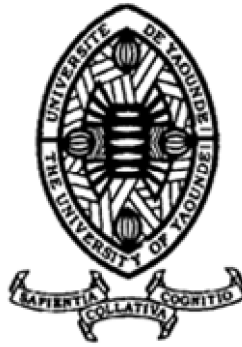


REPUBLIQUE DU
CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES,
TECHNOLOGIES ET GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN PHYSIQUE
ET APPLICATIONS

B.P 812 Yaoundé
Email: crfd_stg@uy.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland

THE UNIVERSITY OF
YAOUNDE I
POSTGRADUATE SCHOOL OF
SCIENCE, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE
TRAINING UNIT FOR PHYSICS AND
APPLICATIONS

P.O. Box 812 Yaounde
Email: crfd_stg@uy.uninet.cm

LABORATOIRE DE MECANIQUE APPLIQUEE ET D'HYDRAULIQUE

**ECOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX
PAR INJECTION DANS L'ESPACE
COMPRIS ENTRE DEUX DISQUES POREUX
EN MOUVEMENT TRANSVERSAL**

THESE

Présentée en vue de l'obtention du Doctorat/PhD en Physique

Spécialité : Mécanique des Fluides et Hydraulique

Par :

LEHEL Fils Raymond Patrick

Matricule : 10W0391

Titulaire du Master de Physique



Sous la Direction de :

HONA Jacques, PhD

Maître de Conférences

Faculté des Sciences

Université de Yaoundé I

Année 2022



DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THÈSE DE
DOCTORAT/PhD

Nous soussignés, Professeur **NJANDJOCK NOUCK Philippe** et Professeur **BEN-BOLIE Germain Hubert**, respectivement Président et Examineur du jury de la Thèse de Doctorat/PhD de Monsieur **LEHEL Fils Raymond Patrick**, Matricule **10W0391**, préparée sous la supervision du Professeur **HONA Jacques**, intitulée : « **Ecoulement d'un fluide visqueux par injection dans l'espace compris entre deux disques poreux en mouvement transversal** », soutenue le **Vendredi, 16 Décembre 2022 à 09 heures**, dans la salle **S01/S02**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/PhD en Physique, Spécialité **Mécanique Appliquée**, Option **Mécanique des Fluides et Hydraulique**, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le **T.2 JAN 2023**

Examineur

Pr. BEN-BOLIE Germain

Président du jury

Pr. NJANDJOCK NOUCK Philippe

Le Chef de Département de Physique



Pr. NDJAKA Jean-Marie Bienvenu

DEDICACES

A la mémoire de mon défunt père LEHEL Benjamin

REMERCIEMENTS

Le thème de recherche soumis à notre étude a abouti à la rédaction de cette Thèse de Doctorat/PhD après plusieurs années de travail acharné. Cet aboutissement est le résultat de plusieurs contributions venant des encadreurs techniques, administratifs et de bien d'autres secteurs dans mon entourage immédiat. Je tiens donc à adresser mes remerciements à ces personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réussite de ce projet.

Je remercie profondément le Dieu tout puissant, créateur du ciel et de la terre pour la santé, la volonté et la sagesse qu'il m'a accordées afin de pouvoir exécuter ce travail de thèse.

Je remercie particulièrement mon directeur de mémoire de thèse le **Pr. HONA Jacques, Maître de Conférences**, pour avoir accepté de me diriger dans ce travail, pour les conseils sur le plan académique en particulier et de la vie en général. Je suis vraiment reconnaissant pour tout ce que j'ai appris à ses côtés. Sa disponibilité, son amour du travail bien fait, sa précision sur les tâches à faire, son esprit scientifique poussé et sa capacité à me motiver dans le travail tout en restant à l'écoute de mes problèmes quotidiens ont contribué efficacement à l'obtention des résultats présentés dans ce document. Dans cette relation entre mon directeur de thèse et moi, je peux dire clairement sans risque de me tromper que ce dernier s'est comporté auprès de moi comme un père qui souhaite voir son enfant réussir dans toutes les actions entreprises dans sa vie. Je lui dis une fois de plus merci.

Je remercie les autorités administratives et scientifiques de l'Université de Yaoundé I pour avoir permis l'aboutissement de ce projet. Je pense particulièrement à Monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, le **Pr. Maurice Aurélien SOSSO** ; Monsieur de Doyen de la Faculté des Sciences, **Pr. Jean Claude TCHOUANKEU** ; Monsieur le Chef de Département de Physique, **Pr. NDAKA Jean-Marie Bienvenu** ; Monsieur le Coordonnateur du Centre de Recherche et de Formation Doctorale en Sciences, Technologies et Géosciences, **Pr. PEGNYEMB Dieudonné** ; Monsieur le Coordonnateur de

l'Unité de Recherche et de Formation Doctorale en Physique et Applications, le **Pr. Luc Calvin OWONO OWONO**.

Je Remercie les éminents Professeurs qui ont bien voulu honorer de leur présence aux Jurys qui ont été constitués depuis la pré-soutenance, l'audition et pour la soutenance de cette thèse de Doctorat/PhD.

Mes remerciements vont également à l'endroit de tous les enseignants du Département de Physique qui ont intervenu dans ma formation par leurs unités d'enseignement respectives.

Je remercie les aînés du Laboratoire de Mécanique Appliquée, notamment **Dr. Martin NDI AZESE, Dr. BILONG II Jean, Dr. LAMARA Maurice, Dr. NYEMB NSOGA Valjacques, Dr. NGANBE II Médard Marcus** pour les discussions constructives qu'ils ont eues avec moi à propos de mes travaux de thèse.

Je remercie mes camarades de promotion, notamment **KALDJOP POM Gabriel, BONG Christopher Alain, TIENDJOU TIOMBOU Michael, SAMI Hollandine, ABOUEM ATOK Bernardin, ESSI Luc Gervais et Dr. MAKON NOE Richard**, pour l'ambiance chaleureuse et amicale qu'ils ont entretenue au sein du Laboratoire de Mécanique Appliquée.

Je dis particulièrement merci à mon parrain **TABI DZOU Blaise**, pour son soutien multiforme.

Je dis merci à tous les membres de ma famille qui m'ont soutenu, notamment ma mère, mes frères et sœurs, mes grand-parents, mes oncles et tantes. J'adresse aussi ma gratitude à mes amis qui de près ou de loin ont contribué à l'aboutissement de ce travail de thèse.

Enfin, je dis merci à tous ceux ou celles dont je ne peux citer nommément ici, qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

DEDICACES	i
REMERCIEMENTS	iii
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES SYMBOLE ET ABREVIATIONS	viii
RESUME	x
ABSTRACT	xi
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : REVUE DE LA LITTERATURE	8
I.1 ECOULEMENT D’UN FLUIDE VISQUEUX ENTRE DEUX PAROIS FIXES ET POREUSES	10
I.1.1 Domaine géométrique de l’écoulement	10
I.1.2 Equations du mouvement d’un fluide entre deux parois poreuses fixes	11
I.1.3 Contraintes spatiales de l’écoulement	12
I.1.4 Equations en variables réduites	12
I.1.5 Réduction du nombre d’équations du mouvement.....	14
I.1.5.1 Phénomènes tourbillonnaires	14
I.1.5.2 Equation du tourbillon.....	17
I.1.6 Méthode de séparation des variables	19
I.1.7 Bifurcations hydrodynamiques.....	20
I.1.8 Trajectoires des particules fluides	26
I.2 MOUVEMENT D’UN FLUIDE VISQUEUX ENTRE DEUX PAROIS POREUSES ACCELEREES	28
I.2.1 Vitesse longitudinale.....	28
I.2.2 Présentation des termes de pression	32
I.2.3 Présentation du champ de l’écoulement	33
Conclusion	36
CHAPITRE II : FORMULATION DU PROBLEME ET METHODE DE RESOLUTION	37

II.1 PRESENTATION DE L'ESPACE CONTENANT LE FLUIDE.....	38
II.2 DESCRIPTION MATHEMATIQUE DU PROBLEME.....	40
II.2.1 Equations du mouvement.....	40
II.2.2 Conditions aux limites	41
II.2.3 Prise en compte du mouvement des frontières de l'écoulement	42
II.2.4. Equation de débits	44
II.2.5 Définition de la fonction de courant.....	46
II.2.6 Définition du vecteur tourbillon et obtention de l'équation de vorticité	46
II.2.6.1 Définition du vecteur rotation du fluide	47
II.2.6.2 Equation de vorticité.....	47
II.3 METHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES	49
II.3.1 Equations du problème	50
II.3.2 Position du problème	52
II.3.3 Introduction des variables adimensionnelles	53
II.4 METHODE DE RESOLUTION.....	59
Conclusion.....	65
CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION	66
III.1. PROFILS DE VITESSE RADIALE DE L'ECOULEMENT.....	69
III.2. PROFILS DE VITESSE AXIALE DE L'ECOULEMENT	75
III.3. GRADIENTS DE PRESSION	80
III.4 LIGNES DE COURANT	87
III.4.1 Lignes de courant pour un faible nombre de Reynolds	90
III.4.2 Lignes de courant pour une valeur modérée du nombre de Reynolds	92
III.4.3 Lignes de courant pour une grande valeur du nombre de Reynolds	93
Conclusion.....	94
CONCLUSION GENERALE.....	96
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	101
ANNEXES	115

LISTE DES FIGURES

- Figure I.1 : Canal de l'écoulement [92, 95, 137]. **10**
- Figure I.2: Diagramme de bifurcations représentant les valeurs du coefficient de frottement au niveau de la paroi supérieure [92, 93]. **22**
- Figure I.3: Diagramme de bifurcations représentant les valeurs du coefficient de frottement au niveau de la paroi inférieure [148]. **23**
- Figure I.4: Diagramme de la bifurcation fourche représentant le coefficient de frottement au niveau de la paroi interne [148]. **24**
- Figure I.5: Comparaison des valeurs des coefficients de frottement sur les parois externe et interne [148]. **25**
- Figure I.6 : Trajectoires des particules fluides, (a) sur la branche I pour $R = 5.175$, (b) sur la branche I_1 pour $R = 13.035$, (c) sur la branche I_1' pour $R = 13.035$, (d) sur la branche II avec écoulement inverse pour $R = 12.645$, (e) sur la branche II en l'absence de l'écoulement inverse pour $R = 14.355$, (f) sur la branche III pour $R = 17.50$ [148]. **27**
- Figure I. 7 : Vitesse longitudinale pour : (a) deux valeurs fixes du coefficient d'accélération et différentes valeurs du nombre de Reynolds (b) deux valeurs fixes du nombre de Reynolds de succion et d'injection et pour différentes valeurs du coefficient d'accélération [83, 99, 135]. **29**
- Figure I. 8 : Vitesse transversale, (a) pour deux valeurs fixes du coefficient d'accélération et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds de succion ou d'injection, (b) pour deux valeurs fixes du nombre de Reynolds de succion et d'injection et pour différentes valeurs du coefficient d'accélération [83, 99, 135]. **31**
- Figure I. 9 : Gradient transversal de pression, (a) pour des valeurs fixées du coefficient d'accélération/décélération et pour différentes valeurs des nombres de Reynolds d'injection et de succion, (b) pour un nombre de Reynolds de succion fixé et pour différente valeur du coefficient

d'accélération/décélération, (c) pour un nombre de Reynolds d'injection fixé et pour différentes valeurs du coefficient d'accélération/décélération [135]. **33**

Figure I. 10 : Lignes de courant de suction (a) $R = -20$, (b) $R = -5$ et d'injection (c) $R = 5$, (d) $R = 25$, en considérant les parois immobiles ($\gamma = 0$, lignes en traits continus), les parois accélérées ($\gamma = +2$, lignes en traits interrompus), ainsi que les parois décélérées ($\gamma = -2$, lignes en pointillés) [149]. **35**

Figure II.1 : Espace géométrique de l'écoulement. **38**

Figure II.2 : Présentation du cylindre de rayon r^* , d'axe de symétrie z^* et de longueur ou de hauteur $2a$ **39**

Figure III.1 : Vitesse radiale pour $R = 3$, et pour différentes valeurs de α **69**

Figure III.2 : Vitesse radiale pour $R = 25$, et pour différentes valeurs de α **72**

Figure III.3 : Vitesse radiale pour $R = 200$, et pour différentes valeurs de α **74**

Figure III.4 : Vitesse axiale pour $R = 3$, et pour différentes valeurs de α **76**

Figure III.5 : Vitesse axiale pour $R = 25$, et pour différentes valeurs de α **78**

Figure III.6 : Vitesse axiale pour $R = 200$, et pour différentes valeurs de α **79**

Figure III.7 : Gradient de pression transversale pour $R = 3$, et pour différentes valeurs de α **83**

Figure III.8 : Gradient de pression transversale pour $R = 25$, et pour différentes valeurs de α **85**

Figure III.9 : Gradient de pression transversale pour $R = 200$, et pour différentes valeurs de α **86**

Figure III.10 : Lignes de courant pour $R = 5$ **90**

Figure III.11 : Lignes de courant pour $R = 25$ **92**

Figure III.12 : Lignes de courant pour $R = 200$ **93**

LISTE DES SYMBOLE ET ABREVIATIONS

Symboles alphabétiques	significations	Unités
dt	Elément de temps	s
$d\omega$	Elément de volume	m^3
F	Force de contact	N
f	Force de volume	N
F	Fonction de courant par unité de longueur	m/s
g	Force de masse	N
$h = a$	Demi-largeur du canal	m
$(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k})$	Base cylindrique usuelle	<i>Sans unité</i>
$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$	Base cartésienne usuelle	<i>Sans unité</i>
m	Masse du fluide contenu dans le domaine	Kg
n	Normale unitaire	<i>Sans unité</i>
p	Pression	Pa
r_ρ	Rapport des masses volumiques du solide et du fluide	<i>Sans unité</i>
η	Variable axiale adimensionnelle	<i>Sans unité</i>
γ	Coefficient d'accélération	<i>Sans unité</i>
u_n	Vitesse de débit	m/s
b, c	Valeur tests	<i>Sans unité</i>
K	Fonction cout	
(S)	Surface fermée	m^2
R	Nombre de reynolds	<i>Sans unité</i>
t	Temps	s
E	Coefficient d'injection	<i>Sans unité</i>
α	Paramètre	<i>Sans unité</i>
T_c	Tension ou contrainte	N/m^2
T_f	Contrainte tangentielle	N/m^2
T_n	Contrainte normale	N/m^2
V	Champ de Vitesse	$m.s^{-1}$
V_x, V_y, V_z	Composantes du vecteur vitesse suivant les trois axes du repère cartésien	$m.s^{-1}$
V_r, V_θ, V_z	Composantes du vecteur vitesse suivant les trois axes du repère cylindrique	$m.s^{-1}$

x, y, z	Coordonnées cartésiennes	m
(r, θ, z)	système de coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires	(m, rad, m)
Symboles grecs	Significations	
δ_{jk}	Symbole de Kronecker	<i>Sans unité</i>
κ	Conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
μ	Viscosité de cisaillement	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
ρ	Masse volumique	$Kg.m^{-3}$
θ	Fonction caractéristique de la distribution de température dans le canal	K
Ω	Vecteur tourbillon	
ψ	Fonction de courant	$m^2.s^{-1}$
Opérateurs	Significations	
<i>div</i>	Divergence	<i>Sans unité</i>
Δ	Laplacien	<i>Sans unité</i>
<i>grad</i>	Gradient	<i>Sans unité</i>
<i>rot</i>	rotationnel	<i>Sans unité</i>
\wedge	Produit vectoriel	<i>Sans unité</i>

RESUME

Dans ce travail, un fluide visqueux est injecté entre deux disques poreux en mouvement suivant un axe passant perpendiculairement aux milieux des deux surfaces circulaires. Le mouvement des disques crée l'éloignement ou le rapprochement des frontières de l'écoulement donnant lieu respectivement à une augmentation ou une diminution du volume de l'espace contenant le fluide. Le problème est décrit à l'aide de l'équation de continuité et des équations de Navier-Stokes par application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. L'écoulement étant celui d'un fluide incompressible décrit par un champ de vitesse à deux composantes, la fonction de courant est prescrite dans les équations du mouvement du fluide. La fonction de courant vérifie l'équation de continuité d'une part et est solution de l'équation de vorticité obtenue en opérant le rotationnel de la forme vectorielle des équations de Navier-Stokes. L'approche de recherche des solutions est la méthode des solutions semblables qui permet de transformer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction de courant en une équation différentielle ordinaire décrivant le même problème. L'équation différentielle ordinaire et les conditions aux limites correspondent à un problème à conditions aux limites sur deux bornes résolues en utilisant la méthode numérique de Tir associée à l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre. Les résultats obtenus sont présentés et discutés en termes de profils de vitesse, de gradients de pression et des lignes de courant en considérant différentes valeurs des paramètres de contrôle de l'écoulement, notamment le nombre de Reynolds et le paramètre résultant de la contraction ou de l'expansion du volume de l'espace contenant le fluide.

Mots clés: Ecoulement causé par injection du fluide; parois en mouvement transversal, équations de Navier-Stokes, problème à conditions aux limites sur deux bornes; solutions numériques.

ABSTRACT

In this work, a viscous fluid is injected between two porous discs in motion along an axis passing perpendicular to the midpoints of the two circular surfaces. The movement of the discs creates the moving away or bringing together of the boundaries of the flow giving rise respectively to an increase or a decrease in volume of the space containing the fluid. The problem is described by the continuity equation and the Navier-Stokes equations applying the principles of mass and momentum conservations. The flow being that of an incompressible fluid described by a velocity field having two components, the stream function is prescribed in the governing equations of the fluid flow. The stream function verifies the continuity equation on one hand, and is solution of the vorticity equation obtained by taking the curl of the momentum equation on the other hand. The approach for seeking the solutions is the similarity method that enables to transform the partial differential equation verified by the stream function into an ordinary differential equation describing the same problem. The ordinary differential equation and the boundary conditions correspond to a two-point boundary-value problem solved by using the numerical shooting method associated with a fourth-order Runge-Kutta algorithm. The numerical results obtained are presented in terms of velocity profiles, pressure gradients and stream lines under different values of the control parameters of the problem, notably the Reynolds number and the expansion and the contraction ratio which results from the increase or the decrease in volume of the space contained the fluid.

Keywords: Injection-driven flow; orthogonally moving walls; Navier-Stokes equations; two-point boundary-value problem; numerical solution.



INTRODUCTION GENERALE

La dynamique des fluides est l'étude des mouvements des fluides, qu'ils soient liquides ou gazeux. En effet, un fluide est un milieu matériel sans rigidité et essentiellement déformable. Parmi les fluides, on distingue les liquides, les gaz et les plasmas. Sur le plan microscopique, le liquide est une matière dans laquelle les molécules sont faiblement liées, ce qui rend le liquide parfaitement déformable, alors que le gaz est constitué de molécules quasi indépendantes. Dans l'état gazeux, la matière n'a pas de forme propre ni de volume propre, car un gaz tend à occuper tout le volume disponible. La différence entre les liquides et les gaz est que, les molécules des gaz sont très agitées comparativement à celles des liquides. Par ailleurs, l'état plasma est une soupe d'électrons extrêmement actifs dans laquelle baignent également les ions ou des molécules neutres. Il en ressort que le fluide, sur le plan microscopique est un milieu discontinu, lacunaire. Cependant, l'étude des fluides dans le cadre de la Mécanique des Fluides est l'étude du comportement des liquides et des gaz sur le plan macroscopique. Plus précisément, sur le plan macroscopique, le fluide est considéré comme un milieu continu, d'où l'utilisation des lois de la Mécanique des milieux continus pour analyser le comportement des fluides. S'agissant du comportement des fluides, signalons qu'on peut étudier les fluides en équilibre, et les fluides en mouvement. L'étude des fluides en équilibre est faite dans le cadre de la statique des fluides, alors que la dynamique des fluides est l'étude des écoulements. Les écoulements de fluides ont lieu suivant trois régimes, notamment les régimes rampants, laminaires et turbulents. Le régime rampant est un écoulement lent, dans lequel les forces de viscosité dominent sur les forces d'inertie qui sont négligeables, alors qu'en régime laminaire la loi de comportement prend en compte les effets d'inertie et les effets de viscosité. Les régimes rampant et laminaire sont prédictibles et déterministes, c'est-à-dire qu'on peut étudier le mouvement du fluide dans ces deux contextes avec une prévision sur les trajectoires des particules fluides. Par contre, le régime turbulent, encore simplement appelé Turbulence, est un état désordonné de

l'écoulement où les grandeurs physiques qui décrivent le mouvement du fluide sont des variables aléatoires.

En général, l'ensemble des grandeurs physiques qui régissent le mouvement d'un fluide newtonien est constitué du champ de vitesse et de la pression. Cet ensemble est associé aux propriétés physiques telles que la masse volumique et la viscosité dynamique. Lorsque l'étude incorpore l'état thermique du fluide, une autre grandeur physique fait face, notamment la température. La prise en compte du comportement de la température d'un fluide en mouvement met particulièrement en exergue d'autres propriétés physiques du fluide telles que la chaleur massique à pression constante et la conductivité thermique. Sur le plan théorique, toutes ces grandeurs physiques et propriétés physiques sont regroupées dans des relations mathématiques par application de trois célèbres principes des écoulements de fluides, notamment la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie donnant lieu aux équations des écoulements de fluides [1-29]. Plus précisément, les équations des écoulements de fluides sont constituées de l'équation de continuité par application du principe de conservation de la masse, des équations de Navier-Stokes découlant de la conservation de la quantité de mouvement et de l'équation de la chaleur qui est déduite du principe de conservation de l'énergie. En particulier, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui servent à décrire le mouvement des fluides. La résolution de ces équations permet de proposer une modélisation de nombreux phénomènes comme les courants océaniques et les mouvements des masses d'air de l'atmosphère en météorologie, le comportement des gratte-ciels ou des ponts sous l'action du vent en architecture, ou encore celui des avions en aéronautique, des trains ou des voitures à grande vitesse, ainsi que les écoulements dans des conduites. Les équations de Navier-Stokes sont ainsi nommées pour honorer les travaux de deux scientifiques du XIX^e siècle, à savoir le mathématicien et ingénieur des ponts Henri Navier qui fût le premier à

introduire la viscosité dans les équations d'Euler [30] en 1823, et le physicien George Gabriel Stokes, qui a donné la forme définitive à l'équation de conservation de la quantité de mouvement [31] en 1845. Il existe aussi des écoulements dits complexes [32-46] qui se développent en présence d'une réaction chimique ou d'un champ magnétique

Les équations de Navier-Stokes servent à résoudre une diversité des problèmes d'écoulements, notamment les problèmes d'écoulements de fluides aux voisinages des parois solides. L'écoulement d'un fluide au voisinage d'une paroi solide revêt un grand nombre d'applications, notamment la filtration [47-49] ou le tamisage mécanique [50], l'architecture navale [51, 52], l'irrigation agricole [53], l'industrie de l'eau [54], la production pétrolière [55], les écoulements biologiques [56-64], les écoulements géophysiques [65-69]. Il ressort de ces applications que les frontières de l'écoulement peuvent être imperméables [70-81] ou perméables [82-98]. Par ailleurs, les parois délimitant l'écoulement peuvent aussi être perméables et mobiles ou imperméables et mobiles. A ce stade, il importe de signaler que les écoulements de fluides au voisinage des parois mobiles peuvent être regroupés en trois ensembles de problèmes. Le premier ensemble concerne les écoulements de fluides délimités par des frontières imperméables et en mouvement dans la même direction que le déplacement du fluide [99-108]. Le deuxième ensemble de problèmes se rapporte aux écoulements de fluides proches des parois à la fois perméables et mobiles dans la même direction que le mouvement du fluide [109-115]. Dans la littérature, il existe aussi des fluides en mouvement au voisinage des parois mobiles dans le sens transversal à l'écoulement [116-129]. C'est dans ce dernier contexte que se situe le présent travail. Avant de présenter l'objectif de l'étude et l'innovation par rapport aux travaux antérieurs, notons que l'équipe de recherche du Laboratoire de Mécanique Appliquée a publié beaucoup de travaux sur les écoulements de fluides dans des conduites à parois poreuses. Ces travaux concernent essentiellement les écoulements de fluides fortement visqueux dans

des canaux à parois fixes et poreuses de section transversale rectangulaire [130, 131], ainsi que les écoulements de fluides fortement visqueux dans des conduites annulaires formées par deux cylindres coaxiaux et poreux [132, 133]. Dans l'étude de ces écoulements fortement visqueux où la viscosité dépend de la température, il est surtout question d'examiner l'influence du gradient de viscosité sur la vitesse et le gradient de pression de l'écoulement. De plus, dans le cas où les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes, la prise en compte des termes d'inertie dans un écoulement de fluide entre deux cylindres coaxiaux, poreux et fixes [134] permet de comparer les caractéristiques d'un écoulement rampant et d'un écoulement laminaire dans les mêmes configurations géométriques par confrontation des résultats trouvés. L'équipe de recherche du Laboratoire de Mécanique Appliquée s'est aussi intéressée d'une part à l'étude d'un écoulement de fluide entre deux parois rectangulaires poreuses en mouvement [111, 135] dans la même direction que l'écoulement où il est question d'examiner l'influence de la porosité des parois et du déplacement de ces parois sur la dynamique du fluide. D'autre part, un autre article intéressant porte sur un écoulement d'un fluide entre deux parois rectangulaires poreuses en mouvement perpendiculairement à l'écoulement [136]. Dans la plupart des ces travaux, les parois de la conduite sont fixées à des températures différentes. Cette différence de température peut influencer les propriétés physiques du fluide comme la viscosité dynamique [130-133] ou la conductivité thermique [137]. Que ce soit en conduite annulaire poreuse qu'en conduite de section transversale rectangulaire, les travaux antérieurs cités portent sur les écoulements comportant une composante longitudinale et une composante transversale. Plus précisément, dans le cas d'un canal rectangulaire, les deux composantes de l'écoulement bidimensionnel sont déterminées suivant les deux axes possibles d'un repère cartésien associés à la géométrie de l'écoulement. S'agissant d'une conduite annulaire poreuse, la composante longitudinale de l'écoulement est suivant l'axe de symétrie des cylindres

coaxiaux, alors que la composante transversale est radiale. Tout récemment encore, un autre type d'écoulement en conduite annulaire poreuse a été étudié avec la différence que le mouvement du fluide se développe plutôt avec une composante ortho-radiale [138] en lieu et place d'une composante longitudinale. En conservant la même géométrie de l'écoulement, l'influence du mouvement du fluide sur le transfert de chaleur entre les deux parois de la conduite annulaire poreuse a aussi été investiguée [139].

Il ressort de la littérature que l'espace contenant le fluide en mouvement influence considérablement l'écoulement, d'où la problématique du présent travail qui porte sur *les caractéristiques de l'écoulement dans une géométrie nouvelle et inhabituelle qui est l'espace intermédiaire de deux disques poreux en mouvement orthogonal à leurs propres surfaces*. La conséquence géométrique de la translation des disques perméables suivant le même axe passant perpendiculairement aux milieux de leurs surfaces, est l'augmentation ou la réduction du volume du domaine de l'écoulement. En effet, le volume du domaine de l'écoulement augmente et diminue, parce que les disques peuvent s'éloigner ou se rapprocher pendant l'écoulement. La porosité permet d'incorporer le phénomène d'injection du fluide dans l'écoulement à travers les pores des deux disques. Ce travail a donc pour objectif d'examiner l'influence de la porosité et du mouvement transversal des disques sur les grandeurs physiques caractéristiques de l'écoulement, notamment les profils de vitesse, les gradients de pression et les trajectoires des particules fluides encore appelées lignes de courant. Ce travail a beaucoup d'applications, notamment en aéronautique, dans le fonctionnement et le contrôle des moteurs de fusée, ainsi que dans la recherche de leur performance. En mécanique automobile, cette étude peut servir de modèle théorique de graissage dans les moteurs des Mercedes.

Ce mémoire comporte trois chapitres. Le premier chapitre concerne la revue de la littérature sur les écoulements dans des domaines géométriques comportant des frontières perméables.

Le deuxième chapitre porte sur la formulation mathématique du problème en étude et la description de la méthode de résolution.

Le Troisième chapitre est réservé à la présentation des résultats trouvés et à la discussion.

La conclusion comporte aussi quelques perspectives pour les travaux ultérieurs.

**CHAPITRE I : REVUE DE LA
LITTERATURE**

Ce chapitre est consacré à la présentation des travaux antérieurs dans la thématique abordée. S'agissant de la thématique dans laquelle le présent travail se situe, précisons qu'il est question en général des écoulements de fluides dans des conduites à parois poreuses. La prise en compte de la porosité ou de la perméabilité des frontières de l'écoulement implique la présence des phénomènes de succion ou d'injection dans le problème. La succion est le retrait de masse de fluide de la conduite pendant que le fluide s'écoule, alors que l'injection est l'ajout de masse de fluide dans la conduite pendant le mouvement du fluide. Ces deux phénomènes de succion et d'injection sont formulés dans le problème en termes de conditions aux limites. Par ailleurs, cette thématique intègre aussi la mobilité des parois de l'écoulement. A ce stade, il est important de préciser que les frontières du domaine de l'écoulement peuvent être fixes et perméables, ou imperméables et mobiles, ainsi qu'à la fois perméables et mobiles. Deux types de déplacements des parois de l'écoulement sont souvent rencontrés dans la littérature, notamment le mouvement des frontières peut se produire dans la même direction que l'écoulement du fluide d'une part; d'autre part ce mouvement des frontières peut aussi avoir lieu dans la direction transversale au mouvement du fluide.

Le domaine de l'écoulement est un espace géométrique bien défini. Nous allons nous intéresser aux conduites rectangulaires et cylindriques qui sont les plus rencontrées en industrie. Une conduite est dite rectangulaire lorsque la section transversale de l'écoulement est un rectangle impliquant la formulation mathématique du mouvement du fluide dans un système de coordonnées cartésiennes. Une conduite est dite cylindrique lorsque la section transversale de l'écoulement est un cercle impliquant la description du mouvement du fluide dans un système de coordonnées cylindriques.

L'étude d'un écoulement est influencée par les frontières du domaine géométrique qui contient le fluide en mouvement, mais aussi par le temps. L'influence du domaine géométrique de l'écoulement sur le mouvement du

fluide est formulée en termes de conditions aux limites, alors que le temps influence l'écoulement en termes de conditions initiales. Dans le cas où l'écoulement est étudié après un temps très long, après le début du mouvement du fluide, les effets du temps sur le problème peuvent être négligeables, on dit que l'écoulement est permanent.

I.1 ECOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX ENTRE DEUX PAROIS FIXES ET POREUSES

Il s'agit d'un écoulement dans une conduite rectangulaire. La section transversale de l'écoulement est un rectangle admettant une dimension plus grande par rapport à l'autre pour que l'influence des limites du côté le plus grand de ce rectangle sur l'écoulement soit négligeable. Ainsi, les particules fluides ne ressentent que les effets de bords suivant le côté le plus petit en dimension.

I.1.1 Domaine géométrique de l'écoulement

Le canal de l'écoulement est présenté dans la Figure I.1.

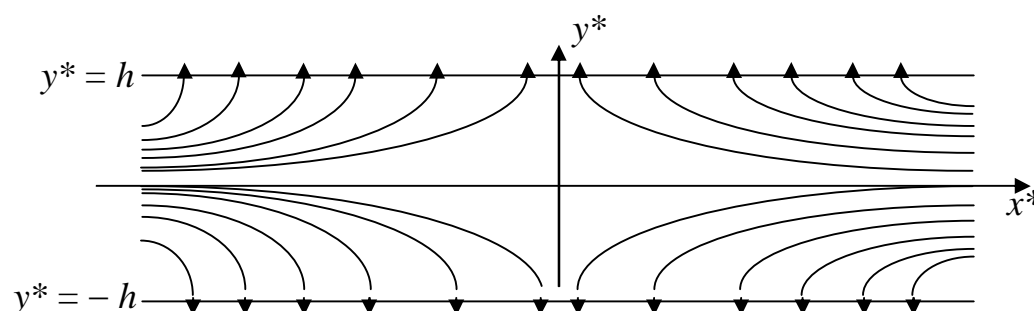


Figure I.1 : Canal de l'écoulement [92, 95, 137].

Compte tenu du fait que le mouvement du fluide n'est pas sensible à l'une des frontières de la section transversale du canal parce qu'elle est infiniment grande par rapport à l'autre, le problème est formulé comme un écoulement de fluide entre deux plans parallèles perméables. L'allure des lignes de courant de la Figure I.1 met en exergue le phénomène de suction au niveau des deux parois

poreuses. De plus, la Figure I.1 présente les deux sens possibles du mouvement du fluide. C'est-à-dire, l'écoulement peut se développer dans le sens positif des élongations décrites par la coordonnée cartésienne x^* , ou dans le sens négatif. Par ailleurs, dans cette Figure 1, y^* désigne la coordonnée transversale. L'écoulement a donc lieu dans un canal perméable de largeur $2h$ où h est la demi-largeur du canal.

I.1.2 Equations du mouvement d'un fluide entre deux parois poreuses fixes

Les équations du mouvement sont les suivantes [93]:

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$\rho \left(V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{I.2})$$

$$\rho \left(V_x^* \frac{\partial V_y^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_y^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{I.3})$$

La conservation de la masse est formulée par l'équation de continuité (I.1), les équations de Navier-Stokes (I.2) et (I.3) expriment la conservation de la quantité de mouvement. Dans ces équations, V_x^* et V_y^* désignent les deux composantes du champ de vitesse, p^* est la pression. Le fluide étudié a pour propriétés physiques ρ et μ désignant respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique.

La formulation mathématique du problème à travers les équations (I.1), (I.2) et (I.3) montre que l'écoulement étudié est bidimensionnel. Un écoulement bidimensionnel est décrit par un champ de vitesse à deux composantes. Dans le cas présent, V_x^* est la composante longitudinale et V_y^* la composante transversale. C'est opportun d'expliquer que le canal de la Figure I.1 est plan, parce que le champ de vitesse a deux composantes, mais en réalité, il existe une troisième dimension engendrée par un troisième axe cartésien qui est le côté le

plus grand en longueur du rectangle qui constitue la section transversale du canal ; cet axe n'est pas représenté, car les particules fluides ne ressentant pas les effets de bords suivant cette orientation et la composante correspondante du champ de vitesse est nulle.

I.1.3 Contraintes spatiales de l'écoulement

Les contraintes spatiales sont les conditions aux limites associées au mouvement du fluide. Ces conditions aux limites sont données par :

$$\begin{aligned} V_x^* &= 0, & V_y^* &= V & \text{pour } y^* &= h \\ V_x^* &= 0, & V_y^* &= -V & \text{pour } y^* &= -h \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Les conditions aux limites $V_x^* = 0$ pour $y = \pm h$ expriment le phénomène d'adhérence aux parois des particules fluides proches des deux frontières poreuses de l'espace contenant le fluide. Autrement dit, les parois poreuses étant fixes, la vitesse longitudinale du fluide est nulle pour les particules fluides qui sont dans le voisinage immédiat avec les parois. Par ailleurs, les conditions aux limites $V_y^* = \pm V$ pour $y = \pm h$ traduisent les vitesses succion ou vitesses d'extraction du fluide égales de part et d'autre des deux parois.

I.1.4 Equations en variables réduites

La formulation adimensionnelle permet de transformer les grandeurs physiques en nombres dans le but de mettre en évidence les paramètres sans dimension qui régissent un écoulement de fluide. Cette formulation adimensionnelle prend en compte la géométrie de l'écoulement, les conditions aux limites et les propriétés physiques du fluide étudié. Dans le cas présent, la demi-largeur du canal h représente la longueur de référence, les vitesses longitudinale et transversale sont mesurées par unité de la vitesse absolue de succion V , et la pression est adimensionnalisée par sa valeur de référence (ρV^2).

Ainsi, les variables sans dimension de l'écoulement sont introduites comme suit :

$$x = \frac{x^*}{h}, \quad y = \frac{y^*}{h}, \quad V_x = \frac{V_x^*}{V}, \quad V_y = \frac{V_y^*}{V}, \quad p = \frac{p^*}{\rho V^2} \quad (\text{I.5})$$

Les équations sans dimension du mouvement sont les suivantes :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.6})$$

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I.7})$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I.8})$$

où $R = \frac{\rho V h}{\mu}$ est le nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds est un

paramètre de contrôle ou paramètre sans dimension qui exprime la comparaison entre les effets d'inertie et les effets de viscosité quand le fluide est en mouvement. C'est la valeur de ce nombre qui permet de définir les différents régimes d'écoulements dans une géométrie bien déterminée. Ainsi, pour les écoulements confinés (écoulements ayant lieu dans des conduites fermées en occupant totalement le volume de la conduite), $R < 2000$ correspond au régime laminaire, et $R > 2000$ correspond au régime turbulent. Il existe une discipline dédiée à l'étude de la transition d'un écoulement du régime laminaire au régime turbulent. En effet, le passage d'un écoulement du régime laminaire au régime turbulent présente un certain nombre de changements qualitatifs appelés bifurcations hydrodynamiques.

Les conditions aux limites associées aux équations adimensionnelles s'en déduisent :

$$\begin{aligned} V_x &= 0, & V_y &= 1 & \text{pour } y &= 1 \\ V_x &= 0, & V_y &= -1 & \text{pour } y &= -1 \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

I.1.5 Réduction du nombre d'équations du mouvement

Les équations de l'écoulement (I.6), (I.7) et (I.8) sont celles d'un fluide incompressible en mouvement décrit par deux composantes de vitesse, dans ce cas, la fonction de courant est prescrite dans le problème. En effet, pour un écoulement plan permanent, la fonction de courant est une grandeur constante sur toute ligne de courant. La ligne de courant étant une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse de l'écoulement. Autrement dit, l'allure du vecteur vitesse d'un écoulement est illustrée par le traçage des lignes de courant d'un écoulement plan permanent. La fonction de courant de courant, souvent notée ψ est liée aux composantes du vecteur vitesse par les relations :

$$V_x(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{I.10})$$

La fonction de courant ψ ainsi définie satisfait l'équation de continuité (I.6) et décrit l'équation du tourbillon.

I.1.5.1 Phénomènes tourbillonnaires

Un tourbillon en dynamique des fluides, est une région d'un liquide ou d'un gaz dans laquelle l'écoulement est principalement un mouvement de rotation. Ce type de mouvement s'appelle écoulement tourbillonnaire. On observe à toutes les échelles, depuis le tourbillon de vidange d'une baignoire jusqu'à ceux des atmosphères des planètes, en passant par les sillages observés au voisinage d'un obstacle situé dans un écoulement de fluide. Une fois formés, les tourbillons peuvent se déplacer, s'étirer, se tordre et interagir de manière complexe. Une façon simple de visualiser le tourbillon est de considérer un fluide en mouvement dans lequel on délimite un petit volume supposé rigide. Si ce volume tourne par rapport à un référentiel au lieu d'être en translation, il appartient à un tourbillon.

Pour les spécialistes de la Mécanique des Fluides, le mot est très généralement associé au vecteur tourbillon porté par l'axe de rotation qui se calcule comme le rotationnel de la vitesse et a une intensité double de celle du vecteur rotation. Cette intensité de la rotation est parfois considérée comme vorticité.

Pour voir des tourbillons, il suffit d'observer une rivière dont le fond n'est pas trop homogène. Il s'agit d'un phénomène très courant dans tous les aspects de la Mécanique des Fluides. Il complique souvent l'analyse des phénomènes au point de conduire à inventer l'approximation de l'écoulement irrotationnel qui couvre la majeure partie du domaine considéré, les zones tourbillonnaires recevant un traitement spécifique. Loin de toute paroi, un écoulement est généralement laminaire, les particules fluides voisines à un instant donné restent voisines aux instants suivants et les seules pertes d'énergie sont liées à la viscosité du fluide. Dans des circonstances différentes, l'écoulement peut devenir turbulent avec, dans une certaine zone, une apparence très désordonnée qui se traduit par une dissipation d'énergie. Celle-ci est liée à des tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. La transition laminaire/turbulent se produit souvent d'une manière progressive, le cas laminaire correspond aux vitesses modérées. Dans une conduite, les pertes de charge sont liées à la viscosité qui crée progressivement au voisinage de la paroi une couche limite dans laquelle se concentrent les pertes d'énergie par frottement visqueux. Dans le cas des corps profilés plongés dans un écoulement, la transition se produit lorsque la vitesse, plus précisément le nombre de Reynolds augmente.

Par exemple, les pertes d'énergie sur un profil d'aile d'avion se traduisent par une résistance à l'avancement appelée traînée dans la direction de l'écoulement, mais le profil ne peut se contenter de consommer de l'énergie pour avancer, il doit également fournir une portance pour sustenter l'avion. Celle-ci est indépendante du nombre de Reynolds : elle est liée à la circulation,

intégrale curviligne, de vitesse le long du contour du profil, par le théorème de Kutta-Jukowski et peut s'interpréter comme simulant un gros tourbillon qui permet de faire disparaître la vitesse infinie au bord de la fuite.

Lors d'un écoulement autour d'un corps non profilé, comme un cylindre de section circulaire, la transition entre les régimes laminaire et turbulent est remplacée par un régime tourbillonnaire dans lequel l'énergie de translation se transforme en énergie de rotation avant de devenir une énergie de dissipation en régime turbulent. Deux tourbillons symétriques apparaissent à une certaine vitesse, grossissent symétriquement lorsque celle-ci croît jusqu'à ce que l'un d'eux expulse l'autre qui est alors remplacé par un nouveau. C'est le phénomène de tourbillon alterné, nommé tourbillons de Bénard-Karman dont la fréquence d'émission ou de détachement peut être caractérisée par un nombre adimensionnel, le nombre de Strouhal. C'est un nombre qui présente le rapport du temps d'advection et du temps caractéristique de l'instationnarité.

