UNIVERSITE DE YAOUNDE I
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
LABORATOIRE D'ANALYSE ET APPLICATIONS

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
LABORATORY OF ANALYSIS AND APPLICATIONS

ATTESTATION DE CORRECTION

Nous, Professeur **BEKOLLE David** (Président du jury), Professeur **WOUKENG Jean Louis** (Rapporteur), Professeur **NNANG Hubert** (Membre), Professeur **TAKOU Etienne** (Membre), Professeur **AYISSI Raoult** (Chef de Département), attestons par la présente que Monsieur **KENNE BOGNING Paul Rodrigue**, Matricule **04Y177**, ayant défendu publiquement ses travaux de thèse de Doctorat sous le thème **<<Homogénéisation Déterministe d'Equations de type Vlasov>>** en date du 17 décembre 2021, a apporté les corrections à lui exiger par le jury dans la version finale de son document de thèse.

En foi de quoi, lui est délivrée cette attestation de correction pour valoir ce que de droit.

Président du Jury :

Pr BEKOLLE David

Rapporteur :

Pr WOUKENG Jean Louis

Membres :

Pr NNANG Hubert

Pr TAKOU Etienne

Chef de Département :

Pr AYISSI Raoult

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Republic of Cameroon
Faculté des Sciences
Faculty of Sciences
Département de Mathématiques
University of Yaounde I
UNIVERSITE DE YAOUNDE I

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIE ET GEOSCIENCES
Unité de Recherche et de Formation Doctorale en Mathématiques, Informatique, Bio-informatique et Applications

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES
Research and Training Unit for Doctorate in Mathematics, Computer Sciences and Applications

LABORATOIRE D'ANALYSE ET APPLICATIONS
LABORATORY OF ANALYSIS AND APPLICATIONS

HOMOGENEISATION DETERMINISTE D'EQUATIONS CINETIQUES

Thèse présentée et soutenue publiquement en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat/PhD en Mathématiques

Option: *Analyse*

Spécialité: *Equations aux Dérivées Partielles*

Par:

KENNE BOGNING Paul Rodrigue

Matricule: 04Y177

Devant le jury composé ainsi qu'il suit :

Président : ***BEKOLLE David***, *Professeur, Université de Yaoundé I*

Rapporteurs : ***NGUETSENG Gabriel***, *Professeur, Université de Yaoundé I*

WOUKENG Jean Louis, *Maitre de Conférences, Université de Dschang*

Membres : ***NNANG Hubert***, *Professeur, Université de Yaoundé I*

HOUPA DANGA Duplex, *Maitre de Conférences, Université de Ngaoundéré*

TAKOU Etienne, *Maitre de Conférences, Université de Yaoundé I*

Année académique: *2020/2021*

Table des matières

DEDICACE

Je dédie ce travail à ma grand-mère Tsamo Madeleine en particulier et à toute ma famille en général.

REMERCIEMENTS

Au Tout Puissant pour ses grâces et bénédictions.

J'exprime ma profonde gratitude au Professeur **Jean Louis Woukeng** pour avoir accepté l'encadrement de cette thèse, pour sa patience, sa disponibilité, l'atmosphère courtoise et amicale et les différentes orientations qu'il a bien voulu donner à ce travail. Au Professeur **Gabriel Nguetseng** pour avoir bien voulu accepter la codirection de cette thèse, sa disponibilité, son écoute, ses encouragements constants, son accompagnement et les multiples conseils qu'il m'a toujours donnés depuis mon inscription en Master. Il a toujours été un modèle pour moi. Au Professeur **Hubert Nnang** pour avoir guidé mes premiers pas dans le monde de la recherche, pour ses encouragements, son écoute, son soutien, ses précieux conseils, pour nos discussions et échanges. Voyez en ce travail un motif de satisfaction personnel.

Je voudrais également remercier mes parents **Joseph Kenne** et **Véronique Nanfack** pour leur patience, leurs encouragements et leur soutien. A mes frères et soeurs pour leur attention et soutien inconditionnel. Aux grandes familles **Nguefack**, **Nango** et **Mbogning** pour le soutien matériel, moral et spirituel.

Ma gratitude va également aux Professeurs **Hypollite Ntede**, **Georges Kouamou**, **Etienne Takou** et au Docteur **Jacques Tagoudjeu** pour leur accueil à l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique (ENSP) de Yaoundé et leurs encouragements. A toute l'équipe du CETIC de Yaoundé I et spécialement à Madame **Diane Tchami**. A l'équipe du Laboratoire d'Analyse et Applications de l'Université de Yaoundé I, les remarques et suggestions faites lors des séminaires m'ont permis de m'améliorer. A l'équipe de l'Unité de Recherche en Mathématiques et Applications (URMA) de l'Université de Dschang, l'accueil chaleureux dont vous m'avez toujours fait montre lors de mes différents séjours m'a énormement galvanisé. A tous mes amis et camarades de promotion.

Enfin, un merci particulier à **Huguette Makeng**, ta présence, ton soutien, ta patience et tes encouragements ont été d'une aide inestimable. Puisse le Seigneur bénir notre avenir.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse nous étudions, lorsqu'un petit paramètre tend vers zéro, le comportement asymptotique des solutions d'équations du type Vlasov. L'étude comporte deux parties correspondant à deux situations physiques spécifiques. Dans la première partie on se place dans le cas où les interactions entre particules sont gouvernées par un champ électromagnétique moyen autogénéré. Sous des hypothèses convenables sur le champ électromagnétique, considéré ici fortement oscillant, on obtient deux résultats majeurs : le premier (Théorème 17) établit une équivalence entre la dualité au sens des distributions et la dualité au sens de la moyenne ; tandis que le second (Théorème 19) est un théorème d'homogénéisation dans un cadre déterministe général. Ce résultat est illustré par quelques exemples concrets. Dans la deuxième partie on suppose que les interactions binaires entre particules sont prépondérantes, ce qui nous conduit à l'équation de Boltzmann linéaire. Nous obtenons ici deux principaux résultats. Le premier résultat est relatif à un problème de correcteur, lequel est résolu (Proposition 5) dans un cadre assez général ; le second est un théorème d'homogénéisation (Théorème 22) démontré, comme dans la première partie, dans un cadre déterministe assez général. Ce résultat permet de constater que, sous des hypothèses de structure convenables, la densité des particules converge vers la solution d'une équation de diffusion avec drift. Des cas concrets sont présentés à titre d'illustration.

Mots et expressions clés : équation de transport, homogénéisation déterministe, sigma-convergence, équation de diffusion avec drift.

ABSTRACT

In this thesis, we study the homogenization of Vlasov type equations. Two cases are treated here. In the first part of the work, we carry out the homogenization of Vlasov equation under some structural hypotheses on the electromagnetic field. Two main results were proved in this case. The first one (Theorem 17) shows the equivalence between the duality in the sense of distributions and the duality defined by the mean value, while the second (Theorem 19) is nothing but the homogenization result obtained under general deterministic setting. Few concrete examples are presented here as illustration. The second part of the work deals with the homogenization of linear Boltzmann equation. Once again, the study leads us to two important results. The first one (Proposition 5) gives the solution to the cellular problem under more general setting, and the second (Theorem 22) is the homogenization result stated here, as in the first part, under general deterministic setting. This result shows that, under appropriate structural hypotheses, the particles density converges to the solution of a drift-diffusion equation. Some illustrations of this result are presented in the document.

Keys words and phrases : transport equation, deterministic homogenization, sigma-convergence, drift-diffusion equation.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude des phénomènes liés au transport de particules suscite un intérêt croissant depuis plusieurs décennies. On a constaté que cet intérêt se manifeste davantage lorsque l'étude porte de manière spécifique sur les plasmas. La théorie des plasmas a de nombreuses applications dans différents domaines de notre vie quotidienne tels que, par exemple, la santé, les transports, la communication, la microélectronique et la sécurité. De l'avis de bon nombre de scientifiques, la production d'énergie propre sera dans un avenir prochain une application majeure de l'étude des plasmas, cela grâce à la technique, encore à l'étape expérimentale, de la fusion thermonucléaire contrôlée.

Notre objectif dans cette thèse, est l'homogénéisation d'équations cinétiques, i.e., les équations de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(\nu) \cdot \nabla_x f = \mathcal{Q}(f) \tag{1}$$

où ν représente la vitesse des particules et f la fonction de distribution des particules. Dans ce travail, l'opérateur $\mathcal{Q}$ à droite dans l'équation (1) peut prendre deux formes.

- La fonction de vélocité a est définie par $a(\nu) = \nu$ et l'opérateur $\mathcal{Q}$ est de la forme :

$$\mathcal{Q}(f) = -(\mathbf{E} + \nu \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_\nu f.$$

Dans ce cas, on a affaire à l'équation de Vlasov modélisant l'évolution des particules dans un champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. En tenant compte des inhomogénéités (dont la taille est matérialisée dans ce cadre par le paramètre réel $\varepsilon > 0$ qu'on fera tendre vers zéro) du milieu dans lequel évoluent les particules mais aussi de l'échelle microscopique temporelle, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \nu \cdot \nabla_x f_\varepsilon + (\boldsymbol{E}^\varepsilon + \nu \times \boldsymbol{B}^\varepsilon) \cdot \nabla_\nu f_\varepsilon = 0, \tag{2}$$

où f_ε est la fonction inconnue et le champ électromagnétique $(\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{B}^\varepsilon)$ s'écrit sous la forme $(\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{B}^\varepsilon)(t, x) = (\mathbf{E}(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}), \mathbf{B}(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}))$ pour tout $(t, x, \nu) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

- Le second cas à considérer est celui où l'opérateur $\mathcal{Q}$ est de la forme :

$$\mathcal{Q}(f)(t, x, \nu)) = \int_V \sigma(x, \nu, w) f(t, x, w) d\mu(w) - \Sigma(x, \nu) f(t, x, \nu).$$

Dans ce cadre, l'équation (1) devient l'équation de Boltzmann linéaire. $\mathcal{Q}$ est appelé l'opérateur de collision, σ est la fonction de dispersion et Σ la fonction d'absorption. Pour prendre en compte les effets macroscopiques, il faudrait que le temps écoulé entre deux collisions soit très petit par rapport au temps d'observation. En d'autres termes, il faut que la distance moyenne entre deux collisions successives soit infiniment petite par rapport à la longueur d'échelle donnée. Dans ce cas, il devient intéressant de chercher la solution f de (1) de la forme $f(t,x,\nu) = f(\varepsilon t, x, \nu)$ avec $0 < \varepsilon << 1$ un paramètre réel. Ainsi, par le changement de variable $\tau = \varepsilon t$, on obtient l'équation :

$$\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \tau}(\tau,x,\nu) + a(\nu)\cdot\nabla_x f_\varepsilon(\tau,x,\nu) = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{Q}_\varepsilon(f_\varepsilon)(\tau,x,\nu), \tag{3}$$

où l'opérateur de collision est donné par :

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(f)(\tau,x,\nu) = \int_V \sigma(x,\frac{x}{\varepsilon},\nu,w) f(\tau,x,w)d\mu(w) - \Sigma(x,\frac{x}{\varepsilon},\nu)f(\tau,x,\nu)$$

pour tout $(\tau,x,\nu)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$.

Les équations (2) et (3) ont fait l'objet de nombreuses études (voir par exemple [2, 8, 17, 20]) dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Les résultats produits par ces études ont sans aucun doute largement contribué à une meilleure compréhension des phénomènes physiques sous-jacents. Toutefois, le sujet est loin d'être épuisé.

L'objet principal de cette thèse est d'améliorer les résultats disponibles dans le cadre de l'homogénéisation des équations (2) et (3). Cette amélioration a trait à la nature de la structure d'homogénéisation qui sous-tend l'analyse asymptotique des équations (2) et (3). Sauf erreur d'appréciation de notre part, jusqu'ici les études portant sur l'homogénéisation des équations (2) et (3) se sont basées sur les structures périodiques. Dans ce travail, nous reprenons ces études sous des hypothèses de structure assez générales (incluant l'hypothèse de périodicité comme cas particulier) sur le champ électromagnétique $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ pour (2) et sur la fonction de dispersion σ pour (3).

Il convient de poser de manière précise les problèmes que nous nous proposons d'étudier dans cette thèse.

Dans un premier temps nous considérons, sous une hypothèse de structure qui sera précisée au chapitre deux, le problème d'homogénéisation pour l'équation de Vlasov. De façon précise, nous menons, dans le cadre de l'homogénéisation déterministe, une analyse multi-échelle de l'équation

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \nu\cdot\nabla_x f_\varepsilon + (\boldsymbol{E}^\varepsilon + \nu\times\boldsymbol{B}^\varepsilon)\cdot\nabla_\nu f_\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_T^3\times\mathbb{R}^3 \tag{4}$$

où $\mathbb{R}_T^3 = (0,T)\times\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}\ni T>0$ le temps final. Ici, $(\boldsymbol{E}^\varepsilon,\boldsymbol{B}^\varepsilon)$ est le champ électromagnétique auto-consistant et $f_\varepsilon \equiv f_\varepsilon(t,x,\nu)$ est la fonction de distribution des particules à l'instant t, occupant la position x et de vitesse ν. A l'équation (4) est associée la condition initiale

$$f_\varepsilon(0,x,\nu) = f^{in}(x,\nu) \text{ dans } \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \tag{5}$$

où $f^{in}\geq 0$ et $0<\int_{\mathbb{R}^6}(f^{in})^2dxd\nu < +\infty$.

On suppose $(\boldsymbol{E}^\varepsilon,\boldsymbol{B}^\varepsilon)$ donné dans $(L^\infty(0,T;(L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)))^3)^2$. Alors, pour chaque $\varepsilon>0$ fixé, le système de Vlasov (4)-(5) admet une unique solution faible $f_\varepsilon\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3))$ qui de plus satisfait à

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))}\leq C. \tag{6}$$

Notre objet est d'étudier l'homogénéisation du système de Vlasov (4)-(5) sous l'influence d'un champ magnétique fort de la forme $\boldsymbol{B}^\varepsilon = \boldsymbol{B}_0^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}_1^\varepsilon$ (notation précisée par la suite).

Comme nous l'avons mentionné plus haut, les auteurs des travaux suscités ont considéré des oscillations périodiques suivant la variable temporelle ou spatiale. Aucun d'eux n'a considéré ces oscillations à la fois en temps et en espace simultanément, autrement dit, l'étude du comportement à long terme de la fonction de distribution des particules lorsque celles-ci évoluent dans un milieu fortement hétérogène. Notons que mis à part quelques travaux dans lesquels des cas particuliers de coefficients $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont considérés (voir par exemple [23]), le problème d'unicité de la solution du problème limite n'a pas été résolu. Un des résultats importants obtenus dans le cadre de ce travail est la preuve de l'unicité de la solution du problème limite, voir Théorème 19. Nous étudions le comportement asymptotique de la suite de fonctions de distributions moyennant certaines hypothèses sur le champ électromagnétique :

(i) le champ électromagnétique est fortement oscillant en temps et en espace, c'est-à-dire, $(\boldsymbol{E}^\varepsilon, \boldsymbol{B}^\varepsilon)$ est de la forme $(\boldsymbol{E}^\varepsilon, \boldsymbol{B}^\varepsilon)(t,x) = (\boldsymbol{E}(t/\varepsilon, x/\varepsilon), \boldsymbol{B}(t/\varepsilon, x/\varepsilon))$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^3_T$ avec $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ donné ;

(ii) le champ magnétique est pertubé, en ce sens qu'il s'écrit sous la forme d'une somme d'un champ oscillant borné et d'un champ externe oscillant et borné, c'est-à-dire, $\boldsymbol{B}^\varepsilon = \boldsymbol{B}^\varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}^\varepsilon_1$ avec $\boldsymbol{B}^\varepsilon_i(t,x) = \boldsymbol{B}_i(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$, $i = 0, 1$, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^3_T$;

(iii) les conditions posées sur les fonctions $\boldsymbol{E}$ et $(\boldsymbol{B}_i)_{i=0,1}$ englobent une variété d'hypothèses de structures tels que la périodicité, la presque périodicité et bien d'autres.

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'homogénéisation de l'équation de Boltzmann linéaire. L'équation de Boltzmann a fait l'objet de nombreuses études. Elle est le modèle cinétique le plus adéquat pour la modélisation des phénomènes de transport. L'homogénéisation de l'équation de Boltzmann reste un champ d'investigation ouvert. Cependant, il existe dans la littérature quelques travaux sur ce sujet (voir par exemple [2, 20]). Dans ce travail, nous étudions le comportement asymptotique, lorsque $0 < \varepsilon \to 0$, de la solution du problème de Cauchy (pour ε fixé) :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + a(\nu) \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon \text{ dans } (0,T) \times \mathbb{R}^N_x \times V, \\ f_\varepsilon(0,x,\nu) = f^{in}(x,\nu) \text{ dans } \mathbb{R}^N_x \times V, \end{cases} \tag{7}$$

où V est un sous-espace localement compact de $\mathbb{R}^N_\nu$ muni d'une mesure positive μ dont les propriétés seront precisées plus bas. Les interactions entre les particules et le milieu modifient la structure physique de ces derniers et sont localisées dans l'espace et le temps. Elles sont décrites par l'intermédiaire de l'opérateur intégral suivant :

$$\mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon(t,x,\nu)) = \int_V \sigma^\varepsilon(x,\nu,w) f_\varepsilon(t,x,w) d\mu(w) - \Sigma^\varepsilon(x,\nu) f_\varepsilon(t,x,\nu), \tag{8}$$

où $\sigma^\varepsilon(x,v,w) = \sigma(x, \frac{x}{\varepsilon}, v, w) \ \ (x,v,w) \in \mathbb{R}^N \times V^2$ et $\Sigma^\varepsilon(x,v) = \Sigma(x, \frac{x}{\varepsilon}, v) \ \ (x,v) \in \mathbb{R}^N \times V$.

L'espace mesuré (V, μ) et la fonction de vélocité a doivent vérifier les conditions suivantes [20] (elles ont été modifiées afin de les adapter à notre cas) :

$$\begin{cases} V \textit{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^N_\nu, \textit{ suffisamment régulier.} \\ \textit{La fonction de vélocité } a : V \to \mathbb{R}^N \textit{ appartient à } W^{1,\infty}(V; \mathbb{R}^N). \\ \textit{Il existe deux constantes } C, \gamma > 0, \textit{ telles que} \\ \mu(\{\nu \in V : |a(\nu).\xi| \leq h\}) \leq C h^\gamma, \textit{ pour tout } \xi \in S^{N-1}, h > 0 \end{cases} \tag{9}$$

où S^{N-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^N$.

La fonction σ vérifie également la condition

$$\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N \times V \times V; B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^N_y)). \tag{10}$$

Dans (10), A est une algèbre avec moyenne sur $\mathbb{R}^N_y$, $B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^N_y) = (B^2_A \cap L^\infty)(\mathbb{R}^N_y)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N \times V \times V; B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^N_y))$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}^N \times V \times V$ dans $B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^N_y)$. D'autre part, on suppose que la fonction de distribution initiale f^{in} satisfait :

$$f^{in}(x,\nu) > 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N \times V} (f^{in})^2(x,\nu)dxd\mu(\nu) \leq C_0 < \infty. \tag{11}$$

Sous les hypothèses (9)-(11), le problème de Cauchy (7) admet (pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé) une unique solution $f_\varepsilon \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N \times V))$ vérifiant

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^N \times V))} < C_0.$$

L'étude de l'équation de Boltzmann linéaire nous a permis d'établir un résultat d'homogénéisation important (voir Théorème 22) dans le cas où le flux est nul. Par ailleurs, nous avons prouvé un important résultat pour le problème cellulaire (voir Proposition 5). Quelques situations physiques pour lesquelles le Théorème 22 reste valable, ont été également présenté dans ce cas.

Cette thèse s'organise autour de trois chapitres.

— Le chapitre premier est consacré à la revue de la littérature existante sur l'homogénéisation des équations de Vlasov et de Boltzmann. Plus précisement, nous présentons ici quelques principaux résultats d'existence de solutions pour ces équations. A la suite de cela, des résultats d'homogénéisation de ces équations au moyen de la convergence à deux échelles sont également présentés. Le chapitre s'achève par une brève présentation de la méthode de la Sigma-convergence. Cette méthode sera le principal outil d'analyse que nous utiliserons dans les chapitres deux et trois. Elle est la généralisation de la convergence à deux échelles.

— Le chapitre deux est quant à lui consacré à l'homogénéisation de l'équation de Vlasov sous l'influence d'un champ électromagnétique fort. Cette étude est dans un premier temps faite dans le cadre général. Nous commençons par présenter l'opérateur moyenne le long des caractéristiques ainsi qu'un résultat d'équivalence entre la dualité au sens des distributions et celle définie à l'aide de la moyenne. Ces prérequis nous permettent d'établir notre résultat général d'homogénéisation. Nous achevons ce chapitre par quelques exemples concrets d'application de ce résultat.

— Enfin, l'homogénéisation de l'équation de Boltzmann linéaire (3) fait l'objet du chapitre trois. La première partie de ce chapitre est consacrée à la résolution du problème cellulaire associé à cette équation. Ensuite, nous énonçons et prouvons le principal résultat de ce chapitre. Pour terminer, quelques exemples d'illustration de ce résultat d'homogénéisation sont présentés.

Nous achevons cette thèse par une conclusion générale et quelques perspectives sur nos futurs travaux.

Chapitre 1

ÉTAT DE L'ART

1.1 Introduction.

La compréhension des phénomènes entrant en jeu dans un plasma nécessite une modélisation mathématique à la fois du transport, des collisions et des interactions des particules qui suivent les lois de la physique statistique. De façon précise, nous nous intéressons au cas où d'une part, les interactions entre les particules sont régies par le champ moyen qu'elles engendrent. On obtient donc une équation de Vlasov, qui est non linéairement couplée aux équations de Maxwell. D'autre part, lorsque les interactions binaires sont prépondérantes, on est conduit dans ce cas à l'équation de Boltzmann. Le reste du chapitre est subdivisé en deux parties. La première est consacrée à la présentation de quelques résultats d'existence de solutions et les principaux résultats d'homogénéisation liés à l'étude de ces équations de transport. Dans la seconde, nous ferons une brève présentation de la Σ-convergence, méthode que nous utiliserons dans le cadre de cette thèse.

1.2 Équations de Vlasov et de Boltzmann : existence et homogénéisation.

1.2.1 Résultats d'existence.

Système de Vlasov-Poisson (VP).

La majorité des résultats d'existence de solutions est établie dans le cadre classique. En 1952, R. Kurth [27] établit le tout premier résultat d'existence locale de solutions regulières. K. Pfaffelmoser [35] prouve l'existence globale de solutions régulières en dimension 3 pour des données initiales générales. Schaeffer [40] présente une démonstration plus simple du résultat de Pfaffelmoser. Son approche consiste à considérer une solution dont la donnée initiale est à support compact, et à contrôler l'accroissement du support au cours du temps. Posons

$$Q(t) = 1 + \sup\{|p| : \exists(\tau, x) \in (0, t) \times \mathbb{R}^3, f(x, \tau, p) \neq 0\}.$$

Voici le résultat établi par Schaeffer :

Théorème 1. *(**Schaeffer**) Supposons que la donnée initiale $f^{in} \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^6)$ est une fonction positive à support compact. Alors, le système VP admet une unique solution $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^6)$ telle que $Q(t) \leq C_p(1+t)^p$, $p > \frac{33}{17}$. De plus, le champ électrique auto-consistant $\boldsymbol{E}$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$ et est lipschitzien par rapport à x.*

Lorsque la donnée initiale n'est pas à support compact, Lions-Perthame [29] ont développé une nouvelle approche. Ils ont montré le résultat suivant :

Théorème 2. *Supposons que la donnée initiale f^{in} soit une fonction positive appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ et vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}^6} |p|^m f^{in} dx dp < \infty, \quad m \geq m_0 > 3.$$

Alors le système VP admet une solution forte $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6))$ vérifiant

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^6} |p|^m f(x,t,p) dx dp \leq C_T, \quad \forall T > 0.$$

De plus,

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f dp \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^q(\mathbb{R}^3)), \quad 1 \leq q < \frac{3+m_0}{3},$$
$$\boldsymbol{E} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^q(\mathbb{R}^3))^3, \quad \frac{3}{2} < q < 3\frac{3+m_0}{6-m_0}.$$

Concernant l'existence de solutions faibles (fonctions qui vérifient l'équation au sens des distributions), DiPerna-Lions [12] établissent un résultat d'existence sous des hypothèses minimales sur la donnée initiale f^{in}

$$\int_{\mathbb{R}^6} |p|^2 f^{in} dx dp < \infty, \quad \text{et} \quad f^{in} \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6).$$

Théorème 3. *Soit f^{in} une fonction positive appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$. Supposons que*

$$\int_{\mathbb{R}^6} |p|^2 f^{in} dx dp < \infty.$$

Alors il existe une solution faible du système VP appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^6)\text{-}w*)$, et vérifiant

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^6} |p|^2 f(x,t,p) dx dp + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{E}(x,t)|^2 dx \leq \mathcal{E}(0).$$

R. Robert [37] prouve l'unicité de solutions faibles lorsque celles-ci sont à support compact. Plus généralement, le problème d'unicité de solutions faibles reste ouvert.

Système de Vlasov-Maxwell (VM).

Le tout premier résultat d'existence globale de solutions faibles pour le système de VM en dimension 3 dans le cas classique a été obtenu par DiPerna-Lions [13] en 1989. Ce résultat s'applique également au cas relativiste. Il s'énonce comme suit :

Théorème 4. ***(DiPerna-Lions)*** *Supposons que $f^{in} \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ est une fonction positive, et que les données initiales $f^{in}, \boldsymbol{E}^{in}, \boldsymbol{B}^{in}$ vérifient :*

$$\int_{\mathbb{R}^6} |p|^2 f^{in} dx dp + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\boldsymbol{E}^{in}|^2 + |\boldsymbol{B}^{in}|^2) dx < \infty.$$

Alors le système VM admet une unique solution faible

$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^6)\text{-}w*) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)\text{-}w)^3.$$

En 1984, Wollman [43] prouve un résultat d'existence locale et d'unicité de solutions régulières pour le système VM en dimension 3. En effet, en supposant que les données initiales $f^{in}, \mathbf{E}^{in}, \mathbf{B}^{in}$ vérifient pour tout entier $s \geq 5$:

$$\begin{cases} f^{in} \in H^s(\mathbb{R}^6), \|f^{in}\|_s \leq M, \\ \text{Supp} f^{in} \subset \{(x,p) : |x| \leq R, |p| \leq R\}, \\ \mathbf{E}^{in}, \mathbf{B}^{in} \in H^s(\mathbb{R}^3)^3, \|\mathbf{E}^{in}\|_s, \|\mathbf{B}^{in}\|_s \leq N, \end{cases}$$

où M, N, R sont des constantes positives, il prouve le résultat suivant :

Théorème 5. *Soit $s \geq 5$ et les données initiales $f^{in}, \boldsymbol{E}^{in}, \boldsymbol{B}^{in}$ vérifiant l'hypothèse ci-dessus. Alors, il existe un réel positif T_0 et un triplet $(f, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ solution du système VM tel que*

$$f \in \mathcal{C}(0, T_0; H^s(\mathbb{R}^6)) \cap \mathcal{C}^1(0, T_0; H^{s-1}(\mathbb{R}^6)),$$

$$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \in (\mathcal{C}(0, T_0; H^s(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1(0, T_0; H^{s-1}(\mathbb{R}^3)))^3.$$

Glassey-Strauss [18] ont établi l'existence locale et l'unicité de solutions régulières pour des données régulières à support compact. Cette solution pouvant être prolongée en une solution globale s'il y'a un contrôle du support par rapport à la variable d'impulsion p.

Théorème 6. ***(Glassey-Strauss)*** *Supposons que la donnée initiale $f^{in} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^6)$ est une fonction positive à support compact et que le champ électromagnétique $(\boldsymbol{E}^{in}, \boldsymbol{B}^{in}) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)^6$ sont tels que*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}^{in} = \rho^{in}/\varepsilon_0; \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B}^{in} = 0; \quad \rho^{in} = q \int_{\mathbb{R}^3} f^{in} dp.$$

Supposons également l'estimation a priori suivante sur la solution : il existe une fonction continue $\beta(t)$ telle que

$$f(x,t,p) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad |p| > \beta(t).$$

Alors le système VM admet une unique solution $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^6)$. De plus, $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)^6$.

Equation de Boltzmann.

L'étude de l'équation de Boltzmann générale fait apparaître une difficulté de taille. En effet, si la fonction de distribution f ne vérifie que des estimations naturelles de type L^1, il est *a priori* impossible de définir le second membre (terme généré par l'opérateur de collision Q) dans l'espace des distributions. Diperna-Lions [14] lèvent cette difficulté par trois arguments originaux : l'analyse du noyau de collision, la méthode de lissage non linéaire ou de renormalisation et l'utilisation d'un résultat de moyenisation de la solution dû à Golse-Perthame-Sentis [19]. Ils établissent le résultat suivant :

Théorème 7. *(**Diperna-Lions** [14]). Soit $f^0 \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2 + |v|^2) f^0 dxdv < \infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f^0 |\ln f^0| dxdv < \infty.$$

Alors il existe une solution renormalisée f de l'équation de Boltzmann telle que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N))$ avec $f\,|_{t=0} = f^0$, et satisfaisant les estimations suivantes

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2 + |v|^2) f dxdv \leq \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (1 + 2|x|^2 + (2t^2 + 1)|v|^2) f^0 dxdv$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f |\ln f| dxdv + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} e(f) dsdxdv \leq \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (|\ln f^0| + 2|x|^2 + 2|v|^2) f^0 dxdv + C_N$$

où C_N est une constante dépendant uniquement de la dimension N et

$$e(f)(t, x, v) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (f' f'_* - f f_*) \ln(\frac{f' f'_*}{f f_*})(t, x, v, v_*, w) q(x, v - v_*, w) dv_* dw.$$

Dans la sous-section suivante, nous allons présenté quelques résultats d'homogénéisation obtenus dans le cadre de l'étude ces équations de transport.

1.2.2 Résultats d'homogénéisation.

Frenod-Sonnendrüker [17] prouve un résultat de convergence sous les hypothèses suivantes : la fonction initiale f^{in} vérifie

$$f^{in} \geq 0, \quad 0 < \int_{\mathbb{R}^6} (f^{in})^2 dxdp < \infty,$$

et le champ électromagnétique $(\mathbf{E}_\varepsilon, \mathbf{B}_\varepsilon)$ satisfait lorsque $\varepsilon \to 0$, à

$$\mathbf{E}_\varepsilon \to \mathbf{E} \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^3))\text{-fort},$$

$$\mathbf{B}_\varepsilon \to \mathbf{B} \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^3))\text{-fort}.$$

On a alors

Théorème 8. [17] *Sous les hypothèses précédentes, la suite de solutions $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ de l'équation de Vlasov vérifie pour tout $T \in \mathbb{R}^+$, la convergence suivante*

$$f_\varepsilon \to f \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^6))\textit{-faible}\, * .$$

De plus, notons pour tout vecteur $p, p_\| = (p \cdot \mathcal{M})\mathcal{M}$, alors f est l'unique solution de

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p_\| \cdot \nabla_x f + (\boldsymbol{E}_\| + p \times \boldsymbol{B}_\|) \cdot \nabla_p f = 0,$$

$$f(t = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{in}(x, u(p, \tau)) d\tau,$$

où $u(p, \tau)$ est la rotation d'angle τ autour de $\mathcal{M}$ appliquée à p.

Bostan [8] considère les modèles avec champs magnétiques oscillants rapidement, i.e.,

$$\mathbf{B}_\varepsilon(x,t) = \theta(\frac{t}{\varepsilon})B(x)\mathbf{b}(x), \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

où θ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, T-périodique donnée, B une fonction scalaire positive et $\mathbf{b}$ un champ de vecteurs unitaires. Il prouve le résultat suivant :

Théorème 9. *Supposons que $\boldsymbol{E} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^3))^3$, $f^{in} \in L^2(\mathbb{R}^6)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_p))$ une solution faible de l'équation de Vlasov. Alors, il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ convergeant vers zéro telle que $(f_{\varepsilon_n})_n$ converge à 2 échelles vers une fonction solution faible de*

$$\begin{cases} \partial_t f_0 + (\frac{p}{m} - \frac{w_c}{2}(\theta(s) - <\theta>)\ {}^\perp x) \cdot \nabla_x f_0 + (e\boldsymbol{E} + \frac{w_c}{2}(\theta(s) - <\theta>)\ {}^\perp p \\ + \frac{mw_c^2}{4}(<\theta^2> - \theta^2(s))\ {}^{\perp\perp} x) \cdot \nabla_p f_0 = 0, \\ f_0(0,s,x,p) = f^{in}(x, p - \frac{mw_c}{2}(\theta(s) - <\theta>)\ {}^\perp x) \in ker\mathcal{T}, \end{cases}$$

où ${}^\perp y = (y_2, -y_1, 0)$ avec $y = x$ ou p.

Jiang-Lin [23] ont étudié le système VP en ne considérant que les oscillations par rapport à la variable spatiale et ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 10. *Soit $f^{in} > 0$ la fonction de distribution initiale vérifiant f^{in} et $p^2 f^{in}$ bornées dans $L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_p)$. Soit $\phi^{in} \in H^1(\Omega)$ et $p^2 f_\varepsilon \to 0$ lorsque $|p| \to \infty$. La suite $(f_\varepsilon, f^1_\varepsilon, E_\varepsilon)$ de solutions du système VP converge à 2 échelles vers $(\overline{f}, \overline{f}^1, \overline{E})$ solution du système*

$$\partial_t \overline{f} + p \cdot \partial_y \overline{f} - \frac{e}{m}\overline{E} \cdot \partial_p \overline{f} = 0,$$

$$\partial_y \overline{E} = -4\pi e \int_{\mathbb{R}_p} \overline{f}^1 dp,$$

$$\partial_t \overline{f}^1 + p \cdot \partial_y \overline{f} - \frac{e}{m}\overline{E} \cdot \partial_p f^0 = 0,$$

où

$$f_\varepsilon(x,t,p) = f^0(x,p) + f^1_\varepsilon(x,t,p) \quad pour \quad tout \quad (x,t,p) \in \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}_p.$$

L'homogénéisation de l'équation de Boltzmann est un champ d'analyse très actif depuis quelques décennies, cependant, il reste un domaine encore ouvert. Dans la littérature, nous recensons plusieurs auteurs qui se sont intéréssés à ce problème (voir par exemple [2, 20]).

Goudon-Mellet [20] étudient la diffusion asymptotique de l'équation de Boltzmann linéaire. Ils établissent un important résultat de convergence sous les hypothèses suivantes sur l'espace mesuré (V,μ), la fonction σ et la condition initiale f^0_ε :

$$\begin{cases} \bullet\ V \text{ est un sous ensemble compact de } \mathbb{R}^N; \\ \bullet \text{ La fonction de vélocité } a : V \to \mathbb{R}^N \text{ appartient à } W^{1,\infty}(V); \\ \bullet \text{ Il existe deux constantes } C, \gamma > 0 \text{ telles que } \mu(\{v \in V, |a(v)\cdot\xi| \leq h\}) \leq Ch^\gamma \\ \text{ pour tout } h \in S^{N-1}, h > 0; \\ \bullet\ \sigma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; W^{1,\infty}(Y; \mathcal{C}(V^2))), \text{ la fonction } y \mapsto \sigma(\cdot, y, -) \text{ est } Y\text{-périodique et il existe} \\ \text{deux fonctions } \sigma_*, \sigma^* \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \text{ telles que } 0 < \sigma_*(x) \leq \sigma(x,y,v,v') \leq \sigma^*(x); \\ \bullet\ \sup_\varepsilon \int_{Y\times V} f^0_\varepsilon dx d\mu(v) < \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Théorème 11. *[20] Supposons que l'hypothèse (1.1) est vérifiée et que la fonction de vélocité a est telle que la solution normalisée de $\mathcal{T}(F) = 0$ satisfasse à*

$$\int_{Y\times V} a(v)F(x,y,v)dyd\mu(v) = 0.$$

De plus, on admet que $\rho_\varepsilon^0 = \int_V f_\varepsilon^0 d\mu(v)$ converge vaguement vers ρ^0 dans $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^N)$. Alors, $\rho_\varepsilon = \int_V f_\varepsilon d\mu(v)$ converge vaguement vers ρ, uniformément sur un intervalle de temps $[0,T]$ à une sous-suite près. La limite ρ est solution du problème de diffusion

$$\partial_t \rho - div_x(D\nabla_x \rho - U\rho) = 0$$

avec pour condition initiale ρ^0. Les coefficients effectifs sont définis par

$$\begin{cases} D(x) = -\int_{Y\times V} \chi^*(x,y,v) \otimes a(v)F(x,y,v)dyd\mu(v), \\ U(x) = \int_{Y\times V} \chi^*(x,y,v)a(v)F(x,y,v)dyd\mu(v) \end{cases}$$

avec χ^* solution de $\mathcal{T}^*(\chi^*) = -a(v)$, où $\mathcal{T} = a(v)\cdot\nabla_y - \mathcal{Q}$ et $\mathcal{T}^*$ son adjoint.

Notons que la quasi-totalité des travaux sur l'homogénéisation de l'équation de Boltzmann a été fait sous des hypothèses de périodicité.

Etant donné que dans la nature, très peu de phénomènes physiques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles dans le cadre périodique, Nguetseng [30] en 2002 a étendu la convergence à 2 échelles à des problèmes d'homogénéisation au delà des hypothèses périodiques. Cette nouvelle méthode est appelée Σ-convergence. Dans la section qui suit, nous allons faire une brève présentation de cette méthode.

1.3 La Σ-convergence.

La Σ-convergence est la généralisation de la convergence à 2 échelles, dans le but de pouvoir résoudre des problèmes non périodiques. Elle s'appuie essentiellement sur deux concepts : les algèbres d'homogénéisation et la théorie de représentation de Gelfand. Etant donné que les algèbres avec moyenne sont un cas particulier d'algèbres d'homogénéisation, nous allons dans cette section présenter les espaces généralisés de Besicovitch associés aux algèbres avec moyenne que nous aurons défini. Ensuite nous parlerons de la Σ-convergence. Nous renvoyons le lecteur à [30, 31, 32, 33, 38, 42] pour plus de détails , ainsi que pour les preuves des résultats qui seront présentés par la suite.

1.3.1 Espaces généralisés de Besicovitch.

Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$ ($m > 0$ un entier naturel), on pose

$$u^\varepsilon(x) = u(\frac{x}{\varepsilon}) \quad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Alors $u^\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$. Plus généralement, si $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, alors il en est de même pour u^ε. Nous désignons par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ l'espace des fonctions complexes continues et bornées sur $\mathbb{R}^m$. Soit Π l'espace des fonctions $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ telles que $u^\varepsilon \to \widetilde{u}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^m)$-faible$*$ lorsque

$\varepsilon \to 0$ et $\widetilde{u}$ une constante complexe. On vérifie sans peine que Π est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. De plus, Π contient des constantes, est stable par translation et par conjugaison complexe.
Soit M l'opérateur linéaire non borné de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ dans $\mathbb{C}$ défini par $D(M) = \Pi$ (domaine de M), $M(u) = \widetilde{u}$ pour $u \in D(M)$. On vérifie sans difficulté que :

(i) $M(1) = 1,\ M(u) \geq 0$ pour $u \in \Pi, u \geq 0$.

(ii) $\overline{M(u)} = M(\overline{u}),\ u \in \Pi$.

(iii) $M(\tau_a u) = M(u)$ pour $u \in \Pi, a \in \mathbb{R}^m$, où $\tau_a u(y) = u(y-a)$ $(y \in \mathbb{R}^m)$.

(iv) $|M(u)| \leq \|u\|_\infty$ pour tout $u \in \Pi$.

M est une *moyenne* sur $\mathbb{R}^m$ et $M(u)$ est la moyenne de $u \in \Pi$

Définition 1. On appelle *algèbre avec moyenne* (ou M-algèbre pour simplifier) *sur* $\mathbb{R}^m$*, toute* sous-algèbre fermée A de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ telle que :

(AM_1) A contient des constantes.

(AM_2) A est invariante par translation, i.e., pour tout $u \in A$ et tout $a \in \mathbb{R}^m$, $\tau_a u \equiv u(\cdot - a) \in A$.

(AM_3) A est stable pour la conjugaison complexe, i.e., pour tout $u \in A$, $\overline{u} \in A$.

(AM_4) $A \subset D(M) = \Pi$.

Soit A une M-algèbre. Muni de la norme de la convergence uniforme, A est une C^*-algèbre commutative et unitaire. Rappelons qu'une C^*-algèbre est une algèbre de Banach involutive A telle que $\|u^*u\| = \|u\|^2$ $u \in A$ et une involution sur A est une application $u \mapsto u^*$ de A dans A telle que pour tout $u, v \in A$ et $a \in \mathbb{C}$, on a $(u+v)^* = u^* + v^*$; $(au)^* = \overline{a}u^*$; $(uv)^* = v^*u^*$; $(u^*)^* = u^{**} = u$. Nous désignons par $\Delta(A)$ le spectre de A et par $\mathcal{G}$ la transformation de Gelfand. $\Delta(A)$ est l'ensemble des homomorphismes d'algèbre non nuls de A dans $\mathbb{C}$. $\Delta(A)$ est un sous-ensemble de la boule unitée fermée de A' (le dual de A). On le munit de la topologie induite par la topologie faible$*$ de A'. Ainsi structuré, $\Delta(A)$ est un espace compact.
De plus, la transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ sur A est un isomorphisme isométrique de C^*-algèbre de A sur $\mathcal{C}(\Delta(A))$.

L'application $\varphi \mapsto M(\mathcal{G}^{-1}(\varphi))$ de $\mathcal{C}(\Delta(A))$ dans $\mathbb{C}$ est une forme linéaire continue positive prenant la valeur 1 en la fonction $\varphi = 1$. Cette application est donc une mesure de Radon positive sur $\Delta(A)$, et de masse totale 1. On la désignera par β. On a donc

$$M(\psi) = \int_{\Delta(A)} \mathcal{G}(\psi)(s)d\beta(s) \quad (\psi \in A). \tag{1.2}$$

Dans le cadre pratique de l'homogénéisation des équations de Vlasov et Boltzmann, nous utiliserons cette définition équivalente de la moyenne d'une fonction $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leq p < \infty)$ (voir [34, Chap.3] ou [24, Chap.7] pour plus de détails) :

$$M(u) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u(x)dx,$$

où B_r désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^m$ centrée à l'origine de rayon $r > 0$, et $|B_r|$ sa mesure de Lebesgue. On a

$$\int_{\Delta(A)} \mathcal{G}(u)d\beta = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u(y)dy \quad (u \in A).$$

Proposition 1. *Soit $p > 0$ un réel. Pour $u \in A$, on a $|u|^p \in A$ avec*

$$\mathcal{G}(|u|^p) = |\mathcal{G}(u)|^p \quad et \quad M(|u|^p) = \int_{\Delta(A)} |\mathcal{G}(u)(s)|^p d\beta(s).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A chaque M-algèbre A sont associées ses sous-algèbres régulières

$$A^n = \left\{ \psi \in A \cap \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^m_y) : D^\alpha_y \psi \in A \quad \forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \text{ avec } |\alpha| \leq n \right\}$$

où $D^\alpha_y \psi = \frac{\partial^{|\alpha|}\psi}{\partial y_1^{\alpha_1} \cdots \partial y_m^{\alpha_m}}$. Muni de la norme $|||\psi|||_n = \sup_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha_y \psi\|_\infty$, A^n est un espace de Banach. De plus, soit

$$A^\infty = \bigcap_{n \geq 1} A^n = \left\{ \psi \in A \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m_y) : D^\alpha_y \psi \in A \quad \forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \right\}.$$

On munit A^∞ de la topologie localement convexe définie par la famille de semi-normes $||| \cdot |||_n$ $(n \geq 1)$, ce qui en fait un espace de Fréchet.

On peut également définir la notion de produit de M-algèbres. Pour cela, soit A_1 (resp. A_2) une M-algèbre sur $\mathbb{R}^{m_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{m_2}$). On définit le *produit de M-algèbres* $A_1 \odot A_2$ comme étant l'adhérence dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2})$ du produit tensoriel

$$A_1 \otimes A_2 = \left\{ \sum_{\text{finie}} u_{i_1} \otimes u_{i_2} : u_{i_j} \in A_j, \quad j = 1, 2 \right\}.$$

$A_1 \odot A_2$ définit une M-algèbre sur $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$.

Avant de définir l'espace généralisé de Besicovitch, définissons tout d'abord l'espace de Marcinkiewicz $\mathfrak{M}^p(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leq p < \infty)$, comme l'espace des fonctions $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^m)$ vérifiant

$$\limsup_{r \to \infty} \fint_{B_r} |u(y)|^p \, dy < \infty$$

avec $\fint_{B_r} = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r}$.

Muni de la semi-norme

$$\|u\|_p = \limsup_{r \to \infty} \left(\fint_{B_r} |u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

$\mathfrak{M}^p(\mathbb{R}^m)$ est un espace semi-normé complet (voir [41, Chapitre A1, pp 14-15] pour le détail de la preuve). Ceci étant dit, nous définissons l'espace généralisé de Besicovitch associé à l'algèbre avec moyenne A, que nous notons par $B^p_A(\mathbb{R}^m)$, comme étant le complété de A dans $\mathfrak{M}^p(\mathbb{R}^m)$ par rapport à la semi-norme $\|\cdot\|_p$. Il est assez évident de voir que pour tout $f \in A$ et $0 < p < \infty$, alors $|f|^p \in A$, de sorte que

$$\|f\|_p = \left(\lim_{r \to \infty} \fint_{B_r} |f(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \equiv (M(|f|^p))^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

L'égalité (1.3) reste valable pour tout $f \in B^p_A(\mathbb{R}^m)$ (par densité de A dans $B^p_A(\mathbb{R}^m)$). Muni de la semi-norme (1.3), $B^p_A(\mathbb{R}^m)$ est un espace semi-normé complet.

Soit $1 \leq p \leq q < \infty$. On a $B_A^q \subset B_A^p$, de sorte que tout naturellement, on puisse définir l'espace B_A^∞ comme suit :

$$B_A^\infty = \left\{ f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} B_A^p : \sup_{1\leq p<\infty} \|f\|_p < \infty \right\}.$$

On munit B_A^∞ de la semi-norme $[f]_\infty = \sup_{1\leq p<\infty} \|f\|_p$, ce qui en fait un espace semi-normé complet. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. La transformation de Gelfand $\mathcal{G} : A \to \mathcal{C}(\Delta(A))$ se prolonge par continuité en une unique application linéaire continue, encore notée $\mathcal{G}$, de B_A^p dans $L^p(\Delta(A))$. De plus, si $u \in B_A^p \cap L^\infty(\mathbb{R}_y^m)$ alors $\mathcal{G}(u) \in L^\infty(\Delta(A))$ et $\|\mathcal{G}(u)\|_{L^\infty(\Delta(A))} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_y^m)}$.
2. La moyenne M définie sur A, se prolonge par continuité en une forme linéaire continue positive (encore notée M) sur B_A^p vérifiant $M(u) = \int_{\Delta(A)} \mathcal{G}(u)d\beta \ \ (u \in B_A^p)$. De plus, elle est invariante par translation.
3. Soit $1 \leq p, q < \infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$. La multiplication usuelle $A \times A \to A; \ \ (u, v) \mapsto uv$, se prolonge par continuité en une forme bilinéaire $B_A^p \times B_A^q \to B_A^r$ avec

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q \ \text{ pour } \ (u, v) \in B_A^p \times B_A^q.$$

Maintenant, soit $u \in B_A^p \ \ (1 \leq p < \infty)$; alors $|u|^p \in B_A^1$ et par conséquent, d'après (2.) ci-dessus, on a $M(|u|^p) = \int_{\Delta(A)} |\mathcal{G}(u)|^p d\beta = \|\mathcal{G}(u)\|^p_{L^p(\Delta(A))}$. D'où pour $u \in B_A^p$, on a $\|u\|_p = (M(|u|^p)^{\frac{1}{p}}$ et $\|u\|_p = 0$ si et seulement si $\mathcal{G}(u) = 0$.
Malheureusement, l'application $\mathcal{G}$ (définie sur B_A^p) n'est pas injective en général. Soit $\mathcal{N} = \ker(\mathcal{G})$ (le noyau de $\mathcal{G}$) et posons

$$\mathcal{B}_A^p = B_A^p / \mathcal{N} = \{\widetilde{u} = u + \mathcal{N} : u \in B_A^p\}.$$

Muni de la norme

$$\|u + \mathcal{N}\|_{\mathcal{B}_A^p} = \|u\|_p \ \ (u \in B_A^p),$$

$\mathcal{B}_A^p$ est un espace de Banach et la propriété suivante est vérifiée : l'application $\mathcal{G} : B_A^p \to L^p(\Delta(A))$ induit un isomorphisme isométrique $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{B}_A^p$ dans $L^p(\Delta(A))$. De plus, pour tout $1 < p < \infty$, $\mathcal{B}_A^p$ est reflexif.

1.3.2 La Σ-convergence.

Soit Q un ouvert (non nécessairement borné) de $\mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N}^*)$ et A une M-algèbre sur $\mathbb{R}_y^N$.

