

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
PAIX-TRAVAIL-PATRIE

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ 1

FACULTÉ DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET
FORMATION DOCTORALE EN
SCIENCES, TECHNOLOGIES
GÉOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET
FORMATION DOCTORALE SCIENCE
PHYSIQUES ET APPLICATIONS

B.P Box 812 Yaoundé

Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON
PEACE-WORK-FATHERLAND

UNIVERSITY OF YAOUNDÉ 1

FACULTY OF SCIENCE

POSTGRADUATE SCHOOL OF
SCIENCE, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCE

RESEARCH AND POSTGRADUATE
TRAINING UNIT IN PHYSICS AND
APPLICATION

B.P BOX 812 Yaoundé

Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

LABORATOIRE D'ÉNERGIE ET SYSTÈMES ÉLECTRIQUES ET ÉLECTRONIQUES

LABORATORY OF ENERGY, AND ELECTRIC AND ELECTRONIC SYSTEMS

SYNCHRONISATION SOUS MICROCONTRÔLEURS D'OSCILLATEURS CHAOTIQUES À MÉMOIRE

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT/PhD en
Physique

Spécialité: **Systèmes électriques et électroniques**

Par:

TAGNE Samuel

Matricule: **12W0448**

Master de physique

Sous la direction de:

BODO Bertrand

Maître de Conférences, Université de Yaoundé 1



Année 2023



DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE
DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeurs **VONDOU Debertini A**, **EYEBE FOU DA Jean Sire Armand**, **MBINACK Clément**, **EFFA Joseph Yves** et Professeur **ESSIMBI ZOBO Bernard**, respectivement Examineurs et Président du jury de la thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur **TAGNE Samuel** Matricule **12W0448**, préparée sous la direction du Professeur **BODO Bertrand**, intitulée : « **Synchronisation sous microcontrôleurs d'oscillateurs chaotiques à mémoire** », soutenue le **Lundi, 24 Avril 2023**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique, Spécialité **Energie et Systèmes Electriques et Electroniques**, attestons que toutes les corrections demandées par le Jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le **04 MAI 2023**

Examineur

EYEBE FOU DA Jean
Sire Armand, MC, Uy1

Le Président du Jury

ESSIMBI ZOBO Bernard,
Pr, Uy1



Le Chef de Département de Physique

Jean-Marie Bienvenu
Professeur

DÉDICACE

À Ma famille

REMERCIEMENTS

Avant tout, je tiens à exprimer mes plus profonds remerciements au Dieu tout Puissant qui m'a accordé jusqu'ici le souffle de vie et la force nécessaire pour franchir les obstacles. Au Professeur **BODO Bertrand** pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant de diriger ce travail. Merci pour ses conseils, ses encouragements et ses remarques constructives.

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués dans l'unité de prototypage de circuits du laboratoire d'électronique. Ainsi, je remercie le Professeur **EYEBE FOUDA** pour m'avoir permis de travailler dans un tel cadre, me fournissant tout le matériel nécessaire, son temps et ses conseils multiformes. J'exprime également mes plus profonds remerciements

- ▶ Au Recteur de l'Université de Yaoundé 1, à travers le Centre de Recherche et de Formation Doctorale en Sciences Technologies et Géosciences, pour m'avoir sélectionné en Thèse.
- ▶ Aux Membres du jury, pour m'avoir honoré à travers leur présence et aussi pour avoir accepté d'évaluer ce travail.
- ▶ Au Professeur **NDJAKA JEAN Marie Bienvenu**, Chef de Département de Physique ainsi qu'à tous les enseignants du département pour les enseignements et conseils reçus. Ma pensée va à messieurs les Professeurs **ESSIMBI ZOBO Bernard**, **MBINACK Clément**, **BIYA MOTO**, **NANA ENGO Serge Guy**, **VONDOU Debertini Appolinaire** et au Docteur **AYISSI EYEBE Guy Valery** pour les enseignements et conseils reçus.
- ▶ À tous mes aînés académiques pour leurs amitiés, encouragements, et échanges instructifs. Ma pensée va à l'endroit de **DJEUFA DAGOUMGUEI Guy Morgand** et **EMAKOUA Herman**, qu'ils trouvent ici ma sincère reconnaissance. Je remercie également **DJEU-GOUE NZEUGA Herman**, **GNYAMSI NKUIGWA Gaetan Gildas**, **NZEPAN DJUIANGA Anicet**, **PANCHA Hertz**, **WANDJA Guillene Martiale**, **MVUH Franck**, pour la collaboration, la solidarité, l'esprit d'équipe et les débats passionnants qui nous ont mutuellement enrichis.
- ▶ À tous les membres de ma famille pour leurs soutiens multiformes. Ma pensée va

à l'endroit de **Mr FOTSO Roger, TAMO TAGNE Justin, WAFO Emmanuel, FOTSO Ayo, Mme KENGNE TAGNE Sylvie Epse NGANGUEM** et à tous ceux que je n'ai pas mentionnés, pour une raison ou une autre, je leurs présentes ma gratitude.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Dédicace</i>	ii
<i>Remerciements</i>	iii
<i>Table des matières</i>	v
<i>Liste des figures</i>	ix
<i>Liste des Tableaux</i>	x
<i>Liste des abréviations</i>	xi
<i>Résumé</i>	xii
<i>Abstract</i>	xiii
<i>Introduction générale</i>	1
1 Revue de la littérature	4
1.1 Systèmes dynamiques	4
1.1.1 Modélisation mathématique d'un système dynamique	5
1.1.2 Caractéristiques d'un système dynamique	5
1.1.3 Théorie du chaos	6
1.1.4 Notion d'attracteur	7
1.1.5 Typologie des attracteurs	7
1.1.6 Exemples de systèmes chaotiques	7
a) Déterminisme	8
b) Non-linéarité	8
1.2 Memristor	8
1.2.1 Définition	9
1.2.2 Évolution du memristor	10
a) Memristor selon HP	10
b) Memristor à Diode	13
c) Memristor selon Biolek et application à un système chaotique	14

1.2.3	Application du memristor aux systèmes chaotiques	15
1.3	Généralités sur la dérivée fractionnaire	17
1.3.1	Historique	17
1.3.2	Définitions	18
1.3.3	Application de la dérivée fractionnaire aux systèmes Chaotiques	19
1.4	Applications du chaos	20
1.4.1	En bourse	20
1.4.2	Dans le corps humain	21
1.4.3	Dans la robotique	21
1.4.4	Dans le domaine des télécommunications	21
a)	Cryptologie	22
b)	Synchronisation des systèmes chaotiques	23
c)	Pourquoi synchroniser ?	23
d)	Différents types de synchronisation	23
e)	Méthodes de synchronisation	23
f)	Commande active	24
g)	Commande backstepping	24
1.5	Conclusion	25
2	Matériel et méthodes	26
2.1	Méthodes numériques de résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires	27
2.1.1	Méthode d'Euler	27
2.1.2	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	28
2.2	Méthodes numériques de résolution des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire	28
2.2.1	Méthode de Grünwald-Letnikov	28
2.2.2	Méthode d'Euler généralisée	29
2.3	Méthodes de caractérisation du Chaos	30
2.3.1	Méthodes basées sur la structure du système	30
a)	Critère de Routh Hurwitz (RH)	31
b)	Bassin d'Attraction (BA)	32
c)	Coexistence des attracteurs	33
d)	Calcul des exposants de Lyapunov	34

e)	Caractéristiques des exposants de Lyapunov	35
f)	Diagramme de bifurcation	36
g)	Caractérisation de l'attracteur du système	36
2.3.2	Méthodes basées sur la série temporelle : Algorithme de Michael T. Rosenstein	38
a)	Description de la méthode de Rosenstein	38
b)	Algorithme de Michael T. Rosenstein	38
2.4	Conception d'un <i>memristor</i>	40
2.4.1	Modèle à chaîne directe	40
2.4.2	Modèle du produit	41
2.5	Conception d'un circuit chaotique	41
2.5.1	Circuits analogiques	41
a)	Intégration (Fig. 3.5b)	41
b)	Dérivateur (Fig. 3.5a)	42
c)	Exponentielle (Fig. 2.4c)	42
d)	Inversion (Fig. 2.4d)	42
2.5.2	Conception de circuits numériques	43
2.6	Conception d'un condensateur fractionnaire	43
2.7	Méthode du contrôle actif	46
2.8	Matériel utilisé	47
2.8.1	Outils logiciels	47
a)	Logiciel MATLAB	47
b)	Logiciel MPLAB X	48
c)	Compilateur MPLAB XC8 C	48
d)	Logiciel Multisim	49
2.8.2	Outils matériels	50
a)	Programmeur PICkit 3	50
b)	Microcontrôleur PIC16F877A	50
c)	Carte de développement Explorer 8	51
d)	Convertisseur numérique-analogique	52
2.8.3	Pourquoi une implémentation par μC ?	54
2.8.4	Programmation du microcontrôleur	54
a)	Descriptions de l'algorithme	54
b)	Translation du domaine Analogique au domaine numérique	55

2.9	Conclusion	56
3	Résultats et discussion	57
3.1	Cas de l'oscillateur à dérivées fractionnaires	57
3.1.1	Étude dynamique du système de Jerk	58
a)	Caractéristiques du système	58
b)	Route vers le Chaos	59
3.1.2	Modèle fractionnaire du système de Jerk	59
a)	Solution numérique du système fractionnaire	61
b)	Route vers le chaos pour le modèle fractionnaire	61
3.1.3	Synchronisation de deux systèmes de Jerk fractionnaires	63
3.1.4	Résultats expérimentaux	64
a)	Dispositif expérimental	64
b)	Analyse des attracteurs	65
c)	Analyse du résultat expérimental de la synchronisation	65
3.2	Cas de l'oscillateur à Memristor	67
3.2.1	Modèle de Memristor	67
3.2.2	Structure du système Memristif 4D proposé	68
3.2.3	Étude dynamique du système	69
a)	Stabilité des points d'équilibre	69
b)	Dissipativité et existence d'attracteur	70
c)	Bassin d'attraction	70
d)	Analyse des diagrammes de Bifurcation et des exposants de Lyapunov	71
e)	Coexistence des attracteurs	77
f)	Influences des conditions initiales sur la complexité du système	77
3.2.4	Conception du circuit analogique du système (Eq. 3.17)	78
a)	Memristor sous multisim	80
b)	Influence de l'effet mémoire sur la dynamique du circuit complet	81
c)	Inadéquation entre les résultats de l'analyse multisim et les résultats de la résolution Matlab	83
3.2.5	Réalisation expérimentale du système (Eq. 3.17)	84
a)	Schéma bloc du système	84
b)	Observations	86

3.2.6	Application : Synchronisation de deux systèmes à memristor	86
3.2.7	Effet de synchronisation sur deux attracteurs coexistants	88
3.2.8	Résultats expérimentaux de la synchronisation	89
3.3	Sources d'erreurs et fiabilité du résultat	89
3.3.1	Erreur de translation	89
3.3.2	Erreurs de conversion	90
3.3.3	Estimation de l'erreur globale	91
3.3.4	Conclusion	93
		Page
	<i>Conclusion générale</i>	94
	<i>Publication scientifique</i>	107

TABLE DES FIGURES

1.1	Circuit de duffing	6
1.2	Attracteur dans le plan $x - y$ de : (a) Chua, (b) Lorenz, et (c) Duffing	8
1.3	Éléments électriques de base	9
1.4	Symbole du memristor	10
1.5	memristor : Modèle HP au TiO_2	11
1.6	Figure caractéristique du memristor : modèle mathématique de HP! $R_{on} = 100; R_{off} = 16 \times 10^3; p = 1; D = 10 SI$	13
1.7	memristor : Modèle à Diode	14
1.8	Représentation de i en fonction de la tension avec en (a) $v_M = 2\sin(2\pi ft)$ V et en (b) une autre tension d'alimentation prise sous la forme $v_M = 2.5 + 1.5\sin(2\pi ft)$ V	15
1.9	(a) , Diagramme bloc général d'un système memristif (b) , memristor idéal	15
1.10	Modèle memristif réel de Biolek et al.	16
1.11	Observation des attracteurs de l'oscillateur de Duffing memristif en fonction de la tension : variation croissante.	17
1.12	Observation des attracteurs de l'oscillateur de Duffing memristif en fonction de la tension : variation décroissante.	17
1.13	Système de communication basé sur le cryptage et la synchronisation chaotique	22
1.14	(Fig. 1.14a) Evolution temporelle et (Fig. 1.14b) l'attracteur de Jerk résolue avec deux CI s très proches	24
2.1	Illustration du calcul l' EL pour une série temporelle.	40
2.2	<i>Schéma bloc du memristor à chaine directe</i>	40
2.3	<i>Schéma bloc du memristor à produit</i>	41
2.4	Quelques schémas de principe de base en électronique analogique	42
2.5	<i>Schéma de circuit d'ordre fractionnaire</i> $\frac{1}{s^{0.9}}$	45
2.6	<i>Schéma de circuit d'ordre fractionnaire</i> $\frac{1}{s^{0.95}}$ and $\frac{1}{s^{0.97}}$	45

2.7	Interface de programmation MATLAB	47
2.8	Interface de programmation MPLAB X	48
2.9	Logiciel Multisim	49
2.10	programmateur PICkit 3	51
2.11	μ C PIC16F877A et son brochage	51
2.12	Carte de développement Explorer 8	52
2.13	Réseau de CNA R2R	53
2.14	Réalisation d'un CNA 8 bits	53
2.15	Organigramme du code	55
2.16	Translation du vecteur d'état	55
2.17	Schéma bloc du dispositif	56
3.1	Diagramme de Bifurcation (Fig. 3.1a) et les ELs (Fig. 3.1b) pour $\beta \in [0.328, 0.43]$, $\alpha = \frac{1}{10}$, pour $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$	60
3.2	Portrait de phase du système de jerk fractionnaire pour $(x, y, z) = (0, 1, 0)$	62
3.3	(Fig. 3.3a) : diagramme de Bifurcation, (Fig. 3.3b) : plus grand exposant de Lyapunov	63
3.4	La (Fig. 3.4a) Synchronisation de x_m et x_s , la (Fig. 3.4b), erreurs de synchro- nisation pour $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$,	64
3.5	Evolution temporelle de x_m et y_m et le dispositif expérimental	65
3.6	Portraits de phase de x en fonction de y obtenu expérimentalement	66
3.7	Résultats de synchronisation fractionnaire sous μ C : $e_1(t)$ et $e_2(t)$ désignent l'erreur de synchronisation (Fig. 3.7a). Sur la (Fig. 3.7b), $x_m(t)$ est synchronisé avec $x_s(t)$ pour $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$	66
3.8	Memristor	67
3.9	(Fig. 3.9a) Courbe d'hystérésis du système, (Fig. 3.9b) evolution temporelle de x_m et y_m	68
3.10	Etude de la divergence	71
3.11	BA pour (Eq. 3.17) avec $z(0) = -0,01$ et $u(0) = 0,01$	72
3.12	(Fig. 3.12a) Portrait de phase en x, y, z et (Fig. 3.12b) en x, y	72
3.13	Trajectoires de l'espace de phase du système générées par le logiciel MAT- LAB projetées sur les plans $y - z$ obtenues pour $\rho = 0.07$ et $\rho = -0.07$ avec $x(0) = 0.1, y(0) = 0.00, z(0) = -0.01$ et $u(0) = 0.00$	73

3.14 Portraits de phase **MATLAB** 2D (y, z) et 3D (x, y, z) du nouveau système hyperchaotique 4-D (Eq. 3.17) pour $\delta = 1$ ((Fig. 3.14.a),(Fig. 3.14.b)), $\delta = 1.2$ ((Fig. 3.14.b),(Fig. 3.14.f)), $\delta = 1.4$ ((Fig. 3.14.c),(Fig. 3.14.g)) et $\delta = 2$ ((Fig. 3.14.d),(Fig. 3.14.h)), avec $\rho = 0.07, \beta = 3.69, \delta = 2.14, \gamma = 0.418$; . . . 74

3.15 Attracteurs chaotiques, hyperchaotiques et périodiques décrits dans (Tab. 3.3). 75

3.16 (Fig. 3.16.a) et (Fig. 3.16.b) sont des diagrammes de bifurcation, (Fig. 3.16.c) et (Fig. 3.16.d) sont des exposants de Lyapunov et (Fig. 3.16.f) et (Fig. 3.16.f) sont la dimension des exposants de Lyapunov du système hyperchaotique (Eq. 3.17) avec la variation de δ et γ comme indiqué dans chaque figure pour les paramètres : $\alpha = 9, \beta = 3, \rho = -0,1$ les états initiaux sont (0.1, 0, -0.01, 0.01). 76

3.17 Bifurcation de la dimension de kaplang pour α, β lorsque $\gamma = 1.2, \delta = 1.1$, et δ, β lorsque $\gamma = 1.2, \alpha = 0.8$ 77

3.18 Trajectoires de l'espace des phases du système générées par le logiciel **MATLAB** projetées sur les plans $y - z$ obtenus pour certaines valeurs de $u(0)$ 78

3.19 Complexité du système en fonction des conditions initiales 79

3.20 Schéma électronique du système 80

3.21 (Fig. 3.21a) : Circuit du memristor, (Fig. 3.21b) : Caractéristique v_{mem}/v_e du memristor 81

3.22 Réponses du memristor et Attracteurs correspondants 82

3.23 Attracteur **MATLAB** sur la (Fig. 3.23a), Attracteur Multisim sur la (Fig. 3.23b) 83

3.24 (Fig. 3.24a) Caractéristique expérimentale ($v_{mem} - v_e$) du memristor contrôlé en tension, la (Fig. 3.24b) attracteur expérimental pour $\gamma = 0.67$ et $\rho = 0.1$ dans le plan y-z 85

3.25 Portraits de phase expérimentaux obtenus à l'aide d'un oscilloscope numérique en mode XY; les tensions de sortie $y(t)$ et $z(t)$ sont envoyées aux différents ports du μC (PORTA et PORTD), respectivement : La (Fig. 3.25a) période-1 pour $\gamma = 1.1$ et $\rho = 0.1$; la (Fig. 3.25b) période-2 pour $\gamma = 0.946$ et $\rho = 0.1$; la (Fig. 3.25c) période-4 $\gamma = 0.85$ $\rho = -0.1$; la (Fig. 3.25d) chaos pour $\gamma = 0.67$ et $\rho = 0.1$. $\alpha = 9$ et $\beta = 2$ pour toute image 85

3.26 Résultats de la simulation de la synchronisation des vecteurs d'états, avec $\alpha = 10$; $\beta = 3$; $\gamma = 0.8$; $\rho = 0.1$ $x_m(1) = 0.1; y_m(1) = 0; z_m(1) = -0.01; u_m(1) = 0.01$; $x_s(1) = 0.4; y_s(1) = 0.4; z_s(1) = -0.4; u_s(1) = 0.04$; 87

3.27 Time response curve for synchronization error $e(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t))^T$ 88

3.28 3.28a : Attracteur coexistant pour les CIs $[0.4, 0.4, -0.4, 0.04]$ représenté en rouge (esclave) et $[0.1, 0, -0.01, 0.01]$ dans en bleu (maître). (Fig. 3.28b) : Résultat de la synchronisation des attracteurs de la (Fig. 3.28a)	88
3.29 Résultats expérimentaux de la synchronisation des variables états : $x_s(t)$ & $x_m(t)$	89
3.30 Un signal analogique à l'intérieur du $\mu\mathbf{C}$	90
3.31 Translation du vecteur dans l'intervalle $[0, 5]$	91
3.32 Influence de n (Fig. 3.32a) et erreur d'appréciation sur le signal de sortie (Fig. 3.32b).	92

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Les coefficients du polynôme de RH	31
2.2	<i>Tableau d'approximation de la fonction de transfert</i>	46
2.3	Influence du nombre de bit sur la tension de sortie analogique à pleine échelle	54
3.1	Analyse de la stabilité des points d'équilibre pour le système memristif	70
3.2	Caractéristiques des attracteurs de la (Fig. 3.14)	73
3.3	Dimension de KY du système (Eq. 3.17) pour la (Fig. 3.15).	74
3.4	La dimension maximale de KY de systèmes hyperchaotiques typiques	75
3.5	Tableau des paramètres	85
3.6	Évolution des erreurs pour les cas étudiés	93

LISTE DES ABRÉVIATIONS

MATLAB : **M**atrix **L**aboratry.

AOP : **A**mplificateur **O**pérationnel

HP : **H**ewlett **P**ackard

SD : **S**ystème **D**ynamiques

ME : **M**éthode d'**E**uler

EDO : **É**quation **D**ifférentielle **O**rdinaire

RHs : **R**outh **H**urwitz

BA : **B**assin d'**A**ttraction

CI : **C**onditions **I**nitiales

SNL : **S**ystème **N**on-**L**inéaires

PEs : **P**oints d'**É**quilibres

GS : **G**ram **S**chmidt

KY : **K**aplan-**Y**orke

TC : **T**héorie du **C**haos

μ **C** : **M**icro-**C**ontrôleur

EDI : **E**nvironnement de **D**éveloppement **I**ntégré

USB : **U**niversal **S**erial **B**us

DIP : **D**ual **I**n-line **P**ackage

PLCC : **P**lastic **L**eaded **C**hip **C**arrier

CMOS : **C**omplementary **M**etal-**O**xide-**S**emiconductor

FPGA : **F**ield-**P**rogrammable **G**ate **A**rray

SPICE : **S**imulation **P**rogram with **I**ntegrated **C**ircuit **E**mphasis

AVR : **A**lf and **V**egard's **R**ISC processor

RÉSUMÉ

Au début de cette décennie, plusieurs travaux se sont intéressés à des dispositifs à mémoire autres que les traditionnelles bascules. De ce fait, deux composants ont fait l'objet d'un intérêt particulier : les circuits à mémoire ou memristors et les circuits synthétisant le calcul fractionnaire. L'approche classique préconise l'utilisation de plusieurs composants électroniques analogiques tels que des résistances, des condensateurs, des bobines, des multiplicateurs, des amplificateurs opérationnels, qui sont encombrants et consomment beaucoup d'énergie. Pour pallier ces inconvénients, nous proposons dans cette thèse une nouvelle approche qui consiste à implémenter ces systèmes sur un microcontrôleur bon marché et facile à programmer. Pour ce faire, les systèmes à synchroniser font d'abord l'objet d'études numériques et analytiques. Une fois la nature du système déterminée, son implémentation dans le microcontrôleur se fait en langage de programmation C grâce au logiciel de programmation MPLAB, couplé à son compilateur XC8. Pour visualiser les données sur un oscilloscope numérique, nous avons inséré entre le microcontrôleur et celui-ci un convertisseur numérique-analogique que nous avons construit précédemment. Comme résultats, nous observons que pour le système fractionnaire, en considérant les mêmes paramètres de contrôle, le système produit une réponse chaotique alors que le système classique révèle une dynamique périodique. Dans le cas du système memristor, nous observons une grande complexité liée à la variation des paramètres de contrôle. À titre indicatif, nous observons que la dimension de Kaplan du système est élevée par rapport à celles des systèmes observés dans la littérature. Enfin, pour les deux systèmes proposés, nous démarrons les deux systèmes avec deux conditions initiales proches et nous réalisons numériquement et expérimentalement que, grâce au processus de synchronisation, basé sur le modèle de contrôle actif, les deux systèmes trouvent la même trajectoire après quelques microsecondes.

Key words : Microcontrôleur, PIC16F877A, synchronisation, Chaos, Hyperchaos, calcul fractionnaire, Memristor

ABSTRACT

At the beginning of this decade, several works were interested in memory devices other than the traditional flip-flops. As a result, two components have been the object of particular interest : memory circuits or memristors and circuits synthesizing fractional computation. The classical approach recommends the use of several analog electronic components such as resistors, capacitors, coils, multipliers, operational amplifiers, which are bulky and consume a lot of energy. To overcome these drawbacks, we propose in this thesis a new approach which consists in implementing these systems on a cheap and easy to program microcontroller. To do so, the systems to be synchronized are first the object of numerical and analytical studies. Once the nature of the system is determined, its implementation in the microcontroller is done in C programming language thanks to the MPLAB programming software, coupled with its XC8 compiler. To visualize the data on a digital oscilloscope, we have inserted between the microcontroller and it a digital-analog converter that we have built previously. As results, we observe that for the fractional system, considering the same control parameters, the system produces a chaotic response while the classical system reveals a periodic dynamics. In the case of the memristor system, we observe a great complexity related to the variation of the control parameters. As an indication, we observe that the Kaplan dimension of the system is high compared to those of the systems observed in the literature. Finally, for the two proposed systems, we start the two systems with two close initial conditions and realize numerically and experimentally that, thanks to the synchronization process, based on the active control model, the two systems find the same trajectory after a few microseconds.

Key words : Microcontroller, PIC16F877A, synchronization, Chaos, Hyperchaos, fractional computing, Memristor

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans la sphère électronique, le terme "mémoire" désigne les éléments de stockage de données, en l'occurrence les bascules. Dans la mesure où chaque bascule contient plusieurs transistors, orchestrant une consommation d'énergie considérable, de nombreux travaux ont été réalisés pour explorer de nouvelles possibilités. Suite à cela, deux composants ont fait l'objet d'une attention particulière : les memristors et les circuits fractionnaires [1].

Le *memristor*, introduit en 1971 par Chua [2], est un dispositif résistif à deux bornes qui a la capacité de conserver ses données en l'absence d'une alimentation électrique. Étymologiquement, il s'agit de la contraction de deux mots anglais « memory et resistor ». Il établit une relation entre la charge électrique $q(t) \equiv \int_{-\infty}^t i(\tau)$ et le flux magnétique $\varphi(t) \equiv \int_{-\infty}^t v(\tau)$. Cette relation constitue l'essence de l'effet mémoire induit par le *memristor*. L'effet mémoire ici peut s'entendre comme étant la capacité d'un élément ou d'un ensemble d'éléments à stocker l'état d'un système à un moment donné et à le restituer ultérieurement [3–5]. Longtemps considéré comme composant hypothétique, car aucun exemple physique n'étant connu, ce n'est qu'en 2008, soit 37 ans plus tard, qu'une implémentation physique du *memristor* fut proposée dans la littérature par une équipe de chercheurs du laboratoire Hewlett Packard (HP) conduite par R. Stanley Williams. Ses potentielles et prometteuses applications dans le domaine des mémoires nanoélectroniques ont depuis lors été abondamment rapportées [6].

Le **calcul fractionnaire** est un concept mis sur pied pour généraliser l'opérateur de dérivation et d'intégration. L'opérateur fractionnaire a été introduit presque simultanément avec le développement des opérateurs classiques. La première référence connue est dans la correspondance de G. W. Leibniz à M. de l'Hospital en 1695, où la question de la définition de la dérivée à l'ordre 1/2 a été soulevée [7]. Ce concept est devenu un sujet de recherche actif dans le domaine des sciences non-linéaires, en raison de ses applications potentielles en électronique, mécanique, physique nucléaire, médecine et les systèmes financiers [8, 9].

À la lumière de ces définitions, nous pouvons souligner des intérêts communs existants entre les deux concepts, notamment, dans la conception de systèmes dynamiques chaotiques, d'autant plus que par l'effet mémoire qu'ils sont susceptibles d'incarner, ils peuvent générer des attracteurs cachés que l'approche conventionnelle ne permet pas de mettre en évidence. Cela justifierait l'engouement observé autour de la conception de nouveaux systèmes dynamiques chaotiques. Bien que le premier système chaotique ait été officiellement découvert par Lorenz en 1963, des sources documentaires nous apprennent qu'Henri Poincaré a fait une découverte similaire vers 1900, sans pouvoir nommer le concept, en raison de la difficulté à comprendre, voire à expliquer les manifestations d'un phénomène chaotique. La vacuité qui entourait alors ce concept a fait que l'étude des systèmes chaotiques soit restée inexplorée jusqu'à l'apparition des premiers calculateurs dans la seconde moitié du vingtième siècle. On comprend alors pourquoi les manifestations qui découlaient de ce phénomène, notamment la sensibilité à la moindre variation des conditions initiales, étaient considérées comme des perturbations. Grâce aux nombreuses applications disponibles, il apparaît aujourd'hui que la notion de chaos est principalement due au couplage de la non-linéarité et de la sensibilité aux conditions initiales. Si nous sommes aujourd'hui capables de qualifier et de quantifier les effets de ce couplage dans un système dynamique, c'est parce que plusieurs techniques de caractérisation et de contrôle ont été établies [10]. Il s'agit notamment du calcul des exposants de Lyapunov [11–13], le test 0-1, l'entropie de Kolmogorov, l'entropie conditionnelle des modèles ordinaux, pour ne citer que ceux-ci. Parmi ces mesures, seuls les exposants de Lyapunov peuvent révéler qualitativement le caractère hyperchaotique d'un système non linéaire [14, 15]. On précise qu'un système est **hyperchaotique** s'il possède au moins deux exposants de Lyapunov positifs [16–19]. Par ailleurs, les méthodes entropiques montrent quantitativement qu'un système hyperchaotique a une dynamique plus riche qu'un système chaotique.

Dans la littérature, la conception de circuits capables d'adopter de tels comportements (chaotiques et hyperchaotiques), présentant une non-linéarité memristive ou pris à un ordre fractionnaire, afin d'observer l'impact de l'effet mémoire sur l'évolution dudit système, est devenue, en électronique, plus qu'une nécessité [16, 17]. Sur ce point, l'approche classique préconise l'utilisation de plusieurs composants électroniques analogiques tels que des résistances, des condensateurs, des bobines, des multiplicateurs, les amplificateurs opérationnels, qui sont encombrants et consomment beaucoup d'énergie. Pour réduire ce problème de consommation énergétique et d'encombrement, des travaux ont été proposés pour promouvoir l'utilisation de cartes programmables telles que FPGA et Arduino. Malheureusement, il est difficile de séparer les microcontrôleurs programmés de leur carte correspondante. Cette situation a également

une conséquence sur le coût de revient ainsi que sur la portabilité du système proposé. En effet, l'un des challenges de cette dernière décennie est la conception des systèmes embarqués, qui sont des systèmes électroniques et informatiques autonomes, spécialisé dans une tâche précise. De ce fait, l'usage des cartes suscité ne participe pas à la miniaturisation tant souhaitée. Ainsi, pour surmonter ces multiples inconvénients, nous proposons dans cette thèse, une nouvelle approche qui consiste à implémenter lesdits systèmes sur un microcontrôleur bon marché et facile à programmer, en l'occurrence, le PIC16F877A, possédant à la fois une faible mémoire de donnée (8192 octets) et une faible mémoire de programmation (368 octets). Pour montrer la faisabilité de la nouvelle approche, une application de synchronisation d'oscillateurs chaotiques à mémoire est proposée. Pour réaliser cela, les systèmes à synchroniser font tout d'abord l'objet d'études numériques et analytiques à l'aide d'outils tels que : l'analyse des points d'équilibre, le calcul des exposants de Lyapunov, le bassin d'attraction et les portraits de phase. Après avoir descellé la nature du système, son implémentation dans le microcontrôleur se fait en langage de programmation C grâce au logiciel de programmation MPLAB, couplé à son compilateur XC8. Pour visualiser les données sur un oscilloscope numérique, nous avons inséré entre le microcontrôleur et celui-ci un convertisseur numérique-analogique que nous avons préalablement construit.

Pour mener à bien nos travaux, nous l'avons subdivisé en trois grands chapitres.

Le premier chapitre, sectionné en trois parties, présente les généralités sur les systèmes chaotiques, memristifs et fractionnaires.

Le deuxième chapitre, également sectionné en trois parties, présente les matériels et méthodes, théoriques et expérimentales concourantes à la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées ordinaires et fractionnaires.

Le troisième chapitre est consacré à une présentation détaillée des résultats de calcul, de simulation et expérimentaux. Ce document se termine par une conclusion générale englobant un ensemble de perspective ouvrant un champ de débats scientifiques assez large.

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Contents

1.1 Systèmes dynamiques	4
1.2 Memristor	8
1.3 Généralités sur la dérivée fractionnaire	17
1.4 Applications du chaos	20
1.5 Conclusion	25

Introduction

Le chaos a longtemps été synonyme de désordre et de confusion. Le déterminisme, la prévisibilité et la réversibilité définissaient la science. Aujourd’hui, la problématique du chaos et de la mémoire est largement utilisée dans le domaine de la sécurité pour plusieurs raisons : Elle permet d’augmenter la sensibilité aux conditions initiales (**CI**), de générer des attracteurs cachés et de produire des séquences plus aléatoires qu’un système chaotique de base [20–24]. Pour comprendre ce couplage, nous présentons dans ce chapitre une vue globale de la notion de chaos, une généralité sur le mémoire et l’histoire autour du calcul fractionnaire. Ce chapitre se termine par une liste d’applications dans lesquelles le chaos est impliqué.

1.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique (**SD**)¹ est un modèle permettant de décrire l’évolution d’un ensemble d’éléments en interaction dans le temps [25]. Il peut être de nature linéaire ou non-linéaire. Un système linéaire est caractérisé par une prédictibilité de sa réponse et répond

1. système dynamique

à une excitation proportionnellement à l'amplitude de celle-ci, ce qui n'est pas le cas pour un système non-linéaire. De plus, un système non-linéaire peut produire une réponse irrégulière ou non en fonction des considérations envisagées [26].

1.1.1 Modélisation mathématique d'un système dynamique

Pour modéliser mathématiquement un **SD**, on considère le triplet (x, t, f) où x représente l'espace d'état, t le domaine temporel, et f l'application. En plus de ce triplet, la réponse d'un **SD** peut être influencée par un ensemble de variables pouvant elles-mêmes changer au cours du temps (paramètres dynamiques) ou par un ensemble de variables statiques encore appelées paramètres fixes du système.

1.1.2 Caractéristiques d'un système dynamique

Un **SD** est principalement caractérisé par la manière dont il évolue dans le temps.

- Un système qui dépend explicitement du temps est dit non-autonome ou forcé.
- Un système qui ne dépend pas explicitement du temps est dit autonome ou libre.

Quelque soit le cas considéré, le système peut être à temps discret ou à temps continu. En conséquence, les définitions suivantes sont données :

Definition 1 Lorsqu'un système met en jeu des signaux continus, on dit qu'il est un système continu. Il a les mêmes propriétés qu'une fonction continue.

Exemple 1.1.1 Le système de Duffing [27, 28] est un système non-autonome à temps continu et excité par un générateur de tension de la forme $v_0 \sin(\omega t)$ (Eq. 1.1) avec $\alpha = 0.09$, $\beta = 0.37$, $V_o = 6$, $\theta = 0.798$. Il provient du circuit (Fig. 1.1), initialement conduit par une non-linéarité cubique.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos(\omega t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Exemple 1.1.2 Le système de Lorenz [29] est un système continu et autonome. Il est donné par (Eq. 1.2) avec pour paramètres $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, $\delta = 10$,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \delta(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (1.2)$$

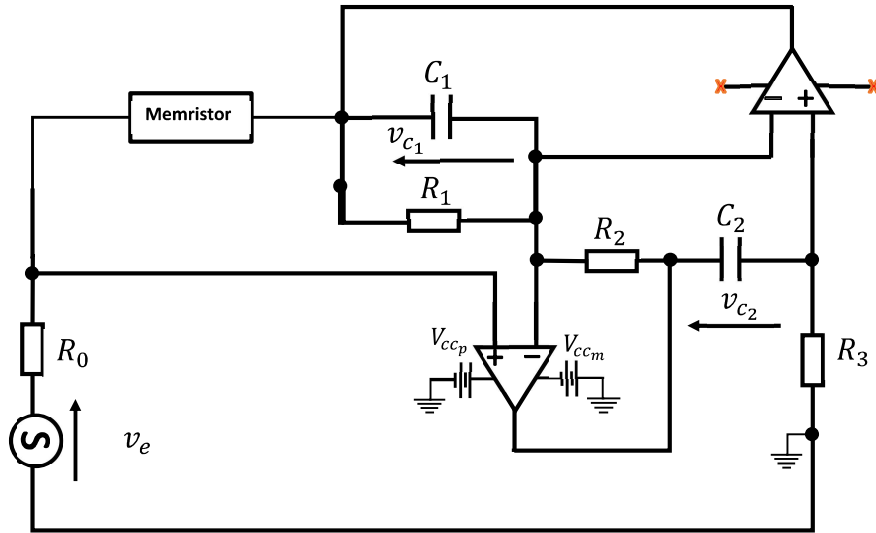


FIGURE 1.1 – Circuit de duffing

Definition 2 On parle de systèmes discrets par opposition aux systèmes continus [30]. En effet, les systèmes numériques nécessitent un échantillonnage (fini) de données pour pouvoir manipuler des données analogiques (continu), cette opération est une discrétisation.

Exemple 1.1.3 La fonction logistique [31] est une application du segment $[0, 1]$ dans lui-même qui sert de récurrence à la suite (Eq. 1.3), où $n = 0, 1, \dots$ représente le temps discret, x l'unique variable dynamique et r , un paramètre réel.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \tag{1.3}$$

Exemple 1.1.4 Le « chat » d'Arnold [32] est une application définie par (Eq. 1.4).

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \pmod{1} \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \pmod{1} \end{cases} \tag{1.4}$$

1.1.3 Théorie du chaos

La théorie du chaos (TC) est considérée comme une des trois révolutions dans les sciences physiques du vingtième siècle. En effet, la relativité a éliminé l'illusion Newtonienne d'espace absolu et du temps, la théorie quantique a éliminé les rêves Newtonien d'un processus mesurable et vérifiable et le chaos a éliminé la fantaisie Laplacienne de prévisibilité déterministe.

Ainsi, la TC [33, 34] est efficace sur la mise en exergue du comportement imprévisible de certains systèmes dynamiques non linéaires. Il est vrai que le chaos caractérise l'aspect irrégulier de plusieurs systèmes proposés dans la littérature. Toute fois, sa meilleure illustration reste le célèbre « effet papillon » de Lorenz, c'est-à-dire l'idée qu'un papillon remuant l'air à Hong Kong aujourd'hui puisse transformer les systèmes de tempête à New York le mois prochain. En d'autre terme, le chaos traduit le fait que de petits changements initiaux aient de profondes répercussions sur le résultat de l'ensemble du système [35].

Cette théorie a pris une proportion considérable dans le monde scientifique à cause du physicien et mathématicien Jules Henri Poincaré qui a réussi à l'utiliser pour visualiser et expliquer certains résultats mathématiques [36].

1.1.4 Notion d'attracteur

Dans les années 1960, pour comprendre les phénomènes induits par le chaos, les chercheurs ont effectué une cartographie de l'ensemble des trajectoires occupées par le système. Cette carte ou représentation s'appelle « un espace de phase » correspondant aux coordonnées du mouvement. L'ensemble de toutes les coordonnées du système constituait un domaine aujourd'hui appelé « attracteur » [37].

Definition 1 L'attracteur d'un SD est une région de l'espace de phase vers laquelle toute trajectoire du système est susceptible de converger. Un SD peut avoir plusieurs attracteurs ou aucun.

1.1.5 Typologie des attracteurs

On classe les attracteurs en fonction de leur morphologie, ainsi :

1. Un attracteur réduit à un point est appelé point fixe.
2. Un attracteur formant une courbe fermée est appelé cycle limite
3. Un attracteur formant la surface d'un tore est appelé tore limite.
4. Un attracteur n'entrant pas dans les catégories précédentes est appelé attracteur étrange.

(Fig. 1.2) présente l'attracteur de Chua dans le plan $x - y$.

1.1.6 Exemples de systèmes chaotiques

D'une manière générale, un comportement chaotique tient sa source dans de nombreux systèmes naturels tels que l'écoulement des fluides, les irrégularités du rythme cardiaque et la météorologie. Elle se produit aussi spontanément dans certains systèmes à composantes

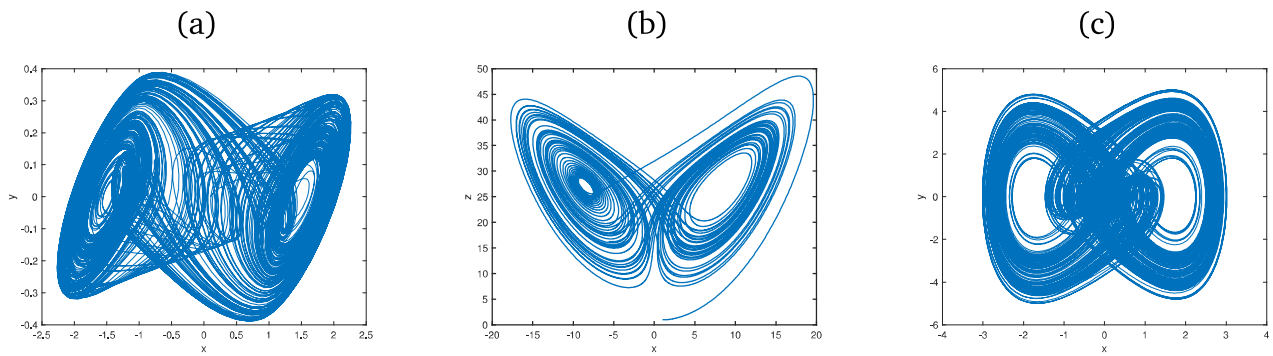


FIGURE 1.2 – *Attracteur dans le plan $x - y$ de : (a) Chua, (b) Lorenz, et (c) Duffing*

artificielles, comme la bourse et le trafic routier. Il devient donc important de noter et définir les caractéristiques que doit avoir un système afin de cadrer notre domaine d'étude.

a) *Déterminisme*

Un système déterministe non chaotique a une dynamique telle que, à partir d'un ensemble de **CI**s, il converge vers un comportement unique qui est indépendant de ces dernières. La propriété de convergence, d'attraction vers la trajectoire d'équilibre, est toujours présente lorsque le système devient chaotique, mais la sensibilité aux **CI**s s'y ajoute.

Du point de vue d'attracteur, il s'agit du comportement de certains systèmes dynamiques non-linéaires dont la solution est une trajectoire qui semble osciller, mais ne reprend jamais deux fois exactement la même oscillation, ce qui justifie le nom de chaos (**Fig. 1.2**). Son évolution obéit à des lois déterministes.

b) *Non-linéarité*

L'expression non linéaire fait référence au fait que les interactions entre les entités qui composent le système sont telles qu'il n'y a pas de proportionnalité entre les effets et les causes qui les sous-tendent. Dans un **SD**, l'élément responsable de ce comportement est l'élément non linéaire, qui apporte donc la non-linéarité au système. Dans notre thèse, le comportement non linéaire qui nous intéresse est celui induit par le memristor et l'ordre fractionnaire, notions responsables de l'introduction de la mémoire dans les systèmes que nous envisageons de concevoir.

1.2 Memristor

Le memristor a pour caractéristique principale, la non-volatilité de l'information et est par conséquent le centre d'intérêt de plusieurs travaux.

Le memristor est le quatrième élément de base du circuit, après la résistance, le condensateur et la bobine. Le fonctionnement de chaque élément de base mentionné ici est régi par des relations mathématiques, à savoir $dv = Rdi$, $d\phi = Ldi$, $dq = cdv$ Respectivement, voir (Fig. 1.3). Ceci implique l'existence des fonctions linéaires $v = f(i)$, $\phi = f(i)$ et $q = f(v)$ réalisées par les trois composants cité plus haut. Ces relations avaient longtemps été les seules existantes entre ces trois composants de base jusqu'à ce que, Chua se pose la question sur la relation qui existerait entre la charge q et le flux ϕ . Cette question le poussa à émettre une idée sur l'existence d'un quatrième composant qu'il va appeler « memristor », régi par la relation mathématique $dq = Md\phi$

1.2.1 Définition

Le terme « memristor » pour « memory resistor » désigne un élément passif à deux terminaux introduit en 1971 [2] de symbole (Fig. 1.4). Pour convaincre la communauté, il dresse

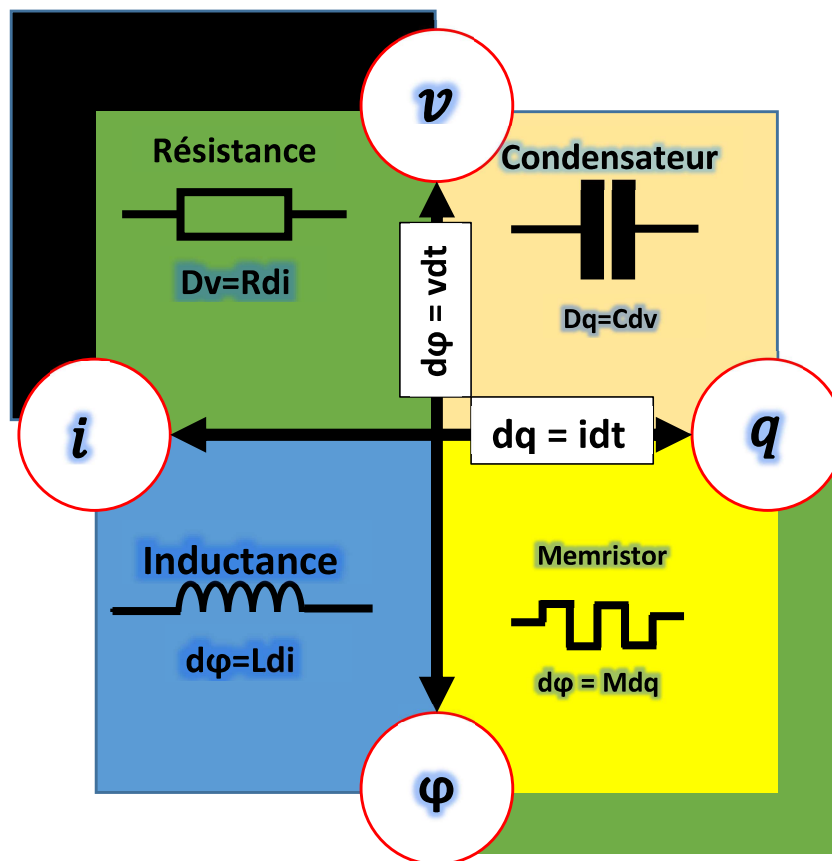


FIGURE 1.3 – Éléments électriques de base

la liste des doublets entre la tension v , le courant i , le flux ϕ et la charge (q) (Fig. 1.3) :

Il fait remarquer que les doublets (ϕ, v) et (q, i) forment deux des lois de l'électromagnétisme et que les doublets (v, i) , (q, v) et (ϕ, i) définissent respectivement la résistance, la capacitance et l'inductance. Le dernier doublet (ϕ, q) n'a pas de correspondance et c'est lui qui engendre la

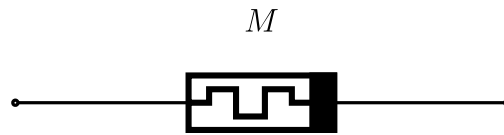


FIGURE 1.4 – Symbole du memristor

définition du memristor, pouvant être soit contrôlé en charge, (Eq. 1.5) soit contrôlé en flux (Eq. 1.6).