En météorologie et en océanographie physique, le tourbillon est une propriété importante du comportement à grande échelle de l'atmosphère et de l'océan. Les deux circulations, circulation atmosphérique et circulation océanique, étant surtout horizontales, le vecteur tourbillon pour ces deux milieux est généralement vertical. Pour l'atmosphère et l'océan, les déplacements étant horizontaux, ce paramètre est souvent appelé tourbillon vertical planétaire, le tourbillon planétaire étant le double du vecteur rotation terrestre, soit 2Ω . Dans l'atmosphère nord, le tourbillon est positif pour une rotation anti-horaire (cyclonique) et négatif pour une rotation horaire (anticyclonique). C'est l'opposé dans l'hémisphère sud. Le tourbillon en un point de l'atmosphère n'est pas conservatif en lui-même, car l'épaisseur de la couche d'air peut être étirée ou compressée par le mouvement de l'air. Cependant, le tourbillon total dans la colonne d'air est lui conservateur et on le nomme tourbillon potentiel. En effet, l'air subit une compression ou décompression adiabatique, l'entropie est conservée et le tourbillon total de la colonne ne changera pas. Le tourbillon

potentiel devient donc une façon de suivre les mouvements verticaux dans une masse d'air avec température potentielle constante.

En météorologie, l'une des approximations est celle de l'atmosphère barotrope où il n'y a pas de variation de température dans une masse d'air. L'équation de tourbillon barotrope est donc une façon simple de prévoir le déplacement des creux et crêtes d'onde longue à une pression de 50 kPa. Dans les années 1950, le premier programme de prévision numérique du temps utilisa cette équation. Mais c'est l'advection de tourbillon positive dans un système barocline qui crée la cyclogenèse, le développement des dépressions des latitudes moyennes, et l'advection négative qui génère les anticyclones. Elle fait partie des équations primitives atmosphériques qui sont utilisées dans les modèles modernes. En océanographie, les tourbillons sont particulièrement étudiés pour leur capacité à conserver les propriétés de salinité et de température dans le temps au sein d'une lentille d'eau de quelques kilomètres de diamètre et de plusieurs mètres de hauteur. On peut par exemple citer les remous qui sortent de la mer méditerranée par le canal de Gibraltar et en quelques semaines/mois arrivent dans les Caraïbes. Ces tourbillons sont recherchés par les sous-marins militaires pour cacher leur signature sonore. En effet, la différence de température et de salinité du tourbillon crée une interface opaque.

I.1.5.2 Equation du tourbillon

Le vecteur tourbillon Ω est défini par :

$$\Omega = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V} \quad (\text{I.11})$$

Les composantes de ce vecteur dans la base cartésienne associée à l'écoulement sont telles que :

$$\Omega = \left(0, 0, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right) \quad (\text{I.12})$$

Le vecteur tourbillon peut aussi s'exprimer en termes de fonction de courant grâce aux équations (I.10) qui lient la fonction de courant aux composantes de vitesse :

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(0, 0, -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right) = \left(0, 0, -\frac{1}{2} \Delta \psi \right) \quad (\text{I.13})$$

Considérons l'expression vectorielle qui réunit les équations (I.7) et (I.8) traduisant la conservation de la quantité de mouvement :

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{V} = -\mathbf{grad} p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{V} \quad (\text{I.14})$$

Une autre formulation de l'équation (I.14) est la suivante :

$$\mathbf{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -\mathbf{grad} p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{V} \quad (\text{I.15})$$

En appliquant l'opérateur différentiel rotationnel "rot" aux termes de l'équation (I.15), en utilisant les changements de variables (I.10), on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \psi) = \frac{1}{R} \Delta^2 \psi \quad (\text{I.16})$$

Il ressort que la fonction de courant ψ est solution de l'équation du tourbillon, encore appelée équation de vorticité. L'existence de la fonction de courant permet de passer de trois équations différentielles (I.6), (I.7) et (I.8) satisfaites par deux composantes de vitesse et la pression à une seule équation différentielle (I.16) vérifiée par la fonction de courant pour le même problème. Les conditions aux limites associées à l'équation (I.16) sont obtenues à partir des équations (I.9) et (I.10) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 1 \quad \text{pour } y = 1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -1 \quad \text{pour } y = -1 \quad (\text{I.17})$$

I.1.6 Méthode de séparation des variables

C'est une méthode de plus en plus utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulements de fluides entre deux parois poreuses [128, 140, 141]. C'est une technique qui s'appuie sur la géométrie de l'écoulement ainsi que les conditions aux limites et dont la validité a été démontrée numériquement et expérimentalement [142, 143]. Cette approche diffère d'un problème à un autre par la configuration géométrique de l'écoulement et les conditions aux limites.

Le mouvement du fluide se développe de sorte que la vitesse axiale varie suivant les deux coordonnées du domaine de l'écoulement, compte tenu qu'il existe un déplacement longitudinal des particules fluides influencé par la porosité des deux parois. Par ailleurs, le mouvement transversal du fluide ne dépend que de la coordonnée normale, car les particules fluides ne ressentent pas la présence des frontières axiales pendant l'écoulement compte tenu de la grande longueur du canal.

Comme la dynamique du fluide dans la conduite rectangulaire poreuse révèle un mouvement axial et un mouvement transversal, ces deux trajets de l'écoulement matérialisés dans la définition du vecteur vitesse du fluide, peuvent être retrouvés à partir de l'expression de la fonction de courant. La méthode de séparation des variables permet de définir la fonction de courant comme un produit des termes issus de l'écoulement normal et de l'écoulement longitudinal. Dans une telle expression de la fonction de courant influencée naturellement par la géométrie de l'écoulement, la variable x qui décrit le mouvement longitudinal est indépendante de la variable normale y définie suivant le mouvement normal ou transversal. En conséquence, nous avons l'équation suivante [128]:

$$\psi(x, y) = xF(y) \quad (\text{I.18})$$

où F est la fonction de courant par unité de longueur. L'intérêt de la fonction F émane du fait que, comme le fluide est en perpétuel mouvement de cisaillement à l'intérieur de la conduite rectangulaire poreuse, il est convenable de déterminer les caractéristiques de l'écoulement quelque soit la position axiale. Autrement dit, la fonction $F(y)$ qui se trouve dans l'équation (I.18) rend compte du mouvement du fluide à l'intérieur de la conduite sous l'influence des frontières poreuses de l'écoulement.

L'introduction de l'expression (I.18) dans l'équation (I.16) et les conditions aux limites (I.17) permet d'avoir le problème suivant :

$$F^{(4)} + R(FF^{(3)} - F^{(1)}F^{(2)}) = 0 \quad (\text{I.19})$$

$$F^{(1)}(1) = 0, \quad F(1) = -1$$

$$F^{(1)}(-1) = 0, \quad F(-1) = 1 \quad (\text{I.20})$$

Le problème formulé par les équations (I.19) et (I.20) apparemment simple, permet de mettre en évidence des structures hydrodynamiques très complexes.

I.1.7 Bifurcations hydrodynamiques

La théorie des bifurcations [144-147] consiste à classer les différents types de bifurcations en classes. Chaque classe correspond à une certaine symétrie dans le problème. Parmi les différents types de bifurcations, on trouve :

-La bifurcation fourches en anglais pitchfork bifurcation. Un équilibre stable se déstabilise en un équilibre instable, et deux équilibres stables sont créés. Cette transition peut se faire de façon supercritique, continue et prévisible ; ou sous-critique, discontinue avec des phénomènes d'hystérésis.

-La bifurcation selle-nœud, en anglais saddle-node bifurcation. Deux points d'équilibre existent, un stable et un instable, avant la bifurcation. Après la bifurcation, plus aucun point en équilibre n'existe.

-La bifurcation de Hopf. C'est une bifurcation oscillante, comme l'attracteur de Lorenz. C'est une bifurcation locale dans laquelle un point fixe d'un système dynamique perd sa stabilité tandis qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de la linéarisation autour du point fixe franchissent l'axe imaginaire du plan complexe.

-La bifurcation de dédoublement de période. C'est une bifurcation qui mène à des comportements chaotiques. Elle peut par exemple s'obtenir en faisant rebondir une balle de ping-pong sur une surface oscillante, et en augmentant la fréquence d'oscillation.

-La bifurcation de Takens-Bogdanov. C'est une bifurcation qui se produit lorsque deux paramètres varient. Cette bifurcation est ainsi nommée parce qu'elle a été mise en évidence simultanément et indépendamment par Rifiât Bogdanov et Floris Takens.

Les bifurcations sont rencontrées et étudiées dans beaucoup d'autres domaines de la science comme l'électronique, l'océanographie, les télécommunications. Il est souvent question de déterminer la caractéristique qui subit un changement qualitatif qui influence le comportement d'un système.

Les problèmes d'écoulements ou de distribution de masse de fluide se traduisent à l'échelle macroscopique comme des phénomènes de transport de quantité de mouvement. La diffusion des quantités de mouvement se fait par frottement des couches fluides les unes des autres grâce à une propriété physique appelée viscosité dynamique. Le coefficient pariétal de frottement intervient lorsque l'écoulement a lieu dans le voisinage immédiat d'une paroi solide. Une bifurcation hydrodynamique est mise en évidence, lorsque ce coefficient de frottement présente un changement qualitatif autour d'une valeur critique du nombre de Reynolds. Dans notre étude, les grandeurs $F^{(2)}(-1)$ et $F^{(2)}(+1)$ sont proportionnelles aux coefficients de frottement sur les parois inférieure et supérieure, respectivement. La détermination de ces deux fonctions suivant les valeurs du nombre de Reynolds permet de générer les diagrammes de

bifurcations. Le coefficient de frottement à la paroi supérieure en fonction du nombre de Reynolds est présenté à la Figure I.2.

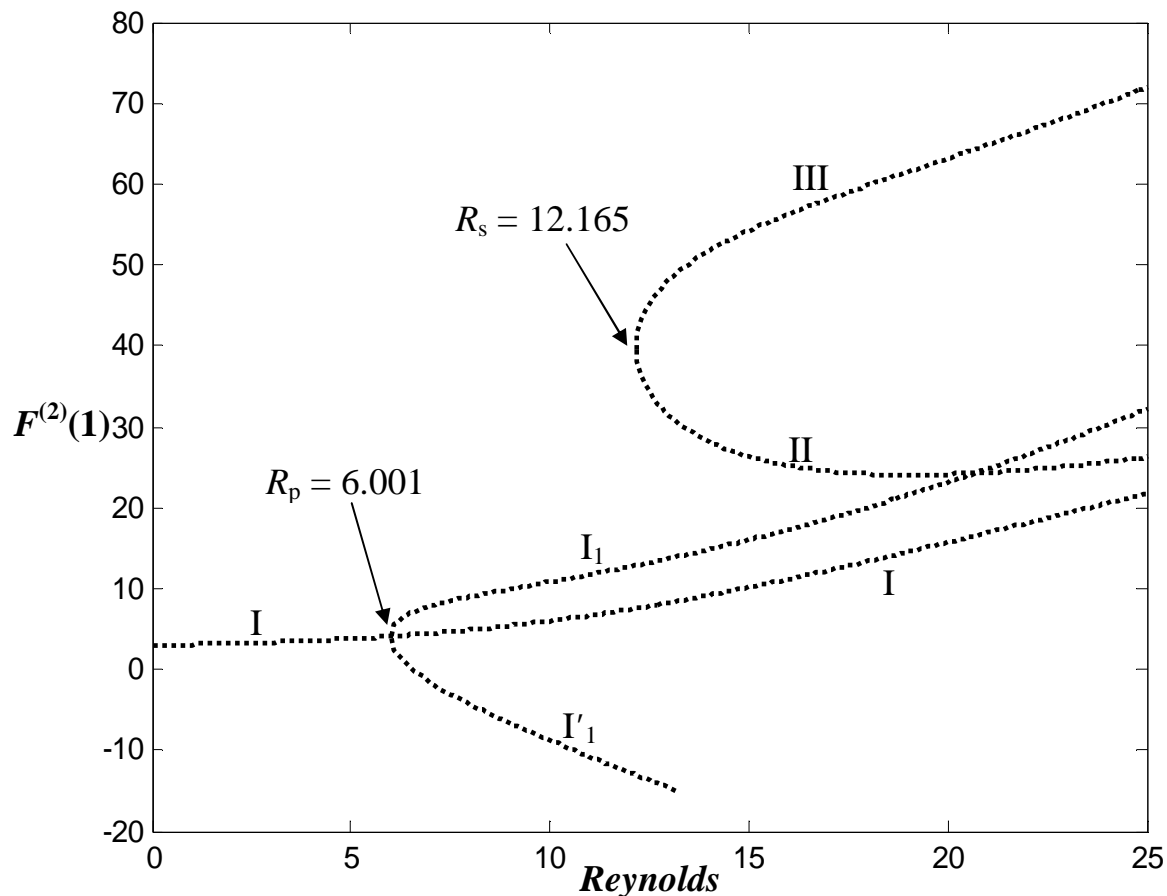


Figure I.2: Diagramme de bifurcations représentant les valeurs du coefficient de frottement au niveau de la paroi supérieure [92, 93].

Dans le but d'évaluer les effets de frottement visqueux au niveau des deux parois poreuses, la détermination du coefficient de frottement à la borne supérieure et à la borne inférieure est nécessaire pour le même intervalle de valeurs du nombre de Reynolds. Cela permet aussi de voir si l'identité géométrique des parois est hydrodynamiquement conservée. En d'autres termes, comme les parois semblent être d'égale importance, l'influence des parois sur l'écoulement, pourrait-elle être la même ? Dans une autre perspective, le coefficient de frottement peut être différent d'une paroi à une autre malgré leur

identité géométrique. Ainsi, le coefficient de frottement à la paroi inférieure est présenté à la Figure I.3.

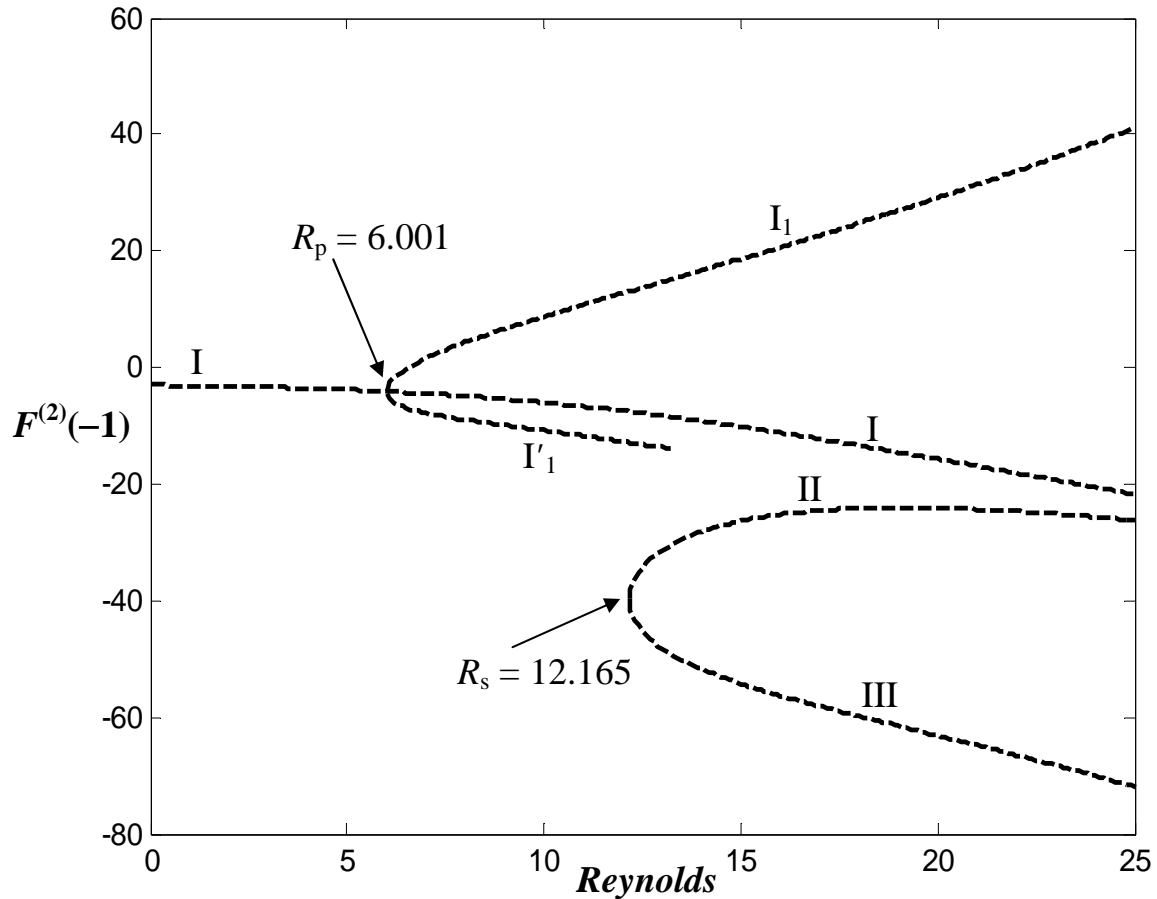


Figure I.3: Diagramme de bifurcations représentant les valeurs du coefficient de frottement au niveau de la paroi inférieure [148].

Dans la Figure I.2, la valeur critique du nombre de Reynolds donnant lieu à la bifurcation fourche est $R = R_p = 6.001$. En effet, lorsque le nombre de Reynolds varie, le coefficient de frottement à la paroi extérieure présente une branche symétrique I qui est l'unique ensemble solution pour R inférieur à R_p . La branche symétrique I qui existe toujours pour R supérieur à R_p , donne naissance à deux autres branches asymétriques I_1 et I'_1 pour $R = R_p = 6.001$. En d'autres termes, les solutions de types I_1 et I'_1 qui n'existent que pour $R \geq R_p$ sont la conséquence d'une brisure de symétrie qui se manifeste au point critique

$R_P = 6.001$ sous forme d'une bifurcation fourche. En fait, la symétrie dont il est question se traduit mathématiquement au niveau de la branche I telle que $F^{(2)}(-1) = -F^{(2)}(+1)$. Le coefficient de frottement au niveau de la paroi interne est présenté à la Figure I.4.

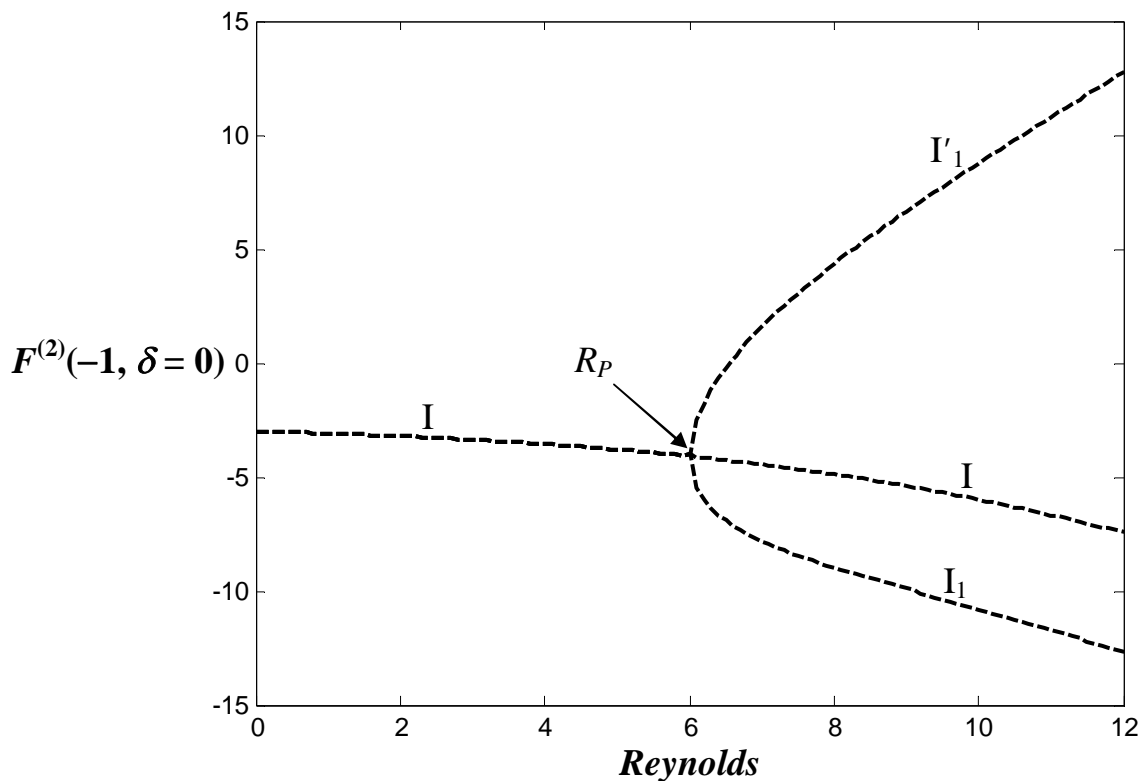


Figure I.4: Diagramme de la bifurcation fourche représentant le coefficient de frottement au niveau de la paroi interne [148].

La symétrie observée au niveau du coefficient pariétal de frottement à travers la branche I signifie aussi que les grandeurs $F^{(2)}(-1)$ et $F^{(2)}(+1)$ tracées en fonction du nombre de Reynolds R sont égales en valeur absolue. En d'autres termes, les effets de frottements entre le fluide et les parois de la conduite sont d'égale importance à travers la branche de solutions de type I. La symétrie décrite par les solutions de types I_1 et I'_1 est la conséquence de la non linéarité de l'équation de vorticité. Cette non linéarité résulte des effets de convection entre les composantes de vitesse et du gradient de vitesse pendant l'écoulement. Pour mieux illustrer la comparaison entre les coefficients de frottement

respectivement au niveau des parois externe et interne, nous considérons la Figure I.5 qui est la superposition des valeurs des fonctions $F^{(2)}(+1)$ et $F^{(2)}(-1)$ quand le nombre de Reynolds varie.

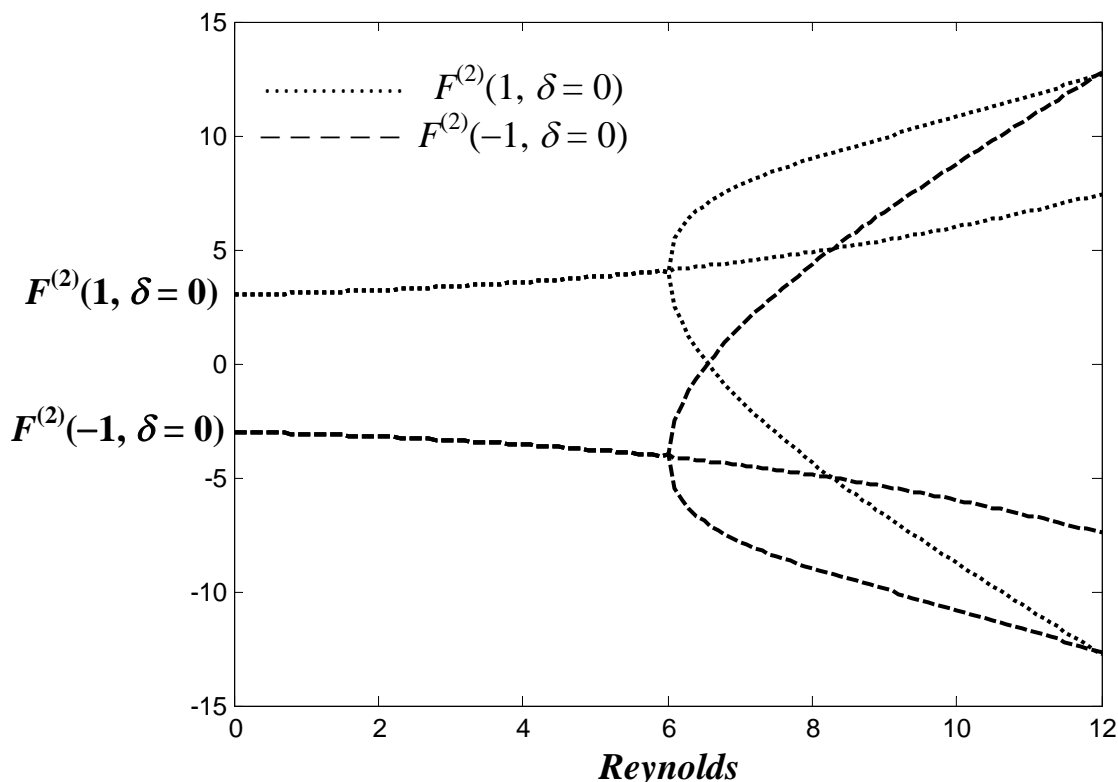


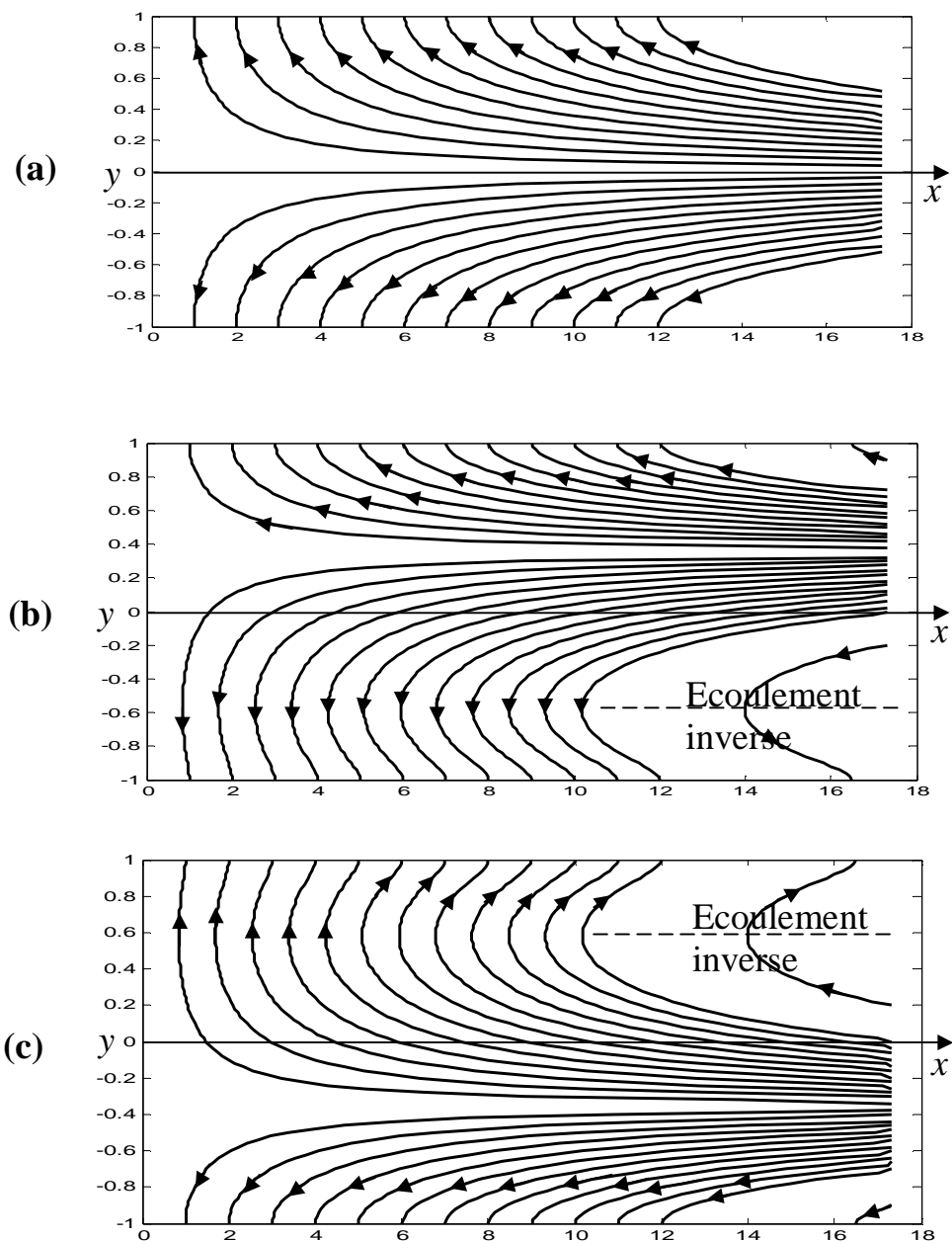
Figure I.5: Comparaison des valeurs des coefficients de frottement sur les parois externe et interne [148].

Il ressort de la Figure I.5 que les coefficients de frottement respectivement sur la paroi externe et sur la paroi interne ont des valeurs opposées relativement à la branche de solutions de type I. Par ailleurs, relativement à la branche I_1 , les solutions correspondant respectivement aux frottements sur la paroi extérieure et sur la paroi intérieure ont des valeurs différentes et de signes contraires. Les valeurs différentes et de signes contraires sont aussi obtenues en comparant les coefficients de frottements sur les parois externe et interne par rapport aux solutions de types I'_1 . Que ce soit au niveau de la branche de solution de type I qu'en ce qui concerne les solutions asymétriques de types I_1 et I'_1 , la comparaison des résultats trouvés pour le coefficient pariétal de frottement

montre une tendance à l'opposition des solutions correspondant à la paroi extérieure à celles correspondant à la paroi intérieure. Cette opposition des solutions est due au fait que les deux frontières rigides et poreuses contenant l'écoulement sont géométriquement opposées.

I.1.8 Trajectoires des particules fluides

Les trajectoires des particules fluides sont représentées dans la Figure I.6.



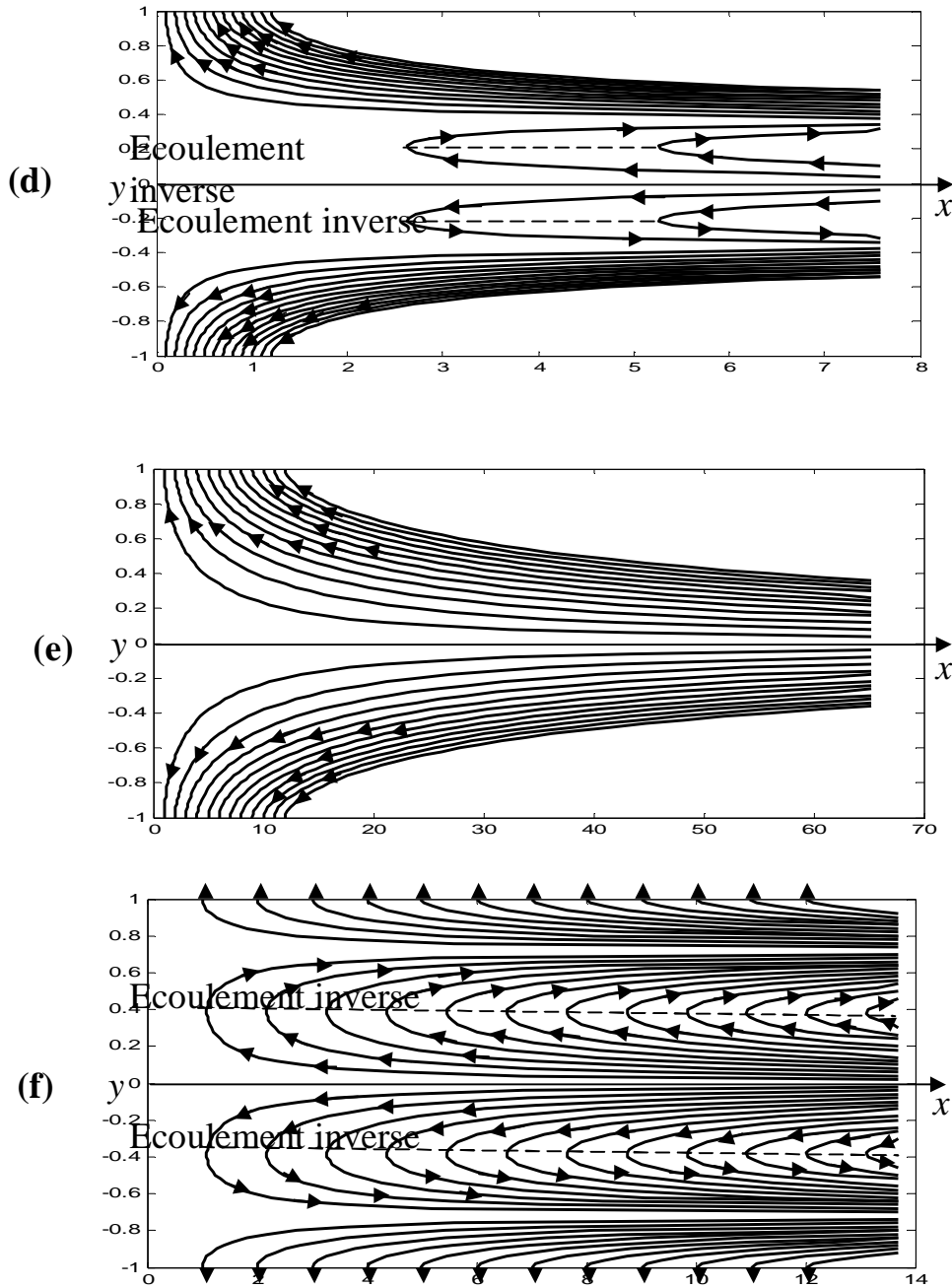


Figure I.6 : Trajectoires des particules fluides, (a) sur la branche I pour $R = 5.175$, (b) sur la branche I_1 pour $R = 13.035$, (c) sur la branche I_1' pour $R = 13.035$, (d) sur la branche II avec écoulement inverse pour $R = 12.645$, (e) sur la branche II en l'absence de l'écoulement inverse pour $R = 14.355$, (f) sur la branche III pour $R = 17.50$ [148].

Les Figures I.6(a) et I.6(e) présentent les lignes de courant relatives aux solutions de type I pour $R = 5.175$ et de type II pour $R = 14.355$, réparties

symétriquement par rapport au plan médian du canal et mettant en exergue un même sens de l'écoulement. Avec la différence que la solution de type I présente un ensemble de lignes de courant proche des parois, alors que la solution de type II comporte les lignes de courant proche du plan médian du canal.

Les solutions de types I_1 et I_1' tracées pour $R = 13.035$ sont caractérisées par une rupture de symétrie par rapport au plan médian du canal, avec la spécificité que les lignes de courant de la branche I_1 , présente un écoulement inverse proche de la paroi inférieure, alors que cet écoulement inverse se déplace vers la paroi supérieure pour les solutions de type I_1' .

L'illustration de l'écoulement inverse relativement aux solutions de type II pour $R = 12.645$, comme le montre la Figure I.6 (d) est le changement complet de sens des lignes de courant autour du plan médian du canal. Le constat qui ressort de la présentation de ces lignes de courant à travers la Figure I.6 est que, pour les solutions symétriques de types II et III, l'écoulement inverse, quand il se développe, il a lieu autour du milieu du domaine de l'écoulement, ce résultat est confirmé par la Figure I. 6 (f) où les solutions de type III sont tracées pour $R = 17.50$.

I.2 MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX ENTRE DEUX PAROIS POREUSES ACCELERÉES

Pour étudier le mouvement d'un fluide entre deux parois poreuses accélérées, on considère la géométrie de l'écoulement présentée à la Figure I.1 en incorporant le déplacement longitudinal des deux frontières perméables de l'écoulement. L'objectif est d'illustrer les changements qu'apporte l'accélération des parois sur les caractéristiques de l'écoulement. En effet, on note une disparition des bifurcations mises en évidence dans le cas des parois fixes. Les autres changements dans le comportement de l'écoulement sont présentés en examinant les profils de vitesse et les lignes de courant.

I.2.1 Vitesse longitudinale

La vitesse longitudinale est présentée dans la Figure I.7.

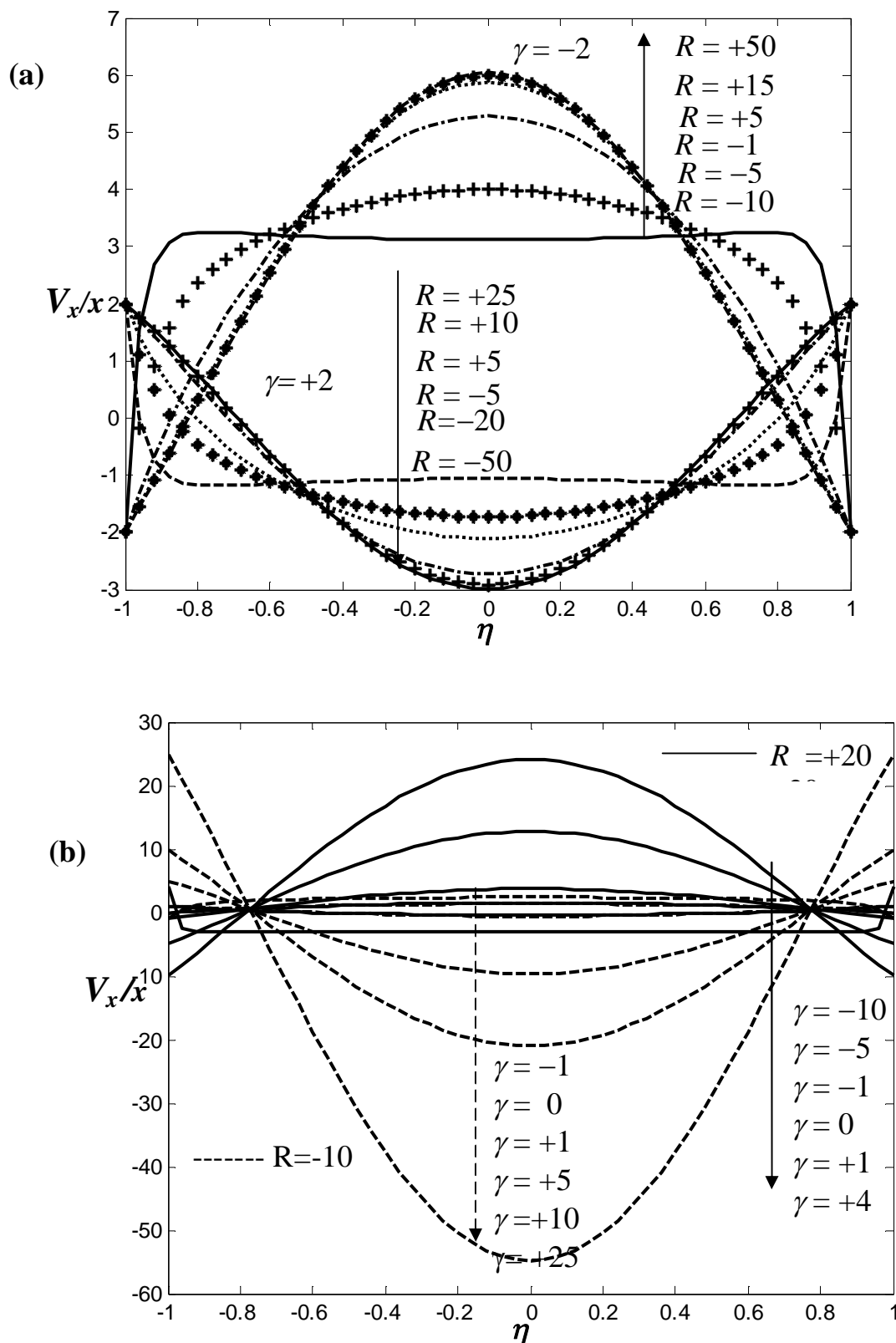


Figure I. 7 : Vitesse longitudinale pour : (a) deux valeurs fixes du coefficient d'accélération et différentes valeurs du nombre de Reynolds, (b) deux valeurs fixes du nombre de Reynolds de suction et d'injection et pour différentes valeurs du coefficient d'accélération [83, 99, 135].

La décélération des frontières de l'écoulement, qui correspond à une valeur du coefficient d'accélération γ négative, a tendance à freiner les particules fluides proches des parois et à accroître la vitesse longitudinale au milieu du canal, surtout quand le mouvement a lieu avec injection (nombre de Reynolds positif) du fluide dans le domaine de l'écoulement. Cette décélération entraîne un aplatissement du profile de vitesse longitudinale illustrant l'apparition d'une couche limite dynamique quand le nombre de Reynolds de succion (nombre de Reynolds négatif) croît. Par ailleurs, l'accélération des parois du canal augmente la vitesse des particules fluides au voisinage des frontières de l'écoulement et a tendance à freiner le mouvement du fluide au centre du canal, surtout quand le mouvement a lieu avec succion du fluide à travers les parois. Cette accélération cause un aplatissement du profile de vitesse longitudinale sous forme de couche limite avec la croissance du nombre de Reynolds d'injection, comme le montre la Figure I. 7(a). La Figure I.7 (b) représente la vitesse longitudinale pour différentes valeurs du coefficient d'accélération/décélération en fixant le nombre de Reynolds de succion et d'injection, montre d'une part un écoulement inverse accentué d'autant plus que l'accélération des parois augmente. D'autre part, la Figure I.7(b) montre qu'en fixant le nombre de Reynolds d'injection, l'écoulement inverse disparaît d'autant plus que le coefficient de décélération croît.

C'est l'occasion de montrer que le nombre de Reynolds d'un écoulement donné est défini en tenant compte des contraintes et des conditions qui entourent le mouvement du fluide. Dans le cas présent, le nombre Reynolds $R = \rho(Ea+V)a/\mu$ tient compte de la demi-largeur du canal a , de la vitesse de succion ou d'injection V , du coefficient de déplacement des frontières de l'écoulement E , ainsi que des propriétés physiques ρ et μ désignant respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide.

Quant à la vitesse transversale, elle est représentée dans la Figure I. 8 pour différentes valeurs des paramètres de contrôle de l'écoulement.