Définition 2. Soit $1 \leq p < \infty$. Une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^p(Q)$ converge Σ-faiblement dans $L^p(Q)$ vers $u_0 \in L^p(Q; \mathcal{B}_A^p)$ si lorsque $\varepsilon \to 0$, on a

$$\int_Q u_\varepsilon(x) f(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \to \int_Q M(u_0(x, \cdot) f(x, \cdot)) dx \tag{1.4}$$

pour tout $f \in L^{p'}(Q; A) \ \ (\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p})$ où

$$M(u_0(x, \cdot) f(x, \cdot)) = \int_{\Delta(A)} \mathcal{G}_1(u_0(x)) \mathcal{G}(f(x)) d\beta.$$

On écrira symboliquement $u_\varepsilon \to u_0$ dans $L^p(Q)\Sigma$-faible. Dans tout ce qui suit, E désignera une suite ordinaire de réels strictement positifs admettant zéro comme point adhérent. E est appelée suite fondamentale. Le résultat qui suit est d'une importance capitale dans le processus d'homogénéisation (voir [32, Théorème 5] pour sa preuve).

Théorème 12. *On suppose que $1 < p < \infty$. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in E} \subset L^p(Q)$ une suite bornée. Alors, on peut extraire une sous-suite E' de E en sorte que la suite correspondante $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in E'}$ soit faiblement Σ-convergente dans $L^p(Q)$.*

Etant donné que nous serons confrontés à des cas de produits de suites, nous avons besoin de définir la notion de Σ-convergence forte.

Définition 3. Une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^p(Q)$ $(1 \leq p < \infty)$ sera dite fortement Σ-convergente dans $L^p(Q)$ vers $u_0 \in L^p(Q;\mathcal{B}^p_A)$ si elle est faiblement Σ-convergente vers u_0, et on a la condition suivante *(*lorsque $\varepsilon \to 0$*) :*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(Q)} \to \|\mathcal{G}_1 \circ u_0\|_{L^p(Q\times\Delta(A))}. \tag{1.5}$$

Symboliquement, on l'exprimera par $u_\varepsilon \to u_0$ dans $L^p(Q)\Sigma$-fort. Le résultat suivant est d'un intérêt capital.

Théorème 13. *Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $r \geq 1$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$. Supposons que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in E} \subset L^q(Q)$ est faiblement Σ-convergente dans $L^q(Q)$ vers $u_0 \in L^q(Q;\mathcal{B}^q_A)$, et $(v_\varepsilon)_{\varepsilon\in E} \subset L^p(Q)$ est fortement Σ-convergente dans $L^p(Q)$ vers $v_0 \in L^p(Q;\mathcal{B}^p_A)$. Alors la suite $(u_\varepsilon v_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ est faiblement Σ-convergente dans $L^r(Q)$ vers $u_0 v_0$.*

Cependant, dans la pratique, on utilise beaucoup plus le résultat suivant. Il est une conséquence directe du théorème ci-dessus.

Corollaire 1. *Soient $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in E} \subset L^p(Q)$ et $(v_\varepsilon)_{\varepsilon\in E} \subset L^{p'}(Q)\cap L^\infty(Q)$ $(1 < p < \infty$ et $p' = \frac{p}{(p-1)})$ deux suites telles que*
(i) $u_\varepsilon \longrightarrow u_0$ dans $L^p(Q)\Sigma$-faible ;
(ii) $v_\varepsilon \longrightarrow v_0$ dans $L^{p'}(Q)\Sigma$-fort ;
(iii) $(v_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ bornée dans $L^\infty(Q)$.
Alors $u_\varepsilon v_\varepsilon \longrightarrow u_0 v_0$ in $L^p(Q)\Sigma$-faible.

La Σ-convergence forte généralise de façon naturelle la notion de convergence forte dans $L^p(Q)$ au sens usuel.

Proposition 2. *Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in E} \subset L^p(Q)$ $(1 \leq p < \infty)$ une suite convergeant (fortement) dans $L^p(Q)$ vers $u_0 \in L^p(Q)$. Alors, la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ est fortement Σ-convergente dans $L^p(Q)$ vers u_0.*

Remarque 1. Nous avons défini la Σ-convergence dans $L^p(\Omega)$ *(*$1 \leq p < \infty$*)*, où Ω est un ouvert (non nécessairement borné) de $\mathbb{R}^N$ *(*$N \geq 1$*)*. On peut également la définir dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Pour ce faire, soit $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on note par $u_{,\Omega}$ la restriction de u à Ω . Alors $u_{,\Omega} \in L^p(\Omega)$. Soient $(u_\varepsilon) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $u_0 \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N;\mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^N))$; alors $u_\varepsilon \to u_0$ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)\Sigma$-faible si et seulement si $u_{\varepsilon,\Omega} \to u_{0,\Omega}$ dans $L^p(\Omega)\Sigma$-faible pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. De façon analogue, on définit également la Σ-convergence forte.

Le résultat qui va suivre, donne une meilleure caractérisation de la Σ-limite des suites impliquant le gradient. Mais avant d'y arriver, nous aurons besoin de définir certains espaces à utiliser. Posons

$$\mathcal{B}_A^{1,p} = \{u \in \mathcal{B}_A^p : \frac{\partial u}{\partial y_i} \in \mathcal{B}_A^p, 1 \leq i \leq N\}.$$

Muni de la norme $\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial y_i}\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$, $\mathcal{B}_A^{1,p}$ est un espace de Banach. Nous définissons également l'espace

$$\mathcal{B}_A^{1,p}/\mathbb{C} = \{u \in \mathcal{B}_A^{1,p} : M(u) = 0\},$$

muni de la norme $\|u\|_{\#,p} = (\sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial y_i}\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$ $(u \in \mathcal{B}_A^{1,p}/\mathbb{C})$, $\mathcal{B}_A^{1,p}/\mathbb{C}$ est un espace normé qui n'est pas complet en général. Dès lors, nous désignons par $\mathcal{B}_{\#A}^{1,p}$ le complété de $\mathcal{B}_A^{1,p}/\mathbb{C}$ par rapport à $\|\cdot\|_{\#,A}$. Ceci étant, nous pouvons à présent énoncer le résultat.

Théorème 14. *Soient* $1 < p < \infty$ *et* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ *une suite bornée dans* $W^{1,p}(Q)$*. Alors, il existe une sous-suite* E' *de* E *et un couple* $(u_0, u_1) \in W^{1,p}(Q) \times L^p(Q; \mathcal{B}_{\#A}^{1,p})$ *tels que lorsque* $E' \ni \varepsilon \to 0$,

(i) $u_\varepsilon \to u_0$ *dans* $W^{1,p}(Q)$*-faible ;*

(ii) $u_\varepsilon \to u_0$ *dans* $L^p(Q)\Sigma$*-faible ;*

(iii) $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \to \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + \frac{\overline{\partial} u_1}{\partial y_i}$ *dans* $L^p(Q)\Sigma$*-faible* $(1 \leq i \leq N)$.

La Σ-convergence peut être également utilisée pour les problèmes évolutifs. Pour cela, soit A_y et A_τ deux M-algèbres sur $\mathbb{R}_y^N$ et $\mathbb{R}_\tau$ respectivement. Soit $A_y \odot A_\tau = A$ leur produit. Dans ce cas, $\Delta(A) = \Delta(A_y) \times \Delta(A_\tau)$ et $\beta = \beta_y \otimes \beta_\tau$. Pour tout réel $0 < T < \infty$ et Q un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Posons $Q_T = Q \times (0, T)$. On a la définition suivante :

Définition 4. Une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset L^p(Q_T)$ $(1 \leq p < \infty)$ sera dite faiblement Σ-convergente dans $L^p(Q_T)$ vers une fonction $u_0 \in L^p(Q_T; \mathcal{B}_A^p)$ si lorsque $\varepsilon \to 0$, on a

$$\int_{Q_T} u_\varepsilon(x,t) f(x,t,\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon}) dxdt \to \int_{Q_T} M(u_0(x,t) f(x,t)) dxdt$$

pour tout $f \in L^{p'}(Q_T; A)$ $(\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p})$, *où*

$$M(u_0(x,t) f(x,t)) = \int_{\Delta(A)} \mathcal{G}_1(u_0(x,t))(s,s_0) \mathcal{G}(f(x,t))(s,s_0) d\beta.$$

Symboliquement, on l'exprimera par $u_\varepsilon \to u_0$ dans $L^p(Q_T)\Sigma$-faible. Tout comme dans $L^p(Q)$, on définit la Σ-convergence forte dans $L^p(Q_T)$. Les différents résultats d'homogénéisation se transposent aisement dans ce cas en prenant $A = A_y \odot A_\tau$.

Chapitre 2

HOMOGÉNÉISATION DE L'ÉQUATION DE VLASOV

2.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous nous intéréssons à la dynamique des particules évoluant dans un milieu hétérogène. De manière plus précise, nous portons notre attention sur les équations modélisant le transport des particules, lorsque les interactions entre ces derniers sont gouvernées par un champ moyen auto-généré. Il s'agit dans ce cadre de l'équation de Vlasov. Il est donc question pour nous d'étudier l'homogénéisation de cette équation. Pour cela, nous appliquons la méthode de la Σ-convergence pour étudier les équations de Vlasov sous certaines hypothèses de structure sur le champ électromagnétique. Tout d'abord, une analyse du problème dans le cadre général est présentée. De cette étude, un résultat général d'homogénéisation est établi. Par la suite, quelques cas concrets sont considérés afin d'illustrer le résultat obtenu.

2.2 Le cas général.

L'homogénéisation de l'équation de Vlasov a fait l'objet de nombreuses études, cependant ces travaux ont été effectués dans le cadre périodique. Nous nous proposons d'homogénéiser cette équation sous des hypothèses de structure plus générales. Nous allons donc étudier le comportement asymptotique de la fonction de distribution des particules, lorsque celles-ci évoluent dans un milieu fortement hétérogène, et sont soumises à un champ électromagnétique fortement oscillant. En négligeant les collisions entre particules, le modèle adéquat pour décrire ce phénomène est l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \nu \cdot \nabla_x f_\varepsilon + (\boldsymbol{E}^\varepsilon + \nu \times \boldsymbol{B}^\varepsilon) \cdot \nabla_\nu f_\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3 \tag{2.1}$$

où $\mathbb{R}^3_T = (0,T)\times\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R} \ni T > 0$ le temps final et $\varepsilon > 0$ un paramètre réel permettant de décrire les inhomogénéités du milieu, que l'on fera tendre vers zéro. Ici ν représente la vitesse des particules, $(\boldsymbol{E}^\varepsilon, \boldsymbol{B}^\varepsilon) \equiv (\boldsymbol{E}^\varepsilon, \boldsymbol{B}^\varepsilon)(t,x) = (\boldsymbol{E}(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}), \boldsymbol{B}(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}))$ $((t,x) \in \mathbb{R}^3_T)$ le champ électromagnétique généré par les particules, et $f_\varepsilon \equiv f_\varepsilon(t,x,\nu)$ $((t,x,\nu) \in \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3)$ la fonction de distribution. A l'équation

(2.1), on associe la condition initiale suivante

$$f_\varepsilon(0,x,\nu) = f^{in}(x,\nu) \text{ dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \tag{2.2}$$

où $f^{in} \geq 0$ et $0 < \int_{\mathbb{R}^6}(f^{in})^2 dx d\nu < +\infty$.
On suppose $(\boldsymbol{E}^\varepsilon, \boldsymbol{B}^\varepsilon)$ donné dans $(L^\infty(0,T;(L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)))^3)^2$.

Posons

$$\begin{pmatrix} \nu \\ \boldsymbol{E}^\varepsilon + \nu \times \boldsymbol{B}^\varepsilon \end{pmatrix} = A^\varepsilon \equiv A^\varepsilon(t,x,\nu) := A(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, \nu) = \begin{pmatrix} \nu \\ \boldsymbol{E}(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}) + \nu \times \boldsymbol{B}(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}) \end{pmatrix}$$

L'équation (2.1) se réécrit comme suit :

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + A^\varepsilon \cdot \nabla_{(x,\nu)} f_\varepsilon = 0,$$

qui est une équation d'advection linéaire. On associe à cette équation la condition initiale

$$f_\varepsilon(0,\mathbf{x}) = f^{in}(\mathbf{x}),$$

où $\mathbf{x} = (x,\nu)$.
Posons $\mathbb{R}^6_T = (0,T)\times\mathbb{R}^6$. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + A \cdot \nabla_x f = 0, \\ f(0,x) = f^{in}(x), \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $f : \mathbb{R}^6_T \to \mathbb{R}$ et $A : \mathbb{R}^6_T \to \mathbb{R}^6$.

Pour $t \in [0,T]$ donné, considérons tout d'abord le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{ds} = A(s,\mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(0;t,x) = x. \end{cases} \tag{2.4}$$

Rappelons que les solutions de (2.4) sont les caractéristiques de l'équation d'advection (2.3). On les note $\mathbf{X}(s;t,x)$. Le résultat suivant donne l'existence et l'unicité de la solution du système (2.4), voir par exemple [1] pour la preuve.

Théorème 15. *On suppose que $A \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}^6_T)$, $\nabla A \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}^6_T)$ pour tout entier $k \geq 1$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|A(t,x)| \leq C(1+|x|) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^6_T.$$

Alors, il existe une unique solution $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^k([0,T]_s \times [0,T]_t \times \mathbb{R}^6)$ du système (2.4).

Définition 5. *Une fonction f est dite solution faible du système (2.3) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$f(t,x) \geq 0$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^6_T$;*
2. *$f \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))$;*

3. Pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^6_T)$ avec support compact en x telle que $\psi(T,\cdot)=0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^6_T} f\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + A\cdot\nabla_x\psi\right)dtdx + \int_{\mathbb{R}^6} f^{in}\psi(0,\cdot)dx = 0.$$

Théorème 16. *Soit $f^{in}\in L^2(\mathbb{R}^6)$. Il existe une unique solution faible f (au sens de la Définition 5) du système (2.3). Elle est donnée par*

$$f(t,x) = f^{in}(\mathbf{X}(0;t,x)), \tag{2.5}$$

où $\mathbf{X}$ représente les caractéristiques associées à A.

Preuve. Supposons d'abord que $f^{in}\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^6)$. La fonction f donnée par (2.5) est $\mathcal{C}^k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ car f^{in} et $\mathbf{X}$ le sont et $\mathbf{X}$ est définie de manière unique (Théorème 15). Montrons que f définie par (2.5) est une solution de (2.3). Pour cela, on a

$$f(0,x) = f^{in}(\mathbf{X}(0;0,x)) = f^{in}(x),$$

car $\mathbf{X}(0;0,x)=x$. D'autre part, on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}(0;t,x)\cdot\nabla f^{in}(\mathbf{X}(0;t,x))$$

et

$$\begin{aligned}\nabla_x f(t,x) &= \nabla_x f^{in}(X(0;t,x))\\ &= \sum_{k=1}^{6}\frac{\partial f^{in}}{\partial x_k}\nabla_x(X_k(0;t,x))\\ &= {}^t(\nabla_x\mathbf{X}(0;t,x)\nabla_x f^{in}(\mathbf{X}(0;t,x))\end{aligned}$$

où le dernier produit est compris au sens du produit matriciel et ${}^t(\cdot)$ représente la transposition. Notons que

$$\nabla_x\mathbf{X}(0;t,x) = (\frac{\partial X_k}{\partial x_l}(0;t,x))_{1\le k,l\le 6}.$$

Ainsi, on a donc

$$(\frac{\partial f}{\partial t}+A\cdot\nabla_x f)(t,x) = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}(0;t,x)\cdot\nabla f^{in}(\mathbf{X}(0;t,x)) + A(t,x)\cdot\ {}^t((\nabla_x\mathbf{X}(0;t,x))\nabla_x f^{in}(\mathbf{X}(0;t,x))). \tag{2.6}$$

Cependant, d'après les propriétés des caractéristiques, on a

$$\mathbf{X}(s;t,\mathbf{X}(t;r,x)) = \mathbf{X}(s;r,x)$$

et en différentiant cette égalité par rapport à t, on est conduit à

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}(s;t,\mathbf{X}(t;r,x)) + \nabla_x\mathbf{X}(s;t,\mathbf{X}(t;r,x))\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial s}(t;r,x) = 0. \tag{2.7}$$

D'après la première équation de (2.4), on a $\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial s}(t;r,x) = A(t,\mathbf{X}(t;r,x))$ et cette relation est satisfaite pour toutes les valeurs de s,t,r et en particulier pour $r=t$. Alors (2.7) devient

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}(s;t,x) + \nabla_x\mathbf{X}(s;t,x)A(t,x) = 0$$

En substituant cette expression dans (2.6), on obtient

$$(\frac{\partial f}{\partial t}+A\cdot\nabla_x f)(t,x) = -\nabla_x \mathbf{X}(0;t,x)A(t,x)\cdot\nabla_x f^{in}(\mathbf{X}(0;t,x))+A(t,x)\cdot\,^t((\nabla_x\mathbf{X}(0;t,x))\nabla_x f^{in}(\mathbf{X}(0;t,x)))$$

Rappelons que pour tout $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ et $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^6$ deux vecteurs, on a $(M\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \,^t\mathbf{u}\,^tM\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(\,^tM\mathbf{v})$.
Finalement, on est conduit à

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A\cdot\nabla_x f = 0,$$

ce qui signifie que f définie par (2.5), est solution du système (2.3). Etant donné qu'on a un problème linéaire, si f_1 et f_2 sont deux solutions de (2.3) , alors on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1 - f_2) + A\cdot\nabla_x(f_1 - f_2) = 0$$

En utilisant les caractéristiques, on a $\frac{d}{dt}(f_1 - f_2)(t,\mathbf{X}(t)) = 0$. Puisque f_1 et f_2 vérifient la même condition initiale, on a l'unicité de la solution pour notre problème. De plus, pour tout $t \in [0,T]$, on a (voir [21, page 54])

$$\frac{d}{dt}\left(e^{3t}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(e^{-3t}f)^2 dxd\nu\right) = 0,$$

ce qui implique $\|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} = e^{\frac{3}{2}t}\|f^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^6}$, et finalement

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))} = C(T)\|f^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^6)}.$$

Supposons maintenant que $f^{in} \in L^2(\mathbb{R}^6)$. Alors il existe une suite de fonctions $(f_n^{in})_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^6)$ telle que $f_n^{in} \to f^0$ dans $L^2(\mathbb{R}^6)$, lorsque $n \to \infty$. Pour chaque n fixé, il existe une unique solution $f_n \in \mathcal{C}^k([0,T];\mathcal{D}(\mathbb{R}^6))$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ de (2.3), vérifiant l'estimation

$$\|f_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))} = C(T)\|f_n^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^6)}.$$

On construit ainsi une suite de solutions $(f_n)_n$ de (2.3) qui est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))$ (il est à noter que $\|f_n^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} \leq C$ $(C > 0)$ car la suite $(f_n^{in})_n$ converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^6)$ vers f^{in}). D'après le Théorème de Banach-Aloaglu, il existe une fonction $f \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))$ telle que $f_n \to f$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))$-faible $*$ (lorsque $n \to \infty$) à une sous-suite près. De plus on montre aisement que f est l'unique solution de (2.3) et vérifie

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))} = C(T)\|f^{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^6)},$$

où $C(T)$ est une constante positive dépendant uniquement de T. ■

De ce qui précède, on en déduit que le problème (2.1)-(2.2) admet une unique solution faible $f_\varepsilon \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))$ (pour tout $\varepsilon > 0$ fixé), qui vérifie l'estimation a priori suivante :

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))} \leq C, \tag{2.8}$$

où $C > 0$ est une constante dépendant de T et de la norme de f^{in}.
Notre objectif ici est d'étudier l'homogénéisation du système de Vlasov (2.1)-(2.2) sous l'influence d'un champ magnétique fort, i.e., un champ magnétique de la forme

$$\boldsymbol{B}^\varepsilon = \boldsymbol{B}_0^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}_1^\varepsilon. \tag{2.9}$$

Avant de s'attaquer directement à la résolution de ce problème, nous allons tout d'abord présenter quelques résultats importants qui nous seront utiles.

2.2.1 L'opérateur moyenne le long des caractéristiques.

Supposons dans toute cette sous-section que le champ $\boldsymbol{B}_1$ vérifie

$$\boldsymbol{B}_1 \in \left[B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})\right]^3. \tag{2.10}$$

Nous considérons l'opérateur différentiel non borné P de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y}))$ dans $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y}))$ défini par :

$$D(P) = \{\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})) : P\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))\},$$

$$P\widetilde{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \nu \cdot \nabla_y u + (\nu \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_\nu u, \ \widetilde{u} = u + \mathcal{N} \in D(P),$$

où la première égalité est comprise au sens des distributions dans $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y}))$.

Nous rappelons que $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ est muni de la norme

$$\|u + \mathcal{N}\|_{L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} M\left(|u(\cdot,\cdot,\nu)|^2\right) d\nu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'opérateur linéaire P est bien défini ; en effet, si $\widetilde{u} = \widetilde{w}$ alors $u - w \in \mathcal{N}$ et pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_\nu) \otimes A^\infty$,

$$\begin{aligned}\langle P(\widetilde{u} - \widetilde{w}), \phi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^3} M\left((u-w)\left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \nu \cdot \nabla_y \phi + (\nu \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_\nu \phi\right]\right) d\nu \\ &= 0\end{aligned}$$

car $M(fg) = 0$ pour $f \in \mathcal{N}$ et $g \in B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})$ (ceci découle de l'inégalité $|M(fg)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 = 0$). D'où $P\widetilde{u} = P\widetilde{w}$.

Désignons par $(\mathcal{T}, Y, V) = (\mathcal{T}, Y, V)(s; \tau, y, \nu)$ les caractéristiques de l'opérateur différentiel du premier ordre P données par :

$$\frac{d\mathcal{T}}{ds} = 1, \ \frac{dY}{ds} = V(s), \ \frac{dV}{ds} = V(s) \times \boldsymbol{B}_1(\mathcal{T}(s), Y(s)) \tag{2.11}$$

avec comme condition initiale

$$\mathcal{T}(0; \tau, y, \nu) = \tau, \ Y(0; \tau, y, \nu) = y, \ V(0; \tau, y, \nu) = \nu. \tag{2.12}$$

Le système (2.11)-(2.12) n'admet pas toujours de solutions. Comme illustration (voir Remarque 3), si dans la sous-section 2.3.3, on suppose que les champs magnétiques $\boldsymbol{B}_0$ et $\boldsymbol{B}_1$ dépendent également de la variable $y = x/\varepsilon$, alors c'est un fait que le système ci-dessus n'admet pas de solutions. Dans la suite, on admettra que ce système admet toujours une solution. Dès lors, il est évident que ces solutions sont de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{T}(s; \tau, y, \nu) = s + \tau, \ Y(s; \tau, y, \nu) = y + \int_0^s V(\xi; \tau, y, \nu) d\xi \\ \frac{dV}{ds} = V(s) \times \boldsymbol{B}_1(s + \tau, y + \int_0^s V(\xi; \tau, y, \nu) d\xi), \ V(0; \tau, y, \nu) = \nu. \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Suivant la même approche que dans [8, Section 3]), on introduit l'*opérateur moyenne* $\langle\cdot\rangle$ le long des caractéristiques (2.13) : pour $\widetilde{u} = u + \mathcal{N} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, on pose

$$\langle\widetilde{u}\rangle = \widetilde{\langle u\rangle} \equiv \langle u\rangle + \mathcal{N}, \tag{2.14}$$

où

$$\langle u\rangle(\tau,y,\nu)=\lim_{R\to\infty}R^{-1}\int_0^R u(\mathcal{T},Y,V)(s;\tau,y,\nu)ds \text{ pour } u\in L^2(\mathbb{R}^3_\nu;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})), \tag{2.15}$$

la limite ci-dessus ayant lieu dans $L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$-fort. Alors l'opérateur $\langle\cdot\rangle$ est bien défini sur $L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$. En effet, les caractéristiques (2.13) génèrent le système dynamique (2.11) défini sur l'espace de phase $\mathbb{R}_\tau\times\mathbb{R}^3_y\times\mathbb{R}^3_\nu$. De plus, pour tout $u\in L^2(\mathbb{R}^3_\nu;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, on a

$$\left\|R^{-1}\int_0^R u(s+\tau,Y(s;\tau,y,\nu),V(s;\tau,y,\nu))ds\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3_\nu;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))}\le\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3_\nu;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))}. \tag{2.16}$$

D'où nous pouvons espérer des propriétés de compacité pour les ensembles

$$\left\{R^{-1}\int_0^R u(s+\tau,Y(s;\tau,y,\nu),V(s;\tau,y,\nu))ds+\mathcal{N}:R>0\right\} \tag{2.17}$$

le long des caractéristiques $(\mathcal{T},Y,V)$. Le Théorème d'ergodicité de Von Neumann [36, Theorem II.11, page 57] conduit à : pour tout $u\in L^2(\mathbb{R}^3_\nu;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, la suite (2.17) converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ vers une fonction $w\in L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ lorsque $R\to\infty$, et on le note par $\langle\widetilde{u}\rangle$. D'après la définition (2.15) et par l'inégalité (2.16), on a $\langle\widetilde{u}\rangle=\widetilde{\langle u\rangle}\equiv\langle u\rangle+\mathcal{N}$. Finalement, si $\langle\widetilde{u}\rangle=\langle\widetilde{w}\rangle$, alors $u-w\in\mathcal{N}$, et d'après (2.16), on a

$$\left\|\left\langle\widetilde{u-w}\right\rangle\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))}\le\|u-w\|_{L^2(\mathbb{R}^3_\nu;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))}=0.$$

Ce qui conduit à $\langle\widetilde{u}\rangle=\langle\widetilde{w}\rangle$. Ainsi, l'application $\widetilde{u}\mapsto\langle\widetilde{u}\rangle$ est bien définie de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ dans lui-même.

Dans ce qui suit, nous notons par $(\mathcal{T}(s),Y(s),V(s))$ la fonction vectorielle

$$(\tau,y,\nu)\mapsto(\mathcal{T}(s;\tau,y,\nu),Y(s;\tau,y,\nu),V(s;\tau,y,\nu)).$$

Proposition 3. *L'application $\langle\cdot\rangle:L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))\to L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ est linéaire et continue. Elle coïncide avec la projection orthogonale des éléments de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ qui sont invariants par rapport à la fonction vectorielle $(\mathcal{T}(s),Y(s),V(s))$:*

$$\widetilde{u}\circ(\mathcal{T}(s),Y(s),V(s))=\widetilde{u}\quad\forall s\in\mathbb{R}.$$

Ces éléments sont en fait les fonctions de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ qui sont constantes le long des caractéristiques $(\mathcal{T},Y,V)$.

Preuve. La continuité de $\langle\cdot\rangle$ découle de (2.16) : prendre $\lim_{R\to\infty}$ de part et d'autre. Il ne reste qu'à montrer que $\langle\cdot\rangle$ est la projection orthogonale sur le noyau de P. Soit

$$S=\{\widetilde{u}\in L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})):P\widetilde{u}=0 \text{ au sens des distributions sur } \mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu\}\equiv\ker P. \tag{2.18}$$

Nous notons par $\mathcal{P}$ l'opérateur de projection de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ dans S. Le Thèorème d'ergodicité de Von Neumann affirme que pour tout $\widetilde{u}\in L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, on a

$$\lim_{R\to\infty}R^{-1}\int_0^R u(\mathcal{T},Y,V)(s;\tau,y,\nu)ds=(\mathcal{P}\widetilde{u})(\tau,y,\nu), \text{ pour presque tout } (\tau,y,\nu)\in\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu. \tag{2.19}$$

De plus, on a également

$$\int_{\mathbb{R}^3_\nu} M(\widetilde{u}\widetilde{w})d\nu = \int_{\mathbb{R}^3_\nu} M(\widetilde{w}\mathcal{P}\widetilde{u})d\nu \text{ pour } \widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})) \text{ et } \widetilde{w} \in S. \tag{2.20}$$

Ainsi, d'après (2.19)-(2.20), $\langle\cdot\rangle$ coïncide avec $\mathcal{P}$ sur S. D'autre part, il est clair que S est constitué d'éléments de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ qui sont invariants par rapport à la fonction vectorielle $(\mathcal{T}(s), Y(s), V(s))$. Clairement (voir [15, page 308]), on a

$$\mathcal{P}(\widetilde{u}\widetilde{w}) = \widetilde{u}\mathcal{P}(\widetilde{w}),\ u \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3_\nu; A) \cap S \text{ et } w \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})), \tag{2.21}$$

où $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3_\nu; A)$ désigne l'espace des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^3_\nu$ dans A. ■

Remarque 2. Il est important de noter que l'opérateur moyenne ne commute pas en général avec les dérivées par rapport à ν. En effet, la fonction $|\nu|^2/2$ vérifie l'équation de contrainte (2.23), mais non pas $\partial(|\nu|^2/2)/\partial\nu_1 = \nu_1$, de sorte que l'on ait

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\nu_1}\left(\frac{|\nu|^2}{2}\right)\right\rangle \neq \frac{\partial}{\partial\nu_1}\left\langle \frac{|\nu|^2}{2}\right\rangle = \nu_1,$$

ce qui en d'autres termes impliquerait que ν_1 soit constante le long des caractéristiques associées à l'équation de contrainte (2.23).

2.2.2 Equivalence entre la dualité au sens des distributions et la dualité définie à l'aide de la moyenne.

Le résultat ci-dessous établit la relation entre la formulation faible au sens des distributions et la formulation faible par rapport à la dualité dans $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$. Supposons (2.10) toujours satisfaite.

Théorème 17. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y}))$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^3_\nu} M\left(f\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nu\cdot\nabla_y\psi + (\nu\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu\psi\right)\right)d\nu = 0 \tag{2.22}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_\nu)\otimes A^\infty$. Alors, on a

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} + \nu\cdot\nabla_y f + (\nu\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu f = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu, \tag{2.23}$$

c'est-à-dire,

$$\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu} f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \nu\cdot\nabla_y\varphi + (\nu\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu\varphi\right)dyd\tau d\nu = 0 \tag{2.24}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_\nu)\otimes\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$. Inversement, si (2.23) est vérifiée, alors il en sera de même pour (2.22).

Preuve. 1) Montrons d'abord que (2.22) implique (2.23). Pour cela, soient $\theta \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_\nu)$ fixés. Soit $\psi \in A^\infty$. On définit de manière classique $\theta * \psi$ par : $(\theta*\psi)(\tau,y) = \int_{\mathbb{R}^4}\theta(s,\xi)\psi(\tau-s, y-\xi)dsd\xi$ pour $(\tau,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Observons que $\theta*\psi \in A^\infty$ (voir la preuve de la [45, Prop. 2.3]) avec $\theta * \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}(\theta * \psi) \in A^\infty$ et $\theta * \nabla_y\psi = \nabla_y(\theta * \psi) \in A^\infty$, on a (avec $(\theta * \psi) \otimes \phi$ comme fonction test dans (2.22))

$$\int_{\mathbb{R}^3_\nu} M\left(f\left[\left(\theta * \frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nu\cdot(\theta * \nabla_y\psi)\right)\phi + (\theta * \psi)(\nu \times \boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu\phi\right]\right) d\nu = 0.$$

Mais

$$M\left(f\left(\theta * \frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nu\cdot(\theta * \nabla_y\psi)\right)\phi\right) = M\left((\widetilde{\theta} * f)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nu\cdot\nabla_y\psi\right)\phi\right)$$

où $\widetilde{\theta}(\tau, y) = \theta(-\tau, -y)$. De plus, si on pose $\mathbf{g} = f(\nu \times \boldsymbol{B}_1)$ (appartenant à $B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y})^3$ pour chaque $\nu \in \mathbb{R}^3$), alors

$$\begin{aligned} M(f(\theta * \psi)(\nu \times \boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu\phi) &= M((\theta * \psi)\mathbf{g}\cdot\nabla_\nu\phi) \\ &= M(\psi(\widetilde{\theta} * \mathbf{g})\cdot\nabla_\nu\phi). \end{aligned}$$

Posons également $f_\theta = \widetilde{\theta} * f$ et $\mathbf{g}_\theta = \widetilde{\theta} * \mathbf{g}$. Alors $f_\theta \in A^\infty$ et $\mathbf{g}_\theta \in (A^\infty)^3$ avec

$$\int_{\mathbb{R}^3_\nu} M\left(f_\theta\phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nu\cdot\nabla_y\psi\right) + (\mathbf{g}_\theta\cdot\nabla_\nu\phi)\psi\right) d\nu = 0. \tag{2.25}$$

Cependant, par analogie, en utilisant la représentation intégrale de la moyenne (voir (1.2)), on a

$$\int_{\mathbb{R}^3_\nu\times\Delta(A)} \left(\widehat{f}_\theta\phi\left(\widehat{\frac{\partial\psi}{\partial\tau}} + \nu\cdot\widehat{\nabla_y\psi}\right) + (\widehat{\mathbf{g}}_\theta\cdot\nabla_\nu\phi)\widehat{\psi}\right) d\nu d\beta = 0$$

où $\widehat{\cdot} = \mathcal{G}(\cdot)$ est la transformation de Gelfand sur A. Puisque ψ et ϕ sont arbitrairement choisies, il vient que

$$\widehat{\frac{\partial\psi}{\partial\tau}} + \nu\cdot\widehat{\nabla_y\psi} - \mathrm{div}_\nu\,\widehat{\mathbf{g}}_\theta = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_\nu \times \Delta(A). \tag{2.26}$$

Rappelons que $f_\theta \in A^\infty$ et $\mathbf{g}_\theta \in (A^\infty)^3$, on intègre chaque terme de (2.26) séparement (par rapport à $\delta_{(\tau,y)} \in \Delta(A)$, où $\delta_{(\tau,y)}$ est la mesure de Dirac au point (τ, y)) pour obtenir

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nu\cdot\nabla_y\psi - \mathrm{div}_\nu\,\mathbf{g}_\theta = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}^4_{\tau,y}. \tag{2.27}$$

En effet, explicitons le mécanisme d'obtention du terme $\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$. On a

$$\widehat{\frac{\partial\psi}{\partial\tau}}(\delta_{(\tau,y)}) = \left\langle \delta_{(\tau,y)}, \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right\rangle = \frac{\partial\psi}{\partial\tau}(\tau, y).$$

On répète ce processus pour obtenir les autres termes de gauche de (2.27).

Multiplions (2.27) par $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_\nu) \otimes \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$ et intégrons sur $\mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}^4_{\tau,y}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu} \left(f_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + f_\theta(\nu\cdot\nabla_y\varphi) + \mathbf{g}_\theta\cdot\nabla_\nu\varphi\right) d\tau dy d\nu = 0.$$

Mais

$$\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu} f_\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\nu\cdot\nabla_y\varphi\right)d\tau dyd\nu$$
$$=\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu}\left(\int_{\mathbb{R}^4_{s,\xi}}\theta(s,\xi)f(\tau+s,y+\xi,\nu)dsd\xi\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\nu\cdot\nabla_y\varphi\right)(\tau,y,\nu)d\tau dyd\nu$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu}\mathbf{g}_\theta\cdot\nabla_\nu\varphi d\tau dyd\nu$$
$$=\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu}(\widetilde{\theta}*(f(\nu\times\boldsymbol{B}_1)))\cdot\nabla_\nu\varphi d\tau dyd\nu$$
$$=\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu}\left(\int_{\mathbb{R}^4_{s,\xi}}\theta(s,\xi)[f(\tau+s,y+\xi,\nu)(\nu\times\boldsymbol{B}_1(\tau+s,y+\xi))]\cdot\nabla_\nu\varphi dsd\xi\right)d\tau dyd\nu.$$

D'après le Théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\mathbb{R}^4_{s,\xi}}\theta(s,\xi)[\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu}f(\tau+s,y+\xi,\nu)(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\nu\cdot\nabla_y\varphi\\&\quad+(\nu\times\boldsymbol{B}_1(\tau+s,y+\xi))\cdot\nabla_\nu\varphi)d\tau dyd\nu]dsd\xi=0.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Puisque la fonction θ est arbitrairement choisie dans (2.28), on a

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu}f(\tau+s,y+\xi,\nu)(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\nu\cdot\nabla_y\varphi+(\nu\times\boldsymbol{B}_1(\tau+s,y+\xi))\cdot\nabla_\nu\varphi)d\tau dyd\nu=0\\&\text{pour presque tout }(s,\xi)\in\mathbb{R}^4.\end{aligned}\tag{2.29}$$

(2.29) étant vraie pour presque tout $(s,\xi)\in\mathbb{R}^4$, alors l'ensemble de tels (s,ξ) est évidemment dense dans $\mathbb{R}^4$. Ce qui conduit à la véracité de (2.29) pour tout $(s,\xi)\in\mathbb{R}^4$. En effet, il suffit de le vérifier pour $(s,\xi)=(0,0)$.

Pour cela, soit $\mathbb{R}^4\ni(s_n,\xi_n)\to(0,0)$ dans $\mathbb{R}^4$ lorsque $n\to\infty$, avec (s_n,ξ_n) vérifiant (2.29). On réécrit (2.29) avec (s_n,ξ_n) et par le changement de variables $(\tau,y)\mapsto(\tau+s_n,y+\xi_n)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu}f[\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\tau-s_n,y-\xi_n,\nu)+\nu\cdot\nabla_y\varphi(\tau-s_n,y-\xi_n,\nu)\\&\quad+(\nu\times\boldsymbol{B}_1(\tau,y))\cdot\nabla_\nu\varphi(\tau-s_n,y-\xi_n,\nu)]d\tau dyd\nu=0.\end{aligned}\tag{2.30}$$

D'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, lorsque $n\to\infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu}f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\nu\cdot\nabla_y\varphi+(\nu\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu\varphi\right)d\tau dyd\nu=0$$

pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_\nu)\otimes\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$.

2) Inversement, supposons que (2.23) soit vraie, et soient $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$ et $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_\nu)\otimes A^\infty$. Pour $\varepsilon>0$ arbitrairement fixé, on pose $\psi(\tau,y,\nu)=\varphi(\varepsilon\tau,\varepsilon y)\phi(\tau,y,\nu)$ pour $(\tau,y,\nu)\in\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu$. En prenant ψ comme fonction test dans la formulation variationnelle de (2.23), on obtient

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\mathbb{R}^7}f(\varepsilon\phi\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot)+\varphi(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot)\frac{\partial\phi}{\partial\tau}+\nu\cdot[\varepsilon\phi\nabla_y\varphi(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot)+\varphi(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot)\nabla_y\phi]\\&+(\nu\times\boldsymbol{B}_1)\cdot(\varphi(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot)\nabla_\nu\phi))d\tau dyd\nu=0.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $t = \varepsilon\tau$ et $x = \varepsilon y$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^7} f^\varepsilon \left(\varepsilon \phi^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^\varepsilon + \nu \cdot [\varepsilon \phi^\varepsilon \nabla_x \varphi + \varphi (\nabla_y \phi)^\varepsilon] + (\nu \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \varphi (\nabla_\nu \phi)^\varepsilon \right) dt dx d\nu = 0$$

où $w^\varepsilon(t, x, \nu) = w(t/\varepsilon, x/\varepsilon, \nu)$. En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on aboutit à

$$\int_{\mathbb{R}^7} M \left(f \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \nu \cdot \nabla_y \phi + (\nu \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_\nu \phi \right] \right) \varphi dt dx d\nu = 0.$$

Puisque cette dernière égalité est vraie pour toute fonction φ arbitrairement choisie, on a alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} M \left(f \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \nu \cdot \nabla_y \phi + (\nu \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_\nu \phi \right] \right) d\nu = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_\nu) \otimes A^\infty,$$

qui conduit à (2.22). Ce qui achève la preuve. ■

2.2.3 Résultat d'homogénéisation.

Dans cette sous-section, la suite fondamentale sera notée F. Supposons que le champ électromagnétique dans (2.1)-(2.2) est fortement oscillant et donné par

$$\boldsymbol{E}^\varepsilon(t, x) = \boldsymbol{E} \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right), \ \boldsymbol{B}^\varepsilon(t, x) = \boldsymbol{B}_0 \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{B}_1 \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \ \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}^3_T, \ \varepsilon > 0$$

où les fonctions $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}_i$ vérifient l'hypothèse suivante :

$$\boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{B}_i \in \left[B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}) \right]^3, \ i = 0, 1. \tag{2.31}$$

Avant d'énoncer notre principal résultat d'homogénéisation, nous aurons besoin de ce résultat (voir [7] pour sa preuve) qui sera d'un intérêt particulier dans la preuve de l'unicité de la solution du problème limite.

Théorème 18. (**Théorème d'unicité de Holmgren**). *Soit $k \geq 0$ un entier naturel, et soit $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre k dont les coefficients sont analytiques dans un voisinage de $x \in \mathbb{R}^N$. Soit Γ une hypersurface analytique et non caractéristique en x. Si u est une solution de classe $\mathcal{C}^k$ du problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} Pu = 0 \\ D^\alpha u = 0, \ |\alpha| \leq k - 1, \ \textit{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Alors $u \equiv 0$ sur tout voisinage de x.

Nous rappelons que, pour un opérateur linéaire $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha$, une surface d'équation $\phi = 0$ est dite non caractéristique si et seulement si $\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D\phi)^\alpha \neq 0$ avec $D\phi = (\partial^i \phi)_{1 \leq i \leq k}$. Notons également que le Théorème d'unicité de Holmgren est un cas pratique du Théorème de Cauchy-Kowalevski. Il assure l'unicité des solutions de classe $\mathcal{C}^k$ pour les équations linéaires à coefficients analytiques. Sous l'hypothèse (2.31), on a le résultat suivant

Théorème 19. *Soit A une M-algèbre sur $\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}$. Pour tout $\varepsilon \in F$, soit f_ε l'unique solution de* (2.1)-(2.2). *Alors, il existe une sous-suite F' extraite de F telle que la suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in F'}$ converge Σ-faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu)$ vers $f_0 + \mathcal{N}$ avec $\mathcal{N} = \{u \in B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}) : M(|u|^2) = 0\}$, où $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^3_T; L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})) \cap \ker P)$ est la solution du problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \langle\nu\rangle \cdot \nabla_x f_0 + \langle(\boldsymbol{E} + (\nu \times \boldsymbol{B}_0)) \cdot \nabla_\nu f_0\rangle = 0 \ \textit{dans}\ \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y} \\ f_0(0, x, s, y, \nu) = f^{in}(x, {}^\perp V(0; s, y, \nu)). \end{cases} \tag{2.32}$$

Preuve. D'après le Théorème 12 et (2.8), il existe une sous-suite F' de F et une fonction $f_0 \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3_x; L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))))$ telles que lorsque $F' \ni \varepsilon \to 0$, on a

$$f_\varepsilon \to f_0 + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3)\Sigma\text{-faible}. \tag{2.33}$$

Rappelons que si $u \in \mathcal{N}$, alors

$$M(uv) = 0 \ \forall v \in B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}). \tag{2.34}$$

Puisque le champ électrique $\boldsymbol{E} \in B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})^3$, on déduit que (voir [30, Example 4.1])

$$\boldsymbol{E}^\varepsilon \to \boldsymbol{E} + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T)^3\Sigma\text{-faible} .$$

Ainsi, en considérant $\boldsymbol{E}$ comme fonction test dans la convergence ci-dessus (rappelons que $\boldsymbol{E} \in (B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))^3$), on aboutit à la convergence forte suivante

$$\boldsymbol{E}^\varepsilon \to \boldsymbol{E} + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T)^3\Sigma\text{-fort} . \tag{2.35}$$

Par une approche similaire , on a également

$$\boldsymbol{B}^\varepsilon_i \to \boldsymbol{B}_i + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T)^3\Sigma\text{-fort} ,\ i = 0, 1. \tag{2.36}$$

La suite de la preuve se fera en trois étapes :

Etape 1 : le problème limite. Revenons à (2.1). Considérons la fonction test $\psi^\varepsilon(t, x, \nu) = \psi\left(t, x, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, \nu\right)$ pour tout $(t, x, \nu) \in \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3$, où $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3) \otimes A^\infty$. Alors $\psi^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3)$. Multiplions (2.1) par ψ^ε, puis par une intégration par parties en utilisant le fait que $\nabla_x \cdot \nu = 0$ et $\nabla_\nu \cdot (\boldsymbol{E}^\varepsilon + \nu \times \boldsymbol{B}^\varepsilon) = 0$, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^\varepsilon + \nu \cdot (\nabla_x\psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\nu \cdot (\nabla_y\psi)^\varepsilon \right] dtdxd\nu \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon [(\boldsymbol{E}^\varepsilon + \nu \times \boldsymbol{B}^\varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon}\nu \times \boldsymbol{B}^\varepsilon_1) \cdot (\nabla_\nu\psi)^\varepsilon] dtdxd\nu = 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Multiplions (2.37) par ε, puis passons à la limite dans chaque membre du résultat obtenu lorsque $F' \ni \varepsilon \to 0$ (en utilisant le Théorème 13 pour le premier terme et le Corollaire 1 pour le second terme), on obtient alors

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left[\varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^\varepsilon + \varepsilon(\nu \cdot (\nabla_x\psi)^\varepsilon) + \nu \cdot (\nabla_y\psi)^\varepsilon \right] dtdxd\nu \\ &\to \int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M\left(f_0 \left[\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nu \cdot \nabla_y\psi \right] \right) dtdxd\nu \end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3} f_\varepsilon[(\varepsilon \boldsymbol{E}^\varepsilon + \varepsilon(\nu\times \boldsymbol{B}_0^\varepsilon) + \nu\times \boldsymbol{B}_1^\varepsilon)\cdot(\nabla_\nu\psi)^\varepsilon]dtdxd\nu$$
$$\to \int_{\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3} M(f_0[(\nu\times \boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu\psi])dtdxd\nu.$$

Par conséquent, on a

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3} M\left(f_0\left[\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nu\cdot\nabla_y\psi + (\nu\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu\psi\right]\right)dtdxd\nu = 0. \tag{2.38}$$

En choisissant dans (2.38) $\psi(t,x,\tau,y,\nu) = \varphi(t,x)\phi(\tau,y,\nu)$ où $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_T)$ et $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_\nu)\otimes A^\infty$, on obtient (vu que φ est arbitrairement choisie)

$$\int_{\mathbb{R}^3_\nu} M\left(f_0(t,x,\cdot)\left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \nu\cdot\nabla_y\phi + (\nu\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu\phi\right]\right)d\nu = 0. \tag{2.39}$$

Soit $f\equiv f_0(t,x,\cdot)$. D'après le Théorème 17, (2.39) implique

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} + \nu\cdot\nabla_y f + (\nu\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_\nu f = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_\nu, \tag{2.40}$$

ce qui signifie que $f\in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ est solution de (2.40), et par conséquent $f_0(t,x,\cdot,)\in\ker P$ pour presque tout $(t,x)\in\mathbb{R}^3_T$. Considérant toujours la même formulation variationnelle (2.37), mais avec $\psi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_T)\otimes[(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_\nu)\otimes A^\infty)\cap\ker P]$ comme fonction test, on est conduit à

$$\int_{\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3} f_\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \nu\cdot(\nabla_x\psi)^\varepsilon + (\boldsymbol{E}^\varepsilon + \nu\times\boldsymbol{B}_0^\varepsilon)\cdot(\nabla_\nu\psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(P\psi)^\varepsilon\right]dtdxd\nu = 0.$$

En faisant tendre $F'\ni\varepsilon\to 0$ et en utilisant le fait que $\psi\in\ker P$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3} M\left(f_0\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nu\cdot\nabla_x\psi + (\boldsymbol{E}+\nu\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla_\nu\psi\right]\right)dtdxd\nu = 0. \tag{2.41}$$

Puisque $f_0(t,x,\cdot,)\in\ker P$ pour presque tout $(t,x)\in\mathbb{R}^3_T$, et d'après (2.20), (2.41) se réécrit comme suit

$$\int_{\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3} M\left(f_0\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nu\cdot\nabla_x\psi + (\boldsymbol{E}+\nu\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla_\nu\psi\right\rangle\right)dtdxd\nu = 0,$$

ce qui est équivalent à (en utilisant la linéarité de $\langle\cdot\rangle$)

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3} M\left(f_0\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\rangle + \langle\nu\cdot\nabla_x\psi\rangle + \langle(\boldsymbol{E}+\nu\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla_\nu\psi\rangle\right)dtdxd\nu = 0. \tag{2.42}$$

Etant donné que $\langle\cdot\rangle$ commute avec les translations le long des caractéristiques (voir [8, Prop. 4.2]) et d'après la Proposition 3, il commute également avec toutes les dérivées par rapport à t et x, de sorte que l'on ait

$$\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle\psi\rangle = \frac{\partial\psi}{\partial t} \text{ (rappelons que } \psi\in\ker P).$$

En répétant ce processus au second terme de (2.42), on obtient également

$$\langle \nu \cdot \nabla_x \psi \rangle = \langle \nu \rangle \cdot \langle \nabla_x \psi \rangle = \langle \nu \rangle \cdot \nabla_x \psi.$$

Etant donné que l'opérateur moyenne ne commute pas en général avec les dérivées par rapport à ν (voir Remarque 2), en général, nous n'aurons pas toujours $\langle \nabla_\nu \psi \rangle = \nabla_\nu \langle \psi \rangle$. Par conséquent (2.42) se reformule comme suit

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu} M \left(f_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \langle \nu \rangle \cdot \nabla_x \psi + \langle (\boldsymbol{E} + (\nu \times \boldsymbol{B}_0)) \cdot \nabla_\nu \psi \rangle \right] \right) dx dt d\nu = 0,$$

ce qui est équivalent à (voir Théorème 17)

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \langle \nu \rangle \cdot \nabla_x f_0 + \langle (\boldsymbol{E} + (\nu \times \boldsymbol{B}_0)) \cdot \nabla_\nu f_0 \rangle = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}. \tag{2.43}$$

Donnons une expression plus précise de $\langle \nu \rangle$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle \nu \rangle (\tau, y, \nu) &= \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R V(0; s+\tau, Y(s; \tau, y, \nu), V(s; \tau, y, \nu)) ds \\ &= \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, y, \nu) ds, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle \nu \rangle (\tau, y, \nu) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, y, \nu) ds. \tag{2.44}$$

De façon analogue, on a également

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{E} \rangle (\tau, y, \nu) &= \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(\mathcal{T}, Y)(s; \tau, y, \nu) ds \\ &= \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(s+\tau, Y(s; \tau, y, \nu)) ds, \end{aligned}$$

et

$$\langle \nu \times \boldsymbol{B}_0 \rangle (\tau, y, \nu) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R \left(V(s; \tau, y, \nu) \times \boldsymbol{B}_0(s+\tau, Y(s; \tau, y, \nu)) \right) ds.$$

Etape 2 : la condition initiale. Soit $\eta \in \mathcal{C}^1([0,T])$ avec $\eta(T) = 0$, et soit $\phi \in [\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_\nu) \otimes A^\infty] \cap \ker P$. Posons $\psi^\varepsilon(t, x, \nu) = \eta(t)\phi(x, t/\varepsilon, x/\varepsilon, \nu)$ $((t, x, v) \in \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu)$. Alors en utilisant le fait que $P\phi = 0$, on a

$$\begin{aligned} &-\eta(0) \textstyle\int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} \phi \left(x, 0, \frac{x}{\varepsilon}, \nu\right) f^{in}(x, \nu) dx d\nu \\ &\quad - \textstyle\int_{\mathbb{R}^7_{T,\nu}} f_\varepsilon \left[\eta' \phi^\varepsilon + \eta \left(\nu \cdot (\nabla_x \phi)^\varepsilon + (\boldsymbol{E}^\varepsilon + \nu \times \boldsymbol{B}_0^\varepsilon) \cdot (\nabla_\nu \phi)^\varepsilon \right] dt dx d\nu = 0 \end{aligned}$$

où $\mathbb{R}^6_{x,\nu} = \mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_\nu$ et $\mathbb{R}^7_{T,\nu} = \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu$. En faisant tendre $F' \ni \varepsilon \to 0$, on obtient

$$\begin{aligned} &-\eta(0) \textstyle\int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} f^{in}(x, \nu) M(\phi(x, 0, \cdot, \nu)) dx d\nu \\ &\quad - \textstyle\int_{\mathbb{R}^7_{T,\nu}} M(f_0 \left[\eta' \phi + \eta \left(\nu \cdot \nabla_x \phi + (\boldsymbol{E} + \nu \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_\nu \phi \right] dt dx d\nu = 0. \end{aligned} \tag{2.45}$$

A ce niveau, nous nous intéressons au premier terme de la partie gauche de (2.45). Observons tout d'abord que si on note par Φ^s_τ la solution de (2.13) prenant à l'instant $s = t$, la valeur (y, ν), on a évidemment l'égalité : pour tous $s, \tau \in \mathbb{R}$,

$$(Y(s; \tau, Y(\tau; s, y, \nu), V(\tau; s, y, \nu)), V(s; \tau, Y(\tau; s, y, \nu), V(\tau; s, y, \nu))) = (y, \nu),$$

de sorte que si l'on considère l'application $\Phi^s_\tau : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie par

$$\Phi^s_\tau(y, \nu) = (Y(s; \tau, y, \nu), V(s; \tau, y, \nu)),$$

elle vérifie

$$\Phi^s_\tau(\Phi^\tau_s(y, \nu)) = (y, \nu) \ \forall (y, \nu) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Ainsi, l'application Φ^s_τ est inversible d'inverse Φ^τ_s. De façon analogue, on définit Y^s_τ et V^s_τ.

