

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix – Travail – Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES TECHNOLOGIES
ET GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN PHYSIQUE ET APPLICATIONS



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace – Work – Fatherland

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR PHYSICS AND APPLICATIONS

**SUR L'EXISTENCE ET LA DETERMINATION D'UN
ECOULEMENT LAMINAIRE DE FLUIDE INCOMPRESSIBLE DANS
LE PLAN POLAIRE D'UNE CONDUITE ANNULAIRE POREUSE**

THESE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Doctorat/Ph.D
Spécialité : Mécanique, Matériaux et Structures
LABORATOIRE DE MECANIQUE APPLIQUEE ET D'HYDRAULIQUE

Par :

MAKON Noé Richard

Matricule : 12W0827

Titulaire du Master en Physique



Devant le jury constitué ainsi qu'il suit :

Président : TAMO TATIETSE Thomas, Professeur, UYI

Rapporteur : NGO NYOBE Elisabeth, Maître de Conférences, UYI

Membres : PEMHA Elkana, Professeur, UYI

NDJAKA Jean-Marie Bienvenu, Professeur, UYI

ESSIMBI ZOBO Bernard, Professeur, UYI

NJEUENA Ebénézer, Professeur U. Douala

NGOHE-EKAM Paul S., Maître de Conférences, UYI

Année 2022



DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THÈSE DE
DOCTORAT/PhD

Nous soussignés, Professeur **TAMO TATIETSE Thomas** et Professeur **ESSIMBI ZOBO Bernard**, respectivement Président et Examineur du jury de la Thèse de Doctorat/PhD de Monsieur **MAKON Noé Richard**, Matricule **12W0827**, préparée sous la direction du Professeur **NGO NYOBE Elisabeth** intitulée : « **SUR L'EXISTENCE ET LA DETERMINATION D'UN ECOULEMENT LAMINAIRE DE FLUIDE INCOMPRESSIBLE DANS LE PLAN POLAIRE D'UNE CONDUITE ANNULAIRE POREUSE** », soutenue le **lundi, 18 Juillet 2022**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/PhD en Physique, Spécialité **Mécanique, Matériaux et Structures**, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le 28/07/2022.....

Examineur

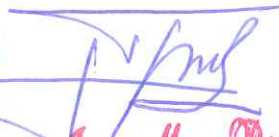
Président du jury


Pr. ESSIMBI ZOBO Bernard


Pr. TAMO TATIETSE Thomas



Le Chef de Département de Physique


Ndjaka Jean-Marie Biomvumu
Professeur

DEDICACE

DEDICACE

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut. Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect et la reconnaissance. Aussi, c'est tout simplement que :

Je dédie cette thèse,

A l'éternel Dieu Tout Puissant Créateur du Ciel et de la Terre pour sa grâce protection et bénédiction qui ne cessent d'être impérissables envers moi.

REMERCIEMENTS

REMERCIEMENTS

Je rends infiniment grâce à Dieu tout Puissant pour la santé et la sagesse qu'il m'a accordées afin de pouvoir réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer, ma profonde reconnaissance et ma grande estime à mon directeur de thèse, **Pr. NGO NYOBE Elisabeth** pour le grand intérêt qu'elle a porté à mon travail en me fournissant tous les outils nécessaires. Avec abnégation, et continuité, elle a suivi pas à pas la structuration de ce mémoire. Ses critiques, suggestions et encouragements m'ont été d'un grand apport. Son amour du travail, sa disponibilité, ses conseils et le bon climat dans lequel cette recherche a été menée, ont été pour moi une aide inestimable et déterminante dans l'achèvement de la présente thèse. Qu'elle soit ici très vivement remerciée.

Je remercie également le **Professeur PEMHA Elkana**, professeur titulaire en Génie Mécanique pour m'avoir accepté comme son fils au sein du laboratoire de Mécanique Appliquée et Hydraulique de l'Université de Yaoundé I qu'il a créé et dirigé depuis sa création en 2001. Pour sa disponibilité chaque fois que j'ai sollicité son aide, pour ses conseils, ses encouragements, sa rigueur et aussi ses terribles blagues, qu'il veuille ici trouver l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie tous les **membres du jury** (Pré-soutenance, Auditions et Soutenance), pour avoir bien voulu donner de leur temps précieux pour lire ce travail et accepter de faire partie des examinateurs. Qu'ils en soient particulièrement remerciés.

Je remercie le Chef de Département de Physique, le **Professeur NDJAKA Jean-Marie Bienvenu** pour avoir réuni toutes les conditions administratives pour que mon dossier de thèse puisse être diligenté et connaître un avis favorable.

Je tiens à remercier les coordonnateurs, le **Professeur PEGNYEMB Dieudonné** et le **Professeur OWONO OWONO Luc Calvin** respectivement

du Centre de Recherche et de Formation Doctorale, et l'Unité de Formation et de Recherche de Physique et Applications, pour leurs services au profit de la recherche et pour avoir mis sur pied des nouvelles réformes administratives permettant de diligenter les dossiers.

Je remercie le **Dr. LAMARA Maurice** pour sa disponibilité, tous ses précieux conseils et les discussions constructives que nous avons eues tout au long de mes années de thèse. Je n'oublie pas le temps qu'il a consacré pour l'examen de cette thèse. Qu'il en soit ainsi remercié.

Mes remerciements vont à l'endroit de tous les enseignants de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I en général et en particulier, à tous les enseignants du Département de Physique pour toute leur contribution durant mes années passées au sein de leur contrôle, qu'ils soient vivement remerciés.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes, pour leur soutien et aide dans la réalisation de ce mémoire de thèse :

A ma très chère mère **NGO MBOCK Friède**, autant de phrases aussi expressives soient-elles ne sauraient montrer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pour toi. Tu m'as comblé avec ta tendresse et affection tout au long de mon parcours. Tu n'as cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, tu as toujours été présente à mes côtés pour me consoler quand il fallait, toute ton économie a toujours été mise à ma disposition. En ce jour mémorable, pour moi ainsi que pour toi, reçoit ce travail en signe de ma vive reconnaissance et ma profonde estime. Puisse le tout puissant te donner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.

A mon très cher père **MAKON MAKON**, de tous les pères, tu es le meilleur. Tu as été et tu seras toujours un exemple pour moi par tes qualités humaines, ta persévérance et perfectionnisme. En témoignage de plusieurs d'années de sacrifices, de sollicitudes, d'encouragements et de prières. Pourrais-

tu trouver dans ce travail le fruit de toutes tes peines et tous de tes efforts. En ce jour, j'espère réaliser l'un de tes rêves. Aucune dédicace ne saurait exprimer mes respects, ma reconnaissance et mon profond amour. Puisse Dieu te préserver et te procurer santé et bonheur.

A ma très chère tante **MAKON Hermine**, autant de phrases et expressions aussi éloquents soient-elles ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance. Tu as été et tu seras ma meilleure tante, tu as su m'inculquer le sens de la responsabilité, de l'optimisme et de la confiance en soi face aux difficultés de mes pas vers la réussite. Ta compréhension et tes encouragements sont pour moi le soutien indispensable que tu as su m'apporter. Je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté et ne jamais de te décevoir. Que Dieu le tout puissant te préserve, t'accorde santé, bonheur, quiétude de l'esprit et de te protéger de tout mal.

A mes **frères et sœurs**, je ne saurai traduire sur du papier l'affection que j'ai pour vous, je n'oublierai jamais ces merveilleux moments passés ensemble. Aucune dédicace ne peut exprimer la profondeur des sentiments fraternels et d'amour, d'attachement que j'éprouve à votre égard. Intelligents que vous êtes, j'implore le Dieu tout puissant de vous réserver un avenir meilleur.

Je remercie aussi vivement mes frères du laboratoire **MM. MBAM MBAM Benjamin, BAYIHA Paul, MBOGBA Guy**, pour l'amitié et la fraternité qui nous lient, les précieux conseils qu'ils ont adressés à mon égard, et leur soutien moral pendant la préparation de cette thèse.

J'adresse mes sincères remerciements **à toute ma famille et à tous mes amis**, il me serait difficile de vous citer tous, vous êtes dans mon cœur, affectueusement. Que ce travail soit le symbole de ce que je ressens envers vous. Que Dieu vous bénisse et vous accorde longue vie pleine de joie et de réussite.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES

DEDICACE	i
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIERES	vii
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES ABREVIATIONS	xiv
RESUME	xvi
ABSTRACT	xix
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : REVUE DE LA LITTERATURE	11
I-1 HISTORIQUE DE LA MECANIQUE DES FLUIDES.....	12
I-1-1 Fondement de la mécanique des fluides	12
I-1-2 Evolution de la mécanique des fluides aux temps modernes	14
I-2 DOMAINES D'APPLICATION DE LA MECANIQUE DES FLUIDES.....	20
I-2-1 Domaines d'application modernes	20
I-3 EQUATIONS FONDAMENTALES.....	24
I-3-1 Principe et équation de conservation de la masse.....	24
I-3-2 Principe et équation de conservation de la quantité de mouvement.....	30
I-3-3 Equations de Navier-Stokes.....	34
I-4 ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS ET EXISTENCE DE LA FONCTION DE COURANT	38
CHAPITRE II : MATERIELS ET METHODES	45
II-1 POSITION DU PROBLEME	46
II-2 ANALYSE DES DIFFERENTES CONFIGURATIONS DE MONTAGE	48
II-2-1 Configuration : les deux cylindres intérieur (C_1) et extérieur (C_2)	48
subissent l'injection	48
II-2-2 Configuration : les deux cylindres intérieur (C_1) et extérieur (C_2)	49
subissent la succion	49
II-2-3 Configuration : L'un des cylindres subit la succion du fluide et.....	50
l'autre l'injection.....	50
II-3 RELATION ENTRE LES VITESSES DU FLUIDE SUR LES DEUX CYLINDRES AMONT ET AVAL	53

II-3-1 Equation de conservation de la masse	53
II-4 EQUATION DE VORTICITE.....	57
II-4-1 Existence de la formation de courant.....	57
II-4-2 Obtention de l'équation de vorticité.....	59
(b) Deuxième méthode.....	64
CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION.....	72
III-1 HYPOTHESE DE SOLUTIONS SEMBLABLES DE BERMAN ET NORMALISATION DE BANKS ET ZATURSKA.....	73
III-1-1 Hypothèse pionnière de Berman.....	73
III-1-2 Normalisation de Banks et Zaturska [8].	73
III-2 EQUATIONS ET CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA FONCTION DE COURANT PAR UNITE D'ANGLE POLAIRE F	74
III-2-1 Equation vérifiée par la fonction de courant par unité d'angle	74
polaire F	74
III-2-2 Conditions aux limites	77
III-3 RESOLUTION PAR LA METHODE DE TIR.....	80
III-3-1 Transformation du problème à résoudre en un problème à conditions initiales.....	80
III-3-2 Optimisation sur la borne finale.....	80
III-3-3 Calcul des composantes de la matrice Jacobienne	81
III-4 REMARQUES PRELIMINAIRES.....	87
III-5-1 VALIDATION DU CODE NUMERIQUE.....	88
III-5-2 Résultats de la validation du code numérique.....	91
III-6 TRAJECTOIRES DES PARTICULES DE FLUIDE OU LIGNES DE COURANT.....	92
III-6-1-Lignes de courant inacceptables	95
III-6-2-Lignes de courant acceptables	97
III-7 LA FONCTION DE COURANT PAR UNITE D'ANGLE POLAIRE.....	105
III-8 LES COMPOSANTES DU CHAMP DE VITESSE DANS LE FLUIDE.....	108
III-8-1 La composante radiale du champ de vitesse dans le fluide.....	108
III-8-2 La composante orthoradiale du champ de vitesse dans le fluide.....	111
CONCLUSION GENERALE.....	116
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	120
PUBLICATION ISSUE DE LA THÈSE.....	127

LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES

Figure 1	Sources bibliographiques de la Mécanique des Fluides	19
Figure 2	Diagramme des domaines d'application de la Mécanique des fluides	23
Figure 3	Principe de conservation de la masse	24
Figure 4	Conservation de masse avec débits entrant et sortant	27
Figure 5	Portion de fluide (D) délimitée par une surface (S)	30
Figure 6a	Cylindres coaxiaux à parois poreuses	47
Figure 6b	Coupe transversale du dispositif des deux cylindres coaxiaux à parois poreuses	47
Figure 7a	Les deux cylindres (C_1) et (C_2) subissent l'injection	49
Figure 7b	Les deux cylindres (C_1) et (C_2) subissent la succion	50
Figure 8a	Le cylindre (C_1) subit l'injection et le cylindre (C_2) subit la succion	51
Figure 8b	Le cylindre (C_2) subit l'injection et le cylindre (C_1) subit la succion	52
Figure 9	Courbes comparatives des solutions analytiques et numériques	92
Figure 10a	Lignes de courant inacceptables pour injection (C_1) et succion (C_2) ($K=1$ et $0 < \sigma < 1$) tracées pour $\sigma=0.5$	97
Figure 10b	Lignes de courant inacceptables pour injection (C_2) et succion (C_1) ($K=-1$ et $0 < \sigma < 1$) tracées pour $\sigma=2$	98
Figure 11a	Lignes de courant de l'écoulement radial pour $\sigma=1$, ($K=1$) injection (C_1) et succion (C_2)	96
Figure 11b	Lignes de courant de l'écoulement radial pour $\sigma=1$ ($K=-1$) injection (C_2) et succion (C_1)	96
Figure 12a	Lignes de courant acceptables pour injection (C_1) et succion (C_2), $R_e=2$, $\delta=5/8$, ($K=1, \sigma > 1$), tracées	100

	pour $\sigma = 1.1$	
Figure 12b	Lignes de courant acceptables pour injection (C_1) et suction (C_2), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = 1, \sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 1.5$	100
Figure 12c	Lignes de courant acceptables pour injection (C_1) et suction (C_2), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = 1, \sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 2$	101
Figure 12d	Lignes de courant acceptables pour injection (C_1) et suction (C_2), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = 1, \sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 3$	101
Figure 12e	Lignes de courant acceptables pour injection (C_1) et suction (C_2), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = 1, \sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 4$	102
Figure 12f	Lignes de courant acceptables pour injection (C_1) et suction (C_2), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = 1, \sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 5$	102
Figure 13a	Lignes de courant acceptables pour injection (C_2) et suction (C_1), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = -1, 0 < \sigma < 1$), tracées pour $\sigma = 0.1$	103
Figure 13b	Lignes de courant acceptables pour injection (C_2) et suction (C_1), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = -1, 0 < \sigma < 1$), tracées pour $\sigma = 0.3$	103
Figure 13c	Lignes de courant acceptables pour injection (C_2) et suction (C_1), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = -1, 0 < \sigma < 1$), tracées pour $\sigma = 0.5$	104
Figure 13d	Lignes de courant acceptables pour injection (C_2) et suction (C_1), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = -1, 0 < \sigma < 1$), tracées pour $\sigma = 0.7$	104
Figure 13e	Lignes de courant acceptables pour injection (C_2) et suction (C_1), $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = -1, 0 < \sigma < 1$),	105

	tracées pour $\sigma=0.9$	
Figure 14a	Fonction de courant par unité d'angle polaire de η pour $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$, pour $K=1$ et $\sigma \geq 1$	106
Figure 14b	Fonction de courant par unité d'angle polaire de η pour $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$, pour $K = -1$ et $0 < \sigma \leq 1$	106
Figure 15a	Composante radiale du champ vitesse en fonction de η pour $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$, pour $K = 1$ et $\sigma \geq 1$	109
Figure 15b	Composante radiale du champ vitesse en fonction de η pour $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$, pour $K = -1$ et $0 < \sigma \leq 1$	109
Figure 16a	Composante orthoradiale du champ vitesse par unité d'angle polaire en fonction de η , pour $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$ pour $K=1$ et $\sigma \geq 1$	112
Figure 16b	Composante orthoradiale du champ vitesse par unité d'angle polaire en fonction de η pour $R_e = 2$ et, $\delta = 5/8$ pour $K = -1$ et $0 < \sigma \leq 1$	113

**LISTE DES
ABREVIATIONS**

LISTE DES ABREVIATIONS

MHD :	Magneto hydrodynamique
CFD :	Computertional Fluid Dynamics
CF :	Couche Fluide
EDO :	Equation Différentielle Ordinaire
EDP :	Equation aux Dérivées Partielles
NS :	Navier - Stokes
NM :	Nombre de Mach
CL :	Couche Limite
MF :	Mécanique des Fluides

RESUME

RESUME

Malgré les recherches approfondies déjà effectuées sur les écoulements laminaires à parois poreuses, les écoulements dans le plan polaire n'ont pas encore été étudiés. Dans ce travail, on étudie l'écoulement laminaire polaire d'un fluide incompressible situé dans une conduite annulaire poreuse et entraîné par succion-injection au niveau des parois. Le fluide étant confiné entre les cylindres et ayant une vitesse axiale nulle, nous prouvons que l'écoulement a lieu dans le plan polaire avec conservation de la masse si un écoulement entrant existe dans le même plan pour compenser la masse de fluide extorquée par succion. Ainsi, l'un des cylindres subit la succion et l'autre l'injection. Des conditions aux limites appropriées pour les deux cylindres sont alors trouvées.

Le problème posé dépend du nombre de Reynolds, du rapport d'entrefer de la conduite et de la densité des pores et du rapport de surface des pores. La méthode des solutions semblables nous a permis de transformer l'équation de vorticité obtenue aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre quatre qui est un résultat capital.

La méthode de résolution utilise la méthode de tir comprenant les algorithmes de Runge-Kutta et Newton-Raphson. L'écoulement radial est trouvé comme une solution possible. Lorsque l'écoulement n'est pas radial, les figures des lignes de courant mettent en évidence une zone particulière dans laquelle le fluide est au repos, délimitée par deux lignes de courant singulières sur le cylindre aval. Le champ des vitesses de l'écoulement est déterminé. Les phénomènes physiques liés à l'écoulement sont déduits des résultats obtenus.

MOTS CLES

Ecoulement laminaire dans une conduite annulaire poreuse dans le plan polaire ;
Conservation de la masse avec débits entrant et sortant ;
Equation de vorticité en coordonnées polaires ;

Méthode des solutions semblables ;

Méthode numérique de tir ;

Algorithme d'optimisation de Newton-Raphson.

ABSTRACT

ABSTRACT

Despite the extensive research already done on laminar flows with porous boundaries, polar flows bounded by cylinders have not yet been studied. This paper investigates the polar laminar flow for an incompressible fluid located in a porous annular pipe and driven by suction-injection at the walls. The fluid being confined between the cylinders with zero axial velocity, it is proven that the flow takes place in the polar plane with conservation of mass if an incoming flow exists in the same plane to compensate the mass of fluid extorted by suction. So, one of the cylinders undergoes the suction, and the other the injection. Suitable boundary conditions for the both cylinders are found. The problem depends on the Reynolds number, the pipe gap ratio, and the pore density and surface ratios. The method of similar solutions allowed us to transform the vorticity equation obtained with partial derivatives into a nonlinear ordinary differential equation of order four which is a capital result.

The method of solution utilizes the shooting technique including the Runge-Kutta and Newton-Raphson. Radial flows are found as a possible solution. When the flow is not radial, the patterns of the acceptable streamlines highlight a particular zone in which the fluid is at rest, bounded by two singular streamlines and the downstream cylinder. The flow velocity is determined. Physical understandings of the flow are derived.

KEYWORDS

- Polar laminar flows in porous annular pipes;
- Conservation of mass with incoming and out-coming flow rates;
- Vorticity equation in polar coordinates;
- Similarity-solutions method;
- Numerical shooting technique;
- Optimization by Newton-Raphson algorithm.

