

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

PAIX-TRAVAIL-PATRIE

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GEOSCIENCES DOCTORALE

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE
"PHYSIQUE ET APPLICATIONS"

BP 812 Yaoundé

Email : crf-stg@uy1.uninet.cm

REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
TECHNOLOGY
AND GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR "PHYSICS APPLICATION "

PO BOX 812 Yaoundé

Email : crf-stg@uy1.uninet.cm



**LABORATOIRE DE PHYSIQUE NUCLEAIRE, ATOMIQUE, MOLECULAIRE ET
BIOPHYSIQUE**

***TRANSITIONS QUADRIPOLAIRES ELECTRIQUES DU
HAMILTONIEN DE BOHR AVEC LE POTENTIEL DE
YUKAWA-KRATZER***

Thèse

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du

Diplôme de Doctorat/PhD en Physique

Option : Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection

Par :

YIA ETOLO Hervé Didier

Matricule : 08W0692

Master of Science en Physique

Sous la direction de :

BEN-BOLIE Germain Hubert

Professeur

Université de Yaoundé I



2024



DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE
DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeurs, SAIDOU, HONA Jacques, et Professeur NJANDJOCK NOUCK Philippe, respectivement Examineurs et Président du jury de la thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur YIA ETOLO Hervé Didier Matricule 08W0692, préparée sous la direction du Professeur BEN-BOLIE Germain Hubert, intitulée : « Transitions quadripolaires électriques du Hamiltonien de Bohr avec le potentiel de YUKAWA-KRATZER », soutenue le Jeudi, 30 Mai 2024, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique. Spécialité : Physique nucléaire, atomique, moléculaire et biophysique, Option : Physique nucléaire, dosimétrie et radioprotection, attestons que toutes les corrections demandées par le Jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le 04 MAI 2024

Les Examineurs

Le Président du Jury

Pr. SAIDOU

Pr. HONA Jacques

Pr. NJANDJOCK NOUCK Philippe



Le Chef de Département de Physique

Ndjaka Jean-Marie Biomvona
Professeur

Université de Yaoundé I

Faculté des Sciences

Département de Physique

**Transitions quadripolaires électriques du hamiltonien de Bohr avec le
potentiel de Yukawa-Kratzer.**

THÈSE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat/PhD en Physique

Option: **Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection**

Par

YIA ETOLO Hervé Didier

Matricule: 08W0692

Master en Physique

Sous la direction de:

BEN-BOLIE Germain Hubert

Professeur

université de Yaoundé I

Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique

Copyright ©YIA ETOLO Hervé Didier, herveetolo@yahoo.fr

Année 2023

Dédicace

Je dédie cette thèse :

à ma famille.

Remerciements

Ce travail a été pensé et conçu dans le laboratoire de Physique Nucléaire. En toute humilité et simplicité, ce travail n'aurait jamais vu le jour sans l'immense soutien moral et intellectuel ; et les conseils de certaines personnes à qui je souhaite témoigner toute ma gratitude.

Je pense d'abord à mon Directeur de Thèse, le Pr. BEN-BOLIE Germain Hubert, chef de laboratoire de Physique Nucléaire de l'Université de Yaoundé I pour l'encadrement, les conseils, la patience, la disponibilité et le soutien constant montré à mon égard. Son encouragement, ses compétences scientifiques m'ont permis d'être confiant et d'apprendre à travailler en toute sincérité.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux Honorables membres du jury, qui ont accepté de juger cette thèse.

Mes remerciements vont également au Professeur EMA'A EMA'A Jean Marie de l'Université de Bertoua et au Professeur ELE ABIAMA Patrice du Ministère de la Recherche Scientifique et de l'Innovation , qui, malgré leurs différentes occupations , ont toujours été très attentifs dans la progression de ce travail. Leurs conseils techniques et leurs apports scientifiques m'ont été d'une très grande utilité dans la confection de ce document. Je leur adresse toute ma reconnaissance.

J'adresse mes hommages et ma profonde gratitude au Professeur OWONO ATEBA Pierre, fondateur du Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I.

Je remercie le Professeur OWONO OWONO Luc Calvin coordonnateur de l'URFD physique et applications, Vice-Recteur à l'Université de Yaoundé I, pour ses conseils.

Une pensée forte au Professeur NDJAKA Jean-Marie Bienvenu, Chef de Département de Physique, et au Professeur KOFANE Timoléon Crépin, pour leurs enseignements, qui m'ont donné un éclairage scientifique pour l'achèvement de cette thèse.

Une pensée particulière au Professeur. SAÏDOU et au Professeur BOYOMO ONANA Marthe, pour leurs enseignements, leur encadrement et surtout leur écoute .

J'exprime ma gratitude à tous les enseignants du Département de Physique et plus particulièrement aux Professeurs NJANDJOCK NOUCK Philippe, PEMHA ELKANA, TCHAWOUA Clément, EKOBEA FOUA Henri Paul, WOAFU Paul, ZEKENG Serge, HONA Jacques, MBANE BIOUELE César, NDOP Joseph, BODO Bertrand, EYEBE FOUA, NOUAYOU Robert, VONDOU Débertini, FEWO Serge Ibrid, NANA ENGO Serge, DJUIDJE Françoise, NANA NBENJO Roméo, SIEWE SIEWE Martin, Mbinack Clément, ENYEGUE A NYAM Françoise et au Docteur ABDOURAHIMI.

Je remercie également les Docteurs : NGA ONGODO Dieudonné, TAKEMBO Clovis,

NGOUBI Hénock, ALI ZARMA, TAKOUKAM SOH Serge, ANEMENA ETOGA Emmanuel, HAMADOU ISSA, MBIDA MBEMBE Serge, AHMADOU KATARKALAH, SOULEYMANOU HAMAN ADAMA, TJOCK-MBAGA Thomas et MAH TSILA Phillipe pour leurs encouragements et leurs conseils.

Ma vie de thésard a aussi été l'occasion de rencontrer des êtres particuliers avec qui j'ai partagé des moments d'incertitudes et de joie. Je pense à Manga Richard, Guimssing Brice, Tchatchoua Kamgaing Max, Molo Nommo Valère avec qui j'ai partagé des heures d'enseignements à n'en plus finir dans des collèges et des établissements supérieurs privés de Yaoundé. Je pense également à ceux qui m'ont accueilli au laboratoire notamment AKAMBA MBEMBE Bertrand, EBODE Fabien, TAMIAN FOTSO Kévin et ADJABA Jean Liboire, une pensée forte à mes amis et frères Dr. AWE Richard, Dr. KOYANG François, ATANGANA LIKENE AIME et NDJOBO JUSTICE.

À tous ceux et celles qui m'ont apporté de près ou de loin soutien, force, détermination et dévouement dans la réalisation de cette thèse, je vous dis infiniment merci.

Liste des Abréviations et Symboles

Pm : Picomètre

CCG : Coefficients de Clebsch Gordan

fm : femtomètre

a_v : Effet volumique

a_c : Effet de repulsion coulombienne

a_s : Effet surfacique

a_p : Terme d'appariement

a_a : Terme d'asymétrie

Pt : Platine

MeV : Méga électron Volt

$V(\beta, \gamma)$: Energie potentielle du noyau

\hat{H} : Opérateur Hamiltonien

\hat{p} : Opérateur impulsion du mouvement

B : Masse totale du noyau

n : Nombre quantique principal

l : Nombre quantique azimutal

N : Nombre de couches de l'oscillateur harmonique

-
- m** : Nombre quantique magnétique
- s** : Moment angulaire de spin
- n_z : Nombre quantique principal selon l'axe de symétrie
- Λ : Projection du moment orbital \vec{l} sur l'axe de la symétrie
- n_ω : Nombre quantique secondaire
- L** : Nombre quantique cinétique
- PWS** : Potentiel de Woods-Saxon
- OH** : Oscillateur Harmonique
- β : Paramètre qui mesure l'étendue de la déformation
- γ : Paramètre qui montre l'éloignement par rapport à la symétrie axiale
- β : Paramètre d'écrantage
- $P_n^{(\alpha,\beta)}$: Polynôme de Jacobi
- $H_{n\bar{\gamma}}$: Polynôme de Hermite
- $D(\theta_i)$: Composante angulaire de la fonction d'onde appelée fonction de Wigner
- $\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$: Fonction d'onde
- θ_i : Angle d'Euler : $i = 1, 2, 3$
- \hat{Q}_k^2 : Composantes du moment angulaire
- k** : Représente les trois axes de coordonnées : $k = 1, 2, 3$
- u** : Unité de masse atomique

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Liste des Abréviations	iv
Table des matières	vi
Liste des Figures	ix
Résumé	xi
Abstract	xii
Abstract	xiii
Résumé	xiv
Chapitre I Revue de la littérature sur les modèles nucléaires	5
I.1 Introduction	5
I.2 Expérience de Rutherford	5
I.3 Le noyau atomique	7
I.3.1 Caractéristiques et différents états du noyau	8
I.3.2 Les noyaux et leurs formes	8
I.4 Énergie de liaison et énergie de séparation d'un noyau	9
I.4.1 Énergie de liaison d'un noyau	9
I.4.2 Énergie de séparation d'un noyau	10
I.4.3 Défaut de masse atomique	11
I.4.4 Stabilité d'un noyau	12
I.5 L'équation de Schrödinger	13
I.5.1 Particule libre	13
I.5.2 Particule dans un potentiel	14
I.5.3 Puits quantique	15
I.5.4 États stationnaires	15
I.6 Interprétation probabiliste	16
I.6.1 Fonction d'onde et densité de probabilité	16

I.6.2	Normalisation de la fonction d'onde	18
I.6.3	Incertitude d'Eisenberg	18
I.7	Description des modèles nucléaires	21
I.7.1	Modèle de la goutte liquide	21
I.7.2	Modèle en couches	23
I.7.3	Modèle de Nilsson : modèle pour les noyaux déformés	24
I.7.4	Déformations dans le noyau	25
I.7.5	Mode vibrationnel : paramétrisation de la surface nucléaire	26
I.7.6	Mode rotationnel	28
I.7.7	Triaxialité dans le noyau	31
I.7.8	Le noyau de platine	33
I.7.9	Isotopes du platine	33
I.7.10	Utilisation, gisement et production du platine	34
I.7.11	Impact écologique industriel	34
I.7.12	Effets sur la santé	35
I.8	Calcul des transitions électriques des noyaux triaxiaux	35
I.9	Conclusion	38
Chapitre II Méthodologie d'investigation des états d'énergie dans le noyau de l'atome		39
II.1	Introduction	39
II.2	Présentation du Hamiltonien de Bohr et des potentiels nucléaires	39
II.3	Moment de transition quadrupolaire électrique	42
II.3.1	Écart quadratique moyen	45
II.3.2	Effet de l'étalonnage des énergies dans la bande γ	45
II.4	Étude théorique et méthode	45
II.4.1	Théorie de champ moyen : modèle à particules indépendantes	45
II.4.2	Théorie sur les mouvement collectifs dans les noyaux	46
II.4.3	Méthode de Nikiforov-Uvarov	47
II.4.4	Équation différentielle de Nikiforov-Uvarov	47
II.5	Solution de l'équation de Nikivorov-Uvarov	48
II.5.1	Valeurs propres	51
II.5.2	Fonctions propres	52
II.6	Paramètres de l'équation de Nikivorov-Uvarov	52
II.7	Application á la résolution de l'équation classique du hamiltonien de Bohr pour le potentiel combiné de Yukawa inversement quadratique et de Kratzer écranté	56
II.7.1	Techniques de séparations des différents types de mouvements des déformations nucléaires	56
II.7.2	Solution de la partie γ	59
II.7.3	Solution de la partie β	60
II.8	Spectroscopie des noyaux lourds de transitions sphériques	66
II.9	Conclusion	72

Chapitre III Résultats et discussion	73
III.1 Introduction	73
III.2 Présentation des résultats et discussion	73
III.3 Étude comparative des résultats du présent modèle avec ceux obtenus à partir d'une nouvelle approche	92
III.4 Conclusion	100
Conclusion Générale	101
Appendix	103
Publication	105
Références Bibliographiques	106

Table des figures

Figure 1	Schéma de principe de l'expérience de Geiger, Marsden et Rutherford [2].	6
Figure 2	Énergie de liaison par nucléon [42]	10
Figure 3	Défaut de masse d'un noyau atomique [43].	12
Figure 4	Carte des noyaux expérimentalement connus en fonction de leur mode de désintégration	12
Figure 5	Courbe des densités de probabilité en fonction de la position [44]	19
Figure 6	Couplage d'une particule au coeur, et les nombres quantiques de Nilsson [51].	26
Figure 7	Les différentes formes correspondant aux différents ordres multipolaires [53].	27
Figure 8	Évolution en temps des modes vibratoires [54].	27
Figure 9	Schéma de l'occupation des orbitales nucléaires dans le modèle en couches [51].	29
Figure 10	Représentation en coordonnées polaires de la déformation du noyau en fonction des paramètres β et γ . P désignant la forme prolate, O la forme oblate, le symbole \perp indiquant la rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe principal, // indiquant la rotation autour de l'axe principal [51].	32
Figure 11	Noyau triaxial dans son référentiel intrinsèque où sont représentés l'angle θ entre le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et l'axe Ox , et l'angle α entre les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et moment angulaire total \vec{J} [55].	33
Figure 12	Image du platine [42].	34
Figure 13	États excités des isotopes de plomb observés par réaction (IL, xn) a)[116]; b) [117].	67
Figure 14	Facteur gyromagnétique de l'état 12^+ des isotopes de plomb de masse $A = 206, 200, 198, 196, 194$ [118].	68
Figure 15	États excités des isotopes de plomb ^{192}Pb et ^{190}Hg peuplés par réaction (IL, xn) [117].	68
Figure 16	Niveaux excités des isotopes de mercure de masse paire très déficients en neutrons ($A = 188, 186, 184$).	69
Figure 17	Courbe d'énergie potentielle pour les isotopes de mercure de masse impaire (a) et paire ($A = 184$) (b) [128].	70
Figure 18	Schéma des niveaux partiels de ^{186}Hg	71

Figure 19	Premiers niveaux excités de la bande fondamentale et des bandes β et γ pour différents isotopes d'erbium ($Z = 68$).	71
Figure 20	Extraits des diagrammes de Nilsson pour les protons (a) et les neutrons (b).	72
Figure 21	Représentation du potentiel combiné de Yukawa inversement quadratique et de Kratzer écranté pour les isotopes de platine $^{192,194,196}\text{Pt}$	85
Figure 22	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et des données expérimentales pour le ^{192}Pt	86
Figure 23	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [99] et des données expérimentales pour le ^{194}Pt	87
Figure 24	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et l'expérimentale pour le ^{196}Pt	88
Figure 25	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde ($0_g^+, 2_g^+, 4_g^+$) pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$	89
Figure 26	Densité de probabilité de distribution $ \psi_1(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états ($0_g^+, 2_g^+, 4_g^+$) pour l'isotope $^{192,194,196}\text{Pt}$	90
Figure 27	Courbes des énergie de l'état fondamental des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$ en fonction du moment angulaire L	91
Figure 28	Courbes des énergie du premier état excité pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ en fonction du moment angulaire L	92
Figure 29	Représentation du potentiel de Killingbeck avec les paramètres de ^{196}Pt [Table 1].	94
Figure 30	Représentation du potentiel de Killingbeck avec les paramètres de ^{132}Xe [Table 1].	95
Figure 31	Moment d'inertie $\Theta(L)$ pour l'état fondamental, normalisé au $\Theta(2)$ avec les paramètres de ^{194}Pt [Table 1].	100

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la déformation des noyaux atomiques triaxiaux. Nous utilisons le Hamiltonien de Bohr avec un potentiel combiné de Yukawa inversement quadratique et de Kratzer écranté. En appliquant la méthode paramétrique de Nikiforov-Uvarov, nous obtenons les nouvelles expressions de l'énergie et des fonctions d'onde qui nous permettront de déterminer les moments de transitions quadripolaires électriques pour les isotopes de platine ; ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt . Ces isotopes de platine appartiennent à la famille des métaux de transition renommés pour leurs diverses applications notamment en médecine, en bijouterie et aussi dans le domaine agricole. En outre, nous évaluons aussi la racine de l'écart quadratique moyen et les énergies propres normalisées de la bande d'état fondamental, la bande γ et la bande β . Les résultats théoriques obtenus sont comparés aux résultats théoriques des autres modèles obtenus avec différents potentiels tels que le potentiel de Morse, le potentiel de Killingbeck plus Morse, le potentiel fractionnaire inverse à quatre termes et aux résultats expérimentaux. Il apparaît que pour tous les isotopes de platine, les résultats obtenus par notre modèle sont en accord avec les données expérimentales.

Mots clés : Hamiltonien de Bohr, Potentiel de Yukawa-Kratzer, Méthode paramétrique de Nikiforov-Uvarov, Noyaux triaxiaux, Transition quadripolaire.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the deformation of triaxial atomic nuclei, using the Bohr Hamiltonian with a combined inversely quadratic Yukawa and screened Kratzer potentials. By applying the parametric Nikiforov-Uvarov method, we obtain new expressions for the energy and the wave functions which will allow us to determine the electric moments of quadrupole transitions for the platinum isotopes ; ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt . These platinum isotopes belong to the family of transition metals renowned for their various applications, particularly in medicine, jewelery and also in agriculture. In addition, we also evaluate the root mean square deviation and the eigen energies normalized values of the ground state band, the γ band and the β band. The theoretical results obtained are compared with the theoretical results of the other models obtained with different potentials such as the Morse potential, the Killingbeck plus Morse potential, the four-term inverse fractional potential and with the experimental results. It appears that for all the platinum isotopes, the results obtained by our model are in agreement with the experimental data.

Keywords : Bohr Hamiltonian, Yukawa-Kratzer potential, triaxial nuclei, Parametric Nikiforov-Uvarov method, Energy spectra, Quadrupole transition.

Introduction Générale

La recherche en physique a pour objet de comprendre le monde dans lequel nous vivons. Ce monde peut être perçu à différentes échelles, qui sont toutes autant de branches de la physique. De l'univers aux quarks (ou aux cordes), le panel est large [1]. Cette thèse s'inscrit dans les recherches effectuées à l'une de ces échelles. Parmi celles de l'infiniment petit, l'échelle nucléaire revêt un intérêt particulier. En effet, des processus de physique nucléaire sont utilisés tous les jours, dans des domaines aussi variés que la production d'énergie, l'imagerie médicale ou encore la détection de fumée d'incendie. Bien que l'Humanité en fasse une utilisation quotidienne, le noyau atomique n'a pas encore livré tous ses secrets. Certaines de ses propriétés restent inexplicables. Il existe un certain nombre de modèles théoriques qui décrivent le noyau. Ces différents modèles permettent de décrire des propriétés de cet objet, mais à l'heure actuelle, aucun ne permet de les décrire toutes.

La découverte du noyau de l'atome est attribuée à Ernest Rutherford, Hans Geiger et leur étudiant Ernest Marsden. Leurs mesures eurent lieu en 1909 à Manchester [2]. L'expérience consistait à mesurer la diffusion des particules alpha (α) (c'est-à-dire des noyaux d'hélium) par une feuille d'or. Rutherford avait observé que l'image, enregistrée sur une plaque photographique d'un faisceau de particules α passant à travers une feuille mince, était diffusé. Il pensait que l'étude de ce phénomène le renseignerait sur des propriétés des atomes. Or, Rutherford et Geiger avaient développé un nouveau type de détecteur constitué d'un écran recouvert de sulfure de zinc qui émettait une faible lumière à l'endroit où passait une particule α . Produites par une source radioactive, les particules α devaient traverser une fente et formaient ensuite un faisceau étroit. La feuille d'or était placée au niveau de la fente et l'écran, une cinquantaine de centimètres plus loin. Le trajet des particules alpha devait s'effectuer dans le vide car quelques centimètres d'air suffisent à les arrêter. Pour observer les scintillations, Geiger examinait l'écran à travers un microscope qu'il déplaçait afin de compter le nombre de particules diffusées à une distance donnée de l'axe du faisceau. Ces mesures indiquaient que l'angle moyen de diffusion était faible, inférieur à 1° , signe que la plupart des particules étaient peu déviées. Survint alors

E. Marsden, étudiant de H. Geiger, ce dernier demanda à Rutherford un sujet d'étude. Rutherford lui dit alors de chercher s'il y avait des particules α qui étaient diffusées à plus de 90° , c'est à dire qui repartaient à l'envers. Quelques jours plus tard, Geiger rapporta que Marsden avait observé de telles particules. Pour expliquer ces résultats il proposa un mécanisme selon lequel les particules alpha, qui ont une charge positive, sont déviées par le champ électrique, créé par la charge également positive du noyau atomique il s'agit du proton. En 1932, James Chadwick (un assistant de Rutherford) découvre le neutron. Ainsi, on sait que les noyaux sont composés de protons et de neutrons [2].

Depuis la découverte du noyau atomique, la connaissance de ses propriétés fondamentales semble très intrigante. Au fil des ans, divers modèles ont été développés dans le but de révéler les propriétés des noyaux atomiques. Parmi ceux-ci, nous avons à la fois le modèle géométrique collectif [3, 4] et le modèle du boson interactif [5]. Le modèle géométrique collectif est une combinaison du modèle en couche et du modèle de la goutte liquide [6] qui ont le mérite de décrire avec succès la plupart des excitations nucléaires de basse énergie [7]. Ce modèle collectif, utilisé pour décrire la rotation et la vibration du noyau est également connu sous le nom de modèle de Bohr-Mottelson [7]. Dans un modèle collectif, le noyau atomique est décrit à l'aide d'un opérateur appelé l'hamiltonien de Bohr qui utilise un système de coordonnées comprenant deux variables intrinsèques ; variable β et variable γ avec trois angles d'Euler (θ, φ, ϕ) . La variable β mesure la déformation par rapport à la forme sphérique du noyau, tandis que la variable γ mesure la déformation axiale. Ces dernières années, les solutions analytiques obtenues par Iachello [8,9] ont donné un nouvel élan à l'étude du noyau atomique à l'aide de l'hamiltonien de Bohr. Ces solutions sont particulièrement intéressantes car elles sont considérées comme des exemples de ce que l'on appelle les symétries de point critique [6]. En effet, les symétries de point critique [6] sont liées aux transitions de phase de forme dans la structure nucléaire. Par exemple, la symétrie dite Y(5) [10] est liée au passage des formes axiales aux formes triaxiales, la symétrie dite Z(5) [11], est liée au passage des formes prolates aux formes oblates. La symétrie E(5) est liée aux transitions de formes du second ordre [8] entre la forme sphérique et les noyaux de forme instable, tandis que la transition de phase de premier ordre entre les noyaux rotatifs déformés à déformations vibrationnelles et à symétrie axiale est décrite par la symétrie X(5).

À cette fin, l'étude des solutions de l'équation du hamiltonien de Bohr devrait en effet nous aider à mieux comprendre la dynamique des transitions de phase électrique et de la triaxialité

dans les noyaux atomiques. Dans ce contexte, une attention particulière est portée à la recherche de solutions analytiques de l'équation du hamiltonien de Bohr avec différentes formes de potentiels. Certains potentiels régulièrement utilisés pour la variable β sont : potentiel de Davidson [12, 13], potentiel de l'oscillateur harmonique [14], potentiels de Coulomb et de Kratzer [15], potentiel de Killingbeck [16, 17], potentiel sextique [18 - 21], potentiel quartique [22], potentiel puits carré [6], potentiel puits fini [23], potentiel de Killingbeck plus potentiel de Morse [24], potentiel de Manning-Rosen [25,26,27], potentiel de Hülthen [28], potentiel de Morse [29, 30], potentiel de Woods-Saxon [31]. Pour plus de détails nous pouvons nous orienter dans les Refs. [32,33]. De plus, d'après des mesures effectuées récemment, il apparaît qu'il y a une transition de forme entre celle allongée et celle oblate déformée [11,34, 35]. Pour la symétrie triaxiale, la surface des noyaux a un mouvement oscillatoire uniforme sur la coordonnée γ à partir des formes prolates jusqu'aux formes oblates [36, 37]. À présent, il est d'usage d'utiliser un potentiel d'oscillateur harmonique ayant un minimum d'angle autour de $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Cette thèse est consacrée à l'étude des noyaux triaxiaux à l'aide du hamiltonien de Bohr. Le potentiel de la partie β est une combinaison du potentiel de Yukawa inversement quadratique et du potentiel de Kratzer écranté. Ce dernier peut être vu comme la superposition des variantes du potentiel de Yukawa, qui est un cas typique de l'interaction forte. Ce potentiel est assez riche dans le sens où l'on peut extraire les potentiels de Yukawa, de Coulomb et Kratzer via un choix approprié des paramètres du potentiel. En effet, s'il est possible d'obtenir des analyses de solutions du hamiltonien de Bohr pour ce dernier potentiel, alors il pourrait fournir de meilleurs résultats que les potentiels de Kratzer écranté et de Yukawa inversement quadratique considérés séparément. Les diverses raisons mentionnés ci-dessus nous ont motivés à mener cette étude.

Dans ce travail, il est question d'utiliser le modèle du hamiltonien de Bohr avec le potentiel combiné de Yukawa inversement quadratique et de Kratzer écranté en s'appuyant sur la méthode paramétrique de Nikiforov-Uvarov. Ce modèle est utilisé sur les isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$. Dans le but de déterminer l'énergie du spectre, les fonctions d'onde ainsi que les moments quadripolaires de transitions électriques B(E2). Ce travail est organisé en trois chapitres :

Au premier chapitre, nous présentons de prime à bord l'expérience de Rutherford ; par la suite, nous nous intéressons sur la structure du noyau atomique en présentant ses caractéristiques, ses états, ses différentes formes ainsi que sa stabilité. Par ailleurs une attention particulière est consacrée sur les modèles nucléaires. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du ha-

miltonien de Bohr dans l'espace classique, nous présentons également à la forme du potentiel utilisé ainsi que la méthode qui nous a permis de résoudre l'équation de Schrödinger dans le cas classique. Le troisième chapitre quant à lui présente les résultats du modèle, leur analyse et leur discussion par rapport aux résultats expérimentaux. Ce travail s'achève par une conclusion générale, suivie des éventuelles perspectives qui peuvent en ressortir.

REVUE DE LA LITTÉRATURE SUR LES MODÈLES NUCLÉAIRES

I.1 Introduction

La connaissance du noyau atomique ou structure nucléaire est une question ouverte après un siècle de recherche en physique nucléaire. Elle permet de décrire le mode d'arrangement des nucléons dans le noyau et vise à établir des lois et des principes afin de pouvoir construire des modèles à caractère prédictif. Les forces nucléaires entre nucléons (protons et neutrons) qui composent le noyau est une force résiduelle de l'interaction forte qui lie les quarks dans le nucléon. Afin de suivre l'évolution sphérique du noyau atomique pour mieux décrire et interpreter les différentes deformations de ce dernier, Erwin Schrödinger proposa une équation aux dérivée partielles dont l'état du système est décrit par une fonction d'onde de la mécanique hamiltonienne. Il sera dans ce chapitre d'introduire de prime à bord l'expérience de Rutherford relative à la découverte du noyau atomique. Par la suite, nous détaillons certains concepts essentiels sur les modèles nucléaires qui ont été utilisés pour comparer expérience et théorie. Dans la même continuité, une attention particulière est consacrée sur l'équation de Schrödinger en ressortant brièvement les notions de fonction d'onde, densité de probabilité et puits de potentiel. Le concept de transition électrique sera également détaillé et enfin les caractéristiques des forces nucléaires ainsi que ses différents aspects énergétiques mis en jeu dans le noyau seront mis en exergue.

I.2 Expérience de Rutherford

L'expérience de Rutherford, également connu sous le nom d'expérience de la feuille d'or, menée en 1909 par Hans Geiger et Ernest Marsden sous la direction d'Ernest Rutherford, montra que la partie chargée positivement de la matière est concentrée en un espace de petit volume

(maintenant appelé noyau atomique). Antérieurement à cette expérience, la matière était vue comme constituée d'atomes eux-mêmes faits de deux parties chargées électriquement de façons opposées, la partie chargée négativement pouvant être arrachée à l'atome (rayons cathodiques). Ainsi, l'atome était représenté comme « un pudding aux prunes » : « une pâte » positive avec des inclusions négatives (Modèle de Thomson). L'expérience de Rutherford montra qu'en réalité le noyau chargé positivement est de taille très petite devant le nuage électronique qui l'entoure, chargé négativement.

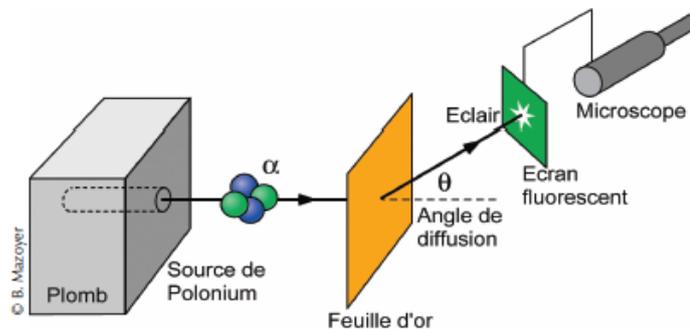


FIGURE 1 – Schéma de principe de l'expérience de Geiger, Marsden et Rutherford [2].

Pour rendre compte de tous les phénomènes auxquels ils ont accès, les physiciens ont besoin de ne faire intervenir que quatre forces, qu'ils jugent fondamentales .

- La gravitation, bien sûr, identifiée par Isaac Newton il y a plus de trois siècles ;
- l'interaction électromagnétique, identifiée en tant que telle par James Clerk Maxwell dans la seconde moitié du *XIX^e* siècle, et qui rend compte de la cohésion de la matière à notre échelle ;
- l'interaction nucléaire faible, découverte dans les années 1930, qui gère certains processus radioactifs, notamment la radioactivité bêta ;
- l'interaction nucléaire forte découverte à peu près au même moment que l'interaction nucléaire faible qui lie très solidement entre eux les constituants des noyaux atomiques.

TABLE 1 – Les quatre interactions fondamentales de la nature ainsi que les radioactivités qu'elles engendrent. Les intensités des interactions sont calculées pour deux protons dans le noyau atomique [39].

interaction	Forte	Electromagnetique	Faible	Gravitation
Année de la première modélisation	1935	1873	1933	1687
Médiateur	gluons	photon (γ)	W^\pm, Z^0	Graviton
Portée (m)	$\lesssim 10^{-15}$	∞	10^{-18}	∞
Intensités relatives	1	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-6}$	5×10^{-40}
Radioactivités	fission	$\gamma, 2\gamma$	β^+, β^-	

I.3 Le noyau atomique

Le noyau atomique a été découvert lors des expériences de Geiger et Mardsen au sein de l'équipe de Rutherford, qui en donna l'interprétation correcte en 1911 : des particules alphas provenant d'une source radioactive collimatée sont diffusées sur une feuille d'or. L'observation d'angles de diffusion allant jusqu'à 180° met alors en évidence un système ultra-dense au coeur de l'atome. Le noyau atomique est un système de nucléons (les neutrons et les protons, fermions de spin $1/2$) soumis à une interaction attractive (mais à coeur dur) : l'interaction forte. En première approche le volume du noyau est donc proportionnel au nombre A (le nombre de masse) de nucléons. Par conséquent son rayon s'écrit [38]

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad (\text{I.1})$$

avec $r_0 \simeq 1.2 \text{ fm}$ (où $1 \text{ fm} \equiv 10^{-15} \text{ m}$ est le fermi, ou encore femtomètre). R varie donc entre 1 fm pour les noyaux les plus légers à $\sim 10 \text{ fm}$ pour les noyaux les plus lourds ($A \lesssim 300$).

Il est à noter que, Les protons sont aussi soumis à l'interaction électromagnétique (répulsive) mais celle ci est environ deux ordres de grandeur moins intense que l'interaction forte (Table 1). Elle rivalise donc avec l'interaction forte surtout pour les noyaux comportants environ une centaine de protons (noyaux lourds).

Les nucléons du noyau étant des fermions confinés dans un puits de potentiel moyen résultant de leurs interactions mutuelles (modèle du champ moyen), leur énergies possibles sont discrétisées (on peut se référer, en première approximation, aux solutions du puits de potentiel infini ou de l'oscillateur harmonique en physique quantique). Il existe donc des nombres particuliers de neu-

trons ou de protons correspondant à une fermeture de couche nucléonique, à l'instar des couches électroniques dans les atomes. Ces nombres (dénommés "magiques" en physique nucléaire) sont 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 [38].

I.3.1 Caractéristiques et différents états du noyau

Dans le noyau de l'atome se trouvent les protons (chargés positivement) et les neutrons (non chargés), tandis que les électrons (chargés négativement) sont localisés autour du noyau. Son nombre de protons ou numéro atomique est noté Z . L'atome étant neutre il possède autant d'électrons que de protons. Ainsi le numéro atomique détermine les propriétés chimiques de l'atome. À chaque valeur de Z correspond un nom d'atome, un élément chimique. Ainsi, l'hydrogène possède 1 proton, tandis que le carbone en possède 6. Le nombre de neutrons au sein du noyau est désigné N . Le nombre de masse A est la somme de $Z + N$. Pour un atome Z donné, on peut compter plusieurs isotopes, en fonction du nombre de neutrons. Par ailleurs, un noyau d'atome est dit [39] :

- **lié** lorsque la cohésion des protons et des neutrons est assurée. Plus leur énergie de cohésion est élevée, plus il faudra fournir d'énergie pour séparer les constituants du noyau. Les noyaux liés peuvent être stables ou instables.

- **stable** lorsqu'il ne se désintègre pas spontanément en un autre noyau. La majorité des noyaux que l'on trouve sur Terre sont stables.

- **instable** ou **radioactif** lorsqu'il tend à se transformer spontanément en un autre noyau. On appelle cette transformation **désintégration radioactive**

- **excité** lorsque, stable ou instable, il a acquis un surplus d'énergie. Le noyau peut vibrer ou tourner sur lui même et/ou dissiper cette énergie excédentaire par émission d'une particule ou d'un photon.

I.3.2 Les noyaux et leurs formes

Dès les origines de la physique nucléaire, devant la complexité d'un système composé de N particules en interaction, les physiciens imaginent des modèles visant à donner une description simple mais suffisamment réaliste du noyau. Depuis les années 60, les physiciens constatent que le noyau des atomes peut prendre les formes les plus inattendues. La forme d'un noyau correspond à la zone dans laquelle ses constituants élémentaires (nucléons) peuvent se trouver. En effet

dans les années 1930 une attention particulière est consacrée à la synthèse des nouvelles formes d'atome dites noyaux exotiques situés loin de la vallée de stabilité ainsi qu'à la compréhension de la structure des noyaux super-lourds. En effet, à quelques enclaves de la vallée de stabilité, la théorie prévoit l'existence d'une série de noyaux comportant plus de 110 protons dont la durée de vie serait relativement élevée. Cette relative stabilité de ces noyaux va à l'encontre de la force de répulsion coulombienne qui tend à faire disloquer un édifice composé d'un grand nombre de charges. Certaines combinaisons particulières de protons et de neutrons entraînent des noyaux ayant une énergie de liaison très élevée. Les physiciens les appellent les noyaux magiques qui ont une forme sphérique et dont les couches sont complètement remplies. La plupart des noyaux ont des couches partiellement remplies et préfèrent être déformés. Les formes de noyaux les plus couramment rencontrés sont aplaties (oblates) et allongés (prolates) et peuvent changer d'un noyau à l'autre. En outre, il est possible pour un noyau de changer de forme en fonction de son énergie d'excitation. D'après les lois de la mécanique quantique, le noyau atomique peut se trouver à la fois dans un état allongé et aplati [40].

I.4 Énergie de liaison et énergie de séparation d'un noyau

I.4.1 Énergie de liaison d'un noyau

On définit l'énergie de liaison B d'un noyau de masse M comportant N neutrons et Z protons ($N+Z=A$) comme

$$Mc^2 = Nm_n c^2 + Zm_p c^2 - B, \quad (\text{I.2})$$

où $m_n c^2 = 940 \text{ MeV}$ et $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$ ($1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$) sont les énergies de masse respectives du neutron et du proton. $B > 0$ correspond donc à un noyau lié. Le noyau concentre plus de 99,9% de la masse de l'atome puisque l'énergie de masse d'un électron est $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$. Comme il y a un facteur de l'ordre de 10^{-5} entre la taille du noyau (qq fm) et celle de son atome (qq Å), la densité du noyau est donc de l'ordre de $10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ ce qui est très élevé par rapport à la matière ordinaire mais du même ordre que celle d'une étoile à neutrons (qui peut être modélisée au premier ordre comme un noyau géant de 10 km de rayon en équilibre avec l'interaction gravitationnelle).

I.4.2 Énergie de séparation d'un noyau

On définit l'énergie de séparation un nucléon d'un noyau à A nucléons comme [41,42]

$$S_n = B(A) - B(A - 1) = [m_n + M(A - 1)]c^2 - M(A)c^2, \quad (\text{I.3})$$

où l'indice n indique ici indifféremment un neutron ou un proton. S_n peut-être interprétée comme l'énergie nécessaire pour arracher un nucléon au noyau en comportant A . Il faut noter que les nucléons sont sujets à l'appariement nucléaire ce qui rend le noyau superfluide, en totale analogie avec la supraconductivité : des paires de nucléons de projections de moment cinétique total opposées se lient sous forme de paire de Cooper. La conséquence est qu'un noyau avec un nombre pair de neutron ou de proton a une énergie de séparation S_n plus importante (de l'ordre de 1 MeV, qui correspond à l'énergie de liaison de paire) qu'un noyau voisin avec un nombre impair respectif.

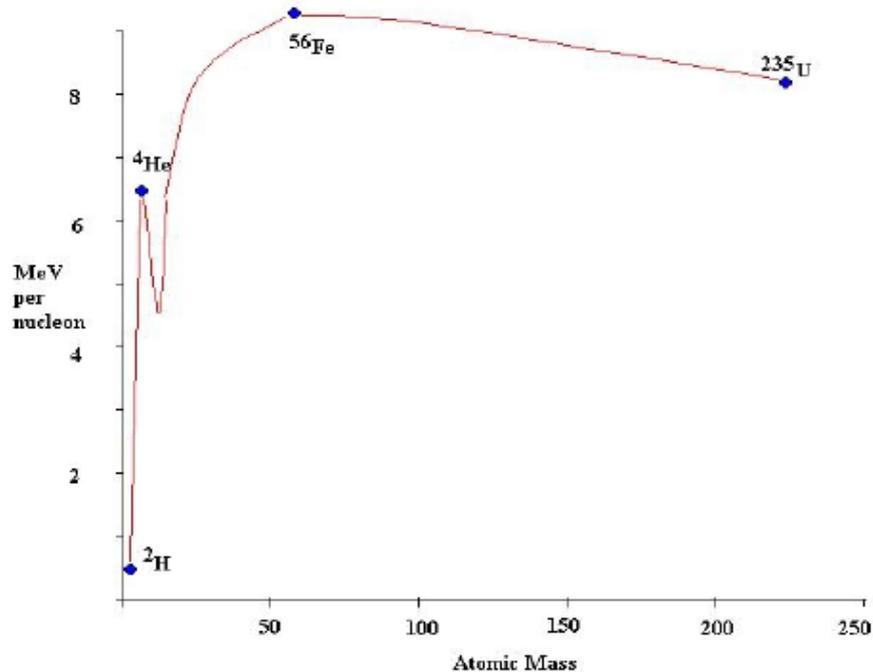


FIGURE 2 – Énergie de liaison par nucléon [42]

I.4.3 Défaut de masse atomique

Le défaut de masse atomique représente la différence entre la somme des masses des nucléons séparés au repos (sans interaction) par la masse d'un nucléide au repos. À cet effet, il correspond à la transformation d'une partie de la masse des nucléons en énergie de liaison des nucléons suivant la relation d'Einstein :

$$E = mc^2, \quad (\text{I.4})$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide dont la valeur approchée est $3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. De cette relation, il est pratique d'exprimer l'unité de la masse en MeV/c^2 même si le MeV est une unité d'énergie. La masse d'un noyau ${}^A_Z X$ est inférieure à la somme des masses de ses nucléons pris individuellement :

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n = Zm_p + Nm_n. \quad (\text{I.5})$$

Il vient donc que le défaut de masse atomique noté $\Delta(A, Z)$ est donnée par la relation :

$$\Delta(A, Z) = Zm_p + Nm_n - M(A, Z). \quad (\text{I.6})$$

On adaptera les équivalences des ordres de grandeur à l'échelle atomique des différents constituants du noyau atomique afin de mieux étudier la stabilité des noyaux. Ainsi donc :

- Unité de masse atomique u : $1u = 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$
- Masse de l'électron : $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 5,4858 \times 10^{-4} u = 0,511 \text{ MeV}/c^2$
- Masse du proton : $m_p = 1,67264 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,007276 u = 938,28 \text{ MeV}/c^2$
- Masse du neutron : $m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,008665 u = 939,57 \text{ MeV}/c^2$

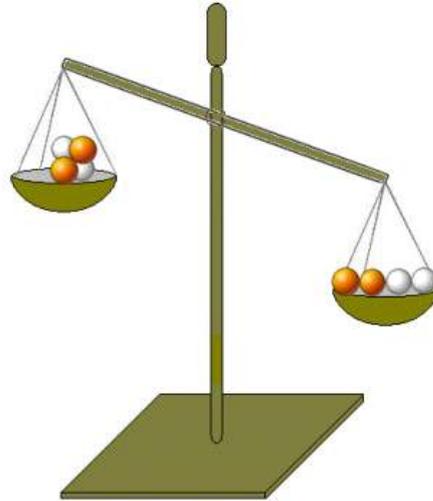


FIGURE 3 – Défaut de masse d'un noyau atomique [43].

I.4.4 Stabilité d'un noyau

On compte environ 300 noyaux stables sur l'ensemble des 7000 noyaux liés par interaction forte prédits par les modèles (environ 3000 ont été produits jusqu'à présent dans des accélérateurs). Plus de 95% des noyaux sont donc radioactifs. La figure 4 montre la carte des noyaux selon leur mode de radioactivité, les noyaux stables étant représentés par des carrés noirs.

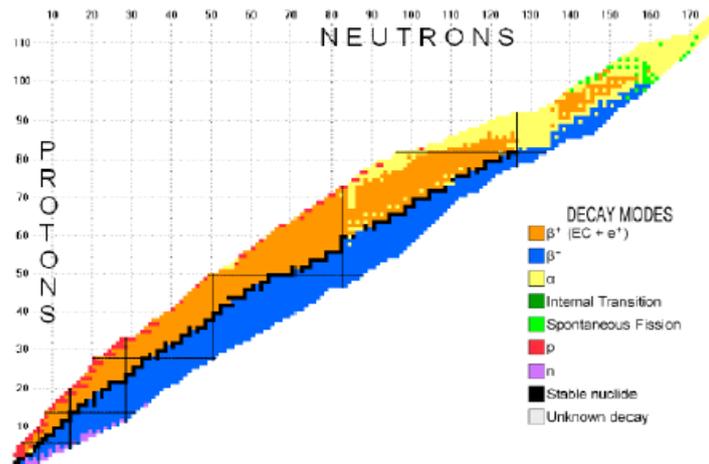


FIGURE 4 – Carte des noyaux expérimentalement connus en fonction de leur mode de désintégration [42].

I.5 L'équation de Schrödinger

I.5.1 Particule libre

Schrödinger (physicien autrichien 1887-1961) a établi en 1927 une équation différentielle linéaire permettant de déterminer de manière générale la fonction d'onde associée à une particule. Considérons tout d'abord le cas d'une particule libre en mouvement unidirectionnel ayant une impulsion p bien définie, dont la fonction d'onde est celle de de Broglie :[44]

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)}. \quad (\text{I.7})$$

Considérons alors les dérivées suivantes :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \quad (\text{I.8})$$

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m} \psi. \quad (\text{I.9})$$

Compte tenu de la relation entre l'énergie et l'impulsion pour une particule libre non relativiste, on en déduit que la fonction d'onde vérifie l'équation différentielle suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (\text{I.10})$$

Par généralisation, cette équation permet de déterminer la fonction d'onde d'une particule matérielle non relativiste en mouvement libre (non soumis à une action extérieure). Cette équation ressemble à l'équation des ondes (équation de d'Alembert) mais la dérivée temporelle est du premier ordre. Elle ressemble aussi à l'équation de diffusion mais la dérivée temporelle est multipliée par i , ce qui permet d'obtenir des solutions ondulatoires. L'équation obtenue est l'équation linéaire la plus simple qui conduit aux ondes de Broglie pour une particule libre. En dérivant

deux fois par rapport au temps, on obtient [44] :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{E}{\hbar^2} \psi. \quad (\text{I.11})$$

On voit qu'il n'est pas possible de construire une équation linéaire avec une dérivée seconde. La nécessité d'une équation linéaire est liée au principe de superposition, qui sera expliqué plus loin.

I.5.2 Particule dans un potentiel

L'équation de Schrödinger généralise l'équation précédente à une particule soumise à un potentiel $V(x)$. Le potentiel correspond à l'énergie potentielle en mécanique classique, reliée à la force par :

$$F_x = \frac{-dV}{dx}. \quad (\text{I.12})$$

La théorie de Schrödinger conserve la notion d'énergie potentielle utilisée en mécanique classique (mais pas celle de force). En mécanique quantique, il est d'usage de noter V le potentiel, mais il faut ne pas le confondre avec le potentiel électrique, qui est une énergie potentielle par unité de charge. Voici l'équation de Schrödinger à une dimension, qui s'applique à une particule non relativiste [44] :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi. \quad (\text{I.13})$$

Le terme ajouté est l'énergie potentielle multipliée par la fonction d'onde. On vérifie facilement l'homogénéité de ce terme avec les deux autres. L'équation de Schrödinger se résout sur un intervalle $x \in (a; b)$, dont les bornes sont éventuellement à l'infini. Il faut disposer de conditions limites sur ces bords et d'une condition initiale.

I.5.3 Puits quantique

Un puits quantique est une zone de l'espace dans laquelle le potentiel ressenti par une particule quantique atteint un minimum. Il s'agit d'un puits de potentiel dont les petites dimensions entraînent une différence entre les prédictions de la mécanique classique et celles de la mécanique quantique. L'équation de Schrödinger prévoit en effet que l'énergie de la particule évoluant dans un tel puits est quantifiée. L'étude de puits quantiques (puits carré, puits harmonique, couplage entre deux puits voisins...) fait partie intégrante de formes variées de la mécanique quantique [45].

I.5.4 États stationnaires

Comme l'équation des ondes, l'équation de Schrödinger est souvent résolue par une méthode spectrale, qui consiste à rechercher des solutions de la forme suivante :

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-i\omega t \phi(x)}. \quad (\text{I.14})$$

L'état de la particule représenté par cette solution, dont les variables temps et espace sont séparées, est appelée en mécanique quantique état stationnaire. Il faut remarquer qu'il y a une discordance avec le vocabulaire utilisé en physique ondulatoire, où une onde stationnaire est un type plus particulier d'onde. La solution stationnaire de la mécanique quantique ondulatoire est en fait l'équivalent de l'onde sinusoïdale de la physique ondulatoire classique.