Puisque $\phi \in \ker P$, on a

$$\begin{aligned}\phi(x, 0, y, \nu) &= \phi(x, s, Y(s; 0, y, \nu), V(s; 0, y, \nu)) \\ &= \phi(x, s, \Phi^s_0(y, \nu)) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} f^{in}(x, \nu) M(\phi(x, 0, \cdot, \nu)) dx d\nu &= \int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} f^{in} M(\langle \phi \rangle) dx d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} f^{in} M\left(\lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R \phi(x, s, \Phi^s_0(y, \nu)) ds\right) dx d\nu.\end{aligned}$$

Etant donné que ϕ est à support compact par rapport à (x, ν), on a

$$\begin{aligned}M(\langle \phi \rangle) &= \lim_{\rho\to\infty} |B_\rho|^{-1} \int_{B_\rho} \left(\lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R \phi(x, s, \Phi^s_0(y, \nu)) ds\right) dy \\ &= \lim_{\rho\to\infty, R\to\infty} |B_\rho|^{-1} R^{-1} \int_{B_\rho} \int_0^R \phi(x, s, \Phi^s_0(y, \nu)) ds dy.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} f^{in}(x, \nu) \left(\lim_{\rho\to\infty, R\to\infty} |B_\rho|^{-1} R^{-1} \int_{B_\rho} \int_0^R \phi(x, s, \Phi^s_0(y, \nu)) ds dy\right) dx d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} \left(\lim_{\rho\to\infty, R\to\infty} |B_\rho|^{-1} R^{-1} \int_{B_\rho} \int_0^R \phi(x, s, \Phi^s_0(y, \nu)) f^{in}(x, \nu) ds dy\right) dx d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} \left(\lim_{\rho\to\infty, R\to\infty} |B_\rho|^{-1} R^{-1} \int_{B_\rho} \int_0^R \phi(x, s, y, \nu) f^{in}(x, ^\perp V^s_0(y, \nu)) ds dy\right) dx d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} \left(\lim_{\rho\to\infty, R\to\infty} |B_\rho|^{-1} R^{-1} \int_{B_\rho} \int_0^R \phi(x, s, y, \nu) f^{in}(x, ^\perp V(0; s, y, \nu)) ds dy\right) dx d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} \left(\lim_{\rho\to\infty, R\to\infty} |B_\rho|^{-1} R^{-1} \int_{B_\rho} \int_0^R \phi(x, s, y, \nu) f^{in}(x, V(0; s, y, \nu)) ds dy\right) dx d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^6_{x,\nu}} M(\phi(x, \cdot, \cdot, \nu) f^{in}(x, ^\perp V(0; \cdot, \cdot, \nu)) dx d\nu.\end{aligned}$$

Précisons comment obtenir ${}^{\perp}V$. En effet, dans le but de déterminer de façon explicite ${}^{\perp}V(0;s,y,\nu)$, on détermine d'abord $V(s;0,y,\nu)$ et ensuite on permute dans le résultat les positions de s et 0. Ceci étant, puisque f_0 vérifie (2.43) et d'après le Théorème 17, on est conduit au final à

$$f_0(0,x,s,y,\nu) = f^{in}(x, {}^{\perp}V(0;s,y,\nu)). \tag{2.46}$$

En combinant (2.43) et (2.46), on obtient (2.32).
Etape 3 : l'unicité de $f_0 + \mathcal{N}$. Supposons que $f^{in} \equiv 0$ et montrons que $f_0(t,x,\cdot,\nu) \in \mathcal{N}$. Pour cela, nous utiliserons la méthode classique de Holmgren.

Soit $T > 0$ un réel donné. Soit ϕ une fonction régulière à support compact (en t,x,ν)vérifiant

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \nu \cdot \nabla_y \phi + (\nu \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_\nu \phi = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^4_{\tau,y} \times \mathbb{R}^3_\nu \\ \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_T) \otimes [(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_\nu) \otimes A^\infty) \cap \ker P], \end{array} \tag{2.47}$$

et considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nu \cdot \nabla_x \psi + (\boldsymbol{E} + \nu \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_\nu \psi = \phi, \ \ 0 \le t \le T \\ \psi(T,x,\tau,y,\nu) = 0. \end{array} \right. \tag{2.48}$$

Alors (2.48) admet une unique solution régulière ψ, dont le support est compact en (t,x,ν). De plus, soit $\Phi = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \nu \cdot \nabla_y \psi + (\nu \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_\nu \psi$. Alors Φ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nu \cdot \nabla_x \Phi + (\boldsymbol{E} + \nu \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_\nu \Phi = 0, \ \ 0 \le t \le T \\ \Phi(T,x,\tau,y,\nu) = 0. \end{array} \right. \tag{2.49}$$

L'unicité de la solution de (2.48) conduit à $\Phi \equiv 0$ (d'après le Théorème 18), i.e., ψ vérifie (2.47). En utilisant ψ comme fonction test dans (2.32) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3_\nu} M(\phi f_0) dt dx d\nu = 0.$$

Vu que ceci est vraie pour toute fonction régulière ϕ vérifiant (2.47), et f_0 vérifiant (2.40), on obtient $M(|f_0|^2) = 0$ (en considérant que la suite $\phi_n \to f_0$ dans $L^2(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y})))$. Ce qui montre que $f_0 \in \mathcal{N}$, et par conséquent l'unicité de $f_0 + \mathcal{N}$. Ce qui achève la preuve. ■

Il est important de noter que pour écrire le système homogénéisé (2.32) sous la forme conservatrice, nous avions besoin que l'égalité suivante

$$\langle (\boldsymbol{E} + \nu \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_\nu f_0 \rangle = \langle (\boldsymbol{E} + \nu \times \boldsymbol{B}_0) \rangle \cdot \nabla_\nu f_0$$

soit vérifiée. Ce qui en général n'est pas le cas, le cas étudié dans la sous-section 2.3.2 en est une illustration.

Dans la section qui suit, nous allons présenter quelques applications de notre résultat d'homogénéisation. Dans certains cas spéciaux, ces applications nous permettent de mieux illustrer ce résultat.

2.3 Applications

Dans cette partie, nous étudions quelques cas spéciaux de (2.1). Nous montrons en particulier qu'on retrouve les résultats obtenus dans [8] et dans [17, Section 2].

2.3.1 Le champ magnétique est simple.

Dans ce cas, on a $\boldsymbol{B}_1 = 0$. L'opérateur différentiel P de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ dans $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ est défini ici par :

$$D(P) = \{\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})) : P\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))\},$$

$$P\widetilde{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \nu \cdot \nabla_y u, \;\; \widetilde{u} \in D(P).$$

Les fonctions caractéristiques $(\mathcal{T}, Y, V)$ sont bien définies et sont données par

$$\mathcal{T}(s; \tau, y, \nu) = s + \tau, \;\; Y(s; \tau, y, \nu) = s\nu + y, \;\; V(s; \tau, y, \nu) = \nu.$$

Par conséquent, l'opérateur moyenne $\langle \cdot \rangle$ est donné par

$$\langle u \rangle (\tau, y, \nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R u(s + \tau, sv + y, \nu) ds.$$

De sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\langle \nu \rangle (\tau, y, \nu) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, y, \nu) ds = \nu; \\
\langle \boldsymbol{E} \rangle (\tau, y, \nu) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(s + \tau, s\nu + y) ds; \\
\langle \nu \times \boldsymbol{B}_0 \rangle (\tau, y, \nu) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, y, \nu) \times \boldsymbol{B}_0(s + \tau, s\nu + y) ds \\
&= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R \nu \times \boldsymbol{B}_0(s + \tau, s\nu + y) ds \\
&= (\nu \times \langle \boldsymbol{B}_0 \rangle)(\tau, y, \nu).
\end{aligned}$$

Dans ce contexte, l'équation (2.43) devient alors

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \nu \cdot \nabla_x f_0 + \langle (\boldsymbol{E} + (\nu \times \boldsymbol{B}_0)) \cdot \nabla_\nu f_0 \rangle = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}, \tag{2.50}$$

Tout comme dans la section pécédente, f_0 vérifiera la condition initiale suivante

$$f_0(0, x, y, \nu) = f^{in}(x, \nu). \tag{2.51}$$

2.3.2 Equation de Vlasov sous l'influence d'un champ magnétique oscillant rapidement.

Dans cette sous-section, nous suivons l'approche de Bostan [8, Section 7]. Nous considérons les oscillations par rapport à la variable temporelle uniquement $\tau = t/\varepsilon$. D'où le champ magnétique est sous de la forme

$$\boldsymbol{B}^\varepsilon(t, x) = \theta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \boldsymbol{B}(x)$$

où $\theta \in A^1_\tau = \{u \in A_\tau : u' \in A_\tau\}$, A_τ étant une M-algèbre sur $\mathbb{R}$. D'après l'équation de Maxwell-Gauss ($\mathrm{div}_x \boldsymbol{B} = 0$), il existe un potentiel vectoriel $\mathbf{C}$ tel que $\boldsymbol{B} = \mathrm{curl}\, \mathbf{C}$ avec $\mathrm{div}\,_x \mathbf{C} = 0$.

D'après l'équation de Maxwell-Faraday ($\partial_t \boldsymbol{B}^\varepsilon + \operatorname{curl} \boldsymbol{E}^\varepsilon = 0$), la partie rotationnelle curl du champ électrique $\boldsymbol{E}^\varepsilon = \nabla_x \psi + \operatorname{curl} \phi^\varepsilon$ est donnée par

$$\operatorname{curl} \phi^\varepsilon(t,x) = -\frac{1}{\varepsilon}\theta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\mathbf{C}(x).$$

Par conséquent, l'équation de Vlasov devient alors

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \nu \cdot \nabla_x f_\varepsilon + (\boldsymbol{E} - \frac{1}{\varepsilon}(\theta')^\varepsilon \mathbf{C} + \theta^\varepsilon(\nu \times \boldsymbol{B})) \cdot \nabla_\nu f_\varepsilon = 0 \tag{2.52}$$

où $\boldsymbol{E} = -\nabla_x \psi$.

Dans ce cadre, l'opérateur P de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}^3_x; \mathcal{B}^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))$ dans $L^2(\mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}^3_x; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))$ est défini par :

$$D(P) = \{\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}^3_x; \mathcal{B}^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)) : P\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}^3_x; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))\},$$

$$P\widetilde{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau} - \theta' \mathbf{C} \cdot \nabla_\nu u, \ \ \widetilde{u} \in D(P).$$

Les fonctions caractéristiques associées à P sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dX}{ds} = 0, \frac{d\mathcal{T}}{ds} = 1, \frac{d\nu}{ds} = -\theta'(\mathcal{T})\mathbf{C}(X) \\ X(0;\tau,x,\nu) = x, \mathcal{T}(0;\tau,x,\nu) = \tau, V(0;\tau,x,\nu) = \nu, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire,

$$X(s;\tau,x,\nu) = x, \mathcal{T}(s;\tau,x,\nu) = s+\tau, V(s;\tau,x,\nu) = (\theta(\tau) - \theta(s+\tau))\mathbf{C}(x) + \nu. \tag{2.53}$$

L'opérateur moyenne le long des caractéristiques (2.53) est alors défini par

$$\langle u \rangle (\tau,x,\nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R u(s+\tau, x, \nu + (\theta(\tau) - \theta(s+\tau))\mathbf{C}(x))ds.$$

Par le changement de variables $s \mapsto t = s + \tau$, on est conduit à

$$\langle u \rangle (\tau,x,\nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_\tau^{R+\tau} u(t, x, \nu + (\theta(\tau) - \theta(t))\mathbf{C}(x))ds. \tag{2.54}$$

Pour tout $\psi \in \ker(P)$, on a $\frac{\partial \psi}{\partial \nu_i} \in \ker(P)$ (pour $1 \leq i \leq 3$). Il vient donc que $\langle \partial_{\nu_i} \psi \rangle = \partial_{\nu_i} \psi$. Dans ce cas, l'équation homogénéisée aura une expression plus explicite que celle vue plus haut. Pour cela, nous allons tout d'abord déterminer de façon explicite les termes $\langle \nu \rangle, \langle \boldsymbol{E} \rangle$ et $\langle \theta(\nu \times \boldsymbol{B}) \rangle$. Etant donné que $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas des caractéristiques, on a $\langle \boldsymbol{E} \rangle = \boldsymbol{E}$. Par la suite, en utilisant (2.54), on a

$$\begin{aligned} \langle \nu \rangle (\tau,x,\nu) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_\tau^{R+\tau} [\nu + (\theta(\tau) - \theta(t))\mathbf{C}(x)]\, dt \\ &= \nu + (\theta(\tau) - \langle \theta \rangle)\mathbf{C}(x) \\ &= \nu + (\theta(\tau) - \langle \theta \rangle)\mathbf{C}(x). \end{aligned}$$

Et finalement,

$$\begin{aligned}
\langle\theta(\nu\times\boldsymbol{B})\rangle(\tau,x,\nu) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_{\tau}^{R+\tau}\theta(t)[(\nu+(\theta(\tau)-\theta(t))\mathbf{C}(x))\times\boldsymbol{B}(x)]dt\\
&= \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_{\tau}^{R+\tau}[\theta(\tau)\theta(t)-\theta^2(t)](\mathbf{C}(x)\times\boldsymbol{B}(x))dt\\
&+ \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_{\tau}^{R+\tau}\theta(t)(\nu\times\boldsymbol{B}(x))dt\\
&= (\langle\theta\rangle\theta(\tau)-\left\langle\theta^2\right\rangle)(\mathbf{C}(x)\times\boldsymbol{B}(x))+\langle\theta\rangle(\nu\times\boldsymbol{B}(x)).
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la fonction $f_0\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_\nu;B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)))$ est solution du problème limite

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial f_0}{\partial t}+(\nu+(\theta(\tau)-\langle\theta\rangle)\mathbf{C})\cdot\nabla_x f_0\\
+(\boldsymbol{E}+[(\nu\times\boldsymbol{B})+\theta(\tau)(\mathbf{C}\times\boldsymbol{B})]\langle\theta\rangle-(\mathbf{C}\times\boldsymbol{B})\langle\theta^2\rangle)\cdot\nabla_\nu f_0=0
\end{array}\tag{2.55}$$

avec pour condition initiale

$$f_0(0,x,\tau,\nu)=f^{in}(x,\nu+(\theta(\tau)-\theta(0))\mathbf{C}(x)).\tag{2.56}$$

Comparée aux résultats obtenus dans [8, Section 7], l'expression de l'impulsion q le long des caractéristiques est quasiment la même, c'est-à-dire, $q=\nu+\theta(\tau)\mathbf{C}(x)$. Notons que dans [8], la fonction θ est T-périodique et prise dans $\mathcal{C}^1_{per}(\mathbb{R}_\tau)$. Ici, nos hypothèses sont beaucoup plus générales. En effet, θ est choisi dans $A^1_\tau=\{u\in A_\tau:\partial u/\partial\tau\in A_\tau\}$, A_τ étant une M-algèbre sur $\mathbb{R}$. Elle intègre les fonctions T-périodiques de classe $\mathcal{C}^1$ comme cas particuliers. De plus, elle prend également en compte les fonctions presque périodiques de classe $\mathcal{C}^1$ et bien d'autres types de fonctions non périodiques. Rappelons que pour une fonction T-périodique u, cette égalité est toujours vérifiée

$$\lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R u(\tau)d\tau=T^{-1}\int_0^T u(\tau)d\tau.$$

Dès lors, nous pouvons dire que notre résultat dans ce cadre généralise celui obtenu dans [8, Theorem 7.2].

2.3.3 Equation de Vlasov sous l'influence d'un champ magnétique externe fort.

Notre objectif dans cette sous-section est de généraliser les résultats obtenus dans [17]. Pour cela, nous considérons le cas spécial de (2.1) où le champ magnétique $\boldsymbol{B}_1$ est égal à un vecteur constant $\mathcal{M}=(\mathcal{M}_1,0,0)$, et est orienté suivant l'axe e_1, (e_1,e_2,e_3) étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous supposons également que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}_0$ ne dependent pas de la variable microscopique $y\in\mathbb{R}^3$, de sorte que les seules oscillations possibles soient par rapport à $\tau=t/\varepsilon$. D'où l'opérateur differentiel P de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))$ dans $L^2(\mathbb{R}^3_\nu;B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))$ est défini par :

$$D(P)=\{\widetilde{u}\in L^2(\mathbb{R}^3_\nu;\mathcal{B}^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)):P\widetilde{u}\in L^2(\mathbb{R}^3_\nu;B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))\}.$$

$$P\widetilde{u}=\frac{\partial u}{\partial\tau}+(\nu\times\mathcal{M})\cdot\nabla_\nu u,\ \ \widetilde{u}\in D(P).$$

Les fonctions caractéristiques $(\mathcal{T}, V)$ associées à l'opérateur différentiel P sont hélicoïdales autour du champ magnétique $\mathcal{M}$ et sont déterminées par les relations suivantes

$$\mathcal{T}(s;\tau,\nu) = s+\tau \text{ et } \frac{dV}{ds} = V(s)\times\mathcal{M} \text{ avec } V(0;\tau,\nu)=\nu.$$

Commençons tout d'abord par le cas général où $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$ avec $\mathcal{M}_i \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\dot{V} = V\times\mathcal{M} \equiv MV, \ V(0;\tau,\nu)=\nu \tag{2.57}$$

où la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_3 & -\mathcal{M}_2 \\ -\mathcal{M}_3 & 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 & -\mathcal{M}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution de (2.57) est donnée par :

$$V(s;\tau,\nu) = e^{sM}V(0;\tau,\nu) = e^{sM}\nu.$$

L'opérateur moyenne $\langle\cdot\rangle$ est donc défini par :

$$\langle u\rangle(\tau,\nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R u(s+\tau, V(s;\tau,\nu))ds = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R u(s+\tau, e^{sM}\nu)ds.$$

Le champ électromagnétique $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}_0)$ vérifie l'hypothèse suivante

$$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}_0 \in (B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)\cap L^\infty(\mathbb{R}_\tau)))^3. \tag{2.58}$$

En suivant le raisonnement ayant permis l'obtention de (2.35) et (2.36), on a les convergences fortes suivantes, qui nous seront utiles dans la détermination du problème limite (2.61).

$$\boldsymbol{E}^\varepsilon \to \boldsymbol{E} + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T)^3\Sigma\text{-fort}\ , \tag{2.59}$$

et

$$\boldsymbol{B}^\varepsilon_0 \to \boldsymbol{B}_0 + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T)^3\Sigma\text{-fort}\ , \tag{2.60}$$

où $\mathcal{N} = \{u\in B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau) : M_\tau(|u|^2)=0\}$. .
Puisque le champ électromagnétique $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}_0)$ est indépendant de la variable y, la Σ-convergence faible intervenant dans la définition de (2.59) sera vue comme suit, lorsque $\varepsilon\to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3_T} \boldsymbol{E}(\frac{t}{\varepsilon})\cdot\Psi(t,x,\frac{t}{\varepsilon})dtdx \to \int_{\mathbb{R}^3_T} M_\tau(\boldsymbol{E}(\cdot)\cdot\Psi(t,x,\cdot))dtdx, \forall\Psi=(\psi_i)_{1\le i\le 3}\in(L^2(\mathbb{R}^3_T;A_\tau))^3.$$

En remplaçant $\boldsymbol{E}$ par $\boldsymbol{B}_0$, cette convergence reste valable pour (2.60).
Au vu de tout cela, nous considérons la fonction test ψ^ε définie par $\psi^\varepsilon(t,x,\nu) = \psi(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\nu)$, où $\psi \in (\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3_v)\otimes A^\infty_\tau)\cap\ker P$. Multiplions l'équation de Vlasov par ψ^ε, puis par une intégration par parties, on est conduit à

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3} f_\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \nu\cdot(\nabla_x\psi)^\varepsilon + (\boldsymbol{E}^\varepsilon+\nu\times\boldsymbol{B}^\varepsilon_0)\cdot(\nabla_\nu\psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(P\psi)^\varepsilon\right]dtdxd\nu = 0.$$

En passant à la limite lorsque $F' \ni \varepsilon \to 0$, en utilisant le fait que $\psi \in \ker P$ et (2.59)-(2.60), on obtient

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M_\tau \left(f_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \nu \cdot \nabla_x \psi + (\boldsymbol{E} + \nu \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_\nu \psi \right] \right) dtdxd\nu = 0.$$

Etant donné que $f_0 \in \ker P$ (dû à (2.20)) et d'après la Proposition 3, l'équation ci-dessus devient

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M_\tau \left(f_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \langle \nu \rangle \cdot \nabla_x \psi + \langle (\boldsymbol{E} + (\nu \times \boldsymbol{B}_0)) \cdot \nabla_\nu \psi \rangle \right] \right) dtdxd\nu = 0.$$

D'après le Théorème 17, cette équation est la formulation variationnelle de

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \langle \nu \rangle \cdot \nabla_x f_0 + \langle (\boldsymbol{E} + (\nu \times \boldsymbol{B}_0)) \cdot \nabla_\nu f_0 \rangle = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}_\tau. \tag{2.61}$$

Donnons une expression précise de $\langle \nu \rangle$. En effet, on a

$$\langle \nu \rangle (\tau, \nu) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, \nu) ds = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R e^{sM} \nu ds.$$

De même, on a également

$$\langle \boldsymbol{E} \rangle (\tau, \nu) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(\mathcal{T})(s; \tau, \nu) ds = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(s + \tau) ds,$$

et

$$\langle \nu \times \boldsymbol{B}_0 \rangle (\tau, \nu) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, \nu) \times \boldsymbol{B}_0(s + \tau) ds = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R (e^{sM} \nu) \times \boldsymbol{B}_0(s + \tau) ds.$$

Tout comme dans la section précédente, on montre aisement que f_0 vérifie la condition initiale suivante

$$f_0(0, x, s, \nu) = f^{in}(x, {}^\perp V(0; s, \nu)) = f^{in}(x, e^{sM} \nu). \tag{2.62}$$

Par conséquent, on a le résultat d'homogénéisation suivant :

Théorème 20. *Supposons que* (2.58) *est vérifiée. Pour tout $\varepsilon \in F$, soit f_ε l'unique solution de l'équation de Vlasov. Alors il existe une sous-suite F' extraite de F telle que, lorsque $F' \ni \varepsilon \to 0$, la suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in F'}$ converge Σ-faiblement vers $f_0 + \mathcal{N}$ dans $L^2(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu)$, avec $\mathcal{N} = \{u \in B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau) : M_\tau(|u|^2) = 0\}$, où $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^3_T; L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}^1_\tau)) \cap \ker P)$ est solution du système* (2.61)-(2.62).

Remarque 3. Nous ne pouvons étudier le cas général où les oscillations interviennent également suivant la variable spatiale. En effet, la matrice M considérée plus haut est à déterminant nul. Par conséquent, elle n'est pas inversible. Ce qui implique que la caractéristique en Y ne peut être déterminée. Dès lors, lorsque nous sommes dans le cas d'un champ magnétique externe fort et constant, les oscillations ne peuvent être prise par rapport à la variable spatiale. Ceci nous permet de mieux justifier l'hypothèse prise sur le champ électromagnétique dans l'introduction de cette sous-section.

Revenons au cas particulier énoncé en introduction de cette sous-section. Nous suivons l'approche développée dans [17]. Si le champ magnétique $\mathcal{M}$ est orienté suivant l'axe e_1, alors, sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, 0, 0)$. Dès lors, l'équation caractéristique en V est équivalent au système suivant

$$\dot{V}_1 = 0\,;\ \dot{V}_2 = V_3\mathcal{M}_1\,;\ \dot{V}_3 = -V_2\mathcal{M}_1. \tag{2.63}$$

Ainsi, on a $V_1(s) = \nu_1$. Concernant les deux autres équations de (2.63), elles peuvent se réécrire comme suit

$$\dot{V}^* = CV^* \text{ avec } V^*(0) = (\nu_2, \nu_3),$$

où $V^* = (V_2, V_3)$ et $C \in M_2(\mathbb{R})$ est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ -\mathcal{M}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution de cette équation est donnée par

$$V^*(s;\tau,\nu) = e^{sC}V^*(0;\tau,\nu).$$

Déterminons une expression explicite de e^{sC} dans ce cas. Pour cela, posons

$$C_s = sC = \begin{pmatrix} 0 & s\mathcal{M}_1 \\ -s\mathcal{M}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous rappelons que

$$e^{C_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(C_s)^n.$$

Posons $t = s\mathcal{M}_1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(C_s)^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k t^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k t^{2k} \end{pmatrix} \text{ et } (C_s)^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k t^{2k+1} \\ (-1)^{k+1} t^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on aboutit à

$$\begin{aligned} e^{C_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(C_s)^n &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!}(-1)^k t^{2k} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k t^{2k+1} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k t^{2k+1} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!}(-1)^k t^{2k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

car les développements en séries entières des fonctions cos et sin (en utilisant la formule de Mac Laurin) sont donnés par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

et

$$\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Dès lors, on a (avec $t = s\mathcal{M}_1$)

$$e^{C_s} = \begin{pmatrix} \cos(s\mathcal{M}_1) & \sin(s\mathcal{M}_1) \\ -\sin(s\mathcal{M}_1) & \cos(s\mathcal{M}_1) \end{pmatrix},$$

et par conséquent, il suit que

$$V_2(s;\tau,\nu) = \nu_2\cos(s\mathcal{M}_1) + \nu_3\sin(s\mathcal{M}_1)\,;\; V_3(s;\tau,\nu) = -\nu_2\sin(s\mathcal{M}_1) + \nu_3\cos(s\mathcal{M}_1).$$

Au final, les caractéristiques sont données par

$$\mathcal{T}(s;\tau,\nu) = s+\tau\,;\; V(s;\tau,\nu) = (\nu_1, \nu_2\cos(s\mathcal{M}_1) + \nu_3\sin(s\mathcal{M}_1), -\nu_2\sin(s\mathcal{M}_1) + \nu_3\cos(s\mathcal{M}_1)).$$

Dans ce cas, le problème limite sera alors

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \langle\nu\rangle \cdot \nabla_x f_0 + \langle(\boldsymbol{E} + (\nu \times \boldsymbol{B}_0)) \cdot \nabla_\nu f_0\rangle = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}_\tau.$$

Ainsi, nous aurons

$$\langle\nu\rangle(\tau,\nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R V(s)ds = (\nu_1, 0, 0), \text{ pour } \nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3).$$

En effet, après quelques calculs basiques, les composantes de $\langle\nu\rangle$ sont données par

$$\langle\nu_1\rangle(\tau,\nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R V_1(s)ds = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R \nu_1 ds = \nu_1$$

$$\langle\nu_2\rangle(\tau,\nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\mathcal{M}_1^{-1}[\nu_2\sin(R\mathcal{M}_1) + \nu_3(1-\cos(R\mathcal{M}_1))] = 0$$
$$\langle\nu_3\rangle(\tau,\nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\mathcal{M}_1^{-1}[\nu_2(\cos(R\mathcal{M}_1)-1) + \nu_3\sin(R\mathcal{M}_1)] = 0.$$

Nous avons également

$$\langle\boldsymbol{E}\rangle(\tau,\nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R \boldsymbol{E}(\mathcal{T})(s;\tau,\nu)ds = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R \boldsymbol{E}(s+\tau)ds,$$

et

$$\langle\nu\times\boldsymbol{B}_0\rangle(\tau,\nu) = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R \mathbf{V}(s;\tau,\nu)\times\boldsymbol{B}_0(s+\tau)ds.$$

La condition initiale vérifiée par f_0 dans ce cas est donnée par

$$f_0(0,x,s,\nu) = f^{in}(x,^{\perp}V(0;s,\nu))$$

avec $f^{in}(x,^{\perp}V(0;s,\nu)) = f^{in}(x,\nu_1,\nu_2\cos(s\mathcal{M}_1)+\nu_3\sin(s\mathcal{M}_1), -\nu_2\sin(s\mathcal{M}_1)+\nu_3\cos(s\mathcal{M}_1))$. Nous constatons donc que nous avons des résultats similaires à ceux de [17]. La principale différence vient du fait qu'ici notre hypothèse de structure (2.58) est plus générale. Elle englobe les fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ presques périodiques, quasi périodiques et bien d'autres. Les fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ périodiques ne sont qu'un cas particulier. Par conséquent, nous pouvons conclure que notre Théorème 20 généralise effectivement celui obtenu dans [17, Theorem 1.1].

2.3.4 Homogénéisation du système de Vlasov-Poisson sous l'influence d'un champ magnétique externe fort.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Considérons le ε-problème décrit par le système Vlasov-Poisson classique. Puisque nous voulons étudier ce système sous l'influence d'un champ magnétique externe fort, cette influence sera matérialisée dans l'équation de Vlasov par le terme $\frac{1}{\varepsilon}(\nu \times \boldsymbol{B}_1^\varepsilon)$. Dès lors, l'équation de Vlasov s'écrit comme suit

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \nu \cdot \nabla_x f_\varepsilon + (\boldsymbol{E}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\nu \times \boldsymbol{B}_1^\varepsilon)) \cdot \nabla_\nu f_\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_T^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{2.64}$$

A l'équation (2.64) est associée l'équation de Poisson

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{E}_\varepsilon = -\Delta\varphi^\varepsilon = 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon d\nu \text{ dans } \mathbb{R}_T^3,\ \boldsymbol{E}_\varepsilon = -\nabla_x \varphi^\varepsilon. \tag{2.65}$$

Les conditions initiales suivantes sont associées à ces équations :

$$f_\varepsilon(0, x, \nu) = f^{in}(x, \nu) \text{ dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{2.66}$$

$$\boldsymbol{E}_\varepsilon(0, x) = \boldsymbol{E}^{in}(x) \text{ dans } \mathbb{R}^3. \tag{2.67}$$

De plus, on suppose que les fonctions initiales f^{in} et $\boldsymbol{E}^{in}$ vérifient les hypothèses

$$f^{in} \geq 0,\ f^{in} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), 0 < \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (1 + |\nu|^2) f^{in} dx d\nu < \infty, \tag{2.68}$$

$$\boldsymbol{E}^{in} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3,\ \left\| E_i^0 \right\|_1 \leq K\ (1 \leq i \leq 3), \tag{2.69}$$

où $\|\cdot\|_1$ représente la norme dans H^1 et $K > 0$ est une constante. Sous ces hypothèses, le système de Vlasov-Poisson (2.64)-(2.67) admet une unique solution $(f_\varepsilon, \boldsymbol{E}_\varepsilon)$ avec $f_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ et $\boldsymbol{E}_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))^3$ (voir par exemple [44] pour la preuve). Posons

$$\rho^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon d\nu \text{ et } \boldsymbol{J}^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \nu f_\varepsilon d\nu. \tag{2.70}$$

Le prochain résultat nous permet d'avoir une estimation a priori sur la solution du système.

Lemme 1. *Supposons* (2.68) *et* (2.69) *satisfaites. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))} \leq C, \tag{2.71}$$

$$\left\| |\nu|^2 f_\varepsilon \right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{R}^6))} \leq C. \tag{2.72}$$

De plus,

$$\|\rho^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} \leq C, \tag{2.73}$$

$$\|\boldsymbol{J}^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))^3} \leq C. \tag{2.74}$$

Preuve. [23]. ■

Remarque 4. ***A*-** Puisque ρ^ε est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))$ et que $-\Delta\varphi^\varepsilon = 4\pi\rho^\varepsilon, \boldsymbol{E}_\varepsilon = -\nabla_x\varphi^\varepsilon$, en utilisant les propriétés de régularité du Laplacien, on déduit que $\boldsymbol{E}_\varepsilon$ est borné dans $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))^3$.
***B*-** Etant donné que $\boldsymbol{J}^\varepsilon$ est borné dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))^3$ et on a $\frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial t}$ est borné dans $L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^3))$. Comme

$$\Delta\frac{\partial\varphi^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial t}, (\text{ avec } \frac{\partial\boldsymbol{E}_\varepsilon}{\partial t} = -4\pi\boldsymbol{J}^\varepsilon)$$

la régularité du Laplacien nous conduit à $\frac{\partial\varphi^\varepsilon}{\partial t}$ bornée dans $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))$, ce qui permet de conclure que $\frac{\partial\boldsymbol{E}_\varepsilon}{\partial t}$ est borné dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))^3$.

Nous avons ce résultat de convergence, qui nous sera utile pour la suite.

Proposition 4. *Soit A une M-algèbre sur $\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}$. Pour tout $\varepsilon\in F$, soit $(f_\varepsilon,\boldsymbol{E}_\varepsilon)\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))\times(L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3)))^3$ la solution du système* (2.64)-(2.67)*. Alors, il existe une sous-suite F' extraite de F et un couple $(f,\boldsymbol{E})\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3})))\times L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3})))^3$ tels que, lorsque $F'\ni\varepsilon\to 0$, on a*

$$f_\varepsilon \to f+\mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3))\Sigma\text{-faible}, \tag{2.75}$$

$$\boldsymbol{E}_\varepsilon \to \boldsymbol{E}+\mathcal{N} \text{ dans } L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))^3\text{-faible}. \tag{2.76}$$

De plus, puisque les fonctions $\boldsymbol{J}^\varepsilon$ et ρ^ε sont bornées dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))^3$ et $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))$ respectivement, lorsque $\varepsilon\to 0$, on a également

$$\rho^\varepsilon \to \rho+\mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T)\Sigma\text{-faible}, \tag{2.77}$$

$$\boldsymbol{J}^\varepsilon \to \boldsymbol{J}+\mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T)^3\Sigma\text{-faible}, \tag{2.78}$$

où $\rho=\int_{\mathbb{R}^3} f d\nu$ et $\boldsymbol{J}=\int_{\mathbb{R}^3}\nu f d\nu$.

Preuve. D'après (2.71), (2.73)-(2.74) du Lemme 1 et le Théorème 12, il existe une sous-suite F' extraite de F et un triplet $(f,\rho,\boldsymbol{J})\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})))\times L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})))\times(L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))))^3$ tels que lorsque $F'\ni\varepsilon\to 0$, on a (2.75), (2.77) et (2.78). D'autre part, d'après la partie (A) de la Remarque 4 et le Théorème 14, il existe $\boldsymbol{E}\in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))^3$ tel que lorsque $F'\ni\varepsilon\to 0$, on a (2.76). ■

Nous allons dans la suite, déterminer le problème limite vérifié par le couple $(f,\boldsymbol{E})$. Pour cela, commençons d'abord par le champ électrique $\boldsymbol{E}$. Soit $\psi\in\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T)\otimes A^\infty$. Considérons la fonction test $\psi^\varepsilon(t,x)=\psi(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon})$ pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}^3_T$, alors $\psi^\varepsilon\in\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T)$. Multiplions l'équation de Poisson $\nabla_x\cdot\boldsymbol{E}_\varepsilon=4\pi\rho^\varepsilon$ par ψ^ε, puis par une intégration par parties, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T}\boldsymbol{E}_\varepsilon\cdot\left((\nabla_x\psi)^\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}(\nabla_y\psi)^\varepsilon\right)dxdt = 4\pi\int_{\mathbb{R}^3_T}\rho^\varepsilon\psi^\varepsilon dxdt. \tag{2.79}$$

Multiplions (2.79) par ε, par passage à la limite lorsque $F'\ni\varepsilon\to 0$, on a

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T} M(\boldsymbol{E}\cdot\nabla_y\psi)dxdt = 0.$$

L'équation ci-dessus est la formulation variationnelle (voir Théorème 17) de

$$\nabla_y\cdot\boldsymbol{E} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y},$$

ce qui signifie que $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas de la variable microscopique y. Montrons également que $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas de τ. Pour cela, soit $\Psi\in(\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T)\otimes A^\infty_\tau)^3$. On considère la fonction test $\Psi^\varepsilon(t,x)=\Psi(t,x,\frac{t}{\varepsilon})$ pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}^3_T$, alors $\Psi^\varepsilon\in(\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T))^3$. Multiplions l'équation de Maxwell-Ampère $\frac{\partial\boldsymbol{E}_\varepsilon}{\partial t}=-4\pi\boldsymbol{J}^\varepsilon$ par Ψ^ε, puis par une intégration par parties, on obtient

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T}\boldsymbol{E}_\varepsilon\cdot\left((\frac{\partial}{\partial t}\Psi)^\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}(\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi)^\varepsilon\right)dxdt=-4\pi\int_{\mathbb{R}^3_T}\boldsymbol{J}^\varepsilon\cdot\Psi^\varepsilon dxdt.$$

Multiplions l'équation ci-dessus par ε, par passage à la limite lorsque $F'\ni\varepsilon\to0$, on a

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T}M_\tau(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi)dxdt=0.$$

Une fois de plus, cette équation est la formulation variationnelle (Théorème 17) de

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{E}=0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}_\tau.$$

Donc $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas de la variable microscopique τ. En utilisant dans (2.79) la fonction test suivante $\psi^\varepsilon(t,x)=\psi(t,x)$ pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}^3_T$, où $\psi\in\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T)$, on est conduit à

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T}\boldsymbol{E}_\varepsilon\cdot\nabla_x\psi dxdt=4\pi\int_{\mathbb{R}^3_T}\rho^\varepsilon\psi dxdt.$$

Par passage à la limite lorsque $F'\ni\varepsilon\to0$, en utilisant (2.76) et (2.77), on obtient

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T}\boldsymbol{E}\cdot\nabla_x\psi dxdt=4\pi\int_{\mathbb{R}^3_T}M(\rho)\psi dxdt,$$

qui est la formulation variationnelle de l'équation suivante

$$\nabla_x\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\widetilde{\rho} \text{ dans } \mathbb{R}^3_T, \tag{2.80}$$

avec $\widetilde{\rho}(t,x)=M(\rho(t,x))$, $(t,x)\in\mathbb{R}^3_T$.
Puisque $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas des variables microscopiques et que $H^1(\mathbb{R}^3)\subset L^2(\mathbb{R}^3)$ avec l'injection compacte, il vient d'après (2.76) que

$$\boldsymbol{E}_\varepsilon\to\boldsymbol{E} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3_T)^3\text{-fort.} \tag{2.81}$$

Supposons l'hypothèse de structure suivante sur le champ magnétique $\boldsymbol{B}_1$

$$\boldsymbol{B}_1\in(B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))^3. \tag{2.82}$$

En raisonnant de façon analogue qu'à la sous-section 2.2.3, on montre que le champ magnétique $\boldsymbol{B}_1^\varepsilon$ vérifie la convergence suivante (voir par exemple l'égalité (2.36))

$$\boldsymbol{B}_1^\varepsilon \to \boldsymbol{B}_1 + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_T^3)^3\Sigma\text{-fort} \quad \text{lorsque } F' \ni \varepsilon \to 0.$$

Revenons à l'équation de Vlasov et procédons comme dans la sous-section 2.2.3 plus haut. L'opérateur différentiel non borné P de $L^2(\mathbb{R}_\nu^3; \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^{1+3}))$ dans $L^2(\mathbb{R}_\nu^3; B_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^{1+3}))$ est défini par :

$$D(P) = \{\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}_\nu^3; \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^{1+3})) : P\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}_\nu^3; B_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^{1+3}))\},$$

$$P\widetilde{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \nu \cdot \nabla_y u + (\nu \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_\nu u, \; \widetilde{u} = u + \mathcal{N} \in D(P).$$

Nous désignons par $(\mathcal{T}, Y, V) = (\mathcal{T}, Y, V)(s; \tau, y, \nu)$ les caractéristiques associées à l'opérateur différentiel du premier ordre P et déterminées par le système

$$\frac{d\mathcal{T}}{ds} = 1, \; \frac{dY}{ds} = V(s), \; \frac{dV}{ds} = V(s) \times \boldsymbol{B}_1(\mathcal{T}(s), Y(s)) \tag{2.83}$$

avec pour conditions initiales

$$\mathcal{T}(0; \tau, y, \nu) = \tau, \; Y(0; \tau, y, \nu) = y, \; V(0; \tau, y, \nu) = \nu. \tag{2.84}$$

Le système (2.83)-(2.84) n'admet pas toujours une solution (voir Remarque 3). Pour la suite, nous supposerons que ce système admet une solution. Evidemment, cette solution sera de la forme

$$\begin{cases} \mathcal{T}(s; \tau, y, \nu) = s + \tau, \; Y(s; \tau, y, \nu) = y + \int_0^s V(\xi; \tau, y, \nu) d\xi \\ \frac{dV}{ds} = V(s) \times \boldsymbol{B}_1(s + \tau, y + \int_0^s V(\xi; \tau, y, \nu) d\xi), \; V(0; \tau, y, \nu) = \nu. \end{cases} \tag{2.85}$$

Par une approche anologue à celle utilisée pour la preuve du Théorème 19 et d'après le Théorème 17, on montre aisement que la fonction limite faible f (voir (2.75)) vérifie l'équation limite

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \langle \nu \rangle \cdot \nabla_x f + \boldsymbol{E} \cdot \langle \nabla_\nu f \rangle = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_T^3 \times \mathbb{R}_\nu^3 \times \mathbb{R}_{\tau,y}^{1+3}, \tag{2.86}$$

car pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_T^3$

$$\langle \boldsymbol{E}(t, x) \rangle (\tau, y, \nu) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(t, x, \mathcal{T}, Y)(s; \tau, y, \nu) ds = \boldsymbol{E}(t, x),$$

puisque $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas des variables microscopiques et de la vitesse ν. Tout comme pour la preuve du Théorème 19, on montre aisement que la fonction limite f vérifie la condition initiale suivante

$$f(0, x, s, y, \nu) = f^{in}(x, ^\perp V(0; s, y, \nu)). \tag{2.87}$$

Notons également que la fonction $\boldsymbol{E}$ vérifie la condition initiale

$$\boldsymbol{E}(0, x) = \boldsymbol{E}^{in}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.88}$$

Ainsi, sous les hypothèses (2.68)-(2.69), le problème limite (2.80) et (2.86)-(2.88) admet une unique solution $(f, \boldsymbol{E}) \in L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}_{x,\nu}^6; B_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^{1+3}))) \times L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))^3$ (voir [44]). Au vu de tout ce qui précède et d'après la Proposition 4, on déduit le résultat d'homogénéisation suivant :

Théorème 21. *Supposons l'hypothèse* (2.82) *satisfaite. Pour tout $\varepsilon \in F$, soit $(f_\varepsilon, \boldsymbol{E}_\varepsilon)$ l'unique solution du système* (2.64)-(2.67)*. Alors, il existe une sous-suite F' extraite de F telle que lorsque $F' \ni \varepsilon \to 0$, la suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in F'}$ converge Σ-faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu)$ vers $f + \mathcal{N}$ et la suite $(\boldsymbol{E}_\varepsilon)_{\varepsilon \in F'}$ converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^3_T)^3$ vers $\boldsymbol{E}$, avec $\mathcal{N} = \{u \in B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}) : M(|u|^2) = 0\}$, où $(f, \boldsymbol{E})$ est l'unique solution du problème limite* (2.80) *et* (2.86)-(2.88).

Dans le cas particulier où le champ magnétique $\boldsymbol{B}_1$ est constant et égale à $\mathcal{M}$, d'après la Remarque 3, les oscillations par rapport à la variable spatiale ne sont pas considérées. On suppose que $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$. L'opérateur différentiel non borné P de $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))$ dans $L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))$ est défini par :

$$D(P) = \{\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; \mathcal{B}^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)) : P\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_\nu; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))\},$$

$$P\widetilde{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + (\nu \times \mathcal{M}) \cdot \nabla_\nu u, \; \widetilde{u} \in D(P).$$

Les caractéristiques associées à P sont données par

$$\mathcal{T}(s; \tau, \nu) = s + \tau \,;\, \mathbf{V}(s; \tau, \nu) = e^{sM}\nu$$

où la matrice M est la même que celle définie dans la sous section 2.3.3 (voir (2.57)). L'opérateur moyenne $\langle \cdot \rangle$ est donné par

$$\langle u \rangle(\tau, \nu) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R u(s + \tau, e^{sM}\nu) ds.$$

Puisque $\boldsymbol{E}$ ne dépend pas des caractéristiques, le problème limite dans ce cas sera

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \langle \nu \rangle \cdot \nabla_x f + \boldsymbol{E} \cdot \langle \nabla_\nu f \rangle = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_\nu \times \mathbb{R}_\tau,$$

avec

$$\langle \nu \rangle (\tau, \nu) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R \mathbf{V}(s; \tau, y, \nu) ds = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R e^{sM}\nu ds.$$

La condition initiale satisfaite par f est alors

$$f(0, x, s, \nu) = f^{in}(x, {}^\perp V(0; s, \nu)) = f^{in}(x, e^{sM}\nu).$$

Le Théorème 21 s'applique également à ce cas.

En suivant la même approche que dans [17, Section 4], si on suppose les mêmes hypothèses sur $\mathcal{M}$, alors on obtient des résultats similaires et notre théorème 21 s'applique une fois de plus ici. D'où nous pouvons tirer comme conclusion, qu'il généralise bien évidemment celui établi dans [17, Theorem 1.4].

