UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
****
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
****
CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES DE L'ÉDUCATION
****
UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN DIDACTIQUE DES DISCIPLINES
****
DEPARTEMENT DE DIDACTIQUE DES DISCIPLINES

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
FACULTY OF EDUCATION
****
CENTRE FOR RESEARCH AND DOCTORAL TRAINING IN EDUCATION
****
RESEARCH AND DOCTORAL TRAINING UNIT IN DIDACTICS
****
DEPARTMENT OF DIDACTICS

DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE AU SECOND CYCLE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE : DIFFICULTÉS ET OBSTACLES

Mémoire rédigé et présenté en vue de l'obtention du diplôme de master en sciences de l'éducation

Spécialité :
Didactique des disciplines
(*Option : Didactique de mathématique*)

Présenté par

SAAH SERGE

21V3310

Licence en Mathématique

sous la Direction de :

SADJA KAM Judith
Maitre de Conférence

2023 - 2024

Table des matières

DÉDICACE

à la mémoire de ma feu mère **MBOUZA Brigitte**

REMERCIEMENTS

Le présent travail a bénéficié des contributions scientifiques, matérielles et morales de plusieurs personnes à qui nous adressons nos sincères remerciements et notre profonde gratitude.

À cet effet, il s'agit d'abord de la Faculté des Sciences de l'Éducation en général et en particulier le Département de Didactique des disciplines (le Chef du Département, Pr. Renée Solange Nkeck Bidias, ainsi que tous les enseignants du Département), qui n'ont ménagé aucun effort depuis notre entré dans ce Département en 2021 pour nous accompagner dans notre formation.

Puis, à mon directeur de mémoire, le Pr. SADJA KAM Judith, pour sa disponibilité, son orientation scientifique et méthodologique, de même que pour l'énergie qu'elle a déployée pour la réalisation de cette œuvre.

À tous les enseignants de Mathématique du Lycée Moderne de Nkozoa.

À tous les camarades de promotion.

À toute ma famille.

À tous mes amis et connaissances et tous ceux qui de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

RÉSUMÉ

La démonstration par récurrence est un objet d'enseignement au Cameroun et permet de construire une propriété générale à partir d'une vérification particulière sur quelques valeurs de l'entier naturel n. L'un des constats qui pose problème dans l'utilisation de ce principe par les apprenants est celui de la non maîtrise de son énoncé. C'est pourquoi, dans la présente recherche qui s'intitule : **« démonstration par récurrence au second cycle de l'enseignement secondaire : difficultés et obstacles »**, une étude est menée auprès des élèves de Tle C et de P C du Lycée Moderne de Nkozoa. Il s'agissait pour nous d'identifier les difficultés et les obstacles qu'ont les élèves à utiliser le principe de récurrence.

Mots clés : Démonstration, difficultés, induction, obstacles, raisonnement, récurrence.

ABSTRACT

Demonstration by recurrence is a teaching object in Cameroun and allows the construction of a general property from a particular verification on some values of the natural integer n. One of the observations that poses a problem in the use of this principle by learners is that of the lack of mastery of its statement. This is why, in the present research entitled: ‘**’demonstration by recurrence in the second cycle of secondary education: difficulties and obstacles**’’, a study is conducted among Tle C and P C students of the Nkozoa Modern High School. Our aim was to identify the difficulties and obstacles that students have in using the principle of recurrence.

Keywords: Demonstration, difficulty, obstacle, reasoning, recurrence.

LISTE DES ABRÉVIATIONS

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels

$\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels

APC : Approche par les Compétences

H.R : hypothèse de récurrence

Lat. : Latin

MINESEC : Ministère des Enseignements Secondaires

N.m : Nom masculin

N.f : Nom féminin

P C : Première C

SYN : Synonyme

TD : Transposition Didactique

TSD : Théorie des Situations Didactiques

Tle C : Terminale C

INTRODUCTION GÉNRÉALE

L'apprentissage de l'Algèbre, constitue l'un des enjeux fondamentaux de l'enseignement des Mathématiques dans les lycées et collèges du Cameroun. Les enseignants, qui ont en charge l'enseignement de la démonstration par récurrence, ont depuis longtemps repéré certaines difficultés rencontrées par les élèves. Par exemple, la recherche d'une de n_0 pour laquelle on peut démontrer par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, on a : $2^n \geq (n+1)^2$.

La démonstration occupe une place centrale dans l'enseignement des Mathématiques dans les collèges et lycées du Cameroun. La démonstration est un mode de validation caractéristique des mathématiques (Cabassut, 2005). Elle est un moyen de déduction rigoureuse qui montre qu'une proposition est vraie parce qu'elle est la conséquence nécessaire d'une proposition déjà admise (Lelouard et al., 1990). Elle constitue par ailleurs une source de difficultés dans l'enseignement-apprentissage des Mathématiques.

Dans notre recherche, le problème que nous voulons résoudre est celui de l'identification des difficultés et des obstacles liés à l'apprentissage de la démonstration par récurrence par les apprenants, en vue de proposer des stratégies qui permettront aux apprenants de s'approprier ce principe et de l'utiliser convenablement ce principe.

Il s'agit en réalité, dans ce travail de recherche qui est libellé **« Démonstration par récurrence au second cycle de l'enseignement secondaire : difficultés et obstacles »**, de savoir si les erreurs commises par les apprenants, lors de l'utilisation du principe de récurrence pour résoudre les problèmes en classe de Terminale scientifique sont d'ordres épistémologiques, didactiques ou pédagogiques.

Pour apporter des éléments de réponses à notre problème, nous avons divisé notre travail en cinq chapitres. La problématique et la méthodologie de l'étude seront présentées au chapitre 1, ensuite, l'insertion théorique du sujet suivra au chapitre 2. Une revue des travaux antérieurs sur le sujet sera l'objet du chapitre 3, puis nous analyserons des pratiques enseignantes et un manuel de Mathématiques au chapitre 4. Enfin, nous présenterons et nous discuterons nos résultats.

Chapitre 1 : Problématique et méthodologie de l'étude

1.1. Problématique

Dans ce chapitre liminaire, nous contextualisons et justifions notre étude, présentons nos constats, formulons nos questions de recherche ainsi que nos hypothèses et objectifs de la recherche. Par la suite, nous donnons l'intérêt de notre recherche et la délimitation de notre sujet, enfin nous allons donner la méthodologie de notre travail. Selon Beaud (2006, p.55) : « *la problématique, c'est l'ensemble construit, autour d'une question principale, des hypothèses de recherche et des lignes d'analyse qui permettront de traiter le sujet choisi* ». Il affirme par la suite qu'elle est, *« pour le travail (...), aussi importante que le cerveau ou le système nerveux (l'est) pour un être humain ou que le poste de pilotage pour un avion de ligne* ».

1.1.1. Contexte et justification de l'étude

Le système éducatif au Cameroun est orienté par la loi numéro 98/004 du 14 avril 1998, il comporte deux sous-systèmes à savoir les sous-systèmes francophone et anglophone. Dans le sous-système francophone, l'enseignement général est subdivisé en trois niveaux : Enseignement de Base, Enseignement Secondaire et Enseignement Supérieur. Nous nous intéressons au sous-système francophone et à l'Enseignement Secondaire, qui est organisé en deux cycles.

Au Cameroun, on est passé de la pédagogie par objectif, qui donne l'importance à l'objectif à atteindre par l'enseignant, à l'approche par compétences en 2012. Les diverses stratégies utilisées par les enseignants de Mathématiques doivent maintenant se baser sur le courant théorique du socioconstructivisme puisque ce renouveau pédagogique y puise son inspiration.

Dans le Dictionnaire actuel de l'éducation (Legendre, 2005, p.1245), on définit le socioconstructivisme comme une « *théorie de l'apprentissage qui insiste sur le rôle des interactions entre le sujet et son environnement dans le processus actif qui lui permet de développer des connaissances sur le monde* ». Selon cette théorie, l'élève doit être un membre actif de la construction de son propre savoir lors du processus enseignement-apprentissage.

Dans l'arrêté numéro 226/18/MINESEC/IGE du 22 Aout 2018, le principe de la démonstration par récurrence est un objet d'enseignement au second cycle de l'Enseignement Secondaire plus précisément en classe de Terminale scientifique au Cameroun. Les curricula en vigueur au Cameroun prévoient en classe de Terminale scientifique un module intitulé : relations et opérations fondamentales dans l'ensemble des nombres réels, dans le chapitre des suites numériques. Au niveau des savoirs, nous avons : Raisonnement par récurrence sur ℕ et au niveau des savoir-faire : Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer certaines propriétés sur ℕ. Pour ce qui est des savoir-être, développer : l'esprit critique, l'esprit de curiosité, le sens de l'ordre et de la méthode, le sens de la rigueur et de la concision.

Ce module vise à rendre l'apprenant compétent dans des situations de vie de la famille « représentation, détermination des quantités et identification des objets par des nombres ». Il s'agit en gros, de le rendre capable de :

- ✓ Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie telles que : l'achat ou la vente des biens de consommation, le partage des biens, la comparaison des prix des objets, l'exploitation des différents taux (évolution du chômage, du PIB, de la population, …), la détermination des dimensions d'un terrain.
- ✓ Communiquer des informations comportant des nombres réels.

En Mathématiques, la démonstration est un outil de validation dans la communauté des mathématiciens (Balacheff, 1987). Nous considérons la récurrence comme un procédé de démonstration qui consiste à étendre à tous les termes d'une série, ce qui est valable pour les premiers termes (Douamba et al., 2022). La démonstration par récurrence est un outil performant pour valider certaines propositions mathématiques, surtout en Arithmétique (Egré, 2015). La démonstration par récurrence a la double spécificité de permettre la construction d'objets et d'être un outil de preuve fondateur de nombreux résultats en Mathématiques discrètes (Grenier et al., 1998). Elle sert à établir la véracité de certaines propriétés dépendant d'un entier naturel n. Son principe se base sur trois étapes : l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

- **Initialisation :** Nous vérifions qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Nous supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$. C'est l'hypothèse de récurrence et nous prouvons que $((P(n) \implies P(n+1))$ est vraie.

- **Conclusion :** En invoquant le principe de récurrence, nous pouvons affirmer avoir démontré que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans l'enseignement de Mathématiques au second de l'Enseignement Secondaire au Cameroun, on utilise la démonstration par récurrence pour démontrer certaines , souvent mal comprise, en partie parce qu'elle nécessite une certaine maîtrise de connaissances des notions de logique mathématique qui ne se trouvent pas dans le programme de l'enseignement de Mathématique au secondaire au Cameroun. Or Grenier (2011) montre l'importance d'une prise en charge effective dans l'enseignement des notions de logique. Sur la démonstration par récurrence, Grenier (2001, 2003, 2012, 2016) a mené plusieurs études auprès d'étudiants scientifiques universitaires et d'enseignants de Mathématiques qui révèlent que cette double spécificité de la récurrence est souvent absente de leurs conceptions, le principe étant réduit à une technique de preuve mal comprise et dont la légitimité est parfois questionnée.

Nous avons porté notre choix sur ce sujet particulier qu'est la démonstration par récurrence en raison du fait que l'objet mathématique en question avait fait l'objet de nombreuses interrogations durant notre parcours scolaire. En effet, durant nos premières années d'université, où nous avons utilisé beaucoup plus fréquemment la démonstration par récurrence qu'au secondaire, celles-ci sont restées très floues et automatiques pour nous. En réalité, les travaux des auteurs comme Grenier (2011), Fabert et al. (2011), Poulin (2013) et Gardes et al. (2016) nous ont permis dans le cadre de ce travail, de saisir toute la complexité du raisonnement par récurrence. Ce contexte et justification de l'étude nous conduit à faire des constats au paragraphe suivant.

1.1.2. Constats

La démonstration par récurrence a été toujours une source de problèmes pour les élèves de Terminale scientifique au Cameroun. Comme enseignant de mathématiques dans l'enseignement secondaire, nous observons que, la démonstration par récurrence est un mode de validation caractéristique des mathématiques et son enseignement est un élément indispensable à l'acquisition d'une culture mathématique. Mais nous observons également la difficulté des élèves à assumer les tâches et les productions liées à la démonstration par récurrence. De manière non exhaustive, voici ce que nous avons observé :

- ✓ Les élèves énoncent mal le principe de récurrence. Par exemple on a l'énoncé suivante « *Soit* P_n *avec* $n \in \mathbb{N}$, *une proposition dépendante de* n, *soit* $n_0 \in \mathbb{N}, n_0$ *est un entier naturel fixé et* P_n *un énoncé mathématique vraie pour tout entier naturel* $n > n_0$
  - *On vérifie que* $P(n_0)$ *est vraie*
  - *On suppose que* $P(n)$ *est varie*
  - *On se sert de la supposition pour démontrer que* $P(n+1)$ *est aussi vraie* ».
- ✓ L'énoncé de l'hérédité par les élèves dans la pratique est incorrect en effet, au lieu de : soit $n \geq n_0$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie, ce qu'ils proposent c'est de procéder ainsi :
  a) $P(n+1)$ est vraie sous l'hypothèse $P(n)$ est vraie.
  b) Pour tout $n \geq n_0$ si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
- ✓ Certains élèves n'utilisent pas l'hypothèse de récurrence à l'étape de l'hérédité. C'est le cas dans la résolution de l'exercice suivant : « *Démontrons par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq \frac{1}{2}$ *où* $U_n = \frac{n}{n+1}$.

– *Pour* $n = 0$, $U_0 = \frac{0}{0+1} = 0 \leq \frac{1}{2}$.

  Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

– *Supposons que la propriété soit vraie au rang* n, *c'est-à-dire que* $U_n \leq \frac{1}{2}$ *et montrons que la propriété est vraie au rang* $n + 1$.

  $U_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1)-(n+1)^2-1}{2(n+1)^2+2} = \frac{-n^2}{2(n+1)^2+2}$.

  Le dénominateur est positif (somme de deux termes positifs) et le numérateur est négatif (opposé d'un carré).

  Donc $U_{n+1} - \frac{1}{2} \leq 0$ *et ainsi* $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

– *Conclusion : la propriété étant vraie au rang* 0 *et héréditaire, elle est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Donc pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ».

- ✓ Enfin, la mauvaise formulation de la conclusion. En effet, au lieu de : On a démontré que $P(10)$ est vrai et que pour tout $n \geq 10$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie, donc d'après le principe de récurrence, on peut donc affirmer que pour tout $n \geq 10$, $P(n)$ est vraie. On a dans l'exemple de la page 72 du livre Emergeons en mathématiques en classe de Terminale C : *pour tout entier* $n \geq 10, P(n)$ *est vraie.*

Ces difficultés rencontrées par les élèves lors de l'utilisation du raisonnement par récurrence sont principalement d'ordres didactiques et épistémologiques. En effet, dans le livre intitulé

Emergeons en Mathématiques en classe de terminale qui est au programme au Cameroun en 2023, on trouve dans la page 72 l'énoncé de la démonstration par récurrence suivante :

« *Pour montrer qu'une proposition dépendant d'un entier naturel* $n \geq n_0$ *est vraie avec* $n_0 \in \mathbb{N}$*, il suffit de vérifier que :*

- *Cette proposition est vraie pour l'entier* n_0 *;*
- *Supposer que pour un entier naturel* n *fixé, avec* $n \geq n_0$*, elle est vraie (hypothèse de récurrence) et démontrer qu'elle est aussi vraie pour* $n+1$*. (C'est l'étape d'hérédité).* »

Ce qui contraste avec l'énoncé exact que nous avons proposé plus haut.

De plus au niveau de la formulation de l'hérédité, on trouve dans le même livre à la même page la formulation suivante : « *Supposons que* $P(n)$ *est vraie, c'est-à-dire* $2^n \geq 100n$ *et montrons que* $P(n+1)$ *est aussi vraie, c'est-à-dire* $2^{n+1} \geq 100(n+1)$. »

Ici l'obstacle épistémologique réside dans l'implication formelle au niveau de l'étape de l'hérédité.

Ces constats sont corroborés par les travaux de Grenier (2011), Poulin (2013), Mobarak et al. (2014), Gardes et al. (2016).

Nos constats appuyés par les travaux des chercheurs sur la question nous conduisent au problème suivant.

1.1.3. Problème

Gauthier et al. (1986, p.52) définissent le problème de recherche comme étant un « *écart ou un manque à combler dans le domaine de nos connaissances entre ce que nous savons et ce que nous devrions ou désirons savoir sur le réel. Le problème s'exprime par un sentiment d'ignorance et par le désir de connaître, par la volonté d'en savoir plus en ce qui concerne le réel observable, par un questionnement. La situation finale désirée est une connaissance de la réalité qui soit à la fois la plus complète et la plus vraie possible. En définitive, un problème de recherche se reconnaît à la présence initiale d'une question concernant le monde réel observable et le désir d'y répondre de la façon la plus objective et la plus complète possible.* »

Les propositions des différentes études pourraient avoir un impact sur les pratiques d'enseignement-apprentissage sur la démonstration par récurrence. Cependant, la pratique enseignante sur la notion ne semble pas être explicitement évoquée (Douamba et al., 2022). Les difficultés que nous présentons ci-dessus montrent la complexité de la démonstration par récurrence dans les classes de Terminale scientifique au Cameroun, ce qui justifierait une difficile appropriation du concept par les apprenants. Plusieurs démarches sont entreprises par les enseignants pour atteindre les objectifs définis dans le cours sur le principe de récurrence en classe de terminale scientifique. Malgré les stratégies mises sur pieds par ces derniers, la démonstration par récurrence reste encore une source de problème pour les élèves de la classe de Terminale scientifique. De ce qui précède, le problème que nous voulons résoudre est l'identification des difficultés et des obstacles dans l'appropriation et la rédaction de la démonstration par récurrence dans les collèges et lycées du Cameroun.

1.1.4. Questions de recherche

Etant donné que la démonstration par récurrence est un outil très important pour établir la véracité de certaines propriétés en Mathématique, l'enquête réalisée par Grenier en France (Grenier, 2011) montre que le principe de démonstration par récurrence n'était pas toujours totalement compris, que ce soit par les étudiants scientifiques universitaires ou même aussi par les enseignants de mathématiques. Cela a un impact considérable sur la compréhension des élèves des lycées. Grenier révèle également dans son article que certains manuels scolaires des niveaux secondaires et universitaires présentent de manière erronée le principe du raisonnement par récurrence **(**Poulin ,2013) et au regard de nombreuses difficultés rencontrées par les élèves au niveau de sa mise en œuvre, nous nous posons la question suivante : **en quoi la prise en compte du point de vue épistémologique du principe de récurrence peut-elle aider les élèves à dépasser les difficultés que rencontrent les apprenants dans la démonstration par récurrence ?**

On peut donc se poser les questions spécifiques suivantes :

- ✓ Quelles sont les difficultés identifiées dans l'apprentissage de la démonstration par récurrence ?
- ✓ Quelle est l'origine des difficultés dans l'apprentissage du raisonnement par récurrence par les élèves ?

Pour essayer d'apporter des éléments de réponses à toutes ces questionnements, une étude épistémologique nous permettra au préalable d'identifier les difficultés et ruptures qui ont émergé lors de la construction du principe de récurrence dans le temps et comment elles ont été surmontées. Ensuite nous situerons notre travail dans deux cadres théoriques dont la pertinence sera développée plus loin.

La théorie des situations didactiques nous donne des éléments de construction d'une situation pour l'étude de cette notion.

La théorie de la transposition didactique nous permet d'analyser les pratiques enseignantes et de voir comment se présente cette notion dans les manuels.

1.1.5. Hypothèses de recherche

Selon Mace (1988, p.41), « *l'hypothèse est une réponse anticipée à la question spécifique de recherche. C'est un énoncé déclaratif qui précise une relation anticipée entre des phénomènes observés ou imaginés* ». Cette conjecture peut naitre soit de l'observation, soit de l'étude des données précédemment recueillies, soit d'une théorie qu'elle va tenter de valider. Notre hypothèse générale est formulée de la façon suivante **:** l'étude épistémologique du principe de récurrence peut permettre le dépassement par des élèves des difficultés rencontrées lors de l'utilisation de la démonstration par récurrence.

Pour opérationnaliser notre hypothèse générale nous avons formulé de manière spécifique les hypothèses suivantes :

- ✓ Dans l'apprentissage de la démonstration par récurrence, les difficultés rencontrées par les apprenants se situent au niveau des étapes de : l'initialisation, l'hérédité, la conclusion et de l'énoncé de ce principe.
- ✓ Certaines de ces difficultés proviennent des pratiques enseignantes et des manuels scolaires.
- ✓ D'autres proviennent des obstacles épistémologiques.

1.1.6. Les objectifs de la recherche

En 1996, Ntebe Bomba (Cité par Sii, 2010, p.7 et repris par Mintounou, 2020, p.9) définit l'objectif de manière scientifique comme *« le point d'atterrissage qui est à la fois le point de décollage dans le développement de l'étude. Il s'avère être la partie la plus délicate de l'œuvre académique car, il porte sur la plus-value scientifique qu'il faut clairement ressortir au départ pour la rédaction à la fin de l'œuvre ».* Autrement, l'objectif est ce qu'on se propose d'atteindre et de réaliser à la fin d'une étude. L'objectif de ce travail consiste à identifier les difficultés et les obstacles liés à l'apprentissage de la démonstration par récurrence par les apprenants, en vue de proposer des stratégies qui permettront aux apprenants de s'approprier ce principe et de l'utiliser convenablement pour faire des démonstrations. De manière plus spécifique, nous envisageons :

- ✓ d'identifier les différentes erreurs produites par les élèves lors de la mise en œuvre de la démonstration par récurrence et d'expliquer où exactement résident ces erreurs ;
- ✓ d'identifier les difficultés et les obstacles présentent dans les pratiques enseignantes et les manuels scolaires sur la démonstration par récurrence ;
- ✓ d'identifier les difficultés et les obstacles qui relèvent des fondements et de l'évolution du principe du raisonnement par récurrence.

1.1.7. L'intérêt de la recherche

1.1.7.1. L'intérêt pour la didactique

Du point de vue didactique, le raisonnement par récurrence est un outil de preuve centrale pour une multitude de théorèmes en Arithmétique, car il existe des théorèmes pour lesquels aucune autre voie d'accès à leurs preuves n'est disponible que celle du principe de récurrence (Egré, 2015). Et les difficultés que rencontrent les élèves lors de son utilisation sont essentiellement d'ordre didactique. Ils sont en partie dues aux pratiques des enseignants de Mathématiques.

1.1.7.2. L'intérêt pédagogique

Cette recherche revêt ensuite un intérêt pédagogique en ce sens qu'elle interpelle les enseignants de Mathématiques à réaliser des pratiques enseignantes contextualisées afin d'impulser une meilleure compréhension de la notion au détriment de la rétention des étapes, conséquence d'une pratique transmissive des apprentissages.

1.1.7.3. L'intérêt psychologique

Enfin du point de vue psychologique, le raisonnement humain est défini comme un processus cognitif de haut niveau qui nous permet de parvenir à une nouvelle conclusion ou information à partir de certaines hypothèses antérieures soi-disant locaux[1]. C'est en ce sens que cette recherche est très intéressante car elle permettra le développement mental des apprenants ce qui favoriserait leurs bonnes compréhensions des problèmes pour développer des savoirs en mathématiques.

1.1.8. Délimitation temporelle de la recherche

Afin de circonscrire cette étude, il importe de la délimiter temporellement, spatialement et thématiquement.

- ✓ **Délimitation temporaire**

Notre étude se déroule à partir du Second Semestre de l'année scolaire 2022/2023 à l'année scolaire 2023/2024.

- ✓ **Délimitation spatiale**

Initié de façon informelle depuis Janvier 2022, le travail s'est limite dans la ville de Yaoundé, capitale politique du Cameroun au Lycée Moderne de Nkozoa.

- ✓ **Délimitation thématique**

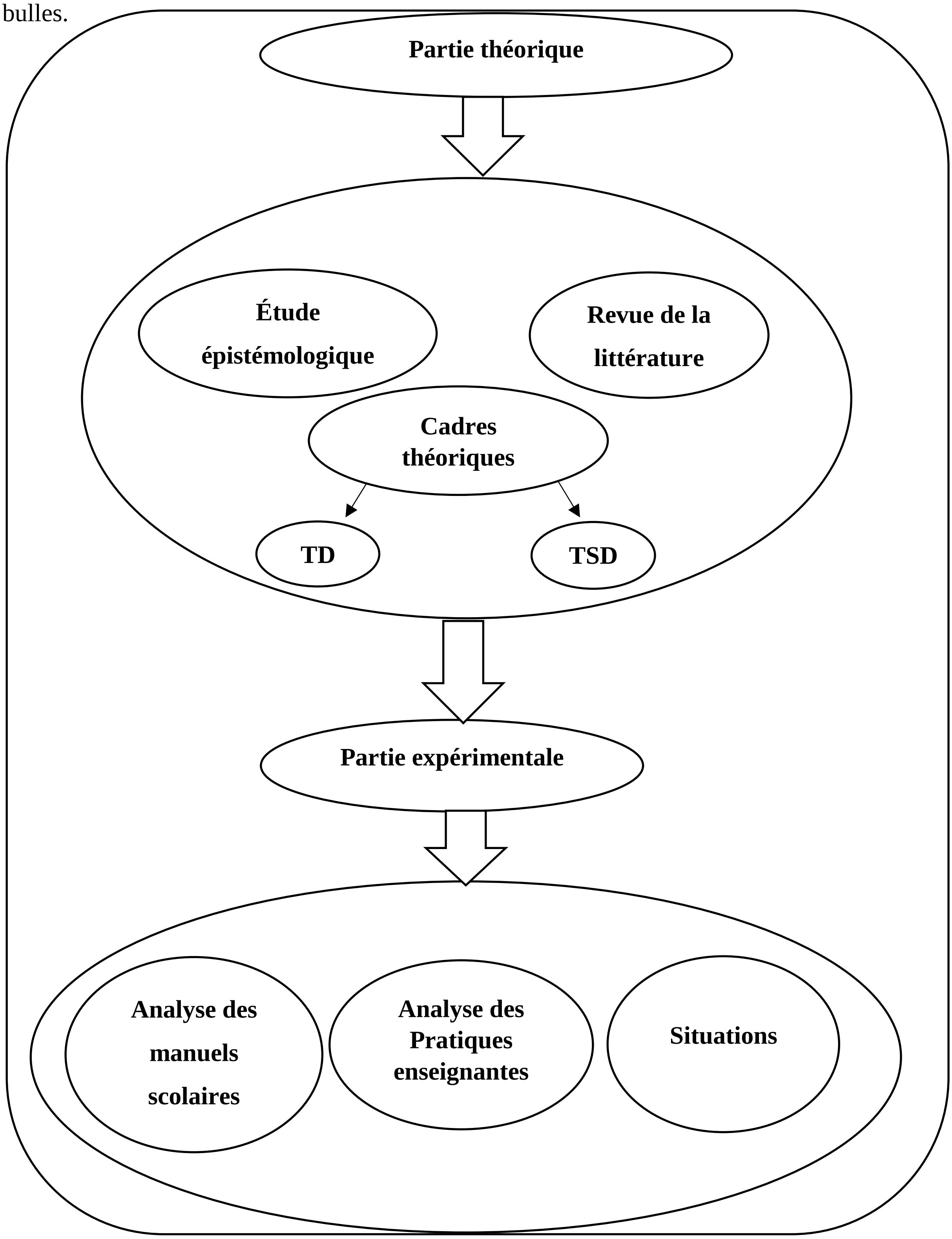
La présente étude est intitulée « **Démonstration par récurrence au second cycle de l'enseignement secondaire : obstacles et difficultés** ». L'objet de cette étude s'inscrit dans le champ de la didactique des disciplines, plus précisément de la didactique des mathématiques. Dans ce champ, nous nous intéressons à l'utilisation du raisonnement par récurrence pour démontrer certaines propriétés sur $\mathbb{N}$.