INTRODUCTION GENERALE

Un des premiers problèmes d'ingénierie rencontré avec le développement des villes fut l'approvisionnement en eau pour l'usage domestique et pour l'irrigation des cultures. La vie urbaine est possible uniquement si l'eau est abondante. En effet, les recherches archéologiques ont montré que toutes les civilisations préhistoriques prospères avaient investi dans la construction et la maintenance de systèmes de distribution d'eau.

Alors la maîtrise de l'eau, comme l'air, a intéressé des hommes depuis la préhistoire, pour résoudre les problèmes d'irrigation et utiliser la force du vent pour propulser les bateaux. Cette branche de la Physique concernée par les fluides (liquides, gaz et plasmas) est la mécanique des fluides, bien qu'elle constitue une extension de la mécanique rationnelle à une classe de milieux continus dont les déformations peuvent prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. Celle-ci fut largement employée pour des applications quotidiennes pour les problèmes de l'irrigation en agriculture, les canaux, les fontaines, etc.

La sédentarisation des hommes a entraîné la nécessaire invention de moyens de maîtrise de l'eau. L'irrigation à petite échelle serait née vers les années 6500 avant Jésus Christ à la fin du Néolithique et les années 3000 avant Jésus Christ marquent les premières œuvres hydrauliques (canaux, irrigation gravitaire).

A cette époque, certains instruments ont déjà été inventés pour mesurer le niveau des crues, des zones de marécages sont drainées et asséchées, barrages et digues pour se protéger des crues, sont construits sur le Nil, le fleuve jaune et l'Euphrate. Il est possible que les plus vieux aqueducs aient été construits en crête au deuxième millénaire avant Jésus Christ et en Palestine au onzième siècle avant Jésus Christ.

L'étude de la mécanique des fluides ainsi que celle de l'eau et de son comportement remontent au moins à l'époque Grèce antique avec le célèbre savant Archimède (-285 ; -212 avant Jésus Christ), étudié avec les disciples

d'Euclide et en revenant à Syracuse. Celui-ci fut le véritable initiateur de la « mécanique des fluides » ; qui en prenant son bain découvrit le principe qui porte son nom. Reconnu dont ce théorème, qui porte son nom et qui formule ainsi des principes qui sont à l'origine de la statique des fluides notamment avec son principe éponyme. Dans cette même dynamique, Héron d'Alexandrie a poursuivi le travail de la statique des fluides en découvrant lui aussi une autre hypothèse dont le principe de la pression et surtout du débit.

Pendant l'antiquité tardive, certains grands travaux hydrauliques se poursuivent et se raffinent avec des aqueducs, des systèmes de distribution et d'assainissement de l'eau, mais aussi les fontaines et les bains. Ces travaux continuent à être décrits au troisième siècle à Rome par Sextus Lulius Frontin, des techniques utilisées pour le transport de l'eau, des effluents et réorganisent le système d'aqueducs comme la plupart des sciences. L'hydrostatique et l'hydraulique disparaissent en partie de l'Europe pendant le moyen âge, la migration du savoir se faisant de l'ancien empire gréco-romain vers l'empire arabe. L'âge d'or islamique voit d'abord la traduction des œuvres d'Archimède, d'Euclide et la publication par Al-Jazari dans le livre des mécanismes ingénieux décrivant des machines hydrauliques automatiques et perfectionne l'horloge hydraulique ainsi que l'hydrostatique d'Archimède.

Au moyen-âge, l'utilisation du rouage des fluides s'est développée lentement mais sûrement. Les harmonieuses pompes à piston ont été développées pour l'assèchement des mines, les moulins à eau et les moulins à vent ont été améliorés pour résoudre le grain, forger les métaux ou pour réaliser toute autre tâche. Pour la première fois durant l'histoire de l'humanité, d'importants travaux étaient réalisés sans la puissance musculaire d'un homme ou d'un animal. Ces inventions ont généralement été considérées comme à l'origine de la révolution industrielle plus tardive. Là encore, les créateurs de la plupart des avancées sont

inconnus mais les appareillages eux-mêmes ont été très bien documentés par nombreux techniciens.

Du point de vue des édifices hydrauliques si le moyen âge voit la disparition du système d'irrigation et de la Mésopotamie à cause des invasions mongoles provoquant l'effondrement de la population locale. Au *VII^e siècle* sous des travaux du grand canal qui relie Nord et Sud de la Chine ; les lois de l'hydraulique ne s'appliquaient pas sur ces travaux. Les romains utilisaient donc ces applications pour la construction de canaux ouverts et pour la distribution d'eau. C'est au quinzième siècle que la mécanique des fluides est étudiée à nouveau en Europe ; mais en 1452 dans un village de Toscane naquit un enfant dont la vie fut d'une extraordinaire fécondité intellectuelle et qui passa à la postérité pour sa production artistique : Léonard de Vinci ; c'est lui qui le premier analysa la mécanique de la pompe cardiaque et donna une description détaillée de la structure et du fonctionnement des valves du cœur. On l'ignore souvent, mais celui-ci a laissé des notes relatives aux vagues, aux tourbillons, aux corps flottants, aux écoulements dans les tubes et à la machinerie hydraulique. C'est lui qui a conçu, le premier, un parachute, l'anémomètre (pour mesurer les vitesses des vents) et la pompe centrifuge. Il décrit à la fois les multiples types d'écoulements et formule le principe de conservation de masse ou principe de continuité, prenant ainsi la suite de Héron. C'est lui qui jette les fondements de la discipline et introduit de nombreuses notions d'hydrodynamique dont la notion de lignes de courant comprenant intrinsèquement la problématique de résistance à l'écoulement.

La mécanique des fluides est au cœur de nombreux métiers en lien direct avec les défis sociétaux d'efficacité énergétique et de développement, se présentant ainsi sur les applications antiques et modernes mais aussi aux applications futures.

La mécanique des fluides est un sous-ensemble de la mécanique des milieux continus, elle comprend l'étude des gaz et des liquides à l'équilibre et en mouvement, ainsi que l'interaction de ces derniers avec les corps solides. Son importance s'explique par le fondement théorique qu'elle offre à de nombreuses disciplines comme la météorologie, l'aérodynamique, l'hydraulique et l'étude des plasmas.

Au *III^e siècle*, le monde entier comportait les glaciers, de cours d'eau et de cotes pour avoir donné naissance à de nombreuses techniques hydrauliques. Mais il est vrai que d'illustres physiciens et mécaniciens des fluides ont jalonné ces derniers et permis d'aboutir à des réalisations au sein de différents territoires. Les grands corps (ponts et chaussées, eaux et forêts) et les grandes entreprises qui ont pu faire leur dimension dans les grandes réalisations hydrauliques. Ce fut sans doute le cas pour l'ensemble des ouvrages et installations hydrauliques (constructions des aqueducs), des centrales hydrauliques, thermiques et nucléaires pour la mise en place de l'exploitation des grands périmètres d'irrigation, les instabilités dues à la cavitation dans les turbomachines hydrauliques.

Le moyen-âge marque les grandes réalisations de la mécanique des fluides notamment dans le cas d'hydraulique ; l'amplification au niveau de la construction des barrages, des aqueducs, les turbines hydrauliques de la haute chute, les pompes d'accumulation et pompes-turbines réversibles de grande hauteur d'élévation, les pompes alimentaires de chaudières. Depuis le temps des grecs, le rêve d'imiter les oiseaux fut la base des essais de vol qui perdura pendant les siècles. Il faudra attendre la fin du moyen-âge pour que les premières expériences concluantes voient le jour, en 1420 un modèle d'oiseau propulsé par fusée, qui fit un vol de 30 mètres. Ceci témoigne le renforcement de l'aérodynamique, elle contribua à la construction des souffleries, le développement de l'automobile, mais également de la navigation ou du chemin

de fer, aussi dans le cas de la balistique (trajectoire balistique des obus) et du domaine subsonique, supersonique et hypersonique.

Aux temps modernes, le domaine des machines hydrauliques s'améliore de manière intensive. Les constructeurs ont également acquis une position privilégiée dans le cadre du développement des grandes pompes à volute en béton armé (notamment à l'occasion de la mise en œuvre des paliers nucléaires de 1000MW et 1500MW) et des turbines hydrauliques de grande puissance [51-52]. Dans le domaine des ensembles, les techniques d'optimisation présentées sont la plupart originales et fondées sur les outils d'analyse les plus récents. On aurait pu également citer des applications particulières intéressantes dans les secteurs tels que : propulsion navale, l'industrie nucléaire, chimique ou pétrolière. Le domaine de prédilection des méthodes de visualisation est resté longtemps celui des grandes souffleries utilisées pour les recherches en aéronautique [53]. La démythification du laser et l'expansion rapide des méthodes informatiques de traitement d'images ont démocratisé ce type d'analyse, même si l'usage d'un laser de puissance moyenne demeure encore une opération relativement onéreuse et exigeante quelques connaissances en optique.

A partir du moment présent, tout domaine industriel qui met en œuvre un écoulement liquide ou gazeux suffisamment transparent est théoriquement concerné, à condition toutefois que le phénomène étudié se déroule en atmosphère libre ou soit confiné dans une structure également transparente. Les exemples d'application abondent :

- Circulation d'air dans les systèmes de climatisation et de chauffage ;
- Refroidissement aérodynamique ou liquide des machines électriques et thermiques ;
- Ecoulements internes dans les moteurs thermiques, de la chambre de combustion à l'échappement ;

- Ecoulements externes autour des véhicules terrestres (routiers et ferroviaires) ou aériens ;
- Ecoulements atmosphériques ou génie civil et environnement (comportement d'ouvrage au vent, dispersion de polluants).

La variété extrême des domaines d'application se prête mal à un classement ; toutefois, un moyen simple de mettre un peu d'ordre dans ces listes d'exemple, concernant des disciplines aussi diversifiées, consiste à utiliser la nature du fluide et / ou le domaine de vitesse.

De manière synthétique, retenons que les écoulements hydrodynamiques constituent un domaine d'investigation sans problèmes de principes majeurs, les faibles vitesses généralement atteintes, les turbulences modérées font qu'ils se prêtent bien au suivi de traceurs (particules ou colorants). Les cas les plus simples sont ceux pour lesquels le régime laminaire est conservé. Dans cette configuration, de véritables trajectographies (visualisation des filets fluides), sont possibles. L'accès au champ de vitesses est également envisageable, à condition toutefois que l'écoulement soit bidimensionnel ou faiblement tridimensionnel.

La Mécanique des Fluides occupe une place centrale et essentielle dans la formation des mécaniciens et les ingénieurs. Les cours magistraux et travaux pratiques sur la mécanique des fluides font partie intégrante de nombreuses disciplines. Elle est une discipline dont le statut a notamment évolué au cours des dernières décennies. Partie du statut simple de discipline de base pour l'hydraulique et l'aéronautique, la mécanique des fluides s'est avérée champ d'expériences fondamentales pour l'hydrodynamique physique, la physique non linéaire, les mathématiques appliquées, et naturellement la turbulence [54]. Elle est également une des disciplines qui sous-tendent bon nombre d'évolutions technologiques dans la plupart des grands secteurs économiques : transport, énergie renouvelable, génie chimique, environnement, sécurité, aménagement

du territoire, élaboration des matériaux, biomédical. Par ailleurs, elle joue tout aussi un rôle central dans le domaine des sciences de l'univers tels que : météorologie, climatologie, océanographie, planétologie, magnétisme naturel, cosmologie.

Une dernière particularité de la mécanique des fluides tient aux outils d'investigation que cette discipline a su développer, notamment les domaines de la métrologie et de la simulation numérique. Par exemple, il n'est pas rare d'autres domaines tels que la physique non linéaire, les plasmas, l'astrophysique, la chimie, etc..., empruntent à la mécanique des fluides numériques les compétences algorithmiques qu'elle a développées.

Constatant ce large spectre d'intervention, on ne s'étonnera pas que la mécanique des fluides soit aujourd'hui répartie sur plusieurs sections. Une section gère cependant une partie importante, en particulier les développements technologiques, et un certain nombre de sujets propres au cœur de la discipline y sont fortement présents. C'est le cas notamment de la turbulence, un problème clé d'importance fondamentale ; cette dernière y est étudiée dans les conditions significatives vis-à-vis des champs d'application. La turbulence développée qui fait également l'objet d'une attention soutenue, singulièrement dans des situations d'anisotropie (rotation, stratification, magnétisation, ..). Cette meilleure connaissance des écoulements turbulents permet également de tester les différentes modélisations numériques de la turbulence par les diverses méthodes de dissipation, statique et/ou de sous-maille. Il est évident que toute avancée dans la modélisation numérique de la turbulence en configuration réelle constitue un enjeu stratégique pour les applications industrielles actuelles et futures. Ceci nécessite des moyens de diagnostic et de simulation en adéquation avec des champs d'application, permettant d'accéder à une connaissance très fine de la structure des écoulements et des mécanismes mis en jeu. Ces aspects méthodologiques sont fortement présents dans d'autres domaines comme :

L'aéro-acoustique ou acoustique non linéaire qui étudie la génération des ondes acoustiques par les écoulements, leur propagation au sein des écoulements turbulents, ou inversement, la génération d'écoulements par un champ acoustique, dans les microsystèmes en particulier.

De nos jours, la Mécanique des Fluides est utilisée pour modéliser les contraintes des fluides sur certains systèmes tels que : l'étude du ballonnement de gaz dans les containers des gazinières en fonction des vagues, ou encore l'effet de la houle sur la coque des bateaux, la réaction des berges et des digues soumises à une tempête, la circulation automobile (gestion des feux rouges/verts grâce à un modèle continu de mécanique des fluides), celle-ci étudie l'écoulement d'air autour de la voiture sous le gros aileron, l'air se décolle de l'engin et crée un « trou d'air » donc une dépression qui aspire la voiture vers l'arrière, cette même présence d'un aileron créé présente des turbulences chargées de combler ce vide et de diminuer la traînée pour optimiser la vitesse.

Ce travail est consacré à un écoulement laminaire se produisant dans le plan polaire, pour un fluide incompressible situé dans l'entrefer formé par deux cylindres coaxiaux poreux et entraîné par succion-injection à travers les parois, à vitesse constante et uniforme orthogonalement aux parois.

Le but de ce travail est de trouver les conditions qui permettent l'existence de cet écoulement dans le plan polaire avec conservation de la masse et d'en déduire des aperçus physiques de l'écoulement, à nombre de Reynolds et rapport d'entrefer fixés.

Pour une meilleure compréhension de notre travail, nous avons subdivisé notre mémoire de Thèse en trois chapitres, une introduction et une conclusion. Dans le premier chapitre, nous rappelons l'historique de la Mécanique des fluides, ses domaines d'application, les équations fondamentales et les écoulements bidimensionnels. Le chapitre deux est consacré à la position du problème et à sa formulation mathématique. Il contient l'analyse des différentes configurations

schématisant le problème, suivie de la démonstration de l'équation de vorticité. La méthode de tir permet de résoudre cette équation de vorticité et elle est détaillée dans ce chapitre. Dans le troisième chapitre, les résultats obtenus sont présentés et discutés. Les phénomènes physiques liés à l'écoulement sont déduits à partir des résultats trouvés. Le mémoire se termine par une conclusion et des perspectives.

**CHAPITRE I : REVUE DE LA
LITTERATURE**

I-1 HISTORIQUE DE LA MECANIQUE DES FLUIDES

I-1-1 Fondement de la mécanique des fluides

Depuis les travaux pionniers de Berman [1] motivés par une tentative de modélisation de la séparation de l'uranium, les écoulements laminaires de fluides newtoniens incompressibles délimités par des frontières rigides poreuses ont été largement étudiés par de nombreux auteurs à cause de diverses applications de ce type d'écoulements dans un large éventail d'industries, notamment le génie biomédical, l'irrigation agricole, le refroidissement des moteurs-fusées et des moteurs à réaction, l'ingénierie alimentaire, la fabrication de textiles, de papier, de cuir et de caoutchouc. Yuan et Finkelstein [2] ont traité premièrement le problème grâce une solution semblable pour trouver l'écoulement stationnaire dans un tube à section circulaire en utilisant. Une analyse complète des solutions numériques et théoriques pour l'écoulement laminaire dans un tuyau circulaire uniformément poreux avec une succion ou une injection constante à la paroi, remonte à Terrill [3].

Les travaux réalisés sur les parois imperméables par Brady et Acrivos [4] et ceux réalisés par Uchida et Aoki [5] ont joué un rôle important en aidant à connaître les méthodes pouvant accélérer les parois dans le sens longitudinal [4] et dans le sens transversal [5], qui continuent d'être appliquées lorsque les frontières sont poreuses. En appliquant l'approche des parois mobiles utilisées dans [4], Watson et al [6] ont étudié l'écoulement bidimensionnel dans un canal, entraîné symétriquement par des parois poreuses accélérées. Suivant l'approche des parois transversales développée dans [5], Goto et Uchida [7] ont analysé l'écoulement laminaire incompressible dans un tuyau poreux semi-infini dont le rayon varie avec le temps, afin de simuler le champ de vitesse de l'écoulement laminaire dans un moteur de fusée solide idéalisé.

A la lumière de la théorie des systèmes dynamiques, Banks et Zaturka [8] ont présenté les résultats d'un travail approfondi sur l'écoulement laminaire à

travers un tuyau annulaire poreux. Une étude numérique a été menée par Robinson [9] pour établir s'il existe plusieurs solutions pour un écoulement laminaire incompressible stable dans un canal poreux avec une succion uniforme aux deux parois. Les résultats d'une étude pour un écoulement à canal poreux tridimensionnel défini comme un écoulement bidimensionnel auquel se superpose une perturbation finie perpendiculaire, ont été présentés par Zaturka et Banks [10].

Dauenhauer et Majdalani [11] ont étudié l'écoulement dans un canal poreux avec des parois en contraction ou en expansion et une succion ou une injection uniforme. Pour prendre en compte les effets d'une succion-injection instable à travers la paroi d'un tuyau poreux à section circulaire, on cite les travaux de Tsangaris, Kondaxakis et Vlachakis [12]. Des articles ont été consacrés aux écoulements MHD pour un fluide viscoélastique à travers des plaques parallèles poreuses [13] et des tuyaux poreux [14]. Durlofsky et Brady [15], Casalis et Pinceau [16], Ferro et Gnani [17-18] et Griffond et Casalis [19] ont réalisé des travaux sur la stabilité hydrodynamique des écoulements visqueux délimités par des parois poreuses.

Des travaux expérimentaux en laboratoire ont été menés afin de mettre en évidence la richesse de la structure des écoulements laminaires bornés par des parois poreuses. A cet égard, les expériences réalisées par Raithby et Knudsen [20], par Sviridenkov et Yagodkin [21], par Varapaev et Yagodkin [22], et par Barron, Majdalani et Moorhem [23] peuvent être mentionnées.

La renaissance a continué à développer les systèmes fluidiques et les machines tout en améliorant la méthodologie scientifique partout en Europe. Simon Stevin (1548-1620), Galileo Galilée (1564-1642), Edme Mariotte (1620-1684) et Evangelista Torricelli (1608-1647), ont été parmi les premiers à appliquer la méthode des fluides en faisant des recherches sur la distribution de la pression hydrostatique et sur le vide. Ce travail a été intégré et affiné par le brillant

mathématicien Blaise Pascal (1623-1662), dans son « Récit de la grande expérience de l'équilibre des liquides » de 1648, donna le premier, un exposé homogène et bien ordonné de ces principes fondamentaux de l'hydrostatique.