Chapitre 3

HOMOGÉNÉISATION DE L'ÉQUATION DE BOLTZMANN LINÉAIRE

3.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons étudier l'homogénéisation de l'équation de Boltzmann. Cette équation est le modèle cinétique le plus adéquat pour la modélisation des phénomènes de transport, en ce sens, qu'il prend en compte non seulement les interactions entre les particules ; mais aussi, les interactions entre ces derniers et le milieu dans lequel ils évoluent. Il sera question pour nous, d'étudier le comportement asymptotique de la fonction de distribution des particules, lorsque celles-ci évoluent dans un milieu hétérogène. Ainsi, dans cette étude, nous considérons les oscillations en espace uniquement. L'analyse du problème cellulaire découlant de l'équation de Boltzmann linéaire fait l'objet de la première section de ce chapitre. Ensuite, l'analyse multi-échelle de l'équation de Boltzmann est faite. Cette étude a donné lieu à un résultat d'homogénéisation. Quelques situations physiques d'application de ce résultat sont présentées par la suite.

3.2 Le problème cellulaire

3.2.1 Préliminaires

Nous menons, dans le cadre de l'homogénéisation déterministe, une analyse multi-échelle du système suivant : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + a(v) \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon \text{ dans } (0,T) \times \mathbb{R}_x^N \times V, \\ f_\varepsilon(0,x,v) = f^{in}(x,v) \text{ dans } \mathbb{R}_x^N \times V, \end{cases} \tag{3.1}$$

où V est un sous-espace localement compact de $\mathbb{R}_v^N$ muni d'une mesure positive μ dont les propriétés seront précisées dans (3.6), et $f_\varepsilon \equiv f_\varepsilon(t,x,v)$ $((t,x,v) \in (0,T) \times \mathbb{R}_x^N \times V)$ la fonction de distribution des particules. Les interactions avec le milieu modifient la structure physique des particules et sont localisées dans l'espace et le temps. Elles sont décrites par l'intermédiaire de l'opérateur intégral suivant :

$$\mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon(t,x,v)) = \int_V \sigma^\varepsilon(x,v,w) f_\varepsilon(t,x,w)d\mu(w) - \Sigma^\varepsilon(x,v)f_\varepsilon(t,x,v), \tag{3.2}$$

où $\sigma^\varepsilon(x,v,w) = \sigma(x,\frac{x}{\varepsilon},v,w) \quad (x,v,w) \in \mathbb{R}^N \times V^2$ et $\Sigma^\varepsilon(x,v) = \Sigma(x,\frac{x}{\varepsilon},v) \quad (x,v) \in \mathbb{R}^N \times V$. La fonction σ (resp. Σ) est très souvent appelée fonction de transition ou taux de diffusion (resp. fonction d'absorption). Dans cette étude, les fonctions σ et Σ sont supposées connues. En supposant la conservation de la densité totale, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^N_x \times V} f_\varepsilon(t,x,v)d\mu(v)dx = \int_{\mathbb{R}^N_x \times V} f^{in}(x,v)d\mu(v)dx, \tag{3.3}$$

on est conduit à

$$\Sigma^\varepsilon(x,v) = \int_V \sigma^\varepsilon(x,w,v)d\mu(w). \tag{3.4}$$

De plus, on admettra également que la fonction σ (voir [3]) satisfait la condition suivante

$$\int_V \sigma^\varepsilon(x,v,w)d\mu(w) = \int_V \sigma^\varepsilon(x,w,v)d\mu(w). \tag{3.5}$$

A l'espace mesuré (V,μ) et la fonction de vélocité a, on associe les conditions suivantes :

$$\begin{cases} V \textit{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^N_\nu, \textit{ suffisamment régulier.} \\ \textit{La fonction de vélocité } a : V \to \mathbb{R}^N \textit{ appartient à } W^{1,\infty}(V;\mathbb{R}^N). \\ \textit{Il existe deux constantes } C, \gamma > 0, \textit{ telles que} \\ \mu(\{\nu \in V : |a(\nu).\xi| \leq h\}) \leq Ch^\gamma, \textit{ pour tout } \xi \in S^{N-1}, h > 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Par la suite, nous aurons besoin de l'hypothèse suivante sur la fonction de transition σ :

$$\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N \times V \times V; B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^N_y)). \tag{3.7}$$

Notons que cette égalité (3.7) est l'hypothèse de structure à travers laquelle nous étudierons l'homogénéisation de l'équation de Boltzmann linéaire. Donnons quelques précisions sur cette hypothèse. En effet, en prenant en compte les propriétés du milieu, l'analyse de notre modèle devient plus complexe et nécessite une attention particulière. Ces propriétés sont naturellement incluses dans le comportement de la fonction σ (à travers la variable microscopique $y = \frac{x}{\varepsilon}$) et influent sur le comportement général de la fonction de distribution f_ε. Ces propriétés dépendent en général de la façon dont sont reparties les microstructures dans le milieu hétérogène. On peut par exemple considérer que les microstructures sont équi-reparties, presque équi-reparties, ou toutes autres hypothèses de distribution déterministe. Dès lors la fonction $y \mapsto \sigma(x,y,v,w)$ est supposée périodique (par rapport à y), ou presque périodique, ou mieux encore asymptotiquement presque périodique entre autres.

On suppose que la fonction de distribution initiale f^{in} satisfait :

$$f^{in}(x,v) > 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N \times V} (f^{in})^2(x,v)dxd\mu(v) \leq C_0 < \infty. \tag{3.8}$$

Sous les hypothèses (3.6)-(3.8), le problème de Cauchy (3.1) admet (pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé) une unique solution $f_\varepsilon \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N \times V))$ (voir [4, Theorem 2.1 (a)] pour la preuve) vérifiant

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^N\times V))} < C_0. \tag{3.9}$$

Cette estimation découle directement de l'application de la méthode des énergies au système (3.1) et l'utilisation de la condition (3.5).

Avant de passer à la sous-section relative au problème celulaire proprement dit, nous allons définir quelques outils que nous utiliserons. Considérons l'opérateur différentiel non borné P de $L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$ dans lui-même défini par :

$$D(P) = \{u \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y)) : Pu \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))\},$$

$$Pu = a(v)\cdot\nabla_y u - \mathcal{Q}u, \ u \in D(P), \tag{3.10}$$

où l'opérateur $\mathcal{Q}$ est défini par

$$\mathcal{Q}f(x,y,v) = \int_V \sigma(x,y,v,w)(f(y,w) - f(y,v))d\mu(w) \ (f \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))), \tag{3.11}$$

et l'équation (3.10) est comprise au sens faible dans $L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$, c'est-à-dire,

$$(Pu,\phi) = \int_V M(-ua(v)\cdot\nabla_y\phi - \phi\mathcal{Q}u)d\mu(v) \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{C}^\infty(V; A^\infty). \tag{3.12}$$

On montre aisement en utilisant (3.5) que

$$\int_V (\varphi\mathcal{Q}u)d\mu(v) = \int_V (u\mathcal{Q}^*\varphi)d\mu(v), \tag{3.13}$$

où $\mathcal{Q}^*$ est l'adjoint de l'opérateur de collision $\mathcal{Q}$, et est défini par

$$\mathcal{Q}^*\varphi(x,y,v) = \int_V \sigma(x,y,w,v)(\varphi(y,w) - \varphi(y,v))d\mu(w), \tag{3.14}$$

de sorte que l'équation (3.12) est équivalente à

$$(Pu,\phi) = \int_V M(u(-a(v)\cdot\nabla_y\phi - \mathcal{Q}^*\phi))d\mu(v) \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{C}^\infty(V; A^\infty). \tag{3.15}$$

De l'égalité (3.15), on en déduit que l'opérateur adjoint P^* de P est bien défini et s'écrit sous la forme :

$$P^*\phi = -a(v)\cdot\nabla_y\phi - \mathcal{Q}^*\phi. \tag{3.16}$$

Par la suite, si $u \in L^2(V;\mathcal{N}) \cap D(P)$ ($\mathcal{N} = \{f \in B^2_A(\mathbb{R}^N_y)) : M(|f|^2) = 0\}$) alors $Pu = 0$, c'est-à-dire,

$$(Pu,\phi) = 0 \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{C}^\infty(V; A^\infty). \tag{3.17}$$

Ceci montre que l'opérateur P peut être prolongé sur l'espace de Banach $L^2(V; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^N_y))$ par

$$\mathcal{P}\widetilde{u} = \widetilde{Pu} \text{ pour } \widetilde{u} = u + \mathcal{N} \text{ avec } u \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y)), \tag{3.18}$$

où $\widetilde{Pu} = Pu + \mathcal{N}$. En effet, d'après (3.17), si $\widetilde{u} = \widetilde{w}$ alors $u - w \in \mathcal{N}$, d'où $P(u-w) = 0$, c'est-à-dire, $\mathcal{P}\widetilde{u} = \mathcal{P}\widetilde{w}$. Rappelons que $L^2(V; \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}_y^N))$ est muni de la norme

$$\|u + \mathcal{N}\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}_y^N))} = \left(\int_V M(|u(\cdot, v)|^2) d\mu(v)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le domaine de $\mathcal{P}$ est naturellement défini par

$$D(\mathcal{P}) = \{\widetilde{u} \in L^2(V; \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}_y^N)) : \mathcal{P}\widetilde{u} \in L^2(V; \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}_y^N))\}.$$

Moyennant ces définitions de P et $\mathcal{P}$, pour étudier les propriétés de $\mathcal{P}$, il suffit d'étudier celles de P en suivant l'approche développée par Schaefer [39].

Considérons l'opérateur integral K de noyau σ défini sur $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^N))$ par

$$Kf(y, v) = \int_V \sigma(y, v, w) f(y, w) d\mu(w), \text{ pour tout } f \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^N)).$$

On montre aisement que l'opérateur K envoie continûment $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^N))$ dans lui-même. En effet, soit $f \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$. Supposons que $\sigma \in L^\infty(V \times V; B_A^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_y^N))$. On a

$$\begin{aligned}
\|Kf\|^2_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}_y^N))} &= \int_V \|Kf(v)\|_2^2 d\mu(v) \\
&= \int_V M(|Kf(v)|^2) d\mu(v) \\
&= \int_V \lim_{r\to\infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \left(|\int_V \sigma(y, v, w) f(y, w) d\mu(w)|^2\right) dy d\mu(v) \\
&\leq \int_V \lim_{r\to\infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \left(\int_V |\sigma(y, v, w)|^2 d\mu(w) \int_V |f(y, w)|^2 d\mu(w)\right) dy d\mu(v) \\
&\leq \sup_{(y,v,w)\in\mathbb{R}_y^N\times V\times V} |\sigma(y, v, w)|^2 \int_V \lim_{r\to\infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \left(\int_V |f(y, w)|^2 d\mu(w)\right) dy d\mu(v) \\
&\quad (\text{car } \sigma \in L^\infty(V \times V; B_A^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_y^N))) \\
&\leq \mu(V) \|\sigma\|^2_{L^\infty(V\times V\times\mathbb{R}_y^N)} \|f\|^2_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}_y^N))} \\
&= C\|f\|^2_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}_y^N))} \text{ avec } C = \mu(V)\|\sigma\|^2_{L^\infty(V\times V\times\mathbb{R}_y^N)},
\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_2$ représente la semi-norme de Besicovicth définie sur $B_A^2(\mathbb{R}_y^N)$.

Considérons cette hypothèse sur l'opérateur K qui nous sera d'une importance capitale dans la suite.

$$K \text{ est un opérateur compact de } D(P) \text{ dans } L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^N)). \tag{3.19}$$

Notons que cette hypothèse (3.19) est satisfaite dans le cas périodique (voir [20]), et peut donc être prolongée au cas asymptotiquement périodique comme nous le montrerons dans la sous-section 3.4.3. Par ailleurs, nous montrons également qu'elle reste satisfaite dans le cas presque périodique (voir la sous-section 3.4.2), et par conséquent se prolonge aussi au cas asymptotiquement presque périodique.

Dans la sous-section qui suit, nous allons établir un important résultat relatif au problème cellulaire en utilisant le Théorème de Krein-Rutman [9, Theorem VI.13, p. 100]. Notons que ce résultat de Krein-Rutman a été étendu aux espaces topologiques localement convexes par Scheafer [39, (10.5), p.281]. Etant donné que $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^N))$ est un espace vectoriel topologique localement convexe et complet, nous suivrons dans ce cas l'approche développée par Scheafer [39].

3.2.2 Problème cellulaire

La Proposition 5 ci-dessous est une généralisation de celle présentée dans [20, Section 3] sous des hypothèses de périodicité, et utilisant la version usuelle du Théorème de Krein-Rutman pour les espaces de Banach. Dans notre cas, nous considérons des hypothèses plus générales qui ne remettent nullement en cause l'application du Théorème de Krein-Rutman dans les espaces de Banach [20, Section 3], mais plutôt sa généralisation aux espaces localement convexes. Cependant, les hypothèses pour l'application des résultats de [39] sont les mêmes que ceux pour les espaces de Banach. Tout d'abord, nous commençons par la description du noyau des opérateurs P et P^* (les estimations obtenues ici sont uniformes par rapport à la variable macroscopique $x \in \mathbb{R}^N$). L'objectif infiné de cette sous-section est la résolution des problèmes auxilliaires (3.20) et (3.21) ci-dessous :

- le problème cellulaire : pour $g \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$ cherchons $f \in D(P)$ telle que

$$Pf = g \text{ dans } \mathbb{R}_y^N \times V \tag{3.20}$$

et

- le problème cellulaire adjoint : pour $\varphi \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$, cherchons $\phi \in D(P^*)$ telle que

$$P^*\phi = \varphi \text{ dans } \mathbb{R}_y^N \times V \tag{3.21}$$

où les équations ci-dessus sont comprises au sens faible dans $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$. Il convient de noter que, les équations (3.20) et (3.21) peuvent être également comprises au sens des distributions dans $\mathbb{R}^N \times V$.

Proposition 5. *Supposons que l'hypothèse* (3.6) *est satisfaite et que* $\sigma = \sigma(x, \cdot, \cdot, \cdot) \in L^\infty(V \times V; B_A^{2,\infty}(\mathbb{R}_y^N))$. *Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) Il existe une unique fonction $F \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$, *vérifiant*

$$PF = 0, \ \int_V M(F)d\mu(v) = 1, \ F \geq 0 \textit{ presque partout dans } \mathbb{R}_y^N \times V. \tag{3.22}$$

De plus, F est l'unique solution de l'équation variationnelle

$$\int_V M(F(a(v) \cdot \nabla_y \phi(\cdot, v) + \mathcal{Q}^*\phi(\cdot, v)))d\mu(v) = 0 \textit{ pour tout } \phi \in C^\infty(V; A^\infty). \tag{3.23}$$

De même, on a $\ker P^* = \operatorname{span}\{\chi_{\mathbb{R}_y^N \times V}\}$, *où* $\chi_{\mathbb{R}_y^N \times V}$ *est la fonction caractéristique de* $\mathbb{R}_y^N \times V$.

(ii) Soit $g \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$. *L'équation* (3.20) *admet une unique solution f dans $D(P)$ si et seulement si* $\int_V M(g)d\mu(v) = 0$. *De plus, on a*

$$\|f\|_{L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))} \leq C\|g\|_{L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))}; \tag{3.24}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de g.

(iii) Soit $\varphi \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. L'équation (3.21) *admet une solution $\phi \in D(P^*)$ si et seulement si $\int_V M(\varphi F)d\mu(v) = 0$. La condition $\int_V M(\phi)d\mu(v) = 0$ assure l'unicité de cette solution. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\|\phi\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} \leq C\|\varphi\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} \tag{3.25}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de φ.

Preuve. Il s'agit tout d'abord de caractériser le noyau de P et de conclure par la suite en utilisant l'alternative de Fredholm [9, Theorem VI.6, P. 92]). La preuve se fera en quatre étapes.

Etape 1 : L'opérateur $\mathcal{Q}$ est borné.

Montrons que $\mathcal{Q}$ est borné sur $L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$, sachant que $\sigma \in L^\infty(V \times V; B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^N_y))$. En effet, pour $f \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$, on a

$$\mathcal{Q}(f)(y,v) = \int_V \sigma(y,v,w)(f(y,w) - f(y,v))d\mu(w),$$

d'où

$$\|\mathcal{Q}(f)\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} = \int_V M\left(|\mathcal{Q}(f)(\cdot,v)|^2\right) d\mu(v).$$

Cependant, on a

$$|\mathcal{Q}(f)(\cdot,v)|^2 \leq C\,\|\sigma(\cdot,v,\cdot)\|^2_{L^\infty(V\times\mathbb{R}^N_y)} \left(\int_V |f|^2\,d\mu(w) + |f|^2\right)$$

où $C = \sup(\mu(V), \mu(V)^2)$. Puisque la moyenne commute avec l'intégrale, on aboutit à

$$\|\mathcal{Q}(f)\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} \leq C\,\|\sigma\|^2_{L^\infty(V\times V\times\mathbb{R}^N)}\,(\mu(V)+1)\,\|f\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))}\,,$$

c'est-à-dire

$$\|\mathcal{Q}(f)\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} \leq C\,\|f\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))}\,, \tag{3.26}$$

où la constante C dans (3.26) dépend uniquement de $\mu(V)$. Ce qui montre que $\mathcal{Q}$ est borné sur $L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. Comme conséquence directe de ce résultat, le domaine de l'opérateur P se réduit à

$$D(P) = \{u \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y)) : a(v)\cdot\nabla_y u \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))\}.$$

Etape 2 : Problème pertubé associé à P.

On réécrit l'opérateur P comme la pertubation d'un opérateur d'advertion $\mathcal{A} = a(v)\cdot\nabla_y + \Sigma$ (où $\Sigma(y,v) = \int_V \sigma(y,w,v)d\mu(w)$), par l'opérateur intégral K défini par

$$Kf(y,v) = \int_V \sigma(y,v,w)f(y,w)d\mu(w), \tag{3.27}$$

c'est-à-dire,

$$P = \mathcal{A} - K. \tag{3.28}$$

$\mathcal{A}$ est inversible. Par une simple intégration le long des lignes caractéristiques $y + sa(v)$, on montre aisement que l'équation $\mathcal{A}f = h$ admet une unique solution

$$f(y,v) = \mathcal{A}^{-1}h(y,v) = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s \Sigma(y-a(v)\tau, v)d\tau\right) h(y-a(v)s,v)ds, \tag{3.29}$$

et que cette fonction f appartient à $L^2(V;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. En effet, d'après (3.7), on peut trouver un réel $0 < \Sigma_1 = \inf_{(x,y,v)\in\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_y\times V} \Sigma(x,y,v)$ (rappelons que $\Sigma(x,y,v) > 0$ car $\sigma > 0$), tel que pour tout $h \in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$, on a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}^{-1}h\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} &= \int_V \lim_{R\to\infty} ⨍_{B_R} \left|\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s \Sigma(y-a(v)\tau,v)d\tau\right) h(y-a(v)s,v)ds\right|^2 dyd\mu(v)\\
&\le \int_V \lim_{R\to\infty} ⨍_{B_R} \left|\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right) h(y-a(v)s,v)ds\right|^2 dyd\mu(v)\\
&= \int_V \lim_{R\to\infty} ⨍_{B_R} \left|\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\Sigma_1}{2}s\right)\exp\left(-\frac{\Sigma_1}{2}s\right) h(y-a(v)s,v)ds\right|^2 dyd\mu(v)\\
&\le \int_V \lim_{R\to\infty} ⨍_{B_R} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right)ds\right)\left(\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right)|h(y-a(v)s,v)|^2 ds\right) dyd\mu(v)\\
&= \left(\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right)ds\right)\int_V\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right)\left(\lim_{R\to\infty} ⨍_{B_R} |h(y-a(v)s,v)|^2 dy\right) dsd\mu(v)\\
&= \frac{1}{\Sigma_1}\int_V\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right) M\left(|\tau_{a(v)s}h(\cdot,v)|^2\right)d\mu(v)ds\\
&= \frac{1}{\Sigma_1}\int_V\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right) M\left(|h(\cdot,v)|^2\right)d\mu(v)ds\\
&= \left(\frac{1}{\Sigma_1}\right)^2 \|h\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

où $⨍_{B_R} = \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}$. D'autre part, puisque $h \ge 0$ (resp. $h > 0$) implique $f = \mathcal{A}^{-1}h \ge 0$ (resp. $f = \mathcal{A}^{-1}h > 0$), on déduit que $\mathcal{A}^{-1}$ est un opérateur linéaire positif borné sur $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. Dès lors, on peut réécrire l'équation $Pf = g$ comme suit :

$$(I - K\circ\mathcal{A}^{-1})h = g,\ \ h = \mathcal{A}f \tag{3.31}$$

où I est l'opérateur identité dans $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$.

Etape 3 : Dimension du noyau de l'opérateur P.

L'opérateur $\mathcal{O} = K\circ\mathcal{A}^{-1}$ est compact dans $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. En effet, d'après [36, Theorem VI.12 (c)], il nous suffit de montrer que soit K ou $\mathcal{A}^{-1}$ est compact. Ce qui est le cas pour l'opérateur K d'après l'hypothèse (3.19). Revenons au problème (3.31), considérons le cône convexe fermé $C = \left\{f \in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y)) : f \ge 0\right\}$. C est un cône total dans $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. De plus, l'intérieur int$C$ est évidemment non vide et on a $C\cap(-C) = \{0\}$. Puisque $\sigma > 0$ implique $K(f) > 0$ pour toute fonction positive $f \in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$, on en déduit que l'opérateur compact $\mathcal{O} = K\circ\mathcal{A}^{-1}$ envoie $C\backslash\{0\}$ dans int$C$. D'où l'opérateur compact positif $\mathcal{O} = K\circ\mathcal{A}^{-1}$ et le cône convexe fermé C satisfont aux hypothèses du Théorème [39, (10.5), P. 281], qui est la généralisation aux espaces topologiques localement convexes du théorème usuel de Krein-Rutman [9, Theorem VI.13, p. 100]. Ainsi, on a l'existence d'une unique valeur propre λ de $\mathcal{O}$

(qui est son rayon spectral) associée à une fonction propre $H \geq 0$ ($\mathcal{O}(H) = \lambda H$). Posons alors $\mathcal{A}F = H$ de sorte que $K(F) = \lambda \mathcal{A}F$. Appliquons à cette égalité la moyenne M par rapport à la variable y, puis par une intégration par rapport à v en utilisant la condition (3.5) et l'égalité (3.4), on est conduit à

$$\int_{V^2} M\left(\sigma(\cdot, v, w)F(\cdot, w)\right) d\mu(w)d\mu(v) = \lambda \int_{V^2} M\left(\sigma(\cdot, v, w)F(\cdot, w)\right) d\mu(w)d\mu(v) > 0.$$

On en déduit que $\lambda = 1$ est la principale valeur propre de $\mathcal{O}$. De plus, nous avions vu à *l'étape 2* que $\mathcal{A}^{-1}$ et K sont des opérateurs linéaires positifs. Ainsi, $F = \mathcal{A}^{-1}H \geq 0$, cela implique que $\mathcal{A}F = H = K(F) > 0$, et donc $F = \mathcal{A}^{-1}H > 0$. Enfin, comme $f \geq 0$ entraine que $\mathcal{O}(f) > 0$, on en déduit que la dimension de l'espace propre vaut 1. On procède de façon analogue pour l'opérateur adjoint P^*. Notons en passant que $\chi_{\mathbb{R}^N_y \times V} \in \ker P^*$ car $\ker P^*$ contient les constantes. Avant de conclure sur la preuve de (i), montrons que (3.23) est vérifiée. Pour se faire, considérons $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty(V; A^\infty)$ arbitrairement fixé et définissons la fonction $\psi(y, v) = \varphi(\varepsilon y)\phi(y, v)$ ($y \in \mathbb{R}^N$) pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné. Multiplions l'équation $PF = 0$ par ψ et intégrons par parties sur $\mathbb{R}^N \times V$ le résultat obtenu, puis en utilisant le changement de variables $z = \varepsilon y$, on obtient alors

$$\iint_{\mathbb{R}^N \times V} F^\varepsilon \left[a(v) \cdot (\varepsilon \phi^\varepsilon \nabla_z \varphi + \varphi(\nabla_y \phi)^\varepsilon) + \varphi(\mathcal{Q}^*\phi)^\varepsilon\right] dz d\mu(v) = 0 \tag{3.32}$$

où $\eta^\varepsilon(z, v) = \eta(z/\varepsilon, v)$. En faisant tendre $\varepsilon \to 0$ dans (3.32) en utilisant la sigma-convergence, on aboutit à

$$\iint_{\mathbb{R}^N \times V} M(F(a(v) \cdot \nabla_y \phi(\cdot, v) + \mathcal{Q}^*\phi(\cdot, v)))\varphi(z) dz d\mu(v) = 0.$$

Puisque la fonction φ est arbitrairement choisie, on obtient

$$\int_V M(F(a(v) \cdot \nabla_y \phi(\cdot, v) + \mathcal{Q}^*\phi(\cdot, v)))d\mu(v) = 0.$$

Ce qui achève la preuve de (i).

Etape 4 : L'alternative de Fredholm.

Dans le but d'appliquer l'alternative de Fredholm, nous avons besoin de considérer le prolongement $\mathcal{P}$ de P défini sur $L^2(V; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. Alors toutes les propriétés obtenues dans les étapes 1-3 restent valables lorsqu'on remplace P par $\mathcal{P}$ et $L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$ par $L^2(V; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. On observe également que (3.20) peut être vue comme équivalente à

$$\mathcal{P}\widetilde{f} = \widetilde{g} \text{ dans } L^2(V; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^N_y)). \tag{3.33}$$

En effet, (3.20) implique (3.33) tandis que l'implication inverse est satisfaite lorsqu'on remplace g par $g + \psi$, où $\psi \in L^2(V; \mathcal{N})$. Cependant dans la formulation variationnelle de (3.20), on observe que la fonction ψ n'a pas d'effet car $M(\psi(\cdot, v)\phi(\cdot, v)) = 0$ pour $\psi \in L^2(V; \mathcal{N})$ et tout $\phi \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. Ceci étant dit, notons tout d'abord que la condition $\int_V M[g]d\mu(v) = 0$ est nécessaire pour la résolution de l'équation $Pf = g$, car $\int_V M[P(f)]d\mu(v) = 0$. En effet, comme l'application moyenne $u \mapsto M(u)$ commute avec l'intégrale par rapport à la variable v, on note simplement qu'en combinant (3.2) et (3.4), on a

$$\int_V \mathcal{Q}f(y, v)d\mu(v) = 0 \text{ pour tout } f \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y)).$$

De plus, un simple calcul nous permet de montrer que $M[a(v)\cdot\nabla_y f(\cdot,v)]=0$.

Gardant cela à l'esprit, on peut remplacer (3.20) par (3.33). Remarquons que lorsqu'on considère les prolongements associés aux opérateurs dans (3.31) et définis sur $L^2(V;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^N_y))$, alors (3.33) est équivalente à (3.31). En appliquant l'alternative de Fredholm dans ce cadre, on obtient $\mathrm{Im}(I-\mathcal{O})=\ker(I-\mathcal{O}^*)^\perp$. En d'autres termes, on a donc $\mathrm{Im}\,P=\ker(P^*)^\perp$. Ainsi, l'équation $Pf=g$ est soluble pour tout $g\in\mathrm{Im}\,P=\ker(P^*)^\perp$. Cependant, comme les espaces propres de P et P^* sont engendrés par des fonctions positives, la condition $\int_V M(g)d\mu(v)=0$ garantit l'unicité de la solution. D'où pour tout élément g dans $L^2_0(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y)):=\{g\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y)):\int_V M(g(\cdot,w))d\mu(w)=0\}$, on trouve une unique solution $f\in L^2_0(V;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^N_y))$ de l'équation $Pf=g$. Pour prouver l'inégalité (3.24), on applique à l'opérateur linéaire P le Théorème de l'application ouverte (voir par exemple [9, p.18]), ce qui conduit à l'existence d'une constante $C>0$ telle que

$$\|f\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))}\leq C\,\|g\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))}\,.$$

Par la même approche, on aboutit à des conclusions similaires pour le problème adjoint $P^*(\varphi)=\phi$. Ce qui achève la preuve. ■

Les deux résultats suivants montrent comment la régularité des coefficients peut engendrer celle des solutions des problèmes cellulaires (3.20) et (3.21). Le second plus particulièrement prend en compte la dépendance vis à vis de la variable spatiale x. Les preuves de ces résultats sont de simples adaptations de celles de [20, Lemmas 3.2 et 3.3].

Dans toute la suite, A^1 représente l'espace $\{u\in A:\nabla u\in(A)^N\}$ tandis que V_ω l'espace V avec comme variable générique $\omega\in V$.

Lemme 2. *Supposons que* $\sigma\equiv\sigma(y,v,w)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial y_i}\equiv\frac{\partial\sigma}{\partial y_i}(y,v,w)\in\mathcal{C}(V_v\times V_w;L^\infty(\mathbb{R}^N_y))\cap L^\infty(V_v\times V_w\times\mathbb{R}^N_y)$ $(1\leq i\leq N)$. *Alors, pour tout* $g\in\mathcal{C}(V;A^1)$, *la solution de* (3.20) *appartient à* $\mathcal{C}(V;A^1)$. *On a un résultat semblable pour l'équation adjointe* (3.21).

Preuve. Soient σ, $\frac{\partial\sigma}{\partial y_i}$ et g telles que données dans le lemme, on a en particulier $g\in\mathcal{C}(V;A^1)\subset\mathcal{C}(V;A)\subset\mathcal{C}(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$. En procédant comme dans la preuve précédente (voir Etape 3), on montre que la solution h du problème suivante

$$(I-K\circ\mathcal{A}^{-1})(h)=g,\ \ h=\mathcal{A}(f)\tag{3.34}$$

appartient à $\mathcal{C}(V;A)$. Pour conclure la preuve, montrons que les fonctions h et $f=A^{-1}h$ ont la même régularité. Pour cela, d'après (3.29), on a

$$f(y,v)=\int_0^\infty\exp\left(-\int_0^s\Sigma(y-a(v)\tau,v)d\tau\right)h(y-a(v)s,v)ds,\tag{3.35}$$

ce qui implique que $f\in\mathcal{C}(V;A)$.
Par la suite, fixons $1\leq i\leq N$ et posons $\partial_i=\frac{\partial}{\partial y_i}$. Appliquons ∂_i à l'équation (3.20), on obtient

$$a(v)\cdot\nabla_y\partial_i f-\mathcal{Q}(\partial_i f)=\partial_i g+\partial_i\mathcal{Q}(f),\tag{3.36}$$

où

$$\partial_i\mathcal{Q}(f)(y,v)=\int_V\partial_i\sigma(y,v,w)f(y,w)d\mu(w)-\partial_i\Sigma(y,v)f(y,v).\tag{3.37}$$

Puisque $f \in \mathcal{C}(V;A)$, on a $\partial_i g$, $\partial_i \mathcal{Q}(f) \in \mathcal{C}(V;A)$. Dès lors, le membre de droite de (3.36) appartient à $\mathcal{C}(V;A)$. D'après la Proposition 5 appliquée cette fois au problème (3.36), on a $\partial_i f \in \mathcal{C}(V;A)$. D'où $f \in \mathcal{C}(V;A^1)$ par définition de A^1. Un raisonnement analogue peut être appliqué dans le cas du problème adjoint. ■

Il convient de noter que la dérivation de l'équation satisfaite par la fonction d'équilibre F montre également que $F \in \mathcal{C}(V;A^1)$.

Lemme 3. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *Si* $\sigma \equiv \sigma(x,y,v,w) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N_x; L^\infty(V\times V; B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^N_y)))$ *et* $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N_x; L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y)))$, *alors la solution de l'équation (3.20) appartient à* $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N_x; L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y)))$. *On a un résultat semblable pour l'équation adjointe* (3.21).

Preuve. Commençons par montrer que la constante C de la Proposition 5, qui dépend de la variable x, est localement bornée. En effet, soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un sous ensemble compact et $0 < \delta < 1$. En appliquant le Théorème de Heine à la restriction sur K de l'application $x \mapsto \sigma(x,-)$, on est conduit à l'existence une constante $\eta_\delta > 0$ telle que, pour tout $x_1,\ x_2 \in K$ avec $|x_1 - x_2| \le \eta_\delta$, on a $\|\sigma(x_1,\cdot) - \sigma(x_2,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_y\times V\times V)} \le \frac{\delta}{C(x_2)C}$, où C est la constante obtenue dans (3.26) ne dépendant que de $\mu(V) < \infty$ uniquement, et $C(x_2)$ la constante de la Proposition 5. D'où par extension

$$\|\mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(x')\|_{\mathcal{L}\left[L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))\right]} \le \frac{\delta}{C(x')}$$

où $\mathcal{L}\left[L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))\right]$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés définis de $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$ dans lui-même. Soit $(B(x_i,\eta_\delta))_{1\le i\le I_\delta}$ un recouvrement fini de K : $K \subset \cup_{i=1}^{I_\delta} B(x_i,\eta_\delta)$. Pour tout $x \in K$, l'équation $P(x)(f(x)) = g(x)$ se réécrit comme suit :

$$P(x_i)(f(x)) = g(x) + (\mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(x_i))(f(x)).$$

Il vient donc que

$$\begin{aligned}\|P(x_i)f(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} &\le \|g(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} + \|\mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(x_i)\|_{\mathcal{L}\left(L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))\right)} \|f(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} \\ &\le \|g(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} + \frac{\delta}{C(x_i)} \|f(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))}.\end{aligned}$$

Cependant, d'après (3.24), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(x_i)} \|f(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} &\le \|g(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} \\ &= \|P(x)f(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} \\ &\le \|g(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} + \frac{\delta}{C(x_i)} \|f(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|f(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))} \le \frac{C(x_i)}{1-\delta} \|g(x)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^N_y))}. \tag{3.38}$$

Ainsi, on peut aisement utiliser la constante $C = C(K,\delta) = \max\left\{\frac{C(x_i)}{1-\delta}; i = 1, ..., I_\delta\right\}$.

Maintenant, désignons par δ^i_h la différentielle par rapport à la variable x : $\delta^i_h f(x,\cdot) =$

$\frac{f(x+he_i,\cdot)-f(x,\cdot)}{h}$ pour tout $1 \leq i \leq N$ fixé. En l'appliquant à l'équation $P(f) = g$, on obtient

$$a(v) \cdot \nabla_y \delta_h^i f - \mathcal{Q}(\delta_h^i f) = \delta_h^i g + \delta_h^i \mathcal{Q}(f). \tag{3.39}$$

En raisonnant comme dans la preuve du Lemme 2, on montre que le membre de droite de l'équation (3.39) est borné dans $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$, et par conséquent $\left(\delta_h^i f\right)_{h>0}$ est également bornée dans $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$. Dès lors, l'application $x \mapsto f(x, \cdot)$ est différentiable et à valeurs dans $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$. En posant $\partial_i = \partial/\partial x_i$, on a

$$a(v) \cdot \nabla_y \partial_i f - \mathcal{Q}(\partial_i f) = \partial_i g + \partial_i \mathcal{Q}(f).$$

En utilisant la continuité de f, les hypothèses sur la fonction σ et l'égalité (3.37), on montre aisement que le membre de droite de l'équation ci-dessus est continu par rapport à x. Par conséquent, on a la continuité de ∂f. Cette approche peut être étendue aux dérivées d'ordre supérieure et appliquée au problème adjoint par la même occasion. ■

Le résultat, conséquence des lemmes ci-dessus, sera très important dans la suite.

Corollaire 2. *Supposons les hypothèses* (3.6) *et* (3.7) *satisfaites. Alors*

(i) *F et $\nabla_x F$ sont des fonctions continues par rapport à leurs variables, où F est déterminée par* (3.22).

(ii) *Pour tout $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_x^N; \mathcal{C}(V; A^1))$ satisfaisant la condition de compatibilité énoncée dans la Proposition* 5 *(voir (ii)), la solution de l'équation $P(f) = g$ est une fonction continue par rapport à ses variables, ainsi que sa dérivée première par rapport à x. On a un résultat semblable pour l'équation adjointe $P^*(\varphi) = \phi$.*

Ces préliminaires étant faites, nous pouvons dès à présent énoncer et prouver notre principal résultat.

3.3 Résultat d'homogénéisation

Rappelons dans cette partie que $E = (\varepsilon_n)_n$ désigne une suite fondamentale, i.e., une suite ordinaire de réels positifs vérifiant $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Nous noterons par ε l'élément générique de E de sorte que "$\varepsilon \to 0$" équivaut à "$\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$".

Soit F l'unique solution de l'équation (3.22) (voir Proposition 5). Supposons que la fonction de vélocité $a(v)$ vérifie la condition suivante (le flux nul) :

$$\int_V M[a(v)F(x, \cdot, v)]d\mu(v) = 0. \tag{3.40}$$

On a le résultat d'homogénéisation suivant :

Théorème 22. *Soit A une algèbre avec moyenne sur $\mathbb{R}^N$. Supposons les hypothèses* (3.7), (3.19) *et* (3.40) *satisfaites. Pour chaque $\varepsilon > 0$, soit f_ε l'unique solution du système* (3.1). *Alors, il existe une fonction $f_0 \in L^2(\mathbb{R}_T^N \times V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$ et une sous-suite E' de E telles que la suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in E'}$ converge Σ-faiblement vers $f_0 + \mathcal{N}$ dans $L^2(\mathbb{R}_T^N \times V)$ où $\mathcal{N} = \left\{f \in B_A^2(\mathbb{R}_y^N) : M(|f|^2) = 0\right\}$. De plus, la fonction f_0 s'écrit sous la forme $f_0(t, x, y, v) = F(x, y, v)\rho_0(t, x)$ où la fonction*

$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N_x; L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y)) \cap \ker(P)$ *est donnée par* (3.22) *et* ρ_0 *est l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} - div_x \Big(D(x)^T \nabla_x \rho_0 + U(x)\rho_0 \Big) = 0 \ \ dans \ \mathbb{R}^N_T \\ \\ \rho_0(0,x) = \int_V f^{in}(x,v)d\mu(v) \ \ dans \ \mathbb{R}^N_x \end{cases} \tag{3.41}$$

où

$$D(x) = \int_V M\left[\chi^* \otimes (a(v)F)\right] d\mu(v) = \left(\int_V M\left[\chi^*_i a(v)_j F\right] d\mu(v) \right)_{1 \leq i,j \leq N};$$

$$U(x) = \int_V M\left[\chi^* a(v) \cdot \nabla_x F\right] d\mu(v) = \left(\int_V M\left[\chi^*_i a(v) \cdot \nabla_x F\right] d\mu(v) \right)_{1 \leq i \leq N}$$

avec $(\chi^* \otimes a(v)F) = (\chi^*_i a(v)_j F)_{1\leq i,j\leq N}$ *et* $\chi^* \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N \times V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))^N$ *est l'unique solution du problème cellulaire :*

$$P^*(\chi^*) = -a(v) \ \ et \ \int_V M[\chi^*(x,\cdot,v)]d\mu(v) = 0, \tag{3.42}$$

P^* *l'opérateur adjoint de* P.

Preuve. D'après l'estimation (3.9) et le Théorème 12, il existe une sous suite E' de E et une fonction $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^N_T \times V; B^2_A(\mathbb{R}^N_y))$ telles que lorsque $E' \ni \varepsilon \to 0$, on a

$$f_\varepsilon \to f_0 + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^N_T \times V)\Sigma\text{-faible} \tag{3.43}$$

D'après l'hypothèse (3.7) sur la fonction σ ; elle appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N \times V^2; B^{2,\infty}_{A_y}(\mathbb{R}^N_y))$ (espace des fonctions réelles continues et bornées de $\mathbb{R}^N \times V^2$ dans $B^{2,\infty}_{A_y}(\mathbb{R}^N_y)$). Ainsi, on a alors

$$\sigma^\varepsilon \to \sigma + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^N_x \times V^2)\Sigma\text{-faible.}$$

En utilisant σ comme fonction test dans la convergence ci-dessus, on obtient la convergence forte suivante :

$$\sigma^\varepsilon \to \sigma + \mathcal{N} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^N_x \times V^2)\Sigma\text{-fort.} \tag{3.44}$$

Le reste de la preuve se fera en deux étapes.

Etape 1 : L'équation limite.

Considérons maintenant $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N_T \times V) \otimes A^\infty$ et définissons la fonction ψ^ε par $\psi^\varepsilon(t,x,v) = \psi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},v)$ $((t,x,v) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \times V)$. Alors $\psi^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^N_T \times V)$. Multiplions la première équation de (3.1) par $\frac{1}{\varepsilon}\psi^\varepsilon$, puis par une intégration par parties en utilisant (3.13) et la fait que $\nabla_x \cdot a(v) = 0$, on obtient

$$-\int_{V\times\mathbb{R}^N_T} \left[f_\varepsilon \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a(v) \cdot (\nabla_x \psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} a(v) \cdot (\nabla_y \psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{Q}^* \psi)^\varepsilon \right) \right] dtdxd\mu(v) = 0 \tag{3.45}$$

où $\mathcal{Q}^*$ est donné par (3.14). Multiplions (3.45) par ε^2, en passant à la limite (grâce au Théorème 12) lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N_T\times V} [f_\varepsilon (\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^\varepsilon + \varepsilon a(v) \cdot (\nabla_x \psi)^\varepsilon + a(v) \cdot (\nabla_y \psi)^\varepsilon)] dtdxd\mu(v)$$
$$\to \int_{\mathbb{R}^N_T \times V} M[f_0(a(v) \cdot \nabla_y \psi)] dtdxd\mu(v).$$

Ensuite, en utilisant (3.44), on aboutit à (lorsque $E' \ni \varepsilon \to 0$)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_T^N \times V} [f_\varepsilon((\mathcal{Q}^*\psi)^\varepsilon)]dtdxd\mu(v) \\
&= \int_{\mathbb{R}_T^N \times V^2} [(\sigma^\varepsilon(x,v,w)f_\varepsilon(t,x,v) - \sigma^\varepsilon(x,w,v)f_\varepsilon(t,x,w))\psi^\varepsilon]d\mu(w)d\mu(v)dtdx \\
&\to \int_{\mathbb{R}_T^N \times V^2} M[(\sigma(x,.,v,w)f_0 - \sigma(x,.,w,v)f_0)\psi]dtdxd\mu(w)d\mu(v) \\
&= \int_{\mathbb{R}_T^N \times V} M[f_0(\mathcal{Q}^*\psi)]dtdxd\mu(v).
\end{aligned}$$

Il en découle que

$$-\int_{\mathbb{R}_T^N \times V} M[f_0(a(v)\cdot\nabla_y\psi + \mathcal{Q}^*\psi)]dtdxd\mu(v) = 0. \tag{3.46}$$

Posons $\psi(t,x,y,v) = \varphi(t,x)\phi(y,v)$, où $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_T^N)$ et $\phi \in A^\infty \otimes \mathcal{C}_0^\infty(V)$. Alors (3.46) est équivalent à :

$$-\int_{\mathbb{R}_T^N} \left(\int_V M\left[f_0(t,x,\cdot,v)\left(a(v)\cdot\nabla_y\phi(\cdot,v) + \mathcal{Q}^*\phi(\cdot,v)\right)\right]d\mu(v)\right)\varphi(t,x)dtdx = 0.$$

Puisque la fonction φ est arbitrairement choisie, de l'équation ci-dessus, on aboutit à

$$-\int_V M\left(f_0(t,x,\cdot,v)\left[a(v)\cdot\nabla_y\phi(\cdot,v) + \mathcal{Q}^*\phi(\cdot,v)\right]\right)d\mu(v) = 0. \tag{3.47}$$

Considérons pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_T^N$ fixé, le problème suivant : chercher $F(t,x) \equiv F \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$ telle que

$$a(v)\cdot\nabla_y F - \mathcal{Q}F = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_y^N \times V. \tag{3.48}$$

Alors d'après [le (i) de la] Proposition 5, il existe une unique fonction $F \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))$ avec $\int_V M(F)d\mu(v) = 1$, solution du problème (3.48). Comme pour la preuve de (3.23) (voir Etape 3 de la preuve de la Proposition 5) , on observe que F vérifie la formulation variationnelle suivante

$$\int_V M\left(F(\cdot,v)\left(a(v)\cdot\nabla_y\phi(\cdot,v) + \mathcal{Q}^*\phi(\cdot,v)\right)\right)d\mu(v) = 0,\ \forall\phi \in A^\infty \otimes \mathcal{C}^\infty(V). \tag{3.49}$$

Posons

$$\rho_0(t,x) = \int_V M(f_0(t,x,\cdot,v))d\mu(v)$$

et supposons sans nuire à la généralité que ρ_0 n'est pas nulle. Alors ceci définit une fonction telle que $\rho_0^{-1}(t,x)f_0(t,x,\cdot,\cdot)$ soit solution de (3.49) et $\int_V M(\rho_0^{-1}(t,x)f_0(t,x,\cdot,v)F)d\mu(v) = 1$. D'après l'unicité de la solution de (3.49) combinée à la condition de normalité $\int_V M(F)d\mu(v) = 1$, on obtient $F = \rho_0^{-1}f_0$, i.e.,

$$f_0(t,x,y,v) = \rho_0(t,x)F(x,y,v) \text{ pour presque tout } (t,x,y,v) \in \mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}_y^N \times V. \tag{3.50}$$

Puisque $f_0 \in L^2(\mathbb{R}_T^N \times V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N)) = L^2(\mathbb{R}_T^N; L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N)))$, il vient que $\rho_0 \in L^2(\mathbb{R}_T^N)$.