1.2. Méthodologie de notre travail

Le schéma ci-dessous subdivisé notre méthodologie en deux parties à savoir une partie théorique et une partie expérimentale. Nous allons présentons également les éléments qui

[1] https://www.studocu.com/fr/document/universite-de-franche-comte/psychologie-cognitive/psychologie-du-raisonnement/5833302

constituent chaque bloc, tout en indiquant les interactions qui existent entre les différentes bulles.



Partie théorique

1.2.1. Étude épistémologique

Cette étude nous permettra de voir comment la démonstration par récurrence a été élaborée. Elle nous permet également de faire l'inventaire des difficultés et obstacles qui ont émergé lors de la construction de ce principe dans le temps, comment ils ont été surmontés. Elle nous permet enfin de construire notre situation. En effet nous avons signalé dans notre problématique que certaines difficultés qu'ont les élèves sur la notion de la démonstration par récurrence pouvaient relever des obstacles épistémologiques liés à la construction de ce principe. Une prise en compte de ces obstacles lors de la construction de notre situation nous permet de surmonter ces difficultés.

1.2.2. La revue de la littérature

Il s'agit pour nous de faire un tour d'horizon des études menées par d'autres chercheurs et ayant un rapport avec le problème que nous abordons. Dans ce sens, elle nous apporte des éléments qui vont nous servir à nourrir notre travail et vont nous renseigner sur les difficultés d'acquisition de la notion de récurrence dans le cadre scolaire. Par la suite elle nous donnera des éléments pour faire une analyse des programmes et des manuels et pour construire notre questionnaire.

1.2.3. Cadres théoriques

La théorie de la transposition didactique à travers les objets qui y sont développés permettra de mieux comprendre et analyser la transposition qui est faite dans le manuel concernant la démonstration par récurrence.

La théorie des situations didactiques nous donne le cadre pour traiter/résoudre les situations proposées.

Bloc expérimental

1.2.4. Analyse des programmes et manuels

En nous appuyant sur la théorie de la transposition didactique, nous allons voir comment le principe de la démonstration par récurrence se présente dans les programmes et les manuels. Elle nous permet aussi d'identifier les éléments dans les programmes et les manuels qui peuvent créer des problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage du principe de démonstration par récurrence. Ce sont ces éléments, associés à ceux de la revue de littérature, des résultats de l'enquête épistémologique et les cadres théoriques dans lesquels nous travaillons, qui vont nous permettre de construire notre situation.

1.2.5. Analyse des pratiques enseignantes

L'analyse des leçons de certains enseignants permet de nous renseigner sur la transposition qui est faite, afin d'identifier les difficultés qui peuvent s'ériger en obstacles didactiques dans la pratique. Ces difficultés nous inspirons également pour construire notre situation.

Chapitre 2 : Insertion théorique du sujet

2.1. Définition des concepts

Dans cette section, nous donnons des définitions pour avoir une idée intuitive du sens mathématique de la *récurrence* ainsi que les termes qui lui sont associés tels que raisonnement, induction, preuve, démonstration. Ce terme étant utilisé dans le langage naturel, nous pouvons déjà avoir une idée intuitive de son sens mathématique en consultant un dictionnaire de la langue française (Larousse, 2022) ainsi qu'un dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire Mathématique (Hauchecorne, 2003), cité par Poulin (2013, p.8-11).

- ✓ **Récurrent, e (Larousse, 2022, p.1179) :**

  adj. lat. recurrens, de recurrere « *qui revient, réapparaît, se produit à nouveau* »
- ✓ **Récurrence (Larousse, 2022, p.1179) :**

  n.f. « *caractère de ce qui est récurrent* »
- ✓ **Récurrence (Hauchecorne, 2003, p.174) :**

  Le verbe latin *recurrere, courir en arrière* a pour participe présent *recurrens*. C'est lui qui nomme notre raisonnement par récurrence apparu au XIXe siècle [· · ·].

D'après cette définition et l'étymologie du mot *récurrence*, on peut dire qu'on a affaire à une certaine forme de répétition, qui revient en arrière.

- ✓ **Preuve (Larousse, 2022, p. 1109) :**

  1. Ce qui démontre, établit la vérité de quelque chose : ces documents serviront de preuve a son innocence (= serviront à la prouver). Accuser sans preuves.

  2. En mathématiques, procédé permettant de vérifier l'exactitude d'un calcul : La preuve par neuf.
- ✓ **Preuve (Nicolas Balacheff, 1987) :**

  C'est une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.
- ✓ **Preuve (Hauchecorne, 2003, p. 158) :**

  Le verbe latin *probare* signifie *trouver bon, approuver* (⟹ Probabilité). *Prouver* signifie d'abord mettre à *l'épreuve* et par extension *essayer* ou *vérifier*. En italien, on utilise le verbe *provare* pour demander à essayer un vêtement dans un magasin. Devenu *prover* puis *prouver*, il se spécialise vers 1400 dans le sens de *justifier*. Le mot *preuve* est utilisé en mathématiques à partir de la Renaissance. C'est l'époque où revient le souci de justifier ce que l'on affirme. Bientôt le sérieux du mot semble galvauder par son utilisation dans le langage courant. On préfère souvent le remplacer par *démonstration* qui paraît donner de nos jours un plus grand sérieux scientifique.

- ✓ **Raisonnement (Larousse, 2022, p. 1154) :**

  1. Faculté, action ou manière de raisonner : A cet âge, on acquiert l'aptitude à tenir un raisonnement.

  2. Enchaînement de propositions déduites les unes des autres et menant à une conclusion : son raisonnement est fondé sur l'hypothèse d'une reprise économique (SYN. argumentation, démonstration).

- ✓ **Raisonnement (Duval, 1992) :**

  C'est l'organisation de propositions qui est orientée vers un énoncé-cible pour modifier la valeur épistémique que cet énoncé-cible a dans un état de connaissance donné, ou dans un milieu social donné, et, qui par voie de conséquence, en modifie la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation sont remplies.

Par valeur épistémique il faut comprendre « *le degré de certitude ou de conviction attaché à une proposition* » (Duval, 1991, p. 254).

Les « conditions particulières d'organisation » mentionnées par Raymond Duval sont une référence à la fois à la structure logique et à la norme particulière du discours de preuve.

- ✓ **Démonstration (Larousse, 2022, p. 381-382) :**

  1. Action de rendre évidente par le raisonnement, de prouver par l'expérience la vérité d'un fait, d'une donnée scientifique : La démonstration de la culpabilité de l'accusée.

  2. Action de montrer au public le fonctionnement d'un appareil ou l'usage d'un produit : Cette représentante est venue nous faire une démonstration de quelques robots ménagers.

- ✓ **Démonstration (Michèle Gandit, 2004) :**

  C'est un agencement logique de faits connus pour être vrais permettant de conclure à des vérités nouvelles, que l'on pouvait ou non supputer auparavant, mais sans pouvoir trancher sur leur véracité ou non-véracité.

- ✓ **Démonstration (Hauchecorne, 2003, p. 51) :**

  Ce mot est emprunté dans le courant du XIIe siècle au latin et désigne l'action de montrer. Il s'utilise d'abord en rhétorique, discipline très prisée des scolastiques puis en droit. En mathématiques le mot prend une définition plus précise puisqu'il désigne le raisonnement qui mène de prémisses à une conclusion à l'aide de schémas logiques précis. La logique mathématique formalise cette notion dans la théorie de la démonstration.

De cette définition, nous pouvons dire que : une *démonstration* est destinée à établir la vérité d’un résultat et a pour fonction essentielle de valider et de réduire le doute d’une part et d’autre part, elle répond à des critères de raisonnement, de logique, qui sont propres aux mathématiques, c’est-à-dire la rationalité.

Différence entre preuve – démonstration – raisonnement.

Les définitions et explications des trois termes *preuve, raisonnement* et *démonstration* laissent transparaitre qu’ils peuvent être confondus. Il est donc important d’établir aussi certaines distinctions auxquelles il convient de prêter attention. Cette approche est d’une importance capitale pour la bonne compréhension de la suite de notre travail car ces différents termes seront utilisés couramment.

Nous définissons un *raisonnement* comme une organisation cohérente de la pensée ayant la capacité, ou pas, de dépendre étroitement à un processus de preuve. On peut par exemple raisonner par récurrence pour définir les termes d'une suite, il n'y a pas de preuve ou démonstration dans cette démarche de raisonnement.

Nous pouvons distinguer les termes preuve et démonstration. Pour illustrer cela, considérons l’exemple suivant :

Considérons la proposition suivante : Toute fonction continue n'est pas dérivable.

- On peut prouver cette proposition en utilisant le graphe d’une fonction particulière qui est continue et non-dérivable, notamment le cas de la fonction valeur absolue.
- On peut aussi démontrer cette proposition en utilisant les définitions formelles de la continuité et de la dérivabilité.

Nous pouvons donc faire une distinction entre une *preuve* et une *démonstration.* Dans une *démonstration,* on démontre un résultat par un *raisonnement* constitué d’un ensemble de déductions logiques d'un point de vue mathématique.

En ce qui est de la *preuve,* on ne fournit pas forcément un tel *raisonnement.* En effet, comme nous l’avons déjà montré, on peut établir une *preuve* en montrant tout simplement, c’est le cas de la fonction valeur absolue dans l’exemple. Ainsi, on peut dire qu'une *démonstration* est une *preuve* mais que la réciproque n'est pas forcément vraie.

Le mot induction est souvent utilisée à la place du terme récurrence. Nous allons donner sa définition.

- ✓ **Induction (Larousse, 2022, p. 722-382) :**

  n.f. (lat. inductio).

  « *Opération intellectuelle par laquelle on part de l'observation de faits, de cas particuliers pour en tirer une proposition, une loi générale ; généralisation.* »

- ✓ **Induction (Hauchecorne, 2003, p. 102) :**

  En latin *indictio* désigne l'action d'introduire. Oresme l'utilise pour exprimer le fait de remonter de la conséquence à la cause. C'est dans ce sens qu'il faut comprendre induction comme synonyme de *raisonnement par récurrence*. De manière générale l'induction, parfois qualifiée de totalisante, est le raisonnement qui permet d'aller de l'expérience à la cause ou à la loi générale.

- ✓ **Induction (Robert Blanché, 1976) :**

  Elle désigne une opération qui consiste à aller des faits à la loi, ou du particulier au générale.

De ces définitions nous retenons que, l'induction a deux sens. Le premier étant le raisonnement par récurrence qui permet de construire une propriété générale à partir d'une vérification particulière sur quelques valeurs de n. Il permet de passer d'une valeur particulière de n $(1, 2, 3)$ à tout $\mathbb{N}$: autrement dit, du fini à l'infini. Le second sens est celui d'une inférence conjecturale, qui passe des faits à la loi. Elle montre une propriété pour un certain nombre d'entiers successifs (ici $1, 2, 3$ et 4), et généralise à l'ensemble des entiers sans autre forme de justification.

2.2. Étude épistémologique

2.2.1. Une enquête épistémologique sur la démonstration par récurrence

Depuis l'antiquité, la démonstration par récurrence joue un rôle majeur en mathématiques. Mais ce n'est que récemment au 19ème siècle avec Pascal selon Hara (1962, p.287-302) que les mathématiciens ont donné une définition précise et rigoureuse.

2.2.1.1. Conceptualisation de la démonstration par récurrence antérieur à Pascal

Bien qu'on trouve de meilleures formulations du principe de récurrence chez Pascal, on doit tenir compte des mathématiciens comme Al-Karaji (953-1029) et As-Samaw'al (1130-1180) dont le raisonnement était plus proche du raisonnement par récurrence, comme le souligne Roshdi Rashed (1984), (cité par Vidal, 2005, p. 243) :

« *Les méthodes de démonstration d'Al-Karaji et d'As-Samaw'al sont un commencement de l'induction mathématique, si l'on prend pour point de départ Pascal.* »

Afin de mieux illustrer ces propos, As-Samaw'al (1150) se propose de démontrer, dans son ouvrage d'algèbre (Le flamboyant en algèbre), que $(ab)^n = a^n b^n$. Il démontre tout d'abord la proposition suivante :

« *Quatre nombres quelconques étant donnés, le produit de la multiplication du premier et du second par la multiplication du troisième et du quatrième est égal à celui de la multiplication du premier par le troisième et de multiplication du deuxième par le quatrième*. »

C'est- à -dire : $(ab)(cd) = (ac)(bd)$. Il utilise pour cela les propositions. Il énonce ensuite la proposition suivante :

« *Le produit de deux nombres cubiques est égal au cube du produit de leurs côtés.* »

C'est-a-dire : $a^3b^3 = (ab)^3$ (repris par Vidal, 2005, p. 242).

Vidal (2005, p. 243) nous dit qu'il apparaît clairement un procédé qui permet de démontrer le passage du rang 2 au rang 3 ou le passage du rang 3 au rang 4. Bien que le raisonnement adopté par As-Samaw'al ne soit pas formalisé, il est évident de reconnaitre qu'il permet le passage de l'entier au suivant et est très proche du raisonnement par récurrence que nous connaissons aujourd'hui.

Enfin, certains mathématiciens comme Al-Karaji (953-1029) et As-Samaw'al (1130-1180) ont utilisé le principe de récurrence avant Pascal, même si on était en présence d'une absence de notations permettant une généralisation.

2.2.1.2. Vers une formalisation de la démonstration par récurrence

Le traité du triangle arithmétique de Pascal est un texte concernant 19 propositions sur les coefficients binomiaux, établies sur la base du triangle arithmétique. Selon Vidal (2005, p. 25), le mérite de Pascal réside, non dans la découverte du triangle, mais dans son étude systématique et fort élégante utilisant en particulier, comme nous allons le montrer, le raisonnement par récurrence. C'est pour démontrer la douzième proposition de son livre que Pascal (1654) utilise ce principe. Ce qui est important ici c'est la démonstration que Pascal formule et non la proposition proprement dite. Ainsi, il la formule de la manière suivante (cité par Vidal, 2005, p. 254) :

« *Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.*

Le 1, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base. [...].

Le 2, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième et à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second lemme, en cette sorte. »

Ici Pascal définit le raisonnement par récurrence sans toutefois l'expliciter de manière formelle. On établit d'abord la proposition pour $n = 1$; on montre ensuite que pour un entier naturel quelconque si la proposition est vraie, elle le sera nécessairement pour l'entier suivant. D'où elle est nécessairement vraie pour tous les entiers naturels non nuls. De manière formelle celle-ci se traduit par : si $P(1)$ est vraie et si $\forall n \geq 1$, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ vraie alors $\forall n \geq 1, P(n)$ est vraie. Ainsi, Pascal fut le premier à avoir rédigé de manière formelle le principe de démonstration par récurrence.

2.2.2. Obstacles épistémologiques

La notion d'obstacle épistémologique a été introduite par Bachelard (1938). Pour lui : « Les obstacles épistémologiques sont des causes d'inertie, de stagnation et même cause de régression à des processus de pensée pré-objective, symbolique : valorisation excessive surdétermination ». Il est question pour nous ici d'identifier dans un premier temps les obstacles épistémologiques survenus lors de la mise sur pieds et l'utilisation de la démonstration par récurrence, et dans un second temps de dire comment ils ont été surmontés.

2.2.2.1. L'induction incomplète comme obstacle à la conceptualisation du principe du raisonnement par récurrence.

L'induction incomplète constitue un premier pas dans l'histoire vers le principe du raisonnement par récurrence. En effet, l'induction incomplète était considérée par certains mathématiciens de l'Antiquité comme un véritable moyen de démonstration. On retrouve d'ailleurs déjà son utilisation dans *Les livres arithmétiques d'Euclide* (Vidal, 2005, p.2018). A ce propos, Vidal nous renseigne que :

« *Une méthode fréquente utilisée par Euclide pour prouver qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel* n *est la suivante : On prouve la propriété pour* 1, *pour* 2, *pour* 3, *pour* 4, *et on essaye de la prouver pour des entiers plus grands tels que* 7 *ou* 11. *Ainsi, Euclide effectue de nombreuses démonstrations, par exemple, pour* $n = 3$ *et nous laisse le soin de vérifier que la démonstration est encore valable pour* 4, *pour* 5, *pour un nombre quelconque.* ».

Nous constatons ici que Euclide nous laisse « *le soin de vérifier* » le résultat pour 4, pour 5 et un nombre quelconque, et par là, nous fait comprendre qu'il considère que la généralisation des cas particuliers qu'il a vérifiés lui-même est tout à fait valable. Nous avons ici la première étape de la démonstration par récurrence qui est : l'initialisation. Mais par la suite, on s'est rendu compte que les raisonnements déductifs sont insuffisants pour démontrer l'ensemble d'une théorie axiomatique. L'un des problèmes majeurs de l'induction incomplète est qu'elle conduisait à des résultats erronés, un exemple est celui de Nicomaque que nous allons présenter ici.

Nicomaque va avoir une très grande confiance après avoir montré le principe pour les premiers nombres carrés par l'induction incomplète. Nous allons voir que cette confiance va amener Nicomaque à des inductions fausses, en particulier sur les nombres « parfaits » (Vidal, 2005, pp. 208-210).

« *Un nombre parfait est celui qui est égal à la somme de ses parties*. » (Euclide, définition 23 du Livre VII), cité par Vidal (2005, pp. 208).

Notons que les parties d'un nombre, cité par Euclide ici représentent l'ensemble des diviseurs naturels de ce nombre à l'exception de lui-même. Par exemple, les parties de 6 sont 1, 2 et 3.

Nicomaque ne donne que les quatre premiers nombres parfaits dans son ouvrage qui sont : $\mathbf{6}, 2\mathbf{8}, 49\mathbf{6}$ et $812\mathbf{8}$. Il ne se contente pas d'observer les premiers nombres parfaits, il énonce des affirmations générales sans pour autant justifier. Il y a en effet ici deux affirmations non démontrées, cité par Vidal (p. 209) :

(1) Il y a un et un seul nombre parfait dans chaque intervalle $[10^n, 10^{n+1}[$.

(2) Tous les nombres parfaits se terminent alternativement par 6 ou 8.

Ces assertions énoncées par Nicomaque sont malheureusement erronées. Car il n'a considéré que les quatre premiers nombres parfaits, qui satisfont ces deux affirmations. Et pourtant ce n'est pas le cas pour les nombres parfaits suivants. En effet, le cinquième nombre parfait vaut 33550336 et le sixième 8589869056, chiffres donnés par Vidal (2005, p.210). Nous constatons ainsi qu'il n'y a pas de nombre parfait dans l'intervalle $[10^4;\ 10^5]$ et qu'ils ne se terminent pas alternativement par le nombre 6 ou le nombre 8 comme l'avait affirmé Nicomaque.

L'obstacle réside dans le fait que l'induction incomplète ne permet pas de généraliser la propriété en ce sens que la vérification de celle-ci ne repose pas sur tous les entiers naturels mais plutôt sur des cas particuliers qui se suivent.

2.2.2.2. L'infini comme obstacle à la conceptualisation du principe du raisonnement par récurrence

On retrouve le concept de l'infini dans le principe du raisonnement par récurrence. En effet, « *la notion de l'infini est un critère dont il faut tenir compte en ce qui concerne l'acceptation de la démonstration par récurrence puisque la notion d'infini fait partie intégrante du principe qui la compose* » (Poulin,2013, pp. 59). En effet, il permet de démontrer une propriété portant sur une infinité d'entiers naturels en démontrant seulement sur deux quelconques. Le fait de démontrer pour un entier naturel quelconque et son successeur conduit à montrer sur une infinité de cas vu que l'entier naturel est quelconque. Or le concept de l'infini a posé des problèmes par le passé. En voici quelques-uns :

- ✓ En admettant que l'infini existe, on arrive à une contradiction avec la théorie d'Euclide selon laquelle le tout n'est pas égal à la partie. En effet, si l'infini existe, étant donné qu'une partie infinie de $\mathbb{N}$ comme $2\mathbb{N}$ peut être mise en bijection avec $\mathbb{N}$, on arrive à la conclusion selon laquelle $\mathbb{N} = 2\mathbb{N}$ du point de vu de la cardinalité.

- ✓ En admettant l'existence de l'infini, on a du mal à représenter certaines grandeurs géométriques comme $\sqrt{2}$. En effet, l'écriture décimale de $\sqrt{2}$ est infinie ou illimitée. Comment donc construire un nombre dont son écriture est illimitée.
- ✓ En admettant que l'infini existe, on ne peut pas faire les opérations algébriques. Effet, si on ajoute le nombre 1 a l'infini on obtient encore l'infini. Posons l'infini égale a ω, on a : $\omega + 1 = \omega$, ce qui donne $1 = \omega - \omega$, d'où $1 = 0$ qui est absurde.
- ✓ Si l'infini existe, on aboutit à des situations selon lesquelles une somme infinie peut être finie. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} = 1.$$

L'obstacle se situe au niveau où on veut établir la véracité d'une propriété donc l'univers du discours est infini à partir d'un élément générique et son suivant.

2.2.2.3. L'implication comme obstacle épistémologique à la compréhension du raisonnement par récurrence

L'implication mathématique est un élément essentiel et indispensable dans l'énoncé de l'hérédité du principe de récurrence. L'énoncé du principe de raisonnement par récurrence formulé par Grenier est :

SI [il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie ET pour tout $n \geq n_0, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie] alors [pour tout $n \geq n_0 , P(n)$ est vraie], il convient de préciser de quel type d'implication au niveau de l'étape de l'hérédité il s'agit.

L'énoncé $\forall n \geq n_0, (P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie est une implication formelle à cause de la clôture universelle $\forall n \geq n_0$ et P le prédicat.

L'obstacle réside au niveau de la confusion entre l'implication formelle et l'implication matérielle dans l'énoncé de l'étape de l'hérédité. Car l'implication formelle génère au sens de Quine (1950), (citée par Njomgang Ngansop, 2013) la règle fondamentale de déduction suivante :

Soit $n \geq n_0$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie, et c'est la vraie formulation lorsqu'on veut démontrer l'étape de l'hérédité. L'implication matérielle utilisé par certains auteurs au niveau de l'étape de l'hérédité s'énonce de la manière suivante :

$\forall n \geq n_0, P(n)$ Vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ Vraie.

2.3. Présentation des cadres théoriques

Dans cette partie, notre objectif consiste à présenter les différents cadres théoriques sur lesquels nous nous appuyons pour conduire notre recherche.

2.3.1. La transposition didactique

Introduction

L'hypothèse que nous défendons ici est qu'une étude épistémologique du principe de récurrence peut permettre le dépassement par les élèves des difficultés rencontrées lors de l'utilisation de la démonstration par récurrence.

Pour développer notre propos, nous nous appuyons sur la théorie de la transposition didactique développée par Chevallard.

Dans la description des processus didactiques, le savoir en jeu apparaît comme :

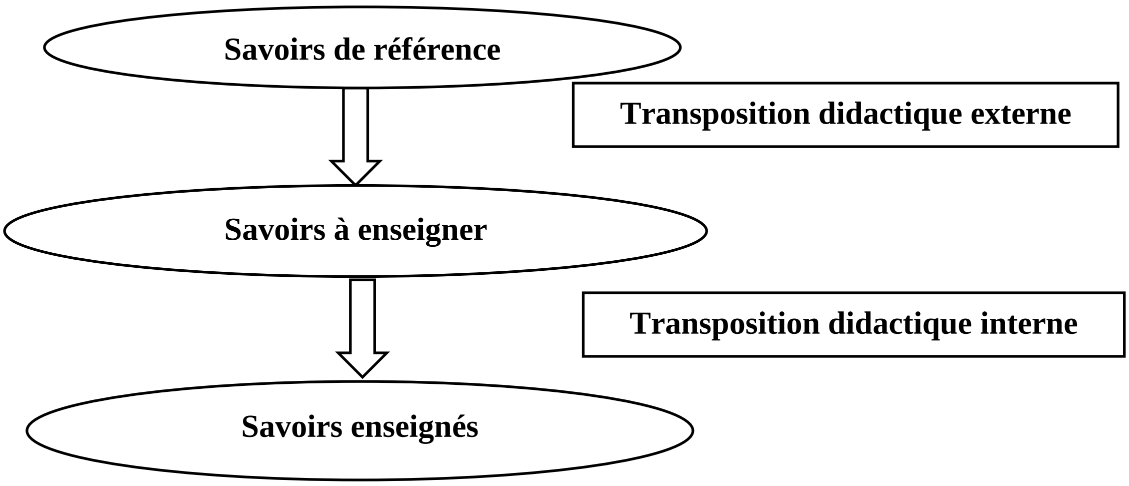
- ✓ Une donnée préexistante (épistémologie réaliste) ; le savoir est conçu soit transversalement et transmis (par des prêtres, des savants, des enseignants), soit le savoir est logé dans les œuvres du passé et devient accessible par le contact avec les œuvres (par contemplation), soit encore est le résultat d'un dévoilement par des spécialistes de l'enseignement par objectif algorithmiques en étant possiblement la meilleure illustration.
- ✓ Un construit (épistémologie constructiviste) ; on reconnait alors que le savoir est une production humaine, évolutive ancrée dans un contexte social et déterminé spatialement, historiquement et socialement (Lenoir et al., 2012).

De ces deux définitions, nous retenons que le savoir est un objet figé, intouchable dont on peut définir les caractéristiques par des choix extérieurs aux actes didactiques proprement dits, comme un simple résumé des savoirs les plus développés par exemple. Or il s'avère que la présence en classe d'un objet à enseigner est la conséquence d'une histoire particulière, le résultat d'un traitement didactique obéissant à des contraintes précises. Ce sont ces mécanismes généraux permettant le passage d'un objet de savoir à un objet d'enseignement que l'on appelle transposition didactique. Chevallard (1985) définit ce concept ainsi : « *Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors des transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le « travail » qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé transposition didactique* ».

Dans cette citation, il s'intéresse aux transformations subies par un savoir pour devenir objet d'enseignement. Comme nous l'avons annoncé au début de notre travail, nous nous intéressons à la récurrence comme objet d'enseignement dans les lycées et collèges du Cameroun.

La récurrence au secondaire est un objet immatériel appelée objets non-ostensifs dans le sens de Chevallard (1994), renvoyant aux concepts, aux notions qui ne peuvent être évoquer qu'à travers la manipulation des objets ostensifs. Notre objectif ici est de montrer la pertinence du choix de la théorie de la transposition didactique comme cadre théorique de notre travail.