En reportant l'équation I.14 dans l'équation de Schrödinger, on obtient [44] :

$$\hbar\omega\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V(x)\phi. \quad (\text{I.15})$$

La relation de Planck-Einstein permet de définir l'énergie de la particule par :

$$E = \hbar\omega. \quad (\text{I.16})$$

On obtient alors l'équation suivante, appelée équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$E\phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V(x)\phi, \quad (\text{I.17})$$

qu'on écrira sous la forme :

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \phi = 0. \quad (\text{I.18})$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps est très importante en mécanique quantique, car l'énergie E est souvent la seule grandeur observable. Par exemple, la spectroscopie de la lumière (visible et UV) permet d'accéder aux niveaux d'énergie des électrons dans les atomes. Cette équation a permis à Schrödinger d'expliquer ces niveaux d'énergie, ce qui a constitué un des premiers succès de la mécanique quantique.

I.6 Interprétation probabiliste

I.6.1 Fonction d'onde et densité de probabilité

L'équation de Schrödinger a permis à ce dernier d'expliquer les niveaux d'énergie des électrons dans les atomes. Il restait cependant à donner une interprétation physique à la fonction d'onde dans le cas d'une particule libre, par exemple dans une expérience de diffraction par un cristal. La question se pose aussi pour l'expérience plus récente de diffraction par une bi-fente. Cette interprétation a été donnée par BORN (physicien allemand 1882-1970). On se place dans le cas tridimensionnel où la fonction d'onde dépend des trois coordonnées dans l'espace et du temps [44] :

$$\psi(x, y, z, t). \quad (\text{I.19})$$

Supposons que l'on dispose d'un capteur permettant de détecter la particule au voisinage d'un point de l'espace, par exemple le capteur dans l'expérience de Davisson et Germer. Suivant la po-

sition du détecteur, on détecte en général un nombre variable d'impacts pour une durée donnée. Pour certaines positions (correspondant aux interférences constructives), le nombre d'impacts est très élevé alors qu'il est très faible pour d'autres positions.

La détection d'une particule par le capteur à un instant t est un phénomène aléatoire : il n'est pas possible de prévoir si une particule parvient ou pas sur le capteur, même si sa condition initiale de la particule est connue. Il est en revanche possible de définir une loi de probabilité pour la détection des particules. Ce caractère aléatoire des résultats de mesure est fondamental en mécanique quantique. En mécanique classique (mécanique de Newton), la connaissance de la condition initiale d'une particule suffit pour savoir si elle parvient ou pas dans la fenêtre d'un capteur. Ce n'est pas le cas en physique quantique, et il faut bien comprendre que ce caractère aléatoire ne vient pas d'une variation aléatoire de la condition initiale, mais d'une propriété fondamentale du mouvement des particules : deux particules qui sont exactement dans la même condition initiale conduiront en général à deux résultats différents, c'est-à-dire qu'une particule peut être détecté par le capteur alors que l'autre ne l'est pas.

La probabilité de détecter la particule en (x, y, z) à (dx, dy, dz) près s'écrit :

$$\rho(x, y, z, t)dx dy dz, \quad (\text{I.20})$$

où $\rho(x, y, z, t)$ est la densité de probabilité de détection de la particule. Elle est aussi appelée densité de probabilité de présence, bien que la notion de présence de la particule en un point n'ait pas de sens en dehors de sa détection par un capteur. La densité de probabilité de détection de la particule est égale au module du carré de la fonction d'onde :

$$\rho(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t)\psi^*(x, y, z, t) = |\psi(x, y, z, t)|^2, \quad (\text{I.21})$$

pour cette raison, la fonction d'onde constitue une amplitude de probabilité. Cette relation entre la fonction d'onde et la densité de probabilité est similaire à la relation entre la fonction d'onde et l'intensité en optique. Cependant, la fonction d'onde de la physique quantique est par nature une fonction à valeurs complexes, dont la partie réelle n'a aucune signification particulière.

I.6.2 Normalisation de la fonction d'onde

La fonction d'onde est une amplitude de probabilité, dont le module au carré constitue une densité de probabilité de détection des particules (ou densité de probabilité de présence). La fonction d'onde n'est pas directement accessible expérimentalement [44]. C'est son module au carré qui est accessible, par une répétition d'émission de particules et une étude statistique des points d'impact sur un détecteur. On reprend le cas d'une particule ayant un mouvement unidirectionnel. Dans ce cas, la fonction d'onde dépend de x et de t . On suppose de plus que l'état est stationnaire : la densité de probabilité ne dépend pas du temps. La probabilité de détecter la particule entre x et $x + dx$ est :

$$\rho(x)dx = \psi(x,t)\psi^*(x,t) = |\psi|^2 dx. \quad (\text{I.22})$$

Si la particule est confinée dans l'intervalle (a, b) , la somme des probabilités sur cet intervalle doit être égale à 1 :

$$\int_a^b |\psi|^2 dx = 1. \quad (\text{I.23})$$

Cette équation est la condition de normalisation de la fonction d'onde. Si la particule n'est pas confinée, les bornes de l'intervalle sont infinies et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1. \quad (\text{I.24})$$

I.6.3 Incertitude d'Eisenberg

Considérons un paquet d'ondes à une dimension (une seule variable d'espace x) et l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde. Pour cela, on représente, à un instant donné, le module au carré de la fonction d'onde en fonction de x . Pour un paquet d'ondes gaussien, cette courbe a une forme gaussienne (à l'instant $t = 0$). On représente parallèlement le module au carré du spectre en impulsion, qui est une fonction d'onde associée à la variable impulsion,

mais qui ne dépend pas du temps[44].

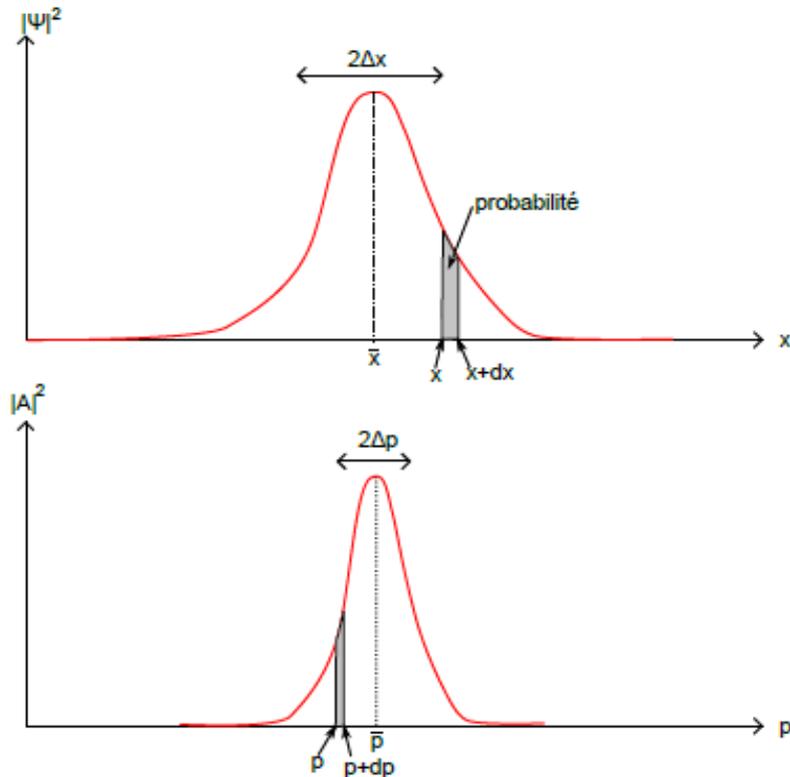


FIGURE 5 – Courbe des densités de probabilité en fonction de la position [44]

La probabilité de détecter la particule dans l'intervalle $(x, x + dx)$ est représentée par l'aire hachurée. On définit de manière analogue une probabilité de mesurer l'impulsion dans l'intervalle $(p, p + dp)$. Pour une distribution gaussienne, la valeur la plus probable coïncide avec la valeur moyenne. Si l'on mesure la position de la particule (au même instant) pour un grand nombre d'expériences réalisées dans les mêmes conditions, la moyenne des valeurs obtenues est \bar{x} .

Supposons que l'on dispose d'un capteur permettant de mesurer la position x (à l'instant t) et d'un capteur permettant de mesurer l'impulsion p [44]. L'expérience est répétée N fois (N très grand), avec à chaque fois une particule préparée dans les mêmes conditions, pour obtenir N mesures de x puis elle est répétée à nouveau N fois pour obtenir N valeurs de p . Les mesures de la position et de l'impulsion doivent être faites dans des expériences distinctes (mais avec la même condition initiale de préparation de la particule) car la mesure de l'une place la particule dans un état très particulier, qui n'est plus celui que l'on veut étudier. Le résultat de la mesure de position est imprévisible : il s'agit d'une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée

par $|\psi(x, t)|^2$. Il est important de bien comprendre que la dispersion des valeurs de x obtenues pour ces N mesures est due au caractère fondamentalement imprévisible de l'évolution de la particule et pas à une incertitude expérimentale du capteur ou du processus de préparation de la particule. Dans toute la discussion qui suit, les incertitudes expérimentales (au sens classique) sont supposées négligeables. Les valeurs de l'impulsion, qui sont également imprévisibles, sont réparties selon la densité de probabilité définie par $|A|^2$. Chaque mesure (soit de la position, soit de l'impulsion) donne une valeur bien précise puisqu'on néglige l'incertitude expérimentale.

L'impulsion moyenne obtenue est p . Les densités de probabilité en position et en impulsion du paquet d'ondes permettent de définir des écarts-types (racine carré de la variance) [44] :

$$\Delta x = \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}, \quad (\text{I.25})$$

$$\Delta p = \sqrt{\bar{p}^2 - \bar{p}^2}. \quad (\text{I.26})$$

Pour une densité de probabilité gaussienne, le double de l'écart-type correspond à une probabilité de 68%. La largeur spatiale du paquet est donc $2\Delta x$ et la largeur du spectre en impulsion est $2\Delta p$, si l'on définit la largeur comme l'intervalle donnant 68% des résultats

L'écart-type représente la dispersion des valeurs mesurées autour de la valeur moyenne. En mécanique quantique, cette dispersion vient du caractère probabiliste des prévisions qui peuvent être faites à partir de la fonction d'onde, et pas de l'imprécision des appareils de mesure. On suppose ici que l'incertitude des appareils de mesure est négligeable par rapport à l'écart-type. L'écart-type Δx est aussi appelé indétermination de la position et Δp est l'indétermination de l'impulsion.

Le paquet d'ondes a une largeur spatiale d'autant plus grande que son spectre en impulsion est étroit. Plus précisément, les deux écarts-types vérifient l'inégalité suivante, établie par Heisenberg (physicien allemand 1901-1976) :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{I.27})$$

Cette relation est appelée inégalité spatiale d'Heisenberg, ou encore relation d'indétermination d'Heisenberg. On rencontre aussi l'appellation relation d'incertitude, qu'il faudrait éviter car les indéterminations ne sont pas des incertitudes au sens classique du terme d'incertitudes expérimentales liées la précision de la mesure.

I.7 Description des modèles nucléaires

La connaissance de la structure des noyaux atomiques, ou structure nucléaire est une question ouverte après un siècle de recherches en physique nucléaire. La force nucléaire entre nucléons (protons et neutrons) qui composent le noyau, est une force résiduelle de l'interaction nucléaire forte qui lie les quarks dans le nucléon. L'étude de la structure du noyau fait intervenir deux grandes familles de modèles analytiques qui décrivent et interprètent les propriétés nucléaires des noyaux. à savoir [46] :

- les modèles macroscopiques ou modèles collectifs décrivant le mouvement d'ensemble des nucléons à l'exemple du modèle de la goutte liquide.
- les modèles microscopiques ou d'excitation des particules individuelles qui prennent en compte le mouvement de chaque nucléon dans le noyau. Par exemple, le modèle en couches.

I.7.1 Modèle de la goutte liquide

L'un des premiers modèles du noyau, proposé par Von Weizsäcker en 1935, est celui de la goutte liquide [47,48]. Dans ce modèle, le noyau est assimilé à un fluide (quantique) constitué de nucléons qui sont confinés dans un volume fini de l'espace par l'interaction forte. Il permet une approche phénoménologique du noyau [39], par opposition aux approches microscopiques reposant sur l'équation de Schrödinger, qui sont difficilement solubles. Cependant, dès les années 1930, les physiciens ont noté qu'en première approximation, il avait un comportement collectif presque classique, semblable à celui d'une goutte chargée électriquement. Le modèle de la goutte liquide postule l'expression suivante de l'énergie de liaison d'un noyau possédant $A = N + Z$ nucléons [49] :

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \delta(A), \quad (\text{I.28})$$

où a_v , a_s , a_c et a_a sont des constantes déterminées à l'aide des valeurs expérimentales des masses connues des noyaux. L'équilibre de cette goutte est le résultat de plusieurs contributions :

- une contribution attractive $a_v A$ proportionnelle au volume du noyau et caractérise l'effet de l'interaction forte attractive de courte portée entre les nucléons. Ici chaque nucléon interagit avec ses voisins via l'interaction forte. la somme de toutes ces interactions permet au noyau d'exister. On peut montrer que ce terme est proportionnel au volume du noyau [39] : c'est donc le terme dit de volume. On a :

$$a_v \approx 15,41 \text{ MeV}. \quad (\text{I.29})$$

- Une contribution répulsive $a_s A^{2/3}$ proportionnelle à la surface du noyau et caractérise l'effet correctif (non-négligeable) du fait que les nucléons en surface possèdent moins de nucléons voisins. Ces deux termes justifient l'analogie avec une goutte liquide : ainsi le système cherche à minimiser sa surface. Les trois termes suivants sont spécifiques au noyau [39]. La correction apportée est de :

$$a_s \approx 16,87 \text{ MeV}. \quad (\text{I.30})$$

- Une deuxième contribution répulsive coulombienne représente l'effet répulsif de l'interaction coulombienne entre les protons. Il peut se déduire de l'énergie potentielle d'une sphère uniformément chargée où l'on a fait l'approximation. En effet, les neutrons sont des particules neutres, mais les protons ont une charge électrique positive et ont donc tendance à se repousser mutuellement. Cet effet diminue également l'énergie de liaison [39]. Ce terme a une valeur approximative égale à :

$$a_c \approx 0,70 \text{ MeV}. \quad (\text{I.31})$$

- Une troisième contribution répulsive noté $a_a \frac{(N-Z)^2}{A}$ inversement proportionnelle à A due à la coexistence au sein du noyau de deux populations de particules (neutrons et protons), donc chacune a tendance à se disperser. Il reflète que pour A fixé, le noyau minimise son énergie

potentielle d'interaction forte pour $N = Z$. cette contribution a pour valeur :

$$a_a \approx 22,44 \text{ MeV}. \quad (\text{I.32})$$

• L'effet de l'appariement nucléaire δ : $\delta > 0$ pour un noyau ayant N et Z pairs, $\delta = 0$ pour un noyau ayant soit N soit Z impair, et $\delta < 0$ pour un noyau ayant N et Z impairs. Lorsqu'il n'est pas nul, la valeur absolue typique de δ est de 1-2 MeV, correspondant à l'énergie de liaison d'une paire de nucléons identiques. Le modèle de la goutte liquide permet d'étudier la stabilité du noyau vis à vis des différentes radioactivités, mais aussi de la fission et de la fusion [39]. D'une manière générale on a pour l'effet d'appariement nucléaire δ :

$$\delta(A) = \begin{cases} +\frac{1}{A^{1/2}}, & \text{pour } Z \text{ et } N \text{ pairs} \\ 0, & \text{pour } Z \text{ ou } N \text{ impair} \\ -\frac{1}{A^{1/2}}, & \text{pour } Z \text{ et } N \text{ impairs} \end{cases} \quad (\text{I.33})$$

1.7.2 Modèle en couches

En physique nucléaire, le modèle en couches est un modèle du noyau atomique fondé sur le principe d'exclusion de Pauli pour décrire la structure nucléaire sous l'angle des niveaux d'énergie. Ce modèle a été développé en 1949 à la suite des travaux indépendants de plusieurs physiciens, notamment Eugene Paul Wigner, Maria Goeppert Mayer et J. Hans D. Jensen. Dans ce modèle, les couches nucléaires sont constituées de sous-couches redistribuées par couplage spin-orbite en niveaux d'énergie susceptibles d'expliquer l'origine des nombres magiques observés expérimentalement comme correspondant au nombre de nucléons saturant ces niveaux d'énergie, ce qui conférerait aux nucléides correspondants une stabilité accrue par rapport à la formule de Weizsäcker déduite du modèle de la goutte liquide. En accord avec le principe de Pauli, seul un type de nucléon peut être dans un état quantique défini par les nombres quantiques n, l, j et m représentant respectivement le nombre quantique principal définissant le nombre de noeuds dans la partie radiale de la fonction d'onde, nombre quantique azimutal, le nombre quantique associé à la résultante du couplage entre le moment angulaire orbital l et le moment angulaire de spin $s = 1/2$ et $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ et enfin le nombre quantique magnétique

$$-l \leq m \leq l.$$

I.7.3 Modèle de Nilsson : modèle pour les noyaux déformés

Le modèle en couches ne permet pas de reproduire la stabilité de noyaux déformés ayant un nombre de nucléons différent de nombres magiques. Cette imperfection du modèle en couches a conduit S.G. Nilsson, en 1955, à développer un modèle en couches avec déformation, le modèle en couches déformé qui décrit avec un grand succès les noyaux non sphériques. En effet, Nilsson a modifié le hamiltonien du modèle en couches sphérique pour expliquer les structures microscopiques des noyaux déformés. Partant d'un Hamiltonien utilisant le potentiel central de l'oscillateur harmonique isotrope [50] :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \quad (\text{I.34})$$

Nilsson et al. [50] ont remplacé ce potentiel harmonique isotrope par un potentiel harmonique à symétrie axiale, pour tenir compte de la déformation.

$$\hat{H}_{intr} = -\sum_i \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_i^2 + \frac{1}{2}M\sum_i [\omega_x^2 (x_i^2 + y_i^2) + \omega_z^2 z_i^2], \quad (\text{I.35})$$

où $\omega_{x,y,z}$ sont les fréquences d'oscillateur dans les directions x, y, et z. On a $\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_0^2$. Les fréquences d'oscillation s'expriment en fonction des paramètres de déformation δ par :

$$\begin{aligned} (\omega_x + \omega_x) &= \omega_\delta \approx \omega_0 \left[1 + \frac{1}{3}\delta \right], \\ \omega_z &\approx \omega_0 \left[1 - \frac{2}{3}\delta \right], \\ \delta &= \frac{\Delta R}{R_0}, \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

où R_0 est le rayon du noyau en le supposant sphérique. Tout comme dans le modèle en couches sphérique, on ajoute les termes de spin-orbite $Cl_i \cdot s_i$ et de diffusion surfacique Dl_i^2 à l'Hamiltonien H_0 , pour reproduire la dégénérescence des niveaux de différentes valeurs de l . Les noyaux déformés vont être décrits par l'Hamiltonien de Nilsson de la forme suivante :

$$\widehat{H}_{intr} = -\sum_i \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} M \sum_i [\omega_x^2 (x_i^2 + y_i^2) + \omega_z^2 z_i^2] + C \sum_i l_i \cdot s_i + D \sum_i l_i^2. \quad (\text{I.37})$$

Les constantes C et D ont des valeurs empiriques ajustées sur des données expérimentales, et sont différentes pour chaque couche principale. Ces constantes représentent des propriétés moyennes des interactions réelles nucléon-nucléon. Au-delà de ce comportement moyen, les propriétés de certains noyaux (par exemple les noyaux à nombre pair de nucléon d'une ou des deux espèces) ont nécessité l'inclusion des interactions résiduelles, comme l'appariement.

Dans le modèle de Nilsson, les orbitales des nucléons sont fonction de la déformation axiale du noyau. Il permet bien sûr de retrouver à déformation nulle (noyaux magiques sphériques) la succession des orbitales du modèle en couches historique.

La supposition de l'invariance de l'hamiltonien H_{intr} par rotation et par réflexion permet la caractérisation des états propres du H_{intr} par les nombres quantiques de Nilsson.

La résolution de l'équation de Schrödinger dans le cas du potentiel harmonique modifié symétrie axiale, en supposant l'invariance de l'Hamiltonien H_{intr} par rotation et par réflexion, nous permettra d'obtenir les états propres de l'hamiltonien de Nilsson correspondant aux états intrinsèques des bandes de rotation :

$$E(N, n_z, \delta) = \hbar\omega_x (N - n_z + 1) + \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{I.38})$$

Ces états propres sont exprimés en fonction des états propres de l'oscillateur harmonique anisotrope, à l'aide des nombres dits de Nilsson $[N, n_z, \Lambda] \Omega$, qui sont présentés dans la figure 6.

1.7.4 Déformations dans le noyau

Dès les années 1930, avec la mesure des moments magnétiques et électriques, les preuves de l'existence de noyaux déformés commencent à apparaître. Cette déformation peut être associée à l'état fondamental pour les noyaux non-magiques, mais aussi aux états excités et/ou à haut moment angulaire. Le modèle de la goutte liquide sphérique n'est qu'une approximation pour le noyau : il faut tenir compte de la déformation [52].

Etant donné que le noyau est un système quantique, le volume ne peut pas être défini de

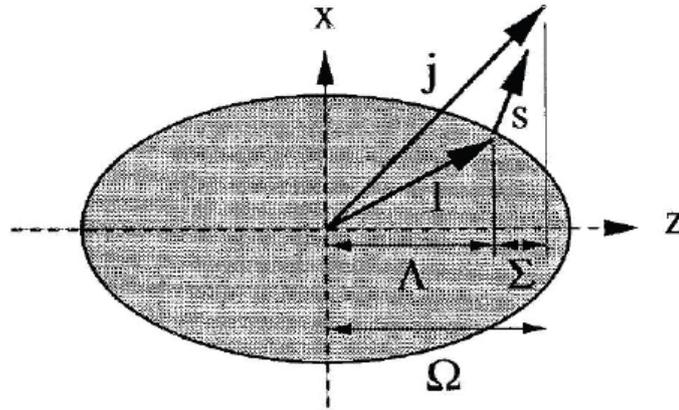


FIGURE 6 – Couplage d’une particule au coeur, et les nombres quantiques de Nilsson [51].

manière classique et, de ce fait, il n’y a pas de limites spatiales précises pour la distribution de masse. En première approximation, on peut considérer que la matière nucléaire est un ensemble compact.

I.7.5 Mode vibrationnel : paramétrisation de la surface nucléaire

Les états vibrationnels excités sont formés quand le noyau oscille autour de la forme sphérique d’équilibre. La forme des excitations peut-être représentée un développement en multipôles. Les oscillations quadripolaires représentent le mode vibrationnel nucléaire d’ordre plus bas. Les quantas d’énergie vibrationnelle sont appelées phonons.

Dans de nombreux cas, un noyau peut être considéré comme une goutte liquide. Nombre de propriétés peuvent être interprétées comme le résultat de la relation entre la tension de surface et l’énergie interne d’une goutte. Une telle approximation nous permet d’examiner les différents types d’excitations nucléaires issus du mouvement vibratoire. Afin de décrire les différentes vibrations de surface nucléaire accessibles aux noyaux, on peut paramétriser leur surface par des fonctions harmoniques sphériques :

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right), \quad (\text{I.39})$$

où $R(\theta, \varphi, t)$ est la distance entre le centre du noyau et sa surface dépendant de l’angle (θ, φ) à l’instant t . Le rayon d’équilibre R_0 correspond au rayon de la sphère ayant le même volume

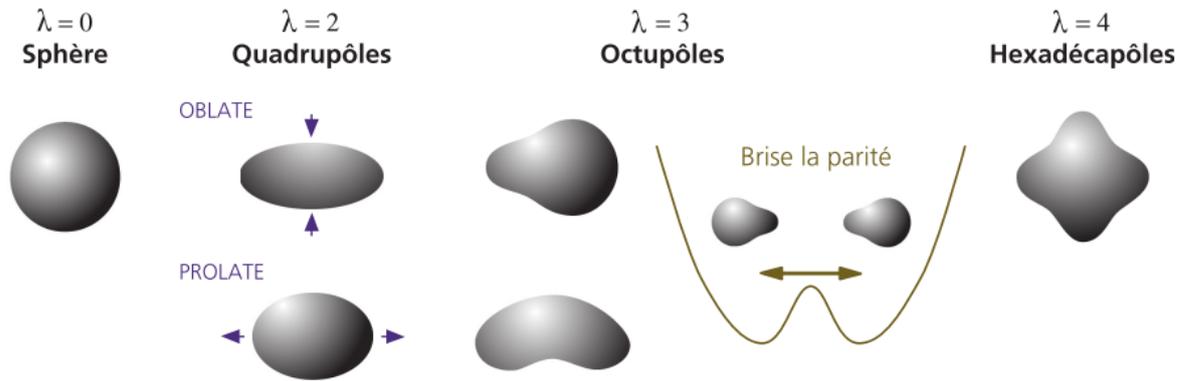


FIGURE 7 – Les différentes formes correspondant aux différents ordres multipolaires [53].

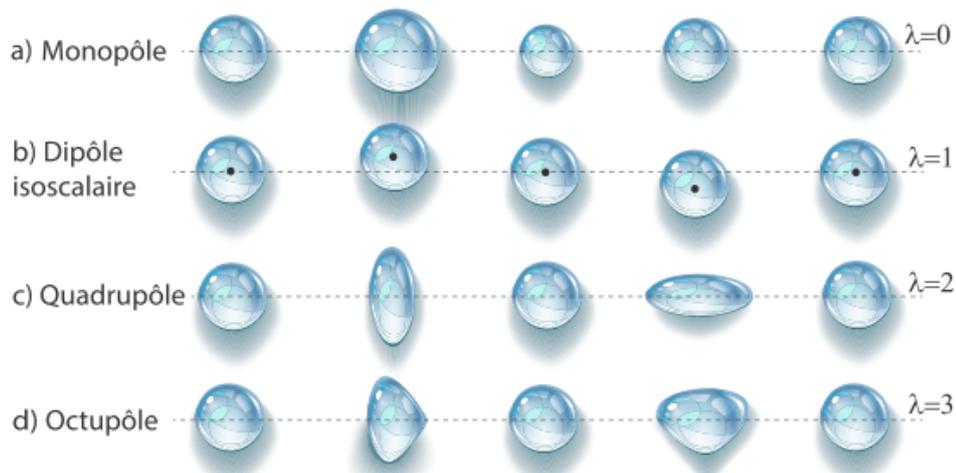


FIGURE 8 – Évolution en temps des modes vibratoires [54].

que le noyau déformé. Les amplitudes dépendantes du temps $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$ sont les paramètres de la forme du noyau et servent ainsi de coordonnées collectives. Ils décrivent les vibrations de surface nucléaire. $Y_{\lambda\mu}$ sont les harmoniques sphériques.

Le mode avec l'ordre $\lambda=0$ est dit vibration respiratoire. Il correspond au cas où un noyau acquiert une énergie d'excitation, et se met en oscillations autour de son état d'équilibre en conservant sa forme, comme il est illustré sur la figure 8. Ce type de vibration correspond à l'oscillation de densité de matière nucléaire. Comme la matière nucléaire est très faiblement compressible, les vibrations respiratoires dans les noyaux exigent beaucoup d'énergie. Cependant, dans la plupart des cas, l'énergie d'excitation des noyaux est trop faible pour compresser la matière nucléaire mais elle est suffisante pour la déformer et faire vibrer la forme du noyau. Les différents types de vibration de la forme des noyaux sont cités en dessous.

Le mode d'ordre $\lambda = 1$ correspond au déplacement du centre de masse, comme il est montré sur la figure 8. Un tel mode d'excitation ne doit pas être pris en compte dans les excitations nucléaires. Mais, si les protons et les neutrons se déplacent autour du centre de masse en sens opposé, alors nous avons un mode de type E1. Ce mode vibratoire s'appelle "La résonance géante" et il n'arrive que dans le cas d'excitation à haute énergie (8-20 MeV).

Le mode $\lambda = 2$ décrit l'oscillation quadripolaire qui est présenté sur la figure 8 et ce mode d'oscillation correspond aux excitations collectives les plus importantes de basse énergie du noyau. Ainsi, la vibration quadripolaire forme un multiplet d'états excités dont la dégénérescence est donnée par le nombre de phonons vibratoires apportés. Du coup, l'excitation $\lambda = 2$ est perue comme l'excitation d'un phonon qui porte deux unités de moment angulaire (unité \hbar). Le mode avec $\lambda = 3$ correspond au cas d'oscillation octupolaire, telle que présentée sur la figure 8. Dans le cas des isotopes pairs-pairs, la déformation octupolaire est le principal mode d'asymétrie et elle est souvent associées la bande de parité négative. Il faut noter que la forme d'équilibre d'un noyau peut varier rapidement avec son énergie d'excitation ou en ajoutant ou retirant un nucléon ou en augmentant le spin du noyau. Par exemple, un noyau peut être sphérique dans son état fondamental alors que l'excitation de particules peut conduire à une forme allongée ou aplatie. Les noyaux peuvent aussi présenter différentes déformations à des énergies d'excitations très similaires, ce phénomène s'appelle la coexistence de forme.

I.7.6 Mode rotationnel

Lors d'une réaction nucléaire, un noyau peut acquérir du moment angulaire, il peut donc entrer en vibration ou/et en rotation. Le mouvement rotationnel collectif peut être observé seulement dans les noyaux déformés (rotation autour d'un axe de symétrie n'est pas observable).

Le spectre d'énergie rotationnel suit la loi en $J(J + 1)$ où J c'est le spin de l'état nucléaire.

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\mathbf{J}} J(J + 1), \quad (\text{I.40})$$

avec \mathbf{J} le moment d'inertie effectif du noyau. La symétrie par réflexion du noyau limite la séquence des états rotationnels aux valeurs paires de moment angulaires $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots$. L'excitation de deux phonons aboutit à trois états excités de moment angulaire $0^+, 2^+$ et 4^+ (un tri-

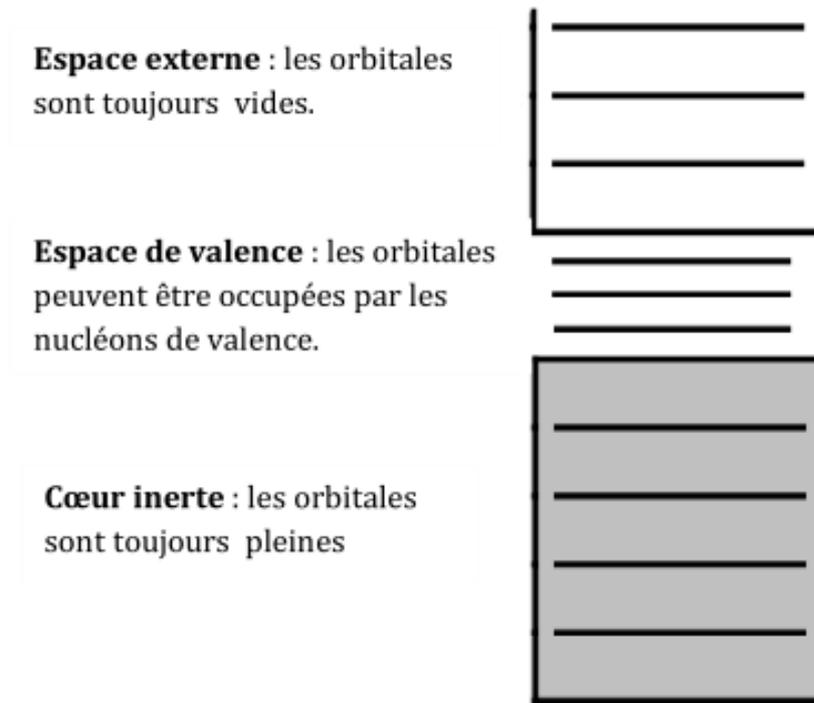


FIGURE 9 – Schéma de l'occupation des orbitales nucléaires dans le modèle en couches [51].

plet), tandis que l'excitation de trois phonons peut créer les états de spin 0^+ , 2^+ , 3^+ , 4^+ et 6^+ . La levée de dégénérescence de ces états s'interprète alors en termes d'interaction entre des phonons. Ainsi, la vibration quadripolaire conduit en général aux schémas de niveaux avec un rapport d'énergie entre les deux premiers niveaux excités 4_1^+ et 2_1^+ , $\frac{E(4_1^+)}{E(2_1^+)} = 2$ pour la vibration harmonique mais habituellement ce rapport varie entre 2 et 2.5 dans les situations réalistes. Dans la plupart des cas, les noyaux ont la déformation quadripolaire ($\lambda=2$) décrite par l'Eq.(I.39). Ainsi, il y a cinq paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$, $\mu=0, \pm 1, \pm 2$. Les paramètres de forme peuvent être exprimés par la transformation du système des coordonnées :

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = \sum_{\nu=-2}^2 \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} a_{\nu\mu'}^* D_{\mu\mu'}^{(\nu)}(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma). \quad (\text{I.41})$$

Les formes des noyaux sont définies par les valeurs de γ :

- $\gamma = 0^\circ$, l'axe de symétrie est le plus long, les noyaux déformés ont une déformation prolate, de forme allongée.

- $\gamma = 60^\circ$, l'axe de symétrie est le plus court, les noyaux ont une déformation oblate, de forme aplatie.

- ($0^\circ < \gamma < 60^\circ$), pas de symétrie axiale, le noyau devient triaxial, ce qui signifie que ses trois axes principaux sont de longueurs différentes.

Les paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$ sont indépendants du temps dans le système de coordonnées du corps fixe. Selon la forme du noyau, on peut réduire les paramètres de déformation nucléaire dans l'Eq.(I.41). Par exemple, pour le cas d'un noyau de symétrie axiale où la rotation collective est perpendiculaire à l'axe de symétrie intrinsèque, $\mu = 0$ et $\alpha_{\lambda 0}$ sont désignés par λ . Ainsi, la déformation quadripolaire positive $\beta > 0$ signifie que le rayon polaire est plus grand que le rayon équatorial (la forme prolata) et la déformation quadrupolaire correspond à la forme oblate $\beta < 0$ où le rayon équatorial est plus grand que le rayon polaire. Il est d'usage d'exprimer des déformations quadrupolaires dans un référentiel de corps fixe avec des axes 1, 2 et 3. Si les axes du système de coordonnées choisi sont orientés le long des axes principaux d'inertie du système à corps fixe, alors $a_{2,-1} = a_{2,1} = 0$, $a_{2,-2} = a_{2,2}$. Par conséquent, les coefficients non-nuls $a_{2,2}$ et $a_{2,0}$ sont suffisants pour décrire la forme du noyau. Ces coefficients sont souvent exprimés en termes de paramètres de Hill-Wheeler :

$$a_{20} = \beta \cos \gamma, \quad (\text{I.42})$$

et

$$a_{2,-2} = a_{22} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \gamma, \quad (\text{I.43})$$

où β représente l'amplitude de la déformation quadrupolaire. Le facteur $1/\sqrt{2}$ a été choisi de tel sorte que $\sum |\alpha_{\lambda\mu}| = \alpha_0 + 2\alpha_2^2 = \beta^2$. L'angle γ , dénommé paramètre de triaxialité, a été accepté comme étant la manière la plus pratique pour décrire la forme des noyaux. En utilisant les Eqs.(I.42 et I.43), la surface du noyau peut être décrite en fonction de β et γ comme :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \cos \gamma Y_{20}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma (Y_{22}(\theta, \varphi) + Y_{2-2}(\theta, \varphi)) \right]. \quad (\text{I.44})$$

En introduisant les expressions des harmoniques sphériques, l'équation. (I.44) devient :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\cos \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right) \right], \quad (\text{I.45})$$

où R_0 est le rayon de la sphère ayant le même volume que le noyau et donné par :

$$R_0 = 1.2A^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{I.46})$$

Si l'on s'en tient à des formes de noyau ellipsoïdales, la surface du noyau peut s'exprimer par deux paramètres β et γ caractérisant la longueur des 3 axes principaux de cet ellipsoïde avec $k = 1, 2, 3$:

$$R_i = R_0 \left[\beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right) \right], \quad \text{pour } k(1, 2, 3). \quad (\text{I.47})$$

Soit pour de petites déformations,

$$R_i = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right) \right], \quad \text{pour } k(1, 2, 3). \quad (\text{I.48})$$

Le paramètre β décrit l'élongation du noyau : γ traduit l'écart par rapport à la symétrie axiale. Cette paramétrisation suffit à décrire toutes les formes du noyau qui sont représentées sur la figure 8

1.7.7 Triaxialité dans le noyau

La déformation axiale est généralement suffisante pour décrire les noyaux dans leurs états fondamentaux. De nombreux calculs sur des noyaux déformés considèrent uniquement la déformation axiale. Pour les noyaux faiblement déformés, proches des fermetures de couches (noyaux de transition), il est nécessaire de prendre en compte la déformation triaxiale (déformation non-axiale car γ n'est pas un multiple de 60). Lorsque le cœur du noyau tourne, la déformation maximisant l'énergie de liaison évolue tant à passer par une déformation triaxiale [55]. Si un noyau

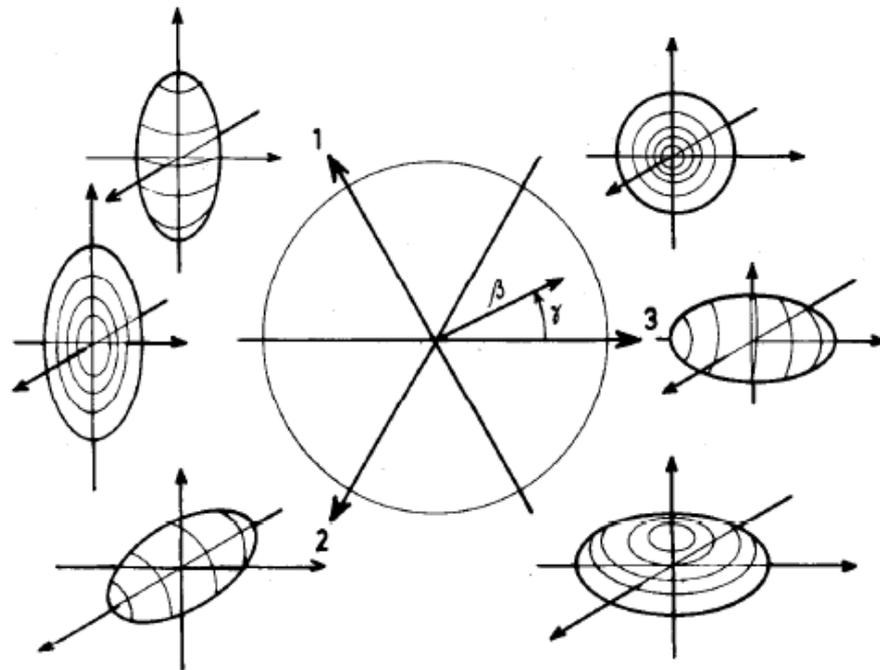


FIGURE 10 – Représentation en coordonnées polaires de la déformation du noyau en fonction des paramètres β et γ . P désignant la forme prolata, O la forme oblate, le symbole \perp indiquant la rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe principal, // indiquant la rotation autour de l'axe principal [51].

triaxial ne possède pas de symétrie axiale alors, il englobe plusieurs phénomènes physiques qui apparaissent dans le schéma de niveaux. Il est possible dans ce cas, de faire pivoter le noyau suivant un axe n'appartenant pas à un des plans principaux du référentiel intrinsèque. Parmi les modes d'excitations d'un noyau, il y en a deux qui caractérisent de manière univoque un noyau triaxial en rotation : c'est le mode "wobbling" [54] et la chiralité.

Au moment où le noyau oscille dans l'espace dans la direction de l'axe de rotation, on parle de mouvement de "wobbling", ce qui se traduit dans le schéma de niveaux par une bande parallèle à une bande yrast [54] légèrement plus excitée. Elle est fortement connectée à celle-ci par des transitions dipolaires. Une oscillation du signe de l'angle α entre l'axe du moment angulaire et l'axe de rotation va être la source du moment de wobbling (voir figure 11). Un autre phénomène typique de la triaxialité est la chiralité. Il se manifeste par deux bandes dipolaires (constituées de transitions magnétiques dipolaires M1) de configurations identiques, mais dont l'axe de rotation pointe dans deux directions différentes de l'espace, symétriques par rapport au plan perpendiculaire à l'axe long de l'ellipsoïde. Comme ces deux bandes partagent la même

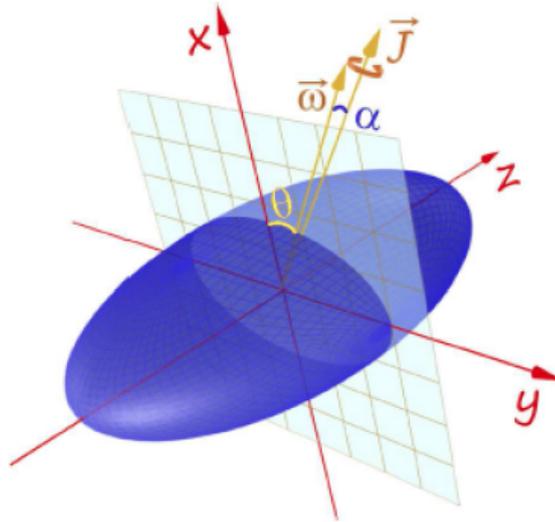


FIGURE 11 – Noyau triaxial dans son référentiel intrinsèque où sont représentés l'angle θ entre le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et l'axe Ox , et l'angle α entre les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et moment angulaire total \vec{J} [55].

configuration elles sont idéalement dégénérées en énergie, mais dans la réalité un décalage apparaît. Ce comportement a été observé dans les noyaux autour du ^{134}Pr , du ^{128}Cs , du ^{104}Rh et du ^{198}Tl . La déformation triaxiale s'avère stable sur une gamme limitée de spin à bas spin. De plus, il n'est pas facile de la mettre en évidence expérimentalement [56-58].

I.7.8 Le noyau de platine

Le platine est un élément chimique de symbole Pt et de numéro atomique 78. C'est un métal de transition dense, malléable, ductile, rare et précieux. Le platine est un métal noble résistant à la corrosion, on le trouve souvent associé à certains minerais de cuivre ou de nickel plus rarement sous forme de dépôts natifs (en Afrique du Sud notamment). Il est utilisé en bijouterie, dans les équipements de laboratoire, en médecine dentaire (réalisation de fausses dents en alliage or-platine), pour certains contacts électriques et surtout dans les pots catalytiques des véhicules [59,60,61].

I.7.9 Isotopes du platine

Le platine naturel est un mélange de cinq isotopes stables et d'un isotope radioactif, ^{190}Pt , de très longue période radioactive (650 milliards d'années). Il existe aussi de nombreux



FIGURE 12 – Image du platine [42].

autres radioisotopes, dont le plus stable après le ^{190}Pt est le ^{193}Pt dont la période est de 50 ans.

I.7.10 Utilisation, gisement et production du platine

Le platine se trouve en général à l'état natif et le minerais de sperrylite est la source principal du métal.

Le platine souvent accompagné de faibles quantités d'autres métaux de la famille du platine, peut être trouvé dans certaines alluvions : en Afrique du Sud où elle est fortement concentré dans le complexe magmatique de Bushveld (environ 5 g/t), Colombie, en Ontario, dans l'Oural et dans certains états de l'Ouest des Etats-Unis d'Amérique. Le platine est très utilisé en bijouterie, dans les contact électriques, dans les creusets et dans les fourneaux électriques à haute température avec deux autres métaux du groupe du platine, il est souvent utilisé comme catalyseur dans des procédés chimiques [62,63].

I.7.11 Impact écologique industriel

Quand il est pure et massif, le platine ne pose pas à priori aucun problème de santé environnementale. mais depuis qu'il est utilisé comme catalyseur, on commence à le trouver dans tous les compartiments de l'environnement et notamment dans l'air urbain à travers les gaz d'échappement des voitures qui utilisent de l'essence au plomb. Par conséquent, le niveau du platine dans l'air peut être plus élevé dans certains endroit, par exemple les garages, les tunnels

et sur les terrains des entreprises de transport routier. D'autre part, la pluie lessive l'air et les eaux de ruissellement, l'apportent aux stations d'épuration urbaines, où il s'ajoute à celui qui provient des urines, des excréments et de certains rejets industriels. Une recherche approfondie de l'impact du platine sur l'environnement et son effet sur les animaux n'a pas encore été faite de manière globale. Cependant, l'une des certitudes est qu'après avoir été absorbé par les plantes, le platine s'accumule dans les racines mais son effet reste ambigu jusqu'à nos jours. Des catalyseurs au platine sont utilisés dans le raffinage et la transformation du pétrole, ainsi que dans d'autres processus de la production d'essence et de composés aromatiques dans l'industrie pétrochimique. On estime que l'industrie automobile consomme environ 60 % des ressources mondiales de platine.

I.7.12 Effets sur la santé

Le platine interagit avec de nombreuses molécules, ce qui fait de lui un catalyseur très recherché [64]. À température ambiante, il résiste cependant à de nombreuses attaques chimiques : il ne s'oxyde pas à l'air libre et n'est absorbé que par des cyanures, les halogènes, le soufre et les métaux alcalins caustiques. Sauf à l'état de nanoparticules, il est insoluble dans l'acide chlorhydrique et dans l'acide nitrique mais il se dissout dans l'eau régale. Les effets du platine sur la santé dépendent exclusivement du type de liaisons formées et du niveau d'exposition et de l'immunité de la personne exposée. Ceci dit le platine en tant que sel, il peut entraîner des effets nocifs sur la santé de l'homme notamment le cancer, des pertes d'audition, des dommages au niveau des reins, intestins et moelle osseuse, des réactions d'allergie au niveau des cellules de la peau l'altération de l'ADN.

I.8 Calcul des transitions électriques des noyaux triaxiaux

Afin de mieux interpréter et décrire les déformations qui se manifestent dans les noyaux atomiques et avec l'avènement des nouvelles techniques et modèles pour mieux représenter les solutions des symétries $Z(5)$, $X(5)$ et $E(5)$ [25,26,28,65], des travaux ont été menés par des physiciens dans ces optiques et avec beaucoup d'efficacité nous citerons ci-dessous quelques modèles intéressants.

En 2015 Chabab et al. [25], ont résolu l'équation du hamiltonien de Bohr en introduisant dans la partie β le **potentiel de Hulthen** avec un terme en forme d'anneau dans la partie γ

afin de déterminer le spectre du système. Ce potentiel est une variante du potentiel de coulomb et généralement manipuler pour décrire et interpréter les propriétés des noyaux. Les données prédites par ce modèle sont plus ou moins élogieuses car elles présentent des écarts assez importants par rapport aux données expérimentales disponibles et de ce le potentiel de Hulthén n'a pas un apport très considérable dans l'étude et la compréhension des propriétés des noyaux atomiques.