Les manifestations du paradoxe hydrostatique sont utilisées dans l'enseignement des phénomènes. L'une des expériences les plus connues est la crève-tonneau de Pascal. Le moine italien Benedetto Castelli (1557-1644) fut le premier à publier un état sur le principe de continuité des fluides. En parallèle à la formulation des équations de mouvement du solide, Isaac Newton (1643-1727) a appliqué ses lois aux fluides et exploré l'inertie et la résistance des fluides, des jets libres, et à la viscosité dans son ouvrage intitulé «Livre II des principes mathématiques» qui traite des mouvements des corps en des milieux résistants, ne laisse aucun acquis scientifique substantiel. Cependant selon Clifford Truesdell, les travaux de Newton ont fourni à deux disciplines, un programme qui a été suivi pendant cinquante ans. Il faut attendre les travaux d'Alexis Claude Clairant (1713-1765) et Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) pour que commencent à s'établir les lois de la mécanique des fluides. Alors ce léger progrès, bien qu'il soit focalisé sur le domaine technique a donné un très esprit ouvert à la science et celui-ci suit une évolution dans les temps modernes et récents.

I-1-2 Evolution de la mécanique des fluides aux temps modernes

L'inclusion des mathématiques à la Physique a permis à la mécanique des fluides de gagner en profondeur et le travail commun a permis aussi de définir les équations d'énergie et de quantité de mouvement. De ce fait, plusieurs travaux ont été repris durant les siècles suivants avec, en particulier les innovations de Pitot (rendement des machines hydrauliques, tube de Pitot) et Venturi (travaux hydrauliques, construction d'une tuyère à cônes divergents). Cette science maintenant étend ses frontières au-delà de son domaine traditionnel. La recherche hydraulique se développe très largement dans les laboratoires industriels ou universitaires. Aux essais sur modèles réduits, sont

venues s'ajouter les techniques de simulation numérique sur ordinateur et aussi toutes les possibilités de l'électronique.

L'effort s'est concrétisé grâce au Suisse Daniel Bernoulli (1700-1782), d'où le traité de Bernoulli de 1738 « hydrodynamica » qui, probablement, est le premier texte de mécanique des fluides. Il établit des lois applicables aux fluides non visqueux en utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique. La naissance du calcul différentiel permet à Jean d'Alembert (1717-1789) de développer une idée sur les composantes de vitesse et d'accélération, une expression différentielle de la continuité, c'est-à-dire le « paradoxe » de non résistance à l'avancement uniforme. Cette théorie, en 1749 lui a permis d'exposer, en 137 pages, sur les bases de l'hydrodynamique en présentant le principe de la pression interne d'un fluide, du champ de vitesse et des dérivées partielles appliquées aux fluides. Leonhard Euler (1707-1783) complète plus tard l'analyse de d'Alembert sur la pression interne et les équations de dynamique sur des fluides incompressibles.

En 1755 Euler publie ainsi un traité qui donne les équations aux dérivées partielles décrivant les fluides parfaits incompressibles. Ces grands progrès accompagnent ceux de l'analyse par les mathématiciens, ce sont au demeurant les mêmes personnes qui font des mathématiques dans divers domaines et qui analysent les problèmes de mécanique des fluides. Ce sont :

Evangelista Torricelli explique les effets de la pression atmosphérique sur l'hydraulique en utilisant les lois de la similitude et invente le baromètre(1643) [33]. Mais aussi Henri Pitot introduit un instrument pour la mesure des vitesses ; le tube de Pitot (1732) et Bernoulli quant à lui utilise une approche mathématique des écoulements, ce qui le conduit au théorème de Bernoulli(1738) [34].A la même époque Jean d'Alembert introduit la notion de milieu continu et formalise divers problèmes dans son traité de dynamique (1743), dans cette même lancée, Leonhard Euler et Louis Lagrange introduisent

respectivement le calcul infinitésimal avec lequel il écrit les équations d'Euler, première description générale des écoulements (1757) et l'autre la notion d'écoulements à potentiel de vitesse, formalise la notion de lignes de courant et précise la notion d'onde dans un fluide à surface libre (1781) [35].

Le développement de la théorie de la mécanique des fluides jusqu'à la fin du *XVIII^e siècle* a eu un petit impact sur l'ingénierie car les propriétés des fluides et leurs paramètres étaient peu quantifiés. De plus, la plupart des théories étaient uniquement basées sur les extrapolations qui ne pouvaient être utilisées à des fins de design. L'introduction par Henri Navier (1785-1836) en 1820 la notion de frottement sous forme d'un nouveau terme dans les équations mathématiques de mécanique des fluides a donné une forme dynamique sur les équations des fluides. Durant cette même période, Joseph Boussinesque introduit la théorie des eaux courantes ainsi que des écoulements quasi-parallèles avec force de flottaison rencontré en géophysique [36].

Au milieu du dix neuvième siècle, des avancées fondamentales sont apparues sur plusieurs fronts. Le physicien Jean Poiseuille (1799-1869) a précisément mesuré l'écoulement de multiples fluides dans les tubes capillaires et les recherches expérimentales sur le mouvement des liquides tandis que l'allemand Gotthilf Hagen (1797-1884) différencia les flux turbulents et laminaires dans les canalisations. En Angleterre, Lord Osborn Reynolds (1842-1912) poursuit ce travail et introduit le nombre adimensionnel et ce nombre porte alors son nom [37-38]. De la même manière, parallèlement au précédent travail de Navier, George Stokes (1819-1903) compléta des équations générales de la dynamique des fluides avec frottement qui portent son nom et sont alors appelées les équations de Navier-Stokes [39].

La fin du dix neuvième siècle fut remarquable quant à l'expansion de la théorie des fluides par les scientifiques et ingénieurs irlandais et anglais, comprenant en

plus de Reynolds et Stokes, William Thompson [40], Lord Kelvin (1824-1907), Lord Rayleigh (1842-1919) [41-42]. Ces chercheurs ont étudié un grand nombre de problèmes parmi lesquels l'analyse dimensionnelle, l'écoulement irrotationnel, le mouvement vortex et les vagues. Au sens large, leurs travaux ont permis aussi d'explorer le lien entre la mécanique des fluides, la thermodynamique et le transfert de chaleur.

A l'aube du vingtième siècle, deux développements monumentaux ont vu le jour. D'abord, en 1903, les autodidactes frères Wright (Wilbur, 1867-1912 ; Orville, 1871-1948), ont réussi à améliorer expérimentalement les performances d'un avion en appliquant une nouvelle théorie. Leur première invention fut achevée et contenait tous les aspects majeurs des avions modernes. Les équations de Navier-Stokes furent peu utilisées à cette époque car elles étaient trop difficiles à résoudre. Dans un article novateur de 1904, l'allemand Ludwig Prandtl (1875-1979) montra que les écoulements des fluides pouvaient être décomposés en une couche proche de la paroi, la couche limite, où les effets de bords sont importants, et une couche externe où tels effets sont négligeables et où les équations simplifiées d'Euler et Bernoulli peuvent être appliquées [43-44]. Alors que ses étudiants, Theodore Von Karman (1881-1963), Paul Blasius (1883-1970) et d'autres ont construit sur la base de cette théorie des applications d'hydrodynamique et d'aérodynamique [45-47]. Cette période est aussi marquée par l'étude sur le domaine nouveau qui constitue le supersonique, des écoulements en milieu poreux par Henry Darcy, des instabilités et de la turbulence dans les écoulements par Kolmogorov [48-50].

Le milieu du vingtième siècle pourrait être considéré comme l'âge d'or des applications de la mécanique des fluides. Les théories existantes étaient adéquates pour les tâches manuelles et les propriétés et paramètres des fluides étaient bien définis. Tout ceci permit large développement dans les domaines de l'aéronautique, de la chimie, industrielle et du traitement des eaux ; chacun

poussait la mécanique des fluides dans de nouvelles directions. A la fin du *XX^e siècle*, la recherche et le travail étaient dominés par le développement des ordinateurs numériques. La capacité à résoudre des gros problèmes complexes, tels que la modélisation du climat ou l'optimisation du design d'une pale de turbine a profité davantage à la société, que les développeurs de mécanique des fluides du dix huitième siècle n'auraient jamais pu imaginer. Ceci va permettre l'éclosion d'une nouvelle branche de la mécanique des fluides, la mécanique des fluides numérique. Elle est basée sur l'avènement de calculateurs toujours plus puissants mais aussi de méthodes mathématiques permettant le calcul numérique. Les principes présentés dans les pages suivantes ont été utilisés pour les écoulements s'effectuant à l'échelle microscopique jusqu'à 50 ans de simulation plus tard, dans une rivière entière. Tout ceci est vraiment époustouflant.

Jusqu'où ira la mécanique des fluides aux années futures ? Sincèrement, même une extrapolation limitée du présent serait excessivement avec passion. Cependant, si l'histoire nous apprend quelque chose, c'est bien que les ingénieurs appliqueront ce qu'ils connaissent dans l'intérêt de la société, recherchant ce qu'ils ne connaissent pas en améliorant les méthodes utilisées dans les temps antiques pour continuer à une nouvelle ère à la mécanique des fluides. La mécanique des fluides étant l'outil performant qui permet d'expliquer les phénomènes qui nous entourent de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique, elle intervient dans un nombre illimité des domaines d'application pratiques allant des systèmes biologiques à la propulsion des automobiles, des avions et des fusées et elle est aussi à la base du développement de nombreuses technologies.

Alors, l'historique de la mécanique des fluides nous a permis de faire un récapitulatif de ces chercheurs cités ci-dessus sur une source bibliographique représentée à la figure ci-dessous.

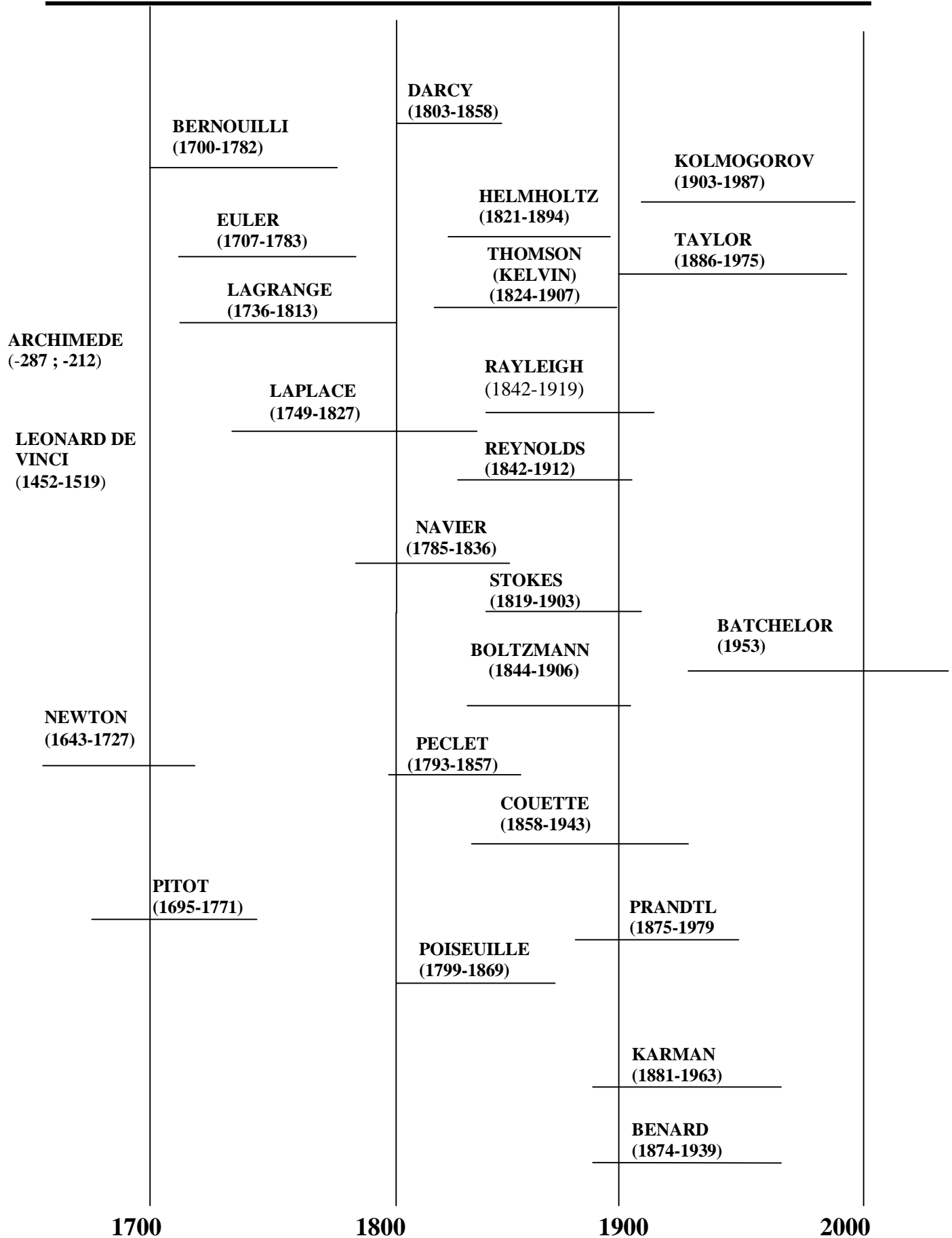


Figure 1: Sources bibliographiques de la Mécanique des Fluides

I-2 DOMAINES D'APPLICATION DE LA MECANIQUE DES FLUIDES

I-2-1 Domaines d'application modernes

La Mécanique des Fluides est surtout combinée à d'autres secteurs, ce qui lui donne des champs d'application larges :

- Avec la Chimie pour l'étude des procédés et de la combustion ;
- Avec la Biologie pour la biomécanique des fluides ;
- Avec la mécanique et l'automatique ;

Dans le domaine énergétique, la mécanique des fluides met l'accent sur les écoulements dans les turbomachines et leur conception, constitue un secteur très important.

La Mécanique des Fluides est complexe donc elle possède également beaucoup d'applications par contre dans le nucléaire, il y a un réel effort mis sur celle-ci pour optimiser le refroidissement du combustible, de plus, au vue des engagements environnementaux à tenir pour limiter la case écologique, elle offre un secteur producteur d'énergie tel que : centrale thermique, nucléaire et hydraulique.

La Magnétohydrodynamique qui est l'un des domaines d'application de la mécanique des fluides intervient dans l'étude des gaz ionisés, ou plasmas (décharges électriques dans les gaz, confinement des plasmas par champs magnétiques destiné à la production contrôlée d'énergie par fusion thermonucléaire). Elle permet aussi de réaliser des prototypes de centrales convertissant directement de l'énergie thermique en énergie électrique (convertisseurs magnétohydrodynamiques).

L'interaction entre un fluide et une structure prend dans un domaine une importance particulière de la biomécanique des fluides qui fait partie du domaine d'application. On peut mentionner également la mise aux systèmes biomimétiques inspirés du comportement des êtres vivants. On voit ici se

développer de fructueuses interactions avec la physico-chimie. Mais aussi, cette biomécanique des fluides permet d'optimiser le mélange entre le sang et un anticoagulant [55].

Les domaines d'application sont larges, mais la problématique reste la même : comprendre l'écoulement des fluides et ces conséquences, la présence des nouvelles technologies joue un rôle important comme dans le cas de la simulation des écoulements.

La Mécanique des Fluides qui est au cœur de nombreux métiers en lien direct avec les défis sociétaux d'efficacité énergétique et de développement des énergies mais aussi ses réalisations avec d'autres disciplines de l'ingénieur telles que la Thermodynamique. Celle-ci joue un rôle clef dans un bon nombre de processus en mécanique des fluides, par exemple pour l'écoulement des fluides compressibles ou pour le processus de travail dans les machines à fluide.

Les principes de base du génie mécanique expliquant un bon nombre d'aspects en mécanique des fluides, par exemple le frottement, la conservation de l'énergie, l'impulsion ou le moment cinétique.

La traversée des couches de matières, la capacité de stockage des sols et l'écoulement des canaux ouverts sont des thématiques du génie hydraulique.

Techniques de stockage de l'information donnent la possibilité de réaliser une simulation numérique d'écoulements et les techniques de construction aident à concevoir des machines et des installations de mécanique de fluides à la fois fonctionnelles et efficaces sur le plan énergétique.

L'industrialisation de la réaction chimique a permis de mettre en œuvre celle-ci dans les conditions les plus économiques qui soient et en travaillant, le plus souvent, sur des masses considérables. C'est au génie chimique de définir les installations où se déroulent les réactions chimiques et leurs conditions d'exploitation. Celui-ci s'intéresse surtout au mécanisme des réactions, par

exemples à la nature des états activés des molécules ; il raisonne à l'échelle de la liaison chimique et des structures moléculaires, c'est-à-dire à l'échelle du nanomètre. L'ingénierie qui met en œuvre la réaction chimique s'attaque en fait à des phénomènes macroscopiques qui, malgré leur prodigieuse diversité apparente, sont presque toujours des phénomènes de transfert d'un point à un autre, ou d'une phase à une autre (transferts de masse, d'énergie, de quantité de mouvement), qui accompagnent ou conditionnent les opérations chimiques ou physiques. Si elle n'ignore pas le jeu de destruction et de restructuration de l'architecture fine de la matière, ce n'est pas cette connaissance qui est la plus utile à son action, mais celle des cinétiques globales des transformations, commandées à la fois par la vitesse des réactions chimiques (liées à leurs mécanismes internes) et par les mécanismes qui assurent la rencontre des molécules. Le génie chimique s'intéresse donc aux différents courants tels que les courants des composantes (ou leur masse totale, complétée par la connaissance des diverses concentrations), le flux de chaleur et plus généralement d'énergie, les quantités de mouvement, etc., mais il lui faut connaître en outre les variables qui caractérisent en chaque point l'état du système (pression, température). Tous ces domaines de la mécanique des fluides évoqués ou cités ci-dessus sont alors regroupés sur un diagramme de la figure 2.

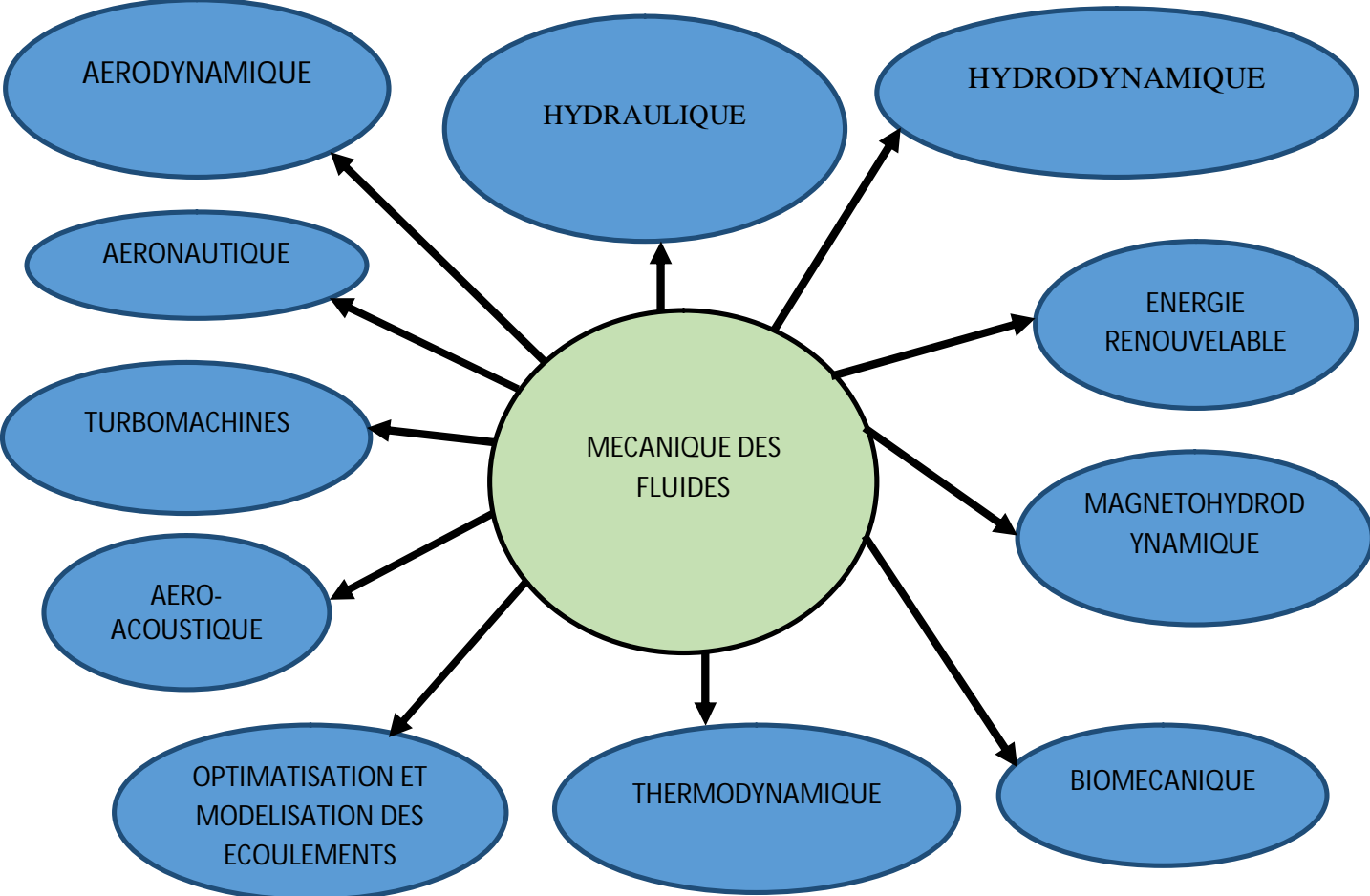


Figure 2: Diagramme des domaines d’application de la Mécanique des fluides

I-3 EQUATIONS FONDAMENTALES

Cette partie regroupe les principes et les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et d'énergie, qui sont à la base de tous les problèmes liés aux écoulements des fluides qu'on soit en régime laminaire ou turbulent. Pour ces derniers c'est-à-dire le principe d'énergie ainsi que son équation ne vont pas intervenir dans le cadre de notre problème car il n'y a pas de source de chaleur pour un transfert thermique [56-60].

