit that possesses resonances [14]. In this condition, the array can oscillate at two frequencies: one induced by the external resonance that locks together the JJ, or at the spontaneous frequency of the JJ where the elements oscillate incoherently and are unable to load the external circuit. Thus, JJ arrays have been used as a paradigm for the transition between synchronized and the desynchronized states, especially for the Kuramoto paradigm [15,16]. Synchronization of JJ oscillators is also of practical importance for applications in which the power of a single JJ does not suffice. In fact, the power of N coherently working junctions can increase as N^2 , and the linewidth can also decrease as $1/N$ [17–19]. The most frequent geometric configuration is probably a two-dimensional array (a combination of parallel and series elements) [18,20] and a one-dimensional array (parallel or series array) [21]. However, the differences in the fabrication parameters [22,23] make any real array disordered. Thus, synchronization is not easily obtained, for even with the same bias current the different junctions oscillate at different voltages. To overcome this difficulty it has been proposed that arrays of JJ can be synchronized by an appropriated external coupling circuit [15] that can be realized in a variety of manners [2]. For example, in Ref. [24] each junction is coupled to the resonator and the junctions are coupled to each other through the capacitance. Possible

coupling mechanisms are RLC circuits [25,26] or LC circuits [27], which allow the possibility of parametric resonance [28]. Thus, it has been possible to derive the properties of the synchronized and unsynchronized states to characterize the conditions that favor synchronization, especially the coupling circuit configuration and the bias point [27,28], which are the parameters most easily tuned in experiments.

The problem of synchronization of disordered oscillators, including JJ arrays, is often dealt with by using the Kuramoto model and its variations [29]. The Kuramoto model, which perhaps should be named a *framework* for the numerous variants, has been extended in many directions; for instance to incorporate finite size and interplay between different types of noise and couplings [29]. However, a system with two states (synchronized and desynchronized) under the effect of noise can undergo escapes from one state to the other. Thus, the global stability properties are of crucial importance to determine the region of parameters where realistic arrays; that is, disordered and noisy elements, could possibly work. Generally speaking, the problem can be framed as a classical Kramers' escape problem: under the effect of noise, how often does the system experience large excursions, large enough to move from the synchronized to the desynchronized state? These switches are of special relevance in JJ systems, for the corresponding noiseless attractors are characterized by different frequencies, and therefore a marked change in the frequency is associated with each passage. This is particularly problematic for the application of the JJ to the voltage standard, inasmuch as the frequency of the oscillations is connected through the Josephson relation to the junction voltage: Thus, even rare escapes are of practical relevance to reach the extreme accuracy demanded by international standards.

The stability analysis of the dynamical behavior of noisy oscillations can be summarized by means of a quasi- or

*ryamapi@yahoo.fr

pseudopotential [30,31] when the system does not possess a potential; that is, the force cannot be derived as the gradient of a function. The quasipotential is the effective energy barrier that governs the low-noise escapes from the metastable states [30,31]; the concept has been proven useful in connection with the JJ-based voltage standard [32,33]. However, a conceptual difficulty arises in the very definition of *attractor* and *limit cycle*, which is essential to retrieve a quasipotential from the large random excursions under the effect of noise. In fact, under the effect of noise the system is not confined, even asymptotically, in a well-defined limit cycle, because of the noise disturbance that affects the dynamics. In other words, the noiseless limit cycles characterized by a well-defined frequency, under the effect of noise, become blurred and ill defined. The formal definition of quasipotential does not suffer from the problem that the limit cycle is poorly defined in the noisy case. In fact, the quasipotential is defined through the time in which the attractor is abandoned (i.e., the time necessary to reach the separatrix) in the limit of negligible noise. In this limit of vanishing noise, the concept of separatrix retains its sense. Even if the separatrix is well defined in a mathematical sense, there is a problem in the numerical evaluation, that of course is performed at a finite noise value, for the evaluation of the quasipotential requires the determination of the average time necessary to leave an attractor: the mean first escape time (MFPT) to reach the separatrix. In practical terms, the difficulty is circumvented controlling that the noise is low enough that the uncertainty due to the approximate definition of the separatrix introduces a negligible error in the determination of the time necessary for a passage from a region of the phase space to the other.

A further problem is to find such a border that separates the two attractors, even in the limit of negligible noise, for a system of many oscillators, and hence of many degrees of freedom, the separatrix consists of a complicated hypersurface in $N - 1$ dimensions, if N is the number of degrees of freedom. To make the problem manageable, it has been proposed to approximate the position of the separatrix with the region where the slope of the mean first passage time changes [34]. However, it remains an open problem, the extension of the method to the case of many disordered JJs, which is the subject of the present work.

The paper is organized as follows: The next section describes a series of underdamped and disordered Josephson junctions; both connected to an RLC resonator and subject to external bias and noise. Section III focuses on the properties of the attractors in a birhythmic Josephson junction array, and especially in the method to locate the effective separatrix, which is, as mentioned, the essential information to construct the activation energy barrier. The effective potential that determines the global stability of the system is studied. Section IV analyzes the effects of disorder parameters on the birhythmic properties. Section V closes the paper with conclusions.

II. MODEL OF A SERIES OF JOSEPHSON JUNCTIONS COUPLED TO A RESONATOR

This section describes the basic model in Sec. II A and the refinements to include noise and disorder in Sec. II B. The numerical method is described in the last part, Sec. II C.

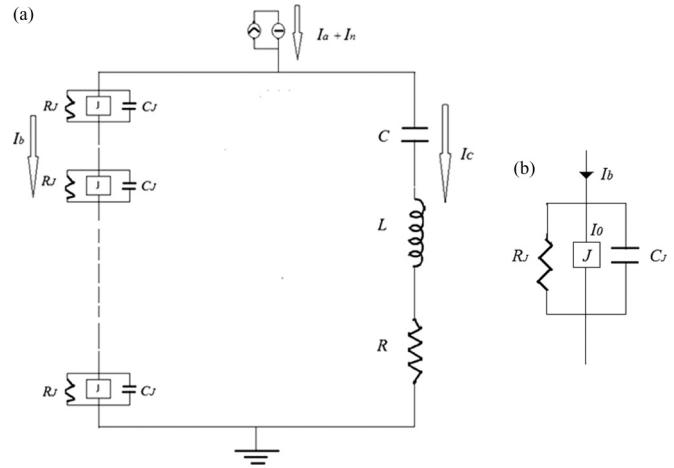


FIG. 1. (a) Scheme of birhythmic series Josephson junctions coupled to a linear RLC resonator. (b) Circuit model, RCSJ, of a Josephson junction. The current bias is at room temperature, and it is supposed to supply an ideal current source I_a and a noisy Gaussian distributed current I_n . The junctions and the RLC resonator are in the refrigerated box, and the associated Johnson noise is assumed to be negligible.