Schéma de la transposition didactique



Commençons tout d'abord à dire ce que l'on entend par les différents types de savoirs, avant de décrire ces étapes.

- ✓ Par « **savoirs de référence »,** on entend « un corpus qui s'enrichit sans cesse de connaissances nouvelles, reconnues comme pertinentes et valides par la communauté scientifique spécialisée. (…) le savoir savant est essentiellement le produit des chercheurs reconnus par leurs pairs, par l'université » (Pellec, 1991, p. 40). Les savoirs savants sont « les savoirs validés, produits en un certain lieu et dans certaines conditions, un monde aux limites plus ou moins nettes, “la communauté scientifique’’, qui légitime ces savoirs, leur confère un label d’exactitude, d’intérêt… » (Audigier, 1988, p. 14).

- ✓ Les « **savoirs à enseigner** » sont ceux « qui sont décrits, précisés, dans l’ensemble des textes officiels (programmes, instructions officielles, commentaires…) ; ces textes définissent des contenus, des normes, des méthodes » (Audigier, ibid.)
- ✓ Les « **savoirs enseignés** » sont ceux que l’enseignant a construits et qu’il mettra en œuvre dans la classe. C’est celui qui est énoncé pendant les heures de cours.

Décrivons à présent les trois étapes constituées par ces différents savoirs. Pour ce faire, nous nous sommes inspirée de (Clerc et al, 2006) :

1. La première, appelée « **transposition didactique externe »** (car elle a lieu hors du système d’enseignement, hors de la classe), est celle à laquelle Chevallard consacre l’essentiel de son travail. Elle est réglée par ce qu’il (1985, p. 25) appelle du « nom parodique de noosphère ». La noosphère est donc l’ensemble des personnes qui pensent les contenus d’enseignement : les universitaires qui s’intéressent aux problèmes d’enseignement, les représentants du système d’enseignement (le président d’une association d’enseignants par exemple), les auteurs de manuels, les inspecteurs scolaires, les représentants de la société, le président d’une association de parents d’élèves) et les représentants du monde politique (le ministre de l’instruction publique, son ou ses chefs de service.
2. La deuxième étape, qui consiste à adapter et transformer les savoirs à enseigner, tel qu’ils apparaissent dans les programmes et les manuels, en savoirs enseignés, est appelée **« transposition didactique interne »**, car elle est le fait des enseignants et de leurs pratiques dans les classes. De ce fait, les savoirs enseignés sont difficiles à connaître : *« La salle de classe est le domaine réservé du maître et il est difficile d’observer le savoir enseigné, de repérer des constantes dans la multiplicité. Il faudrait pourvoir pénétrer dans le sanctuaire. Ce n’est pas toujours chose aisée, car ce métier est exercé en solitaire, et souvent une présence étrangère est considérée comme une immixtion »* (Pellec, 1991, p. 47).

Etant donné que nous avons déjà explicité le schéma de la transposition didactique, nous dirons par la suite à quoi il nous sera utile dans le cadre de notre travail.

Il nous permettra de faire l'analyse des manuels. En effet, nous considérons premièrement comme savoir de référence, la définition de la démonstration par récurrence qui est donnée par Grenier (2012). Voici comment elle se présente :

« S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie et pour tout $n \geq n_0$, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie, alors pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie ».

Dans cette définition, on a l'étape d'initialisation, l'étape d'hérédité, la conclusion et l'univers du discours.

Comme savoir à enseigner, nous considérons le savoir des programmes en vigueur au Cameroun : La définition suivante sera adoptée (tirée du livre *Emergeons en Mathématiques*) :

Pour montrer qu'une proposition dépendant d'un entier naturel $n \geq n_0$ est vraie avec $n_0 \in \mathbb{N}$, il suffit de vérifier que :

- Cette proposition est vraie pour l'entier n_0 ;
- Supposer que pour un entier naturel n fixé, avec $n \geq n_0$, elle est vraie (hypothèse de récurrence) et démontrer qu'elle est aussi vraie pour $n + 1$. (C'est l'étape d'hérédité).

Pour ce qui est du savoir enseigné, nous considérons deux énoncés formulés par certains enseignants des collèges et lycées que nous avons rencontrés :

Énoncé 1

Soit $P(n)$ une propriété dépendant des entiers naturels n, soit n_0 un entier naturel fixé.

Pour montrer qu'une proposition dépendant d'un entier naturel $n \geq n_0$ est vraie avec $n_0 \in \mathbb{N}$, on procède comme suit :

- On démontrer que $P(n_0)$ est vraie : c'est l'étape de l'initialisation ;
- On démontrer que pour tout $k \geq n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est aussi vraie : c'est l'hérédité.

Énoncé 2

Soit n_0 un entier naturel et $\mathrm{P(n)}$ une proposition définie pour tout entier naturel n $(\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0)$.

Si l'on sait que $\mathrm{P(n_0)}$ est vraie et que, pour tout $\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0$, « $\mathrm{P(n)}$ vraie implique $\mathrm{P(n+1)}$ vraie », on conclut que pour tout n supérieure ou égal a n_0, $\mathrm{P(n)}$ est vraie.

On se rend compte ici des différentes transformations, on part de la définition formelle de la démonstration par récurrence au niveau du savoir de référence à son introduction en salle de classe au niveau du savoir enseigné. Tout ceci nous donne des éléments pour analyser les manuels au chapitre 4.

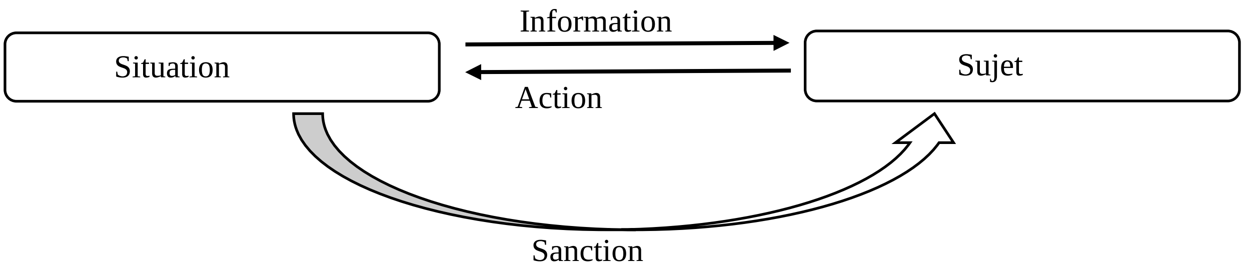
2.3.2. Théorie des situations didactiques

La démonstration par récurrence dans notre étude s'inscrit dans une pédagogie socioconstructiviste. L'élève est actif et non passif. Il apprend en agissant, en résolvant des problèmes. Il construit son savoir. Brousseau (1998), propose une modélisation du savoir, des situations d'enseignements et des rôles de l'enseignant et des élèves.

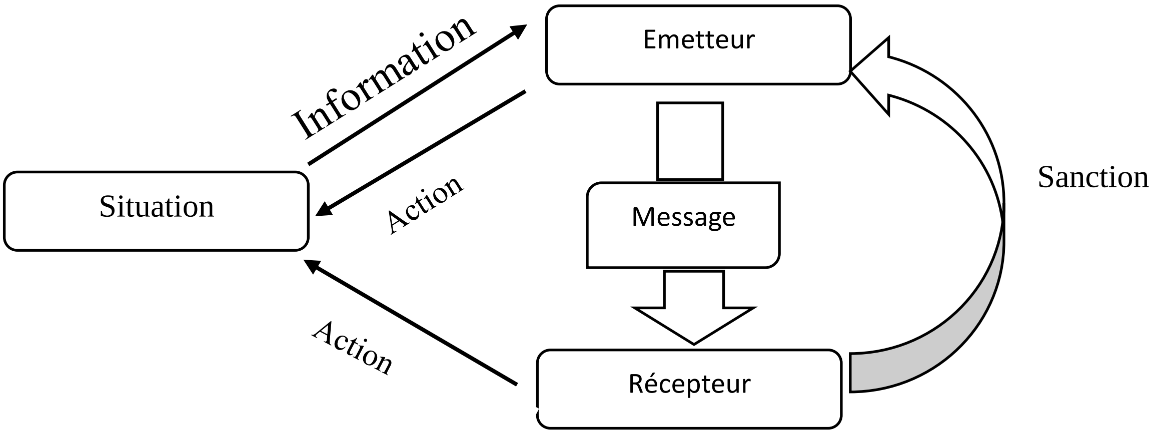
Cette théorie est née du point de vue constructiviste sur l'apprentissage et l'enseignement. Elle essaye de donner les rôles et les fonctions des différents acteurs en situation didactique. Elle permet d'analyser a priori et a posteriori les interventions de l'élève et de l'enseignant.

Une situation didactique peut être défini comme étant un environnement où l'enseignant définit des problèmes dans lesquels les apprenants doivent mobiliser et construire des savoirs pour atteindre les objectifs fixés par ce dernier. On analyse les processus d'apprentissage des élèves en distinguant quatre phases pendant lesquelles le savoir n'a pas la même fonction et l'élève n'a pas le même rapport au savoir. Les quatre temps dominants de la théorie des situations sont : l'action, la formulation, la validation et l'institutionnalisation. Ces 4 phases ne se succèdent pas régulièrement, elles sont imbriquées (allers-retours).

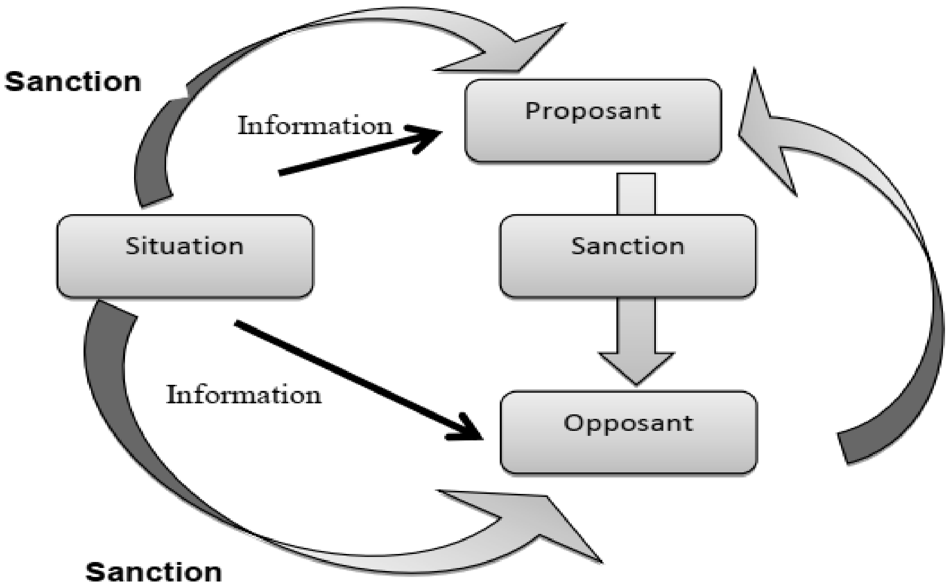
La phase de l'action selon Brousseau a pour objectif de poser à l'élève un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner. Cette phase permet à l'élève d'agir sur elle et lui renvoie de l'information sur son action. L'élève peut ajuster et juger le résultat de son action sans intervention du professeur. Comme illustre le schéma suivant :



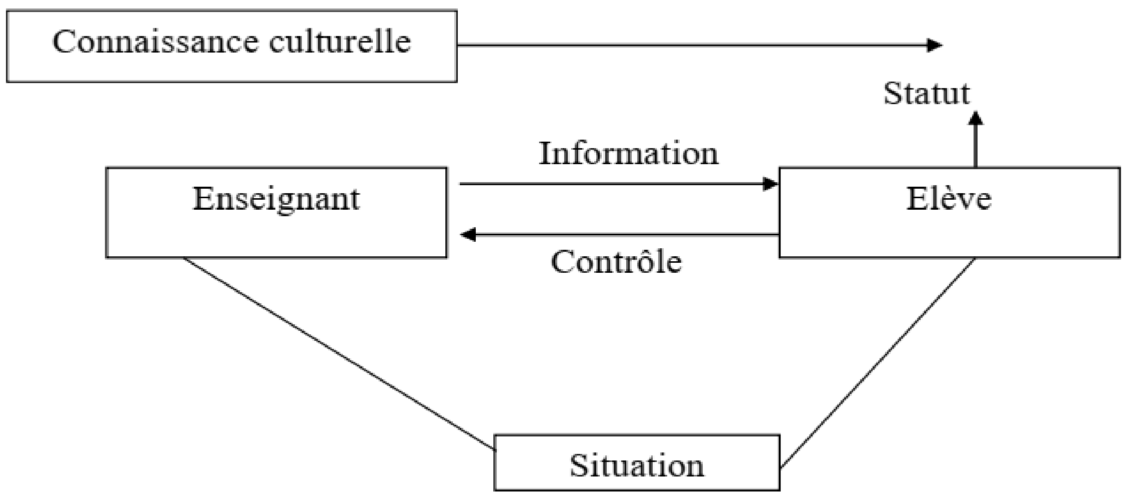
La phase la formulation selon Brousseau est une phase où l'élève explicite son modèle implicite de manière à ce que cette formulation ait un sens pour obtenir ou faire obtenir un résultat. Pendant cette phase, il y'a échange d'informations avec d'autres élèves. Et ceci amène l'élève à formuler un modèle explicite, formulé à l'aide des signes, règles communes, connues ou nouvelles. Comme illustre le schéma suivant :



La phase de validation selon Brousseau : ici l'élève doit montrer pourquoi le modèle créé est valable en convainquant l'enseignant et les autres élèves. L'élève (proposant) soumet un message mathématique (modèle de la situation) comme assertion à un interlocuteur (opposant). C'est une validation sémantique et syntaxique de la phase de validation. Comme illustre le schéma suivant :



Selon Brousseau, la phase d'institutionnalisation est la phase d'intégration de la nouvelle connaissance au patrimoine mathématique de la classe. Le professeur fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif du savoir. La nouvelle connaissance est classée savoir officiel, les élèves peuvent la retenir et l'appliquer. Comme illustre le schéma suivant :



À la fin de toutes ces phases, il faut des exercices d'application pour compléter le processus.

Cette théorie entre dans le cadre de notre étude car elle englobe toutes les étapes d'une leçon à savoir : la situation problème, l'activité d'apprentissage, le résumé et l'exercice d'application ; selon l'approche par compétences qui est en vigueur au Cameroun. Cette approche propose dans un premier temps de recontextualiser les savoirs au niveau de la situation problème. L'enseignant s'approprie le problème en le proposant aux élèves. Il provoque le conflit cognitif de telle façon que pour résoudre ce problème, les élèves vont se trouver devant la nécessité d'introduire un nouveau savoir et vont construire la connaissance visée. Comme exemple de situation problème nous proposons : « *Un élève de Terminale D voudrait montrer que la suite* (U_n) *definie par :* $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5U_n + 4 \end{cases}$

est à termes positifs. Comment peut-il procéder ? »

Dans un deuxième temps, l'enseignant met l'enfant en activité en faisant appel à une activité expérimentale ; une activité orientée vers un apprentissage : c'est l'activité d'apprentissage. Nous avons pour exemple :

Activité 1

Pour tout entier naturel n, *on considère la propriété* $P_n : U_n \geq 0$.

1) *Montrer que la propriété* P_n *est vraie pour* $n = 0$.
2) *Soit* $n \geq 0$. *Supposons que* P_n *est vraie et montrons que* $(P_n \Longrightarrow P_{n+1})$ *est aussi vraie.*

3) *Conclure.*

Activité 2

On considère la propriété définie pour tout entier naturel $n \neq 0, Q(n) : \ 2^n > 5(n+1)$.

a) Pour quelles valeurs de n *l'implication* $Q(n) \implies Q(n+1)$ *est-elle vraie ?*
b) A partir de quelles valeurs de n *la propriété* $Q(n)$ *est-elle vraie ?*

Dans un troisième temps, la phase d'institutionnalisation où l'enseignant énonce les propriétés relatives à la notion : c'est le résumé. Comme en témoigne l'exemple suivant :

***Propriété 1 (admise)** : Le plus petit élément de* $\mathbb{N}$ *est* 0 *et* $\mathbb{N}$ *n'a pas de plus grand élément.*

Propriété 2 (l'énoncé de principe de raisonnement par récurrence formulé par Grenier (2012)) :

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$ *est vraie pour tout entier naturel* $n \geq n_0$*, on procède comme suit : SI [il existe un entier* n_0 *tel que* $P(n_0)$ *est vraie ET pour tout* $n \ \geq \ n_0, (P(n) \implies P(n+1))$ *est vraie] alors [pour tout* $n \ \geq n_0$ *,* $P(n)$ *est vraie].*

Enfin dans un quatrième temps, on applique en donnant à l'élève des exercices d'entrainement, de fixation et de consolidation : c'est l'exercice d'application. Nous avons comme exercice d'application :

Exercice 3

Déterminer la valeur du plus petit entier naturel n_0 *pour laquelle on peut démontrer la propriété* $\forall n \geq n_0, n^2 > 2n+1$ *par récurrence et démontrer cette propriété par récurrence.*

Exercice 4

Soit $n \geq 1$. *Démontrer par récurrence la propriété définie par* $P(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

Cette théorie nous aide dans notre travail à construire un dispositif pour enseigner la démonstration par récurrence.

Chapitre 3 : Revue de la littérature

Dans cette partie, notre objectif consiste à visiter quelques travaux en relation avec notre thème et d'en tirer des éléments qui permettront de nourrir notre recherche.

3.1. Une étude didactique du concept de récurrence (Grenier, 2012)

Les résultats que nous présentons sont issus de l'article intitulé : **« Une étude didactique du concept de récurrence »**. Il a été publié dans la revue Petit x n°88 en 2012 par Denise Grenier. Il va de la page 27 à 47. La problématique porte sur une étude didactique du concept de récurrence auprès d'étudiants scientifiques universitaires et d'enseignants de mathématiques. L'objectif de cet article est de donner un état des lieux de l'enseignement et des connaissances d'étudiants de mathématiques sur le concept de récurrence.

D'après l'auteure, le raisonnement inductif ou par récurrence a pour objectif essentiel de généraliser à un ensemble d'objets une propriété connue ou attestée sur quelques objets particuliers, c'est-à-dire partir des cas particuliers au cas général.

Pour l'auteure, l'induction mathématique s'applique à des ensembles dénombrables relevant de l'axiome de Peano dit « axiome de récurrence » : « Tout ensemble non vide de ℕ admet un plus petit élément », qui est équivalent à « Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans ℕ ». Elle précise la formulation correcte du principe de récurrence à savoir :

« S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie et pour tout $n \geq n_0, (P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie, alors pour tout $n \geq n_0, P(n)$ est vraie ».

Cette formulation est très éloignée de celle qu'on retrouve dans les manuels scolaires. Le plus souvent, le principe de récurrence est sous la forme binaire (initialisation, hérédité) ou ternaire (initialisation, hérédité et conclusion).

L'auteure fait ressortir que tant au lycée qu'à l'université, le principe de récurrence n'est pas énoncé correctement.

Au lycée, l'auteure relève que le principe de récurrence est donné sous une forme unique, les variantes de son écriture se situent sur le nombre d'étapes (2, 3 ou 4) de l'algorithme. Les deux étapes communes à toutes ces écritures sont l'initialisation et l'hérédité, toujours présentées dans cet ordre. Dans l'hérédité, l'implication n'est pas toujours visible et les quantificateurs sont absents. L'auteure nous propose des exemples de formulations de ce principe à savoir :

- (*Maths spécialité Term ES Bordas, Fractale 1994*).
  Soit P_n une propriété dépendant d'un nombre entier n. Pour démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, procédez en trois étapes :
  1° Initialisation : démontrer que P_0 est vraie
  2° Hérédité : démontrez que, **s'il existe** un nombre entier n pour lequel la propriété P_n est vraie, alors la propriété P_{n+1} est aussi vraie
  3° Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété P_n est vraie.

L'auteure note que l'écriture de la propriété dans cet exemple est celle d'une suite P_n. L'initialisation est 0, et surtout que le quantificateur est erroné dans l'étape 2 qu'elle souligne en gras. L'étape 3 est plutôt une conséquence du principe de récurrence.

- (*Maths terminale D analyse géométrie Belin - cours - « principe de récurrence »)*
  Quatre étapes sont nécessaires pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.
  1re étape : mise en évidence de la propriété $P(n)$
  2e étape : vérification que $P(n_0)$ est vraie
  3e étape : on suppose que, pour un entier k quelconque supérieur à $n_0, P(k)$ est vraie et on montre qu'alors $P(k+1)$ est vraie
  4e étape : on applique le principe de récurrence et on conclut.

L'auteure fait des remarques suivant lesquelles les étapes 1 et 4 sont extérieures au principe de récurrence. Et que la formulation de la 3e étape ne met pas clairement en évidence l'implication, or c'est celle-ci dont on cherche à prouver la véracité ; de plus, elle soutient qu'on doit faire la différence « pour un k quelconque » avec « quel que soit k ».

A l'université, l'auteure a étudié deux collections et constate que les deux présentations ci-après sont à l'opposé l'une de l'autre.

- *Collection Vauthier 2006 réforme LMD L1 et L2. Dans le volume de cours, 61.3.4, p. 20.*
  1.3.4 Raisonnement par récurrence
  Une propriété qui dépend de l'entier n peut être démontrée à l'aide du raisonnement par récurrence. Par exemple, pour prouver que :

$$P(n): 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

On peut utiliser ce type de preuve de la manière suivante :

on **prouve** que $P(0)$ est vraie ;

on **suppose** que $P(n)$ est vraie ;

on **prouve** qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété est vraie pour tous les entiers.

Selon l'auteure, cette présentation n'est pas correcte car on note l'absence du quantificateur, de l'implication, le rang initial est 0, l'hérédité a disparu, la définition est donnée sur un exemple.

L'auteure relève aussi que dans le volume *exercices* de cette même collection, les mêmes erreurs sont reproduites.

- *Collection Ramis Warusfel, 2007, Dunod, p. 67-68*

  L'auteure remarque que la récurrence est abordée dans le cadre d'un paragraphe sur la relation d'ordre sur ℕ, après les axiomes de caractérisation de ℕ, dans un « théorème de récurrence » donné comme conséquence de ces axiomes. Voici un extrait.

  Théorème 1 (Théorème de récurrence). Soit n_0 un entier. Pour tout entier $n \geq n_0$, notons $P(n)$ une certaine propriété de l'entier n. On fait les hypothèses suivantes :

  (R1) La propriété $P(n_0)$ est vraie.

  (R2) Si la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$, la propriété $P(n+1)$ l'est aussi.

  Sous ces hypothèses, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

D'après l'auteure, Ce théorème est démontré par l'absurde. L'écriture est correcte pour le n_0, l'implication **si…alors** est visible (même s'il n'y a pas le **alors**). Cependant, le quantificateur de l'hérédité est encore une fois évité, remplacé par un certain n.

En fait, l'hérédité qui s'écrit « Quel que soit $n, n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » n'est presque jamais explicitée sous cette forme dans les manuels consultés par l'auteure.

Les résultats de l'enquête menée par l'auteure sont les suivants :

- La récurrence est un principe, pas un concept ;
- La récurrence ne construit pas d'objets mathématiques ;
- La récurrence comme une tautologie ;
- L'initialisation comme étape première obligatoire ;

- Le rang initial est la valeur de n à partir de laquelle l'hérédité est vraie ;

À la fin du travail, l'auteure propose les problèmes susceptibles d'améliorer les conceptions sur la récurrence. Le premier problème est :

- Étudier par récurrence la propriété $Q(n) : 2^n \geq (n+1)^2$.
  Ici, l'auteure démontre que l'initialisation n'est pas toujours l'étape première lorsqu'on veut utiliser la récurrence.

Le deuxième problème est :

- Pour tout x positif et tout n entier naturel, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
  Ici, l'auteure nous renseigne qu'on n'utilise pas seulement la récurrence dans les entiers naturels.

En conclusion, notre intérêt pour ce travail vient du fait qu'il va nous aider dans l'étude épistémologique de la notion de récurrence et nous fournit les obstacles liés à l'utilisation de la récurrence et la suggestion des problèmes pouvant améliorer les conceptions des élèves sur la récurrence. Nous avons retenu deux items sur la récurrence pour la construction de notre questionnaire. L'un concerne l'initialisation et l'autre porte sur les variables. Enfin cet article nous a donné la bonne formulation du principe de récurrence.

3.2. État des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence (Gardes et al., 2016)

L'article que nous présentons a pour titre « **État des connaissances des élèves de Terminale S sur le raisonnement par récurrence** ». Il a été publié en 2016 dans le volume 100 de la revue Petit x, et il va de la page 67 à 98. Les auteurs sont Denis Gardes, Marie-Line Gardes et Denise Grenier.

La problématique est centrée sur l'état des connaissances sur le principe et le raisonnement par récurrence des élèves de Terminale S. Les auteurs soutiennent que dans l'enseignement, le concept de récurrence est peu utilisé, souvent mal compris, en partie parce qu'il nécessite une certaine maîtrise de connaissances de logique mathématique. D'après les auteurs, plusieurs travaux didactiques ont montré l'importance d'une prise en charge effective dans l'enseignement des notions de logique. Selon eux, certains de ces travaux se sont centrés sur la notion d'implication ou la quantification.

Pour cela, ils choisissent comme population pour leur expérimentation, des élèves de Terminale S. A partir d'une étude épistémologique et didactique du principe de récurrence, les auteurs ont déterminé cinq critères à savoir :

Critère 1. Structure du raisonnement : ici les auteurs émettent l'hypothèse que le schéma le plus répandu sera binaire (initialisation, hérédité) ou ternaire (initialisation, hérédité et conclusion).

Critère 2. Explicitation et notation de la propriété dépendant de l'entier naturel n : dans ce critère, les auteurs relèvent l'importance de mettre en évidence la nature de la variable et d'expliciter la propriété que l'on veut étudier.

Critère 3. Initialisation : les auteurs soutiennent qu'une étude didactique (Grenier, 2012) a mis en évidence des difficultés potentielles pour trouver d'où vient cette valeur n_0 et comprendre que cette valeur n'est pas nécessairement 0 ou 1.

Critère 4. Hérédité : implication et quantification : les auteurs montrent l'importance de l'implication et de la quantification dans le principe de récurrence.

Critère 5. Structure de la conclusion : cette étape pour les auteurs est aussi capitale dans le principe de récurrence car elle crée le lien entre l'initialisation et l'hérédité en mentionnant le principe de récurrence.

À partir de ces cinq critères, les auteurs ont construit une grille d'analyse, d'une part pour étudier les quatre manuels choisis et les dix-sept corrigés d'un même exercice de bac, et d'autre part pour effectuer des comparaisons : entre les manuels, entre les corrigés, puis entre les manuels et les corrigés.