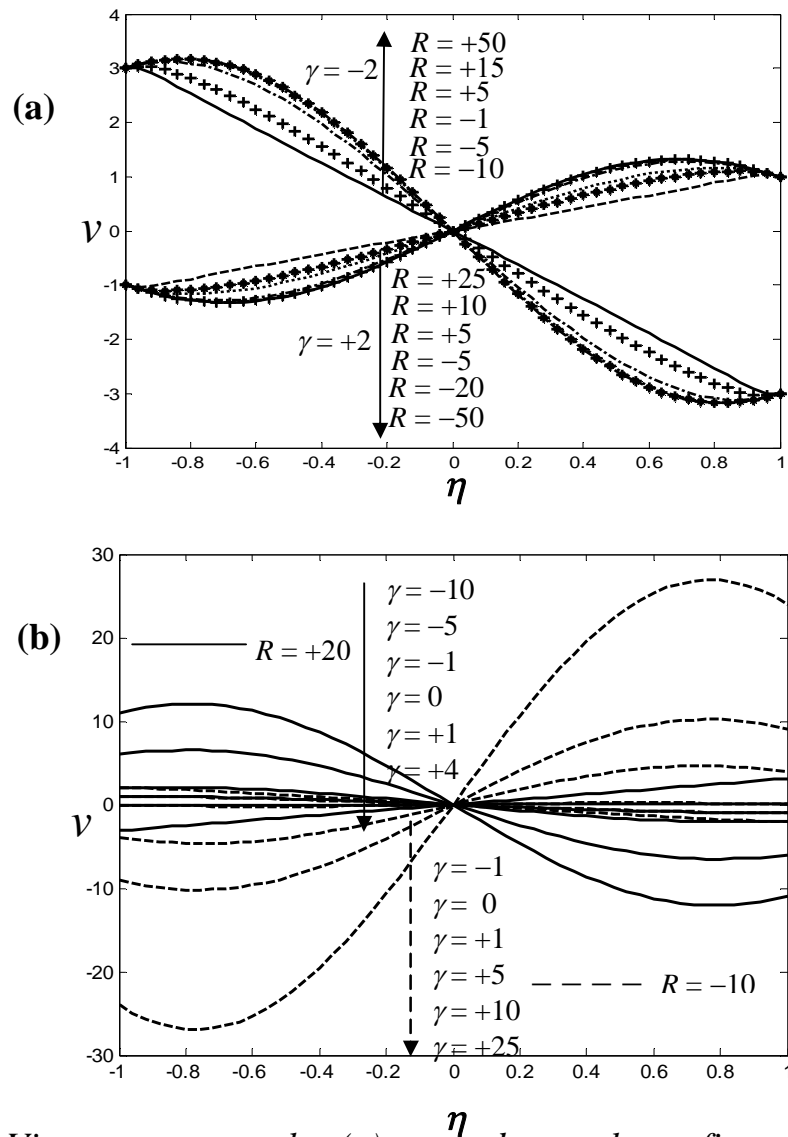


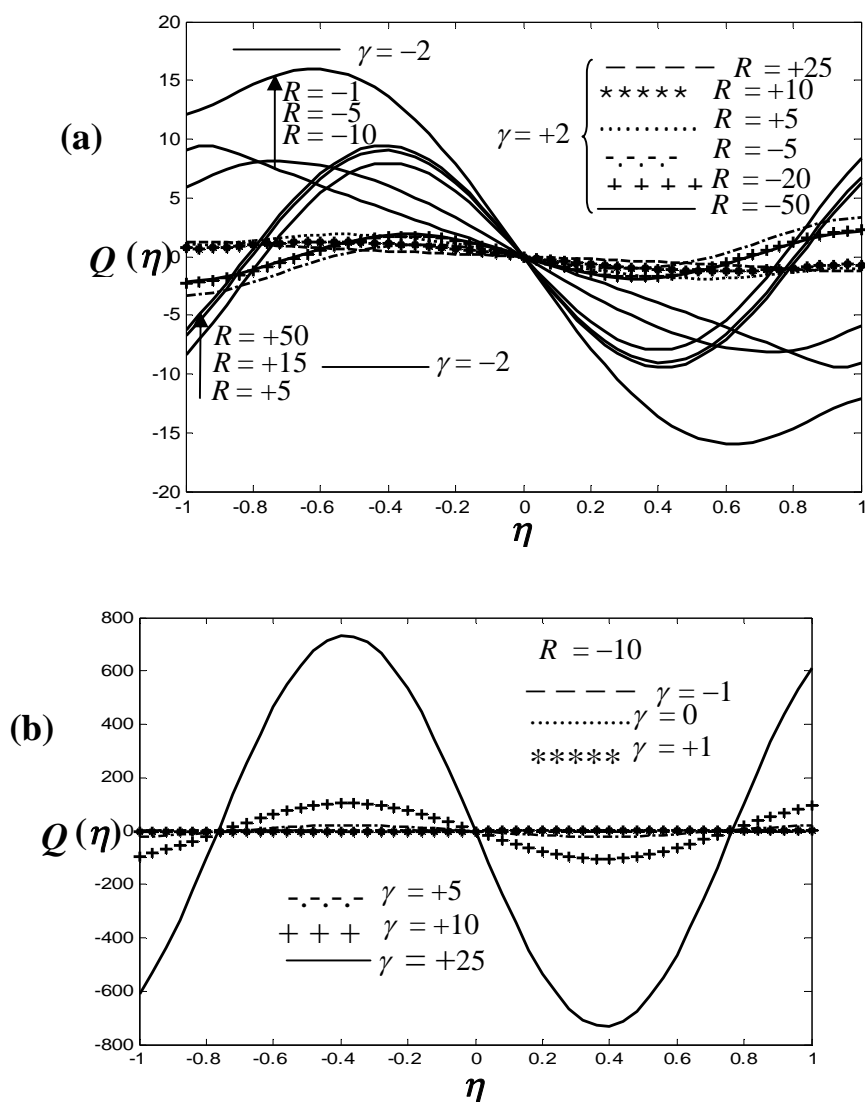
Figure I. 8 : Vitesse transversale, (a) pour deux valeurs fixes du coefficient d'accélération et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds de suction ou d'injection, (b) pour deux valeurs fixes du nombre de Reynolds de suction et d'injection et pour différentes valeurs du coefficient d'accélération [83, 99, 135].

La Figure I. 8(a) présente des régions proches des parois où le module de la vitesse excède la valeur fixée par les conditions aux limites. Ces régions se manifestent d'une part, lorsque le mouvement des parois est décéléré et pour des grandes valeurs du nombre de Reynolds d'injection. D'autre part, pour des grandes valeurs du nombre de Reynolds de suction lorsque les frontières du domaine de l'écoulement sont en mouvement d'accélération. Le principe selon

lequel l'accélération des parois fait déborder la vitesse transversale dans le cas de la succion est bien mis en évidence dans la Figure I. 8(b). Par ailleurs, le débordement de la vitesse transversale causé par la décélération des parois dans le cas de l'injection du fluide dans le canal est aussi mis en évidence dans la Figure I.8(b).

I.2.2 Présentation des termes de pression

Les termes de pression jouent un rôle important dans la conservation de la quantité de mouvement, en particulier le gradient transversal de pression représenté dans la Figure I. 9.



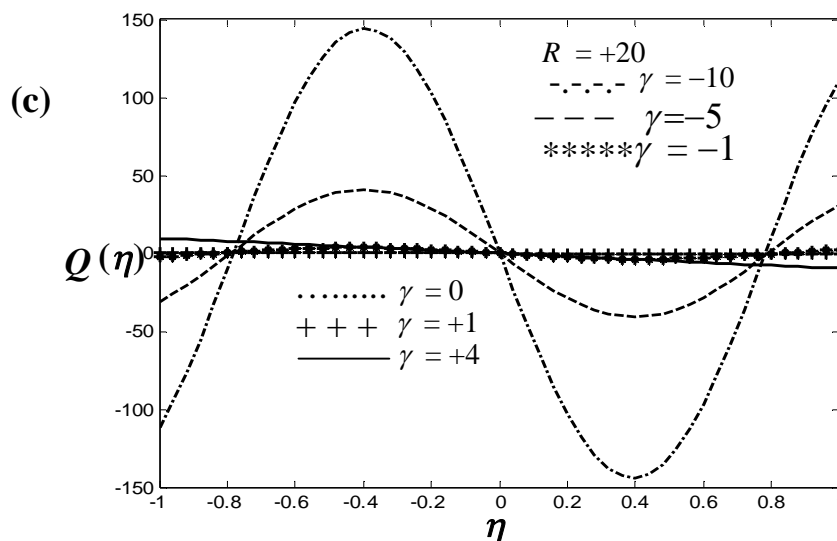
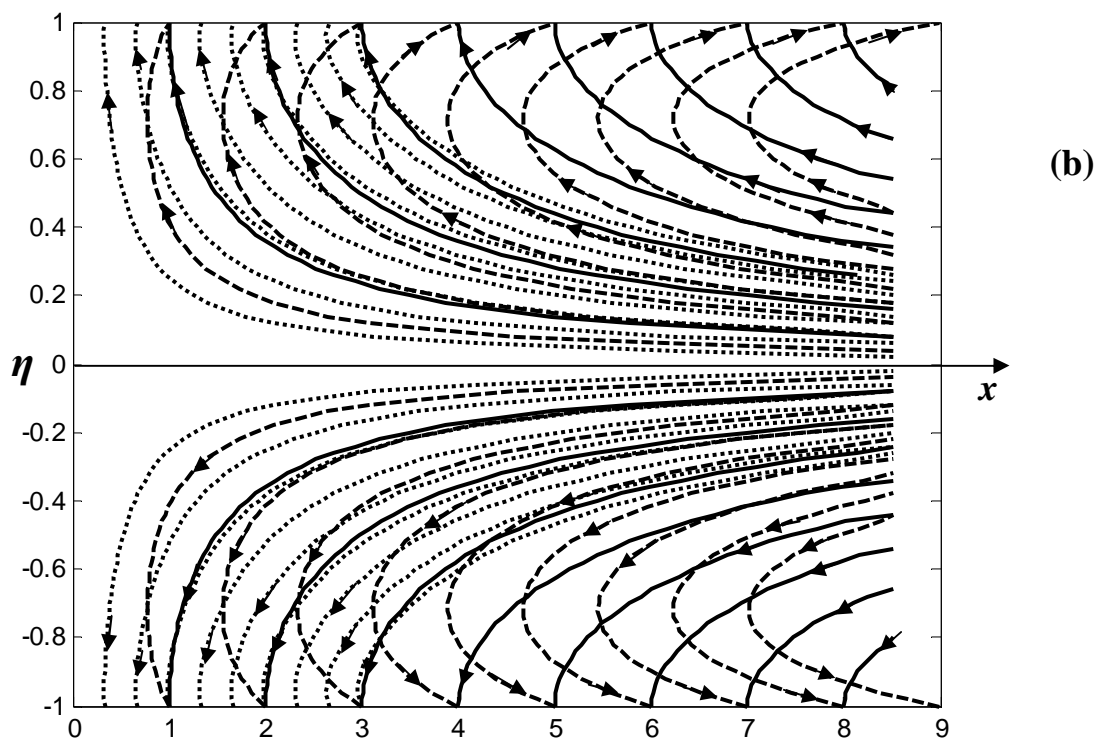
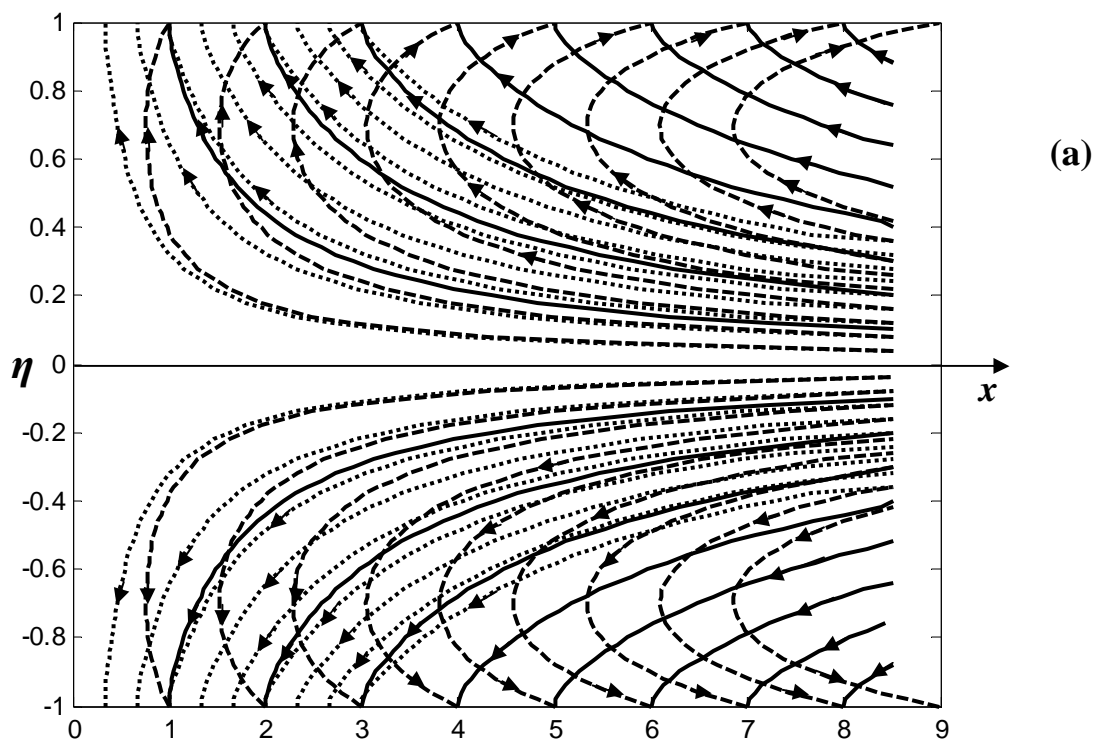


Figure I. 9 : Gradient transversal de pression, (a) pour des valeurs fixées du coefficient d'accélération/décélération et pour différentes valeurs des nombres de Reynolds d'injection et de suction, (b) pour un nombre de Reynolds de suction fixé et pour différente valeur du coefficient d'accélération/décélération, (c) pour un nombre de Reynolds d'injection fixé et pour différentes valeurs du coefficient d'accélération/décélération [135].

Il ressort des courbes présentées à la Figure I. 9 (a) que le gradient transversal de pression a un comportement oscillatoire quand les parois du canal sont décélérées, surtout lorsque le nombre de Reynolds d'injection augmente. Ce même comportement oscillatoire fait face lorsque le nombre de Reynolds de suction augmente quand les frontières de l'écoulement sont accélérées. Les Figures I. 9(b) et I.9(c) illustrent bien ces oscillations du gradient transversal de pression. Il faut tout de même noter que ces oscillations du gradient transversal de pression se manifestent quand la vitesse longitudinale de l'écoulement maximale ou minimale à l'intérieur du canal et aussi quand la vitesse transversale présente des régions de débordement.

I.2.3 Présentation du champ de l'écoulement

Il s'agit des lignes de courant confondues aux trajectoires des particules fluides comme l'écoulement est celui d'un fluide incompressible en régime permanent. Ces lignes de courant sont présentées dans la Figure I.10.



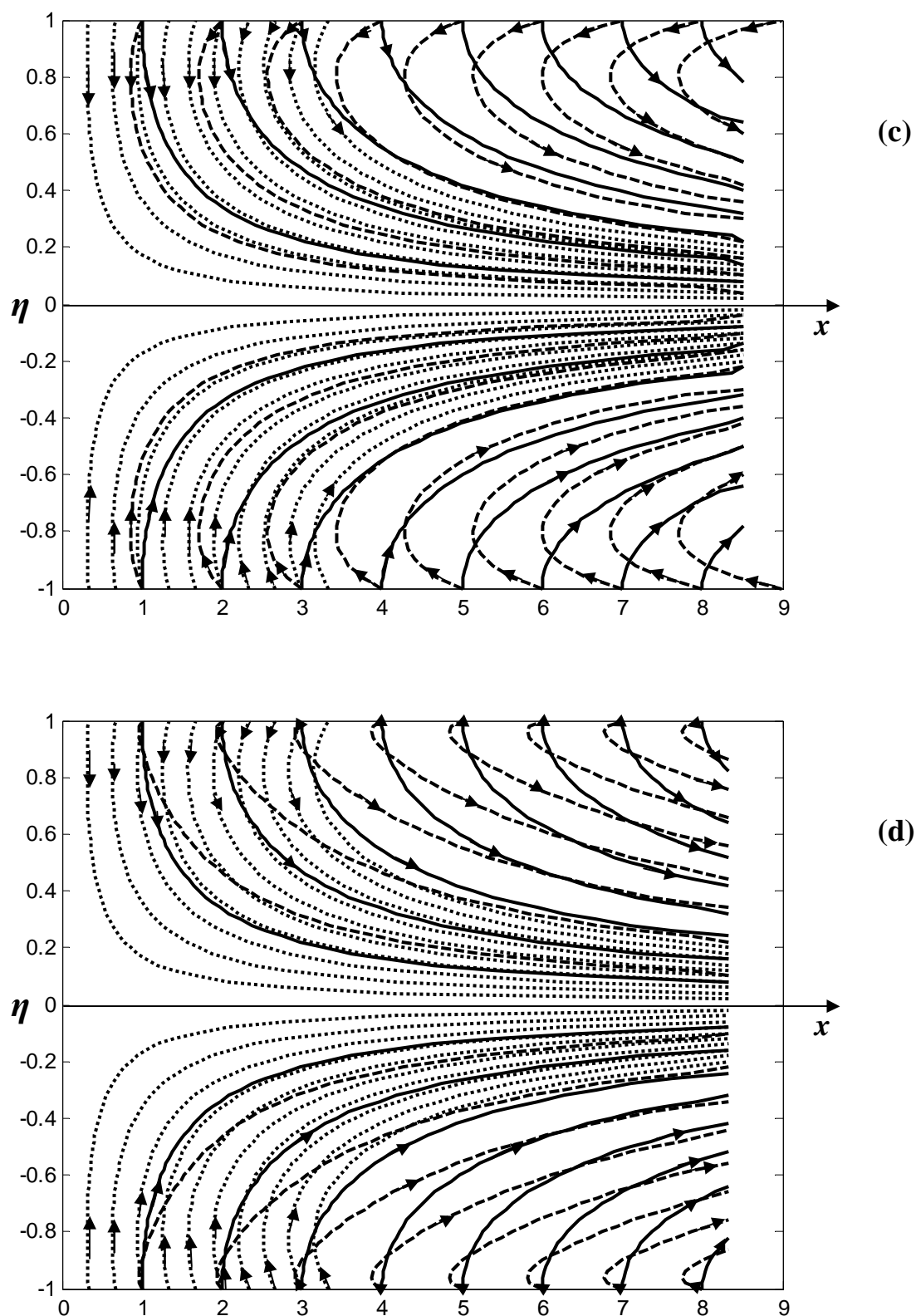


Figure I. 10 : Lignes de courant de suction (a) $R = -20$, (b) $R = -5$ et d'injection (c) $R = 5$, (d) $R = 25$, en considérant les parois immobiles ($\gamma = 0$, lignes en traits continus), les parois accélérées ($\gamma = +2$, lignes en traits interrompus), ainsi que les parois décélérées ($\gamma = -2$, lignes en pointillés) [149].

Dans tous les cas, lorsque les parois sont immobiles, les lignes de courant tracées illustrent un même sens de l'écoulement représenté par les lignes en traits continus dans la Figure I.10. Quand les parois sont accélérées, la courbure des trajectoires caractérise le changement de sens du mouvement indiquant la manifestation de l'écoulement inverse comme le montrent les lignes en traits interrompus. Pour le cas des parois en mouvement décéléré en référence aux lignes en pointillés, les trajectoires des particules fluides sont semblables à celles obtenues concernant l'écoulement entre deux parois poreuses fixes.

Conclusion

Dans ce chapitre, il était question de présenter quelques travaux antérieurs portant sur les écoulements de fluides dans des canaux comportant deux parois fixes et poreuses dans un premier temps, ainsi que des parois à la fois poreuses et en mouvement dans un second temps.

**CHAPITRE II : FORMULATION DU
PROBLEME ET METHODE DE
RESOLUTION**

Ce chapitre est consacré à la présentation de la géométrie du domaine de l'écoulement, à la formulation mathématique du mouvement du fluide, ainsi qu'à la description de la méthode de résolution du modèle mathématique du problème obtenu.

II.1 PRESENTATION DE L'ESPACE CONTENANT LE FLUIDE

L'écoulement est causé par injection du fluide entre deux plateaux circulaires poreux comme l'illustre la Figure II.1.

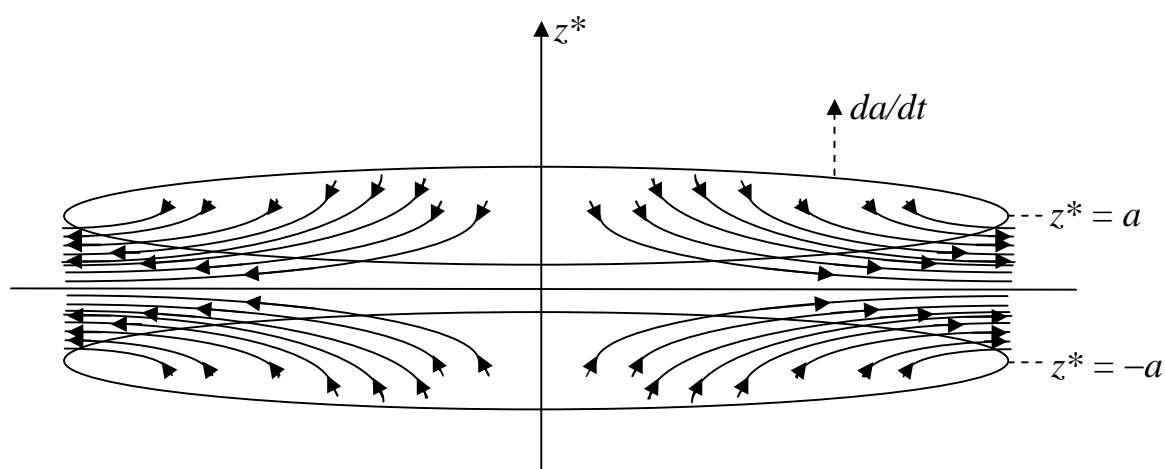


Figure II.1 : Espace géométrique de l'écoulement.

Les deux plateaux sont parallèles et opposés séparés par une distance $2a$, de sorte que le plateau supérieur est situé à la position $z^* = a(t^*)$ et le plateau inférieur se trouve à la position $z^* = -a(t^*)$, où z^* est un axe passant perpendiculairement aux centres des deux disques et t^* désigne le temps. Cette largeur $2a$ du domaine de l'écoulement est faible par rapport au rayon des disques identiques qui tend vers l'infini et qui est mesuré suivant la coordonnée radiale r^* . Compte tenu de ce rayon qui tend vers l'infini, le fluide qui s'écoule ne ressent pas les effets de bords suivant les limites radiales de l'espace occupant le fluide. La configuration des lignes de courant de la Figure II.1 montre qu'il s'agit d'un écoulement sandwich, c'est-à-dire le mouvement du fluide est identique de part et d'autre de la section circulaire médiane de

domaine de l'écoulement, encore appelée frontière ouverte dans cette étude. En d'autres termes, il s'agit d'une symétrie établie dans le problème en étude, de telle sorte que les caractéristiques du mouvement du fluide entre la frontière ouverte, encore appelée section médiane circulaire située à $z^* = 0$ et la borne rigide poreuse située à $z^* = a(t^*)$, sont les mêmes que celles qui correspondent à l'espace fluide compris entre la frontière ouverte $z^* = 0$ et l'autre borne rigide perméable localisée à $z^* = -a(t^*)$. La demi-largeur de gap a dépend du temps t à cause du fait que les parois de l'écoulement ne sont pas fixes. En effet, pendant que le fluide est injecté dans le domaine de l'écoulement, les deux disques sont parallèlement en mouvement de translation suivant l'axe z^* . Ce déplacement des disques peut créer leur rapprochement ou leur éloignement provoquant ainsi une diminution ou une augmentation du volume de l'espace contenant le fluide en mouvement. C'est le volume d'un cylindre de longueur ou de hauteur $2a$ et de rayon mesuré suivant la coordonnée radiale r , comme le montre la Figure II.2.

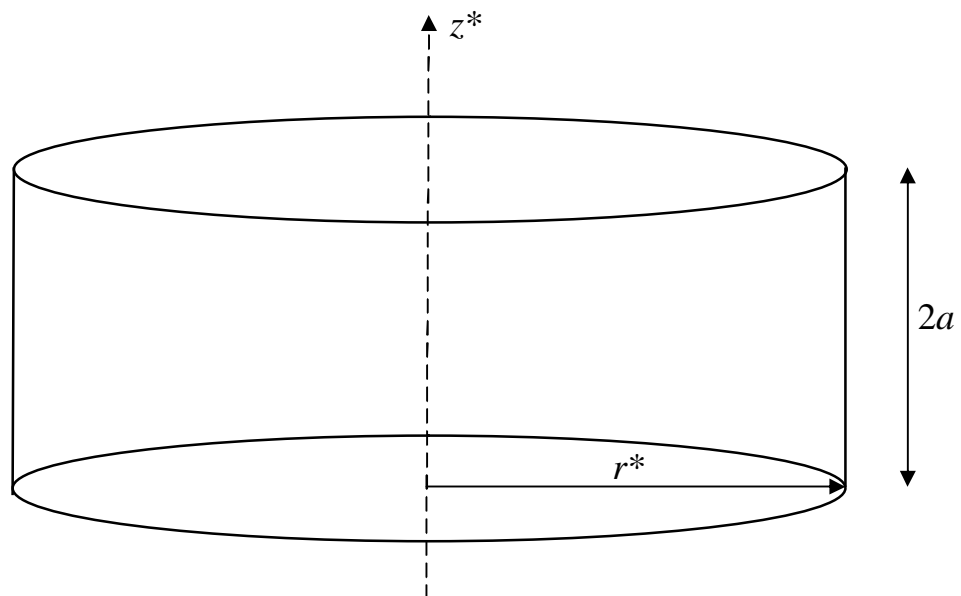


Figure II.2 : Présentation du cylindre de rayon r^* , d'axe de symétrie z^* et de longueur ou de hauteur $2a$.

L'injection du fluide dans le domaine de l'écoulement à travers les pores des deux disques est essentiellement axiale suivant l'axe z^* . Une fois dans l'espace intermédiaire des deux plateaux circulaires, le mouvement du fluide comporte une composante radiale associée à la composante axiale. Puis, loin du point central de l'espace contenant le fluide, l'écoulement devient essentiellement radial, surtout au voisinage immédiat de la section circulaire médiane.

II.2 DESCRIPTION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

L'étude est faite en application des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. En effet, la masse de fluide qui entre dans le domaine de l'écoulement par les pores des deux disques est égale à celle qui sort par la surface latérale du cylindre qui a pour bases les deux plateaux circulaires poreux, d'où la conservation de la masse qui aboutit à l'équation de continuité. Par ailleurs, l'écoulement en lui-même, comme nous l'avons déjà dit, est un transfert de quantités de mouvement traduit comme une relation de cause à effet entre les effets d'inertie, de viscosité, de pression et gravité, donnant lieu aux équations de Navier-Stokes [1-7].

II.2.1 Equations du mouvement

Compte tenu de la géométrie de l'écoulement, le mouvement du fluide est axisymétrique avec deux composantes du champ de vitesse dont une vitesse radiale V_r^* et une vitesse axiale ou transversale V_z^* , encore appelée vitesse normale. Plus précisément, la vitesse axiale est aussi normale parce que l'écoulement axial est perpendiculaire au plan des disques. Par ailleurs, la pression dans l'écoulement est décrite par la variable p . Le fluide étudié a pour propriétés physiques ρ et μ désignant respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique. Les équations du problème sont écrites en négligeant les termes de gravité étant donné que la couche fluide située entre les deux disques

est mince, car la distance entre les plateaux circulaires est petite comparée au rayon infini des deux parois poreuses. Ces équations sont données comme suit:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \nu \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 V_r^*}{\partial z^{*2}} - \frac{V_r^*}{r^{*2}} \right) \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \nu \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 V_z^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (\text{II.3})$$

où $\nu = \mu / \rho$ est la viscosité cinématique du fluide. La conservation de la masse est décrite par l'équation de continuité (II.1), et la conservation de la quantité de mouvement est régie par les équations de Navier-Stokes (II.2) et (II.3).

II.2.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées aux équations (II.1)-(II.3) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} V_r^* &= 0, & V_z^* &= -V & \text{pour } z^* &= a(t) \\ \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} &= 0, & V_z^* &= 0 & \text{pour } z^* &= 0 \\ V_r^* &= 0, & V_z^* &= +V & \text{pour } z^* &= -a(t) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Les conditions aux limites pour $z^* = \pm a(t)$ expriment la condition d'adhérence $V_r^* = 0$, autrement dit, le mouvement radial des particules fluides est nul au contact des parois. De plus, ces conditions aux limites expriment aussi les vitesses d'injection égales $V_z^* = \pm V$ en valeur absolue au niveau des parois. Par ailleurs, la symétrie établie dans le problème en étude est traduite par les conditions $\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} = 0$, $V_z^* = 0$ pour $z^* = 0$, ce qui donne lieu à un écoulement

sandwich qui signifie que le fluide est identiquement distribué de part et d'autre de la section médiane circulaire située à la position $z^* = 0$.

II.2.3 Prise en compte du mouvement des frontières de l'écoulement

La vitesse absolue d'injection du fluide à travers les pores des disques V s'exprime en fonction de la vitesse relative d'injection du fluide V_i et de la vitesse de déplacement des parois poreuses $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ représentant aussi la vitesse d'entraînement du fluide dans le voisinage immédiat des plateaux circulaires poreux, d'où la formule :

$$V = V_i - \dot{a} \quad (\text{II.5})$$

La vitesse $V \neq 0$ joue un rôle important dans le problème, car sa définition $V = V_i - \dot{a}$ met en exergue l'influence du mouvement des disques, par la présence de la vitesse de déplacement des plateaux circulaires \dot{a} , sur l'écoulement qui est causé par l'injection du fluide à travers les parois poreuses à la vitesse relative V_i dans le domaine de l'écoulement.

Dans ce travail, l'écoulement a lieu entre les deux disques poreux à cause de l'injection du fluide dans l'espace intermédiaire des deux frontières perméables. En d'autres termes, la présence du fluide dans le domaine de l'écoulement est due au phénomène d'injection à travers les parois poreuses. Ce processus d'injection ou d'ajout de masse du fluide est traduit par l'introduction et la définition de la vitesse absolue d'injection V dans les conditions aux limites (II.4).

Le problème en étude est le mouvement du fluide et non le mouvement des disques. Le mouvement des disques influence seulement l'écoulement et cette influence est caractérisée par l'augmentation ou la réduction du volume du domaine de l'écoulement, d'une part. D'autre part, le déplacement des disques influence la définition de la vitesse absolue d'injection V au niveau des parois

poreuses. Par exemple, les vitesses V et \dot{a} sont liées dans les processus de combustion des moteurs industriels par le rapport des densités de fluide et de solide [150, 151], à partir de la conservation de masse. Plus précisément, si ρ_0 est la masse volumique du solide, alors la conservation de la masse au niveau de la surface mouillée, c'est-à-dire la surface qui est en contact avec le fluide, s'exprime comme : $\rho A_i V_i = \rho_0 A_i \dot{a}$ [151], où $A_i = \pi r^{*2} + \pi r^{*2} = 2\pi r^{*2}$ est la surface mouillée, dans le présent contexte, c'est la surface totale d'injection du fluide, égale à la somme des surfaces des deux disques qui sont supposés uniformément perméables. Ainsi, la vitesse relative d'injection du fluide est réduite :

$$V_i = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \dot{a} = r_\rho \dot{a} \quad (\text{II.6})$$

où $r_\rho = \frac{\rho_0}{\rho}$ est le rapport des masses volumiques du solide et du fluide. Les équations (II.5) et (II.6) donnent lieu à l'expression suivante de la vitesse absolue d'injection :

$$V = (r_\rho - 1) \dot{a} = E \dot{a} \quad (\text{II.7})$$

où $E = (r_\rho - 1)$ est le coefficient d'injection, en d'autres termes, c'est une mesure de la porosité des parois de l'écoulement. Par exemple, le coefficient E est constant dans le fonctionnement des moteurs de fusées estimé égal à $E = 99$ pour $\rho_0 = 2000 \text{ kgm}^{-3}$ et $\rho = 20 \text{ kgm}^{-3}$ [150-152].

L'expansion ou l'augmentation du volume du domaine de l'écoulement correspond à $\dot{a} > 0$, alors que la contraction ou la diminution du volume de l'espace contenant le fluide survient quand $\dot{a} < 0$. En effet, le volume \mathcal{G} de fluide entre les deux disques est défini en considérant leur rayon r^* et la distance

séparant les deux surfaces $2a$. C'est le volume du cylindre de rayon r^* et de hauteur ou de longueur $2a$, donné par :

$$\mathcal{G} = \pi r^2 2a = \frac{1}{2} A_c r \quad (\text{II.8})$$

où la section transversal A_c de l'écoulement qui a lieu entre les deux disques est définie par:

$$A_c = (2\pi r)2a = 4\pi r a \quad (\text{II.9})$$

En fait A_c est la surface latérale d'un cylindre de rayon r^* et de longueur $2a$ mesurée suivant l'axe z^* qui passe perpendiculairement aux milieux des surfaces des deux disques.

II.2.4. Equation de débits

Le fait que le fluide entre et sort du domaine de l'écoulement conduit à la notion de débits. Notons en général qu'il existe deux types de débits, notamment le débit massique et le débit volumique. Précisément, le débit volumique est le flux du champ de vitesse à travers une surface quelconque traversée par le fluide, il est équivalent au volume du fluide par unité de temps. Le débit volumique ainsi défini, multiplié par la masse volumique permet d'obtenir le débit massique correspondant à la masse par unité de temps qui traverse une section transversale d'un écoulement de fluide.

Dans le cas présent, la variation de masse de fluide entre les deux disques est la différence entre la masse qui entre dans le domaine de l'écoulement par les surfaces poreuses des disques dont la somme est A_i , et la masse qui sort de l'espace contenant le fluide à travers la section transversale de l'écoulement qui est la surface latérale A_c du cylindre de rayon r et de longueur ou de hauteur $2a$. On a alors la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{G}} \rho d\mathcal{G} = \rho V_i A_i - \rho u_m A_c \quad (\text{II.10})$$

où u_m est la vitesse moyenne du fluide qui traverse la surface A_c . En tenant compte de la formule (II.8) du volume du domaine de l'écoulement, l'équation (II.10) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho A_c r^* \right) = \rho V_i A_i - \rho u_m A_c \quad (\text{II.11})$$

Le volume \mathcal{V} est défini en considérant un rayon r donné. Ainsi, la formule (II.11) est développée comme suit :

$$\frac{1}{2} \rho r^* \frac{\partial A_c}{\partial t} = \rho V_i A_i - \rho u_m A_c \quad (\text{II.12})$$

La vitesse moyenne ou vitesse de débit u_m peut alors être définie à partir de l'équation (II.12) par :

$$u_m = \frac{A_i}{A_c} V_i - \frac{1}{2} \frac{r^*}{A_c} \frac{\partial A_c}{\partial t} \quad (\text{II.13})$$

En substituant les expressions des surfaces $A_c = 4\pi r^* a$ et $A_i = 2\pi r^{*2}$ dans l'équation (II.13), on obtient :

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{r^*}{a} V_i - \frac{1}{2} \frac{r^*}{a} \dot{a} = \frac{1}{2} \frac{r^*}{a} (V_i - \dot{a}) \quad (\text{II.14})$$

Connaissant la vitesse absolue d'injection du fluide $V = V_i - \dot{a}$, la vitesse de débit u_m a finalement pour expression :

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{r^*}{a} V \quad (\text{II.15})$$

II.2.5 Définition de la fonction de courant

La fonction de courant est une grandeur liée au champ de vitesses et qui peut être définie pour différents types d'écoulements. Elle peut être utilisée pour représenter les lignes de courant d'un fluide correspondant aux trajectoires des particules fluides dans un écoulement stationnaire. La conséquence de l'incompressibilité du fluide est le champ de vitesses à divergence nulle comme le décrit l'équation (II.1). Les composantes de vitesse peuvent être liées à la fonction de courant ψ dans le but de vérifier l'équation (II.1) par les relations suivantes :

$$V_r^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*}, \quad V_z^* = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \quad (\text{II.16})$$

Il apparaît clairement que la fonction de courant ψ est liée d'une part à la vitesse radiale V_r^* et d'autre part à la vitesse transversale V_z^* . Ainsi, le problème vérifié par les composantes de vitesse V_r^* et V_z^* peut être transformé en un problème satisfait par l'unique fonction de courant ψ , ceci constitue l'intérêt de l'usage de la fonction de courant. Par cette approche, la détermination de la fonction de courant permet de retrouver les composantes de vitesse par un calcul en retour.

II.2.6 Définition du vecteur tourbillon et obtention de l'équation de vorticité

Comme nous l'avons déjà signalé, la vorticité est générée par le caractère tourbillonnaire de l'écoulement. Notons que c'est une propriété inhérente à tout écoulement de fluide quelque soit le régime. Autrement dit, il existe des zones de tourbillon ou des régions de mouvement rotatif dans tout écoulement de fluide.

II.2.6.1 Définition du vecteur rotation du fluide

Le vecteur tourbillon $\mathbf{\Omega}$ est défini par :

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V} \quad (\text{II.17})$$

Les composantes de ce vecteur dans la base cylindro-polaire associée à l'écoulement sont telles que :

$$\mathbf{\Omega} = \left(0, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} - \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right), 0 \right) \quad (\text{II.18})$$

Le vecteur tourbillon peut aussi s'exprimer en termes de fonction de courant grâce aux équations (II.16) qui lient la fonction de courant aux composantes de vitesse :

$$\mathbf{\Omega} = \left(0, \frac{1}{2r^*} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} + r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \right) \right), 0 \right) = \left(0, \frac{1}{2r^*} D^2 \psi^*, 0 \right) \quad (\text{II.19})$$

$$\text{où } D^2 \psi^* = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} + r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \right).$$

II.2.6.2 Equation de vorticité

L'équation de vorticité est décrite par le vecteur tourbillon. La forme vectorielle des équations de Navier-Stokes est par conséquent nécessaire pour produire cette équation. L'expression vectorielle des équations de Navier-Stokes est la suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t^*} + \text{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} + \text{grad} \frac{\mathbf{V}^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p^* + \nu \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^{*2}} - \frac{V_r^*}{r^{*2}} \mathbf{e}_r \right) \quad (\text{II.20})$$

où \mathbf{e}_r est le premier vecteur de la base cylindrique associée à l'écoulement. En considérant l'équation (II.17), il apparaît que l'équation de vorticité s'obtient en

opérant le rotationnel de l'équation (II.20). Par ailleurs, compte tenu de l'équation (II.19) qui montre le lien entre le vecteur tourbillon et la fonction de courant, il en ressort que l'équation vérifiée par le vecteur tourbillon est aussi satisfaite par la fonction de courant. Ainsi, l'équation satisfaite par la fonction de courant s'obtient en calculant le rotationnel de chaque terme de l'équation (II.20) exprimé en fonction de la fonction de courant. En effet, le rotationnel du premier terme du membre de gauche de l'équation (II.20) est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\mathbf{rotV}) = \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial D^2 \psi}{\partial t^*} - \frac{1}{r^{*3}} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} D^2 \psi^* \right) \mathbf{e}_\theta \quad (\text{II.21})$$

où \mathbf{e}_θ est le deuxième vecteur de la base cylindro-polaire associée à l'écoulement.

Le rotationnel du deuxième terme du membre de gauche de l'équation (II.20) est obtenu comme suit :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = - \left(\frac{1}{r^{*2}} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*3}} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} D^2 \psi^* \right) \mathbf{e}_\theta \quad (\text{II.22})$$

Il est bien connu que le rotationnel d'un gradient est nul. Ainsi, le rotationnel du troisième terme du membre de gauche et le rotationnel du premier terme du membre de droite de l'équation (II.20) sont nuls. Par ailleurs, le rotationnel du deuxième terme du membre de droite de l'équation (II.20) est donné par :

$$v \mathbf{rot} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^{*2}} - \frac{V_r^*}{r^{*2}} \mathbf{e}_r \right) = \frac{v}{r} D^4 \psi \mathbf{e}_\theta \quad (\text{II.23})$$

Rappelons que l'équation du tourbillon est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\mathbf{rotV}) + \mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = v \mathbf{rot} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^{*2}} - \frac{V_r^*}{r^{*2}} \mathbf{e}_r \right) \quad (\text{II.24})$$

Compte tenu des expressions (II.21), (II.22) et (II.23), nous obtenons l'équation satisfaite par la fonction de courant :

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (D^2 \psi^*) + \frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (D^2 \psi^*) - \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \frac{\partial}{\partial z^*} (D^2 \psi^*) \right) - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} D^2 \psi^* = \nu D^4 \psi^* \quad (\text{II.25})$$

Les conditions aux limites associées à l'équation (II.25) en introduisant les expressions (II.16) dans les conditions aux limites (II.4) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} = 0, \quad -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} = -V & \quad \text{pour } z^* = a(t) \\ \frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} = 0, \quad -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} = 0 & \quad \text{pour } z^* = 0 \\ \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} = 0, \quad -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} = V & \quad \text{pour } z^* = -a(t) \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Il apparaît que l'introduction de la fonction de courant dans les équations du problème en considérant les expressions (II.16) permet de vérifier l'équation de continuité (II.1) et permet aussi de réduire les trois équations (II.1), (II.2) et (II.3) décrites par les composantes de vitesse en une seule équation différentielle (II.25) satisfaite par la fonction de courant décrivant le même problème.

II.3 METHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES

C'est une méthode de plus en plus utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulements de fluides entre deux parois poreuses [92-95]. C'est une technique basée sur la séparation des variables qui s'appuie sur la géométrie de l'écoulement ainsi que les conditions aux limites et dont la validité a été démontrée numériquement et expérimentalement [142, 143, 153]. Cette approche diffère d'un problème à un autre par la configuration géométrique de l'écoulement et les conditions aux limites.