Considérons maintenant $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_T^N)$ et définissons φ par

$$P^*\varphi = -a(v)\cdot\nabla_x\phi,\ \int_V M(\varphi)d\mu = 0. \tag{3.51}$$

Rappelons que moyennant (3.40), la Proposition 5 et le Lemme 3 assurent l'existence de l'unique solution $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_x^N; L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N)))$ du problème (3.51). De plus, si nous considérons la fonction vectorielle $\chi^* = (\chi_j^*)_{1\leq j\leq N}$ définie par

$$\begin{cases} \chi_j^* \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_x^N; L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))) \\ P^*(\chi_j^*) = -a_j(v) \text{ et } \int_V M[\chi_j^*(x,\cdot,v)]d\mu(v) = 0, \end{cases} \tag{3.52}$$

alors par unicité de φ, on a

$$\varphi(t,x,y,v) = \chi^*(x,y,v)\cdot\nabla_x\phi(t,x).$$

Ceci étant, on choisit dans la formulation variationnelle de (3.45), $\frac{1}{\varepsilon}\psi^\varepsilon$ comme fonction test avec

$$\psi^\varepsilon(t,x,v) = \phi(t,x) + \varepsilon\varphi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},v)$$

où $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_T^N)$ et φ définie par (3.51). Alors on obtient

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{\mathbb{R}_T^N\times V} f_\varepsilon[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}a(v)\cdot\nabla_x\phi + a(v)\cdot(\nabla_x\varphi)^\varepsilon \\ &\textstyle+\frac{1}{\varepsilon^2}(P^*\phi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(P^*\varphi)^\varepsilon]dtdxd\mu(v) = 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Puisque ϕ ne dépend pas des variables (y,v), on a alors $P^*\phi = 0$. Ainsi, (3.53) devient

$$\int_{\mathbb{R}_T^N\times V} f_\varepsilon\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\left(a(v)\cdot\nabla_x\phi + (P^*\varphi)^\varepsilon\right) + a(v)\cdot(\nabla_x(\chi^*\cdot\nabla_x\phi))^\varepsilon\right]dtdxd\mu(v) = 0.$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$ (à une sous-suite près) et en utilisant (3.51), on a

$$\int_{\mathbb{R}_T^N\times V} M\left[f_0\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + a(v)\cdot\nabla_x(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)\right)\right]dtdxd\mu(v) = 0. \tag{3.54}$$

Puisqu'on a

$$a(v)\cdot\nabla_x(\chi^*\cdot\nabla_x\phi) = \sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N a_j(v)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\chi_i^*(x,y,v)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,x)\right) \tag{3.55}$$

et d'après (3.50), on peut calculer chaque terme de (3.54) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_T^N\times V} M\left[f_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]dtdxd\mu(v) &= \int_{\mathbb{R}_T^N}\int_V\left(M\left[\rho_0(x,t)F(x,.,v)\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]dtdxd\right)\mu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}_T^N}\rho_0(x,t)\left(\int_V M[F(x,.,v)]d\mu(v)\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}dtdx \\ &= \int_{\mathbb{R}_T^N}\rho_0(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial t}dtdx \text{ (car } \int_V M(F(x,\cdot,v))d\mu(v) = 1) \\ &= -\int_{\mathbb{R}_T^N}\phi\frac{\partial\rho_0}{\partial t}(x,t)dtdx \\ &= -\left\langle\frac{\partial\rho_0}{\partial t},\phi\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Ensuite, posons

$$I = \int_{\mathbb{R}_T^N \times V} M\left(f_0\left[a(v) \cdot \nabla_x\left(\chi^* \cdot \nabla_x \phi\right)\right]\right) dtdxd\mu(v).$$

On a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}_T^N \times V} M\left(f_0\left[a(v) \cdot \nabla_x\left(\chi^* \cdot \nabla_x \phi\right)\right]\right) dtdxd\mu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}_T^N \times V} M\left[\rho_0 F\left(\sum_{j,i=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\chi_i^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)\right)\right] dtdxd\mu(v); \end{aligned} \tag{3.57}$$

et comme l'application moyenne M commute avec les intégrales par rapport aux variables (t, x, v), on peut réécrire (3.57) comme suit (en utilisant la définition de la dérivation au sens des distributions) :

$$\begin{aligned} I &= \int_V M\left[\sum_{j,i=1}^N \int_{\mathbb{R}_T^N}\left(a_j F \rho_0 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\chi_i^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)\right) dxdt\right] d\mu(v) \\ &= \int_V M\left[\sum_{j,i=1}^N \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\chi_i^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right), a_j F \rho_0\right\rangle\right] d\mu(v) \\ &= -\int_V M\left[\sum_{j,i=1}^N \left\langle \chi_i^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j F \rho_0)\right\rangle\right] d\mu(v) \\ &= -\int_V M\left[\sum_{j,i=1}^N \int_{\mathbb{R}_T^N}\left(\chi_i^* a_j \frac{\partial (F\rho_0)}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) dxdt\right] d\mu(v) \\ &= -\int_V M\left[\sum_{j,i=1}^N \int_{\mathbb{R}_T^N} \chi_i^* a_j F \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dxdt\right] d\mu(v) - \int_V M\left[\sum_{j,i=1}^N \int_{\mathbb{R}_T^N} \chi_i^* a_j \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rho_0 dxdt\right] d\mu(v). \end{aligned} \tag{3.58}$$

En utilisant la linéarité et la commutativité sur l'intégrale de la moyenne M, et le fait que les fonctions ϕ et ρ_0 ne dépendent que des variables macroscopiques (t, x), l'équation (3.58) devient

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\mathbb{R}_T^N} \sum_{j,i=1}^N \int_V M\left(\chi_i^* a_j F\right) \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mu(v) dxdt - \int_{\mathbb{R}_T^N} \sum_{j,i=1}^N \int_V \left[M\left(\chi_i^* a_j \frac{\partial F}{\partial x_j}\right) \rho_0\right] \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mu(v) dxdt \\ &= -\int_{\mathbb{R}_T^N} \sum_{i=1}^N \left(\int_V M\left[\chi_i^*\left(\sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\right] \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) d\mu(v) dxdt - \int_{\mathbb{R}_T^N} \sum_{j,i=1}^N \int_V M\left(\chi_i^* a_j F\right) \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mu(v) dxdt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Commençons par calculer I_1. On a

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{\mathbb{R}^N_T} \sum_{i=1}^N \left(\int_V M \left(\chi_i^* \left(\sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right) \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\mu(v) dx dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_T} \sum_{i=1}^N \left(\int_V M \left(\chi_i^* \left(a(v) \cdot \nabla_x F \right) \right) \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\mu(v) dx dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_T} \sum_{i=1}^N \left(U_i(x) \rho_0 \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt
\end{aligned}$$

où la fonction U_i appartient bien évidemment à $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N_x)$ et est définie par

$$U_i(x) = \int_V M \left(\chi_i^* \left(a(v) \cdot \nabla_x F \right) \right) d\mu(v). \tag{3.59}$$

Posons $U(x) = (U_i(x))_{1 \leq i \leq N}$, on a alors

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{\mathbb{R}^N_T} \sum_{i=1}^N \left(U_i(x) \rho_0 \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt \\
&= -\sum_{i=1}^N \left\langle U_i(x) \rho_0, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial (U_i(x) \rho_0)}{\partial x_i}, \phi \right\rangle \\
&= \langle \mathrm{div}_x (U \rho_0), \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Concernant I_2, remarquons tout d'abord que la fonction $x \mapsto \int_V M(\chi_i^* a_j F \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) d\mu(v)$ $(1 \leq i, j \leq N)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact. Alors on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\int_{\mathbb{R}^N_T} \sum_{i,j=1}^N \int_V M \left(\chi_i^* a_j F \right) \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mu(v) dx dt \\
&= -\sum_{i,j=1}^N \left\langle \left(\int_V M \left[\chi_i^* a_j F \right] d\mu(v) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, on définit la matrice $D(x) = (d_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq N}$ par $d_{ij}(x) = \int_V M \left(\chi_i^* a_j F \right) d\mu(v)$, c'est-à-dire,

$$D(x) = \int_V M(\chi^* \otimes (a(v) F)) d\mu(v) \text{ avec } \chi^* \otimes (a(v) F) = (\chi_i^* a_j(v) F)_{1 \leq i,j \leq N}. \tag{3.60}$$

Par conséquent

$$I_2 = -\langle D(x) \nabla \phi, \nabla \rho_0 \rangle = -\left\langle D(x)^T \nabla \rho_0, \nabla \phi \right\rangle = \left\langle \mathrm{div}_x \left(D(x)^T \nabla \rho_0 \right), \phi \right\rangle$$

où $D(x)^T$ représente la tranposée de la matrice $D(x)$. Il vient donc que (3.54) n'est autre que la formulation variationnelle (au sens des distributions) de l'équation de diffusion avec drift suivante :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} - \mathrm{div}_x \left(D(x)^T \nabla_x \rho_0 + U(x) \rho_0 \right) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N_T, \tag{3.61}$$

où $U(x)$ et $D(x)$ sont définies respectivement par (3.59) et (3.60).

Etape 2 : La condition initiale.

Il est question ici de déterminer la condition initiale satisfaite par f_0. Sans nuire à la généralité, on suppose que la fonction ρ_0 est suffisament régulière. Considérons la même fonction test (tel que définie plus haut dans (3.51)) $\psi^\varepsilon(t,x,v) = \phi(t,x) + \varepsilon\varphi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},v)$, mais avec $\phi(t,x) = \eta(t)\phi(x)$, où $\eta \in C^\infty([0,T])$ et $\eta(T) = 0$. Nous savons déjà qu'il existe une unique fonction $\chi^* \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times V; B_A^2(\mathbb{R}_y^N))^N$ vérifiant (3.52), d'où on a $\psi^\varepsilon(t,x,v) = \eta(t)(\phi(x)+\varepsilon\chi^*(x,\frac{x}{\varepsilon},v)\cdot\nabla_x\phi(x))$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_T^N\times V} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}\psi^\varepsilon dtd\mu(v)dx &= \int_{\mathbb{R}_x^N\times V}\left(\int_0^T \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}\psi^\varepsilon dt\right)d\mu(v)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_x^N\times V}\left[\int_0^T\left(\frac{\partial}{\partial t}(f_\varepsilon\psi^\varepsilon) - f_\varepsilon\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial t}\right)dt\right]dxd\mu(v) \\
&= -\eta(0)\int_{\mathbb{R}_x^N\times V}(f_\varepsilon)_{t=0}(\phi+\varepsilon(\chi^*)^\varepsilon\cdot\nabla_x\phi)dxd\mu(v) \\
&- \int_{\mathbb{R}_T^N\times V}\eta' f_\varepsilon(\phi+\varepsilon(\chi^*)^\varepsilon\cdot\nabla_x\phi)dtdxd\mu(v) \\
&= -\eta(0)\int_{\mathbb{R}_x^N\times V} f_\varepsilon^{in}(\phi+\varepsilon(\chi^*)^\varepsilon\cdot\nabla_x\phi)dxd\mu(v) \\
&- \int_{\mathbb{R}_T^N\times V}\eta' f_\varepsilon(\phi+\varepsilon(\chi^*)^\varepsilon\cdot\nabla_x\phi)dtdxd\mu(v)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Cependant, d'après la première équation de (3.1), on a

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}(t,x,v) = -\frac{1}{\varepsilon}a(v)\cdot\nabla_x f_\varepsilon(t,x,v) + \frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon(t,x,v). \tag{3.63}$$

Multiplions (3.63) par $\psi^\varepsilon(t,x,v) = \phi(t,x) + \varepsilon\varphi(t,\frac{x}{\varepsilon},x,v) = \eta(t)(\phi(x) + \varepsilon\chi^*(x,\frac{x}{\varepsilon},v)\cdot\nabla_x\phi(x))$, puis par une intégration par parties sur $\mathbb{R}_T^N \times V$, on obtient pour chaque membre de droite :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_T^N\times V}\psi^\varepsilon(a(v)\cdot\nabla_x f_\varepsilon)d\mu(v)dxdt \\
&= -\int_{\mathbb{R}_T^N\times V}\eta f_\varepsilon[a(v)\cdot\nabla_x\phi + \varepsilon a(v)\cdot(\nabla_x\varphi)^\varepsilon + a(v)\cdot(\nabla_y\varphi)^\varepsilon]d\mu(v)dxdt
\end{aligned} \tag{3.64}$$

et (d'après (3.13) et le fait que $Q_\varepsilon^*\phi = 0$)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_T^N\times V}\psi^\varepsilon(\mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon)dtdxd\mu(v) &= \int_{\mathbb{R}_T^N\times V} f_\varepsilon\eta(t)(\mathcal{Q}_\varepsilon^*(\phi+\varepsilon\varphi^\varepsilon)dtdxd\mu(v) \\
&= \varepsilon\int_{\mathbb{R}_T^N\times V} f_\varepsilon\eta(t)(\mathcal{Q}_\varepsilon^*\varphi)^\varepsilon dtdxd\mu(v).
\end{aligned} \tag{3.65}$$

En prenant en considération (3.62)-(3.65), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_T^N\times V} f_\varepsilon\left((\eta'^*)^\varepsilon\cdot\nabla_x\phi) + \eta\left[a(v)\cdot(\nabla_x\varphi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\{(P^*\varphi)^\varepsilon + a(v)\cdot\nabla_x\phi\}\right]\right)dtdxd\mu(v) \\
&= -\eta(0)\int_{\mathbb{R}_x^N\times V} f_\varepsilon^{in}(\phi+\varepsilon(\chi^*)^\varepsilon\cdot\nabla_x\phi)dxd\mu(v).
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $E' \ni \varepsilon \to 0$, en utilisant le fait que $P^*(\varphi) = -a(v) \cdot \nabla_x \phi$ et $\varphi = \chi^* \cdot \nabla_x \phi$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_T^N \times V} M(f_0[\eta' \phi + \eta a(v) \cdot \nabla_x (\chi^* \cdot \nabla_x \phi)]) dt d\mu(v) dx = -\eta(0) \int_{\mathbb{R}_x^N \times V} f^{in}(x,v) \phi(x) dx d\mu(v). \quad (3.66)$$

Intégrons maintenant par parties le membre de gauche de (3.66) par rapport à la variable t, en utilisant (3.22) et (3.50), on aboutit à

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_T^N \times V} M(f_0[\eta' \phi + \eta a(v) \cdot \nabla_x (\chi^* \cdot \nabla_x \phi)]) dt d\mu(v) dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}_T^N} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} - \nabla_x \cdot (U(x)\rho_0) - \nabla_x \cdot \left(D(x)^T \nabla_x \rho_0 \right) \right) \eta(t) \phi(x) dt dx \\ &- \eta(0) \int_{\mathbb{R}_x^N} \rho_0(0,x) \phi(x) dx, \end{aligned} \quad (3.67)$$

où les coefficients $U(x)$ and $D(x)$ sont définis plus haut. En combinant (3.66) et (3.67) et en utilisant (3.61), on est conduit à

$$\eta(0) \int_{\mathbb{R}_x^N} \rho_0(0,x) \phi(x) dx = \eta(0) \int_{\mathbb{R}_x^N} \left(\int_V f^{in}(x,v) d\mu(v) \right) \phi(x) dx.$$

On obtient donc (grâce à l'équivalence au sens des distributions)

$$\rho_0(0,x) = \int_V f^{in}(x,v) d\mu(v) \text{ dans } \mathbb{R}_x^N. \quad (3.68)$$

En combinant (3.61) et (3.68), on obtient alors (3.41). On montre aisement que le problème (3.41) possède une unique solution (voir [28]). ■

Avant d'attaquer la dernière partie de ce chapitre sur les exemples d'application de notre résultat d'homogénéisation, nous avons ces remarques importantes. La première nous précise la signification des termes intervenants dans le système limite (3.41). La seconde quant à elle nous permet de mieux préciser le champ d'illustration de notre résultat d'homogénéisation.

Remarque 5. Le système (3.41) modélise un phénomène de diffusion de particules avec drift. En effet, la diffusion est matérialisée par le terme $div_x(D(x)^T \nabla_x \rho_0)$, qui représente la redistribution spatiale des particules sous l'influence de leurs propres énergies cinétiques. Pendant que le drift est représenté par le terme $div_x(U(x)\rho_0)$, il modélise le transport des particules sous l'influence d'un champ externe donné ou d'un champ auto-consistant généré par les particules elles-mêmes.

Remarque 6. Dans la preuve du Théorème 22, nous avons utilisé la condition (3.40). Cependant, au-delà du fait qu'elle (la condition (3.40)) nous permet de simplifier la présentation des résultats, elle assure également l'existence de la solution du problème (3.52). Dans le cas où cette condition n'est pas satisfaite, on peut remplacer dans (3.52) la fonction $a_j(v)$ (où $a(v) = (a_j(v))_{1 \le j \le N}$) par $a_j(v) - \int_V M(a_j(v)F(x,\cdot,v)) d\mu(v)$, de manière à garantir l'existence de la solution pour le problème correspondant. Ainsi, comme vu dans [20], la conclusion du Théorème 22 reste valable moyennant quelques modifications sur les coefficients $D(x)$ et $U(x)$.

3.4 Applications

L'hypothèse (3.7) a joué un rôle important dans la preuve du Théorème 22, notamment dans la détermination des opérateurs de drift et de diffusion, en ce sens que leurs coefficients dépendent des fonctions ayant le même comportement que la fonction $y \mapsto \sigma(x, y, v, w)$. Nous allons dans cette section présenter quelques situations physiques pour lesquelles l'hypothèse (3.7) est satisfaite.

3.4.1 Homogénéisation périodique

Ce cadre correspond à une équi-repartition des microstructures dans le milieu. Par conséquent, la fonction σ est périodique par rapport à la variable y. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que σ est périodique de période 1 dans toutes les directions, i.e.,

$$\sigma(x, y + k, v, w) = \sigma(x, y, v, w) \text{ pour tout } (x, y, v, w) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N_y \times V \times V \text{ et pour tout } k \in Y$$

où $Y = (0, 1)^N$. Dans ce cas, $A = \mathcal{C}_{per}(Y)$ (l'algèbre de Banach des fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ et Y-périodiques), est une algèbre avec moyenne et la moyenne est définie ici par $M(u) = \int_Y u(y)dy$ ($u \in \mathcal{C}_{per}(Y)$). L'espace de Besicovitch $B^p_A(\mathbb{R}^N)$ est égal à $L^p_{per}(Y)$ ($1 \leq p \leq \infty$), l'espace de Banach des fonctions $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ Y-périodiques. Les hypothèses (3.7) et (3.40) deviennent respectivement

$$\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N \times V \times V; L^\infty_{per}(Y)) \tag{3.69}$$

et

$$\iint_{Y \times V} a(v)F(x, \cdot, v)dyd\mu(v) = 0 \text{ et } F > 0 \text{ presque partout.} \tag{3.70}$$

De plus l'hypothèse (3.19) sur la compacité de l'opérateur K a été prouvée dans [20, Lemma A.1]. Dès lors, le Théorème 22 prend la forme suivante

Théorème 23. *Soit A une algèbre avec moyenne sur $\mathbb{R}^N$. Supposons* (3.69) *et* (3.70) *satisfaites. Pour chaque $\varepsilon > 0$, soit f_ε l'unique solution du système* (3.1)*. Alors, il existe une fonction $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^N_T \times V; L^2_{per}(Y))$ telle que la suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ converge faiblement à deux échelles vers f_0 dans $L^2((0,T) \times \mathbb{R}^N_x \times V)$. De plus, la fonction f_0 s'écrit sous la forme $f_0(t, x, y, v) = F(x, y, v)\rho_0(t, x)$ où $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N_x; L^2(V; L^2_{per}(Y)) \cap \ker(P)$ est donnée par* (3.22) *et ρ_0 est l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} - div_x \Big(D(x)^T \nabla_x \rho_0 + U(x)\rho_0\Big) = 0 \;\; dans \;\; (0,T) \times \mathbb{R}^N_x \\ \\ \rho_0(0, x) = \int_V f^{in}(x, v)d\mu(v) \;\; dans \;\; \mathbb{R}^N_x \end{cases}$$

où

$$D(x) = \iint_{Y \times V} \chi^* \otimes (a(v)F)dyd\mu(v) = \left(\iint_{Y \times V} \chi^*_i a_j(v)F dyd\mu(v)\right)_{1\leq i,j\leq N},$$

$$U(x) = \iint_{Y \times V} \chi^* a(v) \cdot \nabla_x F dyd\mu(v) = \left(\iint_{Y \times V} \chi^*_i a(v) \cdot \nabla_x F dyd\mu(v)\right)_{1\leq i\leq N}$$

avec $(\chi^* \otimes a(v)F) = (\chi_i^* a_j(v)F)_{1\leq i,j\leq N}$, *où* $\chi^* \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N \times V; L^2_{per}(Y))^N$ *est l'unique solution du problème cellulaire :*

$$P^*(\chi^*) = -a(v) \text{ et } \iint_{Y\times V} \chi^*(x,\cdot,v)dyd\mu(v) = 0,$$

P^* *l'opérateur adjoint de* P.

Nous retrouvons dans ce cadre le résultat obtenu par Goudon-Mellet [20, Theorem 3.11].

3.4.2 Homogénéisation presque périodique

Ici les microstructures sont presque équi-reparties dans le milieu, ce qui nous permet de dire que la fonction $y \mapsto \sigma(x,y,v,w)$ est presque périodique. On montre aisement que l'algèbre avec moyenne que l'on considère ici n'est autre que l'algèbre de Banach $A = AP(\mathbb{R}^N)$ des fonctions continues presque périodiques définies sur $\mathbb{R}^N$ [6]. Rappelons qu'une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est dite continue presque périodique (ou presque périodique au sens de Bohr) si $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^N$) et l'ensemble de ses translatés $\{u(\cdot + a) : a \in \mathbb{R}^N\}$ est relativement compact dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. L'algèbre de Banach $AP(\mathbb{R}^N)$ est une algèbre avec moyenne ayant cette propriété particulière que, la moyenne d'une fonction $u \in AP(\mathbb{R}^N)$ est l'unique constante appartenant à l'enveloppe convexe fermée dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, de la famille des translatés $\{u(\cdot + a) : a \in \mathbb{R}^N\}$, voir par exemple [22].

Ceci étant dit, on observe que l'espace $B^2_A(\mathbb{R}^N)$ n'est autre que l'espace usuel de Besicovitch des fonctions presque périodiques sur $\mathbb{R}^N$ [5]. Finalement, en utilisant le lemme de la moyenne (voir par exemple [11, Chap. XXI.5]), on montre que l'hypothèse (3.19) sur K est satisfaite. Dès lors le Théorème 22 reste encore valable dans ce cas, et vient donc généraliser celui obtenu sous des hypothèses de périodicité.

3.4.3 Homogénéisation asymptotiquement périodique

On suppose ici que le milieu est localement périodique, c'est-à-dire, les microstructures sont localement équi-reparties dans le milieu. Ainsi, la fonction $y \mapsto \sigma(x,y,v,w)$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction périodique et d'une fonction qui s'annule à l'infini. L'algèbre avec moyenne dans ce cas est alors $A = \mathcal{C}_{per}(Y) + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ où $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ qui s'annulent à l'infini. Puisque $\lim_{|y|\to\infty} u(y) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$, alors tout élément dans A est une fonction asymptotiquement périodique. La moyenne d'une fonction dans A est définie comme suit : pour $A \ni u = u_{per} + u^0$ avec $u_{per} \in \mathcal{C}_{per}(Y)$ et $u^0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$, $M(u) = \int_Y u_{per}(y)dy$.

Concernant l'hypothèse (3.19), notons tout d'abord que si nous désignons par $L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N)$ l'espace de Besicovitch associé à l'algèbre $A = \mathcal{C}_{per}(Y) + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$, alors $L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N) = L^2_{per}(Y) + L^2_0(\mathbb{R}^N)$ où l'espace $L^2_0(\mathbb{R}^N)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ dans l'espace de Marcinkiewicz $\mathfrak{M}^2(\mathbb{R}^N)$ (voir la sous-section 1.3.1 du Chapitre 1), et est clairement défini par

$$L^2_0(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N) : M(|u|^2) = 0\}.$$

Notons par $\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N) = L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N)/L^2_0(\mathbb{R}^N)$ l'espace de Banach associé à $L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d)$, d'après le premier théorème d'isomorphisme, on a $\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d) \cong L^2_{per}(Y)$. Cependant, l'isomorphisme $\cong$

est également une isométrie, d'où les propriétés topologiques de $L^2_{per}(Y)$ se transposent aisement sur $\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N)$. La compacité de K (défini sur $L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N)$) est dès lors une simple conséquence de sa compacité (considéré comme défini) sur $L^2_{per}(Y)$. En effet, notons par Γ l'isomorphisme isométrique de $L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N))$ dans $L^2(V;L^2_{per}(Y))$ défini par

$$\Gamma(f)(y,v) = \gamma(f(\cdot,v))(y) \text{ pour tout } f \in L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N))$$

où γ désigne l'isomorphisme isométrique de $\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N)$ vers $L^2_{per}(Y)$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $D(P) = \{u \in L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N)) : a(v)\cdot\nabla_y u \in L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N))\}$ telle que $f_n \to 0$ dans $D(P)$-faible. Alors, la classe $\widetilde{f}_n$ des fonctions f_n est définie par $\widetilde{f}_n = f_n + L^2_0(\mathbb{R}^N)$, et on a $\widetilde{f}_n \to \widetilde{0}$ dans $D(\mathcal{P})$-faible, où $\mathcal{P}$ est défini par (3.18). Il vient donc que

$$\Gamma(\widetilde{f}_n) \to \Gamma(\widetilde{0}) \text{ dans } D(P_{per})\text{-faible}$$

où P_{per} représente l'opérateur P défini sur $L^2(V;L^2_{per}(Y))$ ($L^2_{per}(Y)$ étant l'espace de Besicovitch associé à l'algèbre avec moyenne $A = \mathcal{C}_{per}(Y)$). Alors, en utilisant la compacité de K de $D(P_{per})$ dans $L^2(V;L^2_{per}(Y))$, on extrait une sous-suite de $(\widetilde{f}_n)$ (encore notée $(\widetilde{f}_n)$ pour simplifier), telle que $K(\Gamma(\widetilde{f}_n)) \to 0$ dans $L^2(V;L^2_{per}(Y))$-fort. Cependant, la série d'égalités

$$\left\|K(\Gamma(\widetilde{f}_n))\right\|_{L^2(V;L^2_{per}(Y))} = \left\|K(\widetilde{f}_n)\right\|_{L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N))} = \|K(f_n)\|_{L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N))}$$

(dans lesquelles on a utilisé la même notation K pour l'opérateur défini à la fois sur $L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N))$ et sur $L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N))$) entraine $K(f_n) \to 0$ dans $L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N))$-fort à une sous-suite de $(f_n)_n$ près. D'où la compacité de K.

Le Théorème 22 reste encore valable dans ce cas.

3.4.4 Homogénéisation asymptotiquement presque périodique

Tout comme dans la sous-section 3.4.3, on replace l'espace $\mathcal{C}_{per}(Y)$ par $AP(\mathbb{R}^N)$ et l'algèbre avec moyenne dans ce cas est donnée par $A = AP(\mathbb{R}^N) + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$. Cette algèbre est appelée algèbre des fonctions asymptotiquement presque périodiques. Ainsi, on peut supposer que la fonction $y \mapsto \sigma(x,y,v,w)$ appartient à $B^2_A(\mathbb{R}^N)$. Nous procédons comme dans la sous-section 3.4.3 pour montrer que l'hypothèse (3.19) reste satisfaite dans ce cas. Ceci est obtenu en considérant l'application Γ définie sur $L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^N))$ dans la sous-section précédente. Mais cette fois, on la définit sur $L^2(V;\mathcal{B}^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^N))$ où $\mathcal{B}^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^N) = B^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^N)/\mathcal{N}$ avec $B^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^N) = B^2_A(\mathbb{R}^N)$, $A = AP(\mathbb{R}^N) + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{N} = \{u \in B^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^N) : M(|u|^2) = 0\}$. Le Théorème 22 reste une fois de plus valable dans ce cadre.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, il était question pour nous d'homogénéiser les équations de Vlasov et de Boltzmann dans le cadre déterministe général. Les résultats obtenus dans ce travail viennent généraliser les résultats existants sur cette problématique dans le cadre périodique. Nous nous sommes limités à des oscillations spatiales en ce qui concerne l'équation de Boltzmann linéaire. Il aurait été plus intéressant d'inclure une étude sur le comportement à long terme (en intégrant les oscillations par rapport au temps) de la fonction de distribution des particules, solution de cette équation. Malheureusement nous restons confrontés à la formulation du problème des correcteurs. Par ailleurs, nous envisageons également d'une part, l'homogénéisation de ces équations de Vlasov et Boltzmann linéaires lorsque l'espace de phase est borné, et l'homogénéisation quantitative de ces équations d'autre part. Il s'agira notamment d'étudier les erreurs de convergence liées au passage à la limite de la suite de solutions de ces équations. Enfin, L'homogénéisation de l'équation de Boltzmann non linéaire nous semble également importante. Ces problèmes feront l'objet de nos travaux ultérieurs.

Bibliographie

[1] H. Amman,*Ordinary differential equations*, De Gruyter, New-York 1990.

[2] C. Bardos, H. Hutridurga, *Simultaneous diffusion and homogenization asymptotic for the linear Boltzmann equation*, Asympt. Anal.,100(2016),111-130.

[3] C. Bardos, E. Bernard, F. Golse, R. Sentis, *The diffusion approximation for the linear Boltzmann equation with vanishing absorption*, Prepublication of ljll.math.upmc.fr, 2012.

[4] C. Bardos, E. Bernard, F. Golse, R. Sentis, T*he diffusion approximation for the linear Boltzmann equation with vanishing scattering coefficient*, Commun. Math. Sci. **13** (2015) 641–671.

[5] A.S. Besicovitch,*Almost periodic functions*,Dover Publications, Cambridge 1955.

[6] H. Bohr,*Almost periodic functions*,Chelsea, New York,1947.

[7] J. Boman, *Holmgren's uniqueness theorem and support theorems for real analytic Radom transforms*,Contemporary Mathematics, 140 (1992), 23-30.

[8] M. Bostan,*Transport of charged particules under fast oscillating magnetic fields*, SIAM J. Math. Anal., 44-3(2012),1415-1447.

[9] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Paris, Masson, 1983.

[10] J. Casado Diaz,I. Gayte,*The two-scale convergence method applied to generalized Besicovitch spaces*,Proc. R.Soc.Lond.A 458(2002),2925-2946.

[11] R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 6. Evolution Problems II. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH. P. 496. (1990).

[12] R.J. Diperna, P.-L. Lions,*Solutions globales d'equations du type Vlasov-Poisson*,C.R. Acad. Sci. Ser. I Math., 307(1988),306-329.

[13] R.J. Diperna,P.-L. Lions,*Global weak solutions of Vlasov-Maxwell system*,Comm. Pure Appl. Math., 42(1989),729-757.

[14] R. J. DiPerna, P. L. Lions, O*n the Cauchy Problem for Boltzmann Equations : Global Existence and Weak Stability*, The Annals of Mathematics, 130(2) :321Ű366, 1989.

[15] W. E.,*Homogenization of linear and nonlinear transport equations*, Commun. Pure and applied Math. XLV (1992),301-326.

[16] P. Fouegap, R. Kenne Bogning, G. Nguetseng, D. Dongo and J.L. Woukeng, *Homogenization of linear Boltzmann equations in the context of algebras with mean value*,Z. Angew. Math. Phys. 71, 173 (2020).https ://doi.org/10.1007/s00033-020-01391-9.

[17] E. Frenod, E. Sonnendrücker,*Homogenization of the Vlasov equation and the Vlasov-Poisson system with a strong external magnetic field*, Asympt. Anal., 18-3-4(1998),193-214.

[18] R. Glassey,W. Strauss,*Singularity formation in a colisionless plasma could only occur at high velocities*, Arch. Rat. Mech. Anal.,92(1986),56-90.

[19] F. Golse, B. Perthame, R. Sentis, *Un résultat de compacité pour l'équation de transport et application au calcul de la valeur propre principale d'un opérateur de transport*, C.R.A.S., Paris 301 (1985), 341-344.

[20] T. Goudon and A. Mellet, *Homogenization and diffusion asymptotics of the linear Boltzmann equation*, ESAIM COCV,9(2003),371-398.

[21] K. Hamdache,*Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations*,Jpn. J. Ind. Appl. Math.15(1998),51-74.

[22] K. Jacobs, Measure and Integral, Academic Press, 1978.

[23] J.-S. Jiang,C.-K. Lin,*Weak turbulence plasma induced by two-scale homogenization*, J. Math. Anal. Appl.,410(2014),585-596.

[24] V.V. Jikov, S.M. Kozlov and O.A. Oleinik, Homogenization of differential operators and integral functionals, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[25] R. Kenne Bogning, H. Nnang,*Periodic homogenization of parabolic nonstandard monotone operators*,Acta Appl.Math.125(2013),209-229.

[26] R. Kenne Bogning,G. Nguetseng, J.L. Woukeng, *Deterministic homogenization of Vlasov equations*, Math. Meth. Appl. Sci. **43** (2020) 1359–1379.

[27] R. Kurth,*Das anfangswert problem der stellar dynamic*, Z. Astrophys., 30(1952),213-229.

[28] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Uralceva, S. Smith, Linear and quasilinear equations of parabolic type, AMS, LW Singer Co., 1968.

[29] P.-L. Lions,B. Perthame,*Propagation of moments and regularity of the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*,Invent. Math., 105(1991),415-430.

[30] G. Nguetseng,*Homogenization structures and applications I*, Z.Anal.Anwen., 22(2003),73-107.

[31] G. Nguetseng,Σ-*convergence of parabolic differential operators*,Proceedings of the Conference on Homogenization.

[32] G. Nguetseng, *Cours sur les Algèbres d'homogénéisation*, Champs sur Marne, 19-30 Mars 2012.

[33] G. Nguetseng,M. Sango,J.L. Woukeng,*Reiterated ergodic algebras and applications*,Commun.Math.Phys.300(2010),835-876.

[34] A. Pankov,*G-convergence and homogenization of nonlinear differential operators*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1997.

[35] K. Pfaffelmoser,*Global classical solutions for Vlasov-Poisson system in 3 dimensions for general initial data*,J.Differ.Eq., 95(1992),281-303.

[36] M. Reed and B. Simon,*Methods of modern mathematical physics : Functionnal analysis*, Vol I, Academic Press, New York, 1980.

[37] R. Robert,*Unicite de la solution faible a support compact de l'equation de Vlasov-Poisson*,C.R.Acad.Sci. Paris Ser. I Math., 324(1997),873-877.

[38] M. Sango,N. Svanstedt,J.L. Woukeng,*Generalized Besicovitch spaces and applications to deterministic homogenization*,Nonlin.Anal.TMA 74(2011),351-379.

[39] H. Schaefer, Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorrraüme. lI, Math. Ann. **138** (1959) 259-286.

[40] J. Scheaffer,*Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in 3 dimensions*,Comm.Partial Differ. Eq., 16(1991),1313-1335.

[41] Vo-Khac Khoan, *Etude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles*, Mémoires de la S.M.F., tome 6 (1966).

[42] J.L. Woukeng,*Homogenization in algebras with mean value and applications*,Banach J.Math.9(2015),142-182.

[43] S. Wollman,*An existence and uniqueness theorem for the Vlasov-Maxwell system*,Comm. Pure Appl. Math., 37(1984),457-462.

[44] S. Wollman,*Existence and uniqueness theory of the Vlasov equation*,Technical report MF-100,Magneto-fluid Dynamics Division, Courant Institute, New York University,1982.

[45] J.L. Woukeng,*Homogenization of nonlinear degenerate non-monotone elliptic operators in domains perforated with tiny holes.* Acta Appl. Math. 112(2010),35-68.

ARTICLES

1. Deterministic homogenization of Vlasov equations.
2. Homogenization of linear Boltzmann equations in the context of algebras with mean value.

Received: 15 March 2019
DOI: 10.1002/mma.5953

RESEARCH ARTICLE

WILEY

Deterministic homogenization of Vlasov equations

Rodrigue B. Kenne[1] | **Gabriel Nguetseng**[1] | **Jean Louis Woukeng**[2]

[1]Department of Mathematics, University of Yaounde I, Yaounde, Cameroon

[2]Department of Mathematics and Computer Science, University of Dschang, Dschang, Cameroon

Correspondence
Jean Louis Woukeng, Department of Mathematics and Computer Science, University of Dschang, PO Box 67, Dschang, Cameroon.
Email: jwoukeng@yahoo.fr

Communicated by: R. Showalter

We address the homogenization of the Vlasov equations using the sigma-convergence method. Assuming that the electromagnetic field is strong and is highly oscillating in both space and time, we derive the homogenization result. We then study some special cases leading to already known results.

KEYWORDS
algebras with mean value, deterministic homogenization, sigma-convergence, Vlasov equations

MSC CLASSIFICATION
35B40; 35Q83; 46J10

1 | INTRODUCTION

We aim at describing the asymptotic behaviour of populations of charged particles evolving in a highly heterogeneous medium and submitted to strongly oscillating electromagnetic fields, with strong magnetic component. Using the kinetic description and neglecting the particles collision, the model problem is a Vlasov-type equation reading as

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon + (\boldsymbol{E}^\varepsilon + v \times \boldsymbol{B}^\varepsilon) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

where $\mathbb{R}^3_T = (0, T) \times \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R} \ni T > 0$ is the final time and $\varepsilon > 0$ is a small real parameter describing the size of the heterogeneities and which is assumed to tend to zero. Here, v denotes the velocity of the particles, $(\boldsymbol{E}^\varepsilon, \boldsymbol{B}^\varepsilon)$ is a given electromagnetic field, and $f_\varepsilon \equiv f_\varepsilon(t, x, v)$ is the distribution function of particles that at time t, occupy the position x, and have velocity v. Equation (1.1) is supplemented with the initial condition

$$f_\varepsilon(0, x, v) = f^0(x, v) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{1.2}$$

where $f^0 \geq 0$ and $0 < \int_{\mathbb{R}^6} |f^0|^2 dxdv < +\infty$. We assume that the electromagnetic field $(\boldsymbol{E}^\varepsilon, \boldsymbol{B}^\varepsilon)$ lies in $(L^\infty(0, T; (L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3))^3)^2$. Then for each fixed $\varepsilon > 0$, the Vlasov equations (1.1) and (1.2) have a unique weak solution $f_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ (see, eg, Wollman[1,2] for the proof), which further satisfies the following estimate:

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))} \leq C. \tag{1.3}$$

Estimate (1.3) is a mere consequence of the following equality (see Hamdache[3, p54]):

$$\frac{d}{dt}\left(e^{3t}\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (e^{-3t} f_\varepsilon)^2 dxdp\right) = 0,$$

which yields $\|f_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} = e^{\frac{3}{2}t}\|f^0\|_{L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}$, and finally

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3))} = C(T)\|f^0\|_{L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}.$$

Our aim here is to study the Vlasov equations (1.1) and (1.2) under strong external magnetic field, which means that the magnetic field will be of the form

$$\boldsymbol{B}^\varepsilon = \boldsymbol{B}_0^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}_1^\varepsilon. \tag{1.4}$$

The homogenization of Vlasov equation has been considered in the literature by many authors; see, eg, previous studies[4-7] and the references therein. Frénod[6] and Hamdache considered problems similar to some extent to ours but without strong and/or oscillating electromagnetic field. The analysis of Vlasov or Vlasov-Poisson system with large external magnetic field was carried out in previous studies.[4,5,7] Let us also point out the work[8] in which the Vlasov-Poisson system has been considered without any assumption on the magnetic field. In all the previous works, the authors consider either the periodic oscillations in time or the periodic oscillations in space. None of these works deal with both oscillations in time and space, which can be especially seen as studying the long-time behaviour of the distribution function of the particles while the particles are evolving in a highly heterogeneous medium. It is worth noting that apart from very few work in which special versions of the coefficients $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{B}$ are considered (see, eg, Jiann-Sheng and Chi-Kun[8]), the uniqueness issue for the limit problem is not addressed. One of our achievements is the proof of the uniqueness of the solution of the homogenized problem; see Theorem 4.1. Indeed, we prove that the class of the solution in the Besicovitch space is unique.

In this work, we aim at studying the asymptotic behaviour of the sequence of the distribution functions of particles when

1. the electromagnetic field is highly oscillating in both time and space, that is, $(\boldsymbol{E}^\varepsilon, \boldsymbol{B}^\varepsilon)$ has the form $(\boldsymbol{E}^\varepsilon, \boldsymbol{B}^\varepsilon)(t,x) = (\boldsymbol{E}(t/\varepsilon, x/\varepsilon), \boldsymbol{B}(t/\varepsilon, x/\varepsilon))$ with $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ being given;
2. the magnetic field consists of a sum of a bounded oscillating field and a perturbation of another bounded oscillating field, that is, $\boldsymbol{B}^\varepsilon = \boldsymbol{B}_0^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}_1^\varepsilon$ with $\boldsymbol{B}_i^\varepsilon(t,x) = \boldsymbol{B}_i(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$, $i = 0, 1$; and
3. the functions $\boldsymbol{E}$ and $(\boldsymbol{B}_i)_{i=0,1}$ assume a variety of behaviours such as the periodicity, the almost periodicity, and others.

In view of the preceding assumptions, our results seem to generalize to some extent, those in the previous works cited above.

The rest of the work is organized as follows. Section 2 deals with the concept of sigma-convergence, which relies on the notion of algebra with mean value that we define therein and give some important properties. In Section 3, we define and give some useful properties of the average operator along the characteristic flow of the constraint equation. We also state and prove an important result (Theorem 3.1) relating the duality in the sense of the mean value (defined on the algebra with mean value) to the usual one in the distributional sense. Section 4 is dedicated to the homogenization of (1.1) while in Section 5, we will apply the results of Section 4 to derive some concrete examples.

2 | THE SIGMA-CONVERGENCE

The concept of sigma-convergence relies on the notion of algebras with mean value.

2.1 | Algebras with mean value

Let A be an algebra with mean value (algebra wmv, in short) on $\mathbb{R}^N$,[9-12] that is, A is a closed subalgebra of the C^*-algebra of bounded uniformly continuous functions $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$, which contains the constants, is closed under complex conjugation ($\overline{u} \in A$ whenever $u \in A$), is translation invariant ($u(\cdot + a) \in A$ for any $u \in A$ and each $a \in \mathbb{R}^N$) and is such that any of its elements possesses a mean value in the following sense:

- For each $u \in A$, the sequence $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (where $u^\varepsilon(x) = u(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^N$) weakly $*$-converges in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ to some constant function $M(u) \in \mathbb{C}$ (the complex field) as $\varepsilon \to 0$. The mean value $M(u)$ of $u \in A$ is characterized by the following equality:

$$M(u) = \lim_{R\to\infty} |B_R|^{-1} \int_{B_R} u(y)dy,$$

where B_R is the open ball in $\mathbb{R}^N$ of radius R and centred at the origin of $\mathbb{R}^N$.

It is known that A (endowed with the sup norm topology) is a commutative C*-algebra with identity. We denote by $\Delta(A)$ the spectrum of A and by $\mathcal{G}$ the Gelfand transformation on A. We recall that $\Delta(A)$ (a subset of the topological dual A' of A) is the set of all nonzero multiplicative linear functionals on A, and $\mathcal{G}$ is the mapping of A into $C(\Delta(A))$ such that $\mathcal{G}(u)(s) = \langle s, u\rangle$ ($s \in \Delta(A)$), where $\langle , \rangle$ denotes the duality pairing between A' and A. We endow $\Delta(A)$ with the relative weak$*$ topology on A', which makes it a compact topological space, and the Gelfand transformation $\mathcal{G}$ is an isometric $*$-isomorphism identifying A with $C(\Delta(A))$ (the continuous functions on $\Delta(A)$) as C*-algebras. It is also a fact that the mean value operator, defined on A, is representable by integration with respect to some Radon probability measure β in $\Delta(A)$ (called the *M-measure* for A[13, proposition 2.1]) as follows:

$$M(u) = \int_{\Delta(A)} \mathcal{G}(u)d\beta \text{ for } u \in A. \tag{2.1}$$

Remark 2.1. In the sequel, we assume that all algebras wmv consist of real-valued functions. This does not make any restriction on the preceding results or on the forthcoming ones. We will denote the Gelfand transform $\mathcal{G}(u)$ of a function $u \in A$ by $\hat{u}$. This notation will be used in Section 3 (see especially the proof of Theorem 3.1 therein).

To an algebra wmv, A are associated its regular subalgebras

$$A^m = \{\psi \in C^m(\mathbb{R}^N) : D_y^\alpha \psi \in A \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \quad \text{with} \quad |\alpha| \le m\},$$

where $D_y^\alpha \psi = \frac{\partial^{|\alpha|}\psi}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_N^{\alpha_N}}$. Under the norm $|||\psi|||_m = \sup_{|\alpha|\le m}\left\|D_y^\alpha\psi\right\|_\infty$, A is a Banach space. We also define the space

$$A^\infty = \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : D_y^\alpha \psi \in A \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N\},$$

a Fréchet space when endowed with the locally convex topology defined by the family of norms $|||\cdot|||_m$.

The concept of a product algebra wmv will be useful in our study. Let A_y (resp. A_τ) be an algebra wmv on $\mathbb{R}_y^N$ (resp. $\mathbb{R}_\tau$). We define the product algebra wmv $A_y \odot A_\tau$ as the closure in BUC($\mathbb{R}^{N+1}$) of the tensor product $A_y \otimes A_\tau = \{\sum_{finite} u_i \otimes v_i : u_i \in A_y \text{ and } v_i \in A_\tau\}$. This defines an algebra wmv on $\mathbb{R}^{N+1}$.

We also define the notion of vector-valued algebra with mean value. Indeed, let $\mathbb{F}$ be a Banach space. We denote by BUC($\mathbb{R}^N; \mathbb{F}$) the Banach space of bounded uniformly continuous functions $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{F}$, endowed with the norm

$$\|u\|_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \|u(y)\|_\mathbb{F},$$

where $\|\cdot\|_\mathbb{F}$ stands for the norm in $\mathbb{F}$. Let A be an algebra with mean value on $\mathbb{R}^N$. We denote by $A \otimes \mathbb{F}$ the usual space of functions of the form

$$\sum_{finite} u_i \otimes e_i \quad \text{with} \quad u_i \in A \quad \text{and} \quad e_i \in \mathbb{F},$$

where $(u_i \otimes e_i)(y) = u_i(y)e_i$ for $y \in \mathbb{R}^N$. With this in mind, we define the vector-valued algebra wmv $A(\mathbb{R}^N; \mathbb{F})$ as the closure of $A \otimes \mathbb{F}$ in BUC($\mathbb{R}^N; \mathbb{F}$). One shows that[14, lemma 3.5] $A_y \odot A_\tau = A_y(\mathbb{R}^N; A_\tau) = A_\tau(\mathbb{R}; A_y)$.

Now, let $f \in A(\mathbb{R}^N; \mathbb{F})$. Then, defining $\|f\|_\mathbb{F}$ by $\|f\|_\mathbb{F}(y) = \|f(y)\|_\mathbb{F}(y \in \mathbb{R}^N)$, we have that $\|f\|_\mathbb{F} \in A$. Similarly, we may define (for $0 < p < \infty$) the function $\|f\|_\mathbb{F}^p$ and $\|f\|_\mathbb{F}^p \in A$. This allows us to define the Besicovitch seminorm on $A(\mathbb{R}^N; \mathbb{F})$ as follows: for $1 \le p < \infty$,

$$\|f\|_{p,\mathbb{F}} = \left(\lim_{R\to\infty} \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} \|f(y)\|_\mathbb{F}^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \equiv (M(\|f\|_\mathbb{F}^p))^{\frac{1}{p}} \quad \text{for} \quad f \in A(\mathbb{R}^N; \mathbb{F}).$$

Next, we define the Besicovitch space $B_A^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{F})$ as the completion of $A(\mathbb{R}^N; \mathbb{F})$ with respect to $\|\cdot\|_{p,\mathbb{F}}$. The space $B_A^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{F})$ is a complete seminormed subspace of $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{F})$, and the following holds true:

1. The space $\mathcal{B}_A^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{F}) = B_A^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{F})/\mathcal{N}$ (where $\mathcal{N} = \{u \in B_A^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{F}) : \|u\|_{p,\mathbb{F}} = 0\}$) is a Banach space under the norm $\|u + \mathcal{N}\|_{p,\mathbb{F}} = \|u\|_{p,\mathbb{F}}$ for $u \in B_A^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{F})$.

2. The mean value $M : A(\mathbb{R}^N;\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ extends by continuity to a continuous linear mapping (still denoted by M) on $B_A^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{F})$ satisfying
$$L(M(u)) = M(L(u)) \quad \text{for all } L \in \mathbb{F}' \quad \text{and} \quad u \in B_A^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{F}).$$
Moreover, for $u \in B_A^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{F})$ we have
$$\|u\|_{p,\mathbb{F}} = [M(\|u\|_{\mathbb{F}}^p)]^{\frac{1}{p}} \equiv \left[\lim_{R\to\infty} \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} \|u(y)\|_{\mathbb{F}}^p\,dy\right]^{\frac{1}{p}},$$
and for $u \in \mathcal{N}$, one has $M(u) = 0$. It is to be noted that $B_A^2(\mathbb{R}^N;H)$ (when $\mathbb{F} = H$ is a Hilbert space) is a Hilbert space with inner product
$$(u,v)_2 = M[(u,v)_H] \quad \text{for} \quad u,v \in \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}^N;H), \tag{2.2}$$
$(\cdot,\cdot)_H$ denoting the inner product in H.

If in particular $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ then $B_A^p(\mathbb{R}^N) := B_A^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ and $\mathcal{B}_A^p(\mathbb{R}^N) := \mathcal{B}_A^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$. The mean value extends in a natural way to $\mathcal{B}_A^p(\mathbb{R}^N)$ as follows: for $u = v + \mathcal{N} \in \mathcal{B}_A^p(\mathbb{R}^N)$, we set $M(u) := M(v)$; this is well defined since $M(w) = 0$ for any $w \in \mathcal{N}$. The Besicovitch seminorm in $B_A^p(\mathbb{R}^N)$ is merely denoted by $\|\cdot\|_p$, and we have $B_A^q(\mathbb{R}^N) \subset B_A^p(\mathbb{R}^N)$ for $1 \le p \le q < \infty$.

2.2 | The sigma-convergence

Let A_y and A_τ be two algebras wmv on $\mathbb{R}_y^N$ and $\mathbb{R}_\tau$, respectively, and let $A = A_\tau \odot A_y$ be their product. We know that A is the closure in $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}_{\tau,y}^{1+N})$ of the tensor product $A_\tau \otimes A_y$. The generic element of $\mathbb{R}_T^N$ is denoted by (t,x) while any function in A_y (resp. A_τ and A) is of variable $y \in \mathbb{R}^N$ (resp. $\tau \in \mathbb{R}$ and $(\tau,y) \in \mathbb{R}^{1+N}$). The mean value over A_y, A_τ, and A is denoted by the same letter M. For a function $u \in L^p(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m; B_A^p(\mathbb{R}^{1+N}))(m \ge 1)$, we denote by $u(t,x,\cdot,v)$ (for a.e. $(t,x,v) \in \mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m$) the function defined by
$$u(t,x,\cdot,v)(\tau,y) = u(t,x,\tau,y,v) \quad \text{for a.e. } (\tau,y) \in \mathbb{R}^{1+N}.$$

Then $u(t,x,\cdot,v) \in B_A^p(\mathbb{R}^{1+N})$, so that the mean value of $u(t,x,\cdot,v)$ is defined accordingly. Likewise, for $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}_T^3 \times \mathbb{R}_v^3; \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^4))$, we have $\tilde{u}(t,x,\cdot,v) \in \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^4) = B_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^4)/\mathcal{N}$ where $\mathcal{N} = \{w \in B_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^4) : \|w\|_2 = [M(|w|^2)]^{1/2} = 0\}$. So $\tilde{u}(t,x,\cdot,v) = u(t,x,\cdot,v) + \mathcal{N}$ for some $u(t,x,\cdot,v) \in B_A^2(\mathbb{R}_{\tau,y}^4)$. We therefore set
$$\tilde{u} = u + \mathcal{N},$$
which is understood in the preceding sense.

Definition 2.1. A sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^p(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m)(1 \le p < \infty)$ is said to weakly Σ -converge in $L^p(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m)$ to some function $u_0 \in L^p(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m; \mathcal{B}_A^p(\mathbb{R}^{1+N}))$ if as $\varepsilon \to 0$, we have
$$\int_{\mathbb{R}_T^N\times\mathbb{R}^m} u_\varepsilon(t,x,v) f^\varepsilon(t,x,v)\,dxdtdv \to \int_{\mathbb{R}_T^N\times\mathbb{R}^m} M(u_0(t,x,\cdot,v) f(t,x,\cdot,v))\,dtdxdv \tag{2.3}$$
for every $f \in L^{p'}(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m; A)(\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p})$, where $f^\varepsilon(t,x,v) = f(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon},v)$. We express this by writing $u_\varepsilon \to u_0$ in $L^p(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m)$-weak Σ.