En 2016, dans l'optique d'apporter un peu plus de performance sur le modèle proposé par Chabab en 2015, Budaca et al. [66] dans leurs travaux explorent une nouvelle technique à travers laquelle il introduit un modèle dans lequel les paramètres du potentiel dépendent de l'énergie, et en partant de l'hypothèse selon laquelle cette dépendance en l'énergie pourrait permettre de prendre implicitement en compte les effets liés au confinement à grande distance. Les résultats numériques obtenus à travers ce modèle sont très encourageants et meilleurs que ceux de Chabab, cependant les écarts restent toujours importants par rapport aux valeurs expérimentales.

En 2018, Mbadjoun et al. [24] ont utilisé le potentiel de Killingbeck plus Morse pour résoudre l'équation du hamiltonien de Bohr afin de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres du spectre. En effet, le potentiel de Killingbeck est une forme étendue du potentiel de Cornell et qui peut s'obtenir via un développement limité de Taylor du potentiel de Yukawa. Ils obtiennent des résultats meilleurs que les travaux précédents avec un écart à l'expérience assez réduit. Cependant, son modèle ne reproduit pas correctement les transitions des états énergétiques dans le noyau.

En 2019 Nga et al. [67], ont résolu l'équation du hamiltonien de Bohr pour les noyaux triaxiaux dans le but de déterminer l'énergie du spectre en utilisant un potentiel fractionnaire inverse à quatre termes (PFIQT). Dans ce modèle, le potentiel proposé possède des singularités en zéro, il est attractif et respecte les propriétés de confinement. Les résultats numériques obtenus via ce modèle sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Toutefois, ce modèle présente des incongruités car n'intègre pas les effets mémoire nécessaires pour l'étude des systèmes quantiques et qui rendraient certainement meilleurs les résultats obtenus dans le cas classique comme présenté dans la littérature.

En 2020, Omon et al. [68] ont résolu l'équation du hamiltonien de Bohr dans le but d'étudier les déformations liées aux noyaux triaxiaux notamment de Platine et de Xenon en utilisant le potentiel de Kratzer écranté l'énergie du spectre ainsi que la fonction d'onde qui en découle sont

obtenus en utilisant la méthode paramétrique de Nikiforov-Uvarov. les données prédites par ce modèle sont en accord avec celles des données expérimentales car le paramètre d'écrantage apporte une plus value, notamment sur la réduction des écarts entre les énergies. Cependant bien qu'approprié, le modèle proposé présente des manquements car ne fait pas intervenir le phénomène de mémoire qui pourrai rendre encore meilleur les résultats obtenus de manière classique.

En 2022, Mah Tsila et al. [69] ont utilisé dans leurs travaux le modèle du hamiltonien de Bohr en utilisant le potentiel combiné de Hulthen et de Kratzer écranté en s'appuyant sur la méthode quantique de la super symétrie. Ce modèle a été appliqué sur les isotopes 192, 194 et 196 du platine dans le but de déterminer l'énergie du spectre, la fonction d'onde ainsi que la probabilité de transition électrique B(E2). Il apparaît donc que les résultats théoriques obtenus et comparés aux données expérimentales et aux autres prédictions théoriques utilisant les potentiels de Morse et de Killingbeck plus de Morse sont en bon accord avec les résultats expérimentaux que ceux obtenus par les auteurs ayant utiliser les potentiels de Morse et de Killingbeck plus de Morse.

Dans la même continuité de l'année 2022, un nouveau souffle a été apporté dans l'étude des propriétés des noyaux triaxiaux notamment avec l'avènement d'une nouvelle formulation introduite dans la référence[67] à savoir la dérivée fractionnaire conformable et par ce biais, Ahmadou et al. [70] ont exploité cette formulation pour combler les manquements observées dans les travaux de Nga et al. [67]. En effet, le modèle proposé dans ce travail utilise un nouveau type de symétries ponctuelles critiques nommée symétries ponctuelles critiques fractionnaire conforme $E^\alpha(5)$. Cette forme de symétrie a été étudiée en utilisant la version fractionnaire conforme de l'équation du hamiltonien de Bohr (HBFC) avec le potentiel inverse à quatre termes en la variable β . Les résultats obtenus à travers ce modèle sont adéquats que ceux des modèles utilisés dans les travaux antérieurs et assez significatifs en ce sens où ils nous renseignent sur les prédictions des plusieurs sous-modèles encore inexploités et inexplorés : il s'agit de l'effet mémoire. Ceci dit des manquements se signalent lorsque nous revenons dans le cas classique du paramètre fractionnaire et ne nous donne pas de façon subtile des renseignements exacts sur les propriétés des noyaux triaxiaux.

Dans le but d'apporter une contribution majeure sur les travaux antérieurs effectués par Omon et al. [68], Yia Etolo et al. [71], apportent une nouvelle approche dans le modèle en combinant au potentiel de Kratzer écranté, le potentiel inversement quadratique de Yukawa. Dans ce

travail, un nouveau type de potentiel est apporté en la variable β afin de mieux réduire les écarts entre les états d'énergie. Les résultats comme on pouvait s'y attendre sont meilleurs que ceux des travaux antérieurs et sont assez intéressants, en ce sens que le potentiel inversement quadratique de Yukawa apporte une double contribution au niveau de l'écrantage rendant alors plus petits les écarts d'énergie d'où l'intérêt de ce travail.

I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, des notions importantes sur la physique nucléaire ont été définies pour mieux représenter la structure du noyau atomique notamment ses propriétés et ses différentes parties y afférentes telles que les protons et les neutrons. Par la suite, nous avons introduit les différents modèles nucléaires qui permettent de mieux représenter ces noyaux il s'agit du modèle de la goutte liquide et du modèle en couches. Par ailleurs, une étude du noyau de platine a été introduite en présentant ses isotopes, ses différentes propriétés ainsi ses avantages dans l'environnement et sur la santé. Les différentes interactions dans le noyau atomique (interaction forte, interaction faible et interaction électromagnétique) peuvent entraîner les déformations (rotation et vibration) de celui-ci. Ces mécanismes sont responsables d'une quantité d'énergie permettant soit de lier, soit de séparer les constituants du noyau en fonction du nombre de protons et de neutrons en son sein. Dans le prochain chapitre, nous allons présenter le modèle classique du Hamiltonien de Bohr, puis nous utiliserons le potentiel combiné de Yukawa inverse quadratique et de Kratzer écranté pour bâtir un nouveau modèle, prenant en compte les vibrations et les rotations des nucléides. Et enfin Les solutions de ce modèle sont explorées par la méthode paramétrique de Nikiforov-Uvarov pour déterminer l'énergie du spectre, la fonction d'onde ainsi que les transitions quadripolaires électriques $B(E2)$.

MÉTHODOLOGIE D'INVESTIGATION DES ÉTATS D'ÉNERGIE DANS LE NOYAU DE L'ATOME

II.1 Introduction

Dès les origines de la physique nucléaire, devant la complexité d'un système composé de N particules en interaction, les physiciens imaginent des modèles visant à donner une description simple mais suffisamment réaliste du noyau. Depuis les années 60, les physiciens constatent que les noyaux atomiques peuvent prendre les formes les plus inattendues. En effet, au cours d'une décroissance radioactive, les radionucléides effectuent plusieurs types de déformations et d'interactions nucléaires et qui peuvent varier selon le type de formes. En effet, ils peuvent s'alterner d'une forme à une autre notamment de la forme elliptique à la forme sphérique en passant par les formes allongées et aplaties et vice-versa. Les différentes interactions (nucléaire ou forte, magnétique et faible) décrivent des mouvements bien connus non seulement de part leur rapidité mais aussi couplés entre eux. Il s'agira cependant ici d'élaborer un modèle nucléaire capable de bien décrire et de mieux représenter l'évolution de la dynamique des noyaux atomiques.

II.2 Présentation du Hamiltonien de Bohr et des potentiels nucléaires

L'équation de base de la mécanique quantique décrivant l'évolution dans le temps du vecteur d'état ψ d'un système quantique est arbitraire. Elle est équivalente à un problème aux valeurs propres dans la théorie des espaces de Hilbert [72]. Son interprétation physique est généralement faite dans le cadre de l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique. L'équation de Schrödinger a été établie sous la forme primitive en 1926 par Erwin Schrödinger [73] et a été généralisée par Paul Dirac [73] quelques années après. Initialement, elle reprenait les idées

d'Hamilton et Félix Klein pour prolonger la théorie des ondes de matière de De Broglie [73]. Schrödinger découvrit donc une équation aux dérivées partielles dont l'état du système est décrit par une fonction d'onde de la mécanique hamiltonienne à l'aide d'un scalaire de champ se propageant dans l'espace à $6N$ dimensions de coordonnées généralisées de ce système. L'équation du hamiltonien de Bohr dont il est question nous permet donc de suivre l'évolution sphérique du noyau atomique pour décrire ses déformations en utilisant des modèles de potentiel. Parmi ces potentiels, les plus simples sont les singuliers qui semblent être très importants dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. Plutôt dans [56], il a été mentionné que les interactions dans le monde réel étaient probablement singulières, ce qui explique la richesse de la littérature à ce potentiel. Comme illustré, on peut citer : le potentiel oscillateur harmonique [14], le potentiel de Coulomb [15] le potentiel de Davidson [12,13], le potentiel de Killingbeck [16,17], potentiel Quartique [22], potentiel sextique [18-21]. Très récemment, de nouvelles formes de potentiels ont été développées pour mieux décrire la structure et les interactions nucléaires, il s'agit de la forme écranté du potentiel de types Kratzer [68] et de l'inversement quadratique du potentiel de type Yukawa [74]. avec l'apport considéré du paramètre d'écrantage dans l'étude des noyaux atomiques déformés ces deux formes potentiels nous donnent des bons renseignements sur la transition des différents états de ces noyaux.

Le Hamiltonien de Bohr se présente généralement sous sa forme sphérique. Cependant, le mouvement présentant les déformations des nucléides est régi par l'équation de Schrödinger suivante :

$$\widehat{H}\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E\psi(\beta, \gamma, \theta_i). \quad (\text{II.1})$$

Le Hamiltonien H est donné par l'expression [3,75] :

$$\widehat{H} = E_c + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.2})$$

où E_c est l'énergie cinétique donnée par l'expression :

$$E_c = \frac{\widehat{p}^2}{2B}, \quad (\text{II.3})$$

avec

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right]. \quad (\text{II.4})$$

L'opérateur de hamiltonien peut donc se mettre sous la forme :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V(\beta, \gamma). \quad (\text{II.5})$$

Supposons que le hamiltonien s'écrive sous la forme :

$$\hat{H} = T_{vib} + T_{rot} + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.6})$$

avec $T_{vib} = T_\beta + T_\gamma$, le Hamiltonien se rapportant aux vibrations des nucléides tels que :

$$T_\beta = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right], \quad (\text{II.7})$$

et

$$T_\gamma = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \quad (\text{II.8})$$

T_{rot} représente le Hamiltonien relatif aux rotations des nucléides

$$T_{rot} = \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right], \quad (\text{II.9})$$

où β et γ sont les coordonnées intrinsèques, qualifiant les différentes déformations liées aux vibrations des nucléides ; les \hat{Q}_k^2 sont les composantes du moment angulaire, $k = 1, 2, 3$ représentent les trois axes de coordonnées ; $\theta_i (i = 1, 2, 3)$ sont les angles d'Euler ; E_c est l'énergie cinétique du nucléide qui s'identifie au diverses rotations effectuées par les nucléides, \hat{p} est l'opérateur impulsion du mouvement ; $V(\beta, \gamma)$ est l'énergie potentielle du système, B est la masse totale du nucléide en mouvement et $\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ es la fonction d'onde.

En combinant les Eq. (II.1) et (II.5), nous obtenons :

$$-\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] \psi(\beta, \gamma, \theta_i) \quad (\text{II.10})$$

$$+V(\beta, \gamma)\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$$

C'est l'équation générale des mouvements de déformations des nucléides. Cette équation sera utilisée dans la suite dans notre travail.

II.3 Moment de transition quadripolaire électrique

Le moment de transition quadripolaire électrique est un caractère fondamental associé au noyau. Ce moment est lié à la répartition non purement sphérique au sein du noyau. En effet sa mesure nous permet de sonder la déformation géométrique du noyau de sa forme sphérique. Il permet aussi de donner tous les détails sur des énergies de chaque niveau. Celui-ci singularise et particularise chaque nucléon en indiquant s'il se trouve au niveau fondamental, γ ou β . L'équation quadripolaire électrique est régie par [13-76] :

$$T_{\mu}^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right) \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad (\text{II.11})$$

où θ_i sont les angles d'Euler, t un scalaire, $D_{\mu,\alpha}^{(2)}(\theta_i)$ sont définies comme des fonctions de Wigner pour les angles d'Euler, μ est le niveau concerné et L le nombre quantique du moment angulaire.

■ Pour $\gamma = \frac{\pi}{6}$ [13], l'opérateur quadripolaire se réduit à :

$$T_{\mu}^{(E2)} = -\frac{t\beta}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right). \quad (\text{II.12})$$

Ainsi, les différentes probabilités de transitions B(E2) [77-78] des niveaux i vers les niveaux f sont définies par :

$$B(E2; L_i \zeta_i \longrightarrow L_f \zeta_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle L_f \zeta_f || T^{(E2)} || L_i \zeta_i \rangle|^2}{2L_i + 1}, \quad (\text{II.13})$$

où $L_i \zeta_i$ et $L_f \zeta_f$ représentent les énergies des niveaux i et f respectivement et $|\langle L_f \zeta_f || T^{(E2)} || L_i \zeta_i \rangle|^2$ est une quantité matricielle calculée à partir du théorème de Wigner-Eckart [77]. Ces éléments

de matrice sont donnés par :

$$\langle L_f M_f \zeta_f | T_\mu^{(E2)} | L_i M_i \zeta_i \rangle = \frac{\langle L_f \zeta_f || T^{(E2)} || L_i \zeta_i \rangle}{\sqrt{2L_f + 1}} \langle L_i 2L_f | M_i \mu M_f \rangle. \quad (\text{II.14})$$

La fonction d'onde associée à cette transition est donnée par :

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \sqrt{\frac{2L + 1}{16\pi^2 (1 + \delta_{\zeta,0})}} \left[D_{\mu, \zeta}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu, -\zeta}^{(L)}(\theta_i) \right] \xi_{n, n_\omega, L, n_\gamma}(\beta) \eta_{n_\gamma}(\tilde{\gamma}). \quad (\text{II.15})$$

Afin de calculer les éléments de la matrice de l'opérateur quadrupolaire de l'Eq. (II.15), l'intégrale à travers $\tilde{\gamma}$ est égale à l'unité à cause de la méthode de normalisation des fonctions d'ondes [13]. L'intégrale à travers les angles d'Euler est déformée par l'intégrale principale des trois fonctions de Wigner [77] et l'intégrale à travers β prend la forme :

$$I(n_i, L_i, \zeta_i, n_f, L_f, \zeta_f) = \int \beta \xi_{n_i, L_i, \zeta_i}(\beta) \xi_{n_f, L_f, \zeta_f}(\beta) \beta^4 d\beta, \quad (\text{II.16})$$

où les facteurs β et β^4 proviennent de l'opérateur quadrupolaire et l'élément de volume respectivement. En utilisant le théorème de Wigner-Eckart, l'Eq. (II.13) prend la forme :

$$B(E2; L_i, \zeta_i \longrightarrow L_f, \zeta_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1 + \delta_{\zeta_i,0})(1 + \delta_{\zeta_f,0})} \times \\ \left[(L_i, 2, L_f | \zeta_i, 2, \zeta_f) + (L_i, 2, L_f | \zeta_i, -2, \zeta_f) + (-1)^{L_i} (L_i, 2, L_f | -\zeta_i, 2, \zeta_f) \right]^2 \times \\ [I(n_i, L_i, \zeta_i, n_f, L_f, \zeta_f)]^2. \quad (\text{II.17})$$

Les trois coefficients de Clebsch-Gordan (CCG) apparaissant dans l'équation ont été déduits par ses propriétés (seulement les transitions $\Delta\zeta = \pm 2$ sont permises). En effet, le premier CCG ne disparaît que si $\zeta_i + 2 = \zeta_f$, tandis que le second CCG ne disparaît que si $\zeta_i - 2 = \zeta_f$ et le troisième CCG ne disparaît que si $\zeta_i + \zeta_f = 2$. Ce dernier ne peut être valable que dans quelques cas particuliers. Les résultats de la partie angulaire de cette équation sont connus.

L'état fondamental est caractérisé par $n_\omega = L - \zeta = 0$ et ses transitions sont caractérisées par $\zeta_i = L_i$ et $\zeta_f = L_f$ [79]. En normalisant les taux de B(E2) pour les faibles transitions au sein de

l'état fondamental on obtient :

$$R_{ground \rightarrow ground}(L+2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L+2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.18})$$

Les niveaux paires de la bande γ sont caractérisés par $n_\omega = L - \zeta = 2$, ce qui signifie que $\zeta = L - 2$.

Pour l'état fondamental, $n_{\omega f} = 0$, $n_f = 0$ et pour la bande γ des valeurs paires de L , $n_{\omega i} = 2$, $n_i = 0$ et le taux de transition est donné par :

$$R_{\gamma\text{-even} \rightarrow ground}(L \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-even}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.19})$$

Pour la bande γ des valeurs impaires de L , $n_{\omega i} = 1$, $n_i = 0$ et le taux de transition des niveaux impairs de la bande γ vers l'état fondamental est donné par :

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow ground}(L \rightarrow L+1) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-odd}} \rightarrow (L+1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.20})$$

Pour les transitions des niveaux impairs de la bande γ vers les niveaux impairs de la bande γ inférieurs, on a :

$$R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L+2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.21})$$

Les transtions des niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L inférieures sont données par :

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-odd}}(L \rightarrow L-1) = \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.22})$$

De même, pour les niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers les niveaux de bande γ pour les valeurs paires de L , on a :

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L \rightarrow L-1) = \frac{B(E2; L_\gamma \rightarrow (L-1)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.23})$$

Pour le premier état excité, c'est-à-dire pour les niveaux de la bande β , $n_{\omega f} = 0$, $n_f = 1$ et

$$R_{\beta\text{-band}\rightarrow\beta\text{-band}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L - 1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \quad (\text{II.24})$$

II.3.1 Écart quadratique moyen

L'écart quadratique moyen ou facteur de qualité de mesure noté σ correspond à la déviation moyenne des prédictions théoriques par rapport aux données expérimentales. Il est donné par la relation suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (E_i(\text{exp}) - E_i(\text{th}))^2}{M}}, \quad (\text{II.25})$$

où $E_i(\text{exp})$ et $E_i(\text{th})$ représentent respectivement les énergies expérimentales et théoriques de niveau i et M le nombre des énergies de niveau considéré.

II.3.2 Effet de l'étalonnage des énergies dans la bande γ

L'effet étalon où staggering effect est défini comme un décalage impair-pair des niveaux d'énergies dans la bande γ . Il représente une grandeur très sensible sur les effets de l'étalonnage dans la bande γ pour la structure de la triaxialité. Cette grandeur consiste à mesurer le déplacement du niveau $(J - 1)_{\gamma}^{+}$ par rapport à la moyenne de ses voisins $(J - 2)_{\gamma}^{+}$ et J_{γ}^{+} . Cette quantité importante est donnée par la formule suivante [96-98] :

$$S(J) = \frac{E(J_{\gamma}^{+}) + E((J - 2)_{\gamma}^{+}) - 2E((J - 1)_{\gamma}^{+})}{E(2_g^{+})}, \quad (\text{II.26})$$

où $E(J)$ représente l'énergie de l'état J_{γ}^{+} appartenant à la bande γ , $E(2_g^{+})$ est l'énergie du premier état excité de la bande fondamentale.

II.4 Étude théorique et méthode

II.4.1 Théorie de champ moyen : modèle à particules indépendantes

L'interaction entre les nucléons, qui dérive de l'interaction forte et qui confine les nucléons à l'intérieur du noyau a la particularité d'être de portée finie : elle s'annule lorsque la distance

entre deux nucléons devient trop grande ; attractive à distance moyenne, elle devient répulsive lorsque cette distance tend vers 0 [100]. Cette dernière propriété illustre le principe de Pauli qui stipule que deux fermions (les nucléons sont des fermions) ne peuvent être dans un même état quantique [101]. Cela a pour conséquence que le libre parcours moyen d'un nucléon à l'intérieur du noyau est très grand ramené à la taille de celui-ci. Ce résultat, confirmé par des expériences de diffusions de particules, a conduit à l'élaboration du modèle à particules indépendantes.

L'idée centrale de cette approche est que tout se passe comme si un nucléon se déplaçait dans un puits de potentiel (qui le confinerait dans le noyau) indépendamment de la présence des autres nucléons. Sur le plan théorique, cette hypothèse revient à remplacer N corps- N particules en interaction - par N problèmes à un corps - une particule se déplaçant dans un certain potentiel. Cette simplification essentielle du problème est la pierre angulaire des théories de champ moyen [102-104].

II.4.2 Théorie sur les mouvement collectifs dans les noyaux

Les noyaux atomiques peuvent également manifester des comportements dits collectifs [31]. De tels phénomènes se conçoivent aisément si l'on assimile un noyau atomique à une sorte de ballon rempli de billes, qui figureraient les nucléons. Dans le cas de la rotation collective nucléaire, par exemple tout se passe comme si les billes se déplaçaient à l'unisson à l'intérieur du ballon pour donner l'impression que le ballon lui-même tourne comme une toupie. Dans le cas de la vibration, on peut imaginer que les billes s'accumulent en certaines régions du ballon et, ce faisant, déforment la surface du ballon. Cette déformation évolue au cours du temps, reflétant les mouvements internes des billes : la surface vibre [105].

Expérimentalement, on observe que les noyaux atomiques émettent, dans certaines conditions, d'intenses rayonnements gamma (γ). Dans les premiers développements de la mécanique quantique on démontre que ces rayonnements gamma correspondent à des transitions de nature électromagnétique entre les états du noyau [106].

Dans ce chapitre, des excitations collectives des nucléons nous intéressent particulièrement parce qu'elles permettent d'étudier les noyaux comme l'objet en entier. Les excitations collectives sont représentées par deux types de mouvement :

- Des vibrations de noyaux (états à N phonons, déformation dynamique axiale ou triaxiale, résonances géantes).

• Des rotations collectives autour de laxe perpendiculaire à laxe de symétrie du noyau (bande de rotation). Ces deux types d'excitations collectives conduisent en général à des schémas de niveaux réguliers et l'évolution dynamique de la forme du noyau. Ainsi, la présence d'un certain type d'excitation nous aide à déduire la forme du noyau.

II.4.3 Méthode de Nikiforov-Uvarov

Parmi les nombreuses équations de la physique qui sont traitées de différentes manières, on trouve l'équation de Klein-Gordan, Dirac, Schrödinger. Cette dernière, qui est une équation différentielle du second ordre par rapport à la position du système et du premier par rapport au temps, est d'un intérêt spécial en physique quantique non relativiste. En effet la résolution de cette équation nous fournit toutes les informations sur le système. L'équation de Schrödinger peut être citée (à l'aide de quelques astuces mathématiques étudiées) parmi une famille d'équations différentielles acceptant des solutions analytiques. Cette famille d'équations différentielles a été complètement traitée par les deux savants Nikiforov et Uvarov dans leur livre [99].

II.4.4 Équation différentielle de Nikiforov-Uvarov

Le but de la méthode de NU est de résoudre toute équation différentielle de la forme :

$$\Psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\Psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\Psi(s) = 0, \quad (\text{II.27})$$

dite de type hypergéométrique, où $\sigma(s)$ et $\tilde{\sigma}(s)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

$\sigma(s) = a_1s^2 + a_2s + a_3$ et $\tilde{\sigma}(s) = b_1s^2 + b_2s + b_3$ alors que $\tilde{\tau}(s)$ est un polynôme au plus de degré 1 :

$$\tilde{\tau}(s) = c_1s + c_2, \quad (\text{II.28})$$

avec : $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ sont des constants.

II.5 Solution de l'équation de Nikivorov-Uvarov

La première étape dans cette méthode consiste à opérer un changement en supposant que la solution de l'Eq.(II.27) est sous la forme :

$$\Psi(s) = \phi(s) y(s), \quad (\text{II.29})$$

Partant de l'Eq.(II.29) on à :

$$\Psi'(s) = \phi'(s) y(s) + \phi(s) y'(s), \quad (\text{II.30})$$

et

$$\Psi''(s) = \phi''(s) y(s) + \phi'(s) y'(s) + \phi'(s) y'(s) + \phi(s) y''(s). \quad (\text{II.31})$$

En insérant les Eqs.(II.30 et II.31) dans l'Eq.(II.27) on obtient :

$$y''(s) + \left(2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \right) y'(s) + \left(\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s) \phi'(s)}{\sigma(s) \phi(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \right) y(s) = 0. \quad (\text{II.32})$$

Nous choisissons la fonction $\phi(s)$ qui nous permet d'écrire le coefficient de $y'(s)$ sous la forme $\frac{\sigma(s)}{\phi(s)}$. Cela nous donne :

$$2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}, \quad (\text{II.33})$$

où $\phi(s)$ est un dérivé logarithmique dont la solution est obtenu à partir de la condition suivante :

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}, \quad (\text{II.34})$$

après avoir comparé les Eqs.(II.33 et II.34), nous avons :

$$\pi(s) = \frac{1}{2} [\tau(s) - \tilde{\tau}(s)], \quad (\text{II.35})$$

nous avons à partir de l'Eq.(II.35), le nouveau paramètre $\pi(s)$, qui est un polynôme de degré au plus 1. À partir de la dernière équation nous écrivons :

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s), \quad (\text{II.36})$$

$\tau(s)$ doit vérifier la condition ($\tau'(s) < 0$). Ce qui nous donne les solutions physiquement acceptables.

Afin de simplifier l'Eq.(II.32) et le coefficient de $y(s)$ dans l'Eq.(II.34), nous calculons d'abord $(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)})'$:

$$\frac{\phi'(s)'}{\phi(s)} = \frac{\phi''(s)}{\phi(s)} - \frac{\phi'(s)^2}{\phi(s)^2}. \quad (\text{II.37})$$

À partir des Eqs.(II.34 et II.37), nous écrivons :

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)' + \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)^2. \quad (\text{II.38})$$

Dans ce cas-ci, le coefficient de $y(s)$ est transformé en forme plus appropriée en prenant l'égalité donné dans l'Eq. (II.34).

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} = \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}, \quad (\text{II.39})$$

où :

$$\bar{\sigma}(s) = \tilde{\sigma}(s) + \pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \pi'(s)\sigma(s), \quad (\text{II.40})$$

on obtient $\bar{\sigma}(s)$ en fonction de $\tilde{\sigma}(s)$, $\pi^2(s)$ et $\sigma(s)$ c'est à dire $\bar{\sigma}(s)$ est un polynôme au plus de degré 2. Donc l'Eq.(II.32) est écrite de la même forme que l'équation (II.27).

$$y''(s) + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}y'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}y(s) = 0. \quad (\text{II.41})$$

Les transformations algébriques mentionnées ci-dessus et la forme fonctionnelle de l'Eq.(II.27)

sont protégées d'une manière systématique. Le polynôme $\tilde{\sigma}(s)$ dans l'Eq.(II.40) est divisible par $\sigma(s)$. Posons :

$$\tilde{\sigma}(s) = \lambda\sigma(s), \quad (\text{II.42})$$

où λ est constante. Donc l'Eq.(II.41) est réduite à une équation de type hypergéométrique :

$$\sigma(s) y''(s) + \tau(s) y'(s) + \lambda y(s) = 0. \quad (\text{II.43})$$

Afin de trouver la forme du polynôme $\pi(s)$ qui est un polynôme du premier degré, nous utilisons les deux Eqs. (II.39 et II.42)

$$\pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \pi'(s)\sigma(s) + \tilde{\sigma}(s) = \lambda\sigma(s), \quad (\text{II.44})$$

si on pose : $k = \lambda - \pi'(s)$, avec k qui est une constante. L'Eq. (II.44) devient alors :

$$\pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \tilde{\sigma}(s) - k\sigma(s) = 0, \quad (\text{II.45})$$

L'Eq.(II.50) est une équation du second ordre par rapport à $\pi(s)$. Essayons maintenant de résoudre cette équation, on a :

$$\pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \tilde{\sigma}(s) - k\sigma(s) = 0, \quad (\text{II.46})$$

d'où

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)}. \quad (\text{II.47})$$

Comme nous l'avons signalé précédemment, le polynôme $\pi(s)$ est un polynôme du premier degré. Ceci est vrai si et seulement si l'expression sous la racine carrée de l'Eq. (II.47) qui est un carré d'un polynôme au plus de degré 1 aussi, et pour cela, il faut que le discriminant de l'expression quadratique sous la racine soit nulle. Cette condition ($\Delta = 0$) nous donne la valeur de la constante k .

Après la détermination de k , le polynôme de l'Eq. (II.46), et puis $\tau(s)$ et λ ont également

obtenus en utilisant les Eqs. (II.37 et II.45), respectivement.

II.5.1 Valeurs propres

Dans l'Eq.(II.43), cherchons les solutions sous la formes :

$$y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n, \quad (\text{II.48})$$

donc,

$$y'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n s^{n-1}, \quad (\text{II.49})$$

et aussi,

$$y''_n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n s^{n-2}, \quad (\text{II.50})$$

l'équation (II.48) devient :

$$\sigma(s) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n s^{n-2} + \tau(s) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = 0. \quad (\text{II.51})$$

En remplaçant les $\sigma(s)$ et $\tau(s)$, on obtient :

$$a_1 n(n-1) s^n + c_1 n s^n = -\lambda_n s^n, \quad (\text{II.52})$$

avec : $\sigma''(s) = 2a_1$ et $\tau'(s) = c_1$. La méthode de Frobenius nous donne la relation suivante :

$$\lambda = \lambda_n = -n(\tau'(s) + \frac{(n-1)}{2} \sigma''(s)), \quad (\text{II.53})$$

où λ_n représentent les valeurs propres de l'équation différentielle (II.43).

II.5.2 Fonctions propres

Pour générer les fonctions propres correspondantes, il faut que $\tau'(s) < 0$. La solution de la deuxième partie de la fonction d'onde $y_n(s)$ est donnée par la formule de Rodrigues [93] :

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)], \quad (\text{II.54})$$

où B_n est une constante de normalisation et $\rho(s)$ représente la fonction résolvante (fonction poids), qui a été trouvée à partir de l'équation suivante :

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) = -\lambda y(s) = \frac{1}{\rho(s)} [\rho(s)\sigma(s)y'(s)]', \quad (\text{II.55})$$

et $\rho(s)$ est un dérivé logarithmique dont la solution est obtenue à partir de l'expression :

$$\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} = \frac{\tau(s) - \sigma'(s)}{\sigma(s)}. \quad (\text{II.56})$$

En supposant que $\rho(s)$ est une fonction analytique qui est définie à l'intérieur d'un contour fermé C entourant le point ($s=z$) et faisant usage de théorème de l'intégrale de Cauchy [112]. Nous pouvons écrire :

$$y_n(s) = \frac{c_n}{\rho(s)} \int_c \frac{\sigma^n(z)\rho(z)}{(z-s)^{n+1}} dz, \quad (\text{II.57})$$

où c_n est une constante de normalisation et $\rho(s)$ satisfait l'Eq. (II.52) ceci suggère de chercher une solution particulière de l'Eq. (II.43).

II.6 Paramètres de l'équation de Nikivorov-Uvarov

La forme paramétrique, utilise simplement des paramètres pour obtenir explicitement des valeurs propres d'énergie et elle est toujours basée sur les solutions d'une équation différentielle linéaire généralisée du second ordre avec des fonctions orthogonales spéciales. La méthode de (NU) a montrée une grande utilité dans le calcul des niveaux d'énergie exacts de tous les états liés pour certains systèmes quantiques solubles.

Considérons l'équation différentielle du second ordre donnée par l'Eq.(II.32). Avec $\sigma(s)$ et

$\bar{\sigma}(s)$ qui sont des polynômes du second degré et $\tilde{\tau}(s)$ est un polynôme du premier degré. La généralisation paramétrique de la méthode NU est donnée par l'équation généralisée de type hypergéométrique.

En général, l'équation de Schrödinger qui peut être obtenue avec différents potentiels prend la forme suivante [113].

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{s^2 (1 - \alpha_3 s)^2} \right] \Psi = 0. \quad (\text{II.58})$$

Comparons l'Eq. (II.53) à l'Eq.(II.27), nous obtenons :

$$\tilde{\tau} = \alpha_1 - \alpha_2 s, \quad (\text{II.59})$$

avec

$$\sigma = s(1 - \alpha_3 s), \quad (\text{II.60})$$

et

$$\tilde{\sigma} = -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3. \quad (\text{II.61})$$

En substituant les Eqs.(II.54, II.55 et II.56) dans l'Eq. (II.47), on trouve :

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm [(\alpha_6 - \alpha_3 k_{\pm})s^2 + (\alpha_7 + k_{\pm})s + \alpha_8]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{II.62})$$

où les différentes valeurs de $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ et α_8 sont :

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} (1 - \alpha_1), \quad (\text{II.63})$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} (\alpha_2 - 2\alpha_3), \quad (\text{II.64})$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1, \quad (\text{II.65})$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2, \quad (\text{II.66})$$

et

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3. \quad (\text{II.67})$$

Nous définissons α_9 tel que :

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6. \quad (\text{II.68})$$

La valeur résultante de k dans l'Eq. (II.57) est obtenue à partir de la condition que la fonction sous la racine carrée est le carré d'un polynôme et qui donne :

$$k_{\pm} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \mp 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}, \quad (\text{II.69})$$

le nouveau $\pi(s)$ pour k_- devient :

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8} - \sqrt{\alpha_8})s], \quad (\text{II.70})$$

la valeur de k_- donne :

$$k_- = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) - 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}, \quad (\text{II.71})$$

utilisons les Eqs. (II.36 et II.55), on obtient :

$$\tau(s) = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}]. \quad (\text{II.72})$$

La condition physique de la solution de l'état lié est $\tau' < 0$ et donc :

$$\tau'(s) = -2\alpha_3 - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) < 0, \quad (\text{II.73})$$

à l'aide des Eqs. (II.48 et II.52), on obtient la forme de l'équation d'énergie :

$$\begin{aligned} n\alpha_2 - (2n+1)\alpha_5 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + n(n-1)\alpha_3 + (2n+1)\sqrt{\alpha_9} + (2\sqrt{\alpha_9} \\ + \alpha_3(2n+1))\sqrt{\alpha_8} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

ce qui donne :

$$(\alpha_2 - \alpha_3)n + \alpha_3n^2 - (2n+1)\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0. \quad (\text{II.75})$$

La fonction poids $\rho(s)$ est obtenue à partir de l'Eq.(II.49) comme :

$$\rho(s) = s^{\alpha_{10}-1} (1 - \alpha_3s)^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1}. \quad (\text{II.76})$$

Et lorsque cette équation est utilisée dans l'Eq. (II.52), on obtient :

$$y_n = P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1\right)} (1 - 2\alpha_3s), \quad (\text{II.77})$$

où

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}, \quad (\text{II.78})$$

et

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}), \quad (\text{II.79})$$

et $P_n^{(\alpha,\beta)}$ est le polynôme de Jacobi. Utilisant l'Eq.(II.39), on abouti à :

$$\phi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}}, \quad (\text{II.80})$$

où les paramètres α_{12} et α_{13} sont donnés par :

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, \quad (\text{II.81})$$

et

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}), \quad (\text{II.82})$$

ainsi, la fonction d'onde totale devient :

$$\psi_{n,l}(s) = N_{n,l} s^{-\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \times P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1\right)} (1 - 2\alpha_3 s). \quad (\text{II.83})$$

II.7 Application á la résolution de l'équation classique du hamiltonien de Bohr pour le potentiel combiné de Yukawa inversement quadratique et de Kratzer écranté

II.7.1 Techniques de séparations des différents types de mouvements des déformations nucléaires

L'énergie potentielle $V(\beta, \gamma)$ et la fonction d'onde $\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ étant quasiment séparables [79,12], nous aboutissons à deux équations hypergéométriques correspondant respectivement aux mouvements de rotation et vibration dûs aux variables β et γ des nucléides. Pour cela, posons :

$$V(\beta, \gamma) = V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2}, \quad (\text{II.84})$$

avec $V_1(\beta)$ qui représente l'énergie potentielle suivant la coordonnée β et $V_2(\gamma)$, l'énergie potentielle suivant la coordonnée γ .

En introduisant l'Eq.(II.84) dans l'Eq.(II.5), le Hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2}. \quad (\text{II.85})$$

La fonction d'onde s'écrit :

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \chi(\beta) \eta(\gamma) D(\theta_i), \quad (\text{II.86})$$

avec $\chi(\beta)$ et $\eta(\gamma)$ des fonctions d'ondes suivant les coordonnées β et γ respectivement, tandis que $D(\theta_i)$ est la composante angulaire de la fonction d'onde, appelée fonction d'onde de Wigner, qui est une fonction symétrique ayant pour expression :

$$D(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\zeta,0})}} [D_{\nu,\zeta}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\zeta}^L(\theta_i)]. \quad (\text{II.87})$$

Dans l'Eq. (II.87), L est le nombre quantique du moment angulaire, α est la projection du moment quantique angulaire par rapport aux coordonnées fixes et $\nu = 1, 2, 3, \dots$. Dans la pratique, le découplage de l'équation du Hamiltonien n'est possible que pour les nucléides triaxiaux dont le mouvement de rotation a une énergie potentielle minimale (c'est-à-dire $\gamma = \frac{\pi}{6}$) [76]. Dans le cas contraire, les différents mouvements décrits par les nucléides restent liés donc, la séparation des variables est quasi impossible. Posons :

$$W = \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)}, \quad (\text{II.88})$$

et puisque que $\gamma = \frac{\pi}{6}$, alors :

$$W = \hat{Q}_1^2 + 4\hat{Q}_2^2 + 4\hat{Q}_3^2. \quad (\text{II.89})$$

Le moment angulaire total \hat{Q} , représente la somme des composantes des moments angulaires suivants les différents axes :

$$\widehat{Q} = \widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2. \quad (\text{II.90})$$

Compte tenu de l'expression de \widehat{Q} , l'Eq. (II.89) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} W &= 4(\widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2) - 3\widehat{Q}_1^2 \\ &= 4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2. \end{aligned} \quad (\text{II.91})$$

En tenant compte de toutes les expressions précédentes, l'Eq. (II.10) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} (4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2) \right] \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) \\ + \left(V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2} \right) \chi(\beta)\eta(\gamma)\Theta(\theta_i) = E\chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i). \end{aligned} \quad (\text{II.92})$$

En appliquant l'opérateur \widehat{Q}^2 [77] sur la fonction d'onde de Wigner, l'Eq. (II.87) s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{Q}^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\varsigma,0})}} [D_{\nu,\varsigma}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\varsigma}^L(\theta_i)] \\ = 4L(L+1) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\varsigma,0})}} [\Theta_{\nu,\varsigma}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\varsigma}^L(\theta_i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.93})$$

De même, en appliquant \widehat{Q}_1^2 sur la fonction de Wigner, l'Eq. (II.87) devient :

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_1^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\varsigma,0})}} [D_{\nu,\varsigma}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\varsigma}^L(\theta_i)] \\ = (\varsigma^2 + L - \varsigma) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\varsigma,0})}} [D_{\nu,\varsigma}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\varsigma}^L(\theta_i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.94})$$

où L représente le nombre quantique du moment angulaire et α la projection du moment quantique angulaire par rapport aux axes fixes. L'introduction des Eqs. (II.98 et II.99) dans le troisième terme de l'opérateur Hamiltonien de l'Eq. (II.92), donne :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[-\frac{1}{4\beta^2} (4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2) \right] \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \chi(\beta)\eta(\gamma) \left(4\widehat{Q}^2 D(\theta_i) - 3\widehat{Q}_1^2 D(\theta_i) \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \chi(\beta)\eta(\gamma) \left(4L(L+1)D(\theta_i) - 3(\varsigma^2 + L - \varsigma)D(\theta_i) \right). \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

On multiplie maintenant l'Eq. (II.92) par $-\frac{2B}{\hbar^2}$ et on pose :

$$\begin{aligned} v_1(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_1(\beta), \\ v_2(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_2(\beta), \\ \xi &= \frac{2B}{\hbar^2} E. \end{aligned} \quad (\text{II.96})$$

Il faut rappeler que les effets de la projection de ς sur les coordonnées fixes font introduire les nombres quantiques apparents n_ω [83,84] tels que $n_\omega = L - \varsigma$ avec $L = n_\omega, n_{\omega+2}, n_{\omega+4}, \dots$. Pour $n_\omega = 0$, le nucléide est dans son état fondamental.

Les Eq.s (II.97 et II.98) ci-dessous, décrivent les mouvements de rotation γ et les mouvements de vibration β . Les solutions de l'équation décrivant les mouvements de rotation des nucléides sont connues :

$$\left[-\frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \omega(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma), \quad (\text{II.97})$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{4L(1+L) - 3\varsigma^2 + 4\lambda}{4\beta^2} + u(\beta) \right] \psi(\beta) = \xi \psi. \quad (\text{II.98})$$

II.7.2 Solution de la partie γ

Pour les noyaux triaxiaux, la variable γ oscille uniformément entre $\gamma = 0^\circ$ et $\gamma = 60^\circ$. En considérant que la partie γ du potentiel est un oscillateur harmonique ayant un minimum profond $\gamma = \frac{\pi}{6}$, la surface d'énergie potentielle correspondante doit avoir un minimum autour de $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Aussi, lorsque le nucléide est en rotation, il passe de la forme elliptique à la forme sphérique et vice-versa. Désormais, pour la partie gamma, on peut considérer le potentiel harmonique suivant :

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2} \tilde{c} \left(\gamma - \frac{\pi}{6} \right)^2, \quad (\text{II.99})$$

où \tilde{c} est défini comme étant la rigidité du potentiel. En insérant l'Eq.(II.99) dans l'Eq. (II.92) et en résolvant l'équation obtenue, on obtient l'énergie et les fonctions d'ondes normalisées [30-85] respectivement :

$$\lambda_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{2\tilde{c}} \left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2} \right), \quad \tilde{n}_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.100})$$

et

$$\eta_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}} \sqrt{\pi n_{\tilde{\gamma}}!}}} H_{n_{\tilde{\gamma}}} \left((\tilde{c}/2)^{1/4} \tilde{\gamma} \right) \exp \left(-(\tilde{c}/2)^{1/2} \tilde{\gamma}^2 / 2 \right), \quad (\text{II.101})$$

avec $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$, $n_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots$ est le nombre quantique de l'oscillateur et $H_{n_{\tilde{\gamma}}}$ est le polynôme de Hermite.