I-3-1 Principe et équation de conservation de la masse

Formulé pour la première fois, par Léonard Vinci, ensuite par Héron [56], le principe de conservation de la masse stipule que : Quel que soit le domaine (D) limité par une surface (Σ) et entièrement contenue dans le fluide, la masse du fluide contenue dans (D) reste constante quand on suit (D) dans son mouvement. Ce principe est illustré par la figure 3 ci-dessous.

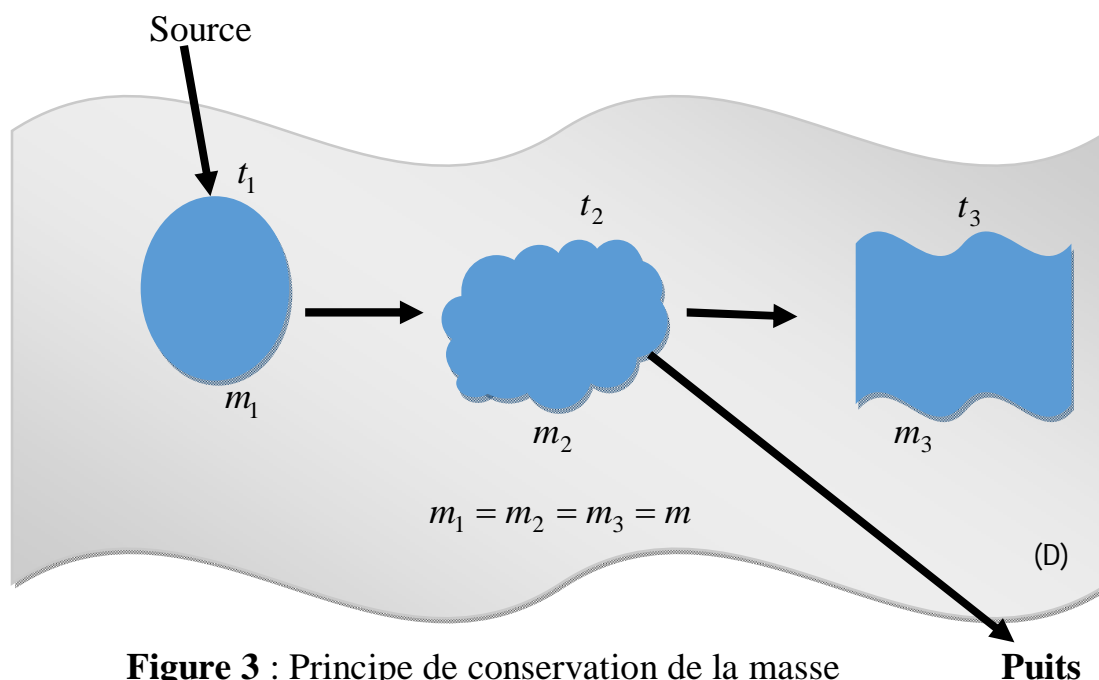


Figure 3 : Principe de conservation de la masse

Puits

Ce principe nous permet d'écrire :

$$m = cte. \quad (1.1a)$$

Par définition on a :

$$m = \iiint_{(D)} dm. \quad (1.1b)$$

En dérivant cette masse par rapport au temps et en remplaçant dm par l'expression ρdv on obtient :

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (1.2a)$$

En insérant la relation (1.1b) dans la relation (1.2a), et en remplaçant dm par ρdv , il vient :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(D)} \rho dv \right) = 0. \quad (1.2b)$$

En différenciant cette relation (1.2b) par rapport au temps, il vient :

$$\iiint_{(D)} \left(\frac{d\rho}{dt} \cdot dv + \rho \frac{d(dv)}{dt} \right) = 0, \quad (1.3a)$$

où $\frac{d(dv)}{dv} = \text{div} \mathbf{V} dt$ qui représente le taux de dilatation volumique, en insérant

cette expression dans la relation (1-3a), on a :

$$\iiint_{(D)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\mathbf{V}) \right) dv = 0. \quad (1.3b)$$

En tenant compte du domaine non nul alors la relation (1.3b) prend la forme suivante :

Quelque soit le domaine du fluide considéré la relation (1.3b) devient :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0 . \quad (1.4a)$$

Quelque soit le domaine du fluide considéré la relation (1.3b) est vraie : la relation ainsi obtenue est l'équation locale de conservation de la masse d'un fluide.

Pour une masse volumique variable se mettant la sous forme ($\rho = \rho(M, t)$), la relation (1.4a) prend la forme suivante :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} \rho . \quad (1.4b)$$

En remplaçant la relation (1.4b) dans l'équation (1.4a) on obtient alors une nouvelle équation appelée équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.4c)$$

avec $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} \rho$

Si de plus le fluide est incompressible à transformation isotherme où la masse volumique varie très faiblement et considérée constante ($\rho = cte$) alors cette équation de conduite prend une nouvelle forme :

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (1.4d)$$

La relation obtenue montre alors que le champ de vitesse est à flux conservatif. Il faut signaler ici que, la condition d'incompressibilité pour les écoulements d'air, n'est valide que pour le nombre de Mach ($M \leq 3$) [56].

Si on considère un écoulement de fluide avec un débit entrant et un débit sortant, la masse de fluide contenue dans le domaine (D) donne une autre forme à l'équation de continuité. La figure 4 ci-dessous montre le domaine (D) de fluide évoluant dans le temps avec les débits entrant et sortant.

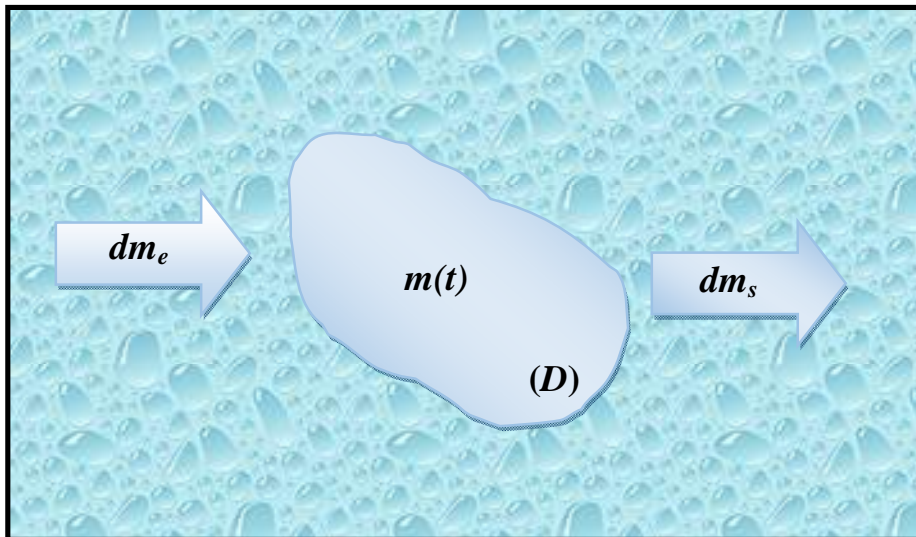


Figure 4 : Conservation de masse avec débits entrant et sortant

L'équation de la conservation de la masse avec débit entrant et sortant s'écrit :

$$dm = dm_e - dm_s. \quad (1.5a)$$

En dérivant dm par rapport à t la relation (1-5a) devient :

$$\frac{dm}{dt} = Q_e - Q_s, \quad (1.5b)$$

avec $Q_e = \frac{dm_e}{dt}$ et $Q_s = \frac{dm_s}{dt}$

où Q_e et Q_s représentent respectivement des débits de masse entrant et sortant.

En remplaçant la relation (1.5b), on a :

$$m = \iiint_{(D)} dm = \iiint_{(D)} \rho dv. \quad (1.5c)$$

En substituant la relation (1.5b) dans la relation (1.5c), on a :

$$\iiint_{(D)} \left(\frac{d}{dt} (\rho dv) \right) = Q_e - Q_s. \quad (1.5d)$$

En différentiant la relation (1.5c) on obtient alors :

$$\iiint_{(D)} \left[\frac{d\rho}{dt} \cdot dv + \rho \frac{d(dv)}{dt} \right] = Q_e - Q_s. \quad (1.5e)$$

la relation (1.5e) ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$\iiint_{(D)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) \right) dv = Q_e - Q_s, \quad (1.6a)$$

où $\frac{d(dv)}{dv} = \operatorname{div} \mathbf{V} \cdot dt$ est le taux de dilatation volumique défini ci-dessus.

En définissant les relations de masse entrant et sortant du fluide respectivement dans la relation ci-dessous, on a :

$$Q_e = \iiint_{(D)} \rho q_e dv \quad \text{et} \quad Q_s = \iiint_{(D)} \rho q_s dv, \quad (1.6b)$$

où q_e et q_s sont les débits de masse entrant et sortant par unité de masse du fluide respectivement. En remplaçant la relation (1.6b) dans la relation (1.6a) on a :

$$\iiint_{(D)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) \right) dv = \iiint_{(D)} \rho (q_e - q_s) dv. \quad (1.7a)$$

La relation ci-dessus étant vraie quelque soit le domaine du fluide, on obtient l'équation de continuité avec débits entrant et sortant :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) = \rho (|q_e| - |q_s|). \quad (1.7b)$$

La relation (1.7b) est appelée équation locale de conservation de la masse avec un débit entrant et sortant par unité de masse du fluide. Pour une masse volumique variable $\rho = \rho(M, t)$, celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}\rho. \quad (1.7c)$$

cette expression peut encore s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}\rho + \rho \operatorname{div}\mathbf{V} = \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}). \quad (1.7d)$$

En introduisant cette relation (1.7d) ci-dessus dans la relation (1.7b), celle-ci nous permet de trouver une autre forme d'équation locale de conservation de la masse avec des débits entrant et sortant :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = \rho(|q_e| - |q_s|). \quad (1.8)$$

Pour un fluide incompressible en transformation isotherme ou un fluide incompressible avec transfert thermique et masse volumique variant très faiblement (dans le cas $\rho = \rho_0 = \text{cte}$ et en situation isotherme), l'équation (1.8) se réduit à l'équation suivante :

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = |q_e| - |q_s|. \quad (1.9)$$

Lorsqu'il y a compensation entre un débit entrant par unité de masse et un débit sortant par unité de masse c'est-à-dire $|q_e| = |q_s|$, on dit que le flux est conservatif, alors l'équation ci-dessus devient :

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0. \quad (1.10)$$

On conclut alors que le champ de vitesse \mathbf{V} est un champ à flux conservatif : seul un champ de vitesse à flux conservatif correspond sur le plan cinématique, un écoulement de fluide incompressible en transformation isotherme.

Lorsqu'il n'existe pas de débit entrant de masse dans le domaine (D) c'est-à-dire ($q_e = 0$), l'équation (1.9) se réduit alors :

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = -|q_s|. \quad (1.11a)$$

Dans le cas contraire où le domaine se comporte comme une source ($q_s = 0$), alors l'équation (1.9) se réduit :

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = |q_e|. \quad (1.11b)$$

I-3-2 Principe et équation de conservation de la quantité de mouvement

Ce principe stipule : Quelque soit le domaine (D) du fluide que l'on suit dans son mouvement dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du tenseur des quantités de mouvement au domaine est égale au tenseur des forces extérieures appliquées au domaine (D). Pour ressortir l'équation de conservation de la quantité de mouvement, nous allons rappeler les notions de forces de contact, le tenseur des contraintes et la loi de comportement [59-60].

a) Forces de contact

On appelle force de contact sur une portion de fluide (D) limitée par une surface fermée (S), la force exercée par le fluide extérieur sur le fluide intérieur à (D) et qui s'applique sur la surface (S) à raison de $\mathbf{T}dS$ sur l'élément de surface (dS) telle que : $d\mathbf{F} = \mathbf{T}(M) dS$, où \mathbf{F} et $\mathbf{T}(M)$ sont respectivement la force de contact sur dS et la tension ou contrainte au point M .

La figure. 5 ci-dessous illustre une particule fluide (D) sur laquelle est appliquée la force de $\mathbf{T}dS$ sur l'élément de surface (dS)

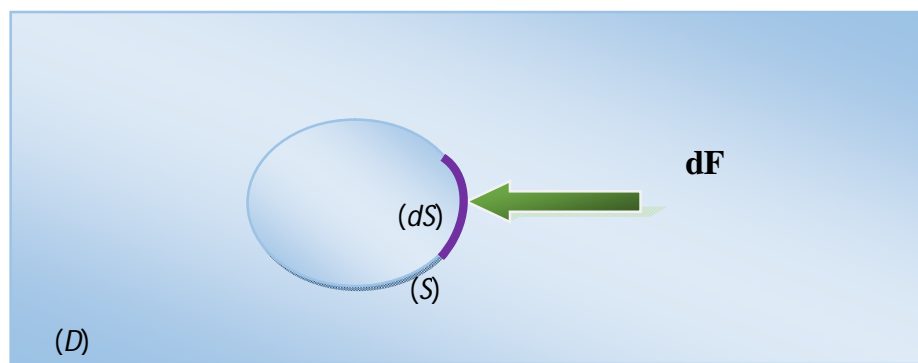


Figure 5 : Portion de fluide (D) délimitée par une surface (S)

La contrainte \mathbf{T} contient une composante normale ou contrainte normale à dS et une composante parallèle ou composante tangentielle à dS (ou contrainte de glissement, ou contrainte de cisaillement) et est égale à : $\mathbf{T} = \mathbf{T}_n + \mathbf{T}_f$.

b) Tenseur des contraintes

Pour les fluides étudiés dans le document, on suppose vérifier les deux propriétés suivantes :

Propriété 1: La distribution des contraintes $\mathbf{T}(M)$, en tout point M du fluide, est totalement déterminée dès que l'on connaît les contraintes qui s'exercent sur les trois éléments de surface dS_1 , dS_2 et dS_3 formant un trièdre trirectangle ayant pour origine O .

Propriété 2: Si l'on considère maintenant un petit parallélépipède rectangle bâti sur le point et d'arrêts parallèles aux axes de coordonnées, et qu'on exprime l'équilibre des moments des forces appliquées, on trouve que le tenseur des contraintes $\overline{\sigma}$ est symétrique, c'est-à-dire $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

On démontre que la contrainte \mathbf{T} sur un élément de surface pris autour du point M du fluide est liée à la normale unitaire \mathbf{n} de cet élément de surface par la relation :

$$\mathbf{T} = \overline{\sigma} \mathbf{n}, \quad (1.12)$$

dans laquelle $\overline{\sigma}$ est le tenseur d'ordre 2 des contraintes. La composante σ_{jk} de ce tenseur s'interprète comme la contrainte suivant l'axe x_j sur une surface de normale x_k .

Pour $j=k$, σ_{jj} est appelé contrainte normale et pour $j \neq k$, σ_{jk} est appelé contrainte tangentielle.

c) Loi de comportement

Pour les fluides newtoniens, les contraintes sont par définition des fonctions linéaires des taux de déformation du milieu, et la loi de comportement qui en découle de cette définition est donnée par la relation

$$\sigma_{jk} = (-P + \eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \delta_{jk} + 2\mu \varepsilon_{jk} . \quad (1.13a)$$

Cette relation ci-dessus peut aussi se mettre sous la forme vectorielle suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}} = (-P + \eta \operatorname{div} \overline{\overline{\mathbf{V}}}) \overline{\overline{\mathbf{I}}} + 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} , \quad (1.13b)$$

où

- p la pression statique (indépendante de la direction en point donné)

- δ_{ij} le symbole de Kronecker :
$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

μ et ν paramètres caractérisant les propriétés visqueuses des fluides :

- μ la viscosité de cisaillement ou dynamique
- ν la viscosité de dilatation ou cinématique

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} , \quad (1.14)$$

où \mathbf{C} et \mathbf{F}_{ext} désignent respectivement les contraintes et les forces extérieures.

L'égalité entre les deux tenseurs précédents équivaut à l'égalité entre les moments résultants :

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \begin{cases} \frac{d\mathbf{M}_0}{dt} = \iiint_D \frac{d(\mathbf{OM} \wedge \mathbf{V})}{dt} dv \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv \end{cases}, \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{F}_{ext} = \begin{cases} \mathbf{R}_{ext} = \iiint_D \rho dv + \oiint_S \overline{\overline{\sigma}} \mathbf{n} ds \\ \mathbf{M}_{ext} = \iiint_D \rho \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f} dv + \oiint_S \mathbf{OM} \wedge (\overline{\overline{\sigma}} \mathbf{n}) ds \end{cases} \quad (1.15b)$$

On montre que la deuxième égalité n'apporte aucune information supplémentaire sur la détermination du champ de vitesse du fluide, car elle aboutit à la symétrie du tenseur des contraintes. Donc seule la première égalité est intéressante :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_D \rho \mathbf{F} dv + \oiint_S \overline{\overline{\sigma}} \mathbf{n} ds. \quad (1.16)$$

Dans cette égalité, $\rho \mathbf{f} dv$ est la force de masse sur la particule de fluide de masse dm , les forces de masse qui sont proportionnelles à la masse et qui sont dues à l'existence d'un ou plusieurs champs de forces dans le domaine où se trouve le fluide. En utilisant le théorème d'Ostrogradsky on a

$$\oiint_S \overline{\overline{\sigma}} \mathbf{n} ds = \iiint_D \text{div} \overline{\overline{\sigma}} dv. \quad (1.17)$$

La relation (1.16) devient alors :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_D \rho \mathbf{F} dv + \iiint_D \text{div} \overline{\overline{\sigma}} dv, \quad (1.18a)$$

soit:

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_D (\rho \mathbf{F} + \text{div} \overline{\overline{\sigma}}) dv. \quad (1.18b)$$

Le domaine (D) pouvant être quelconque, on aboutit à l'équation locale de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}. \quad (1.18c)$$

Cette relation obtenue ci-dessus peut aussi se mettre sous forme d'une notation indicielle suivante:

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.18d)$$

L'équation (1.18c) est appelée relation de Cauchy. Cette relation est valable quelque soit le fluide, qu'il soit Newtonien ou pas.