In the above definition, if $A = \mathcal{C}_{per}(Z\times Y)$ is the algebra of continuous periodic functions on $Z\times Y$ with $Y = (0,1)^N$ and $Z = (0,1)$, then (2.3) reads as
$$\int_{\mathbb{R}_T^N\times\mathbb{R}^m} u_\varepsilon(t,x,v) f^\varepsilon(t,x,v)\,dxdtdv \to \int_{\mathbb{R}_T^N\times\mathbb{R}^m\times Z\times Y} u_0(t,x,\tau,y,v) f(t,x,\tau,y,v)\,dtdxd\tau dydv,$$
where $u_0 \in L^p(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m \times Z \times Y)$.

Remark 2.2. The weak Σ-convergence in $L^p(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m)$ implies the weak convergence in $L^p(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m)$. One may show as in Nguetseng[13, example 4.1] that, for any $f \in L^p(\mathbb{R}_T^N \times \mathbb{R}^m; A)$, the sequence $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ weakly Σ-converges towards $f + \mathcal{N}$ in $L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$. We may also show (see Nguetseng[13, corollary 4.1]) that the property (2.3) still holds for $f \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{C}(\mathbb{R}^3_T; B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y})))$ where $B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y}) = B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$ is endowed with the $L^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$-norm.

In the sequel, the letter F will always denote any ordinary sequence $(\varepsilon_n)_n$ (integers $n \geq 0$) of positive real numbers satisfying: $0 < \varepsilon_n \leq 1$ and $\varepsilon_n \to 0$ when $n \to \infty$.

The following results (Theorems 2.1 and 2.2 and Corollary 2.1) are simple adaptation of their counterparts in previous studies.[11,13,15]

Theorem 2.1. *Let $1 < p < \infty$ and $m \in \mathbb{N}^*$. Let $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in F} \subset L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ be a bounded sequence. Then there exist a subsequence F' of F and a function $u \in L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m; \mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^{1+N}))$ such that the sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in F'}$ weakly Σ-converges in $L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ to u.*

We will also deal with the product of sequences. For that reason, we give one further

Definition 2.2 (Nguetseng et al[15, theorem 3.1]). A sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)(1 \leq p < \infty)$ is said to strongly Σ-converge in $L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ to some function $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m; \mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^{1+N}_{\tau,y}))$ if it is weakly Σ-convergent towards u_0 and further satisfies the following condition:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N_T\times\mathbb{R}^m)} \to \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N_T\times\mathbb{R}^m;\mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^{1+N}_{\tau,y}))}. \tag{2.4}$$

We denote this by $u_\varepsilon \to u_0$ in $L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$-strong Σ.

Remark 2.3. Arguing as in Nguetseng,[13, example 4.2] we can show that for any $u \in L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m; A)$, the sequence $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ is strongly Σ-convergent to $u + \mathcal{N}$, where $u^\varepsilon(t,x,v) = u\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon},v\right)$ for $(t,x,v) \in \mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m$.

Theorem 2.2 (Woukeng[11, theorem 3.5]). *Let $1 \leq p,q \leq \infty$ and $r \geq 1$ be such that $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$. Let m be a positive integer. Assume $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in F} \subset L^q(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ is weakly Σ-convergent in $L^q(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ to some $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m; \mathcal{B}^q_A(\mathbb{R}^{N+1}_{y,\tau}))$, and $(v_\varepsilon)_{\varepsilon\in F} \subset L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ is strongly Σ-convergent in $L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ to some $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m; \mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^{N+1}_{y,\tau}))$. Then the sequence $(u_\varepsilon v_\varepsilon)_{\varepsilon\in F}$ is weakly Σ-convergent in $L^r(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ to u_0v_0.*

Corollary 2.1 below is a direct consequence of the previous result.

Corollary 2.1. *Let $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in F} \subset L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ and $(v_\varepsilon)_{\varepsilon\in F} \subset L^{p'}(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$ $(1 < p < \infty$ and $p' = \frac{p}{(p-1)})$ be two sequences such that*

1. *$u_\varepsilon \to u_0$ in $L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$-weak Σ;*
2. *$v_\varepsilon \to v_0$ in $L^{p'}(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$-strong Σ;*
3. *$(v_\varepsilon)_{\varepsilon\in F}$ is bounded in $L^\infty(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$.*

Then, $u_\varepsilon v_\varepsilon \to u_0v_0$ in $L^p(\mathbb{R}^N_T \times \mathbb{R}^m)$-weak Σ.

Remark 2.4. We define the weak Σ-convergence in $L^p(\Omega)$ mutatis mutandis for any $1 \leq p < \infty$, where Ω is any open set in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ being any positive integer. We also define the weak Σ-convergence in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$. To this end, let $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$. For any open set $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, we denote the restriction of u to Ω by $u_{,\Omega}$. Then $u_{,\Omega} \in L^p(\Omega)$. Let $(u_\varepsilon) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ and let $u_0 \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d; \mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^d))$; then $u_\varepsilon \to u_0$ in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$-weak Σ if and only if $u_{\varepsilon,\Omega} \to u_{0,\Omega}$ in $L^p(\Omega)$-weak Σ for any bounded open set $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. The same holds for the strong Σ -convergence.

3 | PRELIMINARY RESULTS

We keep using the same notation as in the previous sections. We assume throughout this section that the function $\boldsymbol{B}_1$ satisfies the following assumption:

$$\boldsymbol{B}_1 \in \left[B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})\right]^3. \tag{3.1}$$

3.1 | The average operator along the characteristic flow

On $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y}))$, we consider the unbounded operator P defined by

$$P\tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_y u + (v \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_v u, \quad \tilde{u} = u + \mathcal{N}, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^3_v; B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y})),$$

where the first equality above holds in the weak sense in $L^2(\mathbb{R}^3_v; B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y}))$. The domain of P is

$$D(P) = \{\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})) \,:\, P\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))\}.$$

We recall that $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ is equipped with the norm

$$\|u + \mathcal{N}\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} M\left(|u(\cdot,\cdot,v)|^2\right) dv\right)^{\frac{1}{2}}.$$

The linear operator P is well defined; indeed, if $\tilde{u} = \tilde{w}$ then $u - w \in \mathcal{N}$ and, for each $\phi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^3_v) \otimes A^\infty$,

$$\begin{aligned}\langle P(\tilde{u} - \tilde{w}), \phi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^3} M\left((u - w)\left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_y \phi + (v \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_v \phi\right]\right) dv \\ &= 0\end{aligned}$$

since $M(fg) = 0$ for $f \in \mathcal{N}$ and $g \in \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})$ (this follows easily from the inequality $|M(fg)| \leq \|f\|_2\|g\|_2 = 0$). So $P\tilde{u} = P\tilde{w}$.

We denote by $(\mathcal{T}, Y, V) = (\mathcal{T}, Y, V)(s; \tau, y, v)$ the characteristics of the first order differential operator P:

$$\frac{d\mathcal{T}}{ds} = 1, \frac{dY}{ds} = V(s), \frac{dV}{ds} = V(s) \times \boldsymbol{B}_1(\mathcal{T}(s), Y(s)), \tag{3.2}$$

with the initial conditions

$$\mathcal{T}(0; \tau, y, v) = \tau, \;\; Y(0; \tau, y, v) = y, \;\; V(0; \tau, y, v) = v. \tag{3.3}$$

Systems (3.2) and (3.3) does not always possess a solution. As an illustration (see Remark 5.1), if in Section 5.3 we assume that the magnetic fields $\boldsymbol{B}_0$ and $\boldsymbol{B}_1$ depend also on the variable $y = x/\varepsilon$, then it is a fact that the above system will not possess a solution. In the sequel, we will always assume that its solution exists. It is then easy to see that it has the form

$$\begin{cases} \mathcal{T}(s; \tau, y, v) = s + \tau, Y(s; \tau, y, v) = y + \int_0^s V(\xi; \tau, y, v) d\xi \\ \dfrac{dV}{ds} = V(s) \times \boldsymbol{B}_1(s + \tau, y + \int_0^s V(\xi; \tau, y, v) d\xi), \quad V(0; \tau, y, v) = v. \end{cases} \tag{3.4}$$

Following Bostan,[4, section 3] we introduce the *average operator* $\langle\cdot\rangle$ along the characteristic flow (3.4): for $\tilde{u} = u + \mathcal{N} \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, we set

$$\langle\tilde{u}\rangle = \widetilde{\langle u\rangle} \equiv \langle u\rangle + \mathcal{N}, \tag{3.5}$$

where

$$\langle u\rangle(\tau, y, v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R u(\mathcal{T}, Y, V)(s; \tau, y, v) ds \quad \text{for} \quad u \in L^2(\mathbb{R}^3_v; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})), \tag{3.6}$$

the above limit being taken strongly in $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$. Then $\langle\cdot\rangle$ is well defined on $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$. Indeed, the flow (3.4) generates an ergodic dynamical system (3.2) defined on the phase space $\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^3_y \times \mathbb{R}^3_v$. Moreover, for any $u \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, it holds that

$$\left\|R^{-1} \int_0^R u(s + \tau, Y(s; \tau, y, v), V(s; \tau, y, v)) ds\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))}. \tag{3.7}$$

So we can expect compactness properties for the averages

$$\left\{ R^{-1} \int_0^R u(s+\tau, Y(s;\tau,y,v), V(s;\tau,y,v))ds + \mathcal{N} \,:\, R>0 \right\}, \tag{3.8}$$

along the flow $(\mathcal{T}, Y, V)$. The von Neumann's ergodic theorem[16, p57] yields the following: for any $u \in L^2(\mathbb{R}^3_v; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, the sequence (3.8) weakly converges in $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ as $R \to \infty$, towards some function $w \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, which we denote by $\langle \tilde{u} \rangle$. From the definition (3.6) and the inequality (3.7), it is easy to see that $\langle \tilde{u} \rangle = \widetilde{\langle u \rangle} \equiv \langle u \rangle + \mathcal{N}$. But as shown in Reed and Simon,[16, theorem II.11] the convergence of the sequence (3.8) is strong. Finally, if $\langle \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{w} \rangle$, then $u - w \in \mathcal{N}$, and thanks to (3.7),

$$\left\| \langle \widetilde{u-w} \rangle \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))} \leq \|u-w\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))} = 0.$$

This yields $\langle \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{w} \rangle$. Hence, $\tilde{u} \mapsto \langle \tilde{u} \rangle$ is well defined from $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ into itself.

In what follows, we denote by $(\mathcal{T}(s), Y(s), V(s))$ the vector-function

$$(\tau, y, v) \mapsto (\mathcal{T}(s;\tau,y,v), Y(s;\tau,y,v), V(s;\tau,y,v)).$$

Proposition 3.1. *The mapping $\langle \cdot \rangle : L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})) \to L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ is linear continuous and coincides with the orthogonal projection on the elements of $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, which are invariant under $(\mathcal{T}(s), Y(s), V(s))$:*

$$\tilde{u} \circ (\mathcal{T}(s), Y(s), V(s)) = \tilde{u} \qquad \forall s \in \mathbb{R},$$

that is the functions in $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, which are constant along the flow $(\mathcal{T}, Y, V)$.

Proof. The continuity of $\langle \cdot \rangle$ follows from (3.7): take the $\lim_{R\to\infty}$ of both sides. It remains to show that $\langle \cdot \rangle$ is the orthogonal projection on the kernel of P. Let

$$S = \{\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})) \,:\, P\tilde{u} = 0 \quad \text{in the sense of distributions in } \mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y} \times \mathbb{R}^3_v\} \equiv \ker P. \tag{3.9}$$

We denote by $\mathcal{P}$ the L^2 projection operator from $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ into S. The ergodic theorem (see, eg, Sinai[17]) asserts that for $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$,

$$\lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R u(\mathcal{T}, Y, V)(s;\tau,y,v)ds = (\mathcal{P}\tilde{u})(\tau,y,v), \text{ for a.e. } (\tau,y,v) \in \mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y} \times \mathbb{R}^3_v. \tag{3.10}$$

Moreover,

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} M(\tilde{u}\tilde{w})dv = \int_{\mathbb{R}^3_v} M(\tilde{w}\mathcal{P}\tilde{u})dv \quad \text{for } \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})) \quad \text{and} \quad \tilde{w} \in S. \tag{3.11}$$

It follows readily from (3.10) and (3.11) that $\langle \cdot \rangle$ coincides with $\mathcal{P}$ on S. However, it is easily seen that S consists of elements in $L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$, which are invariant under the flow $(\mathcal{T}(s), Y(s), V(s))$. It is also a fact (see Weinan[18], p308) that

$$\mathcal{P}(\tilde{u}\tilde{w}) = \tilde{u}\mathcal{P}(\widetilde{w}), \; u \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3_v; A) \cap S \quad \text{and} \quad w \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})), \tag{3.12}$$

where $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3_v; A)$ stands for the space of continuous functions with compact support defined on $\mathbb{R}^3_v$ with value in A. □

Remark 3.1. It is important to note that the average operator does not commutate in general with the derivatives with respect to v. Indeed, the function $|v|^2/2$ satisfies the constraint equation (3.14), but not $\partial(|v|^2/2)/\partial v_1 = v_1$, so that

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{|v|^2}{2}\right)\right\rangle \neq \frac{\partial}{\partial v_1}\left\langle \frac{|v|^2}{2} \right\rangle = v_1,$$

otherwise, v_1 would be constant along the vector field in the constraint (3.14).

3.2 Equivalence between the duality in the sense of distributions and the duality defined by the mean value

The next result deals with an equivalence between the weak formulation in the usual distributional sense, and the weak formulation with respect to the duality pairings in $L^2(\mathbb{R}^3_v; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$.

Theorem 3.1. *Let $f \in L^2(\mathbb{R}^3_v; B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y}))$ be such that*

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} M\left(f\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + v\cdot\nabla_y\psi + (v\times \boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\psi\right)\right)dv = 0 \tag{3.13}$$

for all $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_v)\otimes A^\infty$. Then,

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + v\cdot\nabla_y f + (v\times \boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v f = 0 \quad in \quad \mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v, \tag{3.14}$$

that is,

$$\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + v\cdot\nabla_y\varphi + (v\times \boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\varphi\right)dyd\tau dv = 0 \tag{3.15}$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_v)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$. Conversely, if (3.14) holds true, then so is (3.13).

Proof.

1. We first show that (3.13) implies (3.14). To that end, let $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$ and $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_v)$ be fixed. Let $\psi \in A^\infty$. We define $\theta * \psi$ in a classical way: $(\theta * \psi)(\tau, y) = \int_{\mathbb{R}^4}\theta(s,\xi)\psi(\tau - s, y-\xi)dsd\xi$ for $(\tau, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Observing that $\theta * \psi \in A^\infty$ (see the proof of Woukeng[19, prop. 2.3]) with $\theta * \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}(\theta*\psi)\in A^\infty$ and $\theta * \nabla_y\psi = \nabla_y(\theta*\psi)\in A^\infty$, we have (with test function $(\theta*\psi)\otimes\phi$ in 3.13)

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} M\left(f\left[\left(\theta * \frac{\partial\psi}{\partial\tau} + v\cdot(\theta*\nabla_y\psi)\right)\phi + (\theta*\psi)(v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\phi\right]\right)dv = 0.$$

But

$$M\left(f\left(\theta*\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + v\cdot(\theta*\nabla_y\psi)\right)\phi\right) = M\left((\tilde\theta * f)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + v\cdot\nabla_y\psi\right)\phi\right),$$

where $\tilde\theta(\tau,y) = \theta(-\tau,-y)$. Also, if we let $\mathbf{g} = f(v\times\boldsymbol{B}_1)$ (which belongs to $B^2_A(\mathbb{R}^4_{\tau,y})^3$ for each $v\in\mathbb{R}^3$), then

$$\begin{aligned} M(f(\theta*\psi)(v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\phi) &= M((\theta*\psi)\mathbf{g}\cdot\nabla_v\phi) \\ &= M(\psi(\tilde\theta*\mathbf{g})\cdot\nabla_v\phi). \end{aligned}$$

So set $f_\theta = \tilde\theta * f$ and $\mathbf{g}_\theta = \tilde\theta*\mathbf{g}$. Then, $f_\theta\in A^\infty$ and $\mathbf{g}_\theta\in(A^\infty)^3$ with

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} M\left(f_\theta\phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + v\cdot\nabla_y\psi\right) + (\mathbf{g}_\theta\cdot\nabla_v\phi)\psi\right)dv = 0, \tag{3.16}$$

or equivalently, using the integral representation of the mean value (see 2.1),

$$\int_{\mathbb{R}^3_v\times\Delta(A)}\left(\hat f_\theta\phi\left(\widehat{\frac{\partial\psi}{\partial\tau}} + v\cdot\widehat{\nabla_y\psi}\right) + (\hat{\mathbf{g}}_\theta\cdot\nabla_v\phi)\hat\psi\right)dvd\beta = 0$$

where $\hat{\cdot} = \mathcal{G}(\cdot)$ stands for the Gelfand transformation on A (see Remark 2.1). Since ψ and ϕ are arbitrarily chosen, it follows that

$$\widehat{\frac{\partial\psi}{\partial\tau}} + v\cdot\widehat{\nabla_y\psi} - div_v\hat{\mathbf{g}}_\theta = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_v\times\Delta(A). \tag{3.17}$$

Recalling that $f_\theta \in A^\infty$ and $\mathbf{g}_\theta \in (A^\infty)^3$, we may compute each term in (3.17) separately (with respect to $\delta_{(\tau,y)} \in \Delta(A)$, where $\delta_{(\tau,y)}$ is the Dirac measure at (τ, y)) to get

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_y \psi - div_v \mathbf{g}_\theta = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_v \times \mathbb{R}^4_{\tau,y}. \tag{3.18}$$

Indeed, let us explain how to obtain the term $\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$. We have that

$$\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}}(\delta_{(\tau,y)}) = \left\langle \delta_{(\tau,y)}, \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\rangle = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}(\tau, y).$$

We repeat the same process to get the other terms of the left-hand side of (3.18).

Multiplying (3.18) by $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_v) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$ and integrating over $\mathbb{R}^3_v \times \mathbb{R}^4_{\tau,y}$, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} \left(f_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + f_\theta (v \cdot \nabla_y \varphi) + \mathbf{g}_\theta \cdot \nabla_v \varphi \right) d\tau dy dv = 0.$$

But

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} f_\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_y \varphi \right) d\tau dy dv = \\
&= \int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} \left(\int_{\mathbb{R}^4_{s,\xi}} \theta(s,\xi) f(\tau+s, y+\xi, v) ds d\xi \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_y \varphi \right)(\tau, y, v) d\tau dy dv
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} \mathbf{g}_\theta \cdot \nabla_v \varphi d\tau dy dv = \\
&= \int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} (\widetilde{\theta} * (f(v \times \boldsymbol{B}_1))) \cdot \nabla_v \varphi d\tau dy dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} \left(\int_{\mathbb{R}^4_{s,\xi}} \theta(s,\xi) [f(\tau+s, y+\xi, v)(v \times \boldsymbol{B}_1(\tau+s, y+\xi))] \cdot \nabla_v \varphi ds d\xi \right) d\tau dy dv.
\end{aligned}$$

This yields, using Fubini's theorem,

$$\int_{\mathbb{R}^4_{s,\xi}} \theta(s,\xi) \left[\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} f(\tau+s, y+\xi, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_y \varphi + (v \times \boldsymbol{B}_1(\tau+s, y+\xi)) \cdot \nabla_v \varphi \right) d\tau dy dv \right] ds d\xi = 0. \tag{3.19}$$

We infer from the arbitrariness of θ in (3.19) that

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} f(\tau+s, y+\xi, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_y \varphi + (v \times \boldsymbol{B}_1(\tau+s, y+\xi)) \cdot \nabla_v \varphi \right) d\tau dy dv = 0 \\
&\text{for a.e. } (s,\xi) \in \mathbb{R}^4.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Since (3.20) holds true for a.e. $(s, \xi) \in \mathbb{R}^4$, the set of such (s, ξ) is obviously dense in $\mathbb{R}^4$. This yields at once that (3.20) holds true for all $(s, \xi) \in \mathbb{R}^4$. Indeed, to check this it suffices to verify it only for $(s, \xi) = (0, 0)$.

So let $\mathbb{R}^4 \ni (s_n, \xi_n) \to (0, 0)$ in $\mathbb{R}^4$ as $n \to \infty$, with (s_n, ξ_n) satisfying (3.20). We write (3.20) with (s_n, ξ_n) and make the change of variables $(\tau, y) \mapsto (\tau + s_n, y + \xi_n)$. It holds that

$$\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} f \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\tau - s_n, y - \xi_n, v) + v \cdot \nabla_y \varphi(\tau - s_n, y - \xi_n, v) + (v \times \boldsymbol{B}_1(\tau, y)) \cdot \nabla_v \varphi(\tau - s_n, y - \xi_n, v) \right] d\tau dy dv = 0. \tag{3.21}$$

Using the Lebesgue dominated convergence theorem, we are led to, as $n \to \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v} f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + v\cdot\nabla_y\varphi + (v\times \boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\varphi\right) d\tau dy dv = 0$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_v)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$.

2. Conversely, let us now assume that (3.14) holds, and let $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4_{\tau,y})$ and $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_v)\otimes A^\infty$. For $\varepsilon > 0$ be arbitrarily fixed, define $\psi(\tau,y,v) = \varphi(\varepsilon\tau,\varepsilon y)\phi(\tau,y,v)$ for $(\tau,y,v)\in\mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v$. Choosing ψ as test function in the variational form of (3.14), we get

$$\int_{\mathbb{R}^7} f(\varepsilon\phi\tfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot) + \varphi(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot)\tfrac{\partial\phi}{\partial\tau} + v\cdot[\varepsilon\phi\nabla_y\varphi(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot) + \varphi(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot)\nabla_y\phi] + (v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot(\varphi(\varepsilon\cdot,\varepsilon\cdot)\nabla_v\phi))d\tau dy dv = 0.$$

Making the change of variables $t = \varepsilon\tau$ and $x = \varepsilon y$, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^7} f^\varepsilon\left(\varepsilon\phi^\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varphi\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^\varepsilon + v\cdot\left[\varepsilon\phi^\varepsilon\nabla_x\varphi + \varphi(\nabla_y\phi)^\varepsilon\right] + (v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\varphi(\nabla_v\phi)^\varepsilon\right) dt dx dv = 0,$$

where $w^\varepsilon(t,x,v) = w(t/\varepsilon, x/\varepsilon, v)$. Letting $\varepsilon\to 0$, one obtains

$$\int_{\mathbb{R}^7} M\left(f\left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + v\cdot\nabla_y\phi + (v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\phi\right]\right)\varphi dt dx dv = 0.$$

Since the last equality above holds for any arbitrary φ, we infer that

$$\int_{\mathbb{R}^3} M\left(f\left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + v\cdot\nabla_y\phi + (v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\phi\right]\right) dv = 0 \qquad \forall\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_v)\otimes A^\infty,$$

which amounts to (3.13). This completes the proof. □

4 | HOMOGENIZATION RESULTS

We recall that $F = (\varepsilon_n)_n$ denotes any ordinary sequence of positive real numbers satisfying $\varepsilon_n \to 0$ when $n\to\infty$. We denote the generic element of F by ε such that "$\varepsilon\to 0$" amounts to "$\varepsilon_n\to 0$ when $n\to\infty$."

We assume that the electromagnetic field in (1.1) and (1.2) is highly oscillating and is given by the relation

$$\boldsymbol{E}^\varepsilon(t,x) = \boldsymbol{E}\left(\frac{t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad \boldsymbol{B}^\varepsilon(t,x) = \boldsymbol{B}_0\left(\frac{t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}_1\left(\frac{t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right)\quad \text{for}\quad (t,x)\in\mathbb{R}^3_T,\quad \varepsilon>0,$$

where the functions $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{B}_i$ satisfy the following assumption:

$$\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}_i \in \left[B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})\right]^3,\quad i=0,1. \tag{4.1}$$

Under Assumption (4.1), the following homogenization result holds.

Theorem 4.1. *Let A be an algebra with mean value on $\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}$. For each $\varepsilon\in F$, let f_ε be the unique solution to (1.1) and (1.2). Then the sequence $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in F}$ converges in $L^2(\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3_v)$-weak Σ towards $f_0+\mathcal{N}$ with $\mathcal{N} = \{u\in B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}) : M(|u|^2) = 0\}$, where $f_0\in L^2(\mathbb{R}^3_T; L^2(\mathbb{R}^3_v; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))\cap\ker P)$ is the unique solution to the problem*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_0}{\partial t} + \langle v\rangle\cdot\nabla_x f_0 + \langle(\boldsymbol{E} + v\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla_v f_0\rangle = 0 \quad in \quad \mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3_v\times\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y} \\ f_0(0,x,\tau,y,v) = f^0(x,{}^\perp V(0;\tau,y,v)). \end{cases} \tag{4.2}$$

Proof. Appealing to Theorem 2.1, we infer from (1.3) the existence of a subsequence F' of F and of a function $f_0 \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3_x;L^2(\mathbb{R}^3_v;B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))))$ such that, as $F' \ni \varepsilon \to 0$,

$$f_\varepsilon \to f_0 + \mathcal{N} \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3) \text{ -weak } \Sigma. \tag{4.3}$$

We recall that if $u \in \mathcal{N}$, then

$$M(uv) = 0 \quad \forall v \in B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}). \tag{4.4}$$

Now, dealing with the electric field $\boldsymbol{E}^\varepsilon$, since $\boldsymbol{E} \in B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})^3$, we deduce from Nguetseng[13, example 4.1] that

$$\boldsymbol{E}^\varepsilon \to \boldsymbol{E} + \mathcal{N} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^3_T)^3 \text{ -weak } \Sigma.$$

Hence, using $\boldsymbol{E}$ as a test function in the above convergence result (we recall that $\boldsymbol{E} \in (B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))^3$), we obtain the strong convergence result:

$$\boldsymbol{E}^\varepsilon \to \boldsymbol{E} + \mathcal{N} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^3_T)^3 \text{ -strong } \Sigma. \tag{4.5}$$

By a similar argument, we have

$$\boldsymbol{B}^\varepsilon_i \to \boldsymbol{B}_i + \mathcal{N} \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^3_T)^3 \text{ -strong } \Sigma, i = 0,1. \tag{4.6}$$

Next, we consider the test function $\psi^\varepsilon(t,x,v) = \psi\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon},v\right)$ for all $(t,x,v) \in \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3$, where $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3) \otimes A^\infty$. Then, $\psi^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3)$ and multiplying (1.1) by ψ^ε, by an integration by parts using the fact that $\nabla_x \cdot v = 0$ and $\nabla_v \cdot (\boldsymbol{E}^\varepsilon + v \times \boldsymbol{B}^\varepsilon) = 0$, we obtain the following equation:

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^\varepsilon + v\cdot(\nabla_x\psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} v\cdot(\nabla_y\psi)^\varepsilon\right] dtdxdv \\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon[(\boldsymbol{E}^\varepsilon + v \times \boldsymbol{B}^\varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon} v \times \boldsymbol{B}^\varepsilon_1)\cdot(\nabla_v\psi)^\varepsilon] dtdxdv = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Multiplying (4.7) by ε, then passing to the limit in each term of the resulting equation when $F' \ni \varepsilon \to 0$ (using Theorem 2.2 for the first term and Corollary 2.1 for the second one), we obtain

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left[\varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^\varepsilon + \varepsilon(v\cdot(\nabla_x\psi)^\varepsilon) + v\cdot(\nabla_y\psi)^\varepsilon\right] dtdxdv \\ &\to \int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M\left(f_0\left[\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + v\cdot\nabla_y\psi\right]\right) dtdxdv \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon[(\varepsilon\boldsymbol{E}^\varepsilon + \varepsilon(v\times\boldsymbol{B}^\varepsilon_0) + v\times\boldsymbol{B}^\varepsilon_1)\cdot(\nabla_v\psi)^\varepsilon] dtdxdv \\ &\to \int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M(f_0[(v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\psi]) dtdxdv, \end{aligned}$$

and hence,

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M\left(f_0\left[\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + v\cdot\nabla_y\psi + (v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\psi\right]\right) dtdxdv = 0. \tag{4.8}$$

Choosing in (4.8) $\psi(t,x,\tau,y,v) = \varphi(t,x)\phi(\tau,y,v)$ where $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_T)$ and $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3_v) \otimes A^\infty$, we get from the arbitrariness of φ,

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} M\left(f_0(t,x,\cdot)\left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + v\cdot\nabla_y\phi + (v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\phi\right]\right) dv = 0. \tag{4.9}$$

Let $f \equiv f_0(t, x, \cdot)$. Then in view of Theorem 3.1, (4.9) yields

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_y f + (v \times \boldsymbol{B}_1) \cdot \nabla_v f = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^4_{\tau,y} \times \mathbb{R}^3_v, \tag{4.10}$$

which means that $f \in L^2(\mathbb{R}^3_v; B^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))$ solves (4.10), and hence, $f_0(t, x, \cdot,) \in \ker P$ for almost all $(t, x) \in \mathbb{R}^3_T$. Considering the same weak formulation (4.7), but this time with $\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^3_T) \otimes [(C^\infty_0(\mathbb{R}^3_v) \otimes A^\infty) \cap \ker P]$, one gets

$$\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^\varepsilon + v \cdot (\nabla_x \psi)^\varepsilon + (\boldsymbol{E}^\varepsilon + v \times \boldsymbol{B}^\varepsilon_0) \cdot (\nabla_v \psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(P\psi)^\varepsilon \right] dtdxdv = 0.$$

Letting $F' \ni \varepsilon \to 0$ and using the fact that $\psi \in \ker P$, we have by sigma-convergence,

$$\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M \left(f_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \psi + (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v \psi \right] \right) dtdxdv = 0. \tag{4.11}$$

Since $f_0(t, x, \cdot) \in \ker P$ for a.e. $(t, x) \in \mathbb{R}^3_T$, we appeal to (3.11) to rewrite (4.11) as

$$\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M \left(f_0 \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \psi + (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v \psi \right\rangle \right) dtdxdv = 0,$$

or equivalently (using the linearity of $\langle \cdot \rangle$)

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M \left(f_0 \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle + \langle v \cdot \nabla_x \psi \rangle + \langle (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v \psi \rangle \right) dtdxdv = 0. \tag{4.12}$$

Since $\langle \cdot \rangle$ commutates with the translations along the flows (see Bostan[4], prop. 4.2) and thanks to Proposition 3.1, it commutates with any derivative with respect to t and x, so that

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi \rangle = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{(we recall that} \quad \psi \in \ker \quad P).$$

By repeating the same argument, we obtain

$$\langle v \cdot \nabla_x \psi \rangle = \langle v \rangle \cdot \langle \nabla_x \psi \rangle = \langle v \rangle \cdot \nabla_x \psi.$$

Since the average operator does not commutate in general with the derivatives with respect to v (see Remark 3.1), we can not expect to have in general $\langle \nabla_v \psi \rangle = \nabla_v \langle \psi \rangle$. Therefore, (4.12) rewrites

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_v} M \left(f_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \langle v \rangle \cdot \nabla_x \psi + \langle (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v \psi \rangle \right] \right) dxdtdv = 0,$$

which formally is equivalent (see Theorem 3.1) to

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \langle v \rangle \cdot \nabla_x f_0 + \langle (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v f_0 \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_v \times \mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}. \tag{4.13}$$

We may give a precise meaning to $\langle v \rangle$. Indeed,

$$\begin{aligned} \langle v \rangle (\tau, y, v) &= \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R V(0; s + \tau, Y(s; \tau, y, v), V(s; \tau, y, v)) ds \\ &= \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, y, v) ds, \end{aligned}$$

so that

$$\langle v\rangle(\tau, y, v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R V(s;\tau,y,v)ds. \tag{4.14}$$

We also have

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{E}\rangle(\tau, y, v) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R \boldsymbol{E}(\mathcal{T}, Y)(s;\tau,y,v)ds\\ &= \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R \boldsymbol{E}(s+\tau, Y(s;\tau,y,v))ds.\end{aligned}$$

Let us now pay attention to the initial condition satisfied by f_0. Let $\eta\in C^1([0,T])$ with $\eta(T)=0$, and let $\phi\in[C_0^\infty(\mathbb{R}_x^3\times\mathbb{R}_v^3)\otimes A^\infty]\cap\ker P$. Set $\psi^\epsilon(t,x,v)=\eta(t)\phi(x,t/\epsilon,x/\epsilon,v)$ $((t,x,v)\in\mathbb{R}_T^3\times\mathbb{R}_v^3)$. Then, using the fact that $P\widetilde{\phi}=0$, one gets

$$\begin{aligned}&[c]l-\eta(0)\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}}\phi\left(x,0,\frac{x}{\varepsilon},v\right)f^0(x,v)dxdv\\ &-\int_{\mathbb{R}^7_{T,v}} f_\varepsilon\left[\eta'\phi^\varepsilon+\eta\left(v\cdot(\nabla_x\phi)^\varepsilon+(\boldsymbol{E}^\varepsilon+v\times\boldsymbol{B}_0^\varepsilon\right)\cdot(\nabla_v\phi)^\varepsilon\right]dtdxdv=0,\end{aligned}$$

where $\mathbb{R}^6_{x,v}=\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v$ and $\mathbb{R}^7_{T,v}=\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3_v$. Letting $F'\ni\varepsilon\to0$, we obtain

$$\begin{aligned}&-\eta(0)\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}} f^0(x,v)M(\phi(x,0,\cdot,v))dxdv\\ &-\int_{\mathbb{R}^7_{T,v}} M(f_0\left[\eta'\phi+\eta\left(v\cdot\nabla_x\phi+(\boldsymbol{E}+v\times\boldsymbol{B}_0\right)\cdot\nabla_v\phi\right]dtdxdv=0.\end{aligned} \tag{4.15}$$

At this level, we deal only with the first term of the left-hand side in (4.15). Let us first observe that if we denote by Φ^s_τ the solution of (3.4) taking at time $s=\tau$, the value (y,v), we have obviously the equality: for all $s,\tau\in\mathbb{R}$,

$$(Y(s;\tau,Y(\tau;s,y,v),V(\tau;s,y,v)),V(s;\tau,Y(\tau;s,y,v),V(\tau;s,y,v)))=(y,v),$$

so that, if we consider the mapping $\Phi^s_\tau:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ defined by

$$\Phi^s_\tau(y,v)=(Y(s;\tau,y,v),V(s;\tau,y,v)),$$

it satisfies

$$\Phi^s_\tau(\Phi^\tau_s(y,v))=(y,v)\quad\forall(y,v)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3.$$

Hence, the mapping Φ^s_τ is invertible with inverse Φ^τ_s. We define Y^s_τ and V^s_τ in the same manner.

Since $\phi\in\ker P$, we have

$$\begin{aligned}\phi(x,0,y,v)&=\phi(x,s,Y(s;0,y,v),V(s;0,y,v))\\ &=\phi(x,s,\Phi^s_0(y,v))\quad\text{for all }\ s\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

and so

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}} f^0(x,v)M(\phi(x,0,\cdot,v))dxdv&=\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}} f^0M(\langle\phi\rangle)dxdv\\ &=\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}} f^0M\left(\lim_{R\to\infty}R^{-1}\int_0^R\phi(x,s,\Phi^s_0(y,v))ds\right)dxdv.\end{aligned}$$

Since ϕ is compactly supported with respect to x,v, we have

$$\begin{aligned}M(\langle\phi\rangle)&=\lim_{\rho\to\infty}|B_\rho|^{-1}\int_{B_\rho}\left(\lim_{R\to\infty}R^{-1}\int_0^R\phi(x,s,\Phi^s_0(y,v))ds\right)dy\\ &=\lim_{\rho\to\infty,R\to\infty}|B_\rho|^{-1}R^{-1}\int_{B_\rho}\int_0^R\phi(x,s,\Phi^s_0(y,v))dsdy.\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}} f^0(x,v)\left(\lim_{\rho\to\infty,R\to\infty}|B_\rho|^{-1}R^{-1}\int_{B_\rho}\int_0^R \phi(x,s,\Phi_0^s(y,v))dsdy\right)dxdv\\
&=\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}}\left(\lim_{\rho\to\infty,R\to\infty}|B_\rho|^{-1}R^{-1}\int_{B_\rho}\int_0^R \phi(x,s,\Phi_0^s(y,v))f^0(x,v)dsdy\right)dxdv\\
&=\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}}\left(\lim_{\rho\to\infty,R\to\infty}|B_\rho|^{-1}R^{-1}\int_{B_\rho}\int_0^R \phi(x,s,y,v)f^0(x,{}^{\perp}V_s^0(y,v))dsdy\right)dxdv\\
&=\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}}\left(\lim_{\rho\to\infty,R\to\infty}|B_\rho|^{-1}R^{-1}\int_{B_\rho}\int_0^R \phi(x,s,y,v)f^0(x,{}^{\perp}V(0;s,y,v))dsdy\right)dxdv\\
&=\int_{\mathbb{R}^6_{x,v}} M(\phi(x,\cdot,\cdot,v)f^0(x,{}^{\perp}V(0,\cdot,\cdot,v))dxdv.
\end{aligned}$$

Let us give the precise meaning of ${}^{\perp}V$. In order to compute ${}^{\perp}V(0;s,y,v)$, we first compute $V(s;0,y,v)$ and then we permute in the resulting equality, the position of s and 0. This being so, since f_0 satisfies (4.13) and thanks to Theorem 3.1, we are led at once at

$$f_0(0,x,s,y,v)=f^0(x,{}^{\perp}V(0;s,y,v)). \tag{4.16}$$

Therefore, putting together (4.13) and (4.16), we obtain (4.2).

It remains to check uniqueness of $f_0+\mathcal{N}$. Assume that $f^0\equiv 0$. Let us show that $f_0(t,x,\cdot,v)\in\mathcal{N}$. For that, we use the classical Holmgren method.

For any given $T>0$, let ϕ be a smooth function with compact support (in t,x,v) satisfying

$$\begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial\tau}+v\cdot\nabla_y\phi+(v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\phi=0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^4_{\tau,y}\times\mathbb{R}^3_v\\ \phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_T)\otimes\left[(C_0^\infty(\mathbb{R}^3_v)\otimes A^\infty)\cap\ker P\right],\end{cases} \tag{4.17}$$

and consider the equation

$$\begin{cases}\frac{\partial\psi}{\partial t}+v\cdot\nabla_x\psi+(\boldsymbol{E}+v\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla_v\psi=\phi, \quad 0\le t\le T\\ \psi(T,x,\tau,y,v)=0.\end{cases} \tag{4.18}$$

Then (4.18) possesses a unique classical solution ψ, which also has compact support in (t,x,v). Furthermore, let $\Phi=\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+v\cdot\nabla_y\psi+(v\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\nabla_v\psi$. Then, $\boldsymbol{\Phi}$ satisfies

$$\begin{cases}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+v\cdot\nabla_x\Phi+(\boldsymbol{E}+v\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla_v\Phi=0, \quad 0\le t\le T\\ \Phi(T,x,\tau,y,v)=0.\end{cases} \tag{4.19}$$

The uniqueness of the solution of (4.18) yields $\boldsymbol{\Phi}\equiv 0$, ie, ψ satisfies (4.17). Using ψ as test function in (4.2), we get

$$\int_{\mathbb{R}^3_v} M(\phi f_0)dtdxdv=0.$$

Since this is true for any smooth function ϕ satisfying (4.17), and f_0 satisfies (4.10), we have $M(|f_0|^2)=0$ (by considering a sequence $(\phi_n)_n$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^3_T)\otimes\left[(C_0^\infty(\mathbb{R}^3_v)\otimes A^\infty)\cap\ker P\right]$ satisfying $\phi_n\to f_0$ in $L^2(\mathbb{R}^3_T\times\mathbb{R}^3_v;B_A^2(\mathbb{R}^4_{\tau,y})))$. This shows that $f_0\in\mathcal{N}$, hence the uniqueness. This concludes the proof. □

Remark 4.1. For the homogenized equation (4.2) to be written under the conservative form, we need that the equality

$$\langle(\boldsymbol{E}+v\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla_v f_0\rangle=\langle(\boldsymbol{E}+v\times\boldsymbol{B}_0)\rangle\cdot\nabla_v f_0 \tag{4.20}$$

holds true. This is not true in general. However, we present in Section 5.2 below a special setting where (4.20) is true; see especially (5.6) therein.

5 | APPLICATIONS

In this section, we study some special cases of (1.1). We show in particular that we recover the results obtained in Bostan[4] and in Frénod and Sonnendrücker.[5, section 2]

5.1 | The magnetic field is not strong

In this case, $\boldsymbol{B}_1 = 0$. The corresponding operator P is defined by

$$P\tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + v \cdot \nabla_y u$$

with domain

$$D(P) = \{\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y})) \,:\, P\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_v; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}))\}.$$

Here, the characteristics $(\mathcal{T}, Y, V)$ are well defined by

$$\mathcal{T}(s; \tau, y, v) = s + \tau, \quad Y(s; \tau, y, v) = sv + y, \quad V(s; \tau, y, v) = v.$$

The average operator $\langle \cdot \rangle$ is therefore given by

$$\langle u \rangle (\tau, y, v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R u(s + \tau, sv + y, v) ds.$$

So we have

$$\begin{aligned}
\langle v \rangle (\tau, y, v) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, y, v) ds = v;\\
\langle \boldsymbol{E} \rangle (\tau, y, v) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(s + \tau, sv + y) ds;\\
\langle v \times \boldsymbol{B}_0 \rangle (\tau, y, v) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, y, v) \times \boldsymbol{B}_0(s + \tau, sv + y) ds\\
&= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R v \times \boldsymbol{B}_0(s + \tau, sv + y) ds\\
&= (v \times \langle \boldsymbol{B}_0 \rangle)(\tau, y, v).
\end{aligned}$$

In this context, Equation (4.13) reads as

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_0 + \langle (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v f_0 \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_v \times \mathbb{R}^{1+3}_{\tau,y}. \tag{5.1}$$

As in the previous section, f_0 will satisfy the following initial condition:

$$f_0(0, x, y, v) = f^0(x, v). \tag{5.2}$$

5.2 | Vlasov equation under fast oscillating magnetic field

We follow in this subsection the arguments of Bostan.[4, section 7] We assume that the oscillations are with respect to the time variable $\tau = t/\varepsilon$ only. Thus, the magnetic field has the form

$$\boldsymbol{B}^\varepsilon(t, x) = \theta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \boldsymbol{B}(x),$$

where $\theta \in A^1_\tau = \{u \in A_\tau \,:\, u' \in A_\tau\}$, A_τ being an algebra with mean value on $\mathbb{R}$. By Gauss's magnetic law ($div_x \boldsymbol{B} = 0$), there exists a potential vector $\mathbf{C}$ such that $\boldsymbol{B} = curl\mathbf{C}$ with $div_x \mathbf{C} = 0$. Thanks to the Faraday's law ($\partial_t \boldsymbol{B}^\varepsilon + curl\boldsymbol{E}^\varepsilon = 0$), the *curl* part of the electric field $\boldsymbol{E}^\varepsilon = \nabla_x \psi + curl\phi^\varepsilon$ is given by

$$curl\phi^\varepsilon(t, x) = -\frac{1}{\varepsilon} \theta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \mathbf{C}(x).$$

Hence, the Vlasov equation becomes

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon + (\boldsymbol{E} - \frac{1}{\varepsilon}(\theta')^\varepsilon \mathbf{C} + \theta^\varepsilon (v \times \boldsymbol{B})) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, \tag{5.3}$$

where we have set $\boldsymbol{E} = -\nabla_x \psi$.

In this case, the operator P is defined by

$$P\tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau} - \theta' \mathbf{C} \cdot \nabla_v u,$$

with domain

$$D(P) = \{\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_v \times \mathbb{R}^3_x; \mathcal{B}^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)) \,:\, P\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^3_v \times \mathbb{R}^3_x; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau))\}.$$

The characteristics associated to P are solutions of the following system of ordinary differential equations:

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = 0, \frac{d\mathcal{T}}{ds} = 1, \frac{dV}{ds} = -\theta'(\mathcal{T})\mathbf{C}(X) \\ X(0;\tau,x,v) = x, \mathcal{T}(0;\tau,x,v) = \tau, V(0;\tau,x,v) = v, \end{cases}$$

that is,

$$X(s;\tau,x,v) = x, \mathcal{T}(s;\tau,x,v) = s+\tau, V(s;\tau,x,v) = (\theta(\tau) - \theta(s+\tau))\mathbf{C}(x) + v. \tag{5.4}$$

The average operator along the characteristic flow (5.4) is therefore defined by

$$\langle u \rangle (\tau,x,v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R u(s+\tau, x, v + (\theta(\tau) - \theta(s+\tau))\mathbf{C}(x)) ds.$$

A simple change of variable $s \mapsto t = s + \tau$ yields

$$\langle u \rangle (\tau,x,v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_\tau^{R+\tau} u(t, x, v + (\theta(\tau) - \theta(t))\mathbf{C}(x)) ds. \tag{5.5}$$

Since for any $\psi \in \ker P$ we have $\frac{\partial \psi}{\partial v_i} \in \ker P$ (for $1 \leq i \leq 3$), it follows that $\left\langle \partial_{v_i} \psi \right\rangle = \partial_{v_i}\psi$. At this level, the homogenized equation will have a more explicit form as seen below. To this end, let us beforehand compute $\langle v \rangle$, $\langle \boldsymbol{E} \rangle$ and $\langle \theta(v \times \boldsymbol{B}) \rangle$. First, since $\boldsymbol{E}$ does not depend on the characteristics, we have $\langle \boldsymbol{E} \rangle = \boldsymbol{E}$. Next, using (5.5), we have

$$\begin{aligned} \langle v \rangle (\tau,x,v) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_\tau^{R+\tau} [v + (\theta(\tau) - \theta(t))\mathbf{C}(x)]\, dt \\ &= v + (\theta(\tau) - \langle \theta \rangle)\mathbf{C}(x) \\ &= v + (\theta(\tau) - \langle \theta \rangle)\mathbf{C}(x). \end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned} \langle \theta(v \times \boldsymbol{B}) \rangle (\tau,x,v) &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_\tau^{R+\tau} \theta(t)[(v + (\theta(\tau) - \theta(t))\mathbf{C}(x)) \times \boldsymbol{B}(x)] dt \\ &= \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_\tau^{R+\tau} [\theta(\tau)\theta(t) - \theta^2(t)](\mathbf{C}(x) \times \boldsymbol{B}(x)) dt \\ &\quad + \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_\tau^{R+\tau} \theta(t)(v \times \boldsymbol{B}(x)) dt \\ &= (\langle \theta \rangle \theta(\tau) - \left\langle \theta^2 \right\rangle)(\mathbf{C}(x) \times \boldsymbol{B}(x)) + \langle \theta \rangle (v \times \boldsymbol{B}(x)). \end{aligned}$$

In this case, $f_0 \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)))$ solves the following homogenized equation:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (v + (\theta(\tau) - \langle \theta \rangle)\mathbf{C}) \cdot \nabla_x f_0 + (\boldsymbol{E} + [(v \times \boldsymbol{B}) + \theta(\tau)(\mathbf{C} \times \boldsymbol{B})] \langle \theta \rangle - (\mathbf{C} \times \boldsymbol{B}) \left\langle \theta^2 \right\rangle) \cdot \nabla_v f_0 = 0, \tag{5.6}$$

with initial condition given by

$$f_0(0,x,\tau,v) = f^0(x, v + (\theta(\tau) - \theta(0))\mathbf{C}(x)). \tag{5.7}$$

Compared with the results in Bostan,[4, section 7] we have the same expression of the impulsion along the characteristics q, which is $q = v + \theta(\tau)\mathbf{C}(x)$. Let us note that in Bostan,[4] θ is a T-periodic function taken in $C^1_{per}(\mathbb{R}_\tau)$. Here, we consider a general setting where θ belongs to $A^1_\tau = \{u \in A_\tau : \partial u/\partial\tau \in A_\tau\}$, A_τ being an algebra with mean value on $\mathbb{R}$. This includes the special case of T-periodic functions of class C^1. It also includes the special of C^1-almost periodic functions, and others. Recalling the fact that for T-periodic functions u, the equality

$$\lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R u(\tau)d\tau = T^{-1}\int_0^T u(\tau)d\tau$$

holds, we infer readily that our result in this section, generalizes of the one in.[4, theorem 7.2]

5.3 | Homogenization of Vlasov equation with a strong external magnetic field

Our aim in this subsection is to generalize the results obtained in Frénod and Sonnendrücker.[5] For that, we consider the special case of (1.1) where the magnetic field $\boldsymbol{B}_1$ is equal to a constant vector $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, 0, 0)$, which is oriented towards the e_1-axis, (e_1, e_2, e_3) being the canonical basis of $\mathbb{R}^3$. We also assume that $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{B}_0$ are independent of the variable $y \in \mathbb{R}^3$, so that the only possible oscillations are with respect to $\tau = t/\varepsilon$. Thus, the operator P is defined by

$$P\tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial\tau} + (v\times\mathcal{M})\cdot\nabla_v u$$

with domain

$$D(P) = \left\{\tilde{u}\in L^2\left(\mathbb{R}^3_v; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)\right) : P\tilde{u}\in L^2\left(\mathbb{R}^3_v; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)\right)\right\}.$$

The characteristics $(\mathcal{T}, V)$ associated to the differential operator P are helicoid around the magnetic field $\mathcal{M}$ and are given by the following relations:

$$\mathcal{T}(s;\tau,v) = s+\tau \quad\text{and}\quad \frac{dV}{ds} = V(s)\times\mathcal{M} \quad\text{with}\quad V(0;\tau,v) = v.$$

We start with the general case where $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$ with $\mathcal{M}_i\in\mathbb{R}$. Therefore,

$$\dot{V} = V\times\mathcal{M} \equiv MV, \quad V(0;\tau,v) = v, \tag{5.8}$$

where the matrix $M\in M_3(\mathbb{R})$ with

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_3 & -\mathcal{M}_2 \\ -\mathcal{M}_3 & 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 & -\mathcal{M}_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

The solution of (5.8) is given by

$$V(s;\tau,v) = e^{sM}V(0;\tau,v) = e^{sM}v.$$

The operator $\langle\cdot\rangle$ is defined by

$$\langle u\rangle(\tau,v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R u(s+\tau, V(s;\tau,v))ds = \lim_{R\to\infty} R^{-1}\int_0^R u(s+\tau, e^{sM}v)ds.$$

The electromagnetic field $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}_0)$ is constrained as follows:

$$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}_0 \in (B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau)\cap L^\infty(\mathbb{R}_\tau))^3. \tag{5.10}$$

Following the same approach leading to (4.5) and (4.6), we obtain

$$\boldsymbol{E}^\varepsilon \to \boldsymbol{E} + \mathcal{N} \quad\text{in}\quad L^2(\mathbb{R}^3_T)^3\text{ -strong }\Sigma, \tag{5.11}$$

and

$$\boldsymbol{B}^\varepsilon_0 \to \boldsymbol{B}_0 + \mathcal{N} \quad\text{in}\quad L^2(\mathbb{R}^3_T)^3\text{ -strong }\Sigma, \tag{5.12}$$

where $\mathcal{N} = \{u\in B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau) : M_\tau(|u|^2) = 0\}$. (5.11) and (5.12) will be useful to obtain the limit problem (5.13).

Since the electromagnetic field $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}_0)$ is independent of the variable y, the weak Σ-convergence involved in the definition of (5.11) reads as follows: as $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3_T} \boldsymbol{E}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \cdot \Psi\left(t, x, \frac{t}{\varepsilon}\right) dtdx \to \int_{\mathbb{R}^3_T} M_\tau(\boldsymbol{E}(\cdot) \cdot \Psi(t, x, \cdot)) dtdx, \forall \Psi = (\psi_i)_{1 \leq i \leq 3} \in (L^2(\mathbb{R}^3_T; A_\tau))^3.$$

Replacing $\boldsymbol{E}$ by $\boldsymbol{B}_0$, this convergence also holds for (5.12).

With all this in mind, we consider the following test function ψ^ε defined by $\psi^\varepsilon(t, x, v) = \psi(t, x, \frac{t}{\varepsilon}, v)$, where $\psi \in (\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_v) \otimes A^\infty_\tau) \cap \ker P$. Multiplying the Vlasov equation by ψ^ε, then by an integration by parts, we obtain

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^\varepsilon + v \cdot (\nabla_x \psi)^\varepsilon + (\boldsymbol{E}^\varepsilon + v \times \boldsymbol{B}_0^\varepsilon) \cdot (\nabla_v \psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(P\psi)^\varepsilon\right] dtdxdv = 0.$$

Passing to the limit as $F' \ni \varepsilon \to 0$, using the fact that $\psi \in \ker P$ and (5.11) and (5.12), one gets

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M\left(f_0\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + v \cdot \nabla_x \psi + (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v \psi\right]\right) dtdxdv = 0.$$

Since $f_0 \in \ker P$, owing to (3.11) and thanks to Proposition 3.1, the above equation becomes

$$-\int_{\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3} M\left(f_0\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \langle v \rangle \cdot \nabla_x \psi + \langle (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v \psi \rangle\right]\right) dtdxdv = 0.$$

Thanks to Theorem 3.1, this equation is the variational formulation of the following:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \langle v \rangle \cdot \nabla_x f_0 + \langle (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v f_0 \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_v \times \mathbb{R}_\tau. \tag{5.13}$$

Let us give a meaning to $\langle v \rangle$. One has

$$\langle v \rangle (\tau, v) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, v) ds = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R e^{sM} v ds.$$

We also have

$$\langle \boldsymbol{E} \rangle (\tau, v) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(\mathcal{T})(s; \tau, v) ds = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(s + \tau) ds$$

and

$$\langle v \times \boldsymbol{B}_0 \rangle (\tau, v) = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, v) \times \boldsymbol{B}_0(s + \tau) ds = \lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_0^R (e^{sM} v) \times \boldsymbol{B}_0(s + \tau) ds.$$

Following the lines of the previous section, one can easily show that f_0 satisfies the following initial condition:

$$f_0(0, x, s, v) = f^0(x, {}^\perp V(0; s, v)) = f^0(x, e^{sM} v). \tag{5.14}$$

We therefore have the following homogenized result.

Theorem 5.1. *Assume that (5.10) holds. For each $\varepsilon \in F$, let f_ε be a solution to Vlasov equation. Then, up to a subsequence F' extracted from F, the sequence $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in F'}$ converges in $L^2(\mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_v)$-weak Σ towards $f_0 + \mathcal{N}$, with $\mathcal{N} = \{u \in B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}_\tau) : M_\tau(|u|^2) = 0\}$, where $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^3_T; L^2(\mathbb{R}^3_v; B^2_{A_\tau}(\mathbb{R}^1_\tau)) \cap \ker P)$ is a solution to problems (5.13) and (5.14).*

Remark 5.1. We cannot investigate the general case in which we consider the oscillations in the space variable $y = x/\varepsilon$. Indeed the determinant of the matrix M given by (5.9) is equal to 0. Thus, M is not invertible, which implies that the characteristic in Y does not exist. Therefore, in the case of strong and constant external magnetic field, the oscillations in the space variable are proscribed. This gives a suitable justification to the assumptions stated on the electromagnetic field at the introduction of this subsection.

Coming back to what was stated in the introduction of this subsection, we follow the lines of Frénod and Sonnendrücker.[5] If $\mathcal{M}$ is oriented in along the e_1-axis, then with no loss of generality, we can assume that $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, 0, 0)$. Therefore, the characteristics equation in V is equivalent to the following system:

$$\dot{V}_1 = 0; \dot{V}_2 = V_3\mathcal{M}_1; \dot{V}_3 = -V_2\mathcal{M}_1. \tag{5.15}$$

Hence, we have $V_1(s) = v_1$. Concerning the two other equations of (5.15), they can be rewritten as follows:

$$\dot{V}^* = CV^* \quad \text{with} \quad V^*(0) = (v_2, v_3),$$

where $V^* = (V_2, V_3)$ and $C \in M_2(\mathbb{R})$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ -\mathcal{M}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The solution of this equation is given by

$$V^*(s; \tau, v) = e^{sC}V^*(0; \tau, v).$$

Let us compute e^{sC} in this case. To this end, we set

$$C_s = sC = \begin{pmatrix} 0 & s\mathcal{M}_1 \\ -s\mathcal{M}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

We recall that

$$e^{C_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(C_s)^n.$$

Set $t = s\mathcal{M}_1$. For all $k \in \mathbb{N}$, we have

$$(C_s)^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k t^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k t^{2k} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad (C_s)^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k t^{2k+1} \\ (-1)^{k+1} t^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Hence,

$$\begin{aligned} e^{C_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(C_s)^n &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!}(-1)^k t^{2k} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k t^{2k+1} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k t^{2k+1} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!}(-1)^k t^{2k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

since the entire serial development of the cosine and sine functions (using Mac Laurin's formula) is given by the following: for all $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \\ \sin(x) &= \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Therefore, we are led to (with $t = s\mathcal{M}_1$)

$$e^{C_s} = \begin{pmatrix} \cos(s\mathcal{M}_1) & \sin(s\mathcal{M}_1) \\ -\sin(s\mathcal{M}_1) & \cos(s\mathcal{M}_1) \end{pmatrix},$$

and we have the following:

$$V_2(s; \tau, v) = v_2\cos(s\mathcal{M}_1) + v_3\sin(s\mathcal{M}_1) \quad ; \quad V_3(s; \tau, v) = -v_2\sin(s\mathcal{M}_1) + v_3\cos(s\mathcal{M}_1).$$

At the end, the characteristics will be

$$\mathcal{T}(s; \tau, v) = s + \tau; \;\; V(s; \tau, v) = (v_1, v_2\cos(s\mathcal{M}_1) + v_3\sin(s\mathcal{M}_1), -v_2\sin(s\mathcal{M}_1) + v_3\cos(s\mathcal{M}_1)).$$

The limit problem here will be

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \langle v \rangle \cdot \nabla_x f_0 + \langle (\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \nabla_v f_0 \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_T \times \mathbb{R}^3_v \times \mathbb{R}_\tau,$$

where

$$\langle v \rangle(\tau, v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R V(s)ds = (v_1, 0, 0) \quad \text{for} \quad v = (v_1, v_2, v_3).$$

Indeed, after some computations, the components of $\langle v \rangle$ are given by

$$\langle v_1 \rangle (\tau, v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R v_1 ds = v_1,$$

$$\langle v_2 \rangle (\tau, v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \mathcal{M}_1^{-1} [v_2 \sin(R\mathcal{M}_1) + v_3(1 - \cos(R\mathcal{M}_1))] = 0,$$

$$\langle v_3 \rangle (\tau, v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \mathcal{M}_1^{-1} [v_2(\cos(R\mathcal{M}_1) - 1) + v_3 \sin(R\mathcal{M}_1)] = 0.$$

We also have

$$\langle \boldsymbol{E} \rangle (\tau, v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(\mathcal{T})(s; \tau, v)ds = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R \boldsymbol{E}(s + \tau)ds,$$

and

$$\langle v \times \boldsymbol{B}_0 \rangle (\tau, v) = \lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_0^R V(s; \tau, v) \times \boldsymbol{B}_0(s + \tau)ds.$$

The initial condition satisfied by f_0 in this case is given by

$$f_0(0, x, s, v) = f^0(x, {}^\perp V(0; s, v)),$$

with $f^0(x, {}^\perp V(0; s, v)) = f^0(x, v_1, v_2 \cos(s\mathcal{M}_1) + v_3 \sin(s\mathcal{M}_1), -v_2 \sin(s\mathcal{M}_1) + v_3 \cos(s\mathcal{M}_1))$.

We realize here that our results are similar to the ones in Frénod and Sonnendrücker.[5] The main difference here comes from the fact that our structural hypothesis (5.10) is more general. This includes C^1-almost periodic functions, C^1-quasiperiodic functions and others. The C^1-periodic functions comes here as a special case. Therefore, we can conclude that our Theorem 5.1 generalize Frénod and Sonnendrücker[5, theorem 1.1] since it includes the periodic case as a particular one.

ACKNOWLEDGEMENT

This work does not have any conflicts of interest. The work has been completed while the third author was visiting the ICTP (International Centre for Theoretical Physics) Trieste in Italy. He acknowledges the support of the centre.

ORCID

Jean Louis Woukeng https://orcid.org/0000-0002-7903-7126

REFERENCES

1. Wollman S. An existence and uniqueness theorem for the Vlasov-Maxwell system. *Comm Pure Appl Math*. 1984;37:457-462.
2. Wollman S. Existence and uniqueness theory of the Vlasov equation. Technical report MF-100, Magneto-fluid Dynamics Division, Courant Institute New York University; 1982.
3. Hamdache K. Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations. *Jpn J Ind Appl Math*. 1998;15:51-74.
4. Bostan M. Transport of charged particles under fast oscillating magnetic fields. *SIAM J Math Anal*. 2012;44:1415-1447.
5. Frénod E, Sonnendrücker E. Homogenization of the Vlasov equation and of the Vlasov-Poisson system with a strong external magnetic field. *Asympt Anal*. 1998;18:193-213.
6. Frénod E, Hamdache K. Homogeneization of kinetic equations with oscillating potentials. *Proc Royal Soc Edinburgh*. 1996;126A:1247-1275.
7. Golse F, Saint-Raymond L. The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field. *J Math Pures Appl*. 1999;78:791-817.
8. Jiann-Sheng J, Chi-Kun L. Weak turbulence plasma induced by two-scale homogenization. *J Math Anal Appl*. 2014;410:585-596.

9. Casado Diaz J, Gayte I. The two-scale convergence method applied to generalized Besicovitch spaces. *Proc R Soc Lond A*. 2002;458:2925-2946.
10. Jikov VV, Kozlov SM, Oleinik OA. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Berlin: Springer-Verlag; 1994.
11. Woukeng JL. Homogenization in algebras with mean value and applications. *Banach J Math*. 2015;9:142-182.
12. Zhikov VV, Krivenko EV. Homogenization of singularly perturbed elliptic operators. *Matem Zametki*. 1983;33:571-582. (english transl.: Math. Notes 33 (1983) 294–300).
13. Nguetseng G. Homogenization structures and applications I. *Z Anal Anwen*. 2003;22:73-107.
14. Sango M, Svanstedt N, Woukeng JL. Generalized Besicovitch spaces and applications to deterministic homogenization. *Nonlin Anal TMA*. 2011;74:351-379.
15. Nguetseng G, Sango M, Woukeng JL. Reiterated ergodic algebras and applications. *Commun Math Phys*. 2010;300:835-876.
16. Reed M, Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics: Functionnal Analysis*, Vol. I. New York: Academic Press; 1980.
17. Sinai YG, ed. *Dynamical Systems*, Vol. III. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag; 1980.
18. Weinan E. Homogenization of linear and nonlinear transport equations. *Commun Pure and Applied Math*. 1992;XLV:301-326.
19. Woukeng JL. Homogenization of nonlinear degenerate non-monotone elliptic operators in domains perforated with tiny holes. *Acta Appl Math*. 2010;112:35-68.

How to cite this article: Kenne RB, Nguetseng G, Woukeng JL. Deterministic homogenization of Vlasov equations. *Math Meth Appl Sci*. 2019;1-21. https://doi.org/10.1002/mma.5953

Homogenization of linear Boltzmann equations in the context of algebras with mean value

P. Fouegap, R. Kenne Bogning, G. Nguetseng, D. Dongo & J. L. Woukeng

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik
Journal of Applied Mathematics and Physics / Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ISSN 0044-2275
Volume 71
Number 5

Z. Angew. Math. Phys. (2020) 71:1-22
DOI 10.1007/s00033-020-01391-9

Springer

Z. Angew. Math. Phys. (2020) 71:173

0044-2275/20/050001-22
published online September 30, 2020
https://doi.org/10.1007/s00033-020-01391-9

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP

Homogenization of linear Boltzmann equations in the context of algebras with mean value

P. Fouegap, R. Kenne Bogning, G. Nguetseng, D. Dongo and J. L. Woukeng

Abstract. The paper deals with the homogenization of linear Boltzmann equations by the means of the sigma-convergence method. Replacing the classical periodicity hypothesis on the coefficients of the collision operator by an abstract assumption covering a great variety of physical behaviours, we prove that the density of the particles converges to the solution of a drift-diffusion equation. We then illustrate this abstract setting by working out a few concrete homogenization problems such as the periodic one, the almost periodic one and others. To achieve our goal, we use the Krein–Rutman theorem for locally convex spaces together with the Fredholm alternative to solve the so-called corrector problem.

Mathematics Subject Classification. 35B40, 45M05, 82C70, 85A25.

Keywords. Deterministic homogenization, Boltzmann equations, Algebras with mean value, Sigma-convergence.

1. Introduction and the main result

An important topic in multiscale analysis is the derivation of macroscopic model equations from the microscopic ones arising from kinetic theory. One of the most important kinetic equations is the Boltzmann equation, which roughly reads as

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{Q} f. \tag{1.1}$$

In (1.1), the left-hand side accounts for the total derivative that takes into account the free streaming of particles, while the right-hand side is the collision operator describing interactions between particles. The unknown function f refers to the distribution function and is physically interpreted as the probability of the density of particles in a given volume. In this work, we deal with a specific type of collision operator (see (1.4)) leading to the linear Boltzmann equation. The linear Boltzmann equation is a kinetic model used in many different contexts. It appeared (for the first time; see [20]) on the motion of electrons in metals and has been since then used in various branches of mathematics and physics such as radiative transfer [22,25], neutron transfer theory [30]. The macroscopic effects come to light when the time elapsing between collisions is much smaller than the observation time scale. This amounts to saying that when the average distance between two successive collisions is smaller than the given specimen length scale. In that case, it therefore becomes interesting to seek the solution f of (1.1) under the form $f(t,x,v) = f_\varepsilon(\varepsilon t, x, v)$ where $0 < \varepsilon << 1$ is a small dimensionless parameter. So, considering the rescaled time variable $\tau = \varepsilon t$, we see that (1.1) takes the form

$$\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \tau}(\tau, x, v) + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon(\tau, x, v) = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon(\tau, x, v). \tag{1.2}$$

Instead of (1.2), we rather consider the following initial value problem

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + a(v)\cdot \nabla_x f_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}\mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon \text{ in } (0,T)\times \mathbb{R}^d_x \times V \\ f_\varepsilon(0,x,v) = f^0(x,v) \text{ in } \mathbb{R}^d_x \times V. \end{cases} \tag{1.3}$$

Such a problem naturally arises when modelling the behaviour of a cloud of particles. The unknown function $f_\varepsilon(t,x,v)\geq 0$ can be interpreted as the density of particles occupying at time t, the position x with a physical state described by the variable v. As usual, v is the translation velocity of the particle and lies to the d-dimension space $V\subset \mathbb{R}^d_v$ ($\mathbb{R}^d_v$ is the numerical space $\mathbb{R}^d$ of generic variable v, integer $d\geq 1$). The set V is endowed with a measure $\mathrm{d}\mu$ whose crucial properties will be specified later. The left-hand side of the first equation in (1.3) describes the transport of particles with the velocity field $a : V \to \mathbb{R}^d$, while the right-hand side takes into account the interactions that the particles may undergo which crossing device. Coming back to (1.3), the ε in front of the time derivative is related to the long time scaling, while the $1/\varepsilon$ in front of collision operator means that particles undergo with more and more interactions [14]. Those interactions modify the physical state of the particles and are localized in time and space. They can be described by the following integral operator:

$$\mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon(t,x,v)) = \int_V \sigma^\varepsilon(x,v,w) f_\varepsilon(t,x,w)\mathrm{d}\mu(w) - \Sigma^\varepsilon(x,v) f_\varepsilon(t,x,v), \tag{1.4}$$

where $\sigma^\varepsilon(x,v,w) = \sigma(x,\frac{x}{\varepsilon},v,w)$ (resp. $\Sigma^\varepsilon(x,v) = \Sigma(x,\frac{x}{\varepsilon},v)$) is a non-negative function defined a.e. on $\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_y\times V\times V$ (resp. on $\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_y\times V$). The function σ is called transition or scattering rate, while Σ is the absorption rate. In the case of this work, they are both given. Assuming that the total density is conserved, that is

$$\int_{\mathbb{R}^d_x\times V} f^\varepsilon(t,x,v)\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d_x\times V} f^0(x,v)\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

we are led to the following relation

$$\Sigma^\varepsilon(x,v) = \int_V \sigma^\varepsilon(x,w,v)\mathrm{d}\mu(w). \tag{1.6}$$

Moreover, we also assume that σ (see, for example, [2,3]) satisfies the semidetailed balance condition

$$\int_V \sigma^\varepsilon(x,v,w)\mathrm{d}\mu(w) = \int_V \sigma^\varepsilon(x,w,v)\mathrm{d}\mu(w). \tag{1.7}$$

As in [14], we state some important hypotheses on the measure space $(V,\mathrm{d}\mu)$ and the velocity field $a(v)$. We suppose that

$$\begin{cases} V \text{ is a compact subset of } \mathbb{R}^d \text{ and the measure } \mu \text{ satisfies } \mu(V)<\infty. \\ \text{The velocity field } a : V\to\mathbb{R}^d \text{ lies in } W^{1,\infty}(V). \\ \text{There exist two constants } C,\gamma>0 \text{ such that} \\ \mu(\{v\in V : |a(v)\cdot\xi|\leq h\}) \leq Ch^\gamma \text{ for all } \xi\in S^{d-1}, h>0 \end{cases} \tag{1.8}$$

where S^{d-1} stands for the d-dimensional sphere in $\mathbb{R}^d$. Next, we also need the following assumption on σ:

$$\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d_x\times V\times V; B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^d_y)). \tag{1.9}$$

In (1.9), A is a given algebra with mean value on $\mathbb{R}^d$ (that is, a closed subalgebra of the $\mathcal{C}^*$-Banach algebra of bounded uniformly continuous real-valued functions on $\mathbb{R}^d$ that contains the constants, is close under complex conjugation, is translation invariant and is such that each of its elements u possesses a mean value $M(u) = ⨍_{B_R} u(y)\mathrm{d}y$ where we set once and for all $⨍_S = \frac{1}{|S|}\int_S$ for any measurable set $S\subset\mathbb{R}^d$), $B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^d_y) = B^2_A(\mathbb{R}^d_y)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d_y)$ where $B^2_A(\mathbb{R}^d)$ is the generalized Besicovitch space defined as the closure of the algebra A with respect to the seminorm $\|u\|_2 = (M(|u|^2))^{\frac{1}{2}}$, and $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d\times V\times V; B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^d_y))$

denotes the space of bounded continuous functions from $\mathbb{R}^d \times V \times V$ into $B_A^{2,\infty}(\mathbb{R}_y^d)$. The above spaces will be precise in the next section. However, let us pay special attention to Assumption (1.9). When accounting of the specific properties of the medium in which the collisions occur, the analysis of our model becomes more involved and necessitates special attention. These properties are naturally included in the behaviour of the scattering rate function σ, and they influence the overall behaviour of the density function f_ε. They depend on the way the microstructures are distributed in the heterogeneous medium (where the collisions occur). For example, we could assume that the medium is made of microstructures that are either uniformly distributed inside or almost uniformly distributed, or assume another kind of deterministic distribution. This leads to a function $y \mapsto \sigma(x, y, v, w)$ which is assumed to be either periodic (with respect to y) or almost periodic, or even asymptotic almost periodic. All these properties are included in Assumption (1.9).

Finally, we suppose that the initial distribution function f^0, satisfies

$$f^0(x, v) > 0 \text{ and } \int_{\mathbb{R}^d \times V} \left|f^0\right|^2 (x, v)\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) \leq C_0 < \infty. \tag{1.10}$$

Under hypotheses (1.8)-(1.10), the Cauchy problem (1.3) has (for each fixed $\varepsilon > 0$) a unique weak solution $f_\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d \times V))$ (see, for example, [2,3] for the proof), which further satisfies the following estimate

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^d \times V))} \leq C \tag{1.11}$$

where $C > 0$ is independent of $\varepsilon > 0$. The proof of estimate (1.11) follows from direct application of the energy method to the system (1.3), using the semidetailed balance condition (1.7).

Defining the operator P on $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$ by

$$Pu = a(v) \cdot \nabla_y u - \mathcal{Q}u \quad (u \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d)))$$

where $\mathcal{Q}u(x, y, v) = \int_V \sigma(x, y, v, w)(u(y, w)-u(y, v))\mathrm{d}\mu(w)$, we know that there exists a unique $F(x, \cdot, \cdot) \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$ such that

$$PF = 0, \ \int_V M(F(x, \cdot, v))\mathrm{d}\mu(v) = 1 \text{ and } F > 0 \text{ a.e.}; \tag{1.12}$$

see Proposition 1. We assume that the velocity field $a(v)$ satisfies the following vanishing flux condition:

$$\int_V M(a(v)F(x, \cdot, v))\mathrm{d}\mu(v) = 0. \tag{1.13}$$

The following theorem is the main result of the work.

Theorem 1.1. *Let A be an algebra with mean value on $\mathbb{R}^d$. Assume (1.9), (1.13) and (3.10) hold. For each $\varepsilon > 0$, let f_ε be the unique solution of (1.3). Then, there exists $f_0 + \mathcal{N} \in L^2(\mathbb{R}_T^d \times V; B_A^2(\mathbb{R}^d)/\mathcal{N})$ such that the sequence $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ weakly sigma-converges in $L^2((0, T) \times \mathbb{R}_x^d \times V)$ towards $f_0 + \mathcal{N}$. Moreover, f_0 has the form $f_0(t, x, y, v) = F(x, y, v)\rho_0(t, x)$ where $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_x^d; L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d)) \cap \ker P)$ is given by (1.12) and ρ_0 is the unique solution of the Cauchy problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} - \mathrm{div}_x \left(D(x)^T \nabla_x \rho_0 + U(x)\rho_0\right) = 0 \text{ in } (0, T) \times \mathbb{R}_x^d \\ \rho_0(0, x) = \int_V f^0(x, v)\mathrm{d}\mu(v) \text{ in } \mathbb{R}_x^d \end{cases} \tag{1.14}$$

where

$$D(x) = \int_V M\left(\chi^* \otimes (a(v)F)\right)\mathrm{d}\mu(v) = \left(\int_V M\left(\chi_i^* a_j(v)F\right)\mathrm{d}\mu(v)\right)_{1\leq i,j\leq d}$$

with $(\chi^* \otimes a(v)F) = (\chi_i^* a_j(v)F)_{1\leq i,j\leq d}$,

$$U(x) = \int_V M\left(\chi^* a(v) \cdot \nabla_x F\right) \mathrm{d}\mu(v) = \left(\int_V M\left(\chi_i^* a(v) \cdot \nabla_x F\right) \mathrm{d}\mu(v)\right)_{1\leq i\leq d}$$

and where χ^* *the unique solution in* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))^d$ *of the corrector problem:*

$$P^*\chi^* = -a(v) \text{ and } \int_V M(\chi^*(x,\cdot,v))\mathrm{d}\mu(v) = 0, \tag{1.15}$$

P^* *being the adjoint operator of* P.

Equation (1.14) models a drift-diffusion process. The diffusion arises by the term $\mathrm{div}_x(D(x)^T\nabla_x\rho_0)$ which represents the spatial redistribution of particles forced by their own kinetic energy, while the drift, represented by the term $\mathrm{div}_x(U(x)\rho_0)$, models the transport of particles forced by a given outer field or a field generated by the particles in a self-consistent manner.

Theorem 1.1 is proved in [14] in the periodic setting, that is, when assuming that the scattering function σ is periodic. To achieve their goal in [14], the authors used the Krein–Rutman theorem in Banach spaces (see [10, Theorem VI.12, page 100]). However, as the Besicovitch spaces $B_A^p(\mathbb{R}^d)$ are not Banach spaces (but rather complete locally convex topological vector spaces), we cannot expect to use the initial version of that theorem as presented in [10]. Fortunately, the initial version has been generalized to locally convex spaces by Schaefer [28], and it is the one that we use in this work, which allows one to relax the periodicity assumption by considering a general deterministic assumption which includes the periodic one and the almost periodic one as special cases. This falls within the scope of deterministic homogenization theory which proceeds from the juxtaposition of the algebras with mean value and the sigma-convergence method. To the best of our knowledge, this is the first time that such a result is obtained beyond the periodic setting.

The homogenization of Boltzmann equation remains an active field of study. We may cite [1–3,5,6,14,21]. In [5,21], the authors study the case of diffusion limit of a semiconductor Boltzmann–Poisson by using the Hilbert formal expansion, in the case of periodic oscillations. In [1,6,14], the authors investigate the asymptotic behaviour of a linear Boltzmann equation by the two-scale convergence method. In all these works, hypotheses were stated in the periodic setting. Here, we use the sigma convergence method to handle the more general case including as special settings, the almost periodic homogenization, the weak almost periodic one, and others.

The rest of the paper is organized as follows. In Sect. 2, we present some fundamental results about the concept of sigma-convergence. Section 3 deals with the corrector result. Section 4 is devoted to the proof of Theorem 1.1. Finally, in Sect. 5, we provide some concrete examples in which Theorem 1.1 applies.

2. Algebras with mean value and sigma convergence

In this section, we recall the main properties and some basic facts about the concept of sigma-convergence. We refer the reader to [23,31,32] for the details regarding most of the results of this section.

In the sequel of this work, we will often set $\mathbb{R}_T^d = (0,T) \times \mathbb{R}_x^d$.

2.1. Algebra with mean value

Let A be an algebra with mean value (algebra wmv, for short) on $\mathbb{R}^d$, that is, a closed subalgebra of the Banach algebra $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^d)$ (of bounded uniformly continuous real-valued functions on $\mathbb{R}^d$) that contains the constants, is close under complex conjugation ($\overline{u} \in A$ whenever $u \in A$), is translation invariant

($\tau_a u = u(\cdot + a) \in A$ for any $u \in A$ and $a \in \mathbb{R}^d$) and is such that any of its elements possesses a mean value in the following sense: for every $u \in A$,

$$M(u) = \lim_{R\to\infty} \fint_{B_R} u(y)\mathrm{d}y \tag{2.1}$$

where B_R stands for the open ball in $\mathbb{R}^d$ of radius R centred at the origin and $\fint_{B_R} = \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}$.

Let $u \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^d)$ and assume that $M(u)$ exists. Then, defining the sequence $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^d)$ by $u^\varepsilon(x) = u(\frac{x}{\varepsilon})$ for $x \in \mathbb{R}^d$, we have

$$u^\varepsilon \to M(u) \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^d)\text{-weak} * \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

This is an easy consequence of the fact that the set of finite linear combinations of the characteristic functions of open balls in $\mathbb{R}^d$ is dense in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Let A be an algebra with mean value. Define the space A^∞ by

$$A^\infty = \left\{u \in A : D_y^\alpha u \in A \text{ for every } \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d\right\}.$$

Then, endowed with the family of norms $|||\cdot|||_m$ defined by $|||u|||_m = \sup_{|\alpha|\le m} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |D_y^\alpha u|$ where $D_y^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1}...\partial y_d^{\alpha_d}}$, A^∞ is a Fréchet space.

In order to define the generalized Besicovitch space, we first need to define the Marcinkiewicz space $\mathfrak{M}^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le p < \infty)$, which is the space of functions $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ satisfying $\limsup_{R\to\infty} \fint_{B_R} |u(y)|^p \,\mathrm{d}y < \infty$. Endowed with the seminorm

$$\|u\|_p = \limsup_{R\to\infty} \left(\fint_{B_R} |u(y)|^p \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}},$$

$\mathfrak{M}^p(\mathbb{R}^d)$ is a complete seminormed space. Next, we define the generalized Besicovitch space $B^p_A(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le p < \infty)$ associated with the algebra with mean value A as the closure in $\mathfrak{M}^p(\mathbb{R}^d)$ of A with respect to $\|\cdot\|_p$. It is easy to see that for $f \in A$ and $0 < p < \infty$, $|f|^p \in A$, so that

$$\|f\|_p = \left(\lim_{R\to\infty} \fint_{B_R} |f(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \equiv (M(|f|^p))^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

The equality (2.2) extends by continuity to any $f \in B^p_A(\mathbb{R}^d)$. Equipped with the seminorm (2.2), $B^p_A(\mathbb{R}^d)$ is a complete seminormed space. We refer the reader to [27,31,32] for further details about these spaces. Namely, the following holds true:

(1) The space $\mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^d) = B^p_A(\mathbb{R}^d)/\mathcal{N}$, (where $\mathcal{N} = \{u \in B^p_A(\mathbb{R}^d) : \|u\|_p = 0\}$) is a Banach space under the norm $\|u + \mathcal{N}\|_p = \|u\|_p$ for $u \in B^p_A(\mathbb{R}^d)$.

(2) The mean value $M : A \to \mathbb{R}$ extends by continuity to a continuous linear mapping (still denoted by M) on $B^p_A(\mathbb{R}^d)$. Furthermore, considered as defined on $B^p_A(\mathbb{R}^d)$, M extends in a natural way to $\mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^d)$ as follows: for $u = v + \mathcal{N} \in \mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^d)$, we set $M(u) := M(v)$; this is well defined since $M(v) = 0$ for any $v \in \mathcal{N}$.

In the current work, we will deal with the concept of *ergodic* algebras with mean value. A function $u \in \mathcal{B}^1_A(\mathbb{R}^d)$ is said to be *invariant* if for any $y \in \mathbb{R}^d$, $\|u(\cdot + y) - u\|_1 = 0$. This being so, an algebra with mean value A is ergodic if every invariant function u is constant in $\mathcal{B}^1_A(\mathbb{R}^d)$, i.e. if $\|u(\cdot + y) - u\|_1 = 0$ for any $y \in \mathbb{R}^d$, then $\|u - c\|_1 = 0$ where c is a constant. We assume that all the algebras with mean value used in the sequel are ergodic.

Remark 2.1. In the sequel, we assume that all algebras wmv consist of real-valued functions. This does not make any restriction on the preceding results or on the forthcoming ones. We will denote the Gelfand transform $\mathcal{G}(u)$ of a function $u \in A$ by $\widehat{u}$.

2.2. The sigma-convergence

In what follows, the notations are those of the preceding subsections.

Let A be an algebra wmv on $\mathbb{R}^d_y$. We know that A is a subalgebra of the $\mathcal{C}^*$-algebra of bounded uniformly continuous functions $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^d_y)$. The generic element of $\mathbb{R}^d_T$ is denoted by (t,x), while any function in A is of variable $y \in \mathbb{R}^d_y$. For a function $u \in L^p(\mathbb{R}^d_T \times V; B^p_A(\mathbb{R}^d))$, we denote by $u(t,x,\cdot,v)$ (for a.e. $(t,x,v) \in \mathbb{R}^d_T \times V$) the function defined by

$$u(t,x,\cdot,v)(y) = u(t,x,y,v) \text{ for a.e. } y \in \mathbb{R}^d.$$

Then, $u(t,x,\cdot,v) \in B^p_A(\mathbb{R}^d)$, so that the mean value of $u(t,x,\cdot,v)$ is defined accordingly.

Definition 2.1. *A sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^p(\mathbb{R}^d_T \times V)$ $(1 \le p < \infty)$ is weakly* sigma-convergent *in $L^p(\mathbb{R}^d_T \times V)$ to some function $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d_T \times V; \mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^d))$ if as $\varepsilon \to 0$, we have*

$$\iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} u_\varepsilon(t,x,v)\varphi^\varepsilon(t,x,v)\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to \iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} M(u_0(t,x,\cdot,v)\varphi(t,x,\cdot,v))\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

for every $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^d_T \times V; A)(\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p})$, where $\varphi^\varepsilon(t,x,v) = \varphi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},v)$. We express this by writing $u_\varepsilon \to u_0$ in $L^p(\mathbb{R}^d_T \times V)$-weak Σ.

In the above definition, if $A = \mathcal{C}_{per}(Y)$ is the algebra of continuous periodic functions on Y with $Y = (0,1)^d$, then (2.3) reads as

$$\iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} u_\varepsilon(t,x,v)\varphi^\varepsilon(t,x,v)\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to \iint_{\mathbb{R}^d_T \times V \times Y} u_0(t,x,y,v)\varphi(t,x,y,v)\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

where $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d_T \times V \times Y)$.

Remark 2.2. One may show as in [23] that for any $f \in L^p(\mathbb{R}^d_T \times V; A)$, the sequence $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ weakly Σ*-converges towards* $f + \mathcal{N}$ in $L^p(\mathbb{R}^d_T \times V)$. It can be shown (see [23, Corollary 4.1]) that property (2.3) still holds for $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}(\mathbb{R}^d_T; B^{p',\infty}_A(\mathbb{R}^d_y)))$ where $B^{p',\infty}_A = B^{p'}_A \cap L^\infty(\mathbb{R}^d_y)$ is endowed with the $L^\infty(\mathbb{R}^d_y)$-norm.

In the sequel, the letter E will always denote any ordinary sequence $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of positive real numbers satisfying: $0 < \varepsilon_n \le 1$ and $\varepsilon_n \to 0$ when $n \to \infty$.

The following result and its proof are simple adaptation of its counterpart in [23,24,31].

Theorem 2.1. *Let $1 < p < \infty$ and let $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in E} \subset L^p(\mathbb{R}^d_T \times V)$ be a bounded sequence. Then, there exist a subsequence E' of E and a function $u \in L^p(\mathbb{R}^d_T \times V; \mathcal{B}^p_A(\mathbb{R}^d))$ such that the sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in E'}$ weakly Σ-converges in $L^p(\mathbb{R}^d_T \times V)$ to u.*

3. Corrector results

In this section, we aim at stating and proving an important result based on Krein–Rutman theorem [10, Theorem VI.13, p. 100]. It is very important to note that the Krein–Rutman theorem was first stated and proved by Krein and Rutman [18]. A more general version of that theorem appeared in Bonsall [8] and was extended to locally convex topological spaces by Schaefer [28]. Since the space $L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^d))$ is rather a complete locally convex topological vector space, we shall follow in this subsection the lines of [28]. However, we can observe that the results obtained here can be extended to the original Krein–Rutman setting of Banach spaces by considering the Hilbert space $L^2(V; \mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^d))$ which is the Banach counterpart of $L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^d))$.

To start with, we consider the unbounded operator P defined on $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d))$ by

$$Pu = a(v)\cdot\nabla_y u - \mathcal{Q}u \tag{3.1}$$

with domain

$$D(P) = \{u\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y)) : Pu\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))\}$$

where $\mathcal{Q}$ is the operator defined by

$$\mathcal{Q}f(x,y,v) = \int_V \sigma(x,y,v,w)(f(y,w)-f(y,v))\mathrm{d}\mu(w),\ \ f\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y)) \tag{3.2}$$

and the equality (3.1) holds in the weak sense in $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$, that is

$$(Pu,\phi) = \int_V M(-ua(v)\cdot\nabla_y\phi - \phi\mathcal{Q}u)\mathrm{d}\mu(v) \text{ for all } \phi\in\mathcal{C}^\infty(V;A^\infty). \tag{3.3}$$

Using the semidetailed balance condition (1.7), we easily show that

$$\int_V(\phi\mathcal{Q}u)\mathrm{d}\mu(v) = \int_V(u\mathcal{Q}^*\phi)\mathrm{d}\mu(v) \tag{3.4}$$

where $\mathcal{Q}^*$ is the adjoint collision operator of $\mathcal{Q}$ defined by

$$\mathcal{Q}^*\phi(x,y,v) = \int_V \sigma(x,y,w,v)(\phi(y,w)-\phi(y,v))\mathrm{d}\mu(w), \tag{3.5}$$

so that (3.3) is equivalent to

$$(Pu,\phi) = \int_V M(u(-a(v)\cdot\nabla_y\phi - \mathcal{Q}^*\phi))\mathrm{d}\mu(v) \text{ for all } \phi\in\mathcal{C}^\infty(V;A^\infty). \tag{3.6}$$

We infer from (3.6) that the adjoint P^* of P is well defined by

$$P^*\phi = -a(v)\cdot\nabla_y\phi - \mathcal{Q}^*\phi. \tag{3.7}$$

Next, if $u\in L^2(V;\mathcal{N})\cap D(P)$ ($\mathcal{N} = \{f\in B^2_A(\mathbb{R}^d_y)) : M(|f|^2)=0\}$) then $Pu=0$, that is

$$(Pu,\phi) = 0 \text{ for all } \phi\in\mathcal{C}^\infty(V;A^\infty). \tag{3.8}$$

This shows that P can be extended on the Banach space $L^2(V;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^d_y))$ by

$$\mathcal{P}\widetilde{u} = \widetilde{Pu} \text{ for } = u+\mathcal{N} \text{ with } u\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y)) \tag{3.9}$$

where $\widetilde{Pu} = Pu+\mathcal{N}$. Indeed, in view of (3.8), if $\widetilde{u}=\widetilde{w}$ then $u-w\in\mathcal{N}$, so that $P(u-w)=0$, that is, $\mathcal{P}\widetilde{u}=\mathcal{P}\widetilde{w}$. The domain of $\mathcal{P}$ is naturally defined by

$$D(\mathcal{P}) = \{\widetilde{u}\in L^2(V;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^d_y)) : \mathcal{P}\widetilde{u}\in L^2(V;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^d_y))\}.$$

With the above definitions of P and $\mathcal{P}$, in order to study the properties of $\mathcal{P}$, it will be sufficient to study those of P based on the framework developed in [28].

Now, consider the integral operator K of kernel σ defined on $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d))$ by

$$Kf(y,v) = \int_V \sigma(y,v,w)f(y,w)\mathrm{d}\mu(w) \text{ for } f\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d)).$$

Then, it is easy to see that K sends continuously $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d))$ into itself. We assume that

$$K \text{ is compact from } D(P) \text{ into } L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d)). \tag{3.10}$$

Assumption (3.10) is verified in the periodic setting (see [14]) and can be easily extended to the asymptotic periodic setting as seen in Sect. 5.3. We also show in Sect. 5.2 that it is valid in the almost periodic setting, and hence can be extended to the asymptotic almost periodic framework in the same way as in the asymptotic periodic one.

Proposition 1 is a generalization of its counterpart in [14, Section 3] where the periodic setting is treated by considering the usual Krein–Rutman theorem using Banach spaces theory. Here, we consider the general deterministic framework which does not fall within the scope of the usual Krein–Rutman theorem in Banach spaces as in [14, Section 3], but rather within the scope of its generalization to locally convex spaces. However, as seen in [28], the assumptions in applying the results from [28] are the same as those from the Banach setting. We start with the description of the kernel of the operators P and P^* (the estimates obtained here are uniform with respect to the spatial macroscopic variable $x \in \mathbb{R}^d$). The overall aim of this subsection is to solve the auxiliary problems (3.11) and (3.12) below:

- the corrector problem:
$$\text{For } g \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d)), \text{ look for } f \in D(P) \text{ such that } Pf = g \tag{3.11}$$
and
- the dual corrector problem:
$$\text{For } \varphi \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d)), \text{ look for } \phi \in D(P^*) \text{ such that } P^*\phi = \varphi. \tag{3.12}$$
We recall that equalities (3.11) and (3.12) hold algebraically and so, also hold in the usual sense of distributions in $\mathbb{R}^d \times V$. It will also be seen below that they will hold in the weak sense in $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$ (see especially the proof of part (i) of the proposition below).

Proposition 1. *Suppose (1.8) holds true and that $\sigma = \sigma(x, \cdot, \cdot, \cdot) \in L^\infty(V \times V; B_A^{2,\infty}(\mathbb{R}_y^d))$. Then the following assertions hold:*

(i) There exists a unique function $F \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$ satisfying
$$PF = 0, \int_V M(F)\mathrm{d}\mu(v) = 1 \text{ and } F > 0 \text{ a.e. in } \mathbb{R}_y^d \times V. \tag{3.13}$$
Furthermore, F is the unique solution of the variational equation
$$\int_V M(F(a(v) \cdot \nabla_y \phi(\cdot, v) + \mathcal{Q}^* \phi(\cdot, v)))\mathrm{d}\mu(v) = 0 \text{ for all } \phi \in C^\infty(V; A^\infty). \tag{3.14}$$
Similarly, we have $\ker P^* = \operatorname{span}\{\chi_{\mathbb{R}_y^d \times V}\}$, where $\chi_{\mathbb{R}_y^d \times V}$ stands for the characteristic function of $\mathbb{R}_y^d \times V$.

(ii) Let $g \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$. Equation (3.11) admits a unique f in $D(P)$ solution if and only if $\int_V M(g)\mathrm{d}\mu(v) = 0$. Moreover, it holds that
$$\|f\|_{L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))} \leq C \|g\|_{L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))} \tag{3.15}$$
where $C > 0$ is a constant independent of g.

(iii) Let $\varphi \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$. The equation (3.12) admits a solution $\phi \in D(P^*)$ if and only if $\int_V M(\varphi F)\mathrm{d}\mu(v) = 0$. The condition $\int_V M(\phi)\mathrm{d}\mu(v) = 0$ ensures the uniqueness of the solution. Furthermore, we have
$$\|\phi\|_{L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))} \leq C \|\varphi\|_{L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))} \tag{3.16}$$
where $C > 0$ is a constant independent of φ.

Proof. The proof is divided into five steps. It is based on the characterization of $\ker P$, after which we conclude with Fredholm alternative argument [10, Theorem VI.6, page 92]).

Step 1: Uniform bounds of the operator $\mathcal{Q}$.

Let us first and foremost check that $\mathcal{Q}$ is a bounded operator on $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$, provided that $\sigma \in L^\infty(V \times V; B_A^{2,\infty}(\mathbb{R}_y^d))$. Indeed, for $f \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$, we have
$$\mathcal{Q}(f)(y, v) = \int_V \sigma(y, v, w)(f(y, w) - f(y, v))\mathrm{d}\mu(w),$$

so that

$$\|\mathcal{Q}(f)\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))} = \int_V M\left(|\mathcal{Q}(f)(\cdot,v)|^2\right) \mathrm{d}\mu(v).$$

But

$$|\mathcal{Q}(f)(\cdot,v)|^2 \leq C\,\|\sigma(\cdot,v,\cdot)\|^2_{L^\infty(V\times\mathbb{R}^d_y)}\left(\int_V |f|^2\,\mathrm{d}\mu(w) + |f|^2\right)$$

where $C = \sup(\mu(V),\mu(V)^2)$. Since the mean value commutes with the integral, we get

$$\|\mathcal{Q}(f)\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))} \leq C\,\|\sigma\|^2_{L^\infty(V\times V\times\mathbb{R}^d_y)}\,(\mu(V)+1)\,\|f\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))}\,,$$

that is,

$$\|\mathcal{Q}(f)\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))} \leq C\,\|\sigma\|_{L^\infty(V\times V\times\mathbb{R}^d_y)}\,\|f\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))} \tag{3.17}$$

where C in (3.17) depends only on $\mu(V)$. This shows that $\mathcal{Q}$ is bounded in $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$. As a result, the domain of P reduces to

$$D(P) = \{u\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y)) : a(v)\cdot\nabla_y u \in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))\}.$$

Step 2: Perturbation of the operator P.

We rewrite P as a perturbation of the advection operator $\mathcal{A} = a(v)\cdot\nabla_y + \Sigma$ (where $\Sigma(y,v) = \int_V \sigma(y,w,v)\mathrm{d}\mu(w)$), by the integral operator K defined by

$$Kf(y,v) = \int_V \sigma(y,v,w) f(y,w)\mathrm{d}\mu(w), \tag{3.18}$$

that is,

$$P = \mathcal{A} - K. \tag{3.19}$$

$\mathcal{A}$ is invertible; since by a simple integration along the characteristic lines $y + sa(v)$, we can easily check that the equation $\mathcal{A}f = h$ has the unique solution

$$f(y,v) = \mathcal{A}^{-1}h(y,v) = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s \Sigma(y-a(v)\tau,v)d\tau\right) h(y-a(v)s,v)ds, \tag{3.20}$$

and the above function f actually lies in $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$. Indeed, thanks to hypothesis (1.9), we can find $0<\Sigma_1 = \inf_{(x,y,v)\in\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_y\times V}\Sigma(x,y,v)$ (recall that $\Sigma(x,y,v)>0$ since $\sigma>0$), so that for $h\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$, we have

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}^{-1}h\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))}\\
&= \textstyle\int_V \lim_{R\to\infty} \fint_{B_R} \left|\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s \Sigma(y-a(v)\tau,v)d\tau\right) h(y-a(v)s,v)ds\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v)\\
&\leq \textstyle\int_V \lim_{R\to\infty} \fint_{B_R} \left|\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right) h(y-a(v)s,v)ds\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v)\\
&= \textstyle\int_V \lim_{R\to\infty} \fint_{B_R} \left|\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\Sigma_1}{2}s\right)\exp\left(-\frac{\Sigma_1}{2}s\right) h(y-a(v)s,v)ds\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v)\\
&\leq \textstyle\int_V \lim_{R\to\infty} \fint_{B_R} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right)ds\right)\left(\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right)|h(y-a(v)s,v)|^2 ds\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v)\\
&= \textstyle\left(\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right)ds\right)\int_V\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right)\left(\lim_{R\to\infty}\fint_{B_R}|h(y-a(v)s,v)|^2\mathrm{d}y\right)ds\mathrm{d}\mu(v)\\
&= \textstyle\frac{1}{\Sigma_1}\int_V\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right) M\left(|\tau_{a(v)s}h(\cdot,v)|^2\right)\mathrm{d}\mu(v)ds\\
&= \textstyle\frac{1}{\Sigma_1}\int_V\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right) M\left(|h(\cdot,v)|^2\right)\mathrm{d}\mu(v)ds\\
&= \textstyle\frac{1}{\Sigma_1}\int_V\int_0^\infty \exp\left(-\Sigma_1 s\right) M\left(|h(\cdot,v)|^2\right)\mathrm{d}\mu(v)ds\\
&= \left(\frac{1}{\Sigma_1}\right)^2 \|h\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))} = \left(\frac{1}{\Sigma_1}\right)^2 \|h\|^2_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))}\,.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

On the other hand, since $h\geq 0$ (resp. $h>0$) implies $f=\mathcal{A}^{-1}h\geq 0$ (resp. $f=\mathcal{A}^{-1}h>0$), we deduce that $\mathcal{A}^{-1}$ is a non-negative bounded linear operator on $L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$. Now, we rewrite the equation $Pf=g$ as follows:

$$(I - K\circ\mathcal{A}^{-1})h = g,\;\; h = \mathcal{A}f \tag{3.22}$$

where I is the identity operator in $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$.

Step 3: Compactness of $\mathcal{O} = K \circ \mathcal{A}^{-1}$. This is a consequence of the compactness of K (see Assumption (3.10)).