1) Memristor contrôlé en charge

$$v(t) = M(q(t))i(t) \quad \text{avec} \quad M(q) = \frac{dq(\phi(q))}{dq} \quad (1.5)$$

2) Memristor contrôlé en flux

$$i(t) = W(\phi(t))v(t) \quad \text{avec} \quad W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d\phi} \quad (1.6)$$

1.2.2 Évolution du memristor

Pendant des années, le memristor est resté sans intérêt, aucune matérialisation physique n'étant disponible. Ce n'est qu'en 2008 que les chercheurs de la section HP² vont implémenter une version réelle du memristor. Ce memristor est conçu à base du dioxyde de titane (TiO_2) [38, 39]. Plus tard, en 2009, Biolek et al. vont proposer un memristor basé sur un schéma bloc [40]. De ce schéma bloc, ils conçoivent un modèle idéal du memristor constitué d'un transistor, des résistances et d'un condensateur [41, 42].

a) Memristor selon HP

Le memristor de HP résulte de l'insertion d'une couche de dioxyde de titane " TiO_2 " entre deux couches de platine (" P_t ") [40, 43, 44]. Il est constitué de deux zones distinctes, une dopée et une non-dopée comme indiqué sur (Fig. 1.5).

Lorsqu'une tension V est appliquée aux bornes du memristor, il s'établit automatiquement entre les deux zones une troisième appelée « zone d'équilibre » représentée par la coordonnée " x ", définie par (Eq. 1.7).

$$x = \frac{w}{D} \quad (1.7)$$

a) Hypothèse

2. Hewlett-Packard

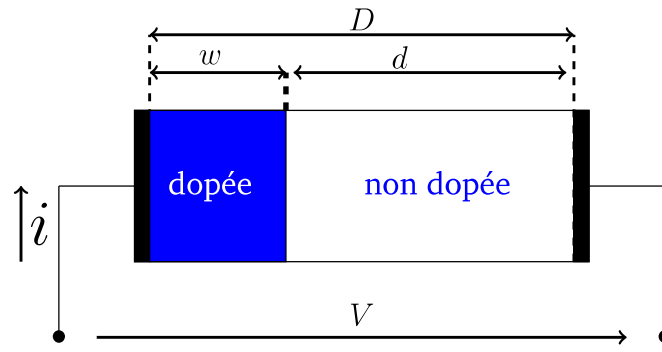


FIGURE 1.5 – memristor : Modèle HP au TiO_2

L’occupation de la longueur totale du dispositif par les charges mises en jeu correspond aux deux résistances extrêmes “ R_{OFF} ” et “ R_{ON} ” du memristor. La variation de la taille totale de la zone dopée “ w ” fait évoluer la résistance totale du dispositif en pondérant l’importance de chacune des deux zones. Les équations de (Eq. 1.8) sont déduites de ces hypothèses :

$$\begin{aligned}
 M(q) &= R_{OFF} \times \left(1 - \frac{\nu_v \times R_{ON}}{D^2} \times q(t)\right) \\
 w(t) &= \nu_v \times \frac{R_{ON}}{D} \times q(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

L’épaisseur “ w ” dépend du courant de dépassement (effet mémoire en ce qui concerne toute la charge). La relation de base entre la tension et le courant dans le memristor est donnée par la loi d’ohm (Eq. 1.9)

$$v(t) = R_{mem}(x) \times i(t) \tag{1.9}$$

“ R_{mem} ” est la résistance totale des deux couches (dopée et non dopée). Il est nécessaire d’exprimer la dépendance entre le courant i et l’état de “ x ”. Cette équation dynamique d’état ressemble à ceci :

$$\frac{dy}{dt} = k \times f(x) \times i(t) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\nu_v R_{ON}}{D^2} \tag{1.10}$$

“ ν_v ” est la constante de mobilité des porteurs de charges.

b) Relation courant-tension

Dans le memristor, le rapport de courant et tension peut être défini par (Eq. 1.11).

$$v(t) = R(t)i(t) = \frac{d\varphi}{dq}i(t) \tag{1.11}$$

Où $\varphi(t)$ et $q(t)$ dénotent respectivement le flux et la charge en fonction du temps. Ainsi, la résistance peut être interprétée comme pente au point $q = q_0$ sur la courbe $\varphi = f(q)$ du memristor. Si la courbe $\varphi = f(q)$ est non-linéaire, la résistance changera avec le point de fonctionnement. Sans tension externe ou courant, le point de fonctionnement ne change pas et par conséquent la résistance demeure constante. Ainsi, le signal est appris par cœur comme valeur de la résistance du memristor et sa memristance M peut être commandée en appliquant une tension ou un courant à travers le memristor (Eq. 1.12).

$$M = \frac{d\varphi}{dq}. \quad (1.12)$$

Lorsqu'une tension ou un courant est appliqué au dispositif, la ligne de division entre les couches de T_iO_2 et de T_iO_{2-x} décale en fonction de la tension ou du courant appliqué et par conséquent, la résistance entre les deux électrodes est changée.

Les limites des valeurs des résistances du memristor sont données par $w = 0$, $w = D$ et identifiées par R_{OFF} et R_{ON} respectivement. La résistance totale est donc donnée par (Eq. 1.13).

$$R_{mem} = R_{dopée} + R_{nondopée} = R_{ON}x + R_{OFF}(1 - x) \quad (1.13)$$

avec cette dernière, (Eq. 1.11) devient (Eq. 1.14).

$$v(t) = [R_{ON}x + R_{OFF}(1 - x)]i(t) \quad (1.14)$$

où x est défini comme variable d'état, dans ce cas (Eq. 1.14) et (Eq. 1.15) sont équivalentes.

$$v(t) = \left[R_{ON} \frac{w(t)}{D} + R_{OFF} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right] i(t) \quad (1.15)$$

Dans ce modèle de memristor, le taux de changement de la variable d'état est défini en fonction du courant par (Eq. 1.16).

$$\frac{dw(t)}{dt} = \nu_v \frac{R_{ON}}{D} i(t) \quad (1.16)$$

$w(t)$ est donné en fonction de $q(t)$ par la relation suivante :

$$\begin{aligned} w(t) &= w_0 + \nu_v \frac{R_{ON}}{D} (t - t_0) i(t) \quad \text{or} \quad dq = idt \\ &= w_0 + \nu_v \frac{R_{ON}}{D} (q(t) - q_0) \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $R_{ON} \ll R_{OFF}$, on peut dire que le produit $R_{ON} \times q_0 \simeq 0$ dans

ce cas, on a :

$$w(t) = w_0 + \nu_v \frac{R_{ON}}{D} q(t) \quad (1.17)$$

La loi d'ohm dit que $v(t) = R_{mem}i(t)$, donc (Eq. 1.9) donne :

$$v(t) = \left[\frac{R_{ON}}{D} \left(w_0 + \nu_v \frac{R_{ON}}{D} q(t) \right) \right] i(t) \quad (1.18)$$

$$M = \frac{d\phi}{dq} \simeq R_{OFF} \left(1 - \frac{\nu_v R_{ON}}{D^2} q(t) \right) \quad (1.19)$$

c'est donc la relation entre R_{ON} , R_{OFF} et la charge q .

Ces équations permettent d'obtenir les courbes représentatives du modèle **HP** dont nous présentons la solution sur (Fig. 1.6) .

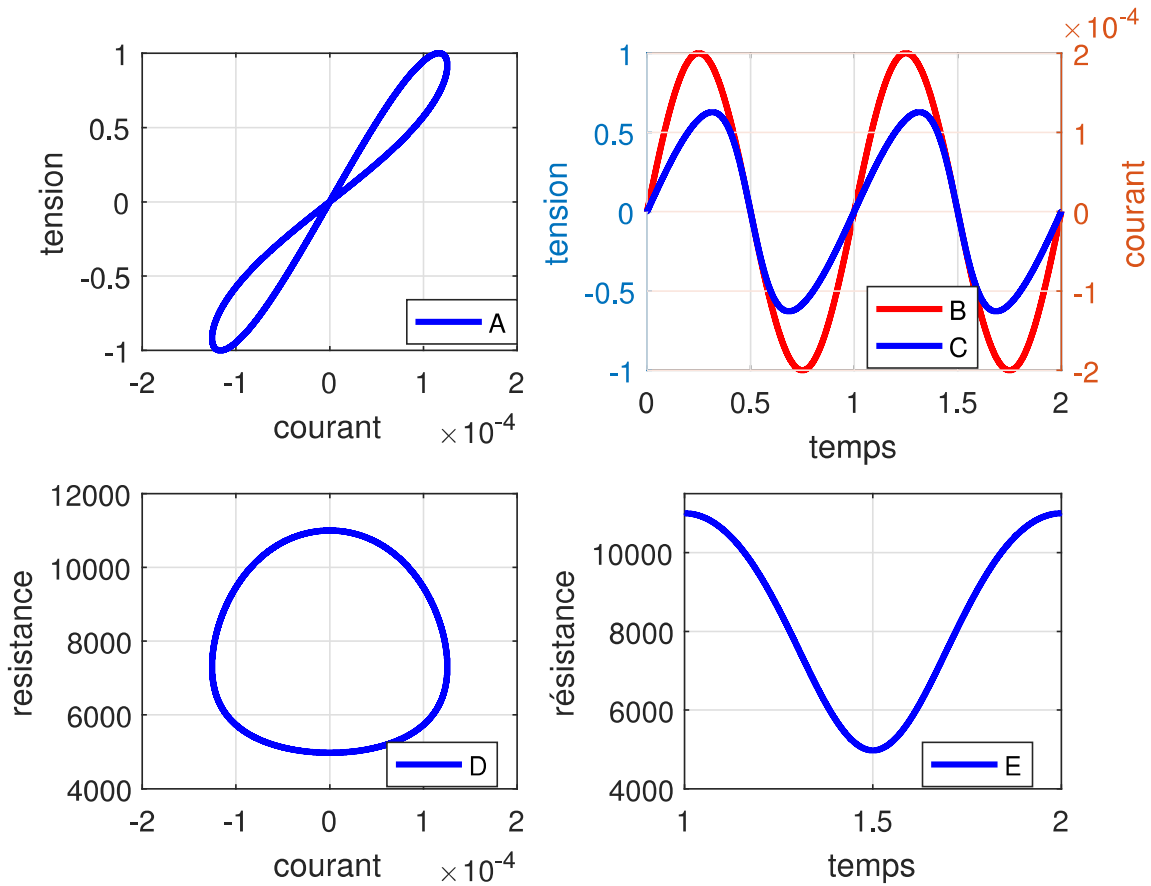


FIGURE 1.6 – *Figure caractéristique du memristor : modèle mathématique de HP!* $R_{on} = 100$; $R_{off} = 16 \times 10^3$; $p = 1$; $D = 10$ SI

b) Memristor à Diode

En 2014, B. C. Bao ont conçu un modèle de memristor constitué de quatre diodes et un filtre de premier ordre présenté sur (Fig. 1.7) [45–47]. Les contraintes de tension impliquant

chaque paire de diodes montées en parallèle sont à l'origine du comportement memristif de ce modèle.

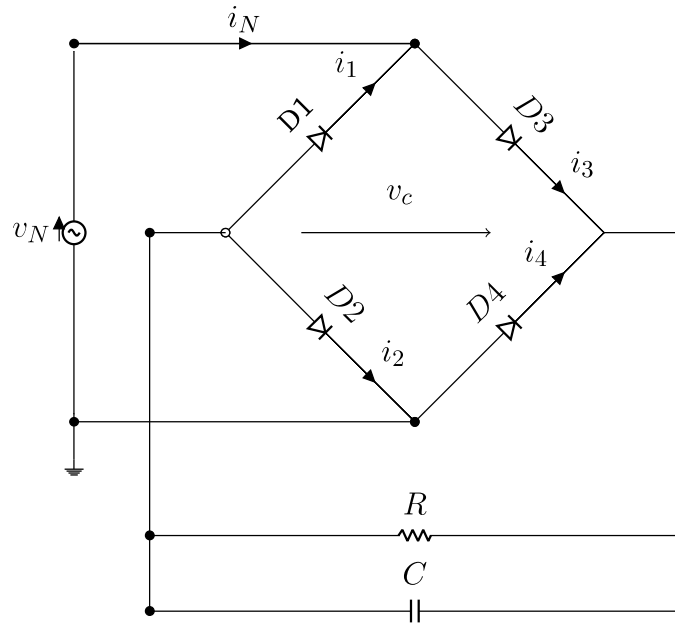


FIGURE 1.7 – memristor : Modèle à Diode

Sur (Fig. 1.7), si deux diodes sont traversées par un même courant, il y a naissance d'une fonction hyperbolique, d'où les relations (Eq. 1.20) et (Eq. 1.21).

$$i_m = 2 I_s \exp(-\rho v C_m) \sinh(\rho v) \quad (1.20)$$

$$\frac{dv_{C_m}}{dt} = \frac{2I_S \left(\exp(-\rho v C_m) \cosh(\rho v) - 1 \right)}{C_m} - \frac{v_{C_m}}{R_m C_m} \quad (1.21)$$

Les paramètres des diodes utilisées sont : $I_S = 5.84nA$, $n_1 = 1.94$, et $V_T = 25mV$. Les paramètres du circuit sont pris tel que $R_0 = 200\Omega$ et $C_0 = 2\nu F$ avec une tension d'excitation prise sous la forme $v_M = V_M \sin(2\pi ft)$. Quand $v_M = 2V$ et f pris entre $1kHz$ et $5kHz$, on peut observer les résultats présentés sur (Fig. 1.8)

c) Memristor selon Biolek et application à un système chaotique

Entre 2010 et 2019, Biolek a proposé des articles portant sur memristor [48–51]. Particulièrement en 2018, il a commis un article dans lequel il propose un simple émulateur de système memristif, conçus uniquement à base des composants électroniques passifs, à savoir trois résistances, un condensateur, et un transistor polarisé [52]. À la différence d'autres émulateurs conçus jusqu'à cette date, son modèle n'exploite pas l'approvisionnement d'alimentation en courant continu. Ce circuit nous a permis de réaliser des expériences intéressantes. On a observé l'hystérésis dans la caractéristique courant-tension, qui est une empreinte bien

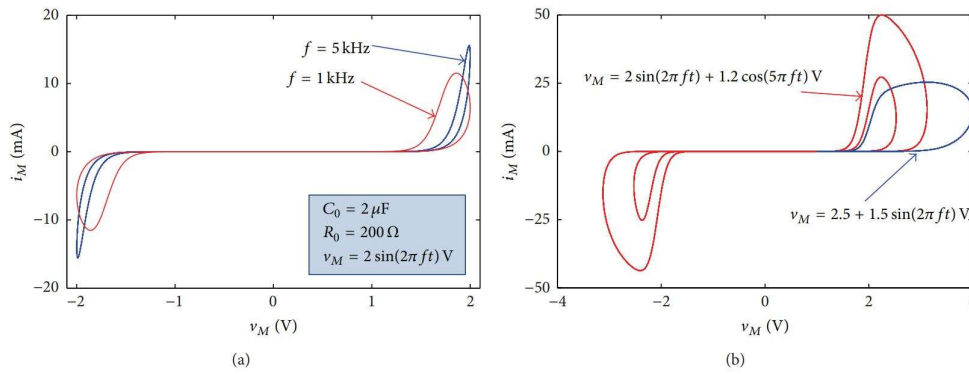


FIGURE 1.8 – Représentation de i en fonction de la tension avec en (a) $v_M = 2 \sin(2\pi ft)$ V et en (b) une autre tension d'alimentation prise sous la forme $v_M = 2.5 + 1.5 \sin(2\pi ft)$ V

connue des systèmes memristifs.

1.2.3 Application du memristor aux systèmes chaotiques

Pour la construction du modèle de Biolek, on commence par le schéma synoptique général représenté sur (Fig. 1.9).a pour le cas du vecteur d'état unidimensionnel x ayant une ambition d'imiter le comportement du memristor idéal représenté sur (Fig. 1.9).b .

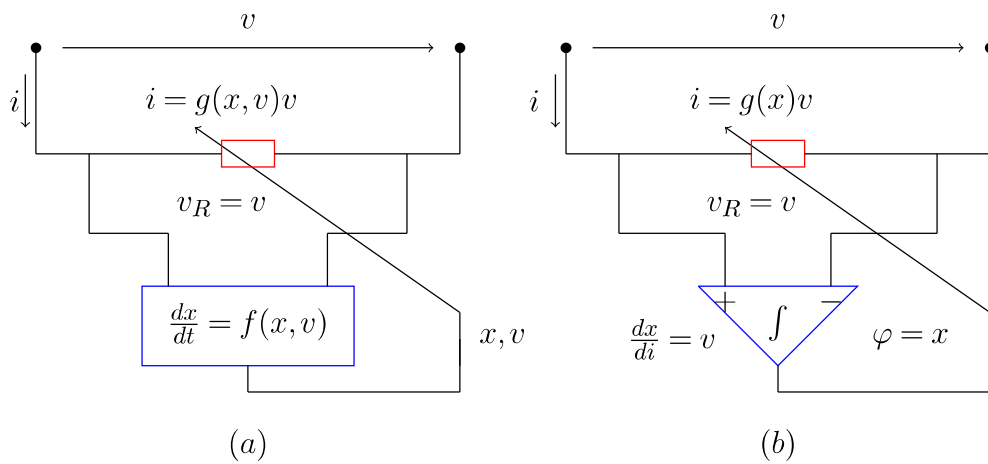


FIGURE 1.9 – (a), Diagramme bloc général d'un système memristif (b), memristor idéal

Ainsi, Biolek résume la conception d'un memristor à l'implémentation du système d'équation suivant :

$$i = g(x)v \tag{1.22}$$

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{1.23}$$

Il propose d'ailleurs un cas particulier sur (Fig. 1.10).a. Le fonctionnement de ce circuit est

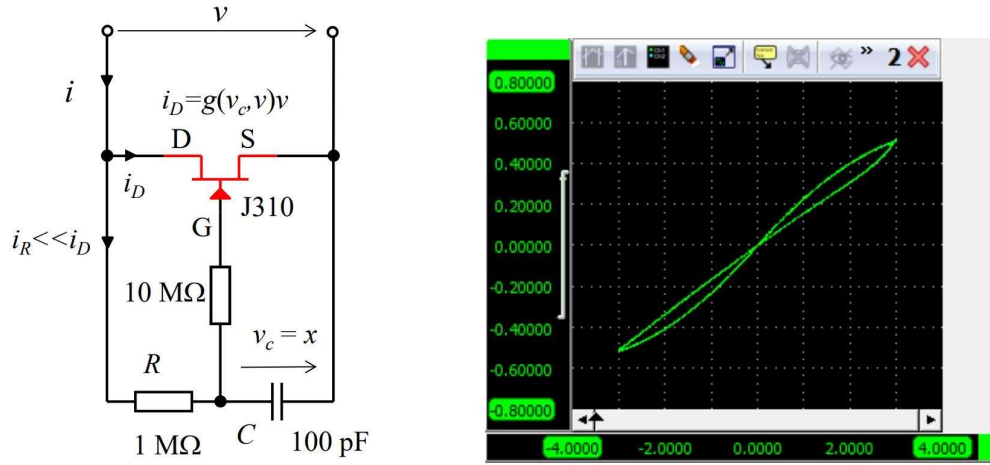


FIGURE 1.10 – Modèle memristif réel de Biolek et al.

régi par l'équation (Eq. 1.24).

$$\begin{cases} i_d = g(x, v_c)v(t) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{RC}(v(t) - x) \end{cases} \quad (1.24)$$

Nous avons utilisé ce modèle comme élément non-linéaire dans [53] pour implémenter l'oscillateur de Duffing memristif, que nous présentons sur la (Fig. 1.1). Les équations déduites de ce circuit sont données par (Eq. 1.25). En simulation, la relation courant-tension produit une courbe croisée en zéro (Fig. 1.10)

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{1}{R_1C_1}v_{C1} - \frac{1}{R_2C_1}v_{C2} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{R_0}{R_3C_2}(av_{C1} + bv_{C1}^3) + \frac{1}{R_3C_2}v_e(t) \end{cases} \quad (1.25)$$

Cette expérience nous a permis d'observer des attracteurs chaotiques de types Duffing [54, 55] et bien d'autres attracteurs méconnus. Le comportement recherché ici étant l'effet mémoire, deux cas ont été considérés suivant le sens de variation de l'amplitude du signal.

a) Variation croissante

Pour le cas de la variation croissante, on se situe dans la plage de $2.00 < V_p < 5.55$ et on a des attracteurs différents à chaque valeur de V_p (Fig. 1.11).

b) Variation décroissante

Pour le cas de la variation décroissante, on se situe dans la plage de $5.55 > V_p > 2.00$ et on a des attracteurs complètement différents (Fig. 1.12) de ceux observés lors de la variation croissante. Il s'agit donc de l'effet mémoire qui implique que : **à une valeur particulière de**

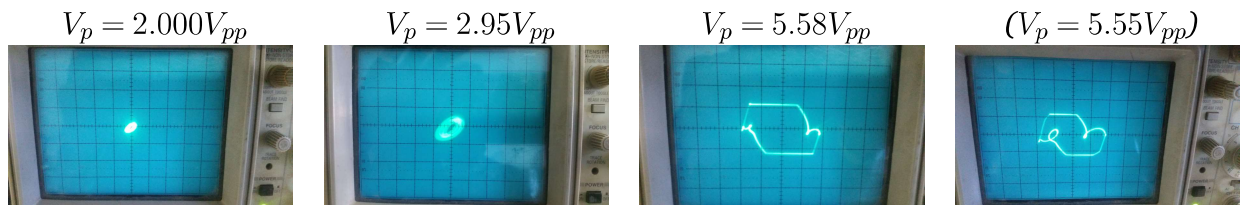


FIGURE 1.11 – Observation des attracteurs de l’oscillateur de Duffing memristif en fonction de la tension : *variation croissante*.

l’amplitude du signal, peut correspondre deux dynamiques complètement différentes.

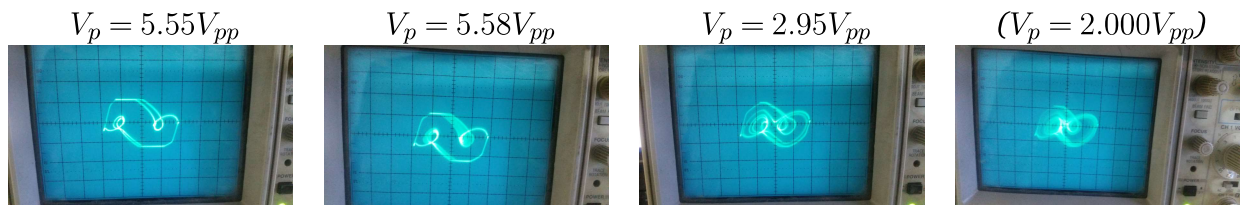


FIGURE 1.12 – Observation des attracteurs de l’oscillateur de Duffing memristif en fonction de la tension : *variation décroissante*.

À l’issue de cette expérience, on comprend qu’avec le memristor, on peut pousser le domaine des oscillateurs chaotiques bien plus loin, d’où le besoin d’implémenter de nouveaux modèles caractérisés par une simplicité remarquable.

1.3 Généralités sur la dérivée fractionnaire

Les véritables précurseurs du calcul fractionnaire sont Riemann et Liouville. Dans leurs logiques, il était inconcevable qu’on continue d’exprimer les ordres de dérivation ou d’intégration uniquement par des nombres entiers, mais aussi par des nombres non entiers [56, 57]. C’était une brillante idée et pour cela, la modélisation fractionnaire s’est beaucoup développée depuis ces vingt dernières années.

En effet, il est démontré que certains processus d’ingénierie sont mieux décrits lorsqu’ils sont matérialisés par des équations différentielles d’ordre fractionnaires [8, 9, 58].

1.3.1 Historique

Le calcul fractionnaire est un domaine ayant plus de 300 ans. Quelques faits marquants de son évolution sont listés ici.

a) 1695, Leibniz [7]

Dans une correspondance entre Johann Bernoulli et Leibniz en 1695, Leibniz a mentionné la dérivée d'ordre général.

b) Euler, 1695 [59]

Euler a contribué au calcul fractionnaire indirectement, quand il a développé la loi des exposants pour les opérateurs différentiels.

c) P. S. Laplace, 1812 [59, 60]

En 1812, P. S. Laplace a défini la dérivée fractionnaire au moyen d'intégrale.

c) S. F. Lacroix, J. B. J. Fourier, 1819, 1822 [61]

En 1819, S. F. Lacroix a mentionné une dérivé d'ordre arbitraire, suivi de J. B. J. Fourier en 1822.

d) N. H. Abel, 1823 [61]

Le premier des opérateurs fractionnaires a été utilisé par N. H. Abel en 1823.

e) A. K. Grunwald, 1867 [62]

En 1867 A. K. Grunwald a introduit les opérations partielles.

f) S. Samko, H. Weyl, M. Riesz, 1900-1970 [63]

Dans la période de 1900 à 1970 les principaux ayant contribué au sujet du calcul fractionnaire étaient H. H. Hardy, S. Samko, H. Weyl, M. Riesz, S. Blair, etc.

g) de 1970 à ce jour [62]

A ce jour ils sont : J. Spanier, K. B. Oldham, B. Ross, K. Nishimoto, O. Marichev, A. Kilbas, H. M. Srivastava, R. Bagley, K. S. Miller, M. Caputo, I. Podlubny, et beaucoup d'autres à avoir apporté les éclairages qui sont aujourd'hui les plus utilisés dans le calcul fractionnaire.

1.3.2 Définitions

Definition 3 L'opérateur d'ordre fractionnaire est défini par (Eq. 1.26)

$${}_a^c D_x^q [f(x)] \tag{1.26}$$

Comme indiqué dans l'historique, il existe une vaste littérature concernant la définition de l'opérateur (Eq. 1.26). Les plus populaires sont celles de Riemann Liouville et Caputo.

Pour Caputo, nous avons (Eq. 1.27)

$${}_0^c D_x^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f(t)}{dt^n} dt, \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.27)$$

Pour le cas de Riemann-Liouville, nous avons (Eq. 1.28)

$$D_x^\alpha (f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (1.28)$$

En plus de ces deux, Guy Jumarie a proposé une définition alternative simple à la définition de Riemann-Liouville (Eq. 1.29)

$$D_x^\alpha (f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} [f(t) - f(0)] dt \quad (1.29)$$

1.3.3 Application de la dérivée fractionnaire aux systèmes Chaotiques

En général, un système non-linéaire ne satisfait pas le principe de superposition. Dans les mathématiques, un système non-linéaire est tout problème où les variables de résolution ne peuvent pas être écrites comme combinaisons linéaires des composants indépendants. Si l'équation contient une fonction non-linéaire, le système est non-linéaire. Ces définitions sont également vraies pour le cas des systèmes fractionnaires. De ce fait, tout système chaotique conçu jusqu'à ce jour mérite une nouvelle considération en faisant recours à la dérivée d'ordre fractionnaire.

Le chaos est sans doute le domaine où le fractionnaire est le plus sollicité [62–69]. Nous pouvons en lister quelques exemples.

Exemple 1.3.1 (système de Chua fractionnaire)

Le système de Chua fractionnaire est donné par (Eq. 1.30) avec pour paramètres $\alpha = 15.6$; $\beta = 28$; $m_0 = -1.143$; $m_1 = -0.714$.

$$\begin{cases} {}_0 D_t^{\alpha_1} x(t) = \alpha(y(t) - x(t) - h(x(t))) \\ {}_0 D_t^{\alpha_2} y(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ {}_0 D_t^{\alpha_3} z(t) = -\beta y(t) \end{cases} \quad (1.30)$$

$$h(x(t)) = m_1 x(t) + 0.5(m_0 - m_1)(|x(t) + 1| - |x(t) - 1|) \quad (1.31)$$

Exemple 1.3.2 (système de duffing fractionnaire)

Le système de Duffing fractionnaire est donné par (Eq. 1.32), avec $\alpha = 0.09$; $\beta = 0.37$; $V_o = 6$; et $\theta = 0.798$.

$$\begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x(t) = y(t) \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) = -\alpha y(t) - \beta x(t) - x(t)^3 + V_o \sin(\theta t) \end{cases} \quad (1.32)$$

Exemple 1.3.3 (système de Lorenz fractionnaire)

Le système de Lorenz est donné par (Eq. 1.33) avec pour paramètres $\beta = 8/3$; $\rho = 28$; $\delta = 10$.

$$\begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x(t) = \delta(y(t) - x(t)) \\ {}_0D_t^{q_2} y = x(t)(\rho - z(t)) - y(t); \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (1.33)$$

La résolution de ces équations aux ordres fractionnaires est rendue possible grâce à des méthodes développées au chapitre 2. Nous présentons par ailleurs les propriétés liées aux calculs fractionnaires ainsi qu'à la conception d'un système fractionnaire.

1.4 Applications du chaos

Les applications de la **TC** sont nombreuses et diverses. Elle est née de l'observation des conditions météorologiques, mais est devenue applicable dans plusieurs domaines. Outre la physique, l'ingénierie, l'économie, la biologie et la philosophie, il existe plusieurs autres systèmes incluant de nouvelles applications. Ces systèmes incluent : le marché boursier, les modèles de migration des oiseaux, le comportement de l'ébullition de l'eau, les réseaux de neurone et les systèmes liés aux phénomènes quantiques. Dans cette section, nous passons en revue quelques applications actuelles des systèmes chaotiques dans les domaines de la vie réelle.

1.4.1 En bourse

L'analyse du chaos a déterminé que les prix du marché sont très aléatoires, mais avec une tendance. Le montant de la tendance varie d'un marché à l'autre et d'une période à l'autre. La nouvelle approche, basée sur la **TC**, est capable d'expliquer divers phénomènes dans le domaine financier, ce que l'hypothèse classique du marché ne pouvait pas traiter. En effet, dans l'hypothèse classique, l'exposant de Hurst détermine le taux de chaos et distingue l'évolution temporelle des séries aléatoires [70, 71]. L'**EL** par contre détermine le taux de prévisibilité,

un **EL** positif indique le chaos et sa dimension définie l'échelle de temps qui rend l'état de prédiction possible.

1.4.2 Dans le corps humain

La **TC** peut également être appliquée aux rythmes biologiques humains [72]. En effet, le corps humain est gouverné par les mouvements rythmiques de nombreux systèmes dynamiques : le cœur qui bat, le cycle régulier d'inspiration et d'expiration de l'air qui constitue la respiration, les mouvements de saut de l'œil qui nous permettent de traiter les images dans le champ visuel, les régularités et les irrégularités du cerveau des personnes mentalement saines et mentalement déficientes. Aucun de ces systèmes dynamiques n'est parfait tout le temps et quand une période de comportement chaotique se produit, ce n'est pas nécessairement mauvais. Appliquer la **TC** à ces systèmes dynamiques humains fournissent ainsi des informations sur la façon de réduire les troubles du sommeil, les maladies cardiaques et les maladies mentales.

1.4.3 Dans la robotique

Jusqu'à cette date, les chercheurs ont trouvé plusieurs voies vers le chaos dans les modèles de marche des robots. Les applications de la dynamique chaotique généreront des techniques de planification de mouvement efficaces pour robots mobiles. En effet, le but final de la robotique est la création de robots autonomes intelligents. Sur cet angle, la théorie des systèmes dynamiques est une bonne piste de solution. Par ailleurs, les scientifiques et les ingénieurs s'efforcent à réaliser le rêve vieux de plusieurs décennies d'un appareil polyvalent, mobile et autonome. La **TC**, combinée à d'autres technologies importantes telles que l'intelligence artificielle, l'apprentissage automatique et le contrôle optimal non-linéaire, aideront à réaliser ce but en perspective.

1.4.4 Dans le domaine des télécommunications

Une méthode pour améliorer la sécurité des données est le codage de l'information à l'aide de porteuses chaotiques générées par des émetteurs fonctionnant en régime non-linéaire [73]. En effet, l'objectif du cryptage est d'encoder une information dans une porteuse chaotique générée par des composants dont les paramètres physiques de fonctionnement constituent la clé secrète. Une fois le codage de l'information réalisé, la porteuse chaotique est envoyée par des moyens conventionnels à un récepteur. Le décodage est alors réalisé directement en temps réel grâce à un processus dit de synchronisation chaotique. Le principe de fonctionnement

d'un tel système est présenté sur la (Fig. 1.13).

Dans les systèmes de communication classiques, un oscillateur optique, généralement un laser à semi-conducteur, génère une porteuse optique cohérente sur laquelle l'information est codée à l'aide d'un schéma de modulation. En revanche, dans l'approche basée sur le chaos, la transmission et la réception sont basés sur des signaux chaotiques, constituant ainsi une double sécurité. Il est important de noter que, l'amplitude du message doit être faible par rapport à l'amplitude de la porteuse chaotique pour une sécurité optimale.

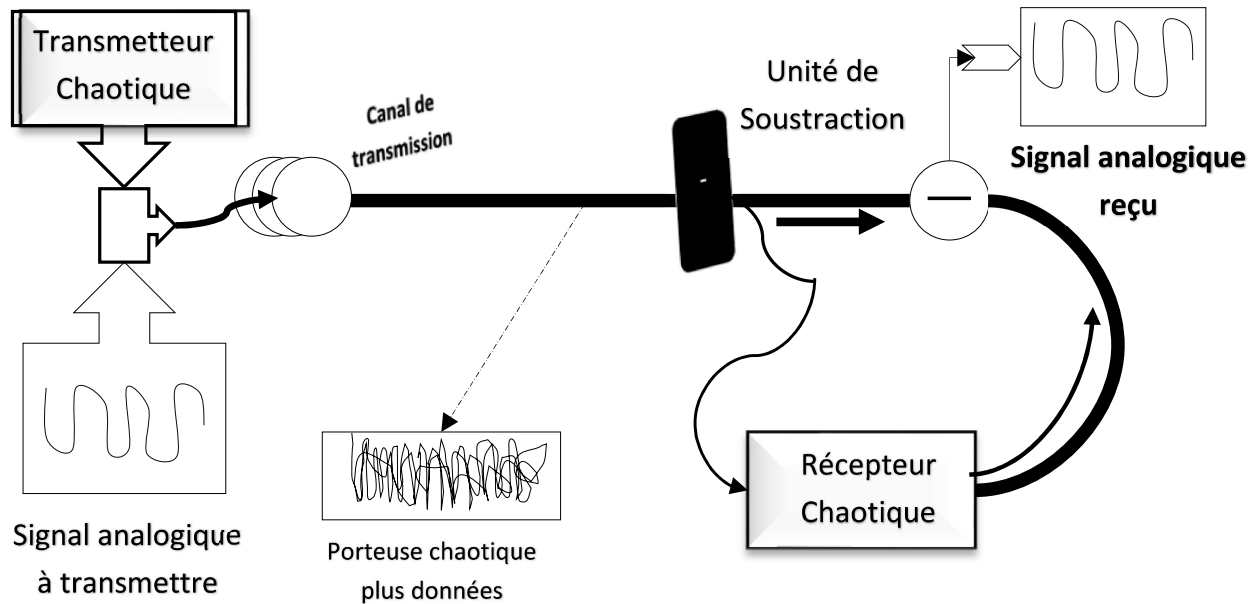


FIGURE 1.13 – Système de communication basé sur le cryptage et la synchronisation chaotique

a) Cryptologie

La cryptologie est une science qui englobe la cryptographie et la cryptanalyse. La cryptographie permet de protéger des données en s'appuyant sur des clés secrètes. Elle rend un message illisible à autre que qui-de-droit. Le cryptage pour sa part est la transformation à l'aide d'une "clé", d'un message confidentiel en un message incompréhensible pour celui qui ne dispose pas de la clé de déchiffrement. Un système de cryptage peut être à clé symétrique ou à clé asymétrique.

-cryptage asymétrique

La cryptographie asymétrique intègre deux clés de chiffrement, une clé publique et une clé privée. Par convention, la clé de chiffrement du message est appelée clé publique, et la clé de déchiffrement du message est appelée clé privée. Avec une clé publique, l'expéditeur code dans un algorithme de chiffrement un message. La cryptographie asymétrique est très

lente et est employé pour chiffrer de petites quantités de données, telles que les signatures numériques.

-Cryptage symétrique

La cryptographie symétrique est une méthode dans laquelle une clé unique est responsable du cryptage et du décryptage des données. L'émetteur et le récepteur partagent cette clé. Ce système est très rapide, il est ainsi approprié pour manipuler de grandes quantités de données à haute vitesse.

b) Synchronisation des systèmes chaotiques

Le contrôle et la synchronisation des systèmes chaotiques sont des domaines très étudiés de la dynamique non-linéaire. Ils ont été introduits en 1990 par Ott et al. [74] utilisant une méthode connue sous le nom de méthode en boucle fermée, puis Pecora et Carroll [75] la même année.

Definition 4 La synchronisation chaotique est un processus dans lequel deux systèmes chaotiques ajustent une propriété de leur mouvement afin d'adopter un comportement identique dans le temps

c) Pourquoi synchroniser ?

L'idée de la synchronisation est d'utiliser la sortie du système maître pour contrôler le système esclave de sorte que la sortie du système de réponse suive la sortie du système maître asymptotiquement. La figure (Fig. 1.14a) illustre le cas de résolution du système de Jerk avec deux CIs très proches. En effet, l'effet papillon énoncé par Lorenz se fait observer ici. La courbe en rouge est obtenue avec $x_0 = [0, 1, 0]$ et la courbe en bleu a été obtenue avec $x_0 = [0.001, 1, 0]$. On voit que les deux courbes se superposent au début mais, s'éloignent l'une de l'autre après quelques itérations. On peut l'observer sur les portraits de phase représentés sous (Fig. 1.14b). L'objectif de la synchronisation est de relier ces deux trajectoires.

d) Différents types de synchronisation

En fonction des exigences du système et des propriétés souhaitées, on distingue plusieurs types de synchronisation : la synchronisation complète, synchronisation avec retard, synchronisation généralisée, synchronisation de phase et synchronisation de phase imparfaite.

e) Méthodes de synchronisation

Pour implémenter chaque type de synchronisation, diverses méthodes linéaires et non-linéaires sont apparues dans la recherche d'algorithmes plus efficaces pour contrôler et synchroniser des systèmes chaotiques identiques ou non identiques. Deux des méthodes les

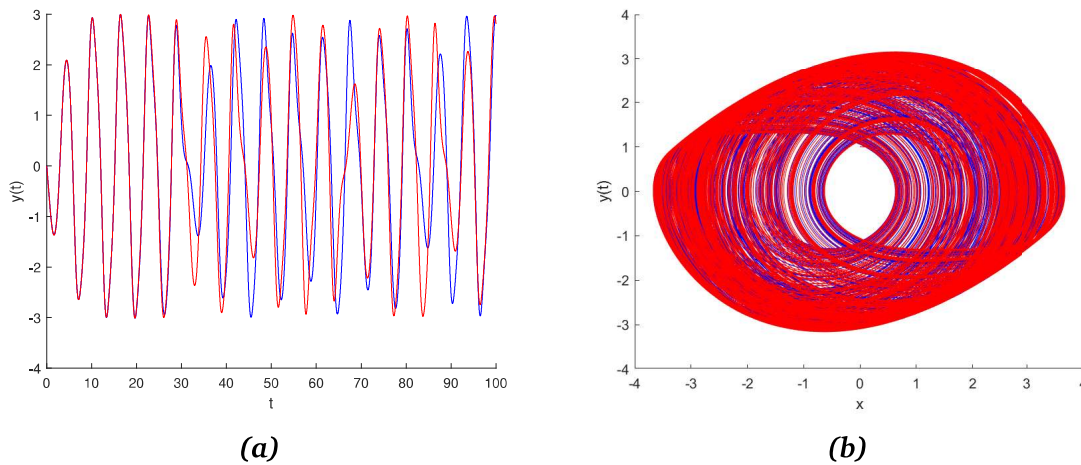


FIGURE 1.14 – (Fig. 1.14a) Evolution temporelle et (Fig. 1.14b) l'attracteur de Jerk résolue avec deux *CI*s très proches

plus récemment proposées sont : le contrôle actif [76] et le contrôle backstepping [74], que nous présenterons au prochain chapitre, dédié aux matériels et méthodes.

f) Commande active

La synchronisation du chaos à l'aide de la commande active a été proposée par Bai et al. [76] et a récemment été largement acceptée comme une technique efficace de synchronisation des systèmes chaotiques, car elle peut également être utilisée pour synchroniser des systèmes non identiques ; une caractéristique qui lui confère un avantage par rapport aux autres méthodes de synchronisation. Cette méthode a été appliquée à de nombreux systèmes pratiques, ce qui justifie son utilisation dans cette thèse.

g) Commande backstepping

La conception du Backstepping a été utilisée à l'origine comme un bloc de construction pour le contrôle adaptatif des systèmes chaotiques et a été récemment étendue à la synchronisation des systèmes chaotiques. La conception Backstepping a été employée récemment pour de nombreuses applications. La méthode est une approche de conception systématique et consiste en une procédure récursive qui intercale le choix d'une fonction de Lyapunov avec la commande. En effet, la commande backstepping peut garantir la stabilité globale, le suivi et les performances transitoires pour une large classe de systèmes non-linéaires à rétroaction stricte [77].

1.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de faire une revue de la littérature sur les systèmes dynamiques non-linéaires chaotiques, systèmes memristifs et systèmes fractionnaires. Il ressort de cette revue que, la notion de chaos n'est pas une théorie née d'hier, mais a longtemps fait l'objet d'une grande polémique dans la mesure où ses effets dans les systèmes non-linéaires étaient méconnus, considérés comme perturbateurs et responsables des défaillances observées dans leurs fonctionnements. Aujourd'hui, ce dernier est d'une grande utilité tant sur le plan théorique que sur le plan pratique. Ce chapitre s'achève par une généralité sur les applications de la vie courante dans lesquelles interviennent l'utilisation des données chaotiques. Ainsi, nous rappelons que toutes les notions abordées dans ce chapitre n'ont été qu'à titre historique et, par conséquent, feront l'objet d'une analyse approfondie dans le prochain chapitre, consacré aux matériels et méthodes concourants à l'élaboration d'un système de synchronisation sous μC .

MATÉRIEL ET MÉTHODES

Contents

2.1 Méthodes numériques de résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires	27
2.2 Méthodes numériques de résolution des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire	28
2.3 Méthodes de caractérisation du Chaos	30
2.4 Conception d'un <i>memristor</i>	40
2.5 Conception d'un circuit chaotique	41
2.6 Conception d'un condensateur fractionnaire	43
2.7 Méthode du contrôle actif	46
2.8 Matériel utilisé	47
2.9 Conclusion	56

Introduction

La méthodologie des points fixes est utilisée depuis longtemps pour l'analyse des systèmes dynamiques [78–80]. Cependant, le véritable inconvénient de cette approche est qu'elle ne permet pas de quantifier la complexité, laquelle est l'une des principales caractéristiques d'un système chaotique. Pourtant, la littérature propose régulièrement des systèmes complexes [81–83]. Par conséquent, le besoin de proposer de nouvelles théories pour pallier les insuffisances de la méthode des points fixes est devenu urgent. Dans cette optique, des nouvelles théories modélisant les phénomènes chaotiques telles que la théorie des catastrophes [84–86], des fractales [87, 88], des structures dissipatives [89] et du chaos ont été mises en avant. De ces différentes approches découlent aujourd'hui des outils permettant de mieux comprendre les systèmes chaotiques et de mieux les utiliser. Ce chapitre présente quelques techniques

d'analyse du chaos couplées à la notion de mémoire. On y présente également le panel d'outils matériels et logiciels permettant toute implémentation. Pour ce faire, (Sect. 2.1) est consacré aux méthodes numériques de résolution des systèmes différentiels ordinaires ; (Sect. 2.2) à celle des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire ; (Sect. 2.3) à des méthodes de caractérisation du Chaos, (Sect. 2.4) au dimensionnement d'un memristor ; (Sect. 2.5) aux outils de conception d'un circuit chaotique, (Sect. 2.6) à la méthodologie de conception d'un condensateur fractionnaire ainsi que (Sect. 2.8) à tous les matériels utilisés.

2.1 Méthodes numériques de résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires

Dans le domaine de la physique, le concept de chaos est loin d'être synonyme de désordre absolu. En effet, les caractéristiques des systèmes chaotiques sont décrites par d'élégantes structures géométriques. De plus, si la dynamique chaotique va à l'encontre de la prévisibilité, elle est également révélatrice des relations de causalité. Préalablement à toute analyse de la dynamique chaotique, nous exposons les méthodes de résolution des systèmes d'équations différentielles. Il existe plusieurs méthodes, mais nous nous limiterons à deux d'entre elles : la **Méthode d' Euler (ME)** et la méthode de Runge-Kuta d'ordre 4.

Considérons une équation différentielle ordinaire (**EDO**) définissant la quantité $\frac{dy}{dx}$; une condition initiale définie par $y(0) = y_0$ (**Eq. 2.1**).

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

La tâche consiste à trouver la valeur de la fonction inconnue y à un point x donné.

2.1.1 Méthode d'Euler

Cette **ME** est une procédure numérique du premier ordre permettant de résoudre des équations différentielles ordinaires à valeur initiale donnée [90, 91]. Considérant (**Eq. 2.1**), l'approximation successive de cette équation peut être donnée par (**Eq. 2.2**) :

$$y(n+1) = y(n) + h \times f(x(n), y(n)) \quad (2.2)$$

où $h = \frac{x(n) - x(0)}{n}$ indique le pas d'intégration.

2.1.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Tout comme la **ME**, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 permet de trouver la valeur approchée de y pour un x donné. Seules les équations différentielles ordinaires du premier ordre sont requises pour cette méthode. Le calcul de la valeur suivante y_{n+1} à partir de la valeur précédente y_n est donné dans (Eq. 2.3). h est le pas d'intégration, plus il est petit, plus la solution est précise [92, 93].

$$\begin{aligned}
 K_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 K_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
 K_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
 K_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4) + O(h^5)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

La formule calcule essentiellement la valeur suivante y_{n+1} en sommant y_n et la moyenne pondérée des quatre constantes k_1, k_2, k_3, k_4 .

2.2 Méthodes numériques de résolution des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

Nombreuses sont les méthodes numériques permettant de résoudre des équations différentielles fractionnaires. Dans la présente thèse, nous nous limiterons principalement à deux d'entre elles. Nous utiliserons la méthode Grünwald-Letnikov (**GL**), et la **ME** généralisée basée sur la logique de Prédiction-Correction(**PC**).