Rappelons qu'un fluide newtonien est un fluide de Stokes vérifiant l'hypothèse de Newton à savoir : les contraintes sont des fonctions linéaires des taux de déformations.

Un fluide de Stokes est un fluide vérifiant les hypothèses suivantes :

Le tenseur de contrainte est une fonction continue du tenseur du taux de déformations et l'état local (pression, température) ;

Le fluide est entièrement dénué d'élasticité ;

Le fluide est homogène ; un état de contrainte conduit à un état de déformation quelque soit le point considéré dans le fluide ;

Le fluide est isotrope ; les relations entre contraintes et déformations n'ont pas de directions privilégiées dans le fluide. Autrement une composante quelconque du tenseur des contraintes est associée linéairement à toutes les composantes du tenseur de taux de déformation.

I-3-3 Equations de Navier-Stokes

En appliquant l'opérateur divergence sur la relation (1.13b), on obtient :

$$\operatorname{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -\operatorname{grad} P + \operatorname{grad}(\eta \operatorname{div} \mathbf{V}) + 2\mu \operatorname{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + 2\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \operatorname{grad} \mu. \quad (1.19a)$$

Compte tenu des propriétés sur les opérateurs, l'équation (1.19a) devient :

$$\overline{\text{div}}\sigma = -\mathbf{grad} P + \mathbf{grad}(\eta \text{div}\mathbf{V}) + 2\text{div}(\mu \overline{\Sigma}). \quad (1.19b)$$

En substituant l'équation (1.19a) dans l'équation (1.18c), on obtient :

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \rho \mathbf{F} - \mathbf{grad} P + \mathbf{grad}(\eta \text{div}\mathbf{V}) + 2\text{div}\mu \overline{\varepsilon}. \quad (1.20)$$

où $\overline{\varepsilon}$ est le tenseur des taux de déformation, et est lié au gradient de vitesse par la relation :

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}}\mathbf{V} + {}^t \overline{\text{grad}}\mathbf{V} \right). \quad (1.21)$$

En éliminant le tenseur des taux de déformation dans l'équation (1.20), on obtient alors des nouvelles équations appelées équations de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}}\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \right) = \rho \mathbf{F} - \mathbf{grad} P + (\eta + \mu) \mathbf{grad}(\text{div}\mathbf{V}) + \mu \Delta \mathbf{V}. \quad (1.22)$$

où les quantités $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}}\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \right)$, $\rho \mathbf{F}$, $\mathbf{grad} P$ et $(\mu + \eta) \mathbf{grad}(\text{div}\mathbf{V}) + \mu \Delta \mathbf{V}$ représentent respectivement les forces d'inertie, les forces de masse, les forces de pression et les forces de viscosité appliquées à l'unité de volume. Alors que ν et μ sont respectivement les viscosités cinématique et dynamique du fluide.

Pour les fluides incompressibles en transformation isotherme ou de faibles variations de masse volumique ; $\text{div}\mathbf{V} = 0$ et de plus ν et μ sont constants liés par une relation $\mu = \rho \nu$. Les équations suivantes qui sont les équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles se réduisent:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V} \cdot \overline{\text{grad}} \right) \mathbf{V} \right) = \rho \mathbf{F} - \mathbf{grad} P + \mu \Delta \mathbf{V}. \quad (1.23)$$

Dans la relation (1.23) obtenue ci-dessus le premier terme de gauche (forces d'inertie) peut se mettre sous la forme suivante, quelque soit le système de coordonnées (coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques), on a :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \right]. \quad (1.24)$$

En insérant cette relation dans l'équation (1.23), on obtient d'autres nouvelles formes d'équations de Navier-Stokes quelque soit le système de coordonnées :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P + \nu \Delta \mathbf{V}. \quad (1.25)$$

Si on néglige l'action du poids en supposant que le mouvement du fluide a lieu dans une direction orthogonale que celle du poids alors les forces de masse seront alors négligeables et la relation (1.25) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P + \nu \Delta \mathbf{V}. \quad (1.26)$$

Ces équations de Navier-Stokes peuvent être détaillées dans plusieurs systèmes de coordonnées pour un champ de vitesse \mathbf{V} . Dans le système des coordonnées sphériques, ces équations trouvent des difficultés de s'appliquer, de plus les écoulements de fluide étudiés ne peuvent pas se produire dans ce système de coordonnées. C'est la raison pour laquelle on s'intéresse seulement aux systèmes des coordonnées cartésiennes et cylindriques, qui ont déjà fait un objet d'étude sur les écoulements.

Dans un système de coordonnées cartésiennes où les composantes du champ de vitesse sont (V_x, V_y, V_z) on a sur les axes x , y et z respectivement :

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \quad (1.27a)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \quad (1.27b)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.27c)$$

Dans le système de coordonnées cylindriques on a : $\mathbf{V} = V_r \mathbf{e}_r + V_\theta \mathbf{e}_\theta + V_z \mathbf{e}_z$ où \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_z sont les vecteurs unitaires suivant les axes radial, orthoradial et axial respectivement.

Sur ces trois axes, l'équation (1-26) s'écrit respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.28a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} - \frac{V_r V_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.28b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (1.28c)$$

I-4 ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS ET EXISTENCE DE LA FONCTION DE COURANT

Nous continuons dans la suite de cette partie à étudier les conséquences de l'équation de continuité pour un fluide incompressible ($\text{div}\mathbf{V}=0$). Mais avant de commencer il faut signaler que :

$\text{div}\mathbf{V}=0$ signifie, en utilisant le théorème de divergence, qu'il n'y a pas de débit volumique total à une surface fermée, autant de flux sortant que de flux entrant.

La dépendance temporelle a été laissée de côté pour rendre la formulation plus facile car nous sommes en régime permanent, en réalité nous pouvons avoir $V(x, y, t)$, $V(r, \theta, t)$ ou $V(r, z, t)$ avec les résultats donnés pour chaque valeur de t .

II-4-1 Ecoulements Plans

Pour souci de simplicité mathématique, nous avons choisi d'étudier des écoulements dans lesquels il n'y a que deux composantes de vitesse non nulles et deux coordonnées effectives. Les écoulements bidimensionnels dans les plans cartésien et polaire présentent respectivement un champ de vitesse sous la forme suivante :

$$\mathbf{V} = u(x, y) \mathbf{i} + v(x, y) \mathbf{j} \text{ et } \mathbf{V} = V_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + V_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta. \quad (1.29)$$

Considérons un écoulement bidimensionnel de fluide isochore. Dans le plan x, y il est décrit par les équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u. \quad (1.30a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v. \quad (1.30b)$$

A l'évidence, un moyen simple d'éliminer la pression est de dériver l'équation (1.30a) par rapport à y , de dériver l'équation (1.30b) par rapport à x , et de

soustraire la dernière à la première, ce qui donne l'équation de vorticité sous la forme :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\Omega \mathbf{V}) = \nu \Delta \Omega, \quad (1.31)$$

avec $\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

L'équation (1.31) se présente donc comme un bilan local de vorticité (dérivé du bilan de quantité de mouvement) avec un terme source qui s'identifie à un mécanisme de diffusion visqueuse, et elle porte le nom d'équation de vorticité.

Bien entendu, la pression n'a pas été évacuée du problème par un simple tour mais grâce à la manipulation précédente. Les forces de pression n'apparaissent plus directement en tant que telles, elles ont été intégrées dans les autres paramètres du mouvement.

Par contre, cette astuce ne marche pas avec les écoulements tridimensionnels : on peut toujours éliminer la pression dans les équations (1.30a) et (1.30b) prises par deux, mais on se retrouve avec des termes qui contiennent les trois composantes de la vitesse et qui n'apportent guère de simplification.

II-4-2 écoulements axisymétriques

Pour les écoulements axisymétriques, le champ de vitesse prend la forme suivante :

$$\mathbf{V} = V_r(r, z) \mathbf{e}_r + V_z(r, z) \mathbf{e}_z, \quad (1.32)$$

où les coordonnées cylindriques polaires sont utilisées, \mathbf{V} est indépendant de θ et il n'y a pas de vitesse orthoradiale (pas de tourbillon).

Les écoulements à symétrie cylindriques constituent une famille d'écoulements bidimensionnels, pour lesquels la méthode précédente s'applique avec quelques nuances. Dans n'importe quel plan diamétral r, z (z : direction axiale, r : direction radiale), les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) \quad (1.33a)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.33b)$$

La dérivation de (1.33a) par rapport à r , puis de (1.33b) par rapport à z , suivie d'une soustraction, donne cette fois l'équation de vorticit   donn  e par la relation :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\Omega \mathbf{V}) = \nu \Delta \Omega, \quad (1.34)$$

avec $\Omega = \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}$

Lorsque nous poss  dons de tels   coulements, nous avons deux composantes de vitesse et une   quation diff  rentielle ($\text{div} \mathbf{V} = 0$) les reliant. Nous pouvons utiliser cette   quation diff  rentielle pour   liminer une composante de vitesse, et donc r  duire les math  matiques aux consid  rations d'une seule fonction. Il est en effet plus commode de ne pas faire exactement cela, mais on voit ici la raison pour laquelle de tels   coulements sont particuli  rement faciles.

Les   coulements bidimensionnels sont plus faciles    visualiser, nous passons donc du temps    discuter sur les diff  rents   coulements. Pour un   coulement bidimensionnel de fluide incompressible, l'existence de la fonction de courant peut se pr  senter sur diff  rentes formes suivant les plans cart  sien, polaire et m  ridien.

Pour un   coulement s'effectuant dans un canal d'un fluide incompressible donc le champ de vitesse a des composantes (u, v) , l'  quation de continuit   est donn  e par la relation :

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.34a)$$

La relation ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.34b)$$

Cette relation ci-dessus est automatiquement satisfaite si l'on pose :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.34c)$$

où ψ représente la fonction de courant et cette relation montre l'existence de la fonction de courant.

Pour un écoulement polaire d'un fluide incompressible donc le champ de vitesse a des composantes (V_r, V_θ) , on a :

$$\text{div}\mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (1.35a)$$

L'équation (1.35a) peut se transformer comme :

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = -\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (1.35b)$$

L'équation (1.35b) est satisfaite si l'on pose :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (1.35c)$$

où ψ est la fonction de courant qui existe dans le plan polaire

Pour un écoulement axisymétrique d'un fluide incompressible donc le champ de vitesse a des composantes (V_r, V_z) , il vient :

$$\text{div}\mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (1.36a)$$

Cette relation peut prendre la forme suivante :

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = -\frac{\partial(rV_z)}{\partial z}, \quad (1.36b)$$

L'équation ci-dessus est automatiquement satisfaite si l'on pose :

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.36c)$$

où ψ est la fonction de courant qui existe dans le plan méridien.

La Mécanique des fluides constitue l'extension de la mécanique rationnelle à une classe de milieux continus dont les déformations peuvent prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. On désigne sous le nom général de fluides des corps matériels, liquides, gaz et plasmas, qui peuvent se mettre sous la forme quelconque lorsqu'ils sont soumis à un système de forces, ces forces pouvant être aussi faibles que l'on veut, à condition qu'on les fasse agir pendant un temps assez long. Cette définition a permis d'exclure les corps plastiques, qui se comportent comme les solides tant que les contraintes en leur sein ne dépassent pas un certain seuil. Ainsi, comme en mécanique rationnelle, le principe de conservation de la masse, le principe de la quantité de mouvement et les lois fondamentales de la dynamique s'appliquent sur des éléments de volume du fluide infiniment petits à notre échelle. Ces volumes contiennent encore un nombre suffisant de molécules pour que les grandeurs attachées à ces éléments de volume soient des fonctions continues des coordonnées. Les méthodes théoriques de détermination des champs de vitesses et de contraintes impliquent la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires, tâche que l'on confie maintenant aux ordinateurs. Les études expérimentales peuvent s'effectuer soit directement, comme dans les sciences, soit sur les modèles réduits, placés dans les souffleries aérodynamiques ou hydrauliques, ou encore dans des bassins de carènes. Les réflexions sur la façon de passer des résultats obtenus sur des modèles réduits aux valeurs correspondant à la vraie grandeur ont donné naissance à l'analyse dimensionnelle : les phénomènes dépendent de nombres sans dimensions, dont les valeurs doivent être les mêmes pour le modèle réduit et le cas réel. Les lois de la mécanique des fluides se sont dégagées et les écoulements bidimensionnels se sont présentés sur plusieurs formes.

Notre motivation pour le présent travail provient du fait que, dans tous les travaux mentionnés ci-dessus, et ainsi que dans beaucoup d'autres travaux

existants dans la littérature, l'écoulement laminaire qui pourrait avoir lieu dans le plan polaire avec parois cylindriques poreuses n'avait pas encore été étudié.

Le problème considéré dépend du nombre de Reynolds, du rapport d'entrefer des deux cylindres, et d'un coefficient de vitesse défini à partir du rapport de densité de pores et du rapport de surface des pores.

Le problème posé dans ce travail est modélisé par les équations de Navier-Stokes dont les difficultés à trouver des solutions sont bien connues, et l'équation de continuité issue de la conservation de la masse représente une contrainte qui doit être satisfaite par les composantes inconnues du champ de vitesse de l'écoulement. Compte tenu des conditions aux limites appliquées à la surface des deux cylindres, ce problème peut être directement résolu par les algorithmes du Computational Fluid Dynamics (CFD). Dans ce travail, est appliquée la méthode des solutions semblables pour l'équation de vorticité déduite des équations de Navier-Stokes, dans les conditions justifiant l'existence de la fonction de courant de l'écoulement.

Comme on le verra dans ce travail, la méthode des solutions semblables permet de réduire les équations de Navier-Stokes en régime permanent à une seule équation différentielle ordinaire non linéaire du quatrième ordre avec deux conditions aux limites à chaque paroi.

Pour résoudre ce problème aux limites en deux points, de nombreuses méthodes numériques [24] peuvent être appliquées. A cet égard, on peut citer la méthode des éléments spectraux qui donne des résultats satisfaisants avec une grande précision [25-33]. Dans ce travail, la méthode de tir comprenant l'algorithme de Runge-Kutta et l'algorithme d'optimisation de Newton-Raphson est utilisée. Cette méthode donne des résultats si précis qu'elle a été largement utilisée en génie mécanique et en mathématiques appliquées par de nombreux chercheurs [3-11] souhaitant trouver, à partir de la méthode de solution

semblable, la richesse de la structure de la solution exacte des équations de Navier-Stokes pour la configuration dite bidimensionnelle.

Contrairement aux travaux précédents [1-23] où les écoulements axisymétriques sont étudiés dans les conduites cylindriques poreuses ainsi que les écoulements dans les conduites à symétrie cartésienne dans les canaux rectangulaires poreux, ce travail consacré à l'équation de vorticité en coordonnées polaires est inhabituel. A partir des solutions obtenues pour cette équation de vorticité, les conditions dans lesquelles cet écoulement laminaire dans le plan polaire existe sont ensuite déterminées, et les figures des lignes de courant acceptables sont trouvées et tracées. L'écoulement radial est trouvé comme une solution possible. Lorsque l'écoulement n'est pas radial, les figures des lignes de courant acceptables mettent en évidence une zone particulière dans laquelle le fluide est au repos, délimitée par deux lignes de courant singulières dans le cylindre aval. Pour différentes valeurs de coefficient de vitesse, la fonction de courant de l'écoulement en régime permanent et les composantes de la vitesse de l'écoulement sont déduites.

**CHAPITRE II : MATERIELS
ET METHODES**

Dans ce chapitre, il est question pour nous de présenter les différentes configurations possibles de l'écoulement du problème, ressortir une relation entre les vitesses du fluide sur les cylindres amont et aval, et en déduire les conditions aux limites convenables pour le problème posé. De plus, nous allons établir l'équation de vorticité en coordonnées polaires d'une part, et d'autre part appliquer les hypothèses simplificatrices du problème à savoir, l'hypothèse pionnière de solutions semblables énoncée pour la première fois par Berman [1] et la normalisation préconisée par Banks et Zaturka [8]. Nous allons voir comment ces hypothèses permettent de transformer l'équation de vorticité qui est une équation aux dérivées partielles, en une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre quatre, avec deux conditions aux limites pour chaque paroi. Ce chapitre se termine par la description et l'application de la méthode de tir que nous avons utilisée pour résoudre le problème posé.

II-1 POSITION DU PROBLEME

Contrairement aux écoulements axisymétriques dans les conduites annulaires qui ont été étudiés de manière intensive [61-63], l'écoulement laminaire ayant lieu dans le plan polaire (r, θ) n'est pas encore étudié.

Le fluide newtonien visqueux et incompressible est situé à l'intérieur d'une conduite annulaire horizontale d'axe z formée de deux cylindres coaxiaux dont les parois sont poreuses et définies par $r = R_1$ pour le cylindre intérieur (C_1) et $r = R_2$ pour le cylindre extérieur (C_2). La longueur des cylindres est représentée par L et est supposée être très grande par rapport à R_1 et R_2 . Les densités des pores pour les cylindres intérieur et extérieur sont désignées respectivement par λ_1 et λ_2 . Les forces de masse sur l'écoulement sont négligeables car le mouvement du fluide a lieu dans une direction orthogonale que celle du poids et le mouvement du fluide est crée par le processus d'injection ou succion opéré uniformément sur les surfaces des cylindres et orthogonalement aux parois.

Ainsi, quatre configurations de montages possibles sont envisagées et seront représentées sur les différentes figures dans le cas où les deux cylindres subissent l'injection ou la succion ; où alors l'un des cylindres subit une succion et l'autre l'injection. Ceci nous permet de ressortir le dispositif du problème ainsi que sa coupe transversale, présentés aux figures ci-dessous.