Step 4: Dimension of $\ker P$ *by Krein–Rutman theorem.*

Keeping this compactness result in mind and coming back to problem (3.22), let us consider the following convex closed cone $C = \left\{ f \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d)) : f \geq 0 \right\}$. C is a total cone because $C - C = L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$. Its interior int$C$ is trivially not empty and we have $C \cap (-C) = \{0\}$. Otherwise, since $\sigma > 0$ implies $K(f) > 0$ for any non-negative function $f \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$, we deduce that the compact operator $\mathcal{O} = K \circ \mathcal{A}^{-1}$ sends $C \backslash \{0\}$ into int$C$. Thus, the positive compact operator $\mathcal{O} = K \circ \mathcal{A}^{-1}$ and the convex closed cone C satisfy the conditions of Theorem [28, (10.5), P. 281], which is the generalization in the locally convex spaces of the well-known Krein–Rutman theorem [10, Theorem VI.13, p. 100]. Hence, it guaranties the existence of a unique eigenvalue λ of $\mathcal{O}$ (which is its spectral radius) associated with a non-negative eigenfunction $H \geq 0$ ($\mathcal{O}(H) = \lambda H$). We then set $AF = H$, so that $K(F) = \lambda AF$. Applying to this equality, the mean value M with respect to y and next integrating with respect to v using the semidetailed balance condition (1.7) and equality (1.6), we are lead to

$$\int_{V \times V} M\left(\sigma(\cdot, v, w) F(\cdot, w)\right) \mathrm{d}\mu(w) \mathrm{d}\mu(v) = \lambda \int_{V \times V} M\left(\sigma(\cdot, v, w) F(\cdot, w)\right) \mathrm{d}\mu(w) d\mu(v) > 0.$$

We deduce that $\lambda = 1$ is the principal eigenvalue of $\mathcal{O}$. Furthermore, we have seen in *Step 2* that $\mathcal{A}^{-1}$ and K are non-negative linear operators. Thus, since $F = \mathcal{A}^{-1}H \geq 0$, this implies that $AF = H = K(F) > 0$, and so $F = \mathcal{A}^{-1}H > 0$. Finally, as $f \geq 0$ implies $\mathcal{O}(f) > 0$, we deduce that the dimension of the eigenspace is one. We can proceed in the same way with the adjoint operator P^*, noticing that $\chi_{\mathbb{R}_y^d \times V} \in \ker P^*$, since constants belong to $\ker P^*$. To conclude the proof of (i), let us show that (3.14) is satisfied.

Let $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ and $\phi \in \mathcal{C}^\infty(V; A^\infty)$ be freely fixed, and define the function $\psi(y, v) = \varphi(\varepsilon y)\phi(y, v)$ ($y \in \mathbb{R}^d$) for a given $\varepsilon > 0$. We multiply the equation $PF = 0$ by ψ and integrate by parts the resulting equation over $\mathbb{R}^d \times V$, and next make the change of variables $z = \varepsilon y$ to get

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times V} F^\varepsilon \left[a(v) \cdot (\varepsilon \phi^\varepsilon \nabla_z \varphi + \varphi(\nabla_y \phi)^\varepsilon) + \varphi(\mathcal{Q}^* \phi)^\varepsilon \right] dz \mathrm{d}\mu(v) = 0 \tag{3.23}$$

where $\eta^\varepsilon(z, v) = \eta(z/\varepsilon, v)$. Letting $\varepsilon \to 0$ in (3.23) using the definition of the sigma-convergence (for time-independent sequences), we obtain

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times V} M(F(a(v) \cdot \nabla_y \phi(\cdot, v) + \mathcal{Q}^* \phi(\cdot, v)))\varphi(z) dz \mathrm{d}\mu(v) = 0.$$

The arbitrariness of φ yields at once

$$\int_V M(F(a(v) \cdot \nabla_y \phi(\cdot, v) + \mathcal{Q}^* \phi(\cdot, v))) \mathrm{d}\mu(v) = 0,$$

that is (3.14). This finishes the proof of (i).

Step 5: The Fredholm alternative.

In order to apply the Fredholm alternative, we need to consider the extension $\mathcal{P}$ of P defined on $L^2(V; \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}_y^d))$. Then, all the properties obtained in Steps 1-4 are valid mutatis mutandis (replace P by $\mathcal{P}$ and $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$ by $L^2(V; \mathcal{B}_A^2(\mathbb{R}_y^d))$). We also observe that (3.11) may be seen as equivalent to the following one

$$\mathcal{P}\widetilde{f} = \widetilde{g}. \tag{3.24}$$

Indeed, (3.11) implies (3.24), while the reverse implication holds, provided that we replace g by $g + \psi$ where $\psi \in L^2(V; \mathcal{N})$. However, in the variational form of (3.11), we observe that the contribution of ψ is of no effect since $M(\psi(\cdot, v)\phi(\cdot, v)) = 0$ for $\psi \in L^2(V; \mathcal{N})$ and any $\phi \in L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$.

This being so, we note that the condition $\int_V M(g)\mathrm{d}\mu(v) = 0$ is necessary for the solvability of $Pf = g$, since $\int_V M(Pf)\mathrm{d}\mu(v) = 0$. Indeed, as the mean value mapping $u \mapsto M(u)$ commutes with integral with respect to v, we simply notice that combining (1.4) and (1.6), we have

$$\int_V \mathcal{Q}f(y,v)\mathrm{d}\mu(v) = 0 \text{ for all } f \in L^2(V; B^2_A(\mathbb{R}^d_y)).$$

Furthermore, by a simple computation, we show that $M\left(a(v)\cdot\nabla_y f(\cdot,v)\right) = 0$.

With this in mind, we may replace (3.11) by (3.24) and we remark that (3.24) is equivalent to (3.22) in which we consider the corresponding extensions of the operators involved in (3.22) and defined on $L^2(V;\mathcal{B}^2_A(\mathbb{R}^d_y))$, so that applying the Fredholm alternative, we have $\mathrm{Im}(I-\mathcal{O}) = \ker(I-\mathcal{O}^*)^\perp$, which implies $\mathrm{Im}\, P = (\ker P^*)^\perp$. Hence, $Pf = g$ is solvable for $g \in \mathrm{Im}\, P = (\ker P^*)^\perp$. But as the eigenspaces of P and P^* are spanned by positive functions, the condition $\int_V M(g)\mathrm{d}\mu(v) = 0$ guarantees the uniqueness. So, for any element in $L^2_0(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y)) = \{g \in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y)) : \int_V M(g(\cdot,w))\mathrm{d}\mu(w) = 0\}$, we find a unique $f \in L^2_0(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$ solution of $Pf = g$. To prove inequality (3.15), we just apply the open mapping theorem (see, for instance, [10, p. 18]) to the linear operator $\mathcal{P}$, which gives the existence of $C > 0$ such that

$$\|f\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))} \leq C\,\|g\|_{L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))}\,.$$

Similar conclusions hold for the adjoint problem $P^*\varphi = \phi$. This concludes the proof. □

The next two results show how the regularity of the coefficients gives rise to the regularity of the solutions of (3.11) and (3.12). The second one takes into account the dependence with respect to the parameter x. Their proofs are copied on that of [14, Lemmas 3.2 and 3.3].

In what follows, A^1 denotes the space $\{u \in A : \nabla u \in (A)^d\}$, while V_ω stands for the space V with generic variable $\omega \in V$.

Lemma 3.1. *Suppose that $\sigma(y,v,w)$ and $\frac{\partial\sigma}{\partial y_i}(y,v,w)$ $(1 \leq i \leq d)$ lie in $\mathcal{C}(V_v \times V_w; L^\infty(\mathbb{R}^d_y)) \cap L^\infty(V_v \times V_w \times \mathbb{R}^d_y)$. Then, for $g \in \mathcal{C}(V;A^1)$, the solution of (3.11) lies in $\mathcal{C}(V;A^1)$. A similar conclusion holds for the adjoint equation (3.12).*

Proof. Let σ, $\frac{\partial\sigma}{\partial y_i}$ and g be given as in the statement of the lemma. In particular, we have $g \in \mathcal{C}(V;A^1) \subset \mathcal{C}(V;A) \subset \mathcal{C}(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$. Proceeding as in the previous proof (see *Step 4*), we show that the solution h of the following rewritten problem

$$(I - K\circ\mathcal{A}^{-1})(h) = g,\ \ h = \mathcal{A}(f) \tag{3.25}$$

belongs to $\mathcal{C}(V;A)$. To conclude, we need to show that h and $f = \mathcal{A}^{-1}h$ have the same regularity. To that end, Thanks to (3.20), we have

$$f(y,v) = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s \Sigma(y-a(v)\tau,v)d\tau\right) h(y-a(v)s,v)ds,$$

which implies that $f \in \mathcal{C}(V;A)$.

Now, let us fix $1 \leq i \leq d$, and set $\partial_i = \partial/\partial y_i$. Applying ∂_i to (3.11) yields

$$a(v)\cdot\nabla_y\partial_i f - \mathcal{Q}(\partial_i f) = \partial_i g + \partial_i\mathcal{Q}(f), \tag{3.26}$$

where

$$\partial_i\mathcal{Q}(f)(y,v) = \int_V \partial_i\sigma(y,v,w)f(y,w)\mathrm{d}\mu(w) - \partial_i\Sigma(y,v)f(y,v). \tag{3.27}$$

Since $f \in \mathcal{C}(V;A)$, we have $\partial_i g,\ \partial_i\mathcal{Q}(f) \in \mathcal{C}(V;A)$. Therefore, the right-hand side of (3.26) belongs to $\mathcal{C}(V;A)$. Thanks to Proposition 1 applying this time to problem (3.26), we obtain $\partial_i f \in \mathcal{C}(V;A)$. Hence, $f \in \mathcal{C}(V;A^1)$. The same arguments can be applied to the adjoint problem. □

It is worth noticing that derivation of the equation for the equilibrium function F shows similarly that $F \in \mathcal{C}(V; A^1)$.

Lemma 3.2. *Let $k \in \mathbb{N}^*$. If $\sigma(x,y,v,w) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d_x; L^\infty(V\times V; B_A^{2,\infty}(\mathbb{R}^d_y)))$ and $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d_x; L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^d_y)))$, then the solution of (3.11) lies in $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d_x; L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^d_y)))$. A similar conclusion holds for the adjoint equation (3.12).*

Proof. We first check that the constant C in Proposition 1, which depends on the parameter x, is locally bounded. Indeed, let K be a compact subset of $\mathbb{R}^d$ and $0 < \delta < 1$. Applying Heine's theorem to the restriction of $x \mapsto \sigma(x,\cdot)$ to K, we derive the existence of a constant $\eta_\delta > 0$ such that for any $x_1, x_2 \in K$ with $|x_1 - x_2| \le \eta_\delta$, we have $\|\sigma(x_1,\cdot) - \sigma(x_2,\cdot)\|_{L^\infty(Y\times V\times V)} \le \frac{\delta}{C(x_2)C}$, where C is the constant obtained in (3.17), depending only on $\mu(V) < \infty$ and $C(x_2)$ the constant in Proposition 1. Accordingly,

$$\|\mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(x')\|_{\mathcal{L}\left(L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))\right)} \le \frac{\delta}{C(x')}$$

where $\mathcal{L}\left(L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^d_y))\right)$ stands for the space of bounded linear operators from $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^d_y))$ into itself. Let $(B(x_i,\eta_\delta))_{1\le i\le I_\delta}$ be a finite covering of K: $K \subset \cup_{i=1}^{I_\delta} B(x_i,\eta_\delta)$. For any $x \in K$, we rewrite the equation $P(x)(f(x)) = g(x)$ under the form

$$P(x_i)(f(x)) = g(x) + (\mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(x_i))(f(x)).$$

It follows that

$$\begin{aligned}\|P(x_i)f(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))} &\le \|g(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))} + \|\mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(x_i)\|_{\mathcal{L}\left(L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))\right)} \|f(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))} \\ &\le \|g(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))} + \frac{\delta}{C(x_i)} \|f(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))}.\end{aligned}$$

But thanks to (3.15), we have

$$\begin{aligned}\frac{1}{C(x_i)} \|f(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))} &\le \|g(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))} \\ &= \|P(x)f(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))} \\ &\le \|g(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))} + \frac{\delta}{C(x_i)} \|f(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))}.\end{aligned}$$

We then deduce that

$$\|f(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))} \le \frac{C(x_i)}{1-\delta} \|g(x)\|_{L^2(V;B_A^2(\mathbb{R}^d_y))}. \tag{3.28}$$

Hence, we can use the constant $C = C(K,\delta) = \max\left\{\frac{C(x_i)}{1-\delta}; i = 1, ..., I_\delta\right\}$.

Now, let δ_h^i denote a differential quotient with respect to x: $\delta_h^i f(x,\cdot) = \frac{f(x+he_i,\cdot) - f(x,\cdot)}{h}$ for a fixed $1 \le i \le d$. We get from $Pf = g$ the following equation:

$$a(v)\cdot\nabla_y \delta_h^i f - Q(\delta_h^i f) = \delta_h^i g + \delta_h^i Q(f). \tag{3.29}$$

Arguing as in the proof of Lemma 3.1, we show that the right-hand side of (3.29) is bounded in $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^d_y))$ and so, $\left(\delta_h^i f\right)_{h>0}$ is also bounded in $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^d_y))$. Therefore, the application $x \mapsto f(x,\cdot)$ is differentiable with values in $L^2(V; B_A^2(\mathbb{R}^d_y))$, and we have, setting $\partial_i = \partial/\partial x_i$

$$a(v)\cdot\nabla_y \partial_i f - Q(\partial_i f) = \partial_i g + \partial_i Q(f).$$

We easily show the continuity of the right-hand side with respect to x using the continuity of f, the hypothesis on σ and (3.27). From that, we have the continuity of $\partial_i f$. These arguments can repeat for higher derivatives and apply to the adjoint problem. □

In particular, the following consequence of the lemmas above will be useful in the sequel.

Corollary 3.1. *Suppose (1.8) and (1.9) hold. Then*

(i) F and $\nabla_x F$ are continuous functions of their arguments, where F is determined by (3.13).

(ii) For any $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d_x; \mathcal{C}(V; A^1))$, satisfying the compatibility condition in Proposition 1, the solution of $Pf = g$ is a continuous function of its arguments as well as its first derivative with respect to x. A similar conclusion holds for the adjoint equation $P^*\varphi = \phi$.

4. Homogenization result: proof of Theorem 1.1

Let F be the unique solution of (3.13) in Proposition 1. We assume here that (1.9) and (1.13) hold true.

Proof of Theorem 1.1. Let $E = (\varepsilon_n)_n$ denote any ordinary sequence of positive real numbers satisfying $\varepsilon_n \to 0$ when $n \to \infty$. We denote the generic element of E by ε such that "$\varepsilon \to 0$" amounts to "$\varepsilon_n \to 0$ when $n \to \infty$". By virtue of a priori estimates (1.11), we appeal to Theorem 2.1 derive the existence of a subsequence E' of E and element $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d_T \times V; B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$, such that as $E' \ni \varepsilon \to 0$, one has

$$f_\varepsilon \to f_0 + \mathcal{N} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^d_T \times V)\text{-weak } \Sigma. \tag{4.1}$$

Thanks to Assumption (1.9) on the absorption rate σ, it belongs to $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times V \times V; B^{2,\infty}_A(\mathbb{R}^d_y))$. Now let $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^d_T \times V) \otimes A^\infty$ and define ψ^ε by $\psi^\varepsilon(t,x,v) = \psi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},v)$ $((t,x,v) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d \times V)$. Then, $\psi^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^d_T \times V)$ where $\mathbb{R}^d_T = (0,T) \times \mathbb{R}^d_x$. Multiplying the first equation in (1.3) by $\frac{1}{\varepsilon}\psi^\varepsilon$, and integrating by parts using the relation (3.4) and the fact that $\nabla_x \cdot a(v) = 0$, we obtain

$$-\int_{V \times \mathbb{R}^d_T} \left[f_\varepsilon \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a(v) \cdot (\nabla_x \psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} a(v) \cdot (\nabla_y \psi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{Q}^*\psi)^\varepsilon \right) \right] \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) = 0 \tag{4.2}$$

where $\mathcal{Q}^*$ is defined by (3.5). Multiplying (4.2) by ε^2 and passing to the limit (thanks to Theorem 2.1) as $\varepsilon \to 0$, one has

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d_T \times V} \left[f_\varepsilon (\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^\varepsilon + \varepsilon a(v) \cdot (\nabla_x \psi)^\varepsilon + a(v) \cdot (\nabla_y \psi)^\varepsilon) \right] \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) \\ &\to \int_{\mathbb{R}^d_T \times V} M\left(f_0(a(v) \cdot \nabla_y \psi)\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v). \end{aligned}$$

Next, using σ as a test function, we obtain, as $E' \ni \varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d_T \times V} f_\varepsilon (\mathcal{Q}^*\psi)^\varepsilon \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d_T \times V^2} [(\sigma^\varepsilon(x,v,w) f_\varepsilon(t,x,v) - \sigma^\varepsilon(x,w,v) f_\varepsilon(t,x,w))\psi^\varepsilon] \mathrm{d}\mu(w)\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\to \int_{\mathbb{R}^d_T \times V^2} M[(\sigma(x,\cdot,v,w) f_0 - \sigma(x,\cdot,w,v) f_0)\psi] \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(w)\mathrm{d}\mu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d_T \times V} M(f_0(\mathcal{Q}^*\psi)) \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v). \end{aligned}$$

We deduce that

$$-\int_{\mathbb{R}^d_T \times V} M(f_0(a(v) \cdot \nabla_y \psi + \mathcal{Q}^*\psi)) \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) = 0. \tag{4.3}$$

Choosing $\psi(t,x,y,v) = \varphi(t,x)\phi(y,v)$ where $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^d_T)$ and $\phi \in A^\infty \otimes \mathcal{C}^\infty(V)$, we obtain that (4.3) is equivalent to

$$-\int_{\mathbb{R}^d_T} \left(\int_V M\left(f_0(t,x,\cdot,v)\left(a(v) \cdot \nabla_y \phi(\cdot,v) + \mathcal{Q}^*\phi(\cdot,v)\right)\right) \mathrm{d}\mu(v) \right) \varphi(t,x) \mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0.$$

Since φ is arbitrarily chosen, the preceding equation leads to

$$-\int_V M\left(f_0(t,x,\cdot,v)\left(a(v)\cdot\nabla_y\phi(\cdot,v)+\mathcal{Q}^*\phi(\cdot,v)\right)\right)\mathrm{d}\mu(v)=0. \tag{4.4}$$

So let us consider, for $(t,x)\in\mathbb{R}^d_T$ be fixed, the equation: Find $F(t,x)\equiv F\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$ such that

$$a(v)\cdot\nabla_y F-\mathcal{Q}F=0 \text{ in } \mathbb{R}^d_y\times V. \tag{4.5}$$

Then, appealing to [part (i) of] Proposition 1, there exists a unique $F\in L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))$ with $\int_V M(F)\mathrm{d}\mu(v)=1$, which solves (4.5). As in the proof of (3.14), we observe that F satisfies the variational formulation

$$\int_V M\left(F(\cdot,v)\left(a(v)\cdot\nabla_y\phi(\cdot,v)+\mathcal{Q}^*\phi(\cdot,v)\right)\right)\mathrm{d}\mu(v)=0\ \forall\phi\in A^\infty\otimes\mathcal{C}^\infty(V). \tag{4.6}$$

Next, set

$$\rho_0(t,x)=\int_V M(f_0(t,x,\cdot,v))\mathrm{d}\mu(v)$$

and assume without lost of generality that ρ_0 is not identically zero. Then, this defines a function with the property that $\rho_0^{-1}(t,x)f_0(t,x,\cdot,\cdot)$ solves (4.6) and $\int_V M(\rho_0^{-1}(t,x)f_0(t,x,\cdot,v))\mathrm{d}\mu=1$. Invoking the uniqueness of the solution of (4.6) with the further normality condition $\int_V M(F)\mathrm{d}\mu(v)=1$, we get readily $F=\rho_0^{-1}f_0$, i.e.

$$f_0(t,x,y,v)=\rho_0(t,x)F(x,y,v) \text{ for a.e. } (t,x,y,v)\in\mathbb{R}^d_T\times\mathbb{R}^d_y\times V. \tag{4.7}$$

Moreover, recalling that $f_0\in L^2(\mathbb{R}^d_T\times V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y))=L^2(\mathbb{R}^d_T;L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y)))$ we see that $\rho_0\in L^2(\mathbb{R}^d_T)$.

Now let $\phi\in\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^d_T)$ and define φ by

$$P^*\varphi=-a(v)\cdot\nabla_x\phi,\ \int_V M(\varphi)\mathrm{d}\mu=0. \tag{4.8}$$

We recall that in view of (1.13), Proposition 1 and Lemma 3.2 ensure the existence of a unique $\varphi\in\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^d_x;L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y)))$ satisfying (4.8). Moreover, if we consider the vector valued function $\chi^*=(\chi^*_j)_{1\le j\le d}$ defined by

$$\begin{cases}\chi^*_j\in\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^d_x;L^2(V;B^2_A(\mathbb{R}^d_y)))\\ P^*(\chi^*_j)=-a_j(v) \text{ and } \int_V M(\chi^*_j(x,\cdot,v))\mathrm{d}\mu(v)=0,\end{cases} \tag{4.9}$$

then from the uniqueness argument, it holds that

$$\varphi(t,x,y,v)=\chi^*(x,y,v)\cdot\nabla_x\phi(t,x).$$

This being so, we choose in the variational form of (1.3) (see (4.2)) the test function $\frac{1}{\varepsilon}\psi^\varepsilon$ where

$$\psi^\varepsilon(t,x,v)=\phi(t,x)+\varepsilon\varphi\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon},v\right)$$

with ϕ be given above and φ being defined by (4.8). Then, we get

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d_T\times V} f_\varepsilon[\tfrac{\partial\phi}{\partial t}+\varepsilon\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^\varepsilon+\tfrac{1}{\varepsilon}a(v)\cdot\nabla_x\phi+a(v)\cdot(\nabla_x\varphi)^\varepsilon\\ &\quad+\tfrac{1}{\varepsilon^2}(P^*\phi)^\varepsilon+\tfrac{1}{\varepsilon}(P^*\varphi)^\varepsilon]\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v)=0.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Since ϕ is independent of y and v, we have $P^*\phi=0$. We infer from (4.8) that $a(v)\cdot\nabla_x\phi+P^*\varphi=0$, so that (4.10) becomes

$$\int_{\mathbb{R}^d_T\times V}\left[f_\varepsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^\varepsilon+a(v)\cdot(\nabla_x(\chi^*\cdot\nabla_x\phi))^\varepsilon\right)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v)=0.$$

Letting $\varepsilon \to 0$ (up to a subsequence),

$$\int_{\mathbb{R}^d_T \times V} M\left(f_0\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + a(v)\cdot\nabla_x(\chi^* \cdot \nabla_x \phi)\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) = 0. \tag{4.11}$$

We can compute each term of (4.11) as follows:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} M\left(f_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) &= \int_{\mathbb{R}^d_T}\int_V M\left(\rho_0(x,t)F(x,\cdot,v)\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d_T} \rho_0(x,t)\left(\int_V M\left(F(x,\cdot,v)\right)\mathrm{d}\mu(v)\right)\frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^d_T} \rho_0(x,t)\frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
&= -\left\langle \frac{\partial \rho_0}{\partial t}, \phi\right\rangle
\end{aligned} \tag{4.12}$$

since $\int_V M(F(x,\cdot,v))\mathrm{d}\mu(v) = 1$. Next,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} M\left(f_0 a(v)\cdot\nabla_x(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v)\\
&= \iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} M\left(\sum_{j=1}^d F a_j(v)\frac{\partial}{\partial x_j}(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)\right)\rho_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu\\
&= \sum_{j=1}^d \iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} M\left(F a_j(v)\frac{\partial}{\partial x_j}(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)\right)\rho_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu\\
&= \sum_{j=1}^d \iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} M\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(F a_j(v)(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)) - a_j(v)(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)\frac{\partial F}{\partial x_j}\right]\rho_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu\\
&= \sum_{j=1}^d \iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}M\left((F a_j(v)(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)\right) - M\left(a_j(v)(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\right]\rho_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu\\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

We first deal with I_2 to obtain

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\sum_{j=1}^d \iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} M\left(a_j(v)(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\rho_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu\\
&= -\iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} M\left((a(v)\cdot\nabla_x F)(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)\right)\rho_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu\\
&= -\sum_{i=1}^d \iint_{\mathbb{R}^d_T \times V} \rho_0 M\left((a(v)\cdot\nabla_x F)\chi_i^*\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

At this level, we set $U(x) = (U_i(x))_{1\le i\le d}$ where

$$U_i(x) = \int_V M\left(\chi_i^*(a(v)\cdot\nabla_x F)\right)\mathrm{d}\mu. \tag{4.13}$$

Then, $U_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ and

$$I_2 = \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}_T^d} \rho_0 U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \langle \mathrm{div}_x(U\rho_0), \phi\rangle .$$

As regards I_1, we have

$$I_1 = \sum_{j=1}^d \iint_{\mathbb{R}_T^d \times V} \rho_0 \frac{\partial}{\partial x_j} M\left((Fa_j(v)(\chi^* \cdot \nabla_x \phi)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu$$

and it is an easy task in seeing that the function $x \mapsto \int_V M\left((Fa_j(v)(\chi^* \cdot \nabla_x \phi)\right) \mathrm{d}\mu$ is a compactly supported $\mathcal{C}^1$ function, so that

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\mathbb{R}_T^d} \rho_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \left(\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} M\left((Fa_j(v)\chi_i^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}\mu \right) \\ &= - \sum_{i,j=1}^d \left\langle \left(\int_V M\left((Fa_j(v)(\chi^* \cdot \nabla_x \phi)\right) \mathrm{d}\mu \right), \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} \right\rangle . \end{aligned}$$

So we define the matrix $D(x) = (d_{ij})_{1\le i,j\le d}$ by $d_{ij} = \int_V M\left(\chi_i^* a_j(v) F\right) \mathrm{d}\mu$, that is,

$$D(x) = \int_V M\left(\chi^* \otimes (a(v)F)\right) \mathrm{d}\mu \text{ with } \chi^* \otimes (a(v)F) = (\chi_i^* a_j(v) F)_{1\le i,j\le d}. \tag{4.14}$$

Then,

$$I_1 = -\langle D(x)\nabla\phi, \nabla\rho_0\rangle = -\left\langle D(x)^T \nabla\rho_0, \nabla\phi\right\rangle = \left\langle \mathrm{div}_x \left(D(x)^T \nabla\rho_0\right), \phi\right\rangle$$

where $D(x)^T$ stands for the transpose of the matrix $D(x)$. It emerges that (4.11) is the variational formulation (in the usual sense of distributions) of

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} - \mathrm{div}_x \left(D(x)^T \nabla_x \rho_0 + U(x)\rho_0\right) = 0 \text{ in } \mathbb{R}_T^d \tag{4.15}$$

where $D(x)$ and $U(x)$ are defined, respectively, by (4.14) and (4.13).

Let us now pay attention to the initial condition satisfied by f_0. We assume without losing the generality that the function ρ_0 is smooth enough. Let us consider a similar test function $\psi^\varepsilon(t,x,v) = \phi(t,x) + \varepsilon\varphi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},v)$ as defined in (4.8), but with $\phi(t,x) = \eta(t)\phi(x)$, where $\eta \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ and $\eta(T) = 0$. It is already known that there exists a unique $\chi^* \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times V; B_A^2(\mathbb{R}_y^d))$ satisfying (4.9), so that $\psi^\varepsilon(t,x,v) = \eta(t)(\phi(x) + \varepsilon\chi^*(x,\frac{x}{\varepsilon},v)\cdot\nabla_x\phi(x))$. Then,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_T^d \times V} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} \psi^\varepsilon \mathrm{d}t\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}_x^d \times V} \left(\int_0^T \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} \psi^\varepsilon \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}_x^d \times V} \left[\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t}(f_\varepsilon \psi^\varepsilon) - f_\varepsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^\varepsilon \right) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) \\ &= -\eta(0) \int_{\mathbb{R}_x^d \times V} (f_\varepsilon)_{t=0} (\phi + \varepsilon(\chi^*)^\varepsilon \cdot \nabla_x \phi) \mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_T^d \times V} \eta' f_\varepsilon (\phi + \varepsilon(\chi^*)^\varepsilon \cdot \nabla_x \phi) \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) \\ &= -\eta(0) \int_{\mathbb{R}_x^d \times V} f_\varepsilon^{in} (\phi + \varepsilon(\chi^*)^\varepsilon \cdot \nabla_x \phi) \mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_T^d \times V} \eta' f_\varepsilon (\phi + \varepsilon(\chi^*)^\varepsilon \cdot \nabla_x \phi) \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v). \end{aligned} \tag{4.16}$$

But thanks to the first equation of (1.3), we have

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}(t,x,v) = -\frac{1}{\varepsilon}a(v)\cdot\nabla_x f_\varepsilon(t,x,v) + \frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon(t,x,v). \tag{4.17}$$

Multiplying (4.17) by $\psi^\varepsilon(t,x,v) = \phi(t,x) + \varepsilon\varphi(t,\frac{x}{\varepsilon},x,v) = \eta(t)(\phi(x) + \varepsilon\chi^*(x,\frac{x}{\varepsilon},v)\cdot\nabla_x\phi(x))$ and integrating by parts on $\mathbb{R}^d_T \times V$, one has for each term in the right-hand side,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d_T\times V}\psi^\varepsilon(a(v)\cdot\nabla_x f_\varepsilon)\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad = -\int_{\mathbb{R}^d_T\times V}\eta f_\varepsilon[a(v)\cdot\nabla_x\phi + \varepsilon a(v)\cdot(\nabla_x\varphi)^\varepsilon + a(v)\cdot(\nabla_y\varphi)^\varepsilon]\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.18}$$

and (in view of (3.4), and since $\mathcal{Q}^*_\varepsilon\phi = 0$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d_T\times V}\psi^\varepsilon(\mathcal{Q}_\varepsilon f_\varepsilon)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v) &= \int_{\mathbb{R}^d_T\times V} f_\varepsilon\eta(t)(\mathcal{Q}^*_\varepsilon(\phi+\varepsilon\varphi^\varepsilon)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v)\\ &= \varepsilon\int_{\mathbb{R}^d_T\times V} f_\varepsilon\eta(t)(\mathcal{Q}^*_\varepsilon\varphi)^\varepsilon\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Taking into account (4.16)-(4.19), we obtain

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d_T\times V} f_\varepsilon\left(\eta'(\phi+\varepsilon(\chi^*)^\varepsilon\cdot\nabla_x\phi) + \eta\left[a(v)\cdot(\nabla_x\varphi)^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\left\{(P^*\varphi)^\varepsilon + a(v)\cdot\nabla_x\phi\right\}\right]\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v)\\ &= \eta(0)\int_{\mathbb{R}^d_x\times V} f^0(\phi+\varepsilon(\chi^*)^\varepsilon\cdot\nabla_x\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v).\end{aligned}$$

Passing to the limit as $E' \ni \varepsilon \to 0$, using the fact that $P^*(\varphi) = -a(v)\cdot\nabla_x\phi$ and $\varphi = \chi^*\cdot\nabla_x\phi$, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^d_T\times V} M(f_0[\eta'\phi + \eta a(v)\cdot\nabla_x(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)])\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x = \eta(0)\int_{\mathbb{R}^d_x\times V} f^0(x,v)\phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(v). \tag{4.20}$$

Now, integrating by part the left-hand side of (4.20) over t and x, using (3.13) and (4.7), we have

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d_T\times V} M(f_0[\eta'\phi + \eta a(v)\cdot\nabla_x(\chi^*\cdot\nabla_x\phi)])\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu(v)\mathrm{d}x\\ &\quad = -\int_{\mathbb{R}^d_T}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial t} - \mathrm{div}_x\,(U(x)\rho_0) - \mathrm{div}_x\left(D(x)^T\nabla_x\rho_0\right)\right)\eta(t)\phi(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &\qquad + \eta(0)\int_{\mathbb{R}^d_x}\rho_0(0,x)\phi(x)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{4.21}$$

where $U(x)$ and $D(x)$ are defined above. Combining (4.20) and (4.21) in view of (4.15), we are led to

$$\eta(0)\int_{\mathbb{R}^d_x}\rho_0(0,x)\phi(x)\mathrm{d}x = \eta(0)\int_{\mathbb{R}^d_x}\left(\int_V f^0(x,v)\mathrm{d}\mu(v)\right)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

And thanks once more to the equivalence in the sense of distributions, we obtain

$$\rho_0(0,x) = \int_V f^0(x,v)\mathrm{d}\mu(v) \text{ in } \mathbb{R}^d_x. \tag{4.22}$$

Combining (4.15) and (4.22), we get (1.14).

To end this proof, we just notice that it is a standard process to prove existence and uniqueness for (1.14); see, for example, [19]. □

Remark 4.1. In the proof of Theorem 1.1, we have used the condition (1.13). However, it is worth noticing that (1.13) is made only for simplification of the presentation of the results. It is to ensure the existence of the solution to (4.9). If it is not satisfied, we may replace in (4.9) the function $a_j(v)$ (where $a(v) = (a_j(v))_{1\le j\le d}$) by $a_j(v) - \int_V M(a_j(v)F(x,\cdot,v))\mathrm{d}\mu(v)$, so that the solution of the corresponding equation exists. As seen in [14], the conclusion of Theorem 1.1 still holds, but with a slightly change on the coefficients $D(x)$ and $U(x)$.

5. Applications of Theorem 1.1 to some physical situations

The proof of Theorem 1.1 has been performed under the abstract assumption (1.9). This assumption models in some sense the way the heterogeneities (microstructures) are distributed in the medium in which the phenomenon occurs. As we have seen in the statement of Theorem 1.1, (1.9) plays a crucial role in determining of the drift and diffusion operators, in that their coefficients depend on functions having the same behaviour as the function $y \mapsto \sigma(x,y,v,w)$. In this section, we provide some physical situations in which (1.9) holds.

5.1. Periodic homogenization problem

We assume in this section that the microstructures are uniformly distributed in the medium here represented by $\mathbb{R}^d_x$. This amounts to saying that the scattering rate function is periodic with respect to the variable y. We may without losing the generality assume that the function $y \mapsto \sigma(x,y,v,w)$ is periodic of period 1 in each direction, that is,

$$\sigma(x,y+k,v,w) = \sigma(x,y,v,w) \text{ for all } (x,v,w) \in \mathbb{R}^d \times V \times V, \text{ all } k \in \mathbb{Z}^d \text{ and a.e. } y \in Y$$

where $Y = (0,1)^d$ and $\mathbb{Z}$ denotes the integers. Then, we are led to (1.9) with $A = \mathcal{C}_{per}(Y)$, the Banach algebra of continuous Y-periodic functions on $\mathbb{R}^d$, which is an algebra with mean value, the mean value being here determined by $M(u) = \int_Y u(y)\mathrm{d}y$ for any $u \in \mathcal{C}_{per}(Y)$. In that case, we have $B^p_A(\mathbb{R}^d) = L^p_{per}(Y)$ $(1 \le p \le \infty)$, the Banach space of functions $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ that are Y-periodic. Assumptions (1.9) and (1.13) become, respectively,

$$\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times V \times V; L^\infty_{per}(Y)) \tag{5.1}$$

and

$$\iint_{Y\times V} a(v)F(x,\cdot,v)\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v) = 0 \text{ and } F > 0 \text{ a.e.}. \tag{5.2}$$

Finally, the compactness assumption (3.10) on K is proved in [14, Lemma A.1], and Theorem 1.1 therefore takes the following form.

Theorem 5.1. *Let A be an algebra with mean value on $\mathbb{R}^d$. Assume (5.1) and (5.2) hold. For each $\varepsilon > 0$, let f_ε be the unique solution of (1.3). Then, there exists $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d_T \times V; L^2_{per}(Y))$ such that the sequence $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in E}$ weakly two-scale converges in $L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d_x \times V)$ towards f_0. Moreover, f_0 has the form $f_0(t,x,y,v) = F(x,y,v)\rho_0(t,x)$ where $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d_x; L^2(V; L^2_{per}(Y)) \cap \ker P)$ is given by (1.12) and ρ_0 is the unique solution of the Cauchy problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} - \mathrm{div}_x\left(D(x)^T\nabla_x\rho_0 + U(x)\rho_0\right) = 0 \text{ in } (0,T)\times\mathbb{R}^d_x \\ \rho_0(0,x) = \int_V f^0(x,v)\mathrm{d}\mu(v) \text{ in } \mathbb{R}^d_x \end{cases}$$

where

$$D(x) = \iint_{Y\times V} \chi^* \otimes (a(v)F)\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v) = \left(\iint_{Y\times V} \chi^*_i a_j(v)F\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v)\right)_{1\le i,j\le d}$$

with $(\chi^* \otimes a(v)F) = (\chi_i^* a_j(v)F)_{1\leq i,j\leq d}$,

$$U(x) = \iint_{Y\times V} \chi^* a(v)\cdot \nabla_x F \mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v) = \left(\iint_{Y\times V} \chi_i^* a(v)\cdot \nabla_x F \mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v)\right)_{1\leq i\leq d}$$

and where χ^* *the unique solution in* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times V; L^2_{per}(Y))^d$ *of the corrector problem:*

$$P^*\chi^* = -a(v) \text{ and } \iint_{Y\times V} \chi^*(x,\cdot,v)\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(v) = 0,$$

P^* *being the adjoint operator of* P.

Theorem 5.1 is nothing else but Theorem 3.11 in [14].

5.2. Almost periodic homogenization problem

We assume in this subsection that the microstructures are almost uniformly distributed in the medium, which we represent by the function $y \mapsto \sigma(x,y,v,w)$ is almost periodic in the Besicovitch sense [7]. It is an easy exercise in seeing that the convenient algebra with mean value we should use here is the Banach algebra $A = AP(\mathbb{R}^d)$ of continuous almost periodic functions defined on $\mathbb{R}^d$ [9]. A function $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ is said to be continuous almost periodic (or Bohr almost periodic) if the set of all its translates $\{u(\cdot + a) : a \in \mathbb{R}^d\}$ is pre-compact in the sup-norm topology in $\mathbb{R}^d$. The Banach algebra $AP(\mathbb{R}^d)$ is an algebra with mean value with the property that the mean value of a function $u \in AP(\mathbb{R}^d)$ is the unique constant belonging to the closed convex hull of the family of the translates $\{u(\cdot + a) : a \in \mathbb{R}^d\}$; see, for example, [15].

With this in mind, we observe that the space $B^2_A(\mathbb{R}^d)$ is actually the well-known Besicovitch space of almost periodic functions on $\mathbb{R}^d$ [7]. Finally, by using the averaging lemma (see, for example, [12, Chap. XXI.5]) we prove the assumption (3.10) on K. The conclusion of Theorem 1.1 holds in this case, and it is a generalization of the periodic setting since any periodic function is also almost periodic.

5.3. Asymptotic periodic homogenization problem

In this subsection, we assume that the medium is a periodic one with defects, that is, the microstructures are up to local perturbations, uniformly distributed. This means that the function $y \mapsto \sigma(x,y,v,w)$ can be obtained as a sum of a periodic function and a function that vanishes at infinity. The suggested algebra with mean value in this case is therefore $A = \mathcal{C}_{per}(Y) + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ where $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ stands for the space of those continuous functions u in $\mathbb{R}^d$ that vanish at infinity. Since $\lim_{|y|\to\infty} u(y) = 0$ for any $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, any element in A is asymptotically a periodic function. The mean value of a function in A is defined as follows: for $A \ni u = u_{per} + u^0$ with $u_{per} \in \mathcal{C}_{per}(Y)$ and $u^0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, $M(u) = \int_Y u_{per}(y)\mathrm{d}y$.

Now, for assumption (3.10), we first notice that if we denote by $L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d)$ the Besicovitch space associated with $A = \mathcal{C}_{per}(Y) + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, then $L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d) = L^2_{per}(Y) + L^2_0(\mathbb{R}^d)$ where $L^2_0(\mathbb{R}^d)$ is the closure of $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ in Marcinkiewicz space $\mathfrak{M}^2(\mathbb{R}^d)$ (see 2.1), and is clearly defined by

$$L^2_0(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d) : M(|u|^2) = 0\}.$$

Denoting by $\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d) = L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d)/L^2_0(\mathbb{R}^d)$ the Banach counterpart of $L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d)$, we get by the first isomorphism theorem that $\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d) \cong L^2_{per}(Y)$. But the isomorphism $\cong$ is also an isometry, so that the topological properties of $L^2_{per}(Y)$ are carried over to $\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d)$. The compactness of K (defined on $L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d)$) is therefore a simple consequence of its compactness (considered as defined) in $L^2_{per}(Y)$.

Indeed, let us first denote by Γ the topological isometric isomorphism defined from $L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d))$ onto $L^2(V;L^2_{per}(Y))$ by

$$\Gamma(f)(y,v)=\gamma(f(\cdot,v))(y) \text{ for } f\in L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d))$$

where γ stands for the isometric isomorphism from $\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d)$ onto $L^2_{per}(Y)$. Next, let $(f_n)_n$ be a sequence in $D(P)=\{u\in L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d)):a(v)\cdot\nabla_y u\in L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d))\}$ such that $f_n\to 0$ in $D(P)$-weak. Then, denoting by $\widetilde{f}_n$ the class of f_n defined by $\widetilde{f}_n=f_n+L^2_0(\mathbb{R}^d)$, we get $\widetilde{f}_n\to\widetilde{0}$ in $D(\mathcal{P})$-weak, where $\mathcal{P}$ is defined by (3.9). It follows that

$$\Gamma(\widetilde{f}_n)\to\Gamma(\widetilde{0}) \text{ in } D(P_{per})\text{-weak}$$

where P_{per} is the operator P defined on $L^2(V;L^2_{per}(Y))$ (that is corresponding to the algebra with mean value $A=C_{per}(Y)$). Then, using the compactness of K from $D(P_{per})$ into $L^2(V;L^2_{per}(Y))$, we obtain, up to a subsequence of $(\widetilde{f}_n)$ not relabelled, that $K(\Gamma(\widetilde{f}_n))\to 0$ in $L^2(V;L^2_{per}(Y))$-strong. But the series of equalities

$$\left\|K(\Gamma(\widetilde{f}_n))\right\|_{L^2(V;L^2_{per}(Y))}=\left\|K(\widetilde{f}_n)\right\|_{L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d))}=\|K(f_n)\|_{L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d))}$$

(in which we used the same notation K for the operator defined on both $L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d))$ and $L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d)))$ entail $K(f_n)\to 0$ in $L^2(V;L^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d))$-strong up to another subsequence of $(f_n)_n$. This shows the compactness of K.

5.4. Asymptotic almost periodic homogenization problem

In Sect. 5.3, we may replace $\mathcal{C}_{per}(Y)$ by $AP(\mathbb{R}^d)$ and get the algebra of asymptotic almost periodic functions denoted by $A=AP(\mathbb{R}^d)+\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. In this case, we may assume that the function $y\mapsto\sigma(x,y,v,w)$ belongs to $B^2_A(\mathbb{R}^d)$. We proceed as in Sect. 5.3 to show that the assumption (3.10) is satisfied. This is achieved by considering the counterpart of the mapping Γ defined in $L^2(V;\mathcal{L}^2_{\infty,per}(\mathbb{R}^d))$ in the previous subsection. In the current subsection, it is defined on $L^2(V;\mathcal{B}^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^d))$ where $\mathcal{B}^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^d)=B^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^d)/\mathcal{N}$ with $B^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^d)=B^2_A(\mathbb{R}^d)$, $A=AP(\mathbb{R}^d)+\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ and $\mathcal{N}=\{u\in B^2_{\infty,ap}(\mathbb{R}^d):M(|u|^2)=0\}$. The conclusion of Theorem 1.1 holds as well.

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

References

[1] Bardos, C., Hutridurga, H.: Simultaneous diffusion and homogenization asymptotic for the linear Boltzmann equation. Asympt. Anal. **100**, 111–130 (2016)

[2] Bardos, C., Bernard, E., Golse, F., Sentis, R.: The diffusion approximation for the linear Boltzmann equation with vanishing absorption, Prepublication of ljll.math.upmc.fr (2012)

[3] Bardos, C., Bernard, E., Golse, F., Sentis, R.: The diffusion approximation for the linear Boltzmann equation with vanishing scattering coefficient. Commun. Math. Sci. **13**, 641–671 (2015)

[4] Bardos, C., Santos, R., Sentis, R.: Diffusion approximation and computation of the critical size. Trans. Am. Math. Soc. **284**, 617–649 (1984)

[5] Ben Abdallah, N., Tayeb, M.L.: Diffusion approximation and homogenization of the semiconductor Boltzmann equation. Multiscale Model. Simul. **4**, 896–914 (2005)

[6] Bernard, E., Caglioti, E., Golse, F.: Homogenization of the linear Boltzmann equation in a domain with a periodic distribution of holes. SIAM J. Math. Anal. **42**, 2082–2113 (2010)

[7] Besicovitch, A.S.: Almost Periodic Functions. Dover Publications, Cambridge (1954)

[8] Bonsall, F.F.: Linear operators in complete positive cones. Proc. Lond. Math. Soc. **8**, 53–75 (1958)

[9] Bohr, H.: Almost Periodic Functions. Chelsea, New York (1947)
[10] Brezis, H.: Analyse fonctionnelle: Théorie et applications. Masson, Paris (1983)
[11] Casado Diaz, J., Gayte, I.: The two-scale convergence method applied to generalized Besicovitch spaces. Proc. R. Soc. Lond. A **458**, 2925–2946 (2002)
[12] Dautray, R., Lions, J.-L.: Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, vol. 3. Masson, Paris (1985)
[13] Diperna, R.J., Lions, P.-L.: Global weak solutions of kinetic equations. Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino **46**, 260–288 (1988)
[14] Goudon, T., Mellet, A.: Homogenization and diffusion asymptotics of the linear Boltzmann equation. ESAIM COCV **9**, 371–398 (2003)
[15] Jacobs, K.: Measure and Integral. Academic Press, Cambridge (1978)
[16] Jikov, V.V., Kozlov, S.M., Oleinik, O.A.: Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. Springer, Berlin (1994)
[17] Kenne B, R., Nguetseng, G., Woukeng, J.L.: Deterministic homogenization of Vlasov equations. Math. Methods Appl. Sci. **43**, 1359–1379 (2020)
[18] Krein, M.G., Rutman, M.A.: Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. (Russian) Uspehi Matem. Nauk (N. S.) **3**, (1948). no. 1(23), 3–95. English translation: American Math. Soc. Translation 26
[19] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A., Uralceva, N.N., Smith, S.: Linear and quasilinear equations of parabolic type. LW Singer Co., AMS (1968)
[20] Lorentz, H.A.: Le mouvement des électrons dans les métaux. Arch. Neerl. **10**, 336–371 (1905)
[21] Masmoudi, N., Tayeb, M.L.: Diffusion and homogenization approximation for semiconductor Boltzmann-Poisson system. J. Hyperbolic Differ. Equ. **5**, 65–84 (2008)
[22] Mihalas, B.W., Mihalas, D.: Foundations of Radiation Hydrodynamics. Oxford University Press, Oxford (1984)
[23] Nguetseng, G.: Homogenization structures and applications I. Z. Anal. Anwen. **22**, 73–107 (2003)
[24] Nguetseng, G., Sango, M., Woukeng, J.L.: Reiterated ergodic algebras and applications. Commun. Math. Phys. **300**, 835–876 (2010)
[25] Pomraning, G.: The Equations of Radiation Hydrodynamics. Pergamon Press, Oxford (1973)
[26] Reed, M., Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics: Functionnal Analysis, vol. I. Academic Press, New York (1980)
[27] Sango, M., Svanstedt, N., Woukeng, J.L.: Generalized Besicovitch spaces and applications to deterministic homogenization. Nonlin. Anal. TMA **74**, 351–379 (2011)
[28] Schaefer, H.: Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorraüme. lI. Math. Ann. **138**, 259–286 (1959)
[29] Sinai, Ya G. (ed.): Dynamical Systems, III. Springer, New York (1980)
[30] Weinberg, A., Wigner, E.: The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. The Universityof Chicago Press, Chicago (1958)
[31] Woukeng, J.L.: Homogenization in algebras with mean value and applications. Banach J. Math. **9**, 142–182 (2015)
[32] Woukeng, J.L.: Introverted algebras with mean value and applications. Nonlinear Anal. TMA **99**, 190–215 (2014)
[33] Woukeng, J.L.: Homogenization of nonlinear degenerate non-monotone elliptic operators in domains perforated with tiny holes. Acta Appl. Math. **112**, 35–68 (2010)
[34] Zhikov, V.V., Krivenko, E.V.: Homogenization of singularly perturbed elliptic operators, Matem. Zametki, **33** (1983), 571–582 (english transl.: Math. Notes, **33** (1983), 294–300)

P. Fouegap, D. Dongo and J. L. Woukeng
Department of Mathematics and Computer Science
University of Dschang
P.O. Box 67Dschang
Cameroon
e-mail: jwoukeng@yahoo.fr

P. Fouegap
e-mail: minlefack@gmail.com

D. Dongo
e-mail: dongodavid@yahoo.fr

R. Kenne Bogning and G. Nguetseng
Department of Mathematics
University of Yaounde I
P.O. Box 812Yaounde
Cameroon
e-mail: rodriguekenne@ymail.com

G. Nguetseng
e-mail: nguetsengg@yahoo.fr

(Received: May 7, 2020; revised: August 26, 2020; accepted: August 29, 2020)