Les auteurs ont choisi d'analyser, dans les pages de cours, la présence ou l'absence d'éléments essentiels du principe de récurrence tel qu'il est présenté aux élèves, pour identifier ce qui peut être source de difficultés. Les quatre manuels étudiés sont : Maths Repères TS (2012), Math'x TS (2011), Indice TS (2012) et Symbole TS (2012). Dans ces quatre manuels, le raisonnement par récurrence se situe dans le premier chapitre. Dans trois d'entre eux, ce chapitre concerne les suites et dans le manuel Math'x, il s'intitule *Raisonner par récurrence*. Ils ont étudié, pour chaque manuel, la page *Cours* puis la page présentant des exercices résolus (intitulée, selon les manuels, *application, exercices résolus, savoir-faire, capacités attendues*).

Voici une analyse comparative des auteurs reprenant ces critères :

- Pour ce qui est du critère 1, ils ont constaté une différence de formulation dans ces quatre manuels. D'aucun utilise la formulation binaire et d'autres ternaire.
- Dans le critère 2, ils relèvent que trois manuels ont bien explicité la propriété qui dépend de n notée $P(n)$. Le manuel Symbole TS l'écrit P_n, notation qui fait référence aux suites. Les auteurs notent aussi que la nature de la variable n'est pas toujours mentionnée, comme en témoigne l'extrait suivant : *La propriété dépendant de n est : $u_n = 3^n + 1$* (Math'x TS, 2012, p.26).
- Les auteurs affirment que dans le critère 3, les quatre manuels mentionnent, pour l'initialisation, l'existence d'un entier naturel n_0 pour lequel la propriété $P(n)$ est vraie. Par contre, deux manuels (Maths Repères TS et Indice TS) ne précisent pas comment on détermine n_0 et deux autres (Math'x TS et Symbole TS) indiquent que n_0 *est un entier naturel donné*.
- Dans le critère 4, les auteurs disent que la quantification est toujours présente mais formulée de diverses manières par exemple :
  *On suppose qu'**il existe** un entier p tel que $P(p)$ soit vraie, […].* (Indice TS, 2012, p.12)
  *On suppose que la propriété P_n est vraie pour **un** rang $n \geq n_0$ **quelconque fixé** […].* (Symbole TS, 2012, p.12).
  Pour les auteurs, ces différentes formulations mettent en évidence la difficulté de prendre en charge la notion de quantificateur et son utilisation. Il en est de même en ce qui est de l'utilisation de l'implication.
- Enfin, pour le critère 5, les auteurs affirment qu'aucun des quatre manuels étudiés, n'écrit la conclusion en faisant référence à la fois au principe de récurrence, aux étapes de l'initialisation et de l'hérédité et au lien entre ces deux étapes, c'est-à-dire aux raisons qui permettent de conclure. Par exemple nous avons :
  Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire que $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$. (Indice TS, 2012, p.12)
  La propriété est vraie pour $n = 4$ et est héréditaire à partir du rang 4 donc, pour tout entier naturel $n \geq 4, 2^n \geq 4n$. (Math'x TS, 2011, p.27)

Par la suite, les auteurs ont choisi d'étudier les corrigés d'un exercice de bac afin d'analyser la manière dont les enseignants rédigent un raisonnement par récurrence pour leurs élèves. L'exercice est le suivant, tiré du sujet de mathématiques du BACC S du Liban, 28 mai 2013 :

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

3. a. **Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.**

Les auteurs ont recueilli sur internet dix-sept corrigés de cet exercice.

En ce qui concerne les dix-sept corrigés d'un exercice de BACC, les auteurs ont noté une grande variabilité dans la rédaction du raisonnement par récurrence. Si la structure reste toujours binaire ou ternaire avec les étapes de l'initialisation et de l'hérédité communes, ils ont observé de nombreuses formulations différentes, notamment dans l'explicitation de la propriété à étudier en témoigne cet exemple : La notation utilisée pour nommer la propriété est souvent P_n (7 sur 17), deux corrigés utilisent $P(n)$ (corrigés 8 et 9). Dans la formalisation de l'hérédité, nous avons retenu comme exemples proposés par les auteurs :

À propos de la quantification

Supposons que pour ***un certain*** *entier n, on ait* $0 < v_n < 3$. (extrait du corrigé 2)

Supposons que pour ***n fixé****,* $0 < v_n < 3$. (extrait du corrigé 7)

*Supposons qu'****il existe*** $n \geq 0$ *tel que* $0 < v_n < 3$. (extrait du corrigé 13)

Ces différentes formulations mettent en évidence la difficulté, dans ce raisonnement, de nommer un élément générique dans une quantification universelle.

À propos de l'implication

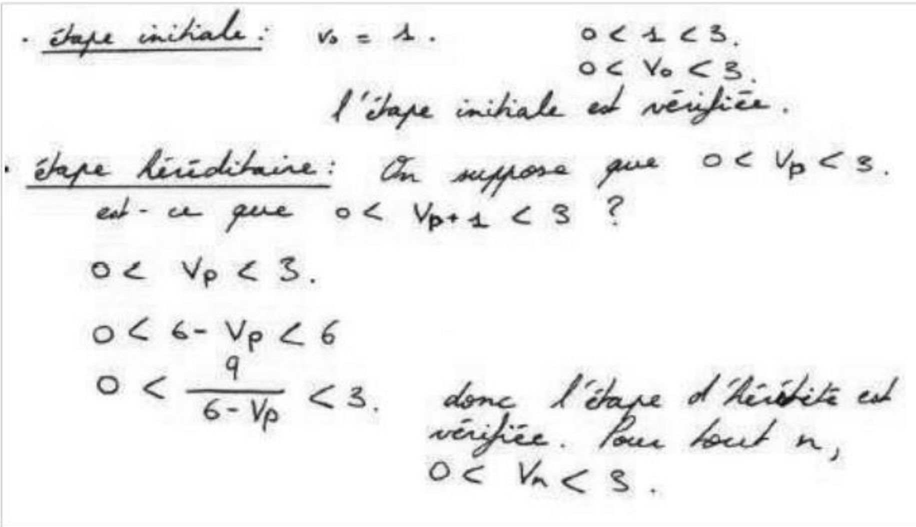
Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, ***si*** $0 < v_n < 3$ ***alors*** $0 < v_{n+1} < 3$. (extrait du corrigé 3)

Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie. (extrait du corrigé 1)

Pour les auteurs, cette formulation cache le fait que l'étape d'hérédité est la démonstration d'une implication et la réduit à l'étude de la véracité de $P(n+1)$.

En fin, dans la structure de la conclusion, on a comme exemple le premier élément relevé par les auteurs : sept corrigés (7, 8, 10, 11, 12, 14, 15) donnent comme conclusion « *pour tout entier naturel n :* $0 < v_n < 3$ » sans évoquer le principe de récurrence ou une étape précédente du raisonnement. Le second élément est que, comme pour les manuels scolaires étudiés, aucun corrigé ne propose une conclusion mentionnant le principe de récurrence, les deux étapes (initialisation et hérédité) et le lien entre les deux étapes.

Pour finir cet article, les auteurs ont fait une analyse du raisonnement par récurrence à partir d'un questionnaire en s'appuyant sur la production des élèves. Ce questionnaire proposé aux élèves de Terminale S comporte quatre parties. Les auteurs ont pour chaque partie, précisé leur objectif en énonçant les hypothèses sous-jacentes concernant les difficultés des élèves à propos du raisonnement par récurrence. Ils ont relevé de nombreuses et profondes incompréhensions des élèves du concept de récurrence et du principe de démonstration associé. Comme en témoigne cet extrait :


· étape initiale : $v_0 = 1$. $0 < 1 < 3$.
$0 < V_0 < 3$.
l'étape initiale est vérifiée.
· étape héréditaire : On suppose que $0 < V_p < 3$.
est-ce que $0 < V_{p+1} < 3$?
$0 < V_p < 3$.
$0 < 6 - V_p < 6$
$0 < \frac{9}{6 - V_p} < 3$. donc l'étape d'hérédité est vérifiée. Pour tout n,
$0 < V_n < 3$.

Les auteurs affirment que les erreurs répétées dans son utilisation attestent de la nécessité d'étudier le principe de récurrence pour lui-même avec toute sa complexité, en particulier les notions de logique telles que proposition, quantification, implication

Nous avons utilisé les cinq critères définis dans cet article pour faire une analyse des pages de la leçon du manuel au programme au Cameroun, des exemples rédigés par des enseignants, notre leçon, ainsi que des productions des élèves que nous avons évalué.

3.3. Enseignement-apprentissage de la démonstration par récurrence en série D au Burkina Faso (Douamba et al., 2022)

L'article dont nous nous proposons de faire la revue est intitulé : « Enseignement-apprentissage de la démonstration par récurrence en série D au Burkina Faso ». Il a été publié dans la revue LAKISA n°3 en 2022, il va de la page 41 à 54. Les auteurs sont Kirsi Jean-Pierre Douamba et Sylvain Kiendrebeogo.

Dans cet article, les auteurs présentent des éléments d'une recherche qui se propose d'étudier l'enseignement-apprentissage de la démonstration par récurrence en série D au Burkina Faso.

Les auteurs soutiennent que les élèves ont de mauvaises performances sur la démonstration par récurrence. En témoigne l'exemple suivant : à la session de 2019 de l'examen du Baccalauréat, les auteurs ont examiné la production en Mathématiques de 249 candidats de la série D d'un jury. Le problème de Mathématiques comportait des questions sur la démonstration par récurrence. Ils ont dénombré 172 élèves qui n'ont pas abordé ces questions, 59 y ont donné des réponses erronées, et 18 ont trouvé les bonnes réponses. Ce qui leurs a conduit à intéresser à l'apprentissage de la démonstration par récurrence en contexte burkinabè. Pour mener cette recherche, ils ont investigué sur des pratiques enseignantes des Mathématiques et l'apprentissage de la démonstration par récurrence à travers des travaux de recherche en didactique des mathématiques.

En s'appuyant sur les travaux de certains auteurs tels que DeBlois et al. (2005), Roditi et al. (2007) sur les pratiques enseignantes, ils sont arrivés à la conclusion que l'apprentissage des élèves en Mathématiques est fonction de la pratique de chaque enseignant, laquelle pratique inclut les choix pédagogiques, les évaluations (formative et sommative), les interactions avec les élèves, les sanctions et le climat de travail.

En se basant sur la définition de la démonstration en mathématiques, ils ont établi que la récurrence est un procédé de démonstration qui consiste à étendre à tous les termes d'une série, ce qui est valable pour les premiers termes. Ils ont par la suite donné le principe sur lequel elle se base qui est : l'initialisation, l'hérédité et la conclusion et ont précisé une formulation de la récurrence en ce sens : soit n_0 un entier naturel et $P(n)$ une propriété définie pour tout entier $n \geq n_0$. Pour démontrer par récurrence la véracité de $P(n)$, on procède comme suit :

$$\left.\begin{array}{c} P(n_0)\ est\ vraie \\ \forall k \geq n_0\ P(k)\ est\ vraie\ \Rightarrow P(k+1)\ est\ vraie \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$P(n)\ est\ vraie\ pour\ tout\ entier\ n, avec\ n \geq n_0.$$

Nous constatons que cette formulation est différente de celle donnée par Grenier.

Pour cette recherche, ils ont adopté la méthode mixte qui combine la méthode quantitative et celle qualitative. Cette méthode a permis d'une part de déterminer l'ampleur des difficultés des élèves dans la démonstration par récurrence et, d'autre part, de décrire les causes de ces difficultés.

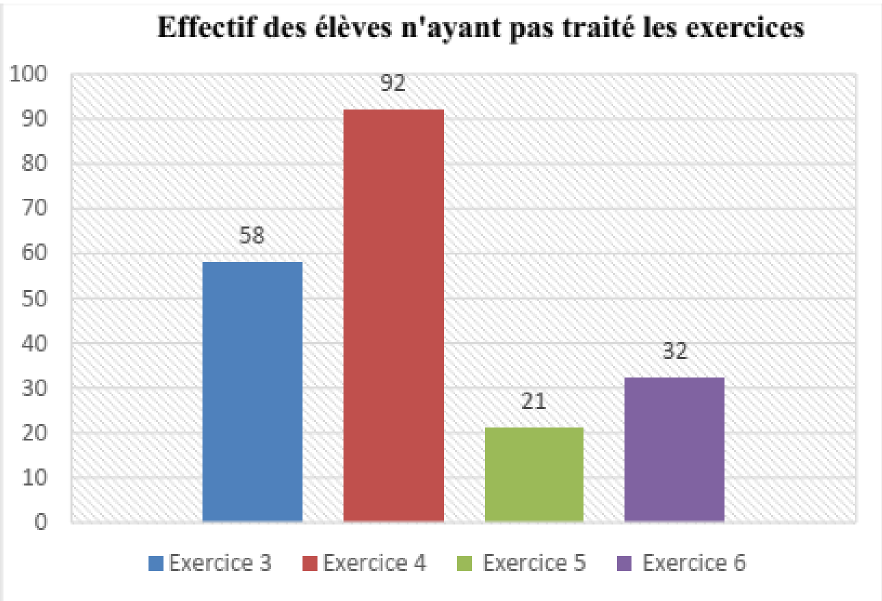
Pour recueillir les données indispensables à leurs investigations, ils ont opté pour :

- un test sur table pour des élèves de classes de Première D et de Terminale D ;
- un questionnaire adressé aux enseignants tenant ou ayant tenu des classes de Première D ou de Terminale D ;
- un questionnaire adressé aux élèves des classes de Première D et de Terminale D ;
- un guide d'entretien semi-dirigé ;
- un guide d'analyse de documents pédagogiques.

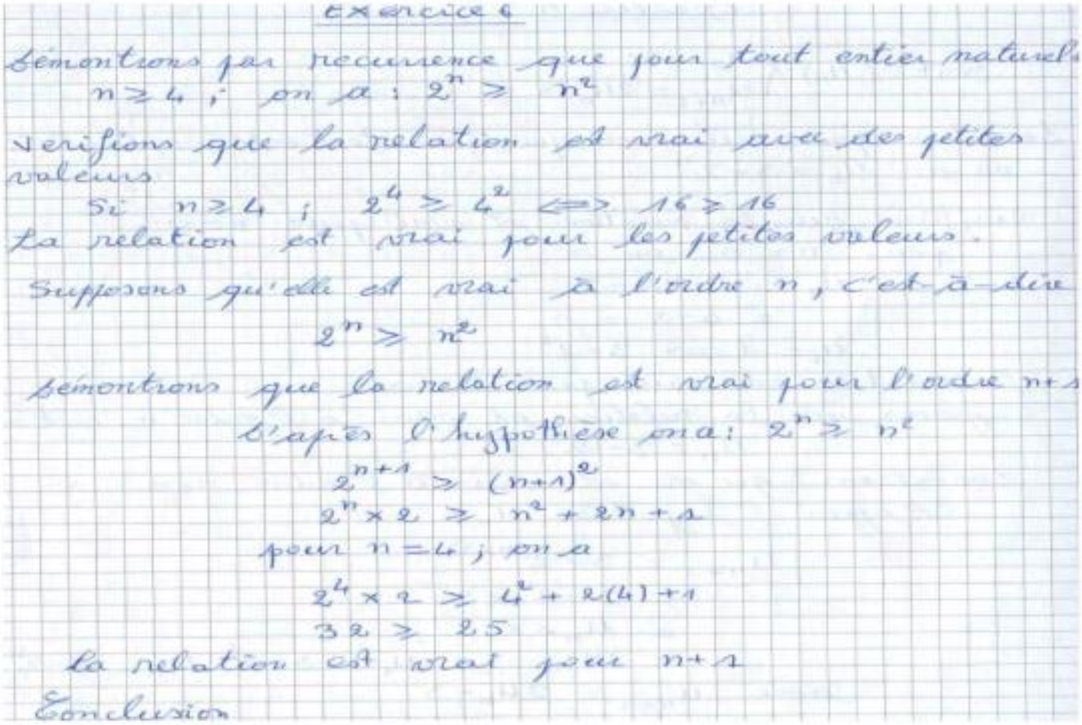
Les auteurs soutiennent que l'analyse statistique des résultats du test sur table montre que les difficultés se situent essentiellement au niveau de la nécessité d'utiliser la récurrence lorsque la consigne ne l'exprime pas explicitement et de l'étape de l'hérédité. L'analyse qualitative des résultats du test a permis de dresser une typologie de ces difficultés. Nous pouvons en citer :

- Mobilisation de la propriété de la démonstration par récurrence lorsque la consigne "démontrer par récurrence" ne figure pas dans un énoncé. Les auteurs justifient cette difficulté avec le graphique 2 ci-dessous qui illustre que quand la consigne n'est pas intégrée dans l'énoncé d'un exercice, les élèves sont plus bloqués.

  Graphique 2 : Effectif des élèves n'ayant pas traité les exercices 3, 4, 5 et 6 sur un effectif total de 207



- Difficulté à démontrer l’hérédité (difficulté à retrouver la propriété appropriée)



Exercice 4

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 4$; on a : $2^n \geq n^2$

Vérifions que la relation est vrai avec des petites valeurs

Si $n \geq 4$; $2^4 \geq 4^2 \iff 16 \geq 16$

La relation est vrai pour les petites valeurs.

Supposons qu'elle est vrai à l'ordre n, c'est-à-dire

$2^n \geq n^2$

Démontrons que la relation est vrai pour l'ordre n+1

D'après l'hypothèse on a : $2^n \geq n^2$

$2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$2^n \times 2 \geq n^2 + 2n + 1$

pour $n = 4$; on a

$2^4 \times 2 \geq 4^2 + 2(4) + 1$

$32 \geq 25$

La relation est vrai pour n+1

Conclusion

Après avoir décelé les difficultés d’apprentissage de la démonstration par récurrence par les élèves, les auteurs ont identifié les causes probables des difficultés d’apprentissage de la démonstration par récurrence. L’une de ces causes est que les auteurs ont constaté dans leur recherche qu’aucun enseignant n’a introduit la démonstration par récurrence en classe de Première par une activité introductrice ; tous les enseignants institutionnalisent le savoir de façon prématurée. Et l’autre cause est que les enseignants ne donnent pas suffisamment d’exercices variés aux élèves ; la plupart des exercices de maison ne sont pas corrigés en classe.

Pour terminer leurs travaux, les auteurs jugèrent quelques stratégies pour améliorer l’apprentissage de la démonstration par récurrence. L’une des premières stratégies des auteurs est qu’ils insistent sur l’introduction d’activités dans l’apprentissage de la démonstration par récurrence en classe de Première D. les auteurs soutiennent que ces activités servent à donner du sens aux concepts mathématiques, à entraîner les élèves à l’activité scientifique et à promouvoir l’acquisition de méthodes. Pour la deuxième stratégie, les auteurs proposent aux enseignants de proposer en classe des exercices n’ayant pas la consigne "Démontrer par récurrence" et dont la résolution nécessite l’utilisation de la récurrence.

En conclusion, notre intérêt pour ce travail vient du fait qu’il va nous fournir les difficultés des élèves dans l’apprentissage de la démonstration par récurrence. Plus explicitement, Les auteurs sont arrivés à la conclusion selon laquelle les difficultés des élèves dans l'apprentissage de la démonstration par récurrence sont :

- des élèves n'ont pas la compétence de déceler la nécessité de la récurrence pour démontrer une propriété lorsque la consigne n'est pas explicitement exprimée dans l'énoncé d'un exercice. ;
- ils n'ont pas la compétence de mettre en œuvre la démonstration par récurrence dans ses différentes étapes (initialisation, formulation de l'hypothèse, démonstration de l'hérédité, conclusion) ;
- ils font une vérification sur deux, trois, voire quatre premiers termes et tirent une conclusion sur la démonstration.

3.4. Le raisonnement par récurrence : Quel fondement ? (Egré, 2015)

Les résultats que nous présentons sont issus de l'article intitulé : « **Le raisonnement par récurrence : quel fondement ?** » ». Il a été publié dans la revue la Gazette des Mathématiciens, au numéro 146 en 2015, il va de la page 27 à 37. L'auteur est Paul Egré.

L'auteur s'intéresse au fondement du raisonnement par récurrence, ou principe d'induction mathématique. Pour cela, il examine trois réponses qui tentent d'expliquer le fondement du principe.

L'auteur commence cette réflexion en précisant la formulation qui est celle de l'axiome dit de récurrence faible, qui énonce que « si *une propriété arithmétique vaut de zéro, et si elle vaut du successeur d'un entier quelconque dès lors qu'elle vaut de cet entier, alors cette propriété vaut de tout entier* ». Dans le langage de la logique des prédicats, cet axiome s'exprime à l'aide du schéma suivant :

$$[P(0) \wedge \forall n\,(P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n\, P(n)$$

L'auteur propose de considérer trois réponses de nature philosophique au problème du fondement de l'induction mathématique, qu'il appellera « formaliste », « intuitionniste », et enfin « logiciste ».

L'auteur affirme que du point de vue du formaliste de Hilbert, le principe de récurrence est considéré comme un axiome parmi les axiomes de Peano à savoir le cinquième axiome dit d'induction :

« *Pour toute propriété, si* 0 *a cette propriété, et si le successeur de tout nombre ayant cette propriété a cette propriété, alors tout nombre a cette propriété.* » C'est-à-dire si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

L'auteur soutient que du point de vue de l'intuitionnisme de Poincaré, le principe de récurrence est un principe qui n'est ni dénombrable à partir des principes logiques plus élémentaires, ni fondé sur l'expérience. Il conclut que le raisonnement par récurrence « *n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible.* »

Poincaré renchéri en qualifiant le principe par récurrence « *de véritable type de jugement synthétique à priori.* » L'auteur rappelle ici que pour Kant, un énonce est synthétique si sa vérité ne dépend pas du seul principe de non contradiction et qu'un énonce est à priori s'il ne dépend pas de l'expérience, mais qu'il structure l'expérience.

Pour ce qui est du caractère synthétique, Poincaré dit que le raisonnement par récurrence s'obtient sur la base de deux principes logiques, à savoir le modus ponens (MP) (que Poincaré appelle le syllogisme hypothétique) et la règle d'instanciation universelle (IU),

[(MP)] De A et de $A \implies B$, on infère logiquement B.

[(IU)] De $\forall x\, P(x)$, on infère logiquement $P(k)$ pour tout élément k du domaine de quantification

L'auteur déclare que du point de vue du Logicisme de Frege, le principe de récurrence dérive directement de la définition des nombres naturels donnée par lui. A la différence de l'approche formaliste, le principe d'induction ici n'est pas seulement une propriété axiomatique des nombres parmi tant d'autres, mais une part essentielle de leur définition explicite.

Frege propose ici de dériver les postulats de Peano d'une définition explicite de la notion de nombre, énoncée dans un langage logique. Ainsi, il définit un nombre entier de manière formelle comme suit : on dira que x est un entier naturel que l'on notera $N(x)$ si et seulement si x est soit identique à zéro, soit est atteignable à partir de zéro moyennant l'ancestral de la relation de successeur immédiat. Ici la relation ancestrale s'entend comme suit : b est l'ancestrale de a si soit b est parent de a (base de la recurrence), soit b est le parent d'un ancêtre de a (hypothèse de récurrence).

A partie de la définition de nombre de Frege, l'axiome d'induction prend la forme suivante en logique du second ordre :

$\forall P \left(P(0) \wedge \forall x \, \forall y \left(N(x) \wedge P(x) \Rightarrow \left(S(x,y) \Rightarrow p(y) \right) \right) \Rightarrow \forall x \left(N(x) \Rightarrow P(x) \right) \right)$, où

$S(x,y)$ signifie que y est le successeur immédiat de x et $N(x)$ le nombre de x. La preuve de cet axiome est donnée par le théorème de Frege qui s'énoncée comme suit :

« *L'axiome d'induction est prouvable en logique du second ordre assortie du principe de Hume à partir des définitions du zéro, du successeur immédiat et de la notion de nombre fondé sur la relation ancestrale.* »

Cet article nous a permis de faire une enquête épistémologique de la démonstration par récurrence. Elle va nous permettre de dégager les fondements de cette démonstration et nous permettra aussi de mieux préparer notre situation.

Chapitre 4 : Analyse des manuels et des pratiques enseignantes

Introduction

Selon Altet, Analyser, revient à reconnaitre et déterminer des éléments séparés et identifier la relation entre eux en y trouvant une signification. C'est-à-dire une démarche intellectuelle qui permet de : repérer, identifier des éléments isolables, c'est mettre en ordre et en relation ces éléments, leur donner du sens.

Dans cette partie, nous allons analyser un manuel en vigueur au Cameroun pour dégager les difficultés qui en découlent.

Après avoir étudié le savoir à enseigner, nous avons abordé le savoir enseigné. Pour cela, nous avons fait une enquête portant sur les traces écrites de certains enseignants provenant de plusieurs régions du Cameroun et nous avons dégagé les difficultés qui en découlent.

Enfin, nous nous concentrons sur le savoir appris. Pour réaliser cela, nous avons enquêté auprès des élèves inscrits en classes de terminales scientifiques et dégager les difficultés qui en découlent.

Pour mener à bien notre analyse, nous nous sommes appuyés sur les éléments de la transposition didactique développés dans le chapitre 2, sur les critères définis dans l'article de Gardes et al., (2016). Ces critères sont :

C**ritère 1** intitulé **Structuration du raisonnement**. Dans ce critère, nous identifions les trois étapes de ce principe qui correspondent à ce qu'on appelle l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

Pour ce qui est du **critère 2** dénommé **explicitation** et **notation de la propriété dépendant de l'entier naturel**, la propriété dépendante de n que l'on veut étudier est notée $P(n)$.

Ensuite nous avons le **critère 3** qui est **Initialisation**. Nous montrons l'importante de cette étape dans le principe de récurrence. En mettant en évidence les difficultés potentielles assorties d'une étude didactique de Grenier (2012) portant sur le concept de récurrence pour trouver la valeur de n_0 et comprendre que cette valeur n'est pas nécessairement 0 ou 1.

Par la suite, nous avons le **critère 4** que l'on nomme **Hérédité : implication et quantification.** Nous montrons l'importance de l'implication et la quantification dans l'étape de l'hérédité.

Enfin, on a le **critère 5** qui est **Structure de la conclusion.** Pour arriver à cette conclusion dans le principe de récurrence, il faut passer par les étapes de l'initialisation et de l'hérédité, et faire mention du principe de récurrence pour conclure.

4.1. Analyse du principe de récurrence dans le manuel de Terminale scientifique au Cameroun et des difficultés qui en découlent

Nous avons choisi d'analyser, dans les pages de la leçon, la présence ou l'absence d'éléments essentiels du principe de récurrence tel qu'il est présenté aux élèves. Cette analyse va nous permettre d'identifier le type d'enseignement qui est proposé concernant le concept du raisonnement par récurrence, d'identifier les difficultés qui en découlent. Pour y parvenir, nous commençons par faire une présentation de ce manuel.

Le manuel en question est édité par GEPED Mondoux Editions, 2021 et est intitulé : Emergeons en Mathématiques : Tles C, E et F.

Il est constitué de 18 chapitres. On note 04 chapitres de Géométrie, 07 chapitres d'Analyse, 04 chapitres d'Algèbre, un chapitre de Probabilité, un chapitre intitulé Statistique et un chapitre de Théories de graphes. Les chapitres sont organisés en leçons et chaque leçon subdivisée en unités didactiques qui en constituent les articulations principales.