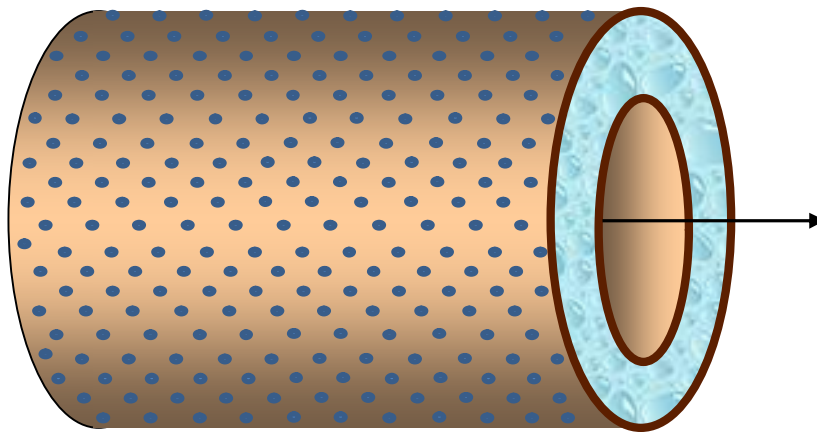


Figure 6a : Cylindres coaxiaux à parois poreuses

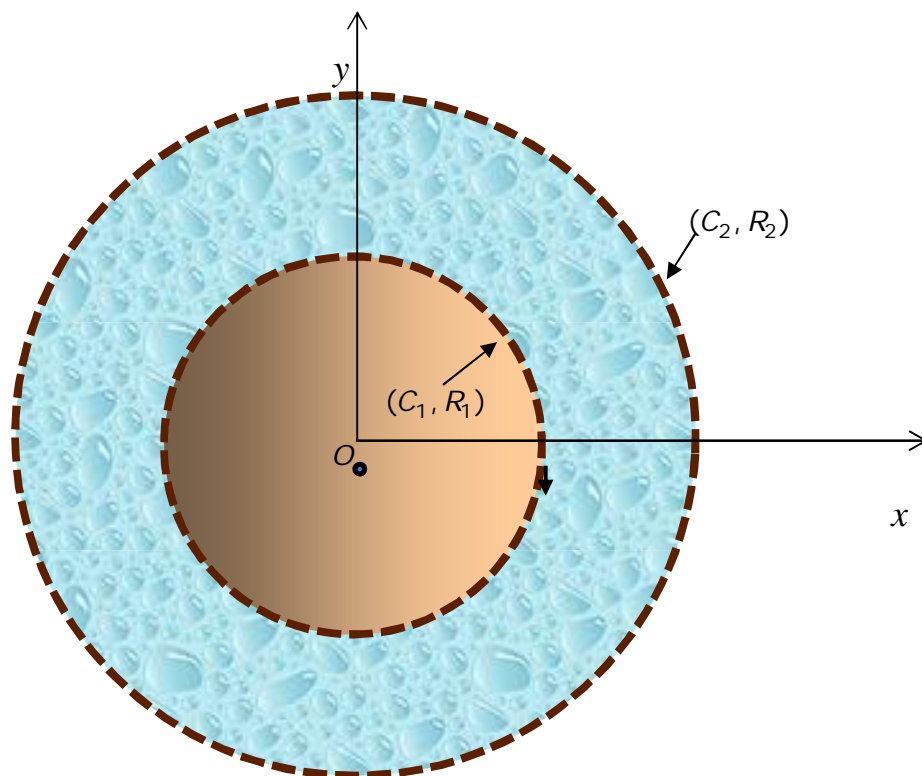


Figure 6b: Coupe transversale du dispositif des deux cylindres coaxiaux à parois poreuses

Légende

(C_1, R_1) : Cylindre intérieur et de rayon R_1

(C_2, R_2) : Cylindre extérieur et de rayon R_2

II-2 ANALYSE DES DIFFERENTES CONFIGURATIONS DE MONTAGE

Cette partie est consacrée aux quatre configurations de montages possibles envisagées et représentées sur les différentes figures dans le cas où les deux cylindres subissent l'injection ou la suction ; où alors l'un des cylindres subit une suction et l'autre l'injection.

II-2-1 Configuration : les deux cylindres intérieur (C_1) et extérieur (C_2) subissent l'injection

Lorsque les deux cylindres subissent l'injection (voir **figure 7a**), un problème pratique existe. Le fluide étant confiné entre les deux cylindres, il est impossible d'y injecter le fluide incompressible dans la conduite annulaire sans écoulement axial l'entrefer étant déjà totalement occupé par le fluide. Ainsi, la configuration pour laquelle les deux cylindres subissent l'injection est à rejeter car la conservation de la masse dans la conduite annulaire, supposée valable n'y est assurée. Celle-ci est schématisée ci-dessous

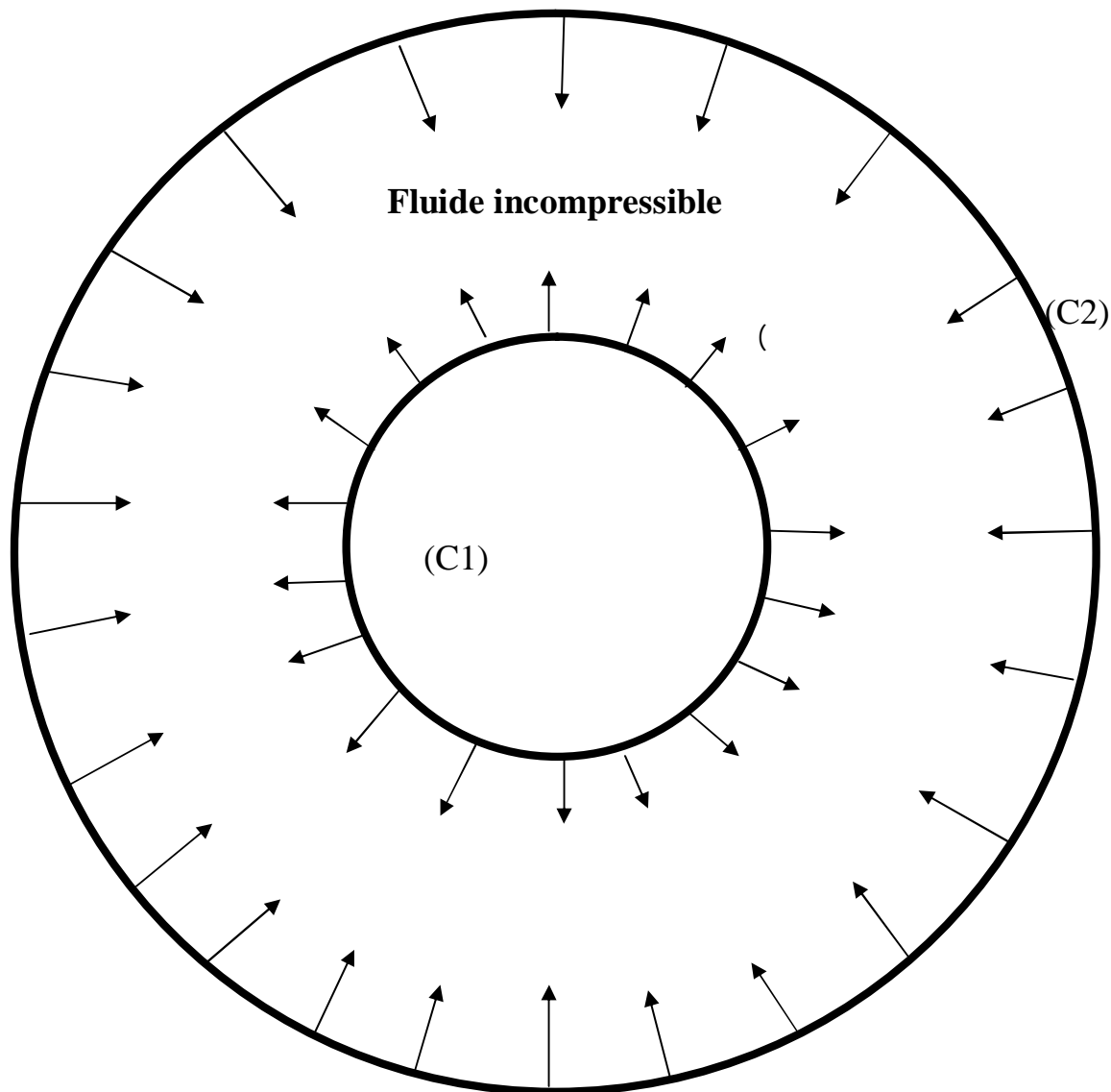


Figure 7a: Les deux cylindres (C_1) et (C_2) subissent l'injection

II-2-2 Configuration : les deux cylindres intérieur (C_1) et extérieur (C_2) subissent la succion

Pour le cas où les deux cylindres subissent une succion du fluide, il n'existe pas alors d'écoulement entrant pour compenser la masse du fluide extorquée par succion, puisqu'il n'existe pas d'écoulement axial. Par conséquent, l'écoulement considéré est un processus de vidange dans la conduite annulaire. La figure ci-dessous illustre le dispositif.

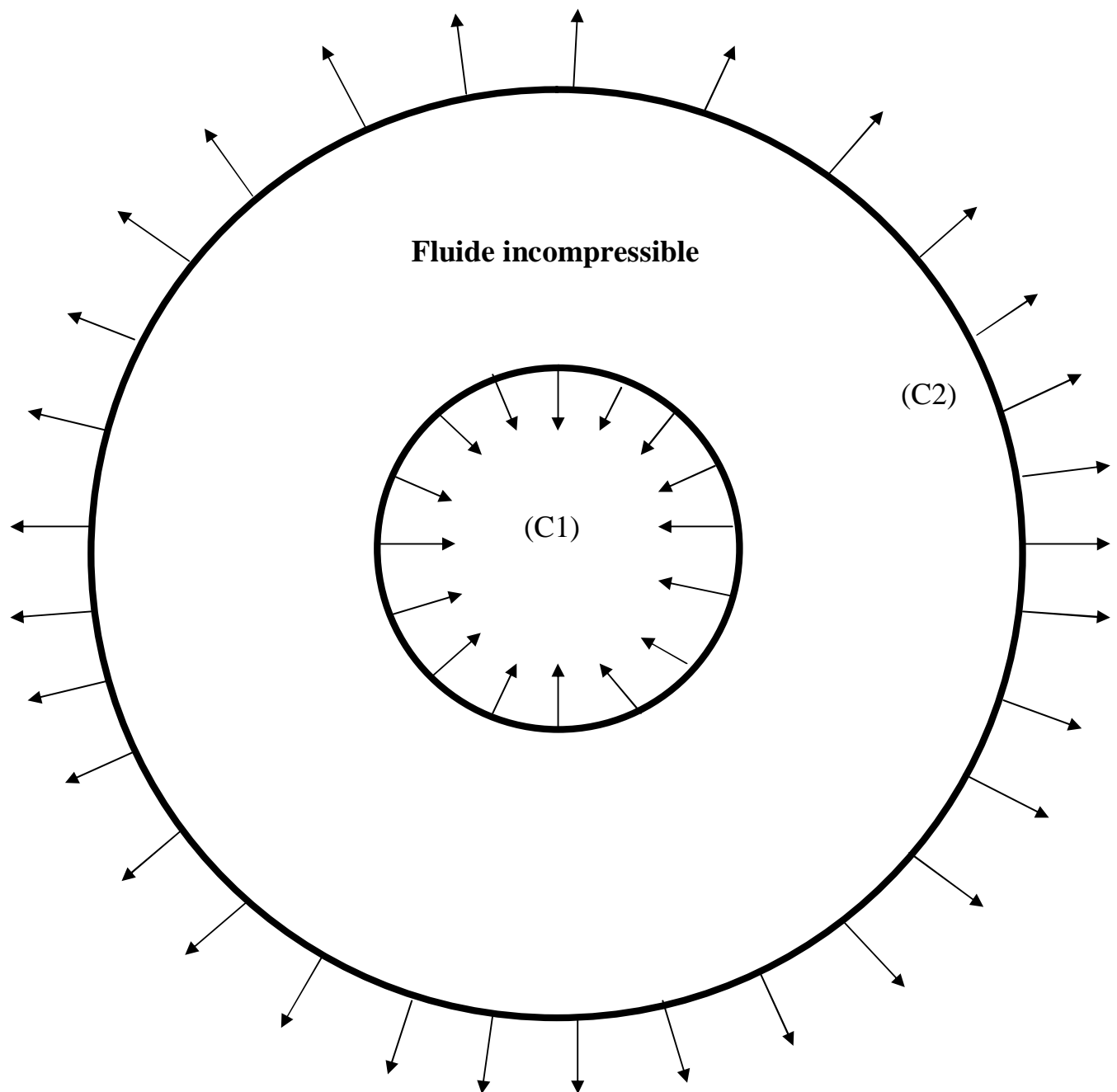


Figure 7b: Les deux cylindres (C₁) et (C₂) subissent la succion

II-2-3 Configuration : L'un des cylindres subit la succion du fluide et l'autre l'injection

Le fluide étant confiné entre les deux cylindres, la conservation de la masse du fluide est assurée dans la conduite annulaire si un débit entrant existe dans le plan polaire pour compenser la masse du fluide extorquée par succion, comme

montrent les **figure 8a** et **figure 8b**. Ainsi, l'un des cylindres subit la succion, et l'autre l'injection telle que le débit de masse par unité de masse par injection et par succion soit égal. Le cylindre qui subit l'injection est le cylindre amont et la succion est le cylindre aval.

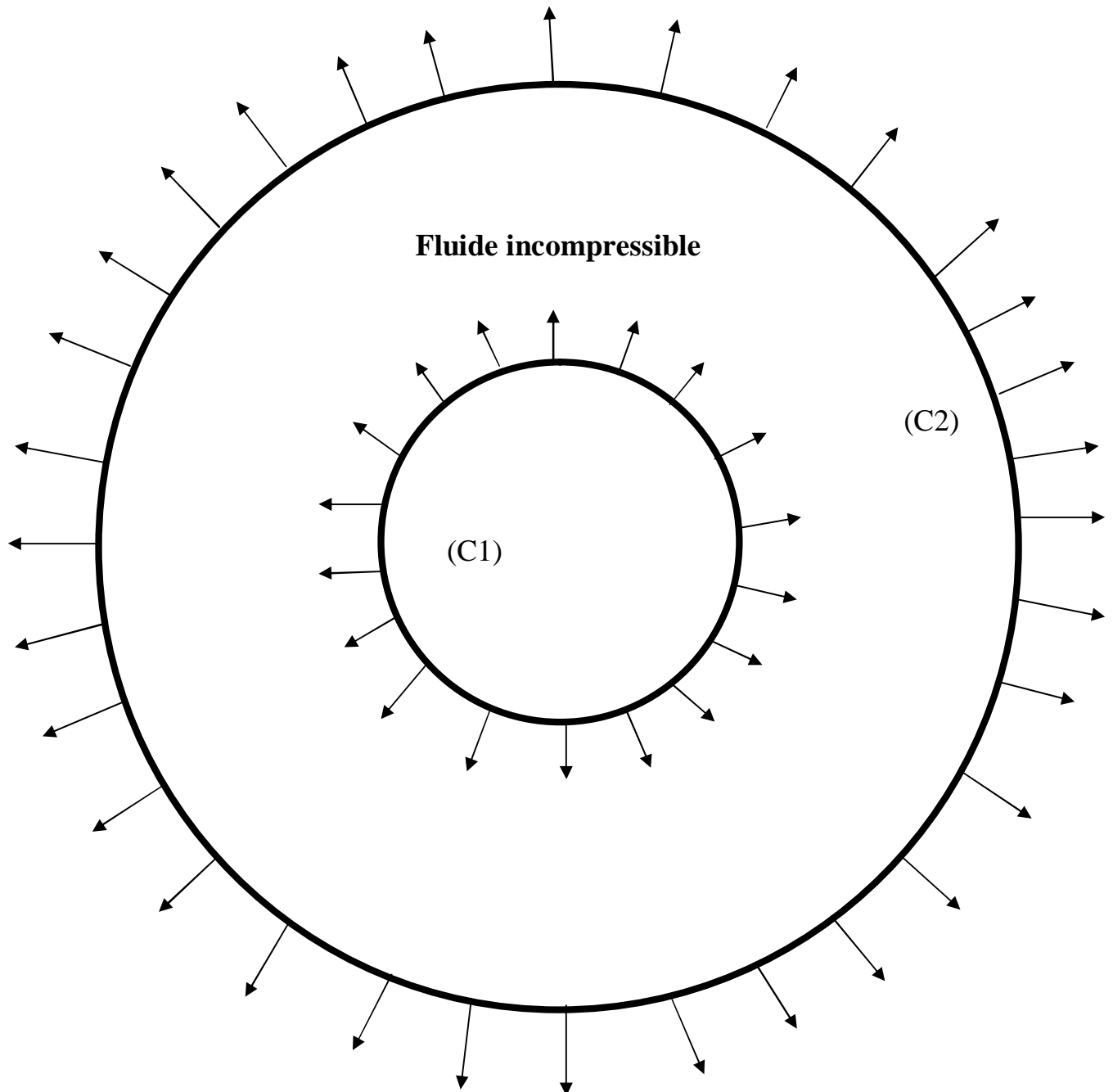


Figure 8a : Le cylindre (C_1) subit l'injection et le cylindre (C_2) subit la succion

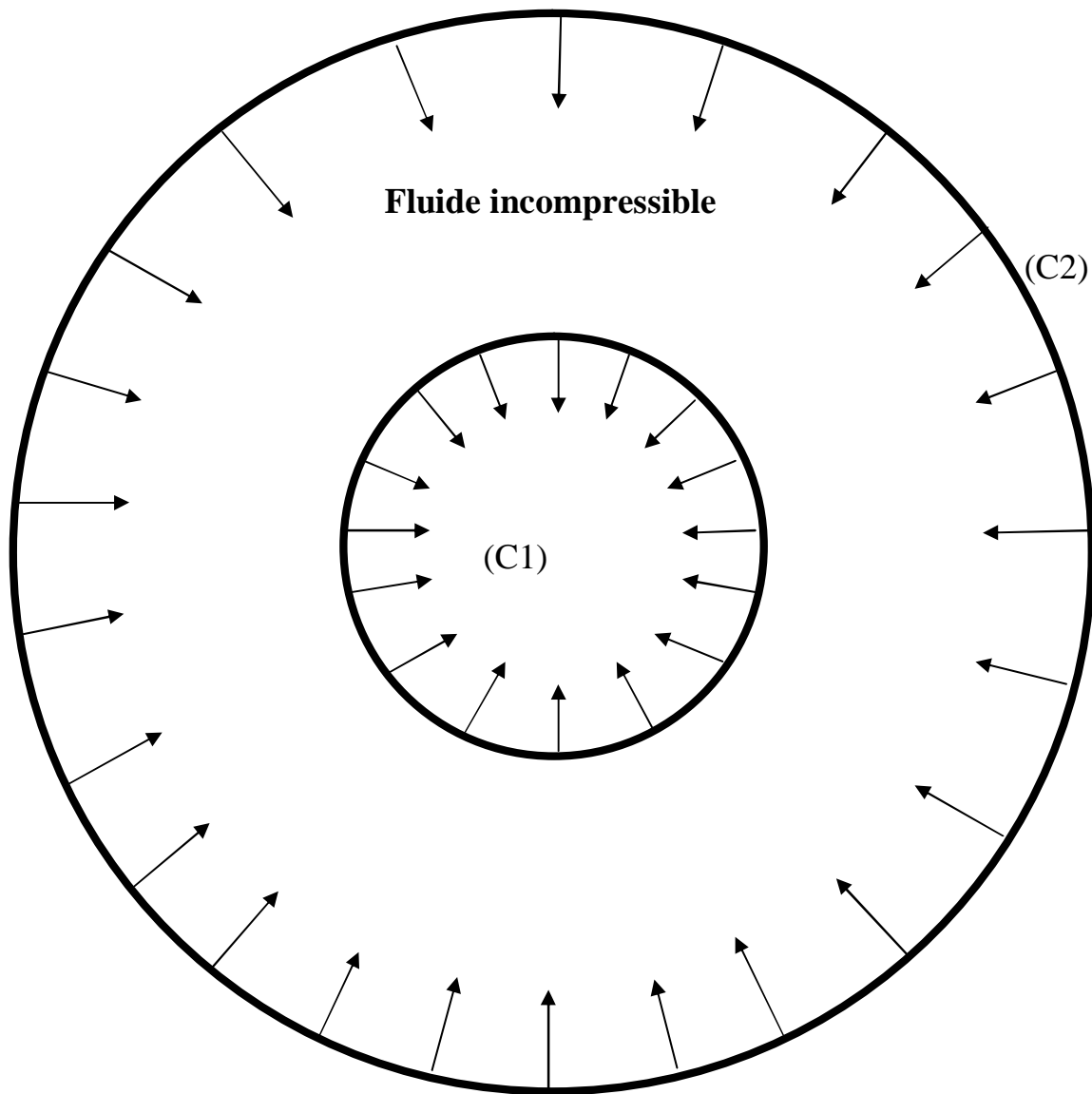


Figure 8b : Le cylindre (C_2) subit l'injection et le cylindre (C_1) subit la succion

En somme, les deux différentes premières configurations ci-dessus sont à rejeter, seules les deux dernières configurations sont à retenir car elles assurent la conservation de la masse du fluide dans la conduite annulaire.