II.3.1 Equations du problème

Compte tenu de la configuration géométrique de l'écoulement, des conditions aux limites du problème et des propriétés physiques du fluide étudié, la fonction de courant s'exprime sous la forme :

$$\psi^*(r^*, z^*, t^*) = \frac{1}{2} \frac{\nu}{a} r^{*2} F(\eta, t^*) \quad (\text{II.27})$$

où $\eta = \frac{z^*}{a(t^*)}$ est la variable axiale adimensionnelle. La fonction F est une fonction de courant adimensionnelle de l'écoulement semblable. Dans le but d'obtenir le problème satisfait par la fonction F , nous introduisons l'expression (II.27) de la fonction de courant dans l'équation (II.25). Pour cela, nous donnons les transformations des différents termes de l'équation (II.25). En effet, notons d'abord que les vitesses radiale et axiale exprimées en fonction de F sont données par :

$$V_r^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \frac{\nu}{a^2} r^* \frac{\partial F}{\partial \eta} \quad (\text{II.28})$$

$$V_z^* = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} = -\frac{\nu}{a} F \quad (\text{II.29})$$

Par ailleurs, le terme $D^2\psi^*$ devient :

$$D^2\psi^* = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} + r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \right) = \frac{1}{2} \frac{\nu}{a^3} r^{*2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \quad (\text{II.30})$$

En utilisant l'équation (II.30), le premier terme de l'équation (II.25) est transformé comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^2\psi^*}{\partial t^*} &= -\frac{3}{2} \frac{\nu}{a^4} \dot{a} r^{*2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{a^5} \dot{a} a r^{*2} \eta \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{a^5} r^{*2} \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} r^{*2} \frac{\nu}{a^3} \frac{\partial^3 F}{\partial t^* \partial \eta^2} \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

La transformation du deuxième terme de l'équation (II.25) est donnée par :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial r^*} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a^5} r^{*2} \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \quad (\text{II.32})$$

Le troisième terme de l'équation (II.25) devient :

$$-\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{a^5} r^{*2} F \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} \quad (\text{II.33})$$

Le quatrième terme de l'équation (II.25) a pour expression :

$$-\frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} D^2 \psi^* = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{a^5} r^{*2} \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \quad (\text{II.34})$$

L'unique terme du membre de droite de l'équation (II.25) devient :

$$v D^4 \psi = D^2 (D^2 \psi) = \frac{1}{2} \frac{v}{a^5} r^{*2} \frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} \quad (\text{II.35})$$

En prenant en compte les transformations des différents termes de l'équation (II.25), la transformation globale de cette équation est donnée par :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + F \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + 3\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \alpha \eta \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} - \frac{a^2}{v} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = 0 \quad (\text{II.36})$$

où $\alpha = \frac{a\dot{a}}{v}$ est un paramètre sans dimension résultant du mouvement des disques.

Les conditions aux limites dérivant de l'introduction de la fonction dans le problème sont les suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} (+1, t^*) = 0, \quad F(+1, t^*) = \frac{a(t^*)V}{v} \quad \text{pour } \eta = +1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}(0, t^*) = 0, \quad F(0, t^*) = 0 & \quad \text{pour } \eta = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \eta}(-1, t^*) = 0, \quad F(-1, t^*) = -\frac{a(t^*)V}{\nu} & \quad \text{pour } \eta = -1 \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

L'équation (II.36) et les conditions aux limites (II.37) décrivent un problème non permanent.

Les conditions aux limites (II.37) sont valables quelque soit le temps t^* . En particulier, la fonction adimensionnelle aux frontières de l'écoulement est établie comme suit : $F(\pm 1, t^*) = \pm \frac{a(t^*)V}{\nu}$.

II.3.2 Position du problème

En régime permanent qui nous intéresse dans ce travail, la fonction F ne dépend pas explicitement du temps. Autrement dit, sa dépendance spatio-temporelle est incorporée dans l'expression de la variable $\eta = \frac{z^*}{a(t^*)}$ dont elle

dépend désormais uniquement, telle que $F = F(\eta)$, ce qui implique que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = 0, \text{ en considérant que le paramètre } \alpha \text{ est quasi constant dans le}$$

temps. Dans ce cas, α n'est pas très différent de sa valeur initiale, telle que

$$\alpha = \frac{a\dot{a}}{\nu} = \frac{a_0\dot{a}_0}{\nu}, \text{ où } a_0 \text{ est la demi-largeur initiale du domaine de l'écoulement et}$$

\dot{a}_0 est la vitesse initiale de déplacement des disques.

$$\text{si } \alpha = \frac{a\dot{a}}{\nu} = \frac{a_0\dot{a}_0}{\nu} \text{ est supposé constant, en tenant compte de l'équation}$$

(II.7): $V = E\dot{a}$, l'expression du nombre de Reynolds pour l'écoulement

$$\text{permanent étudié correspond à: } R = \frac{aV}{\nu} = E\alpha, \text{ en considérant une valeur}$$

constante du coefficient d'injection E . Dans notre travail, la valeur constante de

E n'est donnée, parce que cette étude n'est pas dédiée à un fluide incompressible particulier et spécifié, mais c'est une contribution générale à une meilleure compréhension au contrôle d'un écoulement de fluide entre deux plateaux circulaires poreux en mouvement de translation tendant à augmenter ou à réduire le volume du domaine de l'écoulement. Comme F , α et R ne dépendent pas explicitement du temps t^* , le problème à résoudre est alors le suivant :

$$F^{(4)} - F^{(1)}F^{(2)} + FF^{(3)} + 3\alpha F^{(2)} + \alpha\eta F^{(3)} = 0 \quad (\text{II.38})$$

$$\begin{aligned} F^{(1)}(+1) &= 0, & F(+1) &= R & \text{pour} & \eta = +1 \\ F^{(2)}(0) &= 0, & F(0) &= 0 & \text{pour} & \eta = 0 \\ F^{(1)}(-1) &= 0, & F(-1) &= -R & \text{pour} & \eta = -1 \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

où $F^{(i)} = d^i F / d\eta^i$. Les équations (II.38) et (II.39) définissent un problème à conditions aux limites sur trois bornes, notamment deux bornes rigides situées à $\eta = -1$ et $\eta = +1$, respectivement ; ainsi qu'une frontière non rigide située au milieu de l'espace contenant le fluide, à la position $\eta = 0$.

En fonction de $F(\eta)$, les vitesses radiale et axiale ont alors pour expressions :

$$V_r^* = \frac{1}{2} \frac{v r^*}{a^2} F^{(1)}(\eta), \quad V_z^* = -\frac{v}{a} F(\eta) \quad (\text{II.40})$$

II.3.3 Introduction des variables adimensionnelles

Dans ce problème, la vitesse radiale est adimensionnalisée par la vitesse moyenne ou vitesse de débit, tel que définie à l'équation (II.15) : $u_m = \frac{1}{2} \frac{r^*}{a} V$. Par ailleurs, la vitesse axiale est déterminée par unité de la vitesse absolue de succion $-V$ relative à la frontière supérieure poreuse, telle que :

$$V_r = \frac{V_r^*}{u_m} = F^{(1)}(\eta) / R, \quad V_z = \frac{V_z^*}{-V} = F(\eta) / R \quad (\text{II.41})$$

Une autre grandeur physique décrivant le transfert de quantité de mouvement dans le fluide mérite d'être définie, notamment le gradient de pression qui a une composante radiale et une composante transversale. Ces deux composantes sont obtenues en introduisant les formules (II.41) dans les équations (II.2) et (II.3). On obtient l'expression suivante relative au gradient de pression radial par unité du rayon des disques :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} = \frac{1}{2} \rho \frac{v^2}{a^4} \left(F^{(3)} + FF^{(2)} + (2\alpha - F^{(1)})F^{(1)} + \alpha\eta F^{(2)} \right) \quad (\text{II.42})$$

Dans ce travail, la demi-largeur du domaine de l'écoulement a représente la référence des longueurs, alors le rayon adimensionnel r des disques est défini par $r = r^*/a$. De plus, la pression est déterminée par unité de la pression absolue (ρV^2) , tel que : $p = p^*/(\rho V^2)$. Ainsi, le gradient de pression radial par unité de rayon adimensionnel est obtenu comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{2} \left(F^{(3)} + FF^{(2)} + (2\alpha - F^{(1)})F^{(1)} + \alpha\eta F^{(2)} \right) / R^2 \quad (\text{II.43})$$

Il en ressort que pour un nombre de Reynolds donné, le gradient radial de pression par unité de longueur est constant à l'intérieur du domaine de l'écoulement, car il est proportionnel à l'intégrale première de l'équation différentielle du problème (II.38). Autrement dit, le gradient de pression radial varie linéairement avec le rayon des disques. Cette variation linéaire est caractéristique de l'écoulement sandwich en étude. Sur le plan de la physique, surtout de la géométrie du mouvement du fluide, étant donné que le fluide en écoulement ne ressent pas les effets des frontières radiales, l'écoulement radial a tendance à être plus régulier que l'écoulement axial qui subit l'influence des

deux surfaces poreuses. Ce qui est tout à fait compréhensible, car le mouvement du fluide même est provoqué par l'injection qui est totalement axiale. Dans ce cas, le gradient de pression radial peut être considéré comme un effet secondaire dû à l'injection du fluide entre les deux disques opposés. Cet effet secondaire est matérialisé par un écoulement ultérieur qui est à la fois axial et radial dans l'espace intermédiaire des deux disques. Cet effet secondaire qui est l'écoulement radial finit par être primordial après un temps très long, caractéristique de l'écoulement permanent en étude, car loin du point central du domaine d'étude et proche de la section circulaire médiane, les trajectoires des particules fluides ont tendance à être parallèles à cette section circulaire médiane, située $\eta = 0$. Cet aperçu préalable du comportement de l'écoulement pourra être vérifié par les résultats numériques de ce travail. Si le gradient de pression radial joue un rôle secondaire et presque négligeable, surtout pendant l'injection du fluide dans le domaine de l'écoulement, c'est aussi parce que l'injection se fait suivant une seule composante, notamment la vitesse axiale ou normale. La pression étant liée à la vitesse par une même relation de conservation des quantités de mouvement, il vient qu'en l'absence d'une composante radiale de vitesse comme pendant l'injection du fluide, le gradient de pression radial est moins important. Son importance apparaît juste après introduction du fluide dans l'espace intermédiaire des deux disques et devient même asymptotiquement prépondérant après un temps très long. A ce stade, il est pertinent de noter que, ce comportement du gradient de pression à deux composantes est beaucoup rencontré dans la littérature [118, 119, 133]. Plus précisément, il y a comme un échange de rôles entre les deux composantes du gradient de pression qu'il faut relever pour les écoulements bidimensionnels, en effet, quand l'un des gradients de pression est important l'autre est négligeable. Ainsi, il existe donc des instances physiques pendant lesquelles les deux composantes présentent des contributions quasi-égales, notamment juste après le début du mouvement du fluide et un peu avant un temps très long. La

conservation de la quantité de mouvement montre que l'écoulement d'un fluide newtonien simple est régi par la vitesse et le gradient de pression. Nous parlons d'écoulement simple, parce que nous avons antérieurement relevé qu'il existe des écoulements complexes qui intègrent d'autres considérations physiques, comme l'interaction du mouvement du fluide avec un champ magnétique ou une réaction chimique. Pour les écoulements des fluides newtoniens, les équations de Navier-Stokes permettent de prévoir le comportement du gradient de pression connaissant la vitesse, et réciproquement.

Comme le gradient radial de pression par unité du rayon des disques est constant dans l'écoulement, la plus grande attention est portée sur le gradient axial de pression défini en introduisant les formules (II.41) dans l'équation (II.3) :

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = -\frac{\rho v^2}{a^3} (\alpha F + \alpha \eta F^{(1)} + F^{(2)} + FF^{(1)}) \quad (\text{II.44})$$

Le fait que le gradient de pression s'exprime en fonction de F et ses dérivées, illustre à suffisance la relation entre la vitesse de l'écoulement et la pression. En considérant les variables de référence déjà présentées, le gradient de pression axiale adimensionnel est donné par :

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = p^{(1)}(\eta) = -(\alpha F + \alpha \eta F^{(1)} + F^{(2)} + FF^{(1)}) / R^2 \quad (\text{II.45})$$

Profitons à ce stade pour signaler que la production de l'équation de vorticité a fait disparaître les termes de pression des équations de Navier-Stokes, mais grâce à la relation qui existe entre le champ de vitesse et la fonction de courant, les gradients de pression radiale et normale ont été exprimés. C'est aussi l'occasion de souligner qu'au lieu de déterminer directement la vitesse de l'écoulement et la pression en résolvant les équations de Navier-Stokes décrites par ces mêmes grandeurs physiques, nous avons plutôt procédé par l'obtention de l'équation de vorticité avant de revenir à la détermination des caractéristiques

de l'écoulement. Plus précisément, c'est la méthode utilisée, la méthode des solutions semblables, qui conduit à cette démarche indirecte pour la détermination des caractéristiques de l'écoulement. Cependant, il existe beaucoup d'autres méthodes [154-156] de résolution des équations de Navier-Stokes comme la méthode des différences finies [156]. En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations ou schéma numérique, liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre, car elle procède en deux étapes. D'une part, la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation. D'autre part, la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue. Pour plus de précisions, en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation différentielle dont les solutions sont des fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire (EDO) qui est à une seule variable. Les EDO sont souvent des problèmes associés aux conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle ordinaire est paramétré par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, alors que dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous forme de fonctions ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes.

Les EDP et ODE sont omniprésentes dans la science, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme ou des

mathématiques financières. Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. De plus, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP et ODE.

Pour la méthode des différences finies, un maillage est un ensemble de points isolés appelés nœuds situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles, une grille sur les seuls nœuds de laquelle sont définies les inconnues correspondant aux valeurs approximatives de ces fonctions. Le maillage comprend également des nœuds situés sur la frontière du domaine afin de pouvoir imposer les conditions initiales avec une précision suffisante. A priori, la qualité première d'un maillage est de couvrir au mieux le domaine dans lequel il se développe, de limiter la distance entre chaque nœud et son proche voisin. Cependant, le maillage doit également permettre d'exprimer la formulation discrète des opérateurs de différentiation. Pour cette raison, les nœuds du maillage sont le plus souvent situés sur une grille dont les directions principales sont les axes des variables.

Par ailleurs, une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation différentielle dont là où les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. Le terme *ordinaire* est utilisé par opposition au terme *dérivées partielles* où les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise. Il existe une forme de référence à laquelle on essaie de ramener les équations différentielles ordinaires par divers procédés mathématiques. Les équations différentielles représentent un objet d'étude de toute première importance, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Elles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques, par exemple

pour l'étude de la dynamique des populations. Les objectifs principaux de la théorie des équations ordinaires sont la résolution explicite complète quand elle est possible, la résolution approchée par des procédés d'analyse numérique, ou encore l'étude qualitative des solutions. Ce dernier domaine s'est progressivement étoffé, et constitue l'un des composants principaux d'une vaste branche des mathématiques contemporaines : l'étude des systèmes dynamiques.

Les méthodes directes de résolution des équations de Navier-Stokes permettent seulement de déterminer les caractéristiques de l'écoulement qui interviennent dans le transport des quantités de mouvement, en l'occurrence la vitesse et la pression. La différence avec la méthode des solutions semblables utilisée dans ce travail est qu'elle permet d'obtenir beaucoup de caractéristiques de l'écoulement mettant en évidence des structures hydrodynamiques importantes comme les composantes de vitesse, la pression, les gradients de pression, la fonction de courant, les lignes de courant et les trajectoires des particules fluides, ainsi que le coefficient de frottement et bien d'autres grandeurs physiques intéressantes. C'est donc dans l'objectif d'avoir un nombre intéressant des caractéristiques de l'écoulement que les scientifiques utilisent de plus en plus la méthode des solutions semblables surtout pour traité des problèmes d'écoulements bidimensionnels, écoulements de fluides incompressibles régis par des champs de vitesse à deux composantes.

II.4 METHODE DE RESOLUTION

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 utilisée pour résoudre numériquement le problème n'est adaptée que pour la résolution des équations différentielles du premier degré, donc pour des problèmes à condition initiale. Par conséquent, employer l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 pour trouver les solutions dans ce travail requiert une transformation des équations du problème en système d'équations différentielles du premier ordre. Précisons que le problème admet une symétrie dans l'intervalle $[-1, 1]$, comme le montrent les

conditions aux limites (II.39). Ainsi, il est convenable de résoudre le problème dans l'intervalle $[0, 1]$ et déduire par symétrie la solution correspondante à l'intervalle $[-1, 0[$, pour finalement avoir la solution globale dans l'intervalle $[-1, 1]$. Pour plus de précisions, les conditions aux limites utiles sont les suivantes :

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= 0, & F &= R & \text{pour} & \eta = 1 \\ F^{(2)} &= 0, & F &= 0 & \text{pour} & \eta = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

Pour commencer, l'équation différentielle (II.38) est exprimée sous la forme :

$$F^{(4)} = f(\eta, F, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}) = F^{(1)}F^{(2)} - FF^{(3)} - 3\alpha F^{(2)} - \alpha\eta F^{(3)} = 0 \quad (\text{II.47})$$

Pour transformer les équations (II.38) et (II.46) en un problème à valeur initiale, deux conditions supplémentaires doivent être ajoutées à la frontière inférieure ($\eta = 0$) du domaine d'étude qui est l'intervalle $0 \leq \eta \leq 1$, c'est-à-dire les conditions initiales sont telles que:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F^{(1)}(0) &= b \\ F^{(2)}(0) &= 0 \\ F^{(3)}(0) &= c \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Ainsi, la solution du problème va dépendre de trois variables η , b et c . L'introduction des conditions initiales supplémentaires implique un aperçu sur la dérivation par rapport à b et c qui sont des variables indépendantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \left(f(\eta, F, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}) \right) &= \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} \right) = \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial b} \right) \\ \frac{\partial}{\partial c} \left(f(\eta, F, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}) \right) &= \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} \right) = \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial c} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Les dérivées croisées par rapport à b , c et η peuvent permuter dans le sens de la commutativité, car les variables b , c et η sont indépendantes.

À partir des équations (II.49), deux nouvelles fonctions peuvent être définies comme suit :

$$\begin{aligned} u(\eta, b, c) &= \frac{\partial F}{\partial b} \\ v(\eta, b, c) &= \frac{\partial F}{\partial c} \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

À partir des relations (II.50), deux équations différentielles d'ordre quatre satisfaites respectivement par les fonctions u et v sont déduites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial b} \right) &= \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}} \frac{\partial F^{(3)}}{\partial b} \\ \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial c} \right) &= \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}} \frac{\partial F^{(3)}}{\partial c} \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Sachant que la variable η est indépendante de b et c , il vient que :

$$\frac{\partial \eta}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial c} = 0 \quad (\text{II.52})$$

Compte tenu des relations (II.52), les équations (II.51) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial b} \right) &= \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4} = \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}} \frac{\partial F^{(3)}}{\partial b} \\ \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial c} \right) &= \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} = \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}} \frac{\partial F^{(3)}}{\partial c} \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

En posant: $u_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta}$, $u_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, $u_{\eta\eta\eta} = \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}$, $u_{\eta\eta\eta\eta} = \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4}$, $v_\eta = \frac{\partial v}{\partial \eta}$,
 $v_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$, $v_{\eta\eta\eta} = \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3}$, $v_{\eta\eta\eta\eta} = \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4}$, $f_F = \frac{\partial f}{\partial F}$, $f_{F^{(1)}} = \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}}$, $f_{F^{(2)}} = \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}}$,
 $f_{F^{(3)}} = \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}}$, les équations (II.53) deviennent:

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta\eta\eta} &= f_F u + f_{F^{(1)}} u_\eta + f_{F^{(2)}} u_{\eta\eta} + f_{F^{(3)}} u_{\eta\eta\eta} \\ v_{\eta\eta\eta\eta} &= f_F v + f_{F^{(1)}} v_\eta + f_{F^{(2)}} v_{\eta\eta} + f_{F^{(3)}} v_{\eta\eta\eta} \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Le souci de transformer le problème aux limites en un problème à condition initiale a conduit à l'introduction des variables b et c encore appelées valeurs testées en termes de contraintes à la frontière inférieure ($\eta = 0$). À ce stade, le résultat de l'intégration des équations différentielles est une fonction de b et c . La vraie solution du problème est celle qui vérifie les conditions aux limites à la frontière supérieure ($\eta = 1$) du domaine de l'écoulement. En effet, la solution du problème vérifie la frontière supérieure si la fonction suivante est minimisée :

$$K(b, c) = (F(1, b, c) - R)^2 + (F^{(1)}(1, b, c) - 0)^2 \quad (\text{II.55})$$

La vraie solution du problème est obtenue avec les racines b^* et c^* de la fonction K . En fait, la détermination des zéros b^* et c^* de la fonction K conduit à un problème d'optimisation que nous résolvons à l'aide de la technique d'optimisation de Newton-Raphson. L'objectif est de minimiser la fonction K , c'est-à-dire, déterminer les valeurs $b = b^*$ et $c = c^*$ pour que :

$$K(b, c) = (F(1, b, c) - R)^2 + (F^{(1)}(1, b, c) - 0)^2 = 0 \quad (\text{II.56})$$

L'algorithme qui détermine les valeurs de b et c pour deux étapes consécutives n et $n+1$ dans la minimisation de la fonction quadratique K est régi par le calcul suivant :

$$\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}_n - [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F(1, b, c) - R \\ F^{(1)}(1, b, c) - 0 \end{bmatrix}_n \quad (\text{II.57})$$

où $[J]$ et $[J]^{-1}$ représentent respectivement la matrice jacobienne et son inverse.

Les composantes de la matrice jacobienne sont définies par:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial b} & \frac{\partial K_1}{\partial c} \\ \frac{\partial K_2}{\partial b} & \frac{\partial K_2}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1, b, c) & v(1, b, c) \\ u_\eta(1, b, c) & v_\eta(1, b, c) \end{bmatrix} \quad (\text{II.58})$$

où :

$$\begin{aligned} K_1 &= F(1, b, c) - R \\ K_2 &= F^{(1)}(1, b, c) - 0 \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

Il est important de noter que la matrice jacobienne inverse $[J]^{-1}$ ne peut être définie que si et seulement si $\det J \neq 0$. En d'autres termes les solutions du problème en étude ne sont accessibles que si la matrice J est inversible. A ce stade, signalons que dans notre étude, la condition suivante est satisfaite :

$$\det J = u(1, b, c)v_\eta(1, b, c) - u_\eta(1, b, c)v(1, b, c) \neq 0 \quad (\text{II.60})$$

D'après les expressions (II.50) les conditions initiales associées à l'équation différentielle satisfaite par la fonction u sont données par :

$$u(0, b, c) = 0$$

$$\begin{aligned}
u_\eta(0, b, c) &= 1 \\
u_{\eta\eta}(0, b, c) &= 0 \\
u_{\eta\eta\eta}(0, b, c) &= 0
\end{aligned} \tag{II.61}$$

Par ailleurs, les conditions initiales relatives à l'équation différentielle vérifiée par la fonction v sont telles que :

$$\begin{aligned}
v(0, b, c) &= 0 \\
v_\eta(0, b, c) &= 0 \\
v_{\eta\eta}(0, b, c) &= 0 \\
v_{\eta\eta\eta}(0, b, c) &= 1
\end{aligned} \tag{II.62}$$

Il ressort que l'équation différentielle (II.38) ainsi que les conditions aux limites (II.46) sont transformées en un système de trois équations différentielles couplées (II.47), (II.54), associées aux conditions initiales (II.48), (II.61)-(II.62).

Le problème à conditions initiales est résolu par l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre impliquant la transformation de toutes les équations différentielles à résoudre en un système d'équation différentielles d'ordre un, ce qui est équivalent à l'intégration d'un système de douze équations différentielles de premier degré dont les solutions sont les composantes du vecteur suivant :

$$\mathbf{Y} = \left[F \quad F^{(1)} \quad F^{(2)} \quad F^{(3)} \quad u \quad u_\eta \quad u_{\eta\eta} \quad u_{\eta\eta\eta} \quad v \quad v_\eta \quad v_{\eta\eta} \quad v_{\eta\eta\eta} \right]^T \tag{II.63}$$

En considérant les conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{Y}(0) = [0 \quad b \quad 0 \quad c \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{II.64}$$

Pour résumer la méthode numérique de Tir utilisée dans ce travail, nous pouvons dire que, comme deux des quatre conditions aux limites du problème sont sur deux bornes, pour que le système d'équations différentielles à résoudre soit transformé en un problème à conditions initiales bien posé, alors deux

conditions supplémentaires arbitraires sont exigées au niveau de la borne inférieure du domaine de résolution, c'est-à-dire à $\eta = 0$. Dans ce cas, la solution du problème dépend de ces deux conditions arbitraires qui deviennent d'autres variables inconnues du problème dont la détermination conduisant à l'obtention de la vraie solution donne lieu à la résolution d'un problème d'optimisation par la technique de Newton-Raphson. En effet, le problème d'optimisation résulte d'un test de la solution à la borne supérieure, c'est-à-dire la vraie solution doit vérifier les conditions aux limites au niveau de la borne supérieure ($\eta = +1$). Cela implique la définition d'une grandeur appelée *fonction coût* K . La fonction K est la somme des écarts quadratiques entre les valeurs respectives des fonctions trouvées par intégration des équations différentielles utilisant les deux conditions initiales arbitraires avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre et les valeurs des conditions aux limites du problème. Les bonnes conditions initiales du problème conduisant à la vraie solution sont celles pour lesquelles K est minimale, c'est-à-dire nulle puisque la fonction K est quadratique. Par ailleurs, nous rappelons qu'une fonction quadratique est positive et le minimum d'une telle fonction est nul. Les valeurs des deux variables, qui servent à définir les deux conditions initiales supplémentaires correspondant à la valeur minimale de K sont utilisées de façon itérative pour définir les vraies conditions initiales conduisant à la solution recherchée.

Conclusion

Dans ce chapitre, il était question de présenter le domaine géométrique de l'écoulement et de formuler mathématiquement le problème. Il en ressort que la solution s'obtient en résolvant un problème à conditions aux limites sur deux bornes par la méthode de Tir associée à l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 .

**CHAPITRE III : RESULTATS ET
DISCUSSION**

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats obtenus de l'intégration numériques des équations différentielles du problème et à leur interprétation physique. Ces résultats sont en termes de profils de vitesses radiale et axiale, des gradients de pression et des lignes de courant en fonction des valeurs variées des paramètres de contrôle de l'écoulement. En effet, le contrôle des écoulements est un domaine de la mécanique des fluides qui étudie les possibilités d'action sur les écoulements dans le but de les améliorer relativement à divers objectifs, qu'il s'agisse d'écoulements libres ou d'écoulements au voisinage des parois. Les gains portent généralement sur l'augmentation des performances, avec une réduction du bruit éventuellement, et la réduction de la consommation qui en découlent. Le contrôle peut porter sur l'ensemble de l'écoulement ou opérer en un point donné avec un effet dans le voisinage et sur l'évolution de l'écoulement. Les contrôles peuvent être constants, se produisant sans intervention et en toute circonstance ou adaptatifs, en fonction de paramètres observés au moyen de divers techniques.

Un exemple de contrôle d'écoulement dans la nature est la peau de requin. En effet, cette peau possède des micro-rainures permettant de modifier l'écoulement de l'eau autour du requin. En diminuant la vitesse contre la peau du requin, cela diminue les frottements de l'eau, permettant à cet animal de se déplacer à des vitesses de l'ordre de la centaine de km/h. Cet effet est connu sous le nom d'effet riblet. Un autre exemple est celui qui a inspiré les winglets sur les avions. Certains volatiles comme les rapaces ou les cigognes ont la capacité de modifier la géométrie de leurs ailes, particulièrement en bout d'aile. Cela permet de diminuer le cisaillement à cet endroit, et ainsi diminuer les turbulences et les vortex de leurs sillages, néfastes à leurs performances. En particulier, le cisaillement du vent est une différence de vitesse ou de la direction du vent entre deux points suffisamment proches de l'atmosphère. Selon que les deux points de référence sont à des altitudes différentes ou à des coordonnées géographiques différentes, le cisaillement est dit vertical ou horizontal. Il

provoque une instabilité de Kelvin-Helmholtz qui se déduit par de fortes turbulences au niveau de la couche de friction. Il s'agit d'un phénomène différentiel dont la cause peut aussi bien être de micro-échelle, comme une éolienne, que d'échelle synoptique comme une zone frontale. Il est aussi impliqué dans le développement des orages.

Le plus ancien cas de contrôle d'écoulement est le perfectionnement de la balle de golf, inventée dans les années 1880, bien avant que Prandtl n'introduise la notion de couche limite. Il avait été observé que les aspérités permettaient à la balle de parcourir une plus grande distance. La physique de l'interaction balle-fluide n'a été formulée que plusieurs années plus tard. Les aspérités forcent la transition laminaire-turbulent, réduisant la traînée de pression. La transition à la turbulence a pour effet de renforcer la couche limite et de retarder son décollement, diminuant ainsi la taille de la bulle de recirculation et la zone de dépression en aval. La zone de dépression étant plus petite qu'en écoulement laminaire, la force d'aspiration, à l'origine de la traînée de pression, est moins importante. La notion de couche limite est apportée en 1904 par Prandtl. Cela permet d'expliquer le phénomène de décollement et de proposer, avec Tietjens, l'utilisation dès l'aspiration continue pour modifier l'écoulement autour d'un cylindre et recoller le décollement dans un diffuseur. Ils constatent ainsi qu'une perturbation localisée peut agir sur l'ensemble de l'écoulement.

Les applications du contrôle des écoulements commencent dès le début du XX^e siècle. D'abord en 1903, avec les Frères Wright qui développent un avion couplant un gauchissement des ailes et une gouverne de direction pour améliorer l'aérodynamique. Puis, dans les années 1910, avec l'apparition des ailerons qui permettent de contrôler le vol des avions. En 1947, l'aérodynamicien américain Richard Whitcomb met au point les premières winglets de l'histoire de l'aviation grâce à ses recherches dans le centre de recherche de la NASA. Cette nouvelle technologie permet alors de réduire la traînée induite par la portance sans pour autant augmenter l'envergure de la voilure.

Comme nous l'avons déjà signalé à l'introduction, ce travail est surtout appliqué au contrôle du fonctionnement des moteurs de fusées en vue d'accroître leur performance. Ce contrôle se fait généralement par l'analyse des caractéristiques de l'écoulement, comme c'est le cas dans ce travail. Etant donné que l'écoulement est gouverné par deux paramètres de contrôle, R et α , les solutions en termes de composantes de vitesse, de gradients de pression et des lignes de courant sont déterminées pour des petites valeurs, des valeurs modérées et des grandes valeurs du nombre de Reynolds et pour différentes valeurs du paramètre d'expansion ou de contraction du domaine de l'écoulement.

III.1. PROFILS DE VITESSE RADIALE DE L'ÉCOULEMENT

La vitesse radiale pour une petite valeur du nombre de Reynolds est présentée à la Figure III.1.

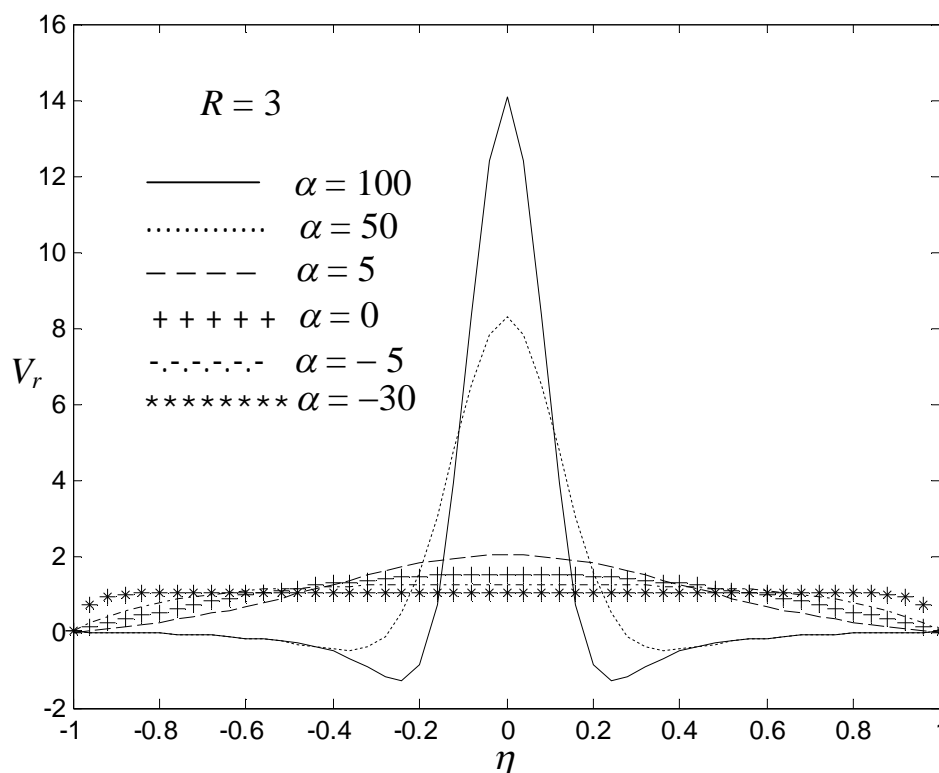


Figure III.1 : Vitesse radiale pour $R = 3$, et pour différentes valeurs de α .

L'expansion du domaine de l'écoulement correspond aux valeurs positives de α , alors que la contraction de l'espace contenant le fluide correspond aux valeurs négatives de α , comme le montre la Figure III.1 tracée pour une valeur du nombre de Reynolds $R = 3$. Il apparaît que l'expansion des parois dont l'influence est beaucoup plus considérable pour les faibles nombres de Reynolds entraîne les particules fluides proches des parois et dans une large région de l'espace occupé par le fluide dans le sens inverse du mouvement. Ces régions d'écoulement inverse sont beaucoup plus perceptibles pour des grandes valeurs du paramètre d'expansion, notamment $\alpha = 50$ et $\alpha = 100$. Dans ces régions, c'est le mouvement des parois qui impose le sens de l'écoulement, alors qu'au voisinage de la section circulaire médiane, la vitesse radiale est grande et présente un pique. L'analyse complète de ce scénario est que, pour les faibles nombres de Reynolds, l'augmentation brusque du volume de l'écoulement provoque un écoulement dans le sens inverse dans une bonne partie du domaine de l'écoulement, sauf au centre de l'espace contenant le fluide où la vitesse radiale du mouvement est grande.

Pour une petite valeur du paramètre d'expansion $\alpha = 5$, on note une vitesse radiale modérée qui ne présente pas de pique avec la disparition de l'écoulement inverse. Le phénomène d'écoulement inverse s'apparente au fait que les particules fluides ont tendance à être entraînées par le mouvement des parois lorsque le fluide n'est pas injecté dans la conduite avec un grand débit. Ce qui met en exergue l'antagonisme dans le problème en étude entre le mouvement d'entraînement propre au déplacement des frontières de l'écoulement et le mouvement d'injection du fluide présentant une vitesse relative proche des parois. Ces phénomènes d'injection et d'entraînement des parois des disques sont associés dans la vitesse absolue du fluide dans le voisinage immédiat des parois. Ainsi, lorsque l'injection du fluide est moins importante que l'entraînement du fluide, cela est plus perceptible proche des parois et la compensation a lieu au centre de la conduite.

Une autre interprétation de la manifestation de l'écoulement inverse est que, l'augmentation du volume de l'écoulement est naturellement accompagnée par la création des espaces vides entre les deux disques. Ces espaces vides se créent prioritairement proche des frontières du domaine d'étude. Ainsi, le fluide rebrousse chemin dans le but de combler les régions vides créées, de garantir la conservation de la masse.

Pour des valeurs négatives du paramètre α , correspondant à la contraction du domaine de l'écoulement, on note un aplatissement du profil de vitesse radiale lorsque le nombre de Reynolds est faible comme le montre la Figure III.1 avec cette curiosité de ne pas observer de différence entre les grandes valeurs et les petites valeurs du paramètre de contraction sur le profil de vitesse radiale. *En effet, l'aplatissement du profil radial de vitesse à partir de la valeur $\alpha = -25$ est une limite asymptotique pour cette composante de vitesse. Autrement dit, au-delà de cette valeur $\alpha = -25$, toutes les courbes sont confondues à une même courbe, au point où des valeurs négatives de α allant par exemple de -50 à -100 se trouvent au-delà du domaine de convergence de notre code de calcul.* Tout comme la faible expansion des parois, la Figure III.1 montre que la contraction des parois n'est pas favorable à la manifestation de l'écoulement inverse, parce que cette contraction augmente la pression transversale dans le but de compenser le déficit relevé préalablement en injection relative du fluide pour empêcher les particules fluides de se déplacer dans le sens contraire du mouvement.

Pour les petites valeurs du nombre de Reynolds d'injection, pendant que la contraction fait disparaître l'écoulement inverse, elle réduit considérablement l'amplitude de la vitesse radiale vers une limite asymptotique horizontale pour une forte contraction.

Il est pertinent de relever le comportement opposé du profil radial de vitesse comparativement au centre et proche des parois des plateaux circulaires. En effet, la vitesse radiale de l'écoulement croît avec le paramètre α , vu comme

une grandeur algébrique, au centre de l'espace contenant le fluide, alors qu'elle décroît proche des parois pour une petite valeur du nombre de Reynolds d'après la Figure III.1. Pour une valeur modérée du nombre de Reynolds $R = 25$ et pour différentes valeurs du paramètre de contrôle d'expansion ou de contraction du domaine de l'écoulement, le profil radial de vitesse est présenté à la Figure III.2.

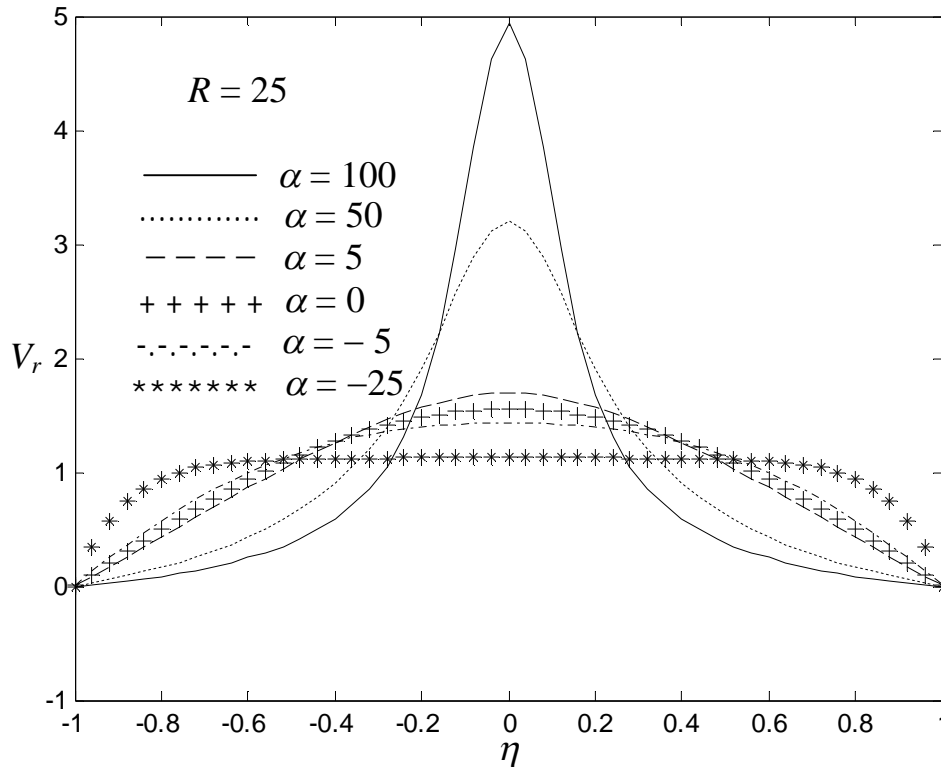


Figure III.2 : Vitesse radiale pour $R = 25$, et pour différentes valeurs de α .

L'effet particulier de la croissance du nombre de Reynolds d'injection est la disparition de l'écoulement inverse pour la même échelle de valeurs du paramètre d'expansion/contraction α de la Figure III.1. Plus précisément, la croissance du nombre de Reynolds a contrecarré les effets de l'expansion du domaine de l'écoulement proche des frontières, sauf au centre de la conduite. En effet, l'écoulement inverse disparaît au voisinage des plateaux circulaires, mais l'amplitude de la vitesse radiale reste élevée au centre du domaine d'étude. A ce stade, il est important de noter qu'il existe un rapport α/R dont la valeur permet de prédire le comportement de la vitesse radiale. De plus, la valeur de ce même

rapport permet de confirmer lequel des phénomènes d'expansion ou d'injection est dominant proche des disques poreux. Il est donc pertinent de signaler que les résultats numériques obtenus dans cette étude montrent que dans tous les cas, l'écoulement inverse se développe lorsque $\alpha/R \geq 10$. Du point de vue comparatif avec la Figure III.1, l'augmentation du nombre de Reynolds dans la Figure III.2 qui cause la disparition de l'écoulement inverse diminue l'amplitude de la vitesse radiale au centre du domaine de l'écoulement, mais l'aplatissement du profil radial de vitesse causé par le phénomène de contraction persiste. C'est opportun de relever que la variation du nombre de Reynolds n'influence que l'expansion du volume du domaine cylindrique où a lieu l'écoulement est sans effet sur la contraction. En d'autres mots, les effets de l'expansion de l'espace entre les deux disques sur l'écoulement sont modifiés par la variation du nombre de Reynolds, mais cette variation du nombre de Reynolds ne modifie pas les effets de contraction de l'espace contenant le fluide sur l'écoulement. Dans la Figure III.2, on note toujours une croissance de la vitesse radiale en fonction du paramètre α , pris comme grandeur algébrique, au centre de la conduite, alors qu'une décroissance est observée aux frontières du domaine de l'écoulement comme dans la Figure III.1.