L'ossature d'une unité didactique se présente comme suit :

- « Prérequis » : Une activité est proposée. Dans cette activité on a une expression qui dépend de l'entier naturel n où il faut calculer les valeurs de cette expression pour les valeurs données de n. Parmi les valeurs affectent à n, on a l'expression $n + 3$ et l'expression $2n - 1$.
- « Situation-problème » : Elle donne un problème qui doit être résolu par l'application du principe de récurrence. Ici les élèves ne peuvent pas encore résoudre ce problème.
- « Activité d'apprentissage » : Elle consiste à montrer la relation contenue dans la situation problème. Elle est décontextualisée.
- « Résumé » : Il consiste à l'énoncé du principe de récurrence et à la suite du résumé, on a un exemple de démonstration d'une propriété par récurrence.

- « Exercices d'application » : Nous avons trois exercices d'applications du principe de récurrence.

Nous avons porté notre choix sur la leçon 1 du chapitre sur les suites numériques.

L'intitulée de cette leçon est raisonnement par récurrence. Pour ce qui est de la leçon, il va de la page 71 à la page 72.

Les critères d'analyse que nous retenons sont :

Critère 1 (Structure du raisonnement)

L'énoncé du raisonnement par récurrence se présente sous une forme binaire (initialisation et hérédité) sans aucune conclusion, à savoir **: Pour montrer qu'une proposition dépendant d'un entier naturel $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}$ est vraie avec $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$, il suffit de vérifier que :**

- **Cette proposition est vraie pour l'entier $\boldsymbol{n_0}$;**
- **Supposer que pour un entier naturel $\boldsymbol{n}$ fixé, avec $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}$, elle est vraie (hypothèse de récurrence) et démontrer qu'elle est aussi vraie pour $\boldsymbol{n+1}$. (C'est l'étape d'hérédité).**

L'activité d'apprentissage consiste à faire effectuer par les élèves une démonstration par récurrence. La propriété $P(n)$ est donnée.

1) Initialisation consiste à donner une valeur a n et à montrer que $P(n)$ est vraie pour cette valeur de n,
2) Il est demandé aux élèves de montrer que $P(n+1)$ est vraie à partir de l'hypothèse $P(n)$ vraie,
3) Il s'agit pour les élèves d'expliquer la généralisation du résultat,
4) Le nom de la technique de démonstration est donné.

À la suite, il y a un résumé qui recapitule les étapes : c'est une institutionnalisation.

Dans cette activité d'apprentissage, on demande à l'élève d'expliquer la généralisation du résultat alors que dans le résumé on ne voit pas la généralisation du résumé.

En prenant pour référence l'énoncé du raisonnement par récurrence formulé par Grenier (2012), à savoir : « **S'il existe $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{P(n_0)}$ est vraie et pour tout $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}$, $(\boldsymbol{P(n)} \Longrightarrow \boldsymbol{P(n+1)})$ est vraie, alors pour tout $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}$, $\boldsymbol{P(n)}$ est vraie** ».

Nous constatons une énorme différence au niveau de l'énoncé du principe de récurrence.

Cette différence au niveau de l'énonce du raisonnement par récurrence et qui se voit dans sa transposition didactique, peut constituer une source de difficultés pour les apprenants, car la formulation qui se trouve dans le manuel est erroné.

Critère 2 (Explicitation et notation de la propriété dépendant de l'entier naturel *n*)

Ce manuel désigne par $P(n)$ la propriété à démontrer. Cette désignation est correcte car elle montre que cette propriété dépend de l'entier naturel n. Cependant, l'univers du discours et la nature de la variable n ne sont pas explicitement mentionnés, comme en témoigne l'extrait suivant :

Désignons par $P(n)$ la proposition « $2^n \geq 100n$» (exemple page 72).

En effet, d'une part dire que $P(n)$ *la proposition « $2^n \geq 100n$»* n'est pas correcte car ici il s'agit d'une phrase ouverte et non une proposition vue que la variable est libre. Cette façon de designer peut engendrer des difficultés dans la compréhension d'une proposition en mathématique par les apprenants, dans la mesure où on ne peut pas se prononcer sans ambiguïté sur la véracité ou la fausseté d'une phrase ouverte, pourtant c'est le cas pour une proposition. D'autre part, l'univers du discours et la nature de la variable n'étant pas designer explicitement dans la proposition, peut engendre une règle implicite au niveau des élèves selon laquelle la variable peut être prise dans $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$, or l'univers du discours dans le principe du raisonnement par récurrence est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Critère 3 (Initialisation)

Dans ce manuel, les pages de la leçon mentionnent, pour l'initialisation, l'existence d'un entier naturel n_0 pour lequel la propriété $P(n)$ est vraie, mais ne précise pas comment on détermine n_0. En étudiant l'exemple (p.72) ci-après :

« *1^ere^ étape : on vérifie que $P(n)$ est vraie pour $n = 10$.*

On a : $2^{10} = 1024$ et $1024 \geq 100 \times 10$ donc $2^{10} \geq 100 \times 10$ ainsi $P(n)$ est vraie. »

Nous remarquons que la valeur de n_0 est donnée et qu'elle vaut 10. Mais sans justification (d'autant plus qu'elle est vraie en $n = 0$). Il semble, à la lecture de ce manuel, que la recherche de l'entier n_0 ne soit pas considérée comme une question en soi et pourtant c'est une source de difficulté pour les élèves.

Critère 4 (Hérédité : implication et quantification)

Dans un exemple proposé par ce manuel, l'implication à démontrer dans l'étape de l'hérédité est inexistante. Comme en témoigne l'extrait suivant :

Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $2^n \geq 100n$ et montrons que $P(n+1)$ est aussi vraie, c'est-à-dire $2^{n+1} \geq 100(n+1)$.

Cette formulation cache le fait que l'étape de l'hérédité est la démonstration d'une implication mais ici, elle est réduite à l'étude de la véracité de $P(n+1)$. Ceci est notamment renforcé par la rédaction de la conclusion de la phase d'hérédité qui se termine par : « $2^{n+1} \geq 100(n+1)$ ».

Cette formulation peut amener les élèves à faire confusion entre « P est héréditaire » et « P est vraie ».

Critère 5 (Structure de la conclusion)

Ce manuel ne fait référence, dans sa conclusion, ni au principe de récurrence, ni aux étapes d'initialisation et d'hérédité, ni au lien entre les deux. Nous avons tout simplement l'écriture suivante, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 10$. En témoigne cet extrait :

Pour tout entier $n \geq 10, 2^n \geq 100n$. De plus cet exemple admet une conclusion qui ne figure pas dans le résumé.

Certains phénomènes absents dans le manuel qui peuvent s'ériger en difficultés dans la pratique :

- ✓ La transposition didactique de la démonstration par récurrence peut être source de certaines difficultés que rencontre les apprenants ;
- ✓ L'univers du discours et la nature de la variable n'étant pas designer explicitement dans la proposition, peut engendre une règle implicite au niveau des élèves selon laquelle la variable peut être prise dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$, or l'univers du discours dans le principe du raisonnement par récurrence est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

4.2. Analyse des pratiques enseignantes et les difficultés qui en découlent

Il est question dans cette partie de présenter les leçons rédigés et enseignés dans les salles de classes par certains enseignants des classes de terminales scientifiques (voir annexe 1) et de faire une analyse qualitative avec les cinq critères donnés par Denis Gardes et al, (2016) dans leur article sur l'état des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence.

Nous notons enseignant 1 pour la leçon du premier enseignant, enseignant 2 pour la leçon du second enseignant et par la suite nous faisons une étude comparative de ces deux leçons avec le savoir de référence et le savoir à enseigner. Ces leçons sont présentées en annexe 1.

4.2.1. Analyse des pratiques de classe de l'enseignant 1

L'enseignant 1 commence sa leçon avec la définition de la valeur de vérité d'une assertion mathématique exprimée à l'aide d'un entier naturel, en proposant une activité d'apprentissage dans laquelle on retrouve deux assertions dépend de l'entier naturel n. L'objectif ici est de donner les valeurs de vérité pour chaque assertion pour des valeurs de n données. Il poursuit son cours en définissant ce qu'on entend par successeur et prédécesseur. Il termine son premier paragraphe en disant pourquoi on dit qu'une propriété est héréditaire.

On niveau de l'énoncé du raisonnement par récurrence, il le formule ainsi :

Pour démontrer qu'une proposition $\mathrm{P(n)}$ est vraie pour tout entier naturel $\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0$, on procède comme suit.

- ✓ On démontre que pour $\mathrm{n} = \mathrm{n}_0$, $\mathrm{P(n)}$ est vraie.
- ✓ On démontre que pour tout entier naturel $\mathrm{k} \geq \mathrm{n}_0$, si $\mathrm{P(k)}$ est vraie (hypothèse de récurrence), alors $\mathrm{P(k+1)}$ est aussi vraie.

Ces deux étapes correspondent à ce qu'on appelle l'étape d'initialisation et l'étape d'hérédité. Ce critère permet donc d'identifier la structure de formalisation, en particulier la présence de deux étapes, dans les conceptions des élèves. Ici nous notons l'absence de la conclusion. La structuration de l'enseignant 1 est différente du savoir de référence qui est celui donné par Grenier (2012). Par contre c'est la même structuration que dans le savoir à enseigner présent dans le manuel au programme.

L'enseignant 1 propose un exemple dans lequel il n'a pas écrit de manière explicite et noté la propriété dépendant de l'entier naturel n. Nous constatons un décalage entre l'énoncé du principe du raisonnement par récurrence que l'enseignant 1 a énoncé dans sa leçon et son application dans un exemple précis. Le fait que cet enseignant ne formule pas de manière explicite la propriété à démontrer peut installer dans la pratique de l'élève, la connaissance en acte selon laquelle on ne formule pas explicitement la propriété à démontrer. Ce qui est une source de difficulté car cette notation permet de mettre en évidence la nature de la variable et d'expliciter la propriété que l'on veut étudier.

Pour ce qui est de l'étape d'initialisation, l'enseignant 1 donne un exemple où il commence avec $n_0 = 2$. De plus, il ne fait mention nulle part dans son cours que n_0 peut prendre d'autres valeurs que la valeur 2. Et que n_0 doit être le plus petit entier naturel qui vérifie la propriété donnée et que à partir de cette valeur donnée a n_0, son successeur doit aussi vérifier la propriété jusqu'à une infinité de cas.

L'Ens.1 écrit correctement la quantification. Pour ce qui est de l'implication, la rédaction de l'exemple de cet enseignant est sous la forme « supposons que $P(k)$ et montrons que $P(k+1)$ », comme en témoigne l'extrait suivant (enseignant 1) :

Soit $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $k \geq 2$. *Supposons que* $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ *et montrons que*

$1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Poser le problème de cette façon revient à réduire l'étape de l'hérédité à l'étude de la véracité de P(n+1), ce qui est erroné car on veut plutôt montrer que $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie.

Enfin au niveau de la conclusion, l'Ens.1 ne fait pas mention de l'étape d'initialisation, de l'étape d'hérédité et le lien entre les deux ne sont pas mentionnés, ni au principe de récurrence. En témoigne cet exemple :

Donc $\forall n \geq 2, 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (enseignant 1)

4.2.2. Analyse des pratiques de classe de l'enseignant 2

Pour la leçon de l'enseignant 2, il commence sans les prérequis ou même une activité d'apprentissage. Il énonce directement le principe de récurrence en trois étapes (initialisation, hérédité et conclusion) comme suit :

Soit n_0 un entier naturel et P(n) une proposition définie pour tout entier naturel n ($\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0$).

Si l'on sait que $\mathrm{P}(\mathrm{n}_0)$ est vraie et que, pour tout $\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0$, « $\mathrm{P}(\mathrm{n})$ vraie implique $\mathrm{P}(\mathrm{n}+1)$ vraie », on conclure que pour tout n superieur ou egal a $\mathrm{n}_0, \mathrm{P}(\mathrm{n})$ est vraie. Cette structuration bien qu'étant différente du savoir à enseigner et proche du savoir de référence énoncé par Grenier est erronée.

L'enseignant 2 propose un exemple dans lequel il définit de manière explicite et noté la propriété dépendant de l'entier naturel n.

Pour ce qui est de l'étape d'initialisation, l'enseignant 2 donne un exemple où il commence avec $n_0 = 1$ et présente cette étape de la même manière que l'enseignant 1.

Au niveau de l'étape de l'hérédité et de l'étape de la conclusion nous constatons la même rédaction que l'enseignant 1 dans un exemple rédigé par l'enseignant 2.

Ces analyses mettent en évidence plusieurs écueils communs aux manuels scolaires et aux pratiques des enseignants, la présentation du principe de récurrence et la rédaction d'un raisonnement par récurrence par les enseignants, peuvent être source de difficultés pour les élèves. De plus, le manque de précision sur l'entier naturel n_0 peut constituer des difficultés potentielles pour trouver d'où vient cette valeur n_0 et comprendre que cette valeur n'est pas nécessairement 1 ou 2.

Nous constatons enfin que la leçon de l'enseignant 2 ne permet pas aux élèves de construire leur propre savoir car il n'y a pas d'activité d'apprentissage et d'exercice d'applications.

4.3. Expérimentation

Dans cette partie, nous présentons le questionnaire que nous avons adressé aux élèves des classes de Terminale C du Lycée Moderne de Nkozoa et notre séquence didactique construite sur la notion du raisonnement par récurrence. L'analyse du questionnaire nous permettra de recueillir des réponses des élèves que nous allons exploiter dans notre situation et les résultats des productions des élèves à propos de la séquence de cours nous permettra de vérifier la troisième hypothèse de notre travail.

4.3.1. Analyse a priori du questionnaire

Notre questionnaire est construit dans le but de trouver des éléments de réponses face aux questions soulevées dans notre problématique. Nous avons passé ce questionnaire le mercredi 10 Décembre 2023 au Lycée Moderne de Nkozoa en classe de Terminale C. Nous avons évalué 50 élèves de cette classe. Cette évaluation s'est déroulée de 08h 30 à 10h00, soit une durée de 1h30 minutes. Le questionnaire même est présenté en annexe 2.

Item 1 :

Soit (u_k) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k}$

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N},\ 0 < u_k < 2$.

Dans cet item, la consigne "démontrer par récurrence" n'est pas explicitement donnée. L'objectif est de voir si les élèves expriment une nécessité ou pas d'utiliser la récurrence pour la résolution de cet exercice. Voici explicitement ce que nous attendons d'eux :

1R1 (Item 1, réponse 1). Démontrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}, 0 < u_k < 2$.

Ici, la démonstration par récurrence est utilisée.

Voici les réponses susceptibles d'apparaître :

1R2 (Item 1, réponse 2). Démontrons que $\forall k \in \mathbb{N}, 0 < u_k < 2$.

Pour $k = 0$, on a : $u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} = 1{,}73$, donc $0 < u_1 < 2$,

Pour $k = 1$, on a : $u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1{,}93$, donc $0 < u_2 < 2$,

Pour $k = 2$, on a : $u_3 = \sqrt{2 + u_2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 1{,}98$, donc $0 < u_3 < 2$.

Pour $k = 3$, on a : $u_4 = \sqrt{2 + u_3} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 1{,}99$, donc $0 < u_4 < 2$.

D'où $\forall k \in \mathbb{N}, 0 < u_k < 2$.

Les élèves vérifient la proposition pour un nombre fini de n : c'est l'induction incomplète. De plus les élèves ne prennent pas en compte la quantification.

1R3 (Item 1, réponse 3). Démontrons que $\forall k \in \mathbb{N}, 0 < u_k < 2$.

$$0 < u_k < 2$$

$$2 < 2 + u_k < 4$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{2 + u_k} < \sqrt{4}$$

$$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2 + u_k} < 2$$

Donc $0 < \sqrt{2 + u_k} < 2$, c'est-à-dire que $0 < u_{k+1} < 2$

D'où $0 < u_k < 2$

Ils procèdent par un encadrement du terme général. Pas d'utilisation du principe de récurrence.

Ces réponses qui sont susceptibles d'apparaître sont erronées.

Item 2 :

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{R}^+$et $a \in \mathbb{N}$ on a $(1 + n)^a \geq 1 + an$.

L'objectif de l'item 2 est de voir laquelle des deux variables n ou a l'élève va utiliser pour faire cette démonstration. Comme attente, nous proposons :

2R1 (Item 2, réponse 1). Ici il suffit de demontrer la propriété par récurrence sur la variable a.

L'eleve ne se focalise pas seulement sur n qui est généralement la variable de récurrence. Ils identifient bien la variable.

Voici les réponses susceptibles d'apparaître :

2R2 (Item 2, réponse 2). Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{R}^+$et $a \in \mathbb{N}$ on a $(1 + n)^a \geq 1 + an$.

Les élèves peuvent démontrer la propriété sur la variable $n \in \mathbb{R}^+$. Comme exemple : Soit la propriété $P(n)$: « $(1 + n)^a \geq 1 + an$.

Pour $n = 0$, on a : $(1 + 0)^a = 1$ et $1 + a \times 0 = 1$. Donc $(1 + 0)^a \geq 1 + a \times 0$, d'où $P(0)$ est vraie.

Soit $n \geq 0$, supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $(1+n)^a \geq 1+an$ et montrons que $P(n+1)$ est aussi vraie.

La variable de récurrence est n.

2R3 (Item 2, réponse 3). Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{R}^+$et $a \in \mathbb{N}$ on a $(1+n)^a \geq 1+an$.

Les élèves peuvent démontrer la propriété sur les deux variables. Par exemple :

Pour $n=0$ et $\alpha=0$, on a : $(1+0)^0 = 1$ et $1+0\times 0 = 1$. Donc $(1+0)^0 \geq 1+0\times 0$.

Les élèves utilisent les deux variables pour la récurrence.

Ces deux réponses sont erronées.

Item 3 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1^3+2^3+3^3+\ \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Dans l'exercice 3, la consigne "démontrer par récurrence" est explicitement donnée. L'objectif est d'observer comment les élèves rédigent les différentes étapes de la démonstration par récurrence. Voilà la réponse possible :

3R1 (Item 3, réponse 1). Démontrons par récurrence que pour tout $\boldsymbol{n \geq 1, 1^3+2^3+3^3+ \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, désignons par $P(n)$ la propriété définie par : « $1^3+2^3+3^3+\ \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=1$, on a : $1^3 = 1$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$, d'où $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.
  Donc $P(1)$ est vraie.
- **Héréditaire :** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie. On a :
  $1^3+2^3+3^3+\ \ldots + (n+1)^3 = 1^3+2^3+3^3+\ \ldots + n^3 + (n+1)^3$
  $= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$, par hypothèse.
  $= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$

$$= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie.

- **Conclusion :**

  On a démontré que $P(1)$ est vrai et que pour tout $n \geq 1$, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie, donc d'après le principe de récurrence, on peut donc affirmer que pour tout $n \geq 1$, $P(n)$ est vraie.

Les élèves démontrent cette propriété en utilisant bien le principe de récurrence.

Voici les réponses susceptibles d'apparaître :

3R2 (Item 3, réponse 2). Démontrons par récurrence que pour tout $\boldsymbol{n \geq 1}$, $\boldsymbol{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

$\forall n \geq 1$, soit la propriété définie par P(n) : « $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ »,

- Vérifions si P(1) est vraie

  D'une part, on a :1.

  D'autre part, on a : $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1(4)}{4} = 1$

  Alors $1 = \frac{1(1+1)^2}{4}$

  D'où P(1) vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons P(n) vraie et montrons que P(n + 1) est vraie ie montrons que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

  On a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3$

  $$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \qquad \text{par H.R.}$$

  $$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

  $$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

  $$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

  Donc P(n + 1) est vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ici, la propriété dépendant de n, l'étape de l'hérédité et la conclusion sont mal formulées.

3R3 (Item 3, réponse 3). Démontrons par récurrence que pour tout $\boldsymbol{n \geq 1, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

Pour $n = 1$, montrons que $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

$1^3 = 1$

$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1\times4}{4} = 1$

Donc $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$.

Supposons que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et montrons que

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

On a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 + (n+1)^3$

Or par hypothèse de récurrence $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ainsi $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

D'où le résultat.

Donc $\forall n \geq 1, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Nous notons l'absence de la propriété dépendant de n, l'étape de l'hérédité et la conclusion sont mal formulées.

Ces deux raisonnements sont erronés.

Item 4 :

Pour quelle valeur de n peut-on démontrer par récurrence que $2^n \geq (n+1)^2$.

À travers l'exercice 4, l'initialisation n'étant pas donné de manière explicite, notre objectif est de voir comment élève choisit le plus petit entier naturel. La réponse possible que nous attendons est la suivante :

4R1 (Item 4, réponse 1). Trouvons la plus petite valeur de l'entier naturel $\boldsymbol{n}$ pour laquelle on peut démontrer par récurrence que $\boldsymbol{2^n \geq (n+1)^2}$.

Pour tout n entier, on a $2^{n+1} = 2^n .2$. Si $2^n \geq (n+1)^2$, alors $2^{n+1} \geq 2\,(n+1)^2$; et pour que $2^{n+1} \geq (n+2)^2$, il suffit que $2\,(n+1)^2 \geq (n+2)^2$. C'est-à-dire en développant cette inégalité, on a $n^2 - 2 \geq 0$. Posons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 2 \geq 0$. Son tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2 - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc pour tout entier naturel $n \geq E(\sqrt{3}) + 1 = 2, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie.

D'où $P(\mathrm{n})$ est vraie pour $\mathrm{n} = 0$, fausse pour $\mathrm{n} = 1, 2, 3, 4$ et 5 et vraie pour $\mathrm{n} = 6$. On peut maintenant répondre à la question posée. $P(\mathrm{n})$ étant héréditaire à partir de $\mathrm{n} = 2$ et $P(6)$ étant vraie, le principe de récurrence permet d'affirmer que $P(\mathrm{n})$ est vraie pour tout $\mathrm{n} \geq 6$. Donc $n_0 = 6$.

Voici les réponses susceptibles d'apparaître :

4R2 (Item 4, réponse 2). Trouvons la valeur de n pour laquelle on peut démontrer par récurrence que $2^n \geq (n+1)^2$.

Soit la propriété $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq (n+1)^2$.

Pour $n = 0, 2^0 = 1 = (0+1)^2$ donc $P(0)$ est vraie,

Pour $n = 1, 2^1 = 2$ et $(1+1)^2 = 4$, donc $2^1 \ngeq (1+1)^2$, d'où $P(1)$ est fausse,

Pour $n = 2, 2^2 = 4$ et $(2+1)^2 = 9$, donc $2^2 \ngeq (2+1)^2$, d'où $P(2)$ est fausse, Pour $n = 3, 2^3 = 8$ et $(3 + 1)^2 = 16$, donc $2^3 \ngeq (3 + 1)^2$, d'où $P(3)$ est fausse,

Pour $n = 4, 2^4 = 16$ et $(4 + 1)^2 = 25$, donc $2^4 \ngeq (5 + 1)^2$, d'où $P(4)$ est fausse,

Pour $n = 5, 2^5 = 32$ et $(5 + 1)^2 = 36$, donc $2^5 \ngeq (5 + 1)^2$, d'où $P(5)$ est fausse,

Pour $n = 6, 2^6 = 64$ et $(6 + 1)^2 = 49$, donc $2^6 \geq (6 + 1)^2$, d'où $P(6)$ est vraie,

Pour $n = 7, 2^7 = 128$ et $(7 + 1)^2 = 64$, donc $2^7 \geq (7 + 1)^2$, d'où $P(7)$ est vraie,

Pour $n = 8, 2^8 = 2256$ et $(8 + 1)^2 = 81$, donc $2^8 \geq (8 + 1)^2$, d'où $P(8)$ est vraie.

Conclusion pour $n = 6$, on peut montrer par récurrence cette propriété.

Cette méthode par conjecture permet aussi de trouver n.

4R3 (Item 4, réponse 3). Trouvons la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle on peut démontrer par récurrence que $2^n \geq (n + 1)^2$.

Certains élèves peuvent prendre $n = 0$, car pour $n = 0, 2^0 = 1 = (0 + 1)^2$ donc $P(0)$ est vraie et conclure.

4.3.2. Analyse a priori de notre séquence didactique sur le raisonnement par récurrence

Nous avons organisé la leçon avec un effectif de 20 élèves de Première C du Lycée Moderne de Nkozoa situé dans la Mefou et Afamba région du Centre. Nous avons passé cette leçon le mercredi 13 février 2024, de 9h00 à 11h. Le but était d'enseigner cette leçon aux élèves à qui on n'a jamais enseigné la démonstration par récurrence. Etant donné qu'à la période où nous enseignions cette leçon, tous les élèves des classes de Terminale scientifique avaient déjà suivi une leçon sur cette notion. Nous avons enseigné en respectant toutes les étapes mentionnées de l'approche par les compétences. Notre séquence de didactique est présentée en annexe 3.

Nous avons construit notre leçon selon l'approche pédagogique en vigueur au Cameroun, c'est-à-dire selon le modèle APC. Nous commençons notre leçon par les pré-acquis, où nous demandons aux élèves de calculer les cinq premiers termes d'une propriété dépendant de l'entier naturel n. Nous poursuivons le cours par une situation problème que les apprenants ne peuvent pas résoudre, car ne disposant pas encore accès d'outils pour trouver la solution du problème par eux-mêmes. Ici on parle de contextualisation. Par la suite, nous mettons à la disposition des élèves deux activités d'apprentissage avec des objectifs distincts. On parle dans ce cas de décontextualisation. Ensuite, nous avons un résumé qui énonce le principe de récurrence et proposons aussi un exemple, c'est l'institutionnalisation. Enfin, on a cinq exercices d'applications, c'est la consolidation ou la fixation des connaissances.

Les critères d'analyse que nous retenons sont :

Critère 1 : Structure du raisonnement

L'énoncé de principe de raisonnement par récurrence formulé par Grenier :

Pour démontrer qu'une proposition $\mathrm{P(n)}$ est vraie pour tout entier naturel $\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0$, on procède comme suit : SI [il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie ET pour tout $n \geq n_0, P(n) \implies P(n+1)$ est vraie] alors [pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie].

Cette formulation du principe du raisonnement par récurrence comporte trois étapes à savoir : l'étape de l'initialisation, l'étape de l'hérédité et l'étape de la conclusion.

Notre première activité d'apprentissage consiste à faire effectuer par les élèves une démonstration par récurrence. La propriété $P(n)$ étant donnée.

1) Initialisation consiste à donner une valeur a n et à montrer que $P(n)$ est vraie pour cette valeur de n,
2) Il est demandé aux élèves de montrer que $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie à partir de l'hypothèse $P(n)$ vraie,
3) Il s'agit pour les élèves d'expliquer la généralisation du résultat,

Critère 2 : Explicitation et notation de la propriété dépendant de l'entier naturel $\boldsymbol{n}$

Exemple du cours : On définit la suite $(\mathrm{U_n}), \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} \mathrm{U_0} = 2 \\ \mathrm{U_{n+1}} = \sqrt{\mathrm{U_n} + 6} \end{cases}$. Montrer que $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{U_n} \leq 3$

Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, désignons par $\boldsymbol{P(n)}$ la propriété : « $\mathbf{U_n} \leq \mathbf{3}$». Ici nous avons défini la nature de la variable et l'univers du discours.

Critère 3 : Initialisation

On considère la propriété définie pour tout entier naturel $n \neq 0, Q(n) : \mathrm{2^n} > 5(\mathrm{n}+1)$.

a) Pour quelles valeurs de n l'implication $Q(n) \implies Q(n+1)$ est-elle vraie ?
b) A partir de quelles valeurs de n la propriété Q(n) est-elle vraie ?

Ici nous voulons montrons comment on trouve le plus petit entier naturel n_0 à partir duquel on peut démontrer une propriété par récurrence.

Critère 4 : Hérédité : implication et quantification

En considérant l'exemple de notre cours. Soit $n \geq 0$, suppossons que $P(n)$ est vraie et montrons que $(P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie.

On a : $U_n \leq 3$ **(H.R)**

$f(U_n) \leq f(3)$ car la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante

$\sqrt{U_n + 6} \leq 3$

$U_{n+1} \leq 3$

D'où $\forall n \geq 0, (P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie.

Ici, toutes les remarques que nous avons relevé dans le manuel scolaire et chez les enseignants ont été corrigés. Comme en témoigne l'extrait suivant (enseignant 1) :

Soit $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $k \geq 2$. *Supposons que* $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ *et montrons que*

$1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Critère 5 : Structure de la conclusion

En considérant d'exemple de notre cours, on a démontré que $P(0)$ est vrai et que pour tout $n \geq 0$, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie, donc d'après le principe de récurrence, on peut donc affirmer que pour tout $n \geq 0, P(n)$ est vraie.

Dans cette conclusion, nous avons rappelé à la fois le principe de récurrence, aux étapes de l'initialisation, étape de l'hérédité et au lien entre ces deux étapes, c'est-à-dire aux raisons qui permettent de conclure.

Nous avons donné dans ce chapitre, une analyse des pages du livre au programme, des cours de certains enseignants à partie des critères de Gardes et al. Nous avons par la suite proposé une analyse a priori de nos questionnaires et enfin on a donné une analyse de notre cours expérimentale à partie des critères de Gardes.

Chapitre 5 : Résultats et discussions

Dans ce chapitre, nous analysons premièrement les résultats du questionnaire, cela nous permettra d'identifier les difficultés des élèves dans l'apprentissage de la démonstration par récurrence en fonction de leurs productions. Ensuite nous analyserons les résultats de l'expérimentation et enfin nous proposerons les stratégies en vue de diminuer de manière significative ces difficultés.

5.1. Résultats des productions des élèves à propos du questionnaire et analyse a posteriori

Nous présentons les difficultés des élèves dans l'apprentissage de la démonstration par récurrence en classes de terminale C et D et les causes probables de ces difficultés

5.1.1. Analyse a posteriori des productions des élèves à propos du questionnaire

Dans cette partie, nous confrontons les résultats recueillir auprès des élèves avec ceux proposés dans notre analyse a priori. Les tableaux suivants présentent les élèves qui ont répondu à notre questionnaire selon notre analyse a priori. Nous notons e_i pour l'élève i $(1 \leq i \leq 50)$, 1R4 représente autres réponses.

5.1.1.1. Analyse a posteriori de l'exercice 1

Soit (u_k) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k}$.

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N},\ 0 < u_k < 2$.

1R1	1R2	1R3	1R4
e_1 ; e_4 ; e_6 ; e_7 ; e_8 ; e_9 ; e_{10} ; e_{11} ; e_{12} ; e_{13} ;e_{14} ; e_{16} ; e_{18} ; e_{20} ; e_{21} ; e_{22} ; e_{24} ; e_{25} ; e_{27} ; e_{32} ;e_{33} ; e_{34} ; e_{35} ; e_{36} ; e_{37} ; e_{38} ; e_{39} ; e_{40} ; e_{41} ; e_{42} ;e_{43} ; e_{45} ; e_{46} ; e_{47} ; e_{48} ; e_{49} ; e_{50} .	e_{44}	e_2 ; e_3 ; e_5 ; e_{15} ; e_{17} ; e_{19} ; e_{23} ;e_{26} ; e_{28} ; e_{29} ; e_{30} ;e_{31}.	Pas d'élève

Ici, 37 élèves sur les 50 interrogés expriment la nécessite d'utiliser le principe de récurrence, soit un pourcentage de 76%. Malgré leurs volontés d'utiliser le raisonnement par récurrence, la plupart ont seulement trouvé l'étape de l'initialisation. Tandis que 1 élève sur 50 élèves utilise l'induction incomplète soit un pourcentage de 2% et 12 élèves sur 50 élèves utilisent plutôt la méthode par encadrement, soit un pourcentage de 22%. Ces deux dernières méthodes ne permettent pas de répondre à la question posée et aucun élève ne propose une autre méthode permettant de résoudre l'exercice.

5.1.1.2. Analyse a posteriori de l'exercice 2

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{R}^+$et $a \in \mathbb{N}$ on a $(1+n)^a \geq 1 + an$.

2R1	2R2	2R3	2R4
e_{24} ; e_{38} ; e_{40} ; e_{45} ; e_{48} ; e_{49} .	e_1; e_2 ;e_4 ; e_5 ;e_6 ; e_7 ; e_8 ; e_9 ; e_{10} ; e_{12} ; e_{13} ; e_{14} ; e_{15} ; e_{16} ;e_{17} ; e_{18} ; e_{19} ; e_{20} ; e_{21} ; e_{22} ; e_{25} ; e_{26} ; e_{27} ; e_{28} ;e_{29} ; e_{30} ; e_{31} ; e_{32} ; e_{33} ; e_{34} ; e_{35} ; e_{36} ; e_{37} ; e_{39} ; e_{41} ; e_{42} ; e_{43} ; e_{44} ;e_{47} ;e_{50}.	e_3 ; e_{23} .	Pas d'élève

Dans ce paragraphe, 40 élèves sur les 50 interrogés travaillent avec la variable n, soit un pourcentage de 80%, 6 eleves sur 50 élèves utilisent la variable a, soit un pourcentage de 12% et 2 élèves sur 50 ont utilisés les deux variables, soit un pourcentage de 4%.

Nous concluons que la plupart des élèves ne connaissent pas l'univers du discours et sont habitués à travailler seulement avec la variable n. Ceci est due au fait que ce soit dans le manuel au programme ou dans les exemples proposent par certains enseignants, la variable utilisée est toujours la variable n.

5.1.1.3. Analyse a posteriori de l'exercice 3

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3R1	3R2	3R3	3R4
Pas d'élève	e_1; e_2 ;e_{11} ; e_{12} ;e_{13} ; e_{14} ; e_{17} ; e_{18} ; e_{21} ; e_{24} ; e_{25} ; e_{32} ; e_{33} ; e_{34} ;e_{35} ; e_{36} ; e_{37} ; e_{38} ; e_{39} ; e_{40} ; e_{41} ; e_{42} ; e_{43} ;e_{44} ;e_{45} ; e_{46}; e_{47} ; e_{48} ; e_{49} ; e_{50} .	e_3 ; e_4 ; e_5 ; e_6 ; e_7 ; e_8 ; e_9 ; e_{10} ; e_{15} ; e_{16} ; e_{19} ; e_{20} ; e_{22} ;e_{23} ; e_{26} ; e_{27} ; e_{28} ; e_{29} ; e_{30} ; e_{31} .	Pas d'élève

Ici, on constate que 30 élèves sur 50 formulent mal la propriété dépendant de n, l'étape de l'hérédité et la conclusion, soit un pourcentage de 60% et 20 élèves sur les 50 commencent leur démonstration sans expliciter la propriété dépendant de n, ni ne formulent bien l'etape de l'hérédité, ni celle conclusion, soit un pourcentage de 40%.

La conclusion est que la totalité des élèves interrogés ne connaissent pas rédiger toutes les étapes du principe de récurrence. Cette mauvaise rédaction par les élèves de ces étapes à deux principales sources à savoir le manuel au programme et les enseignants de mathématiques.

5.1.1.4. Analyse a posteriori de l'exercice 4

À partir de quelle valeur de n peut-on démontrer par récurrence que pour tout $2^n \geq (n+1)^2$.

4R1	4R2	4R3	4R4
Pas d'élève	e_{33} ; e_{44} ;e_{45} ;e_{46} ; e_{48} ; e_{49} .	e_3 ; e_6 ; e_{25} ; e_{26} ; e_{36} ; e_{38} ; e_{41} ; e_{43} .	Pas d'élève

Dans cette partie, 6 eleves sur 50 eleves ont utilisee la conjecture pour trouver la valeur de n, soit un pourcentage de 12%, cette réponse donnent par ces élèves est correcte et 8 eleves sur les 50 ont pris $n = 0$, soit un pourcentage de 16%. Ce résultat erroné, provient aussi du manuel scolaire que des enseignants de mathématique car ceux dernière ne mettent pas l'accès sur la détermination d'un n à partir du quelle on peut démontrer une propriété par récurrence. On constate aussi que la plupart des élèves interrogés n'ont pas fait cet exercice.

En conclusion, cette analyse a posteriori des résultats du test sur table montre que les difficultés se situent à trois niveaux à savoir :

- Le choix d'une variable lorsque l'exercice contient deux variables l'une appartenant à $\mathbb{R}$ et l'autre à $\mathbb{N}$;
- De la rédaction de l'étape de l'hérédité et de la conclusion ;

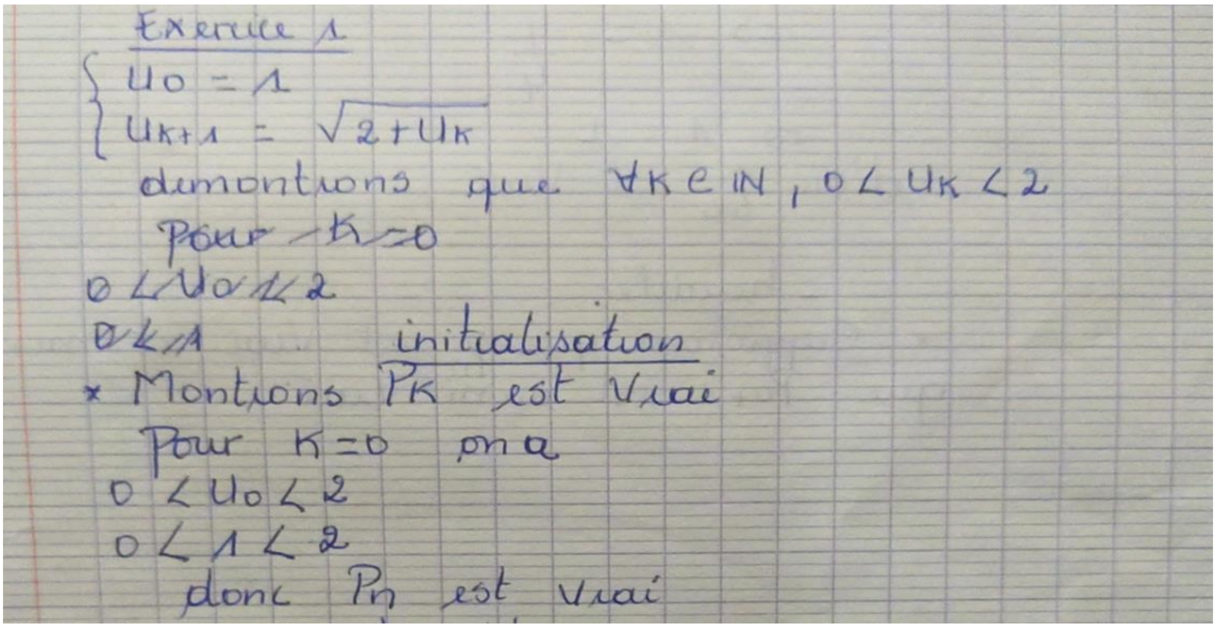
- Au niveau de la détermination de la valeur d'un n pour laquelle on peut utiliser le principe de récurrence pour démontrer une proposition.

L'analyse qualitative et l'interprétation des résultats du test a permis de dresser une typologie des difficultés.

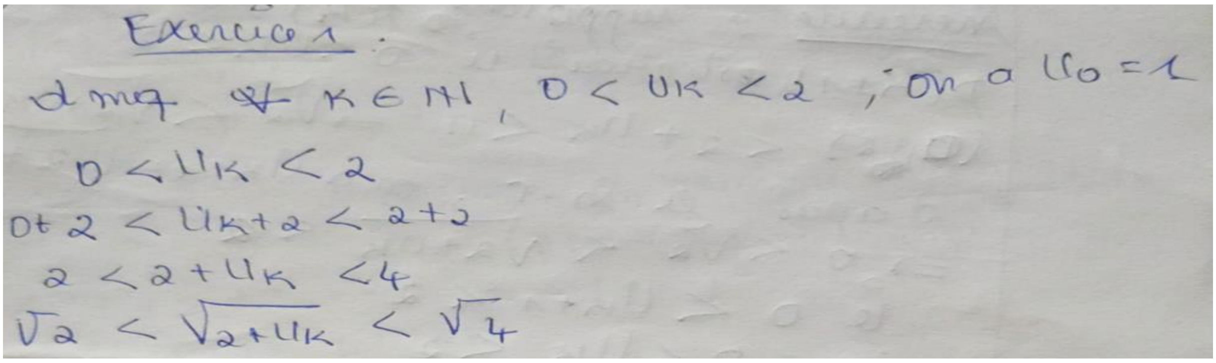
5.1.2. Les types de difficultés

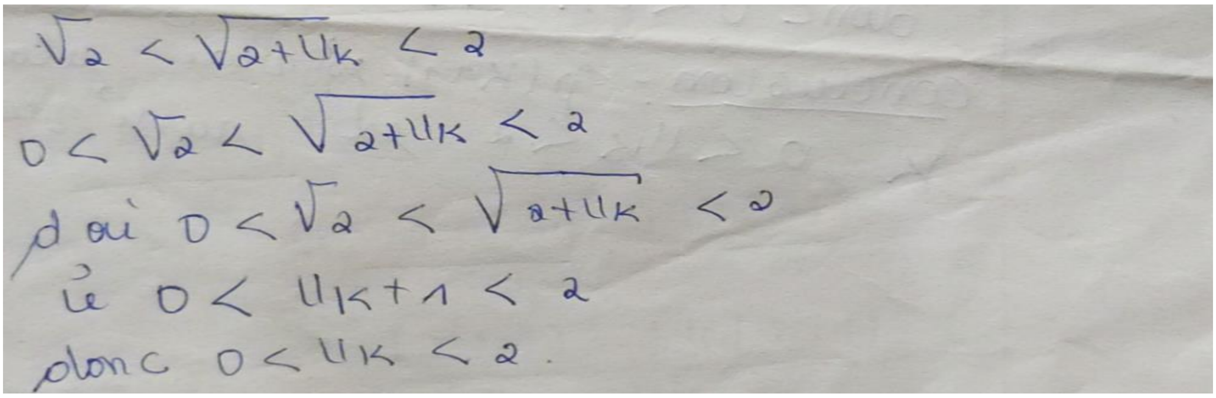
De l'analyse des copies et des réponses au questionnaire adressées aux élèves, nous identifions onze types de difficultés. Nous illustrons chaque type de difficultés par un extrait d'une copie ou d'une réponse à une question.

Type 1 : Absence de la propriété dépendant de l'entier naturel n



Type 2 : Omission de l'étape d'initialisation





$\sqrt{2} < \sqrt{2+u_k} < 2$

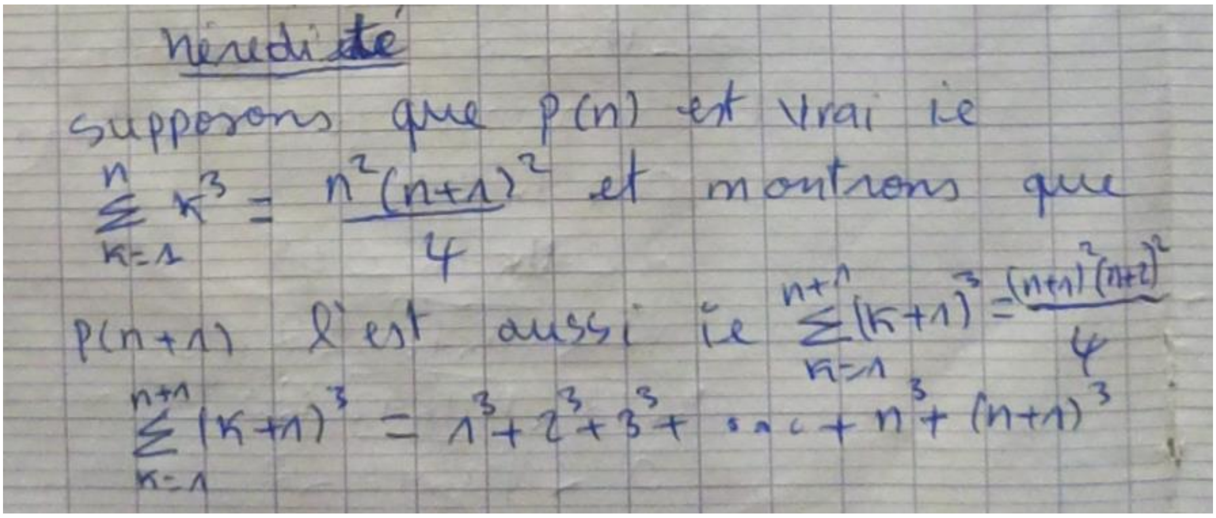
$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2+u_k} < 2$

d'où $0 < \sqrt{2} < \sqrt{2+u_k} < 2$

i.e $0 < u_{k+1} < 2$

donc $0 < u_k < 2$.

Type 3 : Mauvaise formulation de l'hypothèse de récurrence

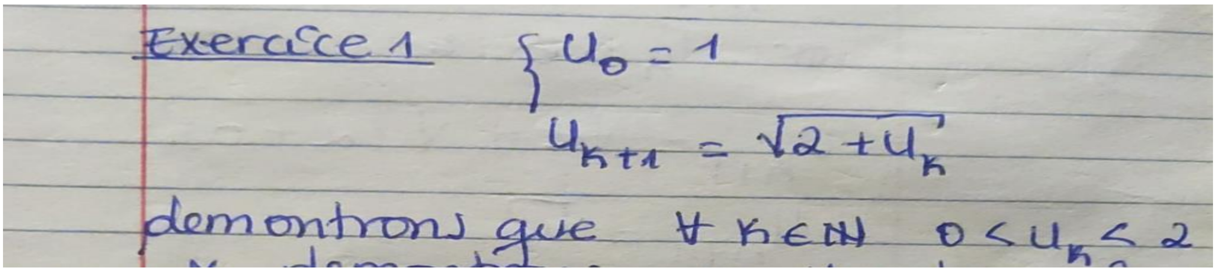


Hérédité

supposons que p(n) est vrai ie $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et montrons que p(n+1) l'est aussi ie $\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

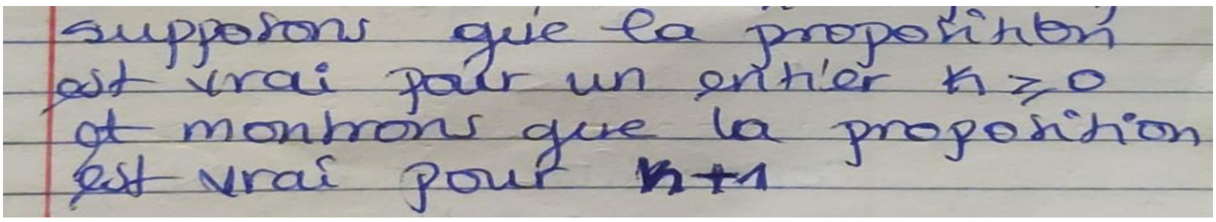
$\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^3$

Type 4 : La non utilisation de l'hypothèse de récurrence

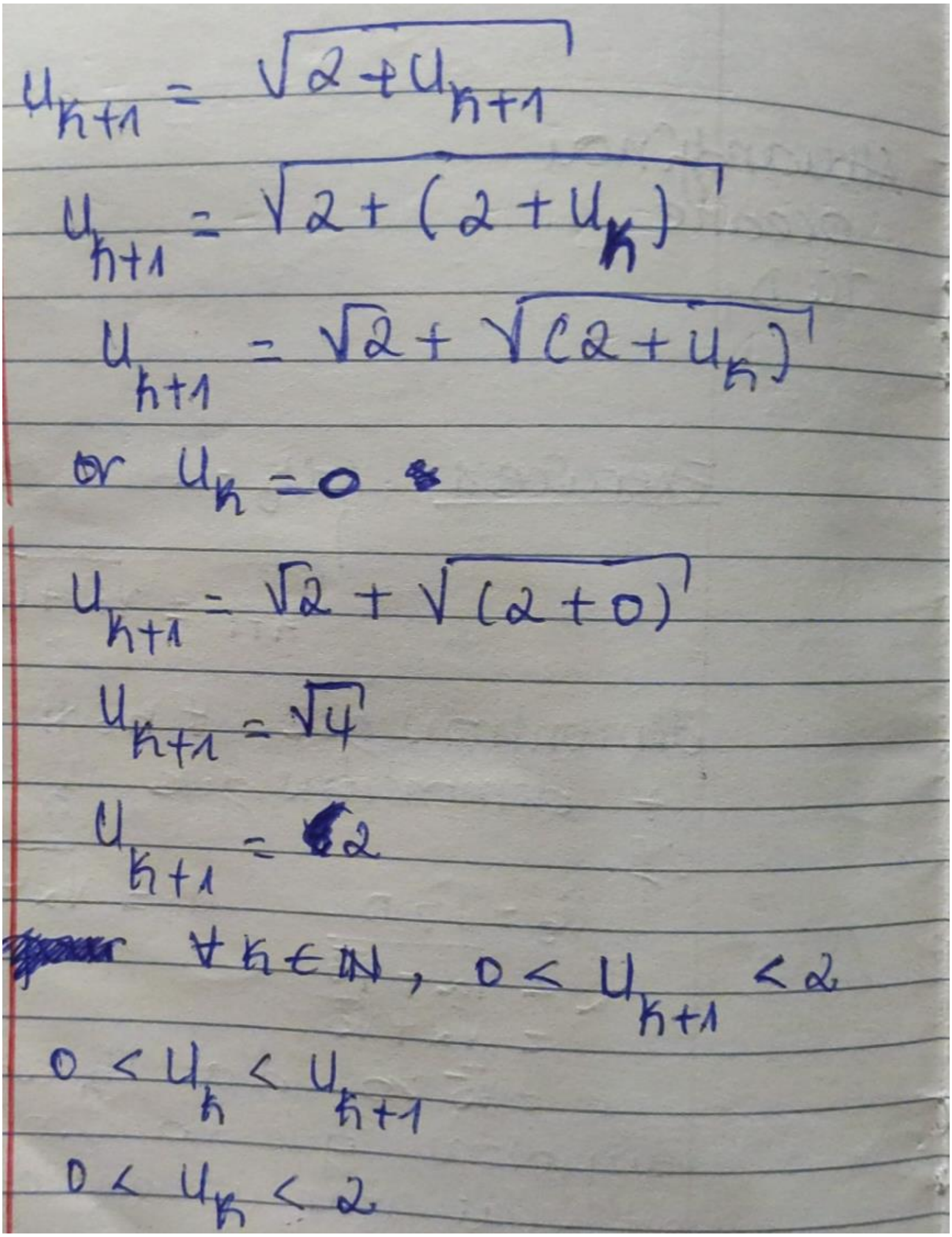


Exercice 1 $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} \end{cases}$

demontrons que $\forall k \in \mathbb{N}$ $0 < u_k < 2$



supposons que la proposition est vrai pour un entier $k \geq 0$ et montrons que la proposition est vrai pour $k+1$



$u_{n+1} = \sqrt{2+u_{n+1}}$

$u_{n+1} = \sqrt{2+(2+u_n)}$

$u_{n+1} = \sqrt{2} + \sqrt{(2+u_n)}$

or $u_n = 0$

$u_{n+1} = \sqrt{2} + \sqrt{(2+0)}$

$u_{n+1} = \sqrt{4}$

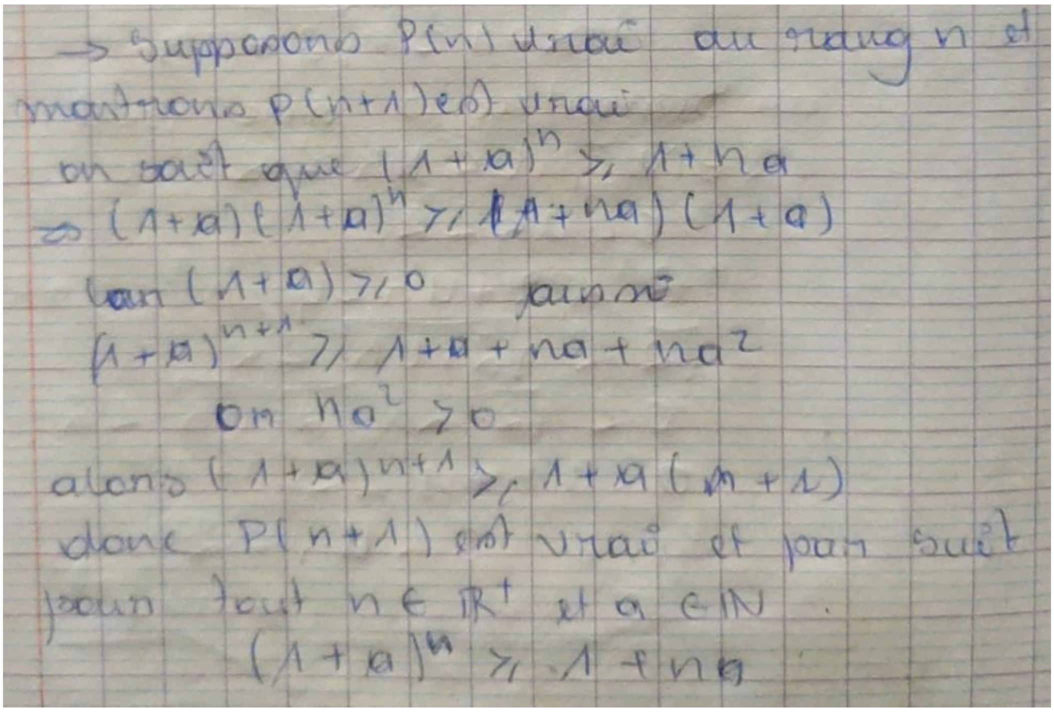
$u_{n+1} = 2$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} < 2$

$0 < u_n < u_{n+1}$

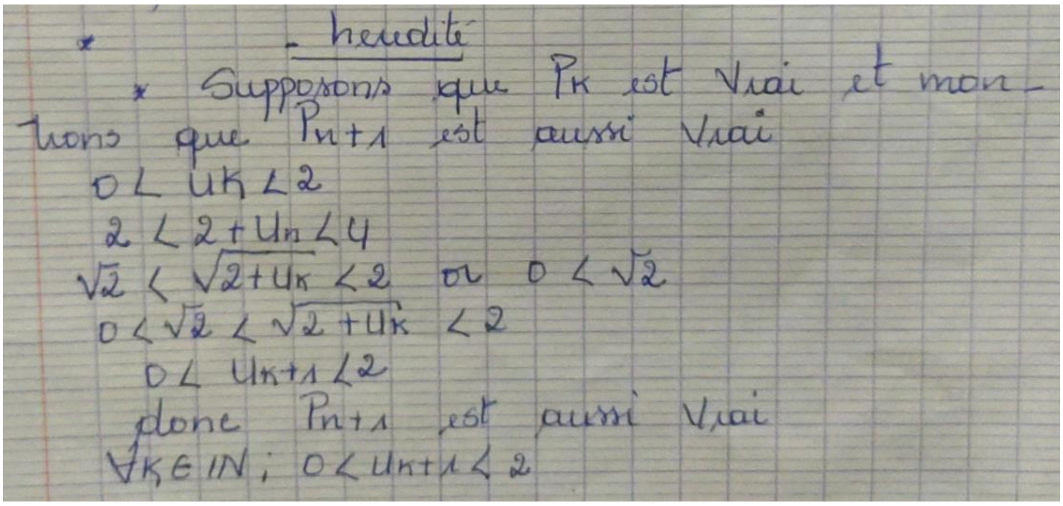
$0 < u_n < 2$

Type 5 : Difficulté à montrer l'étape d'hérédité



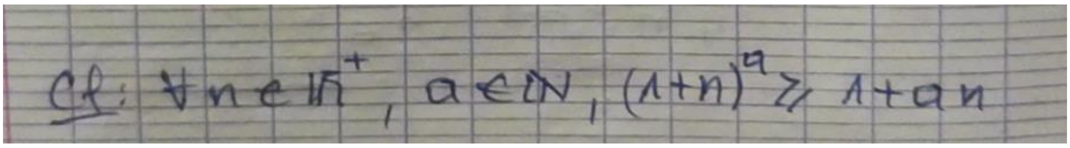
→ Supposons P(n) vrai au rang n et montrons p(n+1) est vrai
on sait que $(1+a)^n \geq 1+na$
$\Rightarrow (1+a)(1+a)^n \geq (1+na)(1+a)$
car $(1+a) \geq 0$ aussi
$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2$
or $na^2 \geq 0$
alors $(1+a)^{n+1} \geq 1+a(n+1)$
donc P(n+1) est vrai et par suit pour tout $n \in \mathbb{R}^+$ et $a \in \mathbb{N}$.
$(1+a)^n \geq 1+na$

Type 6 : Omission de la conclusion



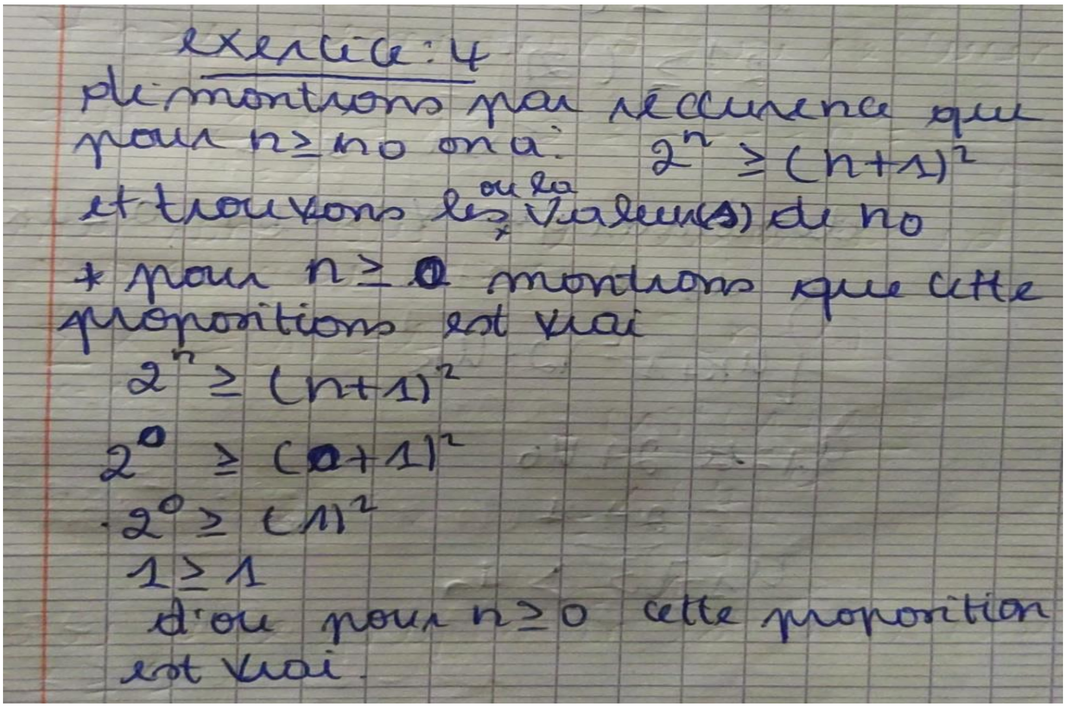
* - heredité
* Supposons que P_K est vrai et montrons que P_{n+1} est aussi vrai
$0 < u_K < 2$
$2 < 2+u_n < 4$
$\sqrt{2} < \sqrt{2+u_K} < 2$ or $0 < \sqrt{2}$
$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2+u_K} < 2$
$0 < u_{K+1} < 2$
donc P_{n+1} est aussi vrai
$\forall K \in \mathbb{N}$; $0 < u_{K+1} < 2$

Type 7 : Mauvaise formulation de la conclusion



Cl: $\forall n \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{N}$, $(1+n)^a \geq 1+an$

Type 8 : Difficulté à déterminer la valeur de n_0 pour laquelle on peut utiliser le principe de récurrence pour démontrer une propriété dépendante de l'entier naturel n


exercice : 4

demontrons par récurence que pour $n \geq n_0$ on a : $2^n \geq (n+1)^2$ et trouvons les (ou la) valeur(s) de n_0

* pour $n \geq 0$ montrons que cette propositions est vrai

$2^n \geq (n+1)^2$

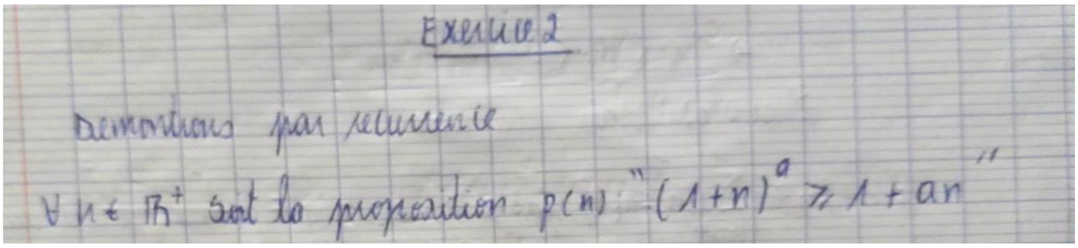
$2^0 \geq (0+1)^2$

$2^0 \geq (1)^2$

$1 \geq 1$

d'ou pour $n \geq 0$ cette proposition est vrai.

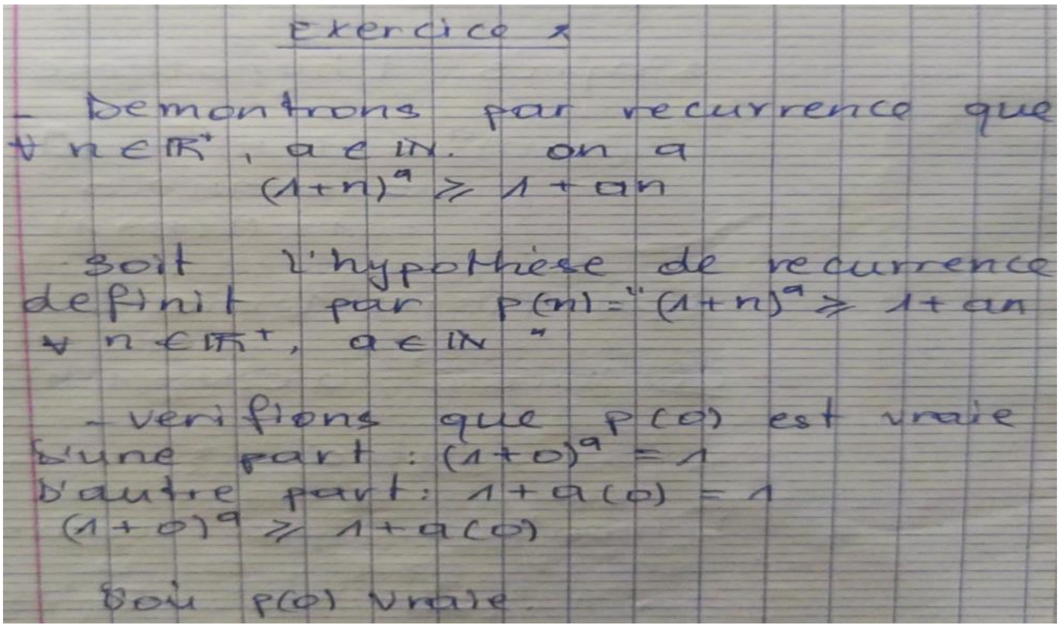
Type 9 : La confusion entre une proposition et une phrase ouverte


Exercice 2

Demontrons par recurrence

$\forall n \in \mathbb{R}^+$ soit la proposition $p(n)$: "$(1+n)^a \geq 1 + an$"

Type 10 : La non connaissance de l'univers du discours


Exercice 1

- Demontrons par recurrence que $\forall n \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{N}$. on a

$(1+n)^a \geq 1 + an$

Soit l'hypothèse de recurrence definit par $p(n)$ = "$(1+n)^a \geq 1+an$ $\forall n \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{N}$"

- verifions que $p(0)$ est vraie

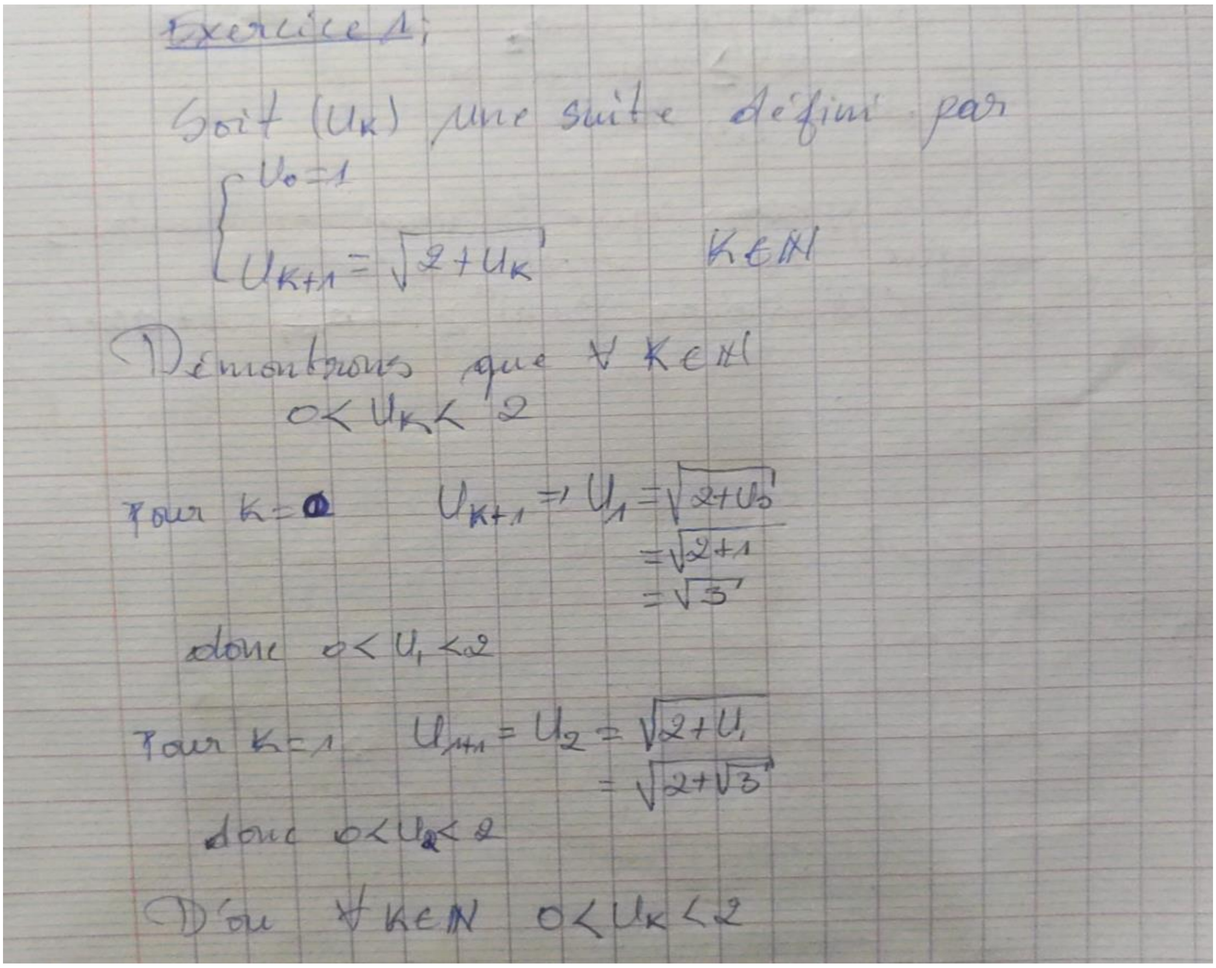
D'une part : $(1+0)^a = 1$

D'autre part : $1 + a(0) = 1$

$(1+0)^a \geq 1 + a(0)$

D'où $p(0)$ vraie.

Type 11 : Vérification sur un, deux premiers termes afin de conclure



Exercice 1;

Soit (U_K) une suite défini par

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{K+1}=\sqrt{2+U_K} \end{cases} \quad K\in\mathbb{N}$$

Démontrons que $\forall K\in\mathbb{N}$

$0<U_K<2$

Pour $K=0$ $\quad U_{K+1} \Rightarrow U_1=\sqrt{2+U_0}$

$=\sqrt{2+1}$

$=\sqrt{3}$

donc $0<U_1<2$

Pour $K=1$ $\quad U_{1+1}=U_2=\sqrt{2+U_1}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

donc $0<U_2<2$

D'où $\forall K\in\mathbb{N}$ $\quad 0<U_K<2$

Nous pouvons résumer les difficultés des élèves sur la démonstration par récurrence en trois points.

Premièrement, des élèves ne savent pas expliciter et noter la propriété dépendant de l'entier naturel n. Ils confondent une proposition et une phrase ouverte lorsque certaines veulent définir cette propriété.

Deuxièmement, ils ne savent pas mettre en œuvre le principe de récurrence dans ses différentes étapes (initialisation, formulation de l'hypothèse, démonstration de l'hérédité, conclusion). Ils omettent l'étape d'initialisation ou ne savent pas trouver la valeur de n_0 de l'étape d'initialisation lorsqu'elle n'est pas donnée. Ils omettent la formulation de l'hypothèse de récurrence ou en font une formulation erronée. Ils n'utilisent pas l'hypothèse de récurrence pour la démonstration de l'hérédité. Enfin, ils omettent la conclusion ou font une formulation erronée de la conclusion.

Troisièmement, certains élèves ne savent pas que l'univers du discours dans le raisonnement par récurrence est une partie infinie de ℕ qui est $\{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$.

5.2. Résultats des productions des élèves à propos de notre séquence didactique et analyse de ces résultats

Dans cette partie, nous présentons et analysons les résultats des productions des élèves à propos de notre leçon que nous avons enseigné en classe de Premier C. Pour notre évaluation, nous avons repris les mêmes exercices que nous avons passés aux élèves de Terminale scientifique. Par la suite, nous présentons les résultats par exercices tout en les analysant.

Analyse des résultats de l'exercice 1

Soit (u_k) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k}$.

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N},\ 0 < u_k < 2$.

En ce qui est de cet exercice, la réponse attendue était « **Démontrons par récurrence que pour tout** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \mathbf{0} < \boldsymbol{u_k} < \mathbf{2}$ ». Sur les 20 élèves de première C que nous avons interrogés, 15 élèves ont donné le bon résultat. Soit un taux de réussite de 75%.

Analyse des résultats de l'exercice 2

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{R}^+$et $a \in \mathbb{N}$ on a $(1+n)^a \geq 1 + an$.

Pour l'exercice 2, la réponse attendue était « **Ici il suffit de demontrer la propriété par recurrence sur la variable** $\boldsymbol{a}$ ». Sur 20 eleves interrogés, 20 ont donnés la bonne repose, soit un pourcentage de 100%.

Analyse des résultats de l'exercice 3

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Pour l'exercice 3, la réponse attendue était :

Soit $n \in \mathbb{N}$, désignons par $P(n)$ la propriété définit par : « $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$».

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a : $1^3 = 1$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$, d'où $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

  Donc $P(1)$ est vraie.
- **Héréditaire :** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie.

  Si $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, alors

  $$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + (n+1)^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ ... + n^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3, \text{ par hypothèse.} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2\left(n^2 + 4(n+1)\right)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

  Donc, pour tout $n \geq 1$, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie.
- **Conclusion :**

  On a démontré que $P(1)$ est vrai et que pour tout $n \geq 1$, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie, donc d'après le principe de récurrence, on peut donc affirmer que pour tout $n \geq 1$, $P(n)$ est vraie.

Sur les 20 eleves interrogés, 16 élèves ont produit la bonne réponse. Soit un taux de réussite de 80%.

Analyse des résultats de l'exercice 4

Pour quelle valeur de n_0 peut-on démontrer par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, on a : $2^n \geq (n+1)^2$.

Pour l'exercice 4, sur les 20 eleves, 20 optent pour la réponse 1 que nous avons proposé qui était :

Réponse 1 : Trouvons la valeur de n_0 pour laquelle on peut démontrer par récurrence que $2^n \geq (n+1)^2$.

Soit la propriété $P(n):\ \forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq (n+1)^2$.

Pour $n = 0, 2^0 = 1 = (0+1)^2$ donc $P(0)$ est vraie,

Pour $n = 1, 2^1 = 2$ et $(1+1)^2 = 4$, donc $2^1 \ngeq (1+1)^2$, d'où $P(1)$ est fausse,

Pour $n = 2, 2^2 = 4$ et $(2+1)^2 = 9$, donc $2^2 \ngeq (2+1)^2$, d'où $P(2)$ est fausse,

Pour $n = 3, 2^3 = 8$ et $(3+1)^2 = 16$, donc $2^3 \ngeq (3+1)^2$, d'où $P(3)$ est fausse,

Pour $n = 4, 2^4 = 16$ et $(4+1)^2 = 25$, donc $2^4 \ngeq (5+1)^2$, d'où $P(4)$ est fausse,

Pour $n = 5, 2^5 = 32$ et $(5+1)^2 = 36$, donc $2^5 \ngeq (5+1)^2$, d'où $P(5)$ est fausse,

Pour $n = 6, 2^6 = 64$ et $(6+1)^2 = 49$, donc $2^6 \geq (6+1)^2$, d'où $P(6)$ est vraie,

Pour $n = 7, 2^7 = 128$ et $(7+1)^2 = 64$, donc $2^7 \geq (7+1)^2$, d'où $P(7)$ est vraie,

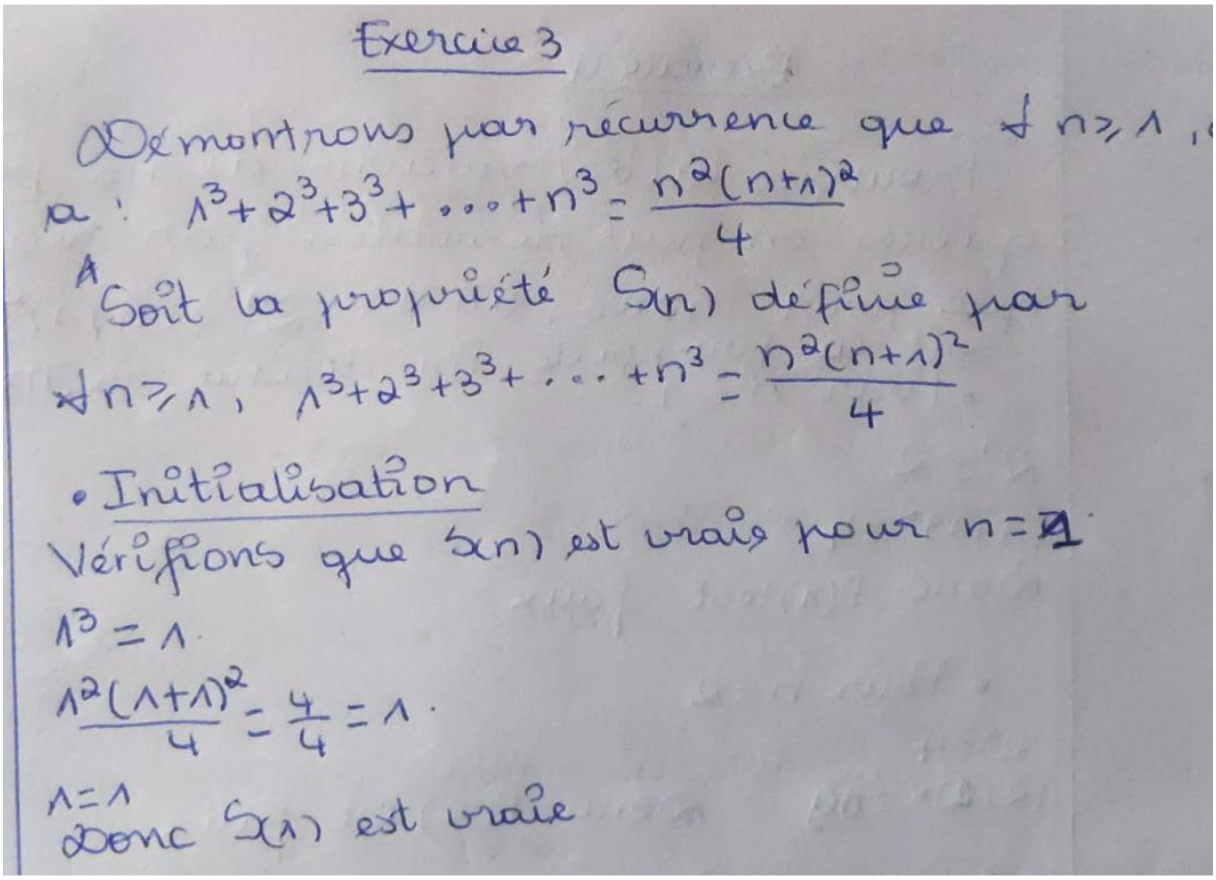
Pour $n = 8, 2^8 = 2256$ et $(8+1)^2 = 81$, donc $2^8 \geq (8+1)^2$, d'où $P(8)$ est vraie.

Conclusion pour $n_0 = 6$, on peut montrer par récurrence cette propriété.

Cette méthode par conjecture permet aussi de trouver n_0. Soit un taux de succès de 100%.

Notre expérience a permis de diminuer de manière considérable plusieurs difficultés rencontrées par les élèves lorsqu'ils utilisent la démonstration par récurrence pour résoudre un exercice. Parmi ces difficultés diminuées, nous pouvons citer :

- *Type 1 et 2* : La présence de la propriété dépendant de l'entier naturel n comme préalable pour utiliser la démonstration par récurrence. De plus, tous les 20 élèves interrogés commencent la démonstration par récurrence par l'étape d'initialisation. Comme dans l'exemple suivant :



Exercice 3

Démontrons par récurrence que $\forall n \geq 1$, on a : $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Soit la propriété $S(n)$ définie par $\forall n \geq 1$, $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

• Initialisation

Vérifions que $S(n)$ est vrais pour $n=1$.

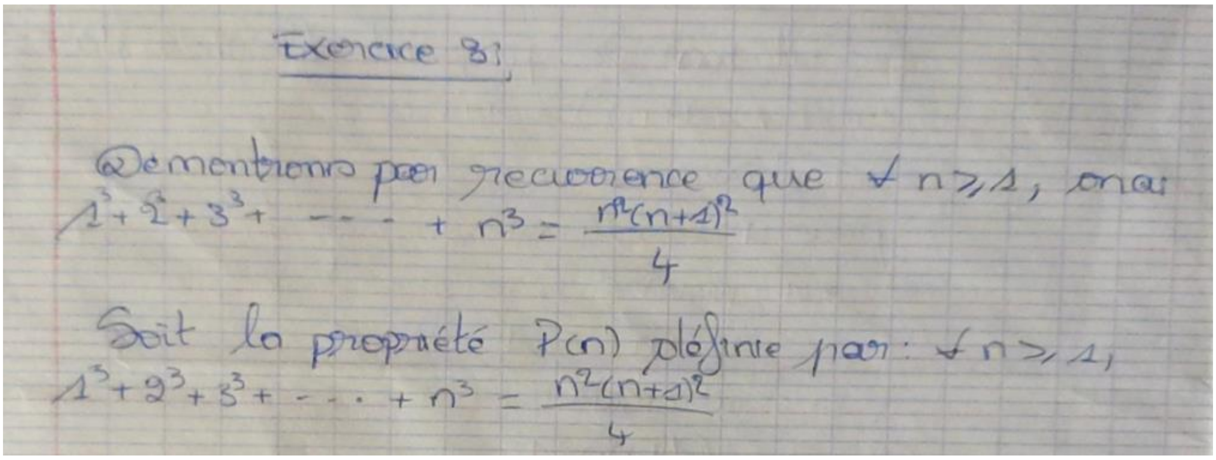
$1^3 = 1$.