II-3 RELATION ENTRE LES VITESSES DU FLUIDE SUR LES DEUX CYLINDRES AMONT ET AVAL

II-3-1 Equation de conservation de la masse

Au chapitre précédent nous avons établi l'équation de conservation de la masse dans un domaine de fluide ayant un débit entrant et un débit sortant à la relation (1.8) et s'écrivant ainsi :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho(|q_i| - |q_s|), \quad (2.1)$$

où ρ , \mathbf{V} , q_i et q_s désignent respectivement la masse volumique du fluide, le champ de vitesse du fluide, débits d'injection et de succion par unité de masse [61-63].

avec $q_i \geq 0$ et $q_s \leq 0$

Pour un fluide incompressible en transformation isotherme, la masse volumique est constante ($\rho = \text{cte}$) alors la relation $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et l'équation (2.1) se réduit :

$$\text{div} \mathbf{V} = |q_i| - |q_s|. \quad (2.2)$$

En tenant compte des débits entrant et sortant dans la conduite, l'expression complète de l'équation (2.2) doit être remplacée avec les paramètres des termes de la configuration. Ces paramètres sont définis sur le cylindre intérieur (C_1) et sur le cylindre extérieur (C_2), c'est-à-dire les rayons R_1 et R_2 , les surfaces s_1 et s_2 des pores supposées être de même pour tous les pores d'un même cylindre, le nombre total de pores N_1 et N_2 . La vitesse V_1 du fluide est celle du cylindre intérieur et la vitesse V_2 du fluide celle du cylindre extérieur et enfin L est la longueur des deux cylindres.

Comme cela se fait habituellement pour les écoulements axisymétriques dans les conduites annulaires poreuses, l'aspect géométrique de la conduite est caractérisé par le paramètre du rapport d'entrefer δ , qui est défini pour permettre la comparaison de la demi-largeur h de l'entrefer et du rayon moyen de la conduite annulaire, celui-ci est défini par :

$$\delta = \frac{\frac{(R_2 - R_1)}{2}}{\frac{(R_1 + R_2)}{2}} = \frac{h}{R_1 + h}, \quad \text{avec } h = \frac{R_2 - R_1}{2} \quad (2.3)$$

où h et $(R_1 + R_2)/2$ désignent respectivement la moitié de l'entrefer et le rayon moyen.

Comme les vitesses de suction et d'injection sont orthogonales à la surface des cylindres, le débit de masse du fluide par définition est donné par:

$$q = \iint_{(S)} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.4)$$

Si la surface (S) est élémentaire comme le cas d'un pore de surface quasi-punctuelle (s) , la formule ci-dessus donne :

$$q = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{s}. \quad (2.5)$$

En introduisant le cosinus de l'angle α entre la normale unitaire \mathbf{n}_p au pore et le champ de vitesse \mathbf{V} , on obtient :

$$q = \rho |\mathbf{V}| |\mathbf{n}_p| s \cos \alpha. \quad (2.6)$$

En tenant compte du fait que le fluide est injecté ou extorqué orthogonalement à la paroi, on a $\alpha = 0$ dans le cas de la suction et $\alpha = \pi$ dans le cas de l'injection. La relation (2.6) se réduit alors :

$$q = \pm \rho V s. \quad (2.7)$$

Considérons par exemple que l'injection a lieu sur le cylindre extérieur (C_2) et la succion sur le cylindre intérieur (C_1). En introduisant le nombre total des pores des deux cylindres N_1 et N_2 respectivement, et la surface des pores des deux cylindres s_1 et s_2 respectivement, il vient :

$$q_s = \rho N_1 V_1 s_1 \quad \text{et} \quad q_i = -\rho N_2 V_2 s_2. \quad (2.8)$$

En considérant que le volume total entre les deux cylindres est calculé de la manière suivante $V = \pi(R_2^2 - R_1^2)L$, alors les débits de masse par unité de masse sont ainsi trouvés et définis par :

$$q_s = \frac{N_1 (V_1 s_1)}{\pi (R_2^2 - R_1^2) L} \quad \text{et} \quad q_i = -\frac{N_2 (V_2 s_2)}{\pi (R_2^2 - R_1^2) L}. \quad (2.9)$$

En insérant ces débits massiques trouvés ci-dessus dans la relation (2.2) et en tenant compte du fait que, le débit de masse est additif, il vient :

$$\text{div}\mathbf{V} = \left| \frac{N_2 (V_2 s_2)}{\pi (R_2^2 - R_1^2) L} \right| - \left| \frac{N_1 (V_1 s_1)}{\pi (R_2^2 - R_1^2) L} \right|, \quad (2.10)$$

si l'on considère que le fluide est injecté sur le cylindre extérieur (C_2) et extorqué par le cylindre intérieur (C_1). En introduisant les densités de pores λ_1 et λ_2 qui sont définies comme le nombre total de pores par unité de surface pour $N_1 = 2\pi R_1 L \lambda_1$ au cylindre intérieur et pour $N_2 = 2\pi R_2 L \lambda_2$ au cylindre extérieur, l'équation (2.10) devient alors :

$$\text{div}\mathbf{V} = \frac{2}{(R_2^2 - R_1^2)} (\lambda_2 R_2 V_2 s_2 - \lambda_1 R_1 V_1 s_1). \quad (2.11)$$

De manière simple, pour vérifier de façon automatique la conservation de la masse dans la conduite annulaire, il faut que le champ de vitesse soit à flux

conservatif ($div\mathbf{V}=0$). Ceci induit une relation reliant la vitesses V_1 du fluide sur le cylindre intérieur et la vitesse V_2 du fluide sur le cylindre extérieur trouvée à partir de l'équation (2.11) en posant:

$$div\mathbf{V} = \frac{2}{(R_2^2 - R_1^2)} (\lambda_2 R_2 V_2 s_2 - \lambda_1 R_1 V_1 s_1) = 0. \quad (2.12)$$

En explicitant dans l'expression posée ci-dessus la vitesse V_2 du fluide, on obtient alors une relation de proportionnalité entre les vitesses du fluide et définie par :

$$V_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \left(\frac{s_1}{s_2} \right) \left(\frac{R_1}{R_2} \right) V_1. \quad (2.13)$$

Pour un coefficient supplémentaire de vitesse imposé de façon arbitraire entre les vitesses du fluide sur les cylindres amont et aval respectivement V_1 et V_2 , la relation obtenue dans l'équation (2.13) peut se mettre sous la forme :

$$V_2 = c \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \left(\frac{s_1}{s_2} \right) \left(\frac{R_1}{R_2} \right) V_1, \quad (2.14)$$

où c est un coefficient de transmission arbitrairement choisi.

En fixant les paramètres suivants : $\lambda = \lambda_1 / \lambda_2$, $s = s_1 / s_2$, et en exprimant le rapport des rayons sous la forme $R_1 / R_2 = (1 - \delta) / (1 + \delta)$, l'équation obtenue à la relation (2.14) se réduit alors :

$$V_2 = \sigma \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right) V_1, \quad \text{avec } \sigma = c \lambda s \quad (2.15)$$

où σ désigne le coefficient de vitesse.

En conclusion, la relation entre les vitesses de l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible établie est gouvernée par le paramètre σ , avec σ défini

comme coefficient de vitesse dépendant du rapport de densités des pores, du rapport de la surface des pores, et du coefficient de transmission choisi arbitrairement. Cette relation sera utilisée ultérieurement pour établir les conditions aux limites.

II-4 EQUATION DE VORTICITE

II-4-1 Existence de la formation de courant

Pour cela, on choisit un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec l'origine sur l'axe des cylindres. Les vecteurs unitaires radial, azimuthal et axial sont notés $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ respectivement. Si les configurations (8a) et (8b) sont adoptées et si la condition trouvée dans l'équation (2.12) est satisfaite, alors la conservation de la masse est assurée dans la conduite annulaire. Ceci conduit à un champ de vitesse à divergence nulle du fluide car le fluide présent dans la conduite annulaire est incompressible. En coordonnées polaires, on a:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (2.16)$$

où V_r et V_θ représentent respectivement les composantes radiale et orthoradiale du champ de vitesse du fluide incompressible. En simplifiant la relation (2.16) par $1/r$, il vient:

$$\frac{\partial}{\partial r} (rV_r) = -\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}. \quad (2.17)$$

En explicitant la vitesse radiale et la vitesse orthoradiale issues de la relation (2.17), on obtient alors la fonction de courant ψ dans le plan polaire définie par:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.18)$$

L'existence de la fonction courant nous conduit à chercher une relation entre la fonction de courant et le rotationnel du champ de vitesse car celle-ci nous servira dans la suite pour l'établissement de l'équation de vorticité. Pour cela nous procédons par le calcul du rotationnel du champ de vitesse du fluide, on a :

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z. \quad (2.19)$$

En remplaçant les relations de ψ posées à l'équation (2.18) dans la relation (2.19) il vient:

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.20a)$$

La relation obtenue ci-dessus s'écrit alors :

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z, \text{ avec } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.20b)$$

Dans le cas pratique de notre problème, la relation (2.20b) sera adoptée pour la suite.

Le rotationnel de ce champ de vitesse peut encore être trouvé pour d'autres familles de coordonnées comme le cas des coordonnées cartésiennes pour un écoulement laminaire se produisant dans un canal d'un fluide incompressible et qui nous permettra de faire une comparaison avec celui du plan polaire. Pour cela, la divergence du champ de vitesse (champ de vitesse ayant des composantes u et v) est nulle en tout point du fluide et la fonction de courant qui existe, peut se mettre sous la forme :

$$\mathit{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.21a)$$

La relation (2.21a) peut encore se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.21b)$$

En explicitant les vitesses u et v de la relation (2.21b), on obtient la fonction de courant ψ dans le plan cartésien définie par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.21c)$$

En calculant de nouveau, le rotationnel du champ de vitesse pour un tel écoulement, on obtient:

$$\mathbf{rotV} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \quad (2.22)$$

En remplaçant dans la relation (2.22) les expressions de la fonction de courant posées à la relation (2.21c), on a :

$$\mathbf{rotV} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \mathbf{e}_z. \quad (2.23)$$

La relation obtenue prend la forme suivante :

$$\mathbf{rotV} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z, \quad \text{avec} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

En conclusion, la fonction de courant satisfait alors la relation (2.20b) attendue en coordonnées cartésiennes comme le montre de la relation (2.24).

II-4-2 Obtention de l'équation de vorticité

Pour l'obtention de l'équation de vorticité, nous allons nous servir de deux méthodes : la première consiste à utiliser des dérivées partielles sur les équations de Navier-Stokes établies et détaillées au chapitre précédent en coordonnées cylindriques. La seconde utilise l'application directe du rotationnel du champ de

vitesse sur l'équation de Navier-Stokes obtenue à la relation (1.26) du chapitre précédent pour un fluide incompressible newtonien.

(a) Première méthode

L'écoulement laminaire se produisant dans le plan polaire (plan formé de r et θ), alors les équations de Navier-Stokes obtenues au chapitre précédent données par les relations (1.28a) et (1.28b) en coordonnées cylindriques se réduisent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.25a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_\theta V_r}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (2.25b)$$

avec $\nu = \mu / \rho$ qui représente la viscosité cinématique du fluide.

En conservant l'équation (2.25a) et en multipliant l'équation (2.25b) par r , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$r \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + r V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - V_r V_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$+v \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right). \quad (2.26b)$$

En dérivant l'équation (2.26a) par rapport à θ et l'équation (2.26b) par rapport à r , en considérant que la masse volumique ρ ne dépend pas de r et θ , et en effectuant les factorisations en même temps sur les dérivées trouvées pour réduire les expressions calculées, il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + V_r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 V_r}{\partial \theta^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right], \end{aligned} \quad (2.27a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + r V_r \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + V_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) - V_\theta \frac{\partial V_r}{\partial r} = \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.27b)$$

En soustrayant la relation (2.27a) par la relation (2.27b) et en effectuant plusieurs factorisations pour réduire les différentes expressions calculées, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \frac{V_r}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{V_\theta}{\partial r} \right) + r V_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) \\ & + \frac{V_\theta}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) - \frac{V_\theta}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) - 2 \frac{V_r}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) = \\ & v \left[-r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Introduisons les composantes du champ de vitesse définies à la relation (2.18) (

$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, $V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$) dans la relation (2.28), on obtient une équation aux

dérivées partielles vérifiée par la fonction de courant. Nous procédons par les calculs des termes issus de la relation ci-dessus, pour cela on a :

Le calcul du terme $\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r}$

$$\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (2.29a)$$

La variable r ne dépendant pas de la variable θ , alors la relation (2.29a) s'écrit :

$$\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = r \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right). \quad (2.29b)$$

la relation (2.29b) ainsi obtenue peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = r D^2 \psi, \text{ avec } D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.30)$$

Il en découle pour les autres termes en utilisant la même procédure et en remplaçant le terme calculé ci-dessus dans chaque expression, il vient:

$$\frac{V_r}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot (r D^2 \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot D^2 \psi. \quad (2.31a)$$

$$\frac{V_\theta}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi. \quad (2.31b)$$

$$r V_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (2.31c)$$

$$\frac{V_\theta}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot D^2 \psi \quad (2.31d)$$

$$\frac{V_r}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (2.31e)$$

Comme ρ ne dépend pas de r et θ , il en est de même pour la viscosité cinématique ν , le terme de la relation (2.28) se calcule alors aisément :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right) = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} (D^2 \psi) \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D^2 \psi) \quad (2.32b)$$

En remplaçant toutes les relations trouvées ci-dessus dans la relation (2.28), on obtient alors:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + r D^2 \psi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} D^2 \psi \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = r \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (D^2 \psi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D^2 \psi) \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

En simplifiant la relation ci-dessus par r , il vient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + D^2 \psi \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi \right) = \nu D^2 D^2 \psi, \quad (2.34)$$

$$\text{avec } D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

L'écoulement laminaire se produisant dans le plan polaire avec un débit de

masse constant ($\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} D^2 \psi = 0$) alors la relation (2.34) se réduit :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} D^2 \psi \right) = \nu D^2 D^2 \psi \quad (2.35)$$

L'équation obtenue ci-dessus est une équation de vorticité de l'écoulement laminaire en régime permanent d'un fluide incompressible dans le plan polaire.

On remarque que le terme contenant les forces de pression n'apparaît plus dans l'équation (2.35). Gr ce à la manipulation précédente, ces forces ont été intégrées dans les autres paramètres du mouvement.

(b) Deuxième méthode

L'écoulement étudié est régi par l'équation de la quantité de mouvement obtenue au chapitre précédent [61-63] et définie par :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P + \nu \Delta \mathbf{V} \quad (2.36)$$

où \mathbf{V} représente le vecteur vitesse, P la pression, Δ l'opérateur vecteur laplacien et ν la viscosité cinématique du fluide. L'écoulement présent a lieu dans le plan polaire, pour cela nous chercherons à établir l'équation de vorticité dans ce plan.

Pour obtenir l'équation différentielle partielle d'un écoulement polaire se produisant dans le plan polaire satisfait par ψ et appelée équation de vorticité ou équation de transport de vorticité, nous prenons le rotationnel des deux membres de l'équation (2.36). Après l'avoir fait, nous utilisons l'équation (2.20b) et nous appliquons ensuite les formules mathématiques valables pour tout champ vectoriel en coordonnées polaires.

$$\mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + \mathbf{rot} \left(\mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \right) + \mathbf{rot} [\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}] = \mathbf{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P \right) + \mathbf{rot} (\nu \Delta \mathbf{V}). \quad (2.37)$$

Après avoir introduit le rotationnel de \mathbf{V} dans la relation (2.36), on procède par le calcul de chaque terme de l'équation (2.37) on a :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{V}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z. \quad (2.38a)$$

En ce qui concerne le terme ci-dessous, nous allons appliquer les propriétés mathématiques connues sur les opérateurs :

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)\right) = \mathbf{0}. \quad (2.38b)$$

Concernant le calcul du terme $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V})$, on cherche d'abord à trouver le terme $\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}$ puis on applique le rotationnel à la relation obtenue pour avoir l'expression finale, pour cela on a :

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z \wedge (V_r \mathbf{e}_r + V_\theta \mathbf{e}_\theta) = (\nabla^2 \psi) V_\theta \mathbf{e}_r - (\nabla^2 \psi) V_r \mathbf{e}_\theta. \quad (2.39a)$$

en remplaçant V_r et V_θ de leurs expressions qui lient à ψ , il vient :

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = \nabla^2 \psi \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r - \nabla^2 \psi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\theta. \quad (2.39b)$$

En factorisant la relation ci-dessus, on a :

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -\nabla^2 \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right). \quad (2.39c)$$

La relation ainsi obtenue prend la forme :

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{grad} \psi, \quad (2.40)$$

$$\text{avec } \mathbf{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

En appliquant le rotationnel à l'équation (2.40) obtenue, on a :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{rot}\left(-(\nabla^2 \psi) \mathbf{grad} \psi\right) \quad (2.41)$$

En se servant de la propriété mathématique connue sur les opérateurs suivante :

$\mathbf{rot}(f \mathbf{A}) = f \mathbf{rotA} + \mathbf{grad} f \wedge \mathbf{A}$ et en l'appliquant à la relation (2.41) on obtient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{rot}(\mathbf{grad} \psi) + \mathbf{grad}(-\nabla^2 \psi) \wedge \mathbf{grad} \psi. \quad (2.42)$$

or d'après les propriétés mathématiques connues sur les opérateurs $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\psi) = \mathbf{0}$, l'équation (2.42) se réduit :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = -\mathbf{grad}(\nabla^2 \psi) \wedge \mathbf{grad} \psi \quad (2.43a)$$

En remplaçant le gradient défini en coordonnées polaires dans la relation ci-dessus, on a :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = -\left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \wedge \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right). \quad (2.43b)$$

En effectuant le calcul vectoriel à la relation (2.43b), il vient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) \mathbf{e}_z. \quad (2.43c)$$

Un fluide est dit incompressible lorsque sa masse volumique ne dépend pas de la pression et celle-ci varie faiblement quand la température varie aussi très peu. Dans le cadre de ce travail, le fluide est un liquide et il est isotherme, alors sa masse volumique est rigoureusement constante. En appliquant cette définition du fluide incompressible, on a alors :

$$\mathbf{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} P \right) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{rot}(\mathbf{grad} P) = \mathbf{0}. \quad (2.44)$$

Calculons le terme $\mathbf{rot}(v \Delta \mathbf{V})$

En général, pour un fluide incompressible (ρ est constant), les coefficients de viscosités μ et ν sont aussi constants. On a :

$$\mathbf{rot}(\nu \Delta \mathbf{V}) = \nu \mathbf{rot}(\Delta \mathbf{V}). \quad (2.45)$$

On applique préalablement la relation suivante pour avoir l'expression vectorielle équivalente de $\Delta \mathbf{V}$ valable quelque soit le système de coordonnées, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) &= \mathbf{grad}(\mathit{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\ \Delta \mathbf{A} &= \mathbf{grad}(\mathit{div} \mathbf{A}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) \end{aligned}$$

on a alors :

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{grad}(\mathit{div} \mathbf{V}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V}). \quad (2.46)$$

Or pour un écoulement laminaire d'un fluide incompressible $\mathit{div} \mathbf{V} = 0$ alors l'équation (2.46) se réduit :

$$\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V}). \quad (2.47a)$$

En remplaçant le rotationnel du champ de vitesse trouvé à la relation (2.20b), alors la relation (2.47a) s'écrit :

$$\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{rot} \left[\left(-\nabla^2 \psi \right) \mathbf{e}_z \right]. \quad (2.47b)$$

En appliquant la propriété mathématique connue sur les opérateurs suivante : $\mathbf{rot}(f \mathbf{A}) = f \mathbf{rot} \mathbf{A} + \mathbf{grad} f \wedge \mathbf{A}$ à la relation obtenue ci-dessus, celle-ci prend une nouvelle forme :

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{rot} \left[\left(\nabla^2 \psi \right) \mathbf{e}_z \right] = \left(\nabla^2 \psi \right) \mathbf{rot} \mathbf{e}_z + \mathbf{grad} \left(\nabla^2 \psi \right) \wedge \mathbf{e}_z \quad (2.48)$$

Or après le calcul, on trouve $\mathbf{rot} \mathbf{e}_z = 0$, en remplaçant ce terme et en arrangeant la relation (2.48) on obtient

$$\Delta \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_r - \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_\theta. \quad (2.49)$$

En appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (2.49), il vient:

$$\mathbf{rot}(\Delta \mathbf{V}) = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nabla^2 \psi \right) \right] \mathbf{e}_z. \quad (2.50)$$

La relation (2.50) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{rot}(\Delta \mathbf{V}) = -(\nabla^2 \nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z, \quad (2.51)$$

$$\text{avec } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

En remplaçant les relations trouvées de chaque terme dans l'équation (2.37), on obtient alors l'équation suivante appelée équation de vorticité ou équation de rotationnel du champ de vitesse \mathbf{V} d'un écoulement polaire et se produisant dans le plan polaire:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (2.52a)$$

L'équation obtenue est l'équation de vorticité. Pour un écoulement laminaire en régime permanent ($\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = 0$), l'équation obtenue ci-dessus devient:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (2.52b)$$

En conclusion, l'utilisation des deux méthodes pour l'obtention de l'équation de vorticité nous a permis d'aboutir à la même équation de vorticité en régime permanent.