Pour une grande valeur du nombre de Reynolds $R = 200$, le profil radial de vitesse est présenté à la Figure III.3.

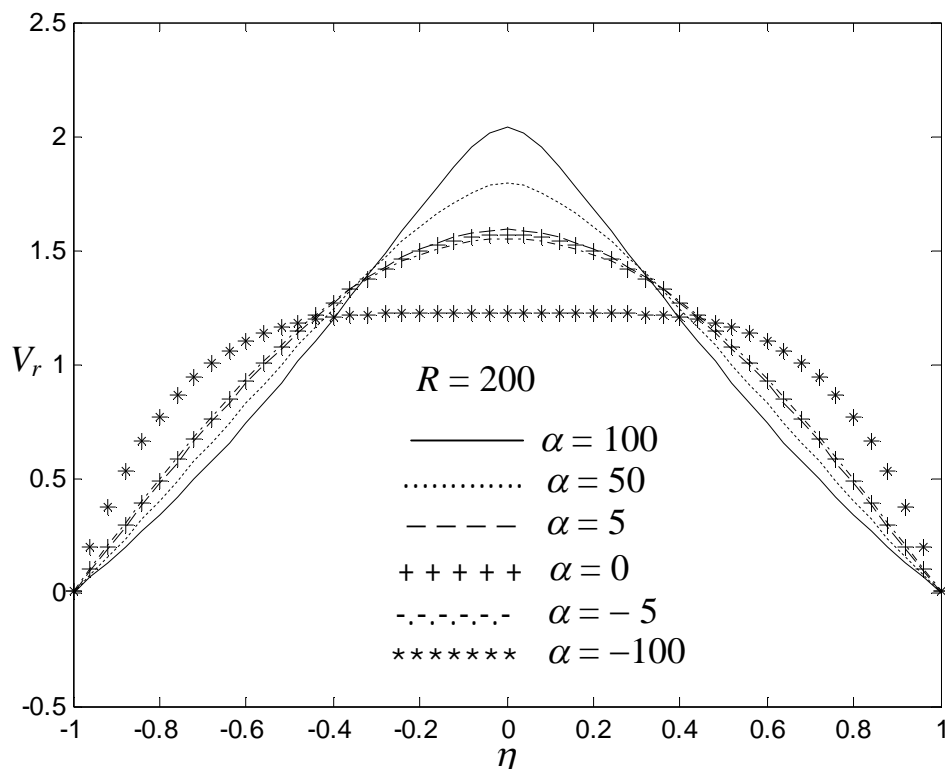


Figure III.3 : Vitesse radiale pour $R = 200$, et pour différentes valeurs de α .

Figure III.3 obtenue pour une grande valeur du nombre de Reynolds montre une disparition totale de l'écoulement inverse et une orientation des profils de vitesse radiale vers le pique situé au centre de la conduite. Ceci permet de confirmer que lorsque la vitesse d'injection est grande, l'écoulement inverse n'a pas de place dans le mouvement du fluide. Cependant, le pique de la vitesse radiale obtenu pour $R = 200$ dans la Figure III.3 est plus petit que celui obtenu pour $R = 25$ dans la Figure III.2, plus petit que celui obtenu pour $R = 3$ dans la Figure III.1. Il convient donc de remarquer que ce pique diminue quand le nombre de Reynolds croit.

Avant de relever les différences globales observées entre les profils de vitesse radiale obtenus pour les petites valeurs, les valeurs modérées et les grandes valeurs du nombre de Reynolds, notons d'abord ce qu'il y a de semblable dans ces résultats. En effet, dans les Figures III.1, III.2 et III.3, la vitesse radiale est maximale au centre de la conduite. De plus, cette vitesse

décroit en fonction du paramètre adimensionnel d'expansion/contraction du domaine de l'écoulement au centre de la conduite, alors qu'elle croit proche des frontières de l'espace contenant le fluide. Pour les valeurs modérées et les grandes valeurs du nombre de Reynolds, l'écoulement inverse ne se manifeste pas dans l'espace contenant le fluide. La contraction du domaine de l'écoulement a pour effet l'aplatissement des profils de vitesse radial quelque soit la valeur du nombre de Reynolds. A ce stade, il est pertinent de noter que comme les effets de contraction du domaine de l'écoulement sont identiques pour les petites valeurs, les valeurs modérées et les grandes valeurs du nombre de Reynolds, il convient de relever que la variation du nombre de Reynolds R est sans effet sur la diminution du domaine d'étude.

En ce qui concerne les différences observées dans les trois Figures III.1, III.2 et III.3, il est important d'évoquer la présence de l'écoulement inverse qui ne se développe que pour les faibles nombres de Reynolds comme dans la Figure III.1 et qui disparaît dans le mouvement du fluide pour des valeurs modérées et grandes du nombre de Reynolds, comme c'est le cas respectivement dans les Figures III.2 et III.3.

III.2. PROFILS DE VITESSE AXIALE DE L'ECOULEMENT

Les profils de vitesse axiale du mouvement du fluide pour une faible valeur du nombre de Reynolds et pour différentes valeurs du paramètre de contrôle d'expansion ou de contraction du domaine de l'écoulement sont présentés à la Figure III.4.

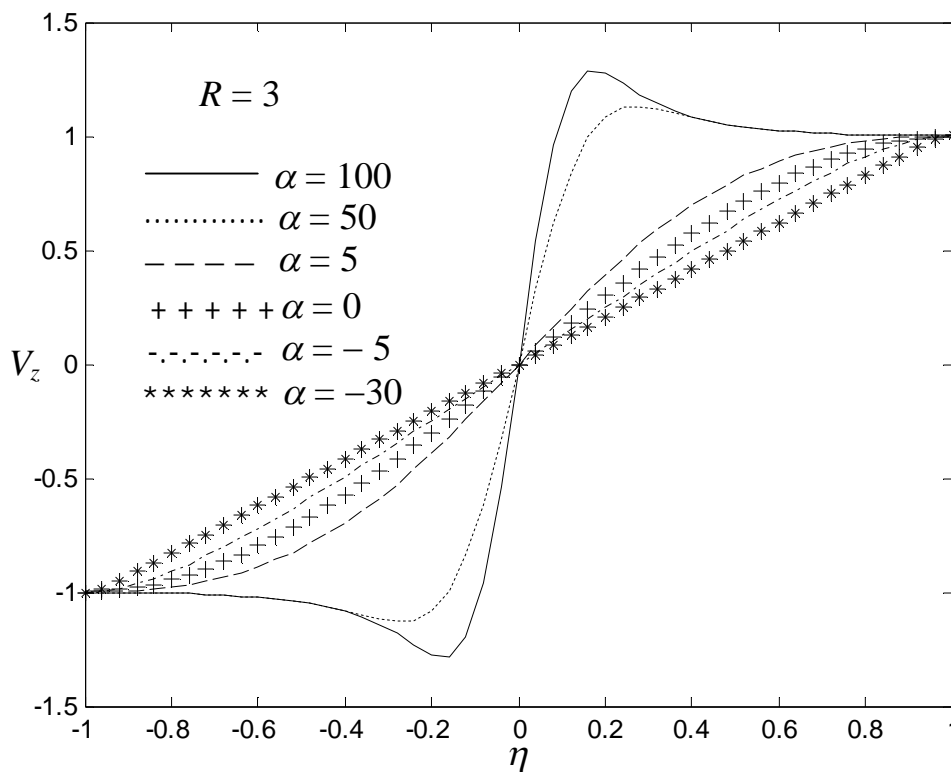


Figure III.4 : Vitesse axiale pour $R = 3$, et pour différentes valeurs de α .

Dans la Figure III.4, on observe des régions où la vitesse axiale dépasse sa valeur fixée aux frontières du domaine d'étude. Les valeurs du paramètre d'expansion $\alpha = 50$ et $\alpha = 100$ où la vitesse V_z excède sa valeur établie par les conditions aux limites sont aussi celles pour lesquelles l'écoulement inverse est mis en évidence dans l'analyse de la vitesse radiale. En d'autres termes, la manifestation de l'écoulement inverse provoque le débordement de la vitesse axiale dans le but de satisfaire la conservation de la masse et d'occuper les espaces vides créés par l'augmentation volumétrique du domaine de l'écoulement. En effet, la vitesse axiale dépasse, parce que l'expansion des disques qui augmente la distance qui les sépare pousse le fluide à rebrousser chemin rapidement dans le but d'occuper l'espace vide créé. Bien évidemment, ce retour inverse des particules fluides est susceptible de créer les zones de collision à l'intérieur de la conduite. Ces zones de collision ont été mises en évidence dans des travaux antérieurs [100, 157]. En fait, la collision a lieu parce

que le fluide ne rebrousse pas chemin en bloc. Ce n'est qu'une partie du fluide proche des frontières de l'écoulement qui subit le mouvement dans le sens inverse du déplacement primordial du fluide. Il y a donc rencontre entre une partie du fluide en mouvement dans le sens primordial par injection de la matière dans la conduite et une autre en mouvement dans le sens contraire.

A l'exception des grandes valeurs de α correspondant à l'expansion du domaine d'étude, la Figure III.4 montre que le profil de vitesse axiale est régulier pour les autres valeurs du paramètre d'expansion. Quant à la contraction du domaine de l'écoulement, elle implique un profil linéaire de la vitesse axiale sous la forme $V_z = \eta$ [118, 119]. On peut donc récapituler que la contraction qui provoque un aplatissement du profil radial de vitesse cause un profil linéaire de la vitesse axiale de l'écoulement. Autrement dit, l'absence de l'écoulement inverse est ressentie dans le mouvement axial par un profil linéaire.

On peut aussi mentionner que de part et d'autre du centre de la conduite, la vitesse axiale présente des comportements opposés. En effet, dans la région $[-1, 0]$, la vitesse V_z décroît avec le paramètre α vue comme grandeur algébrique, alors qu'une croissance est observée dans la région $]0, 1]$. Cette structure hydrodynamique est due à la symétrie établie dans le domaine de l'écoulement à travers les conditions aux limites du problème. Plus précisément, pour une valeur de α donnant lieu au minimum de vitesse axiale observé dans la région $[-1, 0]$, on observe un maximum dans la région $]0, 1]$ pour cette même valeur du paramètre α . Inversement, pour une valeur de α donnant lieu au maximum de vitesse axiale observé dans la région $[-1, 0]$, on observe un minimum dans la région $]0, 1]$ pour cette même valeur du paramètre α , comme le montre la Figure III.4.

Pour une valeur modérée du nombre de Reynolds et pour différentes valeurs du paramètre de contrôle d'expansion ou de contraction du domaine de l'écoulement, la vitesse axiale est présentée dans la Figure III.5.

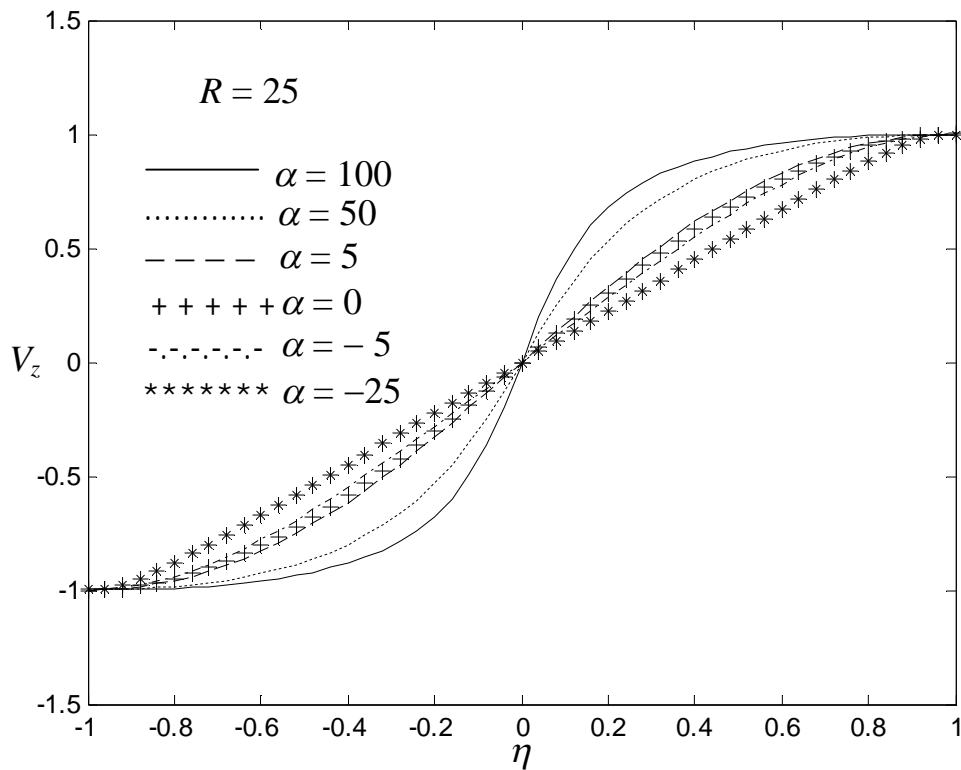


Figure III.5 : Vitesse axiale pour $R = 25$, et pour différentes valeurs de α .

Dans la Figure III.5, on note une absence de débordement de la vitesse axiale à cause de la croissance du nombre de Reynolds comparativement à la Figure III.4. Malgré cette croissance du nombre de Reynolds, le profil linéaire de la vitesse axial correspondant à la contraction du domaine de l'écoulement persiste, comme dans le Figure III.4. Par ailleurs, la symétrie relative à l'écoulement sandwich fait que, d'un coté de la section circulaire médiane, la vitesse axiale diminue avec le paramètre α considéré comme grandeur algébrique, alors qu'elle augment de l'autre côté, comme le montre la Figure III.5.

Pour une grande valeur du nombre de Reynolds, la vitesse axiale est présentée dans la Figure III.6.

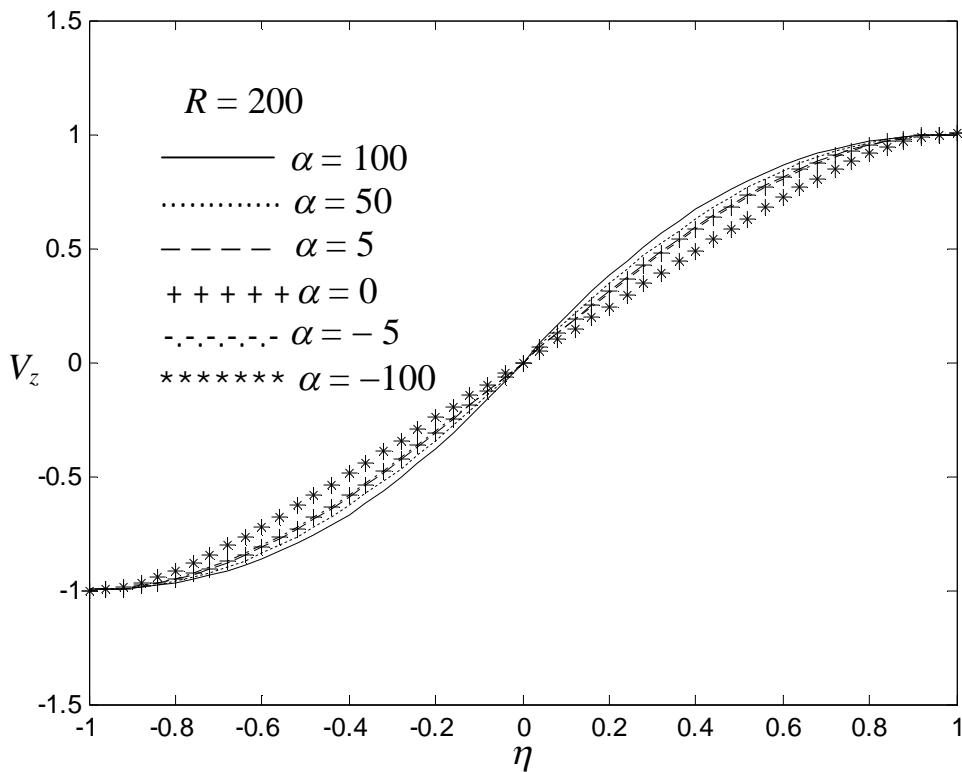


Figure III.6 : Vitesse axiale pour $R = 200$, et pour différentes valeurs de α .

Comparativement aux Figures III.4 et III.5, la Figure III.6 montre que la croissance du nombre de Reynolds implique une domination du phénomène d'injection du fluide sur le processus de déplacement des frontières de l'écoulement, ce qui rend les courbes de la vitesse axiale obtenues pour différentes valeurs de α non distinguables. Pour plus de précision, les courbes de la vitesse V_z obtenue pour des valeurs différentes du paramètre de contrôle de l'expansion/contraction de l'espace contenant le fluide tendent à se confondre à une seule et même courbe quand le nombre de Reynolds devient grand, en se référant à la Figure III.6. Ce qui permet de souligner que la vitesse axiale ne permet pas de différencier les effets de variations du volume de l'écoulement tant que le nombre de Reynolds est grand ou quand l'injection du fluide est prépondérante comparé à l'influence du déplacement des frontières de l'écoulement sur le mouvement du fluide. Par conséquent, il faut se référer à une autre caractéristique ou grandeur physique autre que la vitesse axiale pour

contrôler le mouvement du fluide, comme la vitesse radiale lorsque le débit d'injection du fluide dans le domaine de l'écoulement devient plus important que le déplacement des parois.

Les structures hydrodynamiques obtenues en traçant les courbes correspondant d'une part à la vitesse radiale et d'autre part à la vitesse normale ou axiale de l'écoulement entre les deux disques poreux permettent de noter que, l'écoulement inverse qui se produit pour les faibles nombres de Reynolds et qui se manifeste par la présence des régions dans le champ de l'écoulement où la vitesse radiale est négative, entraîne la présence des régions de débordement de la vitesse axiale. Par ailleurs, l'aplatissement des profils de vitesse radiale dû à la contraction du champ de l'écoulement est traduit par un profil linéaire de la composante axiale de vitesse. La dynamique du fluide dans l'espace intermédiaire des deux disques est davantage plus investiguée avec l'examen du gradient transversal de pression compte tenu de la conservation des quantités de mouvement.

III.3. GRADIENTS DE PRESSION

Avant de présenter le gradient de pression dans l'écoulement en étude, il est d'abord utile de rappeler son importance dans les processus d'écoulements en Mécanique des fluides, mais aussi et surtout dans les autres domaines très importants de la science dans le but de mettre en exergue chaque fois que cela est possible la dimension scientifique et pédagogique de ce mémoire de thèse. En effet, le gradient de pression est la quantité utilisée en mécanique pour représenter la variation de pression dans un fluide. Le gradient de pression est une grandeur vectorielle normalement exprimée dans le système international d'unités en pascals par mètre (Pa/m). Les gradients de pression jouent un rôle important en aérodynamique et hydrodynamique, théories appliquées dans divers domaines scientifiques et techniques comprenant l'aéronautique, la géophysique, l'astronomie et la biophysique.

En sciences de l'atmosphère (météorologie, climatologie et domaines connexes), le gradient de pression (typiquement l'atmosphère terrestre) est la grandeur physique qui décrit en quelle direction et selon quelle proportion la pression change le plus rapidement autour d'un endroit particulier.

En géologie du pétrole et dans les sciences pétrochimiques relatives aux puits de pétrole, et plus précisément en hydrostatique, le gradient vertical de pression dans une colonne de fluide à l'intérieur d'un puits de forage est généralement exprimé en psi/ft (pound per square inch/foot, en français, livre par pouce carré/pied). Cette colonne de fluide est soumise au gradient de pression composé induit par les fluides sus-jacents. Le chemin et la géométrie de la colonne sont totalement sans importance ; la pression et le gradient de pression en n'importe quel point à l'intérieur de la colonne ne dépendent que de la profondeur verticale de la colonne.

Mathématiquement, le gradient de pression est obtenu par l'application de l'opérateur nabla à une pression fonction de la position. Le gradient négatif de pression est connu comme la densité de force.

Strictement parlant, la notion de gradient de pression est une caractérisation locale du fluide examiné. Le gradient de pression est défini uniquement à des échelles spatiales dans lesquelles la pression elle-même est définie. Au sein des atmosphères planétaires, y compris l'atmosphère terrestre, le gradient de pression est un vecteur pointant à peu près vers le bas, parce que la pression change plus rapidement verticalement, en augmentant vers le bas. La valeur de la force du gradient de pression dans la troposphère est typiquement de l'ordre de 9 Pa/m ou 90 hPa/km).

Le gradient de pression a souvent une composante horizontale petite mais essentielle, qui est en grande partie responsable de la circulation du vent. C'est un vecteur bidimensionnel résultant de la projection du gradient de pression sur un plan horizontal local.

Près de la surface de la terre, la force due au gradient de pression horizontal est dirigée des zones de haute pression vers celles de basse pression. Son orientation particulière à tout moment et à l'endroit dépend fortement de la situation météorologique. Les différences de pression atmosphérique entre les différents lieux sont essentielles dans les prévisions météorologiques et climatiques. Le gradient de pression sous-tend l'une des principales forces qui agissent sur l'air et qui le font se déplacer, produisant le vent. La force due au gradient de pression pointe des zones de haute pression vers celles de basse pression, elle est donc orientée dans le sens opposé à celui du gradient de pression lui-même. Par ailleurs, les ondes sonores et les ondes de choc sont des événements qui peuvent induire de très grands gradients de pression, mais ce sont souvent des perturbations transitoires.

Nous rappelons que dans notre travail, le gradient de pression a deux composantes, une composante radiale et une composante transversale ou axiale ou encore normale. La composante radiale joue un rôle semblable à celui de la composante horizontale dans certaines circonstances déjà évoquée. Nous avons constaté que cette composante horizontale n'a pas une grande importance dans l'écoulement d'un fluide comme celui de la composante verticale semblable au gradient de pression transversal de notre étude. La raison est simple, la pression elle-même présente de grandes variations verticales qui sont susceptibles de provoquer de grands mouvements et des grands changements dans un système donné. Il s'agit d'un fonctionnement naturel, fondamental, inhérent à la pression qu'il faut appréhender. La preuve, dans notre étude, le gradient de pression radiale, ramené à l'unité de rayon des disques s'est avéré constant dans l'écoulement. Ainsi, notre intérêt a porté sur l'examen du gradient de pression normale dont la représentation pour une petite valeur du nombre de Reynolds et pour différentes valeurs du paramètre de contrôle de l'expansion ou de la contraction du champ de l'écoulement est faite dans la Figure III.7.

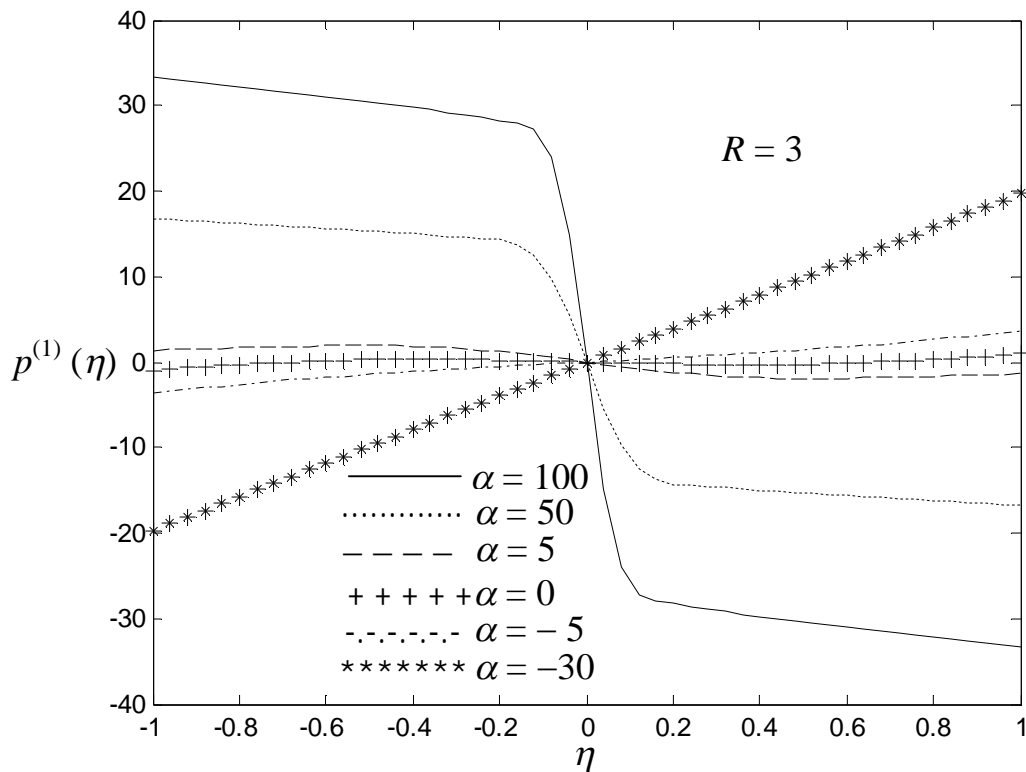


Figure III.7 : Gradient de pression transversale pour $R = 3$, et pour différentes valeurs de α .

La Figure III.7 montre que lorsque les disques s'éloignent l'un de l'autre, le gradient de pression décroît dans l'écoulement, alors qu'il croît quand les surfaces des deux disques se rapprochent. Ce gradient de pression est presque nul lorsque les frontières de l'écoulement sont immobiles. Ainsi, les résultats numériques permettent de confirmer que le mouvement du fluide entre les frontières immobiles constitue l'état moyen de l'écoulement du fluide entre d'une part le mouvement avec expansion des parois, et d'autre part le mouvement du fluide avec contraction de l'espace intermédiaire des deux disques. Il faut tout de même relever que la croissance du gradient de pression avec la contraction de l'espace entre les disques est presque linéaire, d'après la Figure III.7, mais la grande amplitude du gradient de pression est obtenue pour des grandes valeurs du paramètre d'expansion du volume de l'écoulement aux frontières du domaine d'étude. La forme des courbes obtenues pour la fonction

$p^{(1)}(\eta)$ relative à la rapide expansion de la conduite $\alpha = 50$ et $\alpha = 100$, est différente est différente de celle observée pour les autres valeurs de α . En fait, la rapide expansion du champ de l'écoulement donne lieu à un gradient de pression admettant une région d'inflexion autour de la section circulaire médiane du domaine d'étude. Cette région d'inflexion disparaît pour laisser place à un comportement quasi-oscillatoire pour la faible expansion et la faible contraction de l'espace contenant le fluide, ainsi qu'un comportement linéaire dans le cas de la rapide contraction du champ de l'écoulement. La région d'inflexion mise en évidence dans les variations du gradient de pression correspondant à l'expansion du domaine de l'écoulement pour une faible valeur du nombre de Reynolds comme le montre le Figure III.7, est due à la symétrie établie dans le mouvement du fluide étudié à partir des conditions aux limites. Plus précisément, on est tenté de dire que les effets de symétrie de cette étude sont beaucoup plus perceptibles en cas de rapide distanciation des frontières de l'écoulement quand le nombre de Reynolds est faible.

Quand l'espace contenant le fluide est rapidement en expansion, la région d'inflexion observée dans la Figure III.7 est due au fait que le gradient de pression est quasi-constant proche des frontières de l'écoulement, mais varie brusquement dans le sens de la décroissance au voisinage de la frontière ouverte qui est la section médiane circulaire du champ de l'écoulement située à $\eta = 0$.

En fonction du paramètre adimensionnel de contrôle α considéré comme grandeur algébrique, le gradient transversal de pression augmente dans la région $[-1, 0]$, mais diminue dans la région $]0, 1]$ à cause toujours des conditions de symétrie imposées à l'écoulement étudié à partir des conditions aux limites.

Malgré la distanciation des parois qui entraînerait une baisse du gradient transversal de pression dans le champ de l'écoulement, l'amplitude de la fonction $p^{(1)}(\eta)$ reste pourtant élevée surtout au voisinage des bornes du domaine d'étude à cause du couplage avec la faible injection du fluide dans la conduite,

comme le montre la Figure III.7. A ce stade, il convient de mentionner une cette complémentarité entre le gradient de pression transversale et l'injection du fluide dans la conduite sur l'écoulement étudié. Plus précisément, étant donné que le mouvement du fluide est causé par le débit d'injection à travers les parois poreuses des disques, il convient de noter que si cette injection est faible, le mouvement du fluide ne sera pas rapide dans l'espace compris entre les surfaces circulaires, mais le gradient de pression transversale vient compenser ce déficit de rapidité du mouvement du fluide quand les deux disques s'éloignent l'un de l'autre en donnant lieu aux grandes vitesses de l'écoulement surtout au milieu du domaine d'étude bien que le nombre de Reynolds soit faible. Pour une valeur modérée du nombre de Reynolds, le gradient de pression transversale est présenté à la Figure III.8.

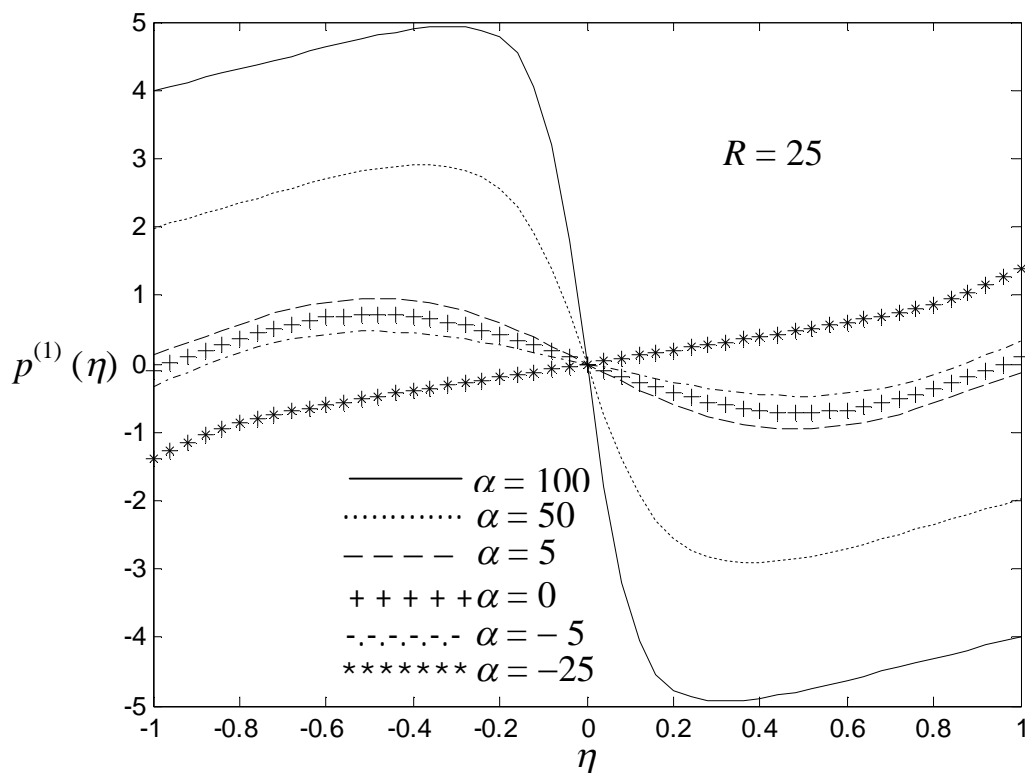


Figure III.8 : Gradient de pression transversale pour $R = 25$, et pour différentes valeurs de α .

En référence à la Figure III.7, la Figure III.8 montre une certaine tendance de l'augmentation du nombre de Reynolds à rendre oscillatoire le gradient de

pression pour toutes les valeurs du paramètre d'expansion/contraction du champ de l'écoulement. En fait, la forme oscillatoire du gradient de pression résulte d'un écoulement régulier, c'est-à-dire la couche fluide se déplace en bloc dans le même sens entre les deux disques. Cette tendance de l'augmentation du nombre de Reynolds à rendre oscillatoire le gradient de pression est confirmée dans la Figure III.9 qui présente la fonction $p^{(1)}(\eta)$ considérant une grande valeur du nombre de Reynolds et pour différentes valeurs du paramètre de contrôle d'expansion ou de contraction du champ de l'écoulement.

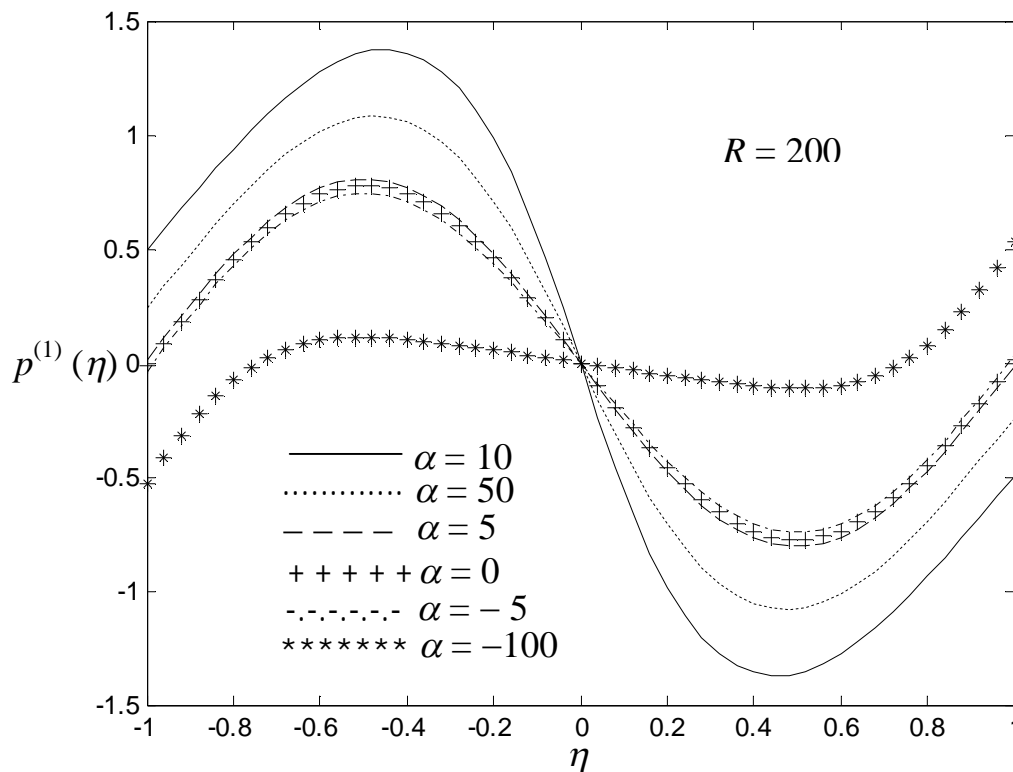


Figure III.9 : Gradient de pression transversale pour $R = 200$, et pour différentes valeurs de α .

Au-delà de la forme oscillatoire du gradient de pression qu'implique la croissance du nombre de Reynolds, il reste que pour toutes les valeurs de R , la fonction $p^{(1)}(\eta)$ croît en fonction de α dans la région $[-1, 0]$, alors qu'elle décroît dans l'intervalle $]0, 1]$ pour des raisons de symétrie. Par ailleurs, pour des grands

nombres de Reynolds, on peut tout de même remarquer qu'au niveau de toutes les courbes présentées à la Figure III.9, le gradient de pression au voisinage des frontières de l'écoulement décroît, proche de la frontière ouverte qui est la section circulaire médiane du champ de l'écoulement.

III.4 LIGNES DE COURANT

Avant de présenter les lignes de courant de l'écoulement, un bref aperçu sur les trajectoires des particules d'un fluide en mouvement est nécessaire. Comme nous l'avons déjà signalé, une ligne de courant est une courbe de l'espace décrivant le mouvement d'un fluide et qui, à tout instant, possède en tout point une tangente parallèle à la vitesse des particules du fluide. Plus précisément, pour un écoulement donné, on peut déterminer séparément les différentes composantes du champ de vitesse, alors que le vecteur vitesse lui-même n'est pas facilement représentable. Donc, la représentation des lignes de courant donne l'allure du vecteur vitesse de l'écoulement.

Un tube de courant est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. Par définition, la vitesse normale à la frontière est nulle et il n'y a donc pas de flux traversant les parois latérales de ce tube, ce qui justifie que les particules y soient confinées, même si la forme des tubes de courant évolue généralement au cours du temps. Le débit entrant dans le tube de courant est égal au débit sortant. Par ailleurs, une surface de courant est formée d'un ensemble de lignes de courant adjacentes de telle sorte qu'aucune particule ne peut traverser une surface de courant. Lorsque l'écoulement est stationnaire, lorsque les vitesses locales ne varient ni en intensité ni en direction avec le temps, on parle aussi d'écoulement permanent, le mouvement d'une poussière de masse volumique égale à celle du fluide, emportée par cet écoulement, trace une ligne de courant. Dans la pratique, il est assez fréquent qu'en moyenne les écoulements instationnaires soient traités à la façon des écoulements stationnaires. Ainsi, la dépression se crée par exemple au culot d'une plaque

carré au-dessus de laquelle un écoulement se développe, est-elle variable dans le temps et quand on donne un coefficient de traînée pour cette plaque carrée.

Les lignes de courant d'un écoulement stationnaire ne varient pas dans le temps. Cependant, la vitesse d'une particule fluide est fondamentalement variable sur une ligne de courant. La détermination du comportement des lignes de courant se fait souvent en application du théorème de Bernoulli qui stipule que, dans le flux d'un fluide homogène et incompressible soumis uniquement aux forces de pression et de pesanteur, une accélération se produit simultanément avec la diminution de la pression. Il convient de distinguer la ligne de courant de la trajectoire d'une particule de fluide. L'une et l'autre ne sont confondues que dans le cas d'un écoulement stationnaire, c'est-à-dire un écoulement où la vitesse ne dépend pas explicitement du temps. Dans le cas d'un écoulement instationnaire, les lignes de courant évoluent au cours du temps, alors que les trajectoires n'en dépendent intrinsèquement pas.

Dans la nature, les plantes aquatiques donnent de bonnes indications sur la direction locale de l'eau dans un courant de fluide. Cependant, quand les plantes aquatiques sont longues, elles moyennent d'elles-mêmes les différents vecteurs vitesses de l'eau qui les portent et s'éloignent donc des véritables lignes de courant. Lorsqu'un écoulement d'air est stationnaire, une photographie en pause peut capter le mouvement de poussières, ou mieux, de bulles de savon gonflées à l'hélium. Si l'écoulement toujours stationnaire est le mouvement de l'eau, on peut placer dans cet écoulement des paillettes de matériaux brillants dont les reflets pourront être captés par photographie vidéo. Mais la méthode la plus utilisée est d'émettre dans l'écoulement des filets de fumée. Dans les tests aérodynamiques d'automobiles, une lance à fumée unique permet d'étudier l'écoulement en rendant visible une unique ligne de courant ; l'observation de ce filet de fumée permet en particulier de vérifier que l'écoulement ne décolle pas à l'arrière du véhicule.

La première utilité des lignes de courant est pédagogique. Dans un écoulement de fluide incompressible, lorsque l'écartement des lignes de courant diminue, la conservation des débits impose que la vitesse locale des particules augmente, donc que la pression statique de ces particules diminue, en application du théorème de Bernoulli. D'autre part, la connaissance des lignes de courant permet souvent d'isoler, dans un écoulement, les zones où se développent les tourbillons. De même, la position des lignes de courant est révélatrice du régime de certains corps, comme la sphère. Le même phénomène de régime existe pour le cylindre et beaucoup de corps profilés.

Dans un écoulement stationnaire de fluide parfait, c'est-à-dire non visqueux, donc en dehors de la couche limite, l'étude de l'équilibre des particules de fluides permet de démontrer que lorsqu'une ligne de courant est rectiligne la pression au long de cette ligne de courant est constante. Inversement, toujours dans un écoulement stationnaire de fluide parfait, la même étude de l'équilibre des particules fluides permet de démontrer que la pression statique locale décroît lorsque l'on passe d'une ligne de courant à une autre en s'approchant du centre de courbure de ces lignes de courant. On peut mettre en application ce dernier principe physique. D'une façon générale, ce principe physique vaut également pour les tourbillons d'échelle météorologique, la pression statique décroît lorsque l'on s'approche de l'axe du tourbillon ; c'est-à-dire qu'au cœur d'un tourbillon, règne toujours une dépression. D'autre part, en écoulement stationnaire incompressible, lorsque l'on connaît la vitesse moyenne dans une section donnée d'un tube de courant, la loi de conservation des débits impose une relation simple entre la section locale de ce tube de courant et la vitesse moyenne locale.

Dans un écoulement instationnaire, le vecteur vitesse en un point fixe varie au cours du temps. La ligne de courant ne peut donc plus être confondue avec la trajectoire des particules. La ligne d'émission est la ligne que dessine à un instant t un filet de fumée ou de colorant émis dans le courant depuis un point

fixe. On peut donc facilement capter cette ligne d'émission par photographie. Lorsque l'écoulement est stationnaire, par contre, une ligne d'émission redevient une ligne de courant ainsi qu'une trajectoire de particule.

III.4.1 Lignes de courant pour un faible nombre de Reynolds

Pour un faible débit d'injection du fluide dans le champ de l'écoulement, les lignes de courant correspondant sont présentées dans la Figure III.10.

