REPUBLIQUE DU CAMEROUN
PAIX-TRAVAIL-PATRIE
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE 1
****
CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES TECHNOLOGIES ET GÉOSCIENCES
****
UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE, BIOINFORMATIQUE ET APPLICATIONS

REPUBLIC OF CAMEROON
PEACE-WORK-FATHERLAND
****
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
****
POSTGRADUATE SCHOOL FOR SCIENCE, TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES
****
RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING UNIT FOR MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCES AND APPLICATIONS

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

LABORATOIRE D'ANALYSE ET APPLICATIONS
LABORATORY OF ANALYSIS AND APPLICATIONS

Dynamique globale d'un plasma chargé évoluant avec collision en présence d'un champ scalaire massif sur l'espace-temps de Robertson-Walker

THESE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Doctorat/PhD en Mathématiques

Spécialité : Analyse

Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par :

KENMOGNE NOUMO Marcelin

Matricule : 03V089

Sous la direction de :

NOUTCHEGUEME Norbert
Professeur, Université de Yaoundé 1

AYISSI Raoul Domingo
Professeur, Université de Yaoundé 1

TAGNE WAFO Roger
Chargé de Cours, Université de Douala

Année académique 2022/2023

16 juin 2023

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
....
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
....
FACULTE DES SCIENCES
....
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
....
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I
....
FACULTY OF SCIENCES
....
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE DOCTORAT Ph.D

Nous soussignés, **Pr FOUPOUAGNIGNI MAMA, Pr MOYOUWOU Issofa**, membres du jury de la soutenance de Thèse de Doctorat Ph.D de Monsieur **KENMOGNE NOUMO Marcelin**, étudiant au département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé 1 sous le matricule **03V089**, Thèse intitulée **<<Dynamique globale des plasmas chargés évoluant avec collision en présence d'un champ scalaire massif sur l'espace-temps de Robertson-Walker>>** présentée et soutenue publiquement en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat Ph.D en Mathématiques, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance en vue de l'amélioration de ce travail, ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Yaoundé le 15 JUIN 2023

Président de Jury

FOUPOUAGNIGNI MAMA, Professeur

Membre du jury

MOYOUWOU Issofa, Maître de Conférences

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
DEPARTEMENT DE
CHEF DE DEPARTEMENT
MATHEMATIQUES
FACULTE DES SCIENCES

Le Chef de Département

Pr Ayissi Raoul
Université de Yaoundé I

Dédicaces

Avec toute mon affection, je dédie ce travail à Mon père **NOUMO Pascal** et à ma feue mère **NGUEMKAM Françoise**. Que ce travail soit pour vous le témoignage de mon infinie reconnaissance pour tout ce que vous avez fait pour moi.

Remerciements

La réalisation de cette thèse a été rendue possible grâce à la contribution, au soutien moral et matériel et à l'amour d'un certains nombres de personnes à qui je ne saurais manquer de témoigner ma profonde gratitude.

J'adresse tout premièrement mes très sincères remerciements au Professeur **Norbert NOUTCHEGUEME** qui m'a accepté en cycle recherche et m'a proposé le sujet de ce travail, ainsi qu'au Professeur **Raoul AYISSI Domingo** et au Docteur **Roger TAGNE WAFO** qui ont bien voulu accepter se joindre au Professeur **Norbert NOUTCHEGUEME** pour codiriger ce travail. Qu'ils trouvent par ces quelques mots l'expression de ma profonde gratitude car tout au long de ce travail ils auront fait preuve d'un très grand dévouement, de beaucoup de disponibilité, de rigueur et de patience et ce malgré leurs multiples tâches.

Je remercie très sincèrement les enseignants du département de Mathématiques de l'Université de Yaoundé 1 et de l'Ecole Normale Supérieure qui ont bien voulu me faire grâce de leurs connaissances, ainsi que mes enseignants du primaire et du secondaire.

Je remercie mes parents par qui DIEU a voulu que je voie le jour pour tout leur amour.

Je remercie sincèrement toutes les personnes qui me sont proches (frères, soeurs, amis et collègues) qui ont contribué chacun en sa manière à la réalisation de ce travail, qu'elles trouvent ici l'expression de ma plus grande reconnaissance. Je pense très particulièrement à mes grands frères **Rigobert NZIELEU**, **Magloire NOUMO** et **Théophile DJOUM** qui m'ont toujours accordé l'accès dans leur bureau ainsi qu'au matériel du bureau pour travailler. Je pense aussi à mon compagnons de route Docteur **Alexis Nangue**.

Je remercie mon épouse Edwige pour toute son attention, sa patience, son reconfort et surtout pour toutes les privations consenties pendant ces années de préparation de cette thèse.

Je remercie pour terminer le Seigneur **DIEU** le père tout puissant qui nous donne la vie et sans qui rien n'est possible. Qu'il vous comble de toutes ses grâces et de toutes ses bénédictions.

Table des matières

RESUME

Nous considérons le système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann avec constante cosmologique en présence d'un champ scalaire massif. La métrique utilisée est celle de l'espace-temps plat de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker dans le cas spatialement homogène où les fonctions inconnues ne dépendent que du temps et non des variables spatiales (x^i), $i = 1, 2, 3$. Après avoir présenté de façon détaillée les différentes équations du système, nous étudions le problème de compatibilitè et de conservation des équations d'Einstein. Nous établissons sous certaines hypothèses sur le noyau de collision (voir (1.5.14)), des inégalités de type Moser sur l'opérateur de collision Q dans l'espace de Sovolev à poids $H_d^k(\mathbb{R}^3)$, puis une inégalité d'énergie pour la solution d'une classe d'E.D.P du premier ordre dans le même espace. En combinant la méthode des estimations d'énergie avec celle des caractéristiques, nous déduisons une solution locale de classe C^1 de l'équation de Boltzmann en supposant que l'espace temps est entièrement déterminé. Les mêmes techniques sont utilisées par la suite pour établir l'existence d'une solution locale (dans le temps) et de classe C^1 du système couplé. En outre, sous l'hypothèse que les données initiales sont petites dans une certaine norme appropriée et que la constante cosmologique satisfait $\Lambda > -4\pi m^2 \Phi_0^2$, nous obtenons une unique solution globale (dans le temps), (voir Théorème 3.2). Nous étudions par la suite quelques propriétés des solutions notamment la positivité de la solution de l'équation de Boltzmann, la stabilité de la solution du système couplé et la complétude géodésique de l'espace-temps.

ABSTRACT

We consider the coupled Einstein-Maxwell-Boltzmann system with cosmological constant in presence of a massive scalar field. The background metric is that of Friedman-Lemaître-Robertson-Walker space time in the spatially homogeneous case where the unknown functions only depend on time and not on the space variables (x^i), $i = 1, 2, 3$. After having presented in detail the different equations of the system, we study the problem of compatibility and conservation of Einstein's equations. We establish under certain assumptions on the chok kernel (see (1.5.14)), some Moser-type inequalities on the collision operator Q in the weighted Sovolev space $H_d^k(\mathbb{R}^3)$. Futher an energy estimate for the solution of a class of a first-order PDE in the same weighted space is established. By combining the method of energy estimates with that of characteristics, we derive a local solution of class C^1 of the Boltzmann equation assuming that the space time is fully determined. The same techniques are used subsequently to establish the existence of local (in time) solution of class C^1 of the coupled system. Further, under the hypotheses that the data are small in some appropriate norms and that the cosmological constant satisfies $\Lambda > -4\pi m^2\Phi_0^2$, we derive a unique global (in time) solution (Theorem 3.2). We then study some properties of the solutions in particular the positivity of solution of Boltzmann équation, stability of the solution of coupled system and the geodesic completeness of the obtained space-time.

INTRODUCTION GENERALE

La connaissance profonde des phénomènes de l'Univers est de nos jours une préoccupation du monde scientifique. L'étude de l'évolution de l'Univers dans son ensemble est nécessaire et primordiale. Une telle étude passe par la modélisation locale ou globale de l'Univers. Dans ce sens, la théorie de la Relativité Générale élaborée en 1916 par Albert Einstein et donc la base est constituée des équations d'Einstein est essentielle pour comprendre, expliquer et prédire certains phénomènes de l'Univers à l'échelle macroscopique. Ces équations lient d'une part la géométrie de l'espace-temps déterminée par le tenseur métrique qui représente le champ de gravitation, et d'autre part le contenu matériel et énergétique de l'espace-temps représenté par le tenseur d'impulsion-énergie. L'objectif majeur dans la résolution des équations d'Einstein est de déterminer à la fois le champ de gravitation et sa source. C'est pourquoi l'un des problèmes fondamentaux dans l'étude mathématique de la Relativité Générale est de résoudre les équations d'Einstein couplées avec d'autres champs.

Nous étudions dans le cadre de notre travail l'évolution à très grande vitesse, et avec collision d'un train de particules chargées, évoluant sous l'action conjuguée de leur propre champ de gravitation et des forces électromagnétiques créées par les particules chargées auxquelles est associé un champ scalaire massif. Ce phénomène est gouverné par le système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire.

L'équation de Boltzmann est l'une des équations de base de la théorie cinétique relativiste. Cette équation décrit l'évolution avec collision à très grande vitesse d'un train de particules chargées et permet de déterminer la fonction de distribution f des particules, qui est une fonction réelle positive de la position et de l'impulsion des particules. La fonction de distribution des particules est physiquement interprétée comme étant la densité de probabilité de présence des particules au cours de leur évolution avec collision. Nous supposons que les collisions sont binaires et élastiques, c'est -à-dire qu'en une position et en un instant donnés, seules deux particules entrent en collision. Ainsi l'équation de Boltzmann est définie par un opérateur non linéaire appelé opérateur de collision noté Q, qui décrit en tout instant et à chaque point où deux particules entrent en collision, les effets du comportement imposé par la collision et en tenant compte du fait que les impulsions des deux particules ne sont pas les mêmes avant et après la collision. Seule la somme des impulsions est conservée, ce qui entraîne la conservation de l'énergie. Il est à noter que l'équation de Boltzmann est une généralisation de l'équation de Vlasov, dans laquelle l'opérateur de collision Q est supposé nul.

Les équations de Maxwell constituent la base mathématique fondamentale de l'Electromagnétisme et permettent de déterminer le champ électromagnétique $F = (F_{\alpha\beta})$ créé par les particules chargées auxquelles est associé le tenseur de Maxwell $\tau_{\alpha\beta}$. Nous considérons le cas où le champ électromagnétique est généré par le courant de Maxwell créé par les particules chargées et engendré par la fonction de distribution f des particules en collision. Les particules massives sont munies d'une charge e qui représente la densité de charge. Nous supposons que nous sommes en présence d'un champ scalaire massif qui est l'un des outils permettant de mesurer les ondes gravitationnelles, qui se propagent dans l'espace à la vitesse de la lumière, même en présence de corps matériels et de manière analogue aux ondes électromagnétiques (se reférer à [27] pour plus de détails à ce sujet). Ce champ scalaire Φ engendre un tenseur que nous notons $H_{\alpha\beta}$. Il est à noter que le Prix Nobel de physique 1993 avait été décerné à un astrophysicien pour des travaux sur ce phénomène de propagation d'ondes gravitationnelles. Le tenseur d'impulsion-énergie du modèle considéré ici incorpore un 2-tenseur symétrique $\theta_{\alpha\beta}$ dû à A. Lichnerowicz dans [17] et est appelé pseudo-tenseur de pression. Ce tenseur généralise à la fois les notions de matière pure ($\theta_{\alpha\beta} = 0$) et de fluide parfait relativiste ($\theta_{\alpha\beta} = pg_{\alpha\beta}$, où p est une fonction scalaire représentant la pression). Notons que le modèle fluide est un modèle mathématique simple qui traite le plasma comme un mélange de fluide-électron et de fluide-ion agissants sous la contrainte des champs électromagnétiques et de pression. Les fluides-électrons et les fluides-ions sont ensuite décrits en termes de propriétés locales telles que la densité numérique et la température, où les variables sont définies comme moyennes sur des éléments fluides qui sont énormes comparativement aux dimensions microscopiques du plasma. Il offre le modèle le plus simple par lequel l'interaction macroscopique entre le plasmas et les champs électromagnétiques peut être étudiée.

L'approximation du fluide est valide s'il y a une localisation suffisante des particules dans l'espace physique. Cette localisation peut être réalisée par exemple au moyen de collisions entre les particules. Voir Appendix 1 dans [11].

Le cadre géométrique que nous utilisons est l'espace-temps de Friedman-Lemaître- Robertson-Walker que nous désignons brièvement espace-temps de Robertson-Walker. Cet espace-temps est particulièrement adapté dans l'étude de l'univers et est reconnu comme étant l'espace-temps fondamental en cosmologie et dans lequel les phénomènes physiques homogènes comme celui que nous considérons ici sont pertinents. Ces phénomènes physiques prévalent par exemple dans les galaxies pour lesquelles seule l'évolution dans le temps est réellement significative. Les phénomènes sont supposés homogènes c'est-à-dire que les fonctions inconnues ne dépendent que du temps $t = x^0$ et pas des variables de l'espace (x^i), $i = 1, 2, 3$.

Le problème que nous étudions, modélise des phénomènes physiques réels tels que ceux rencontrés dans les milieux à très haute température comme par exemple les réacteurs en fusions, les galaxies nébuleuses, les vents solaires etc..., où les particules de gaz ionisé évoluent avec collision à très grande vitesse sous l'action conjuguée de leur propre champ de gravitation et des forces électromagnétiques créées par le fluide chargé lui-même.

Le tenseur d'impulsion énergie qui détermine le contenu matériel et energétique de l'espace-temps est défini ici par la somme de quatre tenseurs $T_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ que nous détaillons par la suite.

Notre motivation de considérer les équations d'Einstein avec la constante cosmologique, est due au fait que les observations astrophysiques basées sur la luminosité à travers le décalage du spectre lumineux vers le rouge (redshift) et l'explosion très lumineuse de certaines étoiles ont mis en évidence le fait que l'Univers était en expansion accélérée. L'outil mathématique classique utilisé par les théoriciens pour modéliser cette accélération est la constante cosmologique Λ. Rappelons également que le prix Nobel de physique, 2001, a été décerné à trois astrophysiciens pour leur travaux de recherche sur ce phénomène d'expansion accélérée de l'univers : pour plus de détails, voir [13, 20, 21, 25, 30, 32]. En fait, nous devons souligner que la notion "d'énergie sombre" a été introduite afin de fournir une explication physique au phénomène d'expansion de l'univers, mais la structure physique de cette forme d'énergie hypothétique qui est inconnue dans les laboratoires reste une question ouverte dans la cosmologie ; de même que la question de la "matière noire". Notons également que le champ scalaire est considéré comme un mécanisme produisant des modèles accélérés, non seulement en cas "d'inflation", qui est une variante de la théorie du Big-Bang incluant maintenant une période très courte de très forte accélération, mais aussi dans l'univers primordial.

Notre travail s'inscrit dans le cadre général de la théorie cinétique relativiste où le système couplé Einstein-Vlasov et sa généralisation, le système couplé Einstein-Boltzmann sont étudiés. Bichteler dans [4] en 1967 et Daniel Bancel dans [2] en 1973 ont étudié l'équation de Boltzmann où ils prouvent un résultat d'existence locale et d'unicité. Piotr Mucha dans [18, 19] en 1998 et 2000 a étudié le système Einstein-Boltzmann dans l'espace temps de Robertson-Walker, ou il prouve l'existence d'une solution faible de l'équation de Boltzmann. Dans [3] en 1973, Daniel Bancel et Yvonne Choquet-Bruhat ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution locale du problème de Cauchy pour le système couplé Einstein-Maxwell-Boltzman, la métrique utilisée étant une petite perturbation de la métrique de Minkowski. Il est à noter que l'espace fonctionnel que nous utilisons dans ce travail pour l'équation de Bolzmann est du même type que celui utilisé par ces derniers. Dans [22, 23, 25] en 2005, 2006 et 2010, N. Noutchegueme et ses collaborateurs ont étudié le système Einstein-Boltzmann sur l'espaces-temps de Robertson-Walker et le système Einstein-Maxwell-Boltzmann sur l'espace-temps de Bianchi I et ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution globale dans un espace L^1-pondéré. Dans [26] en 2009, les auteurs ont prouvé que le système couplé Einstein-Maxwell-Vlasov avec constante cosmologique positive admet une unique solution globale (dans le temps) dans les espaces-temps de Bianchi I-VIII. Dans [12–14] en 2013, 2014 et 2015, Ho Lee et Ernesto Nungesser ont étudié le système Einstein-Boltzmann dans l'espace-temps de Robertson-Walker et de Bianchi I, où ils ont prouvé l'existence d'une solution régulière, puis étudié le comportement asymptotique de cette solution pour une forme précise du noyau de collision. Plus récemment, E. Takou et F. L. Ciake Ciake dans [5, 6], en 2018 ont prouvé l'existence d'une solution classique globale en temps de l'équation de Boltzmann dans l'espace-temps de Bianchi de type I et pour le potentiel dur. Ils ont également étudié le cas inhomogène sur l'espace-temps de Robertson-Walker pour le cas des particules d'Israël.

Ce travail considère comme mentionné plus haut, le système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann avec la constante cosmologique en présence d'un champ scalaire massif. La métrique utilisée est celle de l'espace-temps plat de Robertson-Walker. En combinant la méthode des estimations d'énergie à celle des caractéristiques, nous obtenons, sous des hypothèses appropriées sur le noyau de collision (voir (1.5.14)), une solution locale (dans le temps) du système couplé. En outre, sous l'hypothèse de la petitesse de la donnée initiale f_0 pour l'équation de Boltzmann dans un espace de Sobolev pondéré et que la constante cosmologique satisfait $\Lambda > -\sigma^2$ où $\sigma > 0$ est une constante qui ne dépend que du potentiel du champ scalaire, nous prouvons que le système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann avec un champ scalaire massif et constante cosmologique admet une unique solution globale (dans le temps) (Théorème 3.2). Ce résultat étend les résultats existants sur l'équation de Boltzmann relativiste (voir par exemple [12, 14, 24, 25] ou [23] et [22] dans différents cas) pour les éléments suivants :

- Nous étudions l'évolution de la distribution des particules, le champ électromagnétique, le champ scalaire ainsi que l'espace-temps simultanément. Voir [14] ;
- Le cas de la constante cosmologique positive est couvert par notre analyse, mais une partie des valeurs négatives de la constante cosmologique est admise. Nous soulignons le fait qu'en l'absence des champs de matières, en suivant étape par étape la preuve de la proposition 4.2 page 302 de [25] on peut prouver qu'il ne peut exister une solution globale dans le cas $\Lambda < 0$. Notons que $\Lambda < 0$ apparaît naturellement dans l'espace-temps anti-de Sitter et la théorie des champs conforme correspondant à certaines modèles théoriques tels que la supergravité, la théorie des cordes, etc. Voir [1] pour plus de détails ;
- L'approche. Notre idée est de combiner les techniques d'estimation de l'énergie et la méthode des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre pour obtenir des propriétés de la suite issue d'un schema itératif. De ces propriétés, nous déduisons l'existence d'une solution locale (faible) comme limite dans certains espaces de Sobolev de la suite construite. La principale difficulté lors de l'utilisation de cette approche est de déduire de là, une solution régulière (de classe C^1) du système réduit. Ceci est fait en deux étapes en utilisant l'inégalité d'interpolation dans l'espace de Sobolev à paramètre réel ainsi que les inégalités de Sobolev (voir la preuve du théorème 3.1).

Le travail est organisé comme suit :

- Au chapitre 1, nous présentons en détail les différentes équations du système, nous spécifions les hypothèses que nous faisons sur le noyau de collision B. En outre, les problèmes de consevation et de compatibilité des équations sont étudiés. De cette étude, nous déduisons l'équation déterminant le champ scalaire et d'autres composantes des tenseurs utilisés. Ce qui nous permet de ressortir le système intégro-différentiel à étudier.

- Au chapitre 2, nous présentons l'espace fonctionnel $H_d^k(\mathbb{R}^3)$ que nous utilisons pour l'équation de Boltzmann, nous établissons des inégalités de substitution de type Moser pour l'opérateur de collision Q qui sont fondamentales pour la recherche de la solution de l'équation de Boltzmann. Nous établissons pour la norme $H_d^k(\mathbb{R}^3)$, une inégalité d'énergie pour la solution d'une classe d'EDP du premier ordre hyperbolique : (la norme H_d^k de l'inconnu est estimée en fonction de la norme H_d^k de la donnée initiale et une intégrale de la norme H_d^k du terme source). Ceci sera appliqué à l'équation de Boltzmann écrit dans de nouvelles coordonnées. Nous prouvons enfin un résultat d'existence (locale) et d'unicité d'une solution de l'équation de Boltzmann en supposant que l'espace-temps est entièrement déterminé.
- Au chapitre 3, en combinant les techniques d'estimation de l'énergie et la méthode des caractéristiques, nous prouvons un résultat d'existence locale (Théorème 3.1) de la solution du système Einstein-Maxwell-Boltzmann avec champ scalaire massif comme étant la limite d'une suite appropriée, puis nous prouvons un résultat d'existence globale (Théorème 3.2) de la solution du système Einstein-Maxwell-Boltzmann avec champ scalaire, sous les hypothèses que la norme de la donnée initiale pour l'équation de Boltzmann est suffisamment petite et que la constante cosmologique Λ est telle que $\Lambda > -4\pi m^2\Phi_0^2$, où m est la masse du champ scalaire et Φ_0 la donnée initiale de se champ scalaire : ce résultat est le résultat fondamental de notre travail.
- Dans le chapitre 4, nous étudions quelques propriétés des solutions du système couplé notamment la positivité de la solution de l'équation de Biltzmann, la complétude géodésique de l'espace temps et la stabilité de la solution unique obtenue au chapitre 3.

Chapitre Un

PRESENTATION DU SYSTEME, COMPATIBILITE ET CONDITIONS DE CONSERVATION

Dans ce chapitre, nous présentons de façon détaillé les équations considérées, puis nous spécifions les hypothèses sous lesquelles nous étudions le système couplé et nous étudions la compatibilité et les conditions de conservation à partir desquelles nous déduisons le système intégro-différentiel que nous étudierons par la suite.

1.1 Présentation des équations

Comme annoncé en introduction, nous étudions la dynamique globale d'un train de particules massives chargées évoluant à très grande vitesse avec collision, sous l'action conjuguée de leur propre champ de gravitation commun et des forces électromagnétiques crées par ces particules chargées et en présence d'un champ scalaire massif et du pseudo tenseur de pression. Le cadre géométrique que nous utilisons est l'espace-temps de Robertson-Walker $(\mathbb{R}^4, g)$ dont la métrique g, en signature hyperbolique $(-,+,+,+)$ s'écrit, dans les coordonnées canoniques (x^α) de $\mathbb{R}^4$ où $x^0 = t$ représente le temps et (x^i), $i = 1, 2, 3$ les variables spatiales :

$$g = -dt^2 + a^2(t)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] \tag{1.1.1}$$

où a est une fonction inconnue positive de la seule variable t appelée facteur d'expansion cosmologique. Il est à préciser que (1.1.1) correspond a l'espace temps plat $(k = 0)$ de l'espace temps de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker dont la métrique en coordonnées polaires s'écrit :

$$g_{FLRW} = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-k^2} + r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\big)\right)$$

Nous rappelons que nous étudions le cas homogène, c'est-à-dire que les fonctions inconnues ne dépendent que du temps ($t = x^0$) et non des variables spatiales (x^i), $i = 1, 2, 3$. Nous adoptons la convention de sommation d'Einstein $A_\alpha B^\alpha = \sum_\alpha A_\alpha B^\alpha$. Tout indice grec $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \cdots$ varie de 0 à 3 et tout indice latin $i,\ j,\ k, \cdots$ de 1 à 3.

Le phénomène étudié est gouverné par le système couplé suivant :

$$\begin{cases} S_{\alpha\beta} + \wedge g_{\alpha\beta} = 8\pi(T_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta})\,, & (1.1.2) \\ \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta\,, & (1.1.3) \\ \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0\,, & (1.1.4) \\ \mathcal{L}_X f = Q(f,f)\,. & (1.1.5) \end{cases}$$

que nous appellons système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire massif.

- l'équation (1.1.2) représente les équations d'Einstein, équations de base de la Relativité Générale et qui rendent compte des effets gravitationnels, avec $\wedge$ la constante cosmologique, $S_{\alpha\beta}$ le tenseur d'Einstein. $T_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur d'impulsion-énergie, source du champ de gravitation que représente le tenseur métrique g et sont définis comme suit :

$$\begin{cases} T_{\alpha\beta} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{p_\alpha p_\beta f(t,\overline{p})\sqrt{|\det g|}}{p^0} d\bar{p}\,, & (1.1.6) \\ \tau_{\alpha\beta} = -\dfrac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} + F_{\alpha\lambda} F_\beta^{\lambda}\,, & (1.1.7) \\ K_{\alpha\beta} = -\theta_{\alpha\beta}\,, & (1.1.8) \\ H_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\Phi\nabla_\beta\Phi - \dfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}(\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi + m^2\Phi^2)\,; & (1.1.9) \end{cases}$$

avec

- $T_{\alpha\beta}$ le tenseur engendré par la fonction de distribution f des particules chargées, qui est une fonction scalaire positive qui en générale dépend de la position $x = (x)^\alpha$ et de l'impulsion $p = (p)^\alpha$:

$$\begin{aligned} f :\quad T\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x^\alpha, p^\alpha) &\longmapsto f(x^\alpha, p^\alpha) \end{aligned}$$

Nous supposons que les particules chargées sont situées sur l'hyperboloïde de masse d'équation $g(p,p) = -m^2 = -1$ (où nous avons normalisé la masse m en prenant $m = 1$) et qu'elles s'éjectent naturellement vers le futur ($p^0 > 0$). On déduit alors de (1.1.1) que :

$$p^0 = \sqrt{1 + a^2\left[(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2\right]} \tag{1.1.10}$$

L'équation (1.1.10) montre que p^0 s'exprime en fonction de p^i. f est soumise à l'équation de Boltzmann (1.1.5) que nous présentons dans la suite. Notons que d'après (1.1.10) et l'hypothèse d'homogeneité, f ne dépend que de t et des p^i ; $i = 1, 2, 3$. Nous désignons par $\overline{p}$ et $\overline{q}$, les composantes spatiales de $p = (p^\alpha)$ et $q = (q^\alpha)$, c'est-à-dire :

$$p = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad \text{et} \quad \overline{p} = (p^1, p^2, p^3)\,.$$

- $\tau_{\alpha\beta}$ représente le tenseur de Maxwell associé au champ électromagnétique inconnu $F = (F_{\alpha\beta}) = (F^{0i}, F_{ij})$ fonction de la variable t, F^{0i} étant la partie électrique et F_{ij} la partie magnétique. F est une 2-forme antysymétrique fermée soumise aux équations de Maxwell (1.1.3)-(1.1.4), qui rendent compte des effets électromagnétiques.
- Dans l'équation (1.1.8), $\theta_{\alpha\beta}$ est un 2-tenseur symétrique appelé pseudo-tenseur des pressions comme nous l'avons mentionné dans l'introduction. Nous faisons sur $\theta_{\alpha\beta}$ les hypothèses :

$$\begin{cases} g^{ij}\theta_{ij} = 0\,, & (1.1.11) \\ \nabla_\alpha \theta^{\alpha\beta} = -\rho^2 u^\beta\,; & (1.1.12) \end{cases}$$

  où dans (1.1.12) $\rho > 0$ est une constante. L'équation (1.1.11) signifie que la partie spatiale de $\theta_{\alpha\beta}$ est sans trace. Ce n'est pas réellement une restriction puisqu'à tout tenseur T_{ij} sur $\mathbb{R}^3$ on peut associer le tenseur sans trace $\tilde{T}_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3}g_{ij}(g^{kl}T_{kl})$.
- $H_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'impulsion énergie défini par le champ scalaire massif Φ ($m > 0$ est une constante appelée masse du champ scalaire) qui est une fonction scalaire inconnue de la variable t.

Dans (1.1.3) qui constitue le premier groupe des équations de Maxwell, J^β représente le courant de Maxwell engendré par les particules chargées et est défini par la formule :

$$J^\beta = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^\beta f(t,\overline{p})\sqrt{|\det g|}}{p^0} d\bar{p} - eu^\beta \tag{1.1.13}$$

où e est une fonction de la variable t représentant la charge élémentaire des particules et $u = (u^\beta)$ le vecteur vitesse unitaire. Nous supposons que les particules sont spatialement au repos c'est-à-dire u vérifie :

$$u^i = u_i = 0 \;\; ; \;\; u^0 = 1\,. \tag{1.1.14}$$

Dans le cas homogène que nous étudions ici, nous avons $\nabla_\alpha F^{\alpha 0} = 0$, où ∇ est la connection de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^4; g)$. Ainsi l'équation (1.1.3) donne $J^0 = 0$ et d'où l'on déduit :

$$e(t) = a^3(t) \int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{p}) d\overline{p}\,. \tag{1.1.15}$$

(1.1.15) montre que a et f déterminent e.

- L'équation (1.1.4) est le deuxième groupe des équations de Maxwell, qui est équivalente à $dF = 0$, et qui traduit le fait que F est une 2-forme fermée.
- L'équation (1.1.5) est l'équation de Boltzmann que nous présentons maintenant. Dans cette équation, $\mathcal{L}_X f$ est la dérivée de Lie de f suivant le champ de vecteurs $X = X(F) = (p^\alpha, \mathcal{P}^\alpha)$ où

$$\mathcal{P}^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} p^\lambda p^\mu + eF_\lambda{}^\alpha p^\lambda\,; \tag{1.1.16}$$

qui s'écrit en coordonnées locales :

$$\mathcal{L}_X f = p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \mathcal{P}^\alpha \frac{\partial f}{\partial p^\alpha}\,. \tag{1.1.17}$$

Dans (1.1.16), $\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}$ sont les symboles de Christoffel de la métrique g. Les trajectoires des particules chargées sont des courbes dans $T\mathbb{R}^4$: $s \longmapsto (x^\alpha(s), p^\alpha(s))$ solution du système différentiel :

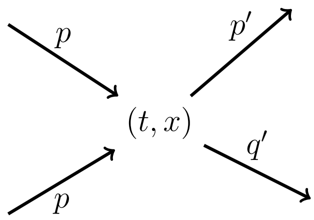
$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx^\alpha}{ds} = p^\alpha & (1.1.18) \\ \dfrac{dp^\alpha}{ds} = \mathcal{P}^\alpha & (1.1.19) \end{array}\right.$$

où $\mathcal{P}^\alpha$ est défini par (1.1.16). (1.1.18)-(1.1.19) montrent que le vecteur $X = (p^\alpha, \mathcal{P}^\alpha)$ est tangent aux trajectoires des particules chargées. Puisque $f = f(t, p^i)$, l'équation de Boltzmann (1.1.5) s'écrit vu (1.1.17) :

$$p^0 \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{P}^i \frac{\partial f}{\partial p^i} = Q(f, f)\,. \tag{1.1.20}$$

Nous présentons à présent l'opérateur de collision Q qui intervient dans (1.1.5). Q est un opérateur supposé binaire et élastique introduit par A. Lichnerowicz et Chernikov en 1940 qui considère un schéma où en une position spatio-temporelle (t, x^i), seules deux particules d'impulsions p et q entrent en collision et le choc ne détruit aucune des particules, elles repartent avec des impulsions différentes p' et q' après le choc, avec la loi de conservation

$$p + q = p' + q'\,. \tag{1.1.21}$$



Etant donné deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}^4$, on définit l'opérateur de collision Q par :

$$Q(f, g) = Q^+(f, g) - Q^-(f, g) \tag{1.1.22}$$

avec

$$\begin{cases} Q^+(f,g)(t,\bar{p}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{a^3(t)}{q^0} d\overline{q} \int_{S^2} f(t,\overline{p}')g(t,\overline{q}')B\big(a,\overline{p},\overline{q},\overline{p}',\overline{q}'\big)d\omega\,, \\ \\ Q^-(f,g)(t,\bar{p}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{a^3}{q^0} d\overline{q} \int_{S^2} f(t,\overline{p})g(t,\overline{q})B\big(a,\overline{p},\overline{q},\overline{p}',\overline{q}'\big)d\omega \end{cases}. \tag{1.1.23}$$

Dans (1.1.23) :

- S^2 est la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, d'élément de surface $d\omega$,
- B est une fonction positive régulière de ses arguments appellée noyau de la collision ou section efficace du choc sur laquelle nous ferons quelques hypothèses de travail.

Notons que la loi de conservation (1.1.21) se scinde en :

$$\begin{cases} p^0 + q^0 = p'^0 + q'^0 & (1.1.24) \\ \overline{p} + \overline{q} = \overline{p}' + \overline{q}' & (1.1.25) \end{cases}$$

(1.1.24) traduit la conservation de l'énergie définie par :

$$\tilde{e} = \sqrt{1 + a^2(t)\left[(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2\right]} + \sqrt{1 + a^2(t)\left[(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2\right]}, \qquad (1.1.26)$$

appelée énergie élémentaire des particules de masse propre normalisée. Dans la section suivante, nous allons brièvement présenter quelques différents types de paramétrisation des impulsions après le choc. Pour plus de détails sur la théorie cinétique relativiste, se reférer à [7–9, 15, 28, 33].

1.2 Paramétrisation des impulsions après le choc.

Vu la loi de conservation (1.1.21), les impulsions après le choc peuvent être paramétrées par p et q avec quelques paramètres additionnels. Dans le cas non relativiste, les deux types de paramétrisation ci-dessous sont couramment utilisées. Etant donné deux vecteurs ξ et ξ_* de $\mathbb{R}^3$, nous avons :

$$\xi' = \frac{\xi + \xi_*}{2} + \frac{|\xi - \xi_*|}{2}\sigma, \ \ \xi'_* = \frac{\xi + \xi_*}{2} - \frac{|\xi - \xi_*|}{2}\sigma, \ \sigma \in S^2 \qquad (1.2.1)$$

$$\xi' = \xi - ((\xi - \xi_*)\cdot\omega)\,\omega, \ \ \xi'_* = \xi_* + ((\xi - \xi_*)\cdot\omega)\,\omega, \ \omega \in S^2 \qquad (1.2.2)$$

où $\cdot$ et $|\cdot|$ représente le produit scalaire usuel et la norme usuelle de $\mathbb{R}^3$ respectivement. Ces deux représentations sont appelées respectivement $\sigma-$représentation et $\omega-$représentation (voir page 126-127 de [34]). Pour avoir une représentation analogue respectivement à (1.2.1) et (1.2.2) dans le cas relativiste, Ho Lee dans [12] suppose que les impulsions après le choc sont paramétrées par :

$$p'^\alpha = \frac{p^\alpha + q^\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(p_\alpha - q_\alpha)(p^\alpha - q^\alpha)}}{2}\Omega^\alpha, \ \ q'^\alpha = \frac{p^\alpha + q^\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(p_\alpha - q_\alpha)(p^\alpha - q^\alpha)}}{2}\Omega^\alpha \qquad (1.2.3)$$

$$p'^\alpha = p^\alpha - \left((p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta\right)\Omega^\alpha, \ \ q'^\alpha = q^\alpha + \left((p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta\right)\Omega^\alpha \qquad (1.2.4)$$

Pour tout vecteur Ω^α de $\mathbb{R}^4$.

Dans notre travail, nous adoptons la paramétrisation (1.2.4). En utilisant le faite que les particules sont situées sur l'hyperboloide de masse d'équation $g(p,p) = -1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
-1 &= p'_\alpha p'^\alpha \\
&= \left[p_\alpha - \left((p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta\right)\Omega_\alpha\right]\left[p^\alpha - \left((p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta\right)\Omega^\alpha\right] \\
&= p_\alpha p^\alpha - (p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta p^\alpha \Omega_\alpha - (p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta p_\alpha \Omega^\alpha + \left[(p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta\right]^2 \Omega_\alpha \Omega^\alpha \\
&= -1 + \left[(p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta\right]^2 \Omega_\alpha \Omega^\alpha - (p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta \left(p^\alpha \Omega_\alpha + p_\alpha \Omega^\alpha\right) \\
&= -1 + \left[(p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta\right]^2 \Omega_\alpha \Omega^\alpha - 2(p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta p_\alpha \Omega^\alpha;
\end{aligned}$$

donc

$$\left[(p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta\right]^2 \Omega_\alpha \Omega^\alpha - 2(p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta p_\alpha \Omega^\alpha = 0\,. \tag{1.2.5}$$

De même, vu que $q'_\alpha q'^\alpha = -1$, nous avons :

$$\left[(p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta\right]^2 \Omega_\alpha \Omega^\alpha + 2(p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta q_\alpha \Omega^\alpha = 0\,. \tag{1.2.6}$$

En combinant (1.2.5) et (1.2.6), nous obtenons les deux équations :

$$\Omega_\alpha \Omega^\alpha = 1\,; \quad n_\alpha \Omega^\alpha = 0\,. \tag{1.2.7}$$

où $n^\alpha = p^\alpha + q^\alpha$.

Une façon simple d'avoir Ω^α est donc de construire un vecteur t^α orthogonal à n^α et de le normaliser. Ainsi en considérant $\omega \in S^2$, nous prenons

$$t^\alpha = (n_i \omega^i,\, -n_0 \omega) = \left(a^2(\bar{p} + \bar{q}) \cdot w,\, (p^0 + q^0)\omega\right) \tag{1.2.8}$$

et nous le normalisons pour avoir :

$$\Omega^\alpha = \frac{t^\alpha}{\sqrt{t_\beta t^\beta}}\ . \tag{1.2.9}$$

Notons que nous avons bien $n_\alpha \Omega^\alpha = 0$ et $\Omega_\alpha \Omega^\alpha = 1$. En effet, $\Omega_\alpha \Omega^\alpha = \frac{t_\alpha t^\alpha}{t_\beta t^\beta} = 1$ et

$$\begin{aligned}
n_\alpha t^\alpha &= n_0 t^0 + n_i t^i \\
&= a^2(p_0 + q_0)(\bar{p} + \bar{q}) \cdot \omega + (p^0 + q^0)(p_i + q_i)\omega^i \\
&= a^2(p_0 + q_0)(\bar{p} + \bar{q}) \cdot \omega - a^2(p_0 + q_0)(\bar{p} + \bar{q}) \cdot \omega \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Par un calcul direct, nous avons d'une part :

$$t_\beta t^\beta = t_0 t^0 + t_i t^i = g_{00}(t^0)^2 + g_{ii} t^i t^i = -(t^0)^2 + a^2 \sum_{i=1}^{3} (t^i)^2 = -a^4(\omega \cdot (\overline{p} + \overline{q}))^2 + a^2(p^0 + q^0)^2$$

et d'autre part :

$$
\begin{aligned}
(p_\beta - q_\beta)\Omega^\beta &= (p_0 - q_0)\Omega^0 + (p_i - q_i)\Omega^i \\
&= (q^0 - p^0)\Omega^0 + a^2\sum_{i=1}^{3}(p^i - q^i)\Omega^i \\
&= \frac{a^2(q^0 - p^0)\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q})}{a\sqrt{(p^0+q^0)^2 - a^2(\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q}))^2}} + \frac{a^2(p^0 + q^0)\omega\cdot(\overline{p}-\overline{q})}{a\sqrt{(p^0+q^0)^2 - a^2(\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q}))^2}} \\
&= \frac{2ap^0q^0\omega\cdot\left(\frac{\overline{p}}{p^0} - \frac{\overline{q}}{q^0}\right)}{\sqrt{(p^0+q^0)^2 - a^2(\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q}))^2}} \\
&= \frac{2ap^0q^0\omega\cdot\left(\hat{\overline{p}} - \hat{\overline{q}}\right)}{\sqrt{(p^0+q^0)^2 - a^2(\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q}))^2}},
\end{aligned}
$$

avec $\hat{\overline{p}} = \frac{\overline{p}}{p^0}$. donc

$$
p'^\alpha = p^\alpha - \frac{2ap^0q^0\omega\cdot\left(\hat{\overline{p}} - \hat{\overline{q}}\right)}{\sqrt{(p^0+q^0)^2 - a^2(\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q}))^2}}\frac{t^\alpha}{a\sqrt{(p^0+q^0)^2 - a^2(\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q}))^2}}\,,
$$

et vu l'expression (1.2.8) de t^α, nous avons :

$$
p'^k = p^k + \frac{2p^0q^0(p^0+q^0)\omega\cdot\left(\hat{\overline{q}} - \hat{\overline{p}}\right)}{(p^0+q^0)^2 - a^2(\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q}))^2}w^k\,.
$$

De même, nous avons

$$
q'^k = q^k - \frac{2p^0q^0(p^0+q^0)\omega\cdot\left(\hat{\overline{q}} - \hat{\overline{p}}\right)}{(p^0+q^0)^2 - a^2(\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q}))^2}w^k\,.
$$

D'où la paramétrisation :

$$
\begin{cases}
\overline{p}' = \overline{p} + b(\overline{p},\overline{q},\omega)\omega \\
\overline{q}' = \overline{q} - b(\overline{p},\overline{q},\omega)\omega
\end{cases}
\tag{1.2.10}
$$

avec

$$
b(\overline{p},\overline{q},\omega) = \frac{2p^0q^0(p^0+q^0)\omega\cdot\left(\hat{\overline{q}} - \hat{\overline{p}}\right)}{(p^0+q^0)^2 - a^2(\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q}))^2}\,,
\tag{1.2.11}
$$

Remarquons que d'après (1.2.10), $\overline{p}'$ et $\overline{q}'$ s'expriment en fonction de $\overline{p}$, $\overline{q}$ et ω de sorte que les intégrales dans (1.1.23) qui sont prises par rapport à $\overline{q}$ et ω laissent bien une fonction de la variable $\overline{p}$.