2.2.1 Méthode de Grünwald-Letnikov

Grünwald a proposé une méthode numérique pour la résolution d'équations différentielles d'ordre fractionnaire [94]. Conformément à lui, la formule d'approximation numérique fractionnaire explicite de la dérivée aux points k ($k = 1, 2, \dots$) se traduit comme sur (Eq. 2.4) :

$${}_{(k-L_m/h)}D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}) \tag{2.4}$$

Ici, L_m est la « taille de la mémoire », $t_k = kh$, h est le pas de temps du calcul et $(-1)^j \binom{q}{j}$ est le coefficient binomial, avec ($j = 0, 1, \dots$). Pour calculer chaque coefficient, on adopte la relation

(Eq. 2.5).

$$C_0^{(q)} = 1, \quad C_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) C_{j-1}^{(q)} \quad (2.5)$$

Ainsi, la solution générale de l'équation ${}_a D_t^q y(t) = f(y(t), t)$, peut prendre la forme (Eq. 2.6).

$$y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_{j=v}^k c_j^{(q)} y(t_{k-j}) \quad (2.6)$$

2.2.2 Méthode d'Euler généralisée

Cette procédure a été introduite par Odibat et al. en 2008 [95]. Dérivée de la méthode classique d'Euler, elle est utilisée pour résoudre des équations différentielles fractionnaires. Considérons l'équation différentielle NL d'ordre fractionnaire donnée par (Eq. 2.7).

$$({}_c D_0^q x)(t) = g(t, x(t)), \quad x(0) = 0, \quad (2.7)$$

où $q \in [0, 1]$ est l'ordre de la dérivée fractionnaire et $t > 0$. Pour résoudre numériquement le problème défini par (Eq. 2.7) sur l'intervalle $[0, T]$, une discrétisation de $[0, T]$ en k sous-intervalles $[t_j, t_{j+1}]$ de largeur égale $h = T/k$ est nécessaire. La méthode d'approximation utilise également l'ensemble $\{t_j, x(t_j)\}$. L'approche d'Euler généralisée fournit enfin une solution sous la forme (Eq. 2.8) :

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} f(t_j, y(t_j)), \quad (2.8)$$

On note $t_{j+1} = t_j + h$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Remarquons que $y(t)$ est une variable implicite du système. Pour sa détermination, on utilise la méthode trapézoïdale [96, 97]. Cette démarche qui consiste à résoudre le système en deux étapes est appelée approche prédiction-correction, déployée ici sous la forme (Eq. 2.9).

$$\begin{cases} y_p(t_k) = y(t_{k-1}) + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) & \implies \text{Prediction} \\ y(t_k) = \frac{qh^q}{\Gamma(q+2)} f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} f(t_k, y_p(t_k)) + y(t_k) & \implies \text{Correction} \end{cases} \quad (2.9)$$

L'équation de prédiction contient l'histoire de la variable considérée dans le temps, ce qui constitue ainsi une excellente approche pour le concept de mémoire.

2.3 Méthodes de caractérisation du Chaos

La caractérisation d'un système dynamique peut se faire de plusieurs manières. On peut distinguer deux grands groupes de méthodes : celle basée sur la structure du système et celle basée sur les séries chronologiques, provenant soit de la résolution numérique du système, soit d'un résultat expérimental.

2.3.1 Méthodes basées sur la structure du système

Ces méthodes sont basées sur le calcul du Jacobien, l'analyse des points fixes et l'analyse de l'équation caractéristique du système. Pour commencer cette section, nous présentons ces différents outils de base.

Definition 5 La **M**matrice **Jacobienne MJ** est un tableau constitué des dérivées partielles de premier ordre d'une fonction vectorielle en un point donné. Examinons un système dynamique différentiel défini par ses n fonctions à valeurs réelles (**Eq. 2.10**).

$$F(\vec{x}) = \left(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}) \right)^T \quad (2.10)$$

Si les dérivées partielles des fonctions f_i en un point M existent et sont rangées dans une matrice $JF(\vec{x})$ à m lignes et n colonnes, alors $JF(\vec{x})$ est appelée **MJ** de F présentée à (**Eq. 2.11**)

$$JF(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\vec{x}) & \partial_2 f_1(\vec{x}) & \dots & \partial_n f_1(\vec{x}) \\ \partial_1 f_2(\vec{x}) & \partial_2 f_2(\vec{x}) & \dots & \partial_n f_2(\vec{x}) \\ \partial_1 f_3(\vec{x}) & \partial_2 f_3(\vec{x}) & \dots & \partial_n f_3(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(\vec{x}) & \partial_2 f_n(\vec{x}) & \dots & \partial_n f_n(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Definition 6 Un **Point d'Equilibre (PE)** correspond à une solution évidente de (**Eq. 2.12**)

$$F(\vec{x}) = \vec{0} \quad (2.12)$$

Ce dernier est stable si et seulement si le système tend à converger vers lui [98]. Une petite perturbation des **CI**s du système génère une petite perturbation de sa trajectoire autour de son point d'équilibre. Dans le cas contraire, ce point est instable.

Definition 7 L'Equation Caractéristique (EC) d'une matrice carrée A est l'équation polynomiale obtenue en annulant le Polynôme Caractéristique (PC), soit (Eq. 2.13).

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \tag{2.13}$$

n est la dimension de la matrice A et I est la matrice identité de taille $n \times n$.

a) Critère de Routh Hurwitz (RH)

Le critère de stabilité de RH¹ est un test mathématique qui constitue une condition nécessaire et suffisante pour décider de la stabilité d'un SD². Il s'agit d'un algorithme récursif efficace que le mathématicien anglais Edward John Routh a proposé en 1876 pour déterminer la nature des racines du PC. Un polynôme qui satisfait le critère de RH est appelé **polynôme de Hurwitz**. Considérons le PC suivant (Eq. 2.14).

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \tag{2.14}$$

La méthode de RH consiste à former le tableau de $n + 1$ lignes suivantes (Tab. 2.1)

TABLEAU 2.1 – Les coefficients du polynôme de RH

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots	a_2	a_0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots	a_1	
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots		
p^{n-3}	c_{n-3}	\dots	\dots			
\dots	\dots	\dots				
p^1	\dots					
p^0	\dots					

Sur la première ligne figurent les coefficients des termes pairs pris dans l'ordre des puissances décroissantes.

Dans la deuxième ligne, on trouve les coefficients des termes impairs de n . Pour les lignes suivantes, on complète comme suit : (Eq. 2.15) et (Eq. 2.16)

$$b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_{n-i} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-i} \\ a_{n-1} & a_{n-i-1} \end{vmatrix} \tag{2.15}$$

$$c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} \quad c_{n-j} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-j} \\ b_{n-2} & b_{n-j-1} \end{vmatrix} \tag{2.16}$$

1. Routh-Hurwitz
2. Système Dynamique

Le système est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne sont de même signe [99].

b) Bassin d'Attraction (BA)

Un bassin d'attraction est un ensemble de points à partir desquels un système dynamique se déplace spontanément vers un attracteur particulier [100]. En analyse du chaos, c'est un outil généralement utilisé pour le choix des CI³. Par exemple, lors de la résolution d'un système non linéaire par des méthodes numériques, la convergence de la méthode dépend fortement des CI. Les jeux de CI inducteurs de convergence vers une racine évidente donnée est appelé le bassin d'attraction de cette racine [101]. En cherchant le BA, on est confronté à d'autres contraintes, telles que : la résolution d'un SNL par une méthode numérique et le calcul des distances euclidiennes. Nous employons ici la méthode de Newton pour résoudre les SNLs [102].

- Méthode de Newton

À cause de sa convergence rapide, la méthode de Newton est largement utilisée pour résoudre les SNLs. Un système chaotique est en général un système dynamique de n équations avec n variables (Eq. 2.10) qui peut prendre la forme (Eq. 2.17), avec fonctions $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

La méthode a pour objectif de résoudre l'équation (Eq. 2.17). En admettant que les fonctions f_j puissent être dérivées, on définit le jacobien de F en un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, comme présenté sur (Eq. 2.11). $JF(\vec{x})$ est une matrice $n \times n$ et il faut qu'elle soit inversible pour satisfaire le développement en série de Taylor de « F » donné par (Eq. 2.18).

$$F(\vec{x} + \vec{h}) = F(\vec{x}) + JF(\vec{x})\vec{h} + \Theta(\|h\|^2) \tag{2.18}$$

La méthode de Newton en dimension supérieure est similaire au cas unidimensionnel : pour une itération \vec{x}_k , on définit l'itération suivante \vec{x}_{k+1} en linéarisant l'équation $F(\vec{x}) = \vec{0}$ autour de \vec{x}_k et on résout l'équation linéarisée. C'est-à-dire, (Eq. 2.19).

3. conditions initiales

$$F(\vec{x}_k) + JF(\vec{x}_k)(\vec{x} - \vec{x}_k) = \vec{0} \quad (2.19)$$

Étant donné que $\vec{h} = \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k$, on peut écrire la relation (Eq. 2.20) après k itérations :

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - JF(\vec{x}_k)^{-1}F(\vec{x}_k) \quad (2.20)$$

La contrainte principale de la méthode de Newton est qu'elle nécessite l'inversion de la matrice jacobienne du système [103]. Ceci est évidemment problématique si la fonction F n'est pas différentiable, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes utilisés dans cette thèse.

- Distance euclidienne

Dans un espace bidimensionnel ou tridimensionnel, la **Distance Euclidienne (DE)** entre deux points est la longueur droite d'une ligne reliant ces deux points. La **DE** étant définie dans l'espace euclidien, elle est considérée comme un espace métrique (espace dans lequel une notion de distance entre les éléments de l'ensemble est définie). Une telle notion est particulièrement importante pour le tracé des bassins d'attraction d'un système, puisqu'il s'agit finalement de la comparaison de deux positions, à savoir la position de la solution évidente (solution analytique) et la position de la solution numérique. En effet, considérant une résolution analytique « \vec{x}_p » de (Eq. 2.17), on peut lui trouver une ou plusieurs solutions évidentes. Elles sont communément appelées **PEs**⁴ comme mentionné plus haut. Si on considère la résolution numérique « \vec{x}_k » du même système par la méthode de Newton, les **CI**s choisies peuvent conduire à l'une des solutions évidentes : si elle respecte la condition imposée à (Eq. 2.21), on dit que cette **CI** est propice pour une résolution de (Eq. 2.1). Dans le cas contraire, on ne peut pas prendre en compte ladite **CI**. L'ensemble des **CI**s respectant (Eq. 2.21) constitue le **BA** du système.

$$\| \vec{x}_k - \vec{x}_p \| < \epsilon \quad (2.21)$$

c) Coexistence des attracteurs

La coexistence d'attracteurs dans un système dynamique est un concept qui permet de mesurer l'influence des **CI**s sur sa propre dynamique [104]. Pour un système d'ordre n , on a n variables d'état, à savoir $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$. Ainsi, n séries temporelles sont obtenues, et on les définit également par $\{y_i(n) : n = 1, 2, \dots, N \text{ et } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N\}$, où N est la longueur de la série temporelle.

La **position de l'attracteur** $P(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4 \dots, \bar{y}_n)$ peut être repérée à tout instant en obser-

4. Points d'équilibres

vant l'évolution de ses vecteurs d'état. Sa taille est donnée par (Eq. 2.22)

$$S_i = \max(y_i) - \min(y_i) \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \}. \quad (2.22)$$

Considérons deux attracteurs ayant respectivement les séries suivantes :

$$s\{y_i(n) : n = 1, 2, \dots, N \text{ et } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \},$$

$$s\{\hat{y}_i(n) : n = 1, 2, \dots, N \text{ et } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \},$$

L'erreur entre les positions des deux attracteurs est donnée par (Eq. 2.23) :

$$e_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{\hat{y}}_i) \quad (2.23)$$

La marge d'erreur relative à la taille des deux attracteurs est donnée par (Eq. 2.24) :

$$e_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{S}_i - \bar{\hat{S}}_i) \quad (2.24)$$

Nous définissons ensuite une valeur d'erreur de paramétrage (η) pour estimer si l'attracteur obtenu est différent des attracteurs existants ou non. Plus précisément, si $e_1 > \eta$ et $e_2 > \eta$, alors l'attracteur obtenu est un nouvel attracteur. Cependant, une seule condition est suffisante pour dire que l'attracteur obtenu est un nouvel attracteur.

d) Calcul des exposants de Lyapunov

D'illustres scientifiques tels que Lagrange, Poisson, Maxwell et d'autres ont réfléchi à la façon de qualifier la stabilité d'un système. En 1892, le mathématicien russe Aleksander Lyapunov, qui a abordé le problème dans sa thèse de doctorat, a donné la première définition exacte de la stabilité. Celui-ci a mis en place une méthode basée sur la linéarisation des équations du mouvement. Cette méthodologie est à l'origine de ce que l'on a appelé plus tard les exposants de Lyapunov [105]. Dans leur définition, les EL mesurent le taux de croissance des perturbations dans un système où son évolution est régie par des équations linéaires (Eq. 2.25),

$$\dot{v} = J(t)v \quad (2.25)$$

Dans le cadre des systèmes dynamiques, J représente la matrice jacobienne d'un champ de vitesse obtenu le long d'une trajectoire $x(t)$, ayant satisfait l'EDO (Eq. 2.26).

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.26)$$

Les différents exposants de Lyapunov sont obtenus en appliquant la relation (Eq. 2.27). Les v_i sont obtenus en résolvant (Eq. 2.25).

$$EL_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\|v_i(t)\|}{\|v_i(t_0)\|} \quad (2.27)$$

La détermination de l'**EL** se fait selon plusieurs algorithmes. Les algorithmes les plus connus sont : L'algorithme de Wolf [106], basé sur le principe d'orthogonalisation du gram schmidt (**GS**) et l'algorithme **QR** [107, 108], celui auquel nous nous intéressons dans cette thèse, défini de la manière suivante : Considérons J , une matrice jacobienne $n \times n$ du système à examiner. Une factorisation de ladite matrice est de la forme $J = QR$ avec Q , une matrice orthogonale $n \times n$ et R , une matrice triangulaire supérieure $n \times n$. Un algorithme permettant de déterminer J est alors donné comme suit :

On crée, à partir de $J = J_0$, une suite de matrices $J_1, J_2, \dots, J_i, J_{i+1}$. Si l'on factorise J en QR , c'est-à-dire $J_i = Q_i R_i$, on retourne la factorisation : $J_{i+1} = R_i Q_i$ avec ($i = 0, 1, 2, \dots$).

En réitérant le processus pour T valeurs, on obtient les exposants de Lyapunov par la relation (Eq. 2.28).

$$EL_T = \frac{1}{T - t_0} \sum_{t=t_0}^T \log \|R_t^{jj}\| \quad (2.28)$$

e) Caractéristiques des exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov permettent de déterminer la nature d'un système dynamique. Sans exposant positif, le système est dit périodique. En revanche, pour qu'il y ait chaos, il doit y avoir un exposant positif. Auquel cas, l'attracteur est étrange et le mouvement est **chaotique**. La présence de plus d'un exposant positif souligne le caractère hypercaotique de l'attracteur étrange correspondant. Dès lors, nous concluons que la dimension de l'espace des phases peut être déterminée par le nombre d'exposants positifs, ce qui permet de mettre en évidence le caractère fractal de l'attracteur.

Propriete 2.3.1. - Considérons que les **ELs** du système sont disposées en ordre croissant, que j est le plus grand entier positif vérifiant $\sum_{i=1}^j EL_i \geq 0$. La dimension des **ELs** peut être estimée par la relation de Kaplan-Yorke (**KY**) [109] donnée par (Eq. 2.29).

$$D_{EL} = j + \frac{1}{|EL_{j+1}|} \sum_{i=1}^j EL_i \quad (2.29)$$

L'attracteur est dit **fractal** si $D_{EL} \geq j$ [110]. Bien que les exposants de Lyapunov n'indiquent

pas le degré de complexité d'un système, on démontre quand même que le système est encore plus complexe pour $j \geq d-1$ où d est la dimension du système. $\sum_{i=1}^j EL_i = 0$ montre le caractère conservatif du système.

f) Diagramme de bifurcation

Dans le cadre des systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation est une illustration de l'influence d'un paramètre de contrôle sur la dynamique d'un système. Il met en évidence un doublement de période, la transition d'un attracteur à N points à un attracteur à $2N$ points, qui peut se produire lorsque le paramètre de contrôle change. Il s'agit d'une méthode qualitative utilisée pour identifier les valeurs du paramètre de contrôle qui peuvent introduire le chaos ou une dynamique périodique, basée sur le calcul des maxima locaux. La densité du **DB** est d'autant plus grande que le nombre de maxima est élevé et la probabilité qu'elle suggère une dynamique chaotique est grande.

g) Caractérisation de l'attracteur du système

La mise en évidence des attracteurs générés par un système est considérée comme un outil qualitatif permettant de caractériser les séries générées. Comme évoqué dans le chapitre précédent, un système dynamique peut avoir plusieurs attracteurs ou aucun. Plusieurs outils existent pour présager ou identifier l'existence ou non de ces derniers.

A) Dissipation du système

On appelle système dissipatif un système qui évolue dans un environnement avec lequel il échange de l'énergie, ce qui peut conduire à une structure complexe et chaotique.

Un système dissipatif est obtenu à partir de ses équations dynamiques et peut être exprimé par l'opérateur de divergence. Celui-ci est un opérateur mathématique différentiel qui permet, comme son nom l'indique, de calculer la divergence d'un champ vectoriel. Le degré de divergence d'un champ vectoriel \vec{u} est un scalaire défini par :

$$div(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \tag{2.30}$$

Cette grandeur définit le bilan de flux d'un champ vectoriel par unité de volume. Par ailleurs, le bilan du flux à travers les faces d'un dispositif volumétrique peut s'écrire comme suit :

$$div(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dV = div(\vec{u})dv \tag{2.31}$$

On obtient, sous forme intégrale, le théorème de divergence connu sous le nom de « la formule

de Green-Ostrogradsky » [111] :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV = \oiint_{\partial V} \vec{u} d\vec{S} \quad (2.32)$$

B) Interprétation physique de (Eq. 2.32)

Le flux à travers une surface fermée S d'un champ \vec{u} est égale à l'intégrale sur tout le volume délimitée par S de la divergence de \vec{u} .

1. Si \vec{u} est un champ de vitesse, alors la divergence de \vec{u} mesure l'accroissement total de volume par unité de temps et par unité de volume.
2. Si la divergence est positive (négative) en un point A , on dit que A est un point d'expansion (de convergence). Ainsi, **la relation $div(\vec{u}) < 0$ doit être vérifiée pour garantir la convergence du volume, le caractère conservatif du système et donc l'existence d'un attracteur [112].**

Pour appréhender l'aspect conservatif du système, nous utilisons les systèmes hamiltoniens. L'expression « système hamiltonien » à n degrés de liberté désigne un système d'équations de mouvement de la forme :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.33)$$

où $H = H(q, p, t)$ est le hamiltonien. Les variables q_i et p_i sont appelées variables canoniques. On montre que si le Hamiltonien H ne dépend pas explicitement du temps, on aura :

$$H(q, p) = E = Cte. \quad (2.34)$$

Un système hamiltonien, indépendant du temps, est conservatif. La conséquence directe est qu'un volume de l'espace des phases au temps t sera conservé, c'est le théorème de Liouville.

$\nabla(\vec{u})$ mesure l'accroissement total de volume par unité de temps et par unité de volume, on a donc.

$$V(t) = A \exp\left(\int_0^t \nabla(\vec{u}) dt\right) \quad (2.35)$$

2.3.2 Méthodes basées sur la série temporelle : Algorithme de Michael T. Rosenstein

L'un des outils les plus utilisés pour calculer les **ELs** est l'algorithme de Wolf et al [106], présenté ci-dessus. Une version améliorée et repensée est capable d'estimer l'**EL** maximum d'une série temporelle. Cependant, il s'avère qu'il présente certains inconvénients pour les séries temporelles.

Premièrement, il ne prend pas en compte toutes les données disponibles, car il se concentre sur une seule trajectoire. Un seul voisin le plus proche est suivi et remplacé lorsque sa déviation par rapport à la trajectoire de référence franchit un seuil déterminé.

Deuxièmement, la procédure est similaire à la procédure liée à l'orthogonalisation suivant la méthode de **GS**, puisqu'un voisin est remplacé par un autre qui préserve son orientation dans l'espace des phases. Cependant, cette préservation de l'orientation dans l'espace des phases n'est pas nécessaire lorsque seul le plus grand **EL** est calculé. Par conséquent, l'approche adoptée dans cette thèse est celle proposée par **Michael T. Rosenstein** [113] qui prend en compte la reconstruction entière de l'espace des phases du système.

a) Description de la méthode de Rosenstein

On considère deux points de la série temporelle, x_i et x_j , dont les valeurs sont très proches. Cela signifie que le système a atteint presque le même état aux itérations i_{th} et j_{th} . Intéressons-nous cependant aux deux séquences $x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \dots$ et $x_j, x_{j+1}, x_{j+2} \dots$. Pour ceci, on tient compte de la distance entre les deux séquences après un pas de τ défini par (Eq. 2.36)

$$d(\tau) = |x_{i+\tau} - x_{j+\tau}| \quad (2.36)$$

En cas de système chaotique, $d(\tau)$ augmentera au départ de manière exponentielle avec τ . Nous pouvons pour cela tracer (d) en fonction de (τ) et appliquer une méthode d'adaptation linéaire. Cette idée est celle de **Michael T. Rosenstein** et nous présentons son l'algorithme complet dans les lignes qui suivent :

b) Algorithme de Michael T. Rosenstein

- Le premier pas est la reconstruction de l'espace de phase à partir d'un seul vecteur d'état. Dans ce cas, nous utilisons la méthode des délais, facilement implémentable. La trajectoire reconstruite « X » est une matrice où chaque ligne est un vecteur d'espace de phase, c'est-à-dire

(Eq. 2.37).

$$X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_M^T), \quad (2.37)$$

où X_i est l'état du système au temps discret i . Pour une série temporelle à N points, chaque X_i est donné par

$$X_i = (x_i, x_{i+j}, \dots, x_{i+(m-1)J}) \quad (2.38)$$

Dans (Eq. 2.38), j est le décalage (ou le délai) de reconstruction, et m la dimension d'intégration. Ainsi, X est une matrice $M \times m$, et les constantes m, M, J , et N sont liées par (Eq. 2.39)

$$M = N - (m - 1)J \quad (2.39)$$

La dimension d'encastrement est généralement estimée conformément à,

$$m > 2n \quad (2.40)$$

- La dynamique étant reconstruite, l'algorithme localise le plus proche voisin de chaque point de la trajectoire. Le plus proche voisin, X_i , est trouvé en recherchant le point qui minimise la distance au point de référence particulier X_j . On définit à cet effet $d(k)$ ayant pour distance initiale :

$$d(0) = \| X_i - X_j \| \quad (2.41)$$

$d(0)$ est obligatoirement inférieur à une petite quantité fixée ξ . Le symbole $\| \cdot \|$ correspond à la norme euclidienne. L'on impose que les plus proches voisins aient une séparation temporelle supérieure à la période moyenne (P_m) de la série temporelle (Eq. 2.42).

$$|i - j| > P_m \quad (2.42)$$

Cela permet de considérer chaque paire de voisins comme des **CI**s proches pour différentes trajectoires [114]. L'**EL** pour toute la plage d'expansion est calculé comme suit (Eq. 2.43),

$$\lambda(i) = \frac{1}{k_{\min} - k_{\max}} \sum_{k_{\min}}^k \left[\frac{1}{k dt} \ln \left(\frac{|y_{i+k} - y_{i_p+k}|}{|i - i_p|} \right) \right] \quad (2.43)$$

Le calcul de l'**EL** maximal d'un vecteur à cinq valeurs est présenté sur (Fig. 2.1).

2.4 Conception d'un memristor

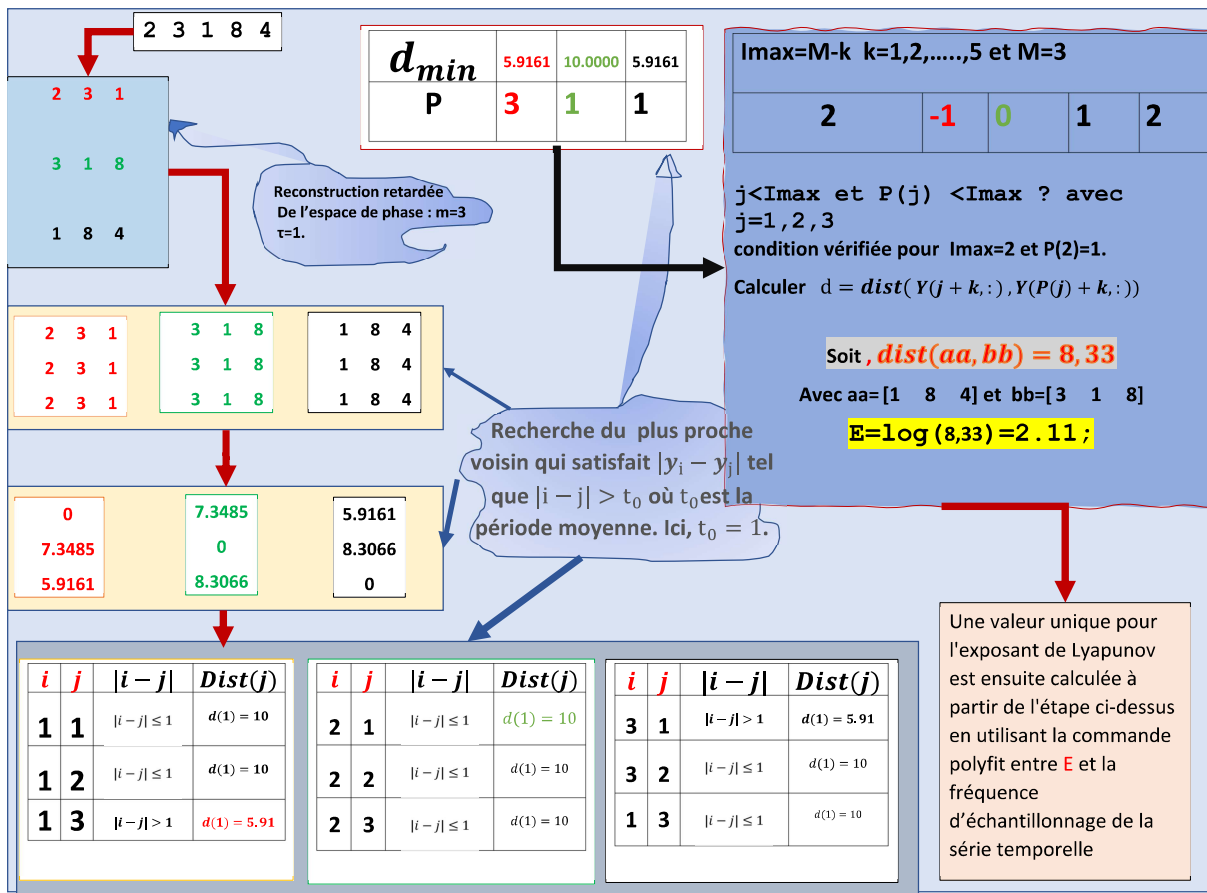


FIGURE 2.1 – Illustration du calcul l'EL pour une série temporelle.

On peut envisager les memristors comme des dispositifs qui permettraient de stocker une densité de données supérieure à celle des disques durs... Pour l'approche de la conception en analogique, deux représentations sont adoptées : L'approche par chaîne directe et le modèle de produit.

2.4.1 Modèle à chaîne directe

La représentation est la suivante : le signal d'entrée passe par une fonction d'intégration, ce dernier passe ensuite par un opérateur non linéaire. Finalement, une dérivation du signal modifié donne le signal memristif comme sortie. Le schéma-bloc du modèle de chaîne directe est présenté sur la (Fig. 2.2).

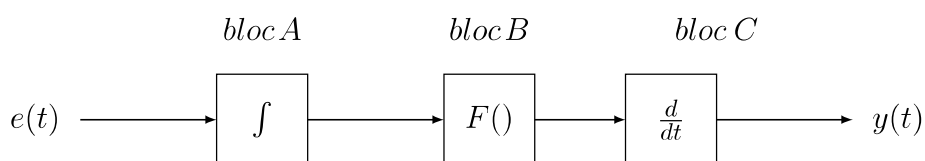


FIGURE 2.2 – Schéma bloc du memristor à chaîne directe

2.4.2 Modèle du produit

Ce modèle est composé de deux opérateurs, un intégrateur et un multiplicateur. Le multiplicateur réalise le produit entre le signal d'entrée et le signal intégré. Le schéma de ce modèle est présenté sur la (Fig. 2.3).

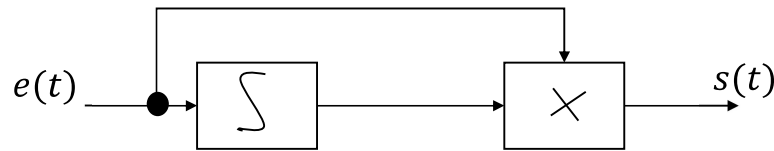


FIGURE 2.3 – Schéma bloc du memristor à produit

2.5 Conception d'un circuit chaotique

Concevoir un circuit électronique implique de l'imagination, de la créativité et de l'optimisation. C'est sur la carte de test, sur laquelle sont assemblés les outils mathématiques de base, que commence la conception d'un circuit électronique. On peut distinguer deux types de circuits en fonction des besoins, des spécifications et de la nature des composants utilisés. On peut donc parler de circuits numériques et de circuits analogiques. Dans le cas des circuits numériques, on note l'utilisation explicite de portes logiques, de registres, de circuits programmables en fonction de l'application... Dans cette partie, nous abordons les outils pour chaque type de circuit.

2.5.1 Circuits analogiques

Généralement, dans un circuit analogique, on trouve des intégrateurs, des dérivateurs, des diodes, des résistances, des condensateurs, des bobines et bien d'autres structures réalisant des fonctions mathématiques élémentaires. Celles-ci sont réalisées selon les équations que nous détaillons ici.

a) Intégration (Fig. 3.5b)

C'est un circuit dont le signal de sortie est l'intégrale de son signal d'entrée. Tout montage dont le signal de sortie vérifie la relation (Eq. 2.44) est un montage intégrateur

$$v_s(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_e(t) dt \quad (2.44)$$

b) Dérivateur (Fig. 3.5a)

Cette disposition est le cas inverse d'un circuit intégrateur. Tout montage dont le signal de sortie vérifie la relation (Eq. 2.45) est un montage de dérivation

$$v_s(t) = -RC \frac{v_e(t)}{dt} \tag{2.45}$$

c) Exponentielle (Fig. 2.4c)

Dans le domaine des circuits non linéaires, la fonction exponentielle occupe une place importante. L'expression du signal de sortie obéit à la relation (Eq. 2.46).

$$v_s(t) = -RI_0 \left[\exp\left(\frac{V_e(t)}{nV_0}\right) - 1 \right] \tag{2.46}$$

- V_0 est la tension thermique

- n est le coefficient de qualité de la diode

- I_0 représente une constante spécifique au type de diode concernée, ayant la même dimension qu'un courant. Cette constante est aussi appelée "courant de saturation" de la diode.

d) Inversion (Fig. 2.4d)

Dans un inverseur, le signal de sortie est l'inverse du signal d'entrée. Il est généralement utilisé pour inverser le sens de propagation d'un signal électrique. Il respecte l'équation (Eq. 2.47).

$$v_s(t) = -\frac{R_2}{R_1} v_e(t) \tag{2.47}$$

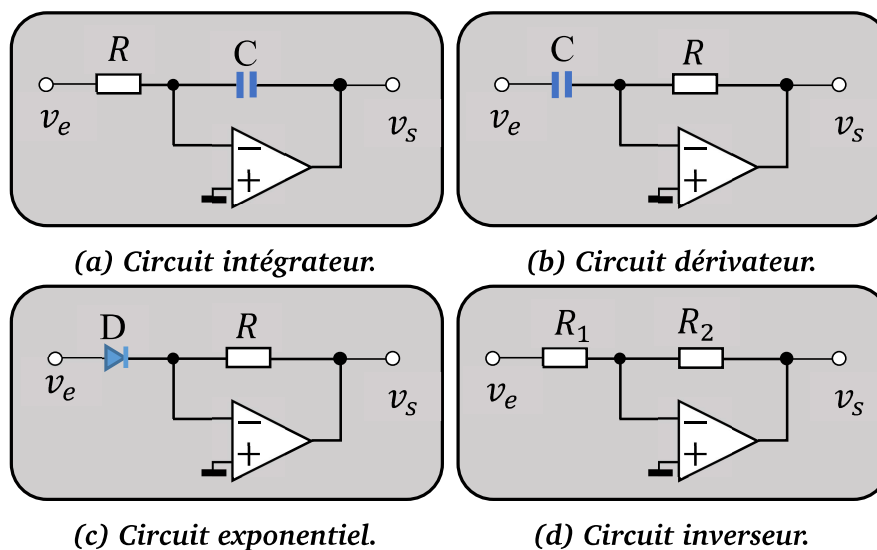


FIGURE 2.4 – Quelques schémas de principe de base en électronique analogique

Un assemblage ordonné de ces différents circuits permet de concevoir des circuits analo-

giques réalisant des fonctionnalités avérées.

2.5.2 Conception de circuits numériques

Le but est de concevoir des circuits numériques à partir de valeurs discrètes (zéros et un). Les fonctionnalités numériques sont aujourd'hui orientées vers l'utilisation d'outils tels que : le **FPGA**⁵ pour générer des séquences aléatoires avec différents taux de modulation selon différentes équations itératives chaotiques et valeurs initiales ; L'utilisation des **MCs** qui sont des circuits numériques intégrés qui sont programmés pour exécuter différentes commandes. Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons principalement les **MCs** PIC16F877A pour implémenter nos différentes applications.

Un composant numérique à bas coût, le PIC16F877A, présente plusieurs caractéristiques intéressantes. Il s'agit d'un μC 8 bits en technologie **CMOS**⁶, qui est cadencé par un oscillateur externe pouvant aller de 0 à 20 *MHz*. Il est disponible sous forme de boîtier double entrée **DIP**⁷ à 40 broches ou de boîtier plat quadruple à 44 broches **QFP**⁸ ou de support de puce à plomb en plastique **PLCC**⁹ à 40 broches. Ici, nous utilisons le **DIP** 40 broches.

2.6 Conception d'un condensateur fractionnaire

Le condensateur est l'élément qui tient compte de l'intégration dans un circuit analogique. Pour ce qui est des circuits fractionnaires, on devrait être en mesure de concevoir des condensateurs capables de tenir compte du caractère fractionnaire souhaité. À cette fin, nous considérons la transformée de Laplace de l'équation différentielle reflétant le fonctionnement d'un système dynamique (**Eq. 2.48**). u est le signal d'entrée et v est le signal de sortie.

$$\begin{aligned} & a_n D^{\alpha_n} u + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} u + \dots + a_1 D^{\alpha_1} u + a_0 D^{\alpha_0} u \\ & = a_m D^{\alpha_m} v + a_{m-1} D^{\beta_{m-1}} v + \dots + a_1 D^{\beta_1} v + a_0 D^{\beta_0} v \end{aligned} \quad (2.48)$$

Sa fonction de transfert est donnée par (**Eq. 2.49**)

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.49)$$

5. Field-programmable gate array

6. Complementary Metal-Oxide-Semiconductor

7. Dual In-line Package

8. Quad Flap Pack

9. Plastic Leaded Chip Carrier

L'approximation de la fonction $G(s)$ est largement étudiée dans la littérature, notamment par Carlson [115], Matsuda [116], Oustaloup [117] et Charef [118].

Pour déterminer les coefficients a_i et b_i $i = 1, 2, \dots, n$, il faut mettre $G(s)$ sous la forme (Eq. 2.50).

$$G(s) = \frac{1}{s^m} = \frac{K_1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)} \approx K \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.50)$$

Les z_i et p_i sont calculés pour une bande de fréquence bien déterminée telle que : $p_i(m) = (ab)^i p_0$, $z_i(m) = (ab)^i a p_0$ $a = 10^{\frac{y}{10(1-m)}}$, $b = 10^{\frac{y}{10m}}$, $p_0 = p_t 10^{\frac{y}{10m}}$.

$$N = \text{integer} \left(\frac{W_{max}}{p \log(ab)} \right) + 1$$

Par défaut, on prend $y = 2$; $Pt = 0.01$; $W_{max} = 100$; $K = \frac{1}{p_t^m}$

L'application numérique donne $m = \{0.96, 0.97, 0.98, 0.99\}$

Pour $m = 0.9$, on a :

$$G(s) = \frac{2.2675(s + 1.292)(s + 215.4)}{(s + 0.01292)(s + 2.154)(259.4)} \quad (2.51)$$

avec $G(s) = \frac{1}{s^{0.9}}$. Alors,

$$H(s) = \frac{2.2675s^2 + 491.46s + 630.96}{1.0e^{-8}s^3 + 3.6155e^{-6}s^2 + 7.7893e^{-6}s + 1.0e^{-7}} \quad (2.52)$$

$$\text{with } H(s) = \frac{C_1}{G(s)}$$

Avec cette expression, la prochaine étape dans le processus de conception d'un condensateur fractionnaire consiste à décomposer l'expression (Eq. 2.52). Il s'agit de mettre (Eq. 2.52) sous la forme (Eq. 2.53).

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_a}}{s + \frac{1}{R_a C_a}} + \frac{\frac{1}{C_b}}{s + \frac{1}{R_b C_b}} + \frac{\frac{1}{C_c}}{s + \frac{1}{R_c C_c}} \quad (2.53)$$

Pour y parvenir, nous utilisons la Fonction « **residue** » du logiciel (M atrix Laboratry) **MATLAB**. Ainsi, en appliquant la commande (Eq. 2.54) on obtient (Eq. 2.55).

$$[C_n, R_n, q_n] = \text{residue}(A, B) \quad (2.54)$$

avec $A = [2.2675, 491.46, 630.96]$ et $B = [1e - 07, 3.6155e^{-5}, 7.7893e^{-5}, 1e^{-6}]$.

Cette ligne de code retourne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} C_n &= [9.1036e^6, 5.4552e^6, 8.1162e^6] \\ R_n &= [-359.38, -2.1544, -0.012916] \\ q &= 0 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Ainsi, nous avons (Eq. 2.56)

$$\frac{1}{s^{0.9}} = \frac{9.1036e^6}{s + 359.38} + \frac{5.4552e^6}{s + 2.1544} + \frac{8.1162e^6}{s + 0.012916} \tag{2.56}$$

En identifiant (Eq. 2.53) et (Eq. 2.56), on déduit les valeurs normalisées des composants du circuit (Fig. 2.5). En procédant comme dans le cas précédent, on a (Eq. 2.57) et (Eq. 2.58).

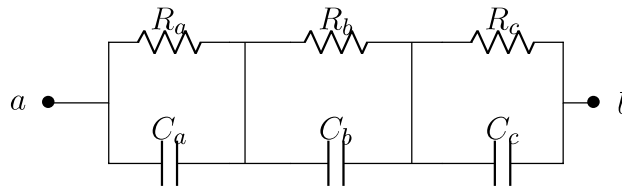


FIGURE 2.5 – Schéma de circuit d'ordre fractionnaire $\frac{1}{s^{0.9}}$

$$\frac{1}{s^{0.95}} = \frac{1.2216e^7}{s + 29764} + \frac{1.1426e^7}{s + 0.014384} \tag{2.57}$$

$$\frac{1}{s^{0.98}} = \frac{9.749e^{-8}}{s + 9.1199e^8} + \frac{3.681e^{-7}}{s + 1909.8} \tag{2.58}$$

Les valeurs numériques des grandeurs R_a, R_b, R_c, C_a, C_b et C_c sont listées dans (Tab. 2.2).

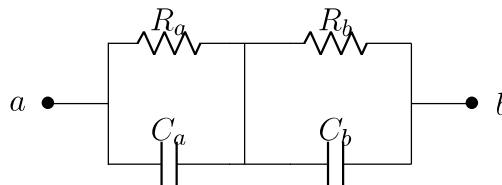


FIGURE 2.6 – Schéma de circuit d'ordre fractionnaire $\frac{1}{s^{0.95}}$ and $\frac{1}{s^{0.97}}$

TABLEAU 2.2 – *Tableau d'approximation de la fonction de transfert*

Bloc _{<i>i</i>}	Bloc ₁	Bloc ₂	Bloc ₃
$S^{-0.9}$	628.4M Ω	2.5321 M Ω	25.331 k Ω
	123.21 nF	183.31 nF	109.85 nF
$S^{-0.95}$	794.34 M Ω	410.43 Ω	*
	87.521 nF	81.859 nF	*
$S^{-0.97}$	911.99 M Ω	1909.8 Ω	*
	97.491 nF	368.1 nF τ	*

2.7 Méthode du contrôle actif

Ci-dessus, nous avons présenté la méthode de backstepping et la méthode de contrôle actif. Dans la présente thèse, nous utilisons la méthode de contrôle actif. La méthode Backstepping est en effet une méthode récursive qui repose sur le choix d'une fonction de Lyapunov. Même si elle offre la possibilité de réaliser une synchronisation avec un seul contrôleur quelle que soit la taille des systèmes à synchroniser, la méthode Backstepping reste difficile à mettre en œuvre expérimentalement du fait des fonctions de Lyapunov. La méthode de contrôle actif est, en revanche, plus digeste. Effectivement, c'est une technique utilisée non seulement pour la synchronisation de systèmes non identiques, mais aussi pour la stabilisation de systèmes identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme, ce qui justifie encore une fois son choix dans cette thèse. Le principe de la méthode est le suivant : On considère deux systèmes chaotiques à synchroniser. Il s'agit d'un système maître et d'un système esclave définis respectivement par (2.59) et (2.60).

$$x_m(i+1) = F[x_m(i), \eta] \quad (2.59)$$

$$x_e(i+1) = F[x_e(i), \eta] \quad (2.60)$$

x_m représente le vecteur d'état du système maître, x_e le vecteur d'état du système esclave, $F(\cdot)$ une fonction non linéaire et η le paramètre de commande. Pour forcer le système esclave à suivre le système maître, la fonction de commande active $u(i)$ est appliquée à l'esclave, telle que :

$$x_e(i+1) = F[x_e(i), \eta] + u(i) \quad (2.61)$$

On définit l'erreur de synchronisation e_s en faisant la soustraction entre (2.61) et (2.59), soit (Eq. 2.62)

$$e_s(i+1) = F[x_e(i), \eta] - F[x_m(i), \eta] + u(i). \quad (2.62)$$

La synchronisation des deux systèmes est effective lorsque l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque la valeur du temps tend vers l'infini. Nous définissons donc la fonction de commande active par :

$$e_s(i + 1) = k_j x_s(i) \tag{2.63}$$

Pour : $k_j < 1$, $e_s \rightarrow 0$. **Lorsque** $i \rightarrow \infty$, **la synchronisation entre les deux systèmes est alors réalisée.**

2.8 Matériel utilisé

Pour l'applicabilité des différentes méthodes énumérées ici, nous utilisons certains outils. En effet, la réalisation de circuits électroniques optimaux et précis ne peut se faire directement sans utiliser un outil de simulation. Nous disposons ainsi des logiciels pour simuler nos circuits et programmer nos systèmes, ainsi que des outils matériels pour la mise en œuvre pratique.

2.8.1 Outils logiciels

Par outils logiciels, nous entendons tout ce qui est lié aux logiciels de programmation et de conception. Dans notre cas, nous utilisons :

a) **Logiciel *MATLAB***

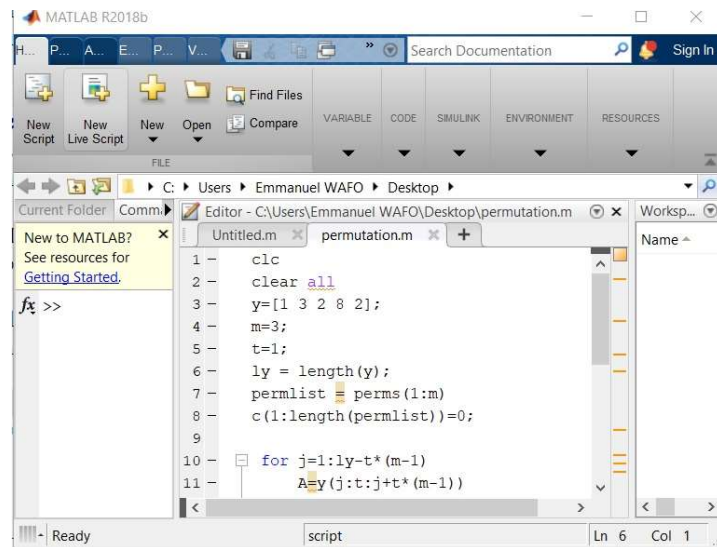


FIGURE 2.7 – Interface de programmation *MATLAB*

MATLAB « **MAT**rix **LAB**oratory » est un langage de programmation émulé par un environnement de développement du même nom (Fig. 2.7). Ce logiciel est utilisé pour le calcul

numérique et à bien d'autres fins. Il permet, entre autres, de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données via son interface graphique, d'implémenter des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs. Il est utilisé dans cette thèse pour résoudre des systèmes non linéaires.

b) Logiciel MPLAB X

Le logiciel **MPLAB X** est un outil de développement destiné à la programmation des **MCs**¹⁰ de type **PIC**¹¹ de la famille Microchip (**Fig. 2.8**).