A. Model of Josephson junction dynamics

Figure 1 schematically describes the model: a series of underdamped JJs coupled to an RLC resonator. Both the JJs and the resonant circuit are assumed to be in a temperature controlled vessel, while the bias current is typically supplied by a device at room temperature. In this configuration, the noise from the bias supply dominates the Johnson noise from the resistors R_J and R . Alternatively, one could add a random term for each resistor, as done, for instance, in Ref. [35]. In this work we assume the simplest case in which noise is an extra term entering the system. In fact, for the purpose of the present work, noise is but a tool. The goal is to determine the pseudo-energy, and the principle of minimum energy [30,32] assures that the contributions from the minimal-energy trajectory determines the height of the trapping potential. Therefore, one does not expect substantial changes with a different noise source.

An RLC resonator, which is but a model for the external circuit that embeds the JJs, is coupled to the array. In fact, at the microwave frequency the lumped elements are an approximation of the distributed elements. In this context, the choice of series and parallel depends upon the relative magnitude of the impedance of the JJ; for low damping the external circuit “looks parallel,” while for high damping the external circuit “looks series” [14]. In this work we concentrate on the particular setting of RLC series oscillator; let us emphasize that such a choice is but an option that we employ to illustrate the method, and this coupling is particularly convenient, for it shows a single branch connected with the RLC resonance. In fact for the present purposes it is advantageous to have only two regions in phase space with two corresponding frequencies. Other possibilities, such as LC coupling in stacks, are useful for the description of more complicated structures, e.g., of traveling waves in stacks of JJs [28].

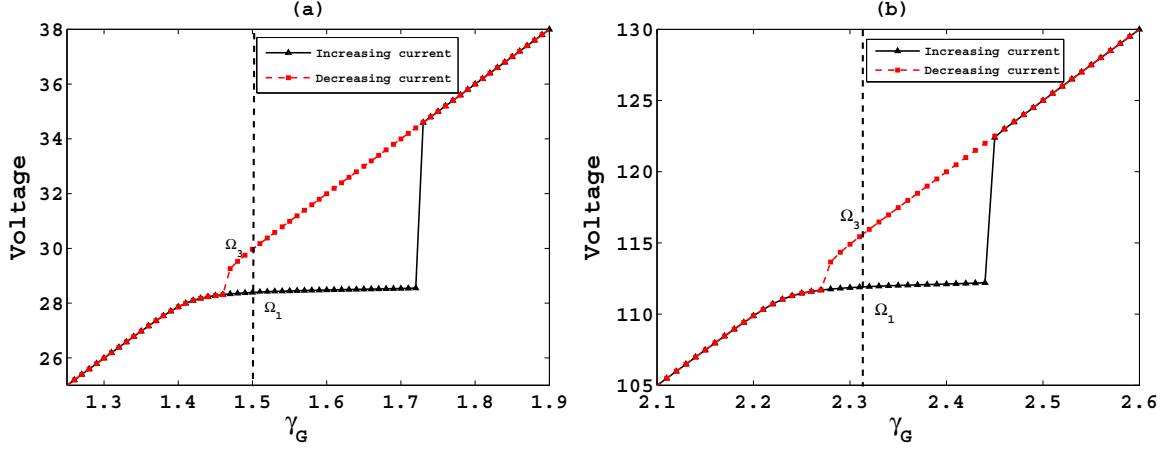


FIG. 2. Normalized IV curves for both increasing and decreasing normalized bias current γ_G for the free noise model, $D = 0$. The parameters are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, and $\alpha = 0.1$; for panel (a), $N = 2$ and for panel (b), $N = 5$.

To derive the equations governing the system, we indicate with I_C the current flowing through the RLC circuit and with \tilde{q} the charge on the capacitor. The JJ array and the resonator are both biased by a current generator I_G (affected by a noise current I_n) that splits in the current I_b through the JJ element and the above-mentioned current I_C through the RLC . The JJ electrical model consists of the capacitor C_J , the resistor R_J , and the ideal Josephson element, connected in parallel. The nonlinear relation between the current and the gauge-invariant phase difference $\phi^i = \phi_1 - \phi_2$ across two superconductors (here I_0 is the maximum Josephson current),

$$I_J^i = I_0 \sin \phi^i, \quad (1)$$

together with the Josephson voltage relationship

$$V_J^i = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi^i}{dt}, \quad (2)$$

determines that a JJ is an active oscillator that converts a dc current into an ac drive for the RLC resonator. If one indicates with I_{R_J} the current through the JJ resistor and with I_{C_J} the current through the junction capacitance, the current balance reads

$$I_b = I_a + I_n - I_C \implies I_J^i + I_{R_J} + I_{C_J} = I_a + I_n - I_C. \quad (3)$$

The Kirchhoff law for the loop voltage,

$$\sum_{i=1}^N V_J^i = V_C + V_R + V_L, \quad (4)$$

completes the model, which is thus described by two second-order coupled differential equations:

$$\begin{cases} \frac{C_J \hbar}{2e} \frac{d^2 \phi^i}{dt^2} + \frac{\hbar}{R_J 2e} \frac{d\phi^i}{dt} + I_0 \sin \phi^i + \frac{d\tilde{q}}{dt} = I_a + I_n \\ \frac{d^2 \tilde{q}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\tilde{q}}{dt} + \frac{1}{LC} \tilde{q} - \frac{\hbar}{2eL} \sum_{i=1}^N \frac{d\phi^i}{dt} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Introducing the Josephson frequency $\omega_J = \sqrt{2eI_0/C_J \hbar}$, Eqs. (5) can be cast, with normalized time $\tau = \omega_J t$ and charge

$q = \omega_J \tilde{q}/I_0$, as follows:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi^i}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\phi^i}{d\tau} + \sin \phi^i + \frac{dq}{d\tau} = \gamma_G + \zeta^i(\tau), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{dq}{d\tau} + \Omega^2 q - \frac{1}{\beta_L} \sum_{i=1}^N \frac{d\phi^i}{d\tau} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

where the parameters are defined as

$$\begin{aligned} Q &= \frac{L\omega_J}{R}, \quad \alpha = \frac{1}{C_J \omega_J} \sqrt{\frac{1}{R_J}}, \quad \beta_L = \frac{\omega_J^2 C_J}{L}, \\ \gamma_G &= \frac{I_a}{I_0}, \quad \Omega = \frac{1}{\omega_J \sqrt{LC}}. \end{aligned} \quad (7)$$

The circuit is thus formed by two branches, a JJ and an RLC resonator in a loop, strongly interacting with each other because the coupling is large: $1/\beta_L = 100$. The two branches are not completely independent; for instance, the observed resonance frequency of the circuit is far from the RLC resonance Ω , as discussed in connection with Fig. 2 in Sec. III A.

The statistical features of the noisy term ζ^i are determined by

$$\langle \zeta^i(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \zeta^i(\tau); \zeta^i(\tau') \rangle = 4D\delta(\tau - \tau'), \quad (8)$$

where $D = k_B T \omega_J / (R I_0^2)$ is the normalized noise intensity (k_B is the Boltzmann constant and T is the absolute temperature). If the Johnson noise associated with the resistances of each JJ are sizable, one has separated contributions $\zeta^1, \zeta^2, \dots, \zeta^N$ for the junctions. Also, Eq. (8) is changed, for the normalized noise intensity D is given by the resistance R_J of the junctions. Instead, if the noise associated with the superconducting JJs are negligible with respect to the resonator, then the noise comes from the resonator resistance R and is common to all the junctions. Finally, if the noise is due to an external source, it does not obey to the fluctuation-dissipation theorem and is therefore independent of the resistance. The latter is the model thoroughly employed in this work.

B. Model of disorder

In the fabrication process of several JJs, as in Fig. 1, fabrication tolerances prevent the junctions from being identical. More precisely, as the barrier average thickness changes from junction to junction, the critical current changes most, for it exponentially depends on the junction barrier [1]. Also, the normal resistance changes, for the product $R_J I_0$ is proportional to the superconducting gap. To include these observations in the mathematical formulation of Sec. II, one can assume that the resistance and the critical current depend on the junction index i : $R_J \rightarrow R_J^i$ and $I_0 \rightarrow I_0^i$, and are connected by the superconducting gap Δ [1],

$$R_J I_0^i = \frac{\Delta}{e}. \quad (9)$$

The critical currents of the i th junction depend upon a random term ε :

$$I_0^i = I_0(1 + \varepsilon^i). \quad (10)$$

The variable ε is assumed uniform in an interval $\pm\sigma$,

$$\varepsilon \in [-\sigma; +\sigma]. \quad (11)$$

The actual distribution of the parameters of junction arrays is close to Gaussian [22,23]; however, to avoid negative unphysical values of the critical current, the random variable ε is assumed to be uniform in an interval of amplitude 2σ .

As a consequence of the relation (9), the resistances read

$$R_J^i = \frac{\Delta}{e} \frac{1}{I_0(1 + \varepsilon^i)}. \quad (12)$$

To summarize, a stochastic model for the random parameters I_0^i and R_J^i is given by the assumptions (10) and (12); thus, the random parameters depend on a single parameter ε^i characterized by the uniform distribution (11), whose variance is $2\sigma^2/3$.

The normalized parameters (7) are unchanged, except for the dissipation α that reads

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \frac{1}{C_J \omega_J} \sqrt{\frac{1}{R_J^i}} = \frac{1}{C_J \omega_J} \sqrt{\frac{e I_0 (1 + \varepsilon^i)}{\Delta}} \\ &= \frac{1}{C_J \omega_J} \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon^i)}{R_J^i}} = \alpha(1 + \varepsilon^i). \end{aligned} \quad (13)$$

Finally, the equations for the disordered model [Eqs. (6)] read

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi^i}{d\tau^2} + \alpha(1 + \varepsilon^i) \frac{d\phi^i}{d\tau} + (1 + \varepsilon^i) \sin \phi^i + \frac{dq}{d\tau} = \gamma_G + \zeta^i(\tau), \\ i = 1, 2, \dots, N \\ \frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{dq}{d\tau} + \Omega^2 q - \frac{1}{\beta_L} \sum_{i=1}^N \frac{d\phi^i}{d\tau} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

As a further simplification, we just assume here that the parameters are uniformly distributed in the interval $[-\sigma; +\sigma]$; that is,

$$\varepsilon^i = -\sigma + 2(i-1) \frac{\sigma}{N-1}, \quad (15)$$

because the fabrication tolerances are typically of the order of a few percent [22,23]. One can safely assume $\sigma = 0.1\% - 10\%$.

C. Algorithm for numerical solution

Equations (8) and (14) are simulated with the Euler algorithm [36]. Deterministic results have been obtained by using the fourth-order Runge–Kutta algorithm [37]. The stochastic results are averaged over as many realizations as necessary to guarantee convergence (in the statistical sense) within 5%. The Gaussian white noise is generated by using the Box–Muller algorithm [38] from two random numbers, a and b , which are uniformly distributed on the unit interval $[0,1]$. Thus, for each step $\Delta\tau$, ζ_n^i is obtained as follows:

$$\begin{aligned} a &= \text{random number}, \quad b = \text{random number}, \\ \zeta_n^i &= \sqrt{-4D\Delta\tau \ln(a)} \cos(2\pi b). \end{aligned} \quad (16)$$

The IV curves have been obtained by slowly increasing the current, with a step $\Delta\gamma_G = 0.01$, and by using the final state of the previous current step as the initial step for the increased (or decreased) current bias (see Fig. 2). At each current step a transient of about 1000 normalized time is discarded, and the averages are also calculated over the same time. The time step $\Delta\tau$ is, through all simulations, $\Delta\tau = 0.0001$ for the Euler algorithm and $\Delta\tau = 0.01$ for the fourth-order Runge–Kutta algorithm.

III. DETERMINISTIC ATTRACTORS AND STABILITY PROPERTIES

The properties of the uniform ($\sigma = 0$) array are the starting point to retrieve the effects of noise and disorder in the considered array of JJs coupled to a resonator. The dynamics of the ordered array is necessary to build a first approximation of the system, e.g., to find the hysteretic IV and the two frequencies (locked and unlocked), as well as the approximate limit cycle and so on. This knowledge is essential to reconstruct the response of the system in the actual disordered and noisy case. It is important to notice that the information we are aiming at, the effective energy barrier or quasipotential, is defined in the limit of vanishing noise; it is therefore conceivable that the properties retrieved in the noiseless case are valid in the limit in which one calculates the quasipotential.

A. Attractor properties

In Fig. 2 are shown the IV curves for arrays of two and five JJs, obtained by increasing and decreasing the bias current γ_G . The vertical dashed line denotes a particular bias point at which the system exhibits the two frequencies Ω_1 and Ω_3 . The two frequencies are obtained by increasing and decreasing the bias current, respectively. Thus, Ω_3 denotes the frequency on the so-called unperturbed IV curve (sometimes referred to as the McCumber branch) and Ω_1 is related to the resonance frequency of the RLC circuit [21]. Because the main purpose of this work is to illustrate the method of the quasipotential for JJs as birhythmic circuits, we have chosen a set of parameters that best fit this illustration. In particular, the high value of the coupling strength, $1/\beta_L = 100$, tightly couples the JJs parameters to the RLC tank resonator, which is therefore strongly influenced by the (nonlinear) inductance and other JJ parameters (capacitance and resistance). Thus, the resonance

TABLE I. Range of bias current corresponding to a JJ locked to the *RLC* series resonant state. The parameters are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$.

<i>N</i>	Bias currents	
	Minimum value	Maximum value
2	1.47	1.72
5	2.28	2.42

clearly appears to depend on the number of JJs—see the shift to higher voltage in Fig. 2(b).

The model is birhythmic, either for the case of a single Josephson junction or an array of JJs. Table I summarizes the range of bias currents corresponding to the resonant state.

Figures 3(a) and 3(c) display the projection of the phase portrait space in the *q-dq/dτ* plane and Figs. 3(b) and 3(d) show the time evolution of the instantaneous charge. The main features are the same as for a single JJ [34]: the branch locked to the resonator characterized by the frequency Ω_1 exhibits larger excursions of the charge oscillations, while the unlocked branch at the frequency Ω_3 is characterized by smaller oscillations. Between the two stable orbits one postulates the existence of an unstable orbit with frequency Ω_2 that represents the separatrix, whose exact position is not known

and can only be estimated [34]. From Fig. 3 it is evident that, as the number of junctions increases, the resonant state is moved to larger values of charge, while the amplitude of oscillations remains unchanged. However, the main features of the two orbits are independent of the number of elements of the model. The dynamics under the influence of noise, Fig. 4, shows that the oscillations are deformed, but still well separated. It is therefore possible to estimate the position of the separatrix q_s [34]: the examination of the time-dependent evolution of the charge q reveals that a sudden switch occurs when the charge suddenly passes to oscillations at a higher value. During this jump, the charge crosses a threshold q_s : for $q > q_s$ the charge quickly increases and then oscillates around a new value ($q \simeq 780$ in the figure). Thus one can roughly estimate the position of the separatrix; however, there is clearly an arbitrariness in identifying q_s . To refine this guess, it is possible to exploit the MFPT properties. In fact, the best estimate for the position of the separatrix is signaled by the change of the slope of the MFPT κ as a function of the threshold q_s [34], as shown in Fig. 5. The rationale is the following: as the threshold q_s approaches the actual position of the separatrix, the MFPT increases exponentially, for the quasipotential in correspondence of q_s increases. As the separatrix is passed, the MFPT increases much more weakly: beyond the maximum of the quasipotential, the threshold q_s , the system runs downhill. Thus, if the threshold point q_s is set before the separatrix the

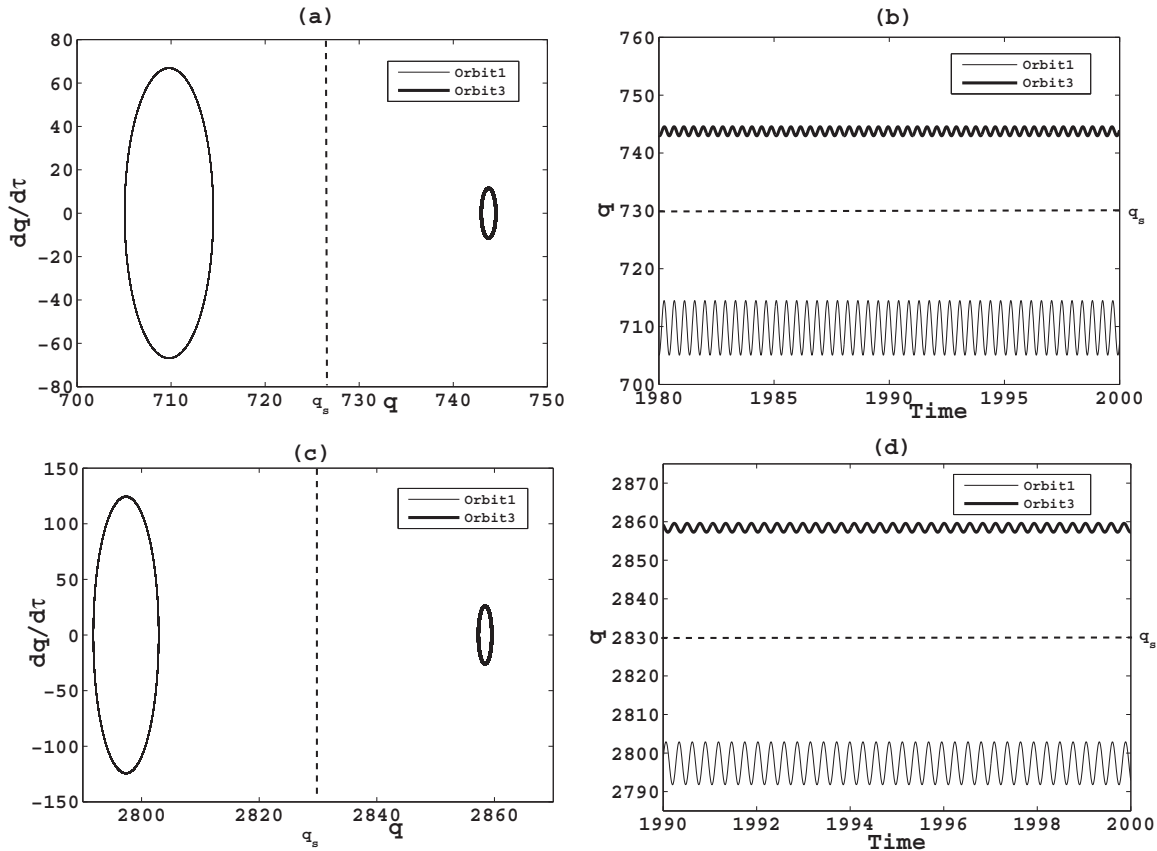


FIG. 3. Projection of the phase space in the *q-dq/dτ* plane and time evolution for the free noise coupled JJ model, $D = 0$. Here q_s indicates the hypothesized position of the separatrix. The parameters of the simulations are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, and $\alpha = 0.1$. For panels (a) and (b), $N = 2$, $\gamma_G = 1.50$; for panels (c) and (d), $N = 5$, $\gamma_G = 2.30$.

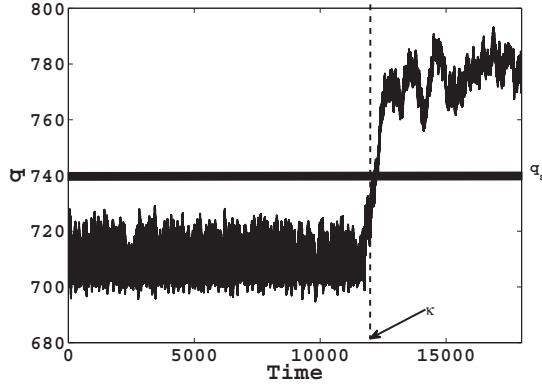


FIG. 4. Example of the switch from the attractor at frequency Ω_1 (locked to the *RLC* resonator) to the attractor at frequency Ω_3 (unlocked state) under the influence of noise. After the time $\kappa = 12\,000$ normalized units, the system crosses the estimated separatrix q_s . The parameters are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_G = 1.55$, $D = 0.15$, and $N = 2$.