En utilisant les formules habituelles, le Jacobien de $(\overline{p},\overline{q}) \longmapsto (\overline{p}',\overline{q}')$, nous donne (voir annexe pour les calculs) :

$$
\frac{\partial(\overline{p}',\overline{q}')}{\partial(\overline{p},\overline{q})} = -\frac{p'^0q'^0}{p^0q^0}\,.
\tag{1.2.12}
$$

1.3 Compatibilité des équations

1.3.1 Coefficients de Christoffel

La métrique g étant donnée par (1.1.1), la matrice $(g_{\alpha\beta})$ s'écrit :

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, \tag{1.3.1}$$

et son déterminant donne :

$$\det g = -a^6 \,. \tag{1.3.2}$$

Puisque $a > 0$, $(g_{\alpha\beta})$ est inversible et sa matrice inverse est donnée par :

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix}. \tag{1.3.3}$$

On déduit donc de (1.3.1) et (1.3.3) que :

$$\begin{cases} g_{00} = -1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = a^2, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \;\; si \;\; \alpha \neq \beta \\ g^{00} = -1, \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = a^{-2}, \quad g^{\alpha\beta} = 0 \;\; si \;\; \alpha \neq \beta \end{cases}. \tag{1.3.4}$$

Les coefficients de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ de la connexion de Levi-Civita ∇ de la métrique g sont définis par :

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} (\partial_\alpha \, g_{\mu\beta} + \partial_\beta \, g_{\alpha\mu} - \partial_\mu \, g_{\alpha\beta}) \,. \tag{1.3.5}$$

D'après (1.3.4), nous déduisons que les seuls coefficients de Christoffel non nuls sont $\Gamma^0{}_{ii}$ et $\Gamma^i{}_{i0}$ et par un calcul direct, (1.3.5) donne vu (1.3.4) :

$$\begin{cases} \Gamma^0{}_{11} = \Gamma^0{}_{22} = \Gamma^0{}_{33} = \dot{a}a \\ \Gamma^1{}_{10} = \Gamma^2{}_{20} = \Gamma^3{}_{30} = \frac{\dot{a}}{a} \end{cases}. \tag{1.3.6}$$

1.3.2 Equation satisfaite par le champ électromagnétique.

Nous désignons par $\mathcal{G}$ le sous-groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire le sous groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^3$ formé des matrices de la forme

$$N_{\varepsilon,\theta} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^2 = 1 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Il est démontré dans [25] que si la donnée initiale f_0 de f $\big(f_0(\bar{p}) = f(0;\bar{p})\big)$ est invariante par le sous-groupe $\mathcal{G}$ c'est-à-dire $f_0(N\bar{p}) = f_0(\bar{p})$ et que $B(a, N\bar{p}, N\bar{q}, N\bar{p}', N\bar{q}') = B(a, \bar{p}, \bar{q}, \bar{p}', \bar{q}')$, $\forall N \in \mathcal{G}$, alors il en sera de même pour toute solution f de l'équation de Boltzmann vérifiant $f_0(\bar{p}) = f(0;\bar{p})$. Nous adoptons dans toute la suite l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1 : Les fonctions f_0 et B vérifient :

$$f_0(N\bar{p}) = f_0(\bar{p}),\ \forall N \in \mathcal{G},\ \text{ et } B(a, N\bar{p}, N\bar{q}, N\bar{p}', N\bar{q}') = B(a, \bar{p}, \bar{q}, \bar{p}', \bar{q}')\,. \tag{1.3.7}$$

Notons que ces hypothèses nous permettent d'avoir un certains nombre de résultats sur le tenseur $T_{\alpha\beta}$, lesquels permettent que les équations d'Einstein soient compatibles comme nous allons le voir par la suite.

Proposition 1.1. *Sous les hypothèses (1.3.7), on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^i f(t,\overline{p})\sqrt{|\det g|}}{p^0} d\overline{p} = 0,\ \forall i = 1,2,3\,.$$

Preuve: Considérons $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ et posons $\overline{p} = N\overline{p}_1 = (-p_1^1, p_1^2, p_1^3)$.

Alors puisque $f(N\overline{p}_1) = f(\overline{p}_1)$ et $p^0(N\overline{p}_1) = p_1^0(\overline{p}_1)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^1 f(\overline{p})|g|^{\frac{1}{2}}}{p^0} d\overline{p} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-p_1^1 f(N\overline{p}_1)|g|^{\frac{1}{2}} d\overline{p}_1}{p^0(N\overline{p}_1)} = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{p_1^1 f(\overline{p}_1)|g|^{\frac{1}{2}} d\overline{p}_1}{p_1^0} = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^1 f(\overline{p})|g|^{\frac{1}{2}} d\overline{p}}{p^0}\,.$$

D'où l'on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^1 f(\overline{p})|g|^{\frac{1}{2}} d\overline{p}}{p^0} = 0\,.$$

De même, en prenant d'une part $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et d'autre part $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^2 f(\overline{p})|g|^{\frac{1}{2}} d\overline{p}}{p^0} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^3 f(\overline{p})|g|^{\frac{1}{2}} d\overline{p}}{p^0} = 0\,.$$

□

Remarque 1.1. *L'expression (1.1.13) donne vu la Proposition 1.1, $J^i = 0$ et nous déduisons de (1.1.3) que :*

$$\nabla_\alpha F^{\alpha i} = 0, \ \forall i = 1, 2, 3 \,. \tag{1.3.8}$$

Ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\alpha F^{\alpha i} \\ &= \partial_\alpha F^{\alpha i} + \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} F^{\lambda i} + \Gamma^i_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \\ &= \partial_0 F^{0i} + \Gamma^j_{j0} F^{0i} \,. \end{aligned}$$

Ainsi vu (1.3.6), nous avons l'équation

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a} F^{0i} = 0 \,, \tag{1.3.9}$$

qui détermine F^{0i}.

Remarque 1.2. *D'après le lemme de Poincaré, la 2-forme fermée F est localement exacte et comme $\mathbb{R}^4$ et simplement connexe, F est globalement exacte. Donc F dérive globalement d'un potentiel vectoriel $A = (A_\lambda)$. F et A sont liés par la relation :*

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha \,; \tag{1.3.10}$$

ce qui donne

$$F_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i = \partial_i A_j - \partial_j A_i \,; \tag{1.3.11}$$

et puisque A ne dépend que de t, on a vu (1.3.11)

$$F_{ij} = 0 \,. \tag{1.3.12}$$

NB : *L'Equation (1.3.12) montre que le champ électromagnétique F est réduit à sa partie électrique F^{0i} déterminée par l'Equation (1.3.9).*

1.3.3 Compatibilité des équations d'Einstein

D'après (1.1.2), les équations d'Einstein s'écrivent :

$$\begin{cases} S_{00} + \wedge g_{00} = 8\pi(T_{00} + \tau_{00} + K_{00} + H_{00}) & (1.3.13) \\ S_{ii} + \wedge g_{ii} = 8\pi(T_{ii} + \tau_{ii} + K_{ii} + H_{ii}), \ i = 1, 2, 3 & (1.3.14) \\ S_{0i} + \wedge g_{0i} = 8\pi(T_{0i} + \tau_{0i} + K_{0i} + H_{0i}), \ i = 1, 2, 3 & (1.3.15) \\ S_{ij} + \wedge g_{ij} = 8\pi(T_{ij} + \tau_{ij} + K_{ij} + H_{ij}), \ i \neq j & (1.3.16) \end{cases}$$

NB : L'équation (1.3.13) est appelée "**contrainte Hamiltonnienne**", les équations (1.3.14) sont appelées **équations d'évolution** d'Einstein et les équations (1.3.15)-(1.3.16) sont les équations de contraintes. Le tenseur de Riemann (ou tenseur de courbure) $R^{\lambda}{}_{\mu,\alpha\beta}$, le tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$, contracté du tenseur de Riemann et la courbure Riemannienne scalaire R contracté du tenseur de Ricci sont définis par les formules :

$$\begin{cases} R^{\lambda}{}_{\mu,\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha} \\ R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}{}_{\alpha,\lambda\beta} = \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\lambda} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\lambda} \\ R = R^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \end{cases} . \tag{1.3.17}$$

Par un calcul direct, en utilisant les relations (1.3.6) et (1.3.17), on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.2.

1. *Les composantes du tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ et la courbure Riemannienne scalaire R sont donnés par :*

$$\begin{cases} R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{ii} = \ddot{a}a + 2(\dot{a})^2, \quad i = 1,2,3 \\ R_{\alpha\beta} = 0 \qquad\qquad\qquad si\ \alpha \neq \beta \\ R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] \end{cases} . \tag{1.3.18}$$

2. *Les composantes du tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ est donné par :*

$$\begin{cases} S_{00} = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\ S_{ii} = -2\ddot{a}a - (\dot{a})^2, \quad i = 1,2,3 \\ S_{\alpha\beta} = 0 \qquad\qquad\qquad si\ \alpha \neq \beta \end{cases} . \tag{1.3.19}$$

Remarque 1.3. *A priori il y a trois équations dans (1.3.14) pour $i = 1,2,3$. Du fait que ces trois équations ont exactement les mêmes membres de gauche (vu (1.3.4) et (1.3.19)), il est nécessaire qu'elles aient aussi les mêmes membres de droite. De même, dans les équations (1.3.15)-(1.3.16), les membres de gauche sont identiquement nuls (vu (1.3.4) et (1.3.19)). Il est donc question de voir à quelles conditions les membres de droite seront identiquement nuls dans ces équations. Ceci pose donc le problème de compatibilité que nous allons étudier. Pour le faire, nous aurons besoin des résultats suivants :*

Lemme 1.1. *Pour la 2-forme fermée F, on a :*

$$\begin{cases} F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} = -2g_{ij}F^{0i}F^{0j} \\ F_{i\lambda}F_j{}^{\lambda} = -g_{ik}g_{jl}F^{0k}F^{0l};\ i,j=1,2,3 \\ F_{0\lambda}F_j{}^{\lambda} = 0;\ j=1,2,3 \\ F_{0\lambda}F_0{}^{\lambda} = g_{ij}F^{0i}F^{0j} \end{cases} \tag{1.3.20}$$

Preuve:

- $$\begin{aligned} F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu} &= F_{00}F^{00} + 2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij} \\ &= 2g_{0\alpha}g_{i\beta}F^{\alpha\beta}F^{0i}\ (car F_{ij}=0\ \ vu\ \ (1.3.12)) \\ &= 2g_{00}g_{i\beta}F^{0\beta}F^{0i} \\ &= -2g_{ij}F^{0i}F^{0j}\,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} F_{i\lambda}F_j{}^{\lambda} &= g_{i\alpha}g_{\lambda\beta}g_{j\mu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\lambda} \\ &= g_{ik}g_{jl}g_{\lambda\beta}F^{k\beta}F^{l\lambda} \\ &= g_{00}g_{ik}g_{jl}F^{k0}F^{l0} \\ &= -g_{ik}g_{jl}F^{0k}F^{0l}\,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} F_{0\lambda}F_j{}^{\lambda} &= F_{00}F_j{}^0 + F_{0k}F_j{}^k \\ &= g_{\alpha j}F_{0k}F^{\alpha k} \\ &= g_{jj}F_{0k}F^{jk} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} F_{0\lambda}F_0{}^{\lambda} &= g_{0\alpha}g_{\beta\lambda}g_{0\mu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\lambda} \\ &= g_{00}g_{\beta\lambda}g_{00}F^{0\beta}F^{0\alpha} \\ &= g_{ij}F^{0i}F^{0j}\,. \end{aligned}$$

D'où (1.3.20). □

Il est démontré dans [25] le résultat suivant :

Proposition 1.3. *Sous les hypothèses (1.3.7), les composantes du tenseur $T_{\alpha\beta}$ vérifient :*

$$T_{11} = T_{22} = T_{33}\,,\ \ T_{0i} = T_{ij} = 0,\ pour\ i \neq j \tag{1.3.21}$$

Proposition 1.4. *Les composantes du tenseur de Maxwell $\tau_{\alpha\beta}$ et celles du tenseur associé au champ scalaire $H_{\alpha\beta}$ sont données par :*

$$\begin{cases} \tau_{00} = \frac{1}{2} g_{ij} F^{0i} F^{0j}\,, \quad \tau_{0i} = 0\,, \quad \tau_{ij} = \frac{1}{2}\big(g_{ij} g_{kl} - 2 g_{ik} g_{jl}\big) F^{0k} F^{0l}, & (1.3.22) \\ H_{00} = \frac{1}{2}\Big((\dot{\Phi})^2 + m^2 \Phi^2\Big)\,, \quad H_{0i} = 0, \quad H_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij}\Big((\dot{\Phi})^2 - m^2\Phi^2\Big). & (1.3.23) \end{cases}$$

Preuve:

1. Composantes de $\tau_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} + F_{\alpha\lambda} F_{\beta}{}^{\lambda}$.

   En utilisant (1.1.2) et les équations (1.3.20), on a :

   - $\tau_{00} = -\frac{1}{4} g_{00} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} + F_{0\lambda} F_0{}^{\lambda} = -\frac{1}{2} g_{ij} F_{0i} F^{0j} + g_{ij} F_{0i} F^{0j} = \frac{1}{2} g_{ij} F_{0i} F^{0j}\,.$
   - $\tau_{0i} = -\frac{1}{4} g_{0i} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} + F_{0\lambda} F_i{}^{\lambda} = 0\,.$
   - $$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -\frac{1}{4} g_{ij} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} + F_{i\lambda} F_j{}^{\lambda} \\ &= -\frac{1}{4} g_{ij}(-2 g_{kl} F^{0k} F^{0l}) - g_{ik} g_{jl} F^{0k} F^{0l} \\ &= \frac{1}{2}\big(g_{ij} g_{kl} - 2 g_{ik} g_{jl}\big) F^{0k} F^{0l}\,. \end{aligned}$$

   D'où (1.3.22).

2. Composantes de $H_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(\nabla^\lambda \Phi \nabla_\lambda \Phi + m^2 \Phi^2)$.

   Puisque Φ ne dépend que de t et vu (1.3.4), on a :

   - $H_{0i} = \nabla_0 \Phi \nabla_i \Phi - \frac{1}{2} g_{0i}(\nabla^\lambda \Phi \nabla_\lambda \Phi + m^2 \Phi^2) = 0\,.$
   - $H_{00} = \nabla_0 \Phi \nabla_0 \Phi - \frac{1}{2} g_{00}(\nabla^\lambda \Phi \nabla_\lambda \Phi + m^2 \Phi^2) = (\dot{\Phi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla^\lambda \Phi \nabla_\lambda \Phi + m^2 \Phi^2)\,.$

   Or $\nabla^\lambda \Phi \nabla_\lambda \Phi = g^{\lambda\alpha} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\lambda \Phi = g^{00} \nabla_0 \Phi \nabla_0 \Phi = -(\dot{\Phi})^2$, donc

   $$H_{00} = (\dot{\Phi})^2 + \frac{1}{2}\big(-(\dot{\Phi})^2 + m^2\Phi^2\big) = \frac{1}{2}\big((\dot{\Phi})^2 + m^2 \Phi^2\big)\,.$$

   - $H_{ij} = \nabla_i \Phi \nabla_j \Phi - \frac{1}{2} g_{ij}(\nabla^\lambda \Phi \nabla_\lambda \Phi + m^2 \Phi^2) = -\frac{1}{2} g_{ij}(-(\dot{\Phi})^2 + m^2 \Phi^2) = \frac{1}{2} g_{ij}\big((\dot{\Phi})^2 - m^2 \Phi^2\big)\,.$

   D'où (1.3.23).

$\square$

Pour ce qui est de l'étude de la compatibilité proprement dite des équations d'Einstein, nous distinguerons 4 cas à savoir :

$$\alpha = 0 \text{ et } \beta = i; \;\; \alpha = i \text{ et } \beta = j \text{ avec } i \neq j; \;\; \alpha = \beta = i \text{ et } \alpha = \beta = 0\,.$$

1$^{\text{er}}$ **cas :** $\alpha = 0$ **et** $\beta = i$

On a pour les membres de gauche de (1.3.15), $S_{0i} + \wedge g_{0i} = 0$. On doit donc avoir nécessairement, pour les membres de droites :

$$T_{0i} + \tau_{0i} + K_{0i} + H_{0i} = 0\,. \tag{1.3.24}$$

(1.3.21), (1.3.22) et (1.3.23) montrent que

$$T_{0i} = \tau_{0i} = H_{0i} = 0\,.$$

Or la définition (1.1.8) de $K_{\alpha\beta}$ donne :

$$K_{0i} = -\theta_{0i}\,; \tag{1.3.25}$$

ainsi (1.3.24) sera vérifiée si on prend (vu (1.3.25)) :

$$\theta_{0i} = 0\,. \tag{1.3.26}$$

2$^{\text{e}}$ **cas :** $\alpha = i$ **et** $\beta = j$**,** $i \neq j$

Pour les membres de gauches de (1.3.16), on a $S_{ij} + \wedge g_{ij} = 0$. On doit donc nécessairement avoir pour les membres de droites :

$$T_{ij} + \tau_{ij} + K_{ij} + H_{ij} = 0\,. \tag{1.3.27}$$

(1.3.21) et (1.3.23) donnent $T_{ij} = H_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ et l'expression (1.1.8) de $K_{\alpha\beta}$ donne $K_{ij} = -\theta_{ij}$. (1.3.27) impose alors que l'on doit avoir :

$$\tau_{ij} - \theta_{ij} = 0\,. \tag{1.3.28}$$

(1.3.28) sera satisfaite si on définit vu (1.3.22) θ_{ij} pour $i \neq j$ par :

$$\theta_{ij} = -g_{ik} g_{jl} F^{0k} F^{0l}\,. \tag{1.3.29}$$

En conclusion l'équation (1.3.27) sera satisfaite si θ_{ij} est défini par (1.3.29) pour $i \neq j$.

<u>$3^{\mathbf{e}}$ **cas :** $\alpha = \beta = i,\ i = 1, 2, 3$</u>

D'après (1.3.19) et (1.3.4) les trois équations dans (1.3.14) pour $i = 1, 2, 3$ ont exactement le même membre de gauche qui est :

$$\mathcal{A} = -2\ddot{a}a - (\dot{a})^2 + \wedge a^2 . \tag{1.3.30}$$

Les membres de droites de ces trois équations doivent être égaux. On doit donc avoir vu (1.3.14) en simplifiant par 8π :

$$T_{11} + \tau_{11} + K_{11} + H_{11} = T_{22} + \tau_{22} + K_{22} + H_{22} = T_{33} + \tau_{33} + K_{33} + H_{33} . \tag{1.3.31}$$

L'équation (1.3.9) de F^{0i} montre que si l'on prend :

$$F^{01}(0) = F^{02}(0) = F^{03}(0); \tag{1.3.32}$$

alors on a :

$$F^{01} = F^{02} = F^{03} . \tag{1.3.33}$$

Nous formulons l'hypothèse (1.3.32) et par conséquent (1.3.21)-(1.3.23) donnent vu (1.3.4) :

$$T_{11} = T_{22} = T_{33},\ \ \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} \text{ et } H_{11} = H_{22} = H_{33} . \tag{1.3.34}$$

D'après l'expression (1.1.8) de $K_{\alpha\beta}$, (1.3.31) impose qu'on doit avoir :

$$\theta_{11} = \theta_{22} = \theta_{33} . \tag{1.3.35}$$

Maintenant d'après l'hypothèse (1.1.11) c'est-à-dire $g^{ij}\theta_{ij} = 0$, on a :

$$\theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{33} = 0 . \tag{1.3.36}$$

(1.3.35) et (1.3.36) donnent alors :

$$\theta_{11} = \theta_{22} = \theta_{33} = 0 . \tag{1.3.37}$$

En conclusion, si on choisit les $F^{0i}(0)$, $i = 1, 2, 3$ tel que donné par (1.3.32), alors (1.3.37) montre que tous les θ_{ii} sont nuls d'une part et d'autre part que les relations dans (1.3.31) sont satisfaites et donc que les trois équations d'Einstein (1.3.14) pour $i = 1, 2, 3$ sont compatibles. Ces trois équations ayant le même membre de droite se réduisent à une seule équation qui s'écrit pour $i = 1$:

$$S_{11} + \wedge g_{11} = 8\pi(T_{11} + \tau_{11} + K_{11} + H_{11}) . \tag{1.3.38}$$

vu les expressions (1.1.6) de $T_{\alpha\beta}$, (1.3.19) de $S_{\alpha\beta}$, 1.3.22 de $\tau_{\alpha\beta}$, (1.3.23) de $H_{\alpha\beta}$, (1.1.8) et (1.3.37) de $K_{\alpha\beta}$, l'équation (1.3.38) s'écrit :

$$-2\ddot{a}a - (\dot{a}) + \Lambda a^2 = 8\pi \left[a^7 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(p^1)^2}{p^0} f(\overline{p}) d\overline{p} + \frac{a^4}{2}(F^{01})^2 + \frac{a^2}{2}(\dot{\Phi}^2 - m^2\Phi^2) \right] \quad (1.3.39)$$

<u>$4^{\mathbf{e}}$ **cas :** $\alpha = \beta = 0.$</u>

Nous avons l'équation :

$$S_{00} + \wedge g_{00} = 8\pi \Big[T_{00} + \tau_{00} - \theta_{00} + H_{00} \Big] . \quad (1.3.40)$$

Cette équation correspond à la contrainte Hamiltoniènne qui s'écrit d'après (1.3.13) et vu les expressions (1.1.6) de $T_{\alpha\beta}$, (1.1.8) de $K_{\alpha\beta}$, (1.3.22) de $\tau_{\alpha\beta}$ et (1.3.23) de $H_{\alpha\beta}$:

$$3\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)^2 - \Lambda = 8\pi \left[a^3 \int_{\mathbb{R}^3} p^0 f(\overline{p}) d\overline{p} + \frac{3}{2} a^2 (F^{01})^2 - \theta_{00} + \frac{a^2}{2}(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2) \right] \quad (1.3.41)$$

Notons que parmi les dix composantes du pseudo-tenseur de pressions $\theta_{\alpha\beta}$ qui est symétrique, les neuf composantes θ_{0i} et θ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ sont déterminées respectivement par (1.3.26) et (1.3.37) ; il reste donc à déterminer θ^{00}.

Remarquons que $\theta^{00} = g^{0\lambda} g^{0\mu} \theta_{\lambda\mu} = g^{00} g^{00} \theta_{00} = \theta_{00}$. En prenant $\beta = 0$ dans (1.1.12), on a vu (1.1.14) :

$$\begin{aligned} -\rho^2 &= \nabla_\alpha \theta^{\alpha 0} \\ &= \partial_\alpha \theta^{\alpha 0} + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \theta^{\lambda 0} + \Gamma^0_{\alpha\lambda} \theta^{\alpha\lambda} \\ &= \partial_0 \theta^{00} + \Gamma^j_{j0} \theta^{00} . \end{aligned}$$

D'où θ^{00} est solution de l'équation différentielle :

$$\dot{\theta}^{00} + 3\frac{\dot{a}}{a}\theta^{00} = -\rho^2. \quad (1.3.42)$$

Remarque 1.4. *1. D'après la théorie générale des équations d'Einstein, l'équation (1.3.40) est satisfaite dans tout le domaine d'existence de la solution de l'équation d'évolution si elle l'est en $t = 0$ (voir par exemple [22]). En évaluant (1.3.41) en $t = 0$, on a :*

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{\dot{a(0)}}{a(0)}\right)^2 - \Lambda = 8\pi \Bigg[& a^3(0) \int_{\mathbb{R}^3} p^0(0) f_0(\overline{p}) d\overline{p} \quad (1.3.43) \\ & + \frac{3}{2} a^2(0) (F^{01}(0))^2 - \theta_{00}(0) + \frac{a^2(0)}{2}(\dot{\Phi(0)}^2 + m^2\Phi^2(0)) \Bigg] . \end{aligned}$$

(1.3.43) donne vu l'expression (1.1.10) de p^0 *:*

$$\begin{aligned}\theta_{00}(0) &= a^3(0)\int_{\mathbb{R}^3}\sqrt{1+a^2(0)|\overline{p}|^2}f_0(\overline{p})d\overline{p}+\frac{3}{2}a^2(0)(F^{01}(0))^2\\ &\quad +\frac{1}{2}\Big(\dot{\Phi}^2(0)+m^2\Phi^2(0)\Big)+\frac{\wedge}{8\pi}-\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\dot{a}(0)}{a(0)}\right)^2. \end{aligned}\quad (1.3.44)$$

L'équation (1.3.44) est donc celle qui lie les données initiales des différentes fonctions inconnues.

2. *Notons qu'en prenant dans (1.3.44)* $\dot{a}(0)$ *suffisament grand, on pourra avoir* $\theta_{00} < 0$*. Or l'équation (1.3.42) en* θ^{00} *donne :*

$$\theta^{00}(t) = \frac{1}{a^3(t)}\Big[a^3(0)\theta_{00}(0) - \rho^2\int_0^t a^3(s)ds\Big],$$

d'où l'on déduit que

$$\theta^{00}(0) < 0 \Longrightarrow \theta^{00}(t) < 0,\ \forall t \geq 0\,.$$

Nous choisissons donc $\dot{a}(0)$ *suffisament grand, de sorte que* $\theta_{00}(0) < 0$ *et par conséquent nous avons* $\theta^{00}(t) \geq 0,\ \forall t$*. Ainsi le membre de droite de (1.3.41) sera positif. Ce qui nous sera utile dans la suite.*

1.4 Problème de conservation

Etant donné que le tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta}$ vérifient :

$$\nabla_\alpha S^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_\alpha g^{\alpha\beta} = 0\,;$$

le membre de gauche de (1.1.2) vérifie les identités :

$$\nabla_\alpha\left(S^{\alpha\beta} + \wedge g^{\alpha\beta}\right) = 0\,. \quad (1.4.1)$$

Par conséquent les tenseurs $T_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$ doivent vérifier l'équation de conservation :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\tau^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha K^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha H^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.4.2)$$

Il est établit dans [7] le résultat suivant :

Proposition 1.5. *Si f vérifie l'équation de Boltzmann (1.1.5), alors le tenseur $T_{\alpha\beta}$ vérifie la condition de conservation :*

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0\,. \tag{1.4.3}$$

Proposition 1.6. *Pour les tenseurs $\tau_{\alpha\beta}$ et $H_{\alpha\beta}$, on a le résultat suivant :*

$$\begin{cases} \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0 & (1.4.4) \\ \nabla_\alpha H^{\alpha\beta} = \nabla^\beta \Phi(\Box_g \Phi - m^2\Phi) & (1.4.5) \end{cases}$$

Preuve: • Pour ce qui est de (1.4.4), remarquons que

$$\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = g^{\alpha\sigma} g^{\beta\theta} \nabla_\alpha \tau_{\sigma\theta} = g^{\beta\theta} \nabla^\sigma \tau_{\sigma\theta}\,.$$

D'après l'expression (1.1.7) de $\tau_{\alpha\beta}$, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla^\sigma \tau_{\sigma\theta} &= \nabla^\sigma \Big(-\frac{1}{4} g_{\sigma\theta} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} + F_{\theta\lambda} F_\sigma^{\ \lambda} \Big) \\
&= -\frac{1}{4} g_{\sigma\theta} \nabla^\sigma (F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) + g_{\sigma\gamma} \nabla^\sigma (F_{\theta\lambda} F^{\gamma\lambda}) \\
&= -\frac{1}{4} g_{\sigma\theta} \big(F^{\lambda\mu} \nabla^\sigma F_{\lambda\mu} + F_{\lambda\mu} \nabla^\sigma F^{\lambda\mu} \big) + g_{\sigma\gamma} \big(F_{\theta\lambda} \nabla^\sigma F^{\gamma\lambda} + F^{\gamma\lambda} \nabla^\sigma F_{\theta\lambda} \big) \\
&= -\frac{1}{4} \big(F^{\lambda\mu} \nabla_\theta F_{\lambda\mu} + F_{\lambda\mu} \nabla_\theta F^{\lambda\mu} \big) + F_{\theta\lambda} \nabla_\gamma F^{\gamma\lambda} + F^{\gamma\lambda} \nabla_\gamma F_{\theta\lambda} \\
&= -\frac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\theta F_{\lambda\mu} + F_{\theta\lambda} \nabla_\gamma F^{\gamma\lambda} + F^{\gamma\lambda} \nabla_\gamma F_{\theta\lambda} \quad (\text{car } F^{\lambda\mu} \nabla_\theta F_{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu} \nabla_\theta F^{\lambda\mu}) \\
&= -\frac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\theta F_{\lambda\mu} + F_{\theta\lambda} \nabla_\gamma F^{\gamma\lambda} - F^{\gamma\lambda} \nabla_\gamma F_{\lambda\theta} \\
&= F_{\theta\lambda} \nabla_\gamma F^{\gamma\lambda} - (F^{\gamma\lambda} \nabla_\gamma F_{\lambda\theta} + \frac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\theta F_{\lambda\mu}) \\
&= F_{\theta\lambda} \nabla_\mu F^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} (F^{\mu\lambda} \nabla_\mu F_{\lambda\theta} + F^{\mu\lambda} \nabla_\mu F_{\lambda\theta} + F^{\lambda\mu} \nabla_\theta F_{\lambda\mu}) \\
&= F_{\theta\lambda} \nabla_\mu F^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} (F^{\mu\lambda} \nabla_\mu F_{\lambda\theta} + F^{\mu\lambda} \nabla_\mu F_{\lambda\theta} + F^{\mu\lambda} \nabla_\theta F_{\mu\lambda}) \\
&= F_{\theta\lambda} \nabla_\mu F^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} F^{\mu\lambda} (\nabla_\mu F_{\lambda\theta} + \nabla_\mu F_{\lambda\theta} + \nabla_\theta F_{\mu\lambda}) \\
&= F_{\theta\lambda} \nabla_\mu F^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} F^{\mu\lambda} (\nabla_\mu F_{\lambda\theta} - \nabla_\lambda F_{\theta\mu}), \quad \text{d'après 1.1.4} \\
&= F_{\theta\lambda} \nabla_\mu F^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} F^{\mu\lambda} (\nabla_\mu F_{\lambda\theta} + \nabla_\lambda F_{\mu\theta}) \\
&= F_{\theta\lambda} \nabla_\mu F^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} (F^{\mu\lambda} \nabla_\mu F_{\lambda\theta} + F^{\mu\lambda} \nabla_\lambda F_{\mu\theta}) \\
&= F_{\theta\lambda} \nabla_\mu F^{\mu\lambda} \quad (\text{car } F^{\mu\lambda} \nabla_\mu F_{\lambda\theta} = F^{\lambda\mu} \nabla_\lambda F_{\mu\theta} = -F^{\mu\lambda} \nabla_\lambda F_{\mu\theta})
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = g_{\alpha\theta} \nabla^\theta \tau^{\alpha\beta} = \nabla^\theta \tau_\theta^{\ \beta} = g^{\beta\theta} \nabla^\sigma \tau_{\sigma\theta} = g^{\beta\theta} F_{\theta\lambda} \nabla_\mu F^{\mu\lambda} = F_\lambda^{\ \beta} \nabla_\mu F^{\mu\lambda}\,.$$

or

$$F^\beta_\lambda \nabla_\mu F^{\mu\lambda} = F^\beta_0 \nabla_\mu F^{\mu 0} + F^\beta_i \nabla_\mu F^{\mu i} = F^\beta_i \nabla_\mu F^{\mu i} = -eu^i F^\beta_i = 0\,;$$

donc $\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0$.

• En ce qui concerne (1.4.5), l'expression (1.1.9) de $H_{\alpha\beta}$ donne :

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha H^{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha\left(\nabla^\alpha\Phi\nabla^\beta\Phi\right) - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\nabla_\alpha(\nabla^\lambda\Phi\nabla_\lambda\Phi) + m^2\nabla_\alpha\Phi^2\right)\\
&= \left(\nabla_\alpha\nabla^\alpha\Phi\right)\nabla^\beta\Phi + \nabla^\alpha\Phi\left(\nabla_\alpha\nabla^\beta\Phi\right) - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Big[\left(\nabla_\alpha\nabla^\lambda\Phi\right)\nabla_\lambda\Phi + \nabla^\lambda\Phi\left(\nabla_\alpha\nabla_\lambda\Phi\right) + m^2\nabla_\alpha\Phi^2\Big]\\
&= \nabla^\beta\Phi\Box_g\Phi + \nabla^\alpha\Phi\left(\nabla_\alpha\nabla^\beta\Phi\right) - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Big[\left(\nabla_\alpha\nabla^\lambda\Phi\right)\nabla_\lambda\Phi + g^{\lambda\sigma}\nabla_\sigma\Phi\left(\nabla_\alpha\nabla_\lambda\Phi\right) + m^2\nabla_\alpha\Phi^2\Big]\\
&= \nabla^\beta\Phi\Box_g\Phi + \nabla^\alpha\Phi\left(\nabla_\alpha\nabla^\beta\Phi\right) - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Big[\left(\nabla_\alpha\nabla^\lambda\Phi\right)\nabla_\lambda\Phi + \nabla_\sigma\Phi\left(\nabla_\alpha\nabla^\sigma\Phi\right)\Big] - \frac{1}{2}m^2g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Phi^2\\
&= \nabla^\beta\Phi\Box_g\Phi + \nabla^\alpha\Phi\left(\nabla_\alpha\nabla^\beta\Phi\right) - \nabla_\lambda\Phi\left(\nabla^\beta\nabla^\lambda\Phi\right) - m^2\Phi\nabla^\beta\Phi\\
&= \nabla^\beta\Phi\Box_g\Phi + \nabla^\alpha\Phi\left(\nabla_\alpha\nabla^\beta\Phi\right) - g_{\lambda\sigma}\nabla^\sigma\Phi\left(\nabla^\beta\nabla^\lambda\Phi\right) - m^2\Phi\nabla^\beta\Phi\\
&= \nabla^\beta\Phi\Box_g\Phi + \nabla^\alpha\Phi\left(\nabla_\alpha\nabla^\beta\Phi\right) - \nabla^\sigma\Phi\left(\nabla^\beta\nabla_\sigma\Phi\right) - m^2\Phi\nabla^\beta\Phi\\
&= \nabla^\beta\Phi(\Box_g\Phi - m^2\Phi)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\nabla_\alpha H^{\alpha\beta} = \nabla^\beta\Phi(\Box_g\Phi - m^2\Phi)\,.$ □

L'equation (1.4.2) impose vu la Proposition 1.6 et l'Equation (1.1.12) que l'on doit avoir :

$$\rho^2 u^\beta + \nabla^\beta\Phi(\Box_g\Phi - m^2\Phi) = 0\,. \tag{1.4.6}$$

Notons que (1.4.6) est automatiquement vérifiée pour $\beta = i$, et pour $\beta = 0$ (1.4.6) donne (vu 1.1.14) :

$$\rho^2 + \nabla^0\Phi(\Box_g\Phi - m^2\Phi) = 0\,. \tag{1.4.7}$$

Or $\nabla^0\Phi = g^{00}\nabla_0\Phi = -\dot{\Phi}$, ainsi (1.4.7) devient :

$$(-\dot{\Phi})(\Box_g\Phi - m^2\Phi) = -\rho^2\,. \tag{1.4.8}$$

De plus

$$\Box_g\Phi = \nabla^\alpha_\alpha\Phi = \partial_\alpha(\nabla^\alpha\Phi) + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda}\nabla^\lambda\Phi = \partial_0(\nabla^0\Phi) + \Gamma^i_{i0}\nabla^0\Phi = -\partial^2_0\Phi - \Gamma^i_{i0}\partial_0\Phi = -\ddot{\Phi} - 3\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)\dot{\Phi}.$$

D'où

$$\Box_g\Phi = -\ddot{\Phi} - 3\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)\dot{\Phi}\,. \tag{1.4.9}$$

(1.4.8) donne alors vu (1.4.9)

$$\dot{\Phi}\Big[\ddot{\Phi} + 3\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)\dot{\Phi} + m^2\Phi\Big] = -\rho^2 \,. \tag{1.4.10}$$

qui est l'équation qui détermine le champ scalaire Φ.

Remarque 1.5. *Pour ce qui est de l'équation de Boltzmann (1.1.20), notons que l'expression (1.1.16) de $\mathcal{P}^\alpha$ donne vu (1.3.6) et (1.3.12) :*

$$\mathcal{P}^i = -\Gamma^i_{\lambda\mu}p^\lambda p^\mu + eF_\lambda{}^i p^\lambda = -2\Gamma^i_{i0}p^i p^0 + eF_0{}^i p^0 = -2\frac{\dot{a}}{a}p^0 p^i - eF^{0i} \,,$$

ainsi l'équation de Boltzmann (1.1.20) s'écrit vu l'expression (1.1.15) de e et la relation (1.3.33) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - 2\frac{\dot{a}}{a}p^i\frac{\partial f}{\partial p^i} - \left(a^3F^{01}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{q})d\overline{q}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial p^i} = \frac{1}{p^0}Q(f,f)\,. \tag{1.4.11}$$

Considérant les Equations (1.3.9), (1.3.39), (1.3.41), (1.3.42), (1.4.10) et (1.4.11), nous obtenons le système suivant équivalent au système (1.1.2)-(1.1.5) :

$$\begin{cases} 3\Big(\dfrac{\dot{a}}{a}\Big)^2 - \Lambda = 8\pi\left[a^3\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} p^0 f(\overline{p})d\overline{p} + \frac{3}{2}a^2(F^{01})^2 - \theta_{00} + \frac{a^2}{2}(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2)\right] & (1.4.12)\\ -2\ddot{a}a - (\dot{a}) + \Lambda a^2 = 8\pi\left[a^7\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(p^1)^2}{p^0}f(\overline{p})d\overline{p} + \frac{a^4}{2}(F^{01})^2 + \frac{a^2}{2}(\dot{\Phi}^2 - m^2\Phi^2)\right] & (1.4.13)\\ \dot{F}^{01} + 3\dfrac{\dot{a}}{a}F^{01} = 0 & (1.4.14)\\ \dot{\theta}^{00} + 3\dfrac{\dot{a}}{a}\theta^{00} = -\rho^2 & (1.4.15)\\ \dot{\Phi}\left[\ddot{\Phi} + 3\Big(\dfrac{\dot{a}}{a}\Big)\dot{\Phi} + m^2\Phi\right] = -\rho^2 & (1.4.16)\\ \dfrac{\partial f}{\partial t} - 2\dfrac{\dot{a}}{a}p^i\dfrac{\partial f}{\partial p^i} - \left(a^3F^{01}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{q})d\overline{q}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial p^i} = \frac{1}{p^0}Q(f,f) & (1.4.17) \end{cases}$$

1.5 Équation de Boltzmann en variables covariantes

Dans l'espace-temps de Robertson- Walker que nous utilisons dans ce travail, l'équation de Boltzmann s'écrit sous une forme plus simple en utilisant les variables covariantes. Notons qu'à cause de la présence du champ électromagnétique, l'équation de Boltzmann ne se simplifie pas exactement comme dans [12,16] mais nous nous débarrasserons du second terme du membre de gauche de l'équation (1.4.17). L'équation résultante (1.5.7) a une forme à laquelle le corollaire 2.1 s'applique. De façon plus explicite, la fonction de distribution des particules f sera considérée comme fonction de t et de $p_k = g_{k\beta}p^\beta = g_{kk}p^k = a^2p^k, \ k = 1,2,3$. À présent par souci de simplicité, nous introduisons les nouvelles variables u et v comme suit (voir [12]) :

$$\begin{cases} \overline{u} = (u^1, u^2, u^3)\ ; \quad u^k = a^2p^k, \quad u^0 = \sqrt{1 + a^{-2}|\overline{u}|^2} = p^0 \\ \overline{v} = (v^1, v^2, v^3)\ ; \quad v^k = a^2q^k, \quad v^0 = \sqrt{1 + a^{-2}|\overline{v}|^2} = q^0 \end{cases} . \tag{1.5.1}$$

ou $|\overline{v}| = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}$.

Rappelons que les impulsions après le choc s'écrivent vu (1.2.10)

$$\begin{cases} \overline{p}' = \overline{p} + b(\overline{p}, \overline{q}, \omega)\omega \\ \overline{q}' = \overline{q} - b(\overline{p}, \overline{q}, \omega)\omega \quad ; \\ (\omega \in \mathrm{S}^2) \end{cases}$$

avec

$$b(\overline{p}, \overline{q}, \omega) = \frac{2p^0q^0\tilde{e}\omega \cdot (\hat{\overline{q}} - \hat{\overline{p}})}{(\tilde{e})^2 - a^2[\omega \cdot (\overline{p} + \overline{q})]^2} ,$$

où $\tilde{e} = p^0 + q^0$. Avec les nouvelles variables $\overline{u}$, et $\overline{v}$, ces impulsions s'écrivent :

$$\begin{cases} p'^k = p^k + \frac{2p^0q^0\tilde{e}\omega\cdot(\hat{\overline{q}}-\hat{\overline{p}})}{(\tilde{e})^2-a^2[\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q})]^2}w^k = \frac{u^k}{a^2} + \frac{2u^0v^0\tilde{e}a^{-2}\omega\cdot(\hat{\overline{v}}-\hat{\overline{u}})}{(\tilde{e})^2-a^{-2}[\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})]^2}w^k = \frac{1}{a^2}\left(u^k + \frac{2u^0v^0\tilde{e}\omega\cdot(\hat{\overline{v}}-\hat{\overline{u}})}{(\tilde{e})^2-a^{-2}[\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})]^2}w^k\right) \\ \\ q'^k = q^k - \frac{2p^0q^0\tilde{e}\omega\cdot(\hat{\overline{q}}-\hat{\overline{p}})}{(\tilde{e})^2-a^2[\omega\cdot(\overline{p}+\overline{q})]^2}w^k = \frac{v^k}{a^2} - \frac{2u^0v^0\tilde{e}a^{-2}\omega\cdot(\hat{\overline{v}}-\hat{\overline{u}})}{(\tilde{e})^2-a^{-2}[\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})]^2}w^k = \frac{1}{a^2}\left(v^k - \frac{2u^0v^0\tilde{e}\omega\cdot(\hat{\overline{v}}-\hat{\overline{u}})}{(\tilde{e})^2-a^{-2}[\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})]^2}w^k\right) \end{cases}$$

Si nous posons :

$$u'^k = a^2p'^k, \quad v'^k = a^2q'^k, \quad u'^0 = p'^0, \quad v'^0 = q'^0 , \tag{1.5.2}$$

alors nous avons :

$$\begin{cases} \overline{u}' = \overline{u} + \tilde{b}(\overline{u}, \overline{v}, \omega)\omega & (1.5.3) \\ \overline{v}' = \overline{v} - \tilde{b}(\overline{u}, \overline{v}, \omega)\omega & (1.5.4) \end{cases}$$

avec :

$$\tilde{b}(\overline{u}, \overline{v}, \omega) = \frac{2u^0v^0\tilde{e}\omega \cdot (\hat{\overline{v}} - \hat{\overline{u}})}{(\tilde{e})^2 - a^{-2}[\omega \cdot (\overline{u} + \overline{v})]^2} . \tag{1.5.5}$$

Nous allons maintenant écrire l'équation de Boltzmann en utilisant les variables s, u et v. Considérons le changement de variable :

$$(t, \overline{p}, \overline{q}) \longrightarrow (s, \overline{u}, \overline{v}) \quad avec \begin{cases} s = t \\ \overline{u} = a^2\overline{p} \\ \overline{v} = a^2\overline{q} \end{cases}$$

et posons

$$\tilde{f}(s,\overline{u}) = f(t,\overline{p})$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} + \frac{\partial u^i}{\partial t}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} + 2\dot{a}ap^i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}$$
$$\frac{\partial f}{\partial p^i} = \frac{\partial s}{\partial p^i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} + \frac{\partial u^j}{\partial p^i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j} = a^2\delta_i^j\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j} = a^2\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}$$
$$d\overline{q} = a^{-6}d\overline{v}$$

Ainsi on a vu (1.4.11)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^0}Q(f,f)(t,\overline{p}) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,\overline{p}) - 2\frac{\dot{a}}{a}p^i\frac{\partial f}{\partial p^i}(t,\overline{p}) - \left(a^3F^{01}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{q})d\overline{q}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial p^i}(t,\overline{p})\\
&= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(s,\overline{u}) + 2\dot{a}ap^i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}(s,\overline{u}) - 2\dot{a}ap^i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}(s,\overline{u}) - \left(\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3}\tilde{f}(s,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}(s,\overline{u})\\
&= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t,\overline{u}) - \left(\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3}\tilde{f}(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}(t,\overline{u}) \quad car \quad s=t
\end{aligned}$$

avec, vu (1.1.22) et (1.1.23)

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}^+ - \tilde{Q}^- \,.$$

où

$$\left\{\begin{aligned}
&\tilde{Q}^+(f,g)(t,\overline{u}) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{a^{-3}(t)}{v^0}d\overline{v}\int_{S^2}\tilde{f}(t,\overline{u}')\tilde{g}(t,\overline{v}')\tilde{B}\big(a(t),\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}',\omega\big)d\omega\\
&\tilde{Q}^-(f,g)(t,\overline{u}) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{a^{-3}(t)}{v^0}d\overline{v}\int_{S^2}\tilde{f}(t,\overline{u})\tilde{g}(t,\overline{v})\tilde{B}\big(a(t),\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}',\omega\big)d\omega
\end{aligned}\right. \tag{1.5.6}$$

et ou le noyau $\tilde{B}$ est défini de la même manière que B, en terme des nouvelles variables $\overline{u},\overline{v},\overline{u}'$ et $\overline{v}'$.