II.7.3 Solution de la partie β

Dans cette section, nous considérons le potentiel combiné de Yukawa inversement quadratique et de Kratzer écranté le potentiel d'interaction de notre système paramétrique sous la forme :

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta^2} e^{-2\theta\beta} + \left(\frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta^2} \right) e^{-\theta\beta}, \quad (\text{II.102})$$

où a, b, c et θ sont des constantes à valeurs réelles qui sont trouvées en ajustant les spectres et les données expérimentales. En effet ce potentiel peut être considéré comme un cas général d'autres potentiels particuliers d'intérêt physique : Ceci dit, le potentiel couplé de Yukawa inversement quadratique et de Kratzer écranté peut être simplifié sous la forme suivante :

- le potentiel inverse de Yukawa ou de Coulomb écranté [86] si $a = c = 0$ est défini comme suit :

$$V(\beta) = \frac{b}{\beta} e^{-\theta\beta}, \quad (\text{II.103})$$

- le potentiel de Kratzer écranté [68] si $a = 0$ est défini comme suit :

$$V(\beta) = \left(\frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta^2} \right) e^{-\theta\beta}, \quad (\text{II.104})$$

- le potentiel de Yukawa inversement quadratique [87] si $b = c = 0$ et est défini comme suit :

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta^2} e^{-2\theta\beta}, \quad (\text{II.105})$$

- le potentiel de Kratzer [88] si $a = \theta = 0$ est défini comme suit :

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^2}, \quad (\text{II.106})$$

- le potentiel de Coulomb [89] si $a = c = \theta = 0$, défini comme suit :

$$V(\beta) = \frac{b}{\beta}. \quad (\text{II.107})$$

Il est évident que ce potentiel peut être vu comme une généralisation de nombreux autres potentiels existants dans la littérature. Cela montre qu'il est très riche et intéressant à étudier. En utilisant la transformation, $\psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \phi(\beta)$ et en remplaçant l'équation (II.102) par l'équation (II.98) on obtient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{p}{\beta^2} - V(\beta) + \xi \right] \phi(\beta) = 0, \quad (\text{II.108})$$

où, $p = 2 + L(L + 1) - \frac{3\zeta^2}{4} + \lambda$. En remplaçant $V(\beta)$ par son expression dans l'équation (II.108) on a :

$$\frac{d^2 \phi(\beta)}{d\beta^2} + \left[-\frac{p}{\beta^2} - \frac{a}{\beta^2} e^{-2\theta\beta} - \left(\frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta^2} \right) e^{-\theta\beta} + \xi \right] \phi(\beta) = 0. \quad (\text{II.109})$$

Dans le cas où $p \neq 0$, l'équation du hamiltonien de Bohr (II.109) ne peut pas être résolue analytiquement. Ainsi, nous pouvons utiliser une approximation pour obtenir des solutions analytiques de l'équation (II.109). Pour une petite déformation, la barrière centrifuge et les termes de Coulomb peuvent être approchés par les approximations suivantes [90, 91] :

$$\frac{1}{\beta} \simeq \frac{\theta}{1 - e^{-\theta\beta}} \quad ; \quad \frac{1}{\beta^2} \simeq \frac{\theta^2}{(1 - e^{-\theta\beta})^2}. \quad (\text{II.110})$$

Ainsi l'équation (II.110) peut prendre la forme suivante :

$$\frac{d^2\phi(\beta)}{d\beta^2} + \left[-\frac{p\theta^2}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} - \frac{a\theta^2 e^{-2\theta\beta}}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} - \frac{b\theta e^{-\theta\beta}}{(1 - e^{-\theta\beta})} - \frac{c\theta^2 e^{-\theta\beta}}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} + \xi \right] \phi(\beta) = 0. \quad (\text{II.111})$$

En effectuant un développement de l'équation (II.111) et en mettant le paramètre $\frac{1}{(1 - e^{-\theta\beta})^2}$ en facteur sur le deuxième terme de l'équation on a :

$$\frac{d^2\phi(\beta)}{d\beta^2} + \frac{1}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} \left[-p\theta^2 - a\theta^2 e^{-2\theta\beta} - b\theta (1 - e^{-\theta\beta}) e^{-\theta\beta} - c\theta^2 e^{-\theta\beta} + \xi (1 - e^{-\theta\beta})^2 \right] \phi(\beta) = 0, \quad (\text{II.112})$$

$$\frac{d^2\phi(\beta)}{d\beta^2} + \frac{1}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} \left[-p\theta^2 - a\theta^2 e^{-2\theta\beta} - b\theta e^{-\theta\beta} - b\theta e^{-\theta\beta} e^{-2\theta\beta} - c\theta^2 e^{-\theta\beta} + \xi (1 - 2e^{-\theta\beta} + e^{-2\theta\beta}) \right] \phi(\beta) = 0, \quad (\text{II.113})$$

$$\frac{d^2\phi(\beta)}{d\beta^2} + \frac{1}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} \left[-p\theta^2 - a\theta^2 e^{-2\theta\beta} - b\theta e^{-\theta\beta} - b\theta e^{-\theta\beta} e^{-2\theta\beta} - c\theta^2 e^{-\theta\beta} + \xi - 2\xi e^{-\theta\beta} + \xi e^{-2\theta\beta} \right] \phi(\beta) = 0. \quad (\text{II.114})$$

L'équation (II.113) peut être réécrite suivant la forme ci-dessous

$$\frac{d^2\phi(\beta)}{d\beta^2} + \frac{1}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} \left[(\xi - p\theta^2) - (2\xi + c\theta^2 + b\theta) e^{-\theta\beta} + (\xi + b\theta - a\theta^2) e^{-2\theta\beta} \right] \phi(\beta) = 0. \quad (\text{II.115})$$

Comme il s'agit de faibles déformations, la transformation $X = e^{-\theta\beta}$ est convenable. En le faisant on a

$$\frac{d\phi}{d\beta} = \frac{d\phi}{dX} \times \frac{dX}{d\beta}, \quad (\text{II.116})$$

où

$$\frac{dX}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} (e^{-\theta\beta}) = -\theta e^{-\theta\beta}, \quad (\text{II.117})$$

il vient donc que

$$\frac{d\phi}{d\beta} = -\theta e^{-\theta\beta} \times \frac{d\phi}{dX}. \quad (\text{II.118})$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{d\beta^2} &= \frac{d}{d\beta} \left(\frac{d\phi}{d\beta} \right) = \frac{d}{d\beta} \left(\frac{d\phi}{dX} \times \frac{dX}{d\beta} \right), \\ \frac{d^2\phi}{d\beta^2} &= \frac{d}{d\beta} \left[\left(\frac{d\phi}{dX} \right) \times (-\theta e^{-\theta\beta}) \right] = \frac{d\phi}{dX} \frac{d}{d\beta} (-\theta e^{-\theta\beta}) - \theta e^{-\theta\beta} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{d\phi}{dX} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.119})$$

En développant l'équation (II.119), on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{d\beta^2} &= \frac{d\phi}{dX} (\theta^2 e^{-\theta\beta}) - \theta e^{-\theta\beta} \left[\frac{d}{dX} \left(\frac{d\phi}{d\beta} \right) \right] = \frac{d\phi}{dX} (-\theta^2 e^{-\theta\beta}) - \theta e^{-\theta\beta} \left[\frac{d}{dX} \left(\frac{d\phi}{dX} \times \frac{X}{d\beta} \right) \right] \\ &= (\theta^2 e^{-\theta\beta}) \frac{d\phi}{dX} - \theta e^{-\theta\beta} \left[\frac{d}{dX} \left(\frac{d\phi}{dX} (-\theta e^{-\theta\beta}) \right) \right] \\ &= \theta^2 e^{-2\theta\beta} \frac{d^2\phi}{dX^2} + \theta^2 e^{-\theta\beta} \frac{d\phi}{dX}. \end{aligned} \quad (\text{II.120})$$

En introduisons l'équation (II.120) dans l'équation (II.119), il vient donc que

$$\begin{aligned} \theta^2 e^{-2\theta\beta} \frac{d^2\phi}{dX^2} + \theta^2 e^{-\theta\beta} \frac{d\phi}{dX} + \frac{1}{(1-X)^2} [(\xi - p\theta^2) - (2\xi + c\theta^2 + b\theta)X + (\xi + b\theta - a\theta^2)X^2] \phi(X) = 0 \\ \theta^2 X^2 \frac{d^2\phi}{dX^2} + \theta^2 X \frac{d\phi}{dX} + \frac{1}{(1-X)^2} [(\xi - p\theta^2) - (2\xi + c\theta^2 + b\theta)X + (\xi + b\theta - a\theta^2)X^2] \phi(X) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.121})$$

En divisant les deux membres de l'égalité par $\theta^2 X^2$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{d\phi}{dX} + \frac{1}{X(1-X)^2} \left[\left(\frac{\xi}{\theta^2} - p \right) - \left(2\frac{\xi}{\theta^2} + c + \frac{b}{\theta} \right) X + \right. \\ \left. \left(\frac{\xi}{\theta^2} + \frac{b}{\theta} - a \right) X^2 \right] \phi(X) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.122})$$

Soit

$$\frac{d^2\phi(X)}{dX^2} + \frac{1-X}{X(1-X)} \frac{d\phi(X)}{dX} + \frac{1}{X^2(1-X)^2} [-\xi_1 X^2 + \xi_2 X - \xi_3] \phi(X) = 0, \quad (\text{II.123})$$

où $\xi_1 = -\frac{\xi}{\theta^2} - \frac{b}{\theta} + a$; $\xi_2 = -\frac{2\xi}{\theta^2} - \frac{b}{\theta} - c$; $\xi_3 = p - \frac{\xi}{\theta^2}$. Nous pouvons comparer l'équation (II.123) avec l'équation hypergéométrique paramétrique bien connue [81] :

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{dF(s)}{ds} + \frac{1}{s^2(1 - \alpha_3 s)^2} [-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3] F(s) = 0. \quad (\text{II.124})$$

Dans le cadre de la méthode paramétrique de Nikiforov-Uvarov, l'équation énergétique est donnée comme suit[81] :

$$\alpha_2 n + \alpha_3 n(n-1) - (2n+1)\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0 \quad (\text{II.125})$$

où $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_6 = \frac{1}{4} - \frac{\xi}{\theta^2} - \frac{b}{\theta} + a$, $\alpha_7 = \frac{2\xi}{\theta^2} + \frac{b}{\theta} + c$, $\alpha_8 = p - \frac{\xi}{\theta^2}$, $\alpha_9 = c + p + a + \frac{1}{4}$, $\alpha_{11} = 2 + 2\sqrt{c + p + a + \frac{1}{4}} + 2\sqrt{p - \frac{\xi}{\theta^2}}$, $\alpha_{12} = \sqrt{p - \frac{\xi}{\theta^2}}$, $\alpha_{13} = -\frac{1}{2} - \sqrt{c + p + a + \frac{1}{4}} - \sqrt{p - \frac{\xi}{\theta^2}}$. Enfin, nous obtenons l'énergie du spectre comme

$$\xi = p\theta^2 - \theta^2 \left[\frac{n^2 + n + \frac{1}{2} + (2n+1) \sqrt{c+p+a+\frac{1}{4}} + \frac{b}{\theta} + c + 2p}{2n+1 + 2\sqrt{c+p+a+\frac{1}{4}}} \right]^2, \quad (\text{II.126})$$

où n est le nombre quantique principal. À la limite $\theta \rightarrow 0$ on voit clairement que l'énergie du spectre devient

$$\xi = \frac{b}{4 \left[n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(p + \frac{1}{4} \right) + a + c} \right]^2}. \quad (\text{II.127})$$

Ainsi, la formule donnée par l'équation (II.126) contient à la fois les spectres d'énergie de Kratzer et de Coulomb. Il est donc en accord avec le spectre d'énergie obtenu dans la réf.[92]. Quant à la fonction d'onde, nous pouvons écrire la solution de l'équation (II.123) comme suit[81] :

$$\phi(X) = X^{\alpha_{12}} (1-X)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1 \right)} (1-2X). \quad (\text{II.128})$$

Alors, la partie- β de la fonction d'onde peut être écrite comme

$$\Psi_{n,L,n_\omega}(\beta) = N_L \beta^{-2} (\exp(-\theta\beta))^{\alpha_{12}} (1 - \exp(-\theta\beta))^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \times P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1 \right)} (1 - 2 \exp(-\theta\beta)), \quad (\text{II.129})$$

où P_n est le polynôme de Jacobi bien connu et N_L est le facteur de normalisation déterminé à partir de la condition de normalisation suivante

$$\int_0^{+\infty} \beta^4 \Psi_{n,L,n_\omega}^2(\beta) d\beta = 1. \quad (\text{II.130})$$

en utilisant les notations $\alpha_{15} = \alpha_{11} - \alpha_{10} - 1$; $\alpha_{14} = 2\alpha_{12} - 2\alpha_{13}$, nous pouvons écrire la constante de normalisation comme suit

$$N_L = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{+\infty} (\exp(-\theta\beta))^{2\alpha_{12}} (1 - \exp(-\theta\beta))^{\alpha_{14}} \left[P_n^{(\alpha_{10}-1, \alpha_{15})} (1 - 2 \exp(-\theta\beta)) \right]^2 d\beta}}. \quad (\text{II.131})$$

Finalement nous pouvons écrire la fonction d'onde totale pour les noyaux triaxiaux comme

$$\begin{aligned} \Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = & \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n\tilde{\gamma}} \sqrt{\pi n\tilde{\gamma}}}} H_{n\tilde{\gamma}} \left((\tilde{c}/2)^{1/4} \tilde{\gamma} \right) \exp \left(-(\tilde{c}/2)^{1/2} \tilde{\gamma}^2 / 2 \right) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2 (1 + \delta_{\alpha,0})}} \\ & \times \left[D_{\mu, \alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^l D_{\mu, -\alpha}^{(L)}(\theta_i) \right] N_L \beta^{-2} (\exp(-\theta\beta))^{\alpha_{12}} \\ & \times (1 - \exp(-\theta\beta))^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2 \exp(-\theta\beta)). \quad (\text{II.132}) \end{aligned}$$

II.8 Spectroscopie des noyaux lourds de transitions sphériques

L'étude de la spectroscopie de certains noyaux lourds de transitions sphérique nous donne des renseignements importantes sur la forme du noyau. Il s'agit essentiellement de travaux expérimentaux, dont les résultats ont été obtenus grâce aux techniques de spectroscopie avec séparation en ligne. Les isotopes étudiés appartiennent à la zone de transition $Z=77-80$. L'intérêt de cette région a été mis en évidence par les calculs de Kumar et Baranger [114] prévoyant l'existence d'une forme d'équilibre oblate pour certains isotopes de mercure et de platine déficients en neutrons. Une série de résultats obtenus au CERN par spectroscopie en ligne sur les noyaux de platine s'accorde avec une transition de forme oblate + prolata entre les isotopes de masse 188 et 186 [115]. Dans les expériences de spectroscopie en ligne, un nombre élevé d'états excités sont souvent observés ; il devient alors possible de discuter la densité de niveaux qu'on peut relier à la stabilité de la surface nucléaire. L'exposé qui suit traite successivement les noyaux pairs-pairs, les noyaux de masse impaire et les problèmes liés à la densité des niveaux.

Parmi les états excités peuplés par réaction (IL, xn) se trouvent des isomères avec une période ~ 100 ns (figure 14). Pour le niveau 12^+ , cette isomérisation résulte de la présence d'un doublet 12^+ , 10^+ de deux états possédant une configuration $(i1312)^{-2}$. L'intervalle d'énergie correspond à l'élément de matrice de l'interaction résiduelle ; sa faible valeur (AE - 60 keV) explique la période du niveau 12^+ . Celle-ci a permis la mesure du facteur gyromagnétique g de l'état excité par la méthode de la distribution angulaire différentielle perturbée des γ (TDPAD [118]).

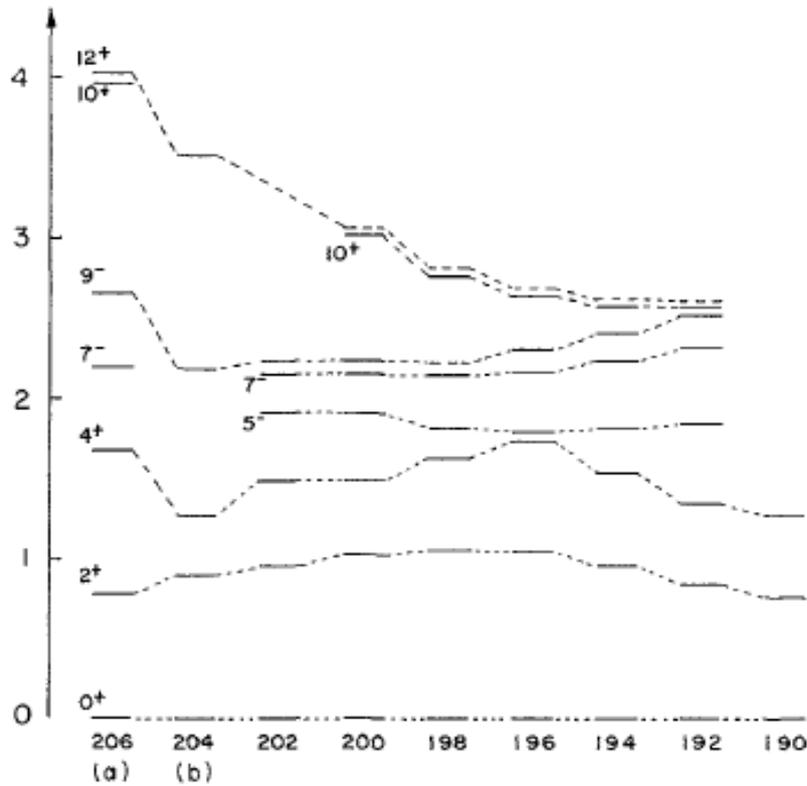


FIGURE 13 – États excités des isotopes de plomb observés par réaction (IL, xn) a)[116]; b) [117].

La figure 14 montre les valeurs de g mesurées pour plusieurs isotopes. Aux erreurs expérimentales près, g reste constant dans l'intervalle de masse avec $206 \gg A \gg 194$. la valeur mesurée pour ^{206}Pb [119] correspond au facteur gyromagnétique pour l'état de trou de neutron $i\ 13/2$, valeur obtenue également pour l'état $13/2^+$ du ^{205}Pb [120]. La constance de g suggère que la nature du niveau 12^+ ne change pas dans la plage de masse explorée. Il reste comprendre sa valeur numérique qui diffère notablement de la valeur de Schmidt. Deux processus expliquent essentiellement ce désaccord : les effets mésoniques [121] responsables d'une renormalisation de l'opérateur dipolaire magnétique ; l'effet de polarisation du coeur, résultant de la présence d'autres configurations dans la fonction d'onde, notamment celles correspondant à l'excitation particule-trou dans les états partenaires spin-orbite.

La figure 15 montre les schémas des états excités nourris par réaction (IL, xn) pour les isotopes ^{192}Pb et ^{190}Hg . Apparemment, on y trouve les mêmes états ; en fait, les propriétés sont différentes : alors que dans le plomb les niveaux de haut spin ont essentiellement une configuration à deux quasi-particules, ceux du mercure peuvent être regroupés en bandes bien développées. Les probabilités de transition réduites $B(E2; 2^+ \rightarrow 0^+)$ et $B(E2; 7^- \rightarrow 5^-)$ sont accélérées

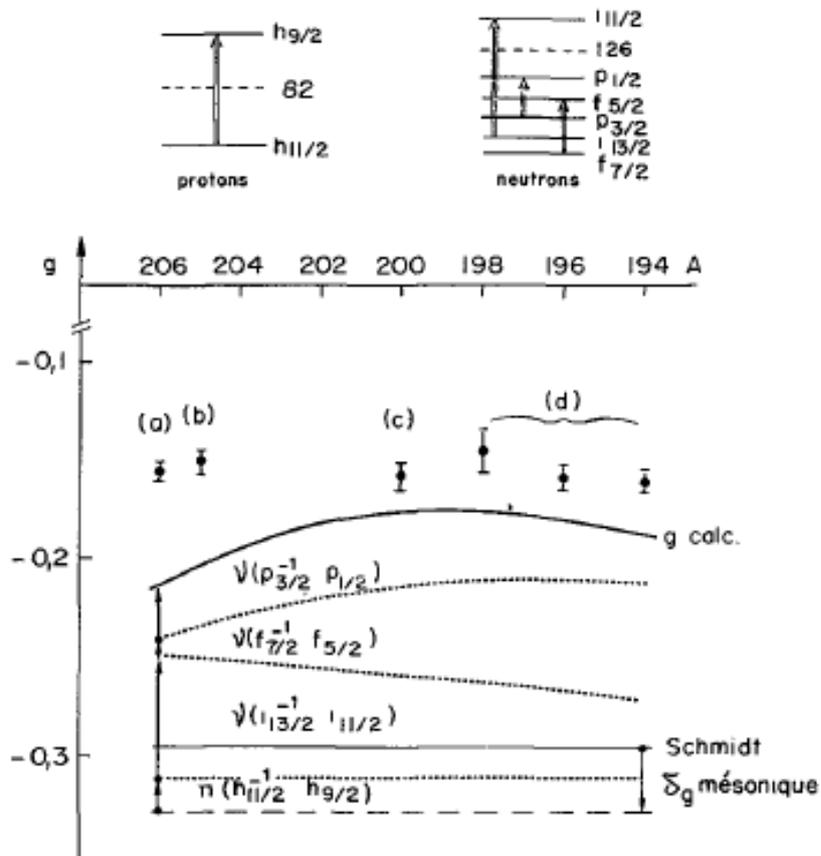


FIGURE 14 – Facteur gyromagnétique de l'état 12^+ des isotopes de plomb de masse $A = 206, 200, 198, 196, 194$ [118].

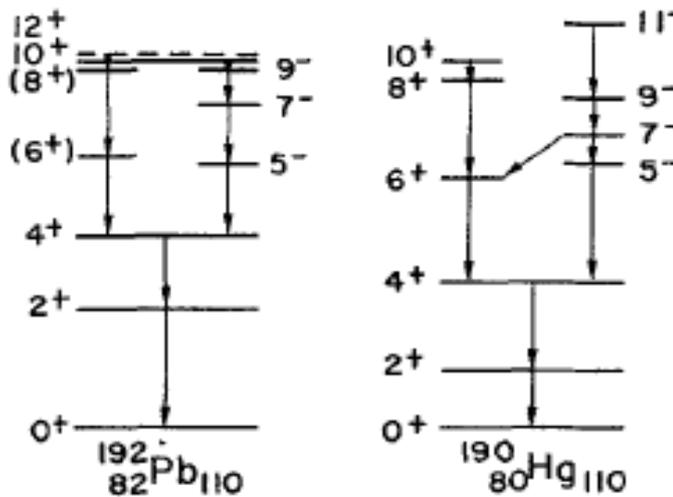


FIGURE 15 – États excités des isotopes de plomb ^{192}Pb et ^{190}Hg peuplés par réaction (IL, xn) [117].

d'un facteur 30 environ [122]. Pour les noyaux de mercure de masse $A > 190$, les prédictions théoriques [114] de mme que l'observation de bandes découplées dans les isotopes de masse impaire [123-124] s'accordent avec une forme d'équilibre oblate ($B \sim 0.10$ - à -0.15). Dans les isotopes de masse paire, la bande constituée par les niveaux à parité négative est bien interprétée dans un modèle de deux quasi-particules couplées avec un rotor oblate [123]. Ainsi, deux protons ajoutés dans l'état $h\ 9/2$ situé au dessus du niveau de Fermi ne semblent pas modifier la forme du coeur tandis que deux trous de protons stabilisent celui-ci dans une forme d'équilibre aplatie.

Si pour les isotopes de platine une transition de forme oblate-prolate est observée entre les noyaux de masse paire 188 et 186, la situation est moins nette pour les isotopes de mercure. Pour les noyaux impairs, des mesures utilisant la technique de pompage optique ont mis en évidence une brusque augmentation du rayon quadratique moyen entre les masses 187 et 185. Celle-ci a été interprétée comme une transition entre une forme d'équilibre oblate et une forme d'équilibre allongée dans l'état fondamental. Les expériences entreprises sur les noyaux de masse paire n'ont pas confirmé cette conclusion.

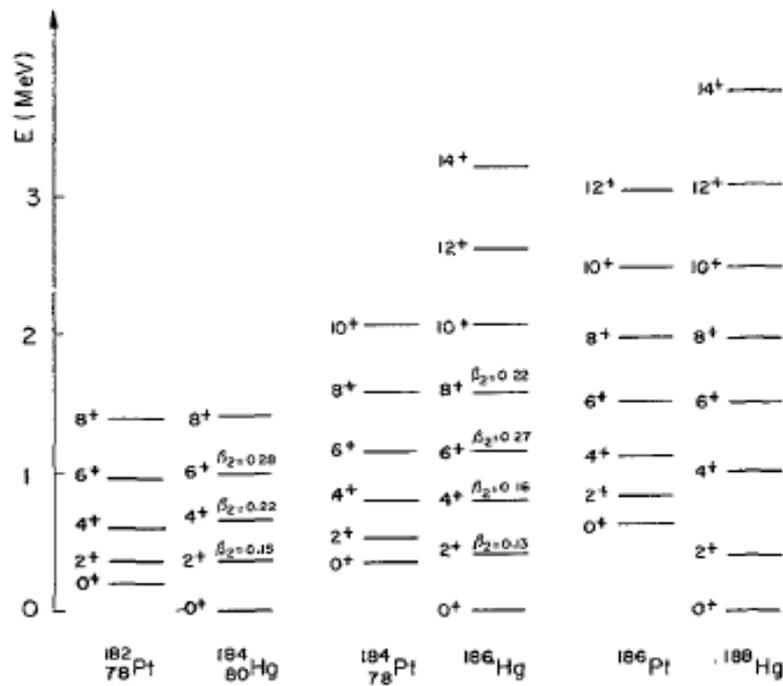


FIGURE 16 – Niveaux excités des isotopes de mercure de masse paire très déficitaires en neutrons ($A = 188, 186, 184$).

La figure 16 montre les états excités des isotopes de masse 188, 186 et 184 peuplés par réaction (IL, xn) [126] : l'énergie du premier 2^+ reste élevée pour s'accorder avec une forme

allongée ; par contre les états de plus grande énergie présentent une séquence comparable à celle de la bande rotationnelle observée dans les platines ayant le même nombre de neutrons. Les paramètres de déformation déduits des mesures de vie moyenne, et indiqués sur la figure 17, confirment que l'état fondamental et le premier état excité correspondent à une faible déformation, cependant qu'à plus grande énergie la bande yrast présente un caractère rotationnel. Pour expliquer la coexistence de ces deux formes d'équilibre, dans la cascade yrast de ces noyaux, Dickmann et Dietrich [127] élaborent un modèle extrêmement simple dans lequel ils interprètent les états 2^+ et 4^+ des isotopes $^{184,186}\text{Hg}$ par un mélange de configurations des états 2^+ et 4^+ vibrationnels et rotationnels, le fondamental 0^+ étant supposé vibrationnel et les états de moment angulaire $J \gg 6$ rotationnels. Frauendorf et Pashkevich [128], calculent en fonction des paramètres de déformation, l'énergie de l'état fondamental par la méthode de la goutte liquide et des corrections du modèle en couches de Strutinsky.

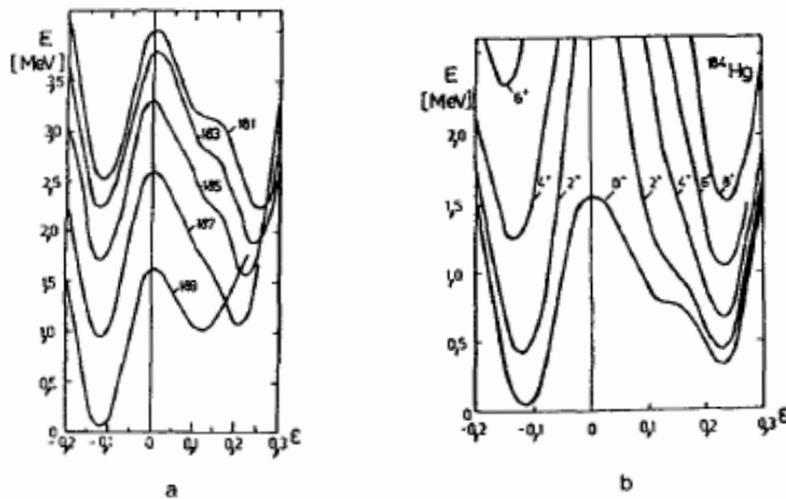


FIGURE 17 – Courbe d'énergie potentielle pour les isotopes de mercure de masse impaire (a) et paire ($A = 184$) (b) [128].

La figure 17a montre leurs résultats pour les isotopes impairs ; elle explique le changement de forme observé entre les masses 187 et 185. Pour les noyaux de masse paire, le minimum le plus bas correspond à une forme d'équilibre oblate, y compris pour $A = 184$. Sur la figure 18b est portée également l'énergie rotationnelle d'états excités de spin 2^+ , 4^+ , 6^+

Sur la figure 18 sont reportés ceux des niveaux observés dans ces mesures qu'il est possible de regrouper en deux bandes, l'une (celle de gauche) quasi-sphérique et l'autre déformée. L'accord avec les calculs des références [114] et [128] est remarquable

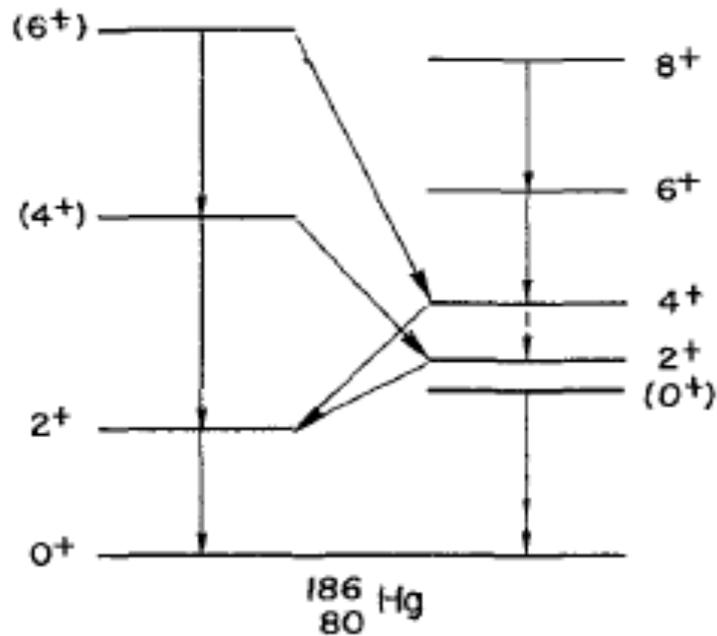


FIGURE 18 – Schéma des niveaux partiels de ^{186}Hg .

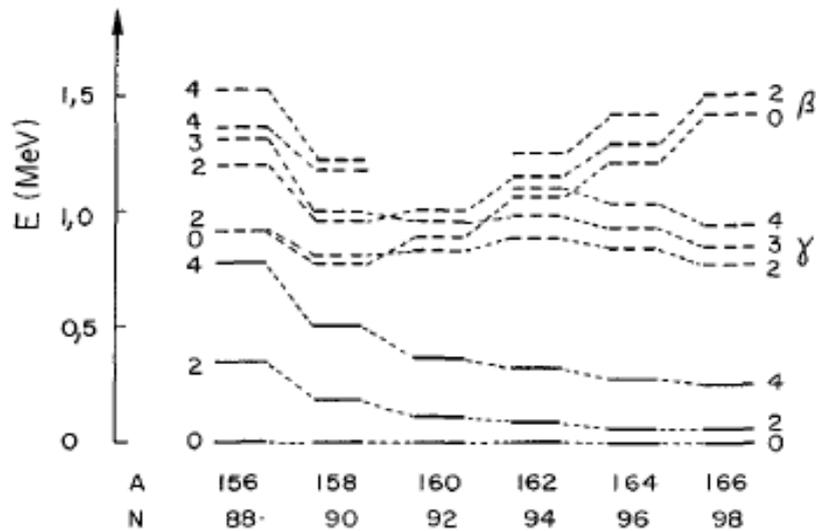


FIGURE 19 – Premiers niveaux excités de la bande fondamentale et des bandes β et γ pour différents isotopes d'erbium ($Z = 68$).

La figure 20 montre [129] l'évolution des premiers tats excits de la bande fondamentale et des bandes β et γ . Une variation rapide apparaît pour $A = 158$ qui se comporte comme un noyau de transition, alors que l'isotope de masse 156 présente une suite d'états excités comparables à ceux d'un noyau vibrationnel.

Les isotopes d'or $^{187,189}\text{Au}$ constituent également une famille de noyaux où l'on peut s'at-

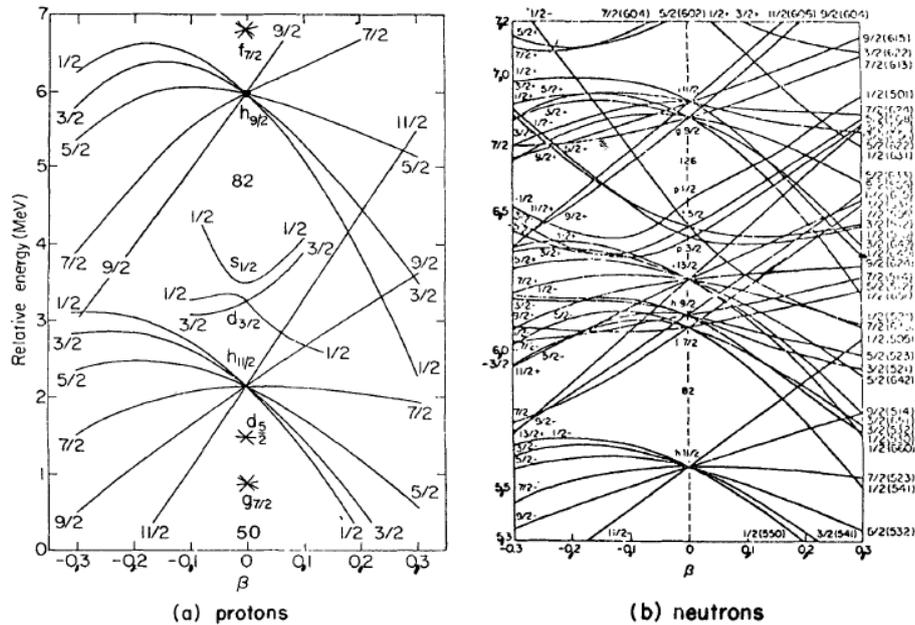


FIGURE 20 – Extraits des diagrammes de Nilsson pour les protons (a) et les neutrons (b).

tendre à trouver des changements de forme. La figure (20a) représente une portion du diagramme de Nilsson relative aux états de protons. Elle montre qu'il est possible de trouver des bandes collectives basées sur les états $h_{11/2}$ ou/et $h_{9/2}$, ces deux orbites étant situées de part et d'autre du niveau de Fermi. Des bandes découplées observées dans les isotopes de masse $A = 195, 193, 191$, et construites sur l'état $11/2^-$ ont permis de conclure que ces trois noyaux possèdent une forme d'équilibre aplatie [130].

II.9 Conclusion

Dans ce chapitre, il était question de trouver les solutions analytiques de notre modèle à partir de l'équation hypergéométrique le régissant. Comme les mouvements décrits par les nucléides sont toujours couplés entre eux, nous avons fait appel aux différentes techniques mathématiques afin de retrouver séparément ces équations de mouvements. Plusieurs fonctions mathématiques associées à la physique ont été explorées ; nous faisons allusions aux polynômes de Jacobi, de Rodrigues et Legendre. Il est maintenant question d'utiliser toutes ces notions pour expliquer les différents résultats concernant notre modèle utilisé à savoir : les énergies du spectre, les moments quadripolaires électriques, les différentes probabilités de transitions et d'engager une discussion relative à leurs validations.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

III.1 Introduction

La construction d'un modèle nucléaire ne repose pas toujours sur tous les noyaux présents dans la nature. Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé grâce à la méthode paramétrique de Nikiforov-Uvarov les solutions des équations hypergéométriques qui régissent le modèle du hamiltonien de Bohr à travers la détermination des propriétés du noyau du platine. Dans ce chapitre les valeurs théoriques des rapports d'énergie sont calculés ainsi que les moments de transitions quadrupôlaires électriques $B(E2)$ pour les noyaux triaxiaux 192, 194 et 196 du platine. Par ailleurs, les différents résultats théoriques obtenus seront comparés aux données expérimentales des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$ ainsi que leurs interprétations. Les courbes des effets d'étalonnages sont tracées et comparées à celles de la symétrie $Z(5)$ et des données expérimentales utilisées avec les potentiels de Morse et du couplage Killingbeck Morse.

III.2 Présentation des résultats et discussion

Les énergies de niveau de chaque nucléide sont obtenues en utilisant l'Eq. (II.126) et normalisées à l'état $2_{0,0}^+$ sous la forme [136] :

$$R_{L_n, n_\omega} = \frac{E_{L_n^+, n_\omega} - E_{0_{0,0}^+}}{E_{2_{0,0}^+} - E_{0_{0,0}^+}}, \quad (\text{III.1})$$

où

n : le nombre quantique principal,

n_ω : le nombre quantique secondaire,

L : le nombre quantique cinétique,

$E_{2_{0,0}^+} - E_{0_{0,0}^+}$, est défini comme les rapports des énergies normalisées au premier état excité,

$E_{L_n^+, n_\omega}$, représente l'énergie du noyau dans l'état L_n^+, n_ω .

Ainsi, la bande de l'état fondamental est donnée en considérant $n = 0$ et $n_\omega = 0$, la bande γ , $n = 0$ et $n_\omega = 1$ pour les valeurs impaires de L , tandis que $n = 0$ et $n_\omega = 2$ pour les valeurs paires de L et la bande β quand à elle, est identifiée pour $n = 1$ et $n_\omega = 0$.

TABLE 2 – Comparaison des résultats théoriques de l'état fondamental, des bandes β et γ des énergies, avec les données expérimentales [31,68], esM [30] et esMK [24] pour les isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt .

L_{band}	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Exp	esM	esKM	Our	Exp	esM	esKM	Our	Exp	esM	esKM	Our
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.479	2.475	2.598	2.442	2.470	2.445	2.486	2.446	2.465	2.509	2.321	2.424
6_g^+	4.314	4.317	3.597	4.108	4.299	4.280	4.488	4.079	4.290	4.440	3.440	4.031
8_g^+	6.377	6.492	4.836	5.931	6.392	6.509	6.728	5.254	6.333	6.767	4.823	5.627
10_g^+	8.624	9.001	6.285	7.592	8.671	9.148	9.073	7.272	8.558	9.489	6.432	7.097
2_γ^+	1.935	1.907	2.307	1.912	1.894	1.888	1.863	1.897	1.936	1.923	1.993	1.887
3_γ^+	2.910	2.364	2.743	2.711	2.809	2.716	2.788	2.698	2.845	2.795	2.483	2.668
4_γ^+	3.795	4.815	3.877	4.531	3.743	4.784	5.016	4.481	3.636	4.969	3.752	4.424
5_γ^+	4.682	5.060	4.016	4.727	4.563	5.034	5.272	4.677	4.525	5.230	3.907	4.672
6_γ^+	5.905	7.875	5.635	6.713	5.863	7.956	8.053	6.611	5.644	8.263	5.711	6.482
7_γ^+	6.677	7.647	5.503	6.585		7.717	7.841	6.513		8.016	5.564	6.362
8_γ^+	8.186	11.203	7.545	8.521	8.186	11.503	10.920	8.315	7.730	11.900	7.825	8.121
0_β^+	3.776	3.567	5.117	4.131	3.858	2.349	3.716	3.862	3.192	3.512	4.931	3.882
2_β^+	4.547	4.568	5.617	4.779	4.603	3.350	4.717	4.681	3.828	4.542	5.427	4.556
4_β^+	6.110	6.087	6.338	5.826	5.817	4.881	6.254	5.672	4.318	6.140	6.235	5.526
σ		0.988	0.935	0.439		1.202	0.989	0.577		1.450	1.075	0.585

Dans le tableau 2, nous présentons les différentes valeurs des rapports des énergies de la bande de l'état fondamental (2_g^+ , 4_g^+ , 6_g^+ , 8_g^+ et 10_g^+), de la bande γ (2_γ^+ , 3_γ^+ , 4_γ^+ , 5_γ^+ , 6_γ^+ , 7_γ^+ et 8_γ^+) et la bande β (0_β^+ , 2_β^+ et 4_β^+) par rapport au premier état excité des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$. Par ailleurs, les différentes valeurs des facteur de qualité de mesure σ des trois isotopes ont été présentées.

Discutons à présent sur les différentes valeurs obtenues :

✂ Platine 192

Bande de l'état fondamental

- Dans l'état 4_g^+ La valeurs expérimentale est supérieure aux valeurs théoriques de esM et du présent modèle (our). Par contre cette valeur est inférieure à la valeur théorique de esKM sauf dans l'état 2_g^+ où les valeurs sont identiques.

- Dans les états 6_g^+ , 8_g^+ et 10_g^+ , les valeurs expérimentales sont supérieures à la valeur théorique de esM et inférieures aux valeurs théoriques de esKM et du présent modèle (our). Dans l'état 2_g^+ , toutes les valeurs sont égales.

Bande γ

- Dans l'état 2_γ^+ , la valeur expérimentale est supérieure aux valeurs théoriques de esM et du présent modèle (our). Par contre, elle est inférieure à la valeur théorique de esKM.

- Dans l'état 3_γ^+ , la valeur expérimentale est supérieure aux valeurs théoriques.

- Dans l'état 4_γ^+ , la valeur expérimentale est inférieure aux valeurs théoriques.

- Dans les états 5_γ^+ et 8_γ^+ , les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques de esM et du présent modèle (our). Par contre, cette valeur est supérieure à la valeur théorique de esKM.

- Dans l'état 6_γ^+ , la valeur expérimentale est supérieure aux valeurs théoriques de esM et du présent modèle (our) et inférieure à la valeur théorique de esKM.

- Dans l'état 7_γ^+ , la valeur expérimentale est inférieure à la valeur théorique de esM et supérieure aux valeurs théoriques de esKM et du présent modèle (our).

Bande β

- Dans l'état 0_β^+ , la valeur expérimentale est supérieure à la valeur théorique de esM et inférieure aux valeurs théoriques de esKM et du présent modèle (our).

- Dans l'état 2_β^+ , la valeur expérimentale est inférieure aux valeurs théoriques.

- Dans l'état 4_β^+ , la valeur expérimentale est inférieure aux valeurs théoriques de esM et du présent modèle et supérieure à la valeur théorique de esKM.

✠ Platine 194

Bande de l'état fondamental

- Les valeurs expérimentales dans les états 4_g^+ et 6_g^+ et 8_g^+ sont supérieures aux valeurs théoriques de esM et du présent modèle (our). Par contre ces valeurs sont inférieures aux la valeurs théoriques de esKM sauf dans l'état 2_g^+ où les valeurs sont identiques.

- Dans l'état 10_g^+ , la valeur expérimentale est inférieure aux valeurs théoriques de esM et de esKM. Par contre cette valeur est supérieure à la donnée théorique du présent modèle (our).

Bande γ

- Dans l'état 2_γ^+ , la valeur expérimentale est supérieure aux valeurs théoriques de esM et de esKM. Par contre, elle est inférieure à la valeur théorique du présent modèle (our).

- Dans l'état 3_{γ}^{+} , la valeur expérimentale est supérieure aux valeurs théoriques.
- Dans l'état 4_{γ}^{+} et 5_{γ}^{+} , les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques de esM et de esKM et supérieure aux données théoriques du présent modèle (our).
- Dans les états 6_{γ}^{+} et 8_{γ}^{+} , les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques.

Bande β

- Dans l'état 0_{β}^{+} , la valeur expérimentale est inférieure aux valeurs théoriques de esM et de esKM et supérieure à la valeur théorique du présent modèle (our).
- Dans l'état 2_{β}^{+} , la valeur expérimentale est inférieure aux valeurs théoriques de esM et du présent modèle (our) et supérieure à la valeur théorique de esKM.
- Dans l'état 4_{β}^{+} , la valeur expérimentale est inférieure à la valeur théorique du présent modèle et supérieure aux valeurs théoriques de esM et de esKM.

✠ Platine 196

Bande de l'état fondamental

- Les valeurs expérimentales dans les états 4_g^{+} , 8_g^{+} et 10_g^{+} sont supérieures aux valeurs théoriques de esKM et du présent modèle (our). Par contre ces valeurs sont inférieures à la valeur théorique de esM sauf dans l'état 2_g^{+} où les valeurs sont identiques.
- Dans l'état 6_g^{+} , la valeur expérimentale est inférieure aux valeurs théoriques de esM et de esKM. Par contre cette valeur est supérieure à la donnée théorique du présent modèle (our).

Bande γ

- Dans l'état 2_{γ}^{+} , la valeur expérimentale est supérieure aux valeurs théoriques de esM et du présent modèle (our). Par contre, elle est inférieure à la valeur théorique de esKM.
- Dans l'état 3_{γ}^{+} , la valeur expérimentale est supérieure aux valeurs théoriques.
- Dans les états 4_{γ}^{+} , 6_{γ}^{+} et 8_{γ}^{+} les valeurs expérimentales sont inférieures aux données théoriques.
- Dans l'états 5_{γ}^{+} , les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques de esM et du présent modèle (our) et supérieure dans la donnée théorique de esKM.

Bande β

- Dans les états 0_{β}^{+} , 2_{β}^{+} , et 4_{β}^{+} , les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques.
- Ces différentes valeurs obtenues théoriquement, nous conduisent à tirer la conclusion suivante :

Les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle pour les isotopes du platine sont inférieures et meilleures que celles obtenues avec les potentiels de Morse et du couplage ki-

lingberg Morse.

Le potentiel utilisé étant appliqué aux isotopes de platine, on peut écrire que :

$$\sigma_{th} < \sigma_{esKM} < \sigma_{esM}.$$

Nous allons présenter quelques notions de bases sur les calculs des ratios B(E2) intra et inter-bande. ces ratios sont obtenus à partir des différentes transitions et en fonction des valeurs disponibles telles que représentées dans les tableaux ci-dessous, la comparaison de ces résultats obtenus à partir de notre potentiel sont comparés avec les données expérimentales pour les isotopes du platine. Les transitions quadrupôlaires observées ici sont les suivantes :

état fondamental \rightarrow état fondamental,

γ -pair \rightarrow état fondamental,

γ -impair \rightarrow état fondamental,

γ -pair \rightarrow γ -pair,

γ -impair \rightarrow γ -impair,

γ -impair \rightarrow γ -pair et

$\beta \rightarrow \beta$.

Il est important de savoir que les résultats du tableau 3 ont été obtenus en utilisant les règles de sélections imposées par les Coefficients de Clebsch-Gordan (CCG), c'est-à-dire que les transitions permises sont celles qui vérifient l'équation $\Delta\zeta = \pm 2$. Afin d'évaluer ces transitions permises, on calcule la valeur de $\Delta\zeta = \zeta_f - \zeta_i$. Les paramètres fixes pour chacune des bandes sont :

- l'état fondamental (gsb) par $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 0, 0)$,

- la bande γ pour les valeurs paires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 2, 0)$,

- la bande γ pour les valeurs impaires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 1, 0)$ et

- la bande β s'identifie pour $(n, n_\omega, n_\gamma) = (1, 0, 0)$.

• Les transitions $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0})$ et $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2})$ sont des exemples de transitions permises par la règle de sélection des CCG. En effet, $\zeta_i = L_i - (n_\omega)_i$ et $\zeta_f = L_f - (n_\omega)_f$

- $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}) : \zeta_i = 4 - 0 = 4, \zeta_f = 2 - 0 = 2$ et on trouve $\Delta\zeta = 2$,

- $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2}) : \zeta_i = 7 - 1 = 6, \zeta_f = 6 - 2 = 4$ et on trouve $\Delta\zeta = 2$.

• Les transitions $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2})$ et $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0})$ sont des exemples de transitions non permises par la règle de sélection des CCG. En effet, $\zeta_i = L_i - (n_\omega)_i$ et $\zeta_f = L_f - (n_\omega)_f$

- $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2}) : \zeta_i = 0 - 0 = 0, \zeta_f = 2 - 2 = 0$ et on trouve $\Delta\zeta = 0$,

- $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0}) : \zeta_i = 2 - 0 = 2, \zeta_f = 3 - 1 = 2$ et on trouve $\Delta\zeta = 0$.

En outre, la transition d'une bande f à une bande i est dite non permise si l'énergie de transition est insuffisante ou très grande pour se retrouver au niveau indiqué.

TABLE 3 – Comparaison des transitions B(E2) en considérant les données expérimentales avec la prédiction de Morse des isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$.

$L_{n,n\omega}^i \rightarrow L_{n,n\omega}^f$	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Exp	esM	MsK	Our	Exp	esM	MsK	Our	Exp	esM	MsK	Our
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.563	1.563	1.541	1.562	1.73	1.630	1.541	1.573	1.49	1.540	1.541	1.580
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	-	2.213	2.216	1.849	1.37	2.334	2.217	1.877	0.95	2.141	2.210	1.898
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	-	2.735	2.912	2.281	1.02	2.835	2.913	2.329	1.09	2.597	2.915	2.380
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$	-	3.163	3.740	2.892	0.69	3.187	3.744	2.976	-	2.955	3.747	3.073
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	1.91	1.586	1.560	1.588	1.81	1.653	1.560	1.593	-	1.564	1.560	1.603
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	-	0.350	0.351	0.512	0.285	0.370	0.351	0.368	0.42	0.339	0.351	0.370
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	-	-	0.216	0.442	-	-	0.217	0.231	-	-	0.217	0.231
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	-	-	0.157	0.311	-	-	0.157	0.170	-	-	0.126	0.173
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.67	1.236	1.224	1.187	-	1.305	1.224	1.267	-	1.200	1.225	1.065
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	-	-	1.057	0.976	-	-	1.058	0.917	-	-	1.058	0.762
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	-	-	1.010	0.684	-	-	1.010	0.686	-	-	1.011	0.553
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	-	0.734	0.728	0.773	0.428	0.776	0.728	0.740	0.430	0.716	0.728	0.744
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	-	1.081	1.170	1.252	-	1.112	1.170	1.276	-	1.022	1.171	1.307
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	-	1.715	2.170	2.476	-	1.697	2.177	2.563	-	1.589	2.170	2.662
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$	-	1.250	1.260	1.309	-	1.316	1.261	1.326	-	1.205	1.261	1.345
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$	-	1.943	2.130	2.319	-	1.994	2.137	2.375	-	1.834	2.139	2.339
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	1.79	2.147	2.117	2.102	-	2.264	2.117	0.881	-	2.094	2.118	1.891
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	-	-	1.451	1.141	-	-	1.452	1.223	-	-	1.453	1.016
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	-	-	1.658	0.993	-	-	1.659	1.029	-	-	1.661	0.823
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$	-	-	0.926	1.348	-	-	1.425	1.353	-	-	1.748	1.358
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$	-	-	0.926	1.221	-	-	1.424	2.035	-	-	2.048	2.049

Dans le tableau 3, nous présentons quelques résultats des transitions B(E2) intra et inter-bande calculés à partir des différentes transitions comparées aux données disponibles dans la littérature. Les différentes transitions quadrupôlaires obtenues dans le tableau 3 sont décrites de la manière suivante :

- les transitions de l'état fondamental.