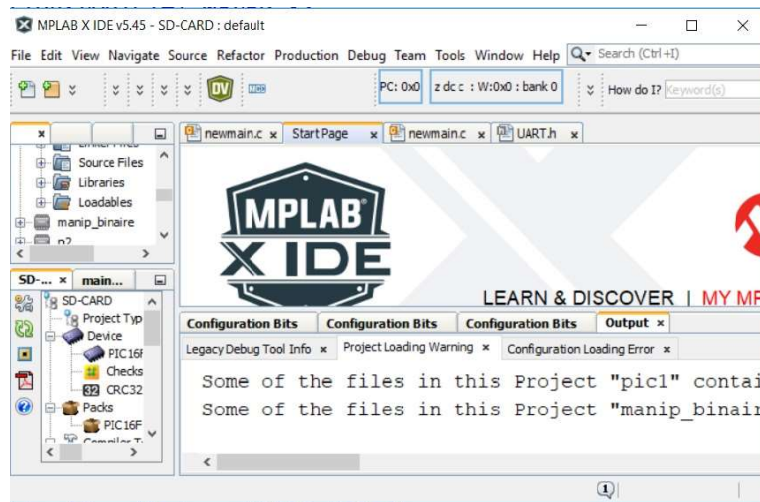


FIGURE 2.8 – Interface de programmation MPLAB X

Il s'agit d'un environnement de développement intégré (**EDI**) gratuit et propriétaire destiné au développement des applications. **MPLAB X** est la dernière édition de **MPLAB** et est développé sur la plate-forme NetBeans¹². **MPLAB X** prend en charge la gestion de projet, l'édition de code, le débogage et la programmation des **MCs** Microchip **PIC** et **AVR**¹⁴. Un programme réalisé sous **MPLAB X** peut être transféré sous **PIC** sans autre étape supplémentaire. Une autre spécification de ce logiciel est qu'il permet de réaliser un fichier source en langage assembleur. L'un des plus gros avantages de **MPLAB X** est qu'il permet de réaliser des programmes en langage C. Ainsi **MPLAB X** peut être utilisé pour le développement en électronique, d'où son utilité dans cette thèse.

c) Compilateur MPLAB XC8 C

XC8 est un compilateur ANSI C. Il est intégré dans le logiciel MPLAB afin d'interpréter le code écrit en langage C. Il prend en charge tous les **μC PIC** 8 bits : dispositifs des séries PIC10,

10. microcontrôleurs

11. peripheral interface controller

12. NetBeans est un **EDI**¹³ pour Java

14. Alf and Vegard's RISC processor

PIC12, PIC16 et PIC18, ainsi que le dispositif PIC14000. Le compilateur est disponible en trois modes de fonctionnement : Free, Standard ou PRO. Nous utilisons le mode « Free »(gratuit) qui est disponible pour les clients n’ayant pas de licence. Il convient de noter que l’utilisation du compilateur en mode « gratuit » ne change en rien la fiabilité du résultat de nos conceptions. En effet, le fonctionnement de base du logiciel, les périphériques pris en charge et la mémoire disponible sont identiques dans tous les modes. Les modes ne diffèrent que par le niveau d’optimisation employé par le compilateur.

d) Logiciel Multisim

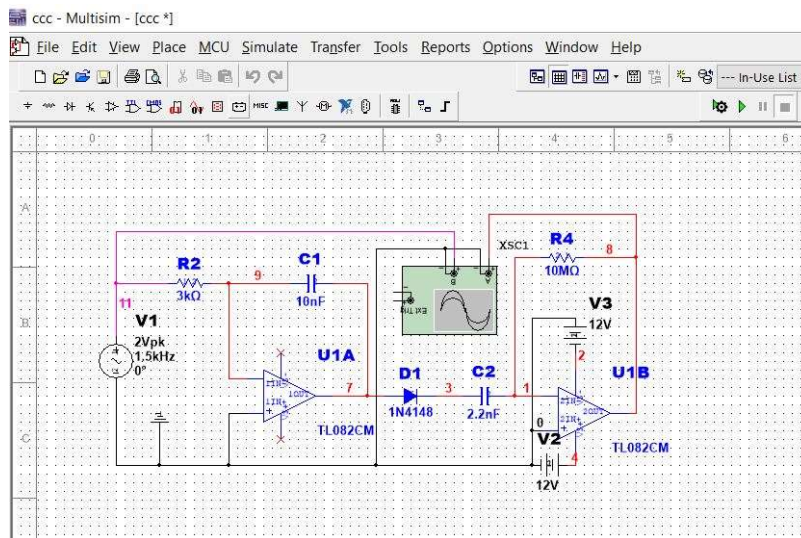


FIGURE 2.9 – Logiciel Multisim

Multisim est un logiciel d’application destiné aux laboratoires d’électronique analogique, numérique et de puissance(Fig. 2.9). Aux ingénieurs, il fournit des outils de simulation, d’analyse et de conception des circuits imprimés **SPICE**¹⁵ pour accélérer les conceptions et améliorer les performances des prototypes.

En effet, Multisim intègre la simulation **SPICE** standard de l’industrie avec un environnement schématique permettant de visualiser et d’analyser instantanément le comportement des circuits électroniques. Son interface aide les enseignants à renforcer la théorie des circuits et à améliorer la rétention de la théorie tout au long du programme d’ingénierie. En ajoutant une simulation et des analyses de circuits puissants au flux de conception, Multisim aide les chercheurs et les concepteurs à réduire les itérations de prototypes de cartes de circuits imprimés **PCB**¹⁶ et à réduire le coût de développement. C’est cet ensemble d’avantage qui justifie son utilité dans cette thèse.

15. Programme de simulation avec accent sur les circuits intégrés

16. Poly Chloro Biphényle

2.8.2 Outils matériels

Les outils matériels sont responsables de la mise en œuvre des méthodes définies dans ce chapitre. L'ensemble d'opérations mise en œuvre ici sont au préalable simulé à travers les logiciels présentés précédemment. Après la simulation, nous passons à la pratique afin de concevoir un prototype capable d'exécuter un certain nombre de tâches. Particulièrement, nous faisons usage d'un programmeur PICkit 3 pour transférer le code dans le μC de type **PIC16F877a** que nous avons décrit précédemment.

Le μC et le programmeur sont interfacés par l'intermédiaire d'une carte de développement explorer 8

a) Programmeur PICkit 3

Le programmeur **PICkit 3** de Microchip (**Fig. 2.10**) est un débogueur qui permet de quitter du développement logiciel à l'intégration matérielle. Il offre des avantages, notamment un faible coût et un minimum de matériel supplémentaire nécessaire au débogage. Il peut reprogrammer n'importe quel $\mu\text{C PIC}$ à partir d'une simple pression sur un bouton. Il permet la programmation des $\mu\text{C PIC}$ en utilisant l'interface utilisateur graphique de l'**EDIMPLAB X**. Le **PICkit 3** est connecté à l'ordinateur du concepteur à l'aide d'un câble **USB**¹⁷ et peut être connecté à la cible via un connecteur de débogage Microchip. Le connecteur utilise deux broches d'**E/S**¹⁸ de périphérique et la ligne de ré-initialisation pour mettre en œuvre le débogage en circuit et la programmation série en circuit. (**Fig. 2.10**) représente l'image du programmeur **PICkit 3** et ses câbles de connexion.

b) Microcontrôleur PIC16F877A

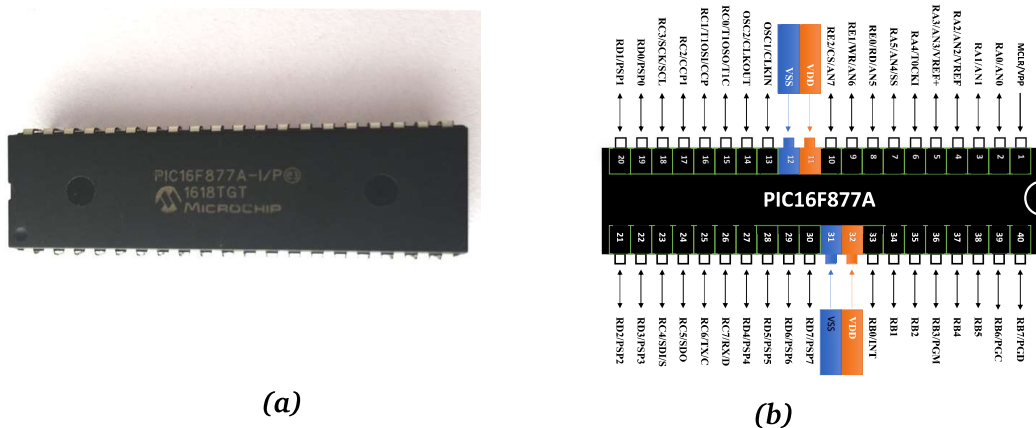
Un μC est un circuit intégré qui regroupe les éléments essentiels d'un ordinateur. Il y a un processeur, des mémoires, des unités périphériques et des interfaces d'entrée-sortie. Les **MCs** se caractérisent par une faible consommation d'énergie et une vitesse de fonctionnement inférieure. Il en existe plusieurs, mais dans cette thèse, ce qui retient notre attention est le PIC16F877A. Il peut être cadencé avec un oscillateur externe jusqu'à 20MHz. Il possède une mémoire de stockage de 8192 octets et une mémoire de programmation de 368 octets. (**Fig. 2.11a**) représente sa structure physique et (**Fig. 2.11b**) représente son brochage. Comme vous pouvez le voir, il a 40 broches. Cinq ports configurables. Il dispose d'un convertisseur analogique-numérique à dix bits et de plusieurs sources d'interruption.

17. Universal Serial Bus

18. Entrée/Sortie



FIGURE 2.10 – programmeur PICkit 3



(a)

(b)

FIGURE 2.11 – μ C PIC16F877A et son brochage

c) Carte de développement Explorer 8

Le kit de développement Explorer 8 est une carte et une plate-forme de développement complète pour les μ C PIC 8 bits (Fig. 2.12). Ce kit est une solution de développement polyvalente, comprenant plusieurs options pour les capteurs externes, la communication hors carte et l'interface humaine. De plus, il offre une grande marge d'extension, ce qui en fait une excellente solution pour les développeurs, les ingénieurs et les chercheurs comme nous à la recherche d'un outil avec le plus grand nombre de μ C PIC 8 bits pris en charge. La carte est une évolution de la populaire carte PIC18 Explorer et a été mise à jour pour pouvoir prendre en compte les μ C PIC de 8, 14, 20, 28, 40/44, 64 broches.

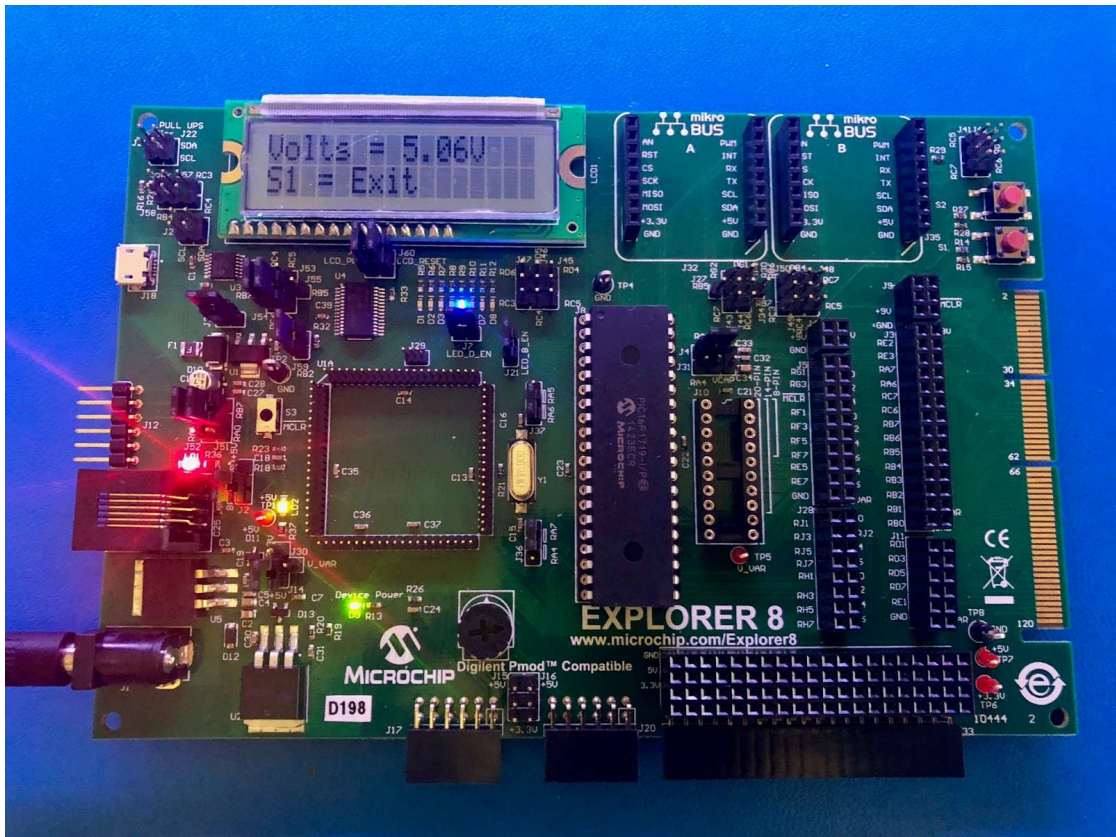


FIGURE 2.12 – Carte de développement Explorer 8

d) *Convertisseur numérique-analogique*

Nous utilisons un convertisseur numérique analogique (CNA) R-2R de huit bits (Fig. 2.13). Dans cette thèse, nous fabriquons un en utilisant les résistances de type CMS. Il s’agit des composants montés en surface (CMS, SMD (dispositif monté en surface) en anglais), désignant une technique de fabrication des cartes électroniques et, par extension, un type de composants utilisés par l’industrie électronique. Cette technologie est utilisée ici, car elle produit des composants de petites tailles comme indiqué sur la face principale du CNA (Fig. 2.14a). (Fig. 2.14b) représente la vue arrière du CNA que nous avons fabriqué. Il utilise deux gammes de résistances de précision pour convertir un nombre binaire numérique en un signal de sortie analogique. Il est constitué de n point denrée correspondant au nombre de bits. Le signal de sortie résultant V_s (Eq. 2.65) de tous ces points de tension d’entrée est prélevé à l’extrémité b_n qui est connectée à l’oscilloscope, considéré comme bit de « poids fort », tandis que l’autre extrémité est connectée à la masse et à b_0 , considérée comme bit de « poids faibles ». La tension de sortie est donnée à (Eq. 2.65), pour un convertisseur de n bits, conduisant à une résolution de CAN rembourse une résolution de :

$$V_{LSB} = \frac{V_{ref}}{2^n} \tag{2.64}$$

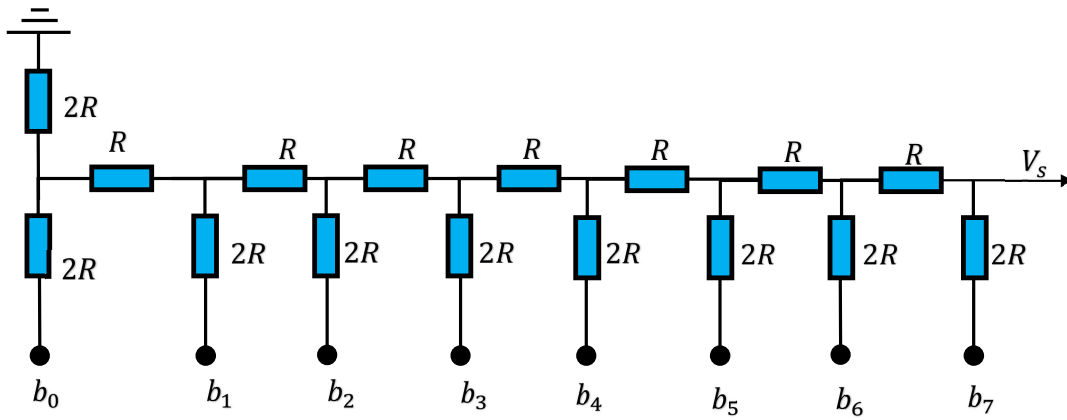


FIGURE 2.13 – Réseau de CNA R2R

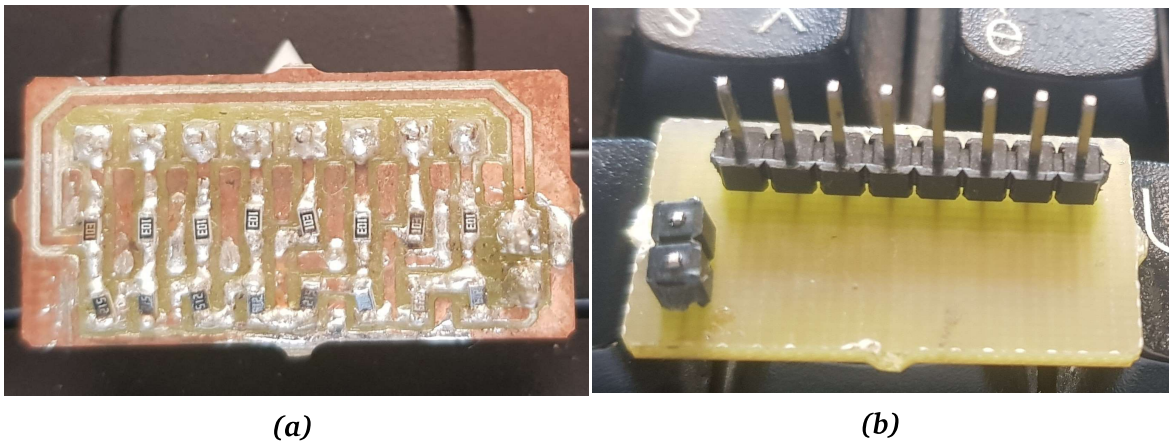


FIGURE 2.14 – Réalisation d'un CNA 8 bits

$$V_s = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \frac{b_i}{2^n} \quad (2.65)$$

Lorsque le bit d'entrée b_0 est « HAUT », il provoque le plus petit changement de la tension de sortie, tandis que le bit d'entrée b_n , lorsqu'il est « HAUT », provoque le plus grand changement de la tension de sortie. La tension de sortie attendue est donc calculée en additionnant l'effet de tous les bits d'entrée individuels qui sont connectés au niveau « HAUT ». Dans le cas d'un CAN à huit bits, on a (Eq. 2.66)

$$V_s = \frac{b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 + 16b_4 + 32b_5 + 64b_6 + 128b_7}{256} \quad (2.66)$$

Idéalement, le réseau devrait produire une relation linéaire entre les tensions d'entrée et la sortie analogique, car chaque entrée aura une augmentation de pas égale au bit de poids faible. Nous pouvons créer un tableau des valeurs de tension de sortie pour les valeurs maximales sur 4,8 et 16 bits pour une $V_{ref} = 5 V$ représentant une condition logique "1".

TABLEAU 2.3 – Influence du nombre de bit sur la tension de sortie analogique à pleine échelle

n	4	8	16
x_{epe}	15	255	65535
x_{spe}	4.6875	4.9805	4.9999

On peut remarquer que la tension de sortie analogique pleine échelle pour un code binaire de $1111_2 \Rightarrow 15_{10}$ n'est pas la même valeur que la tension d'entrée numérique (+5V) car $x_4 = (8 \times 5 + 4 \times 5 + 2 \times 5 + 1 \times 5)/16 = 4.6875$. Cependant, plus le nombre de bits d'entrée numériques est élevé, plus la tension de sortie analogique est proche de la tension pleine échelle, lorsque tous les bits d'entrée sont HAUTS. Ainsi, $x_4 < x_8 < x_{16}$, et $x_{16} \rightarrow 5$.

Dans un travail expérimental, cette différence peut conduire à des résultats erronés. Pour cette raison, il est indiqué d'estimer le degré d'erreur avant de choisir le nombre de bit.

2.8.3 Pourquoi une implémentation par μC ?

Un condensateur fractionnaire est une combinaison de plusieurs condensateurs et résistances classiques. Selon la méthode de conception choisie, le nombre de résistances et de condensateurs utilisés est important. Par correspondance, une grande quantité d'énergie est consommée. On peut observer que pour la conception d'un condensateur fractionnaire de $100nF$, trois résistances ($R_a = 628.4M\Omega$, $R_b = 2.5321M\Omega$, $R_c = 25.33M\Omega$) et trois condensateurs classiques ($C_a = 123.21nF$, $C_b = 183.31nF$, $C_c = 109.85nF$) sont nécessaires, disposés comme sur (Fig. 2.5).

2.8.4 Programmation du microcontrôleur

Le PIC16F877A peut être programmé dans plusieurs langages. Les plus connus sont, le langage assembleur et le langage C. Ici, nous programmons en langage C dans **MPLAB X**.

a) Descriptions de l'algorithme

Pour spécifier un μC en particulier, il faut le paramétrer correctement afin de ne pas se tromper. Par la suite, il faut définir des configurations précises en fonction du μC choisi. La figure (Fig. 2.15) est un ensemble simplifié d'instructions à exécuter pour réaliser une fonction particulière sur PIC16F877A. Après la configuration des bits, on introduit les **CI**s, y compris les paramètres de contrôle du système. En suite, dans notre cas, nous exécutons la fonction d'Euler. Cette fonction nous retourne des valeurs réelles. Après un ajustement (expliqué à la section suivante), le port considéré reçoit la variable souhaitée.

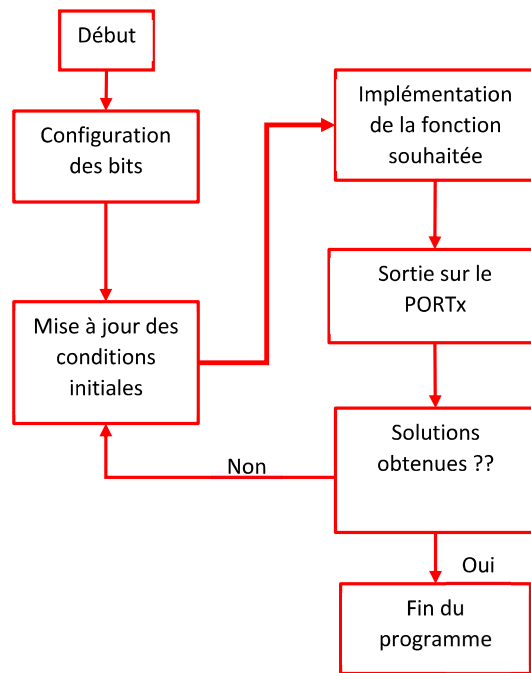


FIGURE 2.15 – Organigramme du code

b) Translation du domaine Analogique au domaine numérique

Les systèmes que nous concevons génèrent des valeurs réelles, dont les parties décimales ne sont pas prises en compte par le μC . Afin de palier à cela, nous avons proposé ici un changement de référence, comme indiquer sur (Fig. 2.16). Ainsi, pour envoyer le vecteur

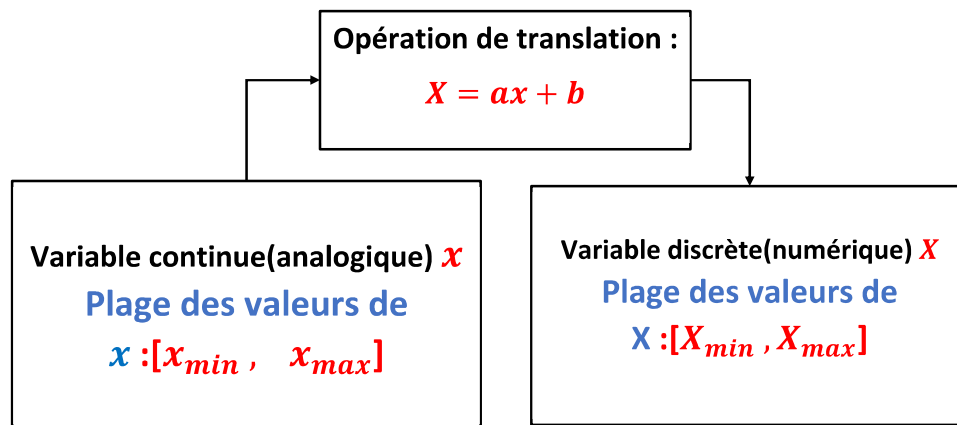


FIGURE 2.16 – Translation du vecteur d'état

analogique x sur un port du μC , il faut connaître sa valeur minimale et sa valeur maximale. Il faut également connaître le nombre de bit sur lequel coder les valeurs converties. Par la suite, on définit une droite d'approximation linéaire $X(x) = ax + b$, permettant de partir de

l'intervalle $[x_{min}, x_{max}]$ à $[X_{min}, X_{max}]$. Ici, $X_{min} = 0$, $X_{max} = (2^n - 1)$. D'où (Eq. 2.67)

$$\begin{aligned} a &= \frac{2^n - 1}{x_{max} - x_{min}} \\ b &= -ax_{min} \end{aligned} \tag{2.67}$$

Dans le μ C PIC16F877A, le système est implémenté via le compilateur Microchip XC8, les variables $x(k)$ et $y(k)$ ont été dirigées vers le PORTB et le PORTD et converties en une tension analogique par le DAC R-2R comme le montre (Fig. 2.17).

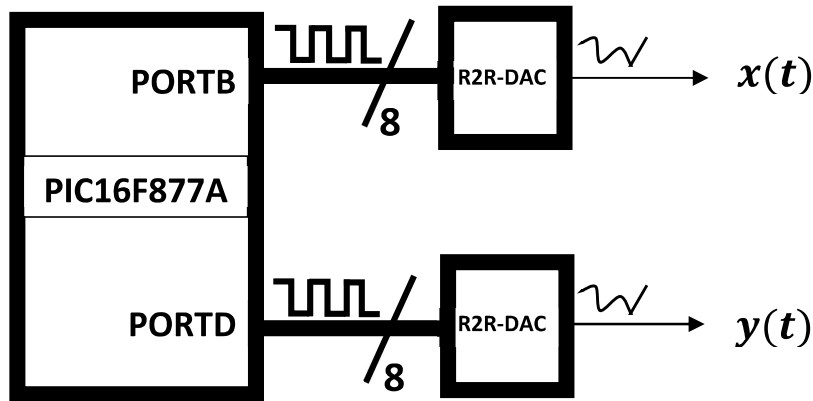


FIGURE 2.17 – Schéma bloc du dispositif

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils numériques, quantitatifs, qualitatifs entrant dans l'analyse et la compréhension de la théorie du chaos, des systèmes memristifs et fractionnaires. Nous avons introduit une série de définitions approuvées sur la caractérisation du chaos, définit les ELs qui constituent l'une des caractérisations quantitatives du chaos les plus fondamentales puisqu'elle s'attache à mesurer la sensibilité aux CI. Ce chapitre se termine par une liste des outils logiciels et matériels utilisés dans cette thèse.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Contents

3.1 Cas de l'oscillateur à dérivées fractionnaires	57
3.2 Cas de l'oscillateur à Memristor	67
3.3 Sources d'erreurs et fiabilité du résultat	89
<i>Conclusion générale</i>	94
<i>Publication scientifique</i>	107

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus après application des méthodes présentées au chapitre précédent. Ces résultats sont axés sur la synchronisation d'oscillateurs chaotique à mémoire à l'aide des microcontrôleurs. Pour ce faire, nous choisissons d'implémenter deux oscillateurs, à savoir l'oscillateur Jerk et un oscillateur à memristor du troisième ordre. Ces deux oscillateurs diffèrent en effet par le principe de réalisation de la mémoire : Le premier est basé sur l'ordre fractionnaire et le second par le memristor.

3.1 Cas de l'oscillateur à dérivées fractionnaires

Jerk désigne la dérivée du vecteur accélération par rapport au temps. Il s'agit donc d'un système défini par trois fonctions temporelles, à savoir : la vitesse « \dot{x} », l'accélération « \ddot{x} » et le jerk « $\overset{\cdot}{\ddot{x}}$ ». Il existe plusieurs systèmes de type Jerk mais, celui que nous avons sélectionné est le suivant (Eq. 3.1)

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\beta \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + \alpha x^3 - x \quad (3.1)$$

α et β sont les paramètres de contrôle du système. Dans la suite de cette thèse, nous utilisons $P_0(0,1,0)$ comme point initial. Dans le cas de l'application à la synchronisation, le système esclave est résolu avec une condition initiale très proche de la précédente, soit $P_{0_e}(0.0001,1,0)$.

3.1.1 Étude dynamique du système de Jerk

a) Caractéristiques du système

(Eq. 3.1) est un système non-linéaire caractérisé par une non-linéarité cubique. Il peut encore se mettre sous la forme de (Eq. 3.2).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -y - \beta z + \alpha x^3 - x \end{cases} \quad (3.2)$$

Physiquement, x, y, z représentent respectivement la position, la vitesse et l'accélération. La divergence du système donne :

$$\nabla = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\beta \quad (3.3)$$

Donc en suivant (Eq. 2.35), on a :

$$\frac{dV}{dt} = -\beta \implies V(t) = Ae^{-\beta t} \quad (3.4)$$

(Eq. 3.4) montre que $V(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, si β est correctement choisi. Ainsi (Eq. 3.2) pourrait être dissipatif si $\beta > 0$.

En résolvant (Eq. 3.5), on met en évidence trois points d'équilibre : $E_1(0,0,0)^T$, $E_2(0,0,-\frac{1}{\sqrt{\alpha}})^T$ et $E_2(0,0,\frac{1}{\sqrt{\alpha}})^T$.

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \alpha x^3 - x - y - \beta z = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

La matrice jacobienne de (Eq. 3.2) est donnée par (Eq. 3.6)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3\alpha x^2 - 1 & -1 & -\beta \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Nous obtenons deux équations caractéristiques relatives aux trois points d'équilibre J_0, J_1 et

J_2 .

$$\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \text{ et } \lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda - 2 = 0. \quad (3.7)$$

Comme indiqué, le critère de **RHs** contient les conditions nécessaires et suffisantes pour définir la nature (stable ou instable) du système. Ainsi, sans résoudre l'équation caractéristique (Eq. 3.7), on applique le critère de Routh et il ressort que le système est stable pour $\beta > 0$.

b) Route vers le Chaos

En plus d'être sensible aux **CI**s, le comportement du système (Eq. 3.2), est étroitement lié au paramètre de contrôle β . Pour cette raison, nous reportons sur la (Fig. 3.1a) le diagramme de bifurcation du système. Ce diagramme montre une forte concentration des maxima pour $0.33 < \beta < 0.363$, correspondant à une dynamique chaotique. Pour $0.371 < \beta < 0.378$, le système adopte un comportement périodique et il est donc difficile d'observer une dynamique chaotique. Sur la (Fig. 3.1b), les exposants de Lyapunov sont tracés en fonction de β . La présence d'exposants de Lyapunov positifs (λ_1) est suffisante pour établir que le système (Eq. 3.2) est chaotique. De plus, les exposants de Lyapunov considérés en fonction de la variation du paramètre de contrôle du système montrent une grande superposition avec le diagramme de bifurcation comme illustré sur la (Fig. 3.1).

Lorsque $\beta = 0.35$, on obtient après 1000 itérations par pas de 0.01, $\lambda_1 = 0.089577$, $\lambda_2 = 0.001118$ et $\lambda_3 = -0.447794$. La dimension de Kaplan-Yorke (**KY**) correspondante est $D_L = 2.2025$. Ainsi, ce système de Jerk génère des dynamiques chaotiques, avec des attracteurs fractals.

La dimension de **KY** peut permettre de caractériser le degré de complexité d'un attracteur. On note que, la dimension de **KY** dépend de β , puisque les exposants de Lyapunov dépendent aussi du même paramètre. D'où l'intérêt de la (Fig. 3.1c). On y présente l'évolution de la dimension de **KY** du système en fonction du paramètre de contrôle. On note la concordance entre cette figure, les exposants de Lyapunov (Fig. 3.1b) et le diagramme de bifurcation (Fig. 3.1a)

3.1.2 Modèle fractionnaire du système de Jerk

Dans cette section, nous utiliserons les **CI**s $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ pour résoudre le système à dérivée fractionnaire, qui sont les mêmes que celles utilisées pour le cas classique.

A l'ordre fractionnaire, le système (Eq. 3.2) peut être réécrit comme (Eq. 3.8) pour obtenir

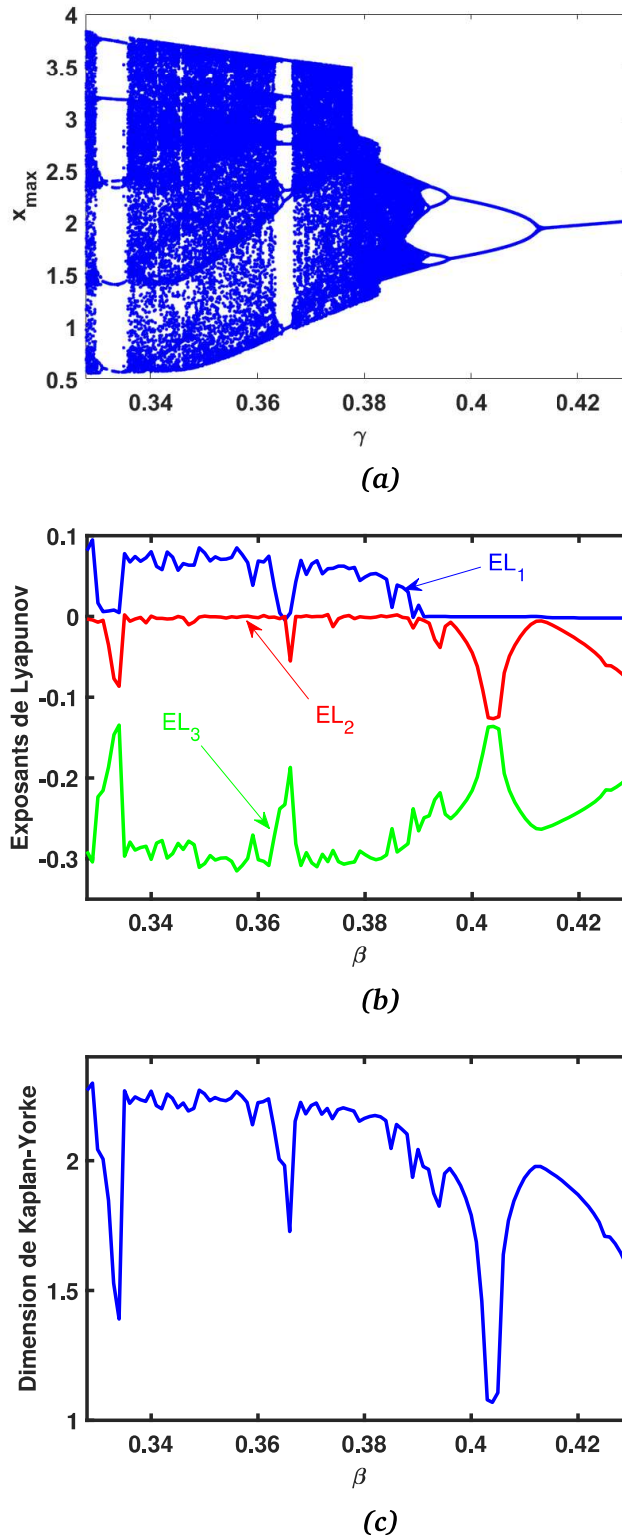


FIGURE 3.1 – Diagramme de Bifurcation (Fig. 3.1a) et les ELs (Fig. 3.1b) pour $\beta \in [0.328, 0.43]$, $\alpha = \frac{1}{10}$, pour $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$

le système fractionnaire de Jerk.

$$\begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x(t) = y(t) \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) = z(t) \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) = \alpha x^3(t) - x(t) - y(t) - \beta z(t). \end{cases} \quad (3.8)$$

$0 < q_i < 1$ représentent les ordres des dérivées suivant la position, la vitesse et l'accélération.

a) Solution numérique du système fractionnaire

Nous utilisons l'algorithme d'Euler pour la résolution numérique des systèmes à l'ordre fractionnaire. Contrairement aux autres méthodes, elle est très flexible à mettre en œuvre et fournit directement les solutions du système sans linéarisation. En appliquant (Eq. 2.9) au système (Eq. 3.8), la solution est trouvée en deux étapes : la prédiction (Eq. 3.9) et la correction (Eq. 3.10)

(p) Système de prédiction

$$\begin{cases} x_p = x(k-1) + \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1+1)}y(k-1) \\ y_p = y(k-1) + \frac{h^{q_2}}{\Gamma(q_2+1)}z(k-1) \\ z_p = z(k-1) + \frac{h^{q_3}}{\Gamma(q_3+1)}[\alpha x(k-1)^3 - x(k-1) - y(k-1) - \beta z(k-1)] \end{cases} \quad (3.9)$$

(c) Système de correction

$$\begin{cases} x(k) = x(k-1) + q_1 \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1+2)}y(k-1) + q_1 \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1+2)}y_p \\ y(k) = y(k-1) + \frac{q_2 h^{q_2}}{\Gamma(q_2+2)}z(k-1) + \frac{q_2 h^{q_2}}{\Gamma(q_2+2)}z_p \\ z(k) = z(k-1) + \frac{q_3 h^{q_3}}{\Gamma(q_3+2)}[\alpha x(k-1)^3 - x(k-1) - y(k-1) - \beta z(k-1)] \\ + \frac{h^{q_3}}{\Gamma(q_3+2)}[\alpha x_p^3 - x_p - y_p \beta z_p] \end{cases} \quad (3.10)$$

b) Route vers le chaos pour le modèle fractionnaire

Nous implémentons les équations (Eq. 3.9) et (Eq. 3.10) sous le logiciel **MATLAB**, et on observe les attracteurs que nous présentons sur la (Fig. 3.2). Sur cette figure, nous avons plusieurs phénomènes à souligner.

Pour le modèle classique (l'ordre entier), le diagramme de bifurcation présenté sur la (Fig. 3.1a) montre que le système présente une dynamique périodique pour $\beta = 0.4$ et une dynamique chaotique pour $\beta = 0.35$. Sous l'hypothèse $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, on observe pour ces deux valeurs de β , une figure de dynamique périodique, (Fig.3.2a) et une figure de dynamique chaotique, (Fig.3.2b).

Pour montrer l'impact de l'ordre fractionnaire sur la solution du problème, considérons la valeur de β pour laquelle une dynamique périodique est observée ($\beta = 0.4$) et faisons varier les ordres fractionnaires. Ainsi, en prenant $(q_1, q_2, q_3) = (0.94, 0.98, 0.95)$, (Fig.3.2c)

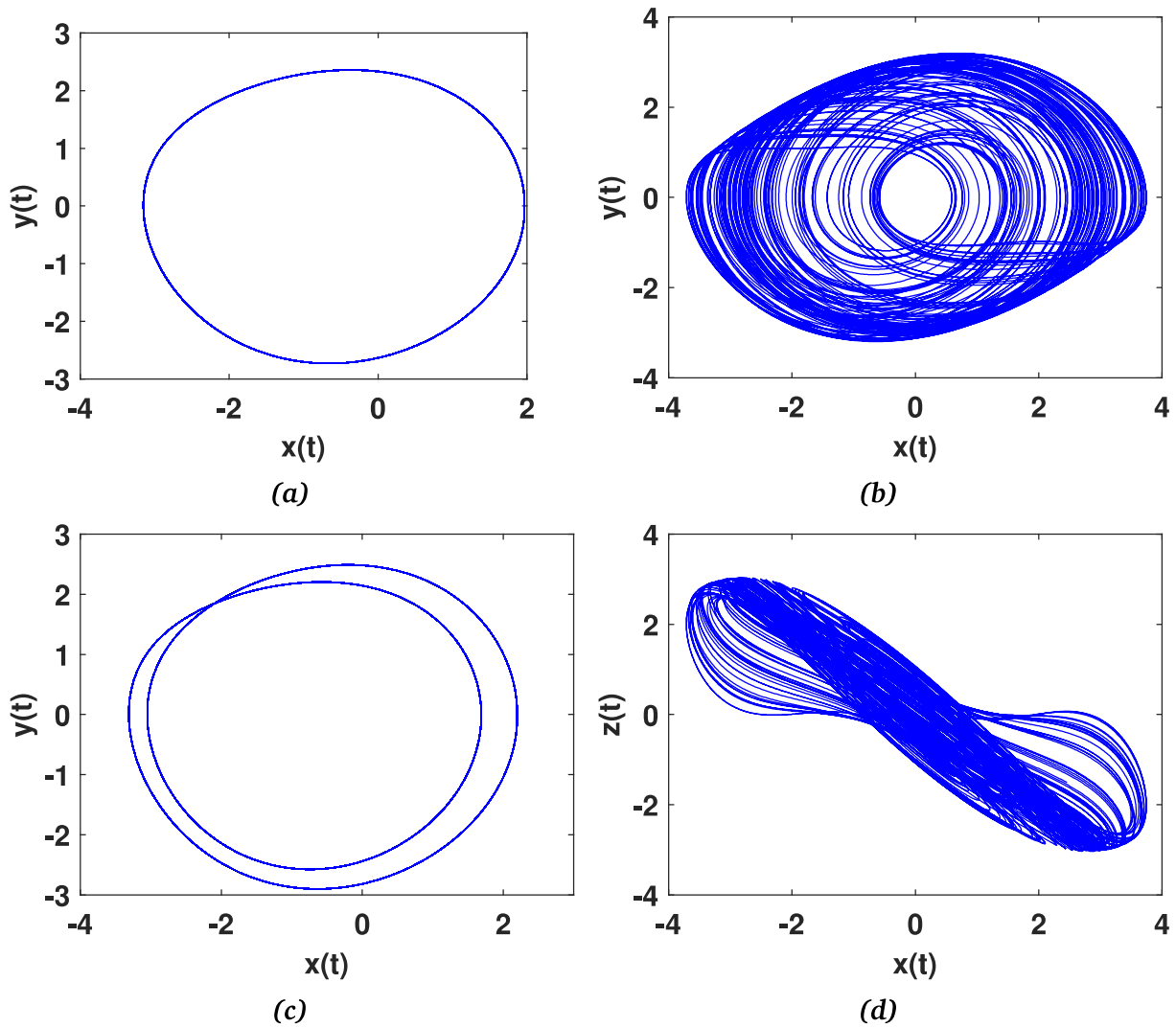


FIGURE 3.2 – Portrait de phase du système de jerk fractionnaire pour $(x, y, z) = (0, 1, 0)$

montre une double dynamique périodique. Toujours avec $(\beta = 0.40)$ et en considérant $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$, on observe maintenant une dynamique chaotique (Fig.3.2d), qui n'était pas observée pour le cas classique en considérant $(q_1 = q_2 = q_3 = 1)$, d'où l'intérêt de l'approche fractionnaire.

Pour caractériser le degré de complexité du système à l'ordre fractionnaire, nous menons des investigations sur le plus grand exposant de Lyapunov. Pour ce faire, nous utilisons l'exposant de Lyapunov appliqué aux séries temporelles. En effet, dans l'approche fractionnaire, il est fastidieux de calculer la matrice jacobienne du système. Ainsi, nous considérons un vecteur d'état du système et nous reconstruisons l'espace des phases comme indiqué au chapitre précédent. Cette méthode nous permet de calculer le plus grand exposant de Lyapunov, ce qui nous donne $LLE = 1.43 > 0$, et montre que le système est également chaotique pour le modèle fractionnaire.

L'influence de l'ordre fractionnaire sur le système peut donc être représentée de manière

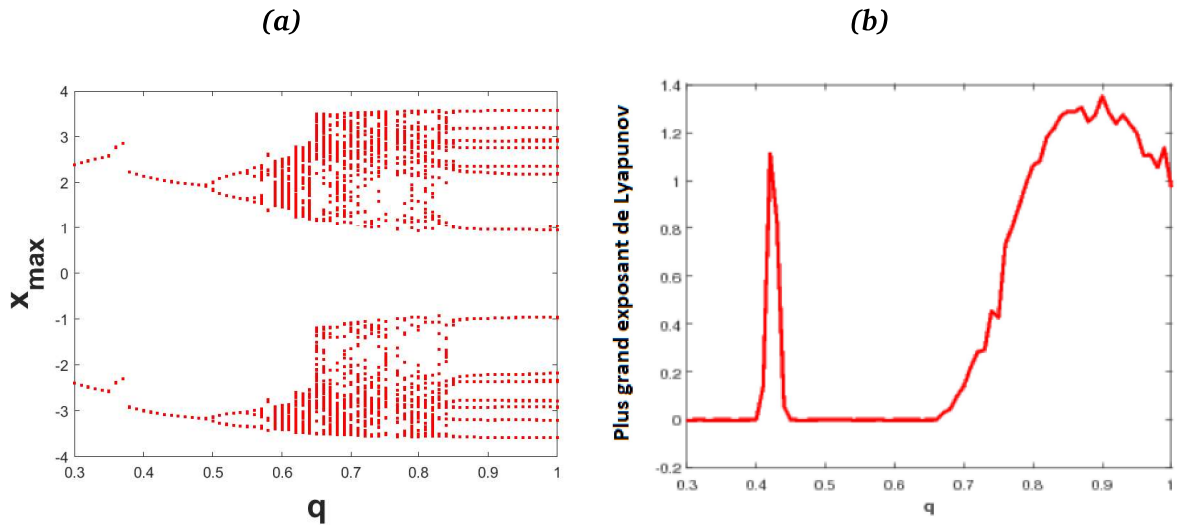


FIGURE 3.3 – (Fig. 3.3a) : diagramme de Bifurcation, (Fig. 3.3b) : plus grand exposant de Lyapunov

générale. Pour cela, nous présentons sur la (Fig. 3.3a) le diagramme de bifurcation et sur la (Fig. 3.3b) le spectre montrant l'évolution du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de l'ordre fractionnaire q_i . La superposition observée entre ces deux figures montre que la dynamique du système est effectivement influencée par l'ordre fractionnaire q . Cependant, on peut noter un certain décalage entre les deux figures, surtout lorsque l'ordre fractionnaire tend vers 1. En effet, on devrait s'attendre à un exposant faible lorsque $q > 0.8$, comme l'indique le diagramme de bifurcation. Mais en raison de la proximité entre les valeurs du vecteur d'état, il semble que les valeurs produites soient complètement différentes, d'où l'augmentation de l'exposant de Lyapunov. Pour y remédier, un procédé de quantification serait le bienvenu.

3.1.3 Synchronisation de deux systèmes de Jerk fractionnaires

Dans cette section, nous discutons de la synchronisation de deux systèmes chaotiques fractionnaires. Pour ce faire, nous considérons ici deux systèmes chaotiques appelés respectivement maître (m) (Eq. 3.11) et esclave (s) (Eq. 3.12).

(m) Système maître

$$\begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x_m = y_m \\ {}_0D_t^{q_2} y_m = z_m \\ {}_0D_t^{q_3} z_m = \alpha x_m^3 - x_m - y_m - \beta z_m \end{cases} \quad (3.11)$$

(s) Système esclave

$$\begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x_s = y_s + u_1 \\ {}_0D_t^{q_2} y_s = z_s + u_2 \\ {}_0D_t^{q_3} z_s = \alpha x_s^3 - x_s - y_s - \beta z_s + u_3 \end{cases} \quad (3.12)$$

où u_1, u_2 et u_3 sont des fonctions de commande permettant de mettre en œuvre la synchronisation. En considérant les erreurs de synchronisation comme $e_1 = x_s - x_m$, $e_2 = y_s - y_m$, $e_3 = z_s - z_m$, on obtient les fonctions de commande (Eq. 3.13) après quelques manipulations.

$$\begin{aligned} u_1 &= -e_1 k_1 - e_1 \\ u_2 &= -e_2 k_2 - e_3 \\ u_3 &= \beta e_1^3 + 3\beta e_1^2 x_m + 3\beta e_1 x_m^2 + \beta x_m^3 - \alpha e_3 - \alpha z_m - e_3 k_3 - e_1 - e_2 - x_m - y_m \end{aligned}$$

(3.13)

(Eq. 3.11) et (Eq. 3.12) sont résolues en utilisant la méthode prédicteur-correcteur décrite au chapitre précédent. Il apparaît que la trajectoire du système maître et la trajectoire du système esclave convergent après quelques microsecondes comme le montre la (Fig. 3.4). Sur la (Fig. 3.4a), e_1 et e_2 représentent les erreurs de synchronisation tandis que, la (Fig. 3.4b) présente le résultat de synchronisation de x_m et x_s .

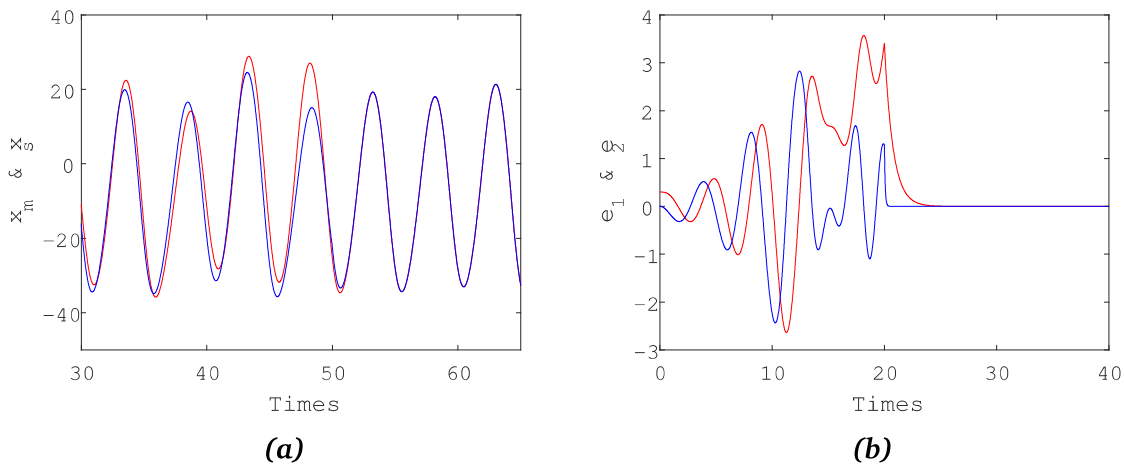


FIGURE 3.4 – La (Fig. 3.4a) Synchronisation de x_m et x_s , la (Fig. 3.4b), erreurs de synchronisation pour $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$,

3.1.4 Résultats expérimentaux

Cette section est dédiée à la présentation des résultats expérimentaux. Les solutions sont observées sur un oscilloscope numérique. Nous proposons un simple dispositif permettant d’implémenter les différents systèmes présentés ici.

a) Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (Eq. 3.5a) ne contient que quatre éléments principaux. Il s’agit de deux convertisseurs numériques-analogiques (A et B), d’un μC (C) et d’un oscillateur de

20MHz (D).

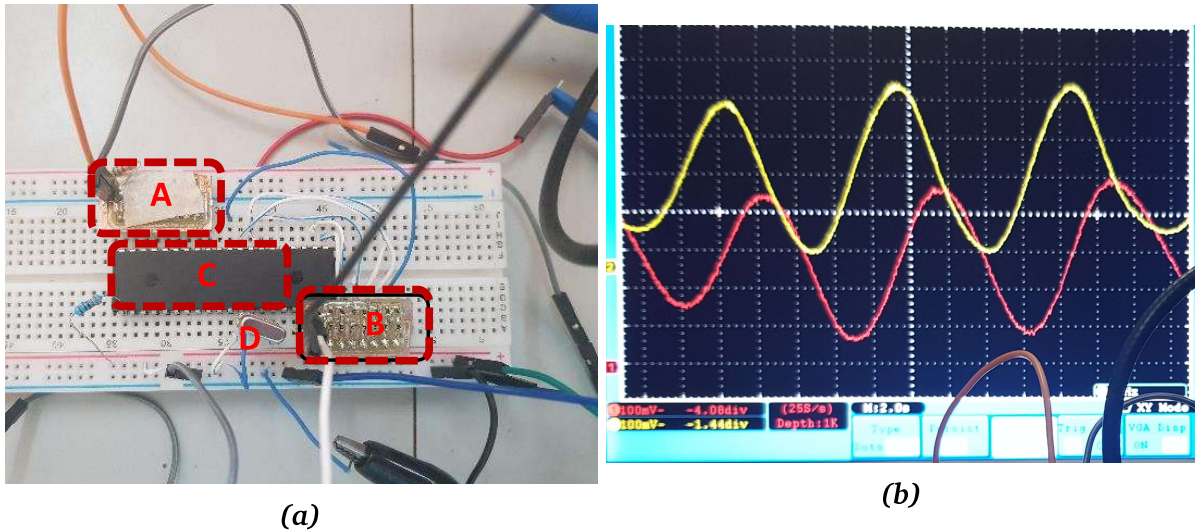


FIGURE 3.5 – Evolution temporelle de x_m et y_m et le dispositif expérimental

Lorsque l'ensemble est alimenté par une tension de 5 V, on observe des oscillations sur un oscilloscope numérique (Eq. 3.5b).

b) Analyse des attracteurs

La (Fig. 3.6) présente les différents portraits de phase du système dans le plan $x - y$, obtenu expérimentalement en implémentant le système fractionnaire dans le microcontrôleur. En (a) on a un cycle limite de période-1 pour $\beta = 0.4$.

En (b) on a un attracteur chaotique pour $\beta = 0.35$. (a) et (b) sont obtenus avec $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1)$, correspondants aux cas classiques.

En (c), on a un attracteur de cycle limite de période 2 pour $\beta = 0.40$, avec $(q_1, q_2, q_3) = (0.94, 0.98, 0.95)$

en (d) , on retrouve un attracteur chaotique pour $\beta = 0.40$, obtenu avec $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$.

c) Analyse du résultat expérimental de la synchronisation

Ici, nous présentons le résultat final de notre première contribution. Il est question de retrouver les résultats observés plus haut. Après avoir montré que les attracteurs obtenus expérimentalement étaient similaires à ceux obtenus numériquement, on observe une fois de plus que la méthode appliquée ici est un succès total. On peut observer que les résultats de synchronisation sont semblables comme indiquent (Fig. 3.7) et (Fig. 3.4). La (Fig. 3.7a) présente le résultat de synchronisation entre $x_m(t)$ et $x_s(t)$. La (Fig. 3.7b) montre les erreurs de synchronisation $e_1(t)$ et $e_2(t)$. On réussit ainsi à implémenter un système de synchronisation

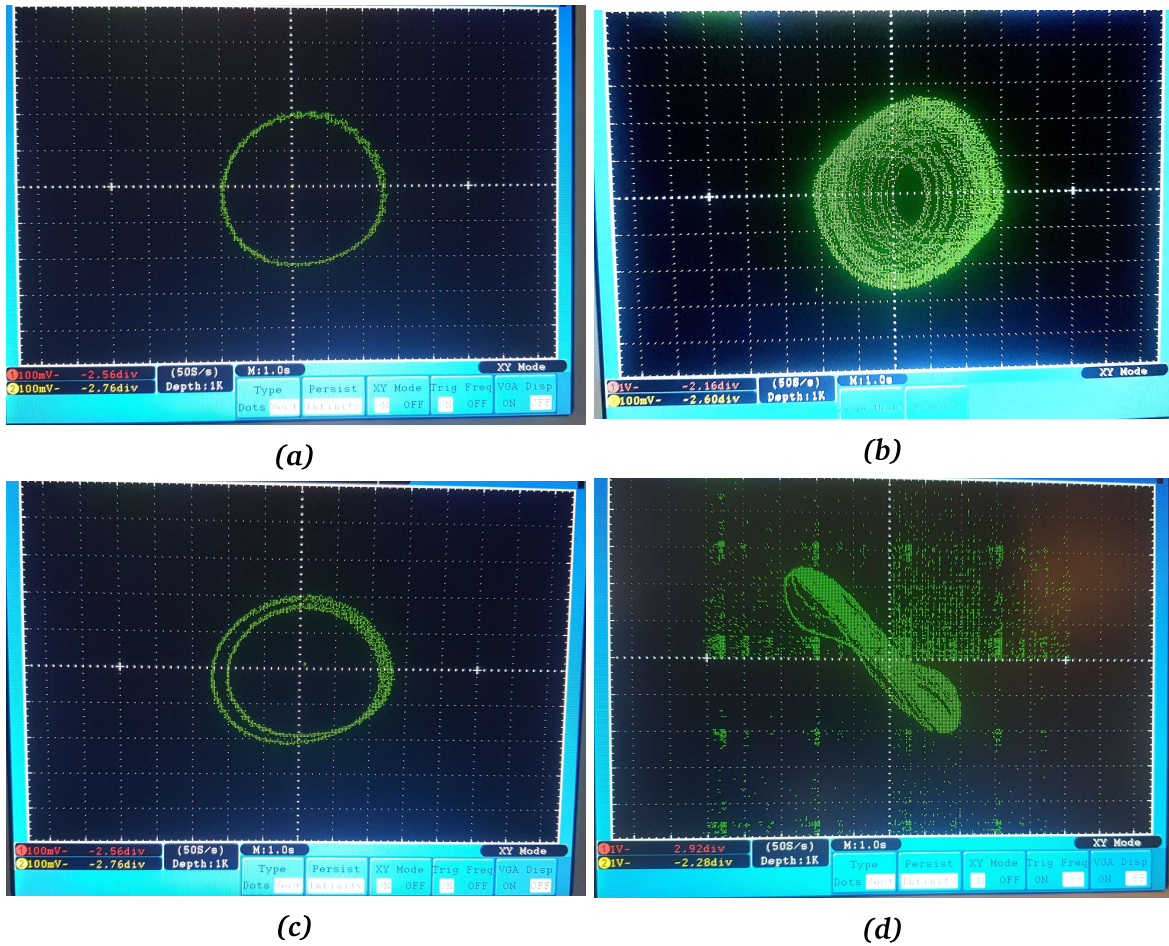


FIGURE 3.6 – Portraits de phase de x en fonction de y obtenu expérimentalement

sous PIC16F877A qui est un outil de très faible ressource.

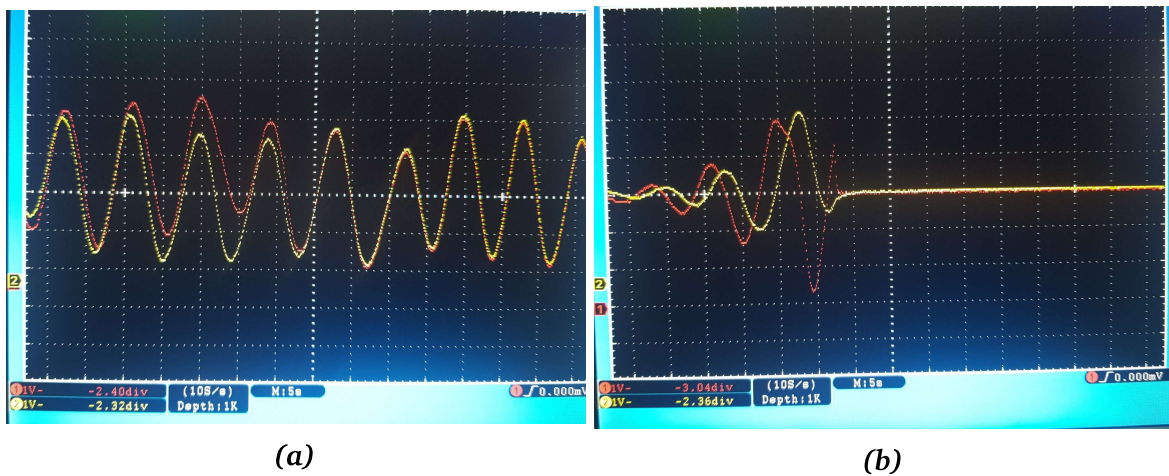


FIGURE 3.7 – Résultats de synchronisation fractionnaire sous μC : $e_1(t)$ et $e_2(t)$ désignent l'erreur de synchronisation (Fig. 3.7a). Sur la (Fig. 3.7b), $x_m(t)$ est synchronisé avec $x_s(t)$ pour $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$

3.2 Cas de l'oscillateur à Memristor

Cette section est orientée vers la conception d'un système memristif 4D autonome à mémoire, le terme mémoire étant induit par le memristor. Une application de synchronisation est également abordée ici.

3.2.1 Modèle de Memristor

En se basant sur la définition présentée au chapitre précédent, nous pouvons définir un système memristif contrôlé en tension. En supposant que $v_e(t)$ et $v_m(t) = \frac{i(t)}{\beta}$ sont des variables qui désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, et que $u_m(t)$ est un vecteur constitué des variables d'état du système, on peut faire l'hypothèse de l'existence du dispositif à mémoire (Fig. 3.8).

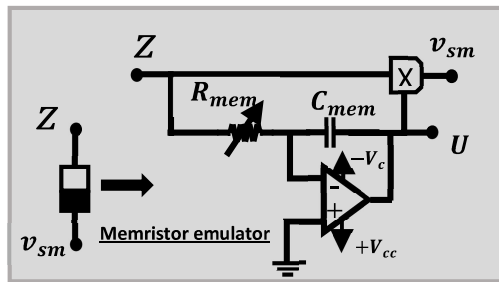


FIGURE 3.8 – Memristor

$$\begin{cases} \frac{du_m(t)}{dt} = \rho v_e(t) \\ i(t) = \beta u_m(t) v_e(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

La caractéristique typique de la dynamique memristive est l'hystérésis observée dans le domaine courant-tension avec $v_e(t) = u_0 \sin(2\pi ft)$. En utilisant l'équation (Eq. 3.14), la variable d'état du dispositif memristif est décrite par (Eq. 3.15).

$$\begin{cases} u_m(t) = \frac{\rho v_0}{2\pi f} (1 - \cos(2\pi ft)) \\ i(t) = \beta u_m(t) v_e(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

Lorsque $u_0 = 1$, $u_m(0) = 0$, $\alpha = 8.94$, et $\rho = 0.07$, la relation entrée-sortie du memristor pour une entrée sinusoïdale est présentée sur la (Fig. 3.9). La (Fig. 3.9b) montre l'évolution temporelle de l'entrée appliquée $v_e(t)$ et de la sortie résultante $i(t)$ lorsque la fréquence est égale à $1Hz$. Un comportement d'hystérésis pincé est observé sur la caractéristique courant-

tension, comme observé sur la (Fig. 3.9a).

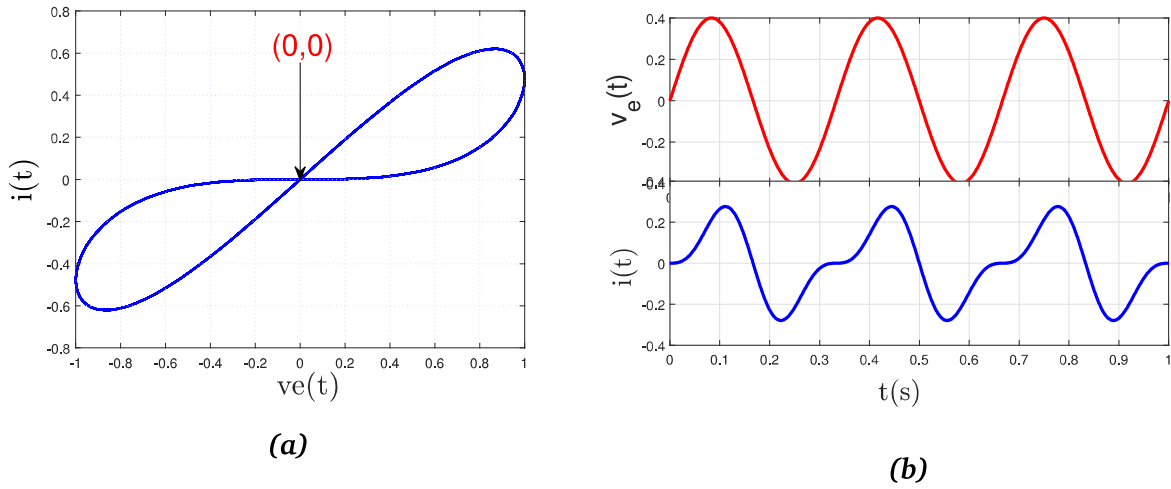


FIGURE 3.9 – (Fig. 3.9a) Courbe d’hystérésis du système, (Fig. 3.9b) evolution temporelle de x_m et y_m

3.2.2 Structure du système Memristif 4D proposé

Dans la littérature, il existe plusieurs systèmes 4D. Ces systèmes sont généralement conçus en utilisant un système d’ordre inférieur. En raison des multiples termes non-linéaires habituellement observés dans les systèmes 3D, les systèmes 4D sont encore plus complexes mathématiquement et nécessitent plus de composants lors de la conception du circuit électronique du système. Nous proposons ici de partir d’un nouveau système du troisième ordre contenant un seul terme **NL**. Nous effectuons ensuite une étude dynamique du système 4D conçu afin de montrer qu’il est possible d’observer des attracteurs riches, tout en gardant une structure simple. Nous présentons donc ici un système d’équations différentielles 3D autonomes :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha xy \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\delta x - y - \gamma z \end{cases} \quad (3.16)$$

Ce système peut être assimilé à la famille des systèmes proposés par J. C. Sprott, mais il se distingue par la présence d’un seul terme croisé sur la première ligne du système. La présence d’un seul terme non-linéaire rend le système facile à mettre en œuvre. En l’associant à l’équation (Eq. 3.14), on obtient un système d’ordre 4 (Eq. 3.17).

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y + \alpha xy, \\
 \dot{y} &= z - \beta uz, \\
 \dot{z} &= -\delta x - y - \gamma z, \\
 \dot{u} &= -\rho z
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

$[x, y, z, u]^T$ est le vecteur d'état du système, α, β, γ et ρ sont des paramètres réels. On peut remarquer qu'il s'agit d'un système 4D avec une structure très simple et différente des systèmes existants.

3.2.3 Étude dynamique du système

a) Stabilité des points d'équilibre

Pour trouver les points d'équilibre du système (Eq. 3.17), on résout $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0, \dot{u} = 0$ et nous avons (Eq. 3.18) :

$$y + \alpha xy = 0, \quad z - \beta uz = 0, \quad -\delta x - y - \gamma z = 0, \quad \rho z = 0 \tag{3.18}$$

On obtient ainsi deux points d'équilibre (PEs) : $P_1(-1/\alpha, \delta/\alpha, 0, 0)$ et $P_2(0, 0, 0, 0)$.

Pour étudier la stabilité des PEs, on définit la matrice de Jacobienne J par (Eq. 3.19).

$$J = \begin{bmatrix}
 \alpha y & \alpha x + 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 - \beta u & -\beta z \\
 -\delta & -1 & -\gamma & 0 \\
 0 & 0 & -\rho & 0
 \end{bmatrix}
 \tag{3.19}$$

On tire le polynôme caractéristique du système (Eq. 3.20)

$$\begin{aligned}
 \det(J - \lambda I_4) &= \lambda\beta + \lambda^3\gamma + \lambda^2 + \lambda^4 + \beta^2\rho z - \lambda\alpha y - \lambda\beta^2u - \lambda^2\beta u - \lambda^3\alpha y - \lambda^2\alpha\gamma y \\
 &\quad + \lambda\alpha\beta x + \lambda\beta\rho z + \lambda\alpha\beta u y - \alpha\beta\rho y z - \lambda\alpha\beta^2u x + \alpha\beta^2\rho x z
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

L'équation (Eq. 3.20) est utilisée pour étudier la stabilité des points d'équilibre P_1 et P_2 . Le tableau (Tab. 3.1) présente les résultats de stabilité correspondant à chaque point.

TABLEAU 3.1 – Analyse de la stabilité des points d'équilibre pour le système memristif

Points	Valeurs propres	Stabilités
$P_0(0, 0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -8.8022$ $\lambda_3 = -0.0439 - 0.4746i$ $\lambda_4 = -0.0439 + 0.4746i$	$\lambda_2 < 0$ et partie réelle $\lambda_3, \lambda_4 < 0$ point stable
$P_1(-1/\alpha, 2/\alpha, 0, 0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = -8.7761$ $\lambda_4 = -0.1139$	$\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3, \lambda_4 < 0$ point instable

b) Dissipativité et existence d'attracteur

Comme indiqué plus haut, la convergence du volume généré par un système permet de montrer l'existence d'attracteurs dans un système. La divergence du système (Eq. 3.17) est définie par

$$\Delta V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} = \alpha y - \gamma \tag{3.21}$$

ce qui montre qu'il est difficile de discerner directement si (Eq. 3.17) est dissipatif ou conservatif, puisque V dépend d'une variable d'état du système, avec

$$V(t) = Ae^{-(\alpha y - \gamma)t} \tag{3.22}$$

Il est donc impossible de prédire avec exactitude la plage des valeurs pour laquelle, $V(t)$ converge. Néanmoins, on peut estimer les intervalles, pas pour imposer un comportement au système, mais pour comprendre le comportement affiché. C'est ce que présente la (Fig. 3.10). Pour obtenir cette figure, on fixe un seuil positif et un seuil négatif à γ . Ainsi, la (Fig. 3.10a) est obtenue pour $\gamma = 0.8$ et la (Fig. 3.10b) est obtenue pour $\gamma = -0.8$. Les zones à prendre en compte pour une convergence possible sont marqués en bleu car, elles correspondent aux paramètres pour lesquels on a $\alpha y - |\gamma| > 0$.

c) Bassin d'attraction

Comme indiqué au chapitre précédent, l'analyse des bassins d'attraction permet une nouvelle compréhension du comportement des systèmes dynamiques.

Considérons trois solutions possibles de (Eq. 3.18), que nous représentons sur la (Fig. 3.11) avec $z(0) = -0.01$, $u(0) = 0.01$ et $\alpha = 8.94$.

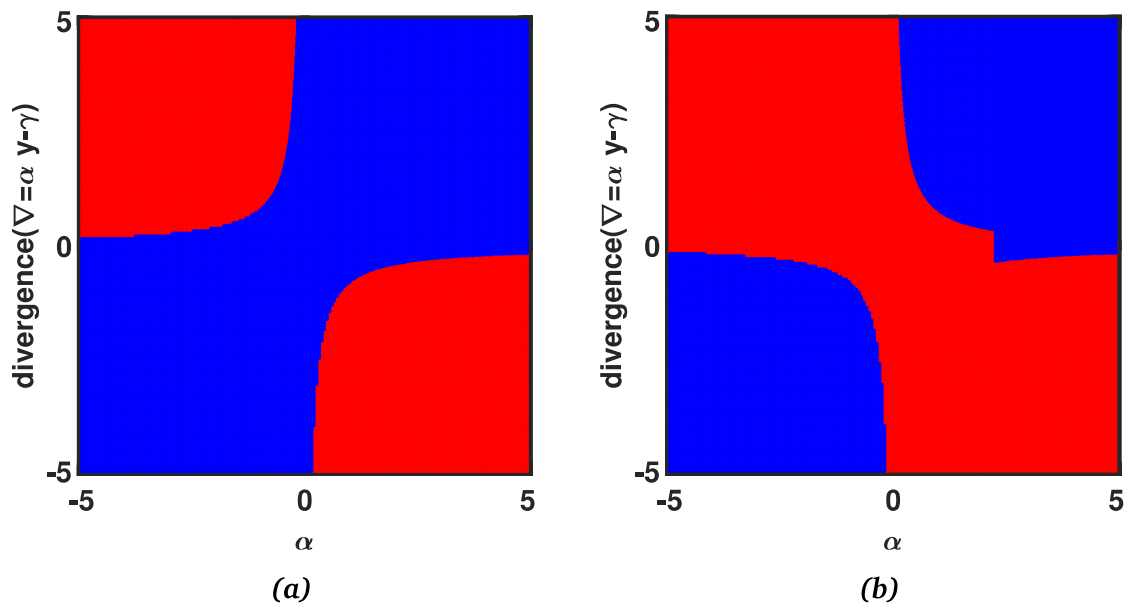


FIGURE 3.10 – Etude de la divergence

Le premier cas est celui où la solution converge vers (P_1) en « rouge », le deuxième cas, celui où la solution converge vers (P_2) en « bleu » et le dernier cas, celui où la solution s'éloigne des deux points d'équilibre en « jaune ».

Selon la (Fig. 3.11), le choix des **CI**s devient évident. Ainsi, nous choisissons $(x(0) = 0.1, y(0) = 0, z(0) = -0.01, u(0) = 0.01)$ comme **CI**s du système. Cette condition initiale est prise dans la zone en couleur bleu, signe que la solution de la (Fig. 3.11) tendra vers (P_2) . Avec ces **CI**s, nous obtenons les attracteurs représentés sur la (Fig. 3.12) où nous montrons un portrait $y - z - x$ sur la (Fig. 3.12a) et un portrait $x - y$ sur la (Fig. 3.12b).

d) Analyse des diagrammes de Bifurcation et des exposants de Lyapunov

Il y a cinq paramètres dans le système : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ρ , mais les paramètres qui changent qualitativement la dynamique du système sont γ et δ . L'analyse de bifurcation du système est donc effectuée selon ces deux cas. Néanmoins, on peut remarquer que dans certains cas, le système produit des attracteurs symétriques en fonction de la valeur de ρ , comme le montre la (Fig. 3.13). Les deux cas sont réalisés avec des **CI**s données par $x(0) = 0.1, y(0) = 0.00, z(0) = -0.01$ et $u(0) = 0.00$;

Analyse cas par cas :

-Premier cas

Soit $\alpha = 8.8, \rho = 0.07, \beta = 3.6, \gamma = 0.3850$ et δ variant de 1 à 2.1 avec un pas de 0.005. Le diagramme de bifurcation du système suivant δ est représenté sur (Fig. 3.16.a) et ses exposants de Lyapunov sur (Fig. 3.16.e). La dimension de **KY** est présentée sur (Fig. 3.16.c).

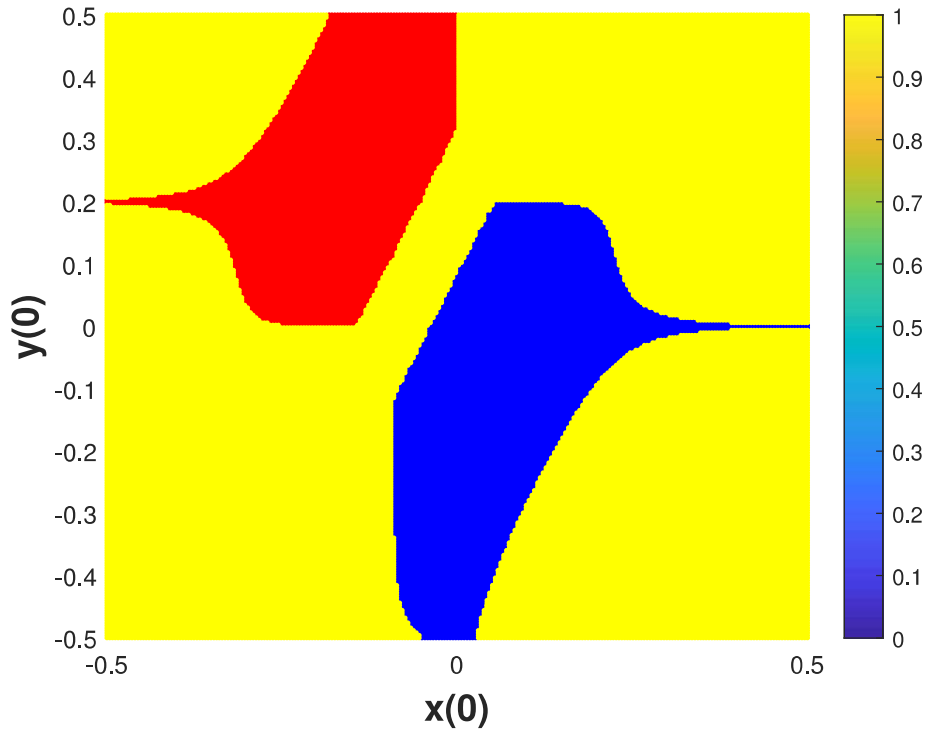


FIGURE 3.11 – BA pour (Eq. 3.17) avec $z(0)=-0,01$ et $u(0)=0,01$

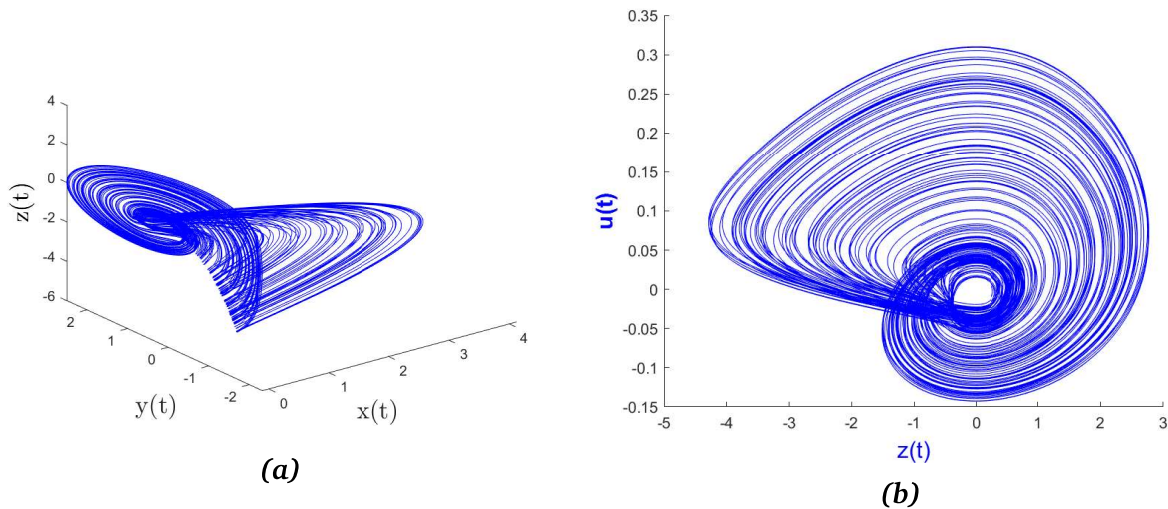


FIGURE 3.12 – (Fig. 3.12a) Portrait de phase en x, y, z et (Fig. 3.12b) en x, y

Elle montre que le système (Eq. 3.17) est hyper-chaotique dans le sens croissant de δ , mais il existe des fenêtres périodiques. On peut également souligner que le système est chaotique pour certaines plages, mais hyper-chaotique dans la plupart des cas. Notons que EL_2 est petit mais non nul. Nous construisons donc (Tab. 3.2), caractérisant les attracteurs présentés sur la (Fig. 3.14)

-Deuxième cas

Soit $\alpha = 8.8$; $\rho = 0.07$; $\beta = 3.6$; $\delta = 2.1$ et γ variant de 0.35 à 1 avec un pas de 0.005.

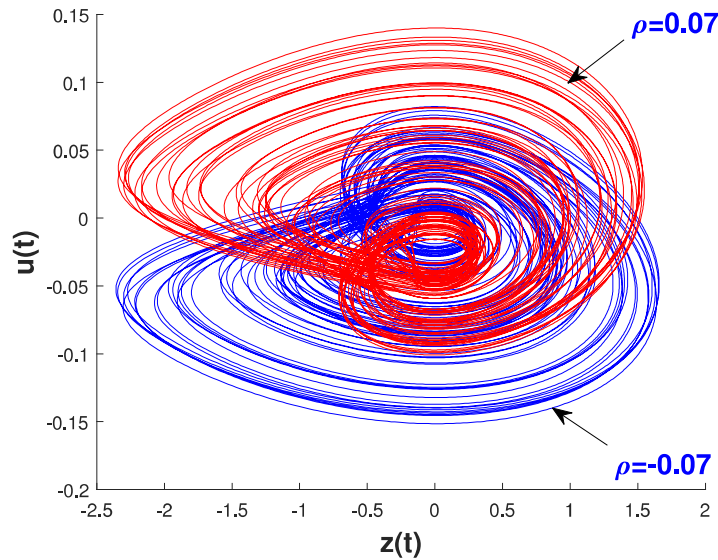


FIGURE 3.13 – Trajectoires de l'espace de phase du système générées par le logiciel *MATLAB* projetées sur les plans $y - z$ obtenues pour $\rho = 0.07$ et $\rho = -0.07$ avec $x(0) = 0.1$, $y(0) = 0.00$, $z(0) = -0.01$ et $u(0) = 0.00$

TABLEAU 3.2 – Caractéristiques des attracteurs de la (Fig. 3.14)

Figures	δ	D_{ky}	LE_1	LE_2	LE_3	LE_4	Nature
(Fig. 3.14.a), (Fig. 3.14.e)	1	0.0049	-0.0028	-0.0143	-0.2759	2.9	1-periodic
(Fig. 3.14.b), (Fig. 3.14.f)	1.2	-0.0024	-0.0022	-0.0653	-0.2194	2.68	2-periodic
(Fig. 3.14.c), (Fig. 3.14.g)	1.4	0.0052	-0.0017	-0.0275	-0.2706	2.911	4-periodic
(Fig. 3.14.d), (Fig. 3.14.h)	2	0.2126	0.0012	-0.0274	-0.4977	3.3746	hyperchaotic

Le diagramme de bifurcation du système suivant γ est représenté sur (Fig. 3.16.b) et ses exposants de Lyapunov sur (Fig. 3.16.f). Il montre que (Eq. 3.17) est hyper-chaotique pour les faibles valeurs de δ . Il existe des fenêtres chaotiques et des fenêtres périodiques. On observe par ailleurs que les plus grands exposants de Lyapunov (Fig. 3.16.d) diminuent avec δ . On peut donc construire (Tab. 3.3) décrivant les natures respectives des attracteurs proposés sur la (Fig. 3.15).

Remarques

-Remarque 1

Lorsque $\gamma = 0.5$ et $\rho = 0.1$, et les états initiaux $(0.1, 0, -0.01, 0.01)$, le système (Eq. 3.16) est hyperchaotique et présente un attracteur hyperchaotique au vu de ses exposants de Lyapunov qui donne $LE_1 = 0,3421$, $LE_2 = 0,0126$, $LE_3 = -0,0159$, $LE_4 = -0,7943$. Nous avons donc deux exposants positifs, indiquant une dynamique hyperchaotique. La dynamique globale est présentée sur la (Fig. 3.16)

-Remarque 2

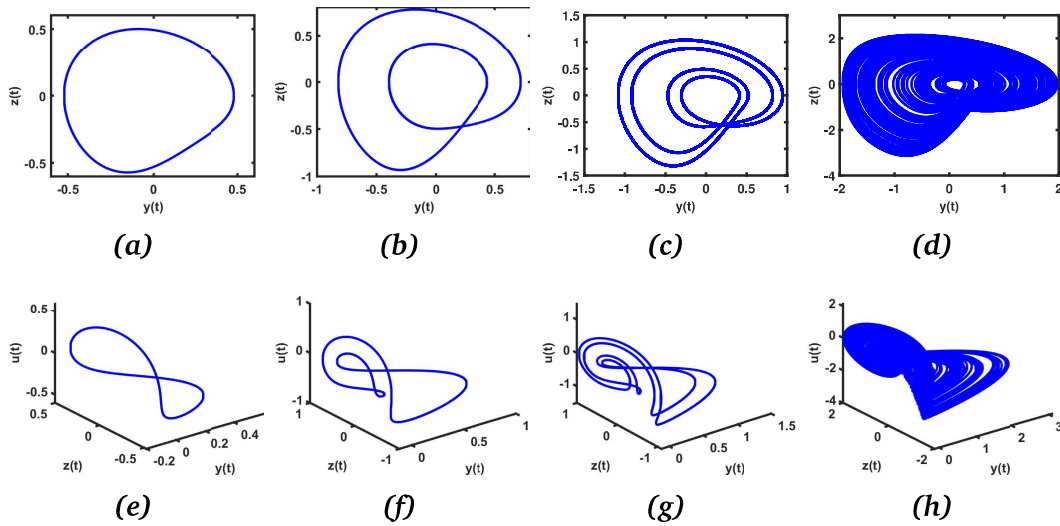


FIGURE 3.14 – Portraits de phase *MATLAB* 2D (y, z) et 3D (x, y, z) du nouveau système hyperchaotique 4-D (Eq. 3.17) pour $\delta = 1$ ((Fig. 3.14.a),(Fig. 3.14.b)), $\delta = 1.2$ ((Fig. 3.14.b),(Fig. 3.14.f)), $\delta = 1.4$ ((Fig. 3.14.c),(Fig. 3.14.g)) et $\delta = 2$ ((Fig. 3.14.d),(Fig. 3.14.h)), avec $\rho = 0.07, \beta = 3.69, \delta = 2.14, \gamma = 0.418$;

TABLEAU 3.3 – Dimension de *KY* du système (Eq. 3.17) pour la (Fig. 3.15).

Figures	γ	D_{ky}	LE_1	LE_2	LE_3	LE_4	Nature
(Fig. 3.15.a)	0.35	3.3829	0.2772	0.0034	-0.0210	-0.6779	hyperchaos
(Fig. 3.15.b)	0.51	2.9799	0.0162	0.0029	-0.0265	-0.3704	3-periodic
(Fig. 3.15.c)	0.53	3.0000	0.0083	-0.0025	-0.0058	-0.3950	chaos
(Fig. 3.15.d)	0.61	3.0308	0.0165	0.0005	-0.0027	-0.4674	hyperchaos
(Fig. 3.15.e)	0.65	2.9726	0.0035	-0.0025	-0.0139	-0.4708	2-periodic
(Fig. 3.15.f)	0.7	3.1023	0.0655	0.0010	-0.0059	-0.5912	hyperchaos
(Fig. 3.15.f)	0.77	2.8411	0.0007	-0.0026	-0.0775	-0.4994	3-periodic
(Fig. 3.15.h)	0.78	3.0786	0.0521	0.0031	-0.0057	-0.6293	hyperchaos
(Fig. 3.15.i)	0.79	3.0277	0.0291	-0.0018	-0.0104	-0.6062	chaos
(Fig. 3.15.j)	0.845	2.8802	0.0054	-0.0024	-0.0705	-0.5635	4-periodic
(Fig. 3.15.k)	0.9	2.8754	0.0014	-0.0026	-0.0745	-0.6078	2-periodic
(Fig. 3.15.l)	1	2.9935	0.0036	-0.0016	-0.0068	-0.7439	1-periodic

Les figures (Fig. 3.16.e) et (Fig. 3.16.f) se superposent parfaitement aux diagrammes de bifurcation respectifs (Fig. 3.16.a) et (Fig. 3.16.b), confirmant les attracteurs annoncés pour la (Fig. 3.14) et la (Fig. 3.15). On constate que le maximum de la courbe correspond à $D_{LE} = 3.4708$. Ainsi, le système (Eq. 3.17) est réellement un système dissipatif. Cette valeur est supérieure à celles de plusieurs systèmes présents dans la littérature à notre connaissance. Nous présentons dans (Tab. 3.4) : une comparaison pour certains des meilleurs systèmes rencontrés dans la littérature, selon le nombre d'éléments non-linéaires que le système comprend, et la dimension de *KY* correspondante.

La (Fig. 3.16a) et la (Fig. 3.16b) montrent que le comportement du système suivant

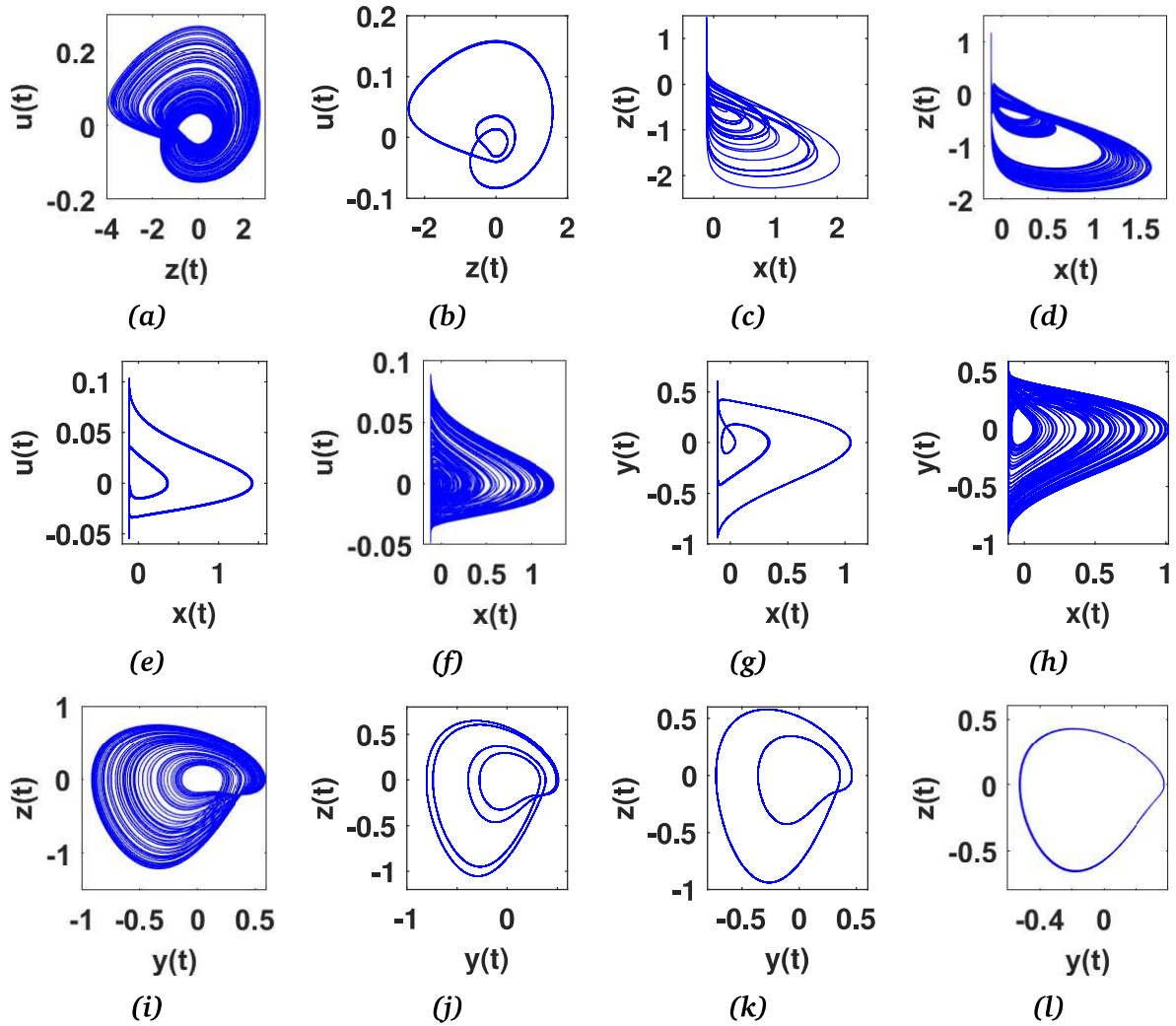


FIGURE 3.15 – Attracteurs chaotiques, hyperchaotiques et périodiques décrits dans (Tab. 3.3).

TABLEAU 3.4 – La dimension maximale de KY de systèmes hyperchaotiques typiques

Systèmes	DKY	LE_1	LE_2	LE_3	LE_4	Nombre d'EN
Cette thèse	3.4708	0.3773	0.0126	-0.0159	-0.7943	2
[119]	3.34748	0.26609	0.08139	0	-1.9412	4
[120]	3.3241	26.045	11.396	0	-115.518	5
[121]	3.2786	13.463	3.478	0	-61.231	4
[122]	3.2397	10.8806	6.2867	-4.9	-51.1673	3
[123]	3.1991	1.0375	0.2055	0	-6.2433	2
[124]	3.1981	12.084	7.731	0	-97.229	4
[125]	3.1979	0.1191	0.0496	0	-0.8522	1
[126]	3.1139	1.3496	0.2563	0	-14.0947	2
[127]	3.0269	0.5841	0.000127664	-0.4873	-3.5968	2
[128]	3.02	1.976	0.1252	0	-11.950	2

δ est différent du comportement du système suivant γ . Il est donc plus indiqué d'observer l'évolution du système suivant les deux axes simultanément. Pour cela, nous présentons sur

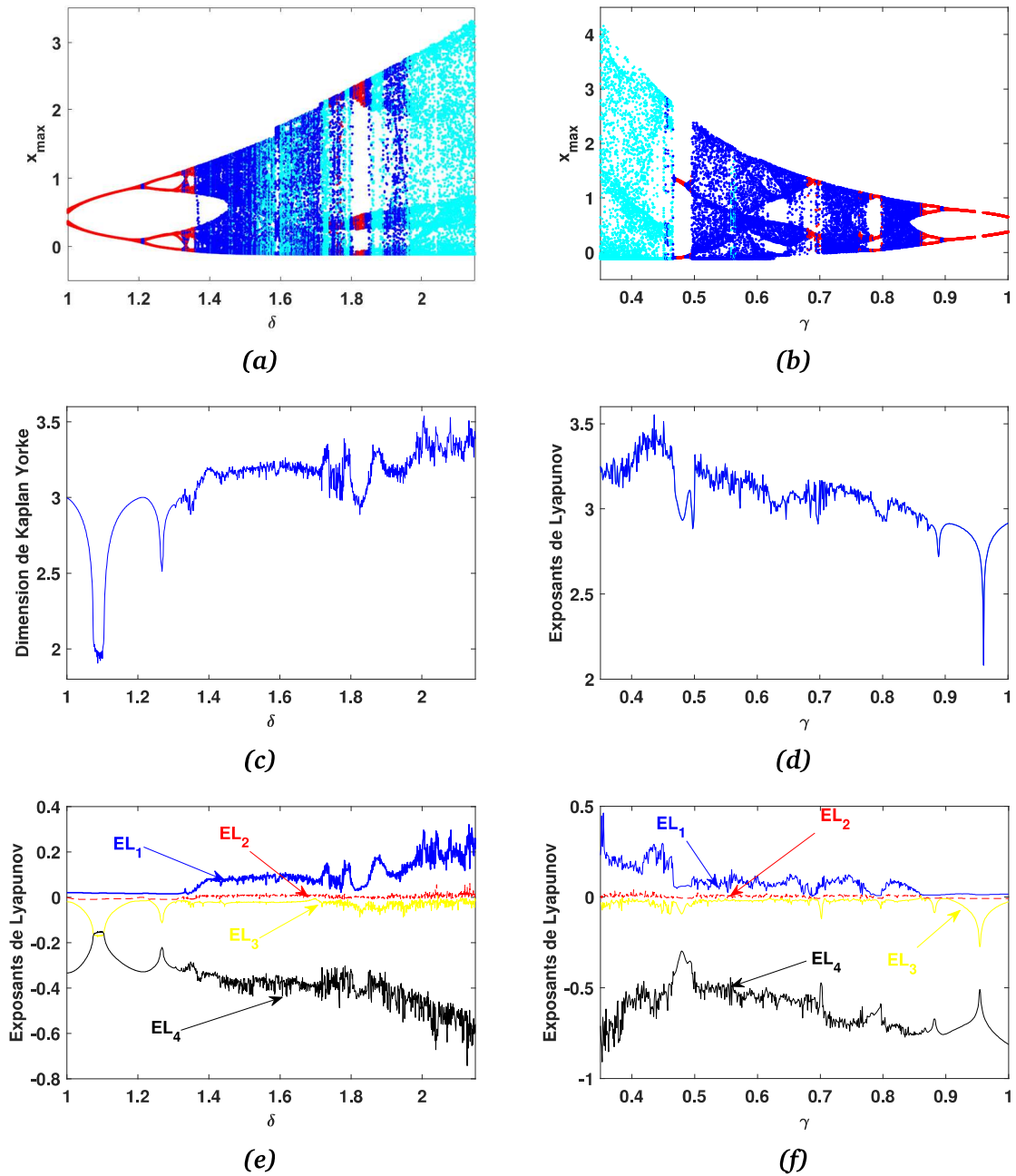


FIGURE 3.16 – (Fig. 3.16.a) et (Fig. 3.16.b) sont des diagrammes de bifurcation, (Fig. 3.16.c) et (Fig. 3.16.d) sont des exposants de Lyapunov et (Fig. 3.16.e) et (Fig. 3.16.f) sont la dimension des exposants de Lyapunov du système hyperchaotique (Eq. 3.17) avec la variation de δ et γ comme indiqué dans chaque figure pour les paramètres : $\alpha = 9, \beta = 3, \rho = -0,1$ les états initiaux sont $(0.1, 0, -0.01, 0.01)$.

la (Fig. 3.17), une figure sectionnée en quatre zone avec quatre couleurs différentes. Cette figure représente l'ensemble des paramètres de contrôle (δ et γ). Chaque zone correspond à un comportement dynamique bien précis. Pour les dynamiques périodiques, on utilise la couleur rouge ; pour les dynamiques chaotiques, on utilise la couleur bleu. Le système est caractérisé par un comportement plus ou moins chaotique. Pour un comportement beaucoup plus complexe, c'est à dire un système qui tend vers l'hyperchaoticité, on utilise la couleur verte.