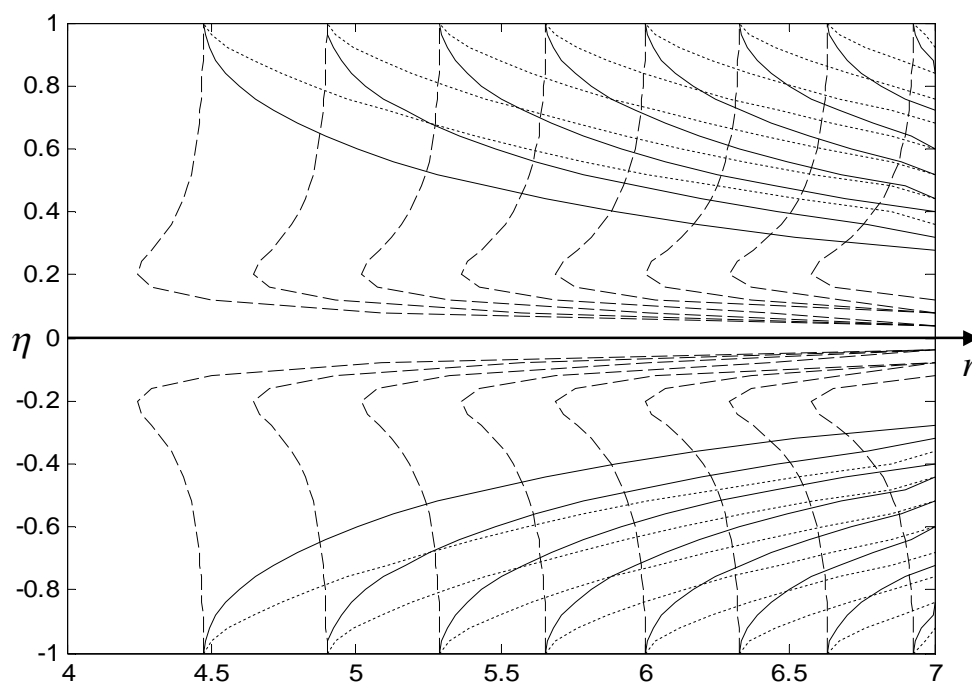


Figure III.10 : Lignes de courant pour $R = 5$.

La Figure III.10 présente un ensemble de lignes de courant correspondant à l'écoulement entre deux parois circulaires immobiles $\alpha = 0$ (ligne en traits pleins), en expansion $\alpha = 100$ (lignes en traits interrompus), et en contraction $\alpha = -20$ (lignes en pointillés).

Pour $\alpha = 100$, l'allure des lignes de courant est verticale, parce que l'expansion des parois pousse le débit d'entrée du fluide à être fort bien que la vitesse d'injection du fluide soit faible. Comme ce débit d'entrée du fluide est

fort, d'où le caractère presque vertical des lignes de courant, les particules fluides s'accumulent directement vers la région médiane de la conduite semblant même changer de sens du mouvement démontrant ainsi le développement de l'écoulement inverse. Ces lignes de courant correspondant $\alpha = 100$, verticales à l'entrée de la conduite, sont presque horizontales au voisinage de la région médiane du domaine de l'écoulement, parce que la vitesse radiale des particules fluides est maximale au centre de l'espace contenant le fluide. Il y a donc un échange de comportement du fluide proche des frontières de l'écoulement et au voisinage du milieu de la conduite. En effet, à l'entrée de la conduite, le mouvement radial des particules fluides est quasi-nulle au profit du mouvement axial, alors que ce déplacement radial du fluide est primordial proche de la section médiane au détriment du déplacement axial qui est à son tour presque-négligeable. Asymptotiquement, le mouvement global du fluide finit par être essentiellement radial suivant un très grand rayon quand les deux disques s'éloignent l'un de l'autre rapidement, comme le montre la Figure III.10. De plus, pour $\alpha = 100$, l'ensemble des lignes de courant s'éloignent des frontières de l'écoulement et s'accumulent vers le cœur du champ de l'écoulement, alors que pour les cas des parois immobiles $\alpha = 0$ et $\alpha = -20$, respectivement, ces lignes s'éloignent du cœur de l'espace contenant le fluide, mais se rapprochent des surfaces des disques, surtout lorsque la conduite subit la contraction d'après la Figure III.10. Cette allure des lignes de courant correspondant à $\alpha = 100$ fait que ces lignes occupent la totalité du volume de l'espace réservé au mouvement du fluide.

Par ailleurs, l'ensemble des lignes de courant correspondant aux parois immobiles et en contraction illustre un seul sens de mouvement d'ensemble du fluide indiquant une vitesse d'écoulement positive. Cependant, dans ces deux cas, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$ et $\alpha = -20$, l'ensemble des lignes de courant est

confiné à proximité des parois laissant un espace vide proche de la région médiane du champ de l'écoulement.

III.4.2 Lignes de courant pour une valeur modérée du nombre de Reynolds

Pour une injection à vitesse modérée du fluide dans la conduite, les trajectoires des particules fluides sont représentées dans la Figure III.11.

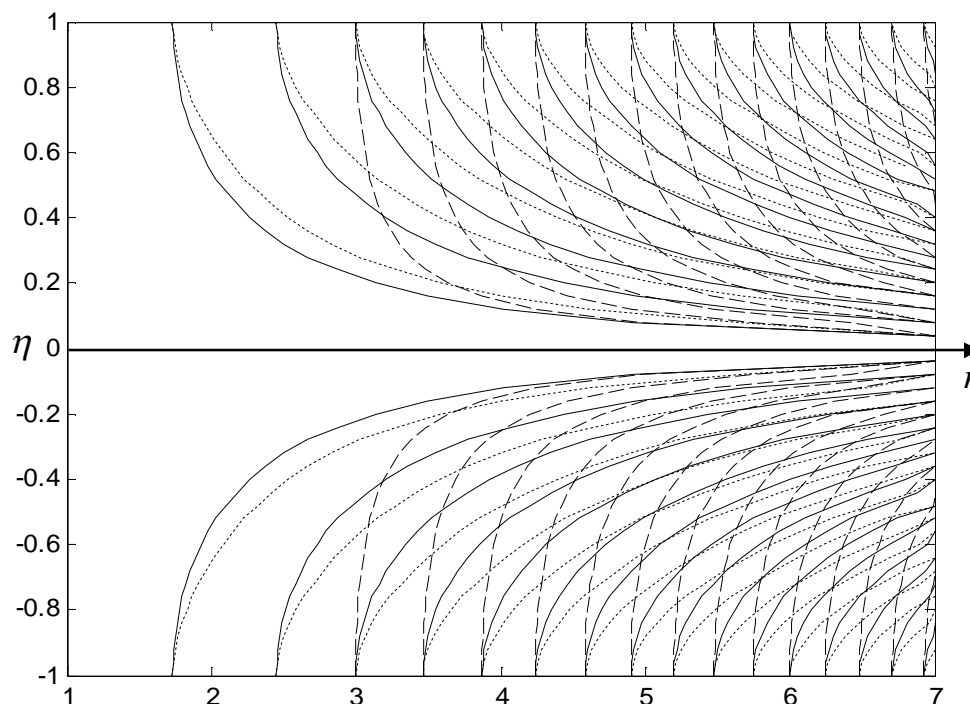


Figure III.11 : Lignes de courant pour $R = 25$.

La Figure III.11 présente un ensemble de lignes de courant correspondant à l'écoulement entre deux parois circulaires immobiles $\alpha = 0$ (ligne en traits pleins), en expansion $\alpha = 100$ (lignes en traits interrompus), et en contraction $\alpha = -20$ (lignes en pointillés).

Pour toutes les valeurs de α , les lignes de courant présentent un seul sens de déplacement en bloc du fluide qui est le sens positif, indiquant la suppression et la disparition du mouvement dans le sens inverse. De plus, les lignes de courant correspondant à chaque valeur de α sont bien réparties dans le volume

de la conduite, résultat qui peut être expliqué par le fait que dans ce cas précis, les phénomènes d'injection du fluide, de déplacement des frontières de l'écoulement et d'immobilité des disques semblent être d'importance égale sur le mouvement du fluide. Cependant, cette interprétation reste relative à l'allure présentée par les lignes de courant.

III.4.3 Lignes de courant pour une grande valeur du nombre de Reynolds

En considérant une grande valeur du nombre de Reynolds, les lignes de courant confondues aux trajectoires des particules fluides sont présentées à la Figure III.12.

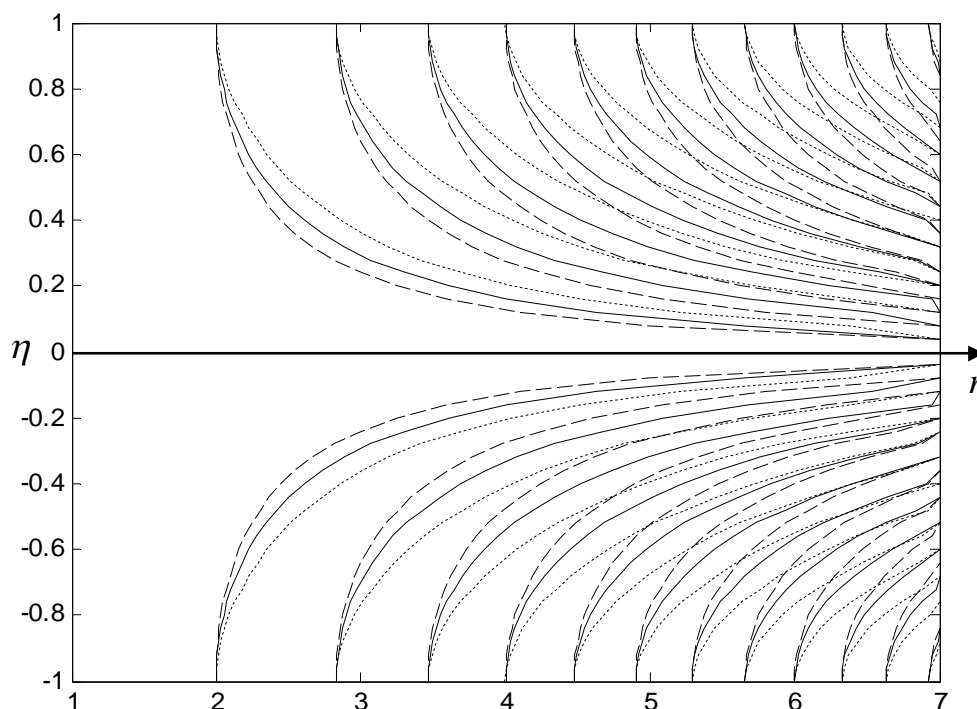


Figure III.12 : Lignes de courant pour $R = 200$.

La Figure III.12 présente un ensemble de lignes de courant correspondant à l'écoulement entre deux parois circulaires immobiles $\alpha = 0$ (ligne en traits pleins), en expansion $\alpha = 100$ (lignes en traits interrompus), et en contraction $\alpha = -100$ (lignes en pointillés).

On ne note pas beaucoup de différence dans les Figure III.11 et III.12, parce que dans ces deux cas, l'écoulement garde le même sens qui est le sens positif pour toutes les valeurs de α . Par ailleurs, on remarque aussi que pour une cote donnée de la fonction de courant, l'immobilité des parois demeure l'état moyen entre les effets d'expansion d'une part et de contraction d'autre part sur l'écoulement du fluide.

Conclusion

Dans ce chapitre, les caractéristiques de l'écoulement ont été présentées et discutées en termes de vitesse radiale, de vitesse axiale, du gradient transversal de pression et des lignes de courant pour différentes valeurs des paramètres de contrôle de l'écoulement, notamment le nombre de Reynolds et le paramètre adimensionnel d'expansion ou de contraction du domaine de l'écoulement.

CONCLUSION GENERALE

La dynamique d'un fluide visqueux est investiguée dans une région délimitée par deux disques parallèles poreux; tel que la distance entre les deux surfaces perméables est petite comparée à leurs rayons égaux qui tendent vers l'infini dans le but de négliger l'influence des limites de l'écoulement dans la direction radiale sur le mouvement du fluide. L'écoulement axisymétrique est causé par l'injection du fluide dans le domaine de l'écoulement qui subit une augmentation ou une diminution de volume à cause respectivement de la croissance ou de la réduction de la distance entre les deux parois perméable, conséquence du déplacement des disques le long de l'axe passant perpendiculairement au centre de leurs surfaces respectives. Dans ce travail, les deux disques sont astreints à se déplacer dans la même direction, mais en sens contraire suivant un mouvement de translation le long d'un même axe perpendiculaire à leurs surfaces.

Le modèle mathématique de l'écoulement est constitué de l'équation de continuité et des équations de Navier-Stokes en considérant respectivement la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le domaine de l'écoulement. A cause de l'incompressibilité du fluide et du fait que le champ de vitesse a deux composantes, la fonction de courant est prescrite dans les équations qui régissent le mouvement dans le but de produire l'équation de vorticité en opérant le rotationnel des équations vectorielles de Navier-Stokes du problème. Ainsi, le problème résultant est décrit par une équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction de courant. En prenant en compte la géométrie de la région définie entre les deux disques et les propriétés physiques du fluide, ainsi que les conditions aux limites du problème, une méthode des solutions semblables est utilisée dans le but de transformer l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction de courant en une équation différentielle ordinaire décrivant le même écoulement qui incorpore une variable adimensionnel η renfermant la dépendance spatio-temporelle des caractéristiques de l'écoulement.

La formulation adimensionnelle du problème donne lieu à deux principaux paramètres de contrôle de l'écoulement, notamment le nombre de Reynolds R et le paramètre d'expansion ou de contraction du domaine de l'écoulement influençant les solutions du problème en termes de profils de vitesse, de gradients de pression et des lignes de courant.

La méthode de Tir associée à l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre est utilisée pour obtenir les solutions numériques de l'équation différentielle ordinaire avec les conditions aux limites exprimées sous forme d'un problème à conditions aux limites sur deux bornes. Pour des valeurs petites, modérées et grandes du nombre de Reynolds, les caractéristiques de l'écoulement ont été déterminées pour différentes valeurs du paramètre de contrôle de l'expansion ou de contraction du domaine de l'écoulement.

Nous avons trouvé que, l'expansion rapide du champ de l'écoulement donne lieu à l'écoulement inverse dans la tentative d'occuper les espaces vides créés par l'augmentation du volume du domaine géométrique contenant le fluide quand le nombre de Reynolds est faible. Dans ce cas de faible injection du fluide pour une large expansion du champ de l'écoulement, le gradient axial de pression décroît dans le domaine de l'écoulement en présentant une région d'inflexion due à la symétrie de l'écoulement sandwich en étude. L'écoulement inverse, encore appelé mouvement dans le sens contraire du sens positif, est éradiqué par les grandes valeurs du nombre de Reynolds qui astreignent le fluide à se déplacer dans le sens positif en référence aux lignes de courant que nous avons réussi à tracer. La contraction du volume de l'écoulement cause un profil linéaire de la vitesse axiale et implique un aplatissement des profils de vitesse radiale pour toutes les valeurs du nombre de Reynolds. Par ailleurs, les grandes valeurs du nombre de Reynolds impliquent provoquent des oscillations du gradient normal de pression quelques soit la valeur du paramètre d'expansion ou de contraction de l'espace contenant le fluide.

En perspective, nous établirions dans les travaux futurs une différence de température entre les disques pour mettre en évidence l'influence de la variation de la viscosité dynamique du fluide en fonction de la température sur les caractéristiques du champ de l'écoulement que nous venons d'étudier.

**REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] E. Guyon, J-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, Inter Editions et Editions du CNRS, Paris, (1991).
- [2] R. Ouziaux, J. Perrier, *Mécanique des Fluides Appliquée*, Dunod Université, Paris, (1978).
- [3] R. Comolet, *Mécanique Expérimentale des Fluides*, Tome II : Quatrième édition revue et corrigée. Masson, (1994).
- [4] R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, 2nd edition, Wiley: NY, (2002).
- [5] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Fluids: Volume 1 Fluid Mechanics*, Wiley: NY, (1987).
- [6] M. V. Dyke, *An album of Fluid Motion*, Parabolic Press, Stanford, (1982).
- [7] S. Candel, *Mécanique des fluides-Cours*, Dunod, (1995).
- [8] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, DOI 10.1007/978-1-4612-0883-9, (1993).
- [9] L. Landau, E. Lifchits, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, (1987).
- [10] F. Moisy, *Mécanique des Fluides*, Cours des Université Paris-Sud et Paris-Saclay, (2015)-(2016).
- [11] W. Merzkirch, *Flow Visualization*, Academic Press, (1987).
- [12] J. Détery, *Méthodes de Mesure en Aérodynamique, partie 4, Mesure dans le Champ*, Onera, (2017).
- [13] J-N. Gence, *Les écoulements de fluides newtoniens : principaux mécanismes associés aux mouvements des fluides*, Ellipses, (2007).
- [14] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1967).
- [15] C. Bailly, G. Compte-Bellot, *Turbulence*, CNRS Edition, (2003).
- [16] S.B. Pope, *Turbulent flows*, Cambridge University Press, (2000).
- [17] P. Chassaing, *Mécanique des fluides : élément d'un premier parcours*, Cépaduès, (2010).
- [18] P. Germain, *Mécanique des milieux continus*, Masson, (1973).
- [19] P.G. Drazin, W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, Cambridge, (1981).
- [20] P.G. Drazin, *Introduction to hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, (2002).

- [21] W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, E. N. Ganic, *Handbook of heat transfer fundamentals*, Mac Graw Hill, 1985.
- [22] W. M. Kays, *Convective heat and mass transfer*, McGraw-Hill, New York, (1966).
- [23] M. F. White, *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill, New York, (1991).
- [24] B. Weigand, *Analytical methods for heat transfer and fluid flow problems*, 2nd Edition, (2015).
- [25] A. Bejan, *Convection heat transfer*, John Wiley & Sons, New York, 4th Edition, (2013).
- [26] K. D. Hagen, *Heat Transfer with Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, (1999).
- [27] T. Cebeci, P. Bradshaw, *Physical and computational aspects of convective heat transfer*, Springer, New York, (1984).
- [28] F. P. Incropera, D.P. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, New York: John Wiley & Sons, (2002).
- [29] Li. Zhang, *Fluid flow and compound heat transfer for shell side of double-pipe heat exchanger enhanced by helical fins*. Ph.D. Thesis, Tianjin University, China, pp. 52 (2011).
- [30] C. L. M. H. Navier, *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, Vol. 6, pp.389-416, (1823).
- [31] G. G. Stokes, *Transactions of Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, pp. 287-305, (1845).
- [32] G. Damairry, M. Hatami, Squeezing Cu-water nanofluid flow analysis between parallel plates by DTM-Padé method, *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 193, pp. 37-44, (2014).
- [33] M. Hatami, R. Nouri, D. D. Ganji, Forced convection analysis for MHD Al₂ O₃ -water nanofluid flow over a horizontal plate, *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 187, pp. 294-301, (2013).
- [34] M. Jalaal, D. D. Ganji An analytical study on motion of a sphere rolling down an inclined plane submerged in a Newtonian fluid, *Powder Technology*, Vol. 198, pp. 82-92, (2010).
- [35] M. Hatami, M. Sheikholeslami, M. Hosseini, D. D. Ganji, Analytical investigation of MHD nanofluid flow in non-parallel walls, *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 194, pp. 251-259, (2014).
- [36] D. D. Ganji, G. A. Afrouzi, R.A. Talarposhti, Application of variational iteration method and homotopy-perturbation method for nonlinear heat

- diffusion and heat transfer equations, *Physics Letters A*, Vol. 368, pp. 450-457, (2007).
- [37] K. Hosseinzadeh, Analysis of unsteady MHD Eyring-Powell squeezing flow in stretching channel with considering thermal radiation and Joule heating effect using AGM, *Case Studies in Thermal Engineering*, Vol. 10, pp. 579-594, (2017).
- [38] M. Hatami, K. Hosseinzadeh, G. Damairry, M. T. Behnamfar, Numerical study of MHD two-phase Couette flow analysis for fluid-particle suspension between moving parallel plates, *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, Vol. 45, pp. 2238-2245, (2014).
- [39] A.S. Dogonchi, M. Hatami, K. Hosseinzadeh, D.D. Ganji, Non-spherical particles sedimentation in an incompressible Newtonian medium by Padé approximation, *Powder Technology*, Vol. 278, pp. 248-256, (2015).
- [40] S. A. Atouei, K. Hosseinzadeh, M. Hatami, S.E. Ghasemi, S.A.R. Sahebi, D.D. Ganji, Heat transfer study on convective-radiative semi-spherical fins with temperature-dependent properties and heat generation using efficient computational methods, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 89, pp. 299-305, (2015).
- [41] J. Rahimi, D.D. Ganji, M. Khaki, Kh. Hosseinzadeh, Solution of the boundary layer flow of an Eyring-Powell non-Newtonian fluid over a linear stretching sheet by collocation method, *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 56, pp. 621-627, (2017).
- [42] Kh. Hosseinzadeh, A. Jafarian Amiri, S. Saedi Ardahaie, D.D. Ganji, Effect of variable Lorentz forces on nanofluid flow in movable parallel plates utilizing analytical method, *Case Studies in Thermal Engineering*, Vol. 10, pp. 595-610, (2017).
- [43] S.S. Ghadikolaei, Kh. Hosseinzadeh, M. Yassari, H. Sadeghi, D.D. Ganji, Analytical and numerical solution of non-Newtonian second-grade fluid flow on a stretching sheet, *Thermal Science and Engineering Progress*, Vol. 5, pp. 309-316, (2018).
- [44] S. S. Ardahaie, A. J. Amiri, A. Amouei, Kh. Hosseinzadeh, D.D. Ganji, Investigating the effect of adding nanoparticles to the blood flow in presence of magnetic field in a porous blood arterial, *Informatics in Medicine Unleaked*, Vol. 10, pp. 71-81, (2018).
- [45] Kh. Hosseinzadeh, M. Alizadeh, D.D. Ganji, Hydrothermal analysis on MHD squeezing nanofluid flow in parallel plates by analytical method, *International Journal of Mechanical and Material Engineering*, Vol. 13, (2018).

- [46] S.S. Ghadikolaei, Kh. Hosseinzadeh, M. Hatami, D.D. Ganji, MHD boundary layer analysis for micropolar dusty fluid containing Hybrid nanoparticles (Cu-Al₂O₃) over a porous medium, *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 268, pp. 813-823, (2018).
- [47] A.R. Da Costa, A.G. Fane, D.E. Wiley, Spacer characterization and pressure drop modeling in spacer-filled channels for ultrafiltration, *Journal of Membrane Science*, Vol. 87, pp. 79-98, (1994).
- [48] J. G. Herterich, Q. Xu, R. W. Field, D. Vella, L. M. Griffiths, Optimizing the operation of a direct-flow filtration device, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol.104, pp.195-211, (2017).
- [49] R. H. Davis, Modeling of fouling of crossflow microfiltration membranes, *Separation and Purification Methods*, Vol. 21, pp.75-126, (1992).
- [50] Z. Ping, J. Dan, M. Huibo, W. Jianhua, Three-dimensional simulation of liquid flow on a sieve tray under different inclinations, *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 31, pp. 905-912, (2014).
- [51] S. Liao, An analytic solution of unsteady boundary-layer flows caused by an impulsively stretching plate, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 11, pp. 326-339, (2006).
- [52] S. Liao, A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate, Vol. 48, pp. 2529-2539, (2005).
- [53] K.D. Kinzli, M. Martinez, R. Oad, A. Prior, D. Gensler, Using an ADCP to determine canal seepage loss in an irrigation district, *Agricultural Water Manage*, Vol. 97, pp. 801-810, (2010).
- [54] M. Lee, B. Wang, Z. Wu, K. Li, Formation of micro-channels in ceramic membranes – Spatial structure, simulation, and potential use in water treatment, *Journal of Membrane Science*, Vol. 483, pp. 1-14, (2015).
- [55] J. Escobedo, G. A. Mansoori, Heavy-organic particle deposition from petroleum fluid flow in oil wells and pipelines, *Petroleum Science*, Vol. 7, pp.502-508, (2010).
- [56] R.K. Bhatnagar, Fluctuating flow of a viscoelastic fluid in a porous channel, *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, pp. 21-25, (1979).
- [57] H.N. Chang, J.S. Ha, J.K. Park, I.H. Kim, H.D. Shin, Velocity field of pulsatile flow in a porous tube, *Journal of Biomechanics*, Vol. 22, pp. 1257-1262, (1989).
- [58] C.F.J. Dewey, S.R. Bussolari, M.A.J. Gimbrone, P.F. Davis, The dynamic response of vascular endothelial cells to fluid shear stress, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 103, p. 177, (1981).

- [59] J.M. Drazen, R.D. Kamm, A.S. Slutsky, High frequency ventilation, *Physiological Reviews*, Vol. 64, pp. 505-543, (1984).
- [60] Y.C.Fung, C.S. Yih, Peristaltic transport, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, pp. 669-675, (1968).
- [61] M.Y. Jaffrin, A.H. Shapiro, Peristaltic pumping, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 3, pp. 13-36, (1971).
- [62] R.T. Jones, Blood flow, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 1, pp. 223-244, (1969).
- [63] J.R. Womersley, Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known, *Journal of Physiology*, Vol. 127, pp. 553-563, (1955).
- [64] J.A. Whitehead, K.R. Helfrich, Instability of flow with temperature-dependent viscosity: a model of magma dynamics, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 96, pp. 4145-4155, (1991).
- [65] P.M. Bruce, H. E. Huppert, Thermal control of basaltic fissure eruptions, *Nature*, Vol. 4, pp. 665-667, (1989).
- [66] J. Lin, G. M. Purdy, H. Schouten, J. C. Sempere, C. Zervas, Evidence from gravity data for focused magmatic accretion along the Mid-Atlantic Ridge, *Nature*, Vol. 344, pp. 627-632, (1990).
- [67] J.J. Wylie, J. R. Lister, The effect of temperature dependent viscosity on flow in a cooled channel with application to basaltic fissure eruption, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 305, pp. 239-261, (1995).
- [68] R. P. Lowell, Thermoelasticity and the formation of black smokers, *Geophysics Research Letters*, Vol. 17, pp. 709-712, (1990).
- [69] S. J. Liao, A uniformly valid analytic solution of 2D viscous flow past a semi-infinite flat plate, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 385, pp.101-128, (1999).
- [70] P. Schäfer, H. Herwig, Stability of plane Poiseuille flow with temperature dependent viscosity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2441-2448, (1993).
- [71] V.K. Markeviciute, R.R. Kerswell, Degeneracy of turbulent states in two-dimensional channel flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 917, A57, (2021).
- [72] V. Dallas, K. Seshasayanan, S. Fauve, Transitions between turbulent states in a two-dimensional shear flow, *Physical Review Fluids*, Vol. 5, 084610, (2020).

- [73] G. Falkovich, N. Vladimirova, Turbulence appearance and nonappearance in thin fluid layers, *Physical Review Letters*, Vol. 121, 164501, (2018).
- [74] A. Gayout, M. Bourgoïn, N. Plihon, Rare event-triggered transitions in aerodynamic bifurcation, *Physical Review Letters*, Vol. 126, 104501, (2021).
- [75] J.D. Pugh, P.G. Saffman, Two-dimensional superharmonic stability of finite-amplitude wave in plane Poiseuille flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 194, pp. 295-307, (1988).
- [76] N. Kumar, S. Tejyan, S. Chamoli, P.K. Pant, A discrete linear stability analysis of two-dimensional laminar flow past a square cylinder, *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, Vol. 16, pp.109-119, (2021).
- [77] A. Fortin, M. Jardak, J. Gervais, R. Pierre, Old and new results on the two-dimensional Poiseuille flow, *Journal of Computational Physics*, Vol. 115, pp. 455-469, (1994).
- [78] S. Turki, H. Abbassi, S. B. Nasrallah, Two-dimensional laminar fluid flow and heat transfer in a channel with a built-in heated square cylinder, *International journal of Thermal sciences*, Vol. 42, pp. 1105-1113, (2003).
- [79] M. Ahmadi, G. Valmorbidia, D. Gayme, A. Papachristodoulou, A framework for input-output analysis of wall-bounded shear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 873, pp. 742-785, (2019).
- [80] P. Haldenwang, Laminar flow in a two-dimensional plane channel with local pressure-dependent crossflow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 593, pp. 463-473, (2007).
- [81] C. Lu, On the asymptotic solution of laminar channel flow with large suction, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 28 , pp. 1113-1134, (1997).
- [82] S. Dinarvand, A. Doosthoseini, E. Doosthoseini, M.M. Rashidi, Comparison of HAM and HPM methods for Berman's model of two-dimensional viscous flow in porous channel with wall suction or injection, *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 1, pp. 337-347, (2008).
- [83] M.B. Zaturka, W.H.H. Banks, New solutions for flow in a channel with porous walls and/or non-rigid walls, *Fluid Dynamics Research*, Vol. 33, pp. 57-71, (2003).
- [84] J.R. King, S.M. Cox, Asymptotic analysis of the steady-state and time dependent Berman problem, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol.39, pp. 87-130, (2001).

- [85] Z. Alhajaj, A.M. Bayomy, M. Ziad Saghir, M.M. Rahman, Flow of nanofluid and hybrid fluid in porous channels: experimental and numerical approach, *International Journal of Thermofluids*, Vol.1-2, 100016, (2020).
- [86] S. U. Khan, N. Ali, S. Ali Shehzad, M.N. Bashir, Analysis of second-grade fluid flow in porous channel with cattaneo-Christov and generalized Fick's theories, *Scientia Iranica*, Vol.27, pp. 1945-1954, (2020).
- [87] A.K. Al-Hadhrami, L. Elliott, D.B. Ingham, X. Wen, Flows through horizontal channels of porous materials, *International Journal of Energy*, Vol. 27, pp. 875-889, (2003).
- [88] J. Granger, J. Dodds, N. Midoux, Laminar flow in channels with porous walls, *The Chemical Engineering Journal*, Vol.42, pp.193-204, (1989).
- [89] M.H. Hamdan, Single-phase flow through porous channels a review of flow models and channel entry conditions, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 62, pp. 203-222, (1994).
- [90] W.A. Robinson, The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 10, pp. 23-40, (1976).
- [91] M.L. Martins-Costa, R.M. Saldanha da Gama, S. Frey, Modeling of a generalized Newtonian flow through channels with permeable wall, *Mechanics Research Communication*, Vol. 27, pp7 07-712, (2000).
- [92] S. Ferro, G. Gnani, Spatial stability of similarity solutions for viscous flows in channels with porous walls, *Physics of Fluids*, Vol. 12, pp. 797-802, (2000).
- [93] M.B. Zatorska, P.G. Drazin, W.H.H. Banks, On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls, *Fluid Dynamic Research*, Vol. 4, pp. 51-178, (1988).
- [94] A.D. MacGillivray, C. Lu, Asymptotic solution of a laminar flow in a porous channel with large suction: A nonlinear turning point problem, *Methods and Application of Analysis*, Vol. 1, pp. 229-248, (1994).
- [95] S.M. Cox, Two-dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous walls, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 27, pp. 1-33, (1991).
- [96] W.P. Breugem, B.J. Boersma, R.E. Uittenbogaard, The laminar boundary layer over a permeable wall, *Transport in Porous Media*, Vol. 59, pp. 267-300, (2005).
- [97] H. Guo, C. Gui, P. Lin, M. Zhao, Multiple solutions and their asymptotics for laminar flows through a porous channel with different permeabilities, *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol. 85, pp. 280-308, (2020).

- [98] P. Watson, W. H. H. Banks, M. B. Zaturka, P. G. Drazin, Laminar channel flow driven by accelerating walls, *European Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2, pp. 359-385, (1991).
- [99] E. B. B. Watson, W. H. H. Banks, M. B. Zaturka, P. G. Drazin, On transition to chaos in two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 212, pp. 451-485, (1990).
- [100] J. F. Brady, A. Acrivos, Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity: An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 112, pp. 127-150, (1981).
- [101] S. Dinarvand, M.M. Rashidi, A reliable treatment of a homotopy analysis method for two-dimensional viscous flow in a rectangular domain bounded by two moving porous walls, *Nonlinear Analysis: Real World Application*, Vol. 11, pp. 1502-1512, (2010).
- [102] L.J. Crane, Flow past a stretching plate, *Journal of Mathematical Physics (ZAMP)*, Vol. 21, pp. 645-647, (1970).
- [103] H.K. Kuiken, On boundary layers in fluid mechanics that decay algebraically along stretches of wall that are not vanishingly small, *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol. 27, pp. 387-405, (1981).
- [104] W.H.H. Banks, Similarity solutions of the boundary-layer equations for a stretching wall, *J. Mech. Theor. Appl.*, Vol. 2, pp. 375-392, (1983).
- [105] C.Y.Wang, The three-dimensional flow due to a stretching flat surface, *Physics of Fluids*, Vol. 27, pp.1915-1917, (1984).
- [106] T. Fang, Flow over a stretchable disk, *Physics of Fluids*, Vol. 19, 128105, (2007).
- [107] C.Y.Wang, Fluid flow due to a stretching cylinder, *Physics of Fluids*, Vol. 31, pp. 466-468, (1988).
- [108] E. Magyari, I. Pop, B. Keller, The missing similarity boundary-layer flow over a moving plane surface, *ZAMP*, Vol. 53, pp. 782-793, (2002).
- [109] A. Alam, D. N. K. Marwat, S. Asghar, Flow over a non-uniform sheet with non-uniform stretching (shrinking) and porous velocities, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 12, pp. 1-11, (2020).
- [110] A.K.A. Hakeem, R. Kalaivanan, N.V. Ganesh, B. Ganga, Effect of partial slip on hydromagnetic flow over a porous stretching sheet with non-

- uniform heat source/sink, thermal radiation and wall mass transfer, *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 5, pp. 913-922, (2014).
- [111] J. Hona, M.M. Nganbe II, Modelling and simulation of an industrial flow between two moving permeable surfaces, *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*, Vol. 9, pp. 177-187, (2017).
- [112] E. Magyari, B. Keller, Exact solutions for self-similar boundary-layer flows induced by permeable stretching walls, *European Journal of Mechanics B Fluids*, Vol. 19 pp. 109-122, (2000).
- [113] P.S. Gupta, A.S. Gupta, Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing, *Canadian Journal of Chemical engineering*, Vol. 55, pp. 744-746, (1977).
- [114] M.B. Zaturka, W.H.H. Banks, Flow in a pipe driven by suction and accelerating wall, *Acta Mechanica*, Vol. 110, pp. 111-121, (1995).
- [115] I. Pop, T.Y. Na, A note on flow over a stretching permeable surface, *Mechanics Research Communication*, Vol. 25, pp. 263-269, (1998).
- [116] Y. Sun, P. Lin, Z. Guo, Temporal stability of multiple similarity solutions for porous channel flows with expanding or contracting walls, *Physics of Fluids*, Vol. 33, 083606, (2021).
- [117] Y. Sun, P. Lin, L. Li, Temporal stability analysis for multiple similarity solutions of viscous incompressible flows in porous channels with moving walls, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 77, pp. 738-755, (2020).
- [118] J. Majdalani, C. Zhou, Moderate-to-large injection and suction driven channel flows with expanding or contracting walls, *ZAMP*, Vol. 83, pp. 181-196, (2003)
- [119] E. C. Dauenhauer, J. Majdalani, Exact self-similarity solution of the Navier–Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls, *Physics of Fluids*, Vol. 15, pp. 1485-1495, (2003).
- [120] X.H. Si, L. Zheng, X.X. Zhang, Y. Chao, Homotopy analysis solution for the asymmetric laminar flow in a porous channel with expanding or contracting walls, *Acta Mechanica*, Vol. 27, pp. 208-214, (2011).
- [121] D. Srinivasacharya, N. S. Srinivasacharyulu, O. Odelu, Flow and heat transfer of couple stress fluid in a porous channel with expanding and contracting walls, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 180-185, (2009).
- [122] X.H. Si, L. Zheng, X.X. Zhang, Y. Chao, Existence of multiple solutions for the laminar flow in a porous channel with suction at both slowly

- expanding and contracting walls, *International Journal of Minerals, Metallurgy, and Materials*, Vol. 18, pp. 494-501, (2011).
- [123] X.H. Si, L. Zheng, X.X. Zhang, Y. Chao, The flow of micropolar fluid through a porous channel with expanding or contracting walls, *Central European Journal of Physics*, Vol. 9, pp. 825-834, (2011).
- [124] S. Xin-Hui, Z. Lian-Cun, Z. Xin-Xin, S. Xin-Yi, Y. Jian-Hong, Flow of a viscoelastic fluid through a porous channel with expanding or contracting walls, *Chinese Physics Letters*, Vol. 28, pp. 044702, (2011).
- [125] S. Xin-Hui, Z. Lian-Cun, Z. Xin-Xin, S. Xin-Yi, Y. Jian-Hong, Homotopy analysis method for the heat transfer in a asymmetric porous channel with an expanding or contracting wall, *Applied mathematical Modelling*, Vol. 35, pp. 4321-4329, (2011).
- [126] S. Rafiq, Z. Abbas, M. Sheikh, J. Hasnain, Effects of variable viscosity on asymmetric flow of non-Newtonian fluid driven through an expanding/contracting channel containing porous walls, *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 45, pp. 9471-9480, (2020).
- [127] G. Oguntala, R. Abd-Alhameed, Z. O. Maustapha, E. Nnabuike, Analysis of flow of nanofluid through a porous channel with axpanding or contracting walls unsing Chebychev spectral collocation method, *Journal of Computational Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 225-232, (2017).
- [128] S. Hussain, Z. Abbas, J. Hasnain, M. S. Arslan, A. Ali, Thermally developed unsteady viscous nanofluid flow due to permeable channel with orthogonal motion of walls using Beavers-Joseph slip condition, *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 60, pp. 2335-2345, (2021).
- [129] N. Khan, K. Al-Khaled, A. Khan, M. S. Hashmi, S. U. Khan, M. I. Khan, S. Qayyum, Aspect of constructive/destructive chemical reactions for viscous fluid flow between deformable wall channel with absorption and generation features, *International Communiations in Heat and Mass Transfer*, Vol. 120, 104956, (2021).
- [130] J. Hona, E. Ngo Nyobe, E Pemha, Numerical investigation of high viscous fluid flow between two porous plates using the shooting technique, *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*, Vol. 7, pp.192-201, (2015).
- [131] J. Hona, Modeling of heat and high viscous fluid distributions with variable viscosity in a permeable channel, *International Journal of Multiphysics*, Vol. 9, pp. 341-360, (2015).
- [132] J. Hona, E. Ngo Nyobe, E Pemha, Creeping flow with non-uniform viscosity in a permeable industrial conduct, *International Journal of*

- Engineering Systems Modelling and Simulation*, Vol. 8, pp.183-194, (2016).
- [133] J. Hona, E Pemha, E. Ngo Nyobe, Viscous flow and heat transfer through two coaxial porous cylinders, *International Journal of Multiphysics*, Vol. 9, pp. 45-60, (2015).
- [134] J. Hona, E. Ngo Nyobe, E Pemha, Dynamic behavior of a steady flow in an annular tube with porous walls at different temperatures, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 19, pp. 2939-2951, (2009).
- [135] M. M. Nganbe II, J. Hona, E. Ngo Nyobe, E. Pemha, Heat transfer and liquid distribution between two moving porous surfaces, *Journal of Applied Sciences*, Vol. 17, pp. 315-323, (2017).
- [136] E. Pemha, J. Hona, E. Ngo Nyobe, Numerical control of a two-dimensional channel flow with porous expanding walls at different temperatures, *International Journal of Flow Control*, Vol. 6, pp. 119-134, (2015).
- [137] V. N. Nsoga, J. Hona, E. Pemha, Numerical simulation of heat distribution with temperature-dependent thermal conductivity in a two-dimensional liquid flow, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 4, DOI 10.1515/ijnsns-2016-0163, (2017).
- [138] M. M. Nganbe II, J. Hona, E. Ngo Nyobe, Elkana Pemha, Circular flow around a turning point in an annular area between two coaxial porous cylinders, *European Physical Journal Plus*, DOI 10.1140/epjp/i2019-12593-2, (2019).
- [139] M. M. Nganbe II, E. Ngo Nyobe, J. Hona, Elkana Pemha, Heat transfer and circular flow around a hydrodynamic turning point through a porous annular tube, *Chinese Journal of Physics*, Vol. 61, pp. 316-335, (2019).
- [140] A. S. Berman, Laminar flow in channels with porous walls, *Journal of Applied Physics*, Vol. 24, pp. 1232-1235, (1953).
- [141] B. Li, L. Zheng, X. Zhang, L. Ma, The multiple solutions of laminar flow in a uniformly porous channel with suction/injection, *Advanced Studies in Theoretical Physics*, Vol. 2, pp. 473-478, (2008).
- [142] J. Griffond, G. Casalis, On the dependence on the formulation of some nonparallel stability approaches applied to the Taylor flow, *Physics of Fluids*, Vol. 12, pp. 466-468, (2000).
- [143] J. Griffond, G. Casalis, On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow, *Physics of Fluids*, Vol. 13, pp. 1635-1644, (2001).

- [144] J. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Vol. 3, New-York, Springer-Verlag, (1991).
- [145] A. Y. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, New-York, Springer-Verlag, (2004).
- [146] J. Guckenheimer, M. Myers, B. Sturmfels, Computing Hopf Bifurcations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, (1997).
- [147] E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner, *Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems*, New-York, Springer-Verlag, (1993).
- [148] V. Nyemb Nsoga, *Ecoulement laminaire et transfert de chaleur entre deux parois rectangulaires poreuses*, Thèse de Doctorat/PhD, Université de Yaoundé I, (2021).
- [149] J. Hona, M. M. Nganbe II, Modelling and simulation of an industrial flow between two moving permeable surfaces, *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*, Vol. 9, pp.177-187, (2017).
- [150] C. Zhou, J. Majdalani, Improved mean-flow solution for slab rocket motors with regressing walls, *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 18 pp. 703-711, (2002).
- [151] M. Goto, S. Uchida, Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall, *Transactions of the Japanese Society of Aeronautical and Space Science*, Vol. 33, pp.14-27, (1990).
- [152] R. C. Reid, J. M. Prausnitz, B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, (1987).
- [153] J. Barron, J. Majdalani, W.K. Van Moorhem, A novel investigation of the oscillatory field over a transpiring surface, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 235, 281-297, (2000).
- [154] N. Bildik, A. Konuralp, The use of variational iteration method, differential transform method and Adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 7, pp. 65-70, (2006).
- [155] W.F. Ames, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, Second ED., Academic Press, New York, (1977).
- [156] A.B. Usov, Finite-difference method for the Navier-Stokes equations in a variable domain with curved boundaries, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 48, pp. 464-476, (2008).
- [157] J. F. Brady, Flow development in a porous channel and tube, *Physics of Fluids*, Vol. 27, pp. 1061-1067, (1984).