$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

$1=1$

Donc $S(1)$ est vraie

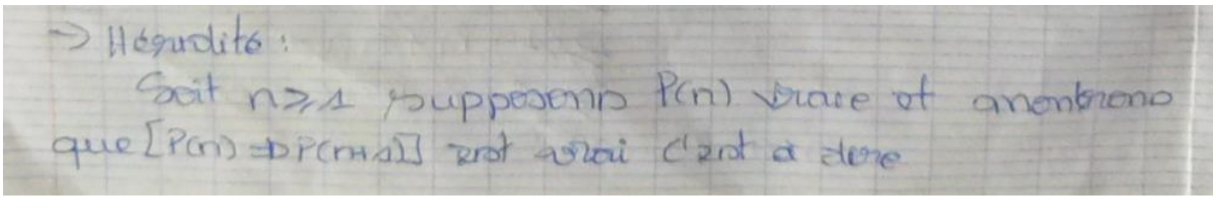
- *Type 3, 4 et 5* : Nous avons une meilleure formulation de l'hypothèse de récurrence, l'utilisation de l'hypothèse de récurrence et la démonstration de l'étape d'hérédité sont bien rédigées par la plupart des élèves. Nous pouvons l'illustrer avec l'exemple suivant :



Exercice 8 :

Démontrons par recurrence que $\forall n \geq 1$, on a $1^3+2^3+3^3+ \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Soit la propriété $P(n)$ définie par : $\forall n \geq 1$, $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$



→ Hérédité :

Soit $n \geq 1$ supposons $P(n)$ vraie et montrons que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ est vrai c'est à dire

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

on a :

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

d'après l'HR

$$= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

donc $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ est vraie

- *Type 6 et 7* : La présence de la conclusion et une meilleure formulation de la conclusion sont proposées par ces élèves. Illustrer par cet exemple :

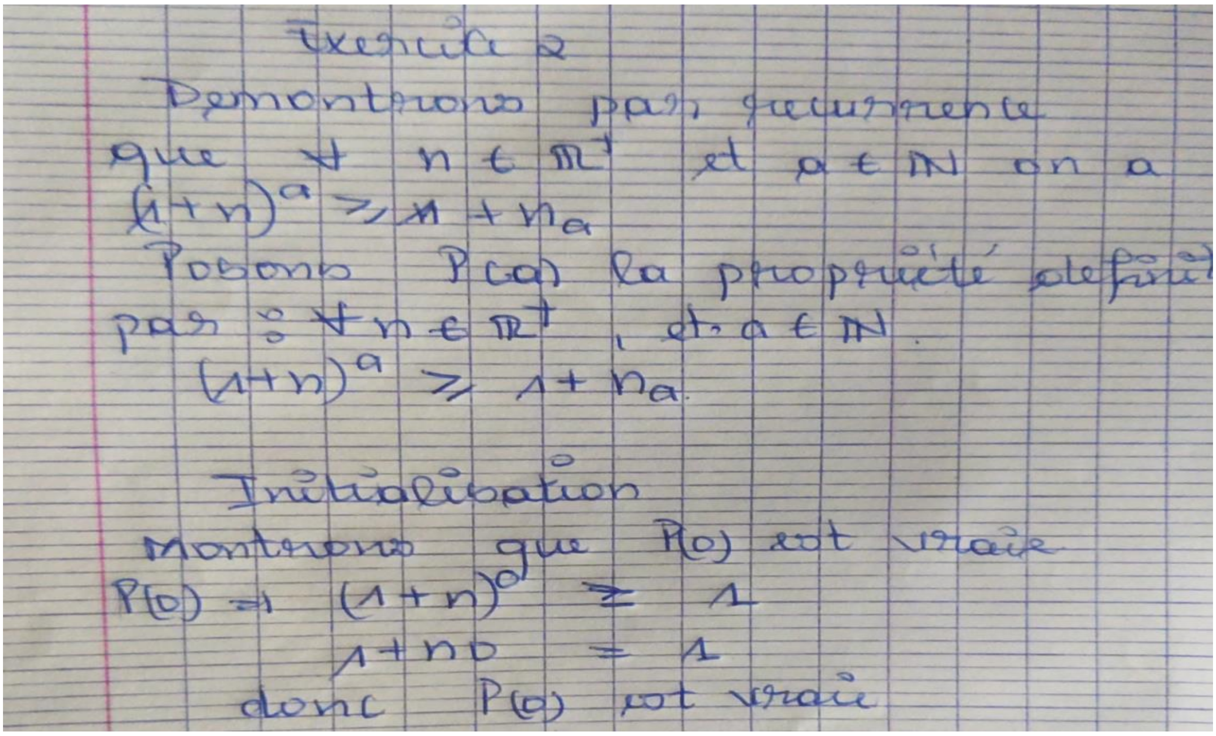
Résolution de l'exercice 1

Soit $p(n)$ la propriété définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 2$

On a démontré que $p(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(p(n) \Rightarrow p(n+1))$ est vraie, d'après le principe de récurrence. D'où $p(n)$ est vraie.

- *Type 8* : Les élèves déterminent facilement la valeur de n_0 pour laquelle on peut utiliser le principe de récurrence pour démontrer une propriété dépendante de l'entier naturel n par une conjecture.

- *Type 10* : Les élèves connaissent bien l'univers du discours. Nous avons par l'exemple :



Exercice 2

Demontrons par recurrence que $\forall\, n \in \mathbb{R}^{+}$ et $a \in \mathbb{N}$ on a $(1+n)^{a} \geq 1 + na$

Posons $P(a)$ la propriété définie par : $\forall\, n \in \mathbb{R}^{+}$, et $a \in \mathbb{N}$.

$(1+n)^{a} \geq 1 + na$.

Initialisation

Montrons que $P(0)$ est vraie

$P(0) \Rightarrow (1+n)^{0} \geq 1$

$1+n0 = 1$

donc $P(0)$ est vraie

5.3. Vérification des hypothèses

Hypothèse spécifique 1 : Dans l'apprentissage de la démonstration par récurrence, les difficultés rencontrées par les apprenants se situent au niveau de l'étape de l'initialisation, de l'étape de l'hérédité et de celle de la conclusion.

Après la présentation et l'analyse des résultats, le constat qui se dégage est que, sur les 50 élèves de classe de terminale interrogés, un effectif de 50 élèves sur 50 élèves ne connaissent pas rédiger l'étape de l'hérédité et l'étape de la conclusion, soit un pourcentage de 100%. De même, au niveau de l'étape de l'initiation, 24 élèves sur 50 élèves maitrisent cette étape soit un pourcentage de 48%. En somme, nous avons un pourcentage de 74% qui ne maitrisent par les trois étapes de la récurrence, ce qui vérifie notre première hypothèse.

Hypothèse spécifique 2 : Certaines de ces difficultés proviennent des pratiques enseignantes et des manuels scolaires.

En se basant sur les cours des deux enseignants que nous avons analysés et aussi sur les pages du cours contenues dans le livre au programme dans les lycées et collèges du Cameroun, nous constatons que, l'énoncé du principe de récurrence est erroné. Cela peut constituer une source de difficultés dans l'utilisation de la démonstration par récurrence par les élèves. Ce qui justifie cette deuxième hypothèse.

Hypothèse spécifique 3 : D'autres proviennent des obstacles épistémologiques.

Selon notre étude épistémologique, certains mathématiciens comme Euclide et Nicomaque utilisent l'induction incomplète pour affirmer qu'une propriété est vraie au rang n, en lieu et place de l'induction complète qui est le raisonnement par récurrence. Cette utilisation de l'induction conduit à des résultats erronés comme dans l'exemple proposé par Nicomaque. La difficulté de type 11 citée plus haut conforte notre hypothèse.

Hypothèse générale : L'étude épistémologique du principe de récurrence peut permettre le dépassement par les élèves les difficultés rencontrent lors de l'utilisation de la démonstration par récurrence.

L'expérience que nous avons réalisée en classe de première C, en proposant la meilleure formulation de la démonstration par récurrence et en montrant aux élèves comment bien rédiger cette dernière, nous a permis d'avoir une nette amélioration de l'utilisation de la récurrence par les élèves. Ce qui justifie notre hypothèse générale.

5.4. Stratégies d'amélioration de l'apprentissage de la démonstration par récurrence

Après avoir repérer les difficultés rencontrées par les apprenants dans l'élaboration du raisonnement par récurrence dans le paragraphe 5.1, nous allons nous concentrer à présent dans cette partie sur la proposition de quelques recommandations que nous estimons utiles pour que les élèves arrivent à surmonter les difficultés rencontrées lors de l'usage du raisonnement par récurrence.

Vu les résultats obtenus après notre expérience en classe de première C, nous proposons ce cours comme cours témoin et que l'Etat à travers le MINESEC puisse l'introduire dans le livre au programme. Nous proposons aussi un recyclage des enseignants de mathématiques du secondaire à travers les séminaires afin que ces derniers s'imprègnent de la formulation de ce principe et de comment on le rédige.

Enfin, nous insistons sur la mémorisation des étapes de la récurrence par les élèves et sur l'utilisation de l'hypothèse de récurrence pour la démonstration de l'hérédité. En n'introduisant les activités dans l'apprentissage de la démonstration par récurrence en classe de terminale scientifique. Ces activités servent à donner du sens aux concepts mathématiques, à entraîner les élèves à l'activité scientifique et à promouvoir l'acquisition de méthodes (Ouédraogo et al., 2007). Si elles sont bien choisies et bien menées en classe, elles permettront aux élèves de comprendre le principe de récurrence.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVE

1. CONCLUSION GÉNRÉALE

Notre recherche portait sur la : « Démonstration par récurrence au second cycle de l'enseignement secondaire : difficultés et obstacles ». Nous avons constaté qu'en dépit des efforts consentis par les pouvoirs publics et les enseignants de mathématique, plusieurs difficultés et obstacles persistent dans l'apprentissage du raisonnement par récurrence au collège et lycée. Ces difficultés et obstacles sont principalement d'ordre épistémologiques et didactiques. L'épistémologie étant la science qui étudie la constitution et l'évolution du savoir, l'acceptation d'obstacles épistémologiques utilisés dans ce mémoire est définit par Bachelard dans *La Formation de l'Esprit Scientifique*, comme les causes de lenteur, d'inertie et de stagnation dans l'acte de connaître. La didactique quant à elle étudie les conditions et les processus de diffusion et de l'apprentissage des mathématiques, dans *Les Obstacles Didactiques* de Mehdi (2012, 2013), des obstacles didactiques sont des représentations négatives de la taché d'apprentissage, induite par un apprentissage antérieur, et faisant entrave à un apprentissage nouveau.

Notre question de recherche était la suivante : en quoi la prise en compte du point de vue épistémologique du principe de récurrence peut-elle aider les élèves à dépasser les difficultés que rencontrent les apprenants dans la démonstration par récurrence ? L'opérationnalisation de cette question principale a généré deux questions de recherche correspondant à trois centres d'intérêts qui sont :

- ✓ Dans l'apprentissage de la démonstration par récurrence, les difficultés rencontrées par les apprenants se situent au niveau des étapes de : l'initialisation, l'hérédité et la conclusion et de l'énoncé de ce principe.
- ✓ Certaines de ces difficultés proviennent des pratiques enseignantes et des manuels scolaires.
- ✓ D'autres proviennent des obstacles épistémologiques.

L'objectif générale de ce travail consistait à identifier les difficultés et les obstacles liés à l'apprentissage de la démonstration par récurrence par les apprenants, en vue de proposer des stratégies qui permettront aux apprenants de s'approprier ce principe et de l'utiliser convenablement pour faire des démonstrations.

L’enquête a été entreprise par le biais d’un questionnaire adressé à un échantillon de cinquante apprenants de Mathématique des séries générales scientifiques dans le Lycée Moderne de Nkozoa, dans l’Arrondissement Mfou du Département de la Mefou et Afamba.

Après notre enquête, nous avons obtenu les résultats suivants :

HR1 : Dans l’apprentissage de la démonstration par récurrence, les difficultés rencontrées par les apprenants se situent au niveau des étapes de : l’initialisation, l’hérédité et la conclusion.

HR2 : Certaines de ces difficultés proviennent des pratiques enseignantes et des manuels scolaires.

HR3 : D’autres proviennent des obstacles épistémologiques.

Les résultats auxquels nous sommes parvenus expliquent les difficultés rencontrées par les apprenants dans l’apprentissage de la démonstration par récurrence aux collèges et lycées.

2. PERSPECTIVES

Ce travail que nous avons effectué, procure à l’enseignant, un outil essentiel pour se recycler lui-même afin d’améliorer ses connaissances sur la démonstration par récurrence et par la suite pour qu’il puisse bien l’enseigner dans sa classe enfin de réduire de manière significative les difficultés rencontrées par les apprenants lors de l’utilisation de ce principe. Cette recherche nous a permis d’identifier les difficultés et les obstacles dans l’appropriation et la rédaction de la démonstration par récurrence dans les collèges et lycées du Cameroun, et aussi d’apporter les stratégies en vue d’une réduction de manière considérable de ces difficultés. Ces difficultés de concilier dans le processus enseignement-apprentissage de la transmission fidèle et rigoureuse du savoir et l’emploi des méthodes adaptées assurant l’assimilation des notions de l’apprenant, se pose pour beaucoup d’autres notions telle que celle de la limite d’une suite en utilisant ε (epsilon) ce qui fera éventuellement l’objet d’autres travaux.

Bibliographie

Audigier, F. (1988). *Savoirs enseignés - savoirs savants. Autour de la problématique du colloque, dans Troisième rencontre nationale sur la didactique de l'histoire, de la géographie et des sciences économiques et sociales***.** *Actes du colloque. Savoirs enseignés - savoirs savants*. Paris, INRP, pp. 13-15 ; 55-69

Bachelard, G. (1938). *Formation de l'esprit scientifique*. Paris : Librairie philosophique J.Vrin, 5e édition, 1967 .

Balacheff, N. (2019). *Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation*. In : Pilet J., Vendeira C. (eds.) Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018 (pp.423-456). Paris : ARDM et IREM de Pris - Université de Pari Diderot.

Balacheff, N. (1987). *Processus de preuves et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, 18(2), 147-176.

Beaud, M. (2006). *L'art de thèse*. Paris, la découverte, 55.

Blanché, R. (1975). *L'induction scientifique et les lois naturelles.* Presses Universitaires de France.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique*. Recherche en didactique des mathématiques 19(1), 77-123.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : pensée sauvage.

Cabassut, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*. [Thèse de doctorat, Université Paris 7]

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Séminaire de l'Associazione Mathesis, Turin, 3 février 1994, in Actes du Séminaire 1993-1994, 190-200.

Chevallard, Y. (1985*). La transposition didactique-du savoir savant au savoir enseigné, La pensée Sauvage*. Grenoble.

Clerc, J-B., Minder, P. et Roduit, G. (2006). *La transposition didactique.* In haute école pédagogique du canton de Vaud (HEP CV), Lausanne, Suisse, 1.

Deblois, L. (2006). *Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques*. Educational Studies in Mathematics numéro 62, 307-329.

Deblois, L. et Réné de Cortet, S. (2005). *Et si les erreurs des élèves étaient le fruit d'une extension de leurs connaissances. La réussite scolaire : comprendre et mieux intervenir*. Québec, Presse de l'Université Laval.

Douamba, J-P. et Kiendrebeogo, S. (2022). *Enseignement-apprentissage de la démonstration par récurrence en série D au Burkina Faso.* Lakisa, 3, 41-54.

Duval, R. (1992). *Argumenter, prouver, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ?* Petit x, (31), 37–61.

Egré, P. (2015). *Le raisonnement par récurrence : quel fondement ?* Gazette des Mathématiciens, numéro 146, 27-37.

Euclide (s.d). *Livres arithmétiques*. Jean Itard, Paris, Hermann, 1961.

Fabert, C. et Grenier D. (2011). *Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique*. Petit x, Irem de Grenoble, n°87, 31-52.

Gandit, M. (2004). *Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques.* Petit x, 65, 36-49.

Gardes, D. et al, (2016). *État des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence.* Petit x, 100, 67-98.

Gauthier, B. (1986). *Recherche sociale : de la problématique a la collecte des données.* Québec, QC : Presses de l'Université du Québec.

Grenier, D. (2011). *Une étude didactique du concept de récurrence.* In Petit x, numéro 88, Irem de Grenoble, 27-47.

Grenier, D. (2012). *La récurrence : concept mathématique et principe de preuve*. In Dorier J-L., Coutat S. (Eds). Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Acte du colloque EMF 2012, 1005-1015.

Grenier, D. et Payan, C. (1998). *Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes*. Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble, 18(1), 59-100.

Grenier, D. (2003). *The concept of « induction » in mathematics*. Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education.

Grenier, D. (2001). *Learning proof and modeling. Inventory of fixtures and new problems*. Proceedings of the 9th International Congress for Mathematics Education, Tokyo, Août 2000.

Grenier, D. (en cours, 2016). *La notion de répétition, obstacle épistémologique à la construction du concept mathématique de récurrence ? Actes du colloque « Du mot au concept : répétition »*. Presses Universitaires de Grenoble.

Hara, K. (1962). *Pascal et l'induction mathématique*. Revue d'histoire des sciences, 150-3-4, 287-302.

Legendre, R. (2005). *Le dictionnaire actuel de l'éducation*. Guerin, 1245.

Lelouard, M., Mira, C. et Nicolle J-M. (1990). *Différentes formes de démonstrations dans les mathématiques grecques*. *La démonstration mathématique dans l'histoire. IREM*, 155-180.

Lenoir, Y. et Tupin, F. (2012). *Les pratiques enseignantes entre instruire et socialiser. Regards internationaux*. Québec, Québec : Les Presses de l'Université Laval.

Le Pellec, J. et Violette, M-A. (1991). Enseigner l'histoire : un métier qui s'apprend. Paris, Hachette éducation, pp. 39-62.

Mace, G. (1988). *Guide d'élaboration d'un projet de recherche*. Les Presses de l'Université Laval, 41.

Mehdi, L. (2013). *Les Obstacles Didactiques*. CRMEF-Rabat.

Mintounou, M-X. (2020). *Collaboration de la communauté éducative et performances scolaires des apprenants : cas des élèves du lycée bilingue d'Ebolowa II.* [Mémoire de DIPCO, ENS, Yaoundé 1].

Mobarak, S. et Moussaddar, A. (2014). *Raisonnement par récurrence : sa place et ses difficultés au second cycle*. [Mémoire de maîtrise, Centre régional des métiers de l'éducation et de la formation du Grand Casablanca].

Nicomaque, G. (s.d). *Les nombres parfaits, redondants, déficients*. Op.cit., 74-78.

Nicomaque, G. (1978). *Introduction arithmétique.* Traduction de J.Bertier, Paris, Vrin.

Njomgang Ngansop, J. (2013). Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun. [Thèse de Doctorat, Université de Lyon]

Ntebe Bomba, G. (1996). *L'étudiant, le chercheur l'enseignant face à la rédaction des travaux académiques.* Yaoundé : Presse Universitaire de Scientifiques du Cameroun.

Ouédraogo, I. et Traoré, B. (2007). *Contribution à la compréhension de la notion d'activité d'apprentissage*. Bulletin d'Informations Pédagogiques, 3, 18-23.

Pascal, B. (1654). Traité *du triangle arithmétique in Œuvres complètes*. Paris, N.R.F, Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade, 1954.

Poulin, M.- A. (2013). *Un regard didactique sur la démonstration par récurrence.* [Master en sciences mathématiques]. Université de Namur.

Vidal, R. (2005). *Etude historique et critique de méthodes de démonstration en arithmétique***.** [Thèse de doctorat]. Université Lyon III – Jean moulin

Robert, A., Roditi, E. et Grugeon, B. (2007). *Diversité des offres de formation et travail du formateur d'enseignants de mathématiques du secondaire* Petit x numéro 74, 60-90.

Roshdi, R. (1984). *Entre Arithmétique et Algèbre*. Paris, Les Belles Lettres, 91.

Sii, P. (2010). *Education des enfants et performances scolaires dans les internats. Cas du Collège Joseph d'Obala*. [Mémoire de DIPCO, ENS, Yaoundé].

Annexes

Annexe 1 : Présentation des leçons

1. Présentation de la leçon de l'Enseignant 1

Leçon : Principe de raisonnement par récurrence

1) Valeur de vérité d'une assertion

Activité

Soient les affirmations A_1 : « $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ » et A_2 : « $\frac{2n+5}{n+1}$ » est un entier naturel.

a) Montrer que l'affirmation A_1 est vraie pour $n \in \{1, 2, 3,4\}$.
b) Montrer que l'affirmation A_2 est fausse pour $n \in \{3, 4\}$.

Résumé

La valeur de vérité d'une assertion mathématique exprimée à l'aide d'un entier naturel peut être donnée chaque fois qu'on connait la valeur de l'entier naturel.

Le successeur d'un entier naturel n est $n + 1$. Si p est un entier naturel non nul, alors le prédécesseur de p est $p - 1$.

Une propriété est héréditaire si chaque fois qu'elle est vraie pour un entier naturel quelconque, alors elle est aussi vraie pour son successeur.

Exemple

On considère l'assertion (P) : « $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ » pour $n \geq 2$.

a) Montrer que (P) est vraie pour $n = 2$ et pour $n = 4$.
b) Montrer que cette assertion est héréditaire.

2) Principe de raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on procède comme suit.

- ✓ On démontre que pour $\mathrm{n} = \mathrm{n}_0$, $\mathrm{P(n)}$ est vraie.
- ✓ On démontre que pour tout entier naturel $\mathrm{k} \geq \mathrm{n}_0$, si $\mathrm{P(k)}$ est vraie (hypothèse de récurrence), alors $\mathrm{P(k+1)}$ est aussi vraie.

Exemple : démontrons par récurrence que : $\forall n \geq 2, 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Pour $n = 2$, montrons que $1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(2(2)+1)}{6}$

$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$\frac{2(2+1)(2(2)+1)}{6} = \frac{2\times3\times5}{6} = 5$

Donc $1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(2(2)+1)}{6}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$.

Supposons que $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ et montrons que

$1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

On a : $1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$

Or par hypothèse de récurrence $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Ainsi $1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$

$$= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right)$$

$$= (k+1)\left(\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right)$$

$$= (k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

D’où le résultat.

Donc $\forall n \geq 2, 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice d’applications

Démontrer par récurrence que :

a) $\forall n \geq 1, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $\forall n \geq 5, 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1)n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$,

c) $\forall n \geq 1, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

3. Présentation de la leçon de l'Enseignant 2

Leçon : Raisonnement par récurrence

Soit n_0 un entier naturel et $P(n)$ une proposition définie pour tout entier naturel n $(n \geq n_0)$.

Si l'on sait que $P(n_0)$ est vraie et que, pour tout $n \geq n_0$, « $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie », on conclut que pour tout n superieur ou egal a $n_0, P(n)$ est vraie.

Remarques :

- La vérification de $P(n_0)$ s'appelle l'initialisation de la récurrence.
- La propriété « $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie » se traduit en disant que $P(n)$ est héréditaire.

Exemple :

Démontrer par la méthode de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution :

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$: « $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- Vérifions si $P(1)$ est vraie

  D'une part, on a :1.

  D'autre part, on a : $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$

  Alors $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

  D'où $P(1)$ vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie ie montrons que $1+2+3+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

  On a : $1+2+3+\cdots+(n+1) = 1+2+3+\cdots+n+(n+1)$

  $$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \qquad \text{par H.R.}$$

  $$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

  $$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie

  Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Annexe 2 : Questionnaire à destination des élèves de Tle C et P C

Ce travail fait partie d'une recherche et ne sera pas utilisé pour vous évaluer. Nous voudrions que vous écriviez tout ce que vous pensez sur les exercices fournis. Le travail doit être fait individuellement. Nous vous sommes très reconnaissants de l'attention que vous porterez pour répondre à ces questions.

Classes : Tle C et P C

Lycée : Moderne de Nkozoa **Durée** : 1h30 min

Exercice 1

Soit (u_k) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k}$.

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N},\ 0 < u_k < 2$.

Exercice 2

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{R}^+$et $a \in \mathbb{N}$ on a $(1 + n)^a \geq 1 + an$.

Exercice 3

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 4

À partir de quelle valeur de n peut-on démontrer par récurrence que $2^n \geq (n + 1)^2$.

Annexe 3 : Notre séquence didactique sur le raisonnement par récurrence en classe de P C

<u>Chapitre</u> : Suite numérique

<u>Leçon 1</u> : Raisonnement par récurrence

A) Vérifier les pré-acquis :

Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{3^{2n+2}}{n+1}$.

B) Situation problème

Un élève de Terminale C voudrait montrer que la suite $(\mathrm{U_n})$ definie par : $\begin{cases} \mathrm{U_0} = 2 \\ \mathrm{U_{n+1}} = 5\mathrm{U_n} + 4 \end{cases}$ est à termes positifs. Comment peut-il procède ?

C) Activités d'apprentissage

Activité 1

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $P_n : U_n \geq 0$.

4) Montrer que la propriété P_n est vraie pour $n = 0$.
5) Soit $n \geq 0$, supposons que P_n est vraie et montrons que $(P_n \Longrightarrow P_{n+1})$ est aussi vraie.
6) Conclure.

Activité 2

On considère la propriété définie pour tout entier naturel $n \neq 0$, par $Q(n) :\ 2^{\mathrm{n}} > 5(\mathrm{n}+1)$.

a) Pour quelles valeurs de n l'implication $Q(n) \implies Q(n+1)$ est-elle vraie ?
b) A partir de quelles valeurs de n la propriété $\mathrm{Q}(n)$ est-elle vraie ?

D) Résumé

On définit intuitivement l'ensemble ℕ à partir de l'opérateur « $+1$ » qui consiste à passer d'un entier n à son successeur $s(n)$ où

$s(n) = n + 1$. Cependant, le processus « $+1$ » ne peut pas se réaliser jusqu'à l'infini. C'est là que l'axiome de récurrence intervient et ℕ contient un nombre initial qui est 0. On a le schéma suivant :

$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \ldots$ D'où $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Propriété (admise) : Le plus petit élément de $\mathbb{N}$ est 0 et $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

L'axiome de récurrence permet par conséquent de ne pas décrire $\mathbb{N}$ en répétant indéfiniment l'opération.

Propriété (l'énoncé de principe de raisonnement par récurrence formulé par Grenier) :

Pour démontrer qu'une proposition $\mathrm{P(n)}$ est vraie pour tout entier naturel $\mathrm{n} \geq \mathrm{n_0}$, on procède comme suit : SI [il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie ET pour tout $n \geq n_0, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie] ALORS [pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie].

Exemple

On définit la suite $(\mathrm{U_n}), \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} \mathrm{U_0} = 2 \\ \mathrm{U_{n+1}} = \sqrt{\mathrm{U_n} + 6} \end{cases}$. Montrer que $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{U_n} \leq 3$

Soit $n \in \mathbb{N}$, désignons par $P(n)$ la propriété : « $\forall n \geq 0$, $\mathrm{U_n} \leq 3$».

- Pour $n = 0$, on a :

$U_0 = 2 < 3$, donc $P(0)$ est vraie.

- Soit $n \geq 0$, suppossons que $P(n)$ est vraie et montrons que $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie.

On a:

$U_n \leq 3$ **(H.R)**

$f(U_n) \leq f(3)$ car la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante

$\sqrt{U_n + 6} \leq 3$

$U_{n+1} \leq 3$

D'où $\forall n \geq 0$, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vrai et que pour tout $n \geq 0$, $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie, donc d'après le principe de récurrence, on peut donc affirmer que pour tout $n \geq 0, P(n)$ est vraie.

Résolution de la situation problème avec les élèves

E) Exercices d'applications

Exercice 1

On définit la suite (un) par $u_0 = 0$ et, pour tout $n > 0$, par :

$u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a : $u_n = 2\sqrt{n}$.

Exercice 2

Démontrons par récurrence que : $\forall n \geq 1, 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3

Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n_0 pour laquelle on peut démontrer la propriété $n^2 > 2n + 1$ par récurrence. Et démontrer cette propriété par récurrence.

Exercice 4

Soit $n \geq 1$. Démontrer par récurrence la propriété définie par $P(n)$: " $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n - 1)2^n + 1$ ".

Exercice 5

Démontrer par récurrence que :

a) $\forall n \geq 1, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
b) $\forall n \geq 5, 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1)n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$,
c) $\forall n \geq 1, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$