Pour éviter les surcharges d'écriture, nous convenons de noter encore f en lieu et place de $\tilde{f}$, Q en lieu et place de $\tilde{Q}$, B en lieu et place de $\tilde{B}$ et b en lieu et place de $\tilde{b}$. Ainsi l'équation de Boltzmann (1.4.11) est équivalente à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0}Q(f,f)\,. \tag{1.5.7}$$

Remarque 1.6. *L'avantage de l'équation* (1.5.7) *est que le coefficient de* $\frac{\partial f}{\partial u^i}$ *du deuxième terme de gauche ne dépend pas de* u^i*, contrairement à l'Equation* (1.1.20) *ou le coefficient de* $\frac{\partial f}{\partial p^i}$ *dépend de* p^i*. Ce qui justement nous permet de pouvoir appliquer le Corollaire 2.1 page 42.*

En utilisant le changement de variables (1.5.1), le système (1.4.12)-(1.4.17) s'écrit alors :

$$(S)\quad \begin{cases} 3\Big(\dfrac{\dot a}{a}\Big)^2 - \Lambda = 8\pi a^{-3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} v^0 f(t,\overline{v})d\overline{v} + 12\pi a^2 (F^{01})^2 - 8\pi\theta_{00} + 4\pi(\dot\Phi^2 + m^2\Phi^2) & (1.5.8)\\ -2\dfrac{\ddot a}{a} - \Big(\dfrac{\dot a}{a}\Big)^2 + \Lambda = 8\pi a^{-5}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{(v^1)^2}{v^0} f(t,\overline{v})d\overline{v} + 4\pi a^2 (F^{01})^2 + 4\pi(\dot\Phi^2 - m^2\Phi^2) & (1.5.9)\\ \dot F^{01} + 3\dfrac{\dot a}{a}F^{01} = 0 & (1.5.10)\\ \dot\theta^{00} + 3\dfrac{\dot a}{a}\theta^{00} = -\rho^2. & (1.5.11)\\ \dot\Phi\Big[\ddot\Phi + 3\Big(\dfrac{\dot a}{a}\Big)\dot\Phi + m^2\Phi\Big] = -\rho^2 & (1.5.12)\\ \dfrac{\partial f}{\partial t} - \left(\dfrac{F^{01}}{a}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial f}{\partial u^i} = \dfrac{1}{u^0}Q(f,f) & (1.5.13) \end{cases}$$

On rappelle que ρ est une constante positive non nulle.

NB : Dans la suite, nous ferons référence à ce système comme étant le système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann-champ scalaire massif.

Remarque 1.7. *Dans toute la suite, nous faisons les hypothèses ci-dessous sur le noyau de collision B. Ce sont des hypothèses clés de la preuve des inégalités de substitution de type Moser faites sur l'opérateur de collision Q (Inégalités (2.3.15) et (2.3.16)) et qui sont essentielles dans la méthode des estimations d'énergie que nous utiliserons.*

$$\begin{cases} \partial^{\beta}_{\overline{u}} B \quad \textit{est Lipschitzienne par rapport à la variable } a \textit{ pour } \ 0 \le |\beta| \le 3 \\ \\ B(a,\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}') = B(a,\overline{v},\overline{u},\overline{u}',\overline{v}') \\ \\ \Big\| (1+|\overline{u}|)^{\ell}\partial^{\beta}_{\overline{u}} B \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times S^2)} \in L^\infty(\mathbb{R}^3),\ 0\le|\beta|\le 3,\ 0\le \ell \le 17 \\ \\ (1+|\overline{u}|)^{\ell}\partial^{\beta}_{\overline{u}} B \in L^\infty(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times S^2),\ 1\le|\beta|\le 3,\ 0\le\ell\le 8 \end{cases} . \qquad (1.5.14)$$

Notons qu'un exemple simple de fonction satisfaisant ces hypothèses est donnée par :

$$B(a,\bar u,\bar v,\bar u',\bar v') = Ae^{-a^2-|\bar u|^2-|\bar v|^2-|\bar v'|^2-|\bar v'|^2}, A>0$$

Chapitre Deux

SOLUTIONS DE L'EQUATION DE BOLTZMANN

Nous supposons dans ce chapitre que le facteur d'expansion cosmologique a est connu et nous nous proposons de résoudre l'équation de Boltzmann dans ce cas. Nous rappelons que cette équation s'écrit vu (1.5.7) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0}Q(f,f)\,.$$

Nous recherchons à priori, une fonction $f = f(t,\bar{p})$ qui est au moins de classe C^1, donc en particulier telle que $f(t,\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Pour cela, nous nous proposons de rechercher f telle que $f(t,\cdot) \in H^m$ pour $m \geq \frac{5}{2}$ (nous verrons pourquoi), comme limite d'une suite d'itérées $(f^n)_{n\geq 0}$.

Dans le paragraphe 1, nous définissons le cadre fonctionnel que nous utilisons. Dans le paragraphe 2, nous établissons une inégalité d'énergie pour une classe d'E.D.P linéaires du premier ordre. Dans le paragraphe 3, nous établissons des estimations de type Moser sur l'opérateur de collision Q dans un espace approprié ou il est question de controler la norme de $Q(f,g)$ par le produit des normes de f et g. Enfin dans le paragraphe 4 nous établissons un théorème d'existence et d'unicité de la solution (locale en temps) de l'equation de Boltzmann.

2.1 Cadre fonctionnel

Nous définissons á présent l'espace fonctionnel dans lequel nous recherchons la solution de l'équation de Boltzmann.

Définition 2.1. *Soient* $m \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{R}^+$, $T > 0$.

1. *Espaces $L_1^1(\mathbb{R}^n)$ et $L_d^2(\mathbb{R}^n)$.*

   - $L_1^1(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable* / $\overline{p} \longmapsto (1+|\overline{p}|)f(\overline{p}) \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$

     $L_1^1(\mathbb{R}^n)$ *est muni de la norme :*

     $$\|f\|_{L_1^1(\mathbb{R}^n)} = \|(1+|\overline{p}|)f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{p}|)|f(\overline{p})|d\overline{p}$$

   - $L_d^2(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable* / $\overline{p} \longmapsto (1+|\overline{p}|)^d f(\overline{p}) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$

     $L_d^2(\mathbb{R}^n)$ *est muni de la norme :*

     $$\|f\|_{L_d^2(\mathbb{R}^n)} = \|(1+|\overline{p}|)^d f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\overline{p}|)^{2d}|f(\overline{p})|^2 d\overline{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. *Espaces $H^m(\mathbb{R}^n)$, $H_d^m(\mathbb{R}^n)$ et $H_d^m(0,T,\mathbb{R}^n)$.*

   - $H^m(\mathbb{R}^n)$ *désigne l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ mesurables et admettant des dérivées partielles au sens des distributions d'ordre $\leq m$, qui sont des fonctions de carrés intégrables sur $\mathbb{R}^n$.*

     $$f \in H^m(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow D^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ |\beta| \leq m$$

     $H^m(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Hilbert pour la norme*

     $$\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\beta|\leq m}\|D^\beta f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

   - $H_d^m(\mathbb{R}^n) = \left\{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} /\ (1+|\overline{p}|)^{d+|\beta|}D^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ |\beta| \leq m\right\}$.

     $H_d^m(\mathbb{R}^n)$ *est muni de la norme*

     $$\|f\|_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\beta|\leq m}\left\|(1+|\overline{p}|)^{d+|\beta|}D^\beta f\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

     muni de cette norme, $H_d^m(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert séparable.

     Pour $r > 0$ fixé, on pose :

     $$H_{d,r}^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in\ H_d^m(\mathbb{R}^n),\ \ \|f\|_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} \leq r\}$$

   - $H_d^m(0,T,\mathbb{R}^n) = \{f : [0,T]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue* / $f(t,\cdot) \in\ H_d^m(\mathbb{R}^n)\}$.

     Muni de la norme

     $$\|f\|_{H_d^m(0,T,\mathbb{R}^n)} = \sup_{t\in[0,T]}\left(\sum_{|\beta|\leq m}\left\|(1+|\overline{p}|)^{d+|\beta|}D^\beta f(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

     $H_d^m(0,T,\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Banach.*

Remarque 2.1.

1. *$H_d^m(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $H^m(\mathbb{R}^n)$.*
2. *$H_d^0(\mathbb{R}^n) = L_d^2(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 2.2. *Comme annoncé, nous recherchons a priori une fonction $f = f(t, \overline{p})$ qui est au moins de classe $\mathcal{C}^1$, donc en particulier telle que $f(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Il faut donc déterminer m tel que :*

$$H^m(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3).$$

Or d'après le théorème d'injection de Sobolev, on a :

$$H^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^n) \ \ si \ \ m > k + \frac{n}{2}.$$

où

$$\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n), \ f \ bornée \right\}.$$

Comme dans notre cadre de travail $n = 3, \ k = 1$, il faut donc choisir m tel que

$$m > 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Le plus petit entier naturel m tel que $m > \frac{5}{2}$ est naturellement $m = 3$. On a donc

$$H_d^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \ H^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^3).$$

Par ailleurs si $d > \frac{5}{2}$, alors

$$H_d^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L_d^2(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L_1^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^3).$$

En effet : si $f \in L_d^2(\mathbb{R}^3)$, alors on a :

$$\|f\|_{L_1^1(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\overline{p}|)|f| d\overline{p} = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\overline{p}|)^{1-d+d} |f| d\overline{p} = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\overline{p}|)^{1-d} (1 + |\overline{p}|)^d |f| d\overline{p}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\|f\|_{L_2^1(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\overline{p}|)^{2-2d} d\overline{p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\overline{p}|)^{2d} |f|^2 d\overline{p} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\overline{p}|)^{2-2d} d\overline{p} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_d^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\overline{p}|)^{2-2d} d\overline{p}$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + r)^{2-2d} r^2 dr \sim \int_0^{+\infty} r^{4-2d} dr$ qui converge si dans la primitive qui contient r^{5-2d} on a $5 - 2d < 0$, c'est-à-dire $d > \frac{5}{2}$.
On obtient l'inégalité $\|f\|_{L_2^1(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L_d^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}$, ce qui justifie les injections continues

$$H_d^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L_d^2(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L_1^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^3).$$

2.2 Inégalité d'énergie pour une classe d'EDP du premier ordre

Nous établissons ici une inégalité d'énergie dans l'espace $H_d^3(\mathbb{R}^3)$ définie ci-dessus pour une classe d'EDP dont notre équation de Boltzmann (1.5.7) fait partie. Cette inégalité est d'une importance capitale en ce sens qu'elle nous permet d'obtenir certaines propriétés de la suite d'itérées $(f_n)_{n\geq 0}$ que nous construirons pour rechercher la solution de l'équation de Boltzmann ainsi que des estimations dans l'espace $H_d^3(\mathbb{R}^3)$ de la solution f de l'équation de Boltzmann.

Remarque 2.3. *Nous voudrions souligner le fait que les notations dans cette ce paragraphe sont indépendantes de celles des autres pararaphes du document. Par exemple, la lettre a est utilisée pour une collection de fonctions à valeurs réelles et n'a rien à voir avec le facteur d'expansion cosmologique des autres sections, f ici est le terme source de l'E.D.P que nous considérons et ne doit pas être confondue avec la fonction de distribution. Nous espérons que ces précisions de notations éviterons la confusion dans la lecture de ce document.*

On considère l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} + b(t,x)u = f(t,x) \;\; dans \;\; \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \tag{2.2.1}$$

avec la donnée initiale

$$u(t_0,x) = u_{t_0}(x) \;\; dans \;\; \mathbb{R}^n \; ; \tag{2.2.2}$$

où b, f sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et $a = (a_1, \cdots, a_n)$ est une famille de fonctions vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{(t,x)} |a_i(t,x)| =: |a| \leq \frac{1}{\kappa} \tag{2.2.3}$$

avec κ une constante strictement positive.

NB : $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ et $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

Proposition 2.1. *Soient $a = (a_1, \cdots, a_n)$ une famille de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant* (2.2.3) *dont les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_i sont bornées, b une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et u une fonction de classe C^1 solution du problème de Cauchy* $(2.2.1)-(2.2.2)$ *sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et soit $t_0 \geq 0$. Alors pour tout $T > 0$, si $f \in C\big([t_0,T); L^2(\mathbb{R}^n)\big)$ et $u_{t_0} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha(t-t_0)}u^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u_{t_0}^2 dx + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s-t_0)}\|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds\ , \quad t \in [t_0, T); \tag{2.2.4}$$

α étant un réel strictement positif.

Preuve: Soit $\bar{t} > 0$. Définissons $D = D_{\kappa,t,\bar{t}}$, $t_0 \leq t < T < \bar{t}$ par :

$$D = \{(x, s) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \kappa|x| < \bar{t} - s,\ t_0 < s < t\} \tag{2.2.5}$$

Désignons par $\Sigma_{t,\bar{t}}$, $\Sigma_{t_0,\bar{t}}$ et $S_{s,\bar{t}}$ respectivement le bord supérieur, le bord inférieur et le coté de D ; c'ést-à-dire :

$$\begin{cases} \Sigma_{t,\bar{t}} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \kappa|x| < \bar{t} - t\} \\ \Sigma_{t_0,\bar{t}} = \{(t_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \kappa|x| < \bar{t} - t_0\} \\ S_{s,\bar{t}} = \{(s, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \kappa|x| = \bar{t} - s,\ t_0 < s < t\} \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Pour $\alpha > 0$, multiplions (2.2.1) par $2e^{-\alpha(t-t_0)}u$, on a :

$$2e^{-\alpha(t-t_0)}uu_t + \sum_{i=1}^{n} 2e^{-\alpha(t-t_0)}a_i uu_{x_i} + 2e^{-\alpha(t-t_0)}bu^2 = 2e^{-\alpha(t-t_0)}uf \tag{2.2.7}$$

En remarquant que

$$\left(e^{-\alpha(t-t_0)}u^2\right)_t = -\alpha e^{-\alpha(t-t_0)}u^2 + 2e^{-\alpha(t-t_0)}uu_t \ \text{ et } \ \left(e^{-\alpha(t-t_0)}a_i u^2\right)_{x_i} = e^{-\alpha(t-t_0)}a_{i,x_i}u^2 + 2e^{-\alpha(t-t_0)}a_i uu_{x_i}\ ;$$

(2.2.7) donne :

$$\left(e^{-\alpha(t-t_0)}u^2\right)_t + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{-\alpha(t-t_0)}a_i u^2\right)_{x_i} + e^{-\alpha(t-t_0)}\Big(\alpha + 2b - \sum_{i=1}^{n} a_{i,x_i}\Big)u^2 = 2e^{-\alpha(t-t_0)}uf\,. \tag{2.2.8}$$

Nous allons intégrer sur D les différents termes de (2.2.8).

- $\displaystyle\int_D \Big[\left(e^{-\alpha(t-t_0)}u^2\right)_t + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{-\alpha(t-t_0)}a_i u^2\right)_{x_i}\Big]dxdt = \int_D \sum_{\mu=0}^{n}\left(e^{-\alpha(t-t_0)}a_\mu u^2\right)_{x_\mu}dxdt\,,$
  avec $a_0 = 1$ et $x_0 = t\,.$

  En posant $X_\mu = e^{-\alpha(t-t_0)}a_\mu u^2$ et $X = (X_\mu)_{0\leq\mu\leq n}$, on a $div(X) = \sum_{\mu=0}^{n}(e^{-\alpha(t-t_0)}a_\mu u^2)_{x_\mu}$, donc

$$\begin{aligned}\int_D \Big[\left(e^{-\alpha(t-t_0)}u^2\right)_t + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{-\alpha(t-t_0)}a_i u^2\right)_{x_i}\Big]dxdt \\ &= \int_D div(X)dxdt \\ &= \int_{\partial D} X\cdot\eta dS \\ &= \int_{\Sigma_{t_0,\bar{t}}} X\cdot\eta dS + \int_{\Sigma_{t,\bar{t}}} X\cdot\eta dS + \int_{S_{t,\bar{t}}} X\cdot\eta dS\,.\end{aligned}$$

  Or

- $\displaystyle\int_{S_{t,\bar t}} X\cdot\eta dS = \int_{S_{t,\bar t}} e^{-\alpha(t-t_0)}\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i a_i + \eta_t\Big)u^2 dS$
  où $\eta=(\eta_t,\eta_1,\cdots,\eta_n)=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\Big(1,\ \kappa\frac{x_1}{|x|},\cdots,\kappa\frac{x_n}{|x|}\Big)\ \ sur\ \ S_{t,\bar t}$;
- $\displaystyle\int_{\Sigma_{t,\bar t}} X\cdot\eta dS = \int_{\Sigma_{t,\bar t}} e^{-\alpha(t-t_0)}u^2 dx\ \ car\ \ \eta=(1,0,\cdots,0)\ \ sur\ \ \Sigma_{t,\bar t}\,.$
- $\displaystyle\int_{\Sigma_{t_0,\bar t}} X\cdot\eta dS = -\int_{\Sigma_{t_0,\bar t}} u_{t_0}^2 dx\ \ avec\ \ \eta=(-1,0,\cdots,0)\ \ sur\ \ \Sigma_{t_0,\bar t}\,.$

Remarquons que (2.2.3) entraîne que $\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i a_i+\eta_t\geq 0$, donc :

$$\int_D\Big[\big(e^{-\alpha(t-t_0)}u^2\big)_t+\sum_{i=1}^{n}\big(e^{-\alpha(t-t_0)}a_iu^2\big)_{x_i}\Big]dxdt \geq \int_{\Sigma_{t,\bar t}} e^{-\alpha(t-t_0)}u^2dx - \int_{\Sigma_{t_0,\bar t}} u_{t_0}^2dx\,. \tag{2.2.9}$$

▶ Par ailleurs,

$$\int_D 2e^{-\alpha(t-t_0)}uf\,dxdt \leq \int_D e^{-\alpha(t-t_0)}u^2dxdt + \int_D e^{-\alpha(t-t_0)}f^2dxdt\,. \tag{2.2.10}$$

Ainsi, en choisissant $\alpha>0$ tel que

$$\alpha+2b-\sum_{i=1}^{n}a_{i,x_i}\geq 1\ \ dans\ \ D \tag{2.2.11}$$

l'intégration de (2.2.8) sur D donne vu (2.2.9) $-$ (2.2.11),

$$\int_{\Sigma_{t,\bar t}} e^{-\alpha(t-t_0)}u^2dx \leq \int_{\Sigma_{t_0,\bar t}} u_{t_0}^2dx + \int_{t_0}^{t}\Big(\int_{\Sigma_{s,\bar t}} e^{-\alpha(s-t_0)}f^2(s,x)dx\Big)ds\,. \tag{2.2.12}$$

En faisant tendre $\bar t$ vers $+\infty$, $\Sigma_{t,\bar t}$, $\Sigma_{s,\bar t}$ et $\Sigma_{t_0,\bar t}$ tendent respectivement vers $\mathbb{R}^n\times\{t\}$, $\mathbb{R}^n\times\{s\}$ et $\mathbb{R}^n\times\{t_0\}$. (2.2.12) donne alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha(t-t_0)}u^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u_{t_0}^2dx + \int_{t_0}^{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha(s-t_0)}f^2(s,x)dx\Big)ds\,.$$

D'où la relation (2.2.4). □

Remarque 2.4. *On déduit de ce qui précède que :*

$$e^{-\alpha(t-t_0)}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s-t_0)}\|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds\,; \tag{2.2.13}$$

et plus précisement que :

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\Big(\|u_{t_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + T|||f|||\Big)\,; \tag{2.2.14}$$

avec

$$|||f||| = \sup_{t_0\leq t<T}\|f(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Proposition 2.2. *Soient $a = (a_1, \cdots, a_n)$, b une famille de fonctions de classe C^m sur $\mathbb{R}^{n+1}$ bornées ainsi que toutes ses dérivées (spatiales) jusqu'a l'ordre m sont bornées et soit u une fonction de classe C^1 solution du problème de Cauchy $(2.2.1) - (2.2.2)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors pour tout $T > 0$, si $f \in C\big([t_0, T); H^m(\mathbb{R}^n)\big)$ et $u_{t_0} \in H^m(\mathbb{R}^n)$, alors $u(t, \cdot) \in H^m(\mathbb{R}^n)$ et :*

$$e^{-\delta_0(t-t_0)}\|u(t,\cdot)\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} \le \|u_{t_0}\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} + C_0 \int_{t_0}^t e^{-\delta_0(s-t_0)}\big\|f(s,\cdot)\big\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} ds\ ; \qquad (2.2.15)$$

où δ_0 et C_0 sont des constantes positives.

Preuve:

Notons que (2.2.15) s'obtient directement de (2.2.4) pour $m = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \le m$. Considèrons le commutateur $[L,\, \partial^\alpha]$ défini par $[L,\, \partial^\alpha]u = L\partial^\alpha u - \partial^\alpha L u$ où L est l'opérateur différentiel linéaire associé à (2.2.1). (Il est à noter que $\partial^\alpha \equiv \partial^\alpha_x$)

On a vu (2.2.1),

$$L\partial^\alpha u = \partial^\alpha f + [L,\, \partial^\alpha]u\,. \qquad (2.2.16)$$

En appliquant la Proposition 2.1 à l'équation (2.2.16), il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} e^{-\delta(t-t_0)}\|(\partial^\alpha u)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le \|(\partial^\alpha u)(t_0,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{t_0}^t e^{-\delta(s-t_0)}\big\|(\partial^\alpha f + [L,\, \partial^\alpha]u)(s,\cdot)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\le \|(\partial^\alpha u)(t_0,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t_0}^t e^{-\delta(s-t_0)}\big\|\partial^\alpha f(s,\cdot)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad (2.2.17) \\ &\quad + 2\int_{t_0}^t e^{-\delta(s-t_0)}\big\|[L,\, \partial^\alpha]u(s,\cdot)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds\ ; \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} [L,\, \partial^\alpha]u &= L\partial^\alpha u - \partial^\alpha L u \\ &= (\partial^\alpha u)_t + \sum_{i=1}^n a_i(\partial^\alpha u)_{x_i} + b\partial^\alpha u - \partial^\alpha u_t - \partial^\alpha\left(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\right) - \partial^\alpha(bu) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(\partial^\alpha u)_{x_i} + b\partial^\alpha u - \sum_{i=1}^n \sum_{0\le\beta\le\alpha} \mathtt{C}^\beta_\alpha \partial^\beta a_i \partial^{\alpha-\beta} u_{x_i} - \sum_{0\le\beta\le\alpha} \mathtt{C}^\beta_\alpha \partial^\beta b \partial^{\alpha-\beta} u \end{aligned}$$

Donc

$$[L,\, \partial^\alpha]u = -\sum_{i=1}^n \sum_{0<\beta\le\alpha} \mathtt{C}^\beta_\alpha \partial^\beta a_i \partial^{\alpha-\beta} u_{x_i} - \sum_{0<\beta\le\alpha} \mathtt{C}^\beta_\alpha \partial^\beta b \partial^{\alpha-\beta} u. \qquad (2.2.18)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \|[L,\, \partial^\alpha]u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le \Big\|\sum_{i=1}^n \sum_{0<\beta\le\alpha} \mathtt{C}^\beta_\alpha \partial^\beta a_i \partial^{\alpha-\beta} u_{x_i}\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \Big\|\sum_{0<\beta\le\alpha} \mathtt{C}^\beta_\alpha \partial^\beta b \partial^{\alpha-\beta} u\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C\sum_{|\alpha|\le m} \Big\|\partial^\alpha u\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C\sum_{|\alpha|\le m-1} \Big\|\partial^\alpha u\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= C\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned}$$

(2.2.17) donne alors :

$$e^{-\delta(t-t_0)}\|(\partial^\alpha u)(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|(\partial^\alpha u)(t_0,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t_0}^t e^{-\delta(s-t_0)}\big\|(\partial^\alpha f(s,\cdot)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds$$
$$+2C\int_{t_0}^t e^{-\delta(s-t_0)}\|u(s,\cdot)\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}ds\,.$$

En sommant cette dernière inégalité sur $|\alpha| \leq m$, on a :

$$e^{-\delta(t-t_0)}\|u(t,\cdot)\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(t_0,\cdot)\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t_0}^t e^{-\delta(s-t_0)}\big\|f(s,\cdot)\big\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}ds$$
$$+2C\int_{t_0}^t e^{-\delta(s-t_0)}\|u(s,\cdot)\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}ds\,.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$e^{-\delta(t-t_0)}\|u(t,\cdot)\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq \Big(\|u(t_0,\cdot)\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t_0}^t e^{-\delta(s-t_0)}\big\|f(s,\cdot)\big\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}ds\Big)e^{2C(t-t_0)}\,.$$

Notons que δ et C sont deux constantes positives qui dependend uniquement des bornes de la norme C^m de a et b. Maintenant, en posant $\delta_0 = \delta+2C$ et $C_0 = 2e^{2C(T-t_0)}$, nous obtenons

$$e^{-\delta_0(t-t_0)}\|u(t,\cdot)\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_{t_0}\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} + C_0\int_{t_0}^t e^{-\delta_0(s-t_0)}\|f(s,\cdot)\big\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}ds\,;$$

qui est l'inégalité annoncée. □

Corollaire 2.1. *Soient $a = (a_1, \cdots, a_n)$, b une famille de fonctions de classe C^m sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $(1+|x|)^{|\alpha|}\partial^\alpha a_i$ et $(1+|x|)^{|\alpha|}\partial^\alpha b$ soient bornées pour $|\alpha| \leq m$ et soit u une fonction de classe C^1 solution du problème de Cauchy $(2.2.1)-(2.2.2)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors pour tout $d > 0$ et $T > 0$, si $f \in C\big([t_0,T); H^m_d(\mathbb{R}^n)\big)$ et $u_{t_0} \in H^m_d(\mathbb{R}^n)$, alors $\forall t \in [t_0,T]$, $u(t,\cdot) \in H^m_d(\mathbb{R}^n)$ et on a :*

$$e^{-\delta_1(t-t_0)}\|u(t,\cdot)\|^2_{H^m_d(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_{t_0}\|^2_{H^m_d(\mathbb{R}^n)} + C_1\int_{t_0}^t e^{-\delta_1(s-t_0)}\big\|f(s,\cdot)\big\|^2_{H^m_d(\mathbb{R}^n)}ds\,; \tag{2.2.19}$$

δ_1 et C_1 étant des constantes positives qui dépendent de T.

Preuve: Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| \leq m$. En appliquant l'opérateur ∂^β a l'équation (2.2.1), on a :

$$\partial^\beta u_t + \sum_{i=1}^n \partial^\beta(a_i u_{x_i}) + \partial^\beta(bu) = \partial^\beta f$$

qui s'écrit encore :

$$\partial^\beta u_t + \sum_{i=1}^n \sum_{0\leq\alpha\leq\beta} \mathtt{C}^\alpha_\beta \partial^\alpha a_i \partial^{\beta-\alpha}u_{x_i} + \sum_{0\leq\alpha\leq\beta} \mathtt{C}^\alpha_\beta \partial^\alpha b \partial^{\beta-\alpha}u = \partial^\beta f\,. \tag{2.2.20}$$

En multipliant (2.2.20) par $(1+|x|)^{d+|\beta|}$, on a :

$$\begin{aligned}(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta f &= \left((1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u\right)_t + \sum_{i=1}^n a_i(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u_{x_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{1\le\alpha\le\beta} \mathsf{C}_\beta^\alpha (1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\alpha a_i \partial^{\beta-\alpha} u_{x_i} \\ &\quad + b(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u + \sum_{i=1}^n \sum_{1\le\alpha\le\beta} \mathsf{C}_\beta^\alpha (1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\alpha b \partial^{\beta-\alpha} u\,.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}L[(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u] &= \left((1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u\right)_t + \sum_{i=1}^n a_i\left((1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u\right)_{x_i} + b(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u \\ &= \left((1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u\right)_t + \sum_{i=1}^n a_i(d+|\beta|)\frac{x_i}{|x|(1+|x|)}(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u \\ &\quad + \sum_{i=1}^n a_i(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u_{x_i} + (1+|x|)^{d+|\beta|} b\partial^\beta u\,,\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}L\big[(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u\big] &= (1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta f + \sum_{i=1}^n (d+|\beta|)\frac{a_i x_i}{|x|(1+|x|)}(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u \qquad (2.2.21) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{1\le\alpha\le\beta} \mathsf{C}_\beta^\alpha (1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\alpha a_i \partial^{\beta-\alpha} u_{x_i} - \sum_{1\le\alpha\le\beta} \mathsf{C}_\beta^\alpha (1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta b \partial^{\beta-\alpha} u\,.\end{aligned}$$

Les fonctions $(1+|x|)^{|\alpha|}\partial^\alpha a_i$ et $(1+|x|)^{|\alpha|}\partial^\alpha b$ étant bornées pour $|\alpha| \le m$ et $\frac{|x_i|}{|x|(1+|x|)} \le 1$, on a :

$$\begin{aligned}&\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{1\le\alpha\le\beta} \mathsf{C}_\beta^\alpha (1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\alpha a_i \partial^{\beta-\alpha} u_{x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\qquad \le \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{1<\alpha\le\beta} \mathsf{C}_\beta^\alpha \frac{(1+|x|)^{|\alpha|}\partial^\alpha a_i}{(1+|x|)}(1+|x|)^{d+|\beta-\alpha|+1}\partial^{\beta-\alpha} u_{x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\qquad \le C\sum_{|\beta|\le m} \|(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\qquad \le C\|u\|_{H_d^m(\mathbb{R}^n)}\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{1\le\alpha\le\beta} \mathsf{C}_\beta^\alpha (1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta b \partial^{\beta-\alpha} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le \left\| \sum_{1<\alpha\le\beta} \mathsf{C}_\beta^\alpha (1+|x|)^{|\alpha|}\partial^\alpha b (1+|x|)^{d+|\beta-\alpha|}\partial^{\beta-\alpha} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C\sum_{|\beta|\le m-1} \|(1+|x|)^{d+|\beta|}\partial^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C\|u\|_{H_d^m(\mathbb{R}^n)}\,;\end{aligned}$$

et

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (d+|\beta|) \frac{x_i a_i}{|x|(1+|x|)} (1+|x|)^{d+|\beta|} \partial^\beta u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|(1+|x|)^{d+|\beta|} \partial^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} .$$

En appliquant une fois de plus la Proposition 2.1 à l'équation (2.2.21), il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} & e^{-\delta(t-t_0)} \|(1+|x|)^{d+|\beta|} \partial^\beta u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|(1+|x|)^{d+|\beta|} \partial^\beta u_{t_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)} \|f(s,\cdot)\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} ds + 2C \int_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)} \|u(s,\cdot)\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} ds . \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

En sommant (2.2.22) sur $|\beta| \leq m$, on a :

$$\begin{aligned} e^{-\delta(t-t_0)} \|u(t,\cdot)\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} & \leq \|u_{t_0}\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)} \|f(s,\cdot)\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} ds \\ & \quad + 2C \int_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)} \|u(s,\cdot)\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} ds . \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$e^{-\delta(t-t_0)} \|u(t,\cdot)\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} \leq \Big(\|u_{t_0}\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)} \|f(s,\cdot)\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} ds \Big) e^{2C(t-t_0)} .$$

En posant $\delta_1 = \delta + 2C$ et $C_1 = 2e^{2C(T-t_0)}$, nous obtenons :

$$e^{-\delta_1(t-t_0)} \|u(t,\cdot)\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_{t_0}\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} + C_1 \int_{t_0}^{t} e^{-\delta_1(s-t_0)} \|f(s,\cdot)\|^2_{H_d^m(\mathbb{R}^n)} ds .$$

□

2.3 Inégalités fondamentales

Nous allons établir des inégalités de type Moser, sur l'opérateur de collision. De façon précise, il est question pour nous de controler la norme $H_d^3(\mathbb{R}^3)$ de $Q(f,g)(t,\cdot)$ par le produit des normes $H_d^3(\mathbb{R}^3)$ de $f(t,\cdot)$ et $g(t,\cdot)$. Pour le faire, nous utilisons comme mentionné plus haut, les hypothèses (1.5.14). De plus nous supposons que :

$$a(0) > 1 \quad \text{et} \quad a'(t) > 0. \tag{2.3.1}$$

Nous commençons par donner quelques estimations de b (voir(1.5.5)).

Lemme 2.1. *Posons*

$$N = 2u^0 v^0 \tilde{e}\omega \cdot (\hat{\overline{v}} - \hat{\overline{u}}) \ \ et \ \ D = (\tilde{e})^2 - a^{-2}[\omega \cdot (\overline{u} + \overline{v})]^2 \,;$$

alors nous avons :

1.

$$|N| \leq 4au^0 v^0 (u^0 + v^0) \ \ et \ \ D \geq \max\left\{2; \ \frac{u^0}{v^0}; \ \frac{v^0}{u^0}; \ \frac{u^0 + v^0}{v^0}\right\}.$$

2. $\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{cases} |\partial_{u^i} b| \leq 16u^0 (v^0)^3 \\ |\partial^2_{u^i u^j} b| \leq \frac{64}{a} u^0 (v^0)^4 \\ |\partial^3_{u^i u^j u^k} b| \leq \frac{1390}{a^2} u^0 (v^0)^5 \end{cases}$$

Preuve:

1.

$$\begin{aligned} |N| &= |2u^0 v^0 \tilde{e}\omega \cdot (\hat{\overline{v}} - \hat{\overline{u}})| \\ &\leq 2(u^0 + v^0)(u^0|\overline{v}| + v^0|\overline{u}|) \\ &\leq 2(u^0 + v^0)(2au^0 v^0) \ \ \text{car} \ \ |\overline{u}| \leq au^0 \,; \end{aligned}$$

d'où $|N| \leq 4au^0 v^0 (u^0 + v^0)$.

$$\begin{aligned} D &= (u^0 + v^0)^2 - a^{-2}[\omega \cdot (\overline{u} + \overline{v})]^2 \\ &\geq (u^0 + v^0)^2 - a^{-2}|\overline{u} + \overline{v})|^2 \\ &\geq (u^0)^2 + (v^0)^2 + 2u^0 v^0 - a^{-2}(|\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 + 2\overline{u} \cdot \overline{v}) \\ &\geq 2 + 2\sqrt{1 + a^{-2}|\overline{u}|^2}\sqrt{1 + a^{-2}|\overline{v}|^2} - 2a^{-2}|\overline{u}||\overline{v}| \\ &\geq 2 + 2\frac{(1 + a^{-2}|\overline{u}|^2)(1 + a^{-2}|\overline{v}|^2) - a^{-4}|\overline{u}|^2|\overline{v}|^2}{\sqrt{1 + a^{-2}|\overline{u}|^2}\sqrt{1 + a^{-2}|\overline{v}|^2} + a^{-2}|\overline{u}||\overline{v}|} \\ &\geq 2 + 2\frac{1 + a^{-2}|\overline{u}|^2 + a^{-2}|\overline{v}|^2}{u^0 v^0 + a^{-1}|\overline{u}|a^{-1}|\overline{v}|} \\ &\geq 2 + \frac{1 + a^{-2}|\overline{u}|^2 + a^{-2}|\overline{v}|^2}{u^0 v^0} \ \ \text{car} \ \ a^{-1}|\overline{u}| \leq u^0 \\ &\geq 2 + \frac{(u^0)^2 + (v^0)^2 - 1}{u^0 v^0} \,; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit le résultat vu que $u^0 v^0 + (v^0)^2 - 1 \geq 0$ et $u^0 v^0 - 1 \geq 0$.

2. Rappelons qu'au vu des notations ci-dessus,

$$b(\overline{u}, \overline{v}, \omega) = \frac{N}{D}\,.$$

► Pour $i \in \{1,2,3\}$,

$$\partial_{u^i} b(u,v,w) = \frac{\partial b(\overline{u},\overline{v},\omega)}{\partial u^i} = \frac{D\frac{\partial N}{\partial u^i} - N\frac{\partial D}{\partial u^i}}{D^2} = \frac{\frac{\partial N}{\partial u^i}}{D} - \frac{N\frac{\partial D}{\partial u^i}}{D^2}.$$

Puisque $\frac{\partial \tilde{e}}{\partial u^i} = \frac{a^{-2}u^i}{u^0}$, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial u^i} = 4a^{-2}u^i w\cdot\overline{v} - 2a^{-2}\frac{u^i}{u^0}v^0 w\cdot\overline{u} + 2a^{-2}\frac{u^i}{u^0}v^0 w\cdot\overline{v} - 2v^0(u^0+v^0)w^i \\ \frac{\partial D}{\partial u^i} = 2a^{-2}\frac{u^i}{u^0}(u^0+v^0) - 2a^{-2}\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})\omega^i \end{cases},$$

ainsi

$$|\partial_{u^i}N| \leq 8v^0(u^0+v^0) \quad \text{et} \quad |\partial_{u^i}D| \leq \frac{4}{a}(u^0+v^0).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial b}{\partial u^i}\Big| &\leq \frac{|\partial_{u^i}N|}{D} + \frac{|N||\partial_{u^i}D|}{D^2} \\ &\leq 8v^0(u^0+v^0)\frac{v^0}{u^0+v^0} + 16u^0v^0(u^0+v^0)^2\frac{(v^0)^2}{(u^0+v^0)^2} \\ &\leq 16\big((v^0)^2 + u^0(v^0)^3\big) \\ &\leq 16u^0(v^0)^3. \end{aligned}$$

► Pour $i,j \in \{1,2\}$, nous avons : $\partial^2_{u^iu^j}b(\overline{u},\overline{v},\omega) = \partial_{u^j}\Big(\partial_{u^i}b(\overline{u},\overline{v},\omega)\Big)$ et puisque $\partial_{u^i}b(u,v,w) = \frac{\partial_{u^i}N}{D} - N\frac{\partial_{u^i}D}{D^2}$, nous avons

$$\partial^2_{u^iu^j}b(\overline{u},\overline{v},\omega) = \frac{\partial^2_{u^iu^j}N}{D} - \frac{\partial_{u^i}N\partial_{u^j}D}{D^2} - \frac{\partial_{u^j}N\partial_{u^i}D}{D^2} - \frac{N\partial^2_{u^iu^j}D}{D^2} + 2\frac{N\partial_{u^j}D\partial_{u^i}D}{D^3}.$$

Or

$$\partial^2_{u^iu^j}N = 4a^{-2}\delta^i_j\omega\cdot\overline{v} - \frac{2a^{-2}\delta^i_jv^0}{u^0}\omega\cdot(\overline{u}-\overline{v}) + 2\frac{a^{-4}u^iu^j}{(u^0)^3}\omega\cdot(\overline{u}-\overline{v}) - \frac{2a^{-2}u^iv^0w^j}{u^0} - \frac{2a^{-2}u^iv^0\omega_i}{u^0}$$

et

$$\partial^2_{u^iu^j}D = 2a^{-2}\delta^i_j + 2a^{-2}\delta^i_j\frac{v^0}{u^0} - 2a^{-4}\frac{u^iu^jv^0}{(u^0)^3} - 2a^{-2}w^iw^j,$$

d'oú les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} |\partial^2_{u^iu^j}N| \leq \frac{12}{a}(v^0)^2 \\ |\partial^2_{u^iu^j}D| \leq \frac{4}{a^2}\min\Big\{v^0, \frac{u^0+v^0}{u^0}\Big\} \end{cases},$$

desquelles nous déduisons :

$$\big|\partial^2_{u^iu^j}b(\overline{u},\overline{v},\omega)\big| \leq \frac{64}{a}\big((v^0)^3 + u^0(v^0)^4\big) \leq \frac{64}{a}u^0(v^0)^4.$$

▶ Pour $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, nous avons

$$\partial_{u^iu^ju^k} b = \partial_{u^k}\left(\partial_{u^iu^j} b\right) .$$

En dérivant

$$\partial^2_{u^iu^j} b(\overline{u}, \overline{v}, \omega) = \frac{\partial^2_{u^iu^j} N}{D} - \frac{\partial_{u^i} N \partial_{u^j} D}{D^2} - \frac{\partial_{u^j} N \partial_{u^i} D}{D^2} - \frac{N \partial^2_{u^iu^j} D}{D^2} + 2\frac{N \partial_{u^j} D \partial_{u^i} D}{D^3}$$

par rapport à u^k, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\partial^3_{u^iu^ju^k} b(\overline{u}, \overline{v}, \omega) \\
= \; & \frac{\partial^3_{u^iu^ju^k} N}{D} - \frac{\partial_{u^k} D \partial^2_{u^iu^j} N}{D^2} - \frac{\partial^2_{u^ju^k} N \partial_{u^i} D + \partial_{u^j} N \partial^2_{u^iu^k} D}{D^2} + 2\frac{\partial_{u^k} D \partial_{u^j} N \partial_{u^i} D}{D^3} \\
& - \frac{\partial^2_{u^iu^k} N \partial_{u^j} D + \partial_{u^i} N \partial^2_{u^ju^k} D}{D^2} + 2\frac{\partial_{u^k} D \partial_{u^i} N \partial_{u^j} D}{D^3} - \frac{\partial_{u^k} N \partial^2_{u^iu^j} D + N \partial^3_{u^iu^ju^k} D}{D^2} \\
& + 2\frac{N \partial_{u^k} D \partial^2_{u^iu^j} D}{D^3} + 2\frac{\partial_{u^j} N \partial_{u^i} D \partial_{u^j} D + N \partial^2_{u^ju^k} D \partial_{u^i} D + N \partial_{u^j} D \partial^2_{u^iu^k} D}{D^3} \\
& - 6\frac{N \partial_{u^j} D \partial_{u^i} D \partial_{u^k} D}{D^4} .
\end{aligned}$$

En dérivant $\partial^2_{u^iu^j} N$ et $\partial^2_{u^iu^j} D$ par rapport à u^k, nous avons

$$\begin{aligned}
\partial^3_{u^ku^ju^i} N \;\; = \;\; & \frac{-2a^{-2}\delta^i_j w^k}{u^0} + \frac{4a^{-4}\delta^i_j v^0 w \cdot (\overline{u} - \overline{v}) u^k}{(u^0)^3} - \frac{6a^{-6} u^i u^j w \cdot (\overline{u} - \overline{v}) u^k}{(u^0)^5} \\
& + \frac{2a^{-4} u^i u^j w^k + 2a^{-4}\left(\delta^i_k u^j + \delta^j_k u^i\right) w \cdot (\overline{u} - \overline{v}) u^k}{(u^0)^3} - \frac{2a^{-2}\delta^i_k v^0 w^j}{u^0} \\
& + \frac{2a^{-4} u^i u^k v^0 w^j}{(u^0)^3} - \frac{2a^{-2}\delta^j_k v^0 w^i}{u^0} + \frac{2a^{-4} u^j u^k v^0 w^i}{(u^0)^3}
\end{aligned}$$

et

$$\partial^3_{u^ku^ju^i} D = \frac{-2a^{-4}\delta^i_j u^k v^0}{(u^0)^3} - \frac{2a^{-4}\delta^i_k u^j v^0 + \delta^j_k u^i v^0}{(u^0)^3} + \frac{6a^{-6} u^i u^j u^k v^0}{(u^0)^5}$$

D'où l'on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} |\partial^3_{u^iu^ju^k} N| \leq \frac{40}{a^2} v^0(u^0 + v^0) \\ |\partial^3_{u^iu^ju^k} D| \leq \frac{12}{a^3} v^0 \end{array}\right. .$$

Nous déduisons donc que :

$$\left|\partial_{u^iu^ju^k} b\right| \leq \frac{1390}{a^2} u^0 (v^0)^5 .$$

□

Nous allons a présent établir les estimations concernant le noyau de collision Q.