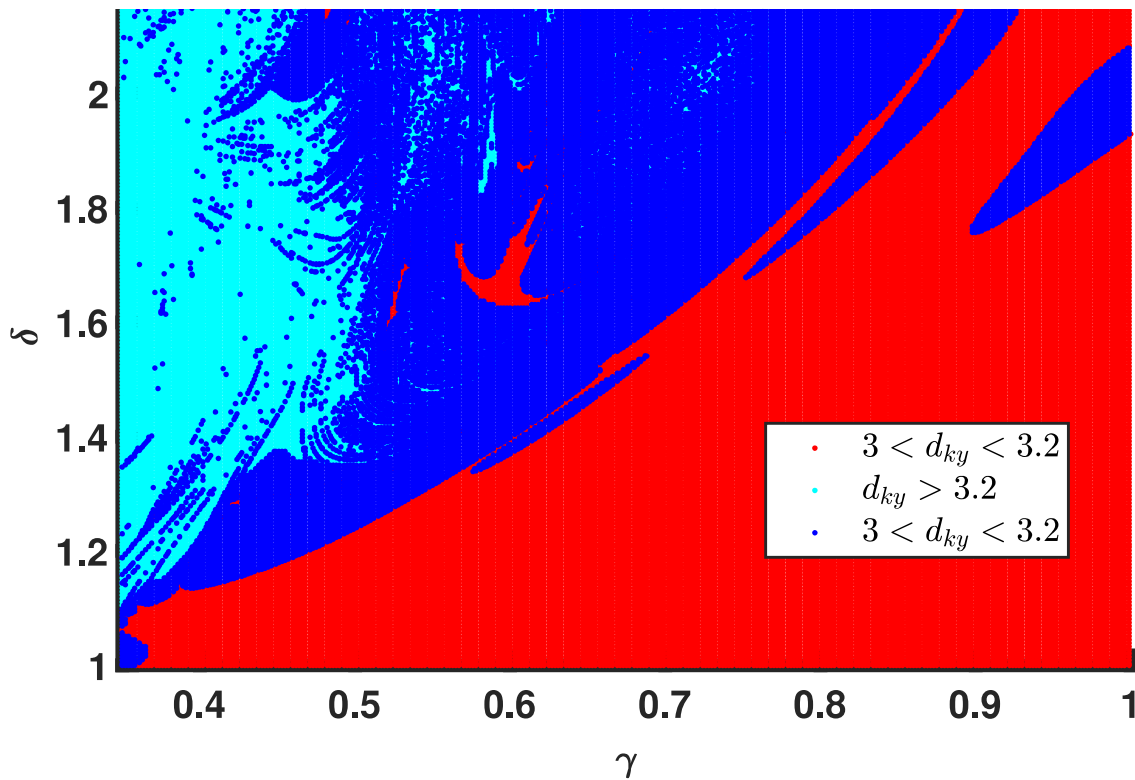


FIGURE 3.17 – Bifurcation de la dimension de kaplang pour α, β lorsque $\gamma = 1.2$, $\delta = 1.1$, et δ, β lorsque $\gamma = 1.2, \alpha = 0.8$

La couleur noir représente la zone de paramètre conduisant à une solution infinie.

e) Coexistence des attracteurs

Dans cette section, nous étudions l'effet des **CI**s sur la complexité du système, pouvant conduire à la multi-stabilité. Il s'agit d'une propriété vérifiant la présence de deux ou plusieurs attracteurs coexistants pour les mêmes paramètres de contrôle. Dans cette approche, seules les **CI**s changent et les critères de différenciation de deux attracteurs sont : la taille et la position du nouvel attracteur par rapport à l'ancien.

Soit $\alpha = 8.89$, $\rho = 0.07$, $\beta = 3.69$, $\delta = 2.14$, $\gamma = 0.418$, $x(0) = 0.1$, $y(0) = 0.00$, $z(0) = -0.01$ et la condition initiale $u(0)$ variant de -0.1 à 0.3 avec un pas de 0.1 . Les attracteurs coexistants trouvés dans le système sont représentés sur la (Fig. 3.18). Nous pouvons donc remarquer qu'à chaque valeur de $u(0)$ correspond un attracteur différent.

f) Influences des conditions initiales sur la complexité du système

La (Fig. 3.18) présente les trajectoires de l'espace des phases pour certaines valeurs de u_0 . Elle montre que la dynamique du système est liée au choix des **CI**s. En prenant $\alpha = 8.94$, $\rho = 0.07$, $\beta = 3.69$, $\gamma = 0.51243$, nous présentons une vue globale de l'influence des **CI**s sur la dimension de Kaplan. Sur la (Fig. 3.19a) on représente d_{ky} dans le plan $x_0 - y_0$. Les couleurs vont du bleu au rouge dans l'ordre croissant de d_{ky} . Ici, on note peu de rouge et

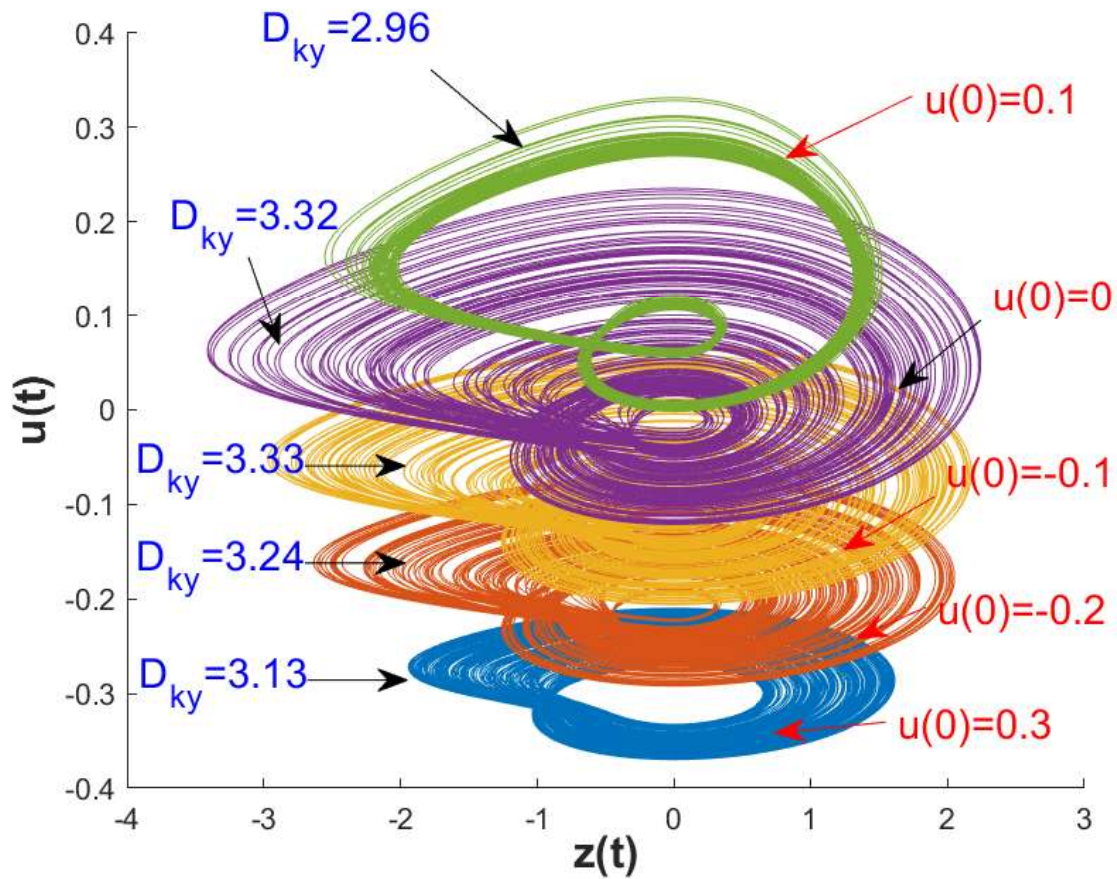


FIGURE 3.18 – Trajectoires de l'espace des phases du système générées par le logiciel *MATLAB* projetées sur les plans $y - z$ obtenus pour certaines valeurs de $u(0)$.

majoritairement du bleu. En effet, les zones bleues représentent les conditions à appliquer pour une dynamique périodique. Nous observons la présence de la couleur verte, signe que le système peut avoir $d_{ky} \in [3.2, 3.4]$. Pour les couleurs allant du jaune au rouge, on a la possibilité d'avoir une dynamique hyperchaotique. Le raisonnement est le même pour les (Fig. 3.19b), (Fig. 3.19c), (Fig. 3.19d) et (Fig. 3.19e). C'est à dire que nous avons plus de dynamique périodique que toute autre dynamique. Pour la (Fig. 3.19b), le chaos apparaît pour les valeurs de z_0 au dessus de 0.1 et les valeurs en dessous de -0.1 . Il convient à noter que pour ces cinq figures, on retrouve toute les dynamiques possibles. C'est à dire le cycle limite, le chaos et l'hyperchaos. Sur la (Fig. 3.19f), on observe un scénario contraire. Ici, on dénote plus de dynamiques complexes que de dynamiques régulières.

3.2.4 Conception du circuit analogique du système (Eq. 3.17)

Cette section est consacrée à la conception d'un circuit susceptible de reproduire le comportement du système (Eq. 3.17). En nous inspirant de (Eq. 3.17), nous proposons le circuit de la (Fig. 3.20). Pour besoin de simulation, il est implémenté sous Multisim en utilisant

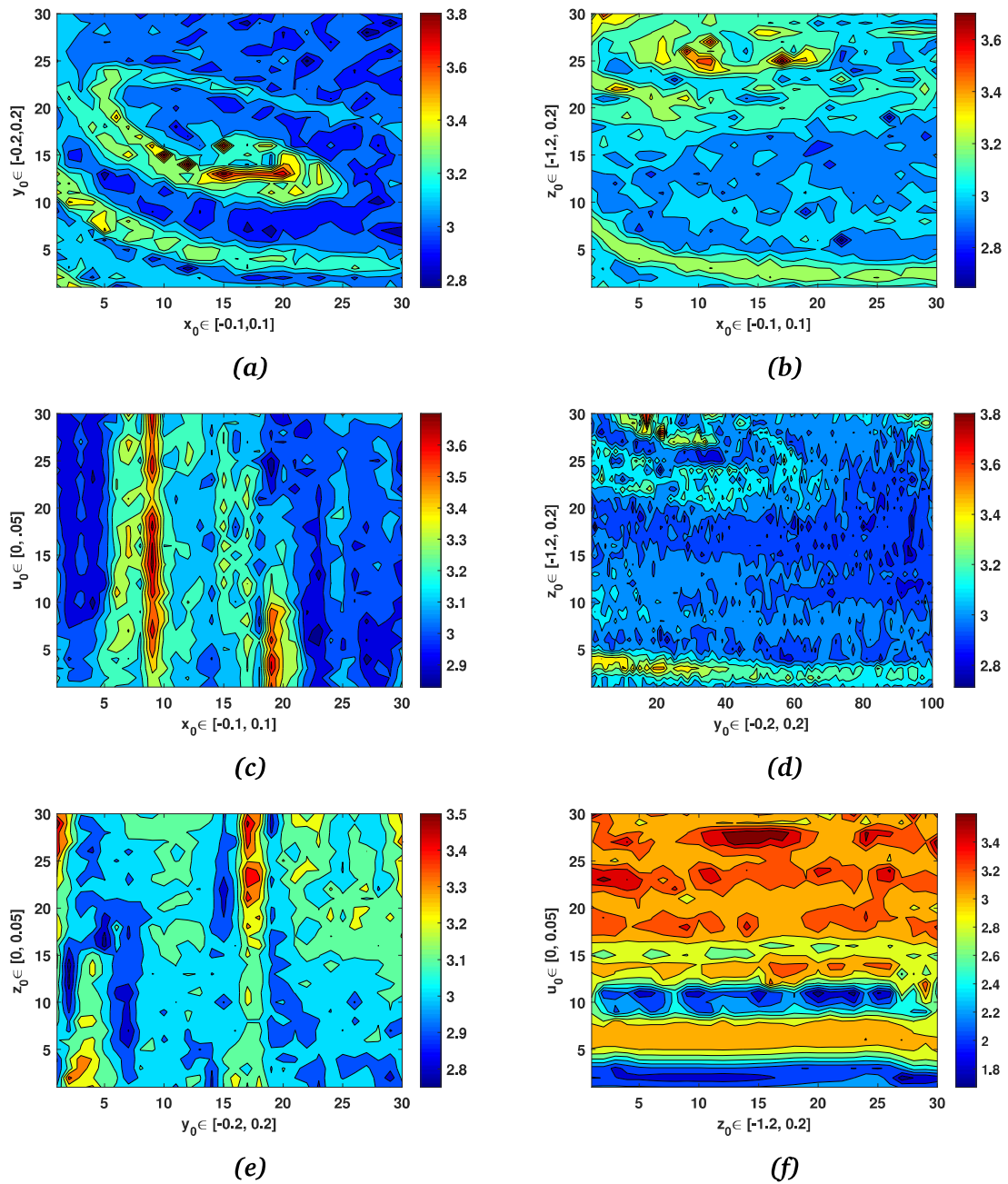


FIGURE 3.19 – Complexité du système en fonction des conditions initiales

neuf amplificateurs opérationnels **TL082**, deux multiplicateurs **AD633**, quatre condensateurs, dix-neuf résistances et une alimentation symétrique de 12V. En désignant par x , y , z et u les tensions aux bornes des condensateurs C_1 , C_2 , C_3 , C_m , et en appliquant les lois de Kirchhoff, on obtient le système (Eq. 3.23).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{R_1 C_1} \left(\frac{R_6}{10 R_4} xy + \frac{R_6}{R_5} y \right) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{C_2} \left(\frac{z}{R_2} - \frac{uz}{10 R_x} \right) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{R_3 C_3} \left(-\frac{R_9}{R_0} x - \frac{R_9}{R_7} y - \frac{R_9}{R_8} z \right) \\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{R_m C_m} z \end{cases} \quad (3.23)$$

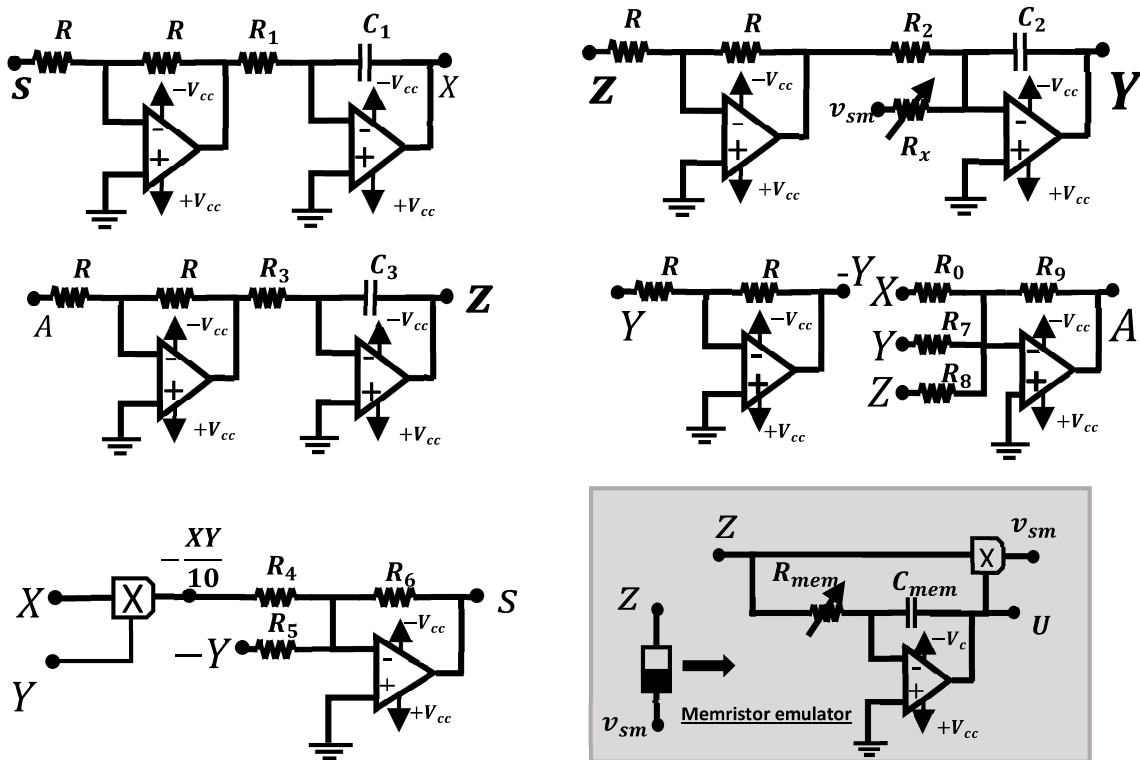


FIGURE 3.20 – Schéma électronique du système

a) *Memristor sous multisim*

Le memristor proposé ici est conçu à partir d'un condensateur, d'une résistance, d'un multiplicateur et d'un AOP¹. Pour émuler ses performances et montrer la relation courant-tension, une source de tension est utilisée pour modéliser la tension d'entrée du dispositif. Une source de tension symétrique est utilisée pour polariser le multiplicateur et l'AOP. La (Fig. 3.21a) présente le schéma de simulation Multisim et la (Fig. 3.21b) présente la courbe caractéristique I-V du système. On peut notamment voir que la courbe se croise à zéro, ce qui montre que malgré la simplicité du circuit, un comportement memristif est décrit.

1. amplificateur opérationnel

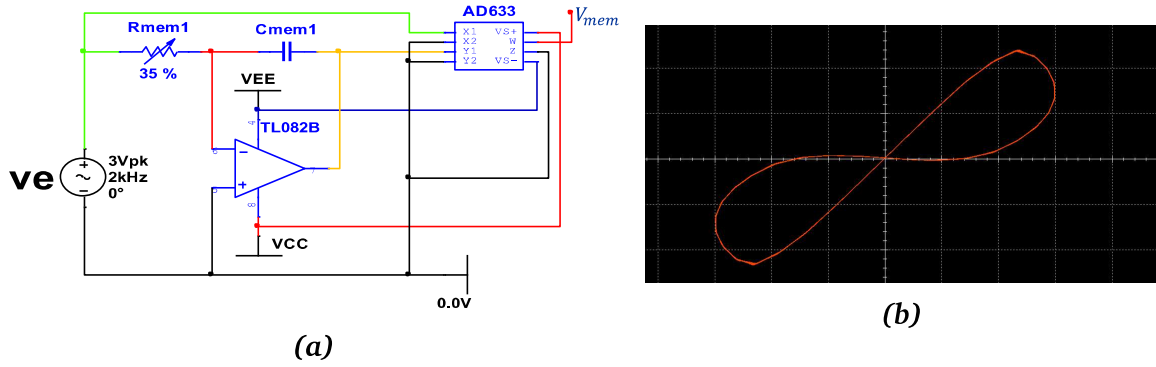


FIGURE 3.21 – (Fig. 3.21a) : Circuit du memristor, (Fig. 3.21b) : Caractéristique v_{mem}/v_e du memristor

b) Influence de l'effet mémoire sur la dynamique du circuit complet

La (Fig. 3.20), $R_m C_m$ est le facteur de transformation de l'échelle de temps. On constate qu'une meilleure forme d'onde peut être observée en fixant. $R = R_1 = R_2 = R_7 = 1k\Omega$, $R_3 = 600\Omega$, $R_4 = 2R$, $R_5 = 32k\Omega$, $R_6 = R_0 = 4k\Omega$, $R_8 = 22.22k\Omega$, $R_9 = 10k\Omega$, $C_1 = C_2 = 10nF$, $C_3 = 500nF$. Pour montrer l'influence de l'effet mémoire sur la dynamique du circuit complet, la (Fig. 3.22a), la (Fig. 3.22c) et la (Fig. 3.22d) présentent les courbes caractéristiques I-V du memristor impliquant un comportement hystérétique sous plusieurs formes. Ce comportement multiple est dû à la variation de la résistance interne du memristor R_{mem} . L'empreinte du memristor est observée pour le cas de la (Fig. 3.22e).

En effet, la mémoire induite par le memristor est fortement liée à la fréquence et à l'amplitude du signal. Étant donné que nous sommes dans un circuit autonome, nous pouvons simplement observer que le comportement du système est contrôlé par la résistance R_{mem} et le condensateur C_{mem} à travers (Eq. 3.24)

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{1}{R_{mem}C_{mem}}z(t) \quad (3.24)$$

Étant donné une variable temporelle tel que $t = \tau R_{mem}C_{mem} \iff dt = R_{mem}C_{mem}d\tau$, on dérive (Eq. 3.25)

$$u(\tau) = \int z(R_{mem}C_{mem}\tau)d\tau \quad (3.25)$$

Par conséquent, en prenant un cas particulier où le signal d'entrée du memristor est $z(t) = A\sin(\omega t)$, l'équation (Eq. 3.25) devient (Eq. 3.26)

$$u_m(t) = u_m(0) + \frac{A}{R_{mem}C_{mem}}(1 - \cos(R_{mem}C_{mem}t)) \quad (3.26)$$

A partir de (Eq. 3.26), on déduit que lorsque C_{mem} est fixe ($C_{mem} = 100nF$), la variation de R_{mem} implique une variation simultanée de la fréquence et la période, d'où le comportement du système vu sur la (Fig. 3.22a), la (Fig. 3.22c), la (Fig. 3.22d) et leurs implications sur la (Fig. 3.22b), la (Fig. 3.22d) et la (Fig. 3.22f).

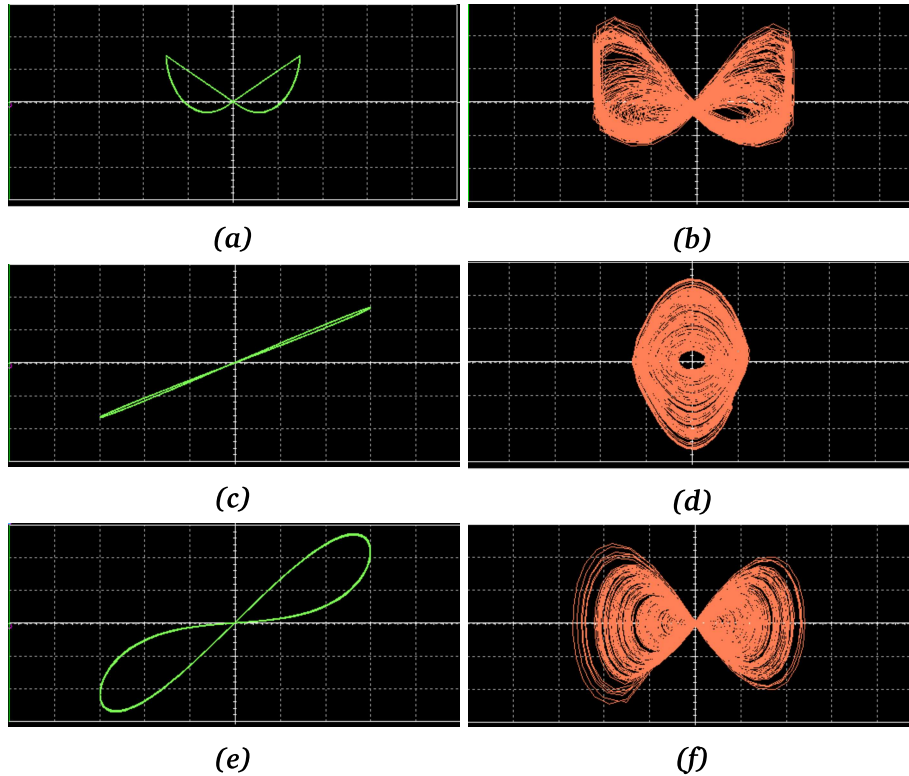


FIGURE 3.22 – Réponses du memristor et Attracteurs correspondants

Les réponses sont superposables à la nature non linéaire induite par le memristor. Cela demeure une simulation et on devrait pouvoir reproduire numériquement les mêmes réponses en implémentant le système (Eq. 3.17) sous **MATLAB**, mais cela ne paraît pas possible. Nous présentons sur la (Fig. 3.23), un cas particulier qui semble montrer une superposition entre la résolution **MATLAB** sur la (Fig. 3.23a) et la réponse numérique de Multisim sur la (Fig. 3.23b). En apparence, les solutions se chevauchent, mais c'est possible après de nombreuses manipulations. Cependant, si nous comparons le système (Eq. 3.17) et le système (Eq. 3.23), nous remarquerons que la condition pour que les deux se chevauchent n'est pas totalement remplie à cause des coefficients. En effet, les valeurs des condensateurs et des résistances choisies pour réaliser le circuit du (Fig. 3.20) ne sont pas en accord pour une superposition parfaite entre les deux équations. On ne peut donc pas considérer que les deux approches sont superposées et par conséquent, il devient inopérant d'essayer de concevoir un dispositif expérimental calibré sur le circuit du (Fig. 3.20). En revanche, nous réalisons une implémentation sous μC afin d'observer la faisabilité réelle du système dans les sections

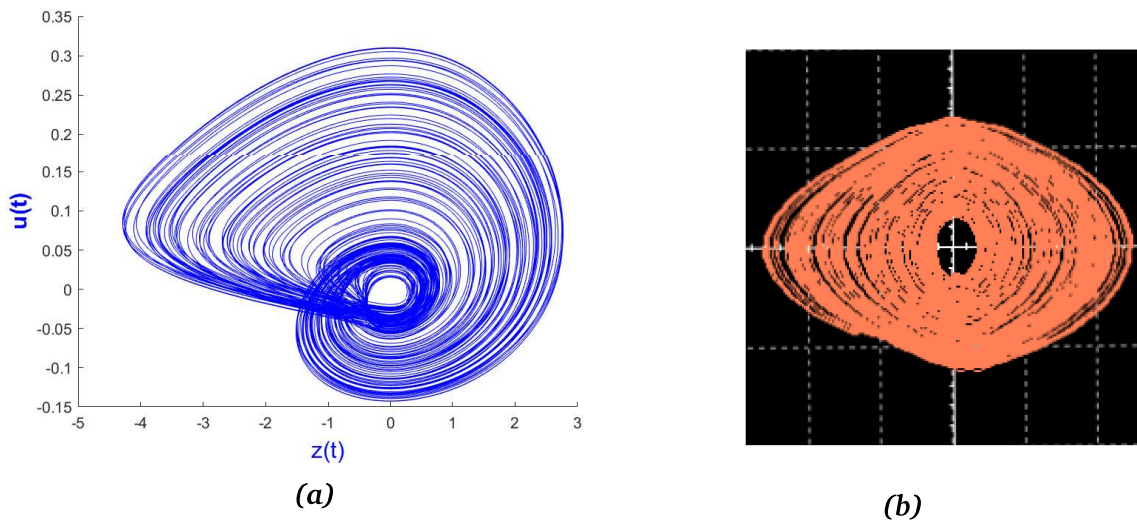


FIGURE 3.23 – *Attracteur MATLAB sur la (Fig. 3.23a), Attracteur Multisim sur la (Fig. 3.23b)*

suivantes.

c) Inadéquation entre les résultats de l'analyse multisim et les résultats de la résolution Matlab

La discordance entre les résultats de l'analyse Multisim et les résultats de la solution **MATLAB** est due aux considérations imposées par le logiciel, qui ne sont pas toujours en accord franc avec celles imposées par **MATLAB**. A titre d'exemple, l'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal, ce qui simplifie les équations, sans pour autant prendre en compte les considérations soutenues par Multisim. Qui plus est, le système se montre sensible aux **CI**s, de sorte que nous les imposons avant toute résolution sous **MATLAB**. Ce facteur n'est pas pris en compte dans Multisim. Par conséquent, compte tenu de l'inadéquation inévitable des **CI**s et du fait que certains paramètres sont ignorés lors de la modélisation des composants électroniques, des difficultés subsistent pour observer une correspondance parfaite entre le modèle et les résultats obtenus par la résolution numérique du système. Cette constatation a déjà été soulignée par Eyebe et al. dans [54]. En comparant les résultats obtenus sous multisim avec ceux obtenus expérimentalement, l'auteur parvient à la conclusion qu'il est impossible de superposer les résultats de la simulation et les résultats expérimentaux (dans l'approche analogique). Dans la section suivante, nous verrons que l'approche numérique sous $\mu\mathbf{C}$ est celle qui est la plus proche de la solution numérique du système différentiel obtenue sous **MATLAB**.

3.2.5 Réalisation expérimentale du système (Eq. 3.17)

Dans la présente section, nous utilisons le μC pour mettre en œuvre le système (Eq. 3.17). Il est utilisé en raison de sa capacité à s'adapter aux applications pratiques. Il s'agit du PICT6F877A, le même que celui utilisé plus haut pour le système Jerk.

Le système (Eq. 3.17) peut être résolu en utilisant (Eq. 3.27)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h(y_n + \alpha x_n y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + h(z_n - v_{sm}) \\ z_{n+1} &= z_n + h(-2x_n - y_n - \gamma z_n) \\ u_{n+1} &= u_n + h(\rho z) \end{aligned} \quad (3.27)$$

De même, (Eq. 3.14) peut être résolu en utilisant (Eq. 3.28). A chaque itération, le courant correspondant est calculé avec (Eq. 3.29)

$$u_m(n+1) = u_m(n) + h(\rho v_e(n)) \quad (3.28)$$

$$i(n) = \beta u_m(n) v_e(n) \quad (3.29)$$

a) Schéma bloc du système

Dans cette rubrique, nous employons la (Fig. 2.17) pour mettre en œuvre le système (Eq. 3.17) développé. Les signaux chaotiques générés sont dirigés vers le PORTB et le PORTD du μC . Pour cette mise en œuvre, l'algorithme reste le même, autrement dit, le signal numérique à la sortie du μC est écrit sur huit bits, puis dirigé vers un convertisseur numérique-analogique (R2R). Enfin, le signal analogique résultant est transmis à un oscilloscope numérique.

Les (Fig. 3.24a) et (Fig. 3.24b) illustrent respectivement la courbe caractéristique du memristor et un attracteur obtenu en implémentant (Eq. 3.17) sous le μC . Les valeurs des paramètres de contrôle sont notamment présentées dans (Tab. 3.5). Nous observons distinctement que la (Fig. 3.24b) est un attracteur chaotique en parfait accord avec la (Fig. 3.9b). Pour une meilleure visibilité, nous montrons différents attracteurs sur (Fig. 3.25). Nous présentons également les paramètres de mise en œuvre dans (Tab. 3.5).

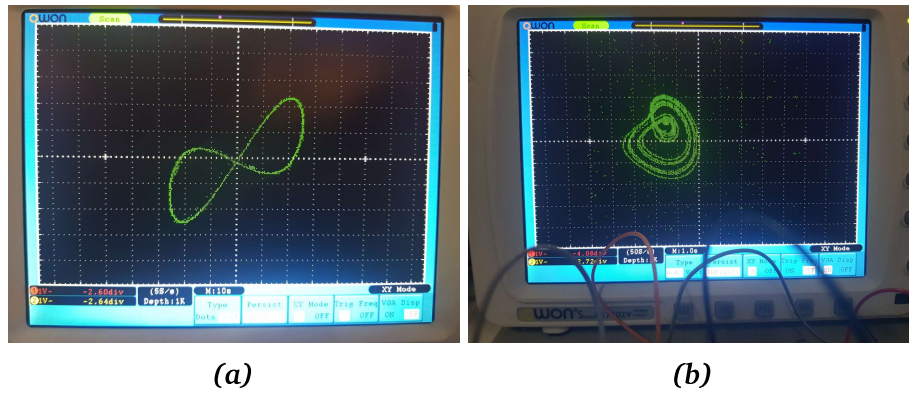


FIGURE 3.24 – (Fig. 3.24a) Caractéristique expérimentale $(v_{mem} - v_e)$ du memristor contrôlé en tension, la (Fig. 3.24b) attracteur expérimental pour $\gamma = 0.67$ et $\rho = 0.1$ dans le plan y - z

TABLEAU 3.5 – Tableau des paramètres

Figure	Initials conditions				Calibration parameters				Control parameter				Nature
#	x_0	y_0	z_0	u_0	α	β	γ	ρ	a_x	b_x	a_y	b_y	#
(Fig. 3.25a)	0.1	0	-0.1	0.01	9	2	1.1	0.1	322	158	274	154	period-1
(Fig. 3.25b)	0.1	0	-0.1	0.01	9	2	0.945	0.1	244	164	203	155	period-2
(Fig. 3.25c)	0.1	0	-0.1	0.01	9	2	0.85	-0.1	213	156	168	156	period-4
(Fig. 3.25d)	0.1	0	-0.1	0.01	9	2	0.67	0.1	130	169	108	153	chaos

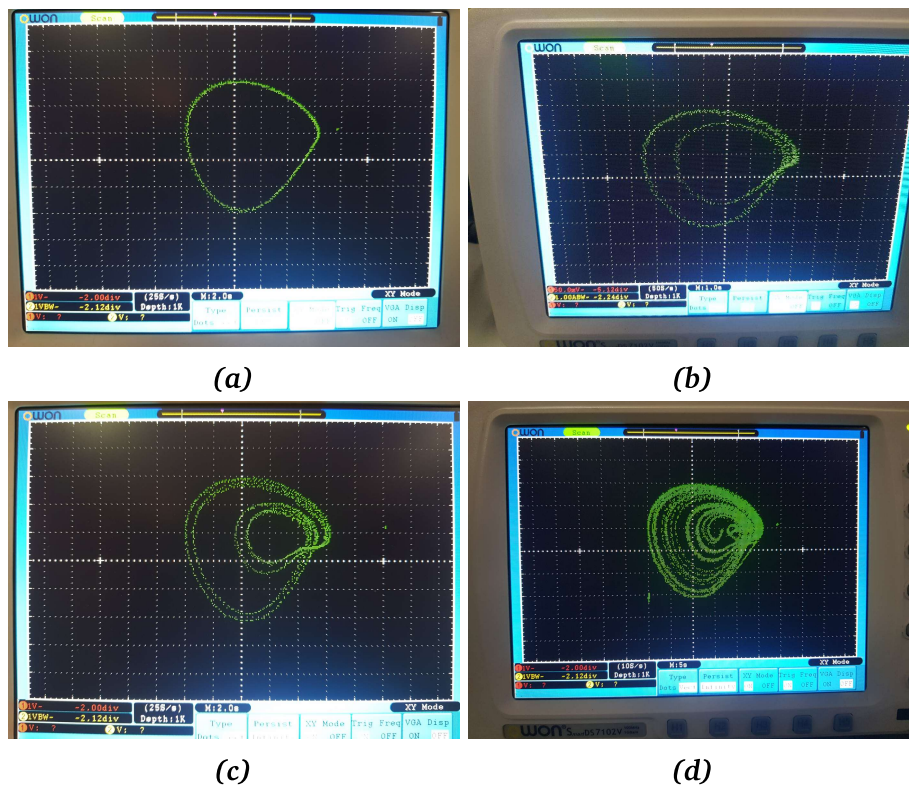


FIGURE 3.25 – Portraits de phase expérimentaux obtenus à l'aide d'un oscilloscope numérique en mode XY; les tensions de sortie $y(t)$ et $z(t)$ sont envoyées aux différents ports du μC (PORTA et PORTD), respectivement : la (Fig. 3.25a) période-1 pour $\gamma = 1.1$ et $\rho = 0.1$; la (Fig. 3.25b) période-2 pour $\gamma = 0.946$ et $\rho = 0.1$; la (Fig. 3.25c) période-4 $\gamma = 0.85$ $\rho = -0.1$; la (Fig. 3.25d) chaos pour $\gamma = 0.67$ et $\rho = 0.1$. $\alpha = 9$ et $\beta = 2$ pour toute image

b) Observations

-Cas d'implémentation analogique :

La présente étude porte sur l'analyse des attracteurs relevés par simulation sous multisim. Les effets du paramètre ρ sur le système sont analysés en pilotant la résistance R_{mem} qui est le paramètre de non-linéarité. En principe, nous avons pour objectif d'utiliser les mêmes paramètres pour l'analyse numérique et expérimentale. Cependant, dans la section (c)), nous avons réalisé que ce n'était pas réaliste, nous avons donc opté pour l'implémentation numérique afin d'observer le comportement réel du système. Toutefois, le circuit analogique nous a permis de mettre en évidence l'effet théorique du memristor sur le comportement global du système. Notamment, lorsque $R_{mem} = 100\Omega$, la courbe représentative du memristor se croise à zéro, mais n'est pas symétrique, comme indique la (Fig. 3.22a). Nous observons à ce stade un attracteur chaotique, non symétrique lui aussi, comme indique la (Fig. 3.22b). Un passage par zéro symétrique est observé pour $R_{mem} = 600\Omega$ sur la (Fig. 3.22c) et un attracteur chaotique symétrique avec passage par zéro également (Fig. 3.22d). La courbe du memristor tend vers une ligne droite lorsque $R_{mem} = 1k\Omega$ (Fig. 3.22e), ce qui contraint le système à se comporter comme s'il n'y avait plus de memristor dans le circuit, comme indique la (Fig. 3.22f).

-Cas de mise en œuvre sous μC :

On aborde ici l'étude expérimentale des attracteurs perçus à la sortie du μC . Grâce aux résultats, nous observons que le système présente un comportement dynamique riche et frappant, allant de la dynamique périodique à la dynamique chaotique. Des portraits de phase obtenus expérimentalement sont présentés sur le graphique (Fig. 3.25). La similitude entre les portraits de phase obtenus numériquement sur (Fig. 3.14) et ceux obtenus expérimentalement est évidente. Par ailleurs, on observe que le modèle expérimental subit la même bifurcation que celui du dispositif expérimental. Finalement, le résultat de (Fig. 3.9a) se superpose parfaitement avec (Fig. 3.24a), ce qui montre que le memristor proposé est simple et réalisable. Nous pouvons donc dire que l'implémentation est un succès complet.

3.2.6 Application : Synchronisation de deux systèmes à memristor

Nous présentons dans cette section des résultats de la synchronisation de deux systèmes memristifs. Pour cela, la démarche est similaire à celle suivie pour le cas fractionnaire. On considérera donc le système maître et esclave suivant, où v_1, v_2, v_3 et v_4 représentent les fonctions de contrôle. On considère que les erreurs de synchronisation sont données par :

$e_1 = x_s - x_m$, $e_2 = y_s - y_m$, $e_3 = z_s - z_m$ et $e_4 = u_s - u_m$.

système maître

$$\dot{x}_m = y_m + \alpha x_m y_m$$

$$\dot{y}_m = z - \beta u_m z_m$$

$$\dot{z}_m = -2x_m - y_m - \gamma z_m$$

$$\dot{u}_m = -\rho z_m$$

système esclave

$$\dot{x}_s = y_s + \alpha x_s y_s + v_1$$

$$\dot{y}_s = z_s - \beta u_s z_s + v_2$$

$$\dot{z}_s = -2x_s - y_s - \gamma z_s + v_3$$

$$\dot{u}_s = -\rho z_s + v_3$$

(3.30)

Conformément à la méthodologie présentée dans le chapitre précédent, et en procédant à certaines simplifications, le système maître et le système esclave se synchronisent si l'entrée de commande est formulée comme suit :

$$v_1 = -e_2 - e_1 k_1 - \alpha e_1 e_2 - \alpha e_2 x_m - \alpha e_1 y_m$$

$$v_2 = \beta e_3 e_4 - e_2 k_2 - e_3 + \beta e_3 u_m + \beta e_4 z_m$$

$$v_3 = 2e_1 + e_2 + e_3 \gamma - e_3 k_3$$

$$v_4 = e_3 \rho - e_4 k_4$$

(3.31)

Comme évoqué précédemment, k_1 , k_2 , k_3 et k_4 sont des gains de rétroaction. Nous adoptons, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 10$. Le bilan de la synchronisation du maître et de l'esclave est représenté sur la (Fig. 3.26). Les systèmes ne débutent pas au même point pour deux CIs proches. Cependant, après quelques itérations, une même trajectoire est suivie par le maître et l'esclave, ce qui correspond à une synchronisation.

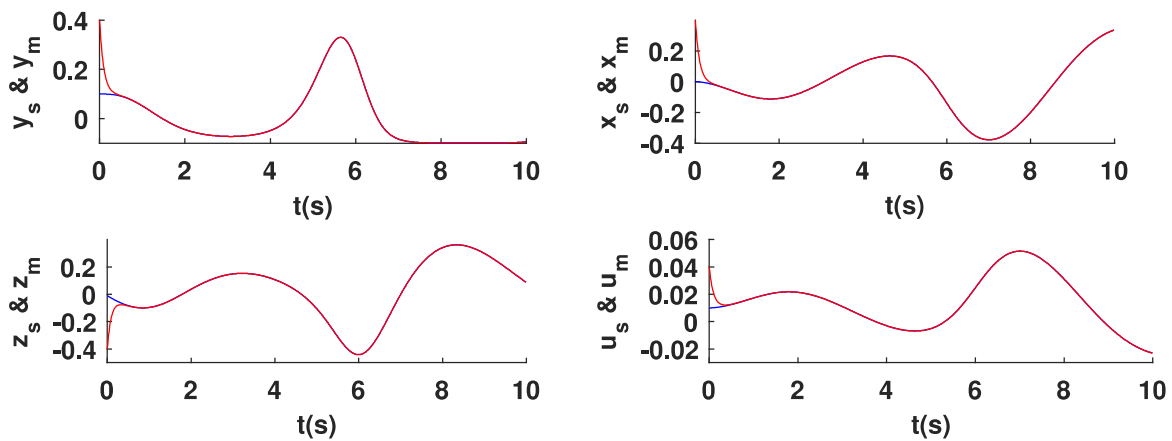


FIGURE 3.26 – Résultats de la simulation de la synchronisation des vecteurs d'états, avec $\alpha = 10$; $\beta = 3$; $\gamma = 0.8$; $\rho = 0.1$ $x_m(1) = 0.1$; $y_m(1) = 0$; $z_m(1) = -0.01$; $u_m(1) = 0.01$; $x_s(1) = 0.4$; $y_s(1) = 0.4$; $z_s(1) = -0.4$; $u_s(1) = 0.04$;

La (Fig. 3.27) montre l'évolution temporelle des erreurs de synchronisation. Aussitôt que la synchronisation des variables d'état est effective, toutes les courbes d'erreurs convergent vers « 0 ». Les graphes de la (Fig. 3.27) et de la (Fig. 3.26) sont donc en accord.