En résumé, pour un écoulement laminaire se produisant dans le plan polaire et admettant une fonction de courant, l'équation de vorticité prend la forme suivante:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (2.53)$$

Le problème posé ci-dessus dépend de plusieurs groupements de variables, il faut l'adimensionnaliser pour ressortir les paramètres de contrôle. Pour cela il faut rappeler que le but de l'adimensionnalisation est de rendre les variables du problème sans unité par rapport à leurs valeurs caractéristiques. Ceci a trois intérêts majeurs :

Les équations obtenues sont simples ;

Les équations calculées étant normalisées, elles ne prennent pas de valeurs numériques trop faibles ou trop élevées, ce qui permet de mieux maîtriser les erreurs numériques ;

La solution calculée pour un jeu de nombres caractéristiques est valable pour tous les systèmes naturels ayant le même jeu de nombres caractéristiques : c'est le principe de similitude.

Pour l'adimensionnalisation, nous prenons comme longueur adimensionnelle r^* et comme fonction de courant adimensionnelle ψ^* données respectivement

$$\text{par : } r^* = \frac{r}{h}, \quad \psi^* = \frac{\psi}{V_1 h}.$$

Pour les autres variables, nous utilisons V_1 pour l'adimensionnalisation de la vitesse car nous avons établi une relation de proportionnalité entre les deux vitesses.

Ces variables adimensionnelles sont alors définies :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r^*} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}, \quad (2.54a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta^*} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}}, \quad (2.54b)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{h^2} \nabla^{*2}. \quad (2.54c)$$

En insérant les expressions trouvées ci-dessus dans la relation (2.49), on a :

$$\frac{V_1^2}{h} \frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta^*} \cdot \frac{\partial}{\partial r^*} \nabla^{*2} \psi - \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^*} \nabla^{*2} \psi^* \right) = \frac{V_1}{h^2} \nu \nabla^{*2} \nabla^{*2} \psi. \quad (2.55a)$$

En simplifiant la relation (2.55a) par h/V_1^2 , il vient :

$$\frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta^*} \cdot \frac{\partial}{\partial r^*} \nabla^{*2} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^*} \nabla^{*2} \psi^* \right) = \frac{1}{R_e} \nabla^{*2} \nabla^{*2} \psi^*, \quad (2.55b)$$

où $R_e = \frac{V_1 h}{\nu}$ est le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement du fluide.

Ainsi l'équation (2.55b) obtenue est l'équation de vorticité avec les variables adimensionnelles.

En utilisant les mêmes notations déjà appliquées pour les variables avec dimension, l'équation de vorticité s'écrit alors :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \frac{1}{R_e} \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (2.56)$$

Dans la forme pratique de notre travail, l'équation de vorticité établie ci-dessus avec les variables adimensionnelles pour un écoulement laminaire d'un fluide incompressible se produisant dans le plan polaire en régime permanent.

En résumé, il était question pour nous de présenter les configurations à retenir et les configurations à rejeter, cela nous a permis d'établir une relation de proportionnalité entre les vitesses du fluide à la paroi interne et à la paroi externe. L'équation de vorticité ainsi obtenue est une équation aux dérivées partielles. Dans le but de résoudre notre problème, il est intéressant pour nous de transformer cette équation en une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre quatre. Pour cela nous faisons appel l'hypothèse des solutions semblables de Berman et en plus de cette hypothèse, nous appliquons la normalisation suggérée par Banks et Zaturka.

**CHAPITRE III : RESULTATS
ET DISCUSSION**

III-1 HYPOTHESE DE SOLUTIONS SEMBLABLES DE BERMAN ET NORMALISATION DE BANKS ET ZATURSKA

III-1-1 Hypothèse pionnière de Berman

Cette hypothèse a été appliquée pour la première fois en 1953 par **Berman**: « La composante du champ de vitesse dans la direction de la succion ou de l'injection est indépendante de la coordonnée dans le sens de l'écoulement »[8]. Dans un écoulement le long d'un canal à parois parallèles et poreuses, cette hypothèse se justifie parce que la distance entre reste constante pour une vitesse de succion et d'injection comme dans notre cas où l'épaisseur de l'entrefer reste constante et la vitesse de succion et d'injection est aussi uniforme. Nous appliquons cette hypothèse dans notre problème. On écrit alors $V_r = V_r(r)$ et on rappelle la relation posée ci-dessus définie par :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (3.1a)$$

En intégrant la relation (3.1a), on obtient :

$$\psi(r, \theta) = \theta r V_r(r) + C. \quad (3.1b)$$

On impose la condition suivante : à $\theta = 0$, $\psi = 0$; on obtient alors :

$$\psi(r, \theta) = \theta F(r), \text{ avec } F(r) = r V_r(r) \quad (3.1c)$$

où $F(r)$ est la fonction de courant par unité d'angle polaire.

Cette nouvelle forme de la fonction de courant obtenue ci-dessus est normalisée conformément aux suggestions de Banks et Zaturaska [8].

III-1-2 Normalisation de Banks et Zaturaska [8].

Banks et Zaturaska (1992) proposent de normaliser les variables dans le sens de l'écoulement, par une échelle $\varepsilon = h/R_1$ afin d'obtenir en cas de besoin, des

résultats correspondants au cas $h \ll R_1$ pour lequel les deux cylindres se comportent comme deux plans parallèles et horizontaux distants de h [8].

Le paramètre θ est alors remplacé par θ/ε avec $\varepsilon = h/R_1 = 1/(\delta^{-1} - 1)$

Ce qui nous permet d'écrire la fonction de courant ψ telle que :

$$\psi(r, \theta) = \theta(\delta^{-1} - 1)F(r). \quad (3.2)$$

Cette nouvelle fonction de courant nous amène à chercher les équations vérifiées par F ainsi que les conditions aux limites du problème.

III-2 EQUATIONS ET CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA FONCTION DE COURANT PAR UNITE D'ANGLE POLAIRE F

III-2-1 Equation vérifiée par la fonction de courant par unité d'angle polaire F

Dans le but de déterminer les termes de l'équation (3.2) dépendant de la nouvelle fonction de courant par unité d'angle polaire F , dérivons les termes de cette équation par rapport aux variables r et θ , on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = (\delta^{-1} - 1)F(r) \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \theta(\delta^{-1} - 1)\frac{dF(r)}{dr} \quad (3.3b)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \nabla_r^2 \psi + \nabla_\theta^2 \psi \quad (3.3c)$$

$$\nabla_r^2 \psi = \theta(\delta^{-1} - 1) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF(r)}{dr} \right) = \theta(\delta^{-1} - 1) \nabla_r^2 F(r) \quad (3.3d)$$

$$\nabla_{\theta}^2 \psi = 0 \quad (3.3e)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = \theta (\delta^{-1} - 1) \nabla_r^2 \nabla_r^2 F(r) \quad (3.3f)$$

En insérant les relations obtenues ci-dessus dans l'équation de vorticité (équation. 2.57), on obtient une équation vérifiée par la fonction de courant par unité d'angle polaire F et ne dépendant que de r et définie par :

$$\theta (\delta^{-1} - 1)^2 \left(\frac{1}{r} F \frac{d}{dr} \nabla_r^2 F - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \nabla_r^2 F \right) = \frac{\theta (\delta^{-1} - 1)}{R_e} \nabla_r^2 \nabla_r^2 F. \quad (3.4)$$

En simplifiant par $\theta (\delta^{-1} - 1)$ la relation (3.4), on obtient l'équation différentielle satisfaite par la fonction de courant par unité d'angle polaire F :

$$(\delta^{-1} - 1) \left(\frac{1}{r} F \frac{d}{dr} \nabla_r^2 F - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \nabla_r^2 F \right) = \frac{1}{R_e} \nabla_r^2 \nabla_r^2 F. \quad (3.5)$$

Pour les raisons de calculs numériques, il faut travailler avec les bornes à valeur fixe pour r ou pour tout paramètre jouant le rôle de r , car il faut pouvoir comparer sur les mêmes figures, les différentes courbes numériques tracées en fonction de la distance radiale pour différentes valeurs de δ . Alors, un changement de variable est couramment opéré [8] en remplaçant la variable r par une nouvelle variable η que l'on écrit sous la forme: $\eta = Ar^2 + B$.

Aussi, lorsque $\eta = -1$ on a : $r = \delta^{-1} - 1$; et pour $\eta = 1$, on a $r = \delta^{-1} + 1$. En appliquant ces expressions, on trouve A et B définis ci-dessous:

$$A = \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1 + \delta^2}{2\delta}. \quad (3.6a)$$

En remplaçant A et B dans l'expression de η ci-dessus notée, on obtient la forme suivante:

$$\eta = \frac{\delta}{2} r^2 - \frac{1+\delta^2}{2\delta}, \text{ avec } -1 \leq \eta \leq 1 \quad (3.6b)$$

Ainsi, on cherche à trouver une nouvelle équation vérifiée par F en fonction de η , pour cela on effectue des nouveaux calculs en appliquant la relation (3.6b) dans la relation (3.5), nous sommes alors amenés à calculer les termes qui sont dans l'équation (3.5). Ces termes sont donnés par les relations suivantes :

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\eta}{dr} \frac{d}{d\eta} = 2Ar \frac{d}{d\eta} \quad (3.7a)$$

$$\nabla_r^2 F = 4A \frac{dF}{d\eta} + 4A^2 r^2 \frac{d^2 F}{d\eta^2} \quad (3.7b)$$

$$F \frac{d}{dr} \nabla_r^2 F = 16A^2 r F \frac{d^2 F}{d\eta^2} + 8A^3 r^3 F \frac{d^3 F}{d\eta^3} \quad (3.7c)$$

$$\frac{dF}{dr} \nabla_r^2 F = 8A^2 r \left(\frac{dF}{d\eta} \right)^2 + 8A^3 r^3 \frac{dF}{d\eta} \frac{d^2 F}{d\eta^2} \quad (3.7d)$$

$$\nabla_r^2 \nabla_r^2 F = 32A^2 \frac{d^2 F}{d\eta^2} + 64A^3 r^2 \frac{d^3 F}{d\eta^3} + 16A^4 r^4 \frac{d^4 F}{d\eta^4} \quad (3.7e)$$

On pose : $F^{(1)} = \frac{dF}{d\eta}$, $F^{(2)} = \frac{d^2 F}{d\eta^2}$, $F^{(3)} = \frac{d^3 F}{d\eta^3}$, $F^{(4)} = \frac{d^4 F}{d\eta^4}$

avec la notation : $F^{(m)} = \frac{d^m F}{d\eta^m}$

En introduisant les relations (3.7b), (3.7c), (3.7d) et (3.7e) dans l'équation (3.5), il vient:

$$\begin{aligned}
& (\delta^{-1} - 1) \left(16A^2 FF^{(2)} + 8A^3 r^2 FF^{(3)} - 8A^2 (F^{(1)})^2 - A^3 r^2 F^{(1)} F^{(2)} \right) = \\
& R_e^{-1} \left(32A^2 F^{(2)} + 64A^3 r^2 F^{(3)} + 16A^4 r^4 F^{(4)} \right). \tag{3.8a}
\end{aligned}$$

En simplifiant la relation (3.8a) par $8A^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& (\delta^{-1} - 1) \left(2FF^{(2)} + Ar^2 FF^{(3)} - (F^{(1)})^2 - Ar^2 F^{(1)} F^{(2)} \right) = \\
& R_e^{-1} \left(4F^{(2)} + 8Ar^2 F^{(3)} + 2A^2 r^2 F^{(4)} \right). \tag{3.8b}
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que : $Ar^2 = (1 + 2\eta\delta + \delta^2)/2\delta$, en l'insérant dans la relation (3.8b), celle-ci devient :

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \delta^2 + 2\eta\delta \right)^2 F^{(4)} + 8\delta \left(1 + \delta^2 + 2\eta\delta \right) F^{(3)} + 8\delta^2 F^{(2)} \\
& + R_e (1 - \delta) \left(1 + \delta^2 + 2\eta\delta \right) \left(F^{(1)} F^{(2)} - FF^{(3)} \right) \\
& + 2R_e \delta (1 - \delta) \left((F^{(1)})^2 - 2FF^{(2)} \right) = 0. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

La relation (3.9) est une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre quatre vérifiée par la fonction de courant par unité d'angle polaire F en fonction de la variable η . Alors le problème posé à l'équation (2.66) nécessite des conditions aux limites et celles-ci sont données sur les parois interne et externe.

III-2-2 Conditions aux limites

Les équations de Navier-Stokes (équation (2.18) et équation (2.36)) sont remplacées par une seule équation différentielle (3.9) avec F qui est la fonction de courant par unité d'angle polaire, les conditions aux limites sont alors nécessaires. Elles sont dictées par la considération sur la conservation de la masse développée dans la section II.3.1. En introduisant le paramètre K pour prendre en compte les deux orientations possibles que prendrait l'écoulement, on obtient alors les conditions aux limites suivantes :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = KV_1 \quad \text{et} \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \text{à} \quad r = R_1 \quad (3.10a)$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = KV_2 = K\sigma \left(\frac{\delta^{-1} - 1}{\delta^{-1} + 1} \right) V_1 \quad \text{et} \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \text{à} \quad r = R_2 \quad (3.10b)$$

avec $\sigma = c\lambda s$

Plus précisément, pour $K=1$, le fluide est injecté par le cylindre intérieur C_1 (cylindre amont) et extorqué par le cylindre extérieur C_2 (cylindre aval). Le cas $K=-1$ est la configuration inverse, c'est-à-dire le cylindre intérieur C_1 subit une suction (cylindre aval) et l'injection est appliquée à travers le cylindre extérieur C_2 (cylindre amont).

En adimensionnant les conditions aux limites par les variables adimensionnelles mentionnées ci-dessus, on obtient :

$$V_r^* = K \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} = 0, \quad \text{à} \quad r^* = \frac{R_1}{h} \quad (3.11a)$$

$$V_r^* = \sigma \left(\frac{\delta^{-1} - 1}{\delta^{-1} + 1} \right) K \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} = 0, \quad \text{à} \quad r^* = \frac{R_2}{h} \quad (3.11b)$$

En utilisant les mêmes notations que celles des paramètres adimensionnels, ces conditions aux limites deviennent :

$$V_r = K \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \text{à} \quad r = \delta^{-1} - 1 \quad (3.12a)$$

$$V_r = \sigma \left(\frac{\delta^{-1} - 1}{\delta^{-1} + 1} \right) K \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \text{à} \quad r = \delta^{-1} + 1 \quad (3.12b)$$

En reliant la fonction de courant par unité d'angle polaire F aux composantes du champ de vitesse posées à la relation (2.18), il vient :

$$V_r = \frac{1}{r}(\delta^{-1} - 1)F \text{ et } V_\theta = -\theta(\delta^{-1} - 1)\frac{dF}{dr}. \quad (3.13)$$

En appliquant aux équations (3.12a) et (3.12b) à la relation (3.13), les conditions aux limites vérifiées par F sont déduites :

$$F = K \text{ et } \frac{dF}{dr} = 0, \text{ à } r = \delta^{-1} - 1 \quad (3.14a)$$

$$F = K\sigma \text{ et } \frac{dF}{dr} = 0, \text{ à } r = \delta^{-1} + 1, \quad (3.14b)$$

avec $K = -1$ ou $K = 1$ et $\sigma = c\lambda s$

En tenant compte de l'ajustement des constantes A et B obtenues pour $\eta = -1$ à $r = \delta^{-1} - 1$ et pour $\eta = 1$ à $r = \delta^{-1} + 1$ alors ces conditions aux limites sont obtenues :

$$F = K \text{ et } F^{(1)} = 0, \text{ à } \eta = -1 \quad (3.15a)$$

$$F = \sigma K \text{ et } F^{(1)} = 0, \text{ à } \eta = 1 \quad (3.15b)$$

avec ($K = -1$ ou $K = 1$)

En résumé, le problème obtenu est un problème aux limites en deux points défini ci-dessous :

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\eta\delta)^2 F^{(4)} + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)F^{(3)} + 8\delta^2 F^{(2)} \\ & + R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)(F^{(1)}F^{(2)} - FF^{(3)}) \\ & + 2R_e\delta(1 - \delta)((F^{(1)})^2 - 2FF^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$F = K \text{ et } F^{(1)} = 0, \text{ à } \eta = -1 \quad (3.17a)$$

$$F = \sigma K \text{ et } F^{(1)} = 0, \text{ à } \eta = 1 \quad (3.17b)$$

avec ($K = -1$ ou $K = 1$)

Pour résoudre notre problème, plusieurs méthodes peuvent être appliquées. Dans le cas pratique de notre problème, nous allons utiliser la méthode de tir.

III-3 RESOLUTION PAR LA METHODE DE TIR

Cette méthode expliquée en détail dans la référence [24] est constituée en trois étapes que nous appliquons à notre problème dans les sections III-3-1, III-3-2 et III-3-3.

III-3-1 Transformation du problème à résoudre en un problème à conditions initiales.

Pour résoudre le problème posé par l'équation (3.16) avec les conditions aux limites données dans les équations (3.17a) et (3.17b), on transforme [65-66] le problème posé en un problème à conditions initiales en conservant la même équation à résoudre et les conditions aux limites existantes à la borne inférieure $\eta = -1$, puis en introduisant à cette borne les deux conditions manquantes librement choisies pour la deuxième et la troisième dérivée (α, β) . Ce qui donne le problème ci-dessous avec pour fonction inconnue G :

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\eta\delta)^2 G^{(4)} + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)G^{(3)} + 8\delta^2 G^{(2)} \\ & + R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)(G^{(1)}G^{(2)} - GG^{(3)}) \\ & + 2R_e(1 - \delta)((G^{(1)})^2 - 2GG^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (3.18a)$$

Les nouvelles conditions aux limites sont alors dictées :

$$G = K, \quad G^{(1)} = 0, \quad G^{(2)} = \alpha \quad \text{et} \quad G^{(3)} = \beta, \quad \text{à} \quad \eta = -1. \quad (3.18b)$$

III-3-2 Optimisation sur la borne finale

Pour des valeurs données α et β , le problème à condition initiale ci-dessus est résolu au moyen de l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 [24]. La solution numérique G obtenue pour le problème à conditions initiales est identique à F lorsque les valeurs (α, β) sont ajustées aux valeurs optimales (α^*, β^*) pour

lesquelles la solution G vérifie les conditions imposées à F à la borne supérieure $\eta=1$. A cet effet, une technique d'optimisation numérique est nécessaire à la borne finale $\eta=1$. La fonction G obtenue pour un couple (α, β) donné est alors utilisée pour définir une fