

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDÉ I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GÉOSCIENCES

UNITÉ DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN MATHÉMATIQUES,
INFORMATIQUE, BIOINFORMATIQUE ET
APPLICATIONS

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE D'ANALYSE ET
D'APPLICATIONS



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

THE UNIVERSITY OF YAOUNDÉ I

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCES,
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR MATHEMATICS, COMPUTER
SCIENCES AND APPLICATIONS

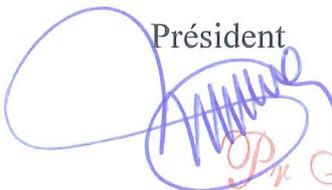
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
LABORATORY OF ANALYSIS AND
APPLICATIONS

ATTESTATION DE CORRECTION

Nous, soussignés, **Pr. AYISSI Raoul Domingo**, **Pr. CIAKE CIAKE Fidèle Lavenir**, **Pr. TAKOU Etienne**, membres du jury de la thèse de Doctorat/Ph.D présentée par **M. TEYANG Franck Modeste**, Matricule **12V0212**, intitulée : « **STABILITÉ DE L'ESPACE-TEMPS DE De-SITTER POUR LE SYSTÈME D'EINSTEIN-MAXWELL-KLEIN-GORDON AVEC CONSTANTE COSMOLOGIQUE POSITIVE** » et soutenue en vue de l'obtention du diplôme de **Doctorat/ Ph.D en Mathématiques** le **24 Octobre 2024**, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance, en vue de l'amélioration de la qualité de ce travail, ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Président


Pr Ayissi Raoul
Université de Yaoundé I

Examineur(s)


E. TIKOU


CIAKE CIAKE

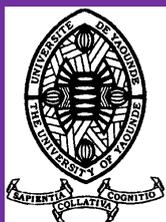
RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDÉ I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES,
TECHNOLOGIES ET GÉOSCIENCES

UNITÉ DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN MATHÉMATIQUES,
INFORMATIQUE, BIOINFORMATIQUE ET
APPLICATIONS



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

THE UNIVERSITY OF YAOUNDÉ I

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCES,
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR MATHEMATICS, COMPUTER
SCIENCES AND APPLICATIONS

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

LABORATOIRE D'ANALYSE ET D'APPLICATIONS
LABORATORY OF ANALYSIS AND APPLICATIONS

STABILITÉ DE L'ESPACE-TEMPS DE DE-SITTER POUR LE SYSTÈME D'EINSTEIN-MAXWELL-KLEIN-GORDON AVEC CONSTANTE COSMOLOGIQUE POSITIVE

Thèse présentée en vue de l'obtention du **Doctorat /Ph.D de Mathématiques**

Spécialité : Analyse

Option : Équations aux Dérivées Partielles

Par :

TEYANG Franck Modeste

Master en Mathématiques

Matricule : **12V0212**

Sous la direction de :



NOUNDJEU Pierre
Maître de Conférences
Université de Yaoundé I

Et de

TEGANKONG David
Maître de Conférences
Université de Yaoundé I

Année Académique : 2023-2024

♠ Table des matières ♠

Remerciements	iii
Déclaration sur l'honneur	iv
Résumé	v
Abstract	vi
Introduction	1
0.1 Résultats connus	4
0.2 Résultat principal	6
0.3 Plan du travail	7
1 Équation intégro-différentielle d'évolution	8
1.1 Quelques notions préliminaires	8
1.1.1 Propriétés fondamentales des équations différentielles ordinaires	8
1.1.2 Géométrie Pseudo-Riemannienne	10
1.1.3 Les équations d'Euler-Lagrange	11
1.2 Équations d'Einstein-Maxwell-Champ Scalaire	13
1.3 Équation intégro-différentielle équivalente	23
2 Existence locale de solution	30
2.1 La fonction de masse de Hawking	30
2.2 Espace fonctionnel	32
2.3 Estimations à priori	33
2.4 Théorème d'existence locale de solution	40
3 Existence globale et comportement asymptotique	55
3.1 Existence globale de solution en temps	55
3.2 Comportement asymptotique des solutions	60

3.2.1 Complétude géodésique	65
3.2.2 Résultat de stabilité	69
3.3 Preuve du théorème principal	70
Conclusion et futurs travaux	71
Bibliographie	73
Annexe	77

♠ Remerciements ♠

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers les Professeurs Noundjeu Pierre et Tegankong David, qui ont eu la générosité de m'initier à la recherche en me guidant tout au long de cette thèse. Leur disponibilité inébranlable et leur patience infinie ont été d'un soutien inestimable. Les échanges et discussions enrichissants que nous avons eus ont été une source constante d'inspiration pour résoudre les nombreux défis auxquels j'ai été confronté.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance envers tous les enseignants du département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I. Leurs échanges stimulants, notamment lors des séminaires, ont grandement contribué à mon développement académique.

Un chaleureux merci à tous mes camarades doctorants et anciens doctorants pour l'atmosphère exceptionnelle qu'ils ont créée au fil des années. Leur soutien et leur camaraderie ont rendu cette expérience encore plus mémorable. Je tiens également à remercier tous mes amis et anciens camarades pour les échanges fructueux que nous avons eus. Je pense particulièrement à Zotcha Arsene, Bedong Amassoumou, Tchoumeni Ferdinand et Sockeng Herman, dont les discussions passionnantes ont nourri ma réflexion.

Enfin, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers ma famille pour son soutien indéfectible tout au long de mes années d'études. Je tiens à rendre hommage à ma chère mère, Madame Tchoumou Pascaline, ainsi qu'à mes frères et sœurs, qui ont été une source constante de motivation et d'encouragement.

Ces mots ne suffisent pas à exprimer à quel point je suis reconnaissant envers tous ceux qui ont contribué à cette thèse. Leur soutien inébranlable et leur collaboration précieuse ont été des éléments essentiels de mon parcours académique et personnel.

♠ Déclaration sur l'honneur ♠

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

TEYANG Franck Modeste

♠ Résumé ♠

Les équations de Maxwell-Klein-Gordon (MKG) sont un système d'équations non linéaires qui modélisent le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. Dans ce travail, nous considérons le système d'Einstein-Maxwell-Champ Scalaire avec constante cosmologique positive ($EMSC_\Lambda$) qui est ainsi une forme générale des équations de MKG et nous étudions la stabilité asymptotique dans le futur des solutions de ce système. Cette étude apparaît comme une généralisation des travaux de Dongho Chae [7] et de Costa et *al* [15]. En effet, nous modifions le cadre développé par Chae dans [7] pour étudier le système d'Einstein-Maxwell-Champ Scalaire sans constante cosmologique en introduisant une constante cosmologique positive $\Lambda > 0$. D'autre part, le système d'Einstein-Champ Scalaire avec constante cosmologique positive (ECS_Λ) étudié par Costa et *al* dans [15] devient un cas particulier du système $d'EMCS_\Lambda$ étudié ici ; puisque nous considérons un champ scalaire complexe contrairement au choix d'un champ scalaire réel fait par Costa et *al*.

Pour atteindre ce but, nous choisissons comme cadre géométrique l'espace-temps à symétrie sphérique de Bondi dans lequel nous écrivons le système $d'EMCS_\Lambda$ en coordonnées de Bondi et nous remarquons que le contenu complet du système se réduit en une seule équation aux dérivées partielles (intégré-différentielle) non linéaire du premier ordre équivalente au système. Pour étudier le problème de Cauchy associé à cette équation intégré-différentielle équivalente, nous prescrivons la donnée initiale sur un cône isotrope. Avec une telle donnée initiale choisie suffisamment petite, nous démontrons que cette équation admet une unique solution locale et globale en temps de Bondi. Nous montrons aussi que l'espace-temps est asymptotiquement de De-Sitter et est géodésiquement complète vers le futur : il s'agit d'un résultat de stabilité non linéaire de De-Sitter pour le système $d'EMCS_\Lambda$ mais aussi d'une réalisation de la *Censure cosmique*.

Mots clés : Espace-temps à symétrie sphérique de Bondi, équations d'Einstein-Maxwell-Klein-Gordon, stabilité, Espace-temps de De-Sitter, complétude géodésique, censure cosmique.

♠ Abstract ♠

The Maxwell-Klein-Gordon (MKG) equations are a system of nonlinear equations that model the motion of a charged particle in an electromagnetic field. In this work, we consider the Einstein-Maxwell-Scalar Field system with a positive cosmological constant ($EMSC_\Lambda$), which is thus a general form of the MKG equations, and we study the asymptotic stability of the solutions to this system in the future. This study appears as a generalization of the work by Dongho Chae [7] and Costa et al. [15]. Indeed, we modify the framework developed by Chae in [7] to study the Einstein-Maxwell-Scalar Field system without a cosmological constant by introducing a positive cosmological constant $\Lambda > 0$. On the other hand, the Einstein-Scalar Field system with a positive cosmological constant (ECS_Λ) studied by Costa et al. in [15] becomes a special case of the $EMCS_\Lambda$ system examined here, since we consider a complex scalar field, unlike Costa et al.'s choice of a real scalar field.

To reach this goal, we choose the Bondi spherically symmetric spacetime as the geometric framework in which we write the $EMCS_\Lambda$ system in Bondi coordinates, and we remark that the full content of this system is encoded in a single nonlinear first-order partial differential (integro-differential) equation equivalent to the system. To study the associated Cauchy problem for this equivalent integro-differential equation, we prescribe the initial data on an isotropic cone. With such initial data chosen sufficiently small, we demonstrate that this equation admits a unique local and global solution in Bondi time. We also show that the spacetime is asymptotically de Sitter and is geodesically complete in the future : this is a result of nonlinear de Sitter stability for the $EMCS_\Lambda$ system as well as a realization of *cosmic censorship*.

Keywords : Bondi spherically symmetric spacetime, Einstein-Maxwell-Klein-Gordon equations, stability, De-Sitter spacetime, geodesic completeness, cosmic censorship.

♠ Introduction ♠

En 1917, Albert Einstein [18] publia dans un document sur la théorie de la relativité générale et les équations d'Einstein, qui intègrent la théorie classique relativiste des champs avec les effets de la gravitation. Quelques années auparavant, Einstein avait profondément marqué la communauté scientifique avec sa théorie de la relativité restreinte, dans laquelle les anciens postulats galiléens tels que le temps et l'espace absolus étaient abandonnés au profit d'une théorie plus complexe où il n'existe pas d'observateur absolu. Du point de vue mathématique, la théorie de la relativité générale est assez complexe, car elle est de nature géométrique, décrivant le système physique à travers la structure de l'espace-temps. Les conséquences directes de cette théorie incluent les prédictions des trous noirs et de l'expansion de l'univers.

Bien que Y. Choquet-Bruhat [11] a montré que le problème de Cauchy associé aux équations d'Einstein est bien posé, la recherche d'une solution globale en temps d'un tel système sans hypothèses de symétrie est difficile en général et est restée assez longtemps un challenge pour les mathématiciens et les physiciens [10]. C'est ainsi que pour simplifier la preuve de l'existence globale de solutions, les chercheurs font des hypothèses de symétries. Dans cette perspective, le premier résultat sur l'existence locale de solution pour les équations d'Einstein sans hypothèse sur la métrique avait été prouvé par Y. Fourès-Bruhat [20]. Cependant, les résultats d'existence globale ne sont pas généraux en termes d'hypothèses sur les données initiales et les symétries des géométries lorentziennes à construire. Dans le même sens, Chae a généralisé (en y ajoutant un champ scalaire chargé) dans [7], le *travail monumental* de Christodoulou [12] sur l'existence globale des solutions classiques pour le système d'Einstein-Champ Scalaire en prouvant un théorème d'existence des solutions globales classiques à symétrie sphérique du système d'Einstein-Maxwell-Champ Scalaire qui s'approchent asymptotiquement de l'espace-temps plat de Minkowski. Compte tenu de la variété d'articles publiés sur l'étude du système d'Einstein-Maxwell-Champ Scalaire et dont nous ne pouvons tous les énumérer ici, nous renvoyons le lecteur intéressé à [27, 28, 29, 39] et aux références qui s'y trouvent.

D'autre part, l'introduction d'une constante cosmologique positive Λ dans les équations de champ d'Einstein permet de modéliser les périodes d'inflation et d'expansion accélérée de l'univers et par conséquent joue un rôle central dans la modélisation de l'expansion de l'univers. En plus, l'étude du système Einstein-Maxwell-Champ scalaire offre plusieurs perspectives enrichissantes pour explorer la physique gravitationnelle, la cosmologie, la physique des trous noirs et les liens avec les théories fondamentales telles que la théorie des cordes [24]. Ainsi, un cadre est fourni par la *censure cosmique*, qui stipule que les solutions génériques en expansion des équations de champ d'Einstein avec une constante cosmologique positive s'approchent asymptotiquement de la solution de De-Sitter [36, 46]. Cette *censure cosmique* a été rigoureusement prouvée pour une variété de modèles de matière avec ou sans conditions de symétrie dans [1, 2, 5, 21, 17, 39, 45]. Ainsi, nous remarquons que si nous couplons les équations de Maxwell au système de champ d'Einstein avec une constante cosmologique positive, les mêmes résultats peuvent être prouvés, puisque le champ électromagnétique F , solution des équations de Maxwell peut être facilement relié à la métrique g de l'espace-temps considéré.

Par conséquent, nous considérons le système $d'EMCS_\Lambda$ qui a l'avantage de modéliser un ensemble de particules (qui peuvent être des étoiles, des galaxies ou des amas de galaxies) dans l'univers. La motivation principale de ce choix vient du travail de Chae [7] (inspiré par [28] mais aussi par une quantité considérable de travaux numériques, notamment ceux de Hod et Piran [25, 26]) portant sur l'existence globale de solutions à symétrie sphérique du système d'Einstein-Maxwell-Champ scalaire sans constante cosmologique ($\Lambda = 0$). Ensuite, nous modifions le cadre fonctionnel développé en [7] pour prendre en considération la présence de la constante cosmologique, réduisant ainsi le contenu complet du système de champ d'Einstein-Maxwell à une seule équation aux dérivées partielles d'évolution non linéaire du premier ordre. Il est donc naturel, étant donné la structure de l'équation et le domaine du système de coordonnées de Bondi où la réduction est effectuée, de considérer un problème de Cauchy caractéristique en prescrivant la donnée initiale sur un cône isotrope. Nous prouvons alors que pour une donnée initiale petite, un tel problème possède une unique solution globale en temps qui décroît exponentiellement en temps (de Bondi). Il s'ensuit que des données initiales suffisamment proches de celles de De-Sitter évoluent selon le système considéré vers un espace-temps qui se rapproche asymptotiquement d'une région de De-Sitter à une vitesse exponentielle : il s'agit d'un résultat de stabilité non linéaire pour De-Sitter et peut ainsi être considéré comme une réalisation de la *Censure Cosmique*.

Comme le cas d'un champ scalaire non chargé [15] et le cas du système d'Einstein-

Maxwell-Champ scalaire avec une constante cosmologique nulle [7] ont été déjà étudiés, l'ajout d'un champ scalaire chargé d'un côté ([15]) et la présence d'une constante cosmologique positive de l'autre côté ([7]) augmentent considérablement la difficulté du problème à résoudre. En effet, au moyen du théorème du point fixe de Banach, un théorème d'existence de solution globale (et unicité) a été directement prouvé dans [7] pour le domaine entier (global en temps et en espace) ; cependant, une telle stratégie (preuve directe de l'existence globale) ne fonctionne pas (au moins pour des espaces fonctionnels analogues i.e les espaces fonctionnels dont les normes sont définies avec poids $(1 + r + u)^j$, $j \geq 1$) lorsqu'une constante cosmologique positive est considérée, puisque la contraction globale n'est plus possible avec le terme apporté par Λ . D'autre part, en couplant les équations de Maxwell au système $d'ECS_\Lambda$ étudié par Costa et al. [15], l'équation de Klein-Gordon déduite possède des termes supplémentaires apportés par la fonction charge locale Q liée au potentiel A , ce qui a une conséquence importante sur la technique utilisée dans [15] pour la preuve de l'existence locale de solution. En effet, ces nouveaux termes rendent impossible l'utilisation de la méthode basée sur les itérations. Nous notons en plus que contrairement au cas du champ scalaire réel, qui contraint les équations de Maxwell à être sans source, un champ scalaire complexe qui satisfait l'équation de Klein-Gordon apporte un autre problème mathématique intéressant à résoudre car sa source dépend maintenant du champ scalaire complexe Φ via le vecteur courant J . Ainsi, la conséquence directe des problèmes causés par l'ajout des équations de Maxwell est que la stratégie utilisée dans [15] devient obsolète.

Pour surmonter ces difficultés, nous avons été contraints de modifier considérablement la stratégie utilisée non seulement dans [7] mais aussi celle utilisée dans [15]. Pour montrer l'existence globale de solutions de en temps, nous procédons par deux étapes : nous prouvons premièrement un théorème d'existence locale en temps, puis nous trouvons un moyen d'étendre indéfiniment la solution. Contrairement à la méthode d'itérations utilisée dans [15] pour prouver l'existence locale en temps, nous sommes contraint de passer par la méthode du point fixe à cause de l'apparence de la constante $C^0 > 0$ dans (2.39). En effet, si nous supposons comme hypothèse d'induction $\|h_n\|_{C_{U,R_0}^0} \leq C^0 \|h_0\|_{C_{R_0}^0}$, alors nous arrivons au rang $n + 1$ à $\|h_{n+1}\|_{C_{U,R_0}^0} \leq C^1 \|h_0\|_{C_{R_0}^0}$, où C^1 est strictement supérieur à C^0 . De ce fait, il devient impossible de conclure par induction que $\|h_n\|_{C_{U,R_0}^0} \leq C^0 \|h_0\|_{C_{R_0}^0}$, pour tout n . D'autres part, la méthode utilisée dans [15] pour étendre la solution étant principalement basée sur l'égalité $\|h\|_{C^0([0,R_0])} = \|h_0\|_{C_{R_0}^0}$ (ou au moins avec l'inégalité $\|h\|_{C^0([0,R_0])} \leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0}$) que nous n'avons pas dans le cas étudié ici. Cette égalité permet de montrer que chaque fois qu'on étend la solution d'un temps à un autre temps $U > 0$, on

obtient toujours $\|h\|_{C^0_{kU,R_0}} = \|h_0\|_{C^0_{R_0}}$, pour $k \in \mathbb{N}$ ce qui est essentiel lorsqu'on veut appliquer le résultat d'existence locale de manière itérative. Cependant, puisque nous avons plutôt obtenu l'inégalité $\|h\|_{C^0_{U,R_0}} \leq C^0 \|h_0\|_{C^0_{R_0}}$, (et on montre que $C^0 > 1$), en procédant de même, nous obtiendrons $\|h\|_{C^0_{kU,R_0}} \leq kC^0 \|h_0\|_{C^0_{R_0}}$, ce qui ne permet pas de contrôler $\|h(kU, \cdot)\|_{C^0_{R_0}}$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. C'est pourquoi, nous utilisons le critère de continuation afin de contourner ce problème. Pour le bon fonctionnement de cette stratégie, nous limitons notre analyse comme dans [15] à un intervalle fini de la coordonnée radiale (nous prenons $r \in [0, R_0[$); il convient de noter que bien que finie (la coordonnée radiale), les résultats obtenus ici peuvent rester valable pour un domaine radial arbitrairement grand. En effet, si on impose des conditions aux limites à $r = R_0$, avec R_0 le rayon maximal, ce sera sans importance car pour un rayon suffisamment grand, la coordonnée radiale des caractéristiques devient une fonction croissante du temps u et par conséquent, les données à la frontière $r = R_0$ sont complètement déterminées par les données initiales.

0.1 Résultats connus

L'étude des propriétés globales de solutions de diverses équations d'Einstein-matière avec une constante cosmologique positive a été d'un intérêt particulier pour les mathématiciens (et les physiciens) et une activité récente remarquable, motivée par sa riche structure mathématique et son contenu physique pertinent.

Le premier résultat de stabilité non linéaire pour les équations d'Einstein a été prouvé par Friedrich [21]. Au moyen de la *méthode conforme*, il a prouvé la stabilité non linéaire de l'espace-temps de De-Sitter dans la classe des solutions des équations d'Einstein du vide avec constante cosmologique positive sans hypothèse de symétrie. Bien que cette méthode ait l'avantage d'éviter des difficultés liées à l'existence globale des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques non linéaires, elle est limitée au cas où la dimension de l'espace-temps est $3 + 1$ et est difficile à généraliser au système d'Einstein-matière. Anderson a apporté dans [1] une nouvelle preuve du théorème de Friedrich sur l'existence et la stabilité des espaces-temps asymptotiquement de De-Sitter en dimension $3 + 1$ et a étendu ces résultats en dimension $n + 1$ avec n impair. Toujours par rapport au résultat de Friedrich, Ringström a développé dans [37] une nouvelle méthode plus souple pour obtenir une décroissance exponentielle pour les perturbations non linéaires dans les modèles cosmologiques localement de De-Sitter dans le contexte du système de champ scalaire non linéaire d'Einstein avec un potentiel positif. Christopher Svedberg dans [39] a généralisé les travaux de Ringström [37] en y couplant les équations de Maxwell.

En considérant un potentiel V vérifiant $V(0) = V_0 > 0$, $V'(0) > 0$ et $V''(0) > 0$ comme dans [37], il prouve aussi sans hypothèses de symétrie un résultat de stabilité similaire à celui obtenu par Ringström [37]. Nous notons que le cas dont nous étudions ici ne vérifie pas les conditions imposées sur le potentiel V et n'entre pas donc l'étude faite dans [39].

Par la suite, Ferreira A. dans sa thèse [19] a étudié la stabilité future des solutions cosmologiques dans le système d'Einstein-Champ Scalaire non linéaire. Elle comprend une analyse des perturbations linéaires et non linéaires dans les espaces-temps homogènes et isotropes, ainsi que l'étude des solutions inhomogènes à champ scalaire dans les espaces-temps à symétrie sphérique. Les résultats qu'il obtient confirment la *censure cosmique* pour De-Sitter et fournissent des informations sur la décroissance et la stabilité des solutions cosmologiques. Costa et al. dans [14] ont prouvé un théorème d'existence globale du système d'Einstein champ scalaire dans l'espace-temps de De-Sitter. Ce résultat était considéré par ses auteurs comme une condition préalable à l'étude des équations d'Einstein couplées au champ scalaire avec constante cosmologique positive dans l'espace-temps à symétrie sphérique. Dans cette perspective, ils poursuivent dans [15] avec l'étude de la stabilité de l'espace-temps de De-Sitter pour le système d'Einstein-champ scalaire en montrant qu'un tel système possède une solution globale qui décroît exponentiellement en temps de Bondi et qui est géodésiquement complète vers le futur. Ils montrent dans [16] qu'un tel système a une solution classique globale unique qui est géodésiquement complète vers le futur et décroît polynômialement en rayon et exponentiellement en temps de Bondi et qui est asymptotiquement de De-Sitter. Nous avons généralisé dans [43] ces travaux de Costa en couplant les équations de Maxwell au système Einstein-champ scalaire et montré que le système Einstein-Maxwell-champ scalaire obtenu possède une solution globale décroissant exponentiellement en temps de Bondi et est asymptotiquement de De-Sitter.

D'autre part, D. Tegankong *et al.* ont considéré le système Einstein-Vlasov- Champ Scalaire sous l'hypothèse des symétries de surface dans [42] et ont prouvé un théorème d'existence locale en temps et des critères de continuation pour les solutions cosmologiques. Pour ce même système, D. Tegankong a prouvé dans [41] pour les cas de symétrie plane et de symétrie hyperbolique un théorème d'existence globale des solutions cosmologiques dans le futur. A. L. Tchuani *et al.* dans [40] ont aussi considéré le système d'Einstein-Vlasov mais couplé plutôt à un champ scalaire non linéaire avec un potentiel scalaire vérifiant les conditions de Ringström [37] et ont prouvé sous l'hypothèse de symétries de Gowdy l'existence globale de solutions dans le passé de ce système pour les modèles cosmologiques. P. Noundjeu a prouvé dans [32] un résultat de stabilité pour le système d'Einstein-Vlasov-Maxwell à la symétrie sphérique, et plus tard avec D. Tegankong [33] un résultat similaire

pour le système d'Einstein-Vlasov-Maxwell-Champ scalaire sous l'hypothèse de la symétrie cylindrique. Tchapnda et Rendall ont prouvé dans [44] un résultat d'existence globale couplé à l'étude du comportement asymptotique dans le futur du système d'Einstein-Vlasov avec constante cosmologique positive et plus récemment, Nungesser a montré dans [34] un résultat sur la stabilité non linéaire dans le futur des solutions du même système. Notons également que tout récemment, H. Barzegar et D. Fajman ont établi dans [3] un résultat de stabilité des modèles de Milne dans le système Einstein-Vlasov-Maxwell, décrivant des univers avec des ensembles de particules chargées sans collision. Ce résultat montre que ces modèles (Milne) sont stables non linéairement grâce à une hiérarchie appropriée basée sur la densité d'énergie des champs de matière. Par contre, Philippe G. and Yue M. ont étudié dans [30] le problème de valeur initiale pour le système d'Einstein-Klein-Gordon et ont établi un résultat de stabilité non linéaire globale de la matière massive dans le régime de la proximité de l'espace-temps de Minkowski.

0.2 Résultat principal

Notre principal résultat obtenu dans cette thèse peut être résumé en un théorème dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 0.2.1 *Soient $\Lambda > 0$ et $R_0 > 0$. Il existe une constante $\eta_0 = \eta_0(\Lambda, R_0) > 0$ telle que pour $\Phi_0 \in \mathcal{C}^2([0, R_0])$ satisfaisant*

$$\sup_{0 \leq r \leq R_0} |\Phi_0(r)| + \sup_{0 \leq r \leq R_0} |\partial_r \Phi_0(r)| < \eta_0,$$

le système d'EMCS $_{\Lambda}$, (1.18) avec le champ scalaire Φ satisfaisant la condition initiale

$$\Phi|_{u=0} = \Phi_0,$$

admet une unique solution \mathcal{C}^2 , (M, g, Φ) à symétrie sphérique de Bondi. Les coordonnées de Bondi pour M sont prises dans $[0, +\infty[\times [0, R_0] \times \mathbb{S}^2$, et la métrique g dans ce cas prend la forme (1.2). De plus nous avons l'estimation en fonction de la donnée initiale :

$$|\Phi| \leq C^0 \sup_{0 \leq r \leq R_0} |\partial_r(r\Phi_0(r))|, \quad (1)$$

où $C^0 > 0$ est une constante dépendant uniquement de Λ et R_0 . Concernant le comportement asymptotique, il existe $\underline{\Phi} \in \mathbb{C}$ et une constante positive $C > 0$ dépendant uniquement de la donnée initiale, de la constante cosmologique Λ et R_0 tels que :

$$|\Phi(u, r) - \underline{\Phi}| \lesssim e^{-\hat{H}u}, \quad (2)$$

et

$$|g - g^0| \lesssim e^{-\hat{H}u}, \quad (3)$$

où g^0 est la métrique de De-Sitter en coordonnées de Bondi définie en (1.3) et \hat{H} une constante positive dépendant uniquement de Λ et R_0 définie en (3.20).

0.3 Plan du travail

Dans le chapitre 1, nous rappelons tout d'abord quelques notions qui sont importantes pour la bonne compréhension du sujet traité et par la suite, nous transformons via le système de coordonnées de Bondi le système $d'EMCS_\Lambda$ qui est une équation aux dérivées partielles (e.d.p) hyperbolique non linéaire de second ordre en une e.d.p non linéaire de premier ordre appelée équation intégral-différentielle d'évolution, ceci dans le but de pouvoir utiliser aisément la méthode du point fixe de Banach.

Le chapitre 2 est consacré à la preuve d'un théorème d'existence locale en temps de Bondi de solution de l'équation aux dérivées partielles considérée, au moyen du théorème du point fixe de Banach dans un espace fonctionnel approprié.

Enfin dans le chapitre 3, nous prouvons l'existence globale par le critère de continuation et par la suite, nous montrons que ces solutions décroissent exponentiellement en temps (Bondi) afin d'obtenir la stabilité asymptotique et la complétude géodésique.

Équation intégrro-différentielle d'évolution

Dans cette première partie, nous rappelons des notions qui seront utiles pour mieux manipuler et mieux comprendre certains concepts abordés dans cette thèse. Ensuite, nous allons écrire le système $d'EMCS_\Lambda$ en coordonnées de Bondi puis, réduire l'EDP hyperbolique de second ordre obtenue appelée équation d'Einstein-Maxwell-Klein-Gordon en une EDP non linéaire du premier ordre.

1.1 Quelques notions préliminaires

1.1.1 Propriétés fondamentales des équations différentielles ordinaires

Théorème 1.1.1 (*Théorème du point fixe de Banach*)

Soit F un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach E et T une application de F vers F . Si T vérifie

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x - y\|, \quad \forall x, y \in F, \quad 0 < \rho < 1,$$

alors il existe un unique vecteur $u \in F$ tel que $u = T(u)$.

Preuve Voir [23].

Théorème 1.1.2 (*Cauchy-Lipschitz*)

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue par morceaux par rapport à la première composante et vérifiant la condition de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \|x - y\|, \quad k \geq 0$$

$\forall x, y \in B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1]$. Alors il existe $\delta > 0$ pour lequel le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

a une unique solution définie sur $[t_0, t_0 + \delta]$.

Preuve Voir [23].

Corollaire 1.1.1 Soit $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour tout domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$ et $x \in D$. Si le gradient de f , $\partial f / \partial x$ existe et est continue sur $[a, b] \times D$, alors f est localement Lipschitzienne en x sur $[a, b] \times D$.

Lemme 1.1 (Principe de comparaison)

Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ avec la donnée initiale } u(t_0) = u_0$$

où f est une fonction numérique continue en t et localement Lipschitzienne en $u \in I \subset \mathbb{R}$ pour tout $t \geq 0$. Soit $[t_0, T[$ (T pouvant être infini) l'intervalle maximal de solution u , et supposons que $u(t) \in I$ pour tout $t \in [t_0, T[$. Soit v une fonction \mathcal{C}^1 vérifiant l'inégalité différentielle

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)) \quad v(t_0) \leq u_0$$

avec $v(t) \in I$ pour tout $[t_0, T[$. Alors, $v(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in [t_0, T[$.

Preuve Voir [23].

Théorème 1.1.3 (Théorème de la valeur moyenne)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction différentiable en tout point x d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Si y est un point de U tel que le segment reliant x et y , $[x, y] \subset U$. Alors, il existe $z \in [x, y]$ tel que

$$f(x) - f(y) = (x - y) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=z}.$$

Cet intervalle est tel que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, on définit le segment reliant x à y comme $[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \theta x + (1 - \theta)y, 0 \leq \theta \leq 1\}$.

Preuve Voir [23].

Théorème 1.1.4 (*Inégalité de Gronwall-Bellman*)

Soient $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. S'il existe une fonction continue $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)ds$$

avec $t \in [a, b]$, alors sur le même intervalle,

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s) \exp\left(\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right) ds.$$

Preuve Voir [23].

Corollaire 1.1.2 (*Lemme de Gronwall*)

Supposons que nous avons les mêmes hypothèses du théorème 1.1.4. En posant pour tout t , $\lambda(t) = C$, une constante, nous obtenons l'inégalité dit de Gronwall (ou lemme de Gronwall)

$$y(t) \leq c \exp\left[\int_a^t \mu(s)ds\right].$$

1.1.2 Géométrie Pseudo-Riemannienne

Notion de l'espace-temps

Dans la relativité générale, la présence de masse et d'énergie dans l'espace-temps crée une courbure de l'espace-temps autour de ces objets. Cette courbure est décrite mathématiquement par le champ gravitationnel, qui est représenté par la métrique de l'espace-temps.

Définition 1.1.1 (*Espace-temps*)

Un espace-temps est la donnée d'un couple (M, g) où (M, g) est une variété Lorentzienne de dimension 4.

Espace-temps à symétrie sphérique

Ici, on utilise souvent le système de coordonnées standard (t, r, θ, φ) où t désigne le temps, r le rayon, θ l'angle azimutal, φ l'angle d'inclinaison ou d'altitude.

Définition 1.1.2 [46]

Un espace-temps est dit à symétrie sphérique si son groupe d'isométrie contient un sous-groupe isomorphe au groupe $SO(3)$, et les orbites (l'ensemble des points résultants de l'action du sous-groupe sur un point donné) de ce sous-groupe sont des sphères à deux dimensions.

Les isométries $SO(3)$ peuvent alors être interprétées physiquement comme des rotations, et donc un espace-temps à symétrie sphérique est celui dont la métrique reste invariante sous les rotations.

Remarque 1.1.1 [7, 12]

On considère la variété lorentzienne orientée espace et temps difféomorphe à \mathbb{R}^4 , sur laquelle le groupe $SO(3)$ agit comme une isométrie dont les orbites (du groupe) sont les 2-sphère de type espace. Les invariants du groupe forment une courbe de type temps dans l'espace-temps, qui est la ligne d'univers du centre des sphères. Dans cet espace-temps à symétrie sphérique, il convient d'introduire la fonction r , définie par

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}},$$

où A est l'aire de la 2-sphère. Ainsi, la métrique de la 2-sphère est donnée par

$$ds^2 = r^2 d\Sigma^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Le quotient de l'espace-temps par $SO(3)$ est la 2-variété lorentzienne. On suppose que les lignes d'univers $r = r_0$ (constantes) dans chaque demi-plan sont toutes temporelles. On définit alors la coordonnée souvent appelée temps retardé u , qui est constante sur tout cône nul dont les sommets sont au centre de la 2-sphère et qui est sur une ligne d'univers $r = r_0$; u tend vers le temps propre t $r_0 \rightarrow +\infty$ ou 0 selon le choix du domaine de r (compact ou non) on remplace $+\infty$ par 0 et inversement. Dans ce nouveau système de coordonnées (u, r, θ, φ) appelé coordonnées de Bondi, la métrique de l'espace-temps à symétrie sphérique peut être représentée par

$$ds^2 = g(u, r) \tilde{g}(u, r) du^2 - 2g(u, r) dudr + r^2 d\Sigma^2,$$

avec g et \tilde{g} des fonctions différentiables définies sur $[0, a[\times]0, b[$, $a, b \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Remarque 1.1.2 La considération de la métrique à symétrie sphérique a l'avantage de simplifier le problème en réduisant les équations aux dépendances radiales uniquement. De plus, la symétrie sphérique est souvent utilisée pour étudier des phénomènes physiques dans des configurations sphériques, comme les étoiles, les trous noirs ou les monopoles magnétiques.

1.1.3 Les équations d'Euler-Lagrange

Il n'est pas souvent facile de quitter de l'équation de la conservation de l'énergie $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ pour arriver à l'équation de Klein-Gordon : C'est ainsi que pour éviter ces

difficultés, on passe souvent par les équation d'Euler-Lagrange (pour le champ scalaire) afin d'obtenir cette dernière équation.

Définition 1.1.3 *L'action lagrangienne d'un champ scalaire dans un espace-temps courbe est une quantité qui mesure la différence entre l'énergie cinétique et le potentiel du champ. Elle est généralement exprimée comme une intégrale sur l'espace-temps de la densité lagrangienne \mathcal{L} , qui dépend du champ scalaire et de ses dérivées.*

Définition 1.1.4 *Mathématiquement, l'action S pour un champ scalaire ϕ est généralement définie par*

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x,$$

où \mathcal{L} est le lagrangien du champ scalaire (qui dépend uniquement du champ scalaire et de ses dérivées partielles) et d^4x représente l'élément de volume dans l'espace-temps.

Théorème 1.1.5 *L'équation d'Euler-Lagrange pour le champ scalaire est obtenue en appliquant le principe de moindre action, qui stipule que le champ scalaire doit suivre le chemin pour lequel l'action lagrangienne est stationnaire (c'est-à-dire que sa variation est nulle, $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$). Ainsi, on obtient pour toute variation*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0. \quad (1.1)$$

Preuve Voir [38].

Définition 1.1.5 (*Équations d'Euler-Lagrange*)

La relation (1.1) est appelée les équations d'Euler-Lagrange. Elles définissent les équations du mouvement (ou les équations de Klein-Gordon) à partir d'un lagrangien et décrivent dans la théorie des champs comment le champ scalaire évolue dans l'espace et le temps.

Théorème 1.1.6 [38] (*Théorème de Noether*)

Si une lagrangienne possède une symétrie continue, alors il existe un courant associé à cette symétrie qui est conservé lorsque les équations du mouvement sont satisfaites.

Remarque 1.1.3 (Cf.[38], Sect 3.3.1)

Il y a un cas très important du théorème 1.1.6 qui s'applique à une symétrie globale de l'action, et non à la lagrangienne. Il s'agit de la symétrie des translations (globales) dans l'espace-temps. En relativité générale, cette symétrie devient une symétrie locale appelée invariance de difféomorphisme, mais pour obtenir la conservation du courant, il suffit d'avoir une symétrie globale. Dans ce cas, le courant correspondant est le tenseur énergie-impulsion, $T_{\mu\nu}$ qui représente l'énergie et la quantité de mouvement.

1.2 Équations d'Einstein-Maxwell-Champ Scalaire

Dans cette section, nous écrivons le système d'équations d'Einstein-Maxwell-Champ Scalaire avec constante cosmologique en coordonnées de Bondi afin d'obtenir une équation hyperbolique non linéaire du second ordre.

Le cadre géométrique est l'espace-temps à symétrie sphérique.

En coordonnées de Bondi (u, r, θ, φ) , la métrique s'écrit comme :

$$ds^2 = -a(u, r)b(u, r)du^2 - 2a(u, r)dudr + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (1.2)$$

où $(u, r) \in [0, U[\times]0, R[$ avec $U, R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\theta \in]0, \pi[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ et a, b des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $a > 0$.

Comme dans [15], nous voulons que les fonctions a et b satisfassent les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} a(u, r) &= 1, & \forall r \in [0, R[\\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(b(u, r) - 1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 \right) &= 0, & \forall r \in [0, R[. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'espace-temps de De-Sitter pourra donc être couvert comme dans [15] par les coordonnées de Bondi (u, r, θ, φ) de manière isométrique sur $([0, +\infty[\times]0, R_0] \times \mathbb{S}^2, g_0)$ avec la métrique g_0 donnée par

$$g_0 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)du^2 - 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.3)$$

En effet, la métrique De Sitter-Schwarzschild sans la masse est de la forme

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.4)$$

Elle admet une singularité en $r = \sqrt{3/\Lambda}$. Comme cette singularité est liée aux coordonnées (elle disparaît lorsqu'on choisit un système de coordonnées approprié), nous choisissons un système de coordonnées adapté qui montre qu'il ne se passe rien de spécial lorsque $r = \sqrt{3/\Lambda}$. Soit

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2}.$$

Alors, pour $r^*(0) = 0$ et en se restreignant sur $r < \sqrt{3/\Lambda}$, on a

$$r^* = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\Lambda}} \text{Log} \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}r}{1 - \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}r} \right).$$

Considérons la nouvelle coordonnée u appelée temps retardé définie par $u = t - r^*$. Alors

$$dt = du + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr$$

et en injectant cette égalité différentielle dans (1.4), nous obtenons une nouvelle forme de la métrique De Sitter-Schwarzschild encore appelée la *métrique pure de De-Sitter* (1.3).

Remarque 1.2.1 *Nous notons que même comme la coordonnée temporelle u en (1.2) est différente de la coordonnée standard t , elle coïncide avec t au centre de symétrie $r = 0$ et est donc proche de t dans notre domaine $r < \sqrt{3/\Lambda}$, ce qui donne la même décroissance exponentielle. Ainsi dans l'espace-temps pure de De-Sitter, nous avons $u = t - r^*$.*

Le système d' $EMCS_\Lambda$ (voir [7]) est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu \end{array} \right. \quad (1.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_\mu F_{\nu\alpha} + \nabla_\nu F_{\alpha\mu} + \nabla_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \phi = 0 \end{array} \right. \quad (1.8)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [D_\mu \Phi (D_\nu \Phi)^* + (D_\mu \Phi)^* D_\nu \Phi - g_{\mu\nu} D_\gamma \Phi (D^\gamma \Phi)^*] \\ \tau_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{4} F_{\gamma\alpha} F^{\gamma\alpha} + F_{\nu\gamma} F_\mu^\gamma \right] \\ J^\mu := \text{Im}(\Phi^* D^\mu \Phi) \\ \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où les inconnues sont $g_{\mu\nu}$, Φ et $F_{\mu\nu}$. Les équations (1.5) sont les équations d'Einstein où $R_{\mu\nu}$ représente le tenseur de Ricci de la métrique g , obtenu par contraction du tenseur de Riemann-Christoffel et couplé à une variété lorentzienne M de dimension 4, $T_{\mu\nu}$ est le tenseur impulsion énergie, $\tau_{\mu\nu}$ est le tenseur de Maxwell, le réel positif Λ est la constante cosmologique; R est la courbure scalaire obtenue par contraction du tenseur de Ricci. Les équations (1.6) et (1.7) sont les équations de Maxwell où $F = (F_{\alpha\beta})$ le champ électromagnétique est une 2-forme antisymétrique lié à la 1-forme linéaire notée $A = (A_\nu)$ et appelée potentiel par la relation (1.10), $J = (J^\mu)$ est le vecteur densité de courant engendré par le champ Φ , comme défini en (1.9). Les équations (1.8) représentent l'équation du champ scalaire ou de Klein-Gordon où la dérivée covariante de jauge est définie comme dans [36] par

$$D_\mu \Phi = \nabla_\mu \Phi + iA_\mu \Phi. \quad (1.11)$$

Nous notons que Φ est un champ scalaire complexe et Φ^* désigne son complexe conjugué.

Nous allons à présent écrire le système d' $EMCS_\Lambda$ en coordonnées de Bondi.

Lemme 1.2 *Pour la métrique (1.2), les composantes non nulles (de g et de son inverse g^{-1} respectivement) en coordonnées de Bondi (u, r, θ, φ) sont :*

$$g_{uu} = -ab, \quad g_{ur} = g_{ru} = -a, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$$

$$g^{rr} = \frac{b}{a}, \quad g^{ur} = g^{ru} = -\frac{1}{a}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Lemme 1.3 *Les composantes non nulles des symboles de Christoffel en coordonnées de Bondi (u, r, θ, φ) sont :*

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (ab) \right], & \Gamma_{\theta\theta}^u &= \frac{r}{a}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^u &= \frac{r}{a} \sin^2 \theta; \\ \Gamma_{uu}^r &= \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial u} (ab) - \frac{b}{a} \left[\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (ab) \right], & \Gamma_{ur}^r &= \Gamma_{ru}^r = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial r} (ab), & \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial r} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{b}{a} r \sin^2 \theta, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \frac{b}{a}; \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cotan \theta. \end{aligned}$$

Preuve *Ces composantes s'obtiennent en utilisant la formule :*

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} (\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta})$$

pour $\lambda, \alpha, \beta \in \{u, r, \theta, \phi\}$.

Lemme 1.4 *Les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont :*

$$\begin{aligned} R_{uu} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial u} (ab) - \frac{\partial^2}{\partial u \partial r} (ab) + b \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ab) - 2b \frac{\partial^2 a}{\partial r \partial u} \right] + \frac{1}{2a^2} \left[2b \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial a}{\partial u} - b \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (ab) \right] \\ &\quad + \frac{1}{ra} \left[\frac{\partial}{\partial u} (ab) + b \frac{\partial}{\partial r} (ab) - 2b \frac{\partial a}{\partial u} \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$R_{ur} = R_{ru} = \frac{1}{2a} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (ab) - 2 \frac{\partial^2 a}{\partial r \partial u} \right] - \frac{1}{2a^2} \left[\frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (ab) - 2 \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial a}{\partial r} \right] + \frac{1}{ra} \frac{\partial}{\partial r} (ab) \quad (1.13)$$

$$R_{rr} = \frac{2}{ra} \frac{\partial a}{\partial r} \quad (1.14)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r} (rb) + 1 \quad (1.15)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \left[-\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r} (rb) + 1 \right] \sin^2 \theta. \quad (1.16)$$

Preuve *On obtient ces différentes composantes en utilisant la formule :*

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\mu - \Gamma_{\mu\beta}^\nu \Gamma_{\nu\alpha}^\mu$$

pour $\alpha, \beta \in \{u, r, \theta, \phi\}$.

Lemme 1.5 *La trace du tenseur de Maxwell est nulle. C'est-à-dire*

$$\tau = g^{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.17)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
 \tau &= g^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} F_{\mu}^{\alpha} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} F_{\nu\alpha} F^{\sigma\alpha} \right) \text{ car } g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4 \text{ et } F_{\mu}^{\alpha} = g_{\mu\alpha} F^{\sigma\alpha} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F_{\sigma\alpha} F^{\sigma\alpha} \right) \text{ car } g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = \delta_{\alpha}^{\nu} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *Le système d'EMCS_Λ se réduit à*

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + 4\pi [D_{\mu} \Phi (D_{\nu} \Phi)^* + (D_{\mu} \Phi)^* D_{\nu} \Phi] + 8\pi \tau_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

Preuve *En multipliant (1.5) par $g^{\mu\nu}$, nous avons*

$$g^{\mu\nu} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) = 8\pi g^{\mu\nu} (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu})$$

ce qui conduit à

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 8\pi g^{\mu\nu} (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}). \quad D'où$$

$$R - 2R + 4\Lambda = 8\pi g^{\mu\nu} (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) \text{ car } g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4 \text{ et } R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \text{ Ainsi,}$$

$$4\Lambda - R = 8\pi (T + \tau) \text{ avec } T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \text{ et } \tau = g^{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta},$$

ce qui d'après (1.17) donne

$$R = 4\Lambda - 8\pi T.$$

Mais

$$\begin{aligned}
 T &= g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\
 &= \frac{g^{\mu\nu}}{2} [D_{\mu} \Phi (D_{\nu} \Phi)^* + (D_{\mu} \Phi)^* D_{\nu} \Phi] - 2D_{\gamma} \Phi (D^{\gamma} \Phi)^* \\
 &= \frac{1}{2} D^{\nu} \Phi (D_{\nu} \Phi)^* + \frac{1}{2} D^{\nu} \Phi (D_{\nu} \Phi)^* - 2D_{\gamma} \Phi (D^{\gamma} \Phi)^* \\
 &= -D_{\gamma} \Phi (D^{\gamma} \Phi)^*.
 \end{aligned}$$

De plus de (1.5), on a

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) \\
 &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (4\Lambda - 8\pi T) - \Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) \\
 &= 2\Lambda g_{\mu\nu} - 4\pi g_{\mu\nu} [-D_{\lambda} \Phi (D^{\lambda} \Phi)^*] - \Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) \\
 &= \Lambda g_{\mu\nu} + 4\pi g_{\mu\nu} D_{\lambda} \Phi (D^{\lambda} \Phi)^* + 8\pi (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) \\
 &= \Lambda g_{\mu\nu} + 4\pi g_{\mu\nu} D_{\lambda} \Phi (D^{\lambda} \Phi)^* + 8\pi \tau_{\mu\nu} \\
 &\quad + 4\pi [D_{\mu} \Phi (D_{\nu} \Phi)^* + (D_{\mu} \Phi)^* D_{\nu} \Phi - g_{\mu\nu} D_{\gamma} \Phi (D^{\gamma} \Phi)^*] \\
 &= \Lambda g_{\mu\nu} + 4\pi [D_{\mu} \Phi (D_{\nu} \Phi)^* + (D_{\mu} \Phi)^* D_{\nu} \Phi] + 8\pi \tau_{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

Lemme 1.6 En posant $\square = \nabla^\mu \partial_\mu$, nous avons :

$$D_\mu D^\mu \Phi = \square \Phi + 2iA_\mu \nabla^\mu \Phi + i\Phi \nabla^\mu A_\mu - \Phi A_\mu A^\mu. \quad (1.19)$$

Preuve

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \Phi &= g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \Phi \\ &= g^{\mu\nu} (\nabla_\mu D_\nu \Phi + iA_\mu D_\nu \Phi) \quad d'après (1.11) \\ &= g^{\mu\nu} [\nabla_\mu (\nabla_\nu \Phi + iA_\nu \Phi) + iA_\mu (\nabla_\nu \Phi + iA_\nu \Phi)] \quad d'après (1.11) \\ &= g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + iA_\nu \nabla_\mu \Phi + i\Phi \nabla_\mu A_\nu + iA_\mu \nabla_\nu \Phi - \Phi A_\mu A_\nu) \\ &= \nabla^\mu \partial_\mu \Phi + iA_\mu \nabla^\mu \Phi + i\Phi \nabla^\mu A_\mu + iA_\mu \nabla^\mu \Phi - \Phi A_\mu A^\mu \\ &= \square \Phi + 2iA_\mu \nabla^\mu \Phi + i\Phi \nabla^\mu A_\mu - \Phi A_\mu A^\mu. \end{aligned}$$

Lemme 1.7 La dérivée contravariante du tenseur de Maxwell $\tau_{\mu\nu}$ conduit à

$$\begin{aligned} 2\nabla^\mu \tau_{\mu\nu} &= i\Phi \nabla^\mu \Phi^* \nabla_\nu A_\mu - i\Phi^* \nabla^\mu \Phi \nabla_\nu A_\mu - 2|\Phi|^2 A^\mu \nabla_\nu A_\mu - i\Phi \nabla^\mu \Phi^* \nabla_\mu A_\nu \\ &\quad + i\Phi^* \nabla^\mu \Phi \nabla_\mu A_\nu - 2|\Phi|^2 A^\mu \nabla_\mu A_\nu. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \tau_{\mu\nu} &= -\frac{1}{16\pi} \nabla_\nu (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) + \frac{g^{\mu\alpha}}{4\pi} \nabla_\alpha (F_{\nu\rho} F_\mu^\rho) \\ &= -\frac{1}{16\pi} (F^{\rho\sigma} \nabla_\nu F_{\rho\sigma} + F_{\rho\sigma} \nabla_\nu F^{\rho\sigma}) + \frac{g^{\alpha\mu}}{4\pi} (F_\mu^\rho \nabla_\alpha F_{\nu\rho} + F_{\nu\rho} \nabla_\alpha F_\mu^\rho) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \left[\underbrace{-F^{\rho\sigma} (\nabla_\rho F_{\sigma\nu} + \nabla_\sigma F_{\nu\rho})}_{=0 \ (\rho \leftrightarrow \sigma)} + F_{\rho\sigma} \nabla_\nu F^{\rho\sigma} \right] \\ &\quad + \frac{g^{\alpha\mu}}{4\pi} \left[\underbrace{-F_\mu^\rho (\nabla_\nu F_{\rho\alpha} + \nabla_\rho F_{\alpha\nu})}_{=0 \ (\nu \leftrightarrow \rho)} + F_{\nu\rho} \nabla_\alpha F_\mu^\rho \right] \\ &= \frac{g^{\alpha\sigma} g^{\rho\beta}}{16\pi} \left[\underbrace{F_{\rho\sigma} (\nabla_\beta F_{\sigma\nu} + \nabla_\sigma F_{\nu\beta})}_{=0 \ (\beta \leftrightarrow \rho)} \right] + \frac{g^{\alpha\mu} g_{\mu\sigma}}{4\pi} (F_{\nu\rho} \nabla_\alpha F^{\sigma\rho}) \\ &= \frac{1}{4\pi} F_{\nu\lambda} \nabla_\alpha F^{\alpha\lambda} \\ &= J^\lambda F_{\nu\lambda} \\ &= -\frac{g^{\lambda\beta}}{2i} (\Phi \nabla_\beta \Phi^* - \Phi^* \nabla_\beta \Phi - 2i|\Phi|^2 A_\beta) (\nabla_\nu A_\lambda - \nabla_\lambda A_\nu) \\ &= -\frac{g^{\lambda\beta}}{2i} (\Phi \nabla_\beta \Phi^* \nabla_\nu A_\lambda - \Phi^* \nabla_\beta \Phi \nabla_\nu A_\lambda - 2i|\Phi|^2 A_\beta \nabla_\nu A_\lambda - \Phi \nabla_\beta \Phi^* \nabla_\lambda A_\nu + \Phi^* \nabla_\beta \Phi \nabla_\lambda A_\nu) \\ &\quad - \frac{g^{\lambda\beta}}{2i} (2i|\Phi|^2 A_\beta \nabla_\lambda A_\nu) \\ &= \frac{1}{2} (i\Phi \nabla^\mu \Phi^* \nabla_\nu A_\mu - i\Phi^* \nabla^\mu \Phi \nabla_\nu A_\mu - 2|\Phi|^2 A^\mu \nabla_\nu A_\mu - i\Phi \nabla^\mu \Phi^* \nabla_\mu A_\nu + i\Phi^* \nabla^\mu \Phi \nabla_\mu A_\nu) \\ &\quad - \frac{1}{2} (2|\Phi|^2 A^\mu \nabla_\mu A_\nu). \end{aligned}$$

Lemme 1.8 *La dérivée contravariante du tenseur impulsion énergie $T_{\mu\nu}$ conduit à*

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [(D_\nu \Phi)^* D_\mu D^\mu \Phi + D_\nu \Phi (D_\mu D^\mu \Phi)^* - 2\nabla^\mu \tau_{\mu\nu}] \quad (1.21)$$

Preuve

$$\begin{aligned} 2\nabla^\mu T_{\mu\nu} &= \nabla_\nu \Phi^* \square \Phi + \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \nabla_\nu \Phi^* - iA_\nu \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi^* - i\Phi^* \nabla^\mu A_\nu \nabla_\mu \Phi - i\Phi^* A_\nu \square \Phi \\ &+ iA_\mu \nabla^\mu \Phi \nabla_\nu \Phi^* + i\Phi \nabla^\mu A_\mu \nabla_\nu \Phi^* + i\Phi A_\mu \nabla^\mu \nabla_\nu \Phi^* + 2\Phi A_\mu A_\nu \nabla^\mu \Phi^* \\ &+ 2\Phi^* A_\mu A_\nu \nabla^\mu \Phi + 2|\Phi|^2 A_\nu \nabla^\mu A_\mu + 2|\Phi|^2 A_\mu \nabla^\mu A_\nu + \nabla_\nu \Phi \square \Phi^* + \nabla_\mu \Phi^* \nabla^\mu \nabla_\nu \Phi \\ &- iA_\mu \nabla^\mu \Phi^* \nabla_\nu \Phi - i\Phi^* \nabla^\mu A_\mu \nabla_\nu \Phi - i\Phi^* A_\mu \nabla^\mu \nabla_\nu \Phi + iA_\nu \nabla^\mu \Phi \nabla_\mu \Phi^* + i\Phi \nabla^\mu A_\nu \nabla_\mu \Phi^* \\ &+ i\Phi A_\nu \square \Phi^* - \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \nabla_\nu \Phi^* - \nabla_\mu \Phi^* \nabla^\mu \nabla_\nu \Phi + iA_\mu \nabla^\mu \Phi \nabla_\nu \Phi^* + i\Phi^* \nabla_\nu A_\mu \nabla^\mu \Phi \\ &+ i\Phi^* A_\mu \nabla^\mu \nabla_\nu \Phi - iA_\mu \nabla^\mu \Phi^* \nabla_\nu \Phi - i\Phi \nabla_\nu A_\mu \nabla^\mu \Phi^* - i\Phi A_\mu \nabla^\mu \nabla_\nu \Phi^* - \Phi A_\mu A^\mu \nabla_\nu \Phi^* \\ &- \Phi^* A_\mu A^\mu \nabla_\nu \Phi - 2|\Phi|^2 A^\mu \nabla_\nu A_\mu \\ &= (\nabla_\nu \Phi^* - iA_\nu \Phi^*)(\square \Phi + 2iA_\mu \nabla^\mu \Phi + i\Phi \nabla^\mu A_\mu - \Phi A_\mu A^\mu) + 2|\Phi|^2 A_\mu \nabla^\mu A_\nu \\ &+ (\nabla_\nu \Phi + iA_\nu \Phi)(\square \Phi^* - 2iA_\mu \nabla^\mu \Phi^* - i\Phi^* \nabla^\mu A_\mu - \Phi^* A_\mu A^\mu) - 2|\Phi|^2 A^\mu \nabla_\nu A_\mu \\ &+ i\Phi \nabla^\mu A_\nu \nabla_\mu \Phi^* + i\Phi^* \nabla_\nu A_\mu \nabla^\mu \Phi - i\Phi^* \nabla^\mu A_\nu \nabla_\mu \Phi - i\Phi \nabla_\nu A_\mu \nabla^\mu \Phi^* \\ &= (D_\nu \Phi)^* D_\mu D^\mu \Phi + D_\nu \Phi (D_\mu D^\mu \Phi)^* - 2\nabla^\mu \tau_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.1 [7] *(Lagrangien de Maxwell-Klein-Gordon)*

Nous définissons le Lagrangien de Maxwell-Klein-Gordon \mathcal{L}_{MKG} avec champ scalaire associé au système d'EMCS en fonction de la métrique g par

$$\mathcal{L}_{MKG} = -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\nu} D_\mu \Phi (D_\nu \Phi)^*. \quad (1.22)$$

Lemme 1.9 *Avec le Lagrangien \mathcal{L}_{MKG} tel que défini en (1.22), nous obtenons*

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MKG}}{\partial \Phi} = (iA_\mu \nabla^\mu \Phi - A_\mu A^\mu \Phi)^* \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MKG}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = -(iA^\mu \Phi + \nabla^\mu \Phi)^*. \quad (1.24)$$

Preuve *En développant $D_\mu \Phi$ et $D_\nu \Phi$ dans (1.22), nous pouvons réécrire (1.22) comme*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MKG} &= -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\nu} [\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi^* - iA_\nu \Phi^* \nabla_\mu \Phi + iA_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi^* + A_\mu A_\nu \Phi \Phi^*] \\ &= -\frac{1}{8\pi} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi^* + iA^\mu \Phi^* \nabla_\mu \Phi - iA_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi^* - A_\mu A^\mu \Phi \Phi^*. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ainsi, en dérivant (1.25) par rapport à Φ , nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MKG}}{\partial \Phi} = -iA_\mu \nabla^\mu \Phi^* - A_\mu A^\mu \Phi^*.$$

En dérivant (1.25) par rapport à $\nabla_\mu \Phi$, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MKG}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} = -\nabla^\mu \Phi^* + iA^\mu \Phi^*.$$

Théorème 1.2.1 (Équations de Klein-Gordon)

Les équations dites de Klein-Gordon déduites du système d'EMCS sont définies par :

$$D_\mu D^\mu \Phi = 0. \quad (1.26)$$

Preuve Les équations d'Euler-Lagrange pour le champ scalaire étant définies par

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{MKG}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{MKG}}{\partial \Phi} = 0,$$

nous obtenons de (1.24)

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{MKG}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) = -(i\partial_\mu A^\mu \Phi + iA^\mu \partial_\mu \Phi + \partial_\mu \nabla^\mu \Phi)^*.$$

En combinant avec (1.19) et (1.23), nous obtenons du fait que $A^\mu \partial_\mu \Phi = A_\mu \nabla^\mu \Phi$,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{MKG}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{MKG}}{\partial \Phi} \\ &= -(i\partial_\mu A^\mu \Phi + iA^\mu \partial_\mu \Phi + \partial_\mu \nabla^\mu \Phi)^* - (iA_\mu \nabla^\mu \Phi - A_\mu A^\mu \Phi)^* \\ &= -(i\partial_\mu A^\mu \Phi + iA^\mu \partial_\mu \Phi + \partial_\mu \nabla^\mu \Phi + iA_\mu \nabla^\mu \Phi - A_\mu A^\mu \Phi)^* \\ &= -(\partial_\mu \nabla^\mu \Phi + 2iA_\mu \nabla^\mu \Phi + i\partial_\mu A^\mu \Phi - A_\mu A^\mu \Phi)^* \\ &= -(D_\mu D^\mu \Phi)^*. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Corollaire 1.2.1 Pour le système d'EMCS $_\Lambda$ étudié ici, la loi de la conservation de l'énergie

$$\nabla^\mu (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) = 0 \quad (1.27)$$

est vérifiée.

Preuve De la relation (1.21), nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla^\mu T_{\mu\nu} + \nabla^\mu \tau_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [(D_\nu \Phi)^* D_\mu D^\mu \Phi + D_\nu \Phi (D_\mu D^\mu \Phi)^*] \\ &= \text{Re}[(D_\nu \Phi)^* D_\mu D^\mu \Phi], \end{aligned}$$

et suivant (1.26), nous obtenons $\nabla^\mu (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) = \nabla^\mu T_{\mu\nu} + \nabla^\mu \tau_{\mu\nu} = 0$. D'où le résultat.

Corollaire 1.2.2 Le vecteur courant J dans le second membre de (1.6) vérifie l'équation dite de conservation du courant :

$$\nabla_\alpha J^\alpha = 0$$

Preuve De la définition de J^μ en (1.9), nous avons

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{1}{2i} (\Phi^* D^\mu \Phi - \Phi [D^\mu \Phi]^*) \\ &= \frac{g^{\alpha\mu}}{2i} (\Phi^* D_\alpha \Phi - \Phi [D_\alpha \Phi]^*) \\ &= \frac{g^{\alpha\mu}}{2i} [\Phi^* \nabla_\alpha \Phi - \Phi \nabla_\alpha \Phi^* + 2i A_\alpha |\Phi|^2], \end{aligned}$$

et en prenant la dérivée covariante de cette dernière égalité, nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla_\mu J^\mu &= \frac{1}{2i} (\nabla^\alpha \Phi^* \nabla_\alpha \Phi + \Phi^* \nabla^\alpha \nabla_\alpha \Phi - \nabla^\alpha \Phi \nabla_\alpha \Phi^* - \Phi \nabla^\alpha \nabla_\alpha \Phi^* + 2i \nabla^\alpha |\Phi|^2 A_\alpha \\ &\quad + 2i |\Phi|^2 \nabla^\alpha A_\alpha). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Cependant,

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \Phi \nabla_\alpha \Phi^* &= g_{\alpha\mu} \nabla^\alpha \Phi \nabla^\mu \Phi^* \\ &= g_{\alpha\mu} g^{\alpha\lambda} \nabla_\lambda \Phi \nabla^\mu \Phi^* \\ &= \delta_\mu^\lambda \nabla_\lambda \Phi \nabla^\mu \Phi^* \\ &= \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi^*, \end{aligned} \quad (1.29)$$

et en injectant (1.29) dans (1.28), nous obtenons

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{2i} (\Phi^* \nabla^\alpha \nabla_\alpha \Phi - \Phi \nabla^\alpha \nabla_\alpha \Phi^* + 2i \nabla^\alpha |\Phi|^2 A_\alpha + 2i |\Phi|^2 \nabla^\alpha A_\alpha). \quad (1.30)$$

De (1.26), nous avons

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi + i \Phi \nabla^\mu A_\mu + 2i A^\mu \nabla_\mu \Phi - \Phi A^\mu A_\mu = 0. \quad (1.31)$$

En multipliant (1.31) par Φ^* , nous obtenons

$$\Phi^* \nabla^\mu \nabla_\mu \Phi + i |\Phi|^2 \nabla^\mu A_\mu + 2i A^\alpha \Phi^* \nabla_\alpha \Phi - |\Phi|^2 A^\mu A_\mu = 0. \quad (1.32)$$

En prenant le conjugué de (1.31) puis en multipliant par Φ , nous obtenons

$$\Phi \nabla^\mu \nabla_\mu \Phi^* - i |\Phi|^2 \nabla^\mu A_\mu - 2i A^\alpha \Phi \nabla_\alpha \Phi^* - |\Phi|^2 A^\mu A_\mu = 0. \quad (1.33)$$

La différence entre des équations (1.32) et (1.33) donne

$$\Phi \nabla^\mu \nabla_\mu \Phi^* - \Phi^* \nabla^\mu \nabla_\mu \Phi = 2i |\Phi|^2 \nabla^\mu A_\mu + 2i A^\alpha (\Phi \nabla_\alpha \Phi^* - \Phi^* \nabla_\alpha \Phi). \quad (1.34)$$

Maintenant, en injectant (1.34) dans (1.30), nous obtenons

$$\nabla_\mu J^\mu = [-A^\alpha (\Phi \nabla_\alpha \Phi^* + \Phi^* \nabla_\alpha \Phi) + A_\alpha \nabla^\alpha |\Phi|^2]. \quad (1.35)$$

Mais,

$$\begin{aligned}
 A_\alpha \nabla^\alpha |\Phi|^2 &= A_\alpha (\Phi \nabla^\alpha \Phi^* + \Phi^* \nabla^\alpha \Phi) \\
 &= g_{\alpha\lambda} A^\lambda (\Phi g^{\alpha\mu} \nabla_\mu \Phi^* + \Phi^* g^{\alpha\mu} \nabla_\mu \Phi) \\
 &= g_{\alpha\lambda} g^{\alpha\mu} A^\lambda (\Phi \nabla_\mu \Phi^* + \Phi^* \nabla_\mu \Phi) \\
 &= A^\mu (\Phi \nabla_\mu \Phi^* + \Phi^* \nabla_\mu \Phi).
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

On a finalement en injectant (1.36) dans (1.35), $\nabla_\mu J^\mu = 0$. D'où le résultat.

Remarque 1.2.2 Les équations (1.6) couplées aux équations (1.26) forment les équations de Maxwell-Klein-Gordon (MKG).

Remarque 1.2.3 [6, 7]

En symétrie sphérique, nous supposons $A_\theta = A_\varphi = 0$. Alors, nous pouvons choisir une jauge telle que $A_r = 0$. Ainsi, parmi les quatre composantes du potentiel, nous ne nous retrouvons qu'avec $A_u := A_u(u, r)$ comme seule inconnue non nulle.

Corollaire 1.2.3 Les équations de Klein-Gordon (1.26) peuvent ainsi se mettre sous la forme d'une seule EDP hyperbolique du second ordre de la forme :

$$\square \Phi = 2i \frac{A_u}{a} \partial_r \Phi + i \frac{\Phi}{a} \partial_r A_u. \tag{1.37}$$

Preuve De (1.19), nous avons

$$\begin{aligned}
 D_\mu D^\mu \Phi &= 0 \iff \square \Phi + 2i A_\mu \nabla^\mu \Phi + i \Phi \nabla^\mu A_\mu - \Phi A_\mu A^\mu = 0 \\
 &\iff \square_g \Phi = -2i g^{ur} A_u \partial_r \Phi - i g^{ur} \partial_r A_u \Phi \\
 &= 2i \frac{A_u}{a} \partial_r \Phi + i \frac{\Phi}{a} \partial_r A_u.
 \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.4 L'équation en (1.37) peut encore s'écrire,

$$\square \Phi = -2r^{-1} a^{-1} (\partial_u - \frac{b}{2} \partial_r) \partial_r (r\Phi) + a^{-1} \partial_r b \partial_r \Phi. \tag{1.38}$$

Preuve On a :

$$\begin{aligned}
 \square \Phi &= |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu (|g|^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) \\
 &= r^{-2} \sin^{-1} \theta a^{-1} \left[\partial_u (r^2 \sin \theta a g^{ur} \partial_r \Phi) + \partial_r (r^2 \sin \theta g^{ru} a \partial_u \Phi) + \partial_r (r^2 \sin \theta g^{rr} a \partial_r \Phi) \right] \\
 &= r^{-2} \sin^{-1} \theta a^{-1} \left[-\partial_u (r^2 \sin \theta \partial_r \Phi) - \partial_r (r^2 \sin \theta \partial_u \Phi) + \partial_r (r^2 \sin \theta b \partial_r \Phi) \right] \\
 &= r^{-2} \sin^{-1} \theta a^{-1} (-r^2 \sin \theta \partial_{ur}^2 \Phi - 2r \sin \theta \partial_u \Phi - r^2 \sin \theta \partial_{ru}^2 \Phi + 2br \sin \theta \partial_r \Phi \\
 &\quad + r^2 \sin \theta \partial_r b \partial_r \Phi + r^2 b \sin \theta \partial_{rr}^2 \Phi) \\
 &= -2r^{-1} a^{-1} (\partial_u \Phi + r \partial_{ur}^2 \Phi - b \partial_r \Phi - \frac{b}{2} r \partial_{rr}^2 \Phi) + a^{-1} \partial_r b \partial_r \Phi \\
 &= -2r^{-1} a^{-1} (\partial_u - \frac{b}{2} \partial_r) \partial_r (r\Phi) + a^{-1} \partial_r b \partial_r \Phi.
 \end{aligned}$$

Lemme 1.10 *Nous avons les composantes suivantes du tenseur de Maxwell $\tau_{\mu\nu}$:*

$$\tau_{rr} = 0, \quad (1.39)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{r^2}{8\pi a^2} (\partial_r A_u)^2, \quad (1.40)$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{8\pi a^2} (\partial_r A_u)^2. \quad (1.41)$$

Preuve *En remplaçant les indices μ et ν du tenseur de Maxwell par les coordonnées de Bondi, nous avons du fait que $A_r = 0$, $F^{ur} = g^{ur} g^{ru} F_{ru}$, $F^{ru} = g^{ru} g^{ur} F_{ur}$ et $F_{\theta\alpha} = 0 \forall \alpha$,*

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta} &= -\frac{g_{\theta\theta}}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{4\pi} F_{\theta\alpha} F_{\theta}^{\alpha} \\ &= -\frac{r^2}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{r^2}{16\pi} (F_{ur} F^{ur} + F_{ru} F^{ru}) \\ &= -\frac{r^2}{16\pi} (-2g^{ur} g^{ru} F_{ur}^2) \\ &= \frac{r^2}{8\pi a^2} (F_{ur})^2 \\ &= \frac{r^2}{8\pi a^2} (\partial_r A_u)^2. \end{aligned}$$

Puisque $g_{rr} = 0$, nous avons en procédant comme précédemment

$$\tau_{\varphi\varphi} = -\frac{r^2 \sin^2 \theta}{8\pi a^2} (\partial_r A_u)^2,$$

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -\frac{g_{rr}}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{4\pi} F_{r\alpha} F_r^{\alpha} \\ &= \frac{1}{4\pi} F_{r\alpha} F_r^{\alpha} \quad \text{car} \\ &= \frac{1}{4\pi} F_{ru} F_r^u \\ &= \frac{1}{4\pi} g^{u\beta} F_{ru} F_{\beta r} \\ &= \frac{1}{4\pi} g^{ur} F_{ru} F_{rr} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme dans [8], nous introduisons la fonction charge locale Q est donnée par

$$(u, r) \mapsto Q(u, r) = \int_{B(O, r)} J^u dv,$$

et qui représente physiquement la charge totale dans la boule $B(O, r) \subseteq \mathbb{R}^3$ de rayon r au temps retardé u et dv l'élément de volume sur la sous-variété $B(O, r)$ de \mathbb{R}^3 (considéré ici comme une variété riemannienne).

1.3. Équation intégrô-différentielle équivalente

Remarque 1.2.4 Nous notons que dans espace courbe, la métrique peut être représentée par un tenseur $g_{\mu\nu}$. L'élément de volume dv dans un espace de dimension n est défini par :

$$dv = \sqrt{|\det(g)|} d^n x \quad (1.42)$$

où $|\det(g)|$ est le déterminant de la métrique

Proposition 1.2.2 La charge locale Q se réduit à

$$Q(u, r) = 4\pi \int_0^r J^u s^2 ads. \quad (1.43)$$

Preuve En effet, en posant $g = \det(g_{\mu\nu})$, nous trouvons que $g = -a^2 r^4 \sin^2 \theta$ et en utilisant un changement de variables en coordonnées sphériques on a :

$$\begin{aligned} Q(u, r) &= \int_{B(O, r)} J^u dv \\ &= \int_{]0, r[\times]0, \theta[\times]0, 2\pi[} J^u(u, s) \sqrt{|g|} ds d\theta d\varphi \\ &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a s^2 J^u \sin \theta ds d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^r J^u a s^2 ds \\ &= 4\pi \int_0^r J^u s^2 ads. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.5 Dans ce travail, nous travaillons avec un champ scalaire Φ régulier au centre de symétrie c'est-à-dire tel que $\Phi(u, 0) = 0, \forall u \geq 0$.

1.3 Équation intégrô-différentielle équivalente

Dans cette section, nous transformons par un changement de fonction inconnue l'EDP hyperbolique non linéaire du second ordre (1.37) obtenue de l'écriture du système $d'EMSC_\Lambda$ en une équation intégrô-différentielle non linéaire du premier ordre nécessaire pour l'application du théorème de point fixe de Banach.

Comme Christodoulou [12], introduisons la nouvelle fonction inconnue h définie par

$$h(u, r) = \frac{\partial(r\Phi)}{\partial r}(u, r), \quad (1.44)$$

et définissons la moyenne radiale de la fonction h par

$$\bar{h}(u, r) := \frac{1}{r} \int_0^r h(u, s) ds. \quad (1.45)$$

Alors par une intégration de (1.44), le champ scalaire s'obtient de h par

$$\phi = \bar{h} \quad (1.46)$$

1.3. Équation intégro-différentielle équivalente

Lemme 1.11 *La fonction de charge s'écrit en terme de la fonction h comme*

$$Q(u, r) = 2\pi i \int_0^r s(\bar{h}^* h - \bar{h} h^*) ds. \quad (1.47)$$

Preuve *En effet, nous avons de (1.9), du fait que $\partial_r \Phi = \frac{h - \bar{h}}{r}$, qui provient de la relation (1.44) et des relations (1.45), (1.46)*

$$\begin{aligned} J^u &= \text{Im} [\Phi^* D^u \Phi] = \text{Im} [g^{u\beta} \Phi^* D_\beta \Phi] \\ &= g^{u\beta} \text{Im} [\Phi^* (\nabla_\beta \Phi + i A_\beta \Phi)] \\ &= g^{ur} \text{Im} [\Phi^* \partial_r \Phi] \\ &= g^{ur} \left[\frac{\Phi^* \partial_r \Phi - \Phi (\partial_r \Phi)^*}{2i} \right] \\ &= -\frac{1}{2ai} \left[\bar{h}^* \left(\frac{h - \bar{h}}{r} \right) - \bar{h} \left(\frac{h - \bar{h}}{r} \right)^* \right] \\ &= \frac{1}{2ar} i(\bar{h}^* h - \bar{h} h^*). \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons de la relation (1.43),

$$\begin{aligned} Q(u, r) &= 4\pi \int_0^r J^u s^2 ds \\ &= 4\pi \int_0^r \left[\frac{1}{2as} i(\bar{h}^* h - \bar{h} h^*) \right] s^2 ds \\ &= 2\pi i \int_0^r (\bar{h}^* h - \bar{h} h^*) s ds. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 *Comme $\int_0^r s(\bar{h}^* h - \bar{h} h^*) ds \in i\mathbb{R}$, nous déduisons de (1.47) que Q est une fonction à valeurs réelles.*

Lemme 1.12 *Si $A_u(u, 0) = 0$, alors la composante temporelle du potentiel A se réduit à*

$$A_u = \int_0^r \frac{Q}{s^2} ds. \quad (1.48)$$

Preuve *En utilisant la dérivée covariante, on a*

$$\begin{aligned} \nabla_\nu F^{\nu u} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\nu (\sqrt{|g|} F^{\nu u}) \\ &= \frac{1}{ar^2 \sin \theta} \partial_r (ar^2 \sin \theta F^{ru}) \\ &= \frac{1}{ar^2} \partial_r (ar^2 g^{ru} g^{ur} F_{ru}) \\ &= \frac{1}{ar^2} \partial_r \left(\frac{r^2}{a} \partial_r A_u \right). \end{aligned}$$

D'autre part, la relation (1.6) conduit à

$$\frac{1}{ar^2} \partial_r \left(\frac{r^2}{a} \partial_r A_u \right) = 4\pi J^u,$$

et on obtient

$$\partial_r \left(\frac{r^2}{a} \partial_r A_u \right) = 4\pi a r^2 J^u. \quad (1.49)$$

En intégrant (1.49) puis en utilisant de définition (1.43), nous avons

$$\partial_r A_u = \frac{aQ}{r^2}. \quad (1.50)$$

Ainsi, en supposant que $A_u(u, 0) = 0$, nous avons (1.48) par une intégration de (1.50) sur $[0, r]$.

Proposition 1.3.1 La composante $\{rr\}$ de (1.18) est :

$$\frac{2}{r} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial r} = 8\pi \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2. \quad (1.51)$$

Preuve En effet, en remplaçant dans (1.18) les indices μ et ν par la coordonnée r , nous obtenons du fait que $g_{rr} = 0$, $A_r = 0$, $\tau_{rr} = 0$ et $D_r \Phi = \nabla_r \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$,

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \Lambda g_{rr} + 4\pi(2D_r \Phi (D_r \Phi)^*) + 8\pi \tau_{rr} \\ &= 8\pi \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la relation (1.14) conduit à

$$\frac{2}{r} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial r} = 8\pi \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2.$$

Corollaire 1.3.1 Si la condition de régularité au centre de symétrie $a(u, 0) = 1$ est vérifiée, alors on a :

$$a(u, r) = \exp \left[4\pi \int_0^r \frac{|h - \bar{h}|^2}{s} ds \right]. \quad (1.52)$$

Preuve En combinant la formule $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{h - \bar{h}}{r}$ et la relation (1.51), nous avons

$$\frac{2}{r} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial r} = 8\pi \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 = 8\pi \frac{|h - \bar{h}|^2}{r^2} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial r} = 4\pi \frac{|h - \bar{h}|^2}{r}$$

en intégrant cette égalité sur $[0, r]$ avec la condition $a(u, 0) = 1$, nous obtenons

$$\ln |a| = 4\pi \int_0^r \frac{|h - \bar{h}|^2}{s} ds. \quad (1.53)$$

D'où le résultat en prenant l'exponentielle.

Proposition 1.3.2 La composante $\{\theta\theta\}$ ou $\{\varphi\varphi\}$ de (1.18) conduit à

$$\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{a - b}{r} - a\Lambda r - a \frac{Q^2}{r^3}. \quad (1.54)$$

1.3. Équation intégral-différentielle équivalente

Preuve En prenant $\mu = \nu = \theta$ dans (1.18) puis en injectant les relations (1.40) et (1.50) dans l'expression obtenue, nous avons

$$R_{\theta\theta} = \Lambda r^2 + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (1.55)$$

En combinant (1.15) et (1.55), nous avons

$$\Lambda r^2 + \frac{Q^2}{r^2} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r}(rb) + 1.$$

D'où le résultat.

Corollaire 1.3.2 La fonction b peut s'écrire comme

$$b(u, r) = \bar{a} - \frac{1}{r} \int_0^r a \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds \quad (1.56)$$

Preuve D'après (1.54), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rb) &= b + r \frac{\partial b}{\partial r}, \\ &= b + r \left(\frac{a-b}{r} - a\Lambda r - a \frac{Q^2}{r^3} \right), \\ &= a - \Lambda ar^2 - a \frac{Q^2}{r^2}. \end{aligned}$$

et par une intégration sur $[0, r]$ nous avons

$$rb = \int_0^r ads - \int_0^r a \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{r} \int_0^r ads - \frac{1}{r} \int_0^r a \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds \\ &= \bar{a} - \frac{1}{r} \int_0^r a \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.2 Compte tenu du Lemme 1.4, les équations de champ (1.18) peuvent s'écrire suivant les composantes de la métrique (1.2) de sorte que nous obtenons des équations dépendant du champ scalaire. Ainsi, nous pouvons procéder comme dans [12] pour montrer le contenu complet du système étudié se réduit à trois équations : La composante $\{rr\}$, la composante $\{\theta\theta\}$ ou $\{\varphi\varphi\}$ des équations du champ (1.18) et l'équation de Klein-Gordon (1.37).

Ce sont donc ces trois équations (1.51), (1.55) et (1.37) qui attirera notre attention pour la suite.

Théorème 1.3.1 (Équation d'évolution)

Le système d'EMCS $_{\Lambda}$ se transforme en une seule équation intégro-différentielle d'évolution non linéaire du premier ordre qui est une e.d.p de la forme :

$$Dh = G^0(h - \bar{h}) + G^1(h - \bar{h}) - i\frac{a\bar{h}Q}{2r} \quad (1.57)$$

où

$$D := \partial_u - \frac{b}{2}\partial_r, \quad (1.58)$$

$$G^0 = \frac{1}{2}\partial_r b := \frac{a - \bar{a}}{2r} + \frac{1}{2r^2} \int_0^r a(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2}) ds - \frac{a}{2}(\Lambda r + \frac{Q^2}{r^3}),$$

$$G^1 := -iA_u. \quad (1.59)$$

Preuve Des relations (1.37) et (1.38), nous avons l'égalité

$$2i\frac{A_u}{a}\partial_r\Phi + i\frac{\Phi}{a}\partial_r A_u = -\frac{2}{ar}\left(\partial_u - \frac{b}{2}\partial_r\right)\partial_r(r\Phi) + \frac{1}{a}\partial_r b\partial_r\Phi$$

Ainsi, en utilisant la relation (1.44), on a

$$\frac{2}{ar}\left(\partial_u - \frac{b}{2}\partial_r\right)h = \frac{1}{a}\partial_r b\left(\frac{h - \bar{h}}{r}\right) - i\frac{2A_u}{a}\left(\frac{h - \bar{h}}{r}\right) - i\frac{Q\bar{h}}{r^2}, \quad d'o\grave{u}$$

$$Dh = \frac{1}{2}\partial_r b(h - \bar{h}) - iA_u(h - \bar{h}) - i\frac{aQ\bar{h}}{2r}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a - b}{r} - a\Lambda r - a\frac{Q^2}{r^3}\right)(h - \bar{h}) - iA_u(h - \bar{h}) - i\frac{aQ\bar{h}}{2r}$$

$$= \left[\frac{a - \bar{a}}{2r} + \frac{1}{2r^2} \int_0^r a(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2}) ds - \frac{a}{2}(\Lambda r + \frac{Q^2}{r^3})\right](h - \bar{h})$$

$$- iA_u(h - \bar{h}) - i\frac{aQ\bar{h}}{2r}.$$

Lemme 1.13 Nous avons les égalités suivantes :

$$\partial_r G^0 = -\frac{2}{r}G^0 + \frac{1}{2r}\partial_r a\left(1 - \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda r^3\right) - a\left(\frac{Q}{2r^3}\partial_r Q + \frac{3}{2}\Lambda r - \frac{Q^2}{r^4}\right) \quad (1.60)$$

$$\partial_r G^1 = -i\frac{aQ}{r^2}. \quad (1.61)$$

Preuve Comme $G^0 = \frac{1}{2}\partial_r b$ d'après (1.58), nous avons de (1.54),

$$\begin{aligned}
 \partial_r G^0 &= \frac{1}{2}\partial_r \left(\frac{a-b}{r} - a\Lambda r^2 - a\frac{Q^2}{r^3} \right), \\
 &= \frac{b-a}{2r^2} - a\Lambda r - \frac{Q^2}{2r^3}\partial_r a - \frac{aQ}{r^3}\partial_r Q + \frac{3aQ^2}{2r^4} + \frac{\partial_r a}{2r} - \frac{1}{r}\partial_r b - \frac{\Lambda r^2}{2}\partial_r a, \\
 &= \frac{b-a}{2r^2} - \frac{Q^2}{2r^3}\partial_r a - a \left(\Lambda r + \frac{Q}{r^3}\partial_r Q - \frac{3Q^2}{2r^4} \right) + \frac{1}{2r}\partial_r a - \frac{1}{r}G^0 - \frac{\Lambda r^2}{2}\partial_r a, \\
 &= -\frac{1}{2r} \left(\frac{a-b}{r} - a\Lambda r^2 - \frac{aQ^2}{r^3} \right) + \frac{aQ^2}{r^4} - \frac{3a}{2}\Lambda r - \frac{Q^2}{2r^3}\partial_r a - \frac{aQ}{r^3}\partial_r Q + \frac{\partial_r a}{2r} \\
 &\quad - \frac{1}{r}G^0 - \frac{\Lambda r^2}{2}\partial_r a, \\
 &= -\frac{1}{r}\partial_r b + \frac{aQ^2}{r^4} - \frac{3a}{2}\Lambda r - \frac{Q^2}{2r^3}\partial_r a - \frac{aQ}{r^3}\partial_r Q + \frac{\partial_r a}{2r} \\
 &\quad - \frac{1}{r}G^0 - \frac{\Lambda r^2}{2}\partial_r a, \\
 &= -\frac{2}{r}G^0 + \frac{1}{2r}\partial_r a \left(1 - \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda r^3 \right) - a \left(\frac{Q}{2r^3}\partial_r Q + \frac{3}{2}\Lambda r - \frac{Q^2}{r^4} \right).
 \end{aligned}$$

En dérivant (1.59) par rapport à r , nous avons de (1.50)

$$\begin{aligned}
 \partial_r G^1 &= -i\partial_r A_u, \\
 &= -i\frac{aQ}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Proposition 1.3.3 Pour la même fonction définie en (1.44), nous pouvons avoir l'équation en $\partial_r h$ suivante :

$$(D - 2G^0 - G^1)(\partial_r h) = W\partial_r \bar{h} + G\bar{h}, \quad (1.62)$$

où

$$W = -3G^0 - G^1 - a \left(\Lambda r + \frac{Q}{r^2}\partial_r Q - \frac{Q^2}{r^3} \right) + \frac{\partial_r a}{2} \left(1 - \frac{Q^2}{2r^2} - \Lambda r^2 \right) - i\frac{3aQ}{2r}, \quad (1.63)$$

$$G = \frac{i}{2r} \left(a\frac{Q}{r} - Q\partial_r a - a\partial_r Q \right). \quad (1.64)$$

Preuve En supposant que la fonction h est assez régulière, nous avons en dérivant (1.57) par rapport à r , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \left(\partial_u - \frac{b}{2}\partial_r \right) (\partial_r h) &= (h - \bar{h})\partial_r G^0 + G^0(\partial_r h - \partial_r \bar{h}) - i\frac{Q\bar{h}}{2r}\partial_r a - i\frac{a\bar{h}}{2r}\partial_r Q - i\frac{aQ}{2r}\partial_r \bar{h} \\
 &\quad + i\frac{aQ\bar{h}}{2r^2} + \partial_r G^1(h - \bar{h}) + G^1(\partial_r h - \partial_r \bar{h}) + \frac{\partial_r b}{2}\partial_r h.
 \end{aligned} \quad (1.65)$$

En utilisant le fait que $\partial_r \bar{h} = \frac{h - \bar{h}}{r}$ et $G^0 = \frac{\partial_r b}{2}$, nous obtenons de l'égalité (1.65), la nouvelle égalité

$$\begin{aligned}
 \left(\partial_u - \frac{b}{2}\partial_r - 2G^0 - G^1 \right) (\partial_r h) &= r\partial_r \bar{h}(\partial_r G^0 + \partial_r G^1) - G^0\partial_r \bar{h} - i\frac{Q\bar{h}}{2r}\partial_r a - i\frac{a\bar{h}}{2r}\partial_r Q - i\frac{aQ}{2r}\partial_r \bar{h} \\
 &\quad + i\frac{aQ\bar{h}}{2r^2} - G^1\partial_r \bar{h},
 \end{aligned}$$

de sorte qu'en utilisant (1.60) et (1.61) on ait

$$\begin{aligned}
 (D - 2G^0 - G^1)(\partial_r h) &= [r(\partial_r G^0 + \partial_r G^1) - G^0 - G^1 - i\frac{aQ}{2r}] \partial_r \bar{h} - i\frac{Q\bar{h}}{2r} \partial_r a - i\frac{a\bar{h}}{2r} \partial_r Q \\
 &\quad + i\frac{aQ\bar{h}}{2r^2} \\
 &= \left[-3G^0 - G^1 + \frac{\partial_r a}{2} \left(1 - \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda r^3 \right) - i\frac{3aQ}{2r} \right] \partial_r \bar{h} \\
 &\quad - a \left(\frac{Q}{2r^2} \partial_r Q + \frac{3\Lambda}{2} r^2 - \frac{Q^2}{r^3} \right) \partial_r \bar{h} + \frac{i}{2r} \left(a\frac{Q}{r} - Q\partial_r a - a\partial_r Q \right) \bar{h}.
 \end{aligned}$$

Remarque 1.3.3 Si $\Phi = \Phi^*$ (champ scalaire réel), avec les mêmes identités (1.44), (1.45) et (1.46), nous avons de (1.47) $Q = 0$, de (1.48) $A_u = 0$ et donc $F_{\mu\nu} = 0$.

L'équation (1.57) devient finalement

$$Dh = N(h - \bar{h}) \tag{1.66}$$

où

$$N := \frac{g - \bar{g}}{2r} + \frac{\Lambda}{2r^2} \int_0^r g s^2 ds - \frac{\Lambda}{2} r g,$$

et le problème de Cauchy associé à (1.66) a été déjà traité dans [15].

Proposition 1.3.4 Pour la métrique à symétrie sphérique (1.2), le système (1.5),(1.6), (1.7) et (1.27) est équivalent au système (1.44), (1.48), (1.51), (1.54) et (1.57). Les nouvelles fonctions inconnues étant a, b et h .

Preuve Nous remarquons que si les fonctions Φ, F et les fonctions a et b définies par la métrique g donnée en (1.2) satisfont (1.26), alors la fonction h définie par (1.44) vérifie (1.57). Réciproquement, si h est suffisamment régulière et est solution de (1.57), alors les fonctions $\phi = \bar{h}, a, b$ et le champ électromagnétique F définis par les relations (1.2) et (1.10) sont des solutions du système (1.5), (1.6) et (1.7).

Remarque 1.3.4 Nous déduisons de la proposition 1.3.4, que étudier le système d'EMKG $_{\Lambda}$ revient à étudier l'EDP (encore appelée équation intégro-différentielle) du premier ordre (1.57).

Nous nous intéressons donc au prochain chapitre au problème de Cauchy de l'e.d.p (1.57) dont un théorème d'existence locale de solution sera énoncé et prouvé.

Existence locale de solution

En écrivant le système d'équations $d'EMCS_\Lambda$ dans le système de coordonnées de Bondi au Chapitre 1, nous avons montré que ce système se transformait en une seule équation dite de d'Einstein-Maxwell-Klein-Gordon que nous avons transformé en une équation aux dérivées partielles du premier ordre (1.57).

Dans ce chapitre, nous démontrons un théorème d'existence locale de solution en temps pour le problème de Cauchy associé à (1.57) avec la donnée initiale choisie petite, moyennant le théorème du point fixe de Banach.

2.1 La fonction de masse de Hawking

Étant donné que Chae dans [7] a eu besoin de positivité de la fonction b pour montrer que la fonction masse est bien définie, nous avons besoin de faire de même dans ce travail. Cependant, l'ajout d'une constante cosmologique au système étudié par Chae dans [7] (ce qui donne le système étudié ici), rend difficile la possibilité de trouver le signe de la fonction b telle que définie en (1.56) sans condition supplémentaire. Ainsi, nous pouvons néanmoins obtenir cette positivité sur un intervalle réduit. Par conséquent, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit U un réel strictement positif. Considérons la fonction b définie en (1.56). Alors, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $(u, r) \in [0, U] \times [0, r_0]$, $b(u, r) > 0$.*

Preuve *Sous la condition de régularité $a(u, 0) = 1$ pour tout $u \geq 0$ et de la définition $\bar{a}(u, r) = \frac{1}{r} \int_0^r a(u, s) ds$, nous obtenons en appliquant le nombre dérivée en 0 à la fonction $F(r) = \int_0^r a(u, r) ds$, $\bar{a}(u, 0) = 1$. Comme le deuxième terme de la fonction b s'annule en 0, nous obtenons $b(u, 0) = \bar{a}(u, 0) = 1$ pour tout $u \geq 0$.*

D'autre part, en dérivant (1.52) par rapport à r , nous obtenons $\partial_r a = 4\pi a \frac{|h - \bar{h}|^2}{r} > 0$, ce qui montre que la fonction $r \mapsto a(., r)$ est croissante. Ainsi, nous obtenons pour tout

$u \geq 0$, $s \in [0, r]$, $1 = a(u, 0) \leq a(u, r)$ et $a(u, s) \leq a(u, r)$ de sorte que

$$\bar{a}(u, r) = \frac{1}{r} \int_0^r a(u, s) ds \leq \frac{1}{r} \int_0^r a(u, r) ds = a(u, r).$$

Ainsi nous obtenons de la relation (1.56) et du fait de la croissance de la fonction a par rapport à sa deuxième composante que pour tout $(u, r) \in [0, U] \times [0, R_0]$,

$$\begin{aligned} b(u, r) &= \bar{a}(u, r) - \frac{1}{r} \int_0^r a(u, s) \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds \\ &\leq a(u, r) - \frac{1}{r} \int_0^r a(u, s) \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds \\ &= a(u, r) - \frac{1}{r} \int_0^r \Lambda s^2 a(u, s) ds - \frac{1}{r} \int_0^r \frac{Q^2}{s^2} ds \\ &\leq a(u, r) \left(\frac{1}{r} \int_0^r (1 - \Lambda s^2) ds \right) \\ &\leq a(u, R_0) \left(\frac{1}{r} \int_0^r (1 - \Lambda s^2) ds \right) \\ &= a(u, R_0) \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right). \end{aligned}$$

Nous déduisons donc que b tend vers $-\infty$ lorsque r tend vers $+\infty$ et comme $b(u, 0) = 1 > 0$, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $r_0 \geq 0$ tel que $b(u, r) > 0$.

S'inspirant de [7], nous définissons par m , la fonction de masse renormalisée de Hawking aussi appelée masse de Bondi qui est une quantité qui joue un rôle important dans les problèmes de radiation dont l'expression est :

$$m(u, r) = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{b}{a} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{Q^2}{r^2} \right) \quad (2.1)$$

qui mesure la masse contenue dans la sphère de rayon r au temps retardé u . Alors, nous obtenons $m(u, 0) = 0$ et des relation (1.52) et (1.54) nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(m - \frac{Q^2}{2r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{2} \left(1 - \frac{b}{a} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{b}{2a} - \frac{\Lambda}{6} r^2 - \frac{r}{2} \left(\frac{a \partial_r b - b \partial_r a}{a^2} \right) - \frac{\Lambda}{3} r^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{b}{2a} - \frac{\Lambda}{2} r^2 - \frac{r}{2a} \partial_r b + \frac{r b}{2a^2} \partial_r a \\ &= \frac{1}{2} - \frac{b}{2a} - \frac{\Lambda}{2} r^2 - \frac{r}{2a} \left(\frac{a-b}{r} - a \Lambda r - a \frac{Q^2}{r^3} \right) + 2\pi \frac{b}{a} |h - \bar{h}|^2 \\ &= 2\pi \frac{b}{a} |h - \bar{h}|^2 + \frac{Q^2}{2r^2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ce qui montre que la fonction $r \mapsto m(\cdot, r) - \frac{Q^2(\cdot, r)}{2r}$ est croissante si $b > 0$. D'autre part, en intégrant (2.2), nous obtenons une autre représentation de la masse définie par

$$m(u, r) = \int_0^r \left(2\pi \frac{b}{a} |h - \bar{h}|^2 + \frac{Q^2}{2s^2} \right) ds + \frac{Q^2}{2r}, \quad (2.3)$$

puisque $\lim_{r \rightarrow 0} (m - Q^2/2r) = 0$. Nous remarquons que tous les termes de (2.3) sont positifs sauf peut être le terme comportant la fonction b et comme $b > 0$ pour $r \leq r_0$ d'après le Théorème 2.1.1, nous pouvons conclure d'après ce qui précède que $m(u, r) \geq 0$ pour $r \leq r_0$.

2.2 Espace fonctionnel

Dans cette section, nous définissons l'espace fonctionnel dans lequel nous montrerons l'existence locale et globale de solutions.

Définition 2.2.1 Soient $U, R_0 > 0$ et finis. Notons par \mathcal{C}_{U, R_0}^0 l'espace de Banach des fonctions continues sur

$[0, U] \times [0, R_0]$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}_{U, R_0}^0} := \sup_{(u, r) \in [0, U] \times [0, R_0]} |f(u, r)|$$

Nous définissons aussi X_{U, R_0} l'espace des fonctions

$$\begin{aligned} f : [0, U] \times [0, R_0] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, r) &\longmapsto f(u, r) \end{aligned}$$

continues ayant la dérivée partielle par rapport à r continue et muni de la norme

$$\|f\| := \|f\|_{\mathcal{C}_{U, R_0}^0} + \|\partial_r f\|_{\mathcal{C}_{U, R_0}^0}. \quad (2.4)$$

Nous notons que pour les fonctions $r \longmapsto f(\cdot, r)$, l'espace $\mathcal{C}^0([0, R_0])$ sera noté $\mathcal{C}_{R_0}^0$ et $\mathcal{C}^1([0, R_0])$ par X_{R_0} .

Proposition 2.2.1 Il existe une constante positive K telle que la fonction a satisfait

$$1 \leq a(u, r) \leq K. \quad (2.5)$$

pour tout $(u, r) \in [0, U] \times [0, r_0]$.

Preuve Pour tout $h \in \mathcal{C}_{U, R_0}^0$, nous avons de la relation (1.45)

$$|\bar{h}| \leq \frac{1}{r} \int_0^r |h(u, s)| ds \leq \frac{1}{r} \int_0^r \|h\|_{\mathcal{C}_{U, R_0}^0} ds = \|h\|_{\mathcal{C}_{U, R_0}^0},$$

et pour tout $h \in X_{U, R_0}$, nous avons :

$$\begin{aligned} |(h - \bar{h})(u, r)| &\leq \frac{1}{r} \int_0^r |h(u, r) - h(u, r')| dr' = \frac{1}{r} \int_0^r \left| \int_{r'}^r \frac{\partial h}{\partial s}(u, s) ds \right| dr' \\ &\leq \frac{1}{r} \int_0^r \int_{r'}^r \left| \frac{\partial h}{\partial s}(u, s) \right| ds dr', \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\partial_r h\|_{\mathcal{C}_{U, R_0}^0} \frac{1}{r} \int_0^r (r - r') dr', \\ &\leq \frac{r}{2} \|\partial_r h\|_{\mathcal{C}_{U, R_0}^0}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

En intégrant (2.7), nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{|h - \bar{h}|^2}{s} ds &\leq \|\partial_r h\|_{\mathcal{C}_{U,R_0}^0}^2 \frac{1}{4} \int_0^r s ds = \|\partial_r h\|_{\mathcal{C}_{U,R_0}^0}^2 \frac{r^2}{8}, \\ &\leq \begin{cases} \frac{R_0^2}{8} \|\partial_r h\|_{\mathcal{C}_{U,R_0}^0}^2 & \text{si } r \in [0, R_0] \text{ est supérieur à } 1 \\ \frac{\|\partial_r h\|_{\mathcal{C}_{U,R_0}^0}^2}{8} & \text{si } r \in [0, R_0] \text{ est inférieur à } 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Posons

$$K := \max \left(\exp \left(\frac{\pi}{2} \|h\|_{X_{U,R_0}}^2 R_0^2 \right), \frac{16\pi^2}{3} R_0^2 \|h\|_{X_{U,R_0}}^4 \right). \quad (2.8)$$

Nous déduisons de (1.52) et du fait que la fonction $r \mapsto a(\cdot, r)$ soit croissante que

$$1 = a(u, 0) \leq a(u, r) \leq \exp \left(\frac{\pi}{2} \|\partial_r h\|_{X_{U,R_0}}^2 R_0^2 \right) \leq K.$$

Corollaire 2.2.1 Avec la même constante positive K définie en (2.5), on a l'inégalité :

$$\frac{1}{r} \int_0^r \frac{Q^2}{s^2} ds \leq Kr^2. \quad (2.9)$$

Preuve De l'expression de Q en (1.47), nous déduisons :

$$|Q| \leq 4\pi \int_0^r s |h| |\bar{h}| ds \leq 4\pi r^2 \|h\|_{X_{U,R_0}}^2 \quad (2.10)$$

ainsi,

$$\frac{1}{r} \int_0^r \frac{Q^2}{s^2} ds \leq \frac{16\pi^2}{3} r^2 \|h\|_{X_{U,R_0}}^4 \leq Kr^2.$$

2.3 Estimations à priori

Les caractéristiques associées à l'opérateur D sont définies par les solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{2}b(u, r). \quad (2.11)$$

Les solutions de (2.11) existent grâce au théorème de Cauchy-Lypchitz (car b est de classe \mathcal{C}^1 par hypothèse) et nous supposons que la solution qui vaut r_1 en $u = u_1$ est de la forme $r(u) = r(u; u_1, r_1)$. Mais pour simplifier les notations, nous désignerons la fonction $u \mapsto r(u)$ comme la solution de (2.11) et satisfaisant $r(u_1) = r_1$.

Nous allons à présent faire une estimation de ces caractéristiques. Pour cela, recherchons d'abord une estimation de b .

Comme $a \geq 1$, nous déduisons de (2.5) et (2.9) que

-Pour $r < \sqrt{1/\Lambda}$,

$$\begin{aligned} b(u, r) &= \frac{1}{r} \int_0^r a \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds, \\ &\geq 1 - \frac{\Lambda K}{3} r^2 - K^2 r^2, \\ &= 1 - K \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2. \end{aligned}$$

-Pour $r \geq \sqrt{1/\Lambda}$ et en utilisant (2.5) et (2.9), nous avons

$$\begin{aligned} b(u, r) &= \frac{1}{r} \int_0^{\sqrt{1/\Lambda}} a \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds + \frac{1}{r} \int_{\sqrt{1/\Lambda}}^r a \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds, \\ &\geq \frac{1}{r} \int_0^{\sqrt{1/\Lambda}} a \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds + \frac{K}{r} \int_{\sqrt{1/\Lambda}}^r \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds \\ &\geq \frac{1}{r} \int_0^{\sqrt{1/\Lambda}} (1 - \Lambda s^2) ds - \frac{K}{r} \int_0^{\sqrt{1/\Lambda}} \frac{Q^2}{s^2} ds + \frac{K}{r} \int_{\sqrt{1/\Lambda}}^r (1 - \Lambda s^2) ds - \frac{K}{r} \int_{\sqrt{1/\Lambda}}^r \frac{Q^2}{s^2} ds, \\ &= \frac{2}{3\sqrt{\Lambda}r} - \frac{2K}{3\sqrt{\Lambda}r} + K \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) - \frac{K}{r} \int_0^r \frac{Q^2}{s^2} ds \\ &\geq \frac{2}{3\sqrt{\Lambda}r} - \frac{2K}{3\sqrt{\Lambda}r} + K \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) - K^2 r^2 \\ &= \frac{2}{3\sqrt{\Lambda}r} (1 - K) + K - K \frac{\Lambda}{3} r^2 - K^2 r^2, \\ &\geq \frac{2}{3} (1 - K) + K - K \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2 \\ &= \frac{2 + K}{3} - K \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2, \\ &\geq 1 - K \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc déduire que pour tout $(u, r) \in [0, U] \times [0, R_0]$,

$$b(u, r) \geq 1 - K \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2. \quad (2.12)$$

D'autre part, nous avons de la double inégalité (2.5)

$$\begin{aligned} b(u, r) &= \frac{1}{r} \int_0^r a(1 - \Lambda s^2) ds - \frac{1}{r} \int_0^r a \frac{Q^2}{s^2} ds, \\ &\leq \frac{1}{r} \int_0^r a ds - \frac{\Lambda}{r} \int_0^r a s^2 ds \\ &\leq K - \frac{\Lambda}{3} r^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ainsi, de (2.11) et (2.12), nous avons l'inégalité différentielle suivante

$$\begin{aligned} \frac{dr}{du} &\leq -\frac{1}{2} + \frac{K}{2} \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{K(\Lambda + 3K)}{6} r^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Posons

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K(\Lambda + 3K)}{3}} \quad \text{et} \quad r_c^- = \sqrt{\frac{3}{K(\Lambda + 3K)}} \quad (2.15)$$

où r_c^- est la racine positive du polynôme $1 - K \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2$. La solution $r_c^-(u)$ de l'équation différentielle obtenue de (2.14) en remplaçant l'inégalité par l'égalité et satisfaisant $r_c^-(u_1) = r_1 \geq r_c^-$ est donnée par

$$r_c^-(u) = \frac{1}{2\alpha} \tanh\{\alpha(c^- - u)\},$$

avec $c^- = u_1 + \frac{1}{\alpha} \text{Arg} \tanh(2\alpha r_1)$. Ainsi, nous déduisons du principe de comparaison (Lemme 1.1)

$$r(u) \geq \frac{1}{2\alpha} \tanh\{\alpha(c^- - u)\}, \quad \forall u \leq u_1. \quad (2.16)$$

Comme précédemment, notons

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda K}{3}} \quad \text{et} \quad r_c^+ = \sqrt{\frac{3K}{\Lambda}}$$

où r_c^+ est la racine du polynôme de membre de droite de (2.13). L'équation différentielle

$$\frac{dr}{du} = -\frac{K}{2} + \frac{\Lambda}{6} r^2$$

a pour solution satisfaisant $r^+(u_1) = r_1 < r_c^+$

$$r^+(u) = \frac{K}{2\beta} \tanh\{\beta(c^+ - u)\}, \quad (2.17)$$

avec $c^+ = u_1 + \frac{1}{\beta} \text{Arg} \tanh\left(\frac{2\beta r_1}{K}\right)$. Ainsi, une fois de plus par le principe de comparaison, nous avons

$$r(u) \leq \frac{K}{2\beta} \tanh\{\beta(c^+ - u)\} \quad \forall u \leq u_1.$$

Nous déduisons des relations (2.16) et (2.17) que pour $r_c^- \leq r_1 < r_c^+$,

$$\frac{1}{2\alpha} \tanh\{\alpha(c^- - u)\} \leq r(u) \leq \frac{K}{2\beta} \tanh\{\beta(c^+ - u)\}, \quad \forall u \leq u_1. \quad (2.18)$$

Et en particulier pour $r(u_1) = r_1 \geq r_c^-$, nous déduisons de (2.18)

$$r(u) \geq r_c^- > 0, \quad \forall u \leq u_1. \quad (2.19)$$

Nous nous proposons de prouver le Lemme ci-dessous qui sera indispensable dans la preuve de l'existence locale de solution pour le problème de Cauchy associé à (1.57).

Lemme 2.1 *Soit $h \in X_{U,R_0}$, $\Lambda > 0$ et $R_0 > 0$. Il existe des constantes $x^* = x^*(\Lambda, R_0) > 0$ et $C_i = C_i(x^*, \Lambda, R_0) > 0$, $i = 1, \dots, 5$ telles que si $\|h\|_{X_{U,R_0}} \leq x^*$, alors*

$$G^0 < -C_1 r, \quad (2.20)$$

$$|G^0| \leq C_2 r, \quad (2.21)$$

$$|G^1| < C_3 r, \quad (2.22)$$

$$|W| < C_4 r, \quad (2.23)$$

$$|G| \leq C_5, \quad (2.24)$$

de plus, pour toute solution de (2.11) vérifiant $r(u_1) \leq R_0$ pour tout $u_1 \geq 0$, nous avons

$$\left| \int_0^{u_1} \exp\left(\int_u^{u_1} (2G^0 + G^1)(v, r(v)) dv\right) du \right| \leq C_6. \quad (2.25)$$

Preuve Dans cette preuve, le symbole " \approx " signifie "approximativement égale à".

Pour $\|h\|_{X_{U,R_0}} \leq x^*$, nous pouvons combiner (2.5) et (2.8) et obtenir

$$1 \leq a(u, r) \leq K^* := \max\left(\exp\left(\frac{\pi}{2}(x^*)^2 R_0^2\right), \frac{16\pi^2}{3} R_0^2 (x^*)^4\right). \quad (2.26)$$

En prenant la dérivée partielle de (1.52) par rapport à r , nous avons

$$\frac{\partial a}{\partial r} = 4\pi \frac{|h - \bar{h}|^2}{r} \exp\left(4\pi \int_0^r \frac{|h - \bar{h}|^2}{s} ds\right).$$

Ainsi, nous obtenons de (2.7),

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\partial a}{\partial r} &\leq 4\pi \frac{|h - \bar{h}|^2}{r} K^* \\ &\leq \pi K^* (x^*)^2 r \\ &\leq \pi K^* (x^*)^2 r. \end{aligned} \quad (2.27)$$

En utilisant (2.27), nous avons

$$\begin{aligned} 0 \leq (a - \bar{a})(u, r) &\leq \frac{1}{r} \int_0^r \left(\int_{r'}^r \frac{\partial a}{\partial s}(u, s) ds \right) dr' \\ &\leq \pi K^* (x^*)^2 \frac{1}{r} \int_0^r \int_{r'}^r s ds dr' \\ &\leq \pi K^* (x^*)^2 r^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

D'après (2.10), nous pouvons estimer Q comme suit :

$$|Q| \leq 4\pi r^2 \|h\|_{X_{U,R_0}}^2 \leq 4\pi (x^*)^2 r^2. \quad (2.29)$$

Considérant (1.58) puis en combinant (2.26), (2.28) et (2.29), nous avons

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Lambda}{6} - \frac{\Lambda}{2} K^*\right) r &\leq G^0 \leq r \left[\frac{\pi}{4} K^* (x^*)^2 + \frac{\Lambda K^*}{6} + \frac{8\pi^2}{3} K^* (x^*)^4 - \frac{\Lambda}{2} \right], \\ &\leq r \left[C K^* (x^*)^2 + \frac{\Lambda K^*}{6} + C K^* (x^*)^4 - \frac{\Lambda}{2} \right], \\ &= r \left[K^* \left(C(x^*)^2 + C(x^*)^4 + \frac{\Lambda}{6} \right) - \frac{\Lambda}{2} \right], \\ &= -r \left[\frac{\Lambda}{2} - K^* \left(C(x^*)^2 + C(x^*)^4 + \frac{\Lambda}{6} \right) \right]. \end{aligned}$$

Puisque $K^* \rightarrow 1$ quand $x^* \rightarrow 0$, nous pouvons choisir x^* suffisamment petit tel que

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{2} - K^* \left(C(x^*)^2 + C(x^*)^4 + \frac{\Lambda}{6} \right) &> 0 \implies \frac{\Lambda}{2} - 2Cx^* - \frac{\Lambda}{6} > 0 \\ \text{d'où} \quad \frac{\Lambda}{3} - 2Cx^* &> 0. \end{aligned}$$

2.3. Estimations à priori

Il suffit donc d'après ce qui précède de choisir x^* tel que

$$x^* < \frac{\Lambda}{6C}. \quad (2.30)$$

Comme $\frac{\Lambda}{3} - K^*[C(x^*)^2 + C(x^*)^4] < \Lambda - K^*[C(x^*)^2 + C(x^*)^4]$, nous pouvons donc prendre

$$C_1 = \Lambda - K^*[C(x^*)^2 + C(x^*)^4],$$

de sorte que pour x^* suffisamment petit, l'on ait avec (2.30),

$$\begin{aligned} C_1 &\approx \Lambda - 2Cx^* \\ &> \Lambda - \frac{2\Lambda}{6} \\ &= \frac{2\Lambda}{3} > 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

En considérant de nouveau (1.58) puis en utilisant (2.26), (2.28) et (2.29), nous avons

$$\begin{aligned} |G^0| &\leq \frac{\pi K^*(x^*)^2}{4}r + \frac{\Lambda K^*}{2r^2} \int_0^r s^2 ds + \frac{K^*8\pi^2(x^*)^4}{r^2} \int_0^r s^2 ds + \frac{\Lambda K^*}{2}r + 16\pi^2(K^*)^2(x^*)^4r, \\ &\leq r \left[C(K^*)^2(x^*)^4 + \frac{K^*C(x^*)^4}{6} + \frac{CK^*(x^*)^2}{2} + \frac{2\Lambda K^*}{3} \right], \\ &\leq C_2r, \end{aligned}$$

où

$$C_2 = C(K^*)^2(x^*)^4 + \frac{K^*C(x^*)^4}{6} + \frac{CK^*(x^*)^2}{2} + \frac{2\Lambda K^*}{3}.$$

Maintenant, on peut écrire d'après (2.26),

$$\begin{aligned} |G^1| &\leq \int_0^r a \frac{|Q|}{s^2} ds, \\ &\leq K^* \int_0^r \frac{|Q|}{s^2} ds \\ &\leq CK^*(x^*)^2r \\ &\leq C_3r, \end{aligned}$$

où $C_3 = CK^*(x^*)^2$.

De (1.47) nous avons

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = 2\pi r(\bar{h}^*h - \bar{h}h^*)$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Q}{\partial r} \right| &\leq 4\pi r |\bar{h}| |h|, \\ &\leq 4\pi r \|h\|_{X_{U,R_0}}^2, \\ &\leq C(x^*)^2r. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.3. Estimations à priori

Ainsi, nous avons de (1.63) et dans l'ordre des relations (2.21), (2.22), (2.26), (2.29), (2.32) et (2.27) :

$$\begin{aligned}
|W| &\leq 3C_2r + C_3r + \Lambda K^*r + 32\pi^2 K^*(x^*)^4r + 16\pi^2 K^*(x^*)^4r + \frac{\pi}{4}K^*(x^*)^2r + 2\pi^3 K^*(x^*)^6r^3 \\
&\quad + \frac{\Lambda\pi}{4}K^*(x^*)^2r^2 + 6\pi K^*(x^*)^2r \\
&\leq [3C_2 + C_3 + \Lambda K^*R_0 + 48\pi^2 K^*(x^*)^4 + \frac{\pi}{4}K^*(x^*)^2 + 2\pi^3 K^*(x^*)^6R_0^2]r \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda\pi}{4}K^*(x^*)^2R_0 + 6\pi K^*(x^*)^2 \right]r \\
&\leq [3C_2 + C_3 + CK^*\Lambda + CK^*(x^*)^4 + CK^*(x^*)^2 + \Lambda K^*(x^*)^2 + CK^*(x^*)^6]r \\
&\leq C_4r.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

De (1.64) puis des relations (2.26), (2.29), (2.27) et (2.32), nous avons

$$\begin{aligned}
|G| &\leq \frac{1}{2r} [4\pi K^*(x^*)^2r + 2\pi^2 K^*(x^*)^4r^3 + 4\pi K^*(x^*)^2r] \\
&\leq 2\pi K^*(x^*)^2 + \pi^2 K^*(x^*)^4r^2 + 2\pi K^*(x^*)^2 \\
&\leq 6\pi K^*(x^*)^2 + \pi^2 K^*(x^*)^4R_0^2 \\
&\leq CK^*(x^*)^2 + CK^*(x^*)^4 := C_5.
\end{aligned}$$

Comme $|\exp\{\int_u^{u_1} G^1(u, r(u))du\}| = 1$, nous avons de (2.20)

$$\left| \int_0^{u_1} \exp\left(\int_u^{u_1} (2G^0 + G^1)(v, r(v))dv\right) du \right| \leq \int_0^{u_1} \exp\left(-2C_1 \int_u^{u_1} r(v)dv\right) du$$

Or, si $r_1 < r_c^-$, (2.16) conduit à

$$\begin{aligned}
-2C_1 \int_u^{u_1} r(v)dv &\leq -\frac{C_1}{\alpha} \int_u^{u_1} \tanh\{\alpha(c^- - v)\}dv \\
&= \frac{C_1}{\alpha^2} \ln\left(\frac{\cosh(\alpha(c^- - u_1))}{\cosh(\alpha(c^- - u))}\right).
\end{aligned}$$

Mais pour tout réel $m, n \geq 0$, si x est positif, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\cosh(mx)}{\cosh(nx)} &= \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{nx} + e^{-nx}} = \frac{e^{mx-nx} + e^{-mx-nx}}{1 + e^{-2nx}} \leq e^{mx-nx} + e^{-mx-nx} \\
&\leq e^{mx-nx} + e^{mx-nx} \leq 2e^{(m-n)x}.
\end{aligned}$$

Nous déduisons alors que

$$\frac{\cosh(\alpha(c^- - u_1))}{\cosh(\alpha(c^- - u))} = 2e^{\alpha(u-u_1)},$$

et par la suite, nous obtenons

$$-2C_1 \int_u^{u_1} r(v)dv \leq \ln\left(2\frac{C_1}{\alpha^2} e^{\frac{C_1}{\alpha}(u-u_1)}\right). \tag{2.34}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{u_1} \exp\left(\int_u^{u_1} (2G^0 + G^1)(v, r(v)) dv\right) du \right| &\leq 2 \frac{C_1}{\alpha^2} \int_0^u e^{\frac{C_1}{\alpha}(u-u_1)} du, \\ &\leq 2 \frac{C_1}{\alpha^2} \frac{\alpha}{C_1} \left(1 - e^{-\frac{C_1}{\alpha}(u-u_1)}\right), \\ &\leq 2 \frac{C_1}{\alpha^2} \frac{\alpha}{C_1}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Si $r_1 \geq r_c^-$, nous avons de (2.19)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{u_1} \exp\left(\int_u^{u_1} (2G^0 + G^1)(v, r(v)) dv\right) du \right| &\leq \int_0^{u_1} e^{-2C_1 r_c^-(u_1-u)} du \\ &= \frac{1}{2C_1 r_c^-} \left[1 - e^{-2C_1 r_c^- u_1}\right] \\ &\leq \frac{1}{4\alpha C_1}. \end{aligned}$$

Donc prendre $C_6 = \max\left\{\frac{1}{4\alpha C_1}, 2 \frac{C_1}{\alpha^2} \frac{\alpha}{C_1}\right\}$.

Les constantes C_i étant toutes définies d'après tout ce qui précède, nous pouvons, vu l'estimation de W prendre la constante

$$C = \max\left\{48\pi^2; \frac{3}{2}R_0 + \left(2\pi^3 + \frac{1}{4}\right)R_0^2\right\}$$

et d'après (2.30), prendre

$$x^* \in \left]0, \frac{\Lambda}{6C}\right[.$$

Lemme 2.2 Soient les constantes positives C_1, C_2, C_3 définies comme au lemme 2.1 et K^* comme en (2.26). Alors, pour x^* choisit suffisamment petit, nous avons

$$\frac{C_2 + C_3 + K^* C(x^*)^2}{C_1} < 1. \quad (2.36)$$

Preuve Comme de l'expression de K^* en (2.26), on a $K^* \rightarrow 1$ lorsque $x^* \rightarrow 0$, alors pour x^* suffisamment petit, nous pouvons écrire

$$C_2 \approx \frac{5C}{3}x^* + \frac{2\Lambda}{3}$$

$$C_3 \approx Cx^*$$

$$K^* C(x^*)^2 \approx Cx^*$$

$$C_1 \approx \Lambda - 2Cx^*.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{C_2 + C_3 + K^* C(x^*)^2}{C_1} &\approx \frac{1}{\Lambda - 2Cx^*} \left(\frac{11C}{3}x^* + \frac{2\Lambda}{3}\right) \\ &= \frac{11Cx^* + 2\Lambda}{3\Lambda - 6Cx^*}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons choisir x^* tel que

$$x^* < \frac{\Lambda}{17C}, \quad (2.37)$$

afin d'obtenir $\frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1} < 1$.

Puisque $\frac{\Lambda}{17C} < \frac{\Lambda}{6C}$, pour toute la suite, nous travaillerons avec $x^* \in]0, \frac{\Lambda}{17C}[$.

2.4 Théorème d'existence locale de solution

L'objectif de cette section est de démontrer un théorème d'existence locale de solution au problème de Cauchy associé à l'équation (1.57). D'où le théorème ci-dessous.

Théorème 2.4.1 Soient $\Lambda > 0$, $R_0 > 0$, $x^* < \frac{\Lambda}{17C}$ et $h_0 \in \mathcal{C}^1([0, R_0])$. Il existe une constante $C^* = C^*(x^*, \Lambda, R_0) > 0$ telle que si $\|h_0\|_{X_{R_0}} \leq \frac{x^*}{1 + C^*}$, alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Dh = (G^0 + G^1)(h - \bar{h}) - i\frac{Q\bar{h}a}{2r} \\ h(0, r) = h_0(r) \end{cases} \quad (2.38)$$

possède une unique solution $h \in \mathcal{C}^1([0, U] \times [0, R_0])$ pour $U = U\left(\frac{x^*}{1 + C^*}\right)$ suffisamment petit. En outre, cette solution satisfait :

$$\|h\|_{\mathcal{C}_{U, R_0}^0} \leq C^0 \|h_0\|_{\mathcal{C}_{R_0}^0} \quad (2.39)$$

$$\|h\|_{X_{U, R_0}} \leq (1 + C^*) \|h_0\|_{X_{R_0}} \quad (2.40)$$

où $C^0 = C^0(x^*, \Lambda, R_0) > 0$.

Soit l'application $h \mapsto \mathcal{F}(h)$ définie comme solution de l'équation intégral-différentielle (1.57). Alors, nous avons

$$\begin{cases} D\mathcal{F}(h) = (G^0 + G^1)(\mathcal{F}(h) - \bar{h}) - i\frac{a\bar{h}Q}{2r} \\ \mathcal{F}(h)(0, h) = h(0, r) = h_0(r) \end{cases} \quad (2.41)$$

Pour la suite, nous simplifierons les notations en notant \mathcal{F} pour désigner $\mathcal{F}(h)$ de sorte que pour prouver ce théorème (Théorème 2.4.1), nous utiliserons par trois lemmes (lemme 2.3, lemme 2.4 et lemme 2.5)

Lemme 2.3 Supposons qu'il existe une fonction h vérifiant (2.38). Alors, il existe une constante $C^0 = C^0(x^*, \Lambda, R_0) > 0$ telle que

$$\|h\|_{\mathcal{C}_{U, R_0}^0} \leq C^0 \|h_0\|_{\mathcal{C}_{R_0}^0}.$$

Preuve Le système caractéristique associé à l'équation aux dérivées partielles (EDP)

(2.41) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{du} = -\frac{b}{2} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{F}}{du} = (G^0 + G^1)(\mathcal{F} - \bar{h}) - i\frac{a\bar{h}Q}{2r} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

avec la condition initiale

$$r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(0, r(0)) = h_0(r_0)$$

Soit $u \mapsto r(u) = \chi(u, r_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\frac{dr}{du} = -\frac{b}{2}, \quad r(0) = r_0. \quad (2.44)$$

Alors,

$$r(u_1, r_0) = r_1 = r_0 - \frac{1}{2} \int_0^{u_1} b(v, r(v)) dv, \quad (2.45)$$

où $r_1 = \chi(u_1, r_0)$. En intégrant l'EDO (2.43) le long des caractéristiques, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_1, r_1) &= h_0(r_0) \exp \left\{ \int_0^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} du \right\} \\ &+ \int_0^{u_1} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\} [f]_{\chi} du, \end{aligned} \quad (2.46)$$

où

$$f = -\bar{h} \left[G^0 + G^1 + i\frac{aQ}{2r} \right]. \quad (2.47)$$

En effet, posant $A(u) = \mathcal{F}(h(u, r(u))) \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\}$, nous avons par dérivation

$$\begin{aligned} A'(u) &= \frac{d\mathcal{F}(h)}{du} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\} - \mathcal{F}(h)(G^0 + G^1) \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\}, \\ &= \left[(G^0 + G^1)(\mathcal{F}(h) - \bar{h}) - ia\frac{\bar{h}Q}{2r} \right] \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\} \\ &- \mathcal{F}(h)(G^0 + G^1) \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\}, \\ &= - \left[\bar{h}(G^0 + G^1) + ia\frac{\bar{h}Q}{2r} \right] \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\}. \end{aligned}$$

Par une intégration sur $[0, u_1]$ de cette dernière égalité, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_1, r_1) &= A(u_1) = A(0) - \int_0^{u_1} \left[\bar{h}(G^0 + G^1) + ia\frac{\bar{h}Q}{2r} \right]_{\chi} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\} du \\ &= h_0(r_0) \exp \left\{ \int_0^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\} \\ &+ \int_0^{u_1} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\} \left[-\bar{h}(G^0 + G^1) - ia\frac{\bar{h}Q}{2r} \right]_{\chi} du. \end{aligned}$$

Par une intégration le long des caractéristiques avec plutôt h au lieu $\mathcal{F}(h)$ au membre de droite de (2.46) d'une part, puis en utilisant les relations (2.19)-(2.22) et le fait que $|\exp\{\int_0^{u_1} G^1(v, r(v))dv\}| = 1$, nous arrivons à :

$$\begin{aligned}
 |h(u_1, r_1)| &\leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} \exp\left\{\int_0^{u_1} G^0(v, r(v))dv\right\} + \int_0^{u_1} \exp\left\{\int_u^{u_1} G^0(v, r(v))dv\right\} |f(u, r(u))| du, \\
 &\leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} \exp\left\{-C_1 \int_0^{u_1} r(v)dv\right\} \\
 &\quad + \|\bar{h}\|_{C_{U, R_0}^0} (C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2) \int_0^{u_1} \exp\left\{-C_1 \int_u^{u_1} r(v)dv\right\} r(u) du, \\
 &\leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} e^{-C_1 \int_0^{u_1} r(v)dv} + \|h\|_{C_{U, R_0}^0} (C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2) \int_0^{u_1} e^{-C_1 \int_u^{u_1} r(v)dv} r(u) du, \\
 &\leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} + \|h\|_{C_{U, R_0}^0} \frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1} \underbrace{\left(1 - e^{-C_1 \int_0^{u_1} r(v)dv}\right)}_{<1}, \\
 &\leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} + \frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1} \|h\|_{C_{U, R_0}^0}. \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

Finalement, en passant aux sup au membre de gauche de (2.48), nous avons

$$\|h\|_{C_{U, R_0}^0} \leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} + \frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1} \|h\|_{C_{U, R_0}^0},$$

d'où

$$\|h\|_{C_{U, R_0}^0} \leq \left(1 - \frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1}\right)^{-1} \|h_0\|_{C_{R_0}^0}.$$

Nous pouvons donc prendre

$$C^0 = \left(1 - \frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1}\right)^{-1}, \tag{2.49}$$

(qui d'après (2.36) est positive) pour conclure.

Lemme 2.4 Soit $\rho > 0$. Posons $B_\rho = \{f \in X_{U, R_0} : \|f\|_{X_{U, R_0}} \leq \rho\}$. Alors, B_ρ est un sous espace fermé du complet X_{U, R_0} donc un espace métrique et dont la distance est celle induite par la norme sur X_{U, R_0} . Alors

$$\mathcal{F} : B_{x^*} \longrightarrow B_{x^*}.$$

Preuve Fixons $U > 0$.

Soit $h \in B_{x^*}$. Montrons que $\mathcal{F}(h) \in B_{x^*}$ c'est-à-dire que $\|\mathcal{F}(h)\|_{X_{U, R_0}} \leq x^*$.

Puisque $h \in B_{x^*}$, alors nous avons $\|h\|_{X_{U, R_0}} \leq x^*$. En changeant h par $\mathcal{F}(h)$ dans (2.48), nous obtenons directement

$$|\mathcal{F}(u_1, r_1)| \leq C^0 \|h_0\|_{C_{R_0}^0}. \tag{2.50}$$

Considérons le système caractéristique

$$\begin{cases} \frac{dr}{du} = -\frac{b}{2} \\ \frac{d(\partial_r \mathcal{F})}{du} = (2G^0 + G^1) \partial_r \mathcal{F} + W \partial_r \bar{h} + G \bar{h}, \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \partial_r \mathcal{F}(0, r(0)) = \partial_r h_0(r_0).$$

En intégrant le long de la caractéristique χ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_r \mathcal{F}(u_1, r_1) &= \partial_r h_0(r_0) \exp \left\{ \int_0^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi du \right\} \\ &\quad + \int_0^{u_1} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\} [W \partial_r \bar{h} + G \bar{h}]_\chi du. \end{aligned} \quad (2.51)$$

En effet, posant $B(u) = \partial_r \mathcal{F}(u, r(u)) \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\}$, nous obtenons par dérivation

$$\begin{aligned} B'(u) &= \frac{[d\partial_r \mathcal{F}(h)]}{du} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\} - (2G^0 + G^1) \partial_r \mathcal{F} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\}, \\ &= [(2G^0 + G^1) \partial_r \mathcal{F}(u, r(u)) + W \partial_r \bar{h} + G \bar{h}] \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\} \\ &\quad - (2G^0 + G^1) \partial_r \mathcal{F}(u, r(u)) \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\}, \\ &= [W \partial_r \bar{h} + G \bar{h}] \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\}. \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière égalité sur $[0, u_1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_r \mathcal{F}(u_1, r_1) &= B(u_1) = B(0) + \int_0^{u_1} [W \partial_r \bar{h} + G \bar{h}]_\chi \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\} du \\ &= \partial_r h_0(r_0) \exp \left\{ \int_0^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\} \\ &\quad + \int_0^{u_1} [W \partial_r \bar{h} + G \bar{h}]_\chi \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi dv \right\} du. \end{aligned}$$

De la définition (2.51), nous avons de (2.20), (2.39), (2.23)-(2.25) et du fait que

$$\left| \exp \left\{ \int_0^{u_1} G^1(v, r(v)) dv \right\} \right| = 1,$$

$$\begin{aligned} |\partial_r \mathcal{F}(u_1, r_1)| &\leq \|\partial_r h_0\|_{C_{R_0}^0} \exp \left\{ -2C_1 \int_0^{u_1} r(v) dv \right\} \\ &\quad + (C_4 \|h - \bar{h}\|_{C_{U, R_0}^0} + C_5 \|\bar{h}\|_{C_{U, R_0}^0}) \left| \int_0^{u_1} \exp \left\{ \int_u^{u_1} (2G^0 + G^1)(v, r(v)) ds \right\} du \right|, \\ &\leq \|\partial_r h_0\|_{C_{R_0}^0} + (2C_4 + C_5) C_6 \|h\|_{C_{U, R_0}^0}, \\ &\leq \|\partial_r h_0\|_{C_{R_0}^0} + [C^0 C_1 C_6 (2C_4 + C_5)] \|h_0\|_{C_{R_0}^0}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Alors de (2.50) et (2.52), nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(h)(u_1, r_1)\|_{X_{U, R_0}} &= \|\mathcal{F}(h)(u_1, r_1)\|_{C_{U, R_0}^0} + \|\partial_r \mathcal{F}(h)(u_1, r_1)\|_{C_{U, R_0}^0}, \\ &\leq C^0 \|h_0\|_{C_{R_0}^0} + \|\partial_r h_0\|_{C_{R_0}^0} + [C^0 C_1 C_6 (2C_4 + C_5)] \|h_0\|_{C_{R_0}^0}, \\ &\leq C^0 \|h_0\|_{X_{R_0}} + \|h_0\|_{X_{R_0}} + [C^0 C_1 C_6 (2C_4 + C_5)] \|h_0\|_{X_{R_0}}, \\ &\leq (1 + C^*) \|h_0\|_{X_{R_0}}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

avec $C^* = C^0 + C^0 C_1 C_6 (2C_4 + C_5)$. Ainsi, nous déduisons de (2.53) que

$$\|\mathcal{F}(h)\|_{X_{U,R_0}} \leq x^*, \quad (2.54)$$

dès que $\|h_0\|_{X_{R_0}} \leq \frac{x^*}{1 + C^*}$. Donc, $\mathcal{F} : B_{x^*} \rightarrow B_{x^*}$.

Lemme 2.5 *L'application $h \mapsto \mathcal{F}(h)$ est contractante dans B_{x^*} . i.e,*

$$\exists \lambda = \lambda(x^*, \Lambda, R_0, U) \in]0, 1[: \|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{X_{U,R_0}} \leq \lambda \|h_1 - h_2\|_{X_{U,R_0}}$$

pour tout $h_1, h_2 \in X_{U,R_0}$.

Pour prouver ce Lemme (2.5), nous allons procéder en deux étapes. Nous allons premièrement faire une estimation de la différence $\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)$, puis de $\partial_r[\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)]$.

Soient $h_1, h_2 \in X_{U,R_0}$ deux solutions de (2.43) vérifiant la condition initiale

$$h_1(0, r) = h_2(0, r).$$

Supposons que

$$\max(\|h_1\|_{X_{U,R_0}}, \|h_2\|_{X_{U,R_0}}) \leq x^*, \quad (2.55)$$

et notons pour $l = 1, 2$ $a_l := a(h_l)$, $b_l := b(h_l)$, $A_{ul} = A_u(h_l)$, $Q_l = Q(h_l)$, $G_l = G(h_l)$, $G_l^0 := G^0(h_l)$, $G_l^1 := G^1(h_l)$, $W_l = W(h_l)$ et les caractéristiques $\chi_l = \chi_l(u; r)$.

Première étape : Estimation de $\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)$,

Preuve En utilisant (2.46) puis une factorisation élémentaire, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)| &\leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} \underbrace{\left| e^{\int_0^{u_1} [G_1^0 + G_1^1]_{x_1} du} - e^{\int_0^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} du} \right|}_{D_1} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} \left| e^{\int_u^{u_1} [G_1^0 + G_1^1]_{x_1} dv} - e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| |\bar{h}_1| |G_1^0| du}_{D_2} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} |G_1^0 - G_2^0| |\bar{h}_1| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| du}_{D_3} + \underbrace{\int_0^{u_1} |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| |G_2^0| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| du}_{D_4} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} \left| e^{\int_u^{u_1} [G_1^0 + G_1^1]_{x_1} dv} - e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| |\bar{h}_1| |G_1^1| du}_{D_5} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} |G_1^1 - G_2^1| |\bar{h}_1| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| du}_{D_6} + \underbrace{\int_0^{u_1} |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| |G_2^1| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| du}_{D_7} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} \left| e^{\int_u^{u_1} [G_1^0 + G_1^1]_{x_1} dv} - e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| \left| \frac{a_1 Q_1 \bar{h}_1}{2r} \right| du}_{D_8} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} |a_1 - a_2| \left| \frac{Q_1 \bar{h}_1}{2r} \right| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| du}_{D_9} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| \left| \frac{a_2 Q_2}{2r} \right| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| du}_{D_{10}} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} |Q_1 - Q_2| \left| \frac{a_2 \bar{h}_2}{2r} \right| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{x_2} dv} \right| du}_{D_{11}}.
 \end{aligned}$$

De (2.7) et (2.55), nous avons

$$\begin{aligned}
 |(h_1 - \bar{h}_1) + (h_2 - \bar{h}_2)| &\leq \frac{r}{2} \left(\|\partial_r h_1\|_{C_{U, R_0}^0} + \|\partial_r h_2\|_{C_{U, R_0}^0} \right) \\
 &\leq \frac{r}{2} (2x^*) = x^* r
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

et

$$\begin{aligned}
 |(h_1 - \bar{h}_1) - (h_2 - \bar{h}_2)| &= |(h_1 - h_2) - \overline{(h_1 - h_2)}| \\
 &\leq 2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U, R_0}^0}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

De (2.56) et (2.57), nous déduisons

$$\begin{aligned}
 \|h_1 - \bar{h}_1\|^2 - \|h_2 - \bar{h}_2\|^2 &\leq |(h_1 - \bar{h}_1) + (h_2 - \bar{h}_2)| |(h_1 - \bar{h}_1) - (h_2 - \bar{h}_2)| \\
 &\leq 2x^* r \|h_1 - h_2\|_{C_{U, R_0}^0}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

En utilisant l'inégalité (qui s'obtient en appliquant le théorème 1.1.3 à la fonction complexe $z \mapsto e^z$),

$$|e^x - e^y| \leq \max\{|e^x|, |e^y|\}|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}, \quad (2.59)$$

nous avons de (2.26) et (2.58)

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| &\leq \left| \exp\left(4\pi \int_0^r \frac{|h_1 - \bar{h}_1|^2}{s} ds\right) - \exp\left(4\pi \int_0^r \frac{|h_2 - \bar{h}_2|^2}{s} ds\right) \right| \\ &\leq 4\pi K^* \int_0^r \frac{|(h_1 - \bar{h}_1)^2 - (h_2 - \bar{h}_2)^2|}{s} ds \\ &\leq 8\pi x^* K^* \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} r \\ &\leq \tilde{C}r \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

où $\tilde{C} = \tilde{C}(x^*, \Lambda, R_0) > 0$ ayant la propriété d'absorber x^*, R_0, Λ .

De (1.47) et (2.55), nous obtenons

$$\begin{aligned} |Q_1 - Q_2| &\leq 8\pi \int_0^r s|h_1||h_1 - h_2| ds + 8\pi \int_0^r s|h_2||h_1 - h_2| ds \\ &\leq 8\pi \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \left(\|h_1\|_{C_{U,R_0}^0} \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} \|h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \right) \\ &= 8\pi x^* r^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\ &\leq \tilde{C}r^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Ainsi, de (1.48), (2.26), (2.29), (2.60) et (2.61), nous obtenons

$$\begin{aligned} |A_{u1} - A_{u2}| &\leq \int_0^r \frac{|Q_1|}{s^2} |a_1 - a_2| ds + \int_0^r \frac{|a_2|}{s^2} |Q_1 - Q_2| ds \\ &\leq 2\pi (x^*)^2 \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + K^* r \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\ &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Combinant (1.56), (2.26), (2.29), (2.60) et (2.61), nous avons

$$\begin{aligned} |b_1 - b_2| &\leq \frac{1}{r} \int_0^r |(1 - \Lambda s^2)(a_1 - a_2)| ds + \frac{1}{r} \int_0^r \frac{|Q_1^2|}{s^2} |a_1 - a_2| ds + \frac{1}{r} \int_0^r \frac{|a_2|}{s^2} |Q_1^2 - Q_2^2| ds \\ &\leq \left(1 + \frac{\Lambda}{3} r^2\right) \tilde{C}r \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + 4\pi^2 (x^*)^4 r^3 \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\ &\quad + \frac{8\pi}{3} K^* (x^*)^2 r^2 \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\ &\leq \tilde{C}r \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

et en utilisant (1.58),

$$\begin{aligned}
 |G_1^0 - G_2^0| &\leq \frac{|a_1 - a_2| + |\bar{a}_1 - \bar{a}_2|}{2r} + \frac{1}{2r^2} \int_0^r \frac{|Q_1^2|}{s^2} |a_1 - a_2| ds + \frac{1}{2r^2} \int_0^r \frac{|a_2|}{s^2} |Q_1^2 - Q_2^2| ds \\
 &+ \frac{\Lambda}{2r^2} \int_0^r |a_1 - a_2| s^2 ds + \frac{\Lambda}{2} r |a_1 - a_2| + \frac{1}{2r^3} (|a_1 - a_2| |Q_1^2| + a_2 |Q_1^2 - Q_2^2|) \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + 2\pi^2 (x^*)^4 r^2 \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + \frac{4\pi}{3} K^* (x^*)^2 r \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &+ \frac{\Lambda}{8} \tilde{C} r^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + \frac{\Lambda}{2} \tilde{C} r^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + 8\pi^2 (x^*)^4 \tilde{C} r^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &+ 4\pi (x^*)^2 K^* \tilde{C} r \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

Pour la suite des estimations, nous ne distinguerons pas les caractéristiques χ_1 et χ_2 car en considérant deux caractéristiques différentes, on peut toujours majorer par $\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}$ à une constante près. En effet, considérons les caractéristiques r_1 et r_2 passant par (u_1, r_0) , nous obtenons de (2.11)

$$r_l(u) = r_0 + \frac{1}{2} \int_u^{u_1} b(s, r_l(s)) ds,$$

et en faisant la différence, nous avons

$$\begin{aligned}
 r_1(u) - r_2(u) &= \frac{1}{2} \int_u^{u_1} [b_1(s, r_1(s)) - b_2(s, r_2(s))] ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_u^{u_1} [b_1(s, r_1(s)) - b_1(s, r_2(s))] ds + \frac{1}{2} \int_u^{u_1} [b_1(s, r_2(s)) - b_2(s, r_2(s))] ds.
 \end{aligned}$$

De la définition de G^0 en (1.58), nous avons $\partial_r b = 2G^0$ et de (2.21), nous déduisons que

$$|\partial_r b| \leq 2|G^0| \leq 2C_2 r \leq 2C_2 R_0 \leq \tilde{C}'. \tag{2.65}$$

En combinant (2.63) et (2.65), nous avons

$$\begin{aligned}
 |r_1(u) - r_2(u)| &\leq \frac{1}{2} \int_u^{u_1} \left| \int_{r_1(s)}^{r_2(s)} \partial_v b_1(s, v) dv \right| ds + \frac{1}{2} \int_u^{u_1} \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} ds \\
 &\leq \tilde{C}' \int_u^{u_1} |r_1(s) - r_2(s)| ds + \tilde{C} (u_1 - u) \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0},
 \end{aligned}$$

ce qui d'après le lemme de Gronwall-Bellman conduit à

$$\begin{aligned}
 |r_1(u) - r_2(u)| &\leq \tilde{C} (u_1 - u) \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + \tilde{C}' \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \int_u^{u_1} (u_1 - s) e^{\tilde{C}'(s-u)} ds \\
 &= \frac{\tilde{C}}{\tilde{C}'} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} [e^{(u_1-u)} - 1] \\
 &\leq \frac{\tilde{C}}{\tilde{C}'} [e^U - 1] \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned}$$

Pour toutes les estimations qui suivent, nous utiliserons la restriction $u_1 \leq U < 1$ et le fait que $|e^{\int_0^{u_1} G_j^1|_{\chi_j}}| = 1 \quad \forall j = 1, 2$.

Des relations (1.59), (2.19), (2.20), (2.62) et (2.64), nous avons :

$$\begin{aligned}
 D_1 &\leq \max \left\{ e^{\int_0^{u_1} G_1^0|_{X_1} du}, e^{\int_0^{u_1} G_2^0|_{X_2} du} \right\} \left| \int_0^{u_1} [G_1^0 + G_1^1]_{X_1} du - \int_0^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{X_2} du \right| \\
 &\leq \underbrace{e^{-C_1 \int_0^{u_1} r(v) dv}}_{\leq 1} \left(\int_0^{u_1} |G_1^0 - G_2^0|_X du + \int_0^{u_1} |G_1^1 - G_2^1|_X du \right) \\
 &\leq \tilde{C} \int_0^{u_1} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} du + \tilde{C} \int_0^{u_1} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} du \\
 &\leq \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

De(2.21), (2.55) et (2.66), nous avons

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \int_0^{u_1} D_1 |h_1| |G_1^0| du, \\
 &\leq \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \int_0^{u_1} C_2 R_0 \|h_1\|_{C_{U,R_0}^0} du, \\
 &\leq C_2 R_0 x^* u_1 \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \\
 &\leq \tilde{C}U^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \\
 &\leq U\tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

En combinant (2.19), (2.20), (2.55) et (2.64), nous avons

$$\begin{aligned}
 D_3 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \int_0^{u_1} \|h_1\|_{C_{U,R_0}^0} \underbrace{e^{-C_1 \int_0^{u_1} r(v) dv}}_{\leq 1} du, \\
 &\leq x^* \tilde{C} u_1 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \\
 &\leq U\tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

De (2.19)-(2.21), nous avons

$$\begin{aligned}
 D_4 &\leq \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \int_0^{u_1} C_2 R_0 \underbrace{e^{-C_1 \int_0^{u_1} r(v) dv}}_{\leq 1} du, \\
 &\leq C_2 R_0 u_1 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \\
 &\leq U\tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

En procédant comme en (2.67) pour l'estimation de D_2 , nous obtenons

$$D_5 \leq \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \tag{2.70}$$

et de (1.59), (2.19), (2.20), (2.55) et (2.62)

$$\begin{aligned}
 D_6 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \int_0^{u_1} \|h_1\|_{C_{U,R_0}^0} \underbrace{e^{-C_1 \int_0^{u_1} r(v) dv}}_{\leq 1} du, \\
 &\leq x^* u_1 \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \\
 &\leq U\tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

D'autres part, l'estimation de D_7 s'obtient de la même façon que celle de D_4 et celle de D_8 s'obtient également de la même façon que celle de D_2 ou de D_5 de sorte que nous obtenons

$$D_7 \leq U\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \quad (2.72)$$

$$D_8 \leq U\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \quad (2.73)$$

De (2.19), (2.20), (2.29), (2.55) et (2.60), nous avons

$$\begin{aligned} D_9 &\leq 2\pi R^2(x^*)^2\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \int_0^{u_1} \|h_1\|_{C_{U,R_0}^0} \underbrace{e^{-C_1 \int_u^{u_1} r(v)dv}}_{\leq 1} du \\ &\leq u_1\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\ &\leq U\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

L'estimation de D_{10} s'obtient de la même façon que celle de D_4 ou de D_7 . Ainsi, nous obtenons

$$D_{10} \leq U\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \quad (2.75)$$

et en combinant (2.19)-(2.20), (2.26), (2.55), (2.61), nous obtenons

$$\begin{aligned} D_{11} &\leq R\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} K^* \int_0^{u_1} \|h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \underbrace{e^{-C_1 \int_u^{u_1} r(v)dv}}_{\leq 1} du, \\ &\leq u_1\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \\ &\leq U\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Finalement, nous déduisons de (2.66)-(2.76) que $|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)| \leq 11U\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}$ et donc

$$\|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{C_{U,R_0}^0} \leq U\tilde{C}\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \quad (2.77)$$

Ce termine la preuve de la première étape.

Deuxième étape : Estimation de $\partial_r[\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)]$

Preuve *En appliquant comme précédemment une factorisation élémentaire sur (2.51),*

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |\partial_r(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)| &\leq \|\partial_r h_0\|_{C_{R_0}^0} \underbrace{\left| e^{\int_0^{u_1} [2G_1^0 + G_1^1]_\chi dv} - e^{\int_0^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_\chi dv} \right|}_I \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} \left| e^{\int_0^{u_1} [2G_1^0 + G_1^1]_\chi dv} - e^{\int_0^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_\chi dv} \right| |W_1 \partial_r \bar{h}_1 - G_1 \bar{h}_1| du}_{II} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} \left| \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_\chi dv \right\} \right| |W_1 - W_2| |\partial_r \bar{h}_1| du}_{III} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} \left| \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_\chi dv \right\} \right| |G_1 - G_2| |\bar{h}_1| du}_{IV} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} |\partial_r \bar{h}_1 - \partial_r \bar{h}_2| |W_2| \left| \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_\chi dv \right\} \right| du}_{V} \\
 &+ \underbrace{\int_0^{u_1} |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| |G_2| \left| \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_\chi dv \right\} \right| du}_{VI}.
 \end{aligned}$$

Nous allons à présent trouver une estimation de I, II, \dots, VI .

Suivant l'estimation de D_1 en (2.66), nous obtenons directement

$$I \leq \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \quad (2.78)$$

et combinée avec (2.23)-(2.24) et (2.55), nous avons

$$\begin{aligned}
 II &\leq \int_0^{u_1} I [C_4 R_0 \|\partial_r h_1\|_{C_{U,R_0}^0} + C_4 \|h_1\|_{C_{U,R_0}^0}] du, \\
 &\leq [C_4 R_0 x^* + C_4 x^*] u_1 \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \\
 &\leq \tilde{C}U^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \leq \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Pour estimer III , nous avons besoin de trouver premièrement une estimation de $|J_1 - J_2|$.

En dérivant (1.52) par rapport à r , puis en faisant la différence, nous pouvons avoir, en utilisant les relations (2.7), (2.26), (2.55), (2.58)

$$\begin{aligned}
 |\partial_r a_1 - \partial_r a_2| &= 4\pi \left| a_1 \frac{|h_1 - \bar{h}_1|^2}{r} - a_2 \frac{|h_2 - \bar{h}_2|^2}{r} \right| \\
 &\leq 4\pi |a_1 - a_2| \frac{|h_1 - \bar{h}_1|^2}{r} + 4\pi a_2 \frac{||h_1 - \bar{h}_1|^2 - |h_2 - \bar{h}_2|^2|}{r} \\
 &\leq \pi r^2 \|\partial_r h_1\|_{C_{U,R_0}^0}^2 \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + 8\pi x^* K^* \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &\leq \pi R_0^2 (x^*)^2 \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + 8\pi x^* K^* \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \quad (2.80)$$

En dérivant (1.47) par rapport à r , puis en faisant la différence, nous obtenons en utilisant (2.55),

$$\begin{aligned}
 |\partial_r Q_1 - \partial_r Q_2| &\leq 4\pi r |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| |h_1| + 4\pi r |h_1 - h_2| |\bar{h}_1| \\
 &\leq 4\pi r \|h_1\|_{C_{U,R_0}^0} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + 4\pi r \|h_1\|_{C_{U,R_0}^0} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &\leq 8\pi x^* r \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \leq \tilde{C} r \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Maintenant, de la définition de W en (1.63) puis des relations (2.26), (2.27), (2.29) (2.32), (2.55), (2.60)-(2.62), (2.64) et (2.80)-(2.81), nous avons

$$\begin{aligned}
 |W_1 - W_2| &\leq 3|G_1^0 - G_2^0| + |G_1^1 - G_2^1| + |a_1 - a_2| \left| \Lambda r + \frac{1}{r^2} |Q_2 \partial_r Q_1| + \frac{1}{r^3} Q_1^2 + \frac{3}{2r} |Q_1| \right| \\
 &\quad + |Q_1 - Q_2| \left(\frac{a_1 |\partial_r Q_1|}{r^2} + \frac{|Q_1 + Q_2|}{4r^2} \partial_r a_2 + \frac{|Q_1 + Q_2|}{r^3} a_2 + \frac{3}{2r} a_1 \right) \\
 &\quad + |\partial_r a_1 - \partial_r a_2| \left(\frac{1 + \Lambda r^2}{2} + \frac{Q_1^2}{4r^2} \right) + |\partial_r Q_1 - \partial_r Q_2| \frac{a_1 |Q_1|}{r^2}, \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \{4 + r[\Lambda r + 4\pi C(x^*)^4 r + 16\pi^2 (x^*)^4 r + 6\pi r (x^*)^2]\} \\
 &\quad + \tilde{C} r^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \left(\frac{K^* C(x^*)^2}{r} \pi^2 (x^*)^4 K^* r + \frac{8\pi K^* (x^*)^2}{r} + \frac{3K^*}{2r} \right) \\
 &\quad + \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \left[\frac{1 + \Lambda R_0^2}{2} + 4\pi^2 (x^*)^4 r^2 + 4\pi r K^* (x^*)^2 \right], \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0},
 \end{aligned}$$

et combinée avec (2.19)-(2.20) et (2.55), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 III &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \int_0^{u_1} \|\partial_r h_1\|_{C_{U,R_0}^0} \underbrace{e^{-2C_1 \int_u^{u_1} r(v) dv}}_{\leq 1} du \\
 &\leq u_1 x^* \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &\leq U \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Pour estimer IV , nous avons besoin d'une estimation de la différence $G_1 - G_2$. Ainsi, de la définition de G en (1.64), nous avons en faisant la différence puis en utilisant les relations (2.26)-(2.27), (2.29), (2.32), (2.60)-(2.61), (2.80) et (2.81) :

$$\begin{aligned}
 |G_1 - G_2| &\leq |a_1 - a_2| \left(\frac{|Q_1|}{2r^2} + \frac{|\partial_r Q_1|}{2r} \right) + \frac{|Q_2|}{2r} |\partial_r a_1 - \partial_r a_2| \\
 &\quad + |Q_1 - Q_2| \left(\frac{a_2}{2r^2} + \frac{\partial_r a_1}{2r} \right) + \frac{a_2}{2r} |\partial_r Q_1 - \partial_r Q_2|, \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} [2\pi r (x^*)^2 + r C(x^*)^2 + 2\pi r (x^*)^2] \\
 &\quad + \tilde{C} r^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \left(\frac{K^*}{2r^2} + \frac{\pi}{4} K^* (x^*)^2 \right) + K^* \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned}$$

En combinant cette dernière inégalité avec (2.19)-(2.20) et (2.55), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 IV &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \int_0^{u_1} \|h_1\|_{C_{U,R_0}^0} \underbrace{e^{-2C_1 \int_u^{u_1} r(v) dv}}_{\leq 1} du, \\
 &\leq x^* u_1 \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \\
 &\leq U \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

Puisque $\partial_r \bar{h}_1 - \partial_r \bar{h}_2 = \frac{h_1 - h_2 - (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)}{r}$, en combinant (2.19), (2.20) et (2.23), nous avons

$$\begin{aligned}
 V &\leq \int_0^{u_1} \frac{\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} C_4 r \underbrace{e^{-2C_1 \int_u^{u_1} r(v) dv}}_{\leq 1}}{r} du \\
 &\leq 2C_4 u_1 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &\leq \tilde{C} U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0},
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

tandis que de (2.19)-(2.20) et (2.24), nous avons

$$\begin{aligned}
 VI &\leq \int_0^{u_1} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} C_5 \underbrace{e^{-2C_1 \int_u^{u_1} r(v) dv}}_{\leq 1} du \\
 &\leq C_5 u_1 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &\leq \tilde{C} U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

Ainsi, de (2.78)-(2.79) et (2.82)-(2.85), nous déduisons que

$$\|\partial_r(\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2))\|_{C_{U,R_0}^0} \leq \tilde{C} U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \tag{2.86}$$

Ce qui termine la preuve de la deuxième étape.

Les étapes préliminaires étant été prouvées, nous pouvons donc prouver le Lemme 2.5.

Preuve En combinant les estimations (2.77) et (2.86), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{X_{U,R_0}} &= \|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{C_{U,R_0}^0} + \|\partial_r(\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2))\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &\leq \tilde{C} U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} + \tilde{C} U \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \\
 &\leq 2\tilde{C} U \|h_1 - h_2\|_{X_{U,R_0}}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $U < \frac{1}{4\tilde{C}}$, nous déduisons que l'application $h \mapsto \mathcal{F}(h)$ est contractante dans le Banach B_{x^*} et d'après le Théorème 1.1.1 (du point fixe de Banach), il existe un unique $h \in B_{x^*}$ tel que $\mathcal{F}(h) = h$.

Ce qui complète la preuve de Lemme 2.5.

A la suite de preuve des Lemmes 2.4 et 2.5, nous pouvons donc prouver le Théorème 2.4.1

Preuve (du Théorème 2.4.1)

Du lemme 2.5, la contraction de l'application $h \mapsto \mathcal{F}(h)$ dans B_{x^*} implique que la solution h de (2.38) appartient à X_{U,R_0} puisque $B_{x^*} \subseteq X_{U,R_0}$.

La solution $h \in X_{U,R_0}$, donc elle est continue et $\partial_r h$ est continue. Ce qui reste à montrer est la continuité de $\partial_u h$ d'une part et d'autre part, de montrer l'unicité de la solution h dans X_{U,R_0} .

Ainsi, la continuité de Dh vient directement (somme et produits de fonctions continues) de (1.57) et comme $\partial_u h = Dh + \frac{b}{2} \partial_r h$, nous déduisons la continuité de $\partial_u h$ ce qui montre que $h \in \mathcal{C}^1([0, U] \times [0, R_0])$.

Établissons l'unicité de solution du problème.

Soient h_1 et h_2 deux solutions de (2.38) telles que $h_1(0, r) = h_2(0, r)$. Alors, avec les mêmes notations à la preuve du lemme 2.5, la différence donne

$$\begin{aligned} D(h_1 - h_2) &= (G_2^0 + G_2^1)(h_1 - h_2) + (b_1 - b_2) \frac{\partial_r h_2}{2} + [(G_1^0 - G_2^0) + (G_1^1 - G_2^1)](h_1 - \bar{h}_1) \\ &\quad - (G_2^0 + G_2^1)(\bar{h}_1 - \bar{h}_2) - \frac{i}{2r} [(a_1 - a_2)Q_1 \bar{h}_1 + (Q_1 - Q_2)a_2 \bar{h}_1 + (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)a_2 Q_2]. \end{aligned}$$

Comme en (2.46) ou (2.51) nous pouvons intégrer le long des caractéristiques associées à h_1 et obtenir

$$(h_1 - h_2)(u_1, r_1) = \int_0^{u_1} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv \right\} \Psi|_{\chi_1} du$$

où

$$\begin{aligned} \Psi &= (b_1 - b_2) \frac{\partial_r h_2}{2} + [(G_1^0 - G_2^0) + (G_1^1 - G_2^1)](h_1 - \bar{h}_1) - (G_2^0 + G_2^1)(\bar{h}_1 - \bar{h}_2) \\ &\quad - \frac{i}{2r} [(a_1 - a_2)Q_1 \bar{h}_1 + (Q_1 - Q_2)a_2 \bar{h}_1 + (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)a_2 Q_2]. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (2.7), (2.26), (2.29), (2.55), (2.60)-(2.64), nous obtenons

$$|\Psi| \leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{\mathcal{C}_{U,R_0}^0}.$$

Ainsi, en posant

$$\sigma(u) = \|(h_1 - h_2)(u, \cdot)\|_{\mathcal{C}_{R_0}^0},$$

nous avons du fait que $|\exp \{ \int_u^{u_1} G_2^1|_{\chi_2} dv \}| = 1$

$$|(h_1 - h_2)(u_1, r_1)| \leq \tilde{C} \int_0^{u_1} \sigma(u) \exp \left\{ \int_u^{u_1} G_2^0|_{\chi_2} dv \right\} du,$$

ce qui implique que

$$\sigma(u_1) \leq \tilde{C} \int_0^{u_1} \sigma(u) \exp \left\{ \int_u^{u_1} G_2^0|_{\chi_2} dv \right\} du.$$

En appliquant le Lemme de Gronwall à cette dernière inégalité, nous déduisons que

$$\sigma(u_1) = 0$$

ce qui conduit à l'unicité. Ainsi s'achève la preuve du théorème 2.4.1.

Existence globale et comportement asymptotique

Puisqu'il est impossible de procéder comme pour l'existence locale en montrant directement un théorème d'existence globale de solution en temps via le théorème du point fixe de Banach, nous procédons dans ce chapitre par le critère de continuation afin d'étendre indéfiniment la solution.

Une fois l'existence globale de solution prouvée, nous décrivons le comportement asymptotique des solutions et nous finissons par l'étude de la complétude géodésique

3.1 Existence globale de solution en temps

L'objectif principal de cette section est de démontrer le théorème suivant qui conduit à l'existence globale de solution en temps du problème (2.38).

Théorème 3.1.1 *Soit $\Lambda > 0$, $R_0 > 0$, $C = \max \left\{ 48\pi^2; \frac{3}{2}R_0 + \left(2\pi^3 + \frac{1}{4} \right) R_0^2 \right\}$, $h_0 \in \mathcal{C}^1([0, R_0])$ et $x^* < \frac{\Lambda}{17C}$. Alors, il existe $C^*(x^*, \Lambda, R_0) > 0$, tels que si $\|h_0\|_{X_{R_0}} \leq \frac{x^*}{1 + C^*}$, alors le problème de Cauchy (2.38) admet une unique solution $h \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times [0, R_0])$. De plus cette solution globale satisfait :*

$$\|h\|_{\mathcal{C}_{+\infty, R_0}^0} \leq C^0 \|h_0\|_{\mathcal{C}^0([0, R_0])}, \tag{3.1}$$

et

$$\|h\|_{X_{+\infty, R_0}} \leq (1 + C^*) \|h_0\|_{X_{R_0}}. \tag{3.2}$$

Nous notons que l'espace fonctionnel $X_{+\infty, R_0}$ se définit de façon analogue de l'espace X_{U, R_0} avec U prenant la valeur $+\infty$.

Preuve *D'après le théorème d'explosion en temps fini, il suffit comme de montrer que les solutions Φ , a , b , A_u et leurs dérivées partielles sont bornées sur l'intervalle maximal d'existence pour conclure que la solution est globale en temps.*

Soit U_* le temps maximal d'existence de solution.

Comme l'estimation de la fonction a en (2.26) reste vraie pour tout $u \in [0, U_*]$, elle reste également vraie pour les $u \in [0, U_*[$ donc pour tout $(u, r) \in [0, U_*[\times [0, R_0]$, nous avons

$$a(u, r) \leq K^* \leq K_\Lambda$$

avec K_Λ qui s'obtient de K^* en remplaçant x^* par $\frac{\Lambda}{17C}$.

Nous notons que les constantes $C_{R_0, \Lambda}^i$ que nous obtenons lors des différentes estimations sont telles que i représente un indice et non une puissance.

De (1.56), (2.29), nous avons pour tout $(u, r) \in [0, U_*[\times [0, R_0]$,

$$\begin{aligned} |b(u, r)| &\leq \frac{1}{r} \int_0^r a|1 - \Lambda s^2| ds + \frac{1}{r} \int_0^r a \frac{Q^2}{s^2} ds, \\ &\leq K^* + \frac{\Lambda}{3} K^* r^2 + \frac{16\pi^2}{r} K^* (x^*)^4 \int_0^r s^2 ds, \\ &\leq K^* + \frac{\Lambda}{3} K^* R_0^2 + \frac{16\pi^2}{3} K^* (x^*)^4 R_0^2, \\ &\leq K_\Lambda \left(1 + \frac{\Lambda}{3} R_0^2 + \frac{16\pi^2 \Lambda}{51C} R_0^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pour tout $(u, r) \in [0, U_*[\times [0, R_0]$, nous déduisons

1. de (2.40) que

$$\begin{aligned} |h(u, r)| &\leq \|h\|_{X_{U, R_0}}, \\ &\leq (1 + C^*) \|h_0\|_{C_{R_0}^0}, \\ &\leq x^* \leq \frac{\Lambda}{17C}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

2. En remplaçant dans (2.52) $\mathcal{F}(h)$ par h , nous déduisons que

$$\begin{aligned} |\partial_r h(u, r)| &\leq (1 + C^*) \|h_0\|_{X_{R_0}}, \\ &\leq x^* \leq \frac{\Lambda}{17C}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

3. et comme par définition, $D = \partial_u - b/2\partial_r$, nous avons en utilisant les relations (1.57), (3.4)-(3.5), (2.21), (2.22), (2.29), pour tout $(u, r) \in [0, U_*[\times [0, R_0]$

$$\begin{aligned} |\partial_u h(u, r)| &= |Dh + b/2\partial_r h|, \\ &\leq |G^0 + G^1| |h - \bar{h}| + \frac{a}{2r} |\bar{h}| |Q| + \frac{1}{2} |b| |\partial_r h| \\ &\leq \frac{2\Lambda}{17C} (C_2 + C_3) r + 2\pi (x^*)^4 r K^* + \frac{1}{2} |b| |\partial_r h| \\ &\leq \frac{2\Lambda}{17C} (C_2 + C_3) R_0 + \frac{2\pi\Lambda}{17C} R_0 K_\Lambda + \frac{\Lambda K_\Lambda}{34C} \left(1 + \frac{\Lambda}{3} R_0^2 + \frac{4\pi\Lambda}{51C} R_0^2 \right) \\ &= C_{R_0, \Lambda}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1. Existence globale de solution en temps

Comme des relations (1.45) et (1.46), nous pouvons écrire $\Phi(u, r) = \frac{1}{r} \int_0^r h(u, s) ds$, nous avons pour tout $(u, r) \in [0, U_*] \times [0, R_0]$

$$\begin{aligned} |\Phi(u, r)| &\leq \frac{1}{r} \int_0^r |h(u, s)| ds, \\ &\leq \frac{\Lambda}{17C}, \end{aligned}$$

d'après (3.4), puis

$$\begin{aligned} |\partial_u \Phi(u, r)| &\frac{1}{r} \int_0^r |\partial_u h(u, s)| ds, \\ &\leq C_{R_0, \Lambda}, \end{aligned}$$

d'après (3.6) et de (3.5)

$$\begin{aligned} |\partial_r \Phi(u, r)| &= \frac{1}{r} |h - \bar{h}|, \\ &\leq \frac{1}{r} \int_0^r |h(u, r) - h(u, t)| dt, \\ &\leq \frac{1}{r} \int_0^r \int_t^r |\partial_s h(u, s)| ds dt, \\ &\leq \frac{\Lambda}{17Cr} \int_0^r (r-t) dt, \\ &\leq \frac{\Lambda}{34C} r \leq \frac{\Lambda}{34C} R_0. \end{aligned}$$

Nous avons de (2.27),

$$\begin{aligned} \partial_r a(u, r) &\leq \pi K^* (x^*)^2 r, \\ &\leq \frac{\Lambda \pi}{17C} K_\Lambda R_0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

En dérivant (1.52) par rapport à u , nous avons

$$\partial_u a = 4\pi \int_0^r \frac{1}{s} [(h - \bar{h})^* (\partial_u h - \partial_u \bar{h}) + (h - \bar{h}) (\partial_u h^* - \partial_u \bar{h}^*)] a,$$

ce qui donne en utilisant les relations (3.5) et (3.6)

$$\begin{aligned} |\partial_u a(u, r)| &\leq 8\pi K^* \int_0^r \frac{1}{s} |h - \bar{h}| |\partial_u h - \partial_u \bar{h}| ds, \\ &\leq 16\pi \int_0^r \frac{1}{s} |h - \bar{h}| |\partial_u h| ds, \\ &\leq 16\pi C_{R_0, \Lambda} \int_0^r \frac{1}{s} |h - \bar{h}| ds, \\ &\leq 16\pi C_{R_0, \Lambda} \int_0^r \frac{1}{s} \int_0^s \int_t^s |\partial_t h(u, t)| dr' dt ds, \\ &\leq \frac{16\Lambda\pi}{17C} C_{R_0, \Lambda} \int_0^r \frac{1}{s} \int_0^s (s-t) dt ds, \\ &\leq \frac{4\Lambda\pi}{17C} C_{R_0, \Lambda} r^2, \\ &\leq \begin{cases} \frac{4\Lambda\pi}{17C} C_{R_0, \Lambda} & \text{si } r \leq 1 \\ \frac{4\Lambda\pi}{17C} C_{R_0, \Lambda} R_0^2 & \text{si } r > 1 \end{cases}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Combinant (1.54) et (1.56) et (2.28), (2.29), on obtient

$$\begin{aligned}
 |\partial_r b(u, r)| &\leq \frac{1}{r} |a - \bar{a}| + a \left(\Lambda r + \frac{Q^2}{r^3} \right) + \frac{1}{r^2} \int_0^r a \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds, \\
 &\leq \frac{\pi}{2} K^* (x^*)^2 r + K^* (\Lambda r + 16\pi^2 (x^*)^4 r) + \frac{\Lambda K^*}{3} r + \frac{16\pi^2}{3} (x^*)^4 K^* r, \\
 &\leq \frac{\Lambda\pi}{34C} K_\Lambda R_0 + K_\Lambda R_0 \left(\Lambda + \frac{16\Lambda}{17C} \pi^2 \right) + \frac{\Lambda K_\Lambda}{3} R_0 + \frac{16\Lambda\pi^2}{51C} K_\Lambda R_0, \\
 &= C_{R_0, \Lambda}^1.
 \end{aligned}$$

En dérivant (1.47) par rapport à u , puis en utilisant les relations (3.4) et (3.6), nous avons

$$\begin{aligned}
 |\partial_u Q(u, r)| &\leq 2\pi \left| \int_0^r s (h \partial_u \bar{h}^* + \bar{h}^* \partial_u h - h^* \partial_u \bar{h} - \bar{h} \partial_u h^*) ds \right|, \\
 &\leq 8\pi \int_0^r s |h| |\partial_u h| ds, \\
 &\leq \frac{8\pi\Lambda}{17C} C_{R_0, \Lambda} \int_0^r s ds, \\
 &\leq \frac{4\pi\Lambda}{17C} C_{R_0, \Lambda} R_0^2.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

En dérivant (1.56) par rapport à u , puis en utilisant les relations (3.8), (2.29) et (3.9), nous avons

$$\begin{aligned}
 |\partial_u b(u, r)| &\leq |\partial_u \bar{a}| + \frac{1}{r} \int_0^r |\partial_u a| \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds + \frac{2}{r} \int_0^r \frac{a}{s^2} |Q| |\partial_u Q| ds, \\
 &\leq |\partial_u \bar{a}| + \frac{1}{r} \int_0^r |\partial_u a| \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds + 32\pi^2 \left(\frac{\Lambda}{17C} \right)^2 C_{R_0, \Lambda} R_0^2, \\
 &\leq \frac{4\Lambda\pi}{17C} C_{R_0, \Lambda} \left[1 + R_0^2 \left(\frac{\Lambda}{3} + \frac{4\pi\Lambda}{51C} \right) \right] R_0^2 + 32\pi^2 \left(\frac{\Lambda}{17C} \right)^2 C_{R_0, \Lambda} R_0^2, \\
 &= C_{R_0, \Lambda}^2.
 \end{aligned}$$

Combinant (1.48) et (2.29),

$$\begin{aligned}
 |A_u| &\leq \int_0^r \frac{a}{s^2} |Q| ds \\
 &\leq 4\pi K^* (x^*)^2 r \\
 &\leq \frac{4\pi\Lambda}{17C} K_\Lambda R_0.
 \end{aligned}$$

En dérivant (1.48), (3.8), (2.29) et (3.9), nous avons

$$\begin{aligned}
 |\partial_u A_u| &\leq \int_0^r \frac{1}{s^2} (a |\partial_u Q| + |Q| |\partial_r a|) \\
 &\leq \frac{4\pi\Lambda}{17C} K^* + \frac{16\pi^2\Lambda}{51C} (x^*)^2 r^3 \\
 &\leq \frac{4\pi\Lambda}{17C} K_\Lambda + \frac{16\pi^2\Lambda^2}{867C^2} R_0^2 \\
 &= C_{R_0, \Lambda}^3.
 \end{aligned}$$

3.1. Existence globale de solution en temps

De (1.50) et (2.29), nous avons

$$\begin{aligned} |\partial_r A_u| &= \frac{a}{r^2} |Q| \\ &\leq 4\pi K^*(x^*)^2 \\ &\leq \frac{4\pi\Lambda}{17C} K_\Lambda \\ &= C_{R_0, \Lambda}^4 \end{aligned}$$

En posant

$$\bar{C}_{\Lambda, R_0} = \max \left\{ C_{R_0, \Lambda}^1, C_{R_0, \Lambda}^2, C_{R_0, \Lambda}^3, C_{R_0, \Lambda}^4, \frac{\pi\Lambda}{17C} K_\Lambda R_0, \frac{4\pi}{17C} C_{R_0, \Lambda} R_0^2, \frac{4\pi\Lambda}{17C} K_\Lambda \right\},$$

nous déduisons que

$$\begin{array}{lll} |a| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_r a| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_u a| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} \\ |b| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_r b| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_u b| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} \\ |\Phi| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_r \Phi| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_u \Phi| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} \\ |A_u| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_r A_u| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_u A_u| \leq \bar{C}_{\Lambda, R_0}. \end{array}$$

Corollaire 3.1.1 *Si h vérifie le Théorème 3.1.1, alors*

$$\phi(u, 0) = h(u, 0), \quad (3.10)$$

pour tout $u \geq 0$

Preuve Soit $h \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times [0, R_0])$. Ainsi, la fonction qui à $r \mapsto h(u, r)$ est localement \mathcal{C}^1 sur $[0, R_0]$ pour $u \geq 0$ fixé et combinant les relations (1.45) et (1.46), nous avons

$$\phi(u, r) = \frac{1}{r} \int_0^r h(u, s) ds.$$

La fonction qui à $s \mapsto h(u, s)$ étant continue sur $[0, r]$, par la formule de la moyenne, il existe $c_r \in [0, r]$ tel que $h(u, c_r) = \frac{1}{r} \int_0^r h(u, s) ds$ en faisant $r \rightarrow 0$, on a $c_r \rightarrow 0$; on déduit donc que $\phi(u, 0) = \bar{h}(u, 0) = h(u, 0)$ pour tout $u \geq 0$.

Remarque 3.1.1 *Pour la régularité au centre de la solution h , nous choisirons suivant la Remarque 1.2.5 et de la relation (3.10) la condition*

$$h(u, 0) = 0$$

pour tout $u \geq 0$. De ce fait, nous pouvons écrire pour $u \geq 0$ fixé, $h(u, r) = \int_0^r \partial_s h(u, s) ds$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
 |\bar{h}(u, r)| &= \left| \frac{1}{r} \int_0^r h(u, s) ds \right| \\
 &= \left| \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^s \partial_v h(u, v) ds dv \right| \\
 &\leq \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^s |\partial_v h(u, v)| ds dv \\
 &\leq \|\partial_r h(u, r)\|_{C_{R_0}^0} \frac{1}{r} \int_0^r s ds \\
 &= \frac{r}{2} \|\partial_r h(u, r)\|_{C_{R_0}^0} \\
 &\leq \frac{R_0}{2} \|\partial_r h(u, r)\|_{C_{R_0}^0}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2 Comportement asymptotique des solutions

L'existence globale de solution en temps du problème (2.38) étant déjà montré au théorème 3.1.1, le résultat suivant donne le comportement asymptotique des solutions du système $d'EMCS_\Lambda$.

Théorème 3.2.1 *Soit $h_0 \in C^1([0, R_0])$, $\Lambda > 0$, $R_0 > 0$, x^* petit et $\hat{H} = \mathcal{O}(x^*)$. Alors pour $\|h_0\|_{X_{R_0}}$ suffisamment petit, la solution $h \in C^1([0, +\infty[\times [0, R_0])$ du Théorème 3.1.1 satisfait*

$$\sup_{0 \leq r \leq R_0} |\partial_r h(u, r)| \leq \hat{C} e^{-\hat{H}u}$$

et il existe une fonction constante $\underline{h} : [0, R_0] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $(u, r) \in [0, +\infty[\times [0, R_0]$, on ait :

$$\begin{aligned}
 |\bar{h}(u, r) - \underline{h}| &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u} \\
 |a(u, r) - 1| &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u} \\
 \left| b(u, r) - 1 + \frac{\Lambda}{3} r^2 \right| &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u}
 \end{aligned}$$

avec les constantes \hat{C} et \bar{C} qui dépendent de $\|h_0\|_{X_{R_0}}$, R_0 et Λ .

Preuve *Posons*

$$\varepsilon(u) = \|\partial_r h(u, \cdot)\|_{C_{R_0}^0}. \tag{3.12}$$

Nous déduisons de (2.7) que

$$|(h - \bar{h})(u, r)| \leq \frac{r}{2} \varepsilon(u) \tag{3.13}$$

3.2. Comportement asymptotique des solutions

En intégrant le long de la caractéristique comme en (2.51) avec h au lieu de $\mathcal{F}(h)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial_r h(u_1, r_1) &= \partial_r h(0, r) \exp \left\{ \int_0^{u_1} (2G^0 + G^1)(v, r(v)) ds \right\} \\ &\quad + \int_0^{u_1} \exp \left\{ \int_u^{u_1} (2G^0 + G^1)(v, r(v)) ds \right\} (J\partial_r \bar{h} + G\bar{h})(u, r(u)) du. \end{aligned}$$

En utilisant (2.20), (2.23) (2.24), (3.2), (3.11) et le fait que $|e^{\int_0^{u_1} G^1(v, r(v)) ds}| = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} |\partial_r h(u_1, r_1)| &\leq |\partial_r h(0, r)| e^{-2C_1 \int_0^{u_1} r(v) ds} \\ &\quad + \int_0^{u_1} \left[\frac{C_4}{2} R_0 \varepsilon(u) + \frac{C_5}{2} R_0 \varepsilon(u) \right] e^{-2C_1 \int_u^{u_1} r(v) ds} du \\ &= |\partial_r h(0, r)| e^{-2C_1 \int_0^{u_1} r(v) ds} + \frac{C_4 + C_5}{2} R_0 \int_0^{u_1} \varepsilon(u) e^{-2C_1 \int_u^{u_1} r(v) ds} du \end{aligned}$$

et suivant (3.12) nous obtenons

$$\varepsilon(u_1) \leq \varepsilon(0) e^{-2C_1 \int_0^{u_1} r(v) ds} + \frac{C_4 + C_5}{2} R_0 \int_0^{u_1} \varepsilon(u) e^{-2C_1 \int_u^{u_1} r(v) ds} du, \quad (3.14)$$

pour tout $r \in [0, R_0]$.

Pour $r(u) = r(u; u_1, r_1)$ et $r_1 < r_c^-$, nous avons de (2.34)

$$\varepsilon(u_1) \leq 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0) e^{-\frac{C_1}{\alpha} u_1} + 2^{C_1/\alpha^2} \frac{(C_4 + C_5)}{2} R_0 \int_0^{u_1} \varepsilon(u) e^{\frac{C_1}{\alpha}(u-u_1)} du$$

donc

$$e^{\frac{C_1}{\alpha} u_1} \varepsilon(u_1) \leq 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0) + 2^{C_1/\alpha^2-1} (C_4 + C_5) R_0 \int_0^{u_1} \varepsilon(u) e^{\frac{C_1}{\alpha} u} du. \quad (3.15)$$

Posons $\psi(v) = e^{\frac{C_1}{\alpha} v} \varepsilon(v)$, nous déduisons de (3.15) que

$$\psi(u_1) \leq 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0) + \int_0^{u_1} [2^{C_1/\alpha^2-1} (C_4 + C_5) R_0] \psi(u) du. \quad (3.16)$$

Suivant (3.16), nous avons d'après le lemme de Gronwall appliqué à ψ ,

$$\psi(u_1) \leq 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0) \exp \left\{ 2^{C_1/\alpha^2-1} (C_4 + C_5) R_0 u_1 \right\}.$$

Ce qui implique que :

$$\varepsilon(u_1) \leq 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0) \exp \left\{ \left(2^{C_1/\alpha^2-1} (C_4 + C_5) R_0 - \frac{C_1}{\alpha} \right) u_1 \right\}. \quad (3.17)$$

Pour $r(u_1) = r_1 \geq r_c^-$, (2.19) implique que $r(u) \geq r_c^-$ pour tout $u \leq u_1$. Ainsi, nous avons de (3.14)

$$\varepsilon(u_1) \leq \varepsilon(0) e^{-2C_1 r_c^- u_1} + \frac{C_4 + C_5}{2} R_0 \int_0^{u_1} \varepsilon(u) e^{-2C_1 r_c^- (u_1-u)} du,$$

ce qui est équivalente à

$$e^{2C_1 r_c^- u_1} \varepsilon(u_1) \leq \varepsilon(0) + \frac{C_4 + C_5}{2} R_0 \int_0^{u_1} \varepsilon(u) e^{2C_1 r_c^- u} du, \quad (3.18)$$

et en appliquant le Lemme de Gronwall sur $\psi(v) = e^{2C_1 r_c^- v} \varepsilon(v)$, nous obtenons :

$$\varepsilon(u_1) \leq \varepsilon(0) \exp \left\{ \left(\frac{C_4 + C_5}{2} R_0 - 2C_1 r_c^- \right) u_1 \right\}. \quad (3.19)$$

Posons

$$\hat{H} = \frac{C_1}{\alpha} - 2^{C_1/\alpha^2 - 1} (C_4 + C_5) R_0 \quad \text{et} \quad \tilde{H} = 2C_1 r_c^- - \frac{(C_4 + C_5)}{2} R_0. \quad (3.20)$$

Or, nous pouvons écrire d'après (2.15) $r_c^- = \frac{1}{2\alpha}$ et d'autre part, utiliser la croissance de la fonction $x \mapsto 2^x$ sur $[0, +\infty)$ afin d'obtenir,

$$\begin{aligned} \tilde{H} - \hat{H} &= C_1 \left(2r_c^- - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{C_4 + C_5}{2} R_0 (2^{C_1/\alpha^2} - 1) \\ &= \frac{C_4 + C_5}{2} R_0 (2^{C_1/\alpha^2} - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{H} \leq \tilde{H}. \quad (3.21)$$

Nous avons donc de (3.17) (ou de (3.18) vu (3.21)) l'inégalité

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_1) &\leq \max \{ 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0), \varepsilon(0) \} e^{-\hat{H}u_1} \\ &= 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0) e^{-\hat{H}u_1} \\ &= 2^{C_1/\alpha^2} \|h_0\|_{X_{R_0}} e^{-\hat{H}u_1}. \end{aligned}$$

Puisque les constantes C_1, C_4 et $C_5 > 0$ dépendent de $x^* = \|h\|_{X_{+\infty, R_0}}$, alors (3.2) montre que $x^* = \|h\|_{X_{+\infty, R_0}} \leq (1 + C^*) \|h_0\|_{X_{R_0}}$. Ainsi, nous pouvons avoir $\hat{H} > 0$ vu que $\|h_0\|_{X_{R_0}}$ est choisi suffisamment petit.

$$\varepsilon(u) \leq 2^{C_1/\alpha^2} \|h_0\|_{X_{R_0}} e^{-\hat{H}u}. \quad (3.22)$$

Nous déduisons de (3.22) l'inégalité

$$\sup_{0 \leq r \leq R_0} |\partial_r h(u, r)| \leq \hat{C} e^{-\hat{H}u} \quad (3.23)$$

où $\hat{C} = 2^{C_1/\alpha^2} \|h_0\|_{X_{R_0}}$. De plus, en combinant (3.12), (3.13) et (3.22), nous obtenons

$$|h(u, r) - \bar{h}(u, r)| \leq \frac{r}{2} \hat{C} e^{-\hat{H}u}. \quad (3.24)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |h^*(u, r) - \bar{h}^*(u, r)| &= |[h(u, r) - \bar{h}(u, r)]^*| = |h(u, r) - \bar{h}(u, r)| \\ &\leq \frac{r}{2} \hat{C} e^{-\hat{H}u} \end{aligned}$$

Ainsi, de (1.47), nous avons

$$Q = 2\pi i \int_0^r s(\bar{h}^*h - \bar{h}h^*)ds = 2\pi i \int_0^r s[(h - \bar{h})h^* - (h^* - \bar{h}^*)h]ds,$$

ce qui implique d'après (3.2) et (3.24) que

$$\begin{aligned} |Q| &\leq 4\pi \int_0^r s|h||h - \bar{h}|ds, \\ &\leq 2\pi \hat{C}e^{-\hat{H}u} \|h\|_{X_{+\infty, R_0}} \int_0^r s^2 ds, \\ &\leq \frac{2}{3}\pi r^3(1 + C^*) \|h_0\|_{X_{R_0}} \hat{C}e^{-\hat{H}u}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

De (1.57), nous avons

$$\partial_u h = (G^0 + G^1)(h - \bar{h}) + \frac{b}{2}\partial_r h - i\frac{a\bar{h}}{2r}Q.$$

En remarquant que $a \leq K^*$ et $|b| \leq K^* \left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 + r^2\right)$ puis en utilisant (2.21), (2.22), (3.24), (3.25), (3.23) et (3.2) nous avons

$$\begin{aligned} |\partial_u h| &\leq (C_2 + C_3)\frac{r^2}{2}\hat{C}e^{-\hat{H}u} + \frac{K^*}{2}\left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 + r^2\right)\hat{C}e^{-\hat{H}u}, \\ &\quad + \frac{K(1 + C^*)\|h_0\|_{X_{R_0}}}{2r}4\pi r^2(1 + C^*)\|h_0\|_{X_{R_0}}\hat{C}e^{-\hat{H}u}, \\ &\leq [(C_2 + C_3)r^2 + K^*\left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 + r^2\right) + 2\pi K^*(1 + C^*)^2 r \|h_0\|_{X_{R_0}}^2]\hat{C}e^{-\hat{H}u}, \\ &\leq \underbrace{[(C_2 + C_3)R_0^2 + K^*\left(1 + \frac{\Lambda}{3}R_0^2 + R_0^2\right) + 2\pi R_0 K(1 + C^*)^2 \hat{C}^2]}_{\Upsilon_1}\hat{C}e^{-\hat{H}u}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nous déduisons de (3.26) que $\partial_u h(u, \cdot)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et du théorème fondamental de l'analyse, $\lim_{u \rightarrow +\infty} h(u, r)$ existe. Posons

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} h(u, r) = \underline{h}(r).$$

Montrons que la fonction $r \mapsto \underline{h}(r)$ est constante.

Soient $r_1, r_2 \in [0, R_0]$ avec $r_1 > r_2$. Alors

$$\begin{aligned} |\underline{h}(r_1) - \underline{h}(r_2)| &= \lim_{u \rightarrow +\infty} |h(u, r_1) - h(u, r_2)| \\ &\leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{r_2}^{r_1} |\partial_s h(u, s)| ds \\ &\leq \lim_{u \rightarrow +\infty} (r_1 - r_2)\hat{C}e^{-\hat{H}u} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\underline{h}(r_1) = \underline{h}(r_2)$ et par conséquent, il existe $\underline{h} \in \mathbb{C}$

$$\underline{h}(r) = \underline{h}. \quad (3.27)$$

Finalemment, nous obtenons de (3.26)

$$\begin{aligned}
 |h(u, r) - \underline{h}| &\leq \int_u^{+\infty} |\partial_v h(v, r)| dv, \\
 &\leq \Upsilon_1 \int_u^{+\infty} e^{-\hat{H}v} dv, \\
 &= \frac{\Upsilon_1}{\hat{H}} e^{-\hat{H}u}, \\
 &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u}
 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 |\bar{h}(u, r) - \underline{h}| &= \left| \frac{1}{r} \int_0^r h(u, s) ds - \frac{1}{r} \int_0^r \underline{h} ds \right|, \\
 &\leq \frac{1}{r} \int_0^r |h(u, s) - \underline{h}| ds, \\
 &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

De (1.52), (2.26) et (3.24), nous avons

$$\begin{aligned}
 |a(u, r) - 1| &= |a(u, r) - a(u, 0)|, \\
 &= \int_0^r \partial_s a(u, s) ds, \\
 &= 4\pi \int_0^r \frac{|h - \bar{h}|^2}{s} a ds, \\
 &\leq \pi K^* \hat{C}^2 e^{-2\hat{H}u} \int_0^r s ds, \\
 &\leq \underbrace{\pi R_0^2 K^* \hat{C}^2}_{\Upsilon_2} e^{-\hat{H}u},
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u}. \tag{3.30}$$

De la relation (1.56), (2.26), (3.25) et (3.29) nous avons

$$\begin{aligned}
 \left| b(u, r) - 1 + \frac{\Lambda}{3} r^2 \right| &= \left| \frac{1}{r} \int_0^r a \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds - \frac{1}{r} \int_0^r (1 - \Lambda s^2) ds \right|, \\
 &\leq \frac{1}{r} \int_0^r |a - 1| (1 + \Lambda s^2) ds + \frac{1}{r} \int_0^r a \frac{Q^2}{s^2} ds, \\
 &\leq \Upsilon_2 \frac{e^{-\hat{H}u}}{r} \int_0^r (1 + \Lambda s^2) ds + \frac{K}{r} \int_0^r \frac{Q^2}{s^2} ds, \\
 &\leq \Upsilon_2 \frac{e^{-\hat{H}u}}{r} \int_0^r (1 + \Lambda s^2) ds \\
 &\quad + \frac{4}{9} \pi^2 K^* (1 + C_0^*)^2 \|h_0\|_{X_{R_0}}^2 \hat{C}^2 e^{-2\hat{H}u} \frac{1}{r} \int_0^r s^4 ds, \\
 &\leq \left[\Upsilon_2 + \Upsilon_2 \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{4}{45} \pi^2 K^* (1 + C_0^*)^2 \|h_0\|_{X_{R_0}}^2 \hat{C}^2 r^4 \right] e^{-\hat{H}u}, \\
 &\leq \underbrace{\left[\Upsilon_2 + \Upsilon_2 \frac{\Lambda}{3} R_0^2 + \frac{4}{45} \pi^2 K^* (1 + C_0^*)^2 \|h_0\|_{X_{R_0}}^2 \hat{C}^2 R_0^4 \right]}_{\Upsilon_3} e^{-\hat{H}u} \\
 &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u}.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ainsi, vu que les inégalités (3.28), (3.30) et (3.31) sont contrôlées par la même constante \bar{C} , nous pouvons prendre

$$\bar{C} = \max\{\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3\}.$$

Remarque 3.2.1 Dans le cas du système d'Einstein-Maxwell Champ Scalaire étudié par Chae [7], le nombre complexe \underline{h} de (3.27) est nul. Mais lorsque nous introduisons une constante cosmologique positive Λ à ce système comme étudié dans ce travail, nous trouvons un nombre complexe qui peut être nul ou non nul.

Remarque 3.2.2 Finalement, nous déduisons des relations (3.25), (3.30) et (3.31) et de la définition de la fonction de masse en (2.1) que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} m(u, r) = 0, \quad \forall r \in [0, R_0].$$

3.2.1 Complétude géodésique

D'après ce qui précède, nous avons montré l'existence d'une nouvelle métrique g^{dS} solution des équations d'Einstein-Maxwell, mais il est possible que l'espace-temps $([0, +\infty[\times [0, R_0] \times \mathbb{S}^2, g^{dS})$ ainsi construit possède des singularités. C'est pourquoi il est important de montrer la complétude géodésique de $([0, +\infty[\times [0, R_0] \times \mathbb{S}^2, g^{dS})$. Pour ce faire, nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 3.1 Soient les symboles de Christoffel $\Gamma_{uu}^u, \Gamma_{uu}^r, \Gamma_{ru}^r$ et Γ_{rr}^r . Alors il existe une constante négative κ_0 et des constantes positives $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ telles que

$$\Gamma_{uu}^u \geq \kappa_0, \tag{3.32}$$

$$|\Gamma_{uu}^r| \leq \kappa_1, \tag{3.33}$$

$$|\Gamma_{ru}^r| \leq \kappa_2, \tag{3.34}$$

$$|\Gamma_{rr}^r| \leq \kappa_3. \tag{3.35}$$

Preuve De la relation (2.12), nous pouvons trouver une constante positive

$x_0 := x_0(\Lambda, K, R_0) > 0$ telle que $b(u, r) \geq 1 - x_0$ de sorte qu'en combinant cette dernière inégalité avec (2.13), nous avons pour tout $(u, r) \in [0, U] \times [0, R_0]$

$$1 - x_0 \leq b(u, r) \leq K. \tag{3.36}$$

Mais d'après le Lemme 1.3,

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (ab) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{a}{2} \frac{\partial b}{\partial r} - \frac{b}{2} \frac{\partial a}{\partial r} \right]. \end{aligned}$$

3.2. Comportement asymptotique des solutions

Comme les fonctions a et b sont $\mathcal{C}^1([0, U] \times [0, R_0])$, nous pouvons dire les dérivées partielles sont bornées :

$$\left| \frac{\partial a}{\partial u} \right| \leq M_1, \quad \left| \frac{\partial b}{\partial r} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial a}{\partial r} \right| \leq M_3, \quad (3.37)$$

où M_1, M_2, M_3 sont des constantes positives. Ainsi, nous avons des relations (2.5) et (3.36)

$$\frac{a}{2} \frac{\partial b}{\partial r} \leq \frac{K}{2} M_2 \text{ et } \frac{b}{2} \frac{\partial a}{\partial r} \leq \frac{K}{2} M_3.$$

Nous pouvons obtenir une borne supérieure pour Γ_{uu}^u en substituant ces précédentes bornes, puis en utilisant la positivité de la fonction a mais aussi une fois de plus sa borne en (2.5), pour obtenir

$$\Gamma_{uu}^u \geq \frac{1}{K} \left(-M_1 - \frac{K}{2} M_2 - \frac{K}{2} M_3 \right).$$

Maintenant, nous pouvons choisir $\kappa_0 = -\frac{1}{K} \left(M_1 + \frac{K}{2} M_2 + \frac{K}{2} M_3 \right)$.

Comme les composantes $\Gamma_{uu}^r, \Gamma_{ru}^r, \Gamma_{rr}^r$ dépendent uniquement des fonctions a, b et de leurs dérivées partielles (Voir Lemme 1.3), en combinant les relations (2.5), (3.36) et (3.37), nous obtenons facilement les constantes κ_1, κ_2 et κ_3 . D'où la preuve du Lemme 3.1.

Soit $x^\lambda := x^\lambda(\tau)$ une géodésique définie sur un intervalle de paramètres maximal. Nous voulons montrer que le réel τ appelé paramètre affine est défini dans $[0, +\infty[$. A cet effet, il suffit de montrer que les géodésiques $\tau \mapsto x^\lambda(\tau)$ et leur dérivée sont bornées en temps fini.

Suivant [8], l'équation des géodésiques s'écrit :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0, \quad (3.38)$$

où $x^\lambda = (u, r, \theta, \varphi) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

En supposant que $\theta(\tau) = x^2(\tau) = \varphi(\tau) = x^3(\tau) = 0$, nous avons de (3.38) pour $\lambda = 0$

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\alpha}^0 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

qui conduit

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \Gamma_{0\alpha}^0 \frac{du}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{i\alpha}^0 \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0,$$

où $i \in \{1, 2, 3\}$. Cette dernière équation se réduit à

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^0 \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 = 0,$$

compte tenu de hypothèse sur x^2 et x^3 et du fait que $\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{11}^0 = 0$ (voir Lemme 1.3).

Sans nuire à la généralité, posons $\frac{du}{d\tau}(0) = \varepsilon_0 > 0$. Nous obtenons de l'égalité précédente :

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = -\Gamma_{uu}^u \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 \text{ et donc } -\frac{d^2 u/d\tau^2}{(du/d\tau)^2} = \Gamma_{uu}^u.$$

De la relation (3.32), nous obtenons de cette dernière égalité $-\frac{d^2u/d\tau^2}{(du/d\tau)^2} \geq \kappa_0$ et en intégrant membre à membre sur $[0, \tau]$, nous obtenons

$$\frac{1}{\frac{du}{d\tau}} - \frac{1}{\frac{du}{d\tau}(0)} \geq \kappa_0\tau \iff \frac{1}{\frac{du}{d\tau}} \geq \kappa_0\tau + \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

En posant $\zeta_0 = -\kappa_0\varepsilon_0$, nous obtenons de l'inégalité précédente,

$$\frac{du}{d\tau} \leq \frac{\varepsilon_0}{1 + \kappa_0\varepsilon_0\tau} = \varepsilon_0 \frac{1}{1 - \zeta_0\tau} \leq \varepsilon_0(2 + \zeta_0\tau) = 2\varepsilon_0 + \varepsilon_0\zeta_0\tau. \quad (3.39)$$

D'autre part, on peut toujours trouver une constante positive $M > 0$ telle que $|\Gamma_{uu}^u| \leq M$, de sorte que de $-\frac{d^2u/d\tau^2}{(du/d\tau)^2} = \Gamma_{uu}^u$, on ait par une intégration membre à membre

$$\frac{1}{\frac{du}{d\tau}} - \frac{1}{\frac{du}{d\tau}(0)} \leq M\tau.$$

Cette dernière inégalité conduit à

$$\frac{\varepsilon_0}{1 + M\varepsilon_0\tau} \leq \frac{du}{d\tau}(\tau).$$

qui combinée avec (3.39) montre que $\frac{du}{d\tau}(\tau)$ reste borné en temps fini et donc $u(\tau)$ aussi.

Montrons à présent que $\frac{dr}{d\tau}(\tau)$ et $r(\tau)$ restent bornées en temps fini.

Pour $\lambda = 1$ dans (3.38), puis en tenant compte du fait que certains symboles de Christoffel sont nuls, nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma_{uu}^r \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma_{ur}^r \frac{du}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (3.40)$$

Comme $\frac{du}{d\tau}$ reste bornée en temps fini, il existe une constante C telle que $\frac{du}{d\tau} \leq C$ de sorte qu'en combinant (3.33), (3.34) et (3.35), nous obtenons l'inégalité différentielle

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} \leq \kappa_1 C^2 + \kappa_2 C \frac{dr}{d\tau} + \kappa_3 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2.$$

Posons $\eta_1 = \kappa_1 C^2$ et $\eta_2 = \kappa_2 C$. Alors cette inégalité différentielle devient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\tau^2} &\leq \eta_1 + \eta_2 \frac{dr}{d\tau} + \kappa_3 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \\ &= \kappa_3 \left(\frac{dr}{d\tau} + \frac{\eta_2}{2\kappa_3}\right)^2 + \eta_1 - \frac{\eta_2^2}{4\kappa_3}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Posons $\zeta_1 = \eta_1 - \frac{\eta_2^2}{4\kappa_3}$. Nous distinguons deux cas selon le signe de ζ_1 .

i) Si $\zeta_1 > 0$, alors en posant

$$\sqrt{\kappa_3} \left(\frac{dr}{d\tau} + \frac{\eta_2}{2\kappa_3}\right) = \sqrt{\zeta_1} \tan X, \quad (3.42)$$

nous obtenons de (3.41), $X' \leq \sqrt{\kappa_3\zeta_1}$. En intégrant membre à membre cette dernière inégalité différentielle sur $[0, \tau]$, nous obtenons

$$X(\tau) \leq \sqrt{\kappa_3\zeta_1}\tau + X(0), \quad (3.43)$$

avec $X(0) = X_0 = \text{Arctan} \left[\sqrt{\frac{\kappa_3}{\zeta_1}} \left(\frac{dr}{d\tau}(0) + \frac{\eta_2}{2\kappa_3} \right) \right]$. La fonction tangente étant croissante, en combinant (3.42) et (3.43), nous obtenons

$$\frac{dr}{d\tau} + \frac{\eta_2}{2\kappa_3} \leq \sqrt{\frac{\zeta_1}{\kappa_3}} \tan(\sqrt{\kappa_3 \zeta_1} \tau + X_0). \quad (3.44)$$

ii) Si $\zeta_1 < 0$, en posant

$$\sqrt{\kappa_3} \left(\frac{dr}{d\tau} + \frac{\eta_2}{2\kappa_3} \right) = \sqrt{-\zeta_1} \tanh Y, \quad (3.45)$$

nous obtenons de (3.41), $Y' \leq \sqrt{-\kappa_3 \zeta_1}$. Comme la fonction tangente hyperbolique (\tanh) est croissante, nous pouvons procéder comme précédemment pour la fonction tangente et obtenir

$$\frac{dr}{d\tau} + \frac{\eta_2}{2\kappa_3} \leq \sqrt{\frac{-\zeta_1}{\kappa_3}} \tanh(\sqrt{-\kappa_3 \zeta_1} \tau + Y_0), \quad (3.46)$$

où $Y_0 = \text{Arctanh} \left[\sqrt{\frac{-\kappa_3}{\zeta_1}} \left(\frac{dr}{d\tau}(0) + \frac{\eta_2}{2\kappa_3} \right) \right]$.

D'autre part, nous obtenons de (3.40)

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{uu}^r \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 - 2\Gamma_{ur}^r \frac{du}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2.$$

Dans cette dernière égalité, seul le terme $-2\Gamma_{ur}^r \frac{du}{d\tau} \frac{dr}{d\tau}$ peut avoir un problème pour la minoration car d'après (3.33), $-\Gamma_{uu}^r \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 \geq -\kappa_1 \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2$ et comme $\frac{du}{d\tau}$ est bornée en temps fini, on peut avoir la minoration $-\Gamma_{uu}^r \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 \geq -\kappa_1 C^2$. Avec (3.35), on a aussi $-\Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \geq -\kappa_3 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2$. Maintenant,

a) Si $\frac{dr}{d\tau} \geq 0$ alors, plus besoin de continuer la preuve.

b) Si $\frac{dr}{d\tau} < 0$ alors $-\frac{dr}{d\tau} > 0$ et on distingue deux cas selon le signe de $\frac{du}{d\tau}$:

i) si $\frac{du}{d\tau} \geq 0$, alors de (3.34), on a $2\Gamma_{ur}^r \geq -2\kappa_2$ et donc $2\Gamma_{ur}^r \frac{du}{d\tau} \geq -2\kappa_2 \frac{du}{d\tau} \geq -\kappa_2 C$ car $\frac{du}{d\tau}$ est bornée en temps fini. Comme $-\frac{dr}{d\tau} > 0$, on obtient

$$-2\Gamma_{ur}^r \frac{du}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \geq \kappa_2 C \frac{dr}{d\tau}. \quad (3.47)$$

ii) Si $\frac{du}{d\tau} < 0$ alors toujours de (3.34), on obtient $2\Gamma_{ur}^r \leq 2\kappa_2$ qui conduit à

$2\Gamma_{ur}^r \frac{du}{d\tau} \geq 2\kappa_2 \frac{du}{d\tau}$. Comme $\frac{du}{d\tau}$ reste bornée en temps fini, cette dernière inégalité conduit à $2\Gamma_{ur}^r \frac{du}{d\tau} \geq 2\kappa_2 C$ et on obtient ainsi

$$-2\Gamma_{ur}^r \frac{du}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \geq -\kappa_2 C \frac{dr}{d\tau}. \quad (3.48)$$

Finalement, les relations (3.47) et (3.48) montrent que peu importe les hypothèses sur le signe de $\frac{dr}{d\tau}$ et $\frac{du}{d\tau}$, il existe un réel non nul ρ_2 tel que

$$-2\Gamma_{ur}^r \frac{du}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \geq \rho_2 \frac{dr}{d\tau}.$$

Ceci combiné aux minoration de $\Gamma_{uu}^r \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2$ et de $\Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$, nous obtenons de (3.40)

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} \geq \rho_1 + \rho_2 \frac{dr}{d\tau} - \kappa_3 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2,$$

où $\rho_1 = -\kappa_1 C^2$. Ce qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} \geq -\kappa_3 \left(\frac{dr}{d\tau} - \frac{\rho_2}{2\kappa_3}\right)^2 - \rho_3, \quad (3.49)$$

où $\rho_3 = -\left(\rho_1 + \frac{\rho_2^2}{4\kappa_3}\right)$.

Sans nuire à la généralité, supposons que $\rho_3 > 0$ et posons

$\sqrt{\kappa_3} \left(\frac{dr}{d\tau} - \frac{\rho_2}{2\kappa_3}\right) = \sqrt{\rho_3} \tan Z$. En dérivant, puis en substituant dans (3.49), nous obtenons $Z'(s) \geq -\sqrt{\kappa_3 \rho_3}$, et par une intégration sur $[0, \tau]$, nous obtenons

$$Z(\tau) \geq Z_0 - \sqrt{\kappa_3 \rho_3} \tau, \quad (3.50)$$

où

$$Z_0 = Z(0) = \text{Arctan} \left[\sqrt{\frac{\kappa_3}{\rho_3}} \left(\frac{dr}{d\tau}(0) - \frac{\rho_2}{2\kappa_3}\right) \right].$$

En utilisant le fait que la fonction tangente est croissante sur (3.50) combiné avec le changement de variable, nous obtenons

$$\frac{dr}{d\tau} - \frac{\rho_2}{2\kappa_3} \geq \sqrt{\frac{\rho_3}{\kappa_3}} \tan(Z_0 - \sqrt{\kappa_3 \rho_3} \tau). \quad (3.51)$$

Ainsi, les relations (3.44), (3.46) et (3.51) montrent que $\frac{dr}{d\tau}$ reste bornée en temps fini et donc $r(\tau)$ aussi. Ce qui achève la preuve de la complétude géodésique de l'espace-temps $([0, +\infty[\times [0, R_0] \times \mathbb{S}^2, g^{dS})$.

Remarque 3.2.3 *Le théorème 3.2.1 précédent nous fournit une réalisation de la censure cosmique. En effet, ce théorème nous permet de conclure que la métrique de notre espace-temps de départ converge uniformément en temps infini et en norme vers la métrique de De-Sitter (pure).*

3.2.2 Résultat de stabilité

Nous avons montré notamment au théorème que les solutions du système d'Einstein-Maxwell-Klein-Gordon avec une constante cosmologique positive approchent asymptotiquement les solutions de De-Sitter : Il s'agit d'un résultat de stabilité future de De-Sitter pour les équations d'Einstein-Maxwell-Klein-Gordon.

3.3 Preuve du théorème principal

Dans cette partie, nous traduisons les résultats obtenus aux théorèmes 3.1.1 et 3.2.1 afin d'obtenir les principaux résultats regroupés au théorème 0.2.1.

D'après le théorème 3.1.1, nous remarquons que Φ est une solution \mathcal{C}^2 à symétrie sphérique de (1.37) puisque $h = \partial_r(r\Phi)$ satisfait (1.57), avec $\bar{\Phi} = h$. Ainsi, les inégalités (1), (2) et (3) s'obtiennent respectivement des relations (3.1), (3.28) et (3.30)-(3.31). Ce qui complète la preuve du résultat principal énoncé au Théorème 0.2.1.

♠ Conclusion et perspectives ♠

Nous avons modifié le cadre fonctionnel développé dans [7] pour tenir compte de la présence d'une constante cosmologique positive, réduisant ainsi le système d'Einstein-Maxwell-Champ scalaire à une seule équation intégro-différentielle d'évolution non linéaire du premier ordre. Il est alors naturel, compte tenu à la fois de la structure de l'équation et du domaine du système de coordonnées de Bondi où la réduction est effectuée, de considérer un problème de Cauchy caractéristique en prenant des données initiales sur un cône isotrope.

Pour un tel problème de Cauchy, nous avons prouvé premièrement un théorème d'existence locale en temps au moyen du théorème du point fixe de Banach, puis nous avons prouvé l'existence globale et la décroissance exponentielle en temps, pour la donnée initiale choisie suffisamment petit. Il s'ensuit que des données initiales assez proches des données de De-Sitter évoluent, selon le système considéré, vers un espace-temps géodésique complet qui se rapproche asymptotiquement d'une région de De-Sitter à une vitesse exponentielle; il s'agit d'un résultat de stabilité asymptotique pour l'espace-temps de De-Sitter dans la classe considérée. Ainsi, l'espace-temps obtenu satisfait la Censure Cosmique. Nous notons également que le taux de décroissance exponentielle $\lesssim e^{-\hat{H}u}$, avec $\hat{H} > 2\sqrt{\Lambda/3} > \sqrt{\Lambda/3}$ obtenu est censé être exactement comme dans [35] ou [15]. En effet, malgré que le temps retardé u en (1.2) soit différent de la coordonnée du temps standard t , ils coïncident le long du centre $r = 0$, et est ainsi proche de t dans notre domaine $r < \sqrt{3/\Lambda}$, donnant ainsi la même décroissance exponentielle. Nous avons montré par exemple que dans le cas de l'espace-temps de De-Sitter, $u = t - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\Lambda}} \text{Log} \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r}{1 - \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r} \right)$.

Une perspective serait d'étendre ces résultats au cas où la borne supérieure R_0 est infinie. Une fois le cas non compact étudié, il serait aussi intéressant d'examiner le même système avec la donnée initiale large (sans hypothèse de petitesse). Une autre perspective serait de coupler le potentiel de Higgs au système $d'EMCS_\Lambda$ afin d'obtenir une généralisation du cas étudié dans [6] puisqu'une constante cosmologique positive sera désormais considérée.

3.3. Preuve du théorème principal

On pourra aussi coupler les équations de Yang-Mills, puis de Yang-Mills-Higgs à un tel système afin de chercher à obtenir des résultats similaires, mais aussi étudier des tels systèmes non plus en dimension 4 mais en dimension supérieure.

♠ Bibliographie ♠

- [1] M.T. Anderson, *Existence and stability of even dimensional asymptotically de Sitter spaces*, Ann. Henri Poincaré, 6(5), p. 801-820, (2005).
- [2] H. Andréasson and H. Ringström, *Proof of the cosmic no-hair conjecture in the \mathbb{T}^3 – Gowdy symmetric Einstein-Vlasov setting*, J. Eur. Math. Soc., 18, p. 1565-1650, (2016).
- [3] H. Barzegar and D. Fajman, *Stable Cosmologies With Collisionless Charged Matter*, J. Hyperbolic Differ. Equ., 19, p. 587-634, (2022).
- [4] J. K. Beem, P. B. Ehrlich and K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, CRC Press, Second Edition, (1981).
- [5] F. Beyer, *The cosmic no-hair conjecture a study of the Narai solutions*, In The Twelfth Marcel Grossmann Meeting : On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories, In 3 Volumes, p. 759-761, (2012).
- [6] D. Chae, *Global Existence of Solutions to the Coupled Einstein and Maxwell-Higgs System in the Spherical Symmetry*, Ann. Henri Poincaré, 4, p. 35-62 ; (2003).
- [7] D. Chae, *Global Existence of Solutions to the Einstein-Maxwell-Klein-Gordon equation in the Spherical Symmetry*, Ann. Henri Poincaré, 4, p. 35 – 62 ; (2003).
- [8] Y. Choquet-Bruhat, *General Relativity and the Einstein Equations*, Oxford Science Publications, (2009).
- [9] Y. Choquet-Bruhat, *Géométrie différentielle et systèmes extérieures*, Dunod Paris, (1968).
- [10] Y. Choquet-Bruhat, *Solutions C^∞ d'équations hyperboliques non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 272, 386-388 (1968).
- [11] Y. Choquet-Bruhat and R. Geroch, *Global Aspects of the Cauchy Problem in General Relativity*, Commun. math. Phys., 14, p. 329-335, (1969).

- [12] D. Christodoulou, *The problem of a self-gravitating scalar field*, Commun. Math. Phys., 105, p. 337-361, (1986).
- [13] J. L. Costa, *The spherically symmetric Einstein-scalar field with positive and vanishing cosmological constant : a comparison*, Gen. Rel. Grav., 45, p. 2415-2440 ; (2013).
- [14] J. L. Costa, A. Alho and J. Natário, *Spherical linear waves in de Sitter spacetime*, J. Math. Phys., 53(5), (2012).
- [15] J. L. Costa, A. Alho and J. Natário, *The problem of a self-gravitating scalar field with positive cosmological constant*, Ann. Henri Poincaré, 14, p. 1077-1107, (2012).
- [16] J. L. Costa and F. C. Mena, *Global solutions to the spherically symmetric Einstein-scalar field system with a positive cosmological constant in Bondi coordinates*, J. Hyperbolic Diff. Equ. 18(02), p. 311-341, (2021).
- [17] J. L. Costa, J. Natário and P. Oliveira, *Cosmic No-Hair in Spherically Symmetric Black Hole Spacetimes*, Ann. Henri Poincaré, 20, p. 3059-3090, (2012).
- [18] A. Einstein, *Sitzungsber*, Preuss. Akad. Wiss. phys. math., 6(142), (1917).
- [19] A. C. Ferreira Alho, *On the future stability of cosmological solutions of the Einstein-nonlinear scalar field system*, Ph.D Thesis, University of Lisbon, (2012).
- [20] Y. Fourès-Choquet, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Acta Math., 88, p. 141-225 (1952).
- [21] H. Friedrich, *On the existence of n -geodesically complete or future complete solutions of Einstein's field equations with smooth asymptotic structure*, Commun. Math. Phys., 107, p. 587-609, (1986).
- [22] H. Hadzić and J. Speck, *The global future stability of the FLRW solutions to the dust-Einstein system with a positive cosmological constant.*, J. Hyperbolic Diff. Equ., 12, p. 87-188, (2015).
- [23] K. Hassan Khadi, *Nonlinear systems*, Macmillan Publishing Company, 1st edition, (1992).
- [24] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis; *The large structure of Space-time*, Cambridge University Press, 1st edition, (1973).
- [25] S. Hod and T. Piran, *Critical behaviour and universality in gravitational collapse of a charged scalar field*, Phys. Rev. D, 55, p. 3485-3496, (1997).
- [26] s. Hod and T. Piran, *Mass inflation in dynamical gravitational collapse of a charged scalar field*, Phys. Rev. Lett., 81(8), p. 1554-1557, (1998).

- [27] S. Klainerman, Q. Wang and S. Yang, *Global solutions for massive-Klein-Gordon equation*, Commun. Pure Appl. Math., 73(1), p. 63-109, (2020).
- [28] S. Klainerman and M. Machedon, *On the Maxwell-Klein-Gordon equation with finite energy*, Duke Math. J., 74(8), p. 19-44, (1994).
- [29] C. I. Lazaroiu and C. S. Shahbazi, *The global formulation of generalized Einstein-Scalar-Maxwell theories*, QTS-X/LT-XII, 255, p. 978-981, (2018).
- [30] P. G. LeFloch and Yue Ma, *Einstein-Klein-Gordon spacetimes in the harmonic near-Minkowski regime*, Pory. Maths., 79, p. 343-393, (2022).
- [31] J. Natário and A. Sasane, *Decay of solutions to the Klein-Gordon equation on some expanding cosmological spacetimes*, Ann. Henri Poincaré, 23, p. 2345-2389, (2022).
- [32] P. Noundjeu, *The Einstein-Vlasov-Maxwell (EVM) system with spherical symmetry*, Class. Quantum Gravity, 22, p. 5365-5384, (2005).
- [33] P. Noundjeu and D. Tegankong, *The cylindrical symmetry Einstein-Vlasov system with charged particles in expansion*, Acta Math. Vietnam, 41, p. 695-709, (2016).
- [34] E. Nungesser, *Future global non-linear stability of surface symmetric solutions of the Einstein-Vlasov system with a cosmological constant*, J. Hyperbolic Diff. Equ., 12(3), p. 447-468, (2015).
- [35] A. D. Rendall, *Asymptotics of solutions of the Einstein equations with positive cosmological constant*, Ann. Henri Poincaré, 5, p. 1941-1064, (2004).
- [36] A. D. Rendall, *Partial Differential Equations in General Relativity*, Oxford University Press, (2008).
- [37] H. Rinsgröm, *Future stability of the Einstein-non-linear scalar field system*, Inventiones Mathematicae, 173, p. 123-208, (2008).
- [38] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge Massachusetts, (2013).
- [39] C. Svedberg, *Future Stability of the Einstein-Maxwell-Scalar Field System*, Ann. Henri Poincaré, 12, 849-917, (2011).
- [40] A. L. Tchuani, D. Tegankong and N. Noutchequeme, *The Einstein-Vlasov-Scalar Field System with Gowdy or T^2 Symmetry in Contracting Direction*, Acta. Math. Vietnam., 44, 501-517, (2019).
- [41] D. Tegankong *Global existence and future asymptotic behaviour for solutions of the Einstein-Vlasov-scalar field system with surface symmetry*, Class. Quantum. Grav., 22, 2381-2391, (2005).

- [42] D. Tegankong, N. Noutchequeme and A. D. Rendall, *Local existence and continuation criteria for solutions of the Einstein-Vlasov-scalar field system with surface symmetry*, J. Hyperbolic Diff. Equ., 1 (4) 691-724, (2004).
- [43] F. M. Teyang, P. Noundjeu and Tegankong D., *Global in retarded time solutions to the Einstein-Maxwell-Klein-Gordon system with positive cosmological constant*, Gen. Rel. Grav., 54(127), (2022).
- [44] S. B. Tchapnda and A. D. Rendall, *Global existence and asymptotic behavior in the future for the Einstein-Vlasov system with positive cosmological constant*, Class. Quantum Gravity, 20, p. 3037-3049, (2003).
- [45] R. M. Wald, *Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant*, Phys. Rev. D, 28, p. 2118-2120, (1983).
- [46] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago press, (1984).

♠ *Annexe* ♠



Global in retarded time solutions to the Einstein–Maxwell–Klein–Gordon system with positive cosmological constant

F. M. Teyang¹ · P. Noundjeu¹ · D. Tegankong²

Received: 4 July 2022 / Accepted: 6 October 2022

© The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2022

Abstract

We consider a characteristic initial value problem, with initial data given on a truncated null cone, for the Einstein–Maxwell–Klein–Gordon system with a positive cosmological constant to the Bondi-spherically symmetric spacetime. We prove that, for small initial data, this system has a unique global in (Bondi) time solution which is causally geodesically complete to the future and decay exponentially in (Bondi) time approaching the de Sitter solution.

Keywords Bondi-spherically symmetric spacetime · De Sitter spacetime · Contraction mapping theorem · Continuation criteria · Gronwall’s lemma

1 Introduction

The first result on local solution to Einstein’s equations was established by Choquet-Bruhat [4]. Compared to the local existence, the global existence results are not general in terms of the assumptions on the initial data, and symmetries of the Lorentzian geometries to construct. In this sense, Chae generalized in [3] the monumental work of Christodoulou [5] in proving the global unique existence of classical solutions to the Einstein–Maxwell–Klein–Gordon field system for small initial data under the

✉ F. M. Teyang
teyangfm@gmail.com

P. Noundjeu
pnoundjeu@ymail.com

D. Tegankong
dtegangkong@yahoo.fr

¹ Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Yaounde 1, PO Box 812, Yaoundé, Cameroon

² Department of Mathematics, Advanced Teacher Training College, University of Yaounde 1, PO Box 47, Yaoundé, Cameroon

spherical symmetry and obtain the solutions which approach asymptotically a flat spacetime. For complete the literature on studies that were carried out for the Einstein–Maxwell–Klein–Gordon system, we refer the interested reader to [3, 8, 10–12] and references therein. On the other side, the study of global properties of solutions to various Einstein–matter equations with a positive cosmological constant has both a long and prestigious tradition as well as a recent remarkable amount of activity, motivated by its rich mathematical structure and relevant physical content.

This paper is concerned with cosmological solutions to Einstein’s equations with accelerated expansion, one motivation being that, at present, physicists use such solutions to model the universe. From the mathematical point of view, when studying initial value problem for the Einstein–matter field equations with positive cosmological constant, a general framework is provided by the *cosmic no-hair conjecture*, which states that generic ever expanding solutions of Einstein’s field equations with a positive cosmological constant approach the de Sitter solution asymptotically into the future. This conjecture has been rigorously proved, in the class of Spatially Homogeneous models Bianchi types I–VIII by Wald [18], and later for a variety of matter models with (or without) symmetry conditions in [9, 15–17]. Costa et al. [7] established a global existence in (Bondi) time theorem to the Einstein–Scalar field equations in the presence of a positive cosmological constant in Bondi-spherically symmetric spacetime. The solutions obtained in this case approach the de Sitter spacetime through an exponential rate, and then the well known *cosmic no-hair conjecture* holds.

However, since Costa’s work [7] treats the Einstein system case with a real scalar field, we remark that if we couple Maxwell’s equations to this system, the same results can be proved, since the electromagnetic field F , solution of these latter (Maxwell’s equations) is easily related to the metric g . Thus, having this type of solution could help in the construction of the universal bosonic sector, which corresponds in four dimensions to the so-called Einstein–Scalar–Maxwell theories [12]. We therefore consider in this paper the Einstein–Maxwell–Klein–Gordon field system with a positive cosmological constant ($EMKG_\Lambda$) in Bondi-spherically symmetric spacetime, which has the advantage to describe some classes of particles (which could be stars, galaxies or clusters of galaxies) in the universe. We modify the framework developed in [3] to accommodate the presence of a cosmological constant, thus reducing the full content of the Einstein–Maxwell–Klein–Gordon system to a single integro-differential evolution equation. In this case, the study of $EMKG_\Lambda$ system appears clearly as a generalization of the case studied in [7] in the sense where if we consider a real scalar field, the $EMKG_\Lambda$ system his reduce to the Einstein–Scalar field system (see Remark 2.1) but also the case studied in [3] since we add a positive cosmological constant.

Unlike the case of the real scalar field, which forces Maxwell’s equations to be source free, a complex scalar field Φ which satisfies the Klein–Gordon equation brings another interesting mathematical problem to solve, since the source of Maxwell’s equations now depends of Φ , via the current vector J . As a first consequence, contrary to what happens for the wave equation, the Klein–Gordon equation (for the Einstein–Scalar–Maxwell system) does not admit constant solutions. Another direct consequence comes from the complexity of the present system gives rise to an interesting problem of nonlinear partial differential equations, which no longer allows to use the same functional spaces defined in [3]. This trick has an important consequence

in the asymptotic behavior of solutions, since the solution Φ of Klein–Gordon equation (7) approaches from now on constant, which not necessarily null when u goes to infinity.

At the same time, the method used in [7], based on a iterative scheme to show local existence in Bondi time theorem is obsolete in $EMKG_\Lambda$ case, because it does not allow to prove (51). Indeed, if we suppose by induction that $\|h_n\|_{C^0_{U,R_0}} \leq C^0 \|h_0\|_{C^0_{R_0}}$, we find that $\|h_{n+1}\|_{C^0_{U,R_0}} \leq C' \|h_0\|_{C^0_{R_0}}$ with C' strictly greater than C^0 . Furthermore, the argument developed in [7] to prove the global existence in time result is rigidly based on the estimate $\|h\|_{C^0_{U,R_0}} = \|h_0\|_{C^0_{R_0}}$ and we don't have this equality in $EMKG_\Lambda$ case, but the inequality (estimate) (51) with $C^0 > 1$. So, to skirt these problems, we use the contraction mapping theorem in the appropriate space to prove the local existence theorem, and the method based on the *continuation criteria* to extend the solution in the order to obtain the global existence in (Bondi) time.

For related literature, Tchapnda and Rendall proved in 2003 in [17] the global existence theorem and asymptotic behavior in the future for the Einstein–Vlasov system with positive cosmological constant. Anderson [1] brings a new proof of Friedrich's theorem [9] on the existence and stability of asymptotically de Sitter spaces in $3 + 1$ dimensions, and extends these results to the $n + 1$ -dimensional case for n odd. On the other side, the same type of result was proved in 2005 by Noundjeu for the spherically symmetric Einstein–Vlasov–Maxwell system in [13] and later in 2016, the global existence of solutions to the Einstein–Maxwell–Vlasov-scalar field system under cylindrical symmetric was established by Noundjeu and Tegankong [14]. More recently Besset [2] studied decay properties of the charged Klein–Gordon equation in the exterior of De Sitter–Reissner–Nordström spacetime, while Costa and Mena proved in 2021, in [6] that, for small initial data, the Einstein-scalar field system with a positive cosmological constant in Bondi-spherically symmetric has a unique global classical solution which is causally geodesically complete to the future and decays polynomially in radius and exponentially in Bondi time, approaching the de Sitter solution.

The paper proceeds as follows: In Sect. 2, we present the $EMKG_\Lambda$ system in Bondi coordinates and show how to control the characteristics. Section 3 is devoted to the local existence in Bondi time theorem. In Sect. 4, the global in Bondi time existence theorem is stated and proved; Sect. 5 deals the asymptotic behavior of solutions.

2 The Einstein–Maxwell–Klein–Gordon- Λ system in Bondi coordinates

The framework is a Lorentzian spacetime (M, g) that is Bondi-spherically symmetric. This means that the metric g can be written in the form

$$ds^2 = -a(u, r)b(u, r)du^2 - 2a(u, r)dudr + r^2d\Omega^2, \quad (1)$$

with $d\Omega^2$ being the metric of the 2-sphere

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

and $(u, r) \in [0, U[\times]0, R_0[$, $U, R_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. We want as in [7] that the functions $a(u, r)$ and $b(u, r)$ to satisfy the boundary conditions

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} a(u, r) &= 1, \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(b(u, r) - 1 + \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) &= 0, \quad \forall r \in [0, R_0] \end{aligned}$$

such that as a special case, we recall that causal future of any point in De Sitter spacetime may be covered by Bondi coordinates with the metric given by

$$g^{dS} = - \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2. \tag{2}$$

We refer the reader to [7], if details are needed on how to obtain (2). Throughout the next subsection, we will use Einstein’s summation convention and assume that all the Greek index run in $\{u, r, \theta, \varphi\}$.

2.1 The partial differential equation equivalent to the $EMKG_\Lambda$ system

Given a local coordinates (x_μ) , the Einstein–Maxwell–Klein–Gordon- Λ system can be written

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) \tag{3}$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu \tag{4}$$

$$\nabla_\mu F_{\nu\mu} + \nabla_\nu F_{\alpha\mu} + \nabla_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla^\mu (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) = 0 \tag{6}$$

where $R_{\mu\nu}$ is the Ricci curvature of the metric g , R stands for the corresponding scalar curvature, $T_{\mu\nu}$ (resp. $\tau_{\mu\nu}$) represents the energy momentum (resp. Maxwell) tensor. We recall that (3) is the Einstein equations, (4) and (5) are the Maxwell equations that determine the electromagnetic field F , while (6) is the conservation law that determines the complex scalar field Φ , and Λ is the positive cosmological constant. On the right hand side of (4), there is the current vector defined as in [3] by

$$J^\mu = Im(\Phi^* D_\mu \Phi).$$

On the right hand side of (3), conformly to [3] or [10], we have quantities

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[D_\mu \Phi (D_\nu \Phi)^* + (D_\mu \Phi)^* D_\nu \Phi - g_{\mu\nu} D_\gamma \Phi (D^\gamma \Phi)^* \right],$$

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{4} F_{\gamma\alpha} F^{\gamma\alpha} + F_{\nu\gamma} F_\mu^\gamma \right],$$

where Φ^* being the complex conjugate of Φ . We also recall that the electromagnetic field F can be expressed in terms of a four-potential A_α , through the relation

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

so, in the above $D_\nu = \nabla_\nu + iA_\nu$ stands for the gauge covariant derivative, and ∇_ν is the Levi-Civita connection associated to g . We now deduce from (4) and (6) that

$$D^\mu D_\mu \Phi = 0, \tag{7}$$

which yields the Klein–Gordon equation.

Following [5], we introduce the new unknown function

$$h = \partial_r(r\Phi). \tag{8}$$

Then, define the average of a continuous function $h(u, r)$ in the r variable on $[0, r]$ by

$$\bar{h}(u, r) = \frac{1}{r} \int_0^r h(u, s) ds.$$

We mention as in [3] that the assumption of spherical symmetry allows us to take $A_\theta = A_\varphi = 0$, and choose a gauge such that $A_r = 0$. Thus, among the four gauge field components, we have $A_u = A_u(u, r)$ as a unique nontrivial unknown.

Analogously to the flat Maxwell–Klein–Gordon system we introduce the local charge function (see [3])

$$Q(u, r) = \int_{B(O,r) \subset \mathbb{R}^3} J^u dv = \int_{B(O,r)} J^u \sqrt{|g|} dx = 4\pi \int_0^r J^u a s^2 ds,$$

which, physically, represents the total charge inside $B(O, r)$, the ball with center O and radius r , at the retarded time u . Here, we use the notation $|g| = \det(g_{\mu\nu})$. With our choice of metric in (1), we can represent the charge function $Q(u, r)$ in terms of h as

$$Q(u, r) = 2\pi i \int_0^r s(\bar{h}^* h - \bar{h} h^*) ds. \tag{9}$$

We mention that Q is a real values function. Applying index $\nu = u$ in (4), we can obtain by integration

$$A_u = \int_0^r \frac{Q}{s^2} a ds. \tag{10}$$

The component $\{rr\}$ of (3) gives

$$\frac{2}{ra} \partial_r a = 8\pi |\partial_r \Phi|^2. \tag{11}$$

Next, assuming $\Phi(u, r)$ to be continuous function, we obtain from (8) by integration over $[0, r]$

$$\Phi(u, r) = \bar{h}(u, r), \tag{12}$$

and this implies that

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial r} = \frac{h - \bar{h}}{r}. \tag{13}$$

So, integrating (11) with initial condition $a(u, 0) = 1$, we have

$$a = \exp \left[4\pi \int_0^r \frac{|h - \bar{h}|^2}{s} ds \right]. \tag{14}$$

The component $\{\theta\theta\}$ of (3) gives

$$-\frac{1}{a} \partial_r (rb) + 1 = \Lambda r^2 + \frac{Q^2}{r^2},$$

and this implies

$$b = \bar{a} - \frac{1}{r} \int_0^r a \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{r^2} \right) ds. \tag{15}$$

From (11)–(15), we can rewrite (7) with differential operator $D := \partial_u - \frac{b}{2} \partial_r$ as

$$Dh = (G^0 + G^1)(h - \bar{h}) - i \frac{a\bar{h}Q}{2r}, \tag{16}$$

where

$$G^0 = \frac{a - \bar{a}}{2r} + \frac{1}{2r^2} \int_0^r a \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds - \frac{a}{2} \left(\Lambda r + \frac{Q^2}{r^3} \right), \tag{17}$$

$$G^1 = -iA_u. \tag{18}$$

Remark 2.1 If Φ is a real scalar field i.e $\Phi^* = \Phi$, we deduce from (9) that $Q = 0$, and following (10) that $A_u = 0$ and we recover the integro-differential equation (15) of [7].

Proposition 2.1 For the spherically symmetric metric (1), system (6) and (7) is equivalent to system (8) and (16), together with (9), (13) and (14).

We will also need an evolution equation for $\partial_r h$ given a sufficiently regular solution of (16). Differentiating (16) with respect to r , and assuming that we are allowed to commute partial derivatives, we obtain

$$(D - 2G^0 - G^1)(\partial_r h) = J\partial_r \bar{h} + G\bar{h}, \quad (19)$$

where

$$J = -3G^0 - G^1 - a \left(\Lambda r + \frac{Q}{r^2} \partial_r Q - \frac{Q^2}{r^3} \right) + \frac{\partial_r a}{2} \left(1 - \frac{Q^2}{2r^2} - \Lambda r^2 \right) - i \frac{3aQ}{2r}, \quad (20)$$

$$G = \frac{i}{2r} \left(a \frac{Q}{r} - Q \partial_r a - a \partial_r Q \right). \quad (21)$$

2.2 The mass function

Consider a Bondi-spherically symmetric \mathcal{C}^k solution of the system (3) on $[0, U] \times [0, R_0]$ (with $R_0 > \sqrt{3/\Lambda}$). Differentiating (15), we have

$$\frac{\partial}{\partial r}(rb) = a \left(1 - \Lambda r^2 - \frac{Q^2}{r^2} \right). \quad (22)$$

From Eqs. (14) and (22) it is clear that rb is increasing in r for $r < \sqrt{1/\Lambda}$ and decreasing for $r > \sqrt{1/\Lambda}$. In this case, Eq. (15) implies that $b(u, r)$ goes to $-\infty$ as r goes to $+\infty$ and having in mind that $b(u, 0) = a(u, 0) = 1$, there exists a unique $r_c = r_c(u) > \sqrt{1/\Lambda}$ where b vanishes. So, the set of points where ∂_u is null defined, and the curve $r = r_c(u)$ is known to determine an apparent cosmological horizon.

Following [7], we prove that

$$\sqrt{\frac{1}{\Lambda}} \leq r_c(u) \leq \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \quad (23)$$

for all u .

From (22), it is then clear that $\partial_r b < 0$ for $r = r_c(u)$, and so by the implicit function theorem, the function $r_c(u)$ is \mathcal{C}^k .

As in [3], let m be the renormalized Hawking mass function defined by

$$m(u, r) = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{b}{a} - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{Q^2}{r^2} \right), \quad (24)$$

which measures the mass contained within the sphere of radius r at retarded time u , renormalized so as to remove the contribution of the cosmological constant. Clearly,

$m(u, 0) = 0$. We compute

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(m - \frac{Q^2}{2r} \right) = 2\pi \frac{b}{a} |h - \bar{h}|^2 + \frac{Q^2}{2r^2}, \tag{25}$$

which shows that the function $m - \frac{Q^2}{2r}$ is a monotone increasing function of r at u . On the other hand, (25) can be integrated to give another representation of mass

$$m(u, r) = \int_0^r \left[2\pi \frac{b}{a} |h - \bar{h}|^2 + \frac{Q^2}{2s^2} \right] ds + \frac{Q^2}{2r}. \tag{26}$$

Since $\lim_{r \rightarrow 0} (m - Q^2/2r) = 0$ and $b > 0$ in the case $r < r_c(u)$, we deduce from (26) that $m(u, r) \geq 0$ for $r < r_c(u)$.

2.3 Functional spaces and basic Estimates

Let $U, R_0 > 0$ be fixed. Following [7], we denote by C^0_{U, R_0} (resp. X_{U, R_0}), the Banach space of functions which are continuous (resp. admits continuous partial derivatives, w.r.t. r) on $[0, U] \times [0, R_0]$. The space X_{U, R_0} is endowed with the norm

$$\|f\| := \|f\|_{C^0_{U, R_0}} + \|\partial_r f\|_{C^0_{U, R_0}}. \tag{27}$$

For all $h \in C^0_{U, R_0}$, we have

$$|\bar{h}| \leq \frac{1}{r} \int_0^r |h(u, s)| ds \leq \frac{1}{r} \int_0^r \|h\|_{C^0_{U, R_0}} ds = \|h\|_{C^0_{U, R_0}},$$

and for $h \in X_{U, R_0}$, we can estimate

$$|(h - \bar{h})(u, r)| \leq \frac{r}{2} \|\partial_r h\|_{C^0_{U, R_0}} \leq \frac{r}{2} \|h\|_{X_{U, R_0}}. \tag{28}$$

By integration, we deduce from (28),

$$\int_0^r \frac{|h - \bar{h}|^2}{s} ds \leq \|h\|^2_{X_{U, R_0}} \frac{R_0^2}{8}.$$

Using the fact that $a(\cdot, r)$ is an increasing function, we get from (14)

$$1 = a(u, 0) \leq a(u, r) \leq K := \max \left(\exp \left(\frac{\pi}{2} \|h\|^2_{X_{U, R_0}} R_0^2 \right), \frac{16\pi^2}{3} R_0^2 \|h\|^4_{X_{U, R_0}} \right). \tag{29}$$

From (9), we have

$$|Q| \leq 8\pi \int_0^r s|h||\bar{h}|ds \leq 4\pi r^2 \|h\|_{X_{U,R_0}}^2. \tag{30}$$

Thus

$$\frac{1}{r} \int_0^r \frac{Q^2}{s^2} ds \leq \frac{16\pi^2}{3} r^2 \|h\|_{X_{U,R_0}}^4 \leq Kr^2. \tag{31}$$

2.4 The characteristics of the problem and preliminary lemmas

The integral curves of D , which are the incoming light rays, are the characteristics of the problem. These satisfy the ordinary differential equation

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{2}b(u, r). \tag{32}$$

To simplify the notation we shall denote simply by $u \mapsto r(u) = r(u; u_1, r_1)$, the solution of (32), satisfying $r(u_1) = r_1$.

Using (29), we can estimate b defined in (15), and consequently the solution to the characteristic Eq. (32). Thus, for $r < \sqrt{1/\Lambda}$, we get

$$b(u, r) \geq 1 - K \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2.$$

For $r \geq \sqrt{1/\Lambda}$, we have

$$\begin{aligned} b(u, r) &= \frac{1}{r} \int_0^{\sqrt{1/\Lambda}} a \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds + \frac{1}{r} \int_{\sqrt{1/\Lambda}}^r a \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds \\ &\geq \frac{1}{r} \int_0^{\sqrt{1/\Lambda}} a \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds + \frac{K}{r} \int_{\sqrt{1/\Lambda}}^r \left(1 - \Lambda s^2 - \frac{Q^2}{s^2} \right) ds \\ &\geq \frac{2}{3\sqrt{\Lambda}r} - \frac{2K}{3\sqrt{\Lambda}r} + K \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) - \frac{K}{r} \int_0^r \frac{Q^2}{s^2} ds \\ &\geq 1 - K \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2. \end{aligned}$$

Therefore, we can conclude that for all $(u, r) \in [0, U] \times [0, R_0]$,

$$b(u, r) \geq 1 - K \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2. \tag{33}$$

On the other hand, we have from (29)

$$\begin{aligned}
 b(u, r) &= \frac{1}{r} \int_0^r a(1 - \Lambda s^2) ds - \frac{1}{r} \int_0^r a \frac{Q^2}{s^2} ds \\
 &\leq \frac{1}{r} \int_0^r ads - \frac{\Lambda}{r} \int_0^r as^2 ds \\
 &\leq K - \frac{\Lambda}{3} r^2.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

So, from (32) and (33), we obtain the following differential inequality

$$\frac{dr}{du} \leq -\frac{1}{2} + \frac{K}{2} \left(\frac{\Lambda}{3} + K \right) r^2,
 \tag{35}$$

and by the comparison principle, it follows from (35) and [7] that the solution of (32) passing through (u_1, r_1) satisfies, after distinguishing cases $r_1 < r_c^-$ and $r_1 \geq r_c^-$

$$r(u) \geq r_c^- > 0, \quad \forall u \leq u_1
 \tag{36}$$

where $r_c^- = \sqrt{\frac{3}{K(\Lambda + 3K)}}$. We now state and prove this useful result

Lemma 2.1 *Let $\Lambda > 0$ and $R_0 > 0$. There exists $x^* = x^*(\Lambda, R_0) > 0$ and constants $C_i = C_i(x^*, \Lambda, R_0) > 0$, such that if $\|h\|_{X_{U, R_0}} \leq x^*$, then*

$$G^0 < -C_1 r
 \tag{37}$$

$$|G^0| \leq C_2 r
 \tag{38}$$

$$|G^1| < C_3 r
 \tag{39}$$

$$|J| < C_4 r
 \tag{40}$$

$$|G| \leq C_5
 \tag{41}$$

and, for $u_1 \geq 0$ and $r(u_1) \leq R_0$,

$$\left| \int_0^{u_1} \exp \left(\int_u^{u_1} (2G^0 + G^1)(v, r(v)) dv \right) du \right| \leq C_6
 \tag{42}$$

where $r(u) = r(u; u_1, r_1)$ is the characteristic through (u_1, r_1) .

Proof Following (29), we get

$$1 \leq a(u, r) \leq K^* := \max \left(\exp \left(\frac{\pi}{2} (x^*)^2 R_0^2 \right), \frac{16\pi^2}{3} R_0^2 (x^*)^4 \right).
 \tag{43}$$

Differentiating (14) w.r.t r , we have

$$\frac{\partial a}{\partial r} = 4\pi a \frac{|h - \bar{h}|^2}{r}.$$

So, from (43) and (28), we get

$$0 \leq \frac{\partial a}{\partial r} \leq \frac{\pi}{2} K^*(x^*)^2 r, \tag{43'}$$

and consequently

$$\begin{aligned} 0 \leq (a - \bar{a})(u, r) &\leq \frac{1}{r} \int_0^r \left(\int_{r'}^r \frac{\partial a}{\partial s}(u, s) ds \right) dr' \\ &\leq \frac{\pi}{2} K^*(x^*)^2 \frac{1}{r} \int_0^r \int_{r'}^r s ds dr' \\ &\leq \frac{\pi}{2} K^*(x^*)^2 r^2. \end{aligned} \tag{44}$$

From (30), we can estimate Q as

$$|Q| \leq 4\pi r^2 \|h\|_{X_{U,R}}^2 \leq 4\pi (x^*)^2 r^2. \tag{45}$$

Following the definition of G^0 in (17) and from (43)–(45), we have

$$\left(\frac{\Lambda}{6} - \frac{\Lambda}{2} K^* \right) r \leq G^0 \leq -r \left[\frac{\Lambda}{2} - K^* \left(C(x^*)^2 + C(x^*)^4 + \frac{\Lambda}{6} \right) \right],$$

and as $K^* \rightarrow 1$ when $x^* \rightarrow 0$, we can choose x^* sufficiently small such that

$$x^* < \frac{\Lambda}{6C}. \tag{46}$$

and $C_1 = \Lambda - [C(x^*)^2 + C(x^*)^4]$. On the other hand,

$$|G^0| \leq C_2 r,$$

where

$$C_2 = C(K^*)^2(x^*)^4 + \frac{K^*C(x^*)^4}{6} + \frac{CK^*(x^*)^2}{2} + \frac{2\Lambda K^*}{3}.$$

From the definition of G^1 in (18) and using (10), (45), we have

$$\begin{aligned} |G^1| &\leq C(K^*)^2(x^*)^2 r \\ &\leq C_3 r, \end{aligned}$$

where $C_3 = C(K^*)^2(x^*)^2$.

Differentiating (9) w.r.t r , we can obtain the estimate

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Q}{\partial r} \right| &\leq 8\pi r |\bar{h}| |h| \\ &\leq C(x^*)^2 r. \end{aligned} \tag{47}$$

So, we have from the definition of J in (20) combined with the Eqs. (38), (39), (43), (45) and (47),

$$\begin{aligned} |J| &\leq [3C_2 + C_3 + CK^*\Lambda + CK^*(x^*)^4 + CK^*(x^*)^2 + \Lambda K^*(x^*)^2 + CK^*(x^*)^6]r \\ &\leq C_4 r. \end{aligned}$$

We also have

$$\begin{aligned} |G| &\leq \frac{1}{2r} \left[4\pi K^*(x^*)^2 r + 2\pi^2 K^*(x^*)^4 r^3 + 8\pi K^*(x^*)^2 r \right] \\ &\leq CK^*(x^*)^2 + CK^*(x^*)^4 \\ &\leq C_5. \end{aligned}$$

Distinguishing cases $r_1 < r_c^-$ and $r_1 \geq r_c^-$ as in [7], we deduce that

$$\left| \int_0^{u_1} \exp \left(\int_u^{u_1} (2G^0 + G^1)(v, r(v)) dv \right) du \right| \leq C_6$$

$C_6 = \max \left\{ \frac{1}{4\alpha C_1}, 2\frac{C_1}{\alpha^2} \frac{\alpha}{C_1} \right\}$ where $\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K(\Lambda + 3K)}{3}}$ and following the estimate of J we can choose

$$C = \max \left\{ 48\pi^2; \frac{3}{2} R_0 + \left(2\pi^3 + \frac{1}{4} \right) R_0^2 \right\}. \tag{48}$$

□

Lemma 2.2 *Let the positive constants C_1, C_2, C_3 defined to the Lemma 2.1 and K^* defined in (43). Then for $x^* < \frac{\Lambda}{17C}$, we have*

$$\frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1} < 1. \tag{49}$$

3 Local in time existence

Lemmas 2.1 and 2.2 will now allow us to establish a local existence in time theorem for small initial data, while controlling the previously defined supremum norms of the solutions in terms of initial data.

Theorem 3.1 (Local existence) *Let $\Lambda > 0$, $R_0 > \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$, $x^* < \frac{\Lambda}{17C}$ where C is given in (48) and $h_0 \in C^1([0, R_0])$. There exists $C^* = C^*(x^*, \Lambda, R_0) > 0$ such that if $\|h_0\|_{X_{R_0}} \leq \frac{x^*}{1 + C^*}$, then the Cauchy problem*

$$\begin{cases} Dh = (G^0 + G^1)(h - \bar{h}) - i \frac{Q\bar{h}a}{2r} \\ h(0, r) = h_0(r) \end{cases} \tag{50}$$

has a unique solution $h \in C^1([0, U] \times [0, R_0])$, for $U = U\left(\frac{x^*}{1 + C^*}\right)$ sufficiently small. This solution verify,

$$\|h\|_{C^0_{U,R_0}} \leq C^0 \|h_0\|_{C^0_{R_0}} \tag{51}$$

$$\|h\|_{X_{U,R_0}} \leq (1 + C^*) \|h_0\|_{C^0_{R_0}} \tag{52}$$

where $C^0 = C^0(x^*, \Lambda, R_0) > 0$

Proof We consider the mapping $h \mapsto \mathcal{F}(h)$ defined as the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} D\mathcal{F}(h) = (G^0 + G^1)(\mathcal{F}(h) - \bar{h}) - i \frac{a\bar{h}Q}{2r} \\ \mathcal{F}(h)(0, h) = h(0, r) = h_0(r) \end{cases} \tag{53}$$

Let $u \mapsto r(u) = \chi(u, r_0)$ the solution of the ordinary differential equation

$$\frac{dr}{du} = -\frac{b}{2}, \quad r(0) = r_0. \tag{54}$$

Then, by integration, (54) gives

$$r_1 = \chi(u_1, r_0) = r_0 - \frac{1}{2} \int_0^{u_1} b(v, r(v)) dv. \tag{55}$$

Using this characteristic, we can represent \mathcal{F} in (53) as the integral as follows

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_1, r_1) &= h_0(r_0) \exp \left\{ \int_0^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} du \right\} \\ &+ \int_0^{u_1} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0 + G^1]_{\chi} dv \right\} [f]_{\chi} du \end{aligned} \tag{56}$$

where

$$f = -\bar{h} \left[G^0 + G^1 + i \frac{aQ}{2r} \right]. \tag{57}$$

We can rewrite (19) with the mapping \mathcal{F} as follows

$$D(\partial_r \mathcal{F}) = (2G^0 + G^1)\partial_r \mathcal{F} + J\partial_r \bar{h} + G\bar{h}. \tag{59'}$$

We the initial condition

$$\partial_r \mathcal{F}(0, r) = \partial_r h_0(r),$$

we can use the characteristic as previously to represent $\partial_r \mathcal{F}$ in (59') as integral as follows

$$\begin{aligned} \partial_r \mathcal{F}(u_1, r_1) &= \partial_r h_0(r_0) \exp \left\{ \int_0^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi ds \right\} \\ &+ \int_0^{u_1} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_\chi ds \right\} [J\partial_r \bar{h} + G\bar{h}]_\chi du. \end{aligned} \tag{58}$$

Let $\rho > 0$ and $B_\rho = \{f \in X_{U,R_0} : \|f\|_{X_{U,R_0}} \leq \rho\}$. We are going to prove our theorem in three steps:

- i. Firstly, to prove inequality (51);
- ii. Secondly, to show that $\mathcal{F} : B_{x^*} \rightarrow B_{x^*}$;
- iii. Finally, to prove that the mapping \mathcal{F} is contracts.

First step

Changing $\mathcal{F}(h)$ by h in (56), afterwards from (36)–(39), (43) and the fact that $|\exp \{ \int_0^{u_1} G^1(v, r(v)) dv \}| = 1$,

$$\begin{aligned} |h(u_1, r_1)| &\leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} \exp \left\{ \int_0^{u_1} [G^0]_\chi dv \right\} + \int_0^{u_1} \exp \left\{ \int_u^{u_1} [G^0]_\chi dv \right\} |[f]_\chi| du \\ &\leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} e^{-C_1 \int_0^{u_1} r(v) dv} + \|h\|_{C_{U,R_0}^0} (C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2) \\ &\quad \times \int_0^{u_1} e^{-C_1 \int_u^{u_1} r(v) dv} r(u) du \\ &\leq \|h_0\|_{C_R^0} + \|h\|_{C_{U,R}^0} \frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1} \underbrace{(1 - e^{-C_1 \int_0^{u_1} r(v) dv})}_{\leq 1} \\ &\leq \|h_0\|_{C_{R_0}^0} + \frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1} \|h\|_{C_{U,R_0}^0}. \end{aligned}$$

From above estimate and following (49), we deduce that

$$\|h\|_{C_{U,R_0}^0} \leq C^0 \|h_0\|_{C_{R_0}^0},$$

where $C^0 = \left(1 - \frac{C_2 + C_3 + K^*C(x^*)^2}{C_1}\right)^{-1} > 0$.

Second step:

Let $U > 0$ and $h \in B_{x^*}$, we want to show that $\mathcal{F}(h) \in B_{x^*}$ i.e $\|\mathcal{F}(h)\|_{X_{U,R_0}} \leq x^*$. Because $h \in B_{x^*}$, then we have $\|h\|_{X_{U,R_0}} \leq x^*$. This implies from the previous estimate that

$$|\mathcal{F}(u_1, r_1)| \leq C^0 \|h_0\|_{C_{R_0}^0}.$$

Following (58), we have from (36) (37), (40)–(42), (51) and the fact that $|\exp\{\int_0^{u_1} G^1(v, r(v))dv\}| = 1$

$$\begin{aligned} |\partial_r \mathcal{F}(u_1, r_1)| &\leq \|\partial_r h_0\|_{C_{R_0}^0} \exp\left\{-C_1 \int_0^{u_1} r(v)dv\right\} \\ &\quad + (C_4 \|h - \bar{h}\|_{C_{U,R_0}^0} + C_5 \|\bar{h}\|_{C_{U,R_0}^0}) \left| \int_0^{u_1} \exp\left\{\int_u^{u_1} [2G^0 + G^1]_X ds\right\} du \right| \\ &\leq \|\partial_r h_0\|_{C_{R_0}^0} + (2C_4 + C_5)C_6 \|h\|_{C_{U,R_0}^0} \\ &\leq \|\partial_r h_0\|_{C_{R_0}^0} + [C^0 C_1 C_6 (2C_4 + C_5)] \|h_0\|_{C_{R_0}^0}. \end{aligned}$$

Using the last two estimates above, we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(h)(u_1, r_1)\|_{X_{U,R_0}} &= \|\mathcal{F}(h)(u_1, r_1)\|_{C_{U,R_0}^0} + \|\partial_r \mathcal{F}(h)(u_1, r_1)\|_{C_{U,R_0}^0} \\ &\leq C^0 \|h_0\|_{C_{R_0}^0} + \|\partial_r h_0\|_{C_{R_0}^0} + [C^0 C_1 C_6 (2C_4 + C_5)] \|h_0\|_{C_{R_0}^0} \\ &\leq C^0 \|h_0\|_{X_{R_0}} + \|h_0\|_{X_{R_0}} + [C^0 C_1 C_6 (2C_4 + C_5)] \|h_0\|_{X_{R_0}} \\ &\leq [1 + C^*] \|h_0\|_{X_{R_0}}, \end{aligned} \tag{59}$$

where $C^* = C^0 + C^0 C_1 C_6 (2C_4 + C_5)$.

So, we deduce from (59) that if $\|h_0\|_{X_{R_0}} \leq \frac{x^*}{1 + C^*}$, then $\|\mathcal{F}(h)\|_{X_{U,R_0}} \leq x^*$ and (ii) follows.

Third step:

Let $h_1, h_2 \in X_{U,R_0}$ be two solutions of (50) and consider the notations: $a_i := a(h_i)$, $b_i = b(h_i)$, $A_{ui} = A_u(h_i)$, $Q_i = Q(h_i)$, $G_i^0 := G^0(h_i)$, $G_i^1 := G^1(h_i)$, $G_i = G(h_i)$, $J^i = J(h_i)$ and the characteristics $\chi_i = \chi_i(u, r)$, $i = 1, 2$. We assume

$$h_1, h_2 \in B_{x^*}. \tag{60}$$

Following (56) and the elementary identity

$$\begin{aligned} x_1 y_1 z_1 t_1 - x_2 y_2 z_2 t_2 &= (x_1 - x_2) y_1 z_1 t_1 + (y_1 - y_2) x_2 z_1 t_1 \\ &\quad + (z_1 - z_2) x_2 y_2 t_1 - (t_1 - t_2) x_2 y_2 z_2, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)| \leq & \|h_0\|_{C_{R_0}^0} \underbrace{\left| e^{\int_0^{u_1} [G_1^0 + G_1^1]_{\chi_1} du} - e^{\int_0^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} du} \right|}_{D_1} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} \left| e^{\int_u^{u_1} [G_1^0 + G_1^1]_{\chi_1} dv} - e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| |\bar{h}_1| |G_1^0| du}_{D_2} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} |G_1^0 - G_2^0| |\bar{h}_1| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| du}_{D_3} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| |G_2^0| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| du}_{D_4} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} \left| e^{\int_u^{u_1} [G_1^0 + G_1^1]_{\chi_1} dv} - e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| |\bar{h}_1| |G_1^1| du}_{D_5} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} |G_1^1 - G_2^1| |\bar{h}_1| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| du}_{D_6} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| |G_2^1| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| du}_{D_7} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} \left| e^{\int_u^{u_1} [G_1^0 + G_1^1]_{\chi_1} dv} - e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| \left| \frac{a_1 Q_1 \bar{h}_1}{2r} \right| du}_{D_8} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} |a_1 - a_2| \left| \frac{Q_1 \bar{h}_1}{2r} \right| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| du}_{D_9} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| \left| \frac{a_2 Q_2}{2r} \right| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| du}_{D_{10}} \\
 & + \underbrace{\int_0^{u_1} |Q_1 - Q_2| \left| \frac{a_2 \bar{h}_2}{2r} \right| \left| e^{\int_u^{u_1} [G_2^0 + G_2^1]_{\chi_2} dv} \right| du}_{D_{11}}.
 \end{aligned}$$

We note that, we will not distinguish the characteristics because if we consider two different characteristics χ_1 and χ_2 , we can use the same argument as in [7] to have the

same forms of estimates. We also note that for the rest of estimates we will always use the fact that $\left| e^{\int_0^{u_1} [G_j^1]_{x_j} dv} \right| = 1 \quad \forall j = 1, 2$.

From (28) and (60), we have

$$\begin{aligned} |(h_1 - \bar{h}_1) + (h_2 - \bar{h}_2)| &\leq \frac{r}{2} \left(\|\partial_r h_1\|_{C_{U,R_0}^0} + \|\partial_r h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \right) \\ &\leq \frac{r}{2} (\|h_1\|_{X_{U,R_0}} + \|h_2\|_{X_{U,R_0}}) \leq x^* r, \end{aligned} \tag{61}$$

and

$$\begin{aligned} |(h_1 - \bar{h}_1) - (h_2 - \bar{h}_2)| &= |(h_1 - h_2) - \overline{(h_1 - h_2)}| \\ &\leq 2\|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \end{aligned} \tag{62}$$

From (61) and (62), we deduce to the fact that $\| |x| - |y| \| \leq \|x - y\|$,

$$\begin{aligned} \left| \|h_1 - \bar{h}_1\|^2 - \|h_2 - \bar{h}_2\|^2 \right| &\leq |(h_1 - \bar{h}_1) + (h_2 - \bar{h}_2)| |(h_1 - \bar{h}_1) - (h_2 - \bar{h}_2)| \\ &\leq 2x^* r \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}. \end{aligned} \tag{63}$$

Using inequality (obtained by the mean theorem)

$$|e^x - e^y| \leq \max\{|e^x|, |e^y|\} |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}, \tag{64}$$

we have from (43) and (63)

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| &\leq \left| \exp\left(4\pi \int_0^r \frac{|h_1 - \bar{h}_1|^2}{s} ds\right) - \exp\left(4\pi \int_0^r \frac{|h_2 - \bar{h}_2|^2}{s} ds\right) \right| \\ &\leq 4\pi K^* \int_0^r \frac{\left| |h_1 - \bar{h}_1|^2 - |h_2 - \bar{h}_2|^2 \right|}{s} ds \\ &\leq \tilde{C} r \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \end{aligned} \tag{65}$$

where $\tilde{C} = \tilde{C}(x^*, \Lambda, R) > 0$.

From (9) and (60), we get

$$\begin{aligned} |Q_1 - Q_2| &\leq 8\pi \int_0^r s |h_1| |h_1 - h_2| ds + 8\pi \int_0^r s |h_2| |h_1 - h_2| ds \\ &\leq 8\pi \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \left(\|h_1\|_{C_{U,R_0}^0} \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} \|h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \right) \\ &\leq \tilde{C} r^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}, \end{aligned} \tag{66}$$

and using (17), (43), (45) and (65)–(66)

$$\begin{aligned}
 |G_1^0 - G_2^0| &\leq \frac{|a_1 - a_2| + |\bar{a}_1 - \bar{a}_2|}{2r} + |a_1 - a_2| \left(\frac{\Lambda}{2}r + \frac{Q_2^2}{2r^3} \right) + \frac{a_1}{2r^3} |Q_1^2 - Q_2^2| \\
 &\quad + \frac{1}{2r^2} \int_0^r |a_1 - a_2| \left(\Lambda s^2 + \frac{Q_2^2}{s^2} \right) ds + \frac{1}{2r^2} \int_0^r \frac{|Q_1^2 - Q_2^2|}{s^2} a_1 ds \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

From (45) and (65)–(66), we get

$$\begin{aligned}
 |b_1 - b_2| &\leq |\bar{a}_1 - \bar{a}_2| + \frac{r^2 \Lambda}{3} |a_1 - a_2| + \frac{1}{r} \int_0^r \frac{|a_1 - a_2|}{s^2} Q_1^2 ds \\
 &\quad + \frac{1}{r} \int_0^r \frac{|Q_1^2 - Q_2^2|}{s^2} a_2 ds \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

From (10), (43), (45) and (65)–(66), we get

$$\begin{aligned}
 |A_{u1} - A_{u2}| &\leq \int_0^r \frac{|a_1 - a_2|}{s^2} |Q_1| ds + \int_0^r \frac{|Q_1 - Q_2|}{s^2} a_2 ds \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

Using (18), (43), (64), (67) and (69), we get

$$\begin{aligned}
 D_1 &\leq K^* \left(\int_0^{u_1} |[G_1^0 - G_2^0]_{X_1}| du + \int_0^{u_1} |[G_1^1 - G_2^1]_{X_1}| du \right) \\
 &\leq \tilde{C} u_1 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned}$$

Combining (38), (39), (60) and the bound for D_1 , we get

$$\begin{aligned}
 D_2 &\leq \tilde{C} u_1^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0} \quad \text{and} \\
 D_5 &\leq \tilde{C} u_1^2 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.
 \end{aligned}$$

From (36)–(37), (60) and (67), we get

$$D_3 \leq \tilde{C} u_1 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.$$

Using (36)–(38), we get

$$D_4 \leq \tilde{C} u_1 \|h_1 - h_2\|_{C_{U,R_0}^0}.$$

From (36)–(37), (60) and (69), we get

$$D_6 \leq \tilde{C}u_1 \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}} \quad \text{and} \quad D_7 \leq \tilde{C}u_1 \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}.$$

Using (43), (45), (60) and the bound of D_1 , we get

$$D_8 \leq \tilde{C}u_1^2 \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}.$$

As previously, we use (36), (37), (43), (45), (60), (65) and (66) to get

$$D_9, D_{10}, D_{11} \leq \tilde{C}u_1 \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}.$$

So, using the restriction $u_1 \leq U < 1$, we have

$$|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)| \leq \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}.$$

This implies that,

$$\|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{C^0_{U,R_0}} \leq \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}. \tag{70}$$

We now seek an estimate of $\|\partial_r \mathcal{F}(h_1) - \partial_r \mathcal{F}(h_2)\|_{C^0_{U,R_0}}$.

Applying the same strategy to (58), we have as previously

$$\begin{aligned} |\partial_r(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)| &\leq \|\partial_r h_0^1\|_{C^0_R} \underbrace{\left| e^{\int_0^{u_1} [2G_1^0 + G_1^1]_X dv} - e^{\int_0^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_X dv} \right|}_I \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{u_1} \left| e^{\int_0^{u_1} [2G_1^0 + G_1^1]_X dv} - e^{\int_0^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_X dv} \right| |J_1 \partial_r \bar{h}_1 - G_1 \bar{h}_1| du}_{II} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{u_1} \left| \exp \left\{ \int_0^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_X dv \right\} \right| |J_1 - J_2| |\partial_r \bar{h}_1| du}_{III} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{u_1} \left| \exp \left\{ \int_0^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_X dv \right\} \right| |G_1 - G_2| |\bar{h}_1| du}_{IV} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{u_1} |\partial_r \bar{h}_1 - \partial_r \bar{h}_2| |J_2| \left| \exp \left\{ \int_0^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_X dv \right\} \right| du}_{V} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{u_1} |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| |G_2| \left| \exp \left\{ \int_0^{u_1} [2G_2^0 + G_2^1]_X dv \right\} \right| du}_{VI}. \end{aligned}$$

Differentiating (14) and using (28), (43), (60), (63) and (65), we have

$$\begin{aligned}
 |\partial_r g_1 - \partial_r g_2| &= 4\pi \left| g_1 \frac{|h_1 - \bar{h}_1|^2}{r} - g_2 \frac{|h_2 - \bar{h}_2|^2}{r} \right| \\
 &\leq 4\pi |g_1 - g_2| \frac{|h_1 - \bar{h}_1|^2}{r} + 4\pi g_2 \frac{||h_1 - \bar{h}_1|^2 - |h_2 - \bar{h}_2|^2|}{r} \\
 &\leq \tilde{C}r \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}},
 \end{aligned}
 \tag{71}$$

and differentiating (9), we get

$$\begin{aligned}
 |\partial_r Q_1 - \partial_r Q_2| &\leq 4\pi r |\bar{h}_1 - \bar{h}_2| |h_1| + 4\pi r |h_1 - h_2| |\bar{h}_1| \\
 &\leq \tilde{C}r \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}.
 \end{aligned}
 \tag{72}$$

Now, from (43'), (43), (45), (47), (65)–(67), (69), (71) and (72), we get

$$\begin{aligned}
 |J_1 - J_2| &\leq 3|G_1^0 - G_2^0| + |G_1^1 - G_2^1| \\
 &\quad + |a_1 - a_2| \left| \Lambda r + \frac{1}{r^2} |Q_2 \partial_r Q_1| + \frac{1}{r^3} Q_1^2 + \frac{3}{2r} |Q_1| \right| \\
 &\quad + |Q_1 - Q_2| \left(a_1 |\partial_r Q_1| + \frac{|Q_1 + Q_2|}{2r^2} \partial_r a_2 + \frac{|Q_1 + Q_2|}{r^3} a_2 + \frac{3}{2r} a_1 \right) \\
 &\quad + |\partial_r a_1 - \partial_r a_2| \left(\frac{1 + \Lambda r^2}{2} + \frac{Q_1^2}{2r^2} \right) + |\partial_r Q_1 - \partial_r Q_2| \frac{a_1 |Q_1|}{r^2} \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}},
 \end{aligned}$$

and from (21), we get

$$\begin{aligned}
 |G_1 - G_2| &\leq |a_1 - a_2| \left(\frac{|Q_1|}{2r^2} + \frac{|\partial_r Q_1|}{2r} \right) + \frac{a_2}{2r} |\partial_r a_1 - \partial_r a_2| \\
 &\quad + |Q_1 - Q_2| \left(\frac{a_2}{2r^2} + \frac{\partial_r Q_1}{2r} \right) + \frac{a_2}{2r} |\partial_r Q_1 - \partial_r Q_2| \\
 &\leq \tilde{C} \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}
 \end{aligned}$$

As an immediate consequence, we get by using (36)–(37) and (60) on the one hand,

$$III \leq \tilde{C} u_1 \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}},$$

and on the other hand, to use (36)–(37) and (60) to obtain

$$IV \leq \tilde{C} u_1 \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}.$$

We estimate I–II as D_1 – D_2 and we obtain

$$I \leq \tilde{C}u_1 \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}} \quad \text{and} \quad II \leq \tilde{C}u_1^2 \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}.$$

Finally from (36)–(37) and (40)–(41), we get

$$V, VI \leq \tilde{C}u_1 \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}.$$

This implies (using the restriction $u_1 \leq U < 1$)

$$\|\partial_r(\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2))\|_{C^0_{U,R_0}} \leq \tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{C^0_{U,R_0}}. \tag{73}$$

Thus, from (70) and (73), we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{X_{U,R_0}} &= \|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{C^0_{U,R_0}} + \|\partial_r(\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2))\|_{C^0_{U,R_0}} \\ &\leq 2\tilde{C}U \|h_1 - h_2\|_{X_{U,R_0}} \end{aligned}$$

Therefore, for

$$U < \frac{1}{4\tilde{C}},$$

we deduce that the mapping $h \mapsto \mathcal{F}(h)$ is contracts in B_{x^*} . This proves by contraction mapping theorem the local existence and uniqueness of the solution in $B_{x^*} \subset X_{U,R_0}$. Replacing $\mathcal{F}(h)$ by h in (56), we get easily that h is a continuous solution to (50). On the other hand, replacing $\mathcal{F}(h)$ by h in (58), this shows that $\partial_r h$ is continuous and solves (19). Since Dh is also clearly continuous [see (16)], we get via the definition of the differential operator D that $\partial_u h$ is also continuous, this means $h \in C^1$.

Now, to establish uniqueness of solution in X_{U,R_0} , we proceed as in [7] using Gronwall’s lemma. So, the proof of Theorem 3.1 is complete. \square

4 Global existence in time

We now state the second important result of this paper which is global existence in time (Bondi) solution of (50). As the argument developed in [7] is rigidly based on relation $\|h\|_{C^0_{U,R_0}} = \|h_0\|_{C^0_{R_0}}$, we cannot generalize this argument on Einstein–Maxwell–Klein–Gordon with positive cosmological constant model because of the presence of the constant $C^0 > 1$ in (51). Therefore, we will use the *Continuation Criteria* principle to prove this result.

Theorem 4.1 *Given $\Lambda > 0$, $R_0 > \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ and $x^* < \frac{\Lambda}{17C}$ where C is given in (48) and $h_0 \in C^1([0, R_0])$. There exists $C^* = C^*(x^*, \Lambda, R_0) > 0$ such that if $\|h_0\|_{X_{R_0}} \leq$*

$\frac{x^*}{1 + C^*}$, then the Cauchy problem

$$\begin{cases} Dh = (G^0 + G^1)(h - \bar{h}) - i \frac{Q\bar{h}a}{2r} \\ h(0, r) = h_0(r) \end{cases} \tag{74}$$

has a unique solution $h \in C^1([0, +\infty[\times [0, R_0])$. Furthermore,

$$\|h\|_{C^0_{[0, +\infty[\times [0, R_0]}} \leq C^0 \|h_0\|_{C^0_{R_0}} \tag{75}$$

$$\|h\|_{X([0, +\infty[\times [0, R_0])} \leq (1 + C^*) \|h_0\|_{C^0_{R_0}} \tag{76}$$

where $C^0 = C^0(x^*, \Lambda, R_0) > 0$ being a positive constant.

Proof Let U_* be the maximal time of existence. If $U_* = \infty$, we are done so assume that $U_* < \infty$. If we are able to obtain uniform bounds on all the solutions (including their derivatives) we can extend the solution to $u = U_*$, and then apply the local existence theorem (Theorem 3.1) again with initial condition at $u = U_*$. Which contradicts the fact that U_* was the maximal time of existence. Therefore, it suffices to show that the solutions Φ , a , b and A_u and their partial derivatives are bounded on the maximal time interval of existence to conclude that the solution is global in time.

From (43), we have for all $(u, r) \in [0, U_*] \times [0, R_0]$,

$$a(u, r) \leq K^* \leq K_\Lambda,$$

with K_Λ which is obtain from K^* by replacing x^* by $\frac{\Lambda}{17C}$.

From (15), we have for all $(u, r) \in [0, U_*] \times [0, R_0]$,

$$\begin{aligned} |b(u, r)| &\leq \frac{1}{r} \int_0^r a|1 - \Lambda s^2| ds + \frac{1}{r} \int_0^r a \frac{Q^2}{s^2} ds \\ &\leq K_\Lambda \left(1 + \frac{\Lambda}{3} R_0^2 + \frac{4\pi \Lambda}{51C} R_0^2 \right). \end{aligned} \tag{77}$$

For all $(u, r) \in [0, U_*] \times [0, R_0]$, we deduce from (46) and (52) that

$$|h(u, r)| \leq \|h\|_{X_{U, R_0}} \leq (1 + C^*) \|h_0\|_{C^0_{R_0}} < \frac{\Lambda}{17C}. \tag{78}$$

From (52), we deduce that

$$|\partial_r h(u, r)| \leq (1 + C^*) \|h_0\|_{X_R} \leq \frac{\Lambda}{17C}. \tag{79}$$

By definition, $D = \partial_u - b/2\partial_r$, we have for all $(u, r) \in [0, U_*) \times [0, R_0]$

$$\begin{aligned}
 |\partial_u h(u, r)| &= |Dh + b/2\partial_r h| \\
 &\leq |G^0 + G^1||h - \bar{h}| + \frac{a}{2r}|\bar{h}||Q| + \frac{1}{2}|b||\partial_r h| \\
 &\leq \frac{2\Lambda}{17C}(C_2 + C_3)R_0 + \frac{2\pi\Lambda}{17C}R_0K_\Lambda + \frac{\Lambda K_\Lambda}{34C}\left(1 + \frac{\Lambda}{3}R_0^2 + \frac{4\pi\Lambda}{51C}R_0^2\right) \\
 &\leq C_{R_0,\Lambda}.
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

As, $\Phi(u, r) = \frac{1}{r} \int_0^r h(u, s)ds$, we have from (78), for all $(u, r) \in [0, U_*) \times [0, R_0]$

$$|\Phi(u, r)| \leq \frac{1}{r} \int_0^r |h(u, s)|ds \leq \frac{\Lambda}{17C},$$

from (80),

$$|\partial_u \Phi(u, r)| \leq \frac{1}{r} \int_0^r |\partial_u h(u, s)|ds \leq C_{R_0,\Lambda},$$

and from (28), (79)

$$|\partial_r \Phi(u, r)| = \frac{1}{r}|h - \bar{h}| \leq \frac{\Lambda}{34C}.$$

We have from (43'),

$$\partial_r a(u, r) \leq \frac{\pi}{2}K^*(x^*)^2r \leq \frac{\Lambda\pi}{34C}K_\Lambda R_0. \tag{81}$$

Differentiating (14) w.r.t u , we have

$$\partial_u a = 4\pi \int_0^r \frac{1}{s} [(h - \bar{h})^*(\partial_u h - \partial_u \bar{h}) + (h - \bar{h})(\partial_u h^* - \partial_u \bar{h}^*)] a,$$

and using (28) and (80), we have

$$\begin{aligned}
 |\partial_u a(u, r)| &\leq 8\pi K^* \int_0^r \frac{1}{s} |h - \bar{h}||\partial_u h - \partial_u \bar{h}|ds \\
 &\leq 16\pi \int_0^r \frac{1}{s} |h - \bar{h}||\partial_u h|ds \\
 &\leq \frac{4\Lambda\pi}{17C}C_{R_0,\Lambda}R_0^2.
 \end{aligned}
 \tag{82}$$

Differentiating (15) w.r.t r and using estimates (44) and (45)

$$\begin{aligned} |\partial_r b(u, r)| &\leq \frac{1}{r} |a - \bar{a}| + a \left(\Lambda r + \frac{Q^2}{r^3} \right) + \frac{1}{r^2} \int_0^r a \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds \\ &\leq \frac{\Lambda \pi}{34C} K_\Lambda R_0 + K_\Lambda R_0 \left(\Lambda + \frac{16\Lambda}{17C} \pi^2 \right) + \frac{\Lambda K_\Lambda}{3} R_0 + \frac{16\Lambda \pi^2}{51C} K_\Lambda R_0 \\ &\leq C_{R_0, \Lambda}^1. \end{aligned}$$

Differentiating (9) w.r.t u , we have from (78) and (80)

$$\begin{aligned} |\partial_u Q(u, r)| &\leq 2\pi \left| \int_0^r s(h \partial_u \bar{h}^* + \bar{h}^* \partial_u h - h^* \partial_u \bar{h} - \bar{h} \partial_u h^*) ds \right| \\ &\leq 8\pi \int_0^r s|h||\partial_u h| ds \\ &\leq \frac{4\pi \Lambda}{17C} C_{R, \Lambda} R^2. \end{aligned} \tag{83}$$

Differentiating (15) w.r.t u , we have from (45), (82) and (83)

$$\begin{aligned} |\partial_u b(u, r)| &\leq |\partial_u \bar{a}| + \frac{1}{r} \int_0^r |\partial_u a| \left(\Lambda s^2 + \frac{Q^2}{s^2} \right) ds + \frac{2}{r} \int_0^r \frac{a}{s^2} |Q| |\partial_u Q| ds \\ &\leq \frac{4\Lambda \pi}{17C} C_{R_0, \Lambda} \left[1 + R_0^2 \left(\frac{\Lambda}{3} + \frac{4\pi \Lambda}{51C} \right) \right] R_0^2 + 32\pi^2 \left(\frac{\Lambda}{17C} \right)^2 C_{R_0, \Lambda} R_0^2 \\ &\leq C_{R_0, \Lambda}^2. \end{aligned}$$

Combining (10) and (45),

$$|A_u| \leq \int_0^r \frac{a}{s^2} |Q| ds \leq 4\pi K^*(x^*)^2 r \leq \frac{4\pi \Lambda}{17C} K_\Lambda R_0.$$

Differentiating (10) w.r.t u , we have from (45), (82) and (83),

$$\begin{aligned} |\partial_u A_u| &\leq \int_0^r \frac{1}{s^2} (a|\partial_u Q| + |Q||\partial_u a|) \\ &\leq \frac{4\pi \Lambda}{17C} K_\Lambda + \frac{16\pi^2 \Lambda^2}{867C^2} R_0^3 \leq C_{R_0, \Lambda}^3. \end{aligned}$$

Differentiating (10) w.r.t r , we have from (45)

$$|\partial_r A_u| = \frac{a}{r^2} |Q| \leq 4\pi K^*(x^*)^2 \leq \frac{4\pi \Lambda}{17C} K_\Lambda \leq C_{R_0, \Lambda}^4.$$

Let us pose that,

$$\bar{C}_{\Lambda, R_0} = \max \left\{ C_{R_0, \Lambda}^1, C_{R_0, \Lambda}^2, C_{R_0, \Lambda}^3, C_{R_0, \Lambda}^4, \frac{\pi \Lambda}{34C} K_{\Lambda} R_0, \frac{4\pi}{17C} C_{R_0, \Lambda} R_0^3, \frac{4\pi \Lambda}{17C} K_{\Lambda} \right\}.$$

Then, we deduce that for all $(u, r) \in [0, U_*] \times [0, R_0]$,

$$\begin{aligned} |a| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_r a| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_u a| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} \\ |b| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_r b| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_u b| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} \\ |\Phi| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_r \Phi| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_u \Phi| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} \\ |A_u| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R} & |\partial_r A_u| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} & |\partial_u A_u| &\leq \bar{C}_{\Lambda, R_0} \end{aligned}$$

and the proof of Theorem 4.1 is complete. □

5 Exponential asymptotic decay

We now state and prove the third result of this paper, that is

Theorem 5.1 *Let $\Lambda > 0$, $R_0 > \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$, and $\hat{H} = \mathcal{O}(x^*)$ where x^* is defined in (46). Then for $\|h_0\|_{X_{R_0}}$ sufficiently small, the solution $h \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times [0, R_0])$ of (74) satisfies*

$$\sup_{0 \leq r \leq R_0} |\partial_r h(u, r)| \leq \hat{C} e^{-\hat{H}u},$$

and there exists $\underline{h} \in \mathbb{C}$ such that

$$\begin{aligned} |\bar{h}(u, r) - \underline{h}| &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u} \\ |a(u, r) - 1| &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u} \\ \left| b(u, r) - 1 + \frac{\Lambda}{3} r^2 \right| &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u} \end{aligned}$$

with the constants \hat{C} and \bar{C} which depend only of $\|h_0\|_{X_{R_0}}$, R_0 and Λ .

Proof Let h verifying (74) and let us pose that

$$\varepsilon(u) = \|\partial_r h(u, \cdot)\|_{C_{R_0}^0}. \tag{84}$$

Arguing as in (28), we get

$$|(h - \bar{h})(u, r)| \leq \frac{r}{2} \varepsilon(u). \tag{85}$$

With the condition $\Phi(u, 0) = 0$ for Φ to be regular at the center, we can deduce from (12) that $h(u, 0) = 0$ so that $h(u, r) = \int_0^r \partial_s h(u, s) ds$. In this case, replacing in (58) $\mathcal{F}(h)$ by h , and using (37), (40)–(41) and (84), we obtain

$$\varepsilon(u_1) \leq \varepsilon(0)e^{-2C_1 \int_0^{u_1} r(v) ds} + C_4 C_5 R_0 \int_0^{u_1} \varepsilon(u) e^{-2C_1 \int_u^{u_1} r(v) ds} du. \tag{86}$$

Recall that $r(u) = r(u; u_1, r_1)$ and that if $r_1 < r_c^-$ then, using the calculations (where α is given in Lemma 2.1), we have

$$e^{\frac{C_1}{\alpha} u_1} \varepsilon(u_1) \leq 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0) + 2^{C_1/\alpha^2} C_4 C_5 R_0 \int_0^{u_1} \varepsilon(u) e^{\frac{C_1}{\alpha} u} du. \tag{87}$$

Applying Gronwall’s lemma to $\psi(v) := e^{\frac{C_1}{\alpha} v} \varepsilon(v)$, we obtain

$$\psi(u_1) \leq 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0) \exp \left\{ 2^{C_1/\alpha^2} C_4 C_5 R_0 u_1 \right\},$$

and this implies

$$\varepsilon(u_1) \leq 2^{C_1/\alpha^2} \varepsilon(0) \exp \left\{ \left(2^{C_1/\alpha^2} C_4 C_5 R_0 - \frac{C_1}{\alpha} \right) u_1 \right\}. \tag{88}$$

For $r(u_1) = r_1 \geq r_c^-$, (36) and (86) imply that

$$e^{2C_1 r_c^- u_1} \varepsilon(u_1) \leq \varepsilon(0) + C_4 C_5 R_0 \int_0^{u_1} \varepsilon(u) e^{2C_1 r_c^- u} du. \tag{89}$$

As in (87), applying Gronwall’s lemma to $\psi(v) = e^{2C_1 r_c^- v} \varepsilon(v)$, we obtain from (89),

$$\varepsilon(u_1) \leq \varepsilon(0) \exp \left\{ (C_4 C_5 R_0 - 2C_1 r_c^-) u_1 \right\}. \tag{90}$$

Let us pose that

$$\hat{H} = \frac{C_1}{\alpha} - 2^{C_1/\alpha^2} C_4 C_5 R_0 \quad \text{and} \quad \tilde{H} = 2C_1 r_c^- - C_4 C_5 R_0.$$

Then, we have

$$\hat{H} \leq \tilde{H} \tag{91}$$

and consequently using (88) or (90) combined with (91), we obtain

$$\sup_{0 \leq r \leq R_0} |\partial_r h(u, r)| \leq \hat{C} e^{-\hat{H} u}. \tag{92}$$

□

Rewriting (16), we have

$$\partial_u h = (G^0 + G^1)(h - \bar{h}) + \frac{b}{2} \partial_r h - i \frac{a\bar{h}}{2r} Q.$$

Proceeding as in (80) and using the estimate (92), we can find a positive constant Υ depending only of R_0 , Λ and $\|h_0\|_{X_{R_0}}$ such that

$$|\partial_u h(u, r)| \leq \Upsilon e^{-\hat{H}u}. \tag{93}$$

Following (93), we deduce from the fundamental theorem of calculus that there exists $\underline{h}(r) \in \mathbb{C}$ such that

$$\lim_{u \rightarrow \infty} h(u, r) = \underline{h}(r).$$

But from (92), we see that

$$\begin{aligned} |h(r_1) - h(r_2)| &= \lim_{u \rightarrow \infty} |h(u, r_1) - h(u, r_2)| \\ &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \left| \int_{r_1}^{r_2} \partial_r h(u, r) dr \right| \\ &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \hat{C} |r_2 - r_1| e^{-\hat{H}u} = 0, \end{aligned}$$

thus, there exists $\underline{h} \in \mathbb{C}$ such that $\underline{h}(r) = \underline{h}$. Now, from (93), we have

$$\begin{aligned} |\bar{h}(u, r) - \underline{h}| &\leq \frac{1}{r} \int_0^r \int_u^\infty |\partial_t h(t, r)| dt dr \\ &\leq \frac{1}{r} \int_0^r \int_u^\infty \Upsilon e^{-\hat{H}t} dt dr \leq \bar{C} e^{-\hat{H}u}. \end{aligned}$$

Using the fact that we can estimate [combining (9), (85) and (92)]

$$|Q| \leq \bar{C} e^{-\hat{H}u},$$

it is now clear that from (14) and (15) that

$$\begin{aligned} |a(u, r) - 1| &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u}, \\ \left| b(u, r) - 1 + \frac{\Lambda}{3} r^2 \right| &\leq \bar{C} e^{-\hat{H}u}, \end{aligned}$$

and the proof of Theorem 5.1 is complete.

Remark 5.1 Using Theorem 5.1, we can prove that the geodesic completeness.

6 Conclusion

The main objective of this work was to study the global solution in (Bondi) time to the spherically symmetric Einstein–Maxwell–Klein–Gordon system with a positive cosmological constant. We found that the obtained solutions have an exponential decay in time and are asymptotically the de Sitter. However, these results suffer from the undesirable feature of being restricted to a finite radial range. Future works will be of great interest to study the same system but with a radial variable which goes to infinity.

References

1. Anderson, M.T.: Existence and stability of even dimensional asymptotically de Sitter spaces. *Ann. Henri Poincaré* **6**(5), 801–820 (2005)
2. Besset, N.: Decay of the local Energy for the charged Klein–Gordon equation in the exterior De Sitter–Reissner–Nordström spacetime. *Ann. Henri Poincaré* **21**(8), 2433–2484 (2020)
3. Chae, D.: Global existence of solutions to the Einstein–Maxwell–Klein–Gordon equation in the spherical symmetry. *Inf. Center Math. Sci.* **4**(2), 81–86 (2001)
4. Choquet-Bruhat, Y.: Solutions C^∞ d'équations hyperboliques non linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris* **272**, 386–388 (1986)
5. Christodoulou, D.: The problem of a self-gravitating scalar field. *Commun. Math. Phys.* **105**, 337–361 (1986)
6. Costa, J.L., Mena, F.C.: Global solutions to the spherically symmetric Einstein-scalar field system with a positive cosmological constant in Bondi coordinates. *J. Hyperb. Differ. Equ.* **18**(02), 311–341 (2021)
7. Costa, J.L., Alho, A., Natário, J.: The problem of a self-gravitating scalar field with positive cosmological constant. *Ann. Henri Poincaré* **14**, 1077–1107 (2012)
8. Fang, A., Wang, Q., Yang, S.: Global solutions for Massive-Klein–Gordon equations with large Maxwell field. *Annals PDE* **7**(1), 1–69 (2021)
9. Friedrich, H.: On the existence of n-geodesically complete or future complete solutions of Einstein's field equations with smooth asymptotic structure. *Commun. Math. Phys.* **107**, 587–609 (1986)
10. Klainerman, S., Machedon, M.: On the Maxwell–Klein–Gordon equation with finite energy. *Duke Math. J.* **74**(8), 19–44 (1994)
11. Klainerman, S., Wang, Q., Yang, S.: Global solutions for massive-Klein–Gordon equation. *Commun. Pure Appl. Math.* **73**(1), 63–109 (2020)
12. Lazaroiu, C.I., Shahbazi, C.S.: The global formulation of generalized Einstein-Scalar-Maxwell theories. *Quantum Theory and symmetries with Lie theory and its Applications in Physics, Volume 2. Springer Proceedings in Mathematics Statistics*, vol. 255, pp. 978–981 (2018)
13. Noundjeu, P.: The Einstein–Vlasov–Maxwell (EVM) system with spherical symmetry. *Class. Quantum Gravity* **22**, 5365–5384 (2005)
14. Noundjeu, P., Tegankong, D.: The cylindrical symmetry Einstein–Vlasov system with charged particles in expansion. *Acta Math. Vietnam* **41**, 695–709 (2016). <https://doi.org/10.1007/s40306-015-0167-3>
15. Rendall, A.D.: Asymptotics of solutions of the Einstein equations with positive cosmological constant. *Annales Henri Poincaré* **5**, 1941–1064 (2004)
16. Ringström, H.: Future stability of the Einstein-non-linear scalar field system. *Inventiones Mathematicae* **173**, 123–208 (2008)
17. Tchapnda, S.B., Rendall, A.D.: Global existence and asymptotic behavior in the future for the Einstein–Vlasov system with positive cosmological constant. *Class. Quantum Gravity* **20**, 3037–3049 (2003)
18. Wald, R.M.: Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant. *Phys. Rev. D* **28**, 2118–2120 (1983)

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

Springer Nature or its licensor (e.g. a society or other partner) holds exclusive rights to this article under a publishing agreement with the author(s) or other rightsholder(s); author self-archiving of the accepted manuscript version of this article is solely governed by the terms of such publishing agreement and applicable law.