MFPT increases sharply, while it weakly increases when the threshold is beyond the separatrix; therefore from the change of slope one can estimate the separatrix position. The knee of the MFPT, denoted by the vertical dashed line in Fig. 5, is used

as an effective separatrix to estimate the energy activation barrier.

The estimate of an energy activation barrier is practically implemented in Fig. 6 for a bias current $\gamma_G = 2.30$ and $N = 5$ junctions. The linear relationship between the logarithm of the escape time κ and the inverse of the noise offers the estimate of an effective energy barrier ΔU [30,32]:

$$\Delta U = \lim_{D \rightarrow 0} D \ln(\kappa). \tag{17}$$

In practical terms, for low enough noise one uses the approximated expression [32]

$$\Delta U \simeq \frac{\Delta \ln(\kappa)}{\Delta(1/D)}. \tag{18}$$

Equation (18) is the basis for the definition of an effective activation energy associated with the metastable state in the birhythmic region, which is the subject of the next section.

B. Effective energy barriers

In this section, we analyze the behavior of the effective activation energy, or pseudopotential, as a function of the bias point; see Fig. 2. In the two panels of Fig. 7 the common feature is that the activation energy is decreased along the step [$0.02 \leq \Delta U \leq 0.14$ for Fig. 7(a) and $0.02 \leq \Delta U \leq 0.07$ for

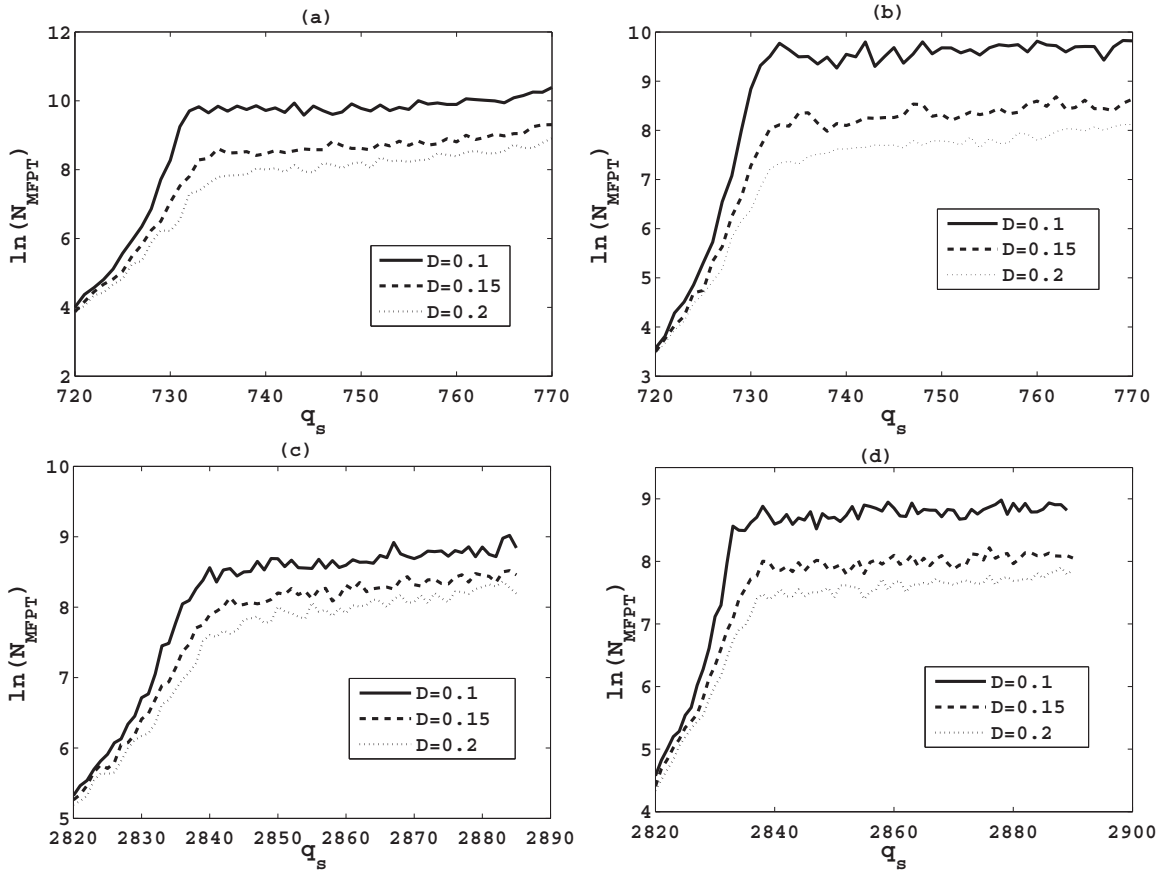


FIG. 5. Average MFPT as a function of a threshold q_s at different values of applied current γ_G and noise intensity D . It is evident that the method of the knee to identify the separatrix works in a variety of parameters. The parameters are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, and $\alpha = 0.1$. For panel (a), $N = 2$, $\gamma_G = 1.50$; for panel (b), $N = 2$, $\gamma_G = 1.53$; for panel (c), $N = 5$, $\gamma_G = 2.30$; for panel (d), $N = 5$, $\gamma_G = 2.36$.

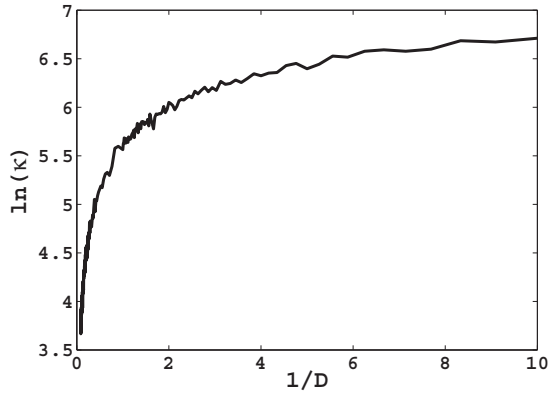


FIG. 6. Example of average of the logarithm of the escape time κ from an attractor vs the inverse of the noise intensity, $1/D$. The parameters are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_G = 2.30$, and $N = 5$.

Fig. 7(b)]: At the bottom of the step the energy barrier is at a maximum, it decreases while the current is raised, and almost disappears at the top of the step. Moreover, from Fig. 7 it is evident that the energy barrier decreases as the number of JJ elements increases.

IV. EFFECTS OF DISORDER IN THE MODEL

Josephson junctions are fabricated with photolithographic processes, and therefore each junction is different from the other [22,23]. The consequences of disorder are the subject of this section.