Remarque 2.5. *Dans toute la suite de ce paragraphe, nous désignons par C une constante positive qui dépend des bornes L^1 et L^∞ de $(1+|\overline{u}|)^l \partial_\beta B$ (voir (1.5.14)) dont la valeur exacte n'est pas essentielle et peut varier d'une ligne à l'autre.*
D'autre part, le paramètre d sera choisi dans l'intervalle $\left]\frac{5}{2},\, 3\right]$.

Proposition 2.3. *Soit $f, g \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$. Alors*

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.3.2}$$

Preuve: Nous allons montrer que :

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \tag{2.3.3}$$

et

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^-(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.3.4}$$

(i) Montrons que $\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$.

Nous avons :

$$(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^+(f,g) = (1+|\overline{u}|)^d \int_{\mathbb{R}^3\times S^2} \frac{a^{-3}}{u^0 v^0} f(\overline{u}')g(\overline{v}')B(a,\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}')d\overline{v}d\omega,$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^+(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\left((1+|\overline{u}|)^d \int_{\mathbb{R}^3\times S^2} \frac{a^{-3}}{u^0 v^0} f(\overline{u}')g(\overline{v}')B(a,\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}')d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u} \\
&= \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|\overline{u}|)^{2d}}{(u^0)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2} \frac{1}{v^0} f(\overline{u}')g(\overline{v}')B(a,\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}')d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u} \\
&= \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|\overline{u}|)^{2d}}{(u^0)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2} \frac{1}{v^0} f(\overline{u}')g(\overline{v}')B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u}\,.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^+(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
\leq\ & \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d}}{(u^0)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{(v^0)^2}|f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2 B d\overline{v}d\omega\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2} B d\overline{v}d\omega\right)\right] d\overline{u} \\
\leq\ & \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d}}{(u^0)^2}\|B\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times S^2)}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{(v^0)^2}|f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2 B d\overline{v}d\omega\right) d\overline{u}\,.
\end{aligned}$$

Faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B, nous avons :

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^+(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{a^6}\int_{\mathbb{S}^2} d\omega \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{(1+|\overline{u}|)^{2d}}{(u^0v^0)^2}|f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2 d\overline{u}d\overline{v}$$

Or $1+|\overline{u}| \leq (1+a)u^0 \leq (1+a)(u^0+v^0) \leq (1+a)(u'^0+v'^0)$ car $u^0+v^0 = u'^0+v'^0$. De plus

$$u'^0+v'^0 \leq 2u'^0v'^0 \ \text{ et } \ u'^0 = \sqrt{1+a^{-2}[(u'^1)^2+(u'^2)^2+(u'^3)^2]} \leq 1+|\overline{u}'|\,,$$

donc

$$1+|\overline{u}| \leq 2(1+a)u'^0v'^0 \leq 2(1+a)(1+|\overline{u}'|)(1+|\overline{v}'|)\,.$$

D'autre part

$$\frac{d\overline{u}d\overline{v}}{u^0v^0} = \frac{d\overline{u}'d\overline{v}'}{u'^0v'^0} \quad et \quad \frac{1}{u'^0v'^0} < 1\,;$$

d'où

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^+(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}'|)^{2d}|f(\overline{u}')|^2 d\overline{u}'\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}'|)^{2d}|g(\overline{v}')|^2 d\overline{v}' \\ &\leq C\|f\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathrm{R}^3)},\end{aligned}$$

car $H^3_d(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^2_d(\mathbb{R}^3)$. Donc

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathrm{R}^3)}\,.$$

ii) Montrons que $\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^-(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$.

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^-(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\left[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^d a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{v^0}f(\overline{u})g(\overline{v})B(a,\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}')d\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u} \\ &\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d}}{(u^0)^2}\left[\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{f(\overline{u})g(\overline{v})B^{\frac{1}{2}}}{v^0}B^{\frac{1}{2}}d\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u}\,.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned}&\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^-(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d}}{(u^0)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{|f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2B}{(v^0)^2}d\overline{v}d\omega\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}Bd\overline{v}d\omega\right)d\overline{u} \\ &\leq \frac{1}{a^6}\|B\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times S^2)}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d}|f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2B}{u^0v^0}\frac{d\overline{u}d\overline{v}}{u^0v^0}\right)\,.\end{aligned}$$

Faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B et vu que $1+|\overline{u}| \leq (1+|\overline{u}|)(1+|\overline{v}|)$, nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\overline{u}|)^d \frac{1}{u^0} Q^-(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d}|f(\overline{u})|^2 d\overline{u}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}|)^{2d}|g(\overline{v})|^2 d\overline{v}\right) \\ &\leq C\|f\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\,,\end{aligned}$$

donc

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^d\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Puisque $Q(f,g)=Q^+(f,g)-Q^-(f,g)$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\overline{u}|)^d\frac{1}{u^0}Q(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \left\|(1+|\overline{u}|)^d\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\left\|(1+|\overline{u}|)^d\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *Soit $f,g\in H^3_d(\mathbb{R}^3)$. Alors nous avons :*

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.3.5}$$

Preuve: Il suffit de montrer que

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.3.6}$$

et

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.3.7}$$

(i) Nous montrons d'abord que $\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$.
En effet,

$$\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)=\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g)-\frac{a^{-2}u^i}{(u^0)^3}Q^+(f,g),$$

donc

$$(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\Big(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\Big)=(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g)-(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{a^{-2}u^i}{(u^0)^3}Q^+(f,g)\,,$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\Big(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\Big)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\quad+\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{a^{-2}u^i}{(u^0)^3}Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\quad+\left\|(1+|\overline{u}|)^{d}\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,,\end{aligned}$$

car

$$1+|\overline{u}|\leq(1+a))u^0 \;\; et \;\; a^{-2}|u^i|\leq\frac{1}{a}u^0\,.$$

Ainsi, on a vu (2.3.3) :

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\Big(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\Big)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Reste donc à estimer

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Nous avons :

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathrm{S}^2}\frac{1}{v^0}\partial_{u^i}(f(\overline{u}')g(\overline{v}')B)d\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u}\,.$$

Or

$$\partial_{u^i}(f(\overline{u}')g(\overline{v}')B) = \partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B + \partial_{u^i}\overline{v}'\partial_{v'}g(\overline{v}')f(\overline{u}')B + f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}[B]\,,$$

où

$$\partial_{u^i}[B] = \partial_{u^i}B + \partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B + \partial_{u^i}\overline{v}'\partial_u B$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{\partial_{u^i}Q^+(f,g)}{u^0}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\leq 3\Bigg\{\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathrm{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{(I_1)}\\
&\quad+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathrm{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^i}\overline{v}'\partial_{v'}g(\overline{v}')f(\overline{u}')B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{(I_2)}\\
&\quad+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathrm{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}[B]|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{(I_3)}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Estimation de (I_1)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathrm{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\\
&\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathrm{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\\
&\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathrm{S}^2}\frac{u^0(v^0)^3}{v^0}|\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')|B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u}\\
&\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathrm{S}^2}\frac{(1+|\overline{v}|)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{v^0}}|\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')|B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u}\,.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons :

$$I_1 \leq \frac{1}{a^6} \int_{\mathbb{R}^3} \left[(1+|\overline{u}|)^{2d+2} \left(\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \frac{|\partial_u f(\overline{u}')|^2 |g(\overline{v}')|^2}{v^0} |B| \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (1+|\overline{v}|)^5 |B| d\overline{v} d\omega \right) \right] d\overline{u}\,,$$

et faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B, nous avons :

$$I_1 \leq \frac{C}{a^6} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2} (1+|\overline{u}|)^{2d} |\partial_{u^i} f(\overline{u}')|^2 |g(\overline{v}')|^2 \frac{d\overline{u} d\overline{v}}{v^0} d\omega\,.$$

Puisque

$$\frac{d\overline{u} d\overline{v}}{u^0 v^0} = \frac{d\overline{u}' d\overline{v}'}{u'^0 v'^0}, \text{ et } \frac{u^0}{u'^0 v'^0} \leq 1$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2} (1+|\overline{u}'|)^{2d+2} |\partial_{u'^i} f(\overline{u}')|^2 |(1+|\overline{v}'|)^{2d} g(\overline{v}')|^2 d\overline{u}' d\overline{v}' d\omega \\
&\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6} \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\overline{u}'|)^{2d} |\partial_{u'^i} f(\overline{u}')|^2 d\overline{u}' \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\overline{v}'|)^{2d} |g(\overline{v}')|^2 d\overline{v}' \\
&\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6} \|\partial_{u^i} f\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)} \|g\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\,.
\end{aligned}$$

D'oú

$$I_1 \leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6} \|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Estimation de (I_2)

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{u^0} (1+|\overline{u}|)^{d+1} a^{-3} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{v^0} |\partial_{u^i} \overline{v}' \partial_{v'} g(\overline{v}') f(\overline{u}') B| d\omega d\overline{v} \right)^2 d\overline{u}\,.$$

En remplaçant dans (I_1), $\partial_{u'} f(\overline{u}')$ par $\partial_{v'} g(\overline{v}')$, nous obtenons :

$$I_2 \leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6} \|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Estimation de (I_3) .

Rappellons que $\partial_{u^i}[B] = \partial_{u^i} B + \partial_{u^i} \overline{u}' \partial_u B + \partial_{u^i} \overline{v}' \partial_u B$, donc :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}[B]|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u}')g(\overline{v}')[\partial_{u^i}B+\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B+\partial_{u^i}\overline{v}'\partial_u B]|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\\
&\leq 3\Bigg\{\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{I_3'}\\
&\qquad+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u}')g(\overline{u}')\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{I_3''}\\
&\qquad\quad+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}\overline{v}'\partial_u B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{I_3''}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ I_3' &= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}a^{-6}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|f(\overline{u}')||g(\overline{v}')||\partial_{u^i}B|^{\frac12}}{v^0}|\partial_{u^i}B|^{\frac12}d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\,.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons :

$$I_3'\leq\frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d+2}}{(u^0)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2|\partial_{u^i}B|}{(v^0)^2}d\overline{v}d\omega\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}|\partial_{u^i}B|d\overline{v}d\omega\right)d\overline{u}\,,$$

et faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B, nous avons :

$$I_3'\leq\frac{C}{a^6}\int_{S^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{|f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2(1+|\overline{u}|)^{2d+2}}{u^0v^0}\frac{d\overline{u}d\overline{v}}{u^0v^0}\right)d\omega\,.$$

De plus,

$$\frac{d\overline{u}d\overline{v}}{u^0v^0}=\frac{d\overline{u}'d\overline{v}'}{u'^0v'^0},\ (1+|\overline{u}|)^2\leq(1+a)^2u^0v^0u'^0v'^0\ \ et\ \ 1+|\overline{u}|\leq(1+a)(1+|\overline{u}'|)(1+|\overline{v}'|)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}
I_3' &\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}'|)^{2d}|f(\overline{u}')|^2d\overline{u}'\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}'|)^{2d}|g(\overline{v}')|^2d\overline{v}'\\
&\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\|f\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$I_3'\leq\frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

$$
\begin{aligned}
\bullet\ I_3'' &= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{16u^0(v^0)^3}{v^0}|f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_u B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u} \\
&\le \frac{16}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|f(\overline{u}')||g(\overline{v}')||\partial_u B|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{v^0}}(1+|\overline{v}|)^{\frac{5}{2}}|\partial_{u^i}B|^{\frac{1}{2}}d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\,.
\end{aligned}
$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons :

$$
I_3'' \le \frac{16}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2|\partial_u B|}{v^0}d\overline{v}d\omega\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}(1+|\overline{v}|)^5|\partial_u B|d\overline{v}d\omega\right)d\overline{u}\,,
$$

et faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B, nous avons :

$$
I_3'' \le \frac{C}{a^6}\int_{S^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2(1+|\overline{u}|)^{2d}\frac{d\overline{u}d\overline{v}}{v^0}\right)d\omega\,.
$$

De plus,

$$
\frac{d\overline{u}d\overline{v}}{v^0} = d\overline{u}'d\overline{v}'\frac{u^0}{u'^0v'^0},\ \ u^0 \le 2u'^0v'^0\ \ et\ \ 1+|\overline{u}| \le (1+a)(1+|\overline{u}'|)(1+|\overline{v}'|)\,,
$$

donc

$$
\begin{aligned}
I_3'' &\le \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}'|)^{2d}|f(\overline{u}')|^2d\overline{u}'\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}'|)^{2d}|g(\overline{v}')|^2d\overline{v}' \\
&\le \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\|f\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\,.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
I_3'' \le \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \le C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.
$$

En remplaçant dans I_3'', $\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B$ par $\partial_{u^i}\overline{v}'\partial_v B$, nous déduisons que :

$$
I_3''' \le C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.
$$

Ainsi on a

$$
I_3 \le C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.
$$

Des estimations de (I_1), (I_2) et (I_3), nous déduisons que :

$$
\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,,
$$

et par suite on a :

$$
\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.
$$

(ii) Montrons que $\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$.

On a :

$$\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right) = \frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^-(f,g) - \frac{a^2u^i}{(u^0)^3}Q^-(f,g)$$

et

$$(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\Big(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\Big) = (1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^-(f,g) - (1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{a^2u^i}{(u^0)^3}Q^-(f,g)\,.$$

$$\begin{aligned}
&\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\Big(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\Big)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\quad\leq \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^-(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{a^2u^i}{(u^0)^3}Q^-(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\quad\leq \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^-(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{(1+a)}{a}\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\quad\leq \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^-(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\|f\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}\,,
\end{aligned}$$

car $1+|\overline{u}| \leq (1+a)u^0$ et $a^{-2}|u^i| \leq \frac{1}{a}u^0$.

Il nous reste à estimer $\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^-(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

$$\begin{aligned}
&\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^-(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{v^0}d\overline{v}\int_{\mathrm{S}^2}\partial_{u^i}\big(f(\overline{u})g(\overline{v})B\big)d\omega\right)^2 d\overline{u}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}a^{-6}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}\big(\partial_{u^i}f(\overline{u})g(\overline{v})B + f(\overline{u})g(\overline{v})\partial_{u^i}[B]\big)d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u}\\
&\leq \underbrace{\frac{2}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d+2}}{(u^0)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{\partial_{u^i}f(\overline{u})g(\overline{v})B}{v^0}d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u}}_{T_1}\\
&\qquad + \underbrace{\frac{2}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d+2}}{(u^0)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{f(\overline{u})g(\overline{v})\partial_{u^i}[B]}{v^0}d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u}}_{T_2}\,.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons :

$$T_1 \leq \frac{2}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d+2}}{(u^0)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|\partial_{u^i}f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2B}{(v^0)^2}d\overline{v}d\omega\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}Bd\overline{v}d\omega\right)d\overline{u}\,,$$

et faisant usage des hypothèses (1.5.14), nous avons :

$$\begin{aligned}
T_1 &\leq \frac{C}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d}|\partial_{u^i}f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2}{(u^0v^0)^2}(1+|\overline{u}|)^2d\overline{u}d\overline{v}\\
&\leq \frac{C(1+a)^2}{a^6}\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d}|\partial_{u^i}f(\overline{u})|^2d\overline{u}d\overline{v}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}|)^{2d}|g(\overline{v})|^2d\overline{u}d\overline{v}\right)\\
&\leq C\|\partial_{u^i}f\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\,.
\end{aligned}$$

D'oú

$$T_1 \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,,$$

Pour ce qui est de T_2, nous avons vu que $\partial_{u^i}[B] = \partial_{u^i}B + \partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B + \partial_{u^i}\overline{v}'\partial_u B$,

$$\begin{aligned}
T_2 &= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u})g(\overline{v})\partial_{u^i}[B]|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u})g(\overline{v})[\partial_{u^i}B + \partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B + \partial_{u^i}\overline{v}'\partial_u B]|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\\
&\leq 3\Bigg\{\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u})g(\overline{v})\partial_{u^i}B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{(T_2')}\\
&\qquad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u})g(\overline{u})\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{(T_2'')}\\
&\qquad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u})g(\overline{v})\partial_{u^i}\overline{v}'\partial_u B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{(T_2''')}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\; T_2' &= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u})g(\overline{v})\partial_{u^i}B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}a^{-6}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|f(\overline{u})||g(\overline{v})||\partial_{u^i}B|^{\frac{1}{2}}}{v^0}|\partial_{u^i}B|^{\frac{1}{2}}d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\,.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons :

$$T_2' \leq \frac{C}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|\overline{u}|)^{2d+2}}{(u^0)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2|\partial_{u^i}B|}{(v^0)^2}d\overline{v}d\omega\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}|\partial_{u^i}B|d\overline{v}d\omega\right)d\overline{u}\,,$$

et faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B, nous avons :

$$\begin{aligned}
T_2' &\leq \frac{C}{a^6}\int_{S^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2(1+|\overline{u}|)^{2d}\frac{(1+|\overline{v}|)^2}{u^0v^0}\frac{d\overline{u}d\overline{v}}{u^0v^0}\right)d\omega\\
&\leq \frac{C(1+a)^2}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d}|f(\overline{u})|^2d\overline{u}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}|)^{2d}|g(\overline{v})|^2d\overline{v}\\
&\leq C\|f\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$T_2' \leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

$$\bullet\ T_2'' = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|f(\overline{u})g(\overline{v})\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+1}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{16u^0(v^0)^3}{v^0}|f(\overline{u})g(\overline{v})\partial_u B|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}$$
$$\leq \frac{16}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|f(\overline{u})||g(\overline{v})||\partial_u B|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{v^0}}(1+|\overline{v}|)^{\frac{5}{2}}|\partial_{u^i}B|^{\frac{1}{2}}d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}\,.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons :

$$T_2'' \leq \frac{16}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2|\partial_u B|}{v^0}d\overline{v}d\omega\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}(1+|\overline{v}|)^5|\partial_u B|d\overline{v}d\omega\right)d\overline{u}\,,$$

et faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B, nous avons :

$$T_2'' \leq \frac{C}{a^6}\int_{S^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2(1+|\overline{u}|)^{2d}\frac{d\overline{u}d\overline{v}}{v^0}\right)d\omega\,.$$

donc

$$T_2'' \leq \frac{C}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d}|f(\overline{u})|^2d\overline{u}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}|)^{2d}|g(\overline{v})|^2d\overline{v}$$
$$\leq \frac{C}{a^6}\|f\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

D'où

$$T_2'' \leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

En remplaçant dans T_2'', $\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_u B$ par $\partial_{u^i}\overline{v}'\partial_v B$, nous déduisons que :

$$T_2''' \leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Ainsi on a

$$T_2 \leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Des estimations de (T_1) et (T_2), nous déduisons que :

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^-(f,g)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,,$$

et par suite nous avons :

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\quad+\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

D'où la Proposition 2.4. □

Proposition 2.5. *Soit $f, g \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$, alors :*

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.3.8}$$

Preuve: Il suffit de montrer que

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.3.9}$$

et

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.3.10}$$

(i) Nous montrons d'abord que $\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$

Rappelons que :

$$\partial_{u^i}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right) = \frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g) - \frac{a^{-2}u^i}{(u^0)^3}Q^+(f,g)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right) &= \partial_{u^j}\Big(\frac{1}{u^0}\partial_{u^i}Q^+(f,g)\Big) - \partial_{u^j}\Big(\frac{a^{-2}u^i}{(u^0)^3}Q^+(f,g)\Big)\\ &= \frac{1}{u^0}\partial^2_{u^iu^j}Q^+(f,g) - \frac{a^{-2}u^j}{(u^0)^3}\partial_{u^i}Q^+(f,g) - \frac{a^{-2}u^i}{(u^0)^3}\partial_{u^j}Q^+(f,g)\\ &\quad-\frac{a^{-2}\delta^i_j}{(u^0)^3}Q^+(f,g) + 3\frac{a^{-4}u^iu^j}{(u^0)^5}Q^+(f,g).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\\ &= (1+|\overline{u}|)^{d+2}\frac{\partial^2_{u^iu^j}Q^+(f,g)}{u^0} - \frac{a^{-2}u^j(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2}\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}Q^+(f,g)}{u^0}\\ &\quad+(1+|\overline{u}|)^2\frac{3a^{-4}u^iu^j - a^{-2}\delta^i_j(u^0)^2}{(u^0)^4}\frac{(1+|\overline{u}|)^dQ^+(f,g)}{u^0}\\ &\quad-\frac{a^{-2}u^i(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2}\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^j}Q^+(f,g)}{u^0}\,.\end{aligned}$$

Or nous avons :

$$\left|\frac{a^{-2}u^j(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2}\right| \leq \frac{1+a}{a} \leq 2 \ \ et \ \ \left|\frac{(1+|u|)^2(3a^{-4}u^iu^j - a^{-2}\delta^i_j(u^0)^2)}{(u^0)^4}\right| \leq \frac{4(1+a)^2}{a^2} \leq 16\,,$$

donc :

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2} \quad &\leq \quad \left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}Q^+(f,g)}{u^0}\right\|_{L^2} \\ &\quad +4\left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d}Q^+(f,g)}{u^0}\right\|_{L^2} \\ &\quad +16\left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}Q^+(f,g)}{u^0}\right\|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

Au vu des estimations (2.3.3) et (2.3.4), il suffit d'estimer

$$\left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}Q^+(f,g)}{u^0}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Nous avons :

$$\left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}Q^+(f,g)}{u^0}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}\partial^2_{u^iu^j}\big(f(\overline{u}')g(\overline{v}')B\big)d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u}\,.$$

Or

$$\begin{aligned}\partial^2_{u^iu^j}\big(f(\overline{u}'g(\overline{v}')B)\big) &= \partial_{u^j}\big(\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B + f(\overline{u}')\partial_{u^i}\overline{v}'\partial_{v'}g(\overline{v}')B + f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}[B]\big) \\ &= \partial_{u^j}\big(\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B\big) + \partial_{u^j}\big(f(\overline{u}')\partial_{u^i}\overline{v}'\partial_{v'}g(\overline{v}')B\big) \\ &\quad +\partial_{u^j}\big(f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}[B]\big)\,,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+2}\frac{1}{u^0}\partial^2_{u^iu^j}Q^+(f,g)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \Bigg\{\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}\big|\partial_{u^j}\big(\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B\big)\big|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{\alpha} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}\big|\partial_{u^j}\big(f(\overline{u}')\partial_{u^i}\overline{v}'\partial_{v'}g(\overline{v}')B\big)\big|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{\theta} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}\big|\partial_{u^j}\big(f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^i}[B]\big)\big|d\omega d\overline{v}\right)^2 d\overline{u}}_{\gamma}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Estimation de α

$$\alpha = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}\big|\partial_{u^j}\big(\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B\big)\big|d\overline{v}d\omega\right)^2 d\overline{u}\,.$$

Or

$$\partial_{u^j}\Big(\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B\Big) = \partial^2_{u^iu^j}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B+\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u^j}\overline{u}'\partial^2_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B$$
$$+\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')\partial_{u^j}\overline{v}'\partial_{v'}g(\overline{v}')B+\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^j}B,$$

donc en posant :

$$\begin{cases} J_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\Big[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial^2_{u^iu^j}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B|d\overline{v}d\omega\Big]^2d\overline{u};\\ J_2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\Big[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^j}\overline{u}'\partial_{u^i}\overline{u}'\partial^2_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B|d\overline{v}d\omega\Big]^2d\overline{u};\\ J_3 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\Big[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')\partial_{u^j}\overline{v}'\partial_{v'}g(\overline{v}')B|d\overline{v}d\omega\Big]^2d\overline{u};\\ J_4 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\Big[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^j}B|d\overline{v}d\omega\Big]^2d\overline{u}; \end{cases}$$

il suffit d'estimer J_1, J_2, J_3 et J_4.

Estimation de J_1

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\mathbb{R}^3}\Big[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial^2_{u^iu^j}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B|d\overline{v}d\omega\Big]^2d\overline{u}\\ &\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\Big[\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{64u^0(v^0)^4}{av^0}|\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B|d\overline{v}d\omega\Big]^2d\overline{u} \end{aligned}$$

$$J_1 \leq \frac{C}{a^8}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\left[\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{(v^0)^{\frac{7}{2}}|\partial_{u'^i}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B^{\frac12}|B^{\frac12}}{\sqrt{v^0}}d\overline{v}d\omega\right]^2d\overline{u}\,.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons :

$$J_1 \leq \frac{C}{a^8}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\Big(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|\partial_{u'^i}f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2|B|}{v^0}d\overline{v}d\omega\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}(1+|\overline{v}|)^7|B|d\overline{v}d\omega\Big)d\overline{u}\,.$$

En faisant usage des hypothèses (1.5.14) et vu que

$$\begin{cases} \frac{d\overline{u}d\overline{v}}{u^0v^0} = \frac{d\overline{u}'d\overline{v}'}{u'^0v'^0}\\ u^0 \leq 2u'^0v'^0\\ 1+|\overline{u}| \leq (1+a)(1+|\overline{u}'|)(1+|\overline{v}'|) \end{cases}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^{10}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}'|)^{2d}|\partial_{u'^i}f(\overline{u}')|^2d\overline{u}'\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}'|)^{2d}|g(\overline{v}')|^2d\overline{v}'\Big)\\ &\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^8}\big\|\partial_{\overline{u}}f\big\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\,. \end{aligned}$$

D'oú :

$$J_1 \leq C\big\|f\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Estimation de J_2

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\mathbb{R}^3}\Big[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times \mathrm{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u^j}\overline{u}'\partial^2_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B|d\overline{v}d\omega\Big]^2 d\overline{u}\\ &\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\Big[\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{(u^0)^2(v^0)^6}{v^0}|\partial^2_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B|d\overline{v}d\omega\Big]^2 d\overline{u}\end{aligned}$$

$$J_2 \leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}(u^0)^2\left[\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{(1+|\overline{v}|)^{\frac{11}{2}}|\partial^2_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B^{\frac{1}{2}}||B|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{v^0}}d\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u}\,.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, Nous avons :

$$J_2 \leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+6}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|\partial^2_{u'}f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2|B|}{v^0}d\overline{v}d\omega\bigg)\bigg(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}(1+|\overline{v}|)^{11}|B|d\overline{v}d\omega\bigg)d\overline{u}\,.$$

En faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B et vu que

$$\begin{cases} \frac{d\overline{u}d\overline{v}}{u^0v^0} = \frac{d\overline{u}'d\overline{v}'}{u'^0v'^0}\\ u^0 \leq 2u'^0v'^0\\ 1+|\overline{u}| \leq (1+a)(1+|\overline{u}'|)(1+|\overline{v}'|) \quad , \end{cases}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}'|)^{2d}|\partial^2_{u'}f(\overline{u}')|^2d\overline{u}'\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}'|)^{2d}|g(\overline{v}')|^2d\overline{v}'\Big)\\ &\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\big\|\partial^2_{u'}f\big\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{L^2_d(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

D'oú :

$$J_2 \leq \big\|f\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Estimation de J_3

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{\mathbb{R}^3}\Big[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times \mathrm{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')\partial_{u^j}\overline{v}'\partial_{v'}g(\overline{v}')B|d\overline{v}d\omega\Big]^2 d\overline{u}\\ &\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\Big[\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{(u^0)^2(v^0)^6}{v^0}|\partial_{u'}f(\overline{u}')\partial_{v'}g(\overline{v}')B|d\overline{v}d\omega\Big]^2 d\overline{u}\\ &\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}(u^0)^2\left[\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{(1+|\overline{v}|)^{\frac{11}{2}}|\partial_{u'}f(\overline{u}')\partial_{v'}g(\overline{v}')B^{\frac{1}{2}}||B|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{v^0}}d\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u}\,.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, Nous avons :

$$J_3 \leq \tfrac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+6}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|\partial_{u'}f(\overline{u}')|^2|\partial_{u'}g(\overline{v}')|^2|B|}{v^0}d\overline{v}d\omega\bigg)\bigg(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}(1+|\overline{v}|)^{11}|B|d\overline{v}d\omega\bigg)d\overline{u}\,.$$

En faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B et vu que

$$\begin{cases} \frac{d\overline{u}d\overline{v}}{u^0v^0} = \frac{d\overline{u}'d\overline{v}'}{u'^0v'^0}\\ u^0 \leq 2u'^0v'^0\\ 1+|\overline{u}| \leq (1+a)(1+|\overline{u}'|)(1+|\overline{v}'|) \quad , \end{cases}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}'|)^{2d+2}|\partial_{u'}f(\overline{u}')|^2 d\overline{u}'\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}'|)^{2d+2}|\partial_{v'}g(\overline{v}')|^2 d\overline{v}'\Big)\\
&\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\big\|f\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

D'oú :

$$J_3 \leq C\big\|f\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}.$$

Estimation de J_4

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int_{\mathbb{R}^3}\Big[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}\frac{1}{v^0}|\partial_{u^i}\overline{u}'\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^j}B|d\overline{v}d\omega\Big]^2 d\overline{u}\\
&\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\Big[\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{u^0(v^0)^3}{v^0}|\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')\partial_{u^j}B|d\overline{v}d\omega\Big]^2 d\overline{u}\\
&\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\left[\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{(1+|\overline{v}|)^{\frac{5}{2}}|\partial_{u'}f(\overline{u}')g(\overline{v}')B^{\frac{1}{2}}||\partial_{u^j}B|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{v^0}}d\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons :

$$J_4 \leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\Big(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|\partial_{u'}f(\overline{u}')|^2|g(\overline{v}')|^2|\partial_{u^j}B|}{v^0}d\overline{v}d\omega\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}(1+|\overline{v}|)^5|\partial_{u^j}B|d\overline{v}d\omega\Big)d\overline{u}.$$

En faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B et vu que

$$\begin{cases}
\frac{d\overline{u}d\overline{v}}{u^0v^0} = \frac{d\overline{u}'d\overline{v}'}{u'^0v'^0}\\
u^0 \leq 2u'^0v'^0\\
1+|\overline{u}| \leq (1+a)(1+|\overline{u}'|)(1+|\overline{v}'|) \quad ,
\end{cases}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
J_4 &\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}'|)^{2d}|\partial_{u'^i}f(\overline{u}')|^2 d\overline{u}'\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{v}'|)^{2d}|g(\overline{v}')|^2 d\overline{v}'\Big)\\
&\leq \frac{C(1+a)^{2d}}{a^6}\big\|f\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

D'oú :

$$J_4 \leq C\big\|f\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}.$$

Nous déduisons des estimations de J_1, J_2, J_3 et J_4 que :

$$\alpha \leq C\big\|f\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}.$$

En ce qui concerne les estimations de (θ) et (γ), nous combinons comme ci-dessus, l'inégalité de Cauchy Schwartz et les hypothèses (1.5.14) sur B, pour montrer que :

$$\theta \leq C\big\|f\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big\|g\big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)},$$

et

$$\gamma \leq C \big\| f \big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \big\| g \big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} .$$

Ainsi,

$$\left\| \frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j} Q^+(f,g)}{u^0} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C \big\| f \big\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \big\| g \big\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ,$$

et par suite

$$\left\| (1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j} \Big(\frac{1}{u^0} Q^+(f,g) \Big) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C \big\| f \big\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \big\| g \big\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} .$$

(ii) Nous montrons enfin que $\left\| (1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j} \Big(\frac{1}{u^0} Q^-(f,g) \Big) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C \big\| f \big\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \big\| g \big\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} .$

De même que pour $Q^+(f,g)$, on a :

$$\begin{aligned}
&(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j} \left(\frac{1}{u^0} Q^-(f,g) \right) \\
&\qquad = (1+|\overline{u}|)^{d+2} \frac{\partial^2_{u^iu^j} Q^-(f,g)}{u^0} - \frac{a^{-2}u^j(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2} \frac{(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i} Q^-(f,g)}{u^0} \\
&\qquad\quad + (1+|\overline{u}|)^2 \frac{3a^{-4}u^iu^j - a^{-2}\delta^i_j (u^0)^2}{(u^0)^4} \frac{(1+|\overline{u}|)^d Q^-(f,g)}{u^0} \\
&\qquad\quad - \frac{a^{-2}u^i(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2} \frac{(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^j} Q^-(f,g)}{u^0} .
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
&\left\| (1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j} \Big(\frac{1}{u^0} Q^-(f,g) \Big) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad \leq \left\| \frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j} Q^-(f,g)}{u^0} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 16 \left\| \frac{(1+|\overline{u}|)^d Q^-(f,g)}{u^0} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad\quad + 4 \left\| \frac{(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i} Q^-(f,g)}{u^0} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad \leq \left\| \frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j} Q^-(f,g)}{u^0} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C \| f \|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \| g \|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} .
\end{aligned}$$

On a :

$$\left\| \frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j} Q^-(f,g)}{u^0} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{u^0} (1+|\overline{u}|)^{d+2} a^{-3} \int_{\mathbb{R}^3\times S^2} \frac{1}{v^0} \partial^2_{u^iu^j} \big(f(\overline{u}) g(\overline{v}) B \big) d\overline{v} d\omega \right]^2 d\overline{u} .$$

Or

$$\begin{aligned}
\partial^2_{u^iu^j} \big(f(\overline{u}) g(\overline{v}) B \big) &= \partial_{u^j} \big(\partial_{u^i} f(\overline{u}) g(\overline{v}) B + f(\bar{u}) g(\bar{v}) \partial_{u^i} B \big) \\
&= \partial^2_{u^iu^j} f(\overline{u}) g(\overline{v}) B + \partial_{u^i} f(\bar{u}) g(\bar{v}) \partial_{u^j} B + \partial_{u^j} f(\overline{u}) g(\overline{v}) \partial_{u^i} B + f(\bar{u}) g(\bar{v}) \partial^2_{u^iu^j} B ,
\end{aligned}$$

donc en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} K_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}\partial^2_{u^iu^j}f(\overline{u})g(\overline{v})Bd\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u} \\ K_2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}\partial_{u^i}f(\overline{u})g(\overline{v})\partial_{u^j}Bd\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u} \\ K_3 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}f(\overline{u})g(\overline{v})\partial^2_{u^iu^j}Bd\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u} \end{array}\right.$$

on a :

$$\left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}Q^-(f,g)}{u^0}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 4\big(K_1+K_2+K_3\big)\,.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz à K_1, on a :

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{u^0}(1+|\overline{u}|)^{d+2}a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{v^0}\partial^2_{u^iu^j}f(\overline{u})g(\overline{v})Bd\overline{v}d\omega\right]^2 d\overline{u} \\ &\leq \frac{1}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{|\partial^2_{u^iu^j}f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2B}{(v^0)^2}d\overline{v}d\omega\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}Bd\overline{v}d\omega\right)d\overline{u} \\ &\leq \frac{C}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(u^0)^2}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2}\frac{1}{(v^0)^2}|\partial^2_{u^iu^j}f(\overline{u})|^2|g(\overline{v})|^2d\overline{v}d\omega\right)d\overline{u}\,, \end{aligned}$$

en faisant usage des hypothèses faites sur B.

Donc

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \frac{C}{a^6}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\overline{u}|)^{2d+4}|\partial^2_{u^iu^j}f(\overline{u})|^2d\overline{u}\int_{\mathbb{R}^3}|g(\overline{v})|^2d\overline{v} \\ &\leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \end{aligned}$$

De même en utilisant les hypothèses faites sur B, on montre que :

$$K_2 \leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \text{ et } K_3 \leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

On déduit donc que :

$$\left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}Q^-(f,g)}{u^0}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,,$$

ce qui donne :

$$\left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}Q^-(f,g)}{u^0}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,. \end{aligned}$$

D'où la Proposition 2.5 □

Proposition 2.6. *Soit $f, g \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$. Alors nous avons :*

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\left(\frac{1}{u^0}Q(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.3.11}$$

Preuve: Il suffit de montrer que

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\left(\frac{1}{u^0}Q+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.3.12}$$

et

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.3.13}$$

(i) Nous montrons d'abord que $\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$.

En dérivant par rapport á k, $\partial^2_{u^iu^j}\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\\
=\;& \frac{(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}Q^+(f,g)}{u^0} - \frac{a^{-2}u^k(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2}\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^j}Q^+(f,g)}{u^0}\\
&-\frac{a^{-2}u^j(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2}\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^iu^k}Q^+(f,g)}{u^0}\\
&-\frac{a^{-2}u^i(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2}\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^ju^k}Q^+(f,g)}{u^0}\\
&-a^{-2}\left[\frac{(\delta^i_k(u^0)^3-3a^{-2}u^0u^ju^k)}{(u^0)^5}(1+|\overline{u}|)^2\right]\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^i}Q^+(f,g)}{u^0}\\
&-a^{-2}\left[\frac{(\delta^i_k(u^0)^3-3a^{-2}u^0u^iu^k)}{(u^0)^5}(1+|\overline{u}|)^2\right]\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^j}Q^+(f,g)}{u^0}\\
&-\frac{a^{-2}\delta^i_j(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2}\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+2}\partial^2_{u^ju^k}Q^+(f,g)}{u^0}\\
&+\frac{a^{-4}\delta^i_ju^k(1+|\overline{u}|)^3}{(u^0)^6}\frac{(1+|\overline{u}|)^{d}Q^+(f,g)}{u^0}\\
&+3\frac{a^{-4}u^iu^j(1+|\overline{u}|)^2}{(u^0)^4}\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+1}\partial_{u^k}Q^+(f,g)}{u^0}\\
&+3a^{-4}\left[\frac{(\delta^i_ku^j(u^0)^5+\delta^j_ku^i(u^0)^5-5a^{-2}(u^0)^3u^iu^ju^k)}{(u^0)^9}(1+|\overline{u}|)^3\right]\frac{(1+|\overline{u}|)^dQ^+(f,g)}{u^0}
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

En remarquant que

$$\begin{cases}
\left|\frac{a^{-2}u^k(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2}\right| \leq 2, \quad \left|\frac{a^{-2}\delta^i_j(1+|\overline{u}|)}{(u^0)^2}\right| \leq 2\\
\left|\frac{a^{-4}u^iu^j(1+|\overline{u}|)^2}{(u^0)^4}\right| \leq 4, \quad \left|\frac{a^{-4}\delta^i_ju^k(1+|\overline{u}|)^3}{(u^0)^6}\right| \leq 8\\
\left|a^{-2}\left[\frac{(\delta^i_k(u^0)^3-3a^{-2}u^0u^ju^k)}{(u^0)^5}(1+|\overline{u}|)^2\right|\right. \leq 16\\
\left|a^{-4}\left[\frac{(\delta^i_ku^j+\delta^j_ku^i)(u^0)^5-5a^{-2}(u^0)^3u^iu^ju^k)}{(u^0)^9}(1+|\overline{u}|)^3\right]\right| \leq 48
\end{cases}$$

et vu les estimations (2.3.3), (2.3.6) et (2.3.9, on a :

$$\begin{aligned}\Big\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ \leq \left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}Q^+(f,g)}{u^0}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+C\|f\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

En faisant usage des hypothèses (1.5.14) sur B, et en suivant la même démarche que dans les cas précédents, on montre que :

$$\left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}Q^+(f,g)}{u^0}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

D'ou l'on déduit :

$$\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

(ii) De même en remplaçant dans (2.3.14) Q^+ par Q^- et vu les estimations (2.3.4), (2.3.7) et (2.3.10), on a :

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ \leq \left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}Q^-(f,g)}{u^0}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Et en procédant de façon similaire comme dans les Propositions 2.3-2.5, on a :

$$\left\|\frac{(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}Q^-(f,g)}{u^0}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Ce qui donne :

$$\Big\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.$$

De ce qui précède, on conclut que :

$$\begin{aligned}\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\left(\frac{1}{u^0}Q(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \left\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\left(\frac{1}{u^0}Q^+(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\quad+\left\|(1+|\overline{u}|)^{d+3}\partial^3_{u^iu^ju^k}\left(\frac{1}{u^0}Q^-(f,g)\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\|f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

D'oú la Proposition 2.6. □

Proposition 2.7. *Soit $f, g \in H_d^3(\mathbb{R}^3)$. Alors nous avons :*

$$\Big\|\frac{1}{u^0}Q(f,g)\Big\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\;; \tag{2.3.15}$$

$$\Big\|\frac{1}{u^0}Q(f,f) - \frac{1}{u^0}Q(g,g)\Big\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\big(\|f\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\big)\|f-g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\,. \tag{2.3.16}$$

Preuve:

(i) En ce qui concerne (2.3.15), les estimations (2.3.2), (2.3.5), (2.3.8) et (2.3.11) montrent que

$$\forall\beta \in \mathbb{N}^3,\ |\beta| \leq 3,\quad \Big\|(1+|\overline{u}|)^{d+|\beta|}\partial^\beta\left(\frac{1}{u^0}Q(f,g)\right)\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\,,$$

donc

$$\Big\|\frac{1}{u^0}Q(f,g)\Big\|_{\mathrm{H}_d^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Ce qui prouve (2.3.15).

(ii) Pour ce qui est de (2.3.16), nous avons, vu la bilinéarité de Q^+ et de Q^- :

$$\frac{1}{u^0}Q^+(f,f) - \frac{1}{u^0}Q^+(g,g) = \frac{1}{u^0}Q^+(f,f-g) + \frac{1}{u^0}Q^+(f-g,g)$$
$$\frac{1}{u^0}Q^-(f,f) - \frac{1}{u^0}Q^-(g,g) = \frac{1}{u^0}Q^-(f,f-g) + \frac{1}{u^0}Q^-(f-g,g)\,,$$

ce qui donne vu les estimations (2.3.2)-(2.3.11)

$$\Big\|\frac{1}{u^0}Q^+(f,f) - \frac{1}{u^0}Q^+(g,g)\Big\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\big(\|f\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\big)\|f-g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\,,$$

et

$$\Big\|\frac{1}{u^0}Q^-(f,f) - \frac{1}{u^0}Q^-(g,g)\Big\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\big(\|f\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\big)\|f-g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\,.$$

Puisque $Q = Q^+ - Q^-$, on a :

$$\frac{1}{u^0}Q(f,f) - \frac{1}{u^0}Q(g,g) = \left[\frac{1}{u^0}Q^+(f,f) - \frac{1}{u^0}Q^+(g,g)\right] + \left[\frac{1}{u^0}Q^-(g,g) - \frac{1}{u^0}Q^-(f,f)\right],$$

et par conséquent

$$\Big\|\frac{1}{u^0}Q(f,f) - \frac{1}{u^0}Q(g,g)\Big\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\big(\|f\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\big)\|f-g\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\,.$$

D'où la relation 2.3.16. □

Remarque 2.6. *Au vu de la preuve des Propositions 2.3-2.6, nous déduisons que si* $f, g \in H_d^k(\mathbb{R}^3)$, $k = 1, 2, 3$, $\frac{1}{u^0}Q(f, g) \in H_d^k(\mathbb{R}^3)$ *et*

$$\left\| \frac{1}{u^0} Q(f, g) \right\|_{H_d^k(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{H_d^k(\mathbb{R}^3)} \|g\|_{H_d^k(\mathbb{R}^3)} \; ; \tag{2.3.17}$$

$$\left\| \frac{1}{u^0} Q(f, f) - \frac{1}{u^0} Q(g, g) \right\|_{H_d^k(\mathbb{R}^3)} \leq C \big(\|f\|_{H_d^k(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{H_d^k(\mathbb{R}^3)} \big) \|f - g\|_{H_d^k(\mathbb{R}^3)} \, . \tag{2.3.18}$$

2.4 Existence locale de la solution de l'équation de Boltzmann

2.4.1 Construction de la suite des itérées

Le lecteur peut se demander pourquoi on ne peut pas résoudre directement l'équation (1.5.7) en introduisant son système caractéristique équivalent. Mais on ne sait pas comment appliquer le théorème de Caucy-Lipschitz à ce système puisque l'équation en question est une équation intégro-différentielle dans laquelle apparaît l'inconnu f et son intégrale. Pour cette raison, nous avons choisi d'introduire un schéma itératif dans lequel la méthode des caractéristiques est utilisée pour obtenir les solutions des équations linéare.

Nous considérons l'équation (1.5.7),

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{F^{01}}{a} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \overline{v}) d\overline{v} \right) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0} Q(f, f) \, ,$$

avec la donnée initiale

$$f(0, \bar{u}) = f_0 \in H_{d,r}^3(\mathbb{R}^3) \, . \tag{2.4.1}$$

et nous allons montrer que le problème de Cauchy résultant admet une unique solution dans l'espace $H_d^3(0, T, \mathbb{R}^3)$, pour un certain $T > 0$.

Soit $T > 0$, f^0 la fonction définie sur $[0, T]$, par

$$f^0(t, \overline{u}) = f_0(\overline{u}) \, .$$

Définissons la fonction f^1 comme solution de l'équation

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} - \left(\frac{F^{01}}{a} \int_{\mathbb{R}^3} f^0(t, \overline{v}) d\overline{v} \right) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f^1}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0} Q(f^0, f^0) \, ; \tag{2.4.2}$$

avec la donnée initiale

$$f^1(0) = f_0$$

En effet l'équation (2.4.2) est équivalente (en prenant t comme paramètre et $h^1(t) = f^1(t, \overline{u}(t))$) au système caractéristique :

$$(S_c^1) \ : \ \begin{cases} \frac{du^i}{dt} = -\frac{F^{01}}{a} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f_0(\overline{v}) d\overline{v} \qquad i = 1, 2, 3 \\ \frac{dh^1}{dt} = \frac{1}{u^0} Q(f^0, f^0) \end{cases}$$

Par simple intégration, le système caractéristique (S_c^1) admet une unique solution $(\overline{u}, h^1)$ de classe C^1 sur $[0,\, T]$, qui détermine une unique solution f^1 de l'équation (2.4.2) sur $[0,\, T]$.

Remarque 2.7. *Etant donné que la fonction* $(t, \overline{u}) \longmapsto \frac{F^{01}}{a} \int_{\mathbb{R}^3} f^0(t, \overline{v}) d\overline{v}$ *est bornée vu que :*

$$\left| \frac{F^{01}}{a} \int_{\mathbb{R}^3} f^0(t, \overline{v}) d\overline{v} \right| \leq \left| \frac{F^{01}}{a} \right| \|f_0\|_{H^3_{d,r}}(\mathbb{R}^3) \leq Cr$$

et que sa dérivée en $\overline{u}$ *est nulle, l'équation* (2.2.19) *implique en appliquant le Corollaire 2.1 (prenant* $t_0 = 0$*), que la solution* f^1 *vérifie l'inégalité :*

$$e^{-\delta_1 t} \|f^1(t, \cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_1 \int_0^t e^{-\delta_1 s} \left\| \frac{1}{u^0} Q(f^0, f^0)(s, \cdot) \right\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ds \,. \tag{2.4.3}$$

Nous déduisons de l'équation (2.4.3) *vu* (2.3.15) *que :*

$$\|f^1(t, \cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_2 \int_0^t \|f^0(s, \cdot)\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ds \right) e^{\delta_1 t} \tag{2.4.4}$$

et puisque $\|f^0\|_{H^3(\mathbb{R}^3)} \leq r$*, nous déduisons que la solution* f^1 *de l'équation* (2.4.2) *appartient à* $C^0\big([0, T), H^3_d(\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0, T), H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$.

Si nous supposons connue $f^n \in \mathcal{C}^1\big([0, T], H^3_d(\mathbb{R}^3)\big)$, alors nous définissons f^{n+1} comme étant l'unique solution de l'équation :

$$\frac{\partial f^{n+1}}{\partial t} - \Big(\frac{F^{01}}{a} \int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, \overline{v}) d\overline{v} \Big) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f^{n+1}}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0} Q(f^n, f^n) \tag{2.4.5}$$

avec la donnée initiale

$$f^{n+1}(0) = f_0 \,.$$

Notons que la fonction $(t, \overline{u}) \longrightarrow \frac{F^{01}}{a} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, \overline{v}) d\overline{v}$ est bornée et que ses dérivées en $\overline{u}$ sont nulles. Donc en vertu du Corollaire 2.1, la fonction f^{n+1} vérifie l'inégalité :

$$e^{-\delta t} \|f^{n+1}(t, \cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_1 \int_0^t \left\| e^{-\delta s} \frac{1}{u^0} Q(f^n, f^n)(s, \cdot) \right\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ds \,;$$

qui donne vu (2.3.15),

$$\|f^{n+1}(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_2\int_0^t \|f^n(s,\cdot)\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}ds\right)e^{\delta_1 t}. \qquad (2.4.6)$$

D'où l'on déduit que la solution f^{n+1} de l'équation (2.4.5) est un élément de l'espace $C^0\big([0,T),H^3_d(\mathbb{R}^3)\big)\cap C^1\big([0,T),H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$.

Nous avons donc construit une suite (f^n) définie sur un intervalle $[0,\, T[$, $T>0$ telle que :

$$f^n \in C^0\big([0,T),H^3_d(\mathbb{R}^3)\big)\cap C^1\big([0,T),H^2_d(\mathbb{R}^3)\big).$$

Nous allons maintenant donner quelques propriétés de la suite $(f^n)_n$ que nous venons de construire.

2.4.2 Propriétés de la suite des itérées

Proposition 2.8.

Soit $f_0\in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$, alors il existe $T>0$ indépendant de n tel que la suite (f^n) soit uniformément bornée sur $[0,\, T]$, dans l'espace $H^3_d(\mathbb{R}^3)$.

Preuve:

Supposons que $f_0\in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$, alors $\|f_0\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\leq r$. Nous allons montrer par récurrence que :

$$\forall t\in[0,T],\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \|f^n(t)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\leq 2r$$

pour T convenablement choisi.

- Pour $n=0$, on bien $\|f^0\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\leq r\leq 2r$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\forall k\leq n$, $\|f^k(t)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\leq 2r$ et montrons que $\|f^{n+1}(t)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\leq 2r$. D'après l'inégalité (4.1.3), on a :

$$\|f^{n+1}(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_2\int_0^t \|f^n(s,\cdot)\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}ds\right)e^{\gamma_1 t};$$

et puisque $\|f^n(t)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\leq 2r$, on a :

$$\|f^{n+1}(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_2\int_0^t 16r^4ds\right)e^{\gamma_1 t};$$

ce qui donne

$$\|f^{n+1}(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq e^{\delta_1 t}\left(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + 16C_2r^4t\right).$$

Or il existe $t_1 > 0$, tel que : $e^{\delta_1 t} \leq 2$, $\forall t \in [0,\, t_1]$ et $t_2 > 0$ tel que $16 C_2 r^2 t \leq 1$ pour $t \in [0,\, t_2]$. Ainsi en posant $T = \min(t_1, t_2)$, on a bien :

$$\|f^{n+1}(t, \cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq 2r\,.$$

□

Proposition 2.9. *Soit $f_0 \in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$. Alors les suites (f^n) et $(\frac{\partial f^n}{\partial t})$ sont de Cauchy respectivement dans les espaces de Banach $C^0\left([0,T]; H^2_d(\mathbb{R}^3)\right)$ et $C^0\big([0,T]; H^1_d(\mathbb{R}^3)\big)$, pour $T > 0$ suffisamment petit.*

Preuve: Notons que d'après l'équation (1.3.9), nous avons $|F^{01}(t)| \leq a^{-3}|F^1(0)| < C$.

1. Montrons que (f^n) est de Cauchy dans l'espace $C^0\big([0,T]; H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$.

   De l'équation (2.4.5) on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f^{n+1} - f^n)}{\partial t} - \frac{F^{01}}{a}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t,\overline{v})d\overline{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^{n+1}}{\partial u^i} - \int_{\mathbb{R}^3} f^{n-1}(t,\overline{v})d\overline{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^n}{\partial u^i}\bigg) \\ = \frac{1}{u^0}\big[Q(f^n, f^n) - Q(f^{n-1}, f^{n-1})\big]\end{aligned}$$

   qui sécrit encore :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f^{n+1} - f^n)}{\partial t} - \frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t,\overline{v})d\overline{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(f^{n+1} - f^n)}{\partial u^i} \\ = \frac{1}{u^0}\big[Q(f^n, f^n) - Q(f^{n-1}, f^{n-1})\big] \\ +\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(f^n(t,\overline{v}) - f^{n-1}(t,\overline{v})\Big)d\overline{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^n}{\partial u^i}\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

   En vertu de la Proposition 2.8, on a

$$\Big\|\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^n}{\partial u^i}\Big\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f^n\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq 2r\,;$$

   donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3}\big(f^n(t,\overline{v}) - f^{n-1}(t,\overline{v})\big)d\overline{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^n}{\partial u^i}\right| &\leq C\int_{\mathbb{R}^3}\big|f^n(t,\overline{v}) - f^{n-1}(t,\overline{v})\big|d\overline{v} \\ &\leq C\|f^n - f^{n-1}\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\,;\end{aligned}$$

   avec C une constante dépendant de r, de a_0 et $F^{01}(0)$.

   De plus d'après la relation 2.3.18 de la Remarque 2.6, on a :

$$\Big\|\frac{1}{u^0}\big[Q(f^n, f^n) - Q(f^{n-1}, f^{n-1})\big]\Big\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f^n - f^{n-1}\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}.$$

Ainsi en appliquant le Corollaire (2.1) à l'équation (2.4.7), pour $k = 2$, (ceci est dû à la présence de la dérivée en u^i sur le second membre de cette équation) on a :

$$\|f^{n+1}(t,\cdot) - f^n(t,\cdot)\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_0^t \|f^n(s,\cdot) - f^{n-1}(s,\cdot)\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} ds. \tag{2.4.8}$$

En prenant le sup sur $[0,T]$, on a :

$$|||f^{n+1} - f^n|||^2 \leq CT|||f^n - f^{n-1}|||^2\ ;$$

ce qui donne :

$$|||f^{n+1} - f^n||| \leq \sqrt{CT}|||f^n - f^{n-1}|||\ .$$

En choisissant T suffisamment petit de sorte $CT < 1$ et en posant $\alpha = \sqrt{CT}$, on a

$$|||f^{n+1} - f^n||| \leq \alpha^n|||f^1 - f^0|||\,.$$

d'où l'on déduit que (f^n) est de Cauchy dans $C^0\big([0,T]; H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$.

2. Montrons que $(\frac{\partial f^n}{\partial t})$ est de Cauchy dans l'espace $C^0\big([0,T]; H^1_d(\mathbb{R}^3)\big)$.

De l'équation 2.4.7, vu que (f^n) est bornée et vu la Remarque 2.6, on déduit que :

$$\left\|\frac{\partial(f^{n+1} - f^n)}{\partial t}\right\|_{H^1_d(\mathbb{R}^3)} \leq C\Big(\|f^{n+1} - f^n\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} + \|f^n - f^{n-1}\|_{H^1_d(\mathbb{R}^3)}\Big).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\frac{\partial(f^{n+1} - f^n)}{\partial t}\right|\right|\right|_{C^0([0,T];H^1_d(\mathbb{R}^3))} &\leq C\big\{|||f^{n+1} - f^n||| + |||f^n - f^{n-1}|||\big\} \\ &\leq C\alpha^{n-1}|||f^1 - f^0|||\,. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

avec $0 < \alpha < 1$.

On déduit que $(\frac{\partial f^n}{\partial t})$ est de Cauchy dans l'espace $C^0\big([0,T]; H^1_d(\mathbb{R}^3)\big)$.

Remarque 2.8. *Notons que (f^n) est une suite de Cauchy dans l'espace $C^0\big([0,T]; H^2_d(\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0,T]; H^1_d(\mathbb{R}^3)\big)$.*

Remarque 2.9. *Nous notons pour l'utiliser plus tard que la suite $\big(\frac{\partial f^n}{\partial t}\big)$ est uniformément bornée dans $H^2_d(\mathbb{R}^3)$. En effet :*

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial f^n}{\partial t}(t,\cdot)\right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} &= \left\|\left(\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3} f^{n-1}(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f^n}{\partial u^i} + \frac{1}{u^0}Q(f^{n-1}, f^{n-1})\right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\|f^{n-1}\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big(\|f^n\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + \|f^{n-1}\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\big) \\ &\leq C\ . \end{aligned}$$

vu que (f^n) est uniformément bornée dans $C^0\big([0,T]; H^3_d(\mathbb{R}^3)\big)$.

Nous allons à présent établir un résultat d'existence et d'unicité de la solution de l'équation de Boltzmann. Nous aurons besoin pour cela de quelques résultats classiques concernant l'espace de Sobolev $H^{(s)}$ avec s réel (voir [29] pour plus de détails).

2.4.3 Existence locale en temps

Définition 2.2. *Soit n un entier naturel non nul, s un nombre réel. On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $u \in H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et sa tansformée de Fourier $\hat{u}$ est une fonction mesurable telle que $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)$ soit de carré intégrable. Si $u \in H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$, on pose*

$$\|u\|_{(s)} := \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\,\xi \right)^{1/2} ,$$

ce qui défini une norme sur $H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.10. *$H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert. Ce pendant, $H^{(0)}(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ et $H^{(s)}(\mathbb{R}^n) \equiv H^s(\mathbb{R}^n)$ quand s est un entier naturel.*

Nous rappelons cette importante inégalité en analyse fonctionnelle, appelée inégalité d'interpolation.

Lemme 2.2. *Soient s_1, s_2 et s_3 trois réels tels que $s_1 < s_2 < s_3$. Si $u \in H^{(s_3)}(\mathbb{R}^n)$, alors nous avons l'inégalité*

$$\|u\|_{(s_2)} \leq \|u\|_{(s_1)}^{\frac{s_3-s_2}{s_3-s_1}} \times \|u\|_{(s_3)}^{\frac{s_2-s_1}{s_3-s_1}} . \tag{2.4.10}$$

Théorème 2.1. *Soient r et d deux nombres réels positifs tels que $d \in \left]\frac{5}{2},\, 3\right]$. Alors il existe $T > 0$ tel que l'équation de Boltzmann (1.5.7) avec la donnée initiale $f(0) = f_0 \in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$ admet une unique solution f définie sur $[0,T]$ tel que :*

$$f \in \mathcal{C}^1\big([0,T] \times \mathbb{R}^3\big) .$$

De plus,

$$f \in H^3(0,T,\mathbb{R}^3) \text{ et } f(t,\cdot) \text{ est bornée uniformément en } t \text{ dans } H^3_d(\mathbb{R}^3).$$

Preuve:

1. Existence : Dans un premier temps, nous allons montrer que la suite $(f^n)_n$ converge dans l'espace $\mathcal{C}^1\big([0,T]\times\mathbb{R}^3\big)$.

   D'après la Proposition 2.9, la suite $(f^n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $C^0\big([0,T];H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$. Donc il existe une fonction $f\in C^0\big([0,T];H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$ telle que $(f^n)_n$ converge vers f dans l'espace $C^0\big([0,T];H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$. Or l'espace $C^0\big([0,T];H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$ s'injecte continûment dans $C^0\big([0,T];H^2(\mathbb{R}^3)\big)$, donc la suite (f^n) est de Cauchy dans l'espace $C^0\big([0,T];H^2(\mathbb{R}^3)\big)$.

   D'après l'inégalité d'interpollation (2.4.10), pour tout réel s tel que $2<s<3$ nous avons :

$$\|f^n(t,\cdot)-f^p(t,\cdot)\|_{(s)}\leq\|f^n(t,\cdot)-f^p(t,\cdot)\|^{s-2}_{H^3(\mathbb{R}^3)}\|f^n(t,\cdot)-f^p(t,\cdot)\|^{3-s}_{H^2(\mathbb{R}^3)}\,. \quad (2.4.11)$$

   Puisque $\big(f^n(t,\cdot)\big)_n$ est uniformément bornée dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$ donc dans $H^3(\mathbb{R}^3)$, l'inégalité (2.4.11) montre que $\big(f^n\big)_n$ est une suite de Cauchy dans $C^0\big([0,T];H^{(s)}(\mathbb{R}^3)\big)$ pour tout $s\in]2,\,3[$.

   De même, puisque la suite $\big(\frac{\partial f^n}{\partial t}\big)$ est uniformément bornée (voir Remarque 2.9) et est une suite de Cauchy dans $C^0\big([0,T];H^1_d(\mathbb{R}^3)\big)$, l'inégalité d'interpolation montre que $\big(\frac{\partial f^n}{\partial t}\big)$ est une suite de Cauchy dans $C^0\big([0,T];H^{(s)}(\mathbb{R}^3)\big)$ pour tout $s\in]1,\,2[$. Ainsi,

$$(f^n) \text{ est une suite de Cauchy dans } C^0\big([0,T];H^{(s+1)}(\mathbb{R}^3)\big)\cap C^1\big([0,T];H^{(s)}(\mathbb{R}^3)\big);\ 1<s<2. \quad (2.4.12)$$

   Maintenant, d'aprés le théorème d'injection de Sobolev nous avons :

$$C^0\big([0,T];H^{(s+1)}(\mathbb{R}^3)\big)\cap C^1\big([0,T];H^{(s)}(\mathbb{R}^3)\big)\hookrightarrow C^1_b([0,T]\times\mathbb{R}^3)\quad\text{pour tout}\quad s>\frac{3}{2}\,.$$

   Donc en choisissant en particulier s dans (2.4.12) tel que $\frac{3}{2}<s<2$, nous déduisons que (f^n) est une suite de Cauchy dans $C^1_b([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ qui est un espace de Banach et par conséquent converge vers une fonction $\tilde{f}$ dans $C^1_b([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ et l'injection $C^0([0,T];H^2_d(\mathbb{R}^3))\hookrightarrow C^0([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ montre que $f=\tilde{f}$. Ce qui montre que la fonction f est la limite de la suite (f^n) dans $\mathcal{C}^1\big([0,T]\times\mathbb{R}^3\big)$.

   Dans un second temps, nous allons montrer que f est la solution de l'équation de Boltzmann (1.5.7). Pour cela il suffit de montrer que :

$$\forall t\in[0,T],\int_{\mathbb{R}^3}f^n(t,\overline{v})d\overline{v}\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^3}f(t,\overline{v})d\overline{v}\ \text{ et }\ \frac{1}{u^0}Q(f^n,f^n)\longrightarrow\frac{1}{u^0}Q(f,f)\,.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t,\overline{v})d\overline{v} - \int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v}\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |f^n(t,\overline{v}) - f(t,\overline{v})|d\overline{v} \\ &\leq \|f^n(t,\cdot) - f(t,\cdot)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} .\end{aligned}$$

Vu que $\forall t \in [0,T]$, $(f^n(t,\cdot))$ converge vers $f(t,\cdot)$ dans $H^2_d(\mathbb{R}^3)$, nous déduisons que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t,\overline{v})d\overline{v} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v}, \quad \forall t \in [0,T] .$$

De même en utilisant (2.3.18), en remplacant f par f^n et g par f, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{u^0}Q(f^n,f^n) - \frac{1}{u^0}Q(f,f)\right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} &\leq C\Big(\|f^n\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\Big)\|f^n - f\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\Big(2r + \|f\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\Big)\|f^n - f\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} .\end{aligned}$$

Vu que $\forall t \in [0,T]$, $(f^n(t,\cdot))$ converge vers $f(t,\cdot)$ dans $H^2_d(\mathbb{R}^3)$, nous déduisons que $\frac{1}{u^0_n}Q_n$ converge vers $\frac{1}{u^0}Q(f,f)$ dans l'espace $H^2_d(\mathbb{R}^3)$ et puisque $H^2_d(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^3)$, on déduit que $\frac{1}{u^0_n}Q_n$ converge vers $\frac{1}{u^0}Q(f,f)$ dans $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^3)$.

Ainsi, nous pouvons prendre la limite point par point dans l'Équation (2.4.5), ce qui montre que la fonction f vérifie l'équation (1.5.7). Par conséquent f est une solution locale de l'équation de Boltzmann (1.5.7).

2. Unicité : Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 solutions de l'équation de Boltzmann (1.5.7) avec les mêmes données initiales $f_1(0,\cdot) = f_2(0,\cdot) = f_0$. Alors on a :

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} - \frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3} f^1(t,\overline{v})d\overline{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^1}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0}Q(f^1,f^1) ,$$

et

$$\frac{\partial f^2}{\partial t} - \frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3} f^2(t,\overline{v})d\overline{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^2}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0}Q(f^2,f^2) .$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f^2 - f^1)}{\partial t} - \frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3} f^2(t,\overline{v})d\overline{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(f^2 - f^1)}{\partial u^i} & \\ = \frac{1}{u^0}\big[Q(f^2,f^2) - Q(f^1,f^1)\big] & \\ +\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(f^2(t,\overline{v}) - f^1(t,\overline{v})\Big)d\overline{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^2}{\partial u^i} .&\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Vu que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f^1}{\partial u^i} \Big\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f^1\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq C \,,$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^{01}}{a} \int_{\mathbb{R}^3} \big(f^2(t,\overline{v}) - f^1(t,\overline{v})\big) d\bar{v} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f^1}{\partial u^i} \right| &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} \big|f^2(t,\overline{v}) - f^1(t,\overline{v})\big| d\bar{v} \\ &\leq C\|f^2 - f^1\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \,. \end{aligned}$$

De plus d'après la relation 2.3.18 de la Remarque 2.6, on a :

$$\Big\| \frac{1}{u^0} \big[Q(f^2,f^2) - Q(f^1,f^1)\big] \Big\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f^2 - f^1\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}.$$

Ainsi en appliquant le Corollaire 2.1 à l'équation (2.4.13) pour $k = 2$, on a :

$$\|f^2(t,\cdot) - f^1(t,\cdot)\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C \int_0^t \|f^2(s,\cdot) - f^1(s,\cdot)\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} ds \,.$$

L'application du lemme de Gronwall à cette dernière inégalité donne $\|f^2(t,\cdot) - f^1(t,\cdot)\| = 0,\ \forall t \in [0,T]$, d'où l'on déduit que $f_1 = f_2$.

3. Prouvons maintenant que $f \in H^3(0,T,\mathbb{R}^3)$. Il suffit de montrer que $\forall t \in [0,T],\ f(t,\cdot) \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$.

   Rappelons que la suite $(f^n(t,\cdot))$ est uniformément bornée dans l'espace de Hilbert $H^3_d(\mathbb{R}^3)$. Or toute suite bornée dans un espace de Hilbert admet une sous suite faiblement convergente. (voir par exemple [10]). Donc il existe une sous suite $(f^{n_p}(t,\cdot))$ et une fonction $g(t,\cdot) \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$ tel que $(f^{n_p}(t,\cdot))$ converge vers $g(t,\cdot)$ dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$ muni de sa topologie faible qui s'injecte continûment dans $H^2_d(\mathbb{R}^3)$ muni de sa topologie faible. De plus, rappelons que la suite $(f^n(t,\cdot))_n$ converge vers $f(t,\cdot)$ dans l'espace $H^2_d(\mathbb{R}^3)$, donc converge aussi dans $H^2_d(\mathbb{R}^3)$ muni de sa topologie faible. Puisque la topologie faible est séparée, nous pouvons conclure que $f(t,\cdot) = g(t,\cdot)$ et par suite que $f(t,\cdot) \in H^3_d(\mathbb{R}^3),\ \forall t \in [0,T]$. De plus nous avons

$$\|f(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \liminf \|f^{n_p}(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq C, \quad \forall t \in [0,T] \,. \tag{2.4.14}$$

□

Chapitre Trois

SOLUTION DU SYSTEME COUPLE EINSTEIN-MAXWELL-BOLTZMANN-CHAMP SCALAIRE MASSIF

Dans ce chapitre, il est question de prouver un résultat d'existence locale et globale de la solution du système Einstein- Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire. Nous rappelons que ce système s'écrit :

$$(S)\quad \begin{cases} 3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 - \wedge = 8\pi a^{-3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} v^0 f(t,\overline{v})d\overline{v} + 12\pi a^2(F^{01})^2 - 8\pi\theta_{00} + 4\pi(\dot\Phi^2 + m^2\Phi^2) \\ -2\frac{\ddot a}{a} - \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \wedge = 8\pi a^{-5}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v^1|^2}{v^0} f(t,\overline{v})d\overline{v} + 4\pi a^2(F^{01})^2 + 4\pi(\dot\Phi^2 - m^2\Phi^2) \\ \dot F^{01} + 3\frac{\dot a}{a}F^{01} = 0 \\ \dot\theta^{00} + 3\frac{\dot a}{a}\theta^{00} = -\rho^2 \\ \dot\Phi\left[\ddot\Phi + 3\left(\frac{\dot a}{a}\right)\dot\Phi + m^2\Phi\right] = -\rho^2 \\ \frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{F^{01}}{a}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0}Q(f,f) \end{cases}$$

ρ étant une constante positive non nulle.

Nous rappelons également que la première équation de (S) à savoir

$$3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 - \wedge = 8\pi a^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} v^0 f(t,\overline{v})d\overline{v} + 12\pi a^2(F^{01})^2 - 8\pi\theta_{00} + 4\pi(\dot\Phi^2 + m^2\Phi^2) \qquad (3.0.1)$$

est la contrainte Hamiltonienne qui sera considérée comme une équation auxilliaire et fournira les propriétés aux équations d'évolution d'Einstein. Cette équation est vérifiée partout si elle est vérifiée en $t = 0$, c'est-à-dire si les données intiales vérifient les contraintes :

$$\begin{cases} 3\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 - \wedge = 8\pi a_0^{-3} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} v^0 f_0(\overline{v}) d\overline{v} + 12\pi a_0^2 (F^{01}(0))^2 - 8\pi\theta_{00}(0) + 4\pi(\dot{\Phi}_0^2 + m^2\Phi_0^2) \\ \quad \text{avec } \ a_0 = a(0);\ \dot{a}_0 = \dot{a}(0);\ f_0(\overline{v}) = f(0, \overline{v});\ \Phi_0 = \Phi(0);\ \dot{\Phi}_0 = \dot{\Phi}(0) \end{cases} . \tag{3.0.2}$$

Nous supposons désormais (3.0.2) et par conséquent, (3.0.1) est résolue et sera considérée comme une relation entre les fonctions inconnues.

3.1 Changement des fonctions inconnues dans le système Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire massif

Le but de cette section est d'écrire le système couplé (S) en un système d'équations de premier ordre. Pour avoir un tel système du premier ordre, nous définissons de nouvelles fonctions comme suit :

$$E = \frac{1}{a}, \quad U = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \psi = \frac{1}{2}(\dot{\Phi})^2, \quad Z = F^{01}, \quad W = \theta^{00} \tag{3.1.1}$$

Remarque 3.1.

- *Notons que l'équation en Φ de (S) impose que $\dot{\Phi}$ ne s'annule jamais, et puisque $\dot{\Phi}$ est continue, $\dot{\Phi}$ garde un signe constant. Nous rechercherons Φ telle que :*

$$\dot{\Phi} > 0 \ \ et \ \ \Phi(0) \geq 0\,; \tag{3.1.2}$$

Ce qui entraine nécessairement que :

$$\Phi \geq 0 \tag{3.1.3}$$

- $$\begin{cases} \psi = \frac{1}{2}(\dot{\Phi})^2 \Longleftrightarrow \dot{\Phi} = \sqrt{2\psi} \qquad vu \ \ (3.1.3) \\ \dot{E} = -\frac{\dot{a}}{a^2} = -\frac{\dot{a}}{a} \times \frac{1}{a} = -UE \\ \dot{U} = \frac{\ddot{a}a - (\dot{a})^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \Longleftrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{U} + U^2 \end{cases}$$

Ainsi, le système (S) est équivalent au système :

$$\begin{cases} \dot{E} = -UE & (3.1.4) \\ \dot{U} = -\dfrac{3}{2}U^2 + \dfrac{\wedge}{2} - 4\pi E^5 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{|v^1|^2}{v^0} f(t,\overline{v})d\overline{v} - \dfrac{2\pi}{E^2}Z^2 - 2\pi(2\psi - m^2\Phi^2) & (3.1.5) \\ \dot{W} = -3UW - \rho^2 & (3.1.6) \\ \dot{Z} = -3UZ & (3.1.7) \\ \dot{\Phi} = \sqrt{2\psi} & (3.1.8) \\ \dot{\psi} = -6U\psi - m^2\Phi\sqrt{2\psi} - \rho^2 & (3.1.9) \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} - \left(EZ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v} \right) \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial f}{\partial u^i} = \dfrac{1}{u^0}Q(f,f) & (3.1.10) \end{cases}$$

Le système (3.1.4) $-$ (3.1.10) sera étudié avec les données initiales en $t = 0$:

$$\begin{cases} E(0) = E_0 = \frac{1}{a_0},\ U(0) = U_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0},\ W(0) = W_0 < 0,\ Z(0) = Z_0, \\ \Phi(0) = \Phi_0 \geq 0,\ \psi(0) = \psi_0 \geq 0,\ f(0,\cdot) = f_0 \in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3) \\ a_0 = a(0) \geq 1 \ \ \dot{a}_0 = \dot{a}(0) > 0 \end{cases} \tag{3.1.11}$$

Remarque 3.2. *La contrainte initiale* (3.0.2) *s'écrit vu le changement de variable* (3.1.1)

$$3U_0^2 - \wedge = 8\pi E_0^3 \int_{\mathbb{R}^3} v^0 f_0(\overline{v})d\overline{v} + 12\pi\Big(\frac{Z_0}{E_0}\Big)^2 - 8\pi W_0 + 4\pi(2\psi_0 + m^2\Phi_0^2) \tag{3.1.12}$$

Nous utiliserons les suites itératives pour prouver l'existence locale de la solution du système (3.1.4)-(3.1.10).

3.2 Construction de la suite des itérées

Soit $T > 0$. Définissons sur $[0, T]$ les fonctions E^0, U^0, W^0, Z^0, Φ^0, ψ^0 et f^0 par :

$$E^0(t) = E_0,\ U^0(t) = U_0,\ W^0(t) = W_0,\ Z^0(t) = Z_0,\ \Phi^0(t) = \Phi_0,\ \psi^0(t) = \psi_0 \ et\ f^0(t,\overline{u}) = f_0(\overline{u})\,.$$

Définissons E^1, U^1, W^1, Z^1, Φ^1, ψ^1 et f^1 comme étant la solution du système différentiel :

$$
(S_0')\qquad \begin{cases}
\dot{E}^1 = -U^0E^0 & (3.2.1)\\
\dot{U}^1 = -\dfrac{3}{2}(U^0)^2 + \dfrac{\wedge}{2} - 4\pi(E^0)^5\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(v^1)^2}{v_0^0}f^0(t,\overline{v})d\overline{v} - 2\pi\frac{(Z^0)^2}{(E^0)^2} & \\
\qquad\qquad -2\pi\big(2\psi^0 - m^2(\Phi^0)^2\big) & (3.2.2)\\
\dot{W}^1 = -3U^0W^0 - \rho^2 & (3.2.3)\\
\dot{Z}^1 = -3U^0Z^0 & (3.2.4)\\
\dot{\Phi}^1 = \sqrt{2\psi^0} & (3.2.5)\\
\dot{\psi}^1 = -6U^0\psi^0 - m^2\Phi^0\sqrt{2\psi^0} - \rho^2 & (3.2.6)\\
\dfrac{\partial f^1}{\partial t} - \left(E^0Z^0\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f^0(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^1}{\partial u^i} = \frac{1}{u_0^0}Q_0 & (3.2.7)
\end{cases}
$$

avec les données initiales $(E^1,\,U^1,\,W^1,\,Z^1,\,\Phi^1,\,\psi^1,\,f^1)(0) = (E_0,\,U_0,\,W_0,\,Z_0,\,\Phi_0,\,\psi_0,\,f_0)$. Où $u_0^0 = \sqrt{1+(E^0)^2|\overline{u}|^2}$ et Q_0 désigne l'opérateur de collision Q défine avec E^0, f^0 et $v_0^0 = \sqrt{1+(E^0)^2|\overline{v}|^2}$.

En effet :

- Par intégration directe des équations (3.2.1)-(3.2.6), on obtient directement les fonctions E^1, U^1, W^1, Z^1, Φ^1, ψ^1.
- Pour ce qui est de (3.2.7), elle est équivalente (par la méthode des caractéristiques) au système différentiel (où on a pris t comme paramètre et $h(t) = f^1(t,\overline{u}(t))$) :

$$
(S_c^1)\ :\ \begin{cases}
\frac{du^i}{dt} = -E^0Z^0\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f_0(\overline{v})d\overline{v} \qquad i=1,2,3\\
\frac{dh}{dt} = \frac{1}{u_0^0}Q_0(f^0,f^0)
\end{cases}
$$

Par simple intégration, le système caractéristique (S_c^1) admet une unique solution $(\overline{u},h)$ définie et de classe C^1 sur l'intervalle $[0,T]$. Ce qui fournit sur $[0,T]$, l'unique solution f^1 de l'équation (3.2.7). D'où l'existence de la famille de fonctions

$$
(E^1,U^1,W^1,Z^1,\Phi^1,\psi^1,f^1) \in \Big(\mathcal{C}^1\big([0,T],\mathbb{R}\big)\Big)^6 \times \mathcal{C}^1\big([0,T]\times\mathbb{R}^3\big)\,.
$$

Remarque 3.3.

Etant donné que la fonction $(t,\overline{u}) \longmapsto E^0Z^0\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f^0(t,\overline{v})d\overline{v}$ *est bornée car*

$$
\left|E^0Z^0\int_{\mathbb{R}^3}f^0(t,\overline{v})d\overline{v}\right| \leq E_0Z_0\|f_0\|_{H^3_{d,r}}(\mathbb{R}^3) \leq E_0Z_0r
$$

et que sa dérivée en $\overline{u}$ est nulle, d'après le Corollaire 2.1, l'inégalité (2.2.19) montre (en remplaçant u_{t_0} par f_0, f par $\frac{1}{u_0}Q_0$ et u par f^1) que la fonction f^1 vérifie :

$$e^{-\delta_1 t}\|f^1(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_1\int_0^t e^{-\delta_1 s}\Big\|\frac{1}{u_0^0}Q_0(s,\cdot)\Big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}ds$$

où δ_1 et C_1 sont deux constantes positives qui dépendent de $E_0, |Z_0|$ et r. Nous déduisons de (4.1.3) *que :*

$$e^{-\delta_1 t}\|f^1(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_2\int_0^t e^{-\delta_1 s}\big\|f^0(s,\cdot)\big\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}ds\ ,$$

avec ici C_2 est une constante positive qui dépend de E_0, $|Z_0|$, r et T. Puisque $f^0 = f_0 \in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$ nous déduisons que la solution f^1 de l'équation (3.2.7) *vérifie pour tout $t \in [0,\, T]$:*

$$\begin{aligned}
\|f^1(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} &\leq C\left(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \big\|f^0(s,\cdot)\big\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}ds\right)\\
&\leq C\Big(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + T\|f_0\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\Big) \qquad (3.2.8)\\
&\leq C(E_0, Z_0, r, T)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi la solution f^1 de l'équation (3.2.7) *est un élément de l'espace $C^0\big([0,T), H^3_d(\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0,T), H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$.*

Supposons connue $(E^n, U^n, W^n, Z^n, \Phi^n, \psi^n, f^n) \in \Big(\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})\Big)^6 \times C^0\big([0,T), H^3_d(\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0,T), H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$, et définissons $(E^{n+1}, U^{n+1}, W^{n+1}, Z^{n+1}, \Phi^{n+1}, \psi^{n+1}, f^{n+1})$ comme étant solution du système :

$$(S'_n)\ :\ \begin{cases}
\dot{E}^{n+1} = -E^nU^n & (3.2.9)\\
\dot{U}^{n+1} = -\dfrac{3}{2}(U^n)^2 + \dfrac{\wedge}{2} - 4\pi(E^n)^5\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(v^1)^2}{v_n^0}f^n(t,\overline{v})d\overline{v} - 2\pi\frac{(Z^n)^2}{(E^n)^2} & \\
\qquad\qquad -2\pi\big(2\psi^n - m^2(\Phi^n)^2\big) & (3.2.10)\\
\dot{W}^{n+1} = -3U^nW^n - \rho^2 & (3.2.11)\\
\dot{Z}^{n+1} = -3U^nZ^n & (3.2.12)\\
\dot{\Phi}^{n+1} = \sqrt{2\psi^n} & (3.2.13)\\
\dot{\psi}^{n+1} = -6U^n\psi^n - m^2\Phi^n\sqrt{2\psi^n} - \rho^2 & (3.2.14)\\
\dfrac{\partial f^{n+1}}{\partial t} - \left(E^nZ^n\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}f^n(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^3\frac{\partial f^{n+1}}{\partial u^i} = \frac{1}{u_n^0}Q_n & (3.2.15)
\end{cases}$$

avec les données initiales

$$(E^{n+1},\, U^{n+1},\, W^{n+1},\, Z^{n+1},\, \Phi^{n+1},\, \psi^{n+1},\, f^{n+1})(0) = (E_0,\, U_0,\, W_0,\, Z_0,\, \Phi_0,\, \psi_0,\, f_0)\,.$$

où $u_n^0 = \sqrt{1 + |E^n|^2|\overline{u}|^2}$ et Q_n désigne l'opérateur de collision Q défini avec $E^n,\ f^n$ et $v_n^0 = \sqrt{1 + (E^n)^2|\overline{v}|^2}$.

Notons en vertu du Corollaire 2.1 que la solution f^{n+1} de l'équation (3.2.15) vérifie :

$$e^{-\delta_1 t}\|f^{n+1}(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \le \|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_1\int_0^t e^{-\delta_1 s}\Big\|\frac{1}{u_n^0}Q_n(s,\cdot)\Big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}ds$$

où δ_1 et C_1 sont deux constantes positives qui dépendent de $E_0, |Z_0|$ et r. Nous déduisons de (4.1.3) que :

$$e^{-\delta_1 t}\|f^{n+1}(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \le \|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_2\int_0^t e^{-\delta_1 s}\big\|f^n(s,\cdot)\big\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}ds\,.$$

avec ici C_2 est une constante positive qui dépend de E_0, $|Z_0|$, r et T. Puisque $f^0 = f_0 \in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$ et $f^n \in \mathcal{C}^1\big([0,T), H^3_d(\mathbb{R}^3)\big)$, nous déduisons que la solution f^{n+1} de l'équation (3.2.15) appartient à $C^1\big([0,T), H^3_d(\mathbb{R}^3)\big)$. Par conséquent

$$(E^{n+1}, U^{n+1}, W^{n+1}, Z^{n+1}, \Phi^{n+1}, \psi^{n+1}, f^{n+1}) \in \mathcal{C}^1([0,T]),\mathbb{R})^6 \times C^0\big([0,T), H^3_d(\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0,T), H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)\,.$$

Nous avons donc construit une suite $(E^n, U^n, W^n, Z^n, \Phi^n, \psi^n, f^n)$ définie sur un intervalle $[0,\, T]$, pour $T > 0$ arbitraire telle que :

$$(E^n, U^n, W^n, Z^n, \Phi^n, \psi^n, f^n) \in \Big(\mathcal{C}^1\big([0,T]),\mathbb{R}\big)\Big)^6 \times C^0\big([0,T), H^3_d(\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0,T), H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)\,.$$

et nous voulons montrer que la suite $(E^n, U^n, W^n, Z^n, \Phi^n, \psi^n, f^n)$ converge vers une famille de fonctions $(E, U, W, Z, \Phi, \psi, f)$ solution du système $(3.1.5) - (3.1.11)$ sur un intervalle maximal $[0, T_*)$, $T_* > 0$ étant à définir.

3.3 Existence locale de la solution du système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire massif

Dans cette section, en utilisant les techniques d'estimation énergétique, nous allons établir un théorème d'existence locale (théorème 3.1) du système Einstein-Maxwell-Boltzmann avec un champ scalaire massif comme limite de la suite que nous venons de construire.

3.3.1 Propriétés de la suite des itérés

Nous commençons cette section par montrer que la suite que nous venons de construire est une suite uniformément bornée.

Proposition 3.1. *Soit* $f_0 \in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$*. Alors il existe* $T_0 > 0$*, indépendant de* n *tel que la suite* (X^n) *où*

$$X^n = (E^n, U^n, W^n, Z^n, \Phi^n, \psi^n, f^n)$$

soit uniformément bornée sur $[0,\, T_0]$*.*

Preuve: Posons

$$\|X^n(t)\| = |E^n(t)| + |U^n(t)| + |W^n(t)| + |Z^n(t)| + |\Phi^n(t)| + |\psi^n(t)| + \|f^n(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$$

et

$$C_0 = |E_0| + |U_0| + |W_0| + |Z_0| + |\Phi_0| + |\psi_0| + 2r\,.$$

Nous allons montrer par récurrence qu'il existe $T_0 > 0$ tel que : $\|X^n(t)\| \leq 2C_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, T_0]$.

- Pour $n = 0$, on bien $\|X^0\| \leq C_0 \leq 2C_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\forall k \leq n$, $\|X^k(t)\| \leq 2C_0$ et montrons que $\|X^{n+1}(t)\| \leq 2C_0$, $\forall t \in [0, T_0]$. Le choix de T_0 sera donné par la suite.

  - En intégrant sur $[0,\, t]$ l'équation (3.2.9), on a :

  $$E^{n+1}(t) = E_0 - \int_0^t E^n(s)U^n(s)ds\,;$$

  ce qui donne

  $$|E^{n+1}(t)| \leq |E_0| + A_1 t \tag{a}$$

  où $A_1 > 0$ est une constante positive qui depend de C_0.

  - En intégrant sur $[0,\, t]$ l'équation (3.2.10), on a :

  $$\begin{aligned} U^{n+1}(t) = U_0 + \int_0^t \Big[-\frac{3}{2}(U^n)^2 + \frac{\wedge}{2} - 4\pi(E^n)^5 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^1)^2}{v^0_n} f^n(s,\overline{v})d\overline{v} \\ -2\pi\frac{(Z^n)^2}{(E^n)^2} - 2\pi(2\psi^n + m^2(\phi^n)^2)\Big]ds \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

  Or

  $$\dot{E}^n = -U^{n-1}E^{n-1} \Longrightarrow |\dot{E}^n| \leq 4C_0^2 \Longrightarrow \dot{E}^n \geq -4C_0^2\,.$$

Par intégration sur $[0,t]$, on a $E^n(t) \geq E_0 - 4C_0^2 t$ et puisque $E_0 > 0$, il existe $t_1 > 0$ tel que

$$\forall t \in [0,t_1], 4C_0^2 t < \frac{E_0}{2}.$$

Ainsi, $0 \leq t \leq t_1 \Longrightarrow E^n(t) \geq \frac{E_0}{2} \Longrightarrow \frac{1}{E^n(t)} \leq \frac{2}{E_0}$. L'Equation (3.3.2) donne alors vu que $\|X^n(t)\| \leq 2C_0$:

$$|U^{n+1}(t)| \leq C_0 + A_2 t,\ 0 \leq t \leq t_1 \tag{b}$$

où $A_2 > 0$ est une constante positive qui depend de C_0.

- En intégrant sur $[0,\ t]$ l'équation (3.2.11), on a :

$$W^{n+1}(t) = W_0 - \int_0^t (3U^n(s)W^n(s) - \rho^2)ds\,;$$

ce qui donne

$$|W^{n+1}(t)| \leq C_0 + A_3 t \tag{c}$$

où $A_3 > 0$ est une constante positive qui depend de C_0.

- En intégrant sur $[0,\ t]$ l'équation (3.2.12), on a :

$$Z^{n+1}(t) = Z_0 - 3\int_0^t U^n(s)Z^n(s)ds$$

Ce qui donne

$$|Z^{n+1}(t)| \leq C_0 + A_4 t \tag{d}$$

où $A_4 > 0$ est une constante positive qui depend de C_0.

- En intégrant sur $[0,\ t]$ l'équation (3.2.13), on a :

$$\Phi^{n+1}(t) = \Phi_0 + \int_0^t \sqrt{2\psi^n(s)}ds\,;$$

ce qui donne

$$|\Phi^{n+1}(t)| \leq C_0 + A_5 t \tag{e}$$

où $A_5 > 0$ est une constante positive qui depend de C_0.

- En intégrant sur $[0,\ t]$ l'équation (3.2.14), on a :

$$\psi^{n+1}(t) = \psi_0 - \int_0^t (6U^n(s)\psi^n(s) + m^2\Phi^n(s)\sqrt{2\psi^n(s)} - \rho^2)ds\,;$$

ce qui donne

$$|\psi^{n+1}(t)| \leq C_0 + A_6 t \tag{f}$$

où $A_6 > 0$ est une constante positive qui depend de C_0.

- Nous allons maintenant utiliser le Corollaire 2.1 pour obtenir une majoration de $\|f^{n+1}\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$. Observons que l'équation (3.2.15) est de la forme (2.2.1) avec $a = a(t) = E^n Z^n \int_{\mathbb{R}^3} f(t,\bar{v})d\bar{v}$, $b = 0$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\left| E^n Z^n \int_{\mathbb{R}^3} f^n(t,\bar{v})d\bar{v} \right| \leq 4C_0^2 \|f^n(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq 4C_0^2 \|f^n(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq C(C_0)\,.$$

Ainsi en appliquant le Corollaire 2.1 (avec $\kappa = C(C_0);\ k = n = 3$) à l'Equation (3.2.15) et faisant usage de (2.3.15), nous obtenons

$$\|f^{n+1}(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C(C_0)\int_0^t \|f^n(s,\cdot)\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ds \right) e^{\delta_1 t}\,;$$

et puisque $\|X^n\| \leq 2C_0$, on déduit que

$$\|f^{n+1}(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C(C_0)t \right) e^{\delta_1 t}\,.$$

Choisissant $t_2 > 0$ tel que $e^{\delta_1 t} < 4\ \forall t \in [0,\, t_2]$, il existe $A_7 > 0$ dépendant de C_0, tel que $\forall t \in [0,\, t_2]$:

$$\|f^{n+1}(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq 2\|f_0\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + A_7\sqrt{t} \leq C_0 + A_7\sqrt{t}\,. \tag{g}$$

Maintenant en additionnant les inégalités (a)-(g), nous avons

$$\|X^{n+1}(t)\| \leq C_0 + \Big(\sum_{i=1}^{7} A_i\Big)(t + \sqrt{t}),\ \ 0 \leq t \leq \min(t_1, t_2)\,.$$

Finalement en choisissant t_3 tel que $0 \leq t \leq t_3 \Longrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{7} A_i\Big)(t+\sqrt{t}) \leq C_0$, nous avons en posant $T_0 = \min(t_1, t_2, t_3)$:

$$\|X^{n+1}(t,\cdot)\| \leq 2C_0, \quad \forall t \in [0, T_0]\,.$$

Nous pouvons donc conclure qu'il existe $T_0 > 0$ tel que la suite (X^n) soit uniformément bornée sur $[0, T_0]$.

□

Nous aurons besoin dans la suite des lemmes suivants.

Lemme 3.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre k et g une fonction appartenant a l'espace $H_d^k(\mathbb{R}^3)$, alors $fg \in H_d^k(\mathbb{R}^3)$ et*

$$\|fg\|_{H_d^k(\mathbb{R}^3)} \leq C\|g\|_{H_d^k(\mathbb{R}^3)}$$

ou C est une constante positive dépendant des bornes de f et de ses dérivées.

Lemme 3.2. *Les fonctions $\bar{u} \mapsto \frac{u^0_{n-1}}{u^0_n}$ et $\bar{u} \longmapsto \frac{|\bar{u}|^2}{(u^0_n+u^0_{n-1})u^0_n}$ ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont uniformément bornées.*

Preuve:

1. Montrons que la fonction $\bar{u} \mapsto \frac{u^0_{n-1}}{u^0_n}$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont uniforméments bornées.

   En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{E_0}{2} \leq E^n \leq 2C_0$, nous avons

$$\frac{u^0_{n-1}}{u^0_n} = \frac{\sqrt{1+(E^{n-1})^2|\bar{u}|^2}}{\sqrt{1+(E^n)^2|\bar{u}|^2}} \leq C(C_0, E_0)\ ;$$

$$\left|\partial_i\left(\frac{u^0_{n-1}}{u^0_n}\right)\right| = \left|\frac{(E^{n-1})^2u^i}{u^0_{n-1}u^0_n} - \frac{(E^n)^2u^iu^0_{n-1}}{(u^0_n)^3}\right| \leq C(C_0, E_0)\ ;$$

   et

$$\begin{aligned}\left|\partial^2_{ij}\left(\frac{u^0_{n-1}}{u^0_n}\right)\right| &= \left|\frac{(E^{n-1})^2\delta^i_j}{u^0_nu^0_{n-1}} - 2\frac{(E^n)^2(E^{n-1})^2u^iu^j}{(u^0_n)^3u^0_{n-1}} - \frac{(E^{n-1})^4u^iu^j}{u^0_n(u^0_{n-1})^3}\right.\\ &\qquad\left. - \frac{\delta^i_j(E^n)^2u^0_{n-1}}{(u^0_n)^3} + 3\frac{(E^n)^4u^iu^ju^0_{n-1}}{(u^0_n)^5}\right|\\ &\leq C(C_0)\ .\end{aligned}$$

2. Montrons que la fonction $u \longmapsto \frac{|\bar{u}|^2}{(u^0_n+u^0_{n-1})u^0_n}$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont uniformément bornées.

   - Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{E_0}{2} \leq E^n \leq 2C_0$ et $u^0_n = \sqrt{1+E^n|\bar{u}|^2}$, nous déduisons que

$$\left|\frac{|\bar{u}|^2}{(u^0_n+u^0_{n-1})u^0_n}\right| \leq C(C_0)\,. \tag{3.3.2}$$

   - pour $i = 1, 2, 3$ nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_i\left(\frac{|\bar{u}|^2}{(u^0_{n-1}+u^0_n)u^0_n}\right) &= \frac{2u^i}{(u^0_{n-1}+u^0_n)u^0_n} - \frac{(E^{n-1})^2u^i|\bar{u}|^2}{(u^0_{n-1}+u^0_n)^2u^0_{n-1}u^0_n}\\ &\quad - \frac{(E^n)^2u^i|\bar{u}|^2}{(u^0_{n-1}+u^0_n)^2(u^0_n)^2} - \frac{(E^n)^2u^i|\bar{u}|^2}{(u^0_{n-1}+u^0_n)(u^0_n)^3}\,.\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{E_0}{2} \leq E^n \leq 2C_0$ et $u_n^0 = \sqrt{1 + E^n|\bar{u}|^2}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\partial_i\left(\frac{|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)u_n^0}\right)\right| &\leq \left|\frac{2u^i}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)u_n^0}\right| + \left|\frac{(E^{n-1})^2u^i|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^2u_{n-1}^0u_n^0}\right| \\
&\quad + \left|\frac{(E^n)^2u^i|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^2(u_n^0)^2}\right| + \left|\frac{(E^n)^2u^i|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)(u_n^0)^3}\right| \\
&\leq C(C_0)\,.
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Pour $i, j = 1, 2, 3$ nous avons vu 3.3.3 :

$$\begin{aligned}
&\partial_{ij}^2\left(\frac{|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)u_n^0}\right) \\
= &\ \frac{2\delta_j^i}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)u_n^0} - 2\frac{(E^{n-1})^2u^iu^j}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^2u_{n-1}^0u_n^0} - 2\frac{(E^n)^2u^iu^j}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^2(u_n^0)^2} - 2\frac{(E^n)^2u^iu^j}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)(u_n^0)^3} \\
&- \frac{(E^{n-1})^2(\delta_j^i|\bar{u}|^2 + 2u^iu^j)}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^2u_{n-1}^0u_n^0} - \frac{(E^n)^2(\delta_j^i|\bar{u}|^2 + 2u^iu^j)}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^2(u_n^0)^2} - \frac{(E^n)^2(\delta_j^i|\bar{u}|^2 + 2u^iu^j)}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)(u_n^0)^3} \\
&+ \frac{(E^{n-1})^4u^iu^j|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^2(u_{n-1}^0)^3u_n^0} + \frac{(E^{n-1})^4u^iu^j|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^3(u_{n-1}^0)^2u_n^0} + \frac{2(E^n)^4u^iu^j|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^3(u_n^0)^3} \\
&+ \frac{3(E^n)^4u^iu^j|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)(u_n^0)^5} + \frac{4(E^nE^{n-1})^2u^iu^j|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^3(u_n^0)^2u_{n-1}^0} + \frac{2(E^nE^{n-1})^2u^iu^j|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^2(u_n^0)^3u_{n-1}^0} \\
&+ \frac{3(E^n)^4u^iu^j|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)^2(u_n^0)^4}\,.
\end{aligned}$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{E_0}{2} \leq E^n \leq 2C_0$ et $u_n^0 = \sqrt{1 + E^n|\bar{u}|^2}$, nous déduisons que

$$\left|\partial_{ij}^2\left(\frac{|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0 + u_n^0)u_n^0}\right)\right| \leq C(C_0)\,. \tag{3.3.5}$$

(3.3.2), (3.3.4) et (3.3.5) montrent que la fonction $u \longmapsto \frac{|\bar{u}|^2}{(u_n^0 + u_{n-1}^0)u_n^0}$ est uniformément bornée.
□

Lemme 3.3. *pour tout entier naturel non nul n, nous avons :*

$$\left||E^n|^5\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v^1|^2}{v_n^0}f^n(\bar{v})d\bar{v} - |E^{n-1}|^5\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v^1|^2}{v_{n-1}^0}f^{n-1}(\bar{v})d\bar{v}\right| \leq C(C_0)\left(|E^n - E^{n-1}| + \|f^n - f^{n-1}\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\right) \tag{3.3.6}$$

et

$$\left\|\frac{1}{u_n^0}Q_n - \frac{1}{u_{n-1}^0}Q_{n-1}\right\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(C_0)\left(|E^n - E^{n-1}| + \|f^n - f^{n-1}\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\right)\,. \tag{3.3.7}$$

Preuve: Dans un premier temps, nous prouvons (3.3.6). Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left| |E^n|^5 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v^1|^2}{v_n^0} f^n(\overline{v}) d\overline{v} - |E^{n-1}|^5 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v^1|^2}{v_{n-1}^0} f^{n-1}(\overline{v}) d\overline{v} \right| \\
&= \left| \left(|E^n|^5 - |E^{n-1}|^5 \right) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v^1|^2}{v_n^0} f^n(\overline{v}) d\overline{v} + |E^{n-1}|^5 \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v^1|^2}{v_n^0} f^n(\overline{v}) - \frac{|v^1|^2}{v_{n-1}^0} f^{n-1}(\overline{v}) \right) d\overline{v} \right| \\
&\leq C(C_0)|E^n - E^{n-1}| + |E^{n-1}|^5 \left| \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{1}{v_n^0} - \frac{1}{v_{n-1}^0} \Big) |v^1|^2 f^n(\overline{v}) d\overline{v} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v^1|^2}{v_{n-1}^0} \big(f^n - f^{n-1} \big)(\overline{v}) d\overline{v} \right| \\
&\leq C(C_0) \left(|E^n - E^{n-1}| + \| f^n - f^{n-1} \|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)} \right) .
\end{aligned}$$

Dans un second temps, nous prouvons (3.3.7). Notons que Q_n désigne $Q(E^n, f^n, f^n)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_n^0} Q_n - \frac{1}{u_{n-1}^0} Q_{n-1} &= \frac{1}{u_n^0} \big(Q(E^n, f^n, f^n) - Q(E^{n-1}, f^n, f^n) \big) + \left(\frac{1}{u_n^0} - \frac{1}{u_{n-1}^0} \right) Q(E^{n-1}, f^n, f^n) \\
&\quad + \frac{1}{u_{n-1}^0} \big(Q(E^{n-1}, f^n, f^n) - Q(E^{n-1}, f^{n-1}, f^{n-1}) \big) . \qquad (3.3.8)
\end{aligned}$$

En ce qui concerne le premier terme de (3.3.8), nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_n^0} \big(Q(E^n, f^n, f^n) - Q(E^{n-1}, f^n, f^n) \big) &= \frac{1}{u_n^0} \left[Q^+(E^n, f^n, f^n) - Q^+(E^{n-1}, f^n, f^n) \right] \\
&\quad - \frac{1}{u_n^0} \left[Q^-(E^n, f^n, f^n) - Q^-(E^{n-1}, f^n, f^n) \right] \\
&=: (I) + (II) .
\end{aligned}$$

Commençons par estimer (I).

$$\begin{aligned}
(I) &= \frac{1}{u_n^0} \Bigg[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(E^n)^3}{v_n^0} d\overline{v} \int_{S^2} f^n(t, \overline{u}') f^n(t, \overline{v}') B(E^n, \overline{u}, \overline{v}, \overline{u}', \overline{v}') d\omega \\
&\qquad - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(E^{n-1})^3}{v_{n-1}^0} d\overline{v} \int_{S^2} f^n(t, \overline{u}') f^n(t, \overline{v}') B(E^{n-1}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{u}', \overline{v}') d\omega \Bigg] \\
&= \frac{1}{u_n^0} \Bigg[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(E^n)^3}{v_n^0} d\overline{v} \int_{S^2} f^n(t, \overline{u}') f^n(t, \overline{v}') \big(B(E^n, \overline{u}, \overline{v}, \overline{u}', \overline{v}') - B(E^{n-1}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{u}', \overline{v}') \big) d\omega \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{(E^n)^3}{v_n^0} - \frac{(E^{n-1})^3}{v_{n-1}^0} \right) d\overline{v} \int_{S^2} f^n(t, \overline{u}') f^n(t, \overline{v}') B(E^{n-1}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{u}', \overline{v}') d\omega \Bigg] \\
&= (I_1) + (I_2) .
\end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned}
\frac{(E^n)^3}{v_n^0} - \frac{(E^{n-1})^3}{v_{n-1}^0} &= \frac{(E^n)^3 \big(v_{n-1}^0 - v_n^0 \big) + v_n^0 \big((E^n)^3 - (E^{n-1})^3 \big)}{v_n^0 v_{n-1}^0} \\
&= \frac{(E^n)^3 - (E^{n-1})^3}{v_{n-1}^0} + (E^n)^3 \frac{\sqrt{1 + (E^{n-1})^2 |\overline{v}|^2} - \sqrt{1 + (E^n)^2 |\overline{v}|^2}}{v_n^0 v_{n-1}^0} \\
&= \frac{E^n - E^{n-1}}{v_{n-1}^0} \underbrace{\left[(E^n)^2 + E^n E^{n-1} + (E^{n-1})^2 + \frac{(E^n)^3 (E^n + E^{n-1}) |\overline{v}|^2}{v_n^0 (v_n^0 + v_{n-1}^0)} \right]}_{:= \xi^n} ;
\end{aligned}$$

donc

$$(I_2) = \left(E^n - E^{n-1}\right) \frac{u^0_{n-1}}{u^0_n} \frac{1}{u^0_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi^n \, d\bar{v}}{v^0_{n-1}} \int_{S^2} f^n(t,\overline{u}') f^n(t,\overline{v}') B(E^{n-1},\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}') d\omega \; . \tag{3.3.9}$$

Etant donné que la fonction $\bar{u} \mapsto \frac{u^0_{n-1}}{u^0_n}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont uniforméments bornées, le Lemme 3.1 implique que

$$\|(I_2)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq |E^n - E^{n-1}| \left\| \frac{1}{u^0_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi^n \, d\bar{v}}{v^0_{n-1}} \int_{S^2} f^n(t,\overline{u}') f^n(t,\overline{v}') B(E^{n-1},\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}') d\omega \right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} .$$

Puisque ξ^n est bornée et ne dépend pas de $\bar{u}$, nous obtenons en procédant comme dans la preuve des Propositions 2.3-2.5, une estimation de la forme

$$\left\| \frac{1}{u^0_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi^n \, d\bar{v}}{v^0_{n-1}} \int_{S^2} f^n(t,\overline{u}') f^n(t,\overline{v}') B(E^{n-1},\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}') d\omega \right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f^n\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \; ;$$

d'ou l'on déduit que

$$\|(I_2)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C|E^n - E^{n-1}| \, \|f^n\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C|E^n - E^{n-1}| \; . \tag{3.3.10}$$

Pour obtenir une estimation pour la norme $H^2_d(\mathbb{R}^3)$ de (I_1), nous procédons exactement comme dans la preuve des Propositions 2.3-2.5. (Le terme B étant remplacé ici par la différence $\big(B(E^n,\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}') - B(E^{n-1},\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}')\big)$ et on utilise les hypothèses 1.5.14 faites sur B). Ce qui conduit à une estimation de la forme

$$\|(I_1)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C|E^n - E^{n-1}| \, \|f^n\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C|E^n - E^{n-1}| \; ; \tag{3.3.11}$$

et par suite on a

$$\left\| \frac{1}{u^0_n} \left[Q^+(E^n, f^n, f^n) - Q^+(E^{n-1}, f^n, f^n) \right] \right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C|E^n - E^{n-1}| \; .$$

De façon similaire, nous avons :

$$\|(II)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} = \left\| \frac{1}{u^0_n} \left[Q^-(E^n, f^n, f^n) - Q^-(E^{n-1}, f^n, f^n) \right] \right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C|E^n - E^{n-1}| \; ;$$

et nous déduisons que :

$$\left\| \frac{1}{u^0_n} \left[Q(E^n, f^n, f^n) - Q(E^{n-1}, f^n, f^n) \right] \right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \leq C|E^n - E^{n-1}| \; . \tag{3.3.12}$$

En ce qui concerne le second terme de 3.3.8, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\frac{1}{u_n^0}-\frac{1}{u_{n-1}^0}\right)Q(E^{n-1},f^n,f^n)\right\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\quad=\left\|\frac{u_{n-1}^0-u_n^0}{u_n^0}\,\frac{1}{u_{n-1}^0}Q(E^{n-1},f^n,f^n)\right\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\quad=\left|(E^{n-1})^2-(E^n)^2\right|\left\|\frac{|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0+u_n^0)u_n^0}\,\frac{1}{u_{n-1}^0}Q(E^{n-1},f^n,f^n)\right\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\quad\leq C\left|E^{n-1}-E^n\right|\left\|\frac{1}{u_{n-1}^0}Q(E^{n-1},f^n,f^n)\right\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\quad\leq C\left|E^{n-1}-E^n\right|\|f^n\|^2_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\\
&\quad\leq C\left|E^{n-1}-E^n\right|. \qquad (3.3.13)
\end{aligned}$$

où dans la première inégalité nous avons utilisé le fait que la fonction $\bar{u}\mapsto\frac{|\bar{u}|^2}{(u_{n-1}^0+u_n^0)u_n^0}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont bornées et appliqué le Lemme 3.1.

Pour le troisième terme de (3.3.8), nous appliquons directement la relation (2.3.18) pour obtenir

$$\left\|\frac{1}{u_{n-1}^0}\left[Q(E^{n-1},f^n,f^n)-Q(E^{n-1},f^{n-1},f^{n-1})\right]\right\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\leq C\|f^n-f^{n-1}\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\,. \qquad (3.3.14)$$

Finalement en additionnant (3.3.12)-(3.3.14) on obtient (3.3.7). Ce qui met fin à la preuve. □

Proposition 3.2. *Les hypothèses sont celles de la proposition précédente. Posons*

$$Y^n=(E^n,U^n,W^n,Z^n,\Phi^n,\psi^n)$$

alors les suite (X^n), (Y^n) *et* $(\frac{\partial f^n}{\partial t})$ *sont des suites de Cauchy respectivement dans les espaces de Banach* $\big(C^0([0,T_0];\mathbb{R})\big)^6\times C^0\big([0,T_0];H_d^2(\mathbb{R}^3)\big)$, $(C^1([0,T_0];\mathbb{R}))^6$ *et* $C^0\big([0,T_0];H_d^1(\mathbb{R}^3)\big)$ *éventuelement pour un* T_0 *petit.*

Preuve: Dans ce qui suit, la constante C dépend uniquement de C_0 et T_0 et diffère d'une ligne à l'autre.

1. Nous allons d'abord montrer que la suite (X^n) est de Cauchy dans $\big(C^0([0,T_0];\mathbb{R})\big)^6\times C^0\big([0,T_0];H_d^2(\mathbb{R}^3)\big)$.
   - En intégrant l'équation (3.2.9) on obtient :

$$E^{n+1}(t)-E^n(t)=\int_0^t\big(E^n(s)U^n(s)-E^{n-1}(s)U^{n-1}(s)\big)ds$$

ce qui donne

$$|E^{n+1}(t) - E^n(t)| \leq C(C_0)\int_0^t \Big(|E^n(s) - E^{n-1}(s)| + |U^n(s) - U^{n-1}(s)|\Big)ds$$

d'où nous déduisons que

$$|E^{n+1}(t)-E^n(t)|^2 \leq C\int_0^t \Big(|E^n(s)-E^{n-1}(s)|^2+|U^n(s)-U^{n-1}(s)|^2\Big)ds\ . \quad (3.3.15)$$

- De l'équation (3.2.10) nous avons :

$$\begin{aligned}U^{n+1}(t) - U^n(t) \quad = \quad & -\int_0^t \Bigg[\frac{3}{2}\Big((U^n(s))^2 - (U^{n-1}(s))^2\Big) + 2\pi\left(\frac{(Z^n)^2(s)}{(E^n)^2(s)} - \frac{(Z^{n-1})^2(s)}{(E^{n-1})^2(s)}\right)\\ & + 4\pi(E^n)^5(s)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v^1|^2}{v^0_n}f^n(s,\overline{v})d\overline{v}\\ & -4\pi(E^{n-1})^5(s)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v^1|^2}{v^0_{n-1}}f^{n-1}(s,\overline{v})d\overline{v}\\ & + 4\pi\Big(\psi^n(s) - \psi^{n-1}(s)\Big) - 2\pi m^2\Big((\Phi^n(s))^2 - (\Phi^{n-1}(s))^2\Big)\Bigg]ds\ ;\end{aligned}$$

qui implique (vu (3.3.6)) que

$$\begin{aligned}|U^{n+1}(t) - U^n(t)| \leq C\int_0^t \Big[&|E^n(s) - E^{n-1}(s)| + |U^n(s) - U^{n-1}(s)| + |Z^n(s) - Z^{n-1}(s)|\\ &+|\Phi^n(s) - \Phi^{n-1}(s)| + |\psi^n(s) - \psi^{n-1}(s)| + \|f^n(s,\cdot) - f^{n-1}(s,\cdot)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\Big]ds\ .\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|U^{n+1}(t) - U^n(t)|^2 \leq C\int_0^t \Big[&|E^n(s) - E^{n-1}(s)|^2 + |U^n(s) - U^{n-1}(s)|^2\\ &+|Z^n(s) - Z^{n-1}(s)|^2 + |\Phi^n(s) - \Phi^{n-1}(s)|^2 \qquad (3.3.16)\\ &+|\psi^n(s) - \psi^{n-1}(s)|^2 + \|f^n(s,\cdot) - f^{n-1}(s,\cdot)\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\Big]ds\ .\end{aligned}$$

- De l'équation (3.2.11) on a :

$$W^{n+1}(t) - W^n(t) = 3\int_0^t \Big(U^n(s)W^n(s) - U^{n-1}(s)W^{n-1}(s)ds\Big)\ ;$$

ce qui donne

$$|W^{n+1}(t) - W^n(t)| \leq C(C_0)\int_0^t \Big(|U^n(s) - U^{n-1}(s)| + |W^n(s) - W^{n-1}(s)|\Big)ds. \quad (3.3.17)$$

- De l'équation (3.2.12) on a :

$$Z^{n+1}(t) - Z^n(t) = 3\int_0^t \big(U^n(s)Z^n(s) - U^{n-1}(s)Z^{n-1}(s)ds\big)$$

ce qui donne

$$|Z^{n+1}(t)-Z^n(t)| \leq C(C_0)\int_0^t \big(|U^n(s)-U^{n-1}(s)|+|Z^n(s)-Z^{n-1}(s)|\big)ds\,. \tag{3.3.18}$$

- L'équation (3.2.13) donne :

$$\Phi^{n+1}(t)-\Phi^n(t) = \int_0^t \big(\sqrt{2\psi^n(s)}-\sqrt{2\psi^{n-1}(s)}\big)ds = 2\int_0^t \frac{\psi^n(s) - \psi^{n-1}(s)}{\sqrt{2\psi^n(s)} + \sqrt{2\psi^{n-1}(s)}}ds\,.$$

Afin de contrôler le dénominateur du terme de droite, nous utilisons l'équation (3.2.14) qui est $\dot{\psi}^{n+1} = -6U^n\psi^n - m^2\Phi^n\sqrt{2\psi^n} - \rho^2$. Puisque la suite (X^n) est uniformément bornée sur on $[0, T_0]$, nous avons $|-6U^n\psi^n - m^2\Phi^n\sqrt{2\psi^n} - \rho^2| \leq C_1$ et donc,

$$\frac{d\psi^{n+1}}{dt} \geq -C_1\,.$$

Cette dernière inégalité montre que $\psi^{n+1}(t) \geq \psi_0 - C_1 t$. Puisque $\psi_0 > 0$, nous pouvons choisir T_0 suffisamment petit de sorte que : $0 \leq C_1 t \leq \frac{\psi_0}{2}$, $\forall t \in [0, T_0]$ et obtenir $\psi^{n+1}(t) \geq \frac{\psi_0}{2}$. Ainsi, on a $\forall t \in [0, T_0]$, $\frac{1}{\sqrt{2\psi^{n+1}(t)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\psi_0}}$. Nous déduisons par conséquent l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$|\Phi^{n+1}(t) - \Phi^n(t)|^2 \leq C(C_0)\int_0^t |\psi^n(s) - \psi^{n-1}(s)|^2 ds\,. \tag{3.3.19}$$

- De l'équation (3.2.14) nous avons :

$$\begin{aligned}\psi^{n+1}(t) &- \psi^n(t)\\ &= \int_0^t \Big[6\big(U^n(s)\psi^n(s) - U^{n-1}(s)\psi^{n-1}(s)\big) + m^2\big(\Phi^n(s)\sqrt{2\psi^n(s)}\\ &\qquad -\Phi^{n-1}(s)\sqrt{\psi^{n-1}(s)}\big)\Big]ds\,.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{\sqrt{2\psi^{n+1}(t)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\psi_0}}$, nous déduisons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\psi^{n+1}(t)-\psi^n(t)|^2 \leq C\int_0^t \Big(|U^n(s)-U^{n-1}(s)|^2+|\Phi^n(s)-\Phi^{n-1}(s)|^2+|\psi^n(s)-\psi^{n-1}(s)|^2\Big)ds\,. \tag{3.3.20}$$

- En fin, de l'équation (3.2.15) nous avons :

$$\frac{\partial(f^{n+1}-f^n)}{\partial t}+\left(E^nZ^n\int_{\mathbb{R}^3}f^n(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(f^{n+1}-f^n)}{\partial u^i}$$
$$=\left(E^nZ^n\int_{\mathbb{R}^3}f^n(t,\overline{v})d\overline{v}-E^{n-1}Z^{n-1}\int_{\mathbb{R}^3}f^{n-1}(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^n}{\partial u^i}$$
$$+\left(\frac{1}{u_n^0}Q_n-\frac{1}{u_{n-1}^0}Q_{n-1}\right). \tag{3.3.21}$$

La suite (X^n) étant bornée, nous avons :

$$\left|E^n(t)Z^n(t)\int_{\mathbb{R}^3}f^n(t,\overline{v})d\overline{v}-E^{n-1}(t)Z^{n-1}(t)\int_{\mathbb{R}^3}f^{n-1}(t,\overline{v})d\overline{v}\right|$$
$$=\left|(E^n(t)-E^{n-1}(t))Z^n(t)\int_{\mathbb{R}^3}f^n(t,\overline{v})d\overline{v}+(Z^n(t)-Z^{n-1}(t))E^{n-1}\int_{\mathbb{R}^3}f^n(t,\overline{v})d\overline{v}\right.$$
$$\left.+E^{n-1}(t)Z^{n-1}(t)\int_{\mathbb{R}^3}(f^n-f^{n-1})(t,\overline{v})d\overline{v}\right|$$
$$\leq C\Big(|E^n(t)-E^{n-1}(t)|+|Z^n(t)-Z^{n-1}(t)|+\|f^n(t,\cdot)-f^{n-1}(t,\cdot)\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\Big).$$

Puisque $f^n\in H_d^3(\mathbb{R}^3)$, le premier terme du membre de droite de l'équation (3.3.21) est un élément de $H_d^2(\mathbb{R}^3)$ et on a

$$\left\|\left(E^n(t)Z^n(t)\int_{\mathbb{R}^3}f^n(t,\overline{v})d\overline{v}-E^{n-1}(t)Z^{n-1}(t)\int_{\mathbb{R}^3}f^{n-1}(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^n}{\partial u^i}(t,\cdot)\right\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leq C\Big(|E^n(t)-E^{n-1}(t)|+|Z^n(t)-Z^{n-1}(t)|+\|f^n(t,\cdot)-f^{n-1}(t,\cdot)\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\Big). \tag{3.3.22}$$

De plus (voir l'Inégalité 3.3.3 du Lemme 3.3),

$$\left\|\frac{1}{u_n^0}Q_n-\frac{1}{u_{n-1}^0}Q_{n-1}\right\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\leq C\left(|E^n-E^{n-1}|+\|f^n-f^{n-1}\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\right).$$

Ainsi, en appliquant le Corollaire (2.1) à l'équation (3.3.21) $\big($en prenant $k=2$, $u=f^{n+1}-f^n$, $u_{t_0}=0$ et f égale au second membre de (3.3.21) dans l'Inégalité (2.2.19)$\big)$ et faisant usage des deux dernières estimations, nous avons :

$$\|f^{n+1}(s,\cdot)-f^n(s,\cdot)\|^2_{H_d^2(\mathbb{R}^3)} \tag{3.3.23}$$
$$\leq C\int_0^t\Big(|E^n(s)-E^{n-1}(s)|^2+|Z^n(s)-Z^{n-1}(s)|^2+\|f^n(s,\cdot)-f^{n-1}(s,\cdot)\|^2_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\Big)ds.$$

Considérons l'espace

$$\Sigma_{T_0}:=\Big(\mathcal{C}\big([0,T_0]),\mathbb{R}\big)\Big)^6\times\mathcal{C}\big([0,T_0],H_d^2(\mathbb{R}^3)\big).$$

Muni de la norme

$$|||X|||:=\sum_{i=1}^{6}\sup_{0\leq t\leq T_0}|X_i(t)|+\sup_{0\leq t\leq T_0}\|X_7(t)\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}$$

où $X = (X_i)_{1\leq i\leq 7} \in \Sigma_{T_0}$, Σ_{T_0} est un espace de Banach.

Nous allons montrer qu'il existe une constante $\alpha \in]0,1[$ qui dépend uniquement de C_0 et T_0 tel que $|||X^{n+1} - X^n||| \leq \alpha |||X^n - X^{n-1}|||$ si T_0 est assez petit.

En additionnant les inégalités (3.3.15)-(3.3.20) et (3.3.23) nous avons :

$$\begin{aligned}
&|E^{n+1}(t) - E^n(t)|^2 + |U^{n+1}(t) - U^n(t)|^2 + |W^{n+1}(t) - W^n(t)|^2 + |Z^{n+1}(t) - Z^n(t)|^2 \\
&\qquad + |\Phi^{n+1}(t) - \Phi^n(t)|^2 + |\psi^{n+1}(t) - \psi^n(t)|^2 + \|f^{n+1}(t,\cdot) - f^n(t,\cdot)\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C \int_0^t \Big(|E^n(s) - E^{n-1}(s)|^2 + |U^n(s) - U^{n-1}(s)|^2 + |W^n(s) - W^{n-1}(s)|^2 \\
&\qquad + |Z^n(s) - Z^{n-1}(s)|^2 + |\Phi^n(s) - \Phi^{n-1}(s)|^2 + |\psi^n(s) - \psi^{n-1}(s)|^2 \\
&\qquad + \|f^n(s,\cdot) - f^{n-1}(s,\cdot)\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \Big) ds \ .
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

En prenant le sup dans (3.3.24) et en remarquant que pour $A \subset \mathbb{R}_+$, $\sup A^2 = (\sup A)^2$ et que pour $A, B \subset \mathbb{R}_+$, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{6} \sup_{0\leq t\leq T_0} |(X_i^{n+1} - X_i^n)(t)| + \sup_{0\leq t\leq T_0} \|(X_7^{n+1} - X_7^n)(t)\| \right)^2 \\
&\qquad \leq CT_0 \left(\sum_{i=1}^{6} \sup_{0\leq t\leq T_0} |(X_i^n - X_i^{n-1})(t)| + \sup_{0\leq t\leq T_0} \|(X_7^n - X_7^{n-1})(t)\| \right)^2 .
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$|||X^{n+1} - X^n||| \leq \sqrt{CT_0}|||X^n - X^{n-1}||| \ .$$

En choisissant T_0 suffisament petit de sorte que $CT_0 < 1$ et en posant $\alpha = \sqrt{CT_0}$, nous avons

$$|||X^{n+1} - X^n||| \leq \alpha |||X^n - X^{n-1}|||, \ \ 0 < \alpha < 1, \tag{3.3.25}$$

ce qui montre que la suite (X^n) est de Cauchy dans l'espace de Banach Σ_{T_0}.

2. Nous montrons à présent que la suite $(\frac{dY^n}{dt})$ est de Cauchy dans $\big(C^0([0,T_0];\mathbb{R})\big)^6$.
Puisque la suite (X^n) est bornée, des équations (3.2.9)-(3.2.14) nous déduisons l'existence d'une constante $C > 0$ qui dépend seulement de C_0 et T_0 tel que :

$$\left|\left|\left| \frac{dY^{n+1}}{dt} - \frac{dY^n}{dt} \right|\right|\right| \leq C|||Y^n - Y^{n-1}||| \ . \tag{3.3.26}$$

Notons que $|||Y^n - Y^{n-1}||| \leq |||X^n - X^{n-1}|||$ et l'inégalité (3.3.25) montre que :

$$\left|\left|\left| \frac{dY^{n+1}}{dt} - \frac{dY^n}{dt} \right|\right|\right| \leq C\alpha^{n-1}|||X^1 - X^0||| \ . \tag{3.3.27}$$

ce qui montre que la suite $(\frac{dY^n}{dt})$ est de Cauchy dans $\big(C([0,T_0],\mathbb{R})\big)^6$ et donc que la suite (Y^n) est de Cauchy dans l'espace $\big(C^1([0,T_0],\mathbb{R})\big)^6$.

3. Nous achevons notre preuve en montrant que la suite $(\frac{\partial f^n}{\partial t})$ est de Cauchy dans $C^0\big([0,T_0];H^1_d(\mathbb{R}^3)\big)$.

   De l'équation (3.3.21) nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial(f^{n+1}-f^n)}{\partial t}\right\|_{H^1_d(\mathbb{R}^3)} &\leq C\Big\{\left\|f^{n+1}-f^n\right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}+\left\|f^n-f^{n-1}\right\|_{H^1_d(\mathbb{R}^3)}\\ &\qquad +|E^n-E^{n-1}|+|Z^n-Z^{n-1}|\Big\}\\ &\leq C\big\{|||X^{n+1}-X^n|||+|||X^n-X^{n-1}|||\big\}\ .\end{aligned}$$

   Donc,

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\frac{\partial(f^{n+1}-f^n)}{\partial t}\right|\right|\right|_{C^0([0,T];H^1_d(\mathbb{R}^3))} &\leq C\big\{|||X^{n+1}-X^n|||+|||X^n-X^{n-1}|||\big\}\\ &\leq C\alpha^{n-1}|||X^1-X^0|||. \end{aligned}\tag{3.3.28}$$

   Ce qui montre que $(\frac{\partial f^n}{\partial t})$ est une suite de Cauchy dans $C^0\big([0,T_0];H^1_d(\mathbb{R}^3)\big)$.

□

Remarque 3.4. *Nous déduisons de la Proposition 3.2 que (f^n) est une suite de Cauchy dans l'espace $C^0\big([0,T_0];H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)\cap C^1\big([0,T_0];H^1_d(\mathbb{R}^3)\big)$.*

Remarque 3.5. *Nous notons et nous l'utiliserons plus tard que la suite $\big(\frac{\partial f^n}{\partial t}\big)$ est uniformément bornée dans $H^2_d(\mathbb{R}^3)$.*
En effet nous avons (vu que (X^n) est uniformément bornée dans $\big(\mathcal{C}^1_b([0,T_0])\big)^6\times\mathcal{C}^0\big([0,T_0];H^3_d(\mathbb{R}^3)\big)$) :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial f^n}{\partial t}(t,\cdot)\right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} &= \left\|\left(E^{n-1}Z^{n-1}\int_{\mathbb{R}^3}f^{n-1}(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^3\frac{\partial f^n}{\partial u^i}+\frac{1}{u^0_{n-1}}Q_{n-1}\right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq \left|E^{n-1}\right|\left|Z^{n-1}\right|\int_{\mathbb{R}^3}\left|f^{n-1}(t,\overline{v})\right|d\overline{v}\sum_{i=1}^3\left\|\frac{\partial f^n}{\partial u^i}\right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}+\left\|\frac{1}{u^0}Q(f^{n-1},f^{n-1})\right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq \big(|E^{n-1}||Z^{n-1}|\|f^{n-1}\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}\big)\|f^n\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}+\|f^{n-1}\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C(C_0)\ .\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence et l'unicité de la solution du système couplé Einstein-Maxwell-Boltzman-champ scalaire nmassif.

3.3.2 Existence locale en temps du système couplé

Théorème 3.1. *Soient r et d deux nombres réels positifs tels que $d \in \left]\frac{5}{2}, 3\right]$. Supposons que les données initiales $(E_0, U_0, W_0, Z_0, \Phi_0, \psi_0, f_0)$ du système (3.1.5)-(3.1.11) vérifient la contrainte Hamiltonienne (3.1.12) et sont tel ques :*

$$E_0 > 0, \quad W_0 < 0, \quad \Phi_0 > 0, \quad \psi_0 > 0, \quad f_0 > 0 \quad et \quad f_0 \in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)\,; \tag{3.3.29}$$

alors il existe un nombre réel positif T_0 qui ne dépend que de d et des données initiales et une unique solution $(E, U, W, Z, \Phi, \psi, f)$ du système (3.1.5)-(3.1.11) défini sur $[0, T_0]$ tels que

$$(E, U, W, Z, \Phi, \psi, f) \in \left(\mathcal{C}^1_b([0, T_0])\right)^6 \times \mathcal{C}^1\left([0, T_0] \times \mathbb{R}^3\right).$$

De plus,

$$f \in C^0\left([0, T_0]; H^3_d(\mathbb{R}^3)\right). \tag{3.3.30}$$

En conséquence, le système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire massif admet une unique solution locale.

$$(E, U, W, Z, \Phi, \psi, f) \in \left(C^1_b([0, T_0])\right)^6 \times C^0\left([0, T_0]; H^3_d(\mathbb{R}^3)\right).$$

Remarque 3.6. *La propriété (3.3.30) sera la propriété clé, devant nous permettre de prouver que la solution obtenue ci-dessus est globale.*

Preuve: 1) - Existence :

Dans un premier temps, nous prouvons que la suite (X^n) converge dans l'espace $\left(\mathcal{C}^1([0, T_0])\right)^6 \times \mathcal{C}^1\left([0, T_0] \times \mathbb{R}^3\right)$. De la proposition 3.2, nous savons que la suite $(Y^n)_n$ est une suite de Cauchy de l'espace de Banach $(C^1([0, T_0]; \mathbb{R}))^6$. Donc il existe une famille de fonctions $Y = (E, U, W, Z, \Phi, \psi)$ telle que (Y^n) converge vers Y dans $\left(\mathcal{C}^1([0, T_0])\right)^6$. De plus, la Proposition 3.2 nous montre aussi que $(f^n)_n$ est une suite de Cauchy de l'espace de Banach $C^0\left([0, T_0]; H^2_d(\mathbb{R}^3)\right)$. Il en ressort qu'il existe une fonction f telle que $(f^n)_n$ converge vers f dans l'espace $C^0\left([0, T_0]; H^2_d(\mathbb{R}^3)\right)$. Or l'espace $C^0\left([0, T_0]; H^2_d(\mathbb{R}^3)\right)$ s'injecte continûment dans l'espace $C^0\left([0, T_0]; H^2(\mathbb{R}^3)\right)$, donc (f^n) est une suite de Cauchy dans $C^0\left([0, T_0]; H^2(\mathbb{R}^3)\right)$. De l'inégalité d'interpolation (2.4.10), pour tout réel $s \in]2, 3[$ nous avons :

$$\|f^n(t, \cdot) - f^p(t, \cdot)\|_{(s)} \leq \|f^n(t, \cdot) - f^p(t, \cdot)\|^{s-2}_{H^3(\mathbb{R}^3)} \|f^n(t, \cdot) - f^p(t, \cdot)\|^{3-s}_{H^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.3.31}$$

Puisque $\big(f^n(t,\cdot)\big)_n$ est uniformément bornée dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$ donc dans $H^3(\mathbb{R}^3)$, l'inégalité (3.3.31) montre que $\big(f^n\big)_n$ est une suite de Cauchy dans $C^0\big([0,T_0];H^{(s)}(\mathbb{R}^3)\big)$ pour tout $s \in]2,\, 3[$.

De façon similaire, puisque la suite $\big(\frac{\partial f^n}{\partial t}\big)$ est uniformément bornée (voir Remarque 3.5) et est une suite de Cauchy dans $C^0\big([0,T_0];H^1_d(\mathbb{R}^3)\big)$, l'inégalité d'interpolation montre que $\big(\frac{\partial f^n}{\partial t}\big)$ est une suite de Cauchy dans $C^0\big([0,T_0];H^{(s)}(\mathbb{R}^3)\big)$ pour tout $s \in]1,\, 2[$. Nous déduisons donc que

$$(f^n) \text{ est une suite de Cauchy dans } C^0\big([0,T_0];H^{(s+1)}(\mathbb{R}^3)\big)\cap C^1\big([0,T_0];H^{(s)}(\mathbb{R}^3)\big); \quad 1 < s < 2. \tag{3.3.32}$$

Maintenant, des inégalités de Sobolev nous avons

$$C^0\big([0,T_0];H^{(s+1)}(\mathbb{R}^3)\big)\cap C^1\big([0,T_0];H^{(s)}(\mathbb{R}^3)\big) \hookrightarrow C^1_b([0,T_0]\times\mathbb{R}^3) \quad \text{pour tout} \quad s > \frac{3}{2}\,.$$

Cependant un choix particulier de s dans (3.3.32) tel que $\frac{3}{2} < s < 2$ montre que (f^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $C^1_b([0,T_0]\times\mathbb{R}^3)$ et donc converge vers une fonction $\tilde{f}$ dans $C^1([0,T_0]\times\mathbb{R}^3)$ et l'injection $C^0([0,T_0];H^2_d(\mathbb{R}^3)) \hookrightarrow C^0([0,T_0]\times\mathbb{R}^3)$ montre que $f=\tilde{f}$. Ce qui montre que la famille de fonction $X=(E,U,W,Z,\Phi,\psi,f)$ est la limite de la suite (X^n) dans l'espace $\big(\mathcal{C}^1([0,T_0])\big)^6\times\mathcal{C}^1\big([0,T_0]\times\mathbb{R}^3\big)$.

Dans un second temps, nous allons montrer que la famille de fonctions X est bien une solution du système (3.1.4)-(3.1.10). Puisque $(Y^n)_n$ converge vers $Y=(E,U,W,Z,\Phi,\psi)$ dans $(C^1([0,T_0];\mathbb{R}))^6$, en prenant la limite dans les Equations (3.2.9), (3.2.11)-(3.2.14) nous obtenons que E, U, W, Z, Φ and ψ vérifient les équations (3.1.4), (3.1.6) - (3.1.9).

Il faut montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t,\overline{v})d\overline{v}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v|^2}{v^0_n}f^n(t,\overline{v})d\overline{v}$ convergent respectivement vers $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v|^2}{v^0}f(t,\overline{v})d\overline{v}$, $\forall t\in[0,T]$ quand n tend vers $+\infty$. Nous notons que ces deux dernières intégrales convergent puisque $\forall t\in[0,T_0],\ f(t,\cdot)\in H^2_d(\mathbb{R}^3)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t,\overline{v})d\overline{v}-\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v}\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^3}|f^n(t,\overline{v})-f(t,\overline{v})|d\overline{v}\\ &\leq \|f^n(t,\cdot)-f(t,\cdot)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

ceci montre que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f^n(t,\overline{v})d\overline{v}\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\overline{v})d\overline{v}$, $\forall t\in[0,T_0]$.

De même en procédant comme dans la preuve de l'inégalité (3.3.6) du Lemme (3.3), nous avons

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v|^2}{v_n^0} f^n(t,\overline{v})d\overline{v} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v|^2}{v^0} f(t,\overline{v})d\overline{v} \right| \leq C\big(|E^n - E| + \|f^n(t,\cdot) - f(t,\cdot)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\big) \longrightarrow 0 .$$

Finalement nous montrons que $\frac{1}{u_n^0}Q(f^n,f^n) \longrightarrow \frac{1}{u^0}Q(f,f)$.

Comme nous l'avons fait dans la preuve de l'inégalité (3.3.7) du Lemme (3.3), nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{u_n^0}Q(f^n,f^n) - \frac{1}{u^0}Q(f,f) \right\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} &\leq C(T_0)\left(\|f^n\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\right)\left(|E^n - E| + \|f^n - f\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\right) \\ &\leq C(T_0)\left(C_0 + \|f\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\right)\left(|E^n - E| + \|f^n - f\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\right) . \end{aligned}$$

Donc, $\frac{1}{u_n^0}Q_n$ converge vers $\frac{1}{u^0}Q(f,f)$ dans l'espace $H^2_d(\mathbb{R}^3)$ et puisque $H^2_d(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^3)$, nous déduisons que $\frac{1}{u_n^0}Q_n$ converge vers $\frac{1}{u^0}Q(f,f)$ dans $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^3)$.

Nous pouvons donc prendre la limite dans les équations (3.2.10) et (3.2.15) et obtenir que $X = (E,U,W,Z,\Phi,\psi,f)$ vérifie les Equations (3.1.5) et (3.1.10). Ainsi X est une solution du système (3.1.4)- (3.1.10).

2)-Unicité :

Supposons qu'il existe deux familles de fonctions $X_i = (E_i,U_i,W_i,Z_i,\Phi_i,\psi_i,f_i),\ i = 1,2$ qui sont solutions du système (3.1.4)-(3.1.4) avec les mêmes données initiales. En procédant exactement comme nous l'avons fait dans la preuve de la Proposition 3.2, nous obtenons une estimation de $X_2 - X_1$ de la forme (3.3.24) avec X^{n+1} remplacé par X_2, X^n remplacé par X_1 dans le membre de gauche et dans le membre de droite X^n est remplacé par X_2 et X^{n-1} remplacé par X_1. Le lemme de Gronwall appliqué à l'inégalité obtenue montre que $X_1 = X_2$.

3)-Nous déduisons du Théorème 2.1 que $\forall t \in [0,T_0]$,

$$f(t,\cdot) \in H^3_d(\mathbb{R}^3) \text{ et } \|f(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \liminf \|f^{n_p}(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq C . \tag{3.3.33}$$

4)- Nous allons à présent prouver (3.3.30). Nous procèdons comme dans [29] en montrant dans un premier temps que la fonction f est faiblement continue et dans un second temps qu'elle est fortement continue.

Nous aurons besoin du lemme suivant dont la preuve est proposée en annexe.

Lemme 3.4. *L'espace $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3)$ des fonctions a support compact défines sur $\mathbb{R}^3$ est dense dans l'espace $H^3_d(\mathbb{R}^3)$.*

Continuité faible :

Soit F un élément du dual de $H^3_d(\mathbb{R}^3)$. Alors, du théorème de représentation de Riesz, il existe $\varphi_F \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$ telle que pour tout $h \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$,

$$F(h) = \langle h, \varphi \rangle_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} = \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha h(\bar{v}) \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha \varphi_F(\bar{v}) d\bar{v}.$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} F(f^n(t,\cdot)) - F(f(t,\cdot)) &= \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha f^n \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha \varphi_F d\bar{v} \\ &\qquad - \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha f \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha \varphi_F d\bar{v} \,. \end{aligned}$$

De par la densité de $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3)$ dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$, désignons par (φ_j) une suite de fonctions a supports compacts qui convergent vers φ_F dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$, alors

$$\begin{aligned} F(f^n(t,\cdot)) - F(f(t,\cdot)) &= \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha f^n(t,\, \bar{v}) \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha (\varphi_F - \varphi_j)(\bar{v}) d\bar{v} \\ &\quad - \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha f(t,\, \bar{v}) \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha (\varphi_F - \varphi_j)(\bar{v}) d\bar{v} \\ &\quad + \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha (f^n(t,\, \bar{v} - f^n(t,\, \bar{v}) \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha \varphi_j(\bar{v}) d\bar{v} \\ &\quad - \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha f(t,\, \bar{v}) \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha \varphi_j(\bar{v}) d\bar{v} \\ &= \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha (f^n - f)(t,\, \bar{v}) \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha (\varphi_F - \varphi_j)(\bar{v}) d\bar{v} \\ &\quad + \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha (f^n - f)(t,\, \bar{v}) \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha \varphi_j(\bar{v}) d\bar{v} \,. \end{aligned}$$

Nous déduisons vu que la suite $(f^n(t,\cdot))$ est uniformément bornée dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$ que :

$$\begin{aligned} \Big| F(f^n(t,\cdot)) - F(f(t,\cdot)) \Big| &\le C \|\varphi_F - \varphi_j\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \left| \sum_{|\alpha| \le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha (f^n - f)(t,\, \bar{v}) \cdot (1 + |\bar{v}|)^{d+|\alpha|} \partial^\alpha \varphi_j(\bar{v}) d\bar{v} \right| \end{aligned}$$

En choisissant j suffisamment grand tel que le premier terme du membre de droite soit inférieur ou égal à $\frac{\varepsilon}{2}$, et en choisissant n suffisamment grand, (dependant de j), tel que le second terme soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$, nous concluons que le terme de droite est inférieur ou égal à ε. Nous déduisons donc que $F(f^n(t,\cdot))$ converge uniformément vers $F(f(t,\cdot))$. Ce qui prouve que la solution f est faiblement continue.

Continuité forte :

Soit $t_0 \in [0, T_0)$. nous voulons montrer que $f : [0, T_0) \longrightarrow H^3_d(\mathbb{R}^3)$ est continuue en t_0, c'est-à-dire

$$\lim_{t \to t_0} \|f(t, \cdot) - f(t_0, \cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} = 0\,.$$

En utilisant le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ défini sur $H^3_d(\mathbb{R}^3)$, nous pouvons écrire pour $t \in [0, T_0)$:

$$\langle f(t, \cdot) - f_{t_0}, f(t, \cdot) - f_{t_0}\rangle = \langle f(t, \cdot), f(t, \cdot)\rangle - 2\langle f(t, \cdot), f_{t_0}\rangle + \langle f_{t_0}, f_{t_0}\rangle \tag{3.3.34}$$

Notons que le dernier terme du membre de droite de (3.3.34) correspond à $\|f_{t_0}\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$. Puisque f est faiblement continue, le deuxième terme du membre de droite tend vers $-2\|f_{t_0}\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$ quand t tend vers t_0.

Pour ce qui est du premier terme du membre de droite, nous supposons que $t > t_0$ et utilisons le faite qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$e^{-\delta(t-t_0)}\|f(t, \cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f(t_0, \cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C\int_{t_0}^{t} e^{-\delta s}\|f(s, \cdot)\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ds$$

et que $f(t, \cdot)$ est uniformément bornée, pour obtenir

$$\lim_{t \to t_0^+} \langle f(t, \cdot), f(t, \cdot)\rangle \leq \|f_{t_0}\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$$

En combinant ces observations avec (3.3.34), nous avons :

$$\lim_{t \to t_0^+} \langle f(t, \cdot) - f_{t_0}, f(t, \cdot) - f_{t_0}\rangle \leq 0$$

et puisque $\langle f(t, \cdot) - f_{t_0}, f(t, \cdot) - f_{t_0}\rangle \geq 0,\ \forall t \in [0, T_0)$, nous déduisons que :

$$\lim_{t \to t_0^+} \langle f(t, \cdot) - f_{t_0}, f(t, \cdot) - f_{t_0}\rangle = 0$$

c'est-à-dire que $f : [0, T_0) \longrightarrow H^3_d(\mathbb{R}^3)$ est continuue à droite sur $[0, T_0)$. Reste à prouver la continuité à gauche.

Considérons l'équation de Boltzmann 3.1.10, qui sécrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(EZ\int_{\mathbb{R}^3} f(t, \overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0}Q(f, f)$$

et soit $t_0 > 0$. Effectuons le changement de variable $s = t_0 - t$, alors

$$f(t, \bar{u}) = f(t_0 - s, \bar{u}) \equiv \tilde{f}(s, \bar{u}) \tag{3.3.35}$$

et on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, \bar{u}) = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(s, \bar{u}) \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial u^i}(t, \bar{u}) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i}(s, \bar{u}).$$

Ainsi l'équation 3.1.10 devient

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} + \Big(\tilde{E}\tilde{Z}\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(s,\overline{v})d\overline{v}\Big)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i} = -\frac{1}{\tilde{u}^0}Q(\tilde{f},\tilde{f}) \tag{3.3.36}$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{E}(s) = E(t_0 - s) \;\; \tilde{Z}(s) = Z(t_0 - s) \;\text{ et }\; \tilde{u}^0 = \sqrt{1+\tilde{E}^2|\bar{u}|^2} \\ \\ Q(\tilde{f},\tilde{f}) = Q^+(\tilde{f},\tilde{f}) - Q^-(\tilde{f},\tilde{f}) \\ \\ Q^+(\tilde{f},\tilde{f})(s,\overline{u}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\tilde{E}^3(s)}{\tilde{v}^0}d\overline{v}\int_{S^2}\tilde{f}(s,\overline{u}')\tilde{f}(s,\overline{v}')B\big(\tilde{E},\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}',\omega\big)d\omega \\ \\ Q^-(\tilde{f},\tilde{f})(s,\overline{u}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\tilde{E}^3(s)}{\tilde{v}^0}d\overline{v}\int_{S^2}\tilde{f}(s,\overline{u})\tilde{f}(s,\overline{v})B\big(\tilde{E},\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}',\omega\big)d\omega \end{cases}$$

Remarquons que l'équation 3.3.36 est de la même forme que l'équation 3.1.10 et au vu de 3.3.35, possède les mêmes propriétés que l'équation 3.1.10, nous pouvons déduire de la continuité à droite établie précédement que

$$\lim_{s\to 0^+}\|\tilde{f}(s,\cdot) - \tilde{f}(0,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} = 0\,.$$

Or

$$\begin{cases} \tilde{f}(s,\cdot) = f(t,\cdot) \\ s \longrightarrow 0^+ \Longleftrightarrow t \longrightarrow t_0^- \,; \end{cases}$$

donc nous pouvons déduire que

$$\lim_{t\to t_0^-}\|f(t,\cdot) - f(t_0,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} = 0\,.$$

Ce qui prouve la continuité à gauche. D'où (3.3.30). □

3.4 Existence globale des solutions du système Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire massif

3.4.1 Méthode

Dans cette section, nous prouvons via des hypothšes supplémentaires que la solution obtenue dans la section 3.3 est en faite globale. Pour cela, nous utilisons le critère de continuité (voir [31] pour plus de détails) qui stipule que la solution de l'équation (2.2.1) est globale si et seulement si $\|u(t,\cdot)\|$ n'explose pas en temps fini. En d'autres termes, si $\sup\limits_{t\in I}\|u(t,\cdot)\| < \infty$, alors la solution est globale.

Notons par $[0,\, T_*[$, $T_* > 0$, l'intervalle maximal d'existence de la solution du système (3.1.4)-(3.1.10) avec les données initiales définies par (3.1.11) et satisfaisant (3.1.12).

Supposons par l'absurde que $T_* < \infty$ (si $T_* = +\infty$ rien n'est plus à démontrer). Alors nous voulons montrer en utilisant l'argument de continuité que la solution $(E, U, W, Z, \Phi, \psi, f)$ est uniformément bornée sur $[0,\, T_*[$ par des constantes dépendant uniquement des données initiales, T_*, m, r et $\wedge$. Nous pouvons donc en déduire que cette solution peut s'étendre sur un intervalle plus grand $[0, T']$, ce qui contredit la maximalité de T_*. D'où $T_* = +\infty$ et par conséquent la solution est globale.
Nous allons maintenant donner quelques estimations concernant la solution locale obtenue au Théorème 3.1.

3.4.2 Estimations à priori et existence globale

Lemme 3.5. *En ajout aux hypothèses du Théorème 3.1, supposons que $U_0 > 0$ et que la constante cosmologique satisfait $\Lambda > -4\pi m^2\Phi_0$. Alors la solution $(E, U, W, Z, \Phi, \psi, f)$ définie sur $[0, T_*)$ du système (3.1.4)-(3.1.10) avec les données initiales données par (3.3.29) vérifie les inégalités suivantes :*

$$\begin{cases} \left(\frac{\wedge}{3} + \frac{4\pi}{3} m^2\Phi^2(0)\right)^{1/2} \leq U(t) \leq U_0;\ 0 \leq E(t) \leq E_0;\ \ 0 \leq \frac{1}{E} \leq \frac{1}{E_0} e^{U_0 T_*} \\ |Z(t)| \leq |Z_0|,\ \ |\Phi| \leq \left(\frac{3U_0^2 - \wedge}{4\pi m^2}\right)^{1/2};\ \ 0 \leq \psi \leq \frac{3U_0^2-\wedge}{8\pi};\ \ |W| \leq |W_0| + \frac{\rho^2}{3U_0} e^{3U_0 T_*} \end{cases} . \quad (3.4.1)$$

Preuve: Avec le changement de variables (3.1.1), la contrainte Hamiltonienne (3.0.1) s'écrit :

$$3U^2 - \wedge = 8\pi E^3 \int_{\mathbb{R}^3} v^0 f(t, \overline{v}) d\overline{v} + 12\pi \frac{Z^2}{E^2} - 8\pi W + 4\pi(2\psi + m^2\Phi^2)\ . \quad (3.4.2)$$

En multipliant (3.1.5) par (-2) et en l'ajoutant à (3.4.2) nous avons :

$$\dot{U} = -4\pi\Big[E^5 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^1)^2}{v^0} f(t, \overline{v}) d\overline{v} + E^3 \int_{\mathbb{R}^3} v^0 f(t, \overline{v}) d\overline{v}\Big] - 8\pi \frac{E^2}{Z^2} + 4\pi W - 8\pi\psi\ . \quad (3.4.3)$$

Mais vu (3.1.1) nous avons $W \leq 0$, donc (3.4.3) implique que $\dot{U} \leq 0$, d'où U est décroissante.
La contrainte Hamiltonienne (3.4.2) entraîne, puisque Φ est croissante et positive que :

$$U^2 \geq \frac{\wedge}{3} + \frac{4\pi}{3} m^2 \Phi_0^2\ . \quad (3.4.4)$$

Mais par hypothèse, $\wedge \geq -4\pi m^2\Phi_0^2$ donc, (3.4.4) est équivalente à :

$$\left(U - \sqrt{\frac{\wedge}{3} + \frac{4\pi}{3}m^2\Phi^2(0)}\right)\left(U + \sqrt{\frac{\wedge}{3} + \frac{4\pi}{3}m^2\Phi^2(0)}\right) \geq 0 \,;$$

qui implique :

$$U \leq -\sqrt{\frac{\wedge}{3} + \frac{4\pi}{3}m^2\Phi^2(0)} \qquad \text{ou} \qquad U \geq \sqrt{\frac{\wedge}{3} + \frac{4\pi}{3}m^2\Phi^2(0)}\,.$$

Maintenant, des hypothsès, $U_0 > 0$ et puisque U est une fonction continue, nous ne pouvons avoir que

$$U \geq \sqrt{\frac{\wedge}{3} + \frac{4\pi}{3}m^2\Phi^2(0)}\,, \tag{3.4.5}$$

et du fait que U est décroissante, nous déduisons que :

$$\sqrt{\frac{\wedge}{3} + \frac{4\pi}{3}m^2\Phi^2(0)} \leq U \leq U_0\,. \tag{3.4.6}$$

• Du fait que $E > 0$ et $U > 0$, on a : $\dot{E} = -UE < 0$. Intégrant sur $[0, t]$, $t > 0$, nous avons :

$$0 \leq E(t) \leq E_0\,.$$

De plus, l'équation $\dot{E} = -EU$ donne $-\frac{\dot{E}}{E} = U$. En intégrant cette dernière sur $[0, t]$, $t > 0$ nous avons :

$$\frac{E_0}{E} = e^{\int_0^t U(s)ds} \leq e^{U_0 t}\,,$$

D'où l'on déduit :

$$0 \leq \frac{1}{E(t)} \leq \frac{1}{E_0}e^{U_0 t} \leq \frac{1}{E_0}e^{U_0 T_*}\,.$$

$$0 \leq E \leq E_0 = \frac{1}{a_0}\,. \tag{3.4.7}$$

• De l'équation (3.1.7) nous avons $\dot{Z} = -3UZ$ et puisque $U \geq 0$ et bornée, nous déduisons que :

$$|Z(t)| \leq |Z_0|\,. \tag{3.4.8}$$

• La contrainte Hamiltonienne (3.4.2) implique

$$\begin{cases} 8\pi\psi \leq 3U^2 - \wedge \\ 4\pi m^2\Phi^2 \leq 3U^2 - \wedge \end{cases}$$

et puisque $0 \leq U(t) \leq U_0$ et Φ, $\psi > 0$, nous avons

$$\begin{cases} |\psi| \leq \frac{3U_0^2 - \wedge}{8\pi} \\ |\Phi| \leq \sqrt{\frac{3U_0^2 - \wedge}{4\pi m^2}} \end{cases}$$

• Finalement, en intégrant sur $[0,\, t]$ l'équation (3.1.6) nous avons :

$$W(t) = e^{-\int_0^t 3U(s)ds}\left[W(0) - \rho^2 \int_0^t e^{\int_0^s 3U(\tau)d\tau} ds\right]$$

et puisque $0 \leq U \leq U_0$ nous avons :

$$|W(t)| \leq |W(0)| + \rho^2 \int_0^t e^{3U_0 s} ds \leq |W_0| + \frac{\rho^2}{3U_0} e^{U_0 t}$$

Donc

$$|W(t)| \leq |W_0| + \frac{\rho^2}{3U_0} e^{U_0 T_*}$$

D'où le lemme. □

Nous allons a présent énoncer et prouver l'existence d'une solution unique globale du système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire massif avec constante cosmologique. Ce résultat comme nous l'avons mentionné en introduction, est le principal résultat de notre travail et qui a fait l'objet d'une publication.

Théorème 3.2. *Soient r et d deux nombres réels positifs tels que $d \in \left]\frac{5}{2},\, 3\right]$. Supposons que les données initiales $(E_0,\, U_0,\, W_0,\, Z_0,\, \Phi_0,\, \psi_0,\, f_0)$ du système (3.1.5)-(3.1.11) vérifient la contrainte Hamiltonienne (3.1.12) et (3.3.29).*
Si $U_0 > 0$, $\Lambda > -4\pi m^2 \Phi_0$ et r (la norme de f_0 dans l'espace $H^3_d(\mathbb{R}^3)$) est suffisamment petit, alors la solution locale $(E,\, U,\, W,\, Z,\, \Phi,\, \psi,\, f)$ du système (3.1.4)-(3.1.10) obtenue au Théorème 3.1 est globale en temps.

Preuve: Comme nous l'avons mentionné plus haut, il suffit de prouver que la famille des fonctions $X = (E, U, W, Z, \Phi, \psi, f)$, solution du système (3.1.4)-(3.1.10) est uniformément bornée sur $[0,\, T_*[$.
Puisque les fonctions (E, U, W, Z, Φ, ψ) sont uniformément bornée en vertu du Lemme 3.5, il nous reste à prouver que si r est suffisamment petit, alors

$$\sup_{0 \leq t < T_*} \|f(t, \cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} < +\infty\,.$$

Pour cela, il nous suffit de montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\sup_{t \in [0, T_*)} \|e^{-\delta_1 t/2} f(t, \cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq M\,.$$

Nous utilisons l'argument de continuité. Par hypothèse, $f_0 \in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$ donc $\|f_0\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq r$ et par la continuité de f (voir (3.3.30))

$$e^{-\delta_1 t/2}\|f(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq 4r \tag{3.4.9}$$

sur un sous intervalle de $[0, T_*)$. Désignons par $[0, T_1]$ le plus grand intervalle sur lequel (3.4.9) est vraie et montrons que si r est suffisamment petit, alors sur l'intervalle $[0, T_1]$ l'inégalité (3.4.9) implique la même inégalité avec la constante 4 remplacée par 2. Il en ressort par continuité qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que (3.4.9) soit vraie sur $[0, T_1 + \epsilon]$ ce qui contredit la maximalité de T_1 et par conséquent $T_1 = T_*$.

Rappelons que f est une solution C^1 de l'E.D.P hyperbolique (3.1.10) satisfaisant aux hypothèses du Corollaire 2.1 avec $n = k = 3$. Ainsi l'inégalité (2.2.19) s'écrit pour $t = 0$, $u = f$ et $f = \frac{1}{u^0}Q(f,f)$:

$$e^{-\delta_1 t}\|f(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C\int_0^t e^{-\delta_1 s}\left\|\frac{1}{u^0}Q(f,f)\right\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ds\ .$$

Cette dernière inégalité implique, faisant usage de (2.3.15) et de (3.4.9) que

$$e^{-\delta_1 t}\|f(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_0\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} + 16Cr^2\int_0^t e^{\delta_1 s}\cdot e^{-\delta_1 s}\|f(s,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ds\ .$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall's, on obtient :

$$e^{-\delta_1 t}\|f(t,\cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} e^{16r^2\frac{e^{\delta_1 T_0}-1}{\delta_1}} \leq r^2 e^{16r^2\frac{e^{\delta_1 T_1}-1}{\delta_1}}\ .$$

Notons que $\lim\limits_{r\to 0^+} e^{16r^2\frac{e^{\delta_1 T_1}-1}{\delta_1}} = 1$, donc il existe $r_0 > 0$ petit tel que

$$0 < r \leq r_0 \quad \Longrightarrow e^{16r^2\frac{e^{\delta_1 T_1}-1}{\delta_1}} \leq 4 \qquad \text{i.e.}\quad e^{-\delta_1 t/2}\|f(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq 2r\ .$$

Maintenant fixons le nombre réel r tel que $0 < r \leq r_0$ et prenons f_0 dans $H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$. Alors $\sup\limits_{t\in[0,T_1]} e^{-\delta_1 t/2}\|f(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq 2r$. Par continuité, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que $\sup\limits_{t\in[0,T_1+\epsilon]} e^{-\delta_1 t/2}\|f(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq 4r$. Ce qui contredit la maximalité de T_1 et par conséquent $T_1 = T_*$. Nous avons donc prouver que

$$\sup_{t\in[0,T_*)}\|e^{-\delta_1 t/2}f(t,\cdot)\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq 4r\ . \tag{3.4.10}$$

Ce qui montre que f est uniformément bornée sur $[0,\ T_*[$ et par conséquent $X = (E, U, W, Z, \Phi, \psi, f)$ est uniformément bornée sur $[0,\ T_*[$ pour la norme $H^3_d(\mathbb{R}^3)$. Ainsi on déduit du critère de continuation que $X = (E, U, W, Z, \Phi, \psi, f)$ peut s'étendre au delà de T_* ; ce qui contredit la maximalité de T_*. Donc $T_* = +\infty$ et la solution $X = (E, U, W, Z, \Phi, \psi, f)$ est globale.

Puisque le système Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champs scalaire massif (1.1.2)-(1.1.5) est équivalent au système (3.1.4)-(3.1.10), on déduit que le système Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champs scalaire massif admet une unique solution globale. $\square$

Chapitre Quatre

PROPRIETES DE LA SOLUTION DU SYSTEME

Nous étudions dans ce chapitre la positivité de l'équation de Boltzmann, la complétude géodésique de l'espace temps et la stabilité de la solution du système Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire obtenue au chapitre précédent. La section 1 est consacrée à la positivité de l'équation de Boltzmann, la section 2 à la stabilité et la section 3 à la complétude géodésique.

4.1 Positivité de la solution de l'équation de Boltzmann

Nous allons construire une nouvelle suite des itérées (g^n) qui sera constituée des fonctions positives et qui converge vers la fonction f solution de l'équation de Boltzmann. Cela nous permettra de conclure que f est positive comme limite d'une suite de fonctions positives.

4.1.1 Construction de la suite (g^n)

Soit $T > 0$, et $f_0 \in H^3_{d,r}(\mathbb{R}^3)$. Nous construisons la suite (g^n) comme étant l'unique solution sur $[0, T]$ de l'équation :

$$\frac{\partial g^{n+1}}{\partial t} - \Big(\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3} g^n(t,\overline{v})d\overline{v}\Big)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g^{n+1}}{\partial u^i} = \frac{1}{u^0}\left(Q^+(g^n,g^n) - Q^-(g^n,g^{n+1})\right) \; ; \qquad (4.1.1)$$

avec la donnée initiale

$$g^{n+1}(0) = f_0 \, .$$

Notons que

$$\begin{aligned} Q^-(g^n, g^{n+1})(t, \overline{u}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{a^{-3}(t)}{v^0} d\overline{v} \int_{S^2} g^n(t, \overline{u}) g^{n+1}(t, \overline{v}) \tilde{B}\big(a(t), \overline{u}, \overline{v}, \overline{u}', \overline{v}', \omega\big) d\omega \\ &= g^{n+1}(t, \overline{u}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{a^{-3}(t)}{v^0} d\overline{v} \int_{S^2} g^n(t, \overline{v}) \tilde{B}\big(a(t), \overline{u}, \overline{v}, \overline{u}', \overline{v}', \omega\big) d\omega \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $G_n = \frac{1}{u^0} Q^+(g^n, g^n)$ et $R_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{a^{-3}(t)}{u^0 v^0} d\overline{v} \int_{S^2} g^n(t, \overline{v}) \tilde{B}\big(a(t), \overline{u}, \overline{v}, \overline{u}', \overline{v}', \omega\big) d\omega$, l'équation (4.1.1) s'écrit :

$$\frac{\partial g^{n+1}}{\partial t} - \Big(\frac{F^{01}}{a} \int_{\mathbb{R}^3} g^n(t, \overline{v}) d\overline{v}\Big) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g^{n+1}}{\partial u^i} + R_n g^{n+1} = G_n . \tag{4.1.2}$$

Remarque 4.1. *Si la suite* (g^n) *est bornée dans* $H^3_d(\mathbb{R}^3)$*, alors les fonctions* $(t, \overline{u}) \longrightarrow \frac{F^{01}}{a} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} g^n(t, \overline{v}) d\overline{v}$ *et* R_n *vérifient les hypothèse du Corollaire 2.1. En effet* $(t, \overline{u}) \longrightarrow \frac{F^{01}}{a} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} g^n(t, \overline{v}) d\overline{v}$ *est bornée et ne dépend pas de* $\overline{u}$ *et*

$$\begin{aligned} |(1 + |\overline{u}|)^{|\alpha|} \partial^\alpha R_n| &\leq |(1 + |\overline{u}|)^{|\alpha|} \partial^\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{a^{-3}(t)}{u^0 v^0} d\overline{v} \int_{S^2} |g^n(t, \overline{v}) \tilde{B}\big(a(t), \overline{u}, \overline{v}, \overline{u}', \overline{v}', \omega\big)| d\omega \\ &\leq C \|g^n\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} . \end{aligned}$$

La deuxième inégalité étant obtenue en repétant intégralement la preuve de l'inégalité (2.3.15) de la Proposition 2.7. Nous déduisons en vertu du Corollaire 2.1 que la fonction g^{n+1} *vérifie l'inégalité :*

$$e^{-\delta t} \|g^{n+1}(t, \cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_1 \int_0^t \Big\| e^{-\delta s} \frac{1}{u^0} Q(g^n, g^n)(s, \cdot) \Big\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ds .$$

ce qui donne

$$\|g^{n+1}(t, \cdot)\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\|f_0\|^2_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} + C_2 \int_0^t \|g^n(s, \cdot)\|^4_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} ds \right) e^{\delta_1 t} \tag{4.1.3}$$

D'où l'on déduit que la solution g^{n+1} *de l'équation* (4.1.1) *est un élément de l'espace* $C^0\big([0, T), H^3_d(\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0, T), H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$*. L'inégalité (4.1.3) permet de montrer par récurrence que la suite* (g^n) *est bornée dans l'espace* $H^3_{d,2r}(\mathbb{R}^3)$ *.*

Nous avons donc construit une suite (g^n) *définie sur un intervalle* $[0, T[$*,* $T > 0$ *telle que :*

$$g^n \in C^0\big([0, T), H^3_d(\mathbb{R}^3)\big) \cap C^1\big([0, T), H^2_d(\mathbb{R}^3)\big) .$$

4.1.2 Convergence de la suite (g^n)

Notons que la suite (g^n) est construite comme solution de l'équation suivante

$$\frac{\partial g^{n+1}}{\partial t} - \Big(\frac{F^{01}}{a}\int_{\mathbb{R}^3} g^n(t,\overline{v})d\overline{v}\Big)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g^{n+1}}{\partial u^i} + R_n g^{n+1} = \frac{1}{u^0}Q^+(g^n,g^n)\,.$$

En procédant de la même façon comme dans la section 4 du chapitre 2, on montre que la suite (g^n) converge vers une unique fonction solution de l'équation de Boltzmann.

4.1.3 positivité

Nous montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^n \geq 0$.

- Par définition, $g^0 = f_0 \geq 0$.
- Supposons $g^n \geq 0$ et montrons que $g^{n+1} \geq 0$. Pour cela, nous considérons le système caractéristique associé à l'équation (4.1.2), qui s'écrit (en prenant t comme paramètre et $h^n(t) = g^{n+1}(t,\overline{u}(t))$)

$$(S_c)\ :\ \begin{cases} \frac{du^i}{dt} = -\frac{F^{01}}{a}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} g^n(\overline{v})d\overline{v} & i=1,2,3\\ \frac{dh^n}{dt} = G_n(t) - R_n(t)h^n(t) \end{cases}$$

Soit r_n la fonction définie par $\frac{dr_n}{dt} = R_n(t)$, alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{r_n}h^n)(t) &= \frac{dr_n(t)}{dt}h^n(t)e^{r_n(t)} + e^{r_n(t)}\frac{dh^n(t)}{dt}\\ &= R_n(t)h^n(t)e^{r_n(t)} + (G_n(t) - h^n(t)R_n(t))e^{r_n(t)}\\ &= e^{r_n(t)}G_n(t) \end{aligned}$$

Vu que $G_n \geq 0$ (car $g^n \geq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence) et $h^n(0) = f_0(\bar{u}(t)) \geq 0$, l'on déduit que $h^n(t) \geq 0$, $\forall t$ et par conséquent que $g^{n+1} \geq 0$.

4.2 Stabilité

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, la solution globale* (E,U,W,Z,Φ,ψ,f) *du système Einstein-Maxwell-Bolzmann-Champ scalaire est stable dans l'espace* $\big(C([0,T],\mathbb{R})\big)^6\times L^\infty\big([0,T],H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$, *pour tout* $T>0$.

PREUVE: Soient $(E_0^i, U_0^i, W_0^i, Z_0^i, \Phi_0^i, \psi_0^i, f_0^i) \in \mathbb{R}^6 \times H_d^3(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2$ tel que

$$\max\Big(\|f_0^1\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)},\ \|f_0^2\|_{H_d^3(\mathbb{R}^3)}\Big) \text{ soit suffisamment petit}$$

Soients $(E_i, U_i, W_i, Z_i, \Phi_i, \psi_i, f_i)_{i=1,2}$ deux solutions du système $(3.1.4) - (3.1.10)$ avec les données initiales

$$E^i(0) = E_0^i,\ U^i(0) = U_0^i,\ W^i(0) = W_0^i,\ Z^i(0) = Z_0^i,\ \Phi^i(0) = \Phi_0^i,\ \psi^i(0) = \psi_0^i \text{ et } f^i(0) = f_0^i$$

Nous voulons prouver que pour tout $T > 0$:

$$\begin{aligned}
&|E^1 - E^2|(t) + |U^1 - U^2|(t) + |W^1 - W^2|(t) + |Z^1 - Z^2|(t) + |\Phi^1 - \Phi^2|(t) \\
&\qquad\qquad\qquad + |\psi^1 - \psi^2|(t) + \|(f^1 - f^2)(t)\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C(T)\Big(|E_0^1 - E_0^2| + |U_0^1 - U_0^2| + |W_0^1 - W_0^2| + |Z_0^1 - Z_0^2| + |\Phi_0^1 - \Phi_0^2| \\
&\qquad\qquad\qquad + |\psi_0^1 - \psi_0^2| + \|f_0^1 - f_0^2\|_{H_d^2(\mathbb{R}^3)}\Big)\,, \quad \forall t \in [0; T]\,.
\end{aligned}$$

Soit $T > 0$. Considérons le système :

$$\begin{cases}
\dot{E}^i = -U^i E^i & (4.2.1)\\
\dot{U}^i = -\dfrac{3}{2}(U^i)^2 + \dfrac{\Lambda}{2} - 4\pi (E^i)^5 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^1)^2}{v^0} f^i(t, \overline{v}) d\overline{v} - \frac{2\pi}{(E^i)^2}(Z^i)^2 & \\
\qquad\qquad -2\pi(2\psi^i - m^2(\Phi^i)^2) & (4.2.2)\\
\dot{W}^i = -3U^i W^i - \rho^2 & (4.2.3)\\
\dot{Z}^i = -3U^i Z^i & (4.2.4)\\
\dot{\Phi}^i = \sqrt{2\psi^i} & (4.2.5)\\
\dot{\psi}^i = -6U^i \psi^i - m^2 \Phi^i \sqrt{2\psi^i} - \rho^2 & (4.2.6)\\
\dfrac{\partial f^i}{\partial t} - \Big(E^i Z^i \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f^i(t, \overline{v}) d\overline{v}\Big) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f^i}{\partial u^j} = \frac{1}{u^0} Q(f^i, f^i) & (4.2.7)
\end{cases}$$

soustrayant les équations (4.2.1) pour $i = 1$ et $i = 2$, nous avons :

$$\frac{d(E^1 - E^2)(t)}{dt} = U^2(t)(E^2 - E^1)(t) + E^1(t)(U^2 - U^1)(t)\,.$$

Après intégration, nous obtenons.

$$(E^1 - E^2)(t) = E_0^1 - E_0^2 + \int_0^t \Big(U^2(t)(E^2 - E^1)(t) + E^1(t)(U^2 - U^1)(t)\Big)\, dt\,.$$

Utilisant le fait que E^i et U^i sont bornées, nous déduisons que :

$$\big|E^1 - E^2\big|^2(t) \leq \big|E_0^1 - E_0^2\big|^2 + C \int_0^t \Big[\big|E^1 - E^2\big|^2(s) + \big|U^1 - U^2\big|^2(s)\Big]\, ds\,. \qquad (4.2.8)$$

De façon similaire, utilisant les équations (4.2.2)-(4.2.6) et le fait que les fonctions E^i, U^i, W^i, Z^i, Φ^i, ψ^i et f^i sont bornées, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\left|U^1-U^2\right|^2(t) \leq &\left|U_0^1-U_0^2\right|^2 \\ &+C\int_0^t\Big[\big(\left|E^1-E^2\right|^2+\left|U^1-U^2\right|^2+\left|Z^1-Z^2\right|^2+\left|\Phi^1-\Phi^2\right|^2 \\ &\qquad +\left|\psi^1-\psi^2\right|^2\big)(s)+\|(f^1-f^2)(s)\|^2\Big]\,ds\,.\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$\left|W^1-W^2\right|^2(t) \leq \left|W_0^1-W_0^2\right|^2+C\int_0^t\Big[\left|W^1-W^2\right|^2(s)+\left|U^1-U^2\right|^2(s)\Big]\,ds\,. \tag{4.2.10}$$

$$\left|Z^1-Z^2\right|^2(t) \leq \left|Z_0^1-Z_0^2\right|^2+C\int_0^t\Big[\left|Z^1-Z^2\right|^2(s)+\left|U^1-U^2\right|^2(s)\Big]\,dt\,. \tag{4.2.11}$$

$$\left|\Phi^1-\Phi^2\right|^2(t) \leq \left|\Phi_0^1-\Phi_0^2\right|^2+C\int_0^t\left|\psi^1-\psi^2\right|^2(s)dt\,. \tag{4.2.12}$$

$$\left|\psi^1-\psi^2\right|^2(t) \leq \left|\psi_0^1-\psi_0^2\right|^2+C\int_0^t\Big[\left|\psi^1-\psi^2\right|^2(s)+\left|U^1-U^2\right|^2(s)+\left|\Phi^1-\Phi^2\right|^2(s)\Big]\,dt\,. \tag{4.2.13}$$

De l'Equation (4.2.7), nous avons après soustraction

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(f^1-f^2)}{\partial t}-\left(E^2Z^2\int_{\mathbb{R}^3}f^2(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^3\frac{\partial(f^1-f^2)}{\partial u^i} \\ &\quad=\frac{1}{u_2^0}Q_2(f^2,f^2)-\frac{1}{u_1^0}Q_1(f^1,f^1)+\left(E^1Z^1\int_{\mathbb{R}^3}f^1(t,\overline{v})d\overline{v}-E^2Z^2\int_{\mathbb{R}^3}f^2(t,\overline{v})d\overline{v}\right)\sum_{i=1}^3\frac{\partial f^1}{\partial u^i}\,;\end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité d'énergie établie au corollaire 2.1, nous avons l'inégalité :

$$\begin{aligned}&e^{-\delta_1 t}\|(f^1-f^2)(t)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad\leq\|f_0^1-f_0^2\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}+C\int_0^t e^{-\delta_1 s}\Big(|E^1(s)-E^2(s)|^2+|Z^1(s)-Z^2(s)|^2 \\ &\qquad\qquad+\|f^1(s,\cdot)-f^2(s,\cdot)\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\Big)ds\,;\end{aligned}$$

de laquelle nous déduisons :

$$\begin{aligned}&\|(f^1-f^2)(t)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad\leq C_0\big\|f_0^1-f_0^2\big\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}+C_1\int_0^t\Big(\left|E^1(s)-E^2(s)\right|^2+\left|Z^1(s)-Z^2(s)\right|^2 \\ &\qquad\qquad+\big\|f^1(s,\cdot)-f^2(s,\cdot)\big\|^2_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\Big)ds\,.\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

$\forall t \in [0,\, T]$.