ANNEXES

A.1 EQUATIONS DES ECOULEMENTS

En Mécanique des Fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides, c'est-à-dire les gaz et la majeure partie des liquides. La résolution de ces équations modélisant un fluide comme un milieu continu à une seule phase est difficile. L'existence mathématique de solution des équations de Navier-Stokes est une conquête permanente. Mais elles permettent souvent, par une résolution approchée, de proposer une modélisation de nombreux phénomènes, comme les courants océaniques et des mouvements de masse d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, le comportement des gratte-ciels ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et les ingénieurs, ou encore celui des avions, des trains et des voitures à grande vitesse pour leurs bureaux d'études concepteurs, mais aussi le trivial écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides. Les équations de Navier-Stokes sont nommées ainsi pour honorer les travaux de deux scientifiques du XIX^e siècle: le mathématicien et ingénieur des ponts Henri Navier, qui est le premier à introduire la notion de viscosité dans les équations d'Euler en 1823, et le physicien George Gabriel Stokes, qui a donné sa forme définitive à l'équation de conservation de la quantité de mouvement en 1845. Entre-temps, divers scientifiques ont contribué à l'avancement du sujet, notamment Augustin Louis Cauchy et Simon Denis Poisson en 1829, ainsi que Adhémar Barré de Saint-venant en 1843.

Pour un gaz peu dense, il est possible de trouver une solution appropriée de l'équation de Boltzmann, décrivant le comportement statistique des particules dans le cadre de la théorie cinétique des gaz. Ainsi, la méthode de Chapman-Enskog, due à Sydney Chapman et David Enskog en 1916 et 1917, permet de généraliser les équations de Navier-Stokes à un milieu comportant plusieurs espèces et de calculer l'expression des flux de masse (équations de Stefan-Maxwell incluant l'effet Soret), de la quantité de mouvement (en donnant

l'expression du tenseur de pression) et d'énergie en montrant l'existence de l'effet Dufour. Cette méthode permet également de calculer les coefficients de transport à partir des potentiels d'interaction moléculaires.

La recherche d'une meilleure compréhension de la Dynamique des fluides a non seulement inspiré le développement de la discipline elle-même, mais a également ouvert la voie à l'émergence de nouvelles techniques et de nouveaux domaines de la science tels que les mathématiques appliquées, les méthodes numériques et expérimentales, ainsi que l'analyse numérique des écoulements (CFD : Computational Fluid Dynamics).

Cette partie décrit les équations de Navier-Stokes pour les milieux homogènes, les problèmes liés à la diffusion et aux réactions chimiques n'y sont pas abordés.

A. 1.1 Equation d'état du fluide

Les grandeurs thermodynamiques du fluide considéré dans notre travail, notamment la pression p , la température T , et la masse volumique ρ sont regroupées dans une loi sous forme $E(p, T, \rho) = 0$, caractérisant l'état thermodynamique du fluide quelque soient les transformations subies par ce dernier. On dit que le fluide satisfait à la loi des gaz parfaits :

$$p = \rho R_0 T \quad (\text{A.1})$$

où R_0 est une constante des gaz parfaits.

A. 1. 2 Conservation de la masse

L'expression mathématique de la conservation de la masse est l'équation de continuité. Il est donc question de présenter la démarche qui conduit à l'obtention de l'équation de continuité.

A.1.2.1 Tenseur des taux de déformation

Soient M et M' deux points infiniment voisins d'un milieu fluide. Les vitesses du fluide aux points M et M' sont liées par la relation suivante [133]:

$$\mathbf{V}(M') = \mathbf{V}(M) + \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{MM}' + \mathbf{D}(M) \quad (\text{A.2})$$

où $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{V}$ est le vecteur tourbillon et $2\mathbf{\Omega}$ représente la vorticité du fluide au point M . Le vecteur vitesse de déformation $\mathbf{D}(M)$ est donné par l'expression

$$\mathbf{D} = \overline{\varepsilon} \cdot \mathbf{MM}' \quad (\text{A.3})$$

dans laquelle $\overline{\varepsilon}$ est le tenseur des taux de déformation et dont les composantes sont définies à partir des gradients de vitesse :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.4})$$

Pour $i = j$, (ε_{ii}) est le taux de dilatation linéaire d'un élément de longueur initialement parallèle à l'axe \mathbf{x}_i et pour $i \neq j$, (ε_{ij}) est le taux de déformation angulaire ou taux de glissement d'un angle initialement droit dont les côtés sont parallèles aux axes \mathbf{x}_i et \mathbf{y}_j . La trace de $\overline{\varepsilon}$ qui est la divergence du vecteur vitesse, c'est aussi le taux de dilatation cubique relative par unité de temps et s'exprime par la relation suivante [60-66] :

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{1}{dt} \left(\frac{d\omega' - d\omega}{d\omega} \right) \quad (\text{A.5})$$

ou encore

$$\operatorname{div} \mathbf{V} dt = \frac{d\omega' - d\omega}{d\omega} \quad (\text{A.6})$$

où $d\omega$ et $d\omega'$ représentent des éléments de volume pris dans l'écoulement.

A.1.2.2 Enoncé du principe de conservation de la masse

Quelque soit le domaine (D) de fluide limité par une surface fermée (S), entièrement contenue dans le fluide, et que l'on suit dans son mouvement au cours du temps, sa masse reste constante.

Le schéma de la Figure I.1 montre un domaine (D) de fluide évoluant dans le temps.

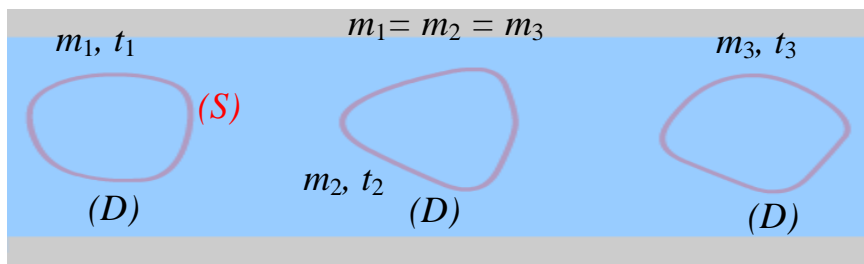


Figure A.1 : Conservation de la masse d'une particule fluide au cours du mouvement.

A.1.2.3 Equation de continuité

Soit (\mathcal{V}) le volume de fluide contenu dans un domaine (D) et $d\omega$ le volume élémentaire pris autour d'une particule fluide contenant le point M à l'instant t . La masse du fluide contenu dans le domaine (D) est donnée par [140-142]:

$$m = \iiint_D \rho(M, t) d\omega \quad (\text{A.7})$$

où $\rho(M, t)$ est la masse volumique du fluide au point M à l'instant t .

D'après le principe de conservation de la masse, la masse m reste constante au cours du temps, donc sa dérivée par rapport au temps s'annule; il en ressort que

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D \rho(M, t) d\omega = 0 \quad (\text{A.8})$$

En utilisant la dérivée lagrangienne définie par

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} \quad (\text{A.9})$$

et en tenant compte de l'expression (A.5) qui définit la relation entre la divergence du vecteur vitesse et le taux de dilation cubique, l'équation (A.8) devient :

$$\iiint_D \left[\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div} \rho(M, t) \mathbf{V} \right] d\omega = 0 \quad (\text{A.10})$$

Cette équation devant être vérifiée pour tout domaine (D), le théorème de l'intégrale multiple permet d'obtenir :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

La relation (A.11) est appelée équation de continuité. Pour les fluides incompressibles, (fluides pour lesquels la masse volumique $\rho(p, T)$ varie très faiblement avec la pression) et lorsque les variations de température sont sans effet sur la masse volumique, l'équation (A.11) se réduit à l'équation suivante :

$$\text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (\text{A.12})$$

L'équation (A.11) suppose que dans le fluide, il n'existe ni puits de masse, ni source de masse. Dans le cas contraire, elle serait définie par la relation [141] :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = \rho q_v \quad (\text{A.13})$$

La quantité q_v est le débit de la source ou du puits. Elle est positive ou négative selon qu'on a affaire à une source ou à un puits.

A.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

Les équations de Navier-Stokes traduisent l'expression mathématique de la conservation de la quantité de mouvement. Il est donc question de présenter la démarche qui conduit à l'obtention des équations de Navier-Stokes.

A.1.3.1 Force de contact

On appelle force de contact sur une portion de fluide (D) limitée par une surface fermée (S), la force exercée par le fluide extérieur sur le fluide intérieur à (D) et qui s'applique sur la surface (S) à raison de $\mathbf{T}_c dS$ sur l'élément de surface (dS) telle que $d\mathbf{F} = \mathbf{T}_c(M) dS$, où :

- \mathbf{F} est la force de contact sur dS ;
- $\mathbf{T}_c(M)$ est appelée tension ou contrainte au point M .

La Figure I.2 présente une portion de fluide (D) sur laquelle est exercée la force de contrainte $\mathbf{T}_c dS$ sur l'élément de surface (dS).

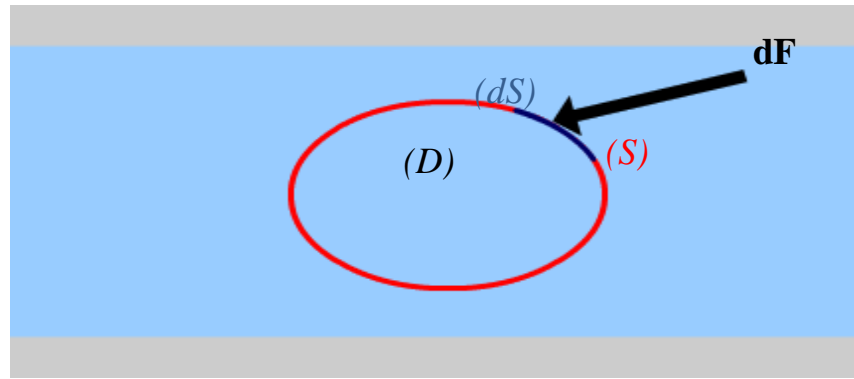


Figure A.2 : Portion de fluide (D) délimitée par une surface fermée (S).

La contrainte \mathbf{T}_c contient une composante normale \mathbf{T}_n ou contrainte normale à dS et une composante tangentielle \mathbf{T}_f ou contrainte tangentielle à dS (ou contrainte de glissement, ou contrainte de cisaillement). La contrainte \mathbf{T}_c est donc égale à :

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{T}_n + \mathbf{T}_f \quad (\text{A.14})$$

A.1.3.2 Tenseur des contraintes

Pour les fluides étudiés dans ce travail, on suppose vérifiées les propriétés suivantes [141]:

Propriété 1: La distribution des contraintes $T_c(M)$ en tout point M du fluide est totalement déterminée dès que l'on connaît les contraintes qui s'exercent sur les trois éléments de surface dS_1, dS_2, dS_3 formant un trièdre trirectangle ayant pour origine le point O de l'espace physique de dimension 3.

Propriété 2: Si l'on considère maintenant un petit parallélépipède rectangle bâti sur le point M et d'arrêts parallèles aux axes de coordonnées. Et qu'on exprime l'équilibre des moments des forces appliquées, on trouve que le tenseur des contraintes $\overline{\sigma}$ est symétrique, c'est-à-dire, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

À ces deux propriétés s'ajoutent les hypothèses caractéristiques des fluides newtoniens suivantes [140-142]:

Hypothèse 1: Le tenseur des contraintes est une fonction continue du tenseur des taux de déformation et de l'état thermodynamique local (pression, température) du fluide. Il est indépendant du temps, de la translation et de la rotation de l'élément de fluide local.

Hypothèse 2: Le fluide est entièrement dénué d'élasticité, c'est-à-dire il n'a pas la mémoire du passé.

Hypothèse 3: Un même état de contrainte ne conduit qu'à un même état de déformation, quelque soit le point considéré dans le fluide. Ce qui implique que le tenseur des contraintes ne dépend pas explicitement des coordonnées locales.

Hypothèse 4: Le fluide est isotrope, c'est-à-dire les relations entre les contraintes et les déformations n'ont pas de directions privilégiées dans le fluide.

Il est aussi important de mentionner le principe de symétrie entre les causes et les effets comme autre caractéristique de la relation entre les contraintes et les déformations. Les effets peuvent contenir d'autres symétries éventuelles, mais toutes les symétries originelles proviennent des causes. Les taux de déformation ont en plus d'autres symétries, éventuellement toutes les symétries que possèdent les contraintes. Les plans principaux et les directions principales du tenseur des contraintes sont confondus avec ceux du tenseur des taux de déformations.

On démontre que la contrainte \mathbf{T}_c sur un élément de surface pris autour du point M du fluide est liée à la normale unitaire \mathbf{n} de cet élément de surface par la relation

$$\mathbf{T}_c = \overline{\overline{\sigma}} \mathbf{n} \quad (\text{A.15})$$

dans la quelle $\overline{\sigma}$ est le tenseur d'ordre 2 des contraintes. La composante σ_{ik} de ce tenseur s'interprète comme la contrainte suivant l'axe \mathbf{x}_i sur une surface de normale \mathbf{x}_k .

Pour $i = k$, σ_{ii} est appelé contrainte normale et pour $i \neq k$, σ_{ik} est appelé contrainte tangentielle.

A.1.3.3 Loi de comportement

Pour les fluides newtoniens, les contraintes sont par définition des fonctions linéaires des taux de déformation du milieu. Et la loi de comportement qui en découle de cette définition est donnée par la relation [140-142]:

$$\sigma_{jk} = (-p + \xi \text{div} \mathbf{V}) \delta_{jk} + 2\mu \varepsilon_{jk} \quad (\text{A.16})$$

Sous forme vectorielle, la relation (A.16) devient :

$$\overline{\sigma} = (-p + \xi \text{div} \mathbf{V}) \overline{\mathbf{I}} + 2\mu \overline{\varepsilon} \quad (\text{A.17})$$

- p est la pression (indépendante de la direction en un point donné)
- δ_{jk} est le symbole de Kronecker:
$$\begin{cases} \delta_{jk} = 1 & \text{si } j = k \\ \delta_{jk} = 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

μ et ξ sont deux paramètres caractérisant les propriétés visqueuses des fluides :

- μ est la viscosité de cisaillement
- ξ est la viscosité de dilatation

Il est important de noter que la viscosité de cisaillement μ , encore appelée viscosité dynamique exprime la résistance à la déformation du fluide, alors que la viscosité de dilatation ξ est une autre forme de résistance liée cette fois-ci aux effets de compressibilité du fluide.

En effet, Les processus d'écoulements ou de transport à l'échelle moléculaire se traduisent à l'échelle macroscopique par des phénomènes de diffusion de masse en plus de la conduction et de la convection thermiques. La diffusion des quantités de mouvement s'effectue par frottement des couches fluides les unes les autres et le coefficient de diffusion associé s'appelle viscosité dynamique du fluide ou viscosité de cisaillement. Cette propriété est notamment à l'origine d'efforts de frottement lorsque le fluide est en contact avec une paroi solide. Sa prise en compte n'est cependant pas primordiale pour obtenir une restriction de la réalité d'un écoulement. C'est pour dire que sous certaines conditions la viscosité peut être négligée; on considère alors un fluide à faible viscosité appelé fluide parfait. Par contre, les problèmes de type visqueux sont ceux pour lesquels les frottements ont une influence notable et le fluide considéré est dit réel.

A.1.3.4 Enoncé du principe de conservation de la quantité de mouvement

Quelque soit le domaine (D) de fluide que l'on suit dans son mouvement dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du torseur cinématique est égale au torseur des efforts extérieurs appliqués à (D):

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \quad (\text{A.18})$$

L'égalité entre les deux torseurs précédents équivaut à l'égalité entre les moments résultants:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\omega \\ \frac{d\mathbf{M}_o}{dt} = \iiint_D \frac{d(\mathbf{OM} \wedge \mathbf{V})}{dt} d\omega \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

par ailleurs,

$$\mathbf{F}_{ext} = \begin{cases} \mathbf{R}_{ext} = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\omega + \oiint_S \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{n} dS \\ \mathbf{M}_{ext} = \iiint_D \rho \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f} d\omega + \oiint_S \mathbf{OM} \wedge (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{n}) dS \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

On montre que la deuxième égalité n'apporte aucune information supplémentaire sur la détermination du champ de vitesse du fluide, car elle aboutit à la symétrie du tenseur des contraintes. Donc seule la première égalité est intéressante :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\omega = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\omega + \oiint_S \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{n} dS \quad (\text{A.21})$$

où $\rho \mathbf{f} d\omega$ est la résultante des forces de masse sur la particule fluide de masse dm . Les forces de masse sont les forces qui sont proportionnelles à la masse et qui sont dues à l'existence d'un ou de plusieurs champs de forces dans le domaine où se trouve le fluide.

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky :

$$\oiint_S \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{n} dS = \iiint_D \text{div}(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}) d\omega \quad (\text{A.22})$$

La relation (A.21) devient :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\omega = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\omega + \iiint_D \mathbf{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} d\omega \quad (\text{A.23})$$

Par ailleurs

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\omega = \iiint_D (\rho \mathbf{f} + \mathbf{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}) d\omega \quad (\text{I.24})$$

Le domaine (D) pouvant être quelconque, on aboutit à l'équation locale de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \mathbf{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (\text{A.25})$$

qui, en notation indicielle, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.26})$$

L'équation (A.26) est appelée relation de Cauchy. Cette relation est valable quelque soit le fluide, qu'il soit newtonien ou pas. Un fluide est dit newtonien lorsque le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire du tenseur des déformations. Pour la plupart des fluides usuels dans des conditions standards, ce modèle est très satisfaisant.

A.1.3.5 Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes [140-142], sont une conséquence du principe de conservation de la quantité de mouvement. Pour plus de précision, ce principe découle de l'inventaire des forces extérieures appliquées à un domaine fluide, notamment les forces de masse ou de volume, et les forces de contact ou de surface. Les forces de masse sont proportionnelles à la masse et sont dues à l'existence d'un champ de force dans le domaine occupé par le fluide. Les forces de contact ou de surface proviennent du fluide extérieur au domaine considéré, et s'appliquent sur la surface frontière de ce domaine. Elles sont dues à leur tour, à l'existence au sein du domaine d'un champ de contrainte responsable du caractère déformable du fluide. Ces contraintes sont tangentielles et normales. Les premières génèrent les forces de viscosité qui naissent du

mouvement relatif des particules fluides entre-elles, et les secondes donnent naissance aux forces de pression, normales à la surface frontière du domaine. Le lien entre les contraintes et les déformations dans le fluide est régi par la loi de comportement, fondée sur le principe de symétrie entre les causes et les effets.

En appliquant l'opérateur divergence sur la relation (A.17), on obtient :

$$\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}} = -\mathbf{grad} p + \mathbf{grad}(\xi \mathbf{div} \mathbf{V}) + 2\mu \mathbf{div} \bar{\bar{\varepsilon}} + 2\bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{grad} \mu. \quad (\text{A.27})$$

Compte tenu des propriétés de la divergence, l'équation (A.27) devient :

$$\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}} = -\mathbf{grad} p + \mathbf{grad}(\xi \mathbf{div} \mathbf{V}) + 2\mathbf{div} \mu \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{A.28})$$

En substituant l'équation (A.28) dans (A.26), on obtient :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \mathbf{grad}(\xi \mathbf{div} \mathbf{V}) + 2\mathbf{div} \mu \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{A.29})$$

où $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est le tenseur des taux de déformation, et est lié au gradient de vitesse par la relation [128-136]:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{grad} \mathbf{V}}} + {}^t \overline{\overline{\mathbf{grad} \mathbf{V}}} \right) \quad (\text{A.30})$$

En substituant la relation (A.30) dans l'équation (A.29) on obtient de nouvelles équations appelées équations de Navier-Stokes, valables dans tous les systèmes de coordonnées :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + (\mu + \xi) \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{V}) + \mu \Delta \mathbf{V} \quad (\text{A.31})$$

Dans l'équation (A.31), les quantités $\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}$, $\rho \mathbf{f}$, $\mathbf{grad} p$ et

$(\mu + \xi)\mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{V}) + \mu\Delta\mathbf{V}$ représentent respectivement, les forces d'inertie, de masse, de pression et de viscosité appliquées à l'unité de volume.

Pour les fluides incompressibles, la relation $\mathit{div}\mathbf{V} = 0$ permet d'obtenir les équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles, données par l'équation suivante :

$$\rho \left[\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right] = \rho\mathbf{f} - \mathbf{grad}p + \mu\Delta\mathbf{V} \quad (\text{A.32})$$

L'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible est régi par les équations (A.12) et (A.32) valables dans tous les systèmes de coordonnées. Ce chapitre étant consacré à la revue de la littérature et compte tenu du fait que la plupart des écoulements industriels ont lieu dans des canaux rectangulaires ou cylindriques, la formulation de ces équations dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques est un outil nécessaire.

A.1.3.6 Equations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes

Dans un champ de force de masse \mathbf{g} , en considérant le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) , et les vitesses V_x , V_y et V_z suivant les trois directions du repère cartésien, la projection des relations (A.12) et (A.32) dans la base cartésienne habituelle $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.36})$$

A.1.3.7 Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

Dans un champ de force de masse \mathbf{g} , en considérant le système de coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires (r, θ, z) , et les vitesses V_r , V_θ et V_z suivant les trois directions du repère cylindrique, la projection des relations (A.12) et (A.32) dans la base cylindrique habituelle $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k})$, permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$



ELSEVIER

Contents lists available at [ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com)

Chinese Journal of Physics

journal homepage: www.sciencedirect.com/journal/chinese-journal-of-physics

Similarity solutions of the Navier-Stokes equations for an injection-driven flow between two orthogonally moving porous discs

Fils Raymond Patrick Lehel, Jacques Hona^{*}*Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon*

ARTICLE INFO

Keywords:

Injection-driven flow
 Orthogonally moving porous walls
 Navier-stokes equations
 Nonlinear two-point boundary-value problem
 Numerical solutions

ABSTRACT

An incompressible fluid is in motion after injection in the space between two parallel porous discs that can move away or come closer along the same axis passing perpendicular to the midpoints of their respective surfaces. The desire of well describing the incompressible fluid flow patterns and the fact that the velocity field of the axisymmetric flow has two components lead to introduce the stream function in the governing equations. A similarity method is applied to transform the vorticity equation satisfied by the stream function into a nonlinear ordinary differential equation. Thus, the analysis is restricted to solving a two-point boundary-value problem containing two control parameters, notably the Reynolds number and a nondimensional parameter representing the measure of the increase or the decrease in volume of the flow domain. Among the main results, it is found that, the high expansion in volume of the flow domain causes flow reversal for low values of the injection Reynolds number, while the contraction in volume of the flow domain creates a linear behavior of the axial velocity for a small injection Reynolds number and a flattening of the radial velocity profile for all the Reynolds numbers.

1. Introduction

Scientists are increasingly interested in the study of fluid flows, because many important problems to be solved arise in the form of mass distribution of liquids or gasses. The variety of fluid flow problems is due to a number of considerations related to the nature of the moving fluid, the space and time, as well as the behavior of the physical properties of the fluid. This means that the fluid flow is very sensitive to these considerations which determine the type of the solution sought. The fluid flow problems are most often described by the Navier-Stokes equations which represent a system of differential equations that adapts to the geometry of the space which contains the moving fluid, as well as to the temporal constraints. Moreover, for the same geometrical configuration of the flow, this system of differential equations can describe several types of problems which only differ by the boundary conditions and the initial conditions.

In particular, the boundary conditions are defined at the borders of the geometrical space containing the moving fluid. In most cases, these borders can be fixed, movable, fixed and permeable, as well as movable and permeable. The geometry of the space containing the flow determines the coordinate system to use for describing the movement of the fluid. Indeed, the Cartesian and cylindrical coordinate systems are very often used, because in many cases, the fluid flows develop in rectangular or cylindrical domains. More precisely, the flow domain is assumed to be rectangular if the cross section of the flow is a rectangle. On the other hand, in

^{*} Corresponding author.

E-mail address: honajacques@yahoo.fr (J. Hona).

<https://doi.org/10.1016/j.cjph.2021.07.015>

Received 11 March 2021; Received in revised form 26 June 2021; Accepted 20 July 2021

Available online 3 August 2021

0577-9073/© 2021 The Physical Society of the Republic of China (Taiwan). Published by Elsevier B.V. All rights reserved.

the case where the dynamics of a fluid presents an axial motion, if the cross section of the flow is circular, the flow is assumed to be developed in a cylindrical domain. When the rectangular or the cylindrical domain is porous, the problem becomes similar to a Berman flow [1] as Berman's pioneering work concerning a viscous fluid flow in a rectangular channel possessing two porous walls has inspired many other studies [2–11]. The approach used by Berman to treat his problem in a Cartesian coordinate system is subtly extended by other authors in order to investigate the fluid motions in the porous cylindrical conduits [12–16]. In addition, the porous walls of the Berman's problem were fixed, but the Berman's method of seeking solutions is used to examine the movement of the viscous fluids through the channels or the conduits with moving walls that may be permeable or impermeable [17–22]. The porous walls can move in the same direction or in the opposite direction to the flow; they can also be in motion perpendicular to the movement of the fluid [17, 23–25].

The approach for seeking the solutions employed by Berman [1] and other authors [4, 6–10] is the similarity method which is often applied after introducing the stream function in the governing equations. Indeed, the use of the stream function is suitable, especially when the flow of an incompressible fluid is described by a velocity field having two components in steady state. In this case, the streamlines which coincide with the fluid particle trajectories can be represented in order to better illustrate the fluid flow patterns. More precisely, since the streamlines are tangent to the velocity vector of the flow, the value of the stream function must be constant along a streamline. Another advantage of using the stream function when the fluid moves with two velocity components in the steady state, is its link with the velocity field components, thus making it possible to go from three differential equations to a single differential equation verified by this stream function describing the same flow problem expressed as the conservation of mass and momentum. On the other hand, other approaches [26,27] to solving the Navier-Stokes equations exist, such as the direct methods like the finite difference method [28] which enables to directly determine the velocity components by finding the solutions of the Navier-Stokes equations without resorting to the stream function. In the absence of gravity terms, the momentum conservation that governs the fluid flow is reduced to a relationship between the terms of inertia, viscosity and pressure. For a flow with two velocity components, the direct approach based on the finite difference method enables only to determine the velocity profiles considering an appropriate treatment of the pressure gradient term which also intervenes in the Navier-Stokes equations. The particular interest of using the method of similarity solution perpetrated by many authors [11–17,19–21] is that, it allows obtaining many details concerning the flow field, including the wall friction coefficient, the pressure gradient, the streamlines and the velocity profiles.

It is with this objective of having enough flow field characteristics that we use the similarity method in the current study which deals with the investigation of a fluid flow induced by injection in the space comprised between two porous discs that move away from or approach each other along a same axis orthogonally passing to the midpoints of the two parallel circular surfaces. The novelty of this work, before any other aspect, is the geometric configuration of the flow which has not yet been exposed before, since one realizes that most of the cited previous studies deal with the motion of a fluid in the flow domain possessing the rectangular or cylindrical walls. However, the walls of the current fluid flow are two porous circular discs. After the injection process, the subsequent movement of the fluid takes place in the intermediate space of the two discs with the axial/normal and radial velocity components. In fact, the injection is the phenomenon of mass addition in the intermediate space of the two discs, while the displacement of the discs is the axial translational movement of the flow borders. When the two discs move closer, this is the contraction case, the volume of the flow domain diminishes. On the other hand, the increase in volume of the flow domain occurs when the two discs move away, this is the expansion case. The main purpose of this work is the investigation of the effects of the displacements of the porous discs on the movement of the fluid. This requires a deep analysis of the coexistence of the phenomena of fluid injection and the translation of the discs in the problem under study.

Apart from this introduction, the rest of the paper consists of the Section 2 which is devoted to the presentation of the governing equations, the Section 3 that deals with the similarity transformation of the governing equations and the introduction of the non-dimensional variables. In addition, the description of the numerical integration is performed in Section 4, while the numerical results are presented and discussed in Section 5. The conclusion intervenes in Section 6.

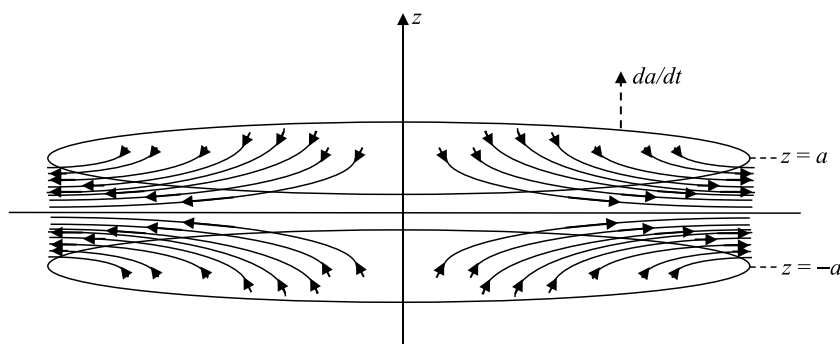


Fig. 1. Geometry of the flow domain showing some streamlines corresponding to the sandwiched fluid flow under study.

2. Governing equations

An incompressible viscous fluid moves in the space between two uniformly porous discs representing the flow domain which is built on the base of a cylindrical coordinate system (r, θ, z) that consists of the radial, the angular and the axial or normal coordinates, respectively. The axisymmetric flow is induced by injection through the two porous discs as shown in Fig. 1. The two porous circular borders undergo the translation movement along their normal axis z passing to the midpoints of their surfaces, such that the upper wall is situated at $z = a(t)$ and the lower wall is located at $z = -a(t)$, where $a(t)$ is the half-width of the flow domain, such that $2a(t)$ denotes the distance between the porous walls depending on the time t . The displacement of the two porous discs can reduce or increase the volume of the flow domain. The problem is stated with the assumption that the same radius r of the two circular discs is very large compared to the width $2a$ of the flow domain, so that this radius tends to infinity in order to neglect the influence of the end in the radial direction on the fluid motion. Since the flow is assumed to be axisymmetric, the velocity field has components as $(V_r, 0, V_z)$ where V_r and V_z are the radial and the axial or normal velocities, respectively. The variable describing the pressure inside the flow domain is p . The main physical properties of the working fluid are ρ and μ denoting the fluid specific mass and dynamic viscosity, respectively.

In the absence of body forces [13–16, 29], due to the weakness of the gap between the discs compared to their radius, the movement of the fluid within the described flow domain is governed by differential equations as in the following:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \tag{3}$$

where $\nu = \mu/\rho$ is the kinematic viscosity. The conservation of mass is described by the continuity Eq. (1), and the momentum conservation is satisfied by the two Navier-Stokes Eqs. (2) and (3). Eqs. (1)-(3) are associated with the boundary conditions:

$$\begin{aligned} V_r &= 0, & V_z &= -V & \text{for} & z = a(t) \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} &= 0, & V_z &= 0 & \text{for} & z = 0 \\ V_r &= 0, & V_z &= +V & \text{for} & z = -a(t) \end{aligned} \tag{4}$$

The boundary conditions for $z = \pm a(t)$ express the no slip condition $V_r = 0$ and equal fluxes of fluid $V_z = \pm V$ at walls. In addition, the symmetry established in the problem under study by applying the boundary conditions $\frac{\partial V_r}{\partial z} = 0, V_z = 0$ for $z = 0$ gives rise to a sandwiched flow which means that the fluid is equally distributed at both sides of the open wall also known as the circular midsection located at $z = 0$.

The absolute fluid speed at walls V takes into account the relative injection velocity V_i and the wall displacement velocity $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ also known as the entrainment velocity, such that:

$$V = V_i - \dot{a} \tag{5}$$

The velocity $V \neq 0$ plays an important role in the analysis because its definition $V = V_i - \dot{a}$ reflects the influence of the movement of the discs (by the presence of the velocity of the displacement of the discs \dot{a}) on the flow which is caused by the injection of the fluid at the velocity V_i into the flow domain.

In this work, the flow occurs between the two porous discs because there is the injection of the fluid between the two permeable walls. In other words, the presence of the fluid in the flow domain is due to the phenomenon of injection through the porous walls. This injection phenomenon is taken into account by the introduction and the definition of the absolute fluid speed at walls V in the boundary conditions (4).

The problem under study is the fluid flow and not the movement of the discs. The movement of the discs only influences the flow and this influence is characterized by the expansion or contraction in volume of the flow domain, on one hand. On the other hand, the displacement of the discs influences the definition of the absolute fluid speed at walls V which takes into account the relative fluid injection velocity at walls V_i and the velocity of the displacement of the walls \dot{a} also known as the entrainment velocity, such that: $V = V_i - \dot{a}$.

For example, V and \dot{a} are related in active propellants by the solid-to-fluid density ratio [24,30]. This can be explained by referring to the mass conservation equation at the propellant-fluid interface. More precisely, if ρ_0 denotes the propellant density, then conservation of mass at the burning surface requires that $\rho A_i V_i = \rho_0 A_i \dot{a}$ [30], where A_i is the fluid injection area also known as the burning area. Thus, the fluid velocity with respect to the wall can be deduced to be:

$$V_i = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \dot{a} = r_\rho \dot{a} \tag{6}$$

where $r_\rho = \frac{\rho_0}{\rho}$ is the solid-to-fluid density ratio. Eqs. (5) and (6) lead to the following expression of the absolute velocity of the fluid at walls:

$$V = (r_\rho - 1)\dot{a} = E\dot{a} \tag{7}$$

where $E = (r_\rho - 1)$ is the injection coefficient also known as a measure of the porosity of the walls. The coefficient E will be utilized to define the control parameters of the flow under study in Section 3. For example, the coefficient E is constant in rocket motors estimated as $E = 99$ for typical $\rho_0 = 2000\text{kgm}^{-3}$ and $\rho = 20\text{kgm}^{-3}$ [24,31,32].

The expansion or the increase in volume of the flow domain occurs when $\dot{a} > 0$, while the contraction or the decrease in volume of the flow domain corresponds to $\dot{a} < 0$. Indeed, the volume ϑ of the fluid between the two discs is defined considering their radius r and the width $2a$, as follows:

$$\vartheta = \pi r^2 2a = \frac{1}{2} A_c r \tag{8}$$

where the cross section area of the flow between the two porous discs A_c is derived as:

$$A_c = (2\pi r)2a = 4\pi r a \tag{9}$$

In fact, A_c is the lateral surface of a cylinder having r as the radius and $2a$ as the length or the height measured in the axial or normal direction z . On the other hand, the fluid injection area A_i is the sum of the surfaces of the two uniformly porous discs defined by:

$$A_i = \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2 \tag{10}$$

The variation of the mass of fluid inside the flow domain is expressed in terms of the difference between the mass which enters in the space between the two discs by injection through the porous area A_i and the mass that leaves this space through the cross section A_c as in the following:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\vartheta} \rho d\vartheta = \rho V_i A_i - \rho u_m A_c \tag{11}$$

where u_m is the mean flow velocity through the cross section A_c . By considering Eq. (8), Eq. (11) becomes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho A_c r \right) = \rho V_i A_i - \rho u_m A_c \tag{12}$$

Eq. (12) is applied to a volume ϑ of fluid defined by considering a given radius r of the flow domain, such that:

$$\frac{1}{2} \rho r \frac{\partial A_c}{\partial t} = \rho V_i A_i - \rho u_m A_c \tag{13}$$

The mean flow velocity u_m can now be extracted from Eq. (13) as follows:

$$u_m = \frac{A_i}{A_c} V_i - \frac{1}{2} \frac{r}{A_c} \frac{\partial A_c}{\partial t} \tag{14}$$

By substituting the expressions of the surfaces A_c and A_i as respectively defined in Eqs. (9) and (10), Eq. (14) becomes:

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{r}{a} V_i - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \dot{a} = \frac{1}{2} \frac{r}{a} (V_i - \dot{a}) \tag{15}$$

It appears that the mean velocity u_m is defined as follows:

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{r}{a} V \tag{16}$$

The incompressible fluid flow is assumed to be axisymmetric with two velocity components, thus the stream function ψ is prescribed in the problem by considering its definition in order to verify the continuity equation as in the following:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{17}$$

The curl of the momentum equation that consists of Eqs. (2) and (3) gives rise to the vorticity transport equation satisfied by the stream function as follows:

$$\frac{\partial}{\partial t} (D^2 \psi) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (D^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} (D^2 \psi) \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} D^2 \psi = \nu D^4 \psi \tag{18}$$

where $D^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$. The boundary conditions associated with Eq. (18) are given by:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -V \quad \text{for } z = a(t) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{for } z = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = V \quad \text{for } z = -a(t) \end{aligned} \tag{19}$$

It follows that the introduction of the stream function in the governing equations by considering the expressions (17) causes the continuity Eq. (1) to be self-satisfied and enables to reduce the three differential Eqs. (1)–(3) verified by the velocity components to a single differential Eq. (18) satisfied by the stream function describing the same problem.

3. Similarity method and nondimensional variables

3.1. Similarity solution in space

A similarity method used in the present work is also employed in previous studies [24, 30], but with different flow configurations. In general, a similarity method for studying a flow of Berman type usually takes into account the geometry of the flow domain and the boundary conditions, as well as the physical properties of the working fluid. This leads to the following transformation:

$$\psi(r, z, t) = \frac{1}{2} \frac{\nu}{a^2} r^2 F(\eta, t), \quad \eta = \frac{z}{a(t)} \tag{20}$$

where F is a nondimensional function which governs the dynamics of the fluid depending on the variable t describing the time and on the nondimensional quantity η that combines both space and time variables. By substituting the similarity transformation (20) into Eqs. (18) and (19), the equations of fluid motion become:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + F \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + 3\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \alpha \eta \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} - \frac{a^2}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} (+1, t) = 0, \quad F(+1, t) = \frac{a(t)V}{\nu} \quad \text{for } \eta = +1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} (0, t) = 0, \quad F(0, t) = 0 \quad \text{for } \eta = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} (-1, t) = 0, \quad F(-1, t) = -\frac{a(t)V}{\nu} \quad \text{for } \eta = -1$$

where the contraction or expansion ratio $\alpha = \frac{\dot{a}}{a}$ is the nondimensional parameter denoting the measure of the decrease or the increase in volume of the flow domain. In light of Eqs. (22), since the expression $F(\pm 1, t) = \pm \frac{a(t)V}{\nu}$ derives from the established boundary conditions of the problem under study, it is important to note that, this spatial constraint is satisfied whatever the time t . More precisely, the nondimensional function F is uniform to the quantity $\pm \frac{a(t)V}{\nu}$ at boundaries. This assumption will be considered while formulating the similarity solution in space and time.

3.2. Similarity solution in space and time

If the function F is made dependent on η instead of (η, t) , we can then obtain $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = 0$ by setting α to be constant or quasi-constant in time. In that event, the value of the expansion ratio α can be specified by its initial value $\alpha = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a_0 \dot{a}_0}{\nu}$, where a_0 and \dot{a}_0 denote the initial half-width of the flow domain and expansion/contraction rate, respectively. If $\alpha = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a_0 \dot{a}_0}{\nu}$ is assumed to be constant, by taking into account Eq. (7) which states that $V = E\dot{a}$, the expression of the Reynolds number for the similarity solution in space and time corresponds to $R = \frac{aV}{\nu} = E\alpha$, by considering a constant value of the injection coefficient E . In the present study, the constant value of E is not given, because this work does not concern a particular fluid, but it is a general contribution to a better understanding of incompressible fluid flows between two expanding or contracting porous walls. As F , α and R do not explicitly depend on time t , the problem to solve becomes:

$$F^{(4)} - F^{(1)}F^{(2)} + FF^{(3)} + 3\alpha F^{(2)} + \alpha \eta F^{(3)} = 0 \tag{23}$$

$$F^{(1)}(+1) = 0, \quad F(+1) = R \quad \text{for } \eta = +1$$

$$F^{(2)}(0) = 0, F(0) = 0 \text{ for } \eta = 0 \tag{24}$$

$$F^{(1)}(-1) = 0, F(-1) = -R \text{ for } \eta = -1$$

where $F^{(i)} = d^i F/d\eta^i$. It is convenient at this stage to derive the radial velocity and the axial velocity as follows:

$$V_r = \frac{1}{2} \frac{\nu r}{a^2} F^{(1)}(\eta), \quad V_z = -\frac{\nu}{a} F(\eta) \tag{25}$$

By taking into account Eqs. (25), it is relevant to normalize the radial and axial velocity components by the mean velocity u_m as defined in Eq. (16) and the fluid injection speed at the upper wall $-V$, respectively. Hence, the nondimensional radial V_r^* and axial V_z^* velocities are defined by:

$$V_r^* = \frac{V_r}{u_m} = F^{(1)}(\eta) / R, \quad V_z^* = \frac{V_z}{-V} = F(\eta) / R \tag{26}$$

On the other hand, the similarity expression corresponding to the radial pressure gradient per unit radius can be derived by substituting Eqs. (25) into Eq. (2) as follows:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{2} \rho \frac{\nu^2}{a^4} (F^{(3)} + FF^{(2)} + (2\alpha - F^{(1)})F^{(1)} + \alpha\eta F^{(2)}) \tag{27}$$

In this work, the half-width of the flow domain a represents the reference length, then the dimensionless radius r^* of the discs is defined by $r^* = r/a$. In addition, the pressure is measured by units of the absolute pressure (ρV^2) , such that $p^* = p/(\rho V^2)$. Thus, the nondimensional radial pressure gradient per unit radius is defined by:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} = \frac{1}{2} (F^{(3)} + FF^{(2)} + (2\alpha - F^{(1)})F^{(1)} + \alpha\eta F^{(2)}) / R^2 = cte \tag{28}$$

It appears that, for a given Reynolds number, the nondimensional radial pressure gradient per unit radius as defined in Eq. (28) is constant inside the flow domain, since it is equivalent to the integral form of the ordinary differential Eq. (23). Hence, the attention is focused on the axial pressure gradient which is determined by substituting Eqs. (25) into Eq. (3) as follows:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho \nu^2}{a^3} (\alpha F + \alpha\eta F^{(1)} + F^{(2)} + FF^{(1)}) \tag{29}$$

Considering the references of lengths a and pressure (ρV^2) , such that $\eta = z/a$ and $p^* = p/(\rho V^2)$ the nondimension axial pressure gradient is given by:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \eta} = p^{(1)*}(\eta) = -(\alpha F + \alpha\eta F^{(1)} + F^{(2)} + FF^{(1)}) / R^2 \tag{30}$$

At this stage, it is important to note that, the similarity method utilized in this work enables to transform the partial differential Eq. (18) satisfied by the stream function ψ into the ordinary differential Eq. (23) described by the similarity function F that helps to define the other characteristics of the fluid flow under study.