A. IV characteristics

The IV characteristics of disordered arrays are first investigated for the noiseless case, i.e., setting $D = 0$ in the noise term (8) that affects Eq. (14), and setting $\sigma \neq 0$ in Eq. (15). Figure 8 shows the resulting IV increasing values of the disorder parameter σ . From the data it is evident that, as the disorder parameter increases, birhythmicity disappears, and the system remains birhythmic only for the low values of the disorder parameter, $\sigma < 4\%$. The behavior is confirmed by the diagram of the voltage as a function of disorder in Fig. 9.

The curves are obtained by starting from the RLC locked state for uniform JJ, $\sigma = 0$, and then slowly increasing the disorder up to $\sigma = 10\%$. The procedure is then reversed, and the disorder is slowly decreased. In Fig. 9(a) it is evident that disorder induces desynchronization. This is complementary to the observation that varying the number of junctions the arrays lock to the cavity [21].

B. Attractor properties

As the birhythmicity of the system remains for low values of the disorder σ , simulations have been performed to investigate the attractors for low disorder values (e.g., $\sigma = 0.1\%$, 0.3% , 0.55% , ...). The qualitative properties are similar for all the low values of disorder considered, and therefore one can just focus on $\sigma = 0.1\%$. The resulting IV curve is displayed in Fig. 10 and is very similar to the uniform case of Fig. 2(b). Inspection of the same behavior displayed in Fig. 3 reveals that, for the low-disorder case, the amplitude of the oscillations at the frequency Ω_1 (the RLC frequency) is much larger than the oscillations at the frequency Ω_3 (the unlocked or McCumber solution [1]). However, at variance with the uniform case of Fig. 3, the amplitude of the oscillations is much smaller. As $D \neq 0$, it is evident that the attractors are still clearly separated, but the transition from an attractor to the other is much smoother, as shown in Fig. 11 (that can be compared with the uniform case of Fig. 4). Under the combined effect of noise and disorder the passage from one attractor to another is much less sharp, and it is therefore much more difficult to identify the separatrix q_s . This is the second remarkable effect of disorder: the switch from the orbit of frequency Ω_3 to the orbit at frequency Ω_1 is less neat, and therefore the position of the separatrix cannot be retrieved by using the mean first passage time method of Fig. 5. The change induced by disorder entails a difficulty in the evaluation of the energy barrier and of the study of the global stability.

V. CONCLUSIONS

This work analyzes the behavior of coherent cooperation of Josephson junctions, a topic of interest for practical reasons

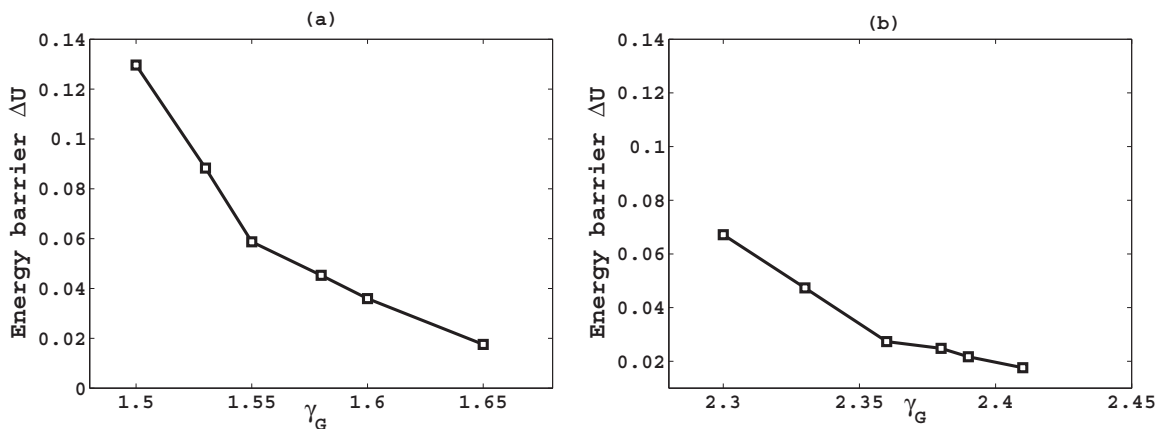


FIG. 7. Energy barrier for the escape from the attractor at frequency Ω_1 (locking to the resonator) as a function of the applied bias current. The parameters are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, and $\alpha = 0.1$; with (a) $N = 2$, (b) $N = 5$.

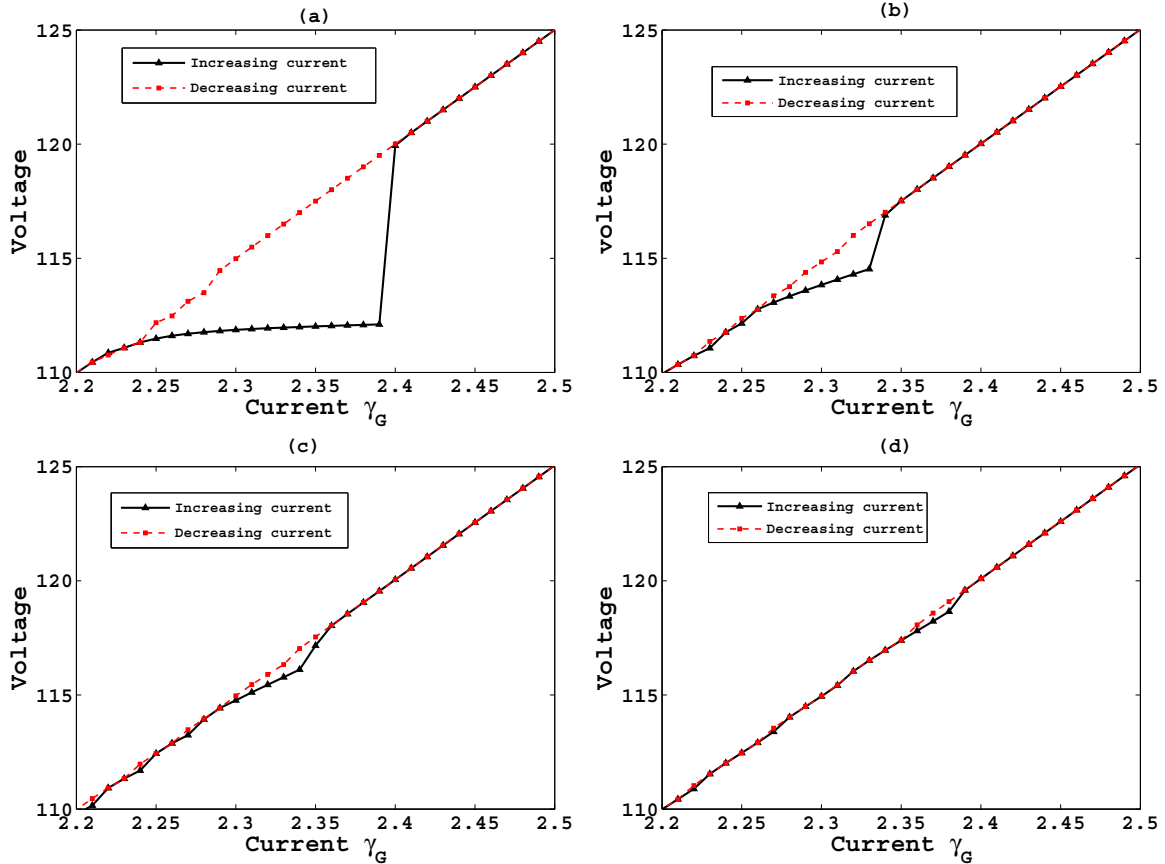


FIG. 8. Normalized IV curves of coupled disordered JJs for both increasing and decreasing bias current γ_G . The parameters are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $\alpha = 0.1$, $N = 5$. (a) $\sigma = 1\%$; (b) $\sigma = 2\%$; (c) $\sigma = 3\%$; (d) $\sigma = 4\%$.