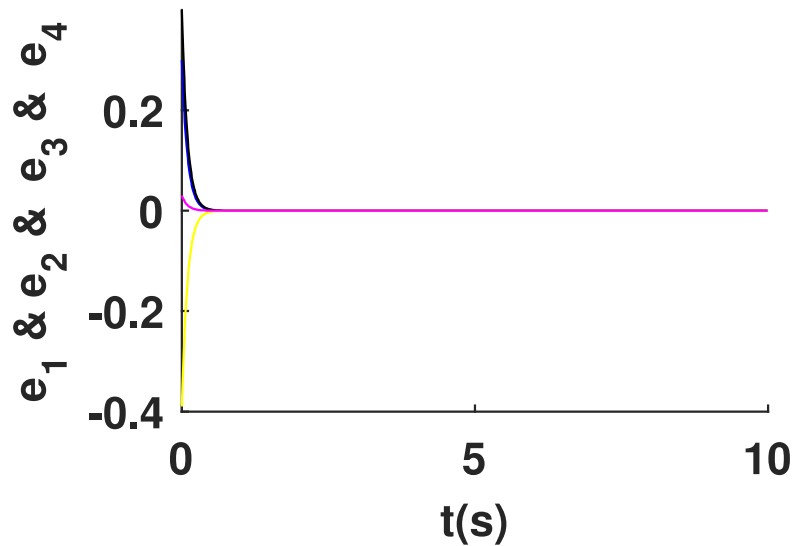


FIGURE 3.27 – Time response curve for synchronization error $e(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t))^T$

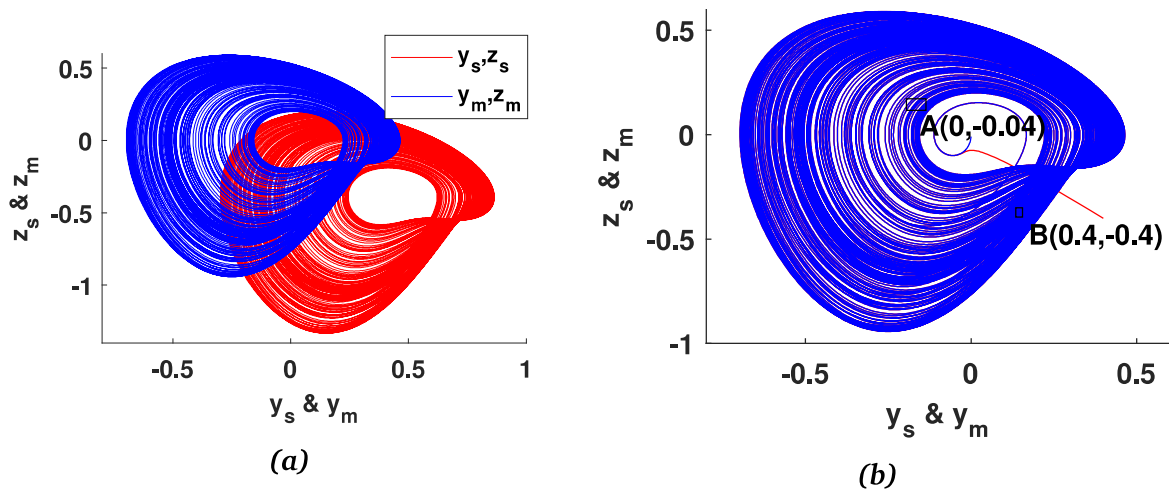


FIGURE 3.28 – 3.28a : Attracteur coexistant pour les **CI**s $[0.4, 0.4, -0.4, 0.04]$ représenté en rouge (esclave) et $[0.1, 0, -0.01, 0.01]$ dans en bleu (maître). (Fig. 3.28b) : Résultat de la synchronisation des attracteurs de la (Fig. 3.28a)

3.2.7 Effet de synchronisation sur deux attracteurs coexistants

La coexistence des attracteurs a été clairement observée ci-dessus. Afin d’identifier l’effet de la synchronisation sur les attracteurs coexistants, nous présentons sur la (Fig. 3.28a), deux attracteurs obtenus avec les mêmes paramètres de contrôle, mais sous deux **CI**s différentes ($[0.4, 0.4, -0.4, 0.04]$ représenté en rouge « esclave » et $[0.1, 0, -0.01, 0.01]$ représenté en bleu « maître »). En raison de la position des deux attracteurs, nous déduisons que l’attracteur maître est différent de l’attracteur esclave. La (Fig. 3.28) montre donc un cas particulier de synchronisation. Au départ, le système maître est à la position $B(0.4, -0.4)$, tandis que l’esclave est à la position $A(0, -0.04)$. Du fait de la synchronisation, l’esclave suit le maître, et on obtient un seul attracteur comme indiqué sur la (Fig. 3.28b).

3.2.8 Résultats expérimentaux de la synchronisation

L'algorithme présenté ci-dessus est utilisé ici pour obtenir les résultats présentés sur la (Fig. 3.29). Une comparaison visuelle entre la (Fig. 3.29) et la (Fig. 3.26) montre clairement une superposition des résultats, montrant que le maître et l'esclave sont expérimentalement synchronisés, ce qu'il fallait montrer dans cette partie.

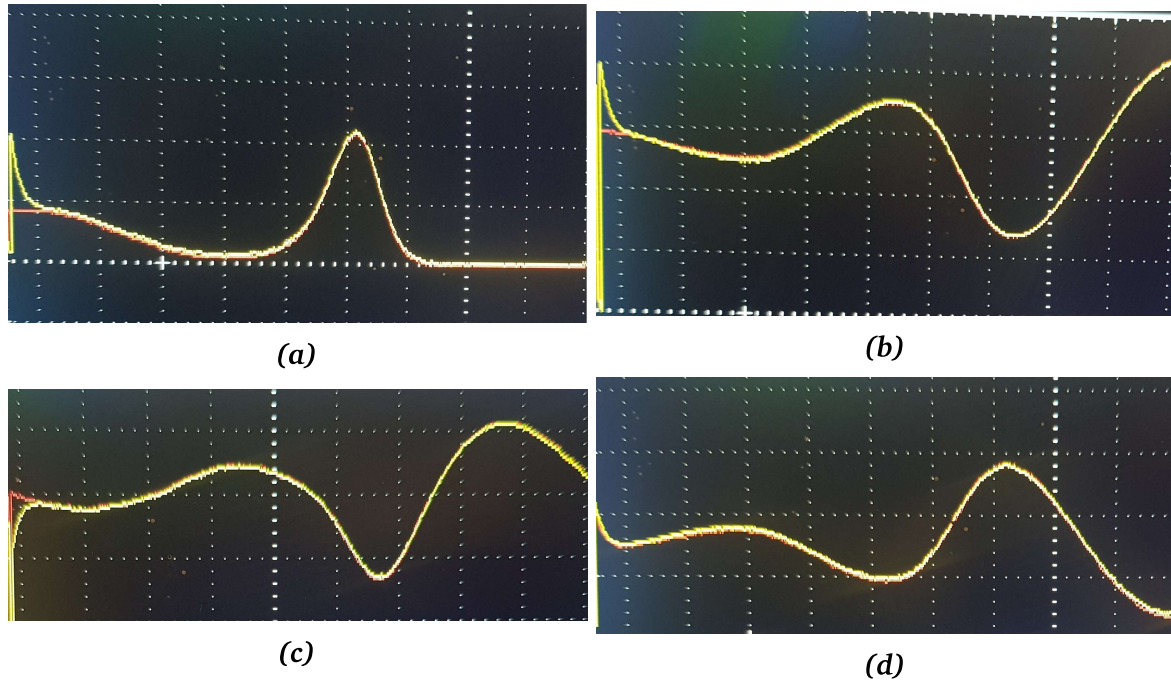


FIGURE 3.29 – Résultats expérimentaux de la synchronisation des variables états : $x_s(t)$ & $x_m(t)$

3.3 Sources d'erreurs et fiabilité du résultat

L'implémentation sous μC est un processus qui tâche à retranscrire le comportement d'un système par voie de programmation. La (Fig. 2.17) montre quelques étapes que traverse une donnée pour atteindre l'outil de visualisation. Bien évidemment, la valeur x n'atteindra pas l'outil de visualisation sans modifications, à cause des multiples erreurs.

3.3.1 Erreur de translation

Examinons le vecteur d'état x obtenu après 1000 itérations du système de Jerk (Eq. 3.5) présenté sur la (Fig. 3.30a). Ses valeurs limites sont $x_{min} = -2,7670$ et $x_{max} = 2,7797$. En envoyant ce signal à un PORT du μC , celui-ci sera interprété tout comme si $x_{min} = 0$ et $x_{max} = 2$. Par conséquent, nous ne sommes en mesure de visualiser que trois valeurs entières possibles, $\{0\ 1\ 2\}$, d'où (Fig. 3.30b). Pour surmonter ce problème, on utilise la (Fig. 3.30c).

Celle-ci présente le vecteur x transposé dans l'intervalle $[0\ 255]$. Pour autant, cette transposition ne garantit pas que le vecteur x soit intégralement représenté, puisque dans l'intervalle $[0\ 255]$, x pourra inévitablement contenir des valeurs décimales. Cependant, le μC n'interprétera que la partie entière, ce qui constitue la première source d'erreur.

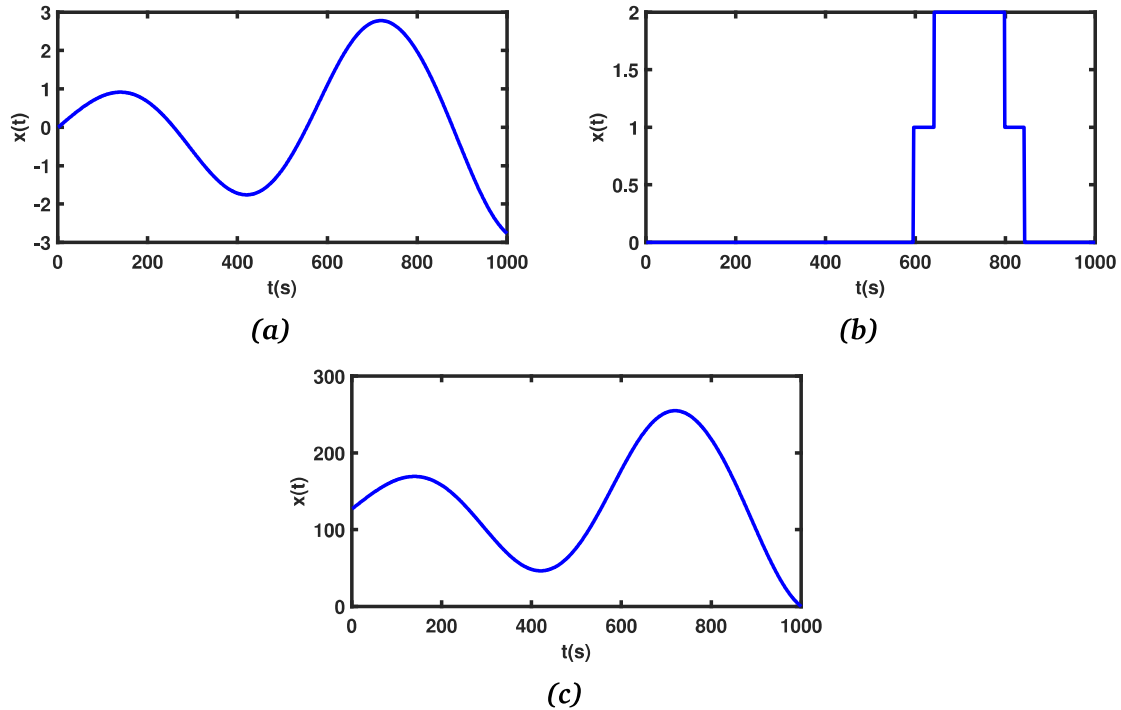


FIGURE 3.30 – Un signal analogique à l'intérieur du μC

En effet, après la translation de x sur n bits, la valeur réellement considérée par le μC est $X_f = X - \tau$, où τ et X_f représentent respectivement la partie décimale et la partie entière de X .

$$X_f = \frac{2^n - 1}{x_{max} - x_{min}}(x - x_{min}) \pm \tau \quad (3.32)$$

Ainsi, τ correspond à l'erreur sur x lorsqu'il est affecté à un PORT de n bits. L'équation (Eq. 3.32) montre que $X_f \rightsquigarrow \frac{2^n - 1}{x_{max} - x_{min}}(x - x_{min})$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, pour minimiser l'erreur τ , n doit être le plus grand possible.

3.3.2 Erreurs de conversion

La seconde source d'erreur est liée au convertisseur numérique-analogique utilisé. Dans cette optique, il est difficile de prévoir l'erreur de conversion. Les résistances, les câbles de connexion, les dispositifs de mesure sont en effet des sources potentielles aux erreurs. Plus particulièrement, (Eq. 2.66) n'est pas une fonction de la résistance. Cela démontre qu'il est impossible d'exprimer de façon théorique les effets de son incertitude sur le signal de sortie. On se contentera dans ce cas d'estimer l'erreur globale en établissant une comparaison entre

le signal de sortie et le signal d'entrée.

3.3.3 Estimation de l'erreur globale

Une première source d'erreur, nous l'avons vu, est liée à l'élimination de la partie décimale de chaque valeur à représenter, il est donc impossible de l'estimer pour une série donnée. Pour cette raison, nous définissons la quantité Δ_x , moyen des différentes erreurs comptées dans une série comme :

$$\Delta_x = \sum_{i=0}^N \left(X_i - \frac{2^n - 1}{x_{max} - x_{min}} (x_i - x_{min}) \right) \quad (3.33)$$

Afin d'obtenir une estimation globale de l'erreur, nous définissons la différence moyenne entre la donnée obtenue en sortie du convertisseur « v_{s_i} » et celle présente dans le $\mu C x_i$, telle que :

$$\mu(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N |v_{s_i}(n) - x_i| \quad (3.34)$$

Comme le μC est alimenté par une tension continue de 5V, la valeur du potentiel de chaque broche est également de 5V. De ce fait, nous avons $v_{s_i} \in [0, 5]$. Il est indispensable d'effectuer une translation du vecteur entrant x , de telle sorte que $x \in [-2.7670, 2.7797] \rightarrow x \in [0, 5]$, soit (Fig. 3.31)

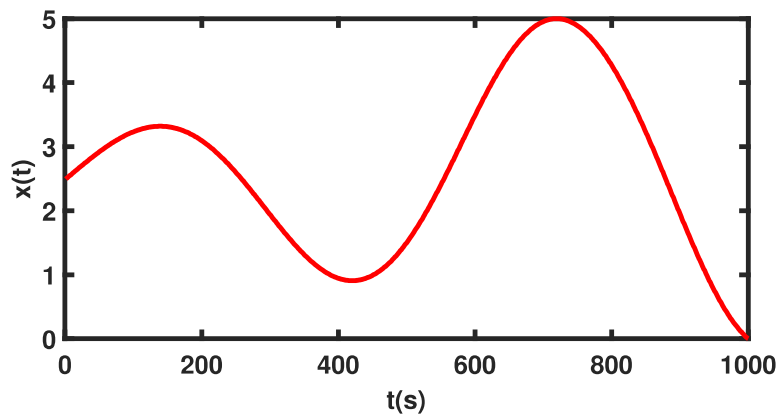


FIGURE 3.31 – Translation du vecteur dans l'intervalle $[0, 5]$

Avec la (Fig. 3.31), il est désormais possible d'appliquer (Eq. 3.34), d'observer l'influence du nombre de bit sur le signal de sortie et de justifier le choix de n utilisé dans cette thèse. (Fig. 3.32a) présente la tension de sortie obtenue pour $n = \{2, 4, 6, 8, 16\}$ représentées respectivement en rouge, bleu, noir et vert.

Pour $n = 2$ « rouge », on observe une dégradation du signal, car le μC ne prend en compte que peu de valeurs. En effet, lorsque $n = 2$, il n'y a que $C = 2^2 - 1 = 3$ combinaisons possibles, ce qui influe sur la valeur obtenue en sortie.

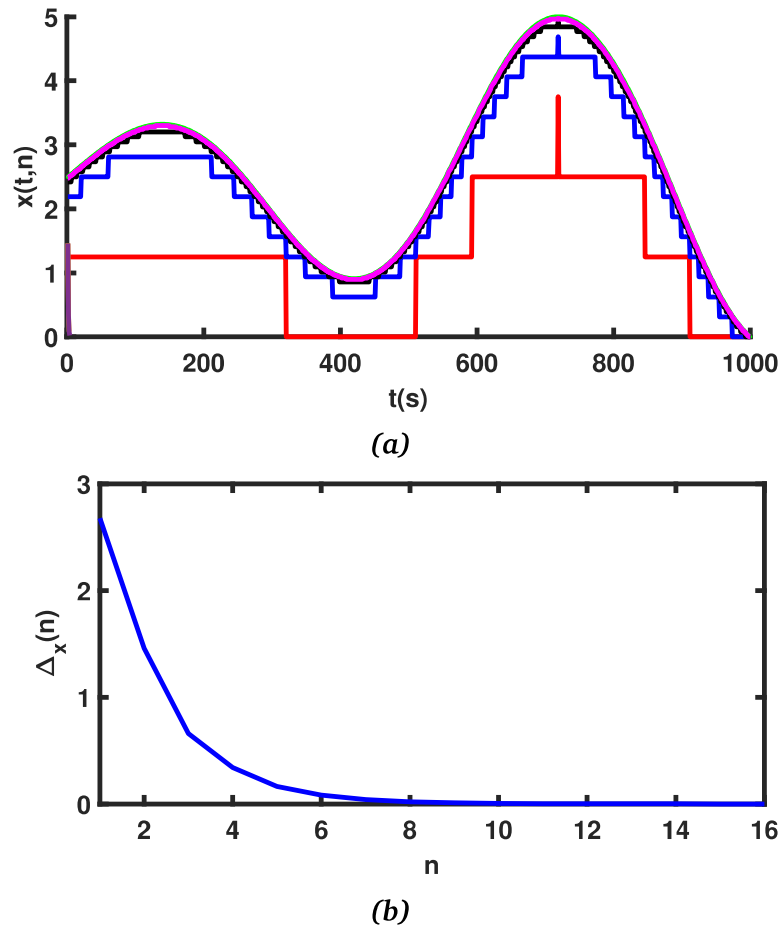


FIGURE 3.32 – Influence de n (Fig. 3.32a) et erreur d’appréciation sur le signal de sortie (Fig. 3.32b).

Pour $n = 4$ « bleu », on observe une légère amélioration du signal. Ici, $C = 2^4 - 1 = 15$ combinaisons possibles. On peut donc avoir 15 niveaux de tension possibles.

Pour $n = 6$ « black », soit $C = 2^6 - 1 = 63$ niveaux de voltage possibles, ce qui montre une amélioration. A ce niveau, on peut noter un léger chevauchement avec le signal d’origine, mais quelques décalages sont tout de même visibles.

pour $n = 8$ « magenta », $C = 2^8 - 1 = 255$ combinaisons possibles. Cela correspond à 255 niveaux de tension. C’est un nombre élevé comparé aux précédents, d’où cette superposition avec la courbe (Fig. 3.31). La précision est encore saisissante pour $n = 16$ « vert », avec $C = 2^{16} - 1 = 65535$ combinaisons possibles, soit 65535 niveaux de tension, d’où la précision observée. Cela permet donc de voir que l’écart entre le signal d’origine et le signal en sortie du convertisseur diminue lorsque n augmente. Pour généraliser ceci, nous reportons sur (Fig. 3.32b), l’erreur entre l’entrée et la sortie pour $n \in [0, 16]$. Nous pouvons donc observer l’évolution des erreurs pour les quatre cas que nous avons étudiés précédemment, d’où (Tab. 3.6).

D’après (Tab. 3.6), nous pouvons dire que pour $n = 16$, le signal arrive à l’oscilloscope

TABLEAU 3.6 – Évolution des erreurs pour les cas étudiés

n	2	4	6	8	16
τ	1.4581	0.3415	0.0821	0.0204	0.0000079592
$\tau(\%)$	54.47	12.7575	3.0678	0.7628	0.0030

avec une perte de 0.003% du signal d'entrée. C'est le meilleur de tous les cas étudiés. Mais un convertisseur 16 bits aurait exigé plusieurs résistances supplémentaires, par comparaison avec le cas $n = 8$. Pour le cas $n = 8$, nous perdons environ 0.7628% du signal. C'est également une valeur acceptable, ce qui montre que le signal observé sur l'oscilloscope est proche du signal attendu.

3.3.4 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons présenté les résultats de la synchronisation de deux systèmes à mémoire sur le μC PIC16F877A. Centrée sur deux concepts d'actualité, à savoir le memristor et le calcul fractionnaire, la synchronisation s'est centrée sur l'unicité des trajectoires de deux systèmes, l'un étant maître et l'autre esclave. Après analyse numérique et expérimentale, nous avons présenté deux applications innovantes, en nous concentrant sur deux contributions : la première traitant de la synchronisation de deux systèmes de Jerk avec des dérivées fractionnaires et la seconde traitant de la synchronisation de deux systèmes avec une non-linéarité memristive. Nous avons ainsi montré qu'il est possible de construire des applications avancées, non seulement théoriquement par des méthodes numériques, mais aussi expérimentalement en utilisant un μC bon marché, disponible et peu coûteux. Comme résultats, l'analyse pratique tracée par les mesures expérimentales est en accord avec les résultats du calcul numérique effectué dans **MATLAB**. Néanmoins, nous avons pointé une perte de 0.76% du signal, due au convertisseur utilisé. Cette perte a peu d'effet, car la sortie n'influence pas l'entrée du système.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail portait sur la synchronisation sur microcontrôleurs d'oscillateurs chaotiques à mémoire. Il s'est articulé sur deux paradigmes, le memristor et le calcul fractionnaire.

Dans un premier temps, nous avons présenté quelques informations générales sur les systèmes dynamiques non linéaires, les systèmes memristifs et le calcul fractionnaire.

Puis, nous avons proposé l'implémentation d'un oscillateur chaotique à dérivés fractionnaires. Ici, nous avons présenté une étude dynamique du système de Jerk à l'ordre entier à travers l'analyse des points fixes, le diagramme de bifurcation et les exposants de Lyapunov. Ce système produit un exposant de Lyapunov positif, signe distinctif d'un système chaotique. Dans l'approche conventionnelle, l'implémentation d'un oscillateur chaotique à dérivés fractionnaires impose l'utilisation de multiples composants électroniques analogiques tels que les résistances, condensateurs, bobines, multiplicateurs, amplificateurs opérationnels, qui sont encombrants et gourmands en énergie. On a observé que pour la conception d'un condensateur fractionnaire de $100nF$, trois résistances ($R_a = 628.4M\Omega$, $R_b = 2.5321M\Omega$, $R_c = 25.33M\Omega$) et trois condensateurs classiques ($C_a = 123.21nF$, $C_b = 183.31nF$, $C_c = 109.85nF$) sont nécessaires comme. Dans cette thèse, afin de réduire ce caractère énergivore, nous avons proposé d'implémenter l'oscillateur de Jerk sur le microcontrôleur PIC16F877a. Considérant les mêmes paramètres de contrôle, on observe une réponse chaotique là où le système classique révèle une dynamique périodique. Les résultats de simulation sous matlab sont en accord avec les résultats expérimentaux.

Entre autre, nous avons étudié la dynamique d'un système memristif autonome doté d'une non-linéarité memristive. L'analyse du diagramme de bifurcation a révélé des cycles périodiques et des dynamiques complexes. Les exposants de Lyapunov ont montré que le système proposé a un comportement plus complexe que ceux présents dans la littérature. Un circuit analogique a été conçu et utilisé pour les investigations afin de montrer l'impact du memristor dans la dynamique du système. En simulation, on observe que lorsque la résistance de contrôle du memristor est faible, sa courbe représentative passe à zéro, mais n'ayant

pas une courbe symétrique. On observe une implication directe sur l'attracteur chaotique correspondant. On observe également que lorsque la courbe d'hystérésis du memristor tend vers une ligne droite, le système perd son comportement memristif. Ces observations ont été faites dans un cadre théorique et il a été constaté que le choix des composants ne pouvait être exact, ce qui nous a conduit à envisager une implémentation du système sur un microcontrôleur, comme pour le cas précédent. A travers une implémentation sous PIC18F877A, on retrouve des attracteurs en parfait accord avec ceux obtenus sous Matlab. Cette représentation a été faite sur une résolution de huit bits.

Le dernier pan de cette thèse présente une application de synchronisation sous microcontrôleur pour chacun des axes sus évoqués. Avec cette application, nous avons montré qu'il est possible de stabiliser un système chaotique sur une orbite chaotique bien définie. La méthode de synchronisation sollicitée est la méthode du contrôle actif. Nous utilisons le microcontrôleur PIC16F877A, cadencé avec un quartz de 4MHz, ayant à la fois une faible mémoire de stockage (8192 Octets) et de programmation (368 Octets). Pour un affichage sur oscilloscope des résultats à la sortie du PIC16F876A, nous avons conçu deux convertisseurs numériques analogiques de huit bits, basé sur le système R2R.

Dans nos prochains travaux, nous effectuerons à nouveau cette analyse avec une résolution bien plus élevée et observerons l'influence du nombre de bits sur la séquence de valeurs effectivement produite. Une application basée sur le cryptage de donnée est également dans nos perspectives.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Maolin Du, Zaihua Wang, and Haiyan Hu. Measuring memory with the order of fractional derivative. *Scientific reports*, 3(1) :1–3, 2013.
- [2] Leon Chua. Memristor-the missing circuit element. *IEEE Transactions on circuit theory*, 18(5) :507–519, 1971.
- [3] Bocheng Bao, Xiang Zou, Zhong Liu, and Fengwei Hu. Generalized memory element and chaotic memory system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(08) :1350135, 2013.
- [4] Yuriy V Pershin and Massimiliano Di Ventra. Comment on ‘if it’s pinched it’s a memristor’. *Semiconductor Science and Technology*, 34(9) :098001, 2019.
- [5] Leon O Chua. Reply to comment on ‘if it’s pinched it’s a memristor’. *Semiconductor Science and Technology*, 34(9) :098002, 2019.
- [6] Ioannis Vourkas and Georgios Ch Sirakoulis. *Memristor-based nanoelectronic computing circuits and architectures*, volume 19. Springer, 2016.
- [7] Donato Cafagna. Fractional calculus : A mathematical tool from the past for present engineers [past and present]. *IEEE Industrial Electronics Magazine*, 1(2) :35–40, 2007.
- [8] Wang Mei-Qi, Ma Wen-Li, Chen En-Li, Chang Yu-Jian, and Wang Cui-Yan. Principal resonance analysis of piecewise nonlinear oscillator with fractional calculus. *Chaos, Solitons & Fractals*, 154 :111626, 2022.
- [9] JA Tenreiro Machado, Manuel F Silva, Ramiro S Barbosa, Isabel S Jesus, Cecília M Reis, Maria G Marcos, and Alexandra F Galhano. Some applications of fractional calculus in engineering. *Mathematical problems in engineering*, 2010, 2010.
- [10] Luis L Bonilla, Mariano Alvaro, and Manuel Carretero. Chaos-based true random number generators. *Journal of Mathematics in Industry*, 7(1) :1–17, 2016.
- [11] Jonathan B Dingwell. Lyapunov exponents. *Wiley encyclopedia of biomedical engineering*, 2006.

- [12] Ya B Pesin. Characteristic lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys*, 32(4) :55, 1977.
- [13] Luca Dieci, Robert D Russell, and Erik S Van Vleck. On the computation of lyapunov exponents for continuous dynamical systems. *SIAM journal on numerical analysis*, 34(1) :402–423, 1997.
- [14] Jay Prakash Singh and BK Roy. The nature of lyapunov exponents is $(+, +, -, -)$. is it a hyperchaotic system? *Chaos, Solitons & Fractals*, 92 :73–85, 2016.
- [15] Chunlei Fan and Qun Ding. A universal method for constructing non-degenerate hyperchaotic systems with any desired number of positive lyapunov exponents. *Chaos, Solitons & Fractals*, 161 :112323, 2022.
- [16] Xiaotao Min, Xiaoyuan Wang, Pengfei Zhou, Simin Yu, and Herbert Ho-Ching Iu. An optimized memristor-based hyperchaotic system with controlled hidden attractors. *IEEE Access*, 7 :124641–124646, 2019.
- [17] Xinyao Tang and Soumyajit Mandal. Encrypted physical layer communications using synchronized hyperchaotic maps. *IEEE Access*, 9 :13286–13303, 2021.
- [18] Svetoslav Nikolov and Sebastien Clodong. Occurrence of regular, chaotic and hyperchaotic behavior in a family of modified rossler hyperchaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(2) :407–431, 2004.
- [19] Paulo C Rech and Holokx A Albuquerque. A hyperchaotic chua system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 19(11) :3823–3828, 2009.
- [20] Ndolane Sene. Introduction to the fractional-order chaotic system under fractional operator in caputo sense. *Alexandria Engineering Journal*, 60(4) :3997–4014, 2021.
- [21] Ivo Petráš. Fractional-order chaotic systems. In *Fractional-order nonlinear systems*, pages 103–184. Springer, 2011.
- [22] Mohammad Saleh Tavazoei. Fractional order chaotic systems : history, achievements, applications, and future challenges. *The European Physical Journal Special Topics*, 229(6) :887–904, 2020.
- [23] Hui Chang, Yuxia Li, Guanrong Chen, and Fang Yuan. Extreme multistability and complex dynamics of a memristor-based chaotic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 30(08) :2030019, 2020.
- [24] B Wang, FC Zou, and J Cheng. A memristor-based chaotic system and its application in image encryption. *Optik*, 154 :538–544, 2018.

- [25] Dan Laksov. Wronskians and plücker formulas for linear systems on curves. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 17, pages 45–66, 1984.
- [26] Jeffrey F Rhoads, Steven W Shaw, and Kimberly L Turner. Nonlinear dynamics and its applications in micro-and nanoresonators. In *Dynamic systems and control conference*, volume 43352, pages 1509–1538, 2008.
- [27] Nikolay A Kudryashov. The generalized duffing oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 93 :105526, 2021.
- [28] Takashi Kanamaru. Duffing oscillator. *Scholarpedia*, 3(3) :6327, 2008.
- [29] AFJ Levi. The lorentz oscillator model. *Essential classical mechanics for device physics*, pages 5–1, 2016.
- [30] J Majchrzak. Discret : an interactive decision support system for discrete alternatives multicriteria problems. 1988.
- [31] Marcel Ausloos. *The logistic map and the route to chaos : From the beginnings to modern applications*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [32] Heide Narnhofer. Quantized arnold cat maps can be entropic k-systems. *Journal of mathematical physics*, 33(4) :1502–1510, 1992.
- [33] Stefanos Boccaletti, Celso Grebogi, Y-C Lai, Hector Mancini, and Diego Maza. The control of chaos : theory and applications. *Physics reports*, 329(3) :103–197, 2000.
- [34] James E Skinner, Mark Molnar, Tomas Vybiral, and Mirna Mitra. Application of chaos theory to biology and medicine. *Integrative Physiological and Behavioral Science*, 27(1) :39–53, 1992.
- [35] Robert P Murphy. *Chaos theory*. Ludwig von Mises Institute, 2010.
- [36] Yeongmahn You. What can we learn from chaos theory? an alternative approach to instructional systems design. *Educational technology research and development*, 41(3) :17–32, 1993.
- [37] Michael Weiss. Commentary to “pharmacokinetics from a dynamical systems point of view”. *Journal of pharmacokinetics and biopharmaceutics*, 17(3) :393–397, 1989.
- [38] Isaac Abraham. The case for rejecting the memristor as a fundamental circuit element. *Scientific reports*, 8(1) :1–9, 2018.
- [39] Makoto Itoh and Leon O Chua. Memristor oscillators. *International journal of bifurcation and chaos*, 18(11) :3183–3206, 2008.

- [40] Zdeněk Biolek, Dalibor Biolek, and Viera Biolkova. Spice model of memristor with nonlinear dopant drift. *Radioengineering*, 18(2), 2009.
- [41] Milka Potrebić, Dejan Tošić, and Dalibor Biolek. Reconfigurable microwave filters using memristors. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 46(1) :113–121, 2018.
- [42] Dalibor Biolek and Zdeněk Biolek. About fingerprints of chua’s memristors. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 18(2) :35–47, 2018.
- [43] Ahmed Gomaa Radwan, M Affan Zidan, and KN Salama. Hp memristor mathematical model for periodic signals and dc. In *2010 53rd IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, pages 861–864. IEEE, 2010.
- [44] Arturo Buscarino, Luigi Fortuna, Mattia Frasca, and Lucia Valentina Gambuzza. A chaotic circuit based on hewlett-packard memristor. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(2) :023136, 2012.
- [45] Alexander Pisarev, Alexander Busygin, Sergey Udovichenko, and Oleg Maevsky. 3d memory matrix based on a composite memristor-diode crossbar for a neuromorphic processor. *Microelectronic Engineering*, 198 :1–7, 2018.
- [46] Bocheng Bao, Jingjing Yu, Fengwei Hu, and Zhong Liu. Generalized memristor consisting of diode bridge with first order parallel rc filter. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(11) :1450143, 2014.
- [47] Idongesit E Ebong and Pinaki Mazumder. Self-controlled writing and erasing in a memristor crossbar memory. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 10(6) :1454–1463, 2011.
- [48] Fernando Corinto and Alon Ascoli. A boundary condition-based approach to the modeling of memristor nanostructures. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 59(11) :2713–2726, 2012.
- [49] Alon Ascoli, Ronald Tetzlaff, Zdeněk Biolek, Zdenek Kolka, Viera Biolkova, and Dalibor Biolek. The art of finding accurate memristor model solutions. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 5(2) :133–142, 2015.
- [50] Zdenek Kolka, Dalibor Biolek, Viera Biolkova, et al. Improved model of tio2 memristor. *Radioengineering*, 24(2) :378–383, 2015.

- [51] Muhammad Khalid. Review on various memristor models, characteristics, potential applications, and future works. *Transactions on Electrical and Electronic Materials*, 20(4) :289–298, 2019.
- [52] Valeri Mladenov and Stoyan Kirilov. A memristor model with a modified window function and activation thresholds. In *2018 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, pages 1–5. IEEE, 2018.
- [53] B Bodo, JS Armand Eyebe Fouda, A Mvogo, and S Tagne. Experimental hysteresis in memristor based duffing oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 115 :190–195, 2018.
- [54] JS Armand Eyebe Fouda, Bertrand Bodo, Guy MD Djeufa, and Samrat L Sabat. Experimental chaos detection in the duffing oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 33 :259–269, 2016.
- [55] JS Armand Eyebe Fouda, Bertrand Bodo, Samrat L Sabat, and J Yves Effa. A modified 0-1 test for chaos detection in oversampled time series observations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(05) :1450063, 2014.
- [56] Richard L Magin. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5) :1586–1593, 2010.
- [57] Diana J Templos-Hernandez, Luis A Quezada-Tellez, Brian M Gonzalez-Hernandez, Gerardo Rojas-Vite, Jose E Pineda-Sanchez, Guillermo Fernandez-Anaya, and Erika E Rodriguez-Torres. A fractional-order approach to cardiac rhythm analysis. *Chaos, Solitons & Fractals*, 147 :110942, 2021.
- [58] HongGuang Sun, Yong Zhang, Dumitru Baleanu, Wen Chen, and YangQuan Chen. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 64 :213–231, 2018.
- [59] Mark Axtell and Michael E Bise. Fractional calculus application in control systems. In *IEEE Conference on Aerospace and Electronics*, pages 563–566. IEEE, 1990.
- [60] Tenreiro Machado, Virginia Kiryakova, and Francesco Mainardi. A poster about the recent history of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 13(3) :329p–334p, 2010.
- [61] Bertram Ross. Fractional calculus. *Mathematics Magazine*, 50(3) :115–122, 1977.
- [62] Rudolf Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific, 2000.

- [63] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri, Saeid Jafari, Sadegh Bolouki, and Milad Siami. Some applications of fractional calculus in suppression of chaotic oscillations. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(11) :4094–4101, 2008.
- [64] Dumitru Baleanu, Ziya Burhanettin Güvenç, JA Tenreiro Machado, et al. *New trends in nanotechnology and fractional calculus applications*, volume 10. Springer, 2010.
- [65] Thabet Abdeljawad, Santo Banerjee, and Guo-Cheng Wu. Discrete tempered fractional calculus for new chaotic systems with short memory and image encryption. *Optik*, 218 :163698, 2020.
- [66] Donato Cafagna and Giuseppe Grassi. On the simplest fractional-order memristor-based chaotic system. *Nonlinear Dynamics*, 70(2) :1185–1197, 2012.
- [67] Ningning Yang, Cheng Xu, Chaojun Wu, Rong Jia, and Chongxin Liu. Modeling and analysis of a fractional-order generalized memristor-based chaotic system and circuit implementation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(13) :1750199, 2017.
- [68] Juan Yao, Kunpeng Wang, Pengfei Huang, Liping Chen, and JA Tenreiro Machado. Analysis and implementation of fractional-order chaotic system with standard components. *Journal of Advanced Research*, 25 :97–109, 2020.
- [69] Jingya Ruan, Kehui Sun, Jun Mou, Shaobo He, and Limin Zhang. Fractional-order simplest memristor-based chaotic circuit with new derivative. *The European Physical Journal Plus*, 133(1) :1–12, 2018.
- [70] Igor Klioutchnikov, Mariia Sigova, and Nikita Beizerov. Chaos theory in finance. *Procedia computer science*, 119 :368–375, 2017.
- [71] Thomas J Connelly. Chaos theory and the financial markets. *Journal of financial planning*, 9(6) :26, 1996.
- [72] Varun Gupta, Monika Mittal, and Vikas Mittal. Chaos theory : an emerging tool for arrhythmia detection. *Sensing and Imaging*, 21(1) :1–22, 2020.
- [73] Antoine J Bousquet. *The scientific way of warfare : order and chaos on the battlefields of modernity*. Oxford University Press, 2022.
- [74] Edward Ott, Celso Grebogi, and James A Yorke. Controlling chaos. *Physical review letters*, 64(11) :1196, 1990.
- [75] Louis M Pecora and Thomas L Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8) :821, 1990.

- [76] Er-Wei Bai and Karl E Lonngren. Synchronization of two lorenz systems using active control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(1) :51–58, 1997.
- [77] M Krstic. K. kanellakopoulos,“. *Nonlinear and adaptive control design*,” New York : Wiley, 1995.
- [78] Newman Guttman and Bela Julesz. Lower limits of auditory periodicity analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 35(4) :610–610, 1963.
- [79] Reinhold Bergstrom, Reinhold Bergström, and Herman OA Wold. *Fix-point estimation in theory and practice*, volume 23. Vandenhoeck & Ruprecht, 1983.
- [80] Maarten H Van Emden. Quantitative deduction and its fixpoint theory. *The Journal of Logic Programming*, 3(1) :37–53, 1986.
- [81] Feifei Yang, Jun Mou, Huizhen Yan, and Jinhua Hu. Dynamical analysis of a novel complex chaotic system and application in image diffusion. *IEEE Access*, 7 :118188–118202, 2019.
- [82] Lellis Thivagar Maria Antony and Abdulsattar Abdullah Hamad. A theoretical implementation for a proposed hyper-complex chaotic system. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 38(3) :2585–2590, 2020.
- [83] Guoyuan Qi, Guanrong Chen, Shengzhi Du, Zengqiang Chen, and Zhuzhi Yuan. Analysis of a new chaotic system. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 352(2-4) :295–308, 2005.
- [84] Erik Christopher Zeeman. Catastrophe theory. In *Structural Stability in Physics*, pages 12–22. Springer, 1979.
- [85] Ian N Stewart and PL Peregoy. Catastrophe theory modeling in psychology. *Psychological bulletin*, 94(2) :336, 1983.
- [86] Dixon D Jones and Carl J Walters. Catastrophe theory and fisheries regulation. *Journal of the Fisheries Board of Canada*, 33(12) :2829–2833, 1976.
- [87] Eduardo Fernandez and Herbert F Jelinek. Use of fractal theory in neuroscience : methods, advantages, and potential problems. *Methods*, 24(4) :309–321, 2001.
- [88] Raoul Kopelman. Rate processes on fractals : theory, simulations, and experiments. *Journal of Statistical Physics*, 42(1) :185–200, 1986.
- [89] Lee A Segel and Julius L Jackson. Dissipative structure : an explanation and an ecological example. *Journal of theoretical biology*, 37(3) :545–559, 1972.

- [90] D Ravat. Analysis of the euler method and its applicability in environmental magnetic investigations. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, 1(3) :229–238, 1996.
- [91] GD Hahn. A modified euler method for dynamic analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(5) :943–955, 1991.
- [92] John C Butcher. On the implementation of implicit runge-kutta methods. *BIT Numerical Mathematics*, 16(3) :237–240, 1976.
- [93] John Charles Butcher. A history of runge-kutta methods. *Applied numerical mathematics*, 20(3) :247–260, 1996.
- [94] Diego A Murio. Stable numerical evaluation of grünwald–letnikov fractional derivatives applied to a fractional ihcp. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 17(2) :229–243, 2009.
- [95] Zaid M Odibat and Shaher Momani. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Journal of Applied Mathematics & Informatics*, 26(1_2) :15–27, 2008.
- [96] Hoda Ahmed. Fractional euler method ; an effective tool for solving fractional differential equations. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 26(1) :38–43, 2018.
- [97] David F Anderson and Jonathan C Mattingly. A weak trapezoidal method for a class of stochastic differential equations. *arXiv preprint arXiv :0906.3475*, 2009.
- [98] Yu Christine Chen, Jianhui Wang, Alejandro D Domínguez-García, and Peter W Sauer. Measurement-based estimation of the power flow jacobian matrix. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 7(5) :2507–2515, 2015.
- [99] Edmund X DeJesus and Charles Kaufman. Routh-hurwitz criterion in the examination of eigenvalues of a system of nonlinear ordinary differential equations. *Physical Review A*, 35(12) :5288, 1987.
- [100] Helena E Nusse, James A Yorke, and Eric J Kostelich. Basins of attraction. In *Dynamics : Numerical Explorations*, pages 269–314. Springer, 1994.
- [101] JC Sprott and Anda Xiong. Classifying and quantifying basins of attraction. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(8) :083101, 2015.
- [102] Tjalling J Ypma. Historical development of the newton–raphson method. *SIAM review*, 37(4) :531–551, 1995.

- [103] HA Bruck, SR McNeill, Michael A Sutton, and WH Peters. Digital image correlation using newton-raphson method of partial differential correction. *Experimental mechanics*, 29(3) :261–267, 1989.
- [104] Chunbiao Li, Tianai Lu, Guanrong Chen, and Hongyan Xing. Doubling the coexisting attractors. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(5) :051102, 2019.
- [105] L Arnold and V Wihstutz. Lyapunov exponents, volume 1186 of. *Lecture Notes in Mathematics*, 1986.
- [106] Florian Grond, Hans H Diebner, Sven Sahle, Adolf Mathias, Sebastian Fischer, and Otto E Rossler. A robust, locally interpretable algorithm for lyapunov exponents. *Chaos, Solitons & Fractals*, 16(5) :841–852, 2003.
- [107] Luca Dieci and Erik S Vleck. Perturbation theory for approximation of lyapunov exponents by qr methods. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 18(3) :815–840, 2006.
- [108] F Hubertus, Firdaus E Udwardia, and Wlodek Proskurowski. An efficient qr based method for the computation of lyapunov exponents. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 101(1-2) :1–16, 1997.
- [109] Zhi-Min Chen. A note on kaplan-yorke-type estimates on the fractal dimension of chaotic attractors. *Chaos, Solitons & Fractals*, 3(5) :575–582, 1993.
- [110] Carlo Caravati, Francesco Delogu, Giorgio Cocco, and Mauro Rustici. Hyperchaotic qualities of the ball motion in a ball milling device. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 9(1) :219–226, 1999.
- [111] Dominique AH Crommelynck. In-situ radiation flux divergence measurements. In *Long-Term Monitoring of the Earth's Radiation Budget*, volume 1299, pages 211–220. SPIE, 1990.
- [112] Dawid Dudkowski, Sajad Jafari, Tomasz Kapitaniak, Nikolay V Kuznetsov, Gennady A Leonov, and Awadhesh Prasad. Hidden attractors in dynamical systems. *Physics Reports*, 637 :1–50, 2016.
- [113] Michael T. Rosenstein, James J. Collins, and Carlo J. De Luca. A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 65(1) :117–134, 1993.

- [114] Michael T Rosenstein and James J Collins. Visualizing the effects of filtering chaotic signals. *Computers & graphics*, 18(4) :587–592, 1994.
- [115] G Carlson and C Halijak. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular newton process. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 11(2) :210–213, 1964.
- [116] Omar Elwy, Somia H Rashad, Lobna A Said, and Ahmed G Radwan. Comparison between three approximation methods on oscillator circuits. *Microelectronics Journal*, 81 :162–178, 2018.
- [117] Józef Wiora and Alicja Wiora. Influence of methods approximating fractional-order differentiation on the output signal illustrated by three variants of oustaloup filter. *Symmetry*, 12(11) :1898, 2020.
- [118] A Charef. Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional $\pi\lambda d\mu$ controller. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 153(6) :714–720, 2006.
- [119] Christos Volos, Jamal-Odysseas Maaita, Sundarapandian Vaidyanathan, Viet-Thanh Pham, Ioannis Stouboulos, and Ioannis Kyprianidis. A novel four-dimensional hyperchaotic four-wing system with a saddle–focus equilibrium. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 64(3) :339–343, 2017.
- [120] Lijuan Chen, Song Tang, Qingdu Li, and Shouming Zhong. A new 4d hyperchaotic system with high complexity. *Mathematics and Computers in Simulation*, 146 :44–56, 2018.
- [121] Guoyuan Qi, Michaël Antonie van Wyk, Barend Jacobus van Wyk, and Guanrong Chen. On a new hyperchaotic system. *Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics*, 372(2) :124–136, January 2008.
- [122] Zengqiang Chen, Yong Yang, Guoyuan Qi, and Zhuzhi Yuan. A novel hyperchaos system only with one equilibrium. *Physics Letters A*, 360(6) :696–701, 2007.
- [123] Sundarapandian Vaidyanathan, Shaobo He, and Aceng Simbas. A new multistable double-scroll 4-d hyperchaotic system with no equilibrium point, its bifurcation analysis, synchronization and circuit design. *Archives of Control Sciences*, 31, 2021.
- [124] Wenjuan Wu and Zengqiang Chen. Hopf bifurcation and intermittent transition to hyperchaos in a novel strong four-dimensional hyperchaotic system. *Nonlinear Dynamics*, 60(4) :615–630, 2010.

- [125] Zhou Ping, Wei Li-Jia, and Cheng Xue-Feng. A hyperchaos system with only one nonlinear term. *Acta physica sinica*, 58(8) :5201–5208, 2009.
- [126] Ling Liu, Chongxin Liu, and Yanbin Zhang. Theoretical analysis and circuit implementation of a novel complicated hyperchaotic system. *Nonlinear Dynamics*, 66(4) :707–715, 2011.
- [127] Rodrigo Daniel Méndez-Ramírez, Adrian Arellano-Delgado, Miguel Angel Murillo-Escobar, and César Cruz-Hernández. A new 4d hyperchaotic system and its analog and digital implementation. *Electronics*, 10(15) :1793, 2021.
- [128] Fei Yu, Shuai Qian, Xi Chen, Yuanyuan Huang, Li Liu, Changqiong Shi, Shuo Cai, Yun Song, and Chunhua Wang. A new 4d four-wing memristive hyperchaotic system : dynamical analysis, electronic circuit design, shape synchronization and secure communication. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 30(10) :2050147, 2020.

PUBLICATION SCIENTIFIQUE

Tagne, S., Bodo, B., Eyebe, G. F. V. A., & Fouda, J. S. A. E. (2022). PIC micro-controller based synchronization of two fractional order jerk systems. *Scientific Reports*, 12(1), 1-10.

Scientific Reports Ranking (2022)

Impact Factor : 4.996

SJR (SCImago Journal Rank) : 1.24

Quartile : Q1



OPEN

PIC micro-controller based synchronization of two fractional order jerk systems

Samuel Tagne^{1✉}, Bertrand Bodo^{1,2}, Guy François V. Ayissi Eyebe^{1,2} & Jean Sire A. Eyebe Fouda^{1,2}

The paper studies a 3D Chaotic Jerk oscillator with fractional derivatives. An approach is proposed to implement it on a PIC16F877A microcontroller in order to reduce the requirements for multiple analogue electronic components such as resistors, capacitors, coils, multipliers, operational amplifiers, which are very bulky and consume a lot of power. The behaviours of the underlying system are analysed analytically, numerically and experimentally. It comes from this analysis that the fractional model exhibits chaotic dynamics when for parameters for which the equivalent integer derivative system exhibits limit-cycles. The synchronization under two closed initial conditions is also studied, highlighting one of the most common applications of the chaos concept.