- dans les états allant de $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$ à $10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$. Les valeurs théoriques du ^{192}Pt et celles de la prédiction de Morse croissent. Par contre, les données expérimentales sont absentes dans les transitions allant de $6_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$ à $10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$.

- Pour l'isotope ^{194}Pt les données expérimentales décroissent tandis que celles de la prédiction de Morse croissent. On constate aussi que les valeurs théoriques des énergies dans cette bande de transition sont plus proches pour les valeurs expérimentales.

- Pour ^{196}Pt , nous constatons également que les valeurs théoriques et celles de la prédiction de Morse croissent, par contre les données expérimentales décroissent.

- les transitions de γ -pair \rightarrow état fondamental.

- Pour l'isotope ^{194}Pt les valeurs théoriques sont inférieures aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse dans la bande de transition $4_{0,2} \rightarrow 4_{0,0}$.

- Pour l'isotope ^{196}Pt la valeur théorique est inférieure à la donnée expérimentale dans la bande de transition $4_{0,2} \rightarrow 4_{0,0}$. Par ailleurs, les valeurs théoriques et celles de la prédiction de Morse décroissent.

- les transitions de γ -impair \rightarrow état fondamental

les données théoriques sont supérieures par rapport aux données expérimentales dans la bande de transition $3_{0,1} \rightarrow 4_{0,0}$ pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$. Dans le même état de transition, on constate que les valeurs théoriques sont inférieures aux données de la prédiction de Morse.

- les transitions γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair,

- dans cette gamme de transition de $4_{0,2} \rightarrow 2_{0,2}$ à $8_{0,2} \rightarrow 6_{0,2}$, les valeurs théoriques des isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ sont inférieures aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse.

- les transitions γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair,

- Les données expérimentales pour les transitions allant de $5_{0,1} \rightarrow 3_{0,1}$ à $7_{0,1} \rightarrow 5_{0,1}$ sont absentes pour les trois isotopes du platine. De plus, les valeurs théoriques dans cette gamme de transition sont supérieures aux données de la prédiction de Morse pour ces trois isotopes.

- les transitions γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair,

- dans cette gamme de transition, on constate que les données théoriques sont inférieures aux valeurs de la prédiction de Morse dans les états de transition allant de $3_{0,1} \rightarrow 4_{0,2}$ à $9_{0,1} \rightarrow 6_{0,2}$.

- les transitions $\beta \rightarrow \beta$, c'est à dire de $2_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$ à $4_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$:

les valeurs théoriques diminuent dans le cas de l'isotope ^{192}Pt et augmentent pour les isotopes de $^{194,196}\text{Pt}$. Par contre, les données expérimentales dans cette bande de transition et celles de la prédiction ne figurent pas dans la littérature.

On remarque dans le tableau 3 que, plusieurs valeurs expérimentales et celles de la prédiction de Morse[30] ne figurent pas dans la littérature. L'absence de ces données ne nous permettent pas d'exploiter normalement le tableau 3 et de comparer les valeurs obtenues. Sauf, dans les transitions des états $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$ à $10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$, que nous avons presque toutes les données pour

les trois isotopes étudiés.

TABLE 4 – Les valeurs numériques des paramètres utilisés pour chaque isotope.

parameters	¹⁹² Pt	¹⁹⁴ Pt	¹⁹⁶ Pt
a	2.11	9.02	13.04
b	-2.40	-4.32	-2.35
c	49	50	48
θ	0.0014	0.0014	0.0014
\bar{c}	0.01	0.01	0.01

Le tableau 4, présente quelques valeurs des paramètres utilisés pour tracer les courbes des variations du potentiel combiné de Yukawa inverse quadratique et de Kratzer écranté

TABLE 5 – Comparaison des valeurs théoriques de l'état fondamental, dans la bande γ et β des rapports des énergies normalisées des travaux effectués au Laboratoire par Omon et al. [68], Ndjobo et al. [93] et Ahmadou et al. [70] sur les isotopes du ¹⁹²Pt, ¹⁹⁴Pt et ¹⁹⁶Pt.

L_{band}	¹⁹² Pt				¹⁹⁴ Pt				¹⁹⁶ Pt			
	[68]	[93]	[70]	[71]	[68]	[93]	[70]	[71]	[68]	[93]	[70]	[71]
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.479	2.451	2.519	2.442	2.470	2.448	2.516	2.446	2.464	2.433	2.500	2.424
6_g^+	4.314	4.131	4.386	4.108	4.299	4.118	4.874	4.079	4.290	4.064	4.312	4.031
8_g^+	6.387	5.850	6.427	5.931	6.392	5.821	6.400	5.254	6.333	5.706	6.255	5.627
10_g^+	8.624	7.482	8.499	7.592	8.671	7.432	8.450	7.272	8.558	7.238	8.189	7.097
12_g^+	8.816	7.913				11.431			8.384	8.231		
		10.266				8.887				8.607		
2_γ^+	1.935	1.900	1.932	1.912	1.894	1.898	1.930	1.897	1.936	1.891	1.923	1.887
3_γ^+	2.910	2.714	2.803	2.711	2.809	2.709	2.799	2.698	2.854	2.690	2.778	2.668
4_γ^+	3.795	4.551	4.871	4.531	3.743	4.534	4.857	4.481	3.636	4.468	4.778	4.424
5_γ^+	4.682	4.752	5.106	4.727	4.563	4.733	5.090	4.677	4.525	4.460	5.003	4.672
6_γ^+	5.905	6.793	7.607	6.713	5.863	6.752	7.568	6.611	5.644	6.594	7.362	6.482
7_γ^+	6.677	6.645	7.419	6.585		6.606	7.382	6.513		6.485	7.186	6.362
8_γ^+	8.186	8.653	10.074	8.521		8.585	10.004	8.315	7.730	8.324	9.634	8.121
9_γ^+					8.538							
10_γ^+												
11_γ^+												
12_γ^+												
0_β^+	3.776	3.936	2.805	4.131	3.858	3.950	2.933	3.862	3.192	2.904	2.557	3.882
2_β^+	4.547	4.637	3.625	4.779	4.603	4.648	3.784	4.681	3.828	3.612	3.506	4.556
4_β^+	6.110	5.667	4.852	5.826	5.817	5.670	5.079	5.672	4.318	4.642	4.784	4.526
6_β^+										7.334		
σ	0.403	0.480	0.705	0.439	0.496	0.500	0.834	0.577	0.624	0.561	0.766	0.585

Le tableau 5 présente une étude comparative des valeurs théoriques des isotopes du platine utilisé dans le Laboratoire de Physique Nucléaire. Ces valeurs théoriques ont été obtenues à partir des différents modèles utilisés tels que : le potentiel de Kratzer écranté [68], le potentiel fractionnaire de Kratzer écranté appliqué dans l'équation conformable fractionnaire du hamiltonien de Bohr [93] et le potentiel fractionnaire inverse à quatre termes [70] appliqué également dans l'équation conformable fractionnaire du hamiltonien de Bohr. À partir de ces données, nous observons que les valeurs théoriques obtenues par notre modèle sont inférieures et meilleures que celles des valeurs présentées par [93] et [70] dans le cas du platine ^{192}Pt elles sont également inférieures et meilleures que celles des données théoriques proposées par [68] et [70] dans le cas de l'isotope ^{196}Pt et enfin pour le cas de l'isotope ^{194}Pt nos valeurs théoriques sont meilleures uniquement à celle de Ahmadou par rapport aux autres types de potentiels utilisés. Et cela se traduit par les relations suivantes :

- Pour le ^{192}Pt : $\sigma_{[68]} < \sigma_{[71]} < \sigma_{[93]} < \sigma_{[70]}$,
- Pour le ^{194}Pt : $\sigma_{[68]} < \sigma_{[93]} < \sigma_{[71]} < \sigma_{[70]}$,
- Et enfin, pour le ^{196}Pt : $\sigma_{[93]} < \sigma_{[71]} < \sigma_{[68]} < \sigma_{[70]}$.

Il est à mentionner ici que les données théoriques proposées par le modèle fractionnaire d'Ahmadou ont été calculées pour un paramètre fractionnaire noté α tel que $\alpha = 0.9$

TABLE 6 – Comparaison des valeurs théoriques de l'état fondamental, dans la bande γ et β des rapports des énergies normalisées des travaux effectués au Laboratoire par Ema'a et al. [94], Tchana et al. [24] et Nga et al. [95] sur les isotopes du ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt .

L_{band}	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	[94]	[24]	[95]	[71]	[94]	[24]	[95]	[71]	[94]	[24]	[95]	[71]
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.447	2.598	2.488	2.442	2.436	2.486	2.484	2.446	2.423	2.321	2.463	2.424
6_g^+	4.113	3.597	4.267	4.108	4.073	4.488	4.252	4.079	4.029	3.440	4.170	4.031
8_g^+	5.805	4.836	6.148	5.931	5.251	6.728	6.114	5.254	5.626	4.823	5.930	5.627
10_g^+	7.395	6.285	7.992	7.592	7.251	9.073	8.932	7.272	7.095	6.432	7.609	7.097
12_g^+	8.816	7.913				11.431			8.384	8.231		
2_γ^+	1.897	2.307	1.917	1.912	1.892	1.863	1.916	1.897	1.886	1.993	1.905	1.887
3_γ^+	2.708	2.743	2.763	2.711	2.694	2.788	2.757	2.698	2.667	2.483	2.729	2.668
4_γ^+	4.527	3.877	4.720	4.531	4.478	5.016	4.701	4.481	4.423	3.752	4.598	4.424
5_γ^+	4.725	4.016	4.939	4.727	4.671	5.272	4.918	4.677	4.671	3.907	4.804	4.672
6_γ^+	6.726	5.635	7.207	6.713	6.608	8.053	7.158	6.611	6.480	5.711	6.899	6.482
7_γ^+	6.582	5.503	7.040	6.585	6.469	7.841	6.994	6.513		6.469	5.564	6.362
8_γ^+	8.523	7.545	9.349	8.521	8.328	10.920	9.265	8.315	8.120	7.825	8.816	8.121
9_γ^+		7.172				10.390				7.414		
10_γ^+	9.972	9.573			9.703	13.604			9.416	10.056		
11_γ^+												
12_γ^+												
0_β^+	4.133	5.177	2.805	4.131	4.009	3.716	2.774	3.862	3.881	4.931	2.613	3.882
2_β^+	4.818	5.617	3.625	4.779	4.689	4.717	3.591	4.681	4.555	5.427	3.418	4.556
4_β^+	5.820	6.338	4.851	5.826	5.676	6.254	4.811	5.672	5.525	6.235	4.604	4.526
6_β^+	6.989	7.319			6.817	8.171			6.637	7.334		
σ	0.491	0.935	0.705	0.439	0.587	0.989	0.717	0.577	0.692	1.075	0.602	0.585

Le tableau 6 présente également une étude comparative des valeurs théoriques des isotopes du platine utilisé dans le Laboratoire de Physique Nucléaire. Ces valeurs théoriques ont été obtenues à partir des différents modèles utilisés tels que : le potentiel de type exponentiel multi-paramétrique [94] , le potentiel de Killingbeck plus Morse [24], le potentiel fractionnaire inverse à quatre termes [95] et le potentiel écranté de Kratzer. Dans ce cas précis, nous observons que les valeurs théoriques obtenues par notre modèle sont inférieures et meilleures par rapport aux autres types de potentiels utilisés. Et cela se traduit par les relations suivantes :

- Pour le ^{192}Pt : $\sigma_{[71]} < \sigma_{[94]} < \sigma_{[95]} < \sigma_{[24]}$,
- Pour le ^{194}Pt : $\sigma_{[94]} < \sigma_{[71]} < \sigma_{[95]} < \sigma_{[24]}$,

- Et enfin, pour le ^{196}Pt : $\sigma_{[71]} < \sigma_{[95]} < \sigma_{[94]} < \sigma_{[24]}$.

TABLE 7 – Comparaison des valeurs théoriques des transitions B(E2) des isotopes du ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt des travaux effectués au Laboratoire par Omon et al. [68], Ndjoko et al. [93], Ahmadou et al. [70] pour des transitions.

Transition	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	[68]	[93]	[70]	[71]	[68]	[93]	[70]	[71]	[68]	[93]	[70]	[71]
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.497	1.496	1.464	1.562	1.482	1.481	1.466	1.573	1.476	1.474	1.475	1.580
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	1.933	1.932	1.970	1.849	1.877	1.876	1.975	1.877	2.006	1.852	1.851	1.898
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	2.250	2.249	2.394	2.281	2.125	2.124	2.402	2.329	2.469	2.061	2.067	2.380
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$	2.598	2.598	2.831	2.892	2.371	2.370	2.850	2.976	2.955	2.194	2.264	3.073
$12_g^+ \rightarrow 10_g^+$												
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	0.761		0.760	0.747	1.643	0.765	0.767	0.748	1.604	0.753	0.766	0.767
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.342	0.341	0.310	0.325	0.348	0.348	0.311	0.371	0.316	0.352	0.351	0.370
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	0.220	0.219	0.176	0.442	0.228	0.229	0.177	0.231	0.181	0.231	0.232	0.231
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	0.171	0.170	0.118	0.311	0.182	0.183	0.119	0.122	0.185	0.186		0.173
$10_\gamma^+ \rightarrow 10_g^+$												
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	1.016	1.014	1.059	1.187	1.013	1.012	1.116	1.267	1.132	1.012	1.011	1.065
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	0.787	0.786	0.803	0.976	0.784	0.778	0.888	0.917	0.911	0.782	0.783	0.762
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	0.691	0.690	0.669	0.684	0.690	0.689	0.778	0.686	0.809	0.691	0.689	0.553
$9_\gamma^+ \rightarrow 10_g^+$			0.771									
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	0.365	0.366	0.328	0.773	0.368	3.367	0.311	0.740	0.332	0.370	0.369	0.744
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	1.239	1.238	0.938	1.252	1.279	1.277	0.943	1.276	0.968	1.296	1.295	1.307
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	2.442	2.441	1.564	2.476	2.295	2.294	1.576	2.563	1.644	2.654	2.658	2.662
$10_\gamma^+ \rightarrow 8_\gamma^+$												
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$	1.255	1.254	1.102	1.309	1.263	1.262	1.106	1.326	1.124	1.264	1.266	1.345
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$	2.121	2.122	1.702	2.319	2.150	2.148	1.711	2.375	1.762	2.158	1.266	2.339
$9_\gamma^+ \rightarrow 7_\gamma^+$												
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	1.091	1.093	1.954	2.102	1.108	1.107	1.958	0.881	1.981	1.115	1.118	1.891
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	1.577	1.576	2.401	1.141	1.647	1.645	2.413	1.223	2.482	1.674	1.675	1.016
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	1.904	1.904	2.472	0.993	2.047	2.046	2.491	1.029	2.601	2.106	2.108	0.823
$9_\gamma^+ \rightarrow 8_\gamma^+$												
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$	1.497		1.534	1.348	1.482		1.540	1.353	1.569		1.475	1.358
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$	1.933		4.452	1.221	1.877		4.471	2.035	4.580		1.851	2.049
$6_\beta^+ \rightarrow 4_\beta^+$												

Le tableau 7 ci-dessus présente la comparaison entre les valeurs théoriques des différentes transitions des énergies dans les états excités pour les isotopes du platine étudié au Laboratoire à l'aide des différents potentiels utilisés par [68], [70] et [93]. Ainsi, nous constatons que :

- dans la bande γ , les valeurs théoriques obtenues par notre modèle dans la plupart des cas sont meilleures par rapport aux autres données.

- dans la bande des états fondamentaux , les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle ne sont pas meilleures.

- dans la bande des états β les données théorique de notre modèle sont meilleures au niveau de la bande d'énergie de l'état $2^+_{\beta} \rightarrow 0^+_{\beta}$ mais pas meilleures par rapport aux autres états de la même bande d'énergie.

TABLE 8 – Comparaison des valeurs théoriques des transitions B(E2) des isotopes du ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt des travaux effectués au Laboratoire par Ema'a et al. [94], Tchana et al. [24], Nga et al. [95] pour des transitions.

Transition	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	[94]	[24]	[95]	[71]	[94]	[24]	[95]	[71]	[94]	[24]	[95]	[71]
$4^+_g \rightarrow 2^+_g$	1.562	0.725	1.464	1.562	1.581	1.530	1.466	1.573	1.581	0.814	1.475	1.580
$6^+_g \rightarrow 4^+_g$	1.847	0.988	1.968	1.849	1.900	1.914	1.974	1.877	1.900	1.105	2.004	1.898
$8^+_g \rightarrow 6^+_g$	2.271	1.225	2.391	2.281	2.382	2.147	2.402	2.329	2.382	1.365	2.464	2.380
$10^+_g \rightarrow 8^+_g$	2.805	1.434	2.824	2.892	3.075	2.256	2.843	2.976	3.075	1.590	2.950	3.073
$12^+_g \rightarrow 10^+_g$	3.721	1.611			4.047	2.278			4.047	1.778		
$2^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_g$	1.585		1.495	1.588	1.643	1.653	1.496	1.593	1.604	1.564	1.505	1.603
$4^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_g$	0.361		0.310	0.512	0.325	0.370	0.311	0.368	0.371	0.339	0.315	0.370
$6^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_g$	0.225		0.176	0.442	0.166		0.177	0.231	0.233		0.181	0.231
$8^+_{\gamma} \rightarrow 8^+_g$	0.165		0.118	0.311	0.097		0.118	0.170	0.174	0.122		0.173
$10^+_{\gamma} \rightarrow 10^+_g$	0.199				0.144				0.144			
$3^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_g$		1.236	1.113	1.187		1.305	1.115	1.267		1.200	1.131	1.065
$5^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_g$			0.882	0.976			0.886	0.917			0.910	0.762
$7^+_{\gamma} \rightarrow 8^+_g$			0.771	0.684			0.777	0.686			0.807	0.553
$9^+_{\gamma} \rightarrow 10^+_g$			0.771									
$4^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	0.733	0.734	0.656	0.773	0.745	3.013	0.658	0.740	0.745	0.716	0.664	0.744
$6^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\gamma}$	1.247	1.739	0.937	1.252	1.308	2.917	0.941	1.276	1.308	1.022	0.967	1.307
$8^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\gamma}$	2.473	1.715	1.561	2.476	2.663	2.765	1.572	2.563	2.663	1.589	1.639	2.662
$10^+_{\gamma} \rightarrow 8^+_{\gamma}$	4.161	1.715			4.575	1.697			4.575	1.589		
$5^+_{\gamma} \rightarrow 3^+_{\gamma}$	1.306	1.259	1.101	1.309	1.346	2.376	1.105	1.326	1.346	1.407	1.123	1.345
$7^+_{\gamma} \rightarrow 5^+_{\gamma}$	2.314	1.472	1.699	2.319	2.440	2.466	1.708	2.375	2.440	1.637	1.758	2.339
$9^+_{\gamma} \rightarrow 7^+_{\gamma}$		1.652				2.458				1.827		
$3^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\gamma}$		0.869	1.952	2.102		2.264	1.956	0.881			1.979	1.891
$5^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\gamma}$			1.198	1.141			1.204	1.223			1.238	1.016
$7^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\gamma}$			1.233	0.993			1.242	1.029			1.296	0.823
$9^+_{\gamma} \rightarrow 8^+_{\gamma}$												
$2^+_{\beta} \rightarrow 0^+_{\beta}$	1.345	0.440	1.135	1.348	1.359	0.936	1.137	1.353	1.359	0.491	1.146	1.358
$4^+_{\beta} \rightarrow 2^+_{\beta}$	2.018	1.553	2.007	1.221	2.051	0.000	2.018	2.035	2.051	0.000	2.078	2.049
$6^+_{\beta} \rightarrow 4^+_{\beta}$	2.822	1.739			2.894				2.894			

Le tableau 8 ci-dessus présente également la comparaison entre les valeurs théoriques ob-

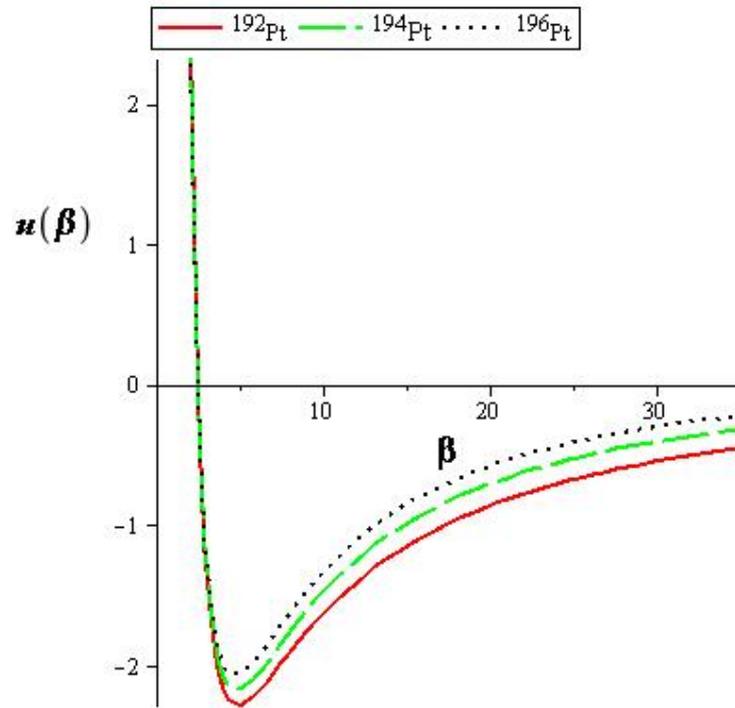


FIGURE 21 – Representation du potentiel combiné de Yukawa inversement quadratique et de Kratzer écrané pour les isotopes de platine $^{192,194,196}\text{Pt}$.

tenues dans les différentes bandes des états excités des isotopes du platine utilisé dans le Laboratoire à l'aide des différents potentiels utilisés par [94], [24] et [95]. Ainsi, nous constatons que :

- dans la bande γ , les valeurs théoriques obtenues par notre modèle dans la plupart des cas sont meilleures par rapport aux autres données.
- dans les bandes des états fondamentaux et la bande β , les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle ne sont pas meilleures.

Nous pouvons donc affirmer que, le couplage des potentiels de Yukawa inversement quadratique et de Kratzer écrané est bien applicable et donne de bonnes valeurs par rapport aux autres potentiels utilisés.

La figure 21 illustre le potentiel d'interaction du présent modèle pour les noyaux $^{192,194,196}\text{Pt}$. Ces courbes ont la forme d'un puits de potentiel, et elles confinent également. En regardant ces courbes, on peut voir que pour une déformation β donnée, les forces agissant sur les nucléons sont plus fortes pour le noyau atomique de ^{192}Pt , moins fortes pour le noyau atomique de ^{194}Pt et faible pour le noyaux de ^{196}Pt . Par ailleurs, toutes les courbes gardent la même forme de

puits de potentiel pour tous les noyaux atomiques considérés. De plus, quel que soit l'isotope, le potentiel va à l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et va à zéro lorsque β va à l'infini. De plus, le potentiel limite d'avantage pour les petites valeurs de β .

Afin de confirmer si dans le présent modèle cette signature pour la triaxialité est révélée, nous avons tracé dans les figures 22, 23 et 24 l'effet de l'étalonnage des énergies $S(J)$ en fonction de J pour les isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$. À des fins de comparaison, nous avons également tracé les valeurs du modèle combiné de Hulthen et de Kratzer écranté [60], celles du modèle de la symétrie Z(5) et enfin celles des prédictions expérimentales. La figure 22 montre la comparaison entre les effets de l'étalonnage des valeurs théoriques, celles du modèle de la symétrie Z(5) [99], celles de la prédiction de Hulthen plus Kratzer [69] et enfin celles des données expérimentales pour le noyau atomique ^{192}Pt .

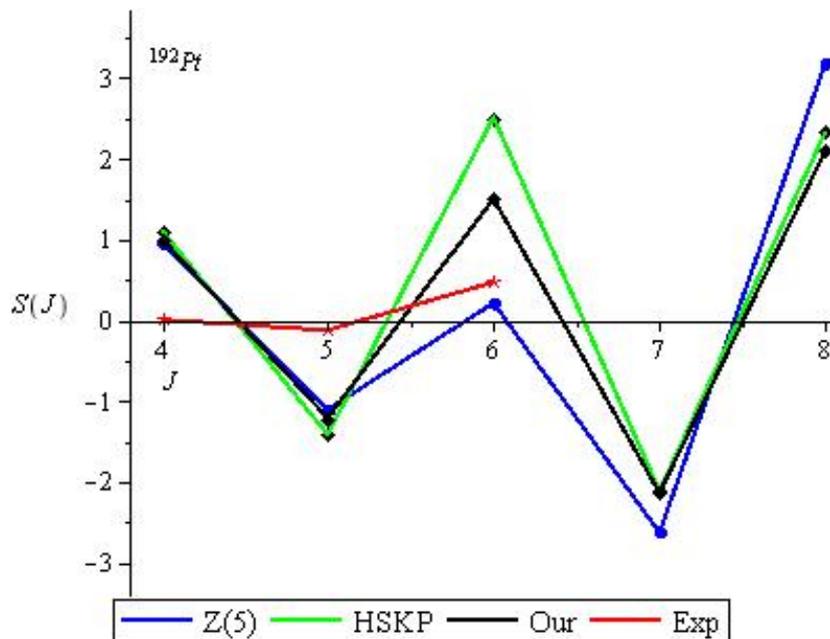


FIGURE 22 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie Z (5) [129] et des données expérimentales pour le ^{192}Pt .

En effet, les courbes présentées dans la figure 22 montrent qu'aux points 6_{γ}^{+} à 8_{γ}^{+} , le décalage est significatif entre la symétrie Z(5) et la théorie. Aux points 4_{γ}^{+} , 5_{γ}^{+} et 7_{γ}^{+} le décalage est très faible. on peut remarquer que la courbe fournie par notre modèle s'éloigne de celle des prédictions Hulthen plus Kratzer écranté aux points 6_{γ}^{+} mais se rapproche de la prédiction expérimentale aux points 4_{γ}^{+} et 5_{γ}^{+} .

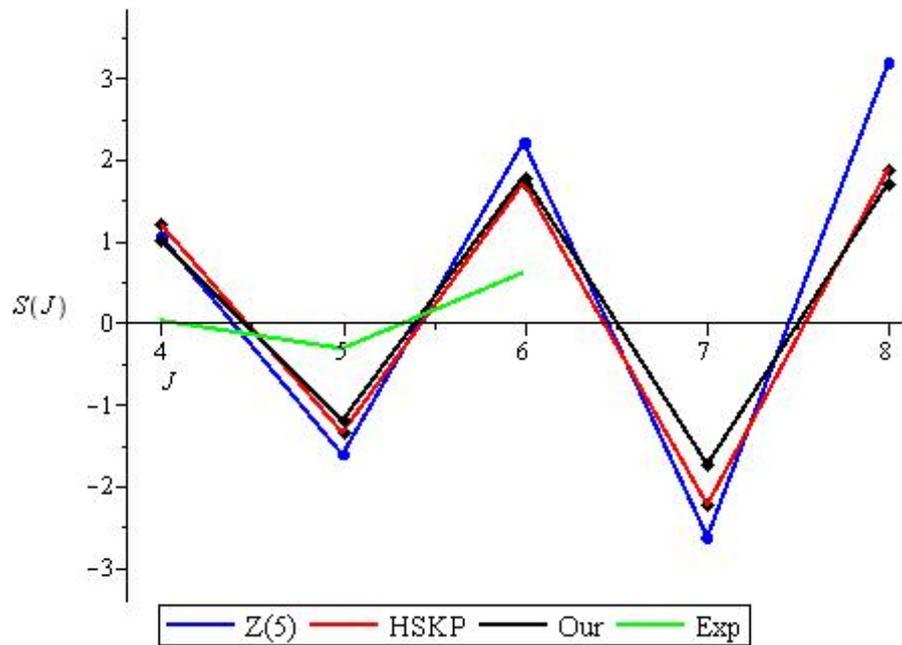


FIGURE 23 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [99] et des données expérimentales pour le ^{194}Pt .

La figure 23 illustre la comparaison entre les effets de l'étalonnage des valeurs théoriques, celles du modèle de la symétrie $Z(5)$ [99], celles de la prédiction de Hulthen plus Kratzer [60] et enfin celles des données expérimentales pour le noyau atomique ^{194}Pt . Sur cette figure nous observons un très petit décalage entre la courbe d'étalonnages de la symétrie $Z(5)$ [99], celle de la prédiction de Hulthen plus Kratzer écranté [69] et celle du présent modèle à chaque point sauf en 7_{γ}^{+} et 8_{γ}^{+} . Notons que la courbe du présent modèle est plus proche de celle de la prédiction de Hulthen plus Kratzer écranté [69]. Aux points 4_{γ}^{+} et 5_{γ}^{+} toutes les courbes théoriques se rejoignent bien.

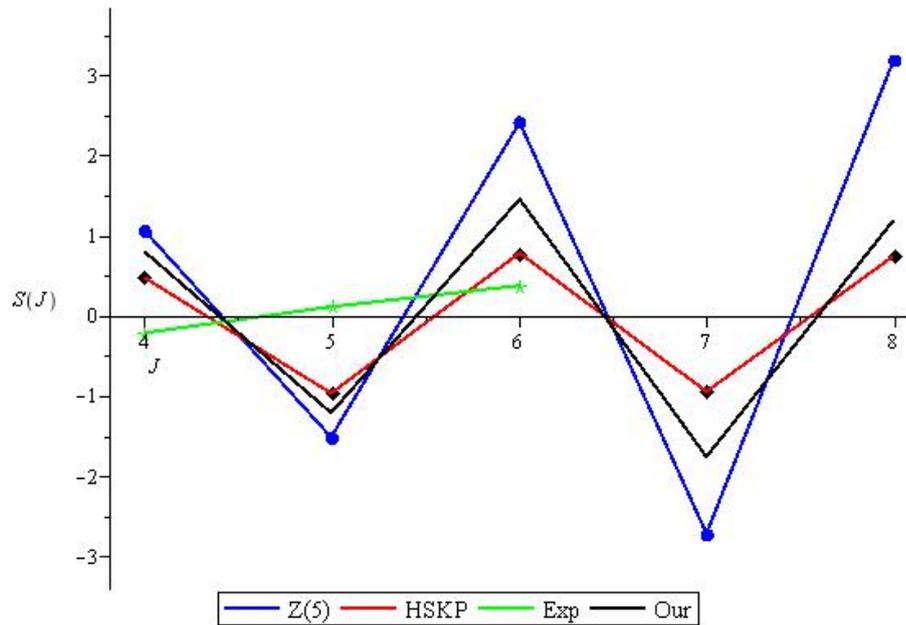


FIGURE 24 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et l'expérimentale pour le ^{196}Pt .

La figure 24 illustre la comparaison entre les effets de l'étalonnage des valeurs théoriques, celles du modèle de la symétrie $Z(5)$ [99], celles de la prédiction de Hulthen plus Kratzer [69] et enfin celles des données expérimentales pour le noyau atomique ^{196}Pt . En regardant les courbes présentées sur cette figure on observe qu'aux points 4_{γ}^{+} , 5_{γ}^{+} et 6_{γ}^{+} notre graphe est plus proche du graphe expérimental [31,68], celui de la prédiction de Hulthen plus Kratzer écarté [69] et de la symétrie $Z(5)$ [99]. De plus, au fur et à mesure que J augmente, la courbe du présent modèle s'éloigne de celle de la symétrie $Z(5)$ [99]. De plus, pour tous les isotopes étudiés, un comportement similaire en zig-zag est observé autour de l'axe $S(J) = 0$

En effet, globalement on constate sur les courbes que les facteurs pairs d'étalonnage $S(4)$, $S(6)$ et $S(8)$ atteignent des valeurs positives. Alors que les facteurs d'étalonnage impairs tels que $S(5)$ et $S(7)$ ont des valeurs négatives. Ces résultats sont en bon accord avec les prédictions de la ref. [61]. Dans l'ensemble, un examen attentif des figures 22, 23 et 24 montre que les valeurs expérimentales des effets d'étalonnage sont bien reproduites par notre modèle et celui de la symétrie $Z(5)$ pour les noyaux atomiques ^{192}Pt , par notre modèle et celui de la prédiction de Hulthen plus Kratzer écarté [60] pour les noyaux atomiques ^{194}Pt . Tandis que pour l'isotope ^{196}Pt , l'effet d'étalonnage pour les données expérimentales est bien reproduit par le modèle de Hulthen plus de Kratzer écarté.

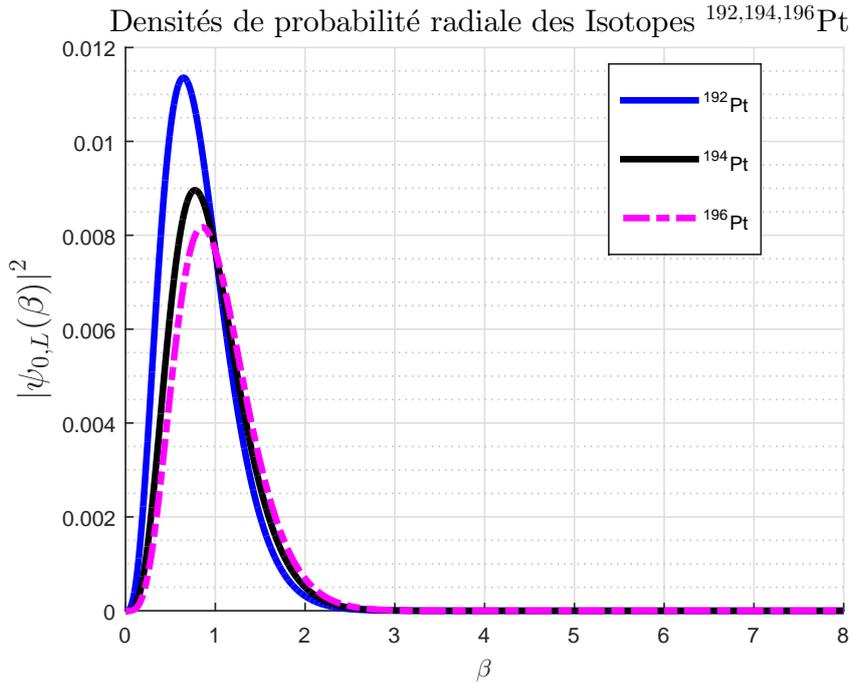


FIGURE 25 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_{0(\beta)}|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$.

La figure 25 donne les courbes de la densité de distribution $|\psi_{0(\beta)}|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde dans les états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope $^{192,194,196}\text{Pt}$. Chacune de ces courbes ont l'allure d'une gaussienne avec un pic large, centré autour des valeurs de $\beta \approx 0.5$ pour l'isotope ^{192}Pt , $\beta \approx 0.6$ pour l'isotope ^{194}Pt et enfin $\beta \approx 0.7$ pour l'isotope ^{196}Pt . En outre, on constate que les énergies de cohésion entre nucléon sont plus importantes dans le cas de l'isotope ^{192}Pt avec un pic de densité $|\psi_{0(\beta)}|^2$ de l'ordre de 0.011 par contre ces énergies de cohésion entre nucléon sont moins significative dans le cas des isotopes l'isotope ^{194}Pt et l'isotope ^{196}Pt avec des des pic de densité de l'ordre de 0.0085 et 0.008 respectivement.

Dans la bande de l'état fondamental $n = 0, n_\omega = 0$. On constate que pour $L = 0$, l'énergie de cohésion entre les nucléons est plus dense. Lorsque L augmente, cette énergie entre nucléon diminue et finit même par s'annuler pour les valeurs de L très grand.

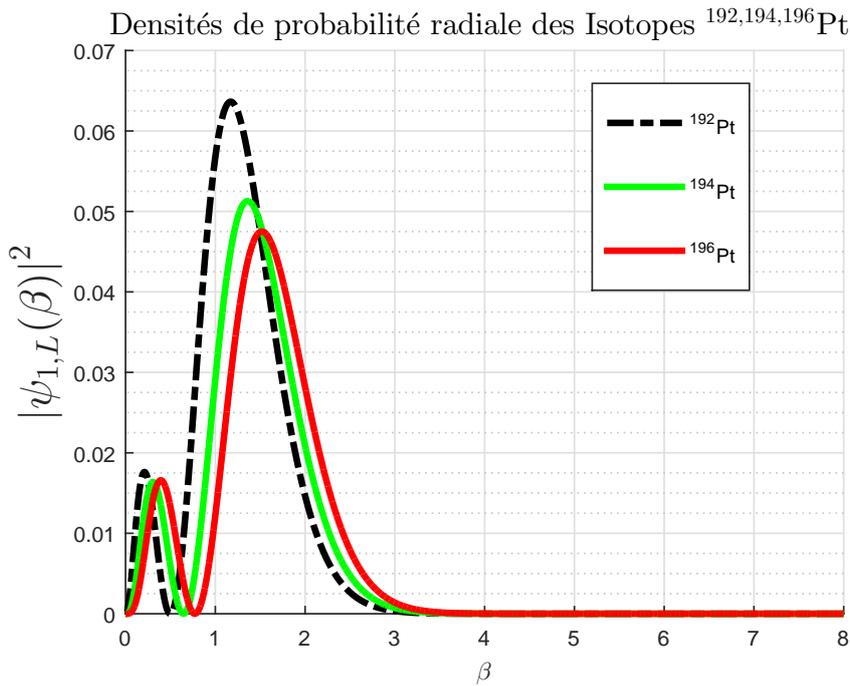


FIGURE 26 – Densité de probabilité de distribution $|\psi_{1,L}(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope $^{192,194,196}\text{Pt}$.

La figure 26 donne les courbes de la densité de distribution $|\psi_1|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde dans les états 0_β^+ , 2_β^+ et 4_β^+ pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$. En effet, ces courbes ont des allures de double gaussienne avec trois pics moins larges que celui de la figure 18, centrés autour des valeurs de $\beta \approx 0,3$ et $\beta \approx 0,45$ et $\beta \approx 0,45$. On constate aussi que le pic autour $\beta \approx 0,45$ est très bas par rapport à celui autour de $\beta \approx 1,3$.

Dans la bande β , $n = 1$ et $n_\omega = 0$. On constate que pour $L = 0$, l'énergie de cohésion entre les nucléons est plus dense autour des valeurs de $\beta \approx 1,3$ et $\beta \approx 1,5$. Lorsque L augmente, ces trois pics d'énergie diminuent et finissent même par s'annuler pour les valeurs de L très grand.

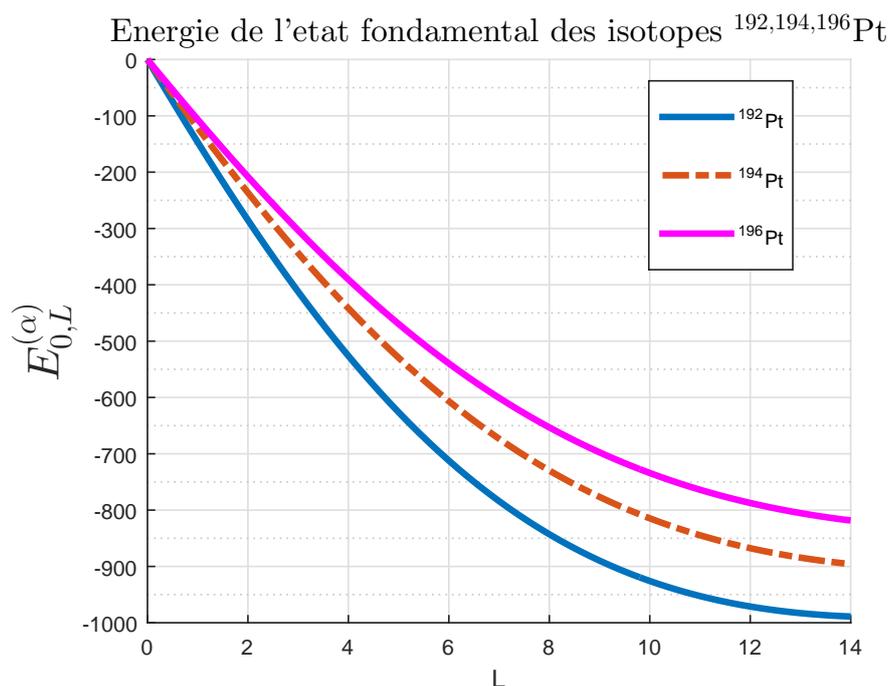


FIGURE 27 – Courbes des énergie de l'état fondamental des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$ en fonction du moment angulaire L .

La figure 27 présente l'énergie de l'état fondamental des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$ en fonction du moment angulaire L . On peut remarquer que ces courbes ont la forme d'une hyperbole et les profils sont les mêmes quelque soit le type d'isotope. Par ailleurs on constate aussi que au fur et à mesure que les valeurs du moment angulaire L deviennent de plus en plus importante, les courbes d'énergie diminuent considérablement jusqu'à s'annuler dans le cas de l'isotope ^{192}Pt et tendent vers l'infini dans le cas des isotopes $^{194,196}\text{Pt}$.

La figure 28 présente les courbes des énergie du premier état excité pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ en fonction du moment angulaire L . On peut remarquer également dans ce cas de figure que ces courbes ont la forme d'une hyperbole et les profils sont les mêmes quelque soit le type d'isotope. Par ailleurs on constate aussi que au fur et à mesure que les valeurs du moment angulaire L deviennent de plus en plus importante, les courbes d'énergie diminuent progressivement jusqu'à prendre un profil constant pour tous les isotopes du platine.

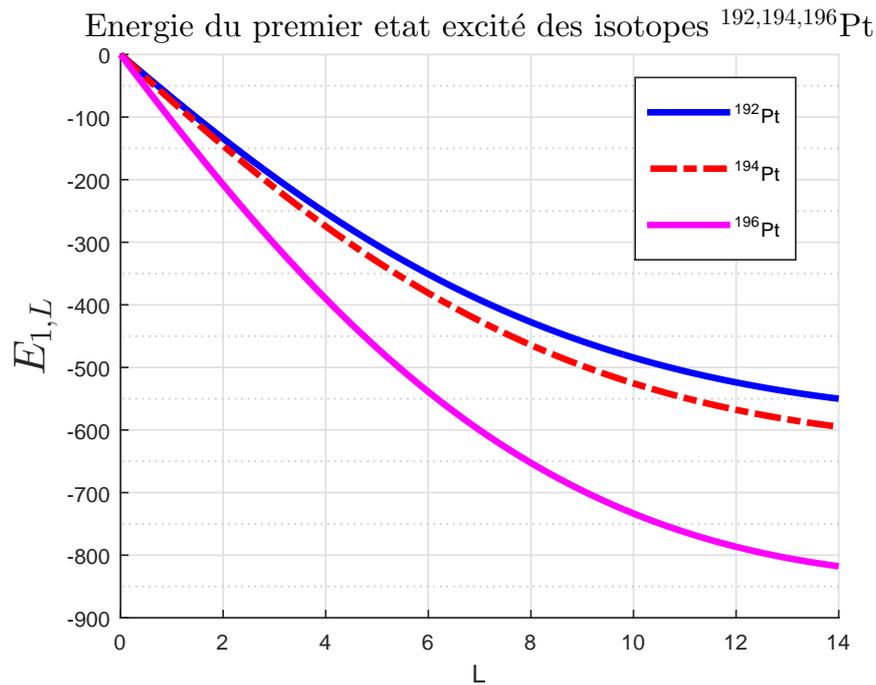


FIGURE 28 – Courbes des énergie du premier état excité pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ en fonction du moment angulaire L .

III.3 Étude comparative des résultats du présent modèle avec ceux obtenus à partir d'une nouvelle approche

Dans cette section il est question de prouver d'avantage l'efficacité du présent modèle [71] dans l'étude des déformation des noyaux triaxiaux en comparant ses résultats avec ceux obtenus à partir d'une la nouvelle approche proposée toujours par [71]. Dans cette approche, nous utilisons le Hamiltonien de Bohr a avec le potentiel de Killingbeck ainsi que le formalisme de déformation du dependent-mass pour mieux décrire les déformations de ces noyaux. En appliquant la méthode étendue de Nikiforov-Uvarov, on obtient l'expression de l'énergie du système qui nous a permis par la suite de déterminer les moments de transitions quadripolaires électriques pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ et $^{132,130,128}\text{Xe}$. Ici, Les résultats théoriques obtenus sont comparés aux résultats théoriques des autres modèles obtenus avec différents potentiels tels que le potentiel de Morse, la symétrie $Z(5)$ et la symétrie $Z(5)\text{-H}$. Il en ressort que, pour tous les isotopes de platine étudiés les résultats de cette nouvelle approche est en bon accord avec les données expérimentaux mais on remarquera à travers une étude comparative que le modèle intégrant le potentiel combiné de Yukawa inversement quadratique et Kratzer est mieux

adapté que celui de la nouvelle approche intégrant le potentiel de Killingbeck et le formalisme de déformation du dependent-mass pour les isotopes ^{192,194,196}Pt .

Pour mieux situer le contexte on rappelle les expressions du paramètre de mass B et du potentiel de Killingbeck données respectivement par

$$B(\beta) = \frac{B_o}{(f(\beta))^2}, \quad (\text{III.2})$$

et

$$u(\beta) = A\beta + B\beta^2 + \frac{C}{\beta} + \frac{D}{\beta^2}. \quad (\text{III.3})$$

L'énergie du système obtenue après résolution de l'équation de Schrödinger est donné par

$$E = 2\sqrt{A} \left[n + 1 + \sqrt{\frac{9}{4} + \Lambda + 2D} \right] - \frac{B^2}{4A} - \frac{1}{2}a \left(a(n+1)^2 + \frac{2B}{\sqrt{2A}}(n+1) \right) \\ + \frac{a^2}{2}(1+S) + \frac{1}{2}a \left((n+1) \left(\frac{B}{\sqrt{2A}} + an \right) - \frac{n(n-1)a}{3} + C_n \right). \quad (\text{III.4})$$

Dans le cas spécial où $a = 0$, l'énergie du spectre est réduite à la forme suivant [75] :

$$E = 2\sqrt{A} \left[n + 1 + \sqrt{\frac{9}{4} + \Lambda + 2D} \right] - \frac{B^2}{4A}. \quad (\text{III.5})$$

Dans l'expression de l'énergie du spectre donnée par l'équation (III.4), la valeur C_0 contribue aux énergies de la bande de l'état fondamental et de la bande γ tandis que la valeur de C_1 contribue à l'énergie de la bande β .