(e.g., increase the emitted power [25,26]) and as a prototype for synchronization [15,16,39]. Series arrays of identical Josephson junctions coupled through a linear *RLC* resonator behave qualitatively as a single junction; for instance, exhibit two clearly distinct frequencies in the locked and unlocked (to the resonator) cases. The approximation of identical Josephson junctions is unrealistic, because the fabrication process produces changes from junction to junction [22,23]. When

disorder and noise are included, some special features of the arrays emerge, in particular the possibility of large excursions that drive the system from the locked to the unlocked state [18]. Such large excursions cannot be treated in the framework of the Kuramoto model, which deals with the local stability properties [29]. An alternative approach based on the quasipotential method [30,31] has proven fruitful for the single-junction case, for both the voltage standard application

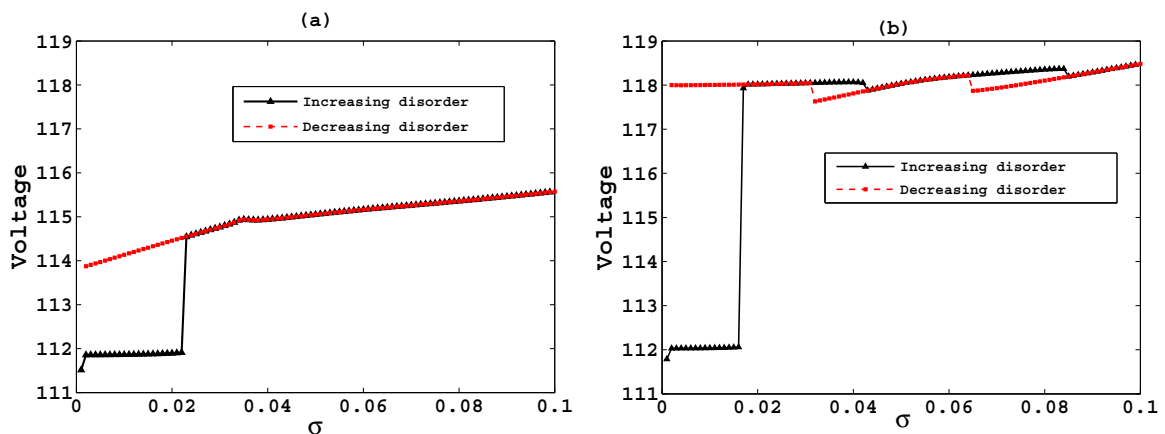


FIG. 9. Normalized voltage as a function of the noise variance σ . The parameter are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $N = 5$. (a) $\gamma_G = 2.30$; (b) $\gamma_G = 2.36$.

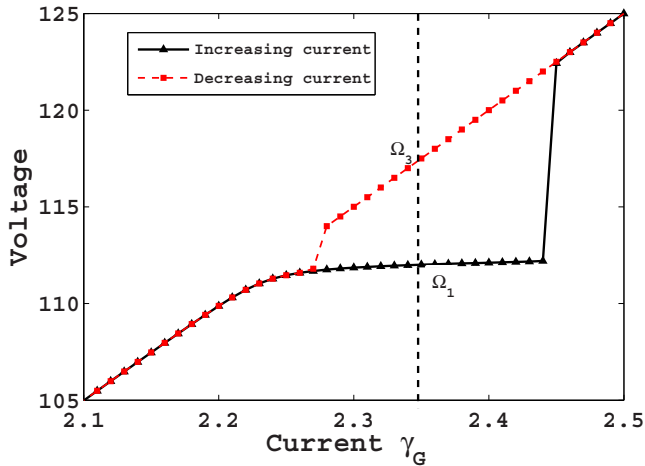


FIG. 10. Normalized IV curves for the disordered coupled JJ model for both increasing and decreasing bias current γ_G . The parameters are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2.0$, $\alpha = 0.1$, $N = 5$, and $\sigma = 0.1\%$.

in which the JJ is driven by an external rf source [33] and of a single JJ coupled to a resonator [34]. We have extended the application of the method to a series array coupled to an RLC resonator. To make the extension possible it has been necessary to identify the effective separatrix—the passage from the locked to the unlocked phase-space region. This effective border is difficult to determine, even in the noiseless and ordered case, for the system is high dimensional ($2N + 2$ dimensions for N junctions). The employed method is an approximate one: only supposing that the separation region is just a plane identified by a single coordinate (the charge on the resonator), it is possible to compute the MFPT to cross this border as a function of the charge threshold. In analogy with the single-JJ case, one expects that the MFPT behavior suddenly changes when the threshold is passed. Numerical findings are encouraging: the change in the slope is neat and can be clearly identified also in the case of multiple JJs, up to $N = 5$. Thus, it is possible to compute the effective confining energy for ordered multiple JJs coupled to a resonator. The numerical investigation has revealed two important features. First, the behavior of this effective energy is similar to the case of a single JJ: it is higher at the top of the resonant step and becomes smaller towards the bottom. Second, the effective

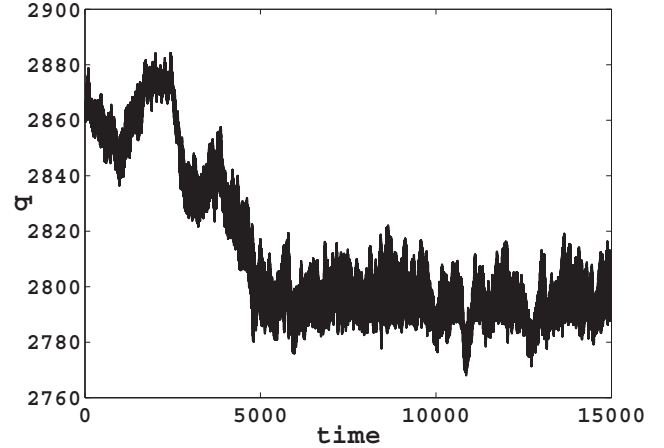


FIG. 11. Example of a switch from the locked attractor at the RLC frequency Ω_1 to the unlocked at the McCumber frequency Ω_3 under the influence of noise for the disordered JJ. Between the initial time and the normalized time 5000 system crosses the separatrix q_s . The parameters are $\beta_L = 0.01$, $Q = 200$, $\Omega = 2$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_G = 2.30$, $\sigma = 0.1\%$, $D = 0.2$, and $N = 5$.