Concept of fractional calculus has become undoubtedly a subject of active research field in nonlinear science, due to its potential applications in electronics¹, mechanics², nuclear physics³, medicine⁴, financial systems⁵. Likewise, chaos has been also widely reported over the past century years^{6–13}. It is well-known that chaotic systems have a very high degree of sensitivity to initial conditions and their evolution through phase space that appears unpredictable.

In fact, in 1963, Lorenz emphasized that a chaotic system solved with two very close initial conditions could have two completely different dynamics¹⁴. More recently, some electronic circuits exhibiting chaotic behavior are proposed in literature^{15–17}. Furthermore, those implementing fractional order circuit have been also reported. For example, the fractional Chen circuit^{18,19}, the fractional Chua circuit²⁰ and the fractional Rössler circuit²¹. For a better review one can read^{22–24}.

In truth, fractional dynamical systems are developed with the main idea of introducing the memory effect in the dynamics of the system. It is then observed that these systems present hidden attractors that the conventional approach does not exhibit²⁵. Considering this particular advantage, it is therefore imperative to design fractional electronic circuits able to reproduce the desired behavior. To do this, an ordinary capacitor is replaced by a fractional capacitor whose impedance value must be determined. In this case, the Laplace transform of the differential operator $\frac{1}{s}$ is replaced by $\frac{1}{s^m}$, where $0 < m < 1$ is the derivative order^{26–31}.

However, to the best of our knowledge, it is arduous to determine the exact value of a fractional capacitor which corresponds exactly to his fractional derivative operator. Several techniques have been suggested to address this problem such as the Regular Newton's Process³² and the Halley's Iterative Method³³. These methods were used to design the fractional circuits mentioned above using analogue component. From these circuits it can be seen that the analogue component approach requires very large capacitors and resistors which are difficult to find on the market. Furthermore, using large capacitors and large resistors means operating at high frequency³⁴. We propose a numerical approach for the real implementation of a fractional system on a micro-controller based on Euler's resolution method and applied to the synchronization of a Jerk system, which has never been done to our knowledge.

Jerk systems have important considerations for many applications in science and mechanical engineering. In³⁵, it is noted that Jerk systems could exhibit several physical phenomena such as multi-stability, chaos or hyperchaos. They could be used for synchronization³⁶ and encryption³⁷ of chaotic systems.

In this paper, we propose an optimised algorithm to implement the fractional chaotic system in the numerical domain that is easy to prototype. The Jerk equation given in Refs.^{38–40,42} allow to achieve this. It will be useful to study the contribution of the fractional derivative on the dynamics of the system particularly if the implementation of the fractional system on a PIC-microcontroller allows to obtain hidden attractors contrary to the classical model considering the same parameters.

¹Physics, University of Yaounde 1, Yaounde 812, Cameroon. ²These authors contributed equally: Bodo Bertrand, Ayissi Eyebe Guy François Valery and J. S. A. Eyebe Fouda. ✉email: samueltagne90@yahoo.com

The paper is organised as follows: In the following section, we propose the description of the Jerk system followed by an analytical study. We explain the numerical methods dedicated to the computation of fractional integrals, we also present the method used for the implementation of the system on a micro-controller; “Results and discussions” is dedicated to the results and discussion; the paper ends with a conclusion and announces some perspectives for our future work.

Mathematical models

Background. In mechanics, a shake is a random change in the vector of acceleration without shock. In physics, the shock vector, more commonly called the jerk, is the acceleration vector’s derivative over time. Jerk systems are then the third-order differential equations of the form $\frac{d^3x}{dt^3} = F(x)$, which translates the variation of the acceleration in the system. It is the simplest of three-dimensional chaotic systems, where $F(x)$ is the nonlinear function that describes the third-time derivative of displacement variable x . In this work, the Jerk system used will be the one presented in the Eq. (1)⁴⁰.

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\beta \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + \alpha x^3 - x. \quad (1)$$

α and β could be subsequently defined as control parameters. This equation (1) can be transformed into the following system.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = \alpha x^3 - x - y - \beta z. \end{cases} \quad (2)$$

To solve it numerically, one use the Euler algorithm. In fact, the Euler algorithm has only one step, and it is easy to implement because it requires fewer mathematical operations⁴¹. The Euler algorithm is described for Eq. (1) by:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + hz_n \\ z_{n+1} = z_n + h(\alpha x_n^3 - x_n - y_n - \beta z_n) \end{cases} \quad (3)$$

Physically, (x, y, z) respectively represents the position, the velocity and the acceleration (Eq. 1) could be dissipative if $\beta > 0$. One can therefore highlight three equilibrium points, so $E_1(0, 0, 0)^T$, $E_2(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}})^T$, and $E_3(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^T$. The Jacobian matrix of (Eq. 1) is given by

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3\alpha x^2 - 1 & -1 & -\beta. \end{pmatrix} \quad (4)$$

We come out two characteristics equations relating to J_0 , J_1 and J_2

$$\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \text{and} \quad \lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda - 2 = 0. \quad (5)$$

The literature shows that the Routh–Hurwitz criterion contains the necessary and sufficient conditions for the system stability. Thus, without even solving the characteristic equation, one finds that the system is stable for $\beta > 0$ whatever the chosen equation.

Route to chaos. It is shown in Refs.^{42–47} that the nature of the chaotic dynamic system, in addition to being sensitive to initial conditions, is closely linked to another parameter which is called the control parameter. In our case, this is the β parameter. Thus, the system will behave chaotic depending on this parameter.

We report in Fig. 1a the bifurcation diagram of the system. The diagram shows a high concentration of points corresponding to the system dynamics change for $0.33 < \beta < 0.363$ and $0.371 < \beta < 0.378$. Over these intervals, the system changes periodically and it is therefore difficult to observe chaotic dynamics. In Fig. 1b, the Lyapunov exponents are plotted against β . Indeed, Lyapunov exponents obtained using Wolf’s algorithm are another tool used to decipher the nature of a dynamical system^{48–53}. Therefore, presence of positive Lyapunov exponents (λ_1) is sufficient to establish that the considered system is able to exhibit chaotic dynamics. Moreover, the Lyapunov Exponents considered against the variation of the system’s control parameter show a large superposition with the bifurcation diagram as illustrated in the Fig. 1b. When $\beta = 0.35$, one obtain after 1000 iteration by step of 0.01, $\lambda_1 = 0.089577$, $\lambda_2 = 0.001118$ and $\lambda_3 = -0.447794$. The Kaplan–Yorke dimension of the system is $D_L = 2.2025$. Thus according to Ref.⁵⁷, this Jerk system generates chaotic behaviours.

Fractional model. There are several definitions of the fractional order derivative in the literature, but the fractional Caputo and Riemann–Liouville (R–L) operators are the most commonly used in different areas of fractional dynamical systems. The main advantage of the fractional Caputo derivative over the fractional R–L derivative is that the initial conditions of fractional differential equations with Caputo derivatives are the same as those of the integer order for differential equations⁵³. Therefore, in this paper we will use the initial conditions $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ to solve the integer derivative and fractional derivative system. Fractional calculus is a generalization of integration and differentiation to noninteger-order fundamental operator ${}_a D_t^q f(t)$ ⁵³, where a

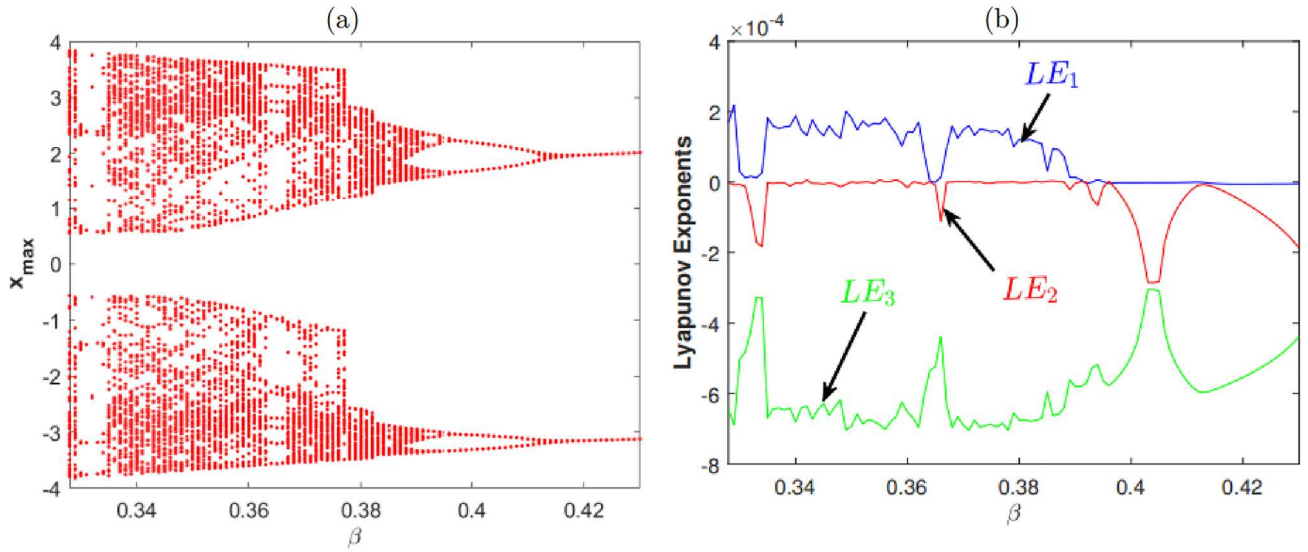


Figure 1. Bifurcation diagram and Lyapunov exponents for $\beta \in [0.328, 0.43]$, $\alpha = \frac{1}{10}$, under initial conditions: $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$.

and t are the bounds of the operation. The definition of the fractional derivative under Caputo for a function $f(t)$ of q order is defined as follows³⁴

$${}_a D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-q)} \int_a^t \frac{f^k(\tau)}{(t-\tau)^{q-k+1}} d\tau \tag{6}$$

for $n - 1 < q < n$, $\Gamma(\cdot)$ is Euler's Gamma function.

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-t} t^{q-1} dt. \tag{7}$$

Thus, system (Eq. 1) can be rewritten as (Eq. 8) to obtain the fractional Jerk system.

$$\begin{cases} {}_0 D_t^{q_1} x(t) = y(t) \\ {}_0 D_t^{q_2} y(t) = z(t) \\ {}_0 D_t^{q_3} z(t) = \alpha x^3(t) - x(t) - y(t) - \beta z(t). \end{cases} \tag{8}$$

Numerical methods for calculation of fractional integrals. Hoda et al. have shown that by using Euler's method, it is possible to find numerical solutions of linear and nonlinear systems of fractional differential equations. To prove this, they consider fractional derivatives as defined by Caputo. Furthermore, they show that Euler's algorithm is very simple to implement and provides directly the solutions without linearization. Some examples illustrating numerical comparisons between the Euler algorithm and the classical algorithm are presented in Ref.⁴¹ to find the solution to a given dynamical system.

Let us consider the following problem: $D^q y(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = y_0$, $0 < q < 1$, $t > 0$. To solve it in the interval $[0, a]$, it is necessary to construct a set of points $(t_j, y(t_j))$, $y(0) = y_0$ which are considered as approximate values of the solution. In order to perform this approximation, the interval $[0, a]$ is divided into n sub-intervals $[t_j, t_{j+1}]$, each having an equal width. So, the general formula of the fractional Euler method is the following.

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} f(t_j, y(t_j)), \tag{9}$$

$$t_{j+1} = t_j + h, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1. \tag{10}$$

Observe that $y(t)$ is an implicit system variable, the trapezoidal method is used to find it^{55,56}. This method which consists in solving the system in two steps is called the prediction–correction approach that we use for and we obtain the following systems.

$$\begin{cases} y_p(t_k) = y(t_{k-1}) + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) \implies \text{Prediction} \\ y(t_k) = \frac{q h^q}{\Gamma(q+2)} f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} f(t_k, y_p(t_k)) + y(t_k) \implies \text{Correction} \end{cases} \tag{11}$$

Applying this algorithm (Eq. 11) to the system (8), the solution is found in two steps as follows

$$\begin{cases} \text{Predictionssystem} \\ x_p = x(k-1) + \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1+1)}y(k-1) \\ y_p = y(k-1) + \frac{h^{q_2}}{\Gamma(q_2+1)}z(k-1) \\ z_p = z(k-1) + \frac{h^{q_3}}{\Gamma(q_3+1)}[\alpha x(k-1)^3 - x(k-1) - y(k-1) - \beta z(k-1)] \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \text{Correctionsystem} \\ x(k) = x(k-1) + q_1 \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1+2)}y(k-1) + q_1 \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1+2)}y_p \\ y(k) = y(k-1) + \frac{q_2 h^{q_2}}{\Gamma(q_2+2)}z(k-1) + \frac{q_2 h^{q_2}}{\Gamma(q_2+2)}z_p \\ z(k) = z(k-1) + \frac{q_3 h^{q_3}}{\Gamma(q_3+2)}[\alpha x(k-1)^3 - x(k-1) - y(k-1) - \beta z(k-1)] \\ + \frac{h^{q_3}}{\Gamma(q_3+2)}[\alpha x_p^3 - x_p - y_p \beta z_p] \end{cases} \quad (13)$$

Results and discussions

In this section, the methodology developed in the previous section is applied on the Jerk system to observe the impact of the fractional order on the resolution result. Although the implementation is independent of the discussion, we visualise here at the same time the theoretical synchronisation analyse under Matlab and experimental under micro-controller in order to compare them.

Numerical analysis. We implemented Eqs. (12) and (13) under the Matlab software, and one observed the attractors that we present in Fig. 2. On this figure, we have several main remarks to draw. From first view, the bifurcation diagram presented in the Fig. 1 shows that the system presents a periodic dynamics for $\beta = 0.4$ and a chaotic dynamics for $\beta = 0.35$. Under the assumption $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, we observe for the two values of β mentioned, a figure of periodic dynamics, Fig. 3a and a figure of chaotic dynamics, Fig. 2b respectively. This setting ($q_1 = q_2 = q_3 = 1$) is the equivalent of the classical resolute system. To prove the impact of the fractional order on the problem solution, let us consider the value of β for which periodic dynamics are observed ($\beta = 0.4$) and let us varies the fractional orders. In this way, taking $(q_1, q_2, q_3) = (0.94, 0.98, 0.95)$, Fig. 2c shows a double periodic dynamics. Still with ($\beta = 0.40$) and considering $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$, one observes chaotic dynamics now (Fig. 2d), which was not observed for the classical case by considering ($q_1 = q_2 = q_3 = 1$), hence the interest of the fractional approach.

Largest lyapunov exponent in the fractional model. Attractor presented in Fig. 2b is a distinctive sign that the fractional system has a chaotic behaviour, but it would be interesting to carry out investigations to quantify this chaotic behaviour. To do this, we use the Lyapunov exponent applied to time series⁶⁰. Indeed, the fraction system does not return the easy task to calculate the system’s Jacobian matrix. Thus, we consider a state vector of the system and we reconstruct the phase space. This method allows us to calculate the largest Lyapunov exponent, which gives us $LLE = 1.43 > 0$, and shows that the system is also chaotic in fractional model. The influence of the fractional order on the system can thus be represented in a general way. For this purpose, we present in Fig. 3a the bifurcation diagram and in Fig. 3b the spectrum showing the evolution of the largest lyapunov exponent according to the fractional order q . The superposition observed between these two figures shows that the system dynamics is indeed influenced by the fractional order q .

Micro-controller implementation. The Jerk system generates real continuous values, which are not understandable by the micro-controller. In order to solve this problem, we proposed here a shift of reference frame, which allows to switch from the analogue to the digital domain. Therefore, to digitise the analogue vector x , it is necessary to know the minimum and maximum values of x , the minimum and maximum reference values of the micro-controller. This implies knowledge of the precise number of bits on which to encode the converted values. Subsequently, a linear approximation line $X(x) = ax + b$ is defined, allowing to leave the interval $[x_{min}, x_{max}]$ to $[X_{min}, X_{max}]$. Here, $X_{min} = 0$, $X_{max} = (2^n - 1)$ and the number of bits is $n = 8$. So $a = \frac{(2^n - 1)}{x_{max} - x_{min}}$ and $b = (2^n - 1)x_{min}$. In PICF877A micro-controller, system (3) is implemented via the Microchip XC8 compiler, the $x(k)$ and $y(k)$ variables was directed to the PORTB and PORTD and converted to an analogue voltage by the R-2R DAC as depicted on Fig. 4.

Why a micro-controller implementation? A Fractional Capacitor is a combination of several classical capacitors and resistors. Depending on the design method chosen, the number of resistors and capacitors used is large⁵⁸. As a result, a large amount of energy is consumed. We avoid the space requirement of the device because, for an analog implementation of a third order system, three fractional capacitors need to be designed. To confirm the simplicity of a PIC implementation, observe (Fig. 5b). One notices that the experimental device contains only four main elements. There are two digital-to-analog converters (A and B), a micro-controller (C)

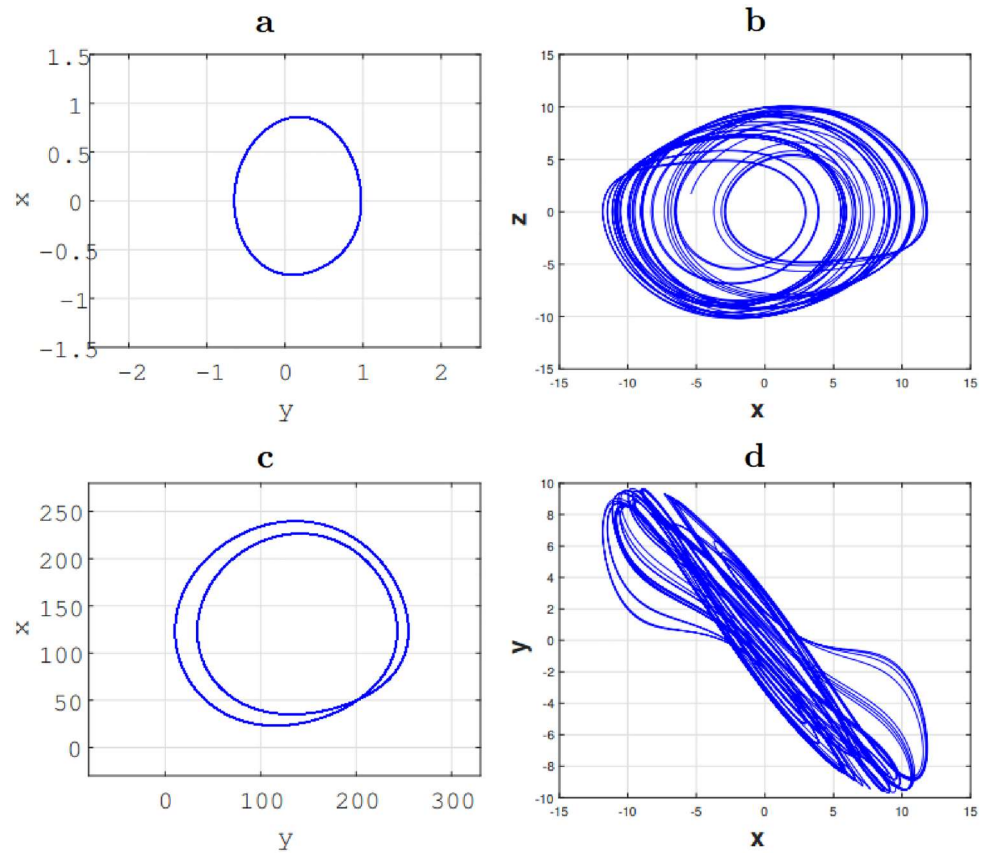


Figure 2. Phase portrait of the Fractional Jerk system showing route to chaos attractor when varied parameter β (I): in (a) period-1 limit cycle for $\beta = 0.4$, (b) a chaotic attractor for $\beta = 0.35$. a and b are obtained with $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1)$. (II): in (c) a period-2 limit cycle attractor for $\beta = 0.4$ obtained with $(q_1, q_2, q_3) = (0.96, 0.97, 0.97)$. (d) A chaotic attractor for $\beta = 0.40$, obtained with $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$ under the initial condition $(x, y, z) = (0, 1, 0)$.

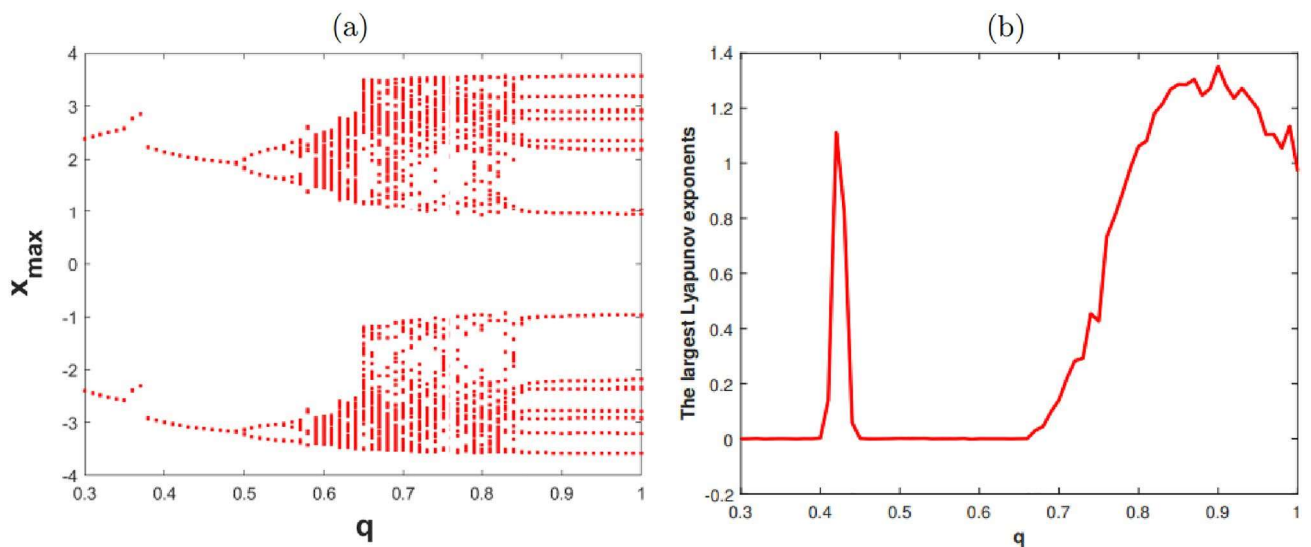


Figure 3. (a) Bifurcation diagram, (b) the largest Lyapunov exponents for $q = q_1 = q_2 = q_3, 0.3 < q < 1, \beta = 0.40, \alpha = \frac{1}{10}$ under initial conditions: $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$.

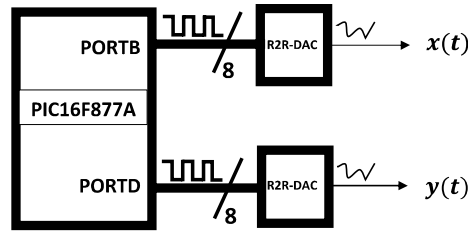


Figure 4. Schematic bloc for $x(t) - y(t)$ variable.

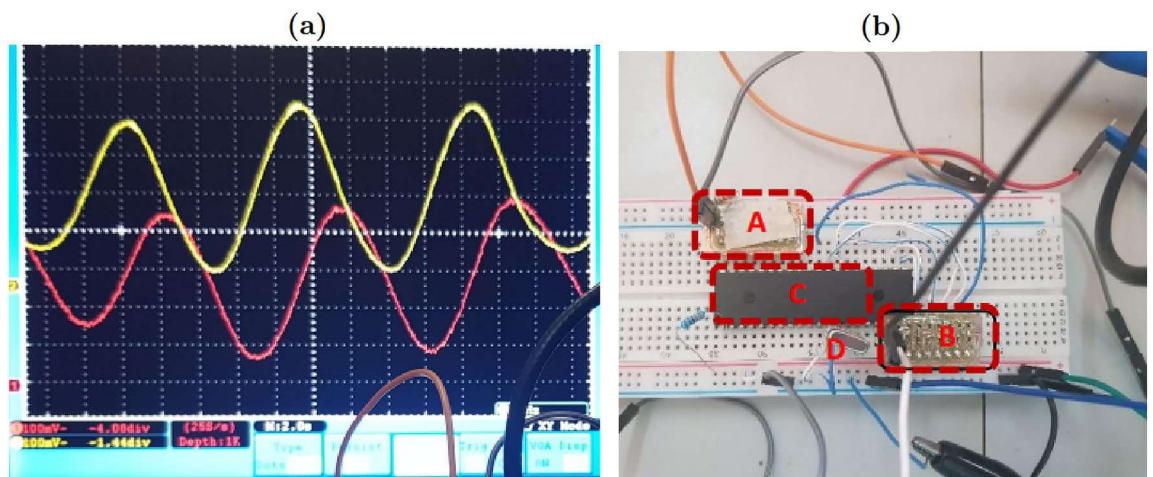


Figure 5. The digital circuit hardware platform implemented for the fractional Jerk system (b) and the induced time evolution acquired by the digital oscilloscope (a).

and an oscillator of 20MHz (D). When the assembly is supplied with a 5 V voltage, oscillations are observed on the oscilloscope as shown in the Fig. 5a.

Fractional order influences. As the numerical values, we assume the same control parameter values in agreement with the bifurcation diagram. By considering the classical case ($q_1 = q_2 = q_3 = 1$) with $\beta = 0.35$, one observes a periodic dynamics, see Fig. 6a and a chaotic dynamics, see Fig. 6b respectively which are the similar attractors to those obtained under Matlab, see Fig. 3a,b). To prove the impact of the fractional order on the experimental solution of the problem, we proceed as in numerical simulation, i.e. by considering the value of β for which a periodic dynamics is observed ($\beta = 0.4$) and we vary the fractional orders. Thus, taking $(q_1, q_2, q_3) = (0.94, 0.98, 0.95)$, the Fig. 6c shows a double periodic dynamics. Still with ($\beta = 0.40$) and considering $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$, one observes a chaotic dynamics (Fig. 6d), which was not observed for the classical case considering ($q_1 = q_2 = q_3 = 1$). The same behaviour was observed in numerical simulation under Matlab (see Fig. 6c,d), which shows that the system implemented under micro-controller is successful.

Synchronization results. Chaos synchronization consists of oscillating two chaotic systems in a synchronized manner. So, one recognize weaker forms of synchronization, when some key characteristics of the dynamical behavior are identical, such as frequencies or amplitude. Hence, in this section, we discuss the synchronization of two fractional chaotic systems. To do this, we consider here two chaotic systems called respectively master (m) and slave (s). According to the Adaptive control method⁵⁹, we derive the following equations:

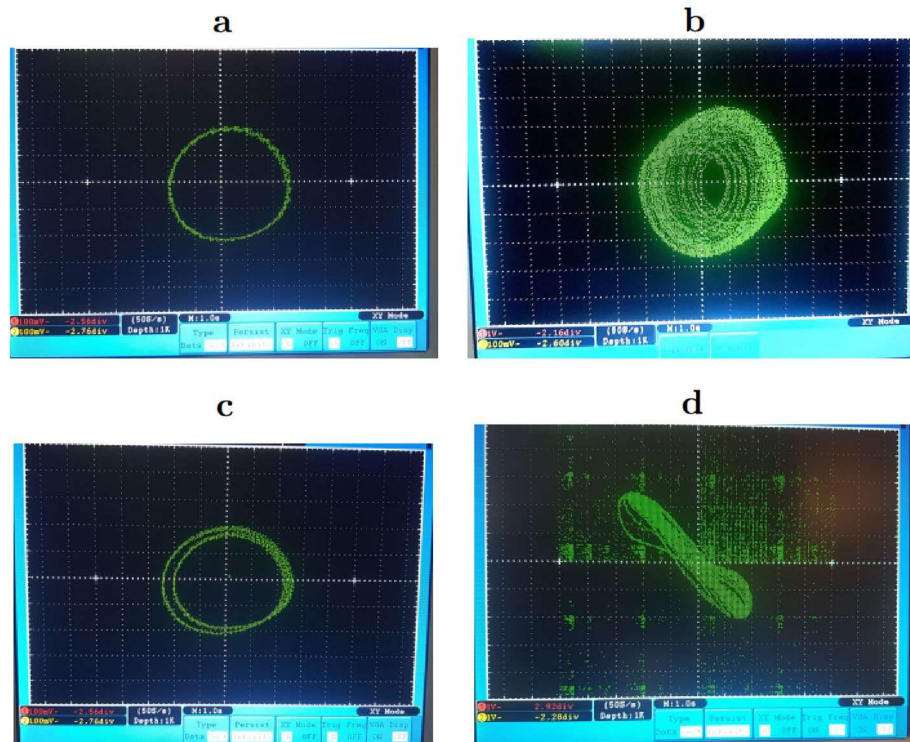


Figure 6. Phase portrait of x versus y obtained experimentally of the Fractional Jerk system showing route to chaos attractor when varied parameter β (A) in (a) period-1 limit cycle for $\beta = 0.4$, (b) a chaotic attractor for $\beta = 0.35$. a and b are obtained with $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1)$. (B) in (c) a period-2 limit cycle attractor for $\beta = 0.4$ obtained with $(q_1, q_2, q_3) = (0.96, 0.97, 0.97)$. (d) a chaotic attractor for $\beta = 0.40$, obtained with $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$.

Master

$$\begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x_m = y_m \\ {}_0D_t^{q_2} y_m = z_m \\ {}_0D_t^{q_3} z_m = \alpha x_m^3 - x_m - y_m - \beta z_m \end{cases} \quad (14)$$

Slave

$$\begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x_s = y_s + u_1 \\ {}_0D_t^{q_2} y_s = z_s + u_2 \\ {}_0D_t^{q_3} z_s = \alpha x_s^3 - x_s - y_s - \beta z_s + u_3 \end{cases} \quad (15)$$

wherein u_1, u_2 and u_3 are active non-linear controls that have been added to the chaotic system (Eq. 14) to implement the synchronization. Considering the synchronization errors as $e_1 = x_s - x_m, e_2 = y_s - y_m, e_3 = z_s - z_m$, we derive (Eq. 16).

$$\begin{aligned} u_1 &= -e_1 k_1 - e_1 \\ u_2 &= -e_2 k_2 - e_3 \\ u_3 &= \beta e_1^3 + 3\beta e_1^2 x_m + 3\beta e_1 x_m^2 + \beta x_m^3 - \alpha e_3 - \alpha z_m - e_3 k_3 - e_1 - e_2 - x_m - y_m \end{aligned} \quad (16)$$

Equations (14) and (15) are solved using the predictor-corrector method described in “Results and discussions”. It appears that, master and slave systems trajectories converge after few milliseconds as depicted on Fig. 7 where e_1 and e_2 are synchronization error, x_m is synchronized with x_s , Figure 7a,b, are the results obtained under Matlab, Fig. 7c,d, are the synchronization results obtained experimentally.

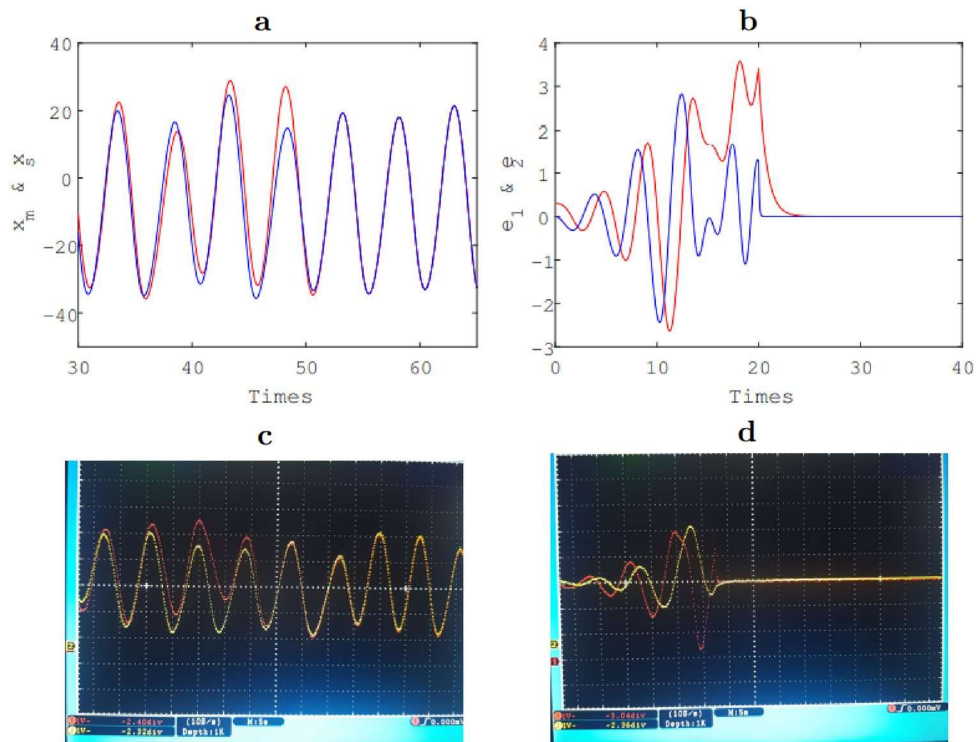


Figure 7. Fractional synchronization result: e_1 and e_2 are synchronisation error (**b,d**), x_m is synchronized with x_s (**a,c**). *a* and *b* are the results obtained under Matlab, *c* and *d* are the synchronization results obtained experimentally for $(q_1, q_2, q_3) = (0.98, 1, 1)$.

Conclusion

In this paper, we have proposed Pic micro-controller modelling a Jerk equation in integer and fractional order domains and phase portraits were investigated numerically and experimentally. Analytic studies, Lyapunov exponents and bifurcation analysis showed that the system has three determined equilibrium points and also displays complex self-excited non-linear dynamics. It appeared from simulations and experimentations that, the fractional model of the designed circuit allows to obtain masked attractors contrarily to the classical model considering the same parameters. A study case of synchronization to overcome the extreme sensitivity of the initial conditions was investigated. As a future outcome will be the exploration under a digital development board such as the FPGA.

Data availability

The data that support the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request.

Received: 5 April 2022; Accepted: 19 July 2022

Published online: 22 August 2022

References

- José Francisco, G.-A., Juan, R.-G., Manuel, G.-C., José Roberto, R.-H. Fractional RC and LC electrical circuits. *Ingeniería e Investigación y Tecnología* **15**(2), 311–319. [https://doi.org/10.1016/S1405-7743\(14\)72219-X](https://doi.org/10.1016/S1405-7743(14)72219-X). (2014) (ISSN 1405-7743).
- Riewe, F. Mechanics with fractional derivatives. *Phys. Rev. E* **55**, 3581–3592. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.3581> (1997).
- Hammad, M. M., Yaqt, A. S. H., Abdel-Khalek, M. A. & Doma, S. B. Analytical study of conformable fractional Bohr Hamiltonian with Kratzer potential. *Nucl. Phys. A* **1015**, 122307. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2021.122307> (2021) (ISSN 0375-9474).
- J. (Eds.) Kumar, S. *Fractional Calculus in Medical and Health Science*, 1st ed. <https://doi.org/10.1201/9780429340567> (CRC Press, 2020).
- Chu, Y.-M., Hadi, S.-B., Oumate, J., Abba, A., Solis-Pérez, J. E., Bekiros, S., Gomez-Aguilar, J. F., Yousefpour, A. The effect of market confidence on a financial system from the perspective of fractional calculus: Numerical investigation and circuit realization. *Chaos Solut. Fractals* (2020).
- Lu, H., Wu, X., Lu, J. & Wong, S. *Suppression and Generation of Chaos for a Three-Dimensional Autonomous System Using Parametric Perturbations* 811–819 (Cambridge University Press, 2007).
- Stan, C., Cristescu, C. & Alexandroaei, D. Chaos and hyperchaos in a symmetrical discharge plasma: Experiment and modelling. *UPB Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.* **70**, 01 (2008).
- Edward, N. L. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20**(2), 130–141, 03 (1963).
- Vaidyanathan S. & Azar A. T. Analysis and control of a 4-D novel hyperchaotic system. In *Chaos Modeling and Control Systems Design. Studies in Computational Intelligence*, vol. 581 (ed. Azar A. & Vaidyanathan S.) (Springer, 2015). https://doi.org/10.1007/978-3-319-13132-0_1.

10. Yu, X. & Chen, G. *Chaos Control: Theory and Applications* (Springer, 2003).
11. Sandubete, J. & Escot, L. DChaos: Chaotic Time Series Analysis. R package version 0.1-5 (last version, May 2020) <https://CRAN.R-project.org/package=DChaos> (2019).
12. Fülöp, A. & Horváth, A. Application of cellular neural networks in semantic segmentation. In *2021 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)* 1–5. <https://doi.org/10.1109/ISCAS51556.2021.9401249> (2021).
13. Correia, J. A. F. O. & Chang, S.-C. Controlling chaos through period-doubling bifurcations in attitude dynamics for power systems. <https://doi.org/10.1155/2020/8853459> (2020).
14. Lynn, M. R. Edward n lorenz's 1963 paper, "deterministic nonperiodic flow", in journal of the atmospheric sciences, vol 20, pages 130–141: Its history and relevance to physical geography. *Progr. Phys. Geogr. Earth Environ.* **40**(1), 175–180 (2016).
15. Viet, P., Christos, V., Sajad, J., Xiong, W. & Tomasz, K. A simple chaotic circuit with a light-emitting diode. *Communications* **10**, 640–646 (2016).
16. Hasler, M. J. Electrical circuits with chaotic behavior. *Proc. IEEE* **75**(8), 1009–1021 (1987).
17. Lakshmanan, M. & Murali, K. Experimental chaos from nonautonomous electronic circuits. *Philos. Trans. Phys. Sci. Eng.* **353**(1701), 33–46 (1995).
18. Wang, S.-P., Lao, S.-K., Chen, H.-K., Chen, J.-H. & Chen, S.-Y. Implementation of the fractional-order Chen-Lee system by electronic circuit. *Int. J. Bifurc. Chaos* **23**, 1350030 (2013).
19. Chen, G. & Lü, J. A new chaotic attractor coined. *Int. J. Bifurc. Chaos* **12**, 659–661 (2002).
20. Cafagna, D. & Grassi, G. Fractional-order Chua's circuit: Timedomain analysis, bifurcation, chaotic behavior and test for chaos. *Int. J. Bifurc. Chaos* **18**, 615–639 (2008).
21. Rössler, O. E. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A* **57**, 397–398 (1976).
22. Mekkaoui Hammouch, Z. Circuit design and simulation for the fractional-order chaotic behavior in a new dynamical system. *Complex Intell. Syst. Int. J. Bifurc. Chaos* **18**, 251–260 (2018).
23. Sachin, B. Chaos in fractional order systems, 53-74. 01 (2013).
24. Ruan, J., Sun, K., Mou, J., He, S. & Zhang, L. Fractional-order simplest memristor-based chaotic circuit with new derivative. *Eur. Phys. J. Plus* **133**, 01 (2018).
25. Masoumeh, F., Bashir, N. & Yousef, E. T. The consensus of different fractional-order chaotic multiagent systems using adaptive protocols. *J. Math.* **2022**, 5129072. <https://doi.org/10.1155/2022/5129072> (2022).
26. Debnath, L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *Int. J. Math. Math. Sci.* <https://doi.org/10.1155/S0161171203301486> (2003).
27. Muira, Y., Sugi, M., Hirano, Y. & Saito, K. Simulation of fractal immittance by analog circuits: An approach to the optimized circuits. *Fundam. Electron. Commun. Comput. Sci.* **E82–A**(8), 1627–1635 (1982).
28. Ramesh Babu, N., Balasubramaniam, P. & Ratnavelu, K. Stability analysis of a stochastic fractional order band pass filter circuit system. *AIP Conf. Proc.* **2319**, 060002. <https://doi.org/10.1063/5.0037708> (2021).
29. Radwan, A. G. & Salama, K. N. Fractional-order RC and RL circuits. *Circuits Syst. Signal Process.* **31**(6), 1901–1915. <https://doi.org/10.1007/s00034-012-9432-z> (2012).
30. Sen, S., Tripathy, M. C. & Biswas, K. A design example of a fractional order Kerwin–Huelsman–Newcomb (KHN) biquad filter with two fractional capacitors of different order. *Circuits* **32**, 1523–36 (2010).
31. Roy, S. C. D. On the realization of a constant-argument immittance or fractional operator. *IEEE Trans. Circuit Theory* **14**, 264–274 (1967).
32. Carlson, G. & Halijak, C. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{(1/n)}$ by a regular newton process. *IEEE Trans. Circuit Theory* **11**(2), 210–213. <https://doi.org/10.1109/TCT.1964.1082270> (1964).
33. Scavo, T. R. & Thoo, J. B. On the geometry of Halley's method. *Am. Math. Monthly* **102**(5), 417–426 (1995).
34. Jiang, Y., Zhang, B., Shu, X. & Wei, Z. Fractional-order autonomous circuits with order larger than one. *J. Adv. Res.* **25**, 217–225. <https://doi.org/10.1016/j.jare.2020.05.005> (2020) (ISSN 2090-1232).
35. Mouelas, A. *et al.* Extremely rich dynamical behaviors in a simple nonautonomous jerk system with generalized nonlinearity: Hyperchaos, intermittency, offset-boosting and multistability. *Int. J. Dyn. Control* **8**, 03 (2020).
36. Vaidyanathan, S., Takougang Kingni, S., Sambas, A., Mohamed, M. A. & Mamat, M. A new chaotic jerk system with three nonlinearities and synchronization via adaptive backstepping control. *Int. J. Eng. Technol.* **7**, 1936–1943 (2018).
37. Vaidyanathan, Sundarapandian, Sambas, Aceng, Mamat, Mustafa & Mada Sanjaya, W. S. Analysis, synchronisation and circuit implementation of a novel jerk chaotic system and its application for voice encryption. *Int. J. Modell. Identif. Control* **28**, 153 (2017).
38. Sprott, J. C. *Chaos and Time-Series Analysis*. USA (2003).
39. Sprott, J. C. *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows* (World Scientific, 2010).
40. Jafari, S., Sprott, J. C. & Golpayegani, S. M. Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria. *Phys. Lett. A* **377**, 699–702 (2013).
41. Ahmed, H. Fractional Euler method; An effective tool for solving fractional differential equations. *J. Egypt. Math. Soc.* **26**, 38–43. <https://doi.org/10.21608/JOEMS.2018.9460> (2018).
42. Sprott, J. C. How common is chaos. *Phys. Lett. A* **173**(1), 21–24 (1993).
43. Sprott, J. C. Simple chaotic systems and circuits. *Am. J. Phys.* **68**, 758. <https://doi.org/10.1119/1.19538> (2000).
44. Guckenheimer, J. H. *Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, 1983).
45. Feckan, M. *Topological Degree Approach to Bifurcation Problems* (Springer, 2008).
46. Valenza, G., Citi, L. & Barbieri, R. Estimation of instantaneous complex dynamics through Lyapunov exponents: A study on heartbeat dynamics. *PLoS One* **9**, e105622 (2014).
47. Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. & Vastano, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Phys. D Nonlinear Phenom.* **16**(3), 285–317 (1985).
48. Sayed, W. S., Radwan, A. G., Abd-El-Hafiz, S. K. Chapter 17—Chaotic properties of various types of hidden attractors in integer and fractional order domains. In *Mathematical Techniques of Fractional Order Systems, Advances in Nonlinear Dynamics and Chaos (ANDC)* (eds. Azar, A. T., Radwan, A. G., & Vaidyanathan, S.) 503–528 (Elsevier, 2018).
49. Lyapunov, A. Problème général de la stabilité du mouvement. *Ann. Math. Stud.* **17**, 531–534 (1977) (Russian original Kharkow).
50. Lyapunov, A. M. *Stability of Motion* (Academic-Press, 1966).
51. Osedelec, V. I. A multiplicative ergodic theorem Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.* **19**, 197–231 (1968).
52. Giorgilli, A., Benettin, G., Galgani, L. & Strelcyn, J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems; a method for computing all of them part I: Theory. *Meccanica* **15**, 9–20 (1980).
53. Carlson, G. E. & Halijah, C. A. Approximation of fractional capacitors $(1-s)(1-n)$ by a regular newton process. *IEEE Trans. Circuit Theory* **3**(7), 310–313 (1963).
54. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. & Trujillo, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* (Elsevier Science Inc., 2006).
55. Fuji, H. & Matsuda, K. H1 optimized wave-absorbing control: Analytical and experimental results. *J. Guidance Control. Dyn.* **16**, 1146–1153 (1993).
56. Ladaci, S. *Contribution à la Commande Adaptative d'Ordre fractionnel, Thèse de Doctorat* (Université Mentouri de Constantine, D é partement d'Electronique, 2007).

57. Sprott, J. C. & Ahmad, W. M. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos Solitons Fractals* **16**(2003), 339–351 (2002).
58. Jurisic, D., Emanovic, E., Lutovac, B. & Moschytz, G. Noise analysis of fractional-order two-integrator CCI low-pass filter using Pspice. <https://doi.org/10.1109/MECO.2018.8406097> (2018).
59. Liao, T.-L. & Lin, S.-H. Adaptive control and synchronization of Lorenz systems. *J. Frankl. Inst.* **336**(6), 925–937. [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(99\)00010-1](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(99)00010-1) (1999).
60. Parlitz, U. Estimating Lyapunov exponents from time series. In *Chaos Detection and Predictability. Lecture Notes in Physics*, vol. 915 (eds. Skokos, C., Gottwald, G. & Laskar, J.) (Springer, 2016). https://doi.org/10.1007/978-3-662-48410-4_1.

Acknowledgements

This work was supported by the Alexander von Humboldt Foundation under Ref 3.4-CMR/1133622.

Author contributions

T.S.: Design, simulations, implementation, writing of the article. B.B.: Project manager, data interpretation, editing supervision. A.E.G.F.V.: Simulations model, writing of the article. J.S.A.E.F.: Project Manager, Supervision of editing.

Competing interests

Individual authors of this manuscript certify that they have NO affiliation or involvement with any organization or entity that has a financial interest (such as honorary or educational grants, participation in speakers' bureaus, membership, employment, consulting, stock ownership or other participation, and expert testimony or patent licensing agreements), or a non-financial interest (such as personal or professional relationships, affiliations, knowledge, or beliefs) in the subject matter discussed in this manuscript.

Additional information

Correspondence and requests for materials should be addressed to S.T.

Reprints and permissions information is available at www.nature.com/reprints.

Publisher's note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

© The Author(s) 2022