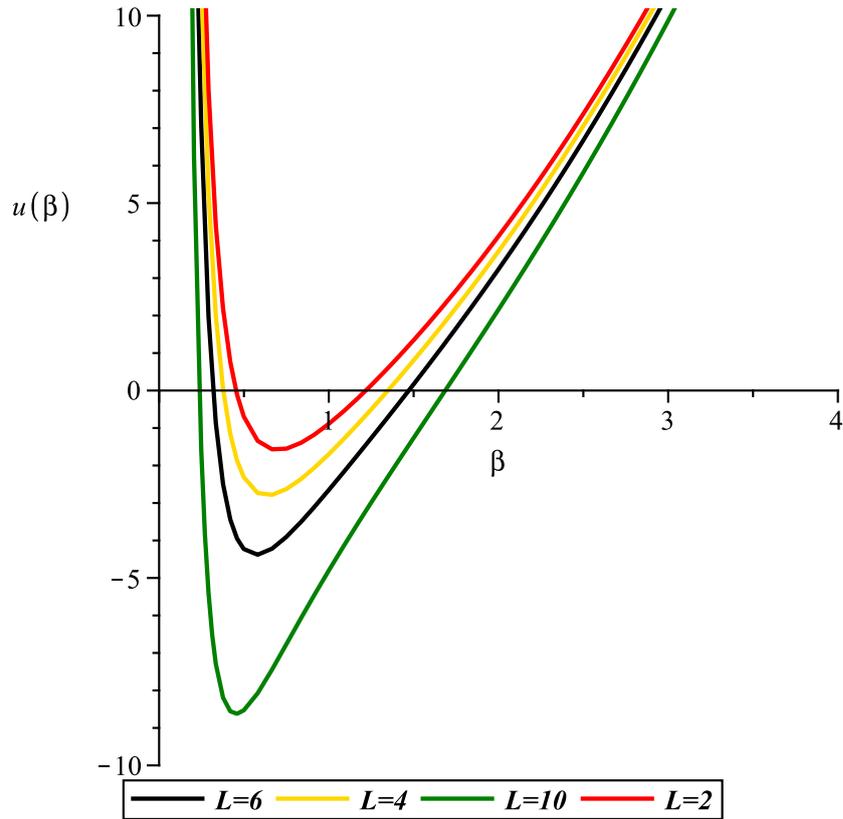


FIGURE 29 – Représentation du potentiel de Killingbeck avec les paramètres de ^{196}Pt [Table 1]].

La figure 29 représente le potentiel de Killingbeck avec les paramètres de ^{196}Pt pour différentes valeurs du moment angulaire L . La figure 30 représente le potentiel de Killingbeck avec les paramètres de ^{132}Xe pour différentes valeurs du moment angulaire L . La figure 31 représente le moment d'inertie $\Theta(L)$ pour l'état fondamental, normalisé au $\Theta(2)$ avec les paramètres de ^{194}Pt . Ce moment d'inertie est obtenu par la relation :

$$\Theta(L) = \frac{2L - 1}{E(L) - E(L - 2)}. \quad (\text{III.6})$$

On peut voir ici que le moment d'inertie croît rapidement avec le moment angulaire L quand le paramètre de déformation $a = 0$ et cette croissance du moment est légèrement modérée lorsque la valeur du paramètre de déformation a est non nulle. Le tableau 9 présente les valeurs des différents paramètres utilisés dans cette nouvelle approche. Le tableau 10 présente les valeurs théoriques des énergies d'excitation des isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ comparées avec les données expérimentales

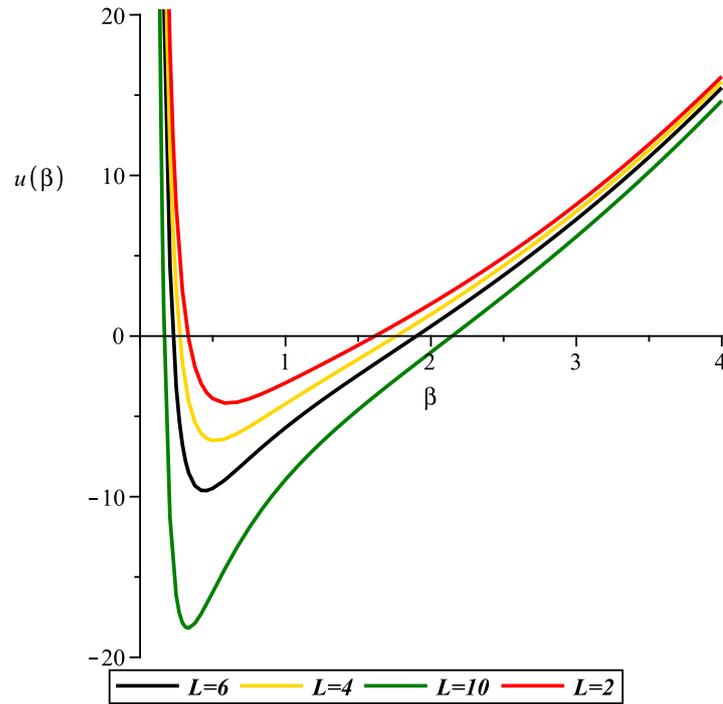


FIGURE 30 – Représentation du potentiel de Killingbeck avec les paramètres de ^{132}Xe [Table 1].

TABLE 9 – Valeurs des Paramètres utilisé dans la nouvelle approche

Paramètres des différents isotopes	^{192}Pt	^{194}Pt	^{196}Pt	^{132}Xe	^{130}Xe	^{128}Xe
A	0.7042	0.6042	0.6042	0.1942	0.1142	0.1042
B	1.356	1.156	1.189	1.050	1.256	1.056
\tilde{c}	20.82	18.82	19.82	0.00	1.90	1.00
D	2.23	1.03	2.03	0.00	0.00	0.00
a	0.085	0.097	0.078	0.051	0.095	0.057

refs. [128,129,130] et celles de Killingbeck plus Morse [24]. Le tableau 11 présente les valeurs théoriques des des énergies d'excitation des isotopes $^{128,130,132}\text{Xe}$ comparées avec les données expérimentales et celles de la symétrie $Z(5)$. En comparant les valeurs des écarts quadratiques moyens des isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ de la nouvelle approche avec ceux de la ref [71] on constate que le modèle [71] est mieux adapté pour l'étude des noyaux déformés par rapport à cette nouvelle approche bien que les résultats théoriques obtenus sont en bon accord avec ceux des résultats expérimentaux.

TABLE 10 – Comparaison des énergies d’excitation des isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$, avec les données expérimentales(Refs. [128,129,130]) and KM (Killingbeck+Morse) of Ref. [24] toutes ces énergies sont mesurées à partir de l’état fondamental et normalisées au premier état excité.

$L_{n,n\omega}$	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	KM	Exp.	Ours $a = 0$	Our $a \neq 0$	KM	Exp.	Ours $a = 0$	Our $a \neq 0$	KM	Exp.	Ours $a = 0$	Our $a \neq 0$
0 _{0,0}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2 _{0,0}	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4 _{0,0}	2.598	2.479	2.436	2.440	2.486	2.470	2.385	2.392	2.322	2.465	2.428	2.432
6 _{0,0}	3.597	4.314	4.142	4.159	4.488	4.299	3.986	4.011	3.440	4.290	4.117	4.133
8 _{0,0}	4.836	6.377	6.013	6.053	6.728	6.392	5.710	5.767	4.823	6.333	5.964	6.000
10 _{0,0}	6.285	8.624	7.989	8.063	9.073	8.671	7.508	7.611	6.432	8.558	7.909	7.976
12 _{0,0}	7.913	---	---	---	11.431	---	---	---	8.236	---	---	---
3 _{0,1}	2.743	2.910	2.698	2.704	2.788	2.809	2.633	2.642	2.483	2.854	2.687	2.693
5 _{0,1}	4.016	4.682	4.789	4.823	5.272	4.563	4.594	4.629	3.903	4.525	4.765	4.787
7 _{0,1}	5.503	6.677	6.946	7.000	7.841	---	6.561	7.650	5.564	---	6.882	6.932
9 _{0,1}	7.172	---	---	---	10.920	---	---	---	7.414	---	---	---
2 _{0,2}	2.307	1.935	1.889	1.891	1.836	1.894	1.863	1.866	1.993	1.936	1.885	1.887
4 _{0,2}	3.877	3.795	4.584	4.606	5.016	3.743	4.396	4.427	3.752	3.636	4.553	4.573
6 _{0,2}	5.635	5.905	7.125	7.183	8.053	5.863	6.724	6.805	5.711	5.644	7.058	7.111
8 _{0,2}	7.545	8.186	9.582	9.691	10.920	8.186	8.948	9.098	7.825	7.730	9.476	9.575
10 _{0,2}	9.573	---	---	---	13.604	---	---	---	10.056	---	---	---
0 _{1,0}	5.177	3.776	2.249	2.450	3.716	3.858	1.979	2.167	4.934	3.192	2.201	2.390
2 _{1,0}	5.617	4.547	3.249	3.468	4.717	4.603	2.979	3.190	5.425	3.828	3.201	3.408
4 _{1,0}	6.338	6.110	4.685	4.934	6.254	5.817	4.364	4.612	6.235	4.318	4.629	4.864
6 _{1,0}	7.319	---	6.013	6.681	8.171	---	5.965	6.264	7.334	---	6.319	6.592
σ	0.935	---	0.907	0.794	0.989	---	0.906	0.815	1.075	---	0.757	0.761

TABLE 11 – Comparaison des énergies d’excitation pour les isotopes $^{132,130,128}\text{Xe}$ avec les données expérimentales de la (Ref. [99]) and Z(5) of Ref.[99] toutes ces énergies sont mesurées à partir de l’état fondamental et normalisées au premier état excité.

$L_{n,n\omega}$	^{132}Xe				^{130}Xe				^{128}Xe			
	Z(5)	Exp.	Ours $a = 0$	Ours $a \neq 0$	Z(5)	Exp.	Ours $a = 0$	Ours $a \neq 0$	Z(5)	Exp.	Ours $a = 0$	Ours $a \neq 0$
0 _{0,0}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2 _{0,0}	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4 _{0,0}	2.350	2.157	2.150	2.154	2.350	2.247	2.150	2.154	2.350	2.333	2.205	2.212
6 _{0,0}	3.984	3.163	3.353	3.366	3.984	3.627	3.353	3.366	3.984	3.922	3.491	3.513
8 _{0,0}	---	---	4.579	4.606	5.877	5.031	4.579	4.606	5.887	5.674	4.815	4.861
10 _{0,0}	---	---	5.817	5.863	8.019	6.457	5.817	5.863	8.019	7.597	6.159	6.239
12 _{0,0}	---	---	7.062	7.133	10.403	7.867	7.062	7.133	10.403	---	7.514	7.638
14 _{0,0}	---	---	8.312	8.412	13.024	9.458	9.070	9.535	13.024	---	8.877	9.054
3 _{0,1}	2.597	2.701	2.431	2.348	2.597	3.045	2.431	2.348	2.597	3.228	2.410	2.419
5 _{0,1}	4.634	3.246	3.791	3.808	4.634	4.051	3.791	3.808	4.634	4.508	3.963	3.993
7 _{0,1}	---	---	5.169	5.204	---	---	5.169	5.204	6.869	6.165	5.454	5.516
2 _{0,2}	1.837	1.944	1.734	1.736	1.837	2.093	1.734	1.736	1.837	2.189	1.765	1.769
4 _{0,2}	4.620	2.940	3.649	3.664	4.420	3.373	3.649	3.664	4.420	3.620	3.810	3.837
6 _{0,2}	---	---	5.281	5.318	---	---	5.281	5.318	7.063	5.150	5.576	5.641
0 _{1,0}	3.913	2.771	1.375	1.429	3.577	3.346	1.430	1.471	3.647	3.913	1.386	1.429
2 _{1,0}	---	---	2.375	2.446	---	---	2.430	2.497	4.313	5.697	2.386	2.447
4 _{1,0}	---	---	3.576	3.669	---	---	3.653	3.768	---	---	3.592	3.679
6 _{1,0}	---	---	4.855	4.974	---	---	4.967	5.152	---	---	4.815	5.000
σ	0.748	---	0.608	0.579	1.079	---	0.696	0.672	0.563	---	1.048	1.017

TABLE 12 – Comparaison des taux de transition B(E2), calculés en utilisant le potentiel de Killingbeck avec les données expérimentales des Refs. [128,129,130], esM of Ref. [30]. Dans ce calcul, les taux (Ours $a \neq 0$, Ours $a = 0$) sont normalisés par les taux B(E2 : $2_{0,0} \rightarrow 0_{0,0}$) des isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$

$L_n^{(i)}$	$L_n^{(f)}$	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
		esM	Exp.	Our $a \neq 0$	Our $a = 0$	esM	Exp.	Our $a \neq 0$	Our $a = 0$	esM	Exp.	Our $a \neq 0$	Our $a = 0$
4 _{0,0}	2 _{0,0}	1.563	1.563	1.488	1.488	1.630	1.73	1.512	1.510	1.540	1.49	1.492	1.490
6 _{0,0}	4 _{0,0}	2.213	---	2.013	2.013	2.334	1.37	2.072	2.068	2.141	0.95	2.021	2.019
8 _{0,0}	6 _{0,0}	2.735	---	2.414	2.416	2.835	1.02	2.509	2.504	2.597	1.09	2.428	2.424
10 _{0,0}	8 _{0,0}	3.163	---	2.762	2.765	3.187	0.69	2.789	2.883	2.955	---	2.781	2.776
2 _{0,2}	2 _{0,0}	1.586	1.91	1.518	1.519	1.653	1.81	1.541	1.541	1.564	---	1.521	1.522
4 _{0,2}	4 _{0,0}	0.350	---	0.317	0.318	0.370	0.285	0.327	0.326	0.339	0.42	0.319	0.318
6 _{0,2}	6 _{0,0}	---	---	0.180	0.180	---	---	0.187	0.186	---	---	0.181	0.180
8 _{0,2}	8 _{0,0}	---	---	0.119	0.119	---	---	0.125	0.123	---	---	0.120	0.119
3 _{0,1}	4 _{0,0}	1.236	0.67	1.137	1.139	1.305	---	1.168	1.169	1.200	---	1.141	1.142
5 _{0,1}	6 _{0,0}	---	---	0.890	0.892	---	---	0.924	0.924	---	---	0.895	0.895
7 _{0,1}	8 _{0,0}	---	---	0.751	0.754	---	---	0.786	0.786	---	---	0.757	0.756
9 _{0,1}	10 _{0,0}	---	---	0.662	0.665	---	---	0.695	0.695	---	---	0.667	0.667
4 _{0,2}	2 _{0,2}	0.734	---	0.675	0.673	0.776	0.428	0.691	0.687	0.716	0.43	0.677	0.674
6 _{0,2}	4 _{0,2}	1.081	---	0.947	0.946	1.112	---	0.986	0.981	1.022	---	0.953	0.949
8 _{0,2}	6 _{0,2}	1.715	---	1.497	1.499	1.697	---	1.570	1.565	1.589	---	1.508	1.504
10 _{0,2}	8 _{0,2}	---	---	1.975	1.979	---	---	2.079	2.072	---	---	1.990	1.985
5 _{0,1}	3 _{0,1}	1.250	---	1.127	1.127	1.316	---	1.163	1.159	1.205	---	1.132	1.080
7 _{1,0}	5 _{0,1}	1.943	---	1.703	1.704	1.994	---	1.895	1.769	1.834	---	1.714	1.710
9 _{0,1}	7 _{0,1}	2.485	---	2.171	2.174	2.468	---	2.276	2.269	2.306	---	2.187	2.181
11 _{0,1}	9 _{0,1}	2.905	---	2.573	2.579	2.801	---	2.696	2.699	2.633	---	2.592	2.586
3 _{0,1}	2 _{0,2}	2.147	1.79	0.997	0.998	2.264	---	1.021	1.021	2.094	---	1.000	1.000
5 _{0,1}	4 _{0,2}	---	---	1.203	1.207	---	---	1.251	1.252	---	---	1.251	1.252
7 _{0,1}	6 _{0,2}	---	---	1.180	1.185	---	---	1.236	1.236	---	---	1.188	1.189
9 _{0,1}	8 _{0,2}	---	---	1.120	1.125	---	---	1.177	1.178	---	---	1.128	1.128
4 _{1,0}	2 _{1,0}	---	---	1.455	1.455	---	---	1.468	1.500	---	---	1.458	1.482
6 _{1,0}	4 _{1,0}	---	---	1.957	1.960	---	---	2.001	2.040	---	---	1.966	1.996
8 _{1,0}	6 _{1,0}	---	---	2.338	2.342	---	---	2.411	2.454	---	---	2.351	2.384

TABLE 13 – Comparaison des taux de transition $B(E2)$, calculés en utilisant le potentiel de Killingbeck avec les données expérimentales Ref. [28], $Z(5) - H$ of Ref [28]. Dans ce calcul, les taux (Ours $a \neq 0$, Ours $a = 0$) sont normalisés $B(E2 : 2_{0,0} \rightarrow 0_{0,0})$ des isotopes $^{132,130,128}\text{Xe}$

		^{132}Xe				^{130}Xe				^{128}Xe			
$L_{n,n\omega}^{(i)}$	$L_{n,n\omega}^{(f)}$	$Z(5)$ $-H$	Exp.	Our $a \neq 0$	Our $a = 0$	$Z(5)$ $-H$	Exp.	Our $a \neq 0$	Our $a = 0$	$Z(5)$ $-H$	Exp.	Our $a \neq 0$	Our $a = 0$
4 _{0,0}	2 _{0,0}	1.685	1.238	1.698	1.697	1.611	---	1.673	1.673	1.604	1.468	1.681	1.680
6 _{0,0}	4 _{0,0}	2.630	---	2.517	2.516	2.469	---	2.491	2.489	2.444	1.941	2.502	2.500
8 _{0,0}	6 _{0,0}	5.964	---	3.206	3.205	3.503	---	3.197	3.205	3.445	2.388	3.215	3.213
10 _{0,0}	8 _{0,0}	2.252	---	3.820	3.819	4.896	0.045	3.852	3.866	4.785	2.737	3.868	3.866
2 _{0,2}	2 _{0,0}	1.707	1.775	1.729	1.731	1.633	---	1.699	1.703	1.626	1.194	1.710	1.711
4 _{0,2}	4 _{0,0}	0.203	---	0.396	0.396	0.386	---	0.392	0.392	0.383	---	0.394	0.393
6 _{0,2}	6 _{0,0}	0.36	---	0.238	0.237	0.220	---	0.238	0.237	0.244	---	0.239	0.238
8 _{0,2}	8 _{0,0}	0.049	---	0.164	0.163	0.188	---	0.166	0.165	0.184	---	0.166	0.165
3 _{0,1}	4 _{0,0}	1.677	---	1.408	1.411	1.366	---	1.385	1.392	1.352	---	1.396	1.399
5 _{0,1}	6 _{0,0}	0.447	---	1.178	1.181	1.289	0.342	1.171	1.178	1.267	---	1.180	1.182
7 _{0,1}	8 _{0,0}	0.992	---	1.038	1.040	1.348	---	1.044	1.052	1.315	---	1.050	1.052
9 _{0,1}	10 _{0,0}	0.438	---	0.942	0.944	1.491	---	0.959	0.966	1.447	---	0.962	0.963
4 _{0,2}	2 _{0,2}	0.300	---	0.812	0.808	0.764	---	0.804	0.799	0.760	---	0.807	0.802
6 _{0,2}	4 _{0,2}	0.455	---	1.269	1.266	1.400	---	1.270	1.270	1.376	---	1.276	1.272
8 _{0,2}	6 _{0,2}	0.855	---	2.106	2.103	2.936	---	2.138	2.143	2.862	---	2.143	2.140
10 _{0,2}	8 _{0,2}	0.777	---	2.859	2.857	5.132	---	2.939	2.951	4.968	---	2.941	2.937
5 _{0,1}	3 _{0,1}	0.045	---	1.424	1.422	1.406	---	1.410	1.409	1.391	---	1.418	1.415
7 _{1,0}	5 _{0,1}	0.046	---	2.298	2.295	2.626	---	2.301	2.306	2.578	---	2.312	2.309
9 _{0,1}	7 _{0,1}	1.389	---	3.047	3.045	4.237	---	3.089	3.100	4.129	---	3.099	3.096
11 _{0,1}	9 _{0,1}	1.124	---	3.708	3.706	6.421	---	3.693	3.820	6.220	---	3.807	3.804
3 _{0,1}	2 _{0,2}	2.492	---	1.209	1.211	2.282	---	1.188	1.193	2.266	---	1.198	1.199
5 _{0,1}	4 _{0,2}	3.005	---	1.606	1.609	1.637	---	1.598	1.609	1.613	---	1.609	1.613
7 _{0,1}	6 _{0,2}	0.752	---	1.649	1.653	1.968	---	1.664	1.678	1.926	---	1.673	1.677
9 _{0,1}	8 _{0,2}	0.505	---	1.611	1.614	2.329	---	1.646	1.660	2.265	---	1.651	1.654
4 _{1,0}	2 _{1,0}	---	---	1.653	1.678	---	---	1.624	1.636	---	---	1.646	1.672
6 _{1,0}	4 _{1,0}	---	---	1.433	1.467	---	---	2.410	2.382	---	---	2.442	2.478
8 _{1,0}	6 _{1,0}	---	---	3.082	3.121	---	---	3.094	3.008	---	---	3.129	3.173

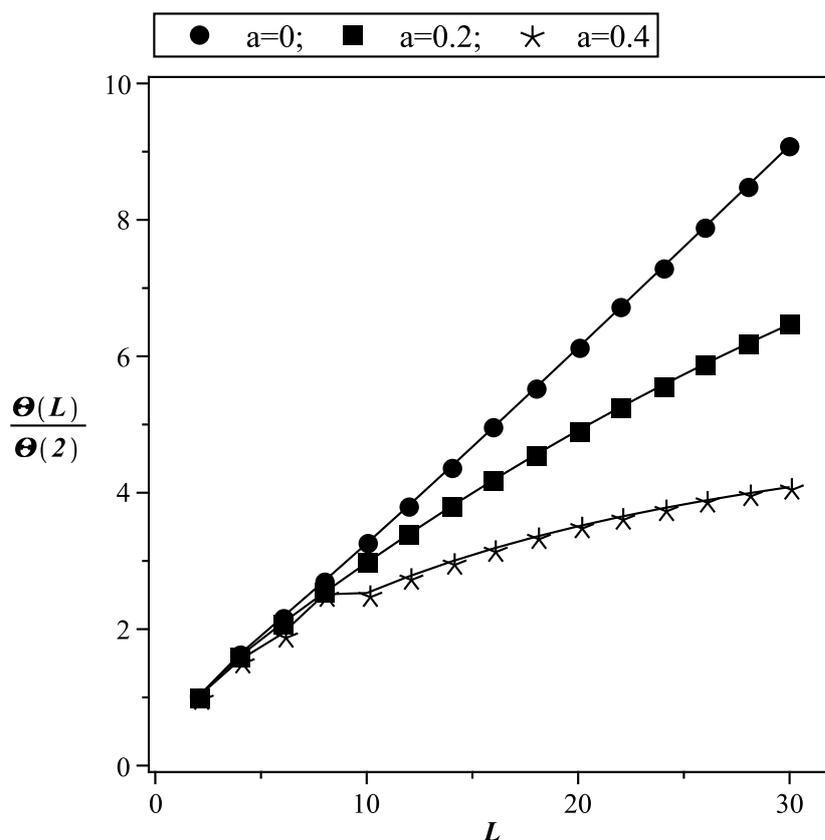


FIGURE 31 – Moment d’inertie $\Theta(L)$ pour l’état fondamental, normalisé au $\Theta(2)$ avec les paramètres de ^{194}Pt [Table 1].

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué notre modèle en calculant les énergies des noyaux étudiés, les transitions B(E2). Les différentes valeurs obtenues ont été comparées aux données expérimentales pour les isotopes du platine $^{192,194,196}\text{Pt}$. Par ailleurs, les effets d’étalonnage dans la bande γ ont été calculés et comparés à la symétrie Z(5) et aux prédictions du modèle combiné de Hulthen et de Kratzer écranté. Les résultats obtenus montrent que les valeurs expérimentales des effets d’étalonnage sont bien reproduites par notre modèle et celui de la symétrie Z(5) pour les noyaux atomiques ^{192}Pt , par notre modèle et celui de la prédiction de Hulthen plus Kratzer écranté[69] pour les noyaux atomiques ^{194}Pt . Tandis que pour l’isotope ^{196}Pt , l’effet d’étalonnage pour les données expérimentales est bien reproduit par le modèle de Hulthen plus de Kratzer écranté. Il en ressort que les valeurs de notre modèle sont en bon accord avec les données expérimentales celles de la symétrie Z(5) et celles de la prédiction de Hulthen plus Kratzer[69].

Conclusion Générale et Perspectives

Dans cette thèse intitulée " Transitions quadripolaires électiques du hamiltonien de Bohr avec le potentiel de Yukawa inversement quadratique plus Kratzer écranté", nous avons proposer d'élaborer un modèle qui nous a permis de décrire la structure nucléaire en tenant en compte d'une part des inreractions au sein des noyaux et d'autre part des différentes déformations (vibration et rotation) au sein des noyaux atomiques. Ce travail a été conçu autour de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, les caractéristiques de la structure du noyau ont été présentées à savoir : la découverte du noyau atomique et ses constituants, les différents types de radioactivité, une étude sur les isotopes du platine ses propriété ainsi que ses effets dans l'environnement a été également décrite, suivi de la description des modèles nucléaires à savoir : le modèle de la goutte liquide, le modèle en couches sphériques et le modèle de Nilsson. Enfin, nous avons étudié les différents types de déformations et interactions (rotation et vibration) qui se manifestent dans le noyau atomique.

Dans le second chapitre, nous avons résolu l'équation du Hamiltonien de Bohr en utilisant la technique de séparation des variables, qui nous a conduit à l'obtention des solutions de la partie γ et β . L'introduction de la méthode paramétrique de Nikiforov-Uvarov nous a permis de déterminer l'énergie du spectre ainsi que la fonction d'onde du systme. La partie β de la solution de l'équation du Hamiltonien de Bohr nous a permis de determiner l'énergie du spectre du système ainsi que l'expression de la fonction d'onde correspondante grâce à l'utilisation du couplage de deux potentiels : le potentiel de Yukawa inversement quadratique et celui de Kratzer écranté. Les différents types de transitions ainsi que les moments quadрупôlaire des isotopes ont été calculés. Par la suite, nous avons calculé l'effet de l'étalonnage $S(J)$, qui nous a permis d'observer les différents effets sur des courbes obtenues. Enfin, les courbes de la densité de la fonction d'onde ont été tracées pour différentes valeurs du moment magnétique (L).

Enfin dans le troisième chapitre, les résultats théoriques des rapports des énergies des niveaux et les taux de transition B(E2) des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$ ont été présentés. Les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle sont meilleures pour notre étude précisément dans le cas des isotopes du platine. Le tableau 3 montre que, les valeurs des écarts types obtenues théoriquement sont plus petites que celles des données expérimentales.

Les résultats obtenus dans les tableaux 2 et 3 montrent que, les valeurs obtenues pour les isotopes du platine sont plus petites et meilleures que les résultats expérimentaux utilisés pour la prédiction de Morse. Nous pouvons donc écrire que : $\sigma_{Pt} < \sigma_{esKM} < \sigma_{esM}$. Ceci prouve que, notre modèle améliore les résultats, et il est mieux adapté pour modéliser les noyaux triaxiaux.

Par ailleurs les courbes d'étalonnage, les courbes d'énergie ainsi que les densités radiales de probabilités des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$ ont été présentés afin de mieux valider l'application de notre modèle.

Toutefois, notre modèle n'a été utilisé que pour les noyaux triaxiaux, dans les travaux futurs nous comptons concevoir un modèle applicable à un grand nombre de noyaux qu'ils soient déformé ou pas.

Appendices

ANNEXE : Ratios des moments de transitions quadrupôlaires électriques B(E2)

$$\begin{aligned}
 R_{\text{ground} \rightarrow \text{ground}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.7})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-even}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{15}{(L+1)(2L+3)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.8})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L+1) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-odd}} \rightarrow (L+1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{(L+2)} \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L+1, L+1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.9})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L-1)(2L+1)}{(2L+3)(L+2)(2L+5)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L; n=0, L, L-2)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.10})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-odd}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L+1)}{(L+2)(2L+5)} \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+1; n=0, L, L-1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.11})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\gamma\text{-odd}\rightarrow\gamma\text{-even}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_\gamma \rightarrow (L-1)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5(2L-3)(2L-1)}{L(L+1)(2L+1)} (1 + \delta_{L,3}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L-1, L-3)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.12}$$

$$\begin{aligned}
R_{\beta\text{-band}\rightarrow\beta\text{-band}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L-1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.13}$$

Publication

[1] H. D. Yia Etolo, D. Nga Ongodo, E. Anemena, A. Atangana Likéné and G. H. Ben-Bolie, Bohr Hamiltonian with inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer for triaxial nuclei, *Int. Jour. of Mod. Phys. E*, vol.31, No.7 (2022) 2250096.

Bibliographie

- [1] C. Mancuso, *Recherche de déformation dans des noyaux riches en neutrons*, (Thèse de doctorat Université Claude Bernard Lyon 1. 2016).
- [2] C.E.A, *Cours intitulé Atome*, (Comissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives, 2014.)
- [3] A. Bohr, *Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk.* **26**(1952)1.
- [4] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vid. Selsk.* **27** (1952) 16.
- [5] F. Iachello, A. Arima, *The Interacting Boson Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [6] W. Greiner, A. J. Maruhn, *Nuclear Models* (Springer, Berlin,1996).
- [7] F. F. Ruffino, L. Fortunato, *Computation* **6**, (2018) 48.
- [8] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3580.
- [9] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett* **87** (2001) 052502.
- [10] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett* **91** (2003) 132502.
- [11] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588**, (2004) 172.
- [12] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev, P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **584** (2004) 40.
- [13] I. Yigitoglu, D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
- [14] A. S. Davydov, A. A. Chaban, *Nucl. Phys* **20** (1960) 499.
- [15] L. Fortunato, A. Vitturi, *J. Phys. G.* **29** (2003) 1341.
- [16] H. Neyazi, A. A. Rajabi, H. Hassanabadi, *Nucl. Phys. A* **945** (2016) 80.
- [17] H. Sobhani, H. Hassanabadi, W. S. Chung, *Nucl. Phys. A* **85** (2018) 3580.
- [18] G. Levai, J. Arias, *Phys. Rev. C* **81** (2010) 044304.
- [19] P. Baganu, R. Budaca, *J. Phys. G.* **42** (2015) 105106.
- [20] R. Budaca, P. Baganu, A. I. Budaca, *Phys. Lett. B* **776** (2018) 26.
- [21] G. Levai, A. M. Ishkhanyan, *Mod. Phys. Lett. A* **34** (2019) 1950134.
- [22] R. Budaca, *Eur. Phys. J. A* **5** (2014) 50.
- [23] I. Inci, I. Boztosun, Y. E. Gonen, *J. Phys. G* **39** (2012) 085112.
- [24] B. T. Mbadjoun, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama, G.H. Ben-Bolie, P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.

- [25] M. Chabab, A. Lahbas, M. Oulne, *Int. J. Mod. Phys. E* **24** (2015) 1550089.
- [26] M. Chabab, A.E. Batoul, A. Lahbas, M. Oulne, *Nucl. Phys. A* **953** (2016) 158.
- [27] L. Naderi, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **131** (2016) 133.
- [28] M. Chabab, A. Lahbas, M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51** (2015) 131.
- [29] I. Inci, I. Boztosun, Y. E. Gonen, *J. Phys. G* **39** (2012) 085112.
- [30] I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 1450053.
- [31] M. Capak, D. Petrellis, B. Gonul, D. Bonatsos, *J. Phys. G* **42**, (2015) 095102.
- [32] L. Fortunato, *Eur. Phys. J. A* **26** (2005) 1.
- [33] P. Baganu, L. Fortunato, *J. Phys. G* **43** (2016) 093003.
- [34] Y. Otkem et al., *Phys. Rev C* **76** (2007) 044315.
- [35] J. Jolie, A. Linnemann, *Phys. Rev C* **68** (2003) 031301.
- [36] L. Wilets, M. Jean, *Phys. Rev* **102** (1956) 788.
- [37] N. V. Zamfir, R. F. Casten, *Phys. Rev. Lett. B* **260** (1991) 265.
- [38] M. P. Bassez *Cours sur le Noyau de l'atome*, (Université de Strasbourg) <http://chem-phys.ustrasbg.fr/mpb>
- [39] E. Khan, *Structure et stabilité des noyaux Applications de l'énergie nucléaire*, (Institut de Physique Nucléaire - Orsay IN2P3 -CNRS).
- [40] Wikipedia *Cours sur les différents états du noyau*.
- [41] D. Nga Ongodo, *Thèse de doctorat*, (Université de Yaoundé I, 2021).
- [42] <https://www.ilephysique.net/sujet-reaction-de-fusion-300005.html>
- [43] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, volume I et II (World Scientific, Amsterdam, 1968).
- [44] F. Legrand *Équation de Schrödinger Licence Creative Commons*.
- [45] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë *Mécanique quantique*.
- [46] P. J. Karol et al. UPAC Technical Report, *Pure Appl. Chem.*, **88** (2016) 155160.
- [47] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol. II : Nuclear Deformations* (Benjamin, New York)(1975).
- [48] R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, (2000) 3584.
- [49] E. Predazzi and T. Regge, *Nuovo Cimento*. **24**, (1962) 518.
- [50] W. Greiner, A. J. Maruhn, *Nuclear Models*, Springer, Berlin **24** (1996).
- [51] T. Zerrouki, Triaxialité et coexistence de formes dans les noyaux proche de la fermeture de couches N=82 : évolution de forme et rotation magnétique dans ^{141}Nd , *thèse de doctorat*, (Université Paris-Sud, 2015).
- [52] B. J. P. Gall, *Ann. Phys. Fr.*, **24** (1999) 1-93.

- [53] Y. Gratchev, *Etude expérimentale et théorique de la structure nucléaire des isotopes de sélénium riches en neutrons*, (Grenoble Alpes, (2016) 669698.
- [54] S. Nilson and I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [55] R. Léguillon, *Thèse de doctorat.*, (Université PARIS-SUD, 2013).
- [56] <https://freephysique.free.fr/cours>.
- [57] Wikipedia *Cours sur la structure nucléaire*.
- [58] D. R. Lide, *CRC Handbook of chemistry and Physics*, (CRC Press Inc, 2009).
- [59] Y. Omon, *Thèse de doctorat*, (Université de Yaoundé I, 2021).
- [60] Wikipedia *article sur le noyau de Platine*.
- [61] C. Aslangul, *Mécanique quantique 2 : développements et applications à basse énergie*. de boeck, **22**, **46**, (2008).
- [62] G. Levai, J. M. Arias, *Phys. Rev. C.* , **69** (2004) 014304.
- [63] C.E.A, <https://www.agata.org/>.
- [64] M. Caputo, M. Fabrizio, *Prog. Fract. Dier. Appl.* **1** (2015) 73.
- [65] M. Baranger and K. Kumar, *Nucl. Phys. A.* **122**, (1968) 241.
- [66] R. Budaca, *Eur. Phys. J. A.* **52** (2016) 314.
- [67] D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **28** (2019) 1950106.
- [68] Y. Omon, J. M. E. Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, P. Owono Ateba, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **2920** (2020) 2050082.
- [69] P. Mah. Tsila , A. Atangana Likéné, J. M. E. Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, P. Owono Ateba, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **143** (2022) 2150105.
- [70] K. Ahmadou, A. Atangana Likéné, J. M. Emaa Emaa, C. N. Takembo, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E*, **31**, (2022) 2250039.
- [71] H. D. Yia Etolo, D. Nga Ongodo, E. Anemena, A. Atangana Likéné and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E*, **31**, (2022) 2250096.
- [72] D. Agboola and Y. Z. Zhang, *J. Phys. A : Math. Theor.* **46** (2013) 505301.
- [73] <https://www.thephysicsmill.com>.
- [74] R. L. Hall, *J. Phys. A : Math and General.*, **25**, (1992) 1313.
- [75] H. Neyazi, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, *Nucl. Phys. A.* **945** (2015) 80.
- [76] D. Bonatsos, E. A. McCutchan, N. Minkov, R. F. Casten, P. Yotov, D. Lenis, D. Petrellis and I. Yigitoglu, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
- [77] A. R. Edmonds, *Angular Momentum In Quantum Mchanics*, (Princeton University Press, Princeton NJ, 1957).

- [78] N. Soheibi et al., *Int. J. Mod. Phys. E*, **26** (2017) 272.
- [79] E. R. Marshalek, *Theory of Collective Vibrations of Even-Even Spheroidal Nuclei*, (Lawrence Radiation Lab, 1962).
- [80] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics Birkhauser, Basel* (1988) .
- [81] C. Tezcan, R. Sever, *Int. J. Theor. Phys* **48** (2009) 337.
- [82] C. A. Onate et al., *Heliyon*, **4** (2018) e00977.
- [83] G. A. Marid, N. T. Jarallah and H. M. Abduljabbar, *Results in Phys.*, **11** (2018) 406.
- [84] N. Oulebsir, *Rappels de cours et recueil d'exercices de physique nucléaire* (Lawrence Radiation Lab, 2016).
- [85] A. Lemieux and A. K. Bose, *Annales de l'I H P. Sect. A n°3* (1969) 10.
- [86] C. Lam and Y. Varshni, *Phys. Rev. A* **4** (1971) 1875.
- [87] O. Oluwadare and K. J. Oyewumi, *Chin. Phys. Lett.* **34** (2017) 110301.
- [88] A. Kratzer, *Z. Phys.* **3** (1920) 460.
- [89] K. Hong and J. Noolandi, *J.Chem. Phys. Lett.* **68** (1978) 5163.
- [90] W. C. Qiang and S. H. Dong, *Phys. Lett.* **368** (2007) 13.
- [91] S. H. Dong and W. C. Qiang *J. Phys. A* **40** (2007) 10535.
- [92] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. Rev* **30** (2004) 627.
- [93] J. P. Ndjobo, Atangana Likéné, K. Ahmadou, P. Mah. Tsila and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E*, **31** (2022) 2250095.
- [94] J. M. E. Ema'a, B. T. Mbadjoun, A. Zarma, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 490.
- [95] D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **28** (2019) 1950106.
- [96] P. Baganu, M. Chabab, A. E. Batoul, A. Lahbas, M. Oulne, *Nucl. Phys. J. A* **970**, (2017) 272.
- [97] A. A Raduta, P. Baganu, *Phys. Rev. C*, **83**, (2011) 034313.
- [98] E. A. McCutchan, D. Bonatsos, N.V. Zamfir, R.F. Casten, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 024306.
- [99] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P.A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588** (2004) 172.
- [100] A. Bohr, B. R. Mottelson *Nuclear. Structure.* **2** (1998) 1256.
- [101] J. A. Weller, *Phys. Rev* **52** (1937) 1083.
- [102] k. Wildermuth et al, *Cluster representation of nuclei*, Berlin Springer Verlag, 1966 .
- [103] Y. Abe, Jun Hiura and Hajime Tanaka, A molecular-Orbital Model of the atomic nuclei, *Theo. Phys.* **49** (1973) 800.
- [104] M. Freer, Cluster in nuclei, *Scholarpedia*, **5** (2010) 9652.

- [105] M. Fabre, *The nuclear independant particule model : A miunderstanding*, *Nucl. Phys. A* **839** (2010) 11-41.
- [106] S. Bailly, *L'épaisseur de la peau du noyau de plomb mesurée*, *Pour la science n°525* (2021) .
- [107] C. Middleton, *Lead-208 nuclei have thick skins* *Phys. Today* **74** (2021) .
- [108] D. Adhikari et al., *Accurate Determination of the Neutron Skin Thickness of ^{208}Pb* *Phys. Rev. Lett* **126** (2021) 172502.
- [109] L. Lopes et al., *Sources et évolution de la physique quantique*, Textes fondateurs, EDP Sciences, (2005).
- [110] Foos, J, *Manuel de radioactivité à l'usage des utilisateurs*, Formascience, Orsay, (1993).
- [111] G. Edward Brown and A. D. Jackson, *The Nucleon-Nucleon Interaction*, Nprth-Holland Publishing (1976) .
- [112] J. Meyer-ter-Vehn J, *Nucl. Phys.* **249** (1975) 111.
- [113] H. Karayer, D. Demirhan and F. Buy ukkilic, *Rep. Math. Phys.*, **76** (2015) 271 - 281.
- [114] K. Kumar, M. Barangerm, *Nucl. Phys. A.* **110** (1968) 529.
- [115] M. Fingerm et al., *Nucl. Phys. A* **188** (1972) 369.
- [116] K. Nakai, B. Hersking, J. Blomquist, A. Filevich, K. G. Renselt, J. Sztarkier, I. Berstrom, S. Nagamiya, *Nucl. Phys. A.* **189** (1972) 526.
- [117] C. G. Linden, I. Berstrom, J. Blomquist, C. Roulet, *Stockholm Annual Report* (1974).
- [118] T. Yamazaki, E. Mathias, *Phys. Rev.* **175** (1968) 1476.
- [119] K. H. Maier, K. Nakai, J. R. Leigh, M. R. Diamon, F. S. Stephen, *Nucl. Phys. A* **186** (1972) 97.
- [120] T. Yamazaki, *Proceedings of the International Conference on Nuclear Moments and Nuclear Structure*, Osaka (1972) 17.
- [121] D. Proeteld, *International School of Physics*, Varenna (1974).
- [122] D. Proeteld, D.Benson, K. H. Maier, M. R. Diamon, F. S. Stephen, *Proc. Int. Conf. on nuclear physics*, Munich (1973).
- [123] H. Beuscher, W. F. Davidson, R. M. Lieder, A. Neskakis, C. Mayer-Borick, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 843.
- [124] K. Neergard, P. Vogel, M. Radomski, *Nucl. Phys. A* **238** (1975) 199.
- [125] R. M. Lieder, *Proceedings of the International Conference on Nuclear Structure and Spectroscopy*, Amsterdam (1974).
- [126] D. C. Sousa, L. L. Reindinger, E. G. Funk, J. M. Mihelic, *Nucl. Phys. A* **238** (1975) 365.
- [127] K. Kumar, *Nucl. Phys. A* **231** (1974) 365.
- [128] C. M. Baglin, *Nucl. Data Sheets* **113**, (2012) 1871.
- [129] B. Singh, *Nucl. Data Sheets* **107**, (2006) 1531.
- [130] H. Xiaolong, *Nucl. Data Sheets* **108**, 1093 (2007).

Bohr Hamiltonian with inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential for triaxial nuclei

H. D. Yia Etolo^{*,†,‡}, D. Nga Ongodo^{*,§}, E. Anemena^{*,¶},
A. Atangana Likéné^{*,†,||} and G. H. Ben-Bolie^{*,**}

**Laboratory of Atomic,
Molecular and Nuclear Physics,
Department of Physics, Faculty of Science,
University of Yaounde I, P. O. Box 812,
Yaounde, Cameroon*

*†The Nuclear Technology Section (NTS),
Institute of Geological and Mining Research,
P. O. Box 4110, Yaounde, Cameroon*

‡herveetolo@yahoo.fr

§ngadieudonne@yahoo.fr

¶anemenaemmanuel@gmail.com

||andreaime@yahoo.fr

***gbenbolie@yahoo.fr*

Received 6 September 2022

Revised 20 October 2022

Accepted 23 October 2022

Published 26 November 2022

Bohr Hamiltonian with inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential for the β -part and a harmonic oscillator for the γ -part is investigated. The expressions of energies and wave functions are obtained using the parametric Nikiforov–Uvarov method. The obtained results are used to evaluate the normalized eigen energies, the root mean square deviation and $B(E2)$ transition rates of ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt atomic nuclei. The numerical results of our model are compared to those of other relevant theoretical models and experimental data. Furthermore, to test the sensitive signature of triaxiality, we used some indicators such as the staggering effect in the γ -band. It appears that the results provided by our calculations are in accordance with experimental values and improved in comparison with previous models.

Keywords: Triaxial nuclei; Bohr Hamiltonian; $B(E2)$ transition rates; parametric Nikiforov–Uvarov method; staggering effect.

PACS Number(s): 21.60.Fw, 21.10.Re, 70.25.+k, 04.10.Mn

¶Corresponding author.

1. Introduction

Since the discovery of the atomic nucleus, the knowledge of its fundamental properties seem to be very intriguing. Over the years, various models have been developed in an attempt to unfold the properties of atomic nuclei. Amongst these, we have both the collective geometric model^{1,2} and the Interacting Boson Model (IBM).³ The collective geometric model is a combination of the shell model and the liquid-drop model⁴ which have the merit of successfully describing most of the low energy nuclear excitations.⁵ This collective model is employed to describe the rotation and vibration of the nucleus also known as Bohr–Mottelson model.⁵

In a collective model, the atomic nucleus is described using an operator called the Bohr Hamiltonian which uses a coordinate system comprising two intrinsic collective variables β and γ with three Euler angles (θ, ϕ, φ) . The β variable measures the deformation with respect to the spherical shape of the nucleus, while the γ variable measures the axial deformation. In recent years, the analytical solutions obtained by Iachello^{6,7} have given new impetus to the study of the atomic nucleus using the Bohr Hamiltonian. These solutions are particularly interesting since they are considered as examples of the so-called critical point symmetries.⁴ Indeed, critical point symmetries^{8,9} are related to shape phase transitions in the nuclear structure. For example, the symmetry called Y (5)¹⁰ is linked to the transition from axial shapes to triaxial shapes, the symmetry called Z(5),¹¹ is linked to the transition from prolate shapes to oblate shapes.

To this end, the study of the solutions of the Bohr Hamiltonian equation should indeed help us to better understand the dynamics of phase transitions and triaxiality in atomic nuclei.¹² In this context, particular attention is paid to the search for analytical solutions of Bohr Hamiltonian equation with different potential models. Some potentials regularly used for the β variable are Davidson potential,^{13,14} Harmonic-oscillator,¹⁵ Coulomb and Kratzer potentials,¹⁶ Killingbeck potential,^{17,18} sextic potential,^{19–22} Quartic potential,²³ square well potential,⁶ finite well potential,²⁴ Killingbeck plus Morse potential,²⁵ ManningRosen,^{26,27,28} Hulthen,²⁹ Morse^{30,31} and Woods-Saxon.³² For more details, one can see Refs. 33 and 34.

Moreover, according to measurements carried out recently, it appears that there is a transition of shape between prolate and deformed oblate shape.^{11,35,36} For triaxial symmetry, the surface of the nuclei has a uniform oscillatory motion on the γ coordinate from prolate to oblate shapes.^{37,38} Now it is customary to use a harmonic oscillator potential having a minimum around $\gamma = \frac{\pi}{6}$. This paper is devoted to the study of triaxial nuclei using Bohr Hamiltonian. The potential in the β part consists of an inversely quadratic Yukawa potential plus screened Kratzer potential. The latter can be viewed as the superposition of variants of the Yukawa potential which is typical of strong interaction. This potential is quite rich in the sense that we can extract the Yukawa, Coulomb and Kratzer potentials via an appropriate choice of the parameters of the potential. Indeed, if it is possible to obtain analytical solutions of the Bohr Hamiltonian for the latter potential, then it could provide better

results than the screened Kratzer and inversely quadratic Yukawa potentials considered separately. The various reasons mentioned above motivated us to conduct this study.

This paper is organized as follows: In Sec. 2, the parametric Nikiforov–Uvarov method is briefly introduced. In Sec. 3, we present the Bohr Hamiltonian model, then after the separation of variables, we employ the parametric Nikiforov–Uvarov method to derive the expressions of wave functions and energy eigenvalues.³⁹ In Sec. 4, we present the theoretical tools needed to calculate electric quadrupole transition rates. Section 5 compares our numerical results of energy spectra and $B(E2)$ transition rates with the experimental data, and the staggering effect of the γ band is also investigated. We end with a concluding remark in Sec. 6.

2. Overview of the Parametric Nikiforov–Uvarov Method

The Nikiforov–Uvarov method^{39–42} is widely employed to solve second-order differential equations of the following form:

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{s^2(1 - \alpha_3 s)^2} \right) \Psi(s) = 0. \quad (1)$$

In Ref. 40, the authors showed that by considering the following parametrization

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{1 - \alpha_1}{2}, & \alpha_5 &= \frac{\alpha_2 - 2\alpha_3}{2}, & \alpha_6 &= \alpha_5^2 + \xi_1, \\ \alpha_7 &= 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2, & \alpha_8 &= \alpha_4^2 + \xi_3, & \alpha_9 &= \alpha_3(\alpha_7 + \alpha_3\alpha_8) + \alpha_6, \\ \alpha_{10} &= \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}, & \alpha_{11} &= \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}), \\ \alpha_{12} &= \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, & \alpha_{13} &= \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}), \end{aligned} \quad (2)$$

the wave function solution of Eq. (1) is given by

$$\Psi_{n,L}(S) = N_{n,L} S^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 S)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)}(1 - 2\alpha_3 S). \quad (3)$$

To obtain energy eigenvalues we can use the following equation:

$$\begin{aligned} n\alpha_2 - (2n + 1)\alpha_5 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + n(n - 1)\alpha_3 \\ + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3(2n + 1)\sqrt{\alpha_8}) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Bohr Hamiltonian Model

In this section, the Bohr Hamiltonian model is employed to describe triaxial nuclei with a stable deformation close to 30° . In the framework of collective intrinsic

variables,^{1,2} the Bohr Hamiltonian operator can be written as follows:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (5)$$

where β and γ are the intrinsic collective coordinates, \widehat{Q}_k (with $k = 1, 2, 3$) are angular momentum components in the intrinsic frame and B is the mass parameter. Let us introduce the following expressions ξ and $v(\beta, \gamma)$ such that $\xi = \frac{2BE}{\hbar^2}$, $v(\beta, \gamma) = \frac{2BV(\beta, \gamma)}{\hbar^2}$, which are the reduced energies and the reduced potential, respectively.

In order to perform separation of variables into the Hamiltonian operator, we assume that the reduced potential and the wave function are, respectively, written in the form $v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{\omega(\gamma)}{\beta^2}$, $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \psi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i)$ where θ_i ($i = 1, 2, 3$) are the Euler angles and D is the Wigner function; with the γ -part of the potential having a minimum at $\gamma = \frac{\pi}{6}$, one can write the angular part as follows^{11,43}:

$$W = \sum_{k=1}^3 \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} = 4(\widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2) - 3\widehat{Q}_1^2. \quad (6)$$

By using the following symmetric wave function⁴⁴

$$D(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\varsigma,0})}} [D_{\mu,\varsigma}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\varsigma}^{(L)}(\theta_i)], \quad (7)$$

the eigenvalue is $4L(L+1) - 3\varsigma^2$, where L is the angular momentum and ς is the projection quantum number of angular momentum on the body-fixed x' axis.^{44,45}

The energy bands are characterized by $L = n_\omega, n_\omega + 2, n_\omega + 4, \dots$ (with $n_\omega > 0$) next to the ground state energy band (with $n_\omega = 0$).⁴⁴

Henceforth, the γ and β parts of the Schrödinger equation are

$$\left[-\frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \omega(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma), \quad (8)$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{4L(1+L) - 3\varsigma^2 + 4\lambda}{4\beta^2} + u(\beta) \right] \psi(\beta) = \xi \psi(\beta). \quad (9)$$

3.1. Solution of the γ -part

Triaxial shape is described here by considering that the potential energy surface has a minimum around $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Henceforth, for the γ -part, the following harmonic potential can be considered:

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2}\tilde{c}\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)^2, \quad (10)$$

where \tilde{c} is defined as the stiffness of the potential. Combining Eqs. (8) and (10) and solving the obtained equation for η will give the energy eigenvalue and the corresponding normalized wave functions,^{46,47} respectively, as follows:

$$\lambda_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{2\tilde{c}}\left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}\right), \quad \tilde{n}_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\eta_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}}\sqrt{\pi n_{\tilde{\gamma}}}}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}((\tilde{c}/2)^{1/4}\tilde{\gamma}) \exp(-(\tilde{c}/2)^{1/2}\tilde{\gamma}^2/2), \quad (12)$$

with $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$, $n_{\tilde{\gamma}}$ is the radial quantum number, $H_{n_{\tilde{\gamma}}}$ is the Hermite polynomials.

3.2. Solution of the β -part

For the β -part of the problem, we consider the inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta^2}e^{-2\theta\beta} + \left(\frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta^2}\right)e^{-\theta\beta}, \quad (13)$$

where a, b, c and θ are real-valued constants that are found by fitting the spectra with the experimental data. As mentioned in Sec. 1, this potential can be regarded as a general case of other particular potentials of physical interest. Indeed, the inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential (IQYSKP) can be simplified to

— the screened Coulomb (Yukawa) potential⁴⁸ if $a = c = 0$

$$V(\beta) = \frac{b}{\beta}e^{-\theta\beta}, \quad (14)$$

— the screened Kratzer potential⁴² if $a = 0$

$$V(\beta) = \left(\frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta^2}\right)e^{-\theta\beta}, \quad (15)$$

— the inversely quadratic Yukawa potential⁴⁹ if $b = c = 0$

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta^2}e^{-2\theta\beta}, \quad (16)$$

— the Kratzer potential⁵⁰ if $a = \theta = 0$

$$V(\beta) = \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta^2}, \quad (17)$$

— the Coulomb potential⁵¹ if $a = c = \theta = 0$

$$V(\beta) = \frac{b}{\beta}. \quad (18)$$

It is obvious that this potential can be seen as a generalization of many other existing potentials in the literature. This shows that it is very rich and interesting to be studied. In Fig. 1, the inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential is represented using parameters of Table 1. By making the substitution $\psi(\beta) = \beta^{-2}\phi(\beta)$, and inserting into Eq. (9), one obtains

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{p}{\beta^2} - V(\beta) + \xi \right] \phi(\beta) = 0, \quad (19)$$

where $p = 2 + L(L + 1) - \frac{3\alpha^2}{4} + \lambda$. Next, by replacing the expression of $V(\beta)$ into Eq. (19), we obtain

$$\frac{d^2 \phi(\beta)}{d\beta^2} + \left[-\frac{p}{\beta^2} - \frac{a}{\beta^2} e^{-2\theta\beta} - \left(\frac{b}{\beta} + \frac{c}{\beta^2} \right) e^{-\theta\beta} + \xi \right] \phi(\beta) = 0. \quad (20)$$

In the case of $p \neq 0$, the Bohr Hamiltonian equation (20) cannot be solved analytically. So, we can use an approximation to obtain analytical solutions of Eq. (20). For a small β deformation, the centrifugal barrier and the Coulomb terms can be approximated by the following approximations^{52,53}:

$$\frac{1}{\beta} \simeq \frac{\theta}{1 - e^{-\theta\beta}}; \quad \frac{1}{\beta^2} \simeq \frac{\theta^2}{(1 - e^{-\theta\beta})^2}. \quad (21)$$

So, Eq. (20) becomes

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi(\beta)}{d\beta^2} + \left[-\frac{p\theta^2}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} - \frac{a\theta^2 e^{-2\theta\beta}}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} - \frac{b\theta e^{-\theta\beta}}{(1 - e^{-\theta\beta})} - \frac{c\theta^2 e^{-\theta\beta}}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} + \xi \right] \phi(\beta) \\ = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Equation (22) can be rewritten in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi(\beta)}{d\beta^2} + \frac{1}{(1 - e^{-\theta\beta})^2} [(\xi - p\theta^2) - (2\xi - c\theta^2 + b\theta)e^{-\theta\beta} \\ + (\xi + b\theta - a\theta^2)e^{-2\theta\beta}] \phi(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

As we are dealing with small β deformation, it is convenient to make the transformation $X = e^{-\theta\beta}$. By doing so, we obtain

$$\frac{d^2 \phi(X)}{dX^2} + \frac{1 - X}{X(1 - X)} \frac{d\phi(X)}{dX} + \frac{1}{X^2(1 - X)^2} [-\xi_1 X^2 + \xi_2 X - \xi_3] \phi(X) = 0, \quad (24)$$

where $\xi_1 = -\frac{\xi}{\theta^2} - \frac{b}{\theta} + a$; $\xi_2 = -\frac{2\xi}{\theta^2} - \frac{b}{\theta} - c$; $\xi_3 = p - \frac{\xi}{\theta^2}$.

We can compare Eq. (24) with the well-known parametric hypergeometric equation⁴⁰:

$$\frac{d^2 F(s)}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{dF(s)}{ds} + \frac{1}{s^2(1 - \alpha_3 s)^2} [-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3] F(s) = 0. \quad (25)$$

In the framework of the parametric Nikiforov–Uvarov method, the energy equation is given as follows⁴⁰:

$$\begin{aligned} &\alpha_2 n + \alpha_3 n(n - 1) - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \\ &+ \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

where $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_6 = \frac{1}{4} - \frac{\xi}{\theta^2} - \frac{b}{\theta} + a$, $\alpha_7 = \frac{2\xi}{\theta^2} + \frac{b}{\theta} + c$, $\alpha_8 = p - \frac{\xi}{\theta^2}$, $\alpha_9 = c + p + a + \frac{1}{4}$, $\alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{p - \frac{\xi}{\theta^2}}$, $\alpha_{11} = 2 + 2\sqrt{c + p + a + \frac{1}{4}} + 2\sqrt{p - \frac{\xi}{\theta^2}}$, $\alpha_{12} = \sqrt{p - \frac{\xi}{\theta^2}}$, $\alpha_{13} = -\frac{1}{2} - \sqrt{c + p + a + \frac{1}{4}} - \sqrt{p - \frac{\xi}{\theta^2}}$.

Finally, we obtain the energy spectrum as follows:

$$\xi = p\theta^2 - \theta^2 \left[\frac{n^2 + n + \frac{1}{2} + (2n + 1)\sqrt{c + p + a + \frac{1}{4}} + \frac{b}{\theta} + c + 2p}{2n + 1 + 2\sqrt{c + p + a + \frac{1}{4}}} \right]^2, \quad (27)$$

where n is the principal quantum number. In the limit $\theta \rightarrow 0$, we can clearly see that the energy spectrum becomes

$$\xi = \frac{b}{4 \left[n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(p + \frac{1}{4} \right) + a + c} \right]^2}. \quad (28)$$

Thus, the formula given by Eq. (28) contains both Kratzer and Coulomb energy spectra. It is therefore in agreement with the energy spectrum obtained in Ref. 43. As for the wave function, we can write the solution of Eq. (24) as follows⁴⁰:

$$\phi(X) = X^{\alpha_{12}} (1 - X)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2X). \quad (29)$$

Then, the β -part of the wave function can be written as follows:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,L,n_\omega}(\beta) &= N_L \beta^{-2} (\exp(-\theta\beta))^{\alpha_{12}} (1 - \exp(-\theta\beta))^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \\ &\times P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2 \exp(-\theta\beta)), \end{aligned} \quad (30)$$

where P_n are the well-known Jacobi polynomial, and N_L is the normalization factor determined from the normalization condition:

$$\int_0^{+\infty} \beta^4 \Psi_{n,L,n_\omega}^2(\beta) d\beta = 1. \quad (31)$$

Using the notations $\alpha_{15} = \alpha_{11} - \alpha_{10} - 1$; $\alpha_{14} = 2\alpha_{12} - 2\alpha_{13}$, we can write the normalization constant as follows:

$$N_L = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{+\infty} (\exp(-\theta\beta))^{2\alpha_{12}} (1 - \exp(-\theta\beta))^{\alpha_{14}} [P_n^{(\alpha_{10}-1, \alpha_{15})}(1 - 2\exp(-\theta\beta))]^2 d\beta}}. \quad (32)$$

Finally, we can write the total wave function of triaxial nuclei as follows:

$$\begin{aligned} \Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = & \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}}\sqrt{\pi}n_{\tilde{\gamma}}}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}((\tilde{c}/2)^{1/4}\tilde{\gamma}) \exp(-(\tilde{c}/2)^{1/2}\tilde{\gamma}^2/2) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} \\ & \times [D_{\mu,\alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^l D_{\mu,-\alpha}^{(L)}(\theta_i)] N_L \beta^{-2} (\exp(-\theta\beta))^{\alpha_{12}} \\ & \times (1 - \exp(-\theta\beta))^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\exp(-\theta\beta)). \end{aligned} \quad (33)$$

4. $B(E2)$ Transition Rates

In this section, $B(E2)$ transition rates are calculated for $^{192,194,196}\text{Pt}$ atomic nuclei. The $B(E2)$ transition rates constitute a very important tool needed to complete the model's characteristics. The general quadrupole operator^{54,55} is given by

$$T_\mu^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i)) \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad (34)$$

where θ_i are the so-called Euler angles and t is the scale factor, while $D^{(2)}$ stands for the Wigner function and index term μ stands for the angular momentum quantum number ζ (projection ζ along the body-fixed \hat{x}' axis).

For triaxial nuclei ($\gamma \approx \frac{\pi}{6}$), the quadrupole operator⁵⁴ takes the following form

$$T_\mu^{(E2)} = -\frac{t\beta}{\sqrt{2}} (D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i)), \quad (35)$$

and the $B(E2)$ transition rates^{56,57} are given by

$$B(E2; L_i \zeta_i \rightarrow L_f \zeta_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle L_f \zeta_f || T^{(E2)} || L_i \zeta_i \rangle|^2}{2L_i + 1}, \quad (36)$$

and then from the Wigner–Eckart theorem⁵⁶ we can write the reduced matrix elements as follows:

$$\langle L_f M_f \varsigma_f | T_{\mu}^{(E2)} | L_i M_i \varsigma_i \rangle = \frac{\langle L_f \varsigma_f || T^{(E2)} || L_i \varsigma_i \rangle}{\sqrt{2L_f + 1}} \langle L_i 2L_f | M_i \mu M_f \rangle. \quad (37)$$

To calculate the matrix elements of the quadrupole operator of Eq. (35), the integral over $\tilde{\gamma}$ is equal to the unity because of normalization method,⁵⁴ the integral over the Euler angles is deformed by the means of standard integrals of the three Wigner function⁵⁶ and the integral over β takes the following form:

$$I(n_i, L_i, \varsigma_i, n_f, L_f, \varsigma_f) = \int \beta \xi_{n_i, L_i, \varsigma_i}(\beta) \xi_{n_f, L_f, \varsigma_f}(\beta) \beta^4 d\beta, \quad (38)$$

where β and β^4 factors come from the quadrupole operator and volume element, respectively. Then using the Wigner–Eckart theorem, Eq. (36) takes the following form

$$\begin{aligned} B(E2; L_i \varsigma_i \rightarrow L_f \varsigma_f) \\ &= \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1 + \delta_{\varsigma_i, 0})(1 + \delta_{\varsigma_f, 0})} [(L_i 2L_f | \varsigma_i 2\varsigma_f) + (L_i 2L_f | \varsigma_i - 2\varsigma_f) \\ &\quad + (-1)^{L_f} (L_i 2L_f | \varsigma_i - 2 - \varsigma_f)]^2 [I(n_i, L_i, \varsigma_i, n_f, L_f, \varsigma_f)]^2. \end{aligned} \quad (39)$$

The Clebsch–Gordon coefficients appearing in the above equation have been deduced by its properties (only $\Delta\varsigma = \pm 2$ transitions are allowed).

5. Numerical Results and Discussion

In this section, we present the numerical results of energy levels of each nucleus as well as $B(E2)$ transition rates and compare them with the experimental data and other relevant theoretical predictions. The energy level of each nucleus can be calculated by using Eq. (27) and normalized to $2_{0,0}^+$ state by using the following formula:

$$R_{L_n, n_\omega} = \frac{E_{L_n^+, n_\omega} - E_{0_{0,0}^+}}{E_{2_{0,0}^+} - E_{0_{0,0}^+}}. \quad (40)$$

In our model, five free parameters are involved to get the best fit between experimental values with theoretical results. The values of these free parameters are listed in Table 1. In this work, we have selected ^{192,194,196}Pt isotopes since they are good candidates for triaxial atomic nuclei.³¹ The lowest energy bands are characterized by $n_{\tilde{\gamma}}$. The ground state band is characterized by $n = 0$ and $n_\omega = 0$, whereas the γ band is distinguished with the odd values of L (with $n = 0$ and $n_\omega = 1$) and even values of L (with $n = 0$ and $n_\omega = 2$). Next, the β -band is distinguished with $n = 1$ and $n_\omega = 0$. For sake of comparison, we have calculated

Table 1. Free parameters of the inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential.

Parameters	¹⁹² Pt	¹⁹⁴ Pt	¹⁹⁶ Pt
<i>a</i>	2.11	9.02	13.04
<i>b</i>	-2.40	-4.32	-2.35
<i>c</i>	49	50	48
θ	0.0014	0.0014	0.0014
\bar{c}	0.01	0.01	0.01

the root mean square deviation between the experimental data and the theoretical predictions using the following relation

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (E_i(\text{exp}) - E_i(\text{th}))^2}{M}}, \quad (41)$$

where *M* stands for the number of states, while $E_i(\text{th})$ and $E_i(\text{exp})$ represent the theoretical and experimental energies of the *i*th level, respectively. Table 2 presents the numerical values of energy spectra, calculated using Eq. (40) for ^{192,194,196}Pt atomic nuclei. The root mean square deviation σ confirm that for all the atomic

Table 2. Comparison of normalized eigen energies for ground state bands, β -bands and γ -bands with experimental data^{32,42} and those from esM⁵⁸ with two parameters, esMK²⁵ with six parameters for ¹⁹²Pt, ¹⁹⁴Pt and ¹⁹⁶Pt isotopes.

L_{band}	¹⁹² Pt				¹⁹⁴ Pt				¹⁹⁶ Pt			
	Exp	esM	esKM	Our	Exp	esM	esKM	Our	Exp	esM	esKM	Our
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.479	2.475	2.598	2.442	2.470	2.445	2.486	2.446	2.465	2.509	2.321	2.424
6_g^+	4.314	4.317	3.597	4.108	4.299	4.280	4.488	4.079	4.290	4.440	3.440	4.031
8_g^+	6.377	6.492	4.836	5.931	6.392	6.509	6.728	5.254	6.333	6.767	4.823	5.627
10_g^+	8.624	9.001	6.285	7.592	8.671	9.148	9.073	7.272	8.558	9.489	6.432	7.097
2_γ^+	1.935	1.907	2.307	1.912	1.894	1.888	1.863	1.897	1.936	1.923	1.993	1.887
3_γ^+	2.910	2.364	2.743	2.711	2.809	2.716	2.788	2.698	2.845	2.795	2.483	2.668
4_γ^+	3.795	4.815	3.877	4.531	3.743	4.784	5.016	4.481	3.636	4.969	3.752	4.424
5_γ^+	4.682	5.060	4.016	4.727	4.563	5.034	5.272	4.677	4.525	5.230	3.907	4.672
6_γ^+	5.905	7.875	5.635	6.713	5.863	7.956	8.053	6.611	5.644	8.263	5.711	6.482
7_γ^+	6.677	7.647	5.503	6.585	—	7.717	7.841	6.513	—	8.016	5.564	6.362
8_γ^+	8.186	11.203	7.545	8.521	8.186	11.503	10.920	8.315	7.730	11.900	7.825	8.121
0_β^+	3.776	3.567	5.117	4.131	3.858	2.349	3.716	3.862	3.192	3.512	4.931	3.882
2_β^+	4.547	4.568	5.617	4.779	4.603	3.350	4.717	4.681	3.828	4.542	5.427	4.556
4_β^+	6.110	6.087	6.338	5.826	5.817	4.881	6.254	5.672	4.318	6.140	6.235	5.526
σ		0.988	0.935	0.439	—	1.202	0.989	0.577	—	1.450	1.075	0.585

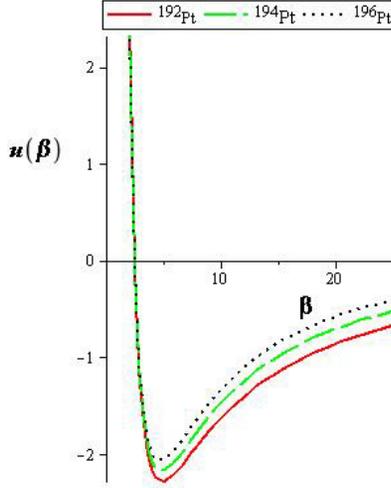


Fig. 1. (Color online) Representation of the inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential for $^{192,194,196}\text{Pt}$ atomic nuclei.

nuclei investigated in this research, our results are overall in good agreement with the experimental data. The interaction potential of this research is shown in Fig. 1 for $^{192,194,196}\text{Pt}$ atomic nuclei. These curves have the shape of an inverted Gaussian function, and they equally confine. Looking at these curves, one can see that for a given β deformation, the force acting on nucleons is stronger for ^{192}Pt atomic nucleus, less strong for ^{194}Pt atomic nucleus and weak for the ^{196}Pt . All the curves keep the same Gaussian inverted shape for all the atomic nuclei considered. Moreover, whatever the isotope, the potential goes to infinity as $\beta \rightarrow 0$ and goes to zero as β goes to infinity. In addition, potential confines more for small values of β .

Alongside the energy levels, $B(E2)$ transition rates are important properties to study nuclear structure. Indeed, since the wave function is already known, we can calculate the $B(E2)$ transition rates by using Eq. (39). The numerical results of $B(E2)$ transition rates are listed in Table 3. It is worth mentioning that the $B(E2)$ s listed in Table 3 are normalized to $B(E2; 2_g^+ \rightarrow 0_g^+)$, where 0_g^+ and 2_g^+ are the lowest state and the first excited state of the ground state band, respectively. The $B(E2)$ transition rates presented in Table 3 have been calculated taking the selection rules into account. For example, the quadrupole transition $4_{0,0}^+ \rightarrow 2_{0,0}^+$ is allowed because $\zeta_f = L_f - (n_\omega)_f = 4 - 0 = 4$ and $\zeta_i = L_i - (n_\omega)_i = 2 - 0 = 2$, that means $\Delta\zeta = 4 - 2 = +2$. This quadrupole transition obeys the selection rules whereas the transition $0_{1,0}^+ \rightarrow 2_{0,0}^+$ is forbidden since it does not obey the selection rules. We have compared our predictions of $B(E2)$ transition rates with relevant theoretical works and the available experimental data. It is also important to note that we have predicted some unusual $B(E2)$ transitions from the γ -band to the ground state band such as $3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$ and $2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$.

Table 3. Comparison of values of $B(E2)$ transition considering ground \rightarrow ground, γ -even \rightarrow ground, γ -odd \rightarrow ground, γ -even \rightarrow γ -even, γ -odd \rightarrow γ -odd, γ -odd \rightarrow γ -even, $\beta \rightarrow \beta$ bands for inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential with experimental data¹¹ and those of esM⁵⁸ with two parameters and MsK⁵⁹ with six parameters for ¹⁹²Pt, ¹⁹⁴Pt and ¹⁹⁶Pt isotopes.

$L_{n,n_\omega}^i \rightarrow L_{n,n_\omega}^+$	¹⁹² Pt				¹⁹⁴ Pt				¹⁹⁶ Pt			
	Exp	esM	MsK	Our	Exp	esM	MsK	Our	Exp	esM	MsK	Our
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.563	1.563	1.541	1.562	1.73	1.630	1.541	1.573	1.49	1.540	1.541	1.580
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	—	2.213	2.216	1.849	1.37	2.334	2.217	1.877	0.95	2.141	2.210	1.898
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	—	2.735	2.912	2.281	1.02	2.835	2.913	2.329	1.09	2.597	2.915	2.380
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$	—	3.163	3.740	2.892	0.69	3.187	3.744	2.976	—	2.955	3.747	3.073
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	1.91	1.586	1.560	1.588	1.81	1.653	1.560	1.593	—	1.564	1.560	1.603
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	—	0.350	0.351	0.512	0.285	0.370	0.351	0.368	0.42	0.339	0.351	0.370
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	—	—	0.216	0.442	—	—	0.217	0.231	—	—	0.217	0.231
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	—	—	0.157	0.311	—	—	0.157	0.170	—	—	0.126	0.173
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.67	1.236	1.224	1.187	—	1.305	1.224	1.267	—	1.200	1.225	1.065
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	—	—	1.057	0.976	—	—	1.058	0.917	—	—	1.058	0.762
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	—	—	1.010	0.684	—	—	1.010	0.686	—	—	1.011	0.553
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	—	0.734	0.728	0.773	0.428	0.776	0.728	0.740	0.430	0.716	0.728	0.744
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	—	1.081	1.170	1.252	—	1.112	1.170	1.276	—	1.022	1.171	1.307
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	—	1.715	2.170	2.476	—	1.697	2.177	2.563	—	1.589	2.170	2.662
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$	—	1.250	1.260	1.309	—	1.316	1.261	1.326	—	1.205	1.261	1.345
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$	—	1.943	2.130	2.319	—	1.994	2.137	2.375	—	1.834	2.139	2.339
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	1.79	2.147	2.117	2.102	—	2.264	2.117	0.881	—	2.094	2.118	1.891
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	—	—	1.451	1.141	—	—	1.452	1.223	—	—	1.453	1.016
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	—	—	1.658	0.993	—	—	1.659	1.029	—	—	1.661	0.823
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$	—	—	0.926	1.348	—	—	1.425	1.353	—	—	1.748	1.358
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$	—	—	0.926	1.221	—	—	1.424	2.035	—	—	2.048	2.049

Overall, it appears that our results are in good agreement with the experimental data. The inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential plays a significant role in this research. It acts like the superposition of various shapes of the Yukawa potential, which is known to be typical of strong interaction. This reason shows why the latter potential is appropriate to provide us best results. This can equally be illustrated by the fact that the unusual $B(E2)$ s are well reproduced by our calculations in comparison with the predictions of Morse potential,⁵⁸ Killingbeck plus Morse potential,²⁵ screened Kratzer plus Morse potential⁵⁹ and Hulthen plus screened Kratzer potential.⁶⁰

Moreover, in Figs. 2–4 we have presented another useful indicator that illustrates the sensitive signature for triaxiality, namely the staggering effect in the γ -band. This indicator measures the displacement of the $(J - 1)_\gamma^+$ level with respect to the average of its neighbors, $(J - 2)_\gamma^+$ and J_γ^+ . This useful quantity is given by the

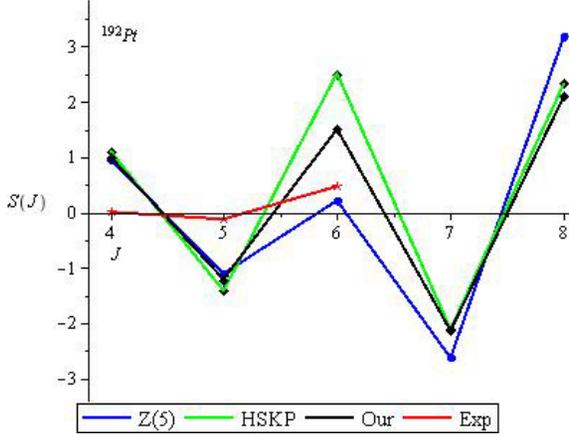


Fig. 2. (Color online) Comparison between the effects of the staggering of the theoretical values, Z(5) symmetry, Hulthen plus screened Kratzer prediction and experimental data for the ^{192}Pt atomic nucleus.

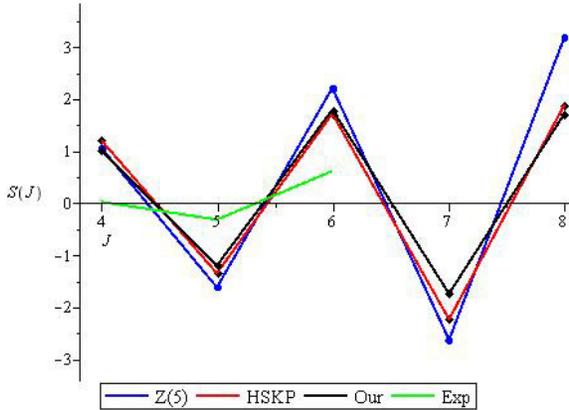


Fig. 3. (Color online) Comparison between the effects of the staggering of the theoretical values, Z(5) symmetry, Hulthen plus screened Kratzer prediction and experimental data for the ^{194}Pt atomic nucleus.

following formula^{61–63}:

$$S(J) = \frac{E(J_{\gamma}^{+})E((J-2)_{\gamma}^{+}) - 2E((J-1)_{\gamma}^{+})}{E(2_{g}^{+})}, \quad (42)$$

where $E(J)$ represents the energy of the J_{γ}^{+} state of the γ -band, and $E(J_{g}^{+})$ is the energy of the first excited state in the ground state band. In order to confirm whether in this work this signature for triaxiality is revealed, we plotted in Figs. 2–4 the function $S(J)$ for the atomic nuclei considered here $^{192,194,196}\text{Pt}$. For comparison purposes, we also plotted the values of Hulthen plus screened Kratzer model,⁶⁰ Z(5) model and experimental predictions in these figures. A look at these figures shows

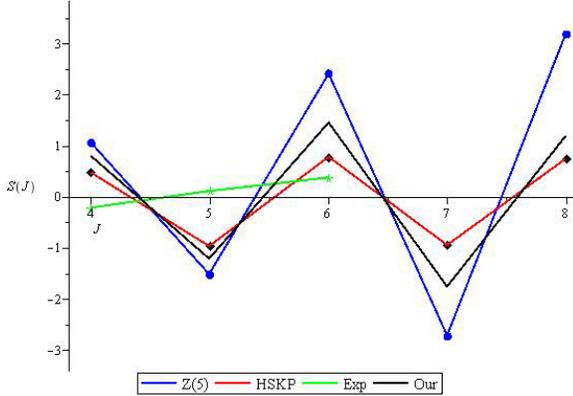


Fig. 4. (Color online) Comparison between the effects of the staggering of the theoretical values, Z(5) symmetry, Hulthen plus screened Kratzer prediction and experimental data for the ^{196}Pt atomic nucleus.

that all the theoretical models exhibit stronger staggering than the experimentally observed one. Figure 2 shows the comparison between the effects of the staggering of theoretical values, the parameter-free Z(5) model,¹¹ Hulthen plus screened Kratzer⁶⁰ prediction and experimental data for the ^{192}Pt atomic nucleus. At the points 6_{γ}^{+} and 8_{γ}^{+} the shift is significant between the Z(5) model and the predictions of this work whereas at the points 4_{γ}^{+} , 5_{γ}^{+} and 7_{γ}^{+} the shift is very small. One can remark that the curve of this work shifts away from the one of Hulthen plus screened Kratzer predictions at the points 6_{γ}^{+} , and get close to experimental prediction at the points 4_{γ}^{+} and 5_{γ}^{+} . Figure 3 illustrates the comparison between the staggering of the theoretical values, Z(5) symmetry, Hulthen plus screened Kratzer⁶⁰ prediction and experimental data for the ^{194}Pt atomic nucleus. Looking at Fig. 3, a very small shift can be observed between the Z(5) curve, Hulthen plus screened Kratzer curve and that of this work at each points except at 7_{γ}^{+} and 8_{γ}^{+} . We note that the curve of this research is closer to that of Hulthen plus screened Kratzer.⁶⁰ At the points 4_{γ}^{+} and 5_{γ}^{+} all the theoretical curves quite join together. It is obvious that for $^{192,194,196}\text{Pt}$ isotopes, all the graphs fit well from 4_{γ}^{+} to 6_{γ}^{+} . In Fig. 4, we illustrated the effect of the staggering of the theoretical values, Hulthen plus screened Kratzer⁶⁰ prediction, Z(5) symmetry¹¹ and experimental data for the ^{196}Pt atomic nucleus. Looking at the curves presented in Fig. 4, one can see that at the points 4_{γ}^{+} , 5_{γ}^{+} and 6_{γ}^{+} our graph is closer to the experimental one^{32,42} than the graphs from Hulthen plus screened Kratzer potential⁶⁰ and Z(5) symmetry.¹¹ Moreover, as J goes to higher values, the curve of this work shifts away from that of Z(5) symmetry.

Furthermore, for all the isotopes investigated, a similar zig-zag behavior is observed around $S(J) = 0$ axis. Indeed, globally we can see from the figures that the even staggering factors $S(4)$, $S(6)$ and $S(8)$ attain positive values whereas the odd staggering factors such as $S(5)$ and $S(7)$ have negative values. These results are

in good agreements with the predictions of Ref. 61. Overall, a close look at Figs. 2–4 show that experimental values of staggering are well reproduced by our model and $Z(5)$ for ^{192}Pt atomic nuclei, our model and Hulthen plus screened Kratzer model⁶⁰ for ^{194}Pt atomic nuclei, whereas for ^{196}Pt the experimental staggering is well reproduced by Hulthen plus screened Kratzer model.

6. Conclusion

This work was devoted to the study the Bohr Hamiltonian model for triaxial nuclei. A new interaction potential, namely the inversely quadratic Yukawa plus screened Kratzer potential was suggested for the β -part. For the γ -part of the potential, we used the harmonic oscillator having a minimum around $\gamma = \frac{\pi}{6}$. The parametric Nikiforov–Uvarov method is used to obtain energy eigenvalues of the Bohr Hamiltonian equation as well as the corresponding wave functions. Then numerical results of our model is presented in Tables 2 and 3 and compared with experimental data and other relevant theoretical works for ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt atomic nuclei. Overall, the results of this research are in good agreement with the experimental data.

References

1. A. Bohr, *Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk.* **26** (1952) 1.
2. A. Bohr and B. R. Mottelson, *Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vid. Selsk.* **27** (1952) 16.
3. F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
4. W. Greiner and A. J. Maruhn, *Nuclear Models* (Springer, Berlin, 1996).
5. F. F. Ruffino and L. Fortunato, *Computation* **6** (2018) 48.
6. F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3580.
7. F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 052502.
8. R. F. Casten and E. A. McCutchan, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **34** (2007) R285.
9. P. Cejnar, J. Jolie and R. F. Casten, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 2155.
10. F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 132502.
11. D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588** (2004) 172.
12. M. A. Caprio, *Phys. Rev. C* **72** (2005) 054323.
13. D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **584** (2004) 40.
14. I. Yigitoglu and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
15. A. S. Davydov and A. A. Chaban, *Nucl. Phys.* **20** (1960) 499.
16. L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G* **29** (2003) 1341.
17. H. Neyazi, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, *Nucl. Phys. A* **945** (2016) 80.
18. H. Sobhani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, *Nucl. Phys. A* **85** (2018) 3580.
19. G. Lévai and J. Arias, *Phys. Rev. C* **81** (2010) 044304.
20. P. Buganu and R. Budaca, *J. Phys. G* **42** (2015) 105106.
21. R. Budaca, P. Buganu and A. I. Budaca, *Phys. Lett. B* **776** (2018) 26.
22. G. Lévai and A. M. Ishkhanyan, *Mod. Phys. Lett. A* **34** (2019) 1950134.
23. R. Budaca, *Eur. Phys. J. A* **5** (2014) 50.
24. I. Inci, I. Boztosun and Y. E. Gonen, *J. Phys. G* **39** (2012) 085112; **27** (2018) 1850072.
25. B. T. Mbadjoun, J. M. E. Ema’a, P. E. Abiama, G. H. Ben-Bolie and P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072; **953** (2016) 158.

26. M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Int. J. Mod. Phys. E* **24** (2015) 1550089.
27. M. Chabab, A. E. Batoul, A. Lahbas and M. Oulne, *Nucl. Phys. A* **953** (2016) 158.
28. L. Naderi and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **131** (2016) 133.
29. M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51** (2015) 131.
30. I. Inci, I. Boztosun and Y. E. Gonen, *J. Phys. G* **39** (2012) 085112.
31. I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 1450053.
32. M. Capak, D. Petrellis, B. Gonul and D. Bonatsos, *J. Phys. G* **42** (2015) 095102.
33. L. Fortunato, *Eur. Phys. J. A* **26** (2005) 1.
34. P. Baganu and L. Fortunato, *J. Phys. G* **43** (2016) 093003.
35. Y. Oktem et al., *Phys. Rev. C* **76** (2007) 044315.
36. J. Jolie and A. Linnemann, *Phys. Rev. C* **68** (2003) 031301.
37. L. Wilets and M. Jean, *Phys. Rev.* **102** (1956) 788.
38. N. V. Zamfir and R. F. Casten, *Phys. Rev. Lett. B* **260** (1991) 265.
39. A. V. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* (Birkhauser, Boston, 1988).
40. C. Tezcan and R. Sever, *Int. J. Theor. Phys.* **48** (2009) 337.
41. C. A. Onate, O. Adebimpe, A. F. Lukman, I. J. Adama, J. O. Okoro and E. O. Davids, *Heliyon* **4** (2018) e00977.
42. Y. Omon, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **2920** (2020) 2050082.
43. L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **30** (2004) 627.
44. J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249** (1975) 111.
45. A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol. II: Nuclear Deformations* (Benjamin, New York, 1975).
46. I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 1450053.
47. A. Lemieux and A. K. Bose, *Ann. Inst. Henri Poincare A* **10** (1969) 259.
48. C. Lam and Y. Varshni, *Phys. Rev. A* **4** (1971) 1875.
49. O. Oluwadare and K. J. Oyewumi, *Chin. Phys. Lett.* **34** (2017) 110301.
50. A. Kratzer, *Zeit. Phys.* **3** (1920) 460.
51. K. Hong and J. Noolandi, *J. Chem. Phys.* **68** (1978) 5163.
52. W. C. Qiang and S. H. Dong, *Phys. Lett.* **368** (2007) 13.
53. S. H. Dong, W. C. Qiang and G. H. Sun, *J. Phys. A* **40** (2007) 10535.
54. I. Yigitoglu and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
55. D. Bonatsos et al., *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
56. A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957).
57. N. Soheibi, M. Hamzavi, M. Eshghi and S. M. Ikhdair, *Int. J. Mod. Phys. E* **26** (2017) 1750073.
58. I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 1450053.
59. S. H. Adama, D. Nga Ongodo, A. Zarma, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **30** (2021) 2150105.
60. P. Mah Tsila, A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **143** (2022) 2250063.
61. P. Baganu, M. Chabab, A. E. Batoul, A. Lahbas and M. Oulne, *Nucl. Phys. A* **970** (2017) 272.
62. A. A. Raduta and P. Baganu, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 034313.
63. E. A. McCutchan, D. Bonatsos, N. V. Zamfir and R. F. Casten, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 024306.

PAPER • OPEN ACCESS

Solution of the one-speed neutron transport equation in anisotropic scattering medium with a Pomraning-Eddington approximation approach

To cite this article: Yia Etolo Hervé Didier *et al* 2019 *J. Phys. Commun.* **3** 055016

View the [article online](#) for updates and enhancements.

You may also like

- [Resonance, fractal basin boundary and chaotic behaviour of an anharmonic oscillator with two external periodic forces](#)
H Fotsin, C Chedjou and P Wofo
- [Discrete energy transport in collagen molecules](#)
Alain Mvogo, Germain H. Ben-Bolie and Timoléon C. Kofané
- [Behavior of the Van der Pol oscillator with two external periodic forces](#)
J C Chedjou, H B Fotsin and P Wofo



PAPER

OPEN ACCESS

RECEIVED
8 October 2018REVISED
12 March 2019ACCEPTED FOR PUBLICATION
29 April 2019PUBLISHED
22 May 2019

Original content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 3.0 licence](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.



Solution of the one-speed neutron transport equation in anisotropic scattering medium with a Pomraning-Eddington approximation approach

Yia Etolo Hervé Didier¹ , Ema'a Ema'a Jean Marie², Ben-Bolie Germain Hubert³ and Ele Abiama Patrice⁴

¹ Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaoundé I, PO Box 812, Yaoundé Cameroon

² University of Maroua, Higher Teacher's Training College, PO Box 55, Maroua Cameroon

³ Center of Excellence in Information Technologies and Communication, University of Yaoundé I, Yaoundé, Cameroon

⁴ Nuclear Technology section, Energy Research Laboratory, Institute of Geological and Mining Research, PO Box 4110, Yaoundé, Cameroon

E-mail: hervetolo@yahoo.fr

Keywords: modified K-integral approach, Pomraning-Eddington approximation, generalized even and odd functions, four-parameter phase function

Abstract

In this work, a combined modified K-integral approach and Pomraning-Eddington approximation to solve the neutron transport equation for general anisotropic scattering law is presented. This combined approach leads to the establishment of general expressions of the even $e(x, \mu)$ and odd $o(x, \mu)$ functions of the angular variable μ . Both functions are slowly varying in x . Furthermore, these expressions can be reduced to those reported in literature. In addition, the parameters such as $D_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p} e(x, \mu) d\mu$ and $d_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p+1} o(x, \mu) d\mu$ with $p = 1, 2, \dots$ are obtained without any integral calculus and the variables we used α_1, α_2, r_1 and r_2 verify the relation $\left(\alpha_1 \frac{r_2}{r_1} - \alpha_2 \frac{r_1}{r_2}\right) = 0$. As application, diffusion lengths are calculated for linear scattering and the neutron heat fluxes are evaluated graphically for four-parameter scattering phase function.

1. Introduction

In modern physics, neutron transport being an exciting topic and has been at the center of many studies. Its technological applications, firstly limited to nuclear reactor span in other fields of sciences such as radiative transfer, and biomedical domain just to name a few.

The study of neutron transport has a long history and concerns the understanding of the complex mechanisms involve with the migration of neutrons in bulk media. These mechanisms start immediately after a neutron is released into a diffusing medium, this neutron can collide several times with the atomic nuclei of the medium, or may also result in absorption (where some neutrons disappear) or fission (where other neutrons reappear) or simply a change in their speed and direction (scattering).

In a slab medium those complex mechanisms are well modeled by one-speed neutron transport (Boltzmann) equation (NTE). Though obtaining one speed neutron equation remains straightforward, its solution is complicated. As a result, numerical and approximation methods are often applied. A large collection of numerical methods were developed, this include: the discrete ordinate method (DOM) [1], finite element method (FEM) [2], finite volume method (FVM)[3], monte carlo method (MCM) [4], spectral element method [5], discrete spherical harmonics method [6] an so on. More informations on this can be found in[7]. These method are versatile, but susceptible from numerical error due to finite step size [8].

A closed form analytical solution of the NTE have been obtained for some limited number of simple anisotropic scattering expressions. Some solution methods and classic references are reported in [9–12]. These solutions are useful in a variety of applications, such as: conducting sensitivity analyses to investigate the effects

of various parameters, serving as screening models or benchmark solutions for more complex neutron-nucleus interaction processes that cannot be solved exactly, and for validating more comprehensive numerical solutions of the NTE [13].

These analytical solutions can be obtained by using the Pomraning-Eddington approximation (PEA) method [14–16]. The objective of the latter is that it separates variable of the NTE into angular and spatial part. However, until now the PEA approximation has been used only with one or two terms of the scattering phase function (expanded as an infinite series in terms of the Legendre polynomials), in order to accurately represent complex interacting phenomenon between neutron and the atom of the propagating medium, more terms of that series may be needed to represent scattering phase function accurately. According to [17] the larger the number of terms, the greater the accuracy of the phase function.

In his present form the PEA approximation can hardly handle a phase function with a great number of terms, like the four-parameter phase function of [18] (this is due to the fact that diffusion coefficient $D_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p} e(x, \mu) d\mu$ and $d_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p+1} o(x, \mu) d\mu$ are embedded in the angular part ($e(x, \mu)$ and $o(x, \mu)$), henceforth their expressions lead to transcendental equation which is difficult to resolve analytically when the number of term increases. Henceforth, it is necessary to extend the Pomraning-Eddington method to any kind of anisotropic scattering [19]. reported the above mentioned solution, giving only the generalized expression of the angular part of the NTE equation. This work aims at extending that of [19] by solving the NTE with generalized anisotropic scattering by (PEA) approach, compared to [19] the novelties introduced are:

- Using a modified K-integrals approach combined with PEA approximation, to derive the solution of the spatial and the angular part of the NTE equation,
- The diffusion coefficients such as $D_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p} e(x, \mu) d\mu$ and $d_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p+1} o(x, \mu) d\mu$ with $p = 1, 2, \dots$ are obtained without any integral calculus for the first time but with the well-known Chandrasekhar Polynomial $h_n(\lambda)$.

The K-integral methods was developed by [20]. According to [21] there are two special weighted integrals of the one-dimensional transport equation, which are valid regardless of boundary conditions.

The solution can be obtained based on the following steps:

- (a) Insert the PEA in the NTE;
- (b) Obtain even and odd functions using a modified K-integrals approach;
- (c) Obtain two differential equations;
- (d) Solve the resultant system of equations.

In order to attain this objectives, the work is organized as follows: in section 2, the mathematical description of the model is given and comparison of the PEA model with existing ones is also made. Section 3 is devoted to the application of the model for calculation of diffusion length for linear scattering, four and six terms expansion of the scattering phase function and evaluation of diffusions parameters d_1 and D_1 via Chandrasekhar first order polynomial. The overview is founded in section 4 as conclusion.

2. Mathematical description

The stationary one-speed neutron or particle transport equation in homogeneous anisotropic scattering medium with internal energy source can be written as [22]

$$\mu \frac{\partial I(x, \mu)}{\partial x} + I(x, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^1 I(x, \mu') P(\mu, \mu') d\mu' + Q(x). \quad (1)$$

for $\mu \in [-1, 1]$ and $x \in [0, b]$ with the boundary conditions

$$I(0, \mu) = f_1 + \rho_1^d \int_0^1 I(0, -\mu) \mu d\mu, \quad \mu \geq 0, \quad (2a)$$

$$I(b, -\mu) = f_2 + \rho_2^d \int_0^1 I(b, \mu) \mu d\mu, \quad \mu \geq 0. \quad (2b)$$

Here x is the optical depth space variable, μ' and μ are the direction of neutron velocity before and after scattering, respectively, $I(x, \mu)$ is the neutron density distribution, ω_0 is the mean number of secondary neutrons

per collision, $Q(x)$ is the internal sources of energy, f_b, ρ_i^d are the externally incident flux, diffusive reflectivity, respectively on the left and right boundaries ($i = 1, 2$).

$P(\mu, \mu')$ is the scattering phase function considered as [19]

$$P(\mu, \mu') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu) P_n(\mu'), \quad (3)$$

where $P_n(\mu)$ is the Legendre Polynomial and a_n are the expansion coefficients with $a_0 = 1$.