4. Description of the numerical integration

The problem is solved by using a numerical integration based on the shooting method associated with the fourth-order Runge-Kutta algorithm. Since the flow domain is symmetric, Eq. (23) is solved subject to the boundary conditions restricted on the interval $[0, 1]$ as shown in Eq. (24), and the rest of the solution relative to the interval $[-1, 0]$ is derived by symmetry. More precisely, the boundary conditions considered while performing the numerical integration are given by:

$$F^{(1)} = 0, \quad F = R \quad \text{for} \quad \eta = 1$$

$$F^{(2)} = 0, \quad F = 0 \quad \text{for} \quad \eta = 0 \tag{31}$$

To start, Eq. (23) is expressed in the classic form:

$$F^{(4)} = f(\eta, F, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}) = F^{(1)}F^{(2)} - FF^{(3)} - 3\alpha F^{(2)} - \alpha\eta F^{(3)} = 0 \tag{32}$$

In order to transform the two-point boundary-value problem which consists of Eqs. (23) and (31) into an initial value problem, two new variables b and c are introduced as user-specified initial guesses at $\eta = 0$ as follows:

$$F(0) = 0, F^{(1)}(0) = b, F^{(2)}(0) = 0, F^{(3)}(0) = c \tag{33}$$

Thus, the solution of the problem becomes dependent upon three variables η, b and c . As permitted by the chain rule, the order of differentiation in Eq. (32) can be switched such that:

$$\frac{\partial}{\partial b} (f(\eta, F, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)})) = \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} \right) = \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial b} \right) \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial c} (f(\eta, F, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)})) = \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} \right) = \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial c} \right) \tag{35}$$

Two new functions u and v are introduced as follows:

$$u(\eta, b, c) = \frac{\partial F}{\partial b}, \quad v(\eta, b, c) = \frac{\partial F}{\partial c} \tag{36}$$

Fourth-order differential equations for u and v can be derived from Eqs. (36) in the form:

$$\frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial b} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}} \frac{\partial F^{(3)}}{\partial b} \tag{37}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial F}{\partial c} \right) = \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}} \frac{\partial F^{(3)}}{\partial c} \tag{38}$$

The variable η is independent of b and c , then $\frac{\partial \eta}{\partial b} = 0, \frac{\partial \eta}{\partial c} = 0$. Hence, Eqs. (37) and (38) become:

$$u_{\eta\eta\eta\eta} = f_F u + f_{F^{(1)}} u_\eta + f_{F^{(2)}} u_{\eta\eta} + f_{F^{(3)}} u_{\eta\eta\eta} \tag{39}$$

$$v_{\eta\eta\eta\eta} = f_F v + f_{F^{(1)}} v_\eta + f_{F^{(2)}} v_{\eta\eta} + f_{F^{(3)}} v_{\eta\eta\eta} \tag{40}$$

where $u_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta}, u_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, u_{\eta\eta\eta} = \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}, u_{\eta\eta\eta\eta} = \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4}, v_\eta = \frac{\partial v}{\partial \eta}, v_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, v_{\eta\eta\eta} = \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3}, v_{\eta\eta\eta\eta} = \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4}, f_F = \frac{\partial f}{\partial F}, f_{F^{(1)}} = \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}}, f_{F^{(2)}} = \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}}, f_{F^{(3)}} = \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}}$.

To satisfy the endpoint boundary conditions at $\eta = 1$ as shown in Eqs. (31), the following function K needs to be minimized:

$$K(b, c) = (F(1, b, c) - R)^2 + (F^{(1)}(1, b, c) - 0)^2 \tag{41}$$

An algorithm for calculating the zeros b^* and c^* of Eq. (41) can be implemented. The algorithm requires updating the initial guesses as follows:

$$\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}_n - [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F(1, b, c) - R \\ F^{(1)}(1, b, c) - 0 \end{bmatrix}_n \tag{42}$$

where n is the iteration index and $[J]^{-1}$ is the inverted Jacobian matrix. The Jacobian itself is defined as:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial b} & \frac{\partial K_1}{\partial c} \\ \frac{\partial K_2}{\partial b} & \frac{\partial K_2}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1, b, c) & v(1, b, c) \\ u_\eta(1, b, c) & v_\eta(1, b, c) \end{bmatrix} \tag{43}$$

where $K_1 = F(1, b, c) - R$ and $K_2 = F^{(1)}(1, b, c) - 0$.

It is important to note that the inverted Jacobian matrix $[J]^{-1}$ can be defined if and only if $\det J \neq 0$. In other terms, the solution of the problem under study is conditioned by the relation $\det J \neq 0$, which becomes in light of Eq. (43) as follows: $\det J = u(1, b, c)v_\eta(1, b, c) - u_\eta(1, b, c)v(1, b, c) \neq 0$. In this work, this relation is satisfied in an iterative fashion for each computation step before saving the solution.

Considering Eqs. (36), the initial conditions corresponding to the differential equation satisfied by the function u are:

$$\begin{aligned} u(0, b, c) &= 0 \\ u_\eta(0, b, c) &= 1 \\ u_{\eta\eta}(0, b, c) &= 0 \\ u_{\eta\eta\eta}(0, b, c) &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

while the differential equation verified by the function v is solved subject to the following initial conditions:

$$\begin{aligned} v(0, b, c) &= 0 \\ v_\eta(0, b, c) &= 0 \\ v_{\eta\eta}(0, b, c) &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

$$v_{\eta\eta\eta}(0, b, c) = 1$$

At this stage, it appears that the differential Eq. (23) and boundary conditions (31) are transformed into three coupled ordinary differential Eqs. (32), (39) and (40) with initial conditions (33), (44) and (45). The initial value problem is solved using the fourth-order Runge-Kutta integration by assigning twelve variables to represent F, u, v , and their respective derivatives as follows:

$$\mathbf{Y} = [F \ F^{(1)} \ F^{(2)} \ F^{(3)} \ u \ u_\eta \ u_{\eta\eta} \ u_{\eta\eta\eta} \ v_\eta \ v_{\eta\eta} \ v_{\eta\eta\eta}]^T \tag{46}$$

The associated initial conditions are given as:

$$\mathbf{Y}(0) = [0 \ b \ 0 \ c \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \tag{47}$$

To summarize, since two of the four auxiliary conditions (31) are of the boundary-value type, the numerical solution becomes dependent upon two initial guesses b and c . To derive the solutions, the two-point boundary-value problem which consists of the ordinary differential Eq. (23) with boundary conditions (31) governed by the single variable η is transformed in order to be described by three variables that are the two guesses b, c and η . More precisely, it is important to note that the described numerical method is devoted to solving a two-point boundary-value problem transformed into an initial value problem equivalent itself to a resulting set of twelve coupled first-order ordinary differential equations with two unspecified start-up conditions. In seeking the successful initial guesses b^* and c^* , an optimization problem type is solved.

It is relevant to note that the shooting method associated with the fourth-order Runge-Kutta algorithm is a rapidly converging numerical approach that many scientists are making increasing use for solving two-point boundary-value problems, such that some scientists consider the solutions obtained as exact [10,11,13,29].

5. Numerical results and discussion

Since the problem contains two main control parameters R and α , the solutions in terms of velocity components, pressure gradients and streamlines are presented for low, moderate and high Reynolds numbers under different values of the expansion or contraction ratio.

5.1. Velocity profiles

The radial velocity is presented for low, moderate and high Reynolds numbers under different values of the expansion or contraction ratio in Figs. 2, 3 and 4. It appears that, a rapid expansion in volume of the flow domain creates flow reversal in the case of low injection as shown in Fig. 2. More precisely, the expansion of the flow domain which manifests itself as positive values of the nondimensional parameter α causes some regions of negative values of V_r^* . Indeed, Fig. 2 shows that, for a small value of the Reynolds number $R = 3$, the displacement of the flow borders corresponding to high values of the expansion ratio $\alpha = 50$ and $\alpha = 100$, causes the fluid to move in the opposite direction of the primary motion in some regions where the radial velocity is negative. In fact, the results from the numerical integration reveal that flow reversal seems to occur, in all the cases, when the relative injection ratio α/R exceeds the value of 10. In the case of low injection which corresponds to small Reynolds numbers, the flow reverses in order to cause the fluid

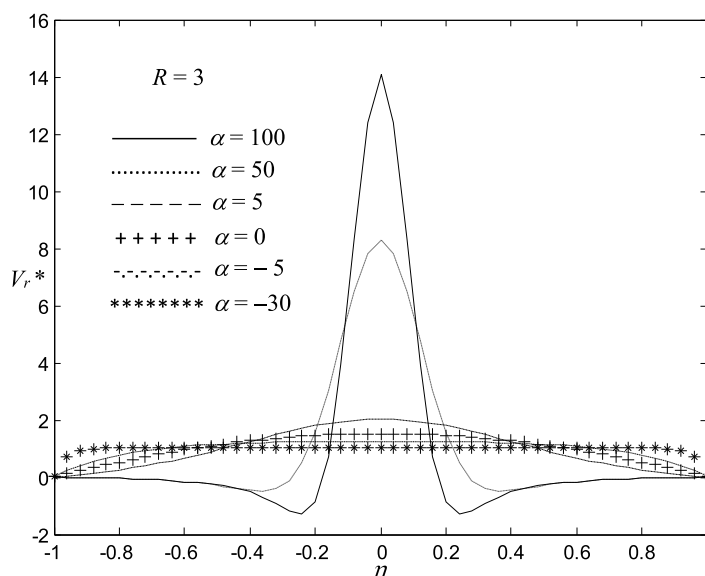


Fig. 2. Radial velocity component for a fixed low Reynolds number $R = 3$, under different values of the expansion or contraction ratio.

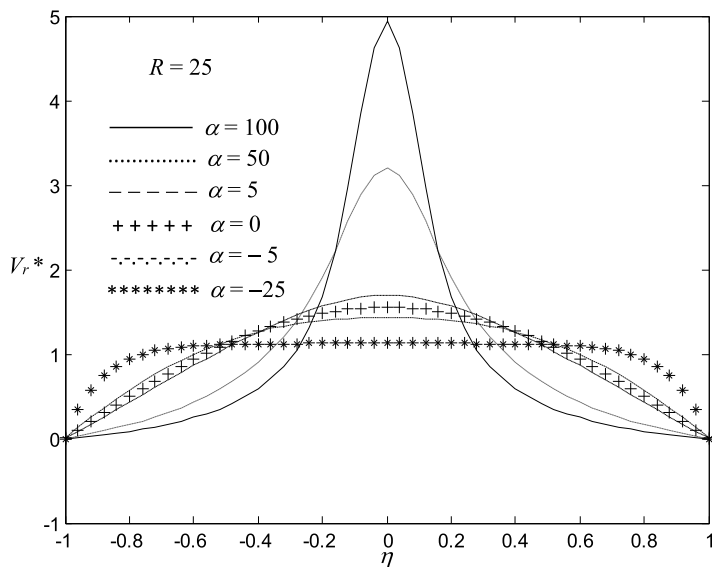


Fig. 3. Radial velocity component for a moderate Reynolds number $R = 25$, under different values of the expansion or contraction ratio.

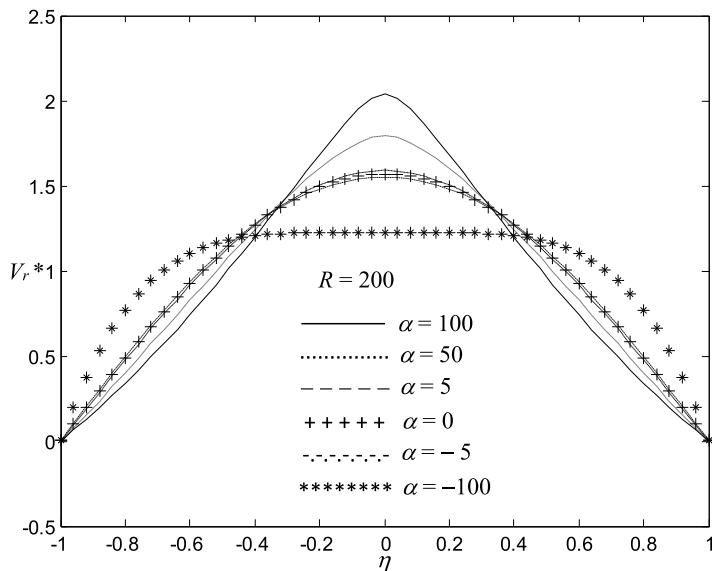


Fig. 4. Radial velocity component for a high Reynolds number $R = 200$, under different values of the expansion or contraction ratio.

to occupy the empty space created by the process of expansion in volume of the flow domain. Another physical significance of this scenario is that, flow reversal develops in an attempt to compensate the mass deficiency caused by the expansion of the flow domain. This expansion of the flow domain does not change the direction of the fluid motion in the cases of moderate and high Reynolds numbers as shown in Figs. 3 and 4, respectively. It follows that, moderate and high injections cause the fluid to keep its primary motion under different values of the expansion or contraction ratio. In other words, the increase in the Reynolds number involves the disappearance of the reverse flow within the flow domain. In all the cases, Figs. 2, 3 and 4 show that, the radial velocity V_r^* increases with α around the middle of the flow domain, while a decrease is observed near the walls. In addition, the contraction in volume of the flow domain, which manifests itself as negative values of the nondimensional parameter α , causes the flattening of the curves related to the radial velocity profile for all the Reynolds numbers. At this stage, it is important to note that the increase in the Reynolds number prevents the manifestation of the reverse flow for various values of the parameter α , but does not have any influence on the flattening of the radial velocity curves caused by the reduction of the flow domain.

For low, moderate and high values of the Reynolds number R , the profiles of the axial or normal velocity V_z^* are respectively plotted in Figs. 5, 6 and 7 for different expansion or contraction ratios α . Indeed, Fig. 5 reveals that the regions where the flow reverses in Fig. 2 are those where the magnitude of the axial velocity exceeds its value at walls for the same values of the control parameters.

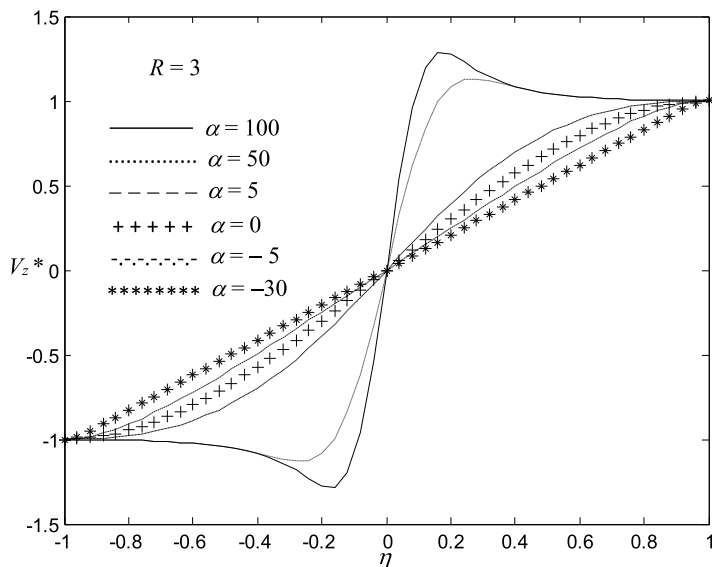


Fig. 5. Axial or normal velocity component for a fixed low Reynolds number $R = 3$, under different values of the expansion or contraction ratio.

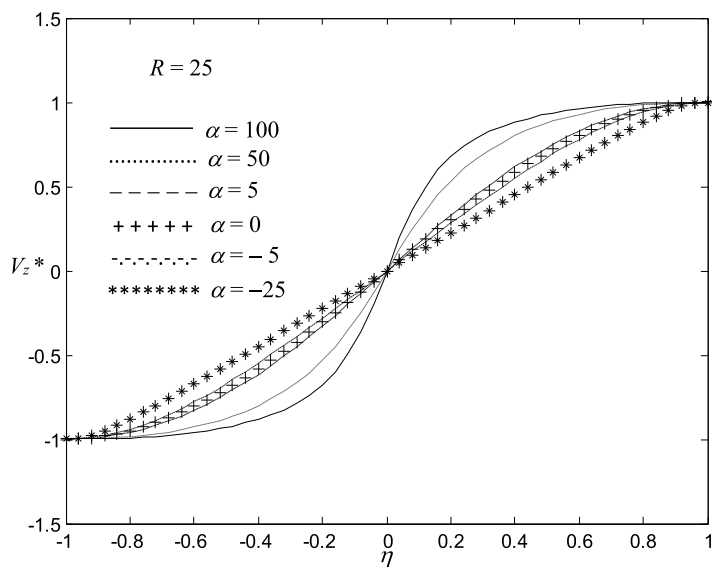


Fig. 6. Axial or normal velocity component for a moderate Reynolds number $R = 25$, under different values of the expansion or contraction ratio.

Thus, this behavior of the magnitude of the axial velocity exceeding its value at walls which is more highlighted by increasing the expansion ratio provides from the entrainment motion that forces the fluid particles to move back in order to occupy the empty space created by the increase in volume due to the growth of the distance between the walls of the flow domain. However, Figs. 6 and 7 show that by increasing the Reynolds number, the importance of the expansion ratio in creating the regions of the axial velocity exceeding its value at walls diminishes. On the other hand, for a low injection Reynolds number in light of Fig. 5, the axial velocity becomes increasingly more linear due to the reduction of the flow domain that manifests itself as negative values of the parameter α . For moderate and high Reynolds numbers according to Figs. 6 and 7, the curves plotted under different values of the parameter α tend to a same constant profile indistinguishable from the inviscid Taylor profile given by $V_z^* = \sin(\pi\eta/2)$ [33].

5.2. Pressure gradients

The axial or normal pressure gradients corresponding respectively to the expansion and contraction of the flow domain present different behaviors. More precisely, the increase in the expansion ratio pertaining to positive values of α gives rise to the curves of the function $p^{*(1)}(\eta)$ presenting an inflection region around the middle of the flow domain, while the growth of the contraction ratio

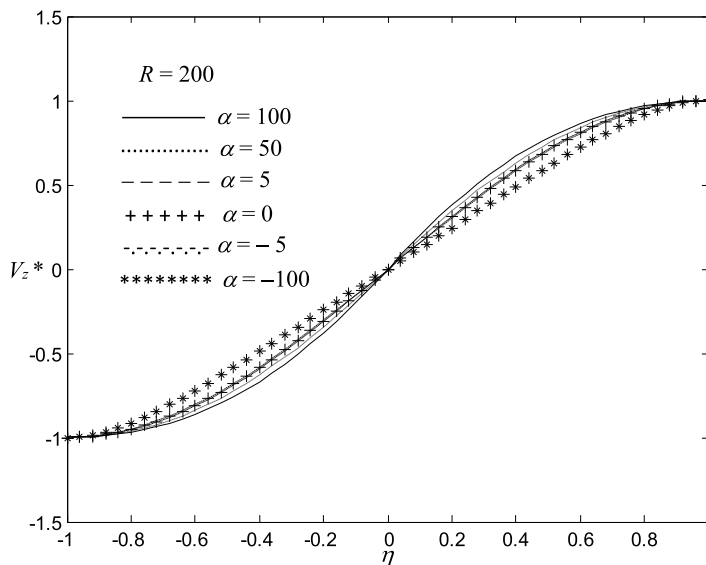


Fig. 7. Axial or normal velocity component for a high Reynolds number $R = 200$, under different values of the expansion or contraction ratio.

corresponding to negative values of α causes a linear behavior of this function for a low Reynolds number as shown in Fig. 8. Moreover, for great positive values of the parameter α , the axial pressure gradient decreases, while an increase is observed in the case of great negative values of α . In light of Fig. 8, the movement of the fluid which develops in the case of fixed porous walls corresponding to $\alpha = 0$ reveals itself as the mean state of the flow under study. The presentation of the case corresponding to $\alpha = 0$ in Fig. 8 enables to observe how the phenomena of the expansion and contraction in volume of the flow domain affect the dynamics of the fluid. This means state can also be characterized as a reference from which the movement of the fluid between two orthogonally moving porous discs is investigated.

It is convenient to relate the behavior of the function $p^{*(1)}(\eta)$ to the described velocity profiles due to the fact that the pressure gradient intervenes in the formulation of the momentum conservation. Indeed, it appears that the flattening of the radial velocity profile and the linear behavior of the axial velocity are related to a linear variation of the axial pressure gradient for low Reynolds numbers. The behavior of the axial pressure gradient particularly changes with the increase in the Reynolds number for all the values of the parameter α as shown in Figs. 9 and 10. In fact, the change that the axial pressure gradient undergoes is the oscillatory behavior exhibited by the function $p^{*(1)}(\eta)$ under high injection Reynolds numbers for all the values of the parameter α as shown in Fig. 10. At this stage, it is important to note that, this oscillatory behavior related to high values of R as shown in Fig. 10, as well as the inflection region observed for high expansion ratios at a fixed low Reynolds number as presented in Fig. 8 are due to the symmetry established inside the flow domain. So, the distribution of the axial pressure gradient is in accordance with the sandwiched flow, since the fluid is equally distributed on both sides of the circular midsection of the space containing the fluid in motion.

5.3. Streamlines

The streamlines also known as the fluid particle trajectories which represent the flow patterns for the movement of the fluid under study are plotted in Fig. 11 for a small Reynolds number in the three cases of fixed walls, high expansion and moderate contraction. In fact, the flow characteristics corresponding to the high contraction are not presented enough, because in many cases, no change is observed between moderate and high contractions from the results of the numerical integration.

In Fig. 11, a streamline curvature is observed near the midsection of the flow domain for a high expansion ratio due to flow reversal, while the fluid particles keep the direction of the primary motion when the porous discs are fixed and when the distance between the two circular walls is reduced. Due to the fluid injection phenomenon that occurs at walls and the no slip condition established through the boundary conditions, the movement of the fluid particles entering in the flow domain is perpendicular to the walls. Another explanation of this described behavior observed in Fig. 11 is that, the motion of the fluid in the close vicinity of the walls is essentially axial or normal. However, far from the walls after entering in the flow domain, the movement of the fluid particles ceases to be orthogonal to the borders, because of the appearance of another velocity component known as the radial velocity. In particular, according to Fig. 11, due to a high expansion, the streamlines plotted for $\alpha = 100$ show that the flow does not rapidly cease to be in the axial or normal direction after the fluid injection in the flow domain as in the cases of $\alpha = 0$ and $\alpha = -20$, because of flow reversal, also known as the backward flow that occurs by leading the fluid to move back in order to occupy the empty space created by the volume expansion process. In light of Fig. 11, the set of the streamlines is far from the walls and close to the circular midsection of the space between the two porous discs, in the case of high expansion, while the set of the streamlines pertaining to the contraction and fixed wall cases is far from the circular midsection of the flow domain and close to the porous walls. On the other hand, for moderate and high

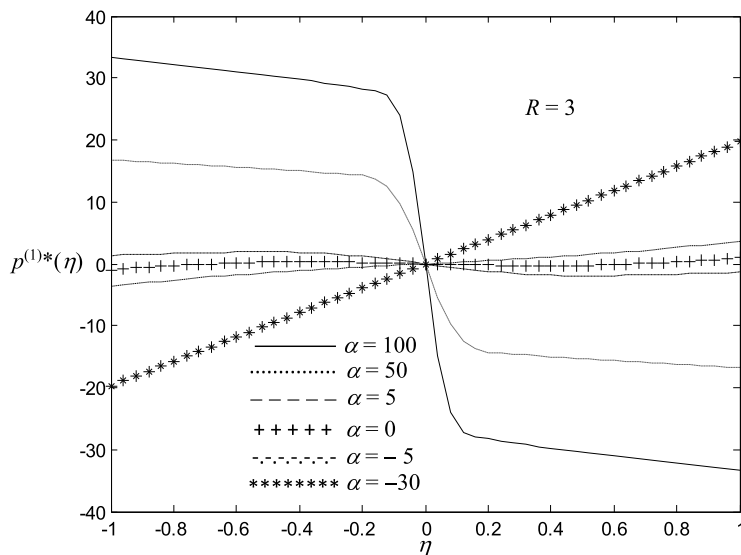


Fig. 8. Axial or normal pressure gradient for a fixed low Reynolds number $R = 3$, under different values of the expansion or contraction ratio.

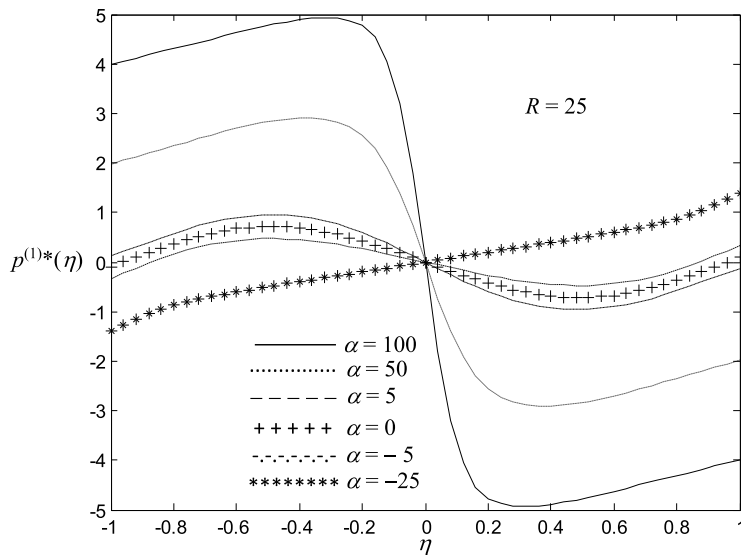


Fig. 9. Axial or normal pressure gradient for a moderate Reynolds number $R = 25$, under different values of the expansion or contraction ratio.

values of the Reynolds number, as the backward flow is destroyed, the streamlines plotted in Figs. 12 and 13 are related to fluid particles that keep the primary direction of motion.

6. Conclusion

The dynamics of a viscous fluid is investigated in a geometric region bounded by two parallel porous discs, such that the distance between the two permeable circular surfaces is small compared to their equal radii which tend to infinity in order to neglect the influence of the end in the radial direction on the fluid motion. The axisymmetric flow is induced by injection inside the flow domain that undergoes an increase or a decrease in volume due respectively to the growth or the reduction of the distance between the two porous walls caused by the displacement of the discs along the axis passing perpendicular to the midpoints of their surfaces. Hence, in this work, the two discs are forced to move in opposite directions along an axis which passes perpendicular to the midpoints of their respective surfaces.

The mathematical model of the flow consists of the continuity equation and the Navier-Stokes equations by assuming respectively the conservations of mass and momentum within the flow domain. Due to the incompressibility of the fluid and the fact that the velocity field has two components, the stream function is prescribed in the governing equations in order to obtain the vorticity

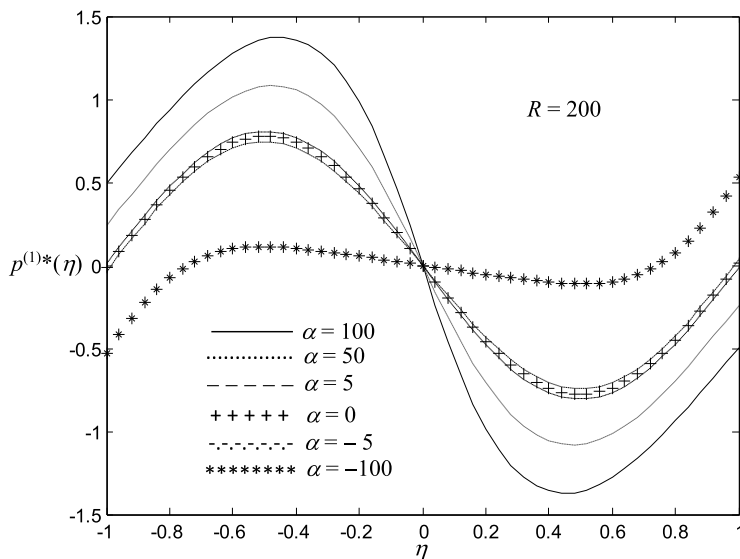


Fig. 10. Axial or normal pressure gradient for a high Reynolds number $R = 200$, under different values of the expansion or contraction ratio.

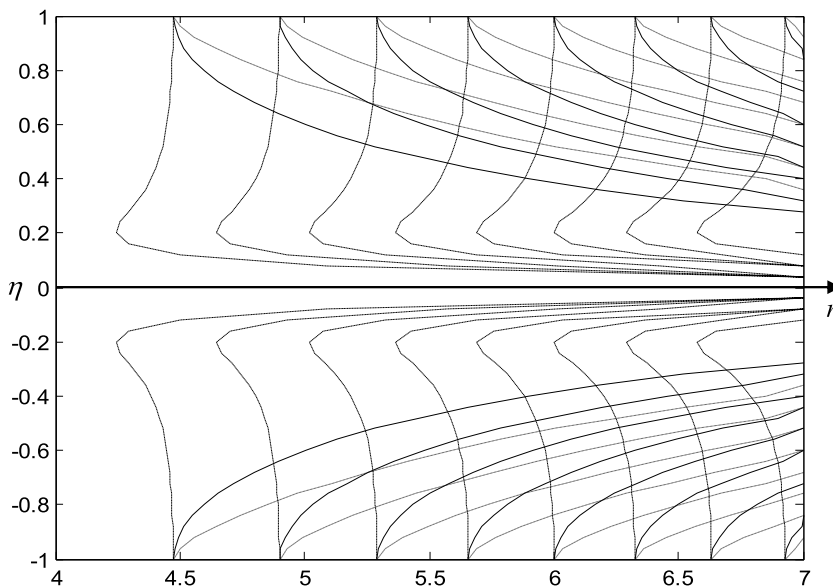


Fig. 11. Streamlines corresponding to a low injection Reynolds number $R = 5$, at fixed walls represented by the full lines for $\alpha = 0$, and in the case of high expansion denoted by the dashed lines for $\alpha = 100$, as well as in the case of a moderate contraction as shown by the dotted lines for $\alpha = -20$.

transport equation by applying the curl of the momentum equation. Thus, the resulting problem is described by a partial differential equation satisfied by the stream function. Taking into account the geometry of the region between the two discs and the physical properties of the working fluid, as well as the boundary conditions, a similarity method is used in order to transform the partial differential equation satisfied by the stream function into a nonlinear ordinary differential equation describing the same flow problem that incorporates a nondimensional quantity η which combines both space and time variables. The nondimensional formulation of the problem gives rise to two main control parameters, notably the Reynolds number R and the expansion or contraction ratio α influencing the solutions of the problem in terms of velocity profiles, pressure gradients and streamlines.

The shooting method associated with the fourth-order Runge-Kutta algorithm is used to achieve the numerical solutions of the nonlinear ordinary differential equation with boundary conditions expressed as a two-point boundary-value problem. For low, moderate and high Reynolds numbers, the flow characteristics are presented under different values of the expansion or contraction ratio.

It is found that, a high expansion ratio gives rise to flow reversal in an attempt to occupy the empty space created by the growth in volume of the geometric domain containing the fluid in motion when the Reynolds number is low. In this case of a small injection

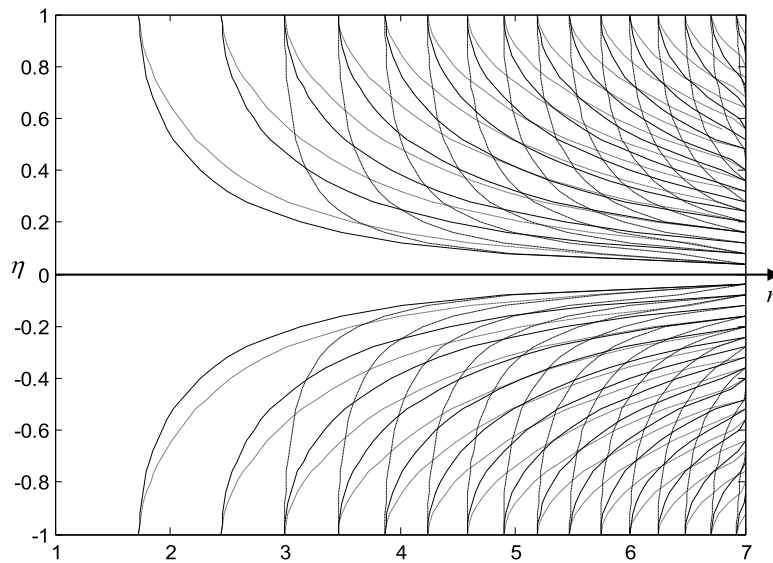


Fig. 12. Streamlines corresponding to a moderate Reynolds number $R = 25$, at fixed walls represented by the full lines for $\alpha = 0$, and in the case of high expansion denoted by the dashed lines for $\alpha = 100$, as well as in the case of a moderate contraction as shown by the dotted lines for $\alpha = -20$.

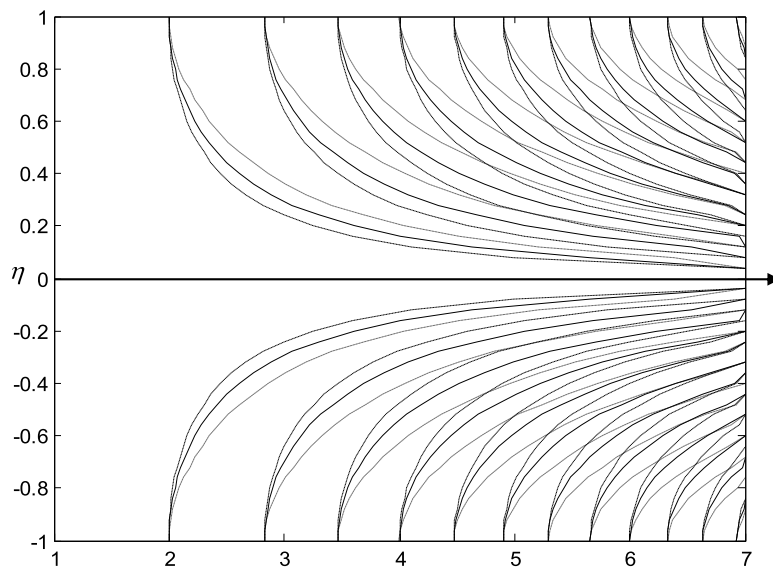


Fig. 13. Streamlines corresponding to a high Reynolds number $R = 200$, at fixed walls represented by the full lines for $\alpha = 0$, and in the case of high expansion denoted by the dashed lines for $\alpha = 100$, as well as in the case of high contraction as shown by the dotted lines for $\alpha = -100$.

Reynolds number and a high expansion ratio, the axial pressure gradient decreases inside the flow domain and presents an inflection region due to the symmetry of the sandwiched flow under study. Flow reversal, also known as the backward flow is destroyed for high values of the Reynolds number which cause the fluid to keep its primary direction of motion in light of the streamline plots. The increase in the contraction ratio causes a linear profile of the axial velocity at a given low injection Reynolds number and involves the flattening of the curves pertaining to the radial velocity for all the Reynolds numbers, while the great values of R give rise to an oscillatory behavior of the axial pressure gradient for all the values of the parameter α .

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgement

The authors would like to express their gratitude to the anonymous Reviewers for the corrections they have made and the valuable comments they have suggested for improving the quality of the paper.

References

- [1] A.S. Berman, Laminar flow in channels with porous walls, *J. Appl. Phys.* 24 (1953) 1232–1235.
- [2] M.M. Nganbe II, E. Ngo Nyobe, J. Hona, E. Pemha, Heat transfer and circular flow around a hydrodynamic turning point through a porous annular tube, *Chin. J. Phys.* 61 (2019) 316–335.
- [3] G.D. Raithby, D.C. Knudsen, Hydrodynamic development in a duct with suction and blowing, *J. Appl. Mech.* 41 (1974) 896–902.
- [4] W.A. Robinson, The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls, *J. Eng. Math.* 10 (1976) 23–40.
- [5] M.L. Martins-Costa, R.M. Saldanha da Gama, S. Frey, Modeling of a generalized newtonian flow through channels with permeable wall, *Mech. Res. Commun.* 27 (2000) 707–712.
- [6] S. Ferro, G. Gnani, Spatial stability of similarity solutions for viscous flows in channels with porous walls, *Phys. Fluids* 12 (2000) 797–802.
- [7] G. Gnani S. Ferro, Effect of temperature-dependent viscosity in channels with porous walls, *Phys. Fluids* 14 (2002) 839–849.
- [8] M.B. Zaturka, P.G. Drazin, W.H.H. Banks, On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls, *Fluid Dyn. Res.* 4 (1988) 151–178.
- [9] A.D. MacGillivray, C. Lu, Asymptotic solution of a laminar flow in a porous channel with large suction: a nonlinear turning point problem, *Methods Appl. Anal.* 1 (1994) 229–248.
- [10] S.M. Cox, Two-dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous walls, *J. Fluid Mech.* 27 (1991) 1–33.
- [11] V. Nyemb Nsoga, J. Hona, E. Pemha, Numerical simulation of heat distribution with temperature-dependent thermal conductivity in a two-dimensional liquid flow, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 18 (2017) 507–513.
- [12] M.B. Zaturka, W.H.H. Banks, Suction-driven flow in a porous pipe, *J. Appl. Math. Mech. (ZAMM)* 75 (1995) 21–30.
- [13] W.H.H. Banks, M.B. Zaturka, On flow through a porous annular pipe, *Phys. Fluids A* 4 (1992) 1131–1141.
- [14] J. Majdalani, G.A. Flandro, The oscillatory pipe flow with arbitrary wall injection, *Proc. R. Soc. Lond. A* 458 (2002) 1621–1651.
- [15] J. Hona, E. Ngo Nyobe, E. Pemha, Dynamic behavior of a steady flow in an annular tube with porous walls at different temperatures, in: *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 19, 2009, pp. 2939–2951.
- [16] J. Hona, E. Ngo Nyobe, E. Pemha, Creeping flow with non-uniform viscosity in a permeable industrial conduct, *Int. J. Eng. Syst. Modell. Simul.* 8 (2016) 183–194.
- [17] J. Hona, M.M. Nganbe, Modelling and simulation of an industrial flow between two moving permeable surfaces, *Int. J. Eng. Syst. Modell. Simul.* 9 (2017) 177–187.
- [18] E. Magyari, B. Keller, Exact solutions for self-similar boundary-layer flows induced by permeable stretching walls, *Eur. J. Mech. B Fluids* 19 (2000) 109–122.
- [19] P. Watson, W.H.H. Banks, M.B. Zaturka, P.G. Drazin, Laminar channel flow driven by accelerating walls, *Eur. J. Appl. Math.* 2 (1991) 359–385.
- [20] E.B.B. Watson, W.H.H. Banks, M.B. Zaturka, P.G. Drazin, On transition to chaos in two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls, *J. Fluid Mech.* 212 (1990) 451–485.
- [21] J.F. Brady, A. Acrivos, Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity: an exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow, *J. Fluid Mech.* 112 (1981) 127–150.
- [22] S. Dinarvand, M.M. Rashidi, A reliable treatment of a homotopy analysis method for two-dimensional viscous flow in a rectangular domain bounded by two moving porous walls, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 11 (2010) 1502–1512.
- [23] J. Majdalani, C. Zhou, Moderate-to-large injection and suction driven channel flows with expanding and contracting walls, *J. Appl. Math. Mech. (ZAMM)* 83 (2003) 181–196.
- [24] C. Zhou, J. Majdalani, Improved mean-flow solution for slab rocket motors with regressing walls, *J. Propuls. Power* 18 (2002) 703–711.
- [25] Y. Sun, P. Lin, L. Li, Temporal stability analysis for multiple similarity solutions of viscous incompressible flows in porous channels with moving walls, *Appl. Math. Model.* 77 (2020) 738–755.
- [26] N. Bildik, A. Konuralp, The use of variational iteration method, differential transform method and adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 7 (2006) 65–70.
- [27] W.F. Ames, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1977. Second ED.
- [28] A.B. Usov, Finite-difference method for the navier-stokes equations in a variable domain with curved boundaries, *Comput. Math. Math. Phys.* 48 (2008) 464–476.
- [29] T. Fang, J. Zhang, Flow between two stretchable disks-an exact solution of the navier-stokes equations, *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 35 (2008) 892–895.
- [30] M. Goto, S. Uchida, Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall, *Trans. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci.* 33 (1990) 14–27.
- [31] G.P. Sutton, *Rocket Propulsion Elements*, 6th ed., Wiley, New York, 1992.
- [32] R.C. Reid, J.M. Prausnitz, B.E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, 4th Ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
- [33] G.I. Taylor, Fluid flow in regions bounded by porous surfaces, *Proc. R. Soc. Lond.* 234 (1956) 456–475.