En additionnant les inégalités (4.2.8)-(4.2.14), nous avons :

$$\begin{aligned}
&\Big(|E^1 - E^2|(t) + |U^1 - U^2|(t) + |W^1 - W^2|(t) + |Z^1 - Z^2|(t) + |\Phi^1 - \Phi^2|(t) + |\psi^1 - \psi^2|(t) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \|(f^1 - f^2)(t)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\Big)^2 \\
&\quad \leq C_1 \left(|E^1_0 - E^2_0| + |U^1_0 - U^2_0| + |W^1_0 - W^2_0| + |Z^1_0 - Z^2_0| + |\Phi^1_0 - \Phi^2_0| \right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \, |\psi^1_0 - \psi^2_0| + \|f^1_0 - f^2_0\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\right)^2 \\
&\quad + C_2 \int_0^t \Big[|E^1(s) - E^2(s)| + |U^1(s) - U^2(s)| + |W^1(s) - W^2(s)| + |Z^1(s) - Z^2(s)| \\
&\qquad\qquad + |\Phi^1(s) - \Phi^2(s)| + |\psi^1(s) - \psi^2(s)| + \|f^1(s,\cdot) - f^2(s,\cdot)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\Big]^2 ds \;.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\Big(|E^1 - E^2|(t) + |U^1 - U^2|(t) + |W^1 - W^2|(t) + |Z^1 - Z^2|(t) + |\Phi^1 - \Phi^2|(t) + |\psi^1 - \psi^2|(t) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|(f^1 - f^2)(t)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\Big)^2 \\
&\quad \leq C(T) \left(|E^1_0 - E^2_0| + |U^1_0 - U^2_0| + |W^1_0 - W^2_0| + |Z^1_0 - Z^2_0| + |\Phi^1_0 - \Phi^2_0| \right.\\
&\qquad\qquad \left. + |\Phi^1(s) - \Phi^2(s)| + |\psi^1_0 - \psi^2_0| + \|f^1_0 - f^2_0\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\right)^2 \;,
\end{aligned}$$

et nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
&|E^1 - E^2|(t) + |U^1 - U^2|(t) + |W^1 - W^2|(t) + |Z^1 - Z^2|(t) + |\Phi^1 - \Phi^2|(t) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + |\psi^1 - \psi^2|(t) + \|(f^1 - f^2)(t)\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)} \\
&\quad \leq C(T) \left(|E^1_0 - E^2_0| + |U^1_0 - U^2_0| + |W^1_0 - W^2_0| + |Z^1_0 - Z^2_0| + |\Phi^1_0 - \Phi^2_0| \right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \, |\psi^1_0 - \psi^2_0| + \|f^1_0 - f^2_0\|_{H^2_d(\mathbb{R}^3)}\right) \;.
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

$\forall t \in [0,\, T]$, $T > 0$ étant arbitraire.

L'inégalité (4.2.15) montre que la solution globale $(E, U, W, Z, \Phi, \psi, f)$ du système Einstein-Maxwell-Bolzmann-Champ scalaire est stable dans l'espace $\big(C([0,T],\mathbb{R})\big)^6 \times L^\infty\big([0,T], H^2_d(\mathbb{R}^3)\big)$.
□

4.3 Complétude géodésique

Théorème 4.2. *L'espace-temps obtenu au chapitre précédent est géodésiquement complet à l'infini futur.*

Preuve: Rappelons que les équations des géodésiques s'écrivent :

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\,.$$

Sur les courbes géodésiques, nous avons $\frac{dx^\alpha}{d\tau} = p^\alpha$. Donc les variables t, p^0 et p^i vérifient le système :

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = p^0 \\ \frac{dp^0}{d\tau} = -\Gamma^0_{\lambda\mu}p^\lambda p^\mu = -\Gamma^0_{ii}(p^i)^2 = -\dot{a}a\left((p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2\right) \\ \frac{dp^i}{d\tau} = -\Gamma^i_{\lambda\mu}p^\lambda p^\mu = -2\Gamma^i_{i0}p^ip^0 = -2\frac{\dot{a}}{a}p^0p^i \end{cases} \tag{4.3.1}$$

où τ un paramètre affine. Rappelons que $p^0 = \sqrt{1+a^2|\overline{p}|^2}$.

La complétude géodésique consiste à étudier la relation entre le temps t et le paramètre affine τ dans toute direction géodésique future. De l'équation (4.3.1), nous avons $\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1+a^2|\overline{p}|^2}$, qui implique que $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2|\overline{p}|^2}}$. Pour controler la relation entre t et τ, nous allons controler la quantité $a^2|\overline{p}|^2$ en tant que fonction de τ. Dérivant la fonction $a^2p^i := a^2(t(\tau))p^i(\tau)$ par rapport à τ, nous avons :

$$\frac{d}{d\tau}\left(a^2(t(\tau)p^i(\tau))\right) = 2\dot{a}ap^i\frac{dt}{d\tau} + a^2\frac{dp^i}{d\tau} = 2\dot{a}ap^0p^i - 2\dot{a}ap^0p^i = 0\,,$$

d'où nous déduisons que $a^2p^i = C^i$, où C^i est une constante. Utilisant le fait que $a(t(\tau)) \geq a_0$, nous avons

$$\frac{d\tau}{dt} \geq \chi \tag{4.3.2}$$

où $\chi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{a_0^2}\left[(C^1)^2+(C^2)^2+(C^3)^2\right]}}$ est une constante strictement positive. Ainsi en intégrant l'inégalité (4.3.2), l'intégrale du membre de droite diverge quand t tend vers l'infini. Par conséquent quand t tend vers l'infini, τ tend aussi vers l'infini. D'où l'espace temps obtenu est géodésiquement complète. □

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Nous avons dans ce travail, considéré les équations d'Einstein avec constante cosmologique, couplées aux équations de Maxwell, de Boltzmann et au champ scalaire massif sur l'espace temps de Robertson-Walker, qui est d'un grand intérêt dans la modélisation de l'univers et la compréhension de certains phénomènes astrophysiques. Nous avons considéré le cas homogène où les fonctions inconnues ne dépendent que du temps ($t = x^0$) et non de l'espace (x^i).

Nous avons commencé notre étude par la présentation des différentes équations et la donnée de quelques hypothèses de travail. En étudiant le problème de compatibilité et de conservation des équations d'Einstein, nous avons obtenu un système intégro-différentiel équivalent au système initial écrit sous forme tensorielle. Après avoir défini les espaces fonctionnels utilisés, nous avons tour à tour établi des inégalités de type Moser sur le noyau de collision Q qui sont des inégalités fondamentales pour l'étude de l'équation de Boltzmann, puis des inégalités d'énergie pour une classe d'équation aux dérivées partielles du premier ordre. En combinant la méthode des caractéristiques et la méthode itérative, nous avons pu prouver l'existence d'une solution du système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire massif. En faisant usage de l'inégalité d'interpolation dans les espaces de Sobolev, nous montrons que la solution f de l'équation de Boltzmann est de classe C^1. Par la suite nous avons montré via les estimations à priori que si $\|f_0\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)}$ est suffisament petite et si $\Lambda > -4\pi m\Phi_0^2$, alors le système couplé Einstein-Maxwell-Boltzmann-Champ scalaire massif admet une solution globale régulière. Nous avons terminé notre étude en montrant la positivité de la solution de l'équation de Boltzmann, la stabilité de la solution globale obtenue et la complétude géodésique de l'espace-temps.

Toute fois un certains nombre de problème restent en suspend à savoir : l'étude de l'existence globale des solutions dans le cas où $\Lambda \leq -4\pi m\Phi_0^2$, l'extention du dégré de régularité de la solution de l'équation de Boltzmann, l'étude du système dans le cas inhomogène, etc. Ainsi il apparaît clairement que les résultats obtenus dans cette thèse peuvent être un point de départ pour des investigations futures.

ANNEXE

Théorème 5.1. *(Lemme de Gronwall's)*

Soient f, g et φ trois fonctions continues et positives sur $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, φ croissante telles que

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t \varphi(s)f(s)ds\,.$$

Alors

$$f(t) \leq g(t)exp\Big(\int_a^t \varphi(s)ds\Big)$$

Proposition 5.1. *(Continuité dans les espaces L^p)*

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, alors

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0\,.$$

Preuve: Puisque $p < +\infty$, on peut utiliser la densité de l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

- Supposons d'abord que $f = \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de support $K \subset B(0,R)$, $R > 0$. Pour $\|h\| \leq \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\|x\|\leq R+\frac{1}{2}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx\end{aligned}$$

car φ est nulle hors de $B(0;R)$ et $\varphi(\cdot + h)$ l'est hors de $B(0;R+\frac{1}{2})$ quand $\|h\| < \frac{1}{2}$. Comme φ est uniformément continue sur le compact $\overline{B(0;R+\frac{1}{2})}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|h\| \leq \alpha$ alors pour tout $x \in B(0;R+\frac{1}{2})$ on a

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq \varepsilon\,.$$

D'ou
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx \leq \int_{B(0;R+\frac{1}{2})} \varepsilon^p dx \leq \varepsilon^p \times vol\big(B(0;R+\frac{1}{2})\big)$$
Ainsi
$$\|\tau_h\varphi-\varphi\|_P \leq \varepsilon vol\Big(B(0;R+\frac{1}{2})\Big)^{1/p}$$
ou $\tau_h\varphi : x \longmapsto \varphi(x+h)$.

Donc $\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h\varphi-\varphi\|_p = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|^p dx = 0\,.$

- Supposons maintenant que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f-\varphi\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi pour $h \in \mathbb{R}^n$,
$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_p &\leq \|\tau_h f-\tau_h\varphi\|_p + \|\tau_h\varphi-\varphi\|_p + \|f-\varphi\|_p \\ &= 2\|f-\varphi\|_p + \|\tau_h\varphi-\varphi\|_p \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|\tau_h\varphi-\varphi\|_p\end{aligned}$$
en utilisant $\|\tau_h f-\tau_h\varphi\|_p = \|f-\varphi\|_p$ dû à un changement de variables immédiat. D'après le premier cas comme φ est continue et à support compact, $\lim \|\tau_h\varphi-\varphi\|_p = 0$ quand $h \longrightarrow 0$, donc pour h assez petit, $\|\tau_h\varphi-\varphi\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$ si bien que
$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
ce qui montre que $\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_p = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|^p dx = 0\,.$

$\square$

Proposition 5.2. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ *est dense dans* $H_d^3(\mathbb{R}^3)$.

Preuve: La preuve va se faire en deux étapes.

Soit $T = \{f \in H_d^3(\mathbb{R}^3) : \text{supp}(f) \text{ compact } \}$

1. **Montrons que T est dense dans $H_d^3(\mathbb{R}^3)$.**

   Soit la suite tronquante (φ_j) définie par : $\begin{cases} \varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3),\ \varphi_1(x) = 1,\ \text{pour } |x| \leq 1 \text{ et } 0 \leq \varphi_1 \leq 1 \\ \varphi_j(x) = \varphi_1\big(\frac{x}{j}\big),\ \text{pour } j \geq 1 \\ \text{supp}\,\varphi_j \subset B(0,2j) \end{cases}$

   On a $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et les $D^\alpha\varphi_j$ sont uniformément bornées. En effet :
$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ |D^\alpha\varphi_j| \leq \frac{C_\alpha}{j^{|\alpha|}} \leq C_\alpha \text{ ou } C_\alpha = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |D^\alpha\varphi_1(x)|\,.$$

$\varphi_j(x) = 1$ si $|x| \le j$, donc $\varphi_j \longrightarrow 1$ simplement quand $j \longrightarrow +\infty$.

Soit $f \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$. On pose $f_j = \varphi_j f$. Comme $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, il vient que $f_j \in T$.

Nous allons montrer que la suite (f_j) converge vers f dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$.

On a

$$\|f - f_j\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} = \|f - \varphi_j f\|_{H^3_d(\mathbb{R}^3)} = \left(\sum_{|\alpha|\le 3} \int_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)^{2d+2|\alpha|} \big| D^\alpha\big(f(1-\varphi_j)\big)\big|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.0.1}$$

En vertu de l'inégalité de convexité et de la formule de Leibnitz, on a :

$$\begin{aligned} \big|D^\alpha\big(f(1-\varphi_j)\big)\big| &\le \sum_{|\beta|\le|\alpha|} \complement^\beta_\alpha |D^{\alpha-\beta} f||D^\beta(1-\varphi_j)| \\ &\le \left(\sum_{|\beta|\le|\alpha|} \left(\complement^\beta_\alpha\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|\beta|\le|\alpha|} |D^{\alpha-\beta} f|^2 |D^\beta(1-\varphi_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc

$$(1+|x|)^{2d+2|\alpha|}\big|D^\alpha\big(f(1-\varphi_j)\big)\big|^2 \le C_\alpha \sum_{|\beta|\le|\alpha|} (1+|x|)^{2d+2|\alpha|} |D^{\alpha-\beta} f|^2 |D^\beta(1-\varphi_j)|^2. \tag{5.0.2}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \sum_{|\beta|\le|\alpha|} (1+|x|)^{2d+2|\alpha|} |D^{\alpha-\beta} f|^2 |D^\beta(1-\varphi_j)|^2 &= (1+|x|)^{2d+2|\alpha|} |D^\alpha f|^2 |1-\varphi_j|^2 \\ &\quad + \sum_{1\le|\beta|\le|\alpha|} (1+|x|)^{2d+2|\alpha|} |D^{\alpha-\beta} f|^2 |D^\beta(1-\varphi_j)|^2 \end{aligned}$$

i) Puisque $\varphi_j \longrightarrow 1$ et $|1-\varphi_j| \le 1 + |\varphi_j| \le 2$, on a

$$\begin{cases} (1+|x|)^{2d+2|\alpha|} |D^\alpha f|^2 |1-\varphi_j|^2 \longrightarrow 0, \text{ quand } j \longrightarrow +\infty \ \textit{et} \\ (1+|x|)^{2d+2|\alpha|} |D^\alpha f|^2 |1-\varphi_j|^2 \le 4(1+|x|)^{2d+2|\alpha|} |D^\alpha f|^2 \end{cases}$$

Or $f \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$, donc $(1+|x|)^{2d+2|\alpha|}|D^\alpha f|^2$ est intégrable. Ainsi en vertu du théorème de la convergence dominée, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)^{2d+2|\alpha|} |D^\alpha f|^2 |1-\varphi_j|^2 dx \longrightarrow 0 \text{ quand } j \longrightarrow +\infty$$

ii) On a ensuite $|D^\beta \varphi_j| \le \frac{C_\beta}{j^{|\beta|}} \le \frac{C_\beta}{j}$, $\forall\, |\beta| \ge 1$ et $\mathrm{supp}\varphi_j \subset B(0, 2j)$, il vient que

$$|D^\beta \varphi_j|^2 \le \frac{C^2_\beta}{j} \le \frac{K_\beta}{j} \ \text{ et } \ (1+|x|)^{2|\beta|}|D^\beta \varphi_j|^2 \le C^2_\beta \frac{(1+2j)^{2|\beta|}}{j^{2|\beta|}} \le C'_\beta \frac{(1+j^{2|\beta|})}{j^{2|\beta|}} \le K'_\beta$$

D'où

$$\begin{cases} (1+|x|)^{2d+2|\alpha|}|D^{\alpha-\beta}f|^2|D^\beta\varphi_j|^2 \leq (1+|x|)^{2d+2|\alpha|}|D^{\alpha-\beta}f|^2\frac{K_\beta}{j} \longrightarrow 0, \text{ quand } j \longrightarrow +\infty \ \ et \\ (1+|x|)^{2d+2|\alpha|}|D^{\alpha-\beta}f|^2|D^\beta\varphi_j|^2 \leq K'_\beta(1+|x|)^{2d+2|\alpha-\beta|}|D^{\alpha-\beta}f|^2 \,. \end{cases}$$

Or $f \in H^3_d(\mathbb{R}^3)$, donc $(1+|x|)^{2d+2|\alpha-\beta|}|D^{\alpha-\beta}f|^2|$ est intégrable. Ainsi en vertu du théorème de la convergence dominée, $\forall\, \beta$ tel que $1 \leq |\beta| \leq |\alpha|$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{2d+2|\alpha|}|D^{\alpha-\beta}f|^2|D^\beta\varphi_j|^2dx \longrightarrow 0 \text{ quand } j \longrightarrow +\infty$$

d'où

$$\sum_{1\leq|\beta|\leq|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{2d+2|\alpha|}|D^{\alpha-\beta}f|^2|D^\beta\varphi_j|^2dx \longrightarrow 0 \text{ quand } j \longrightarrow +\infty$$

Il vient de (5.0.2) que

$$\forall\alpha,\ |\alpha| \leq 3,\ \int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{2d+2|\alpha|}\left|D^\alpha\big(f(1-\varphi_j)\big)\right|^2dx \longrightarrow 0 \text{ quand } j \longrightarrow +\infty$$

et de (5.0.1), on conclut que $f_j \longrightarrow f$ dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$. Ainsi T est dense dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$.

2. **Montrons que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans T pour la topologie de $H^3_d(\mathbb{R}^3)$.**

Soit $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante i.e

$$\begin{cases} \theta_j \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}^* \text{ et } \theta_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \\ \int_{\mathbb{R}^3}\theta_j(x)dx = 1,\ \forall j \in \mathbb{N}^* \\ \text{supp}(\theta_j) \subset \bar{B}(0,j),\ j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Soit $f \in T$, posons $f_j = f \star \theta_j$, alors supp(f) est compact car $f \in T$, donc $f_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Montrons que (f_j) converge vers f dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$. Pour cela il suffit de montrer que

$$\forall\alpha,\ |\alpha| \leq 3,\ (1+|x|)^{d+|\alpha|}D^\alpha f_j \longrightarrow (1+|x|)^{d+|\alpha|}D^\alpha f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3)$$

Soit $\alpha,\ |\alpha| \leq 3$, on a :

$D^\alpha f_j = D^\alpha \star \theta_j$ et $D^\alpha f - D^\alpha f_j = D^\alpha f - D^\alpha f \star \theta_j$, et de plus

$$D^\alpha f \star \theta_j(x) = \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha f(y)\theta_j(x-y)dy$$

Or

$$D^\alpha f(x) = D^\alpha f(x)\int_{\mathbb{R}^3}\theta_j(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha f(x)\theta_j(x-y)dy$$

par suite

$$(1+|x|)^{d+|\alpha|}D^\alpha f(x)-(1+|x|)^{d+|\alpha|}D^\alpha f_j(x)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{d+|\alpha|}\big(D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)\big)\theta_j(x-y)dy\,. \quad (5.0.3)$$

D'où

$$\big|(1+|x|)^{d+|\alpha|}D^\alpha f(x)-(1+|x|)^{d+|\alpha|}D^\alpha f_j(x)\big|^2$$
$$\leq (1+|x|)^{2d+2|\alpha|}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\big(D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)\big)\theta_j(x-y)dy\Big)^2;$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\big|(1+|x|)^{d+|\alpha|}D^\alpha f(x)-(1+|x|)^{d+|\alpha|}D^\alpha f_j(x)\big|^2$$
$$\leq (1+|x|)^{2d+2|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^3}\big|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)\big|^2\theta_j(x-y)dy\,. \quad (5.0.4)$$

En intégrant (5.0.4) sur $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{2d+2|\alpha|}\big|D^\alpha f(x)-D^\alpha f_j(x)\big|^2dx$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{2d+2|\alpha|}\big|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)\big|^2\theta_j(x-y)dxdy\,.$$

En posant dans $\mathbb{R}^{2n}$, $x-y=z,\ y=y$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{2d+2|\alpha|}\big|D^\alpha f(x)-D^\alpha f_j(x)\big|^2dx$$
$$\leq \int_{|z|\leq\frac{1}{j}}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|y+z|)^{2d+2|\alpha|}\big|D^\alpha f(y+z)-D^\alpha f(y)\big|^2\theta_j(z)dzdy\,,$$

qui s'écrit encore

$$\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{2d+2|\alpha|}\big|D^\alpha f(x)-D^\alpha f_j(x)\big|^2dx$$
$$\leq \int_{|z|\leq\frac{1}{j}}\theta_j(z)dz\int_{\mathbb{R}^3}(1+|y+z|)^{2d+2|\alpha|}\big|D^\alpha f(y+z)-D^\alpha f(y)\big|^2dy\,. \quad (5.0.5)$$

Désignons par K le support de f, alors il existe $r>0$ tel que $K\subset B(0,r)$. Ainsi pour $|z|\leq\frac{1}{j}<1$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3}(1+|y+z|)^{2d+2|\alpha|}\big|D^\alpha f(y+z)-D^\alpha f(y)\big|^2dy$$
$$\leq C_\alpha\int_{\mathbb{R}^3}\big|D^\alpha f(y+z)-D^\alpha f(y)\big|^2dy \quad (5.0.6)$$

avec $C_\alpha = (2+r|)^{2d+2|\alpha|}$. Or $f \in T \subset H^3_d(\mathbb{R}^3) \subset H^3(\mathbb{R}^3)$, donc $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Ainsi d'après le théorème de continuitè en moyenne d'ordre 2, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| D^\alpha f(y+z) - D^\alpha f(y) \right|^2 dy \longrightarrow 0 \text{ quand } z \longrightarrow 0$$

et (5.0.6) entraine que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+|y+z|)^{2d+2|\alpha|} \left| D^\alpha f(y+z) - D^\alpha f(y) \right|^2 dy \longrightarrow 0 \text{ quand } z \longrightarrow 0$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall z \in \mathbb{R}^3,\ |z| \leq \beta \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} (1+|y+z|)^{2d+2|\alpha|} \left| D^\alpha f(y+z) - D^\alpha f(y) \right|^2 dy < \varepsilon$$

Etant donné que $\lim\limits_{j \to +\infty} \frac{1}{j} = 0$, il existe $j_0 > 0$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $j > j_0 \Longrightarrow \frac{1}{j} < \beta$. Ainsi on a $|z| < \frac{1}{j} < \beta$ et par suite

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+|y+z|)^{2d+2|\alpha|} \left| D^\alpha f(y+z) - D^\alpha f(y) \right|^2 dy < \varepsilon$$

D'où

$$j > j_0 \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)^{2d+2|\alpha|} \left| D^\alpha f(x) - D^\alpha f_j(x) \right|^2 dx \leq \varepsilon \int_{|z| \leq \frac{1}{j}} \theta_j(z) dz < \varepsilon\,.$$

Donc

$$\forall \alpha,\ |\alpha| \leq 3,\ (1+|x|)^{d+|\alpha|} D^\alpha f_j \longrightarrow (1+|x|)^{d+|\alpha|} D^\alpha f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3)$$

et par conséquent $f_j \longrightarrow f$ dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans T pour la topologie de $H^3_d(\mathbb{R}^3)$.

En conclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans T pour la topologie de $H^3_d(\mathbb{R}^3)$ et T est dense dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$, donc $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $H^3_d(\mathbb{R}^3)$. □

Jacobien du changement de variables $(\overline{u}, \overline{v}) \longrightarrow (\overline{u}', \overline{v}')$.

La matrice Jacobienne de ce changement de variables est la matrice carrée d'ordre 6 définie par :

$$\begin{pmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & D_{ij} \end{pmatrix} \quad i,j \in \{1,2,3\}\,;$$

avec

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial u'^i}{\partial u_j} \right);\ B_{ij} = \left(\frac{\partial u'^i}{\partial v_j} \right);\ C_{ij} = \left(\frac{\partial v'^i}{\partial u_j} \right);\ D_{ij} = \left(\frac{\partial u'^i}{\partial v_j} \right)\,.$$

Notons que d'après (1.5.3)-(1.5.4), nous avons

$$u'^k = u^k + b(\overline{u}, \overline{v}, \omega)\omega^k \text{ et } v'^k = v^k - b(\overline{u}, \overline{v}, \omega)\omega^k \ ,$$

donc

$$\begin{cases} A_{ij} = \delta^i_j + \omega^i \frac{\partial b}{\partial u_j} \\ B_{ij} = -\omega^i \frac{\partial b}{\partial u_j} \\ C_{ij} = \omega^i \frac{\partial b}{\partial v_j} \\ D_{ij} = \delta^i_j - \omega^i \frac{\partial b}{\partial v_j} \end{cases} .$$

En remplaçant la quatrième ligne par la somme de la première et de la quatrième, la cinquième ligne par la somme de la deuxième et la cinquième, la sixième par la somme de la troisième ligne et la sixième, nous avons :

$$|J| = \begin{vmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ I & I \end{vmatrix} ;$$

où I est la matrice identité d'ordre 3. En remplaçant la premième colonne par la soustraction de la quatrième colonne de la première, la deuxième colonne par la soustraction de la cinquième colonne de la deuxième, la troisième colonne par la soustraction de la sixième colonne de la troisième, nous avons :

$$|J| = \begin{vmatrix} A'_{ij} & B_{ij} \\ O & I \end{vmatrix} ;$$

où

$$A'_{ij} = \delta^i_j + \omega^i \left(\frac{\partial b}{\partial u^i} - \frac{\partial b}{\partial v^i} \right) .$$

En posant

$$Y^i = \frac{\partial b}{\partial u^i} - \frac{\partial b}{\partial v^i} \ ,$$

nous avons :

$$|J| = |A'_{ij}| \, ;$$

c'est-à-dire :

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 + \omega^1 Y^1 & \omega^1 Y^2 & \omega^1 Y^3 \\ \omega^2 Y^1 & 1 + \omega^2 Y^2 & \omega^2 Y^3 \\ \omega^3 Y^1 & \omega^3 Y^2 & 1 + \omega^3 Y^3 \end{vmatrix} .$$

Un calcul direct donne :

$$|J| = 1 + \omega^1 Y^1 + \omega^2 Y^2 + \omega^3 Y^3 \, .$$

Remarquons que $B = \frac{N}{D}$, donc

$$w^iY^i = W^i\left(\frac{1}{D}\frac{\partial N}{\partial u^i} - \frac{N}{D^2}\frac{\partial D}{\partial u^i}\right) - W^i\left(\frac{1}{D}\frac{\partial N}{\partial v^i} - \frac{N}{D^2}\frac{\partial D}{\partial v^i}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& w^1Y^1 + w^2Y^2 + w^3Y^3 \\
= \; & \underbrace{\frac{1}{D}\left(w^1\frac{\partial N}{\partial u^1} + w^2\frac{\partial N}{\partial u^2} + w^3\frac{\partial N}{\partial u^3}\right)}_{K_1} - \underbrace{\frac{N}{D^2}\left(w^1\frac{\partial D}{\partial u^1} + w^2\frac{\partial D}{\partial u^2} + w^3\frac{\partial D}{\partial u^3}\right)}_{K_2} \\
& - \underbrace{\frac{1}{D}\left(w^1\frac{\partial N}{\partial v^1} + w^2\frac{\partial N}{\partial v^2} + w^3\frac{\partial N}{\partial v^3}\right)}_{K_1'} + \underbrace{\frac{N}{D^2}\left(w^1\frac{\partial D}{\partial v^1} + w^2\frac{\partial D}{\partial v^2} + w^3\frac{\partial D}{\partial v^3}\right)}_{K_2'}
\end{aligned}$$

Or

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial N}{\partial u^i} = 2a^{-2}\frac{u^i}{u^0}\omega\cdot(u^0\overline{v} - v^0\overline{u}) - 2v^0(u^0+v^0)w^i + 2a^{-2}(u^0+v^0)\frac{u^i}{u^0}\omega\cdot\overline{v} \\
\frac{\partial N}{\partial v^i} = 2a^{-2}\frac{v^i}{v^0}\omega\cdot(u^0\overline{v} - v^0\overline{u}) + 2u^0(u^0+v^0)w^i - 2a^{-2}(u^0+v^0)\frac{v^i}{v^0}\omega\cdot\overline{u} \\
\frac{\partial D}{\partial u^i} = 2a^{-2}\frac{u^i}{u^0}(u^0+v^0) - 2a^{-2}(u^0+v^0)\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})w^i \\
\frac{\partial D}{\partial v^i} = 2a^{-2}\frac{v^i}{v^0}(u^0+v^0) - 2a^{-2}(u^0+v^0)\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})w^i
\end{array}\right. ;$$

donc

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{D}\left(w^1\frac{\partial N}{\partial u^1} + w^2\frac{\partial N}{\partial u^2} + w^3\frac{\partial N}{\partial u^3}\right) \\
&= \frac{1}{D}\left[\frac{2a^{-2}}{u^0}(\omega\cdot\overline{u})\omega\cdot(u^0\overline{v} - v^0\overline{u}) - 2v^0(u^0+v^0) + 2a^{-2}(u^0+v^0)\frac{1}{u^0}(\omega\cdot\overline{u})(\omega\cdot\overline{v})\right]
\end{aligned}$$

$$K_1' = \frac{1}{D}\left[\frac{2a^{-2}}{v^0}(\omega\cdot\overline{v})\omega\cdot(u^0\overline{v} - v^0\overline{u}) + 2u^0(u^0+v^0) - 2a^{-2}(u^0+v^0)\frac{1}{v^0}(\omega\cdot\overline{u})(\omega\cdot\overline{v})\right]$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= \frac{N}{D^2}\left(w^1\frac{\partial D}{\partial u^1} + w^2\frac{\partial D}{\partial u^2} + w^3\frac{\partial D}{\partial u^3}\right) \\
&= \frac{N}{D^2}\left[2a^{-2}\frac{1}{u^0}(u^0+v^0)\omega\cdot\overline{u} - 2a^{-2}\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})\right]
\end{aligned}$$

$$K_2' = \frac{N}{D^2}\left[2a^{-2}\frac{1}{v^0}(u^0+v^0)\omega\cdot\overline{v} - 2a^{-2}\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})\right].$$

$$\begin{aligned}
K_1 - K_1' &= \frac{1}{D}\left[-2(u^0+v^0)^2 + 2a^{-2}(u^0+v^0)(\omega\cdot\overline{u})(\omega\cdot\overline{v})\left(\frac{1}{u^0} + \frac{1}{v^0}\right) - 2a^{-2}\frac{\big(\omega\cdot(v^0\overline{u} - u^0\overline{v})\big)^2}{u^0v^0}\right] \\
&= \frac{1}{u^0v^0D}\left[-2u^0v^0(u^0+v^0)^2 + 2a^{-2}(u^0+v^0)^2(\omega\cdot\overline{u})(\omega\cdot\overline{v}) - 2a^{-2}\big(\omega\cdot(v^0\overline{u} - u^0\overline{v})\big)^2\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 - K_2' &= \frac{N}{D^2}\left[2a^{-2}(u^0+v^0)\left(\frac{\omega\cdot\overline{u}}{u^0} - \frac{\omega\cdot\overline{v}}{v^0}\right)\right] \\
&= \frac{N}{D^2}\left[\frac{2a^{-2}(u^0+v^0)\omega\cdot(v^0\overline{u}-u^0\overline{v})}{u^0v^0}\right] \\
&= -a^{-2}\frac{N^2}{D^2}\frac{1}{u^0v^0} \\
&= -a^{-2}\frac{b^2}{u^0v^0}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& w^1Y^1 + w^2Y^2 + w^3Y^3 \\
= \;& K_1 - K_1' - (K_2 - K_2') \\
= \;& \frac{1}{u^0v^0D}\left[-2u^0v^0(u^0+v^0)^2 + 2a^{-2}(u^0+v^0)^2(\omega\cdot\overline{u})(\omega\cdot\overline{v}) - 2a^{-2}\big(\omega\cdot(v^0\overline{u}-u^0\overline{v})\big)^2\right] + a^{-2}\frac{b^2}{u^0v^0} \\
= \;& \frac{a^{-2}b^2}{u^0v^0} - \frac{2}{u^0v^0D}\Big[u^0v^0(u^0+v^0)^2 - a^{-2}(u^0+v^0)^2(\omega\cdot\overline{u})(\omega\cdot\overline{v}) - 2a^{-2}u^0v^0(\omega\cdot\overline{u})(\omega\cdot\overline{v}) \\
& \quad + a^{-2}(v^0)^2(\omega\cdot\overline{u})^2 + a^{-2}(u^0)^2(\omega\cdot\overline{v})^2 - a^{-2}u^0v^0\big(\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})\big)^2 + a^{-2}u^0v^0(\omega\cdot\overline{u})^2 \\
& \qquad + a^{-2}u^0v^0(\omega\cdot\overline{v})^2 + 2a^{-2}u^0v^0(\omega\cdot\overline{u})(\omega\cdot\overline{v})\Big] \\
= \;& \frac{a^{-2}b^2}{u^0v^0} - \frac{2}{u^0v^0D}\Big[u^0v^0\left((u^0+v^0)^2 - a^{-2}\big(\omega\cdot(\overline{u}+\overline{v})\big)^2\right)\Big] \\
& \quad - \frac{2a^{-2}}{u^0v^0D}\Big[-(u^0+v^0)^2(\omega\cdot\overline{u})(\omega\cdot\overline{v}) + v^0(u^0+v^0)(\omega\cdot\overline{u})^2 + u^0(u^0+v^0)(\omega\cdot\overline{v})^2\Big] \\
= \;& -2 + \frac{a^{-2}b^2}{u^0v^0} - \frac{2a^{-2}}{u^0v^0D}\Big[(u^0+v^0)\left(v^0(\omega\cdot\overline{u}) - u^0(\omega\cdot\overline{v})\right)(\omega\cdot\overline{u} - \omega\cdot\overline{u})\Big] \\
= \;& -2 + \frac{a^{-2}b^2}{u^0v^0} - \frac{2a^{-2}}{u^0v^0D}\Big[(u^0+v^0)\omega\cdot(v^0\overline{u}-u^0\overline{v})(\omega\cdot(\overline{u}-\overline{v}))(\omega\cdot\overline{u}-\omega\cdot\overline{u})\Big] \\
= \;& -2 + \frac{a^{-2}b^2}{u^0v^0} - \frac{2a^{-2}}{u^0v^0D}\Big[-\frac{1}{2}N\omega\cdot(\overline{u}-\cdot\overline{u})\Big] \\
= \;& -2 + \frac{a^{-2}b^2}{u^0v^0} + \frac{a^{-2}b\omega\cdot(\overline{u}-\cdot\overline{u})}{u^0v^0}\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$|J| = -1 + \frac{a^{-2}b^2}{u^0v^0} + \frac{a^{-2}b\omega\cdot(\overline{u}-\cdot\overline{u})}{u^0v^0}\,.$$

D'autre part nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l}
(u'^0)^2 = 1 + a^{-2}|\overline{u}'|^2 = 1 + a^{-2}(|\overline{u}|^2 + B^2 + 2B\overline{u}\cdot\omega) = (u^0)^2 + a^{-2}(B^2 + 2B\overline{u}\cdot\omega) \\
(v'^0)^2 = 1 + a^{-2}|\overline{v}'|^2 = 1 + a^{-2}(|\overline{v}|^2 + B^2 + 2B\overline{v}\cdot\omega) = (v^0)^2 + a^{-2}(B^2 + 2B\overline{v}\cdot\omega)
\end{array}\right. ,$$

donc

$$
\begin{aligned}
2u'^0v'^0 &= (u'^0+v'^0)^2-(u'^0)^2+(v'^0)^2\\
&= (u^0+v^0)^2-(u^0)^2-a^{-2}(B^2-2B\overline{u}\cdot\omega)-(v^0)^2-a^{-2}(B^2-2B\overline{v}\cdot\omega)\\
&= 2u^0v^0-2a^{-2}B^2-a^{-2}B\omega\cdot(\overline{u}-\overline{v})\,.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\frac{u'^0v'^0}{u^0v^0}=1-\frac{a^{-2}B^2}{u^0v^0}-\frac{a^{-2}B\omega\cdot(\overline{u}-\overline{v})}{u^0v^0}.$$

Ainsi

$$|J|=-\frac{u'^0v'^0}{u^0v^0}\,.$$

Bibliographie

[1] Håkan Andréasson, David Fajman, and Maximilian Thaller, *Static Solutions to the Einstein–Vlasov System with a Nonvanishing Cosmological Constant*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **47** (2015), no. 4, 2657–2688.

[2] D. BANCEL, *Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann en relativité générale*, Ann Inst Henri Poincaré. **XVIII, n3** (1973).

[3] D. Bancel and Y. Choquet-Bruhat, *Existence, uniqueness and local stability for Einstein-Maxwell-Boltzmann system*, Commun.Math. Phys. **33** (1973), 83–96.

[4] K. BICHTELER, *On Cauchy problem for the relativistic Boltzmann equation*, Comm. Maths Phys. **4** (1967), 352–364.

[5] Takou E and Ciake F, *Asymptotic stability of the inhomogeneous Boltzmann equation in the Robertson-Walker space-time with israel particles*, Appl. Anal (2018), 1–14.

[6] ———, *Asymptotic stability of the relativistic Boltzmann equation on Bianchi type 1 space-time with a hard potential*, Rep. Math. Phys **81** (2018), no. 1, 117–136.

[7] J. Ehlers, *Survey of General Relativity theory, Astrophysics and Cosmology*, ed.W.Israel (Dordrecht Reicher). **14 (26)** (1973), 1–125.

[8] Andreasson H, *The Einstein- Vlasov system/kinetic theory*, Living Rev. Relativity 14, **4** (2011).

[9] Stewart J. M, *Non-equilibrium relativistic kinetic theory.*, Lecture Notes in Physics Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, **10** (1971).

[10] S. Kesavan, *Functional Analysis*, Hindustan Book Agency, India, 2009.

[11] Bhimsen K.S, *Introduction to nonlinear fluid-plasma waves. mechanics of fluids and transport processes*, Vol. 8, 1st edn. Springer, Netherlands (1988).

[12] H. Lee, *Asymptotic behaviour of the relativistic Boltzmann equation in the Robertson-Walker spacetime*, Journal of Differential Equations **255** (2013), no. 11, 4267 – 4288.

[13] ______, *Asymptotic behavior of the Einstein-Vlasov system with a positive cosmological constant*, Math. Proc.Camb. Phil. Soc. **137** (2014), 495–509.

[14] H. Lee and E. Nungesser, *Future global existence and asymptotic behaviour of solutions to the Einstein-Boltzmann system with Bianchi I symmetry*, arXiv :1506.02440 [gr-qc] (2015).

[15] H. Lee and A. D. Rendal, *The Einstein-Boltzmann system and positivity*, J. Hyperbolic Diff, Equ. **10** (2013), no. 1, 77–104.

[16] H. Lee and A. D. Rendall, *The Spatially Homogeneous Relativistic Boltzmann Equation with a Hard Potential*, Communications in Partial Differential Equations **38** (2013), no. 12, 2238–2262.

[17] A. Lichnerowicz, *Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnetisme.*, Masson et Cie (1955).

[18] Piotr Mucha, *The Cauchy problem for the Einstein-Boltzmann system*, Journal of Applied Analysis **4** (1998), no. 1, 129–141 (eng).

[19] ______, *Global existence of solutions of the Einstein-Boltzmann equation in the spatially homogeneous case*, Banach Center Publications **52** (2000), no. 1, 175–180 (eng).

[20] N. Noutchegueme and al., *Global existence of solutions to the Einstein equation with cosmological constant for a perfect relativistic fluid on Bianchi type 1 space-time*, Comm. Math. Sci. **6 (2)** (2008), 695–705.

[21] N. Noutchegueme and G. Chendjou, *Global solutions to the Einstein equations with cosmological constant on Friedman-Robertson-Walker space-time with plane, hyperbolic and spherical symmetries.*, Comm. Math. Sci. **6 (3)** (2008), 595–610.

[22] Norbert Noutchegueme and Raoul D Ayissi, *Global existence of solutions to the Einstein-Maxwell-Boltzmann system in a Bianchi type 1 space-time*, **4** (2010), 855–878.

[23] Norbert Noutchegueme, David Dongo, and Etienne Takou, *Global existence of solutions for the relativistic Boltzmann equation with arbitrarily large initial data on a Bianchi type 1 space-time*, General Relativity and Gravitation **37** (2005), no. 12, 2047–2062.

[24] Norbert Noutchegueme and Alexis Nangue, *Global existence of solutions to the Einstein-Maxwell-massive scalar field in 3+1 formulation on Bianchi spacetimes*, Applicable Analysis (2012), 1036–1056.

[25] Norbert Noutchegueme and Etienne Takou, *Global existence of solutions for the Einstein-Boltzmann system with cosmological constant in the Robertson-Walker space-time*, Commun. Math. Sci. **4** (2006), no. 2, 291–314.

[26] Norbert Noutchegueme and Erick Mesmin Tetsadjio, *Global dynamics for a collisionless charged plasma in Bianchi spacetimes*, Classical and Quantum Gravity **26** (2009), no. 19, 195001.

[27] Dario Nunez, Juan Carlos Degollado, and Claudia Moreno, *Gravitational waves from scalar field accretion*, Phys. Rev. **D84** (2011), 024043.

[28] A. D. Rendall, *Partial differential equations in General Relativity*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford University Press, Oxford, **16** (2008).

[29] Hans Ringström, *The Cauchy Problem in General Relativity*, European Mathematical Society, 2009.

[30] N. Straumann., *On the cosmological constant problems and the astronomical evidence for homogeneous energy with negative pressure in, vacuum energy, renormalisation eds*, B. Duplantier and Rivasseau. Bukkauser, Basel **350** (2003).

[31] M.E. Taylor, *Partial Differential Equations III, Nonlinear Equations*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.

[32] S. B. Tchapnda and N. Noutchegueme, *The surface-symmetric Einstein–Vlasov system with cosmological constant*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **18** (2005), 541–553.

[33] De Groot S. R van Leeuwen W.A van Weert, C.G, *Relativistic kinetic theory. principles and applications.*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York (1980).

[34] C. Villani, *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory*, Handbook of mathematical fluid dynamics, North-Holland, Amsterdam **1** (2002), 71–305.