energy barrier decreases with the number of JJs, making it easier to pass from the locked to the unlocked state when more JJs are present. In the presence of disorder the situation looks more complicated: the locked and unlocked states get closer to each other, and therefore it is more difficult to identify, with the above method, the effective separatrix. However, for very low disorder the method is applicable and it appears that the system retains the qualitative features of the passages from one state to the other. Some limits of the present study are evident. First, this is a proof of principle for relatively few JJs. Second, the analysis has been applied for a specific configuration of the external load. It would be interesting to extend the investigation to other configurations [27,28] to investigate the role of the resonator and JJ parameters. Both extensions call for much more demanding numerical simulations, possibly with massive parallel computations on cheap CUDA hardware [40].

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank V. Pierro for useful discussions.

-
- [1] A. Barone and G. Paternó, *Physics and Applications of the Josephson Effect* (Wiley and Sons, New York, 1982).
 - [2] A. K. Jain, K. K. Likharev, J. E. Lukens, and J. E. Sauvageau, *Phys. Rep.* **109**, 309 (1984).
 - [3] O. Decroly and A. Goldbeter, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **79**, 6917 (1982).
 - [4] M. Morita, K. Iwamoto, and M. Senō, *Phys. Rev. A* **40**, 6592 (1989).
 - [5] T. Haberichter, M. Marhl, and R. Heinrich, *Biophys. Chem.* **90**, 17 (2001).
 - [6] O. V. Sosnovtseva, D. Setsinsky, A. Fausboll, and E. Mosekilde, *Phys. Rev. E* **66**, 041901 (2002).
 - [7] W. Abou-Jaoudé, M. Chaves, and J. L. Gouz, *PLoS One* **6**, e17075 (2011).
 - [8] H. G. Enjieu Kadji, J. B. Chabi Orou, R. Yamapi, and P. Wafo, *Chaos, Solitons Fractals* **32**, 862 (2007).
 - [9] A. Zakharova, T. Vadivasova, V. Anishchenko, A. Koseska, and J. Kurths, *Phys. Rev. E* **81**, 011106 (2010).
 - [10] R. Yamapi, G. Filatrella, and M. A. Aziz-Alaoui, *Chaos* **20**, 013114 (2010).

- [11] P. Ghosh, S. Sen, S. S. Riaz, and D. S. Ray, *Phys. Rev. E* **83**, 036205 (2011).
- [12] R. Yamapi, G. Filatrella, M. A. Aziz-Alaoui, and H. A. Cerdeira, *Chaos* **22**, 043114 (2012).
- [13] X. L. Yue, W. Xu, L. Wang, and B. Zhou, *Probab. Eng. Mech.* **30**, 70 (2012).
- [14] K. K. Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits* (Gordon and Breach, Philadelphia, 1986).
- [15] P. Hadley, M. R. Beasley, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. B* **38**, 8712 (1988).
- [16] K. Wiesenfeld, P. Colet, and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 404 (1996).
- [17] A. B. Cawthorne, P. Barbara, S. V. Shitov, C. J. Lobb, K. Wiesenfeld, and A. Zangwill, *Phys. Rev. B* **60**, 7575 (1999).
- [18] P. Barbara, A. B. Cawthorne, S. V. Shitov, and C. J. Lobb, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1963 (1999).
- [19] B. Vasilic, S. V. Shitov, C. J. Lobb, and P. Barbara, *Appl. Phys. Lett.* **78**, 1137 (2001).
- [20] G. Filatrella, N. F. Pedersen, and K. Wiesenfeld, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **11**, 1184 (2001).
- [21] G. Filatrella, N. F. Pedersen, C. J. Lobb, and P. Barbara, *Eur. Phys. J. B* **34**, 3 (2003).
- [22] S. K. Tolpygo, V. Bolkhovskiy, T. J. Weir, L. M. Johnson, M. A. Gouker, and W. D. Oliver, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **25**, 1101312 (2015).
- [23] S. K. Tolpygo, V. Bolkhovskiy, S. Zarr, T. J. Weir, A. Wynn, A. L. Day, L. M. Johnson, and M. A. Gouker, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **27**, 1 (2017).
- [24] G. Filatrella, G. Rotoli, N. Grønbech-Jensen, R. D. Parmentier, and N. F. Pedersen, *J. Appl. Phys.* **72**, 3179 (1992).
- [25] M. Tachiki, K. Ivanovic, K. Kadowaki, and T. Koyama, *Phys. Rev. B* **83**, 014508 (2011).
- [26] U. Welp, K. Kadowaki, and R. Kleiner, *Nat. Photonics* **7**, 702 (2013).
- [27] Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. V. Kulikov, A. E. Botha, A. Plecenik, P. Seidel, and W. Nawrock, *Supercond. Sci. Technol.* **30**, 024006 (2017).
- [28] Y. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, and K. V. Kulikov, *JETP Lett.* **96**, 657 (2012).
- [29] F. A. Rodrigues, T. DM. Peron, P. Ji, and J. Kurths, *Phys. Rep.* **610**, 1 (2016).
- [30] R. Graham and T. Tél, *Phys. Rev. A* **33**, 1322 (1986).
- [31] F. Bouchet, K. Gawedzki, and C. Nardini, *J. Stat. Phys.* **163**, 1157 (2016).
- [32] R. L. Kautz, *Phys. Rev. A* **38**, 2066 (1988).
- [33] R. L. Kautz, *Rep. Prog. Phys.* **59**, 935 (1996).
- [34] R. Yamapi and G. Filatrella, *Phys. Rev. E* **89**, 052905 (2014).
- [35] S. Z. Lin, X. Hu, and L. Bulaevskii, *Phys. Rev. B* **84**, 104501 (2011).
- [36] R. F. Fox, I. R. Gatland, R. Roy, and G. Vemuri, *Phys. Rev. A* **38**, 5938 (1988).
- [37] L. Lapidus and J. H. Seinfeld, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations* (Academic Press, New York, London, 1971).
- [38] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming* (Addison-Wesley, Reading, 1969), Vol. 2.
- [39] S. Boccaletti, J. A. Almendral, S. Guan, I. Leyva, Z. Liu, I. Sendiña-Nadalde, Z. Wang, and Y. Zou, *Phys. Rep.* **660**, 1 (2016).
- [40] V. Pierro, L. Troiano, E. Mejuto, and G. Filatrella, *J. Comput. Phys.* **361**, 136 (2018).