Following the Pomraning-Eddington approximation the solution of the one-speed neutron transport equation is written as [14]

$$I(x, \mu) = \phi_o(x) e(x, \mu) + o(x, \mu) \phi_1(x), \quad (4)$$

where $\phi_o(x)$ and $\phi_1(x)$ are the neutron radiant energy and net neutron flux, respectively, defined as

$$\phi_o(x) = \int_{-1}^1 I(x, \mu) d\mu, \quad (5a)$$

$$\phi_1(x) = \int_{-1}^1 \mu I(x, \mu) d\mu. \quad (5b)$$

while $e(x, \mu)$ is even in μ and $o(x, \mu)$ is odd in μ both functions are slowly varying in x and normalized such that:

$$\int_{-1}^1 \mu o(x, \mu) d\mu = 1, \quad (6a)$$

$$\int_{-1}^1 e(x, \mu) d\mu = 1. \quad (6b)$$

2.1. Modified K-integrals approach

This work starts by substituting equation (4) in equation (1), to obtain

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \phi_o(x)}{\partial x} e(x, \mu) + \phi_o(x) \left(e(x, \mu) - \frac{\omega_o}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') e(x, \mu') d\mu' \right) \\ + \mu \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} o(x, \mu) + \phi_1(x) \left(o(x, \mu) - \frac{\omega_o}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') o(x, \mu') d\mu' \right) = Q(x). \end{aligned} \quad (7)$$

The derivation of the K-integrals in the context of neutron thermalisation by Kladnik and Kuscer [20], the reader is referred to the excellent work of [21] for its mathematical foundation. Inspired by the K-integrals method [21], it was assumed that the angular part of the second expression on the left and the fourth expression on the left are linked by the following couple system

$$e(x, \mu) - \frac{\omega_o}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') e(x, \mu') d\mu' = \alpha_1 \mu o(x, \mu), \quad (8a)$$

$$o(x, \mu) - \frac{\omega_o}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') o(x, \mu') d\mu' = \alpha_2 \mu e(x, \mu), \quad (8b)$$

where α_1 and α_2 are constants to be determined later. These are two couple integral equation for $o(x, \mu)$ and $e(x, \mu)$. It should be noted that the classical K-integrals approach can be recovered by setting $\alpha_1 = \lambda^2$ (eigenvalue) and $\alpha_2 = 1$. Henceforth, equations (8a) and (8b) generalize the K-integrals approach. Every odd and even function of μ can be expressed as:

$$e(x, \mu) = \frac{1}{2} (g_1(x, \mu) + g_1(x, -\mu)), \quad (9)$$

and

$$o(x, \mu) = \frac{1}{2} (g_2(x, \mu) - g_2(x, -\mu)), \quad (10)$$

where $g_1(x, \mu)$ and $g_2(x, \mu)$ will be determined later.

In order to take into account the coupling between $e(x, \mu)$ and $o(x, \mu)$, it can be considered that $g_1(x, \mu)$ and $g_2(x, \mu)$ are linearly proportional to the same function $g(x, \mu)$ as:

$$g_1(x, \mu) = r_1 g(x, \mu), \quad (11a)$$

$$g_2(x, \mu) = r_2 g(x, \mu), \quad (11b)$$

where the parameters r_1 and r_2 will be determined later. Inserting equations (9) and (10) in equations (8a) and (8b), considering equations (11a) and (11b), it can be verified that $g(x, \mu)$ satisfies the integral equation:

$$g(x, \mu) - \frac{\omega_o}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') g(x, \mu') d\mu' = \frac{\mu}{2} \left(\alpha_1 \frac{r_2}{r_1} + \alpha_2 \frac{r_1}{r_2} \right) g(x, \mu) + g(x, -\mu) \frac{\mu}{2} \left(\alpha_2 \frac{r_1}{r_2} - \alpha_1 \frac{r_2}{r_1} \right) \tag{12}$$

In order to eliminate $g(x, -\mu)$ in equation (12) it is assumed that

$$\left(\alpha_1 \frac{r_2}{r_1} - \alpha_2 \frac{r_1}{r_2} \right) = 0, \tag{13}$$

It's important to mention that the relation equation (13) is not only a simplification consideration (in fact the system equations (8a) and (8b) is only solvable under the condition equations (11a), (11b) and equation (13), from this simple relation the eigenvalue λ can be also determined by the monoenergetic neutrons. It's also noticed that this relation does not affect the generality of the problem under consideration. Using the relation equation (13) in equation (12) the following relation is obtained

$$(1 - \lambda\mu)g(x, \mu) - \frac{\omega_o}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu')g(x, \mu')d\mu' = 0 \tag{14}$$

where the eigenvalue λ is given by

$$\lambda = \sqrt{\alpha_1\alpha_2} \tag{15}$$

Equation (14) is a well known classic eigenvalue problem [19]. $h_n(\lambda)$ is defined by

$$h_n(\lambda) = \int_{-1}^1 P_n(\mu')g(x, \mu')d\mu', \tag{16}$$

with $h_0(\lambda) = 1$. Multiplying equation (14) by $1 + \lambda\mu$ and using equation (16), gives:

$$g(x, \mu) = \frac{\omega_o}{2} \frac{1}{(1 - \lambda^2\mu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n P_n(\mu) h_n(\lambda) + \lambda a_n \mu P_n(\mu) h_n(\lambda)), \tag{17}$$

Therefore the even and odd functions can be deduced as

$$e(x, \mu) = \frac{\omega_o}{2} \frac{r_1}{(1 - \lambda^2\mu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} P_{2n}(\mu) h_{2n}(\lambda) + \lambda a_{2n+1} \mu P_{2n+1}(\mu) h_{2n+1}(\lambda)), \tag{18}$$

and

$$o(x, \mu) = \frac{\omega_o}{2} \frac{r_2}{(1 - \lambda^2\mu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n+1} P_{2n+1}(\mu) h_{2n+1}(\lambda) + \lambda a_{2n} \mu P_{2n}(\mu) h_{2n}(\lambda)). \tag{19}$$

Dividing equation (14) by $1 - \lambda\mu$ and integrating it from -1 to 1 the eigenvalue λ can be obtained from the equation:

$$1 = \frac{\omega_o}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(\lambda) Q_n(1/\lambda) \tag{20}$$

where $Q_n(x)$ is the Legendre function of the second kind given by

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(u)}{x - u} du \tag{21}$$

It's known that, the Legendre function satisfy the following recurrence relation [23]

$$(2n + 1)\mu P_n(\mu) = (n + 1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu) \tag{22}$$

Multiplying equation (14) by $P_n(\mu)$ using equation (22) and integrating in μ from -1 to 1 , the following recurrence relation is obtained

$$[(2n + 1) - \omega_o a_n] h_n(\lambda) = \lambda[(n + 1)h_{n+1}(\lambda) + n h_{n-1}(\lambda)] \tag{23}$$

returning to the coupled system equations (8a) and (8b) and solve it to obtain

$$e(x, \mu) = \frac{(f_1(x, \mu) + \alpha_1 \mu f_2(x, \mu))}{(1 - \lambda^2\mu^2)} \tag{24}$$

$$o(x, \mu) = \frac{(f_2(x, \mu) + \alpha_2 \mu f_1(x, \mu))}{(1 - \lambda^2 \mu^2)} \tag{25}$$

where

$$f_1(x, \mu) = \frac{\omega_o}{2} \left(1 + \frac{a_2}{2} (3D_1 - 1) P_2(\mu) + \dots + a_{2n} P_{2n}(\mu) \int_{-1}^1 P_{2n}(\mu, \mu') e(x, \mu') d\mu' \right) \tag{26}$$

and

$$f_2(x, \mu) = \frac{\omega_o}{2} \left(a_1 \mu + \frac{a_3}{2} (5d_1 - 3) P_3(\mu) + \dots + a_{2n+1} P_{2n+1}(\mu) \int_{-1}^1 P_{2n+1}(\mu, \mu') o(x, \mu') d\mu' \right) \tag{27}$$

where $D_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p} e(x, \mu') d\mu'$ and $d_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p+1} o(x, \mu') d\mu'$ with $p = 1, 2, \dots$ equation (24) and (18) are equal, likewise equations (25) and (19). Those equalities completely determine $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2, D_p$ and d_p . Hence, the formulation of the method is complete.

3. Comparison with existing models

Equations (18) and (19) are the generalization of the equations (24) and (25) respectively derived by [19] in their work, that formulated the extended Eddington approximation with anisotropic scattering. For example the expression of the even and odd function derived by [19] can be deduced, respectively from equation (18) by considering $r_1 = 2C_e$ and from equation (19) by considering $r_2 = 2C_o$, where C_e and C_o are constants of the paper [19]. Furthermore, in our approach the parameters such as D_p and d_p are directly obtained whereas in other approach they are not easily obtained and long integrals calculus and the parameters $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2$ verify the simplified mathematical relation equation (13).

4. Examples of applications

In order to show the advantage of the current method we will apply it to four-parameters phase function. As mentioned in the introduction in this work it, should be noted that the PEA can hardly handle this kind of phase function. Consider equation (1), where the neutron-nucleus scattering can be governed by the following binomial scattering law [24]

$$P(\cos \Theta) = \frac{L + 1}{2^L} (1 + \cos \Theta)^L, \tag{28}$$

where the scattering angle Θ is defined by [22]

$$\cos \Theta = \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega} = \mu \mu' + (1 - \mu^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\phi) \tag{29}$$

where $\mathbf{\Omega}'$ and $\mathbf{\Omega}$ are unit vectors that define the direction of propagation before and after the scattering event, ϕ is the angle between the projection of $\mathbf{\Omega}$ and $\mathbf{\Omega}'$ on a plane.

It is known that equation (28) can also be expanded in terms of Legendre polynomials as:

$$P(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^L a_l P_l(\cos \Theta) \tag{30}$$

From the properties of the Legendre Polynomials and considering that the phase is azimuthally integrated we have [22]

$$P(\cos \Theta) = P(\mu, \mu') = \sum_{l=0}^L a_l P_l(\mu) P_l(\mu') \tag{31}$$

As reported by [25], a_l can be computed from recursive relation

$$a_l = \left(\frac{2l + 1}{2l - 1} \right) \left(\frac{L - l + 1}{L + l + 1} \right) a_{l-1} \tag{32}$$

where $l = 1, 2, \dots, L$ with $a_0 = 1$.

It's well known that the problem equation (1) with general boundary conditions equations (2a) and (2b) can be linked to the corresponding source-free problem [26]

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{\omega_o}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') P(\mu, \mu') d\mu', \tag{33}$$

for $\mu \in [-1, 1]$ and $x \in [0, b]$ with boundary conditions

$$\psi(0, \mu) = 1, \tag{34a}$$

$$\psi(b, -\mu) = 0. \quad (34b)$$

The connection between the two problems are obtained via the system

$$A_{11}J^+ + A_{12}J^- = H_1 \quad (35a)$$

$$A_{21}J^+ + A_{22}J^- = H_2 \quad (35b)$$

where the partial neutron fluxes J^\pm are defined by

$$J^+ = \int_0^1 \mu I(b, \mu) d\mu \quad (36)$$

$$J^- = \int_0^1 \mu I(0, -\mu) d\mu \quad (37)$$

with [26]

$$A_{11} = -\rho_2^d T, \quad (38a)$$

$$A_{12} = 1 - \rho_1^d R, \quad (38b)$$

$$A_{21} = 1 - \rho_2^d R, \quad (38c)$$

$$A_{22} = -\rho_1^d T, \quad (38d)$$

$$H_1 = Q + F_1 R + F_2 T, \quad (38e)$$

$$H_2 = Q_b + F_1 T + F_2 R, \quad (38f)$$

$$R = \int_0^1 \mu \psi(0, -\mu) d\mu \quad (38g)$$

$$T = \int_0^1 \mu \psi(b, \mu) d\mu \quad (38h)$$

$$Q = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^b S(x) \psi(x, -\mu) dx \quad (38i)$$

$$Q_b = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^b S(x) \psi(b-x, \mu) dx. \quad (38j)$$

In order to solve equation (33) with its boundary condition equations (33a) and (33b), the PEA method should be followed by assuming that:

$$\psi(x, \mu) = E(x)e(x, \mu) + o(x, \mu)F(x), \quad (39)$$

4.1. Derivation of the angular part

-For a fourth term scattering law i.e. $L = 3$ equation (31) becomes

$$P(\mu, \mu') = 1 + a_1 P_1(\mu) P_1(\mu') + a_2 P_2(\mu) P_2(\mu') + a_3 P_3(\mu) P_3(\mu'). \quad (40)$$

In the first step, the expression of $e(x, \mu)$ and $o(x, \mu)$ are straightforward and deduced by considering $a_0, a_1, a_2, a_3 \neq 0$ and $a_n = 0$ for $n \neq 0, 1, 2, 3$ in equations (18) and (19) as

$$e(x, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \frac{r_1}{(1 - \lambda^2 \mu^2)} (1 + \lambda a_1 \mu h_1(\lambda) P_1(\mu) + a_2 h_2(\lambda) P_2(\mu) + \lambda a_3 \mu h_3(\lambda) P_3(\mu)) \quad (41)$$

and

$$o(x, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \frac{r_2}{(1 - \lambda^2 \mu^2)} (\mu \lambda + a_1 h_1(\lambda) P_1(\mu) + a_2 \mu \lambda h_2(\lambda) P_2(\mu) + a_3 h_3(\lambda) P_3(\mu)) \quad (42)$$

The eigenvalue λ is obtained by reducing the series equation (20) to four terms and using the explicit expressions for $h_0(\lambda), h_1(\lambda), h_2(\lambda), h_3(\lambda), Q_3(1/\lambda), Q_2(1/\lambda), Q_1(1/\lambda), Q_0(1/\lambda)$:

$$\begin{aligned} \lambda = \omega_0 & \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) + a_1 \frac{1-\omega_0}{\lambda} \left(\frac{1}{2\lambda} \ln \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) - 1 \right) \right. \\ & + \frac{a_2}{4} \left(\frac{(3-\omega_0 a_1)(1-\omega_0)}{\lambda^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\lambda^2} - 1 \right) \ln \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) - \frac{3}{\lambda} \right) \\ & + a_3 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{5-\omega_0 a_2}{2\lambda} \right) \left(\frac{(3-\omega_0 a_1)(1-\omega_0)}{\lambda^2} - 1 \right) - \frac{2(1-\omega_0)}{\lambda} \right) \\ & \left. \times \left(\frac{1}{4} \left(\frac{5}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda} \right) \ln \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) - \frac{5}{2\lambda^2} + \frac{2}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

The term of the right side of this equation is composed of four main terms. The first being the isotropic scattering and the other terms are correction due to forward or backward scattering. In the same way, by considering $a_0, a_1, a_2, a_3 \neq 0$ and $a_n = 0$ for $n \neq 0, 1, 2, 3$ in the expression of $f_1(x, \mu)$ and $f_2(x, \mu)$ equations (26) and (27) becomes:

$$f_1(x, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \left(1 + \frac{a_2}{4} (3\mu^2 - 1)(3D_1 - 1) \right) \quad (44)$$

$$f_2(x, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \left(a_1 \mu + \frac{a_3}{4} (5\mu^3 - 3\mu)(5d_1 - 3) \right) \quad (45)$$

Substituting equations (44) and (45) into equations (24) and (25) respectively gives

$$\begin{aligned} e(x, \mu) = \frac{\omega_0}{8} \frac{1}{(1-\lambda^2\mu^2)} & (5\alpha_1 a_3 (-3 + 5d_1) \mu^4 \\ & + (9a_2 D_1 - 15\alpha_1 a_3 d_1 + 4\alpha_1 a_1 - 3a_2 + 9\alpha_1 a_3) \mu^2 - 3a_2 D_1 + 4 + a_2) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} o(x, \mu) = \frac{\omega_0 \mu}{8D_1} \frac{1}{(1-\lambda^2\mu^2)} & ((-3\alpha_2 a_2 + 9\alpha_2 a_2 D_1 + 25D_1 a_3 d_1 - 15D_1 a_3) \mu^2 \\ & + 4\alpha_2 + 4D_1 a_1 - 3\alpha_2 a_2 D_1 + \alpha_2 a_2 + 9D_1 a_3 - 15D_1 a_3 d_1) \end{aligned} \quad (47)$$

The equalities of equation (46) with equations (41) and (47) with equation (42) determined the variables $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2, d_1, D_1$ as

$$r_1 = 1 \quad (48)$$

$$\alpha_1 = \lambda h_1(\lambda) \quad (49)$$

$$h_2(\lambda) = \frac{1}{2} (3D_1 - 1) \quad (50)$$

$$h_3(\lambda) = \frac{h_1(\lambda)}{2} (5d_1 - 3) \quad (51)$$

$$r_2 = \frac{1}{h_1(\lambda)} \quad (52)$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda}{h_1(\lambda)} \quad (53)$$

- For a six term scattering law i.e. $L = 5$ equation (31) becomes

$$\begin{aligned} P(\mu, \mu') = 1 + a_1 P_1(\mu) P_1(\mu') + a_2 P_2(\mu) P_2(\mu') + a_3 P_3(\mu) P_3(\mu') \\ + a_4 P_4(\mu) P_4(\mu') + a_5 P_5(\mu) P_5(\mu'). \end{aligned} \quad (54)$$

In the first step the expression of $e(x, \mu)$ and $o(x, \mu)$ are straightforward deduced by considering $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \neq 0$ and $a_n = 0$ for $n \neq 0, 1, 2, 3, 4, 5$ in equations (18) and (19) as

$$\begin{aligned} e(x, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \frac{r_1}{(1-\lambda^2\mu^2)} & (1 + \lambda a_1 \mu h_1(\lambda) P_1(\mu) \\ & + a_2 h_2(\lambda) P_2(\mu) + \lambda a_3 \mu h_3(\lambda) P_3(\mu) + a_4 h_4(\lambda) P_4(\mu) + \lambda a_5 \mu h_5(\lambda) P_5(\mu)) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} o(x, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \frac{r_2}{(1-\lambda^2\mu^2)} & (\mu \lambda + a_1 h_1(\lambda) P_1(\mu) \\ & + a_2 \mu \lambda h_2(\lambda) P_2(\mu) + a_3 h_3(\lambda) P_3(\mu) + \mu a_4 h_4(\lambda) P_4(\mu) + \lambda a_5 h_5(\lambda) P_5(\mu)) \end{aligned} \quad (56)$$

$$e(x, \mu) = \frac{(f_1(x, \mu) + \alpha_1 \mu f_2(x, \mu))}{(1-\lambda^2\mu^2)} \quad (57)$$

Table 1. Diffusion lengths LL(cm) as calculated by P_1 , T_1 (Ozturk and Anli (2012)) and present results(Our).

a_1	$\omega_o = 0.9$			$\omega_o = 0.95$			$\omega_o = 0.98$		
	P_1	T_1	Our	P_1	T_1	Our	P_1	T_1	Our
0.25	1.898	2.325	1.978	2.690	3.295	2.745	4.260	5.217	4.294
0.5	1.980	2.425	2.063	2.814	3.446	2.871	4.463	5.466	4.499
0.75	2.073	2.540	2.160	2.956	3.621	3.017	4.698	5.754	4.736
0.99	2.177	2.666	2.267	3.116	3.816	3.179	4.963	6.078	5.003

$$o(x, \mu) = \frac{(f_2(x, \mu) + \alpha_2 \mu f_1(x, \mu))}{(1 - \lambda^2 \mu^2)} \quad (58)$$

where

$$f_1(x, \mu) = \frac{\omega_o}{2} \left(1 + \frac{a_2}{2} (3D_1 - 1) P_2(\mu) + \frac{a_4}{8} (35D_2 - 30D_1 + 3) P_4(\mu) \right) \quad (59)$$

and

$$f_2(x, \mu) = \frac{\omega_o}{2} \left(a_1 \mu + \frac{a_3}{2} (5d_1 - 3) P_3(\mu) + \frac{a_5}{8} (63d_2 - 70d_1 + 15) P_5(\mu) \right) \quad (60)$$

$$h_4(\lambda) = \frac{1}{8} (35D_2 - 30D_1 + 3) \quad (61)$$

$$h_5(\lambda) = \frac{h_1(\lambda)}{8} (63d_2 - 70d_1 + 15) \quad (62)$$

$$1 = \frac{\omega_o}{\lambda} [Q_0(1/\lambda) + a_1 h_1(\lambda) Q_1(1/\lambda) + a_2 h_2(\lambda) Q_2(1/\lambda) + a_3 h_3(\lambda) Q_3(1/\lambda) + a_4 h_4(\lambda) Q_4(1/\lambda) + a_5 h_5(\lambda) Q_5(1/\lambda)] \quad (63)$$

- An important result of this work is the determination of diffusion coefficient as function of Chandrasekhar polynomial

For instance Thompson scattering have $a_o = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1/2$ and $a_n = 0$ for $n \geq 3$ using equation (50) and equation (23) it's found that the diffusion coefficient D_1 is given by

$$D_1 = \frac{1 - \omega_o}{\lambda^2} \quad (64)$$

The formula equation (64) is the same result obtained by Professor Pomraning GC [19] in his work.

Secondly with pure triplet scattering ($a_o = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$ and $a_n = 0$ for $n \geq 4$) using again equation (50) and equation (23), the diffusion coefficient d_1 is given by

$$d_1 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\omega_o}{3(1 - \omega_o)} \quad (65)$$

The formula equation (65) is the same result obtained by Sallah *et al* [16] by using integral calculus. Hence the current method.

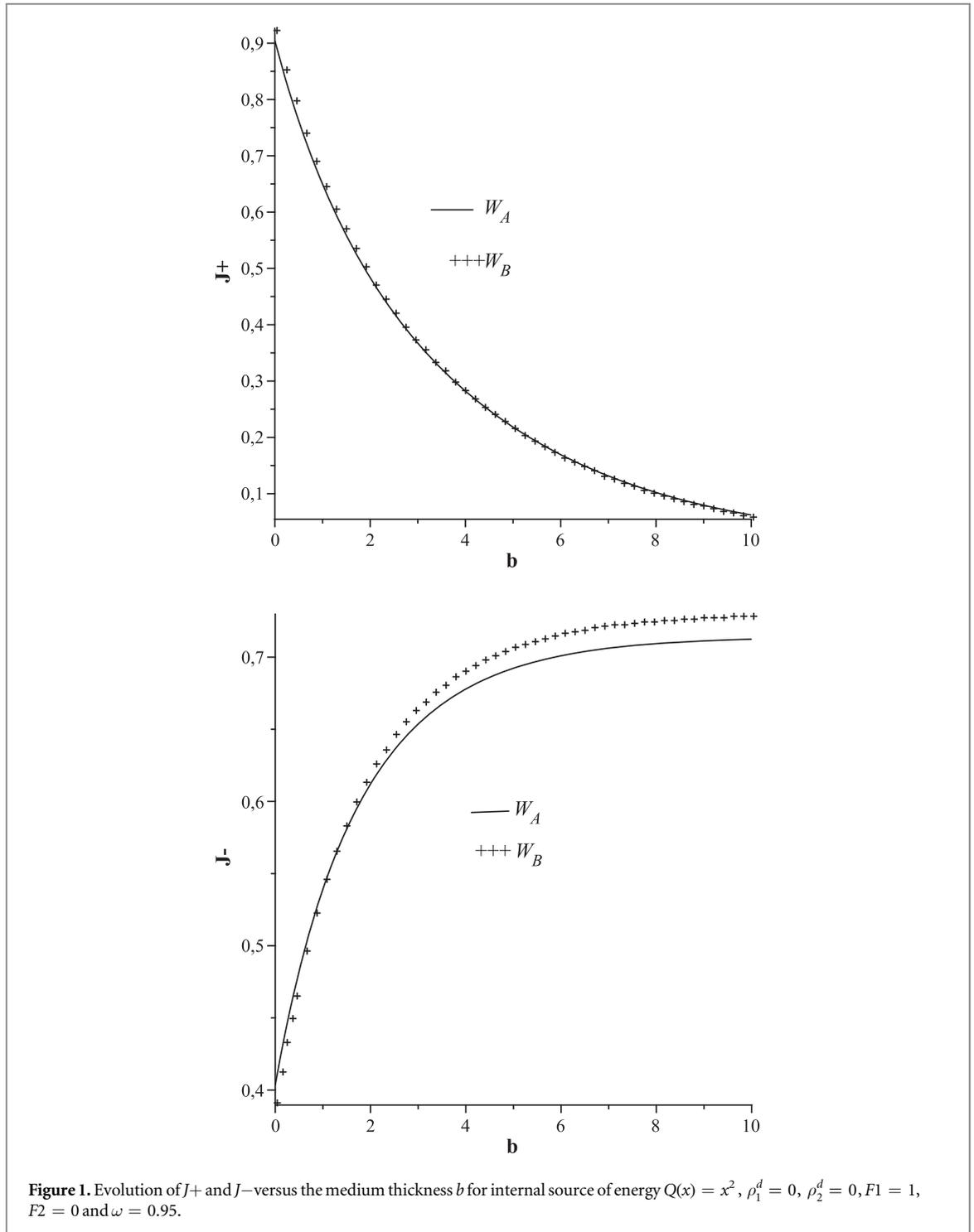
4.2. Solution of the spatial part

Substituting equation (39) in equation (33) and using equations (8a) and (8b), integrating resultant system in μ from -1 to 1 gives

$$\frac{dF(x)}{dx} + \alpha_1 E = 0. \quad (66)$$

Again substituting equation (39) in equation (33) and using the definition of equations (8a) and (8b), multiplication of the resultant system by μ prior to integration over all μ yields

$$\frac{dE(x)}{dx} + \alpha_2 F(x) = 0. \quad (67)$$



Combining equations (66) and (67) results:

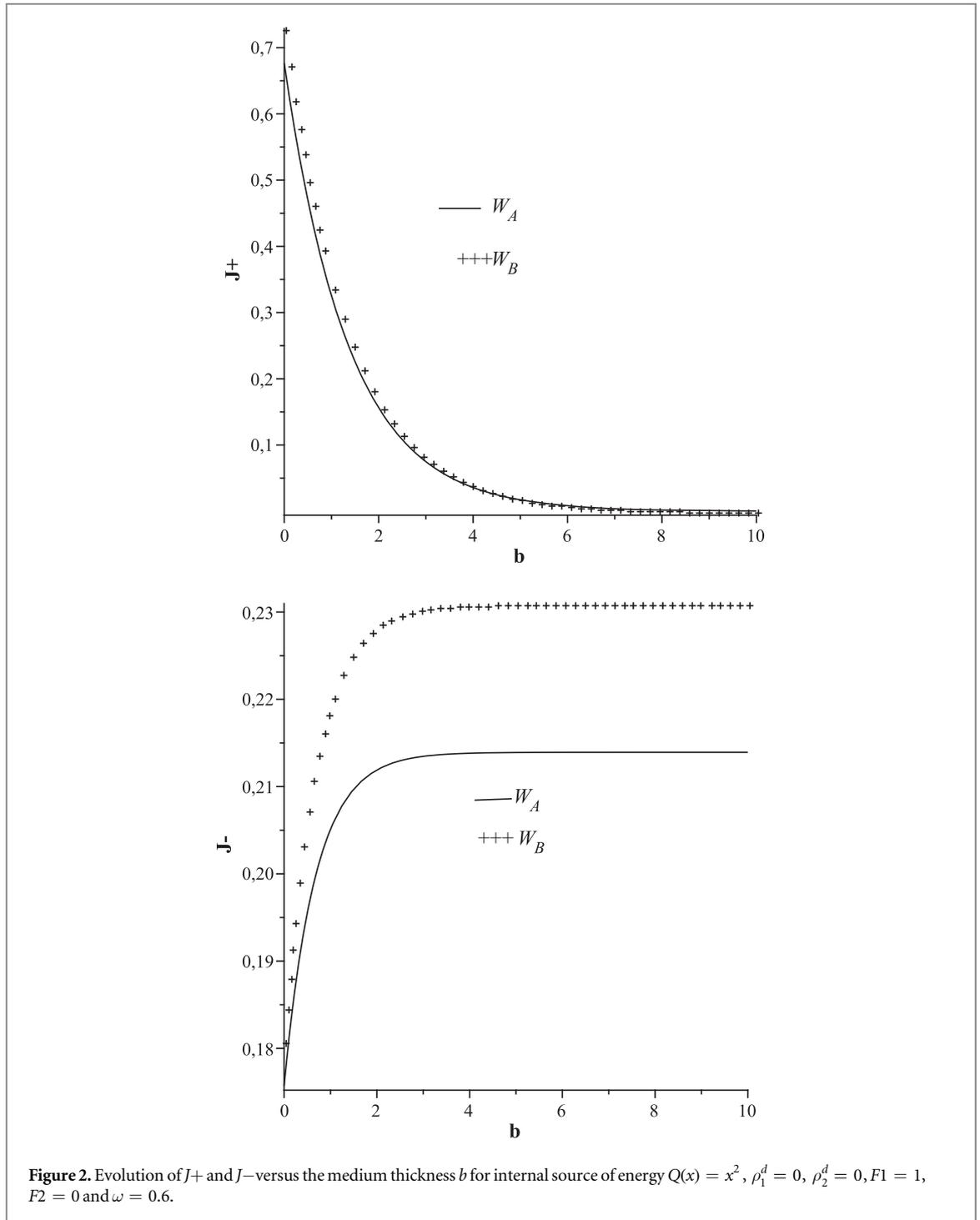
$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} - \lambda^2 E(x) = 0 \tag{68}$$

The solution of the equation (68) could be written as

$$E(x) = c_1 \exp(\lambda x) + c_2 \exp(-\lambda x) \tag{69}$$

The flux is given by

$$F(x) = -\frac{\lambda}{\alpha_2} (c_1 \exp(\lambda x) - c_2 \exp(-\lambda x)) \tag{70}$$

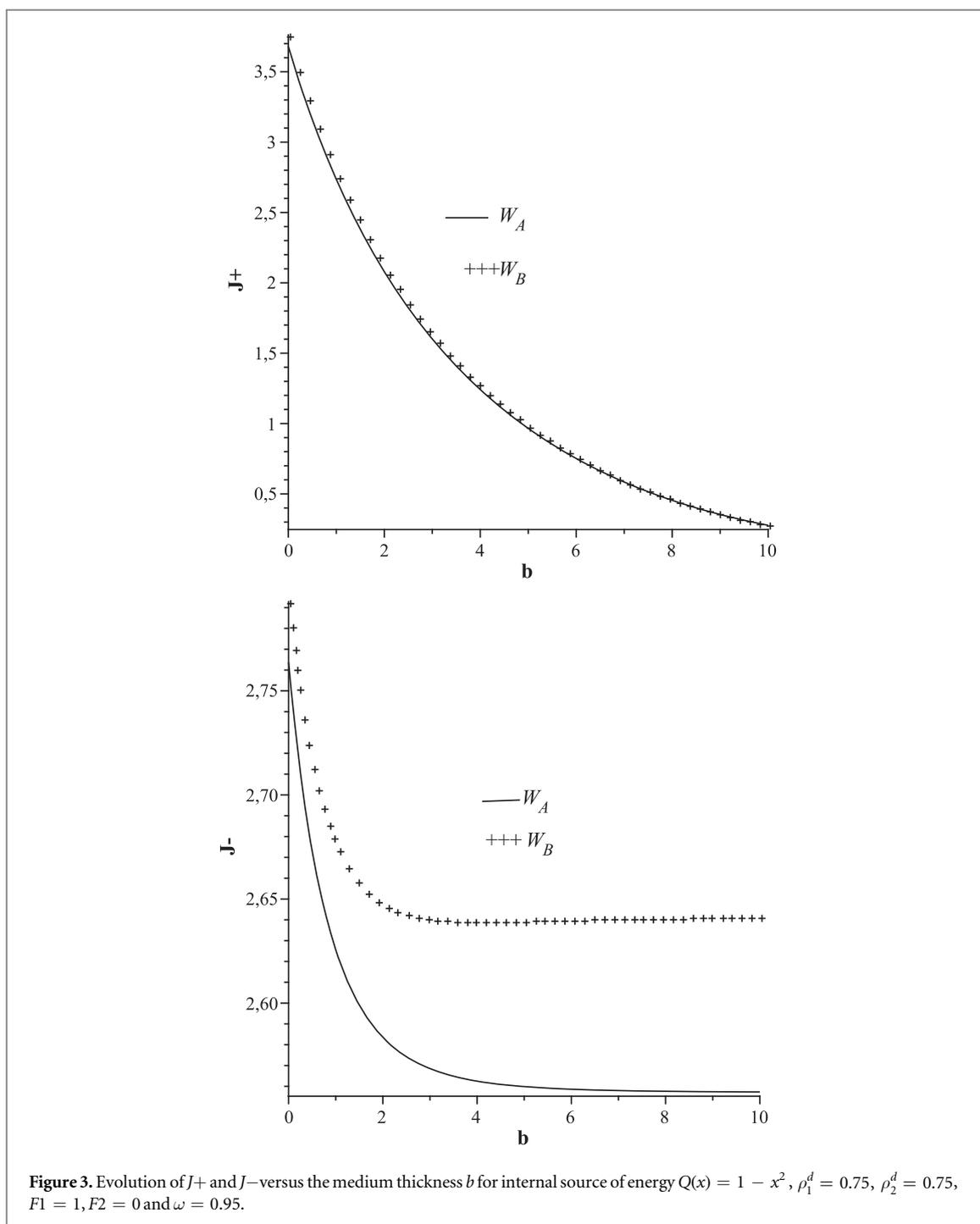


Hence the general solution of the problem is expressed as:

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu) = & c_1 \exp(\lambda x) \left[e(x, \mu) - \frac{\lambda}{\alpha_2} o(x, \mu) \right] \\ & + c_2 \exp(-\lambda x) \left[e(x, \mu) + \frac{\lambda}{\alpha_2} o(x, \mu) \right] \end{aligned} \tag{71}$$

To determine the unknown constants c_1 and c_2 , a weight function $W(\mu)$ is introduced to force the boundary conditions equations (16a), (16b) to be fulfilled as [15, 27]

$$\int_0^1 W(\mu)(\psi(0, \mu) - 1) d\mu = 0, \tag{72a}$$



$$\int_0^1 W(\mu)(\psi(b, -\mu))d\mu = 0, \tag{72b}$$

When equation (71) is inserted in equations (72), the constant c_1 and c_2 could be found as:

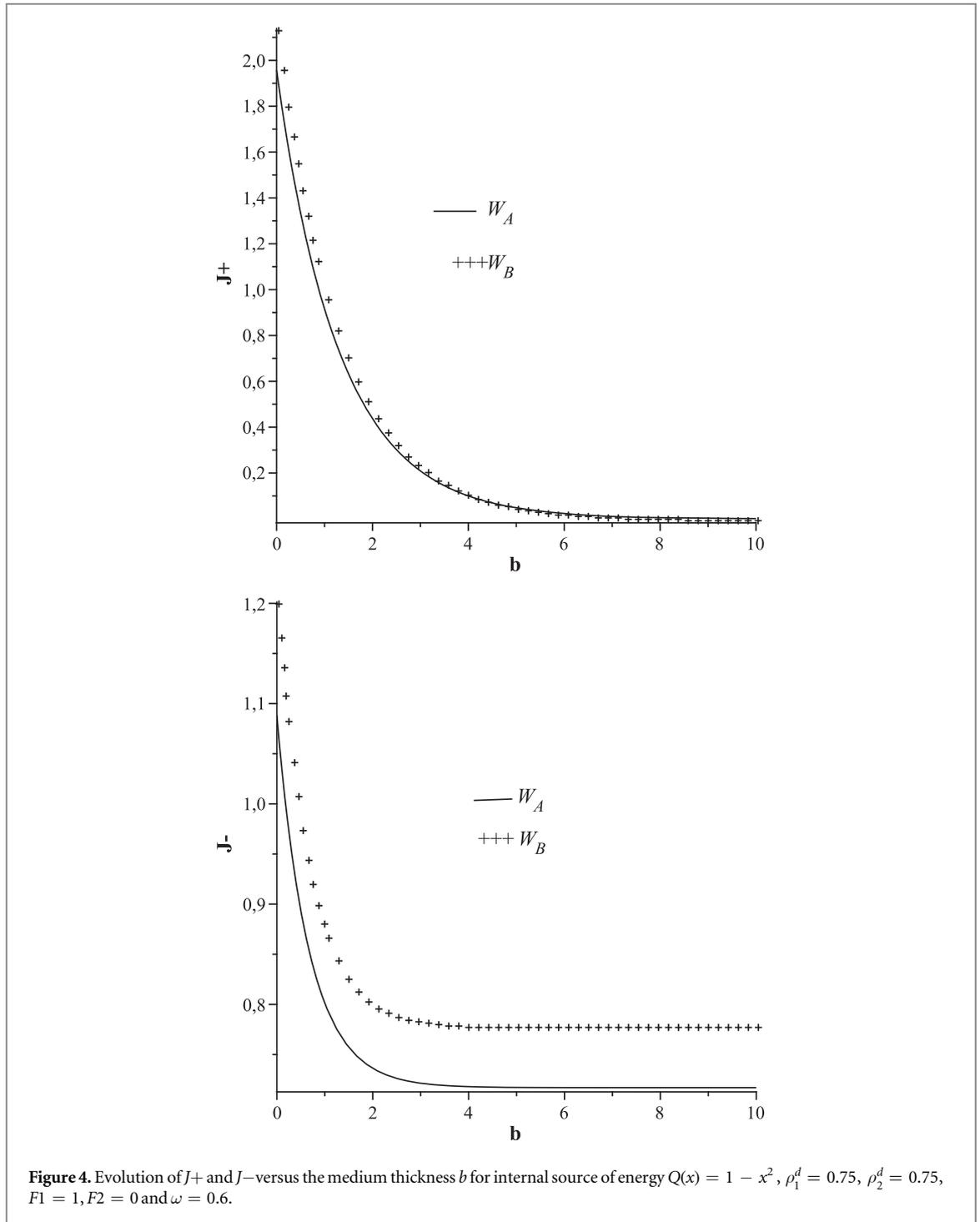
$$c_1 = \frac{M_o M_1}{M_1^2 - M_2^2 \exp(2\lambda b)} \tag{73}$$

$$c_2 = \frac{M_o M_2}{M_2^2 - M_1^2 \exp(-2\lambda b)} \tag{74}$$

Where

$$M_o = \int_0^1 W(\mu)d\mu, \tag{75a}$$

$$M_1 = \int_0^1 W(\mu) \left(e(x, \mu) - \frac{\lambda}{\alpha_2} o(x, \mu) \right) d\mu, \tag{75b}$$



$$M_2 = \int_0^1 W(\mu) \left(e(x, \mu) + \frac{\lambda}{\alpha_2} o(x, \mu) \right) d\mu, \tag{75c}$$

4.3. Numerical calculations

The diffusion length $LL = \frac{1}{\lambda}$ was calculated for linear anisotropic scattering and compared with the result obtained by Ozturk and Anli (2012) see table 1, we can see that our results are comparable with those obtained by P_1 approximation, this indicate that our model behave like the well-known P_1 approximation at lower order scattering.

In order to calculate the neutron partial flux J_+ and J_- at the medium boundaries, we need to give the expression of the internal energy source function

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad (76)$$

where b_i , ($i = 0, 1, 2$) are assumed as the known constants. Furthermore, the following expressions of the weight function $W(\mu)$ are used [15, 27]

$$W_A(\mu) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu \left(1 + \frac{3}{2}\mu\right), \quad (77)$$

and

$$W_B(\mu) = \mu, \quad (78)$$

With all the term expresses above, the partial neutron flux J_{\pm} given by the system equations (35a) and (35b) at the boundaries of the medium are computed in the presence of four term binomial scattering law with internal energy. The numerical results are represented graphically in figures 1, 2, 3 and 4. In figure 1, evolution of the fluxes J_+ and J_- versus the medium thickness b for internal source of energy $Q(x) = x^2$, $\rho_1^d = 0$, $\rho_2^d = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 0$ and albedo $\omega_o = 0.95$. The flux J_+ is decreasing with the medium thickness, the flux is increasing and reaches a maximal value. In figure 2, evolution of the fluxes J_+ and J_- versus the medium thickness b for internal source of energy $Q(x) = x^2$, $\rho_1^d = 0$, $\rho_2^d = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 0$ and albedo $\omega_o = 0.6$. In figure 3, evolution of the fluxes J_+ and J_- versus the medium thickness b for internal source of energy $Q(x) = 1 - x^2$, $\rho_1^d = 0.75$, $\rho_2^d = 0.75$, $F_1 = 1$, $F_2 = 0$ and $\omega_o = 0.95$. The flux J_+ is decreasing with the medium thickness, the flux J_- is decreasing and reaches a minimal value. In figure 4, evolution of the fluxes J_+ and J_- versus the medium thickness b . For internal source of energy $Q(x) = 1 - x^2$, $\rho_1^d = 0.75$, $\rho_2^d = 0.75$, $F_1 = 1$, $F_2 = 0$ and $\omega_o = 0.6$. The flux J_+ is decreasing with the medium thickness, the flux is decreasing and reaches a minimal value. Two weight functions are used for the sake of comparison. The results are a function of the weight functions, henceforth, an appropriate weight function is needed in order to reflect the physics of the problem under consideration. These figures also show that the fluxes are dependent on the choice of source of energy.

5. Conclusion

In this work, the neutron transport equation in finite layer is solved. The solution is derived by combining modified k-integral approach with pomraning-eddington approximation. This combined approach leads to the establishment of general expressions of $e(x, \mu)$ even in μ and $o(x, \mu)$ odd in μ , both functions are slowly varying in x . Furthermore, these expressions could be reduced to those reported in literature. The advantages of the current approach is that the parameters such as $D_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p} e(x, \mu) d\mu$ and $d_p = \int_{-1}^1 \mu^{2p+1} o(x, \mu) d\mu$ are determined only by simple comparison. It's also show that the parameters α_1, α_2, r_1 and r_2 as inputs into the model verify the relation $\left(\alpha_1 \frac{r_2}{r_1} - \alpha_2 \frac{r_1}{r_2}\right) = 0$. The model is applied using four terms Legendre expansion of the scattering phase function. The neutron fluxes calculated at the medium boundaries are dependent on the choice of the weight function used. The present study demonstrate that the incorporation of the k-integral in the Pomeraning-Eddington approximation is simple and accurate for the analysis of the neutron transport equation. Even if the current model is promising, it should be noted that this approach is only valid for scattering phase function expanded as Legendre Polynomial.

Acknowledgments

The authors thank reviewers for their majors contributions in the advancement of this work.

ORCID iDs

Yia Etolo Hervé Didier  <https://orcid.org/0000-0001-8769-476X>

References

- [1] Barichello L B and Siewert C E 1999 A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution *J. Quant. Spect. Rad. Trans.* **62** 665–75
- [2] Mirza A M, Iqbal S and Rahman F 2007 A spatially adaptive grid-refinement approach for the finite element solution of the even-parity Boltzmann transport equation *Ann. Nuc. Energy.* **34** 600–13
- [3] Chai J C, Lee H S and Patankar S V 1994 Finite volume method for radiation heat transfer *J. Therm. Heat. Trans.* **8** 419–25
- [4] Jin L, Banerjee K, Hamilton S P and Davidson G G 2017 Improving variance estimation in Monte Carlo eigenvalue simulations *Ann. Nuc. Energy.* **110** 692–708
- [5] Barbarino A, Dulla S, Mund E H and Ravetto P 2013 The spectral element method for static neutron transport in A_N approximation I *Ann. Nuc. Energy.* **53** 372–80

- [6] Tapimo R, Tagne Kamdem H T and Yemele D 2018 A discrete spherical harmonics method for radiative transfer analysis in inhomogeneous polarized planar atmosphere *Astrophys. Space Sci.* **363** 52
- [7] Coelho P J 2014 Advances in the discrete ordinates and finite volume methods for the solution of radiative heat transfer problems in participating media *J. Quant. Spect. Rad. Trans.* **145** 121–46
- [8] Wu C Y and Ming-Feng H 2012 Integral equation solutions based on exact ray paths for radiative transfer in a participating medium with formulated refractive index *Int. J. Heat. Mass. Trans.* **55** 6600–8
- [9] Chandrasekhar S 1950 *Radiative Transfer* (New York: Dover Publication Inc.)
- [10] Lewis E E and Miller W F 1984 *Computational Methods of Neutron Transport* (New York: Wiley)
- [11] Case K M and Zweifel P F 1967 *Linear Transport Theory* (Reading MA: Addison-Wesley)
- [12] Pomraning G C 1973 *The Equations of Radiation Hydrodynamics* (Oxford: Pergamon)
- [13] Pérez Guerrero J S, Pimentel L C G, Oliveira-Júnior J F, Heilbron Filho P F L and Ulke A G 2012 A unified analytical solution of the steady-state atmospheric diffusion equation *Atmos Environ.* **55** 201–12
- [14] Pomraning G C 1969a An extension of the Eddington approximation *J. Quant. Spect. Rad. Trans.* **9** 407–22
- [15] El-Wakil S A, Aboulwafa E M, Degheidy A R and Radwan N K 1994 The Pomraning-Eddington approximation to diffusion of light in turbid materials *Waves Random Media* **4** 127–38
- [16] Sallah M and Degheidy A R 2008 Neutron transport for pure-triplet scattering in finite planar media with reflective boundaries *Ann. Nucl. Energy* **35** 708–13
- [17] Kokhanovsky A A 2015 *Light Scattering Reviews 9 Light Scattering and Radiative Transfer* (Berlin Heidelberg: Springer) pp 69
- [18] Sharma S K, Roy A K and Somerford D J 1998 New approximate phase functions for scattering of unpolarized light by dielectric particles *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **60** 1001–10
- [19] Pomraning G C 1969b The extended Eddington approximation with anisotropic scattering *J. Quant. Spect. Rad. Trans.* **9** 1011–6
- [20] Kladnik R and Kuscer I 1962 Velocity dependent Milne's problem *Nucl. Sci. Eng.* **13** 149
- [21] Williams M M R 2007 An application of the K-integrals for solving the radiative transfer equation with Fresnel boundary conditions *J. Quant. Spect. Rad. Trans.* **107** 195–216
- [22] Davison B 1957 *Neutron Transport Theory* (Oxford: Oxford University Press)
- [23] Abramowitz M and Stegun I A 1970 *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical tables* (New York: Dover Publication)
- [24] Kaper H G, Shultis J K and Veninga J G 1970 Numerical evaluation of the slab albedo problem solution in one-speed anisotropic transport theory *J. Comput. Phys.* **6** 288–313
- [25] McCormick N J and Sanchez R 1981 Inverse problem transport calculations for anisotropic scattering coefficients *J. Math. Phys.* **22** 199–208
- [26] Attia M T, Madkour M A, Abulwafa E M and Abd-Elnaby M M 1992 Anisotropic radiation transfer in a plane medium with specularly-reflecting boundary conditions *J. Quant. Spect. Rad. Trans.* **47** 221–7
- [27] Degheidy A R, El-Wakil S A and Sallah M 2003 Polarized radiation transfer in a semi-infinite random medium *J. Quant. Spect. Rad. Trans.* **76** 345–58
- [28] Williams M M R 1971 *Mathematical Methods in Particle Transport Theory* (London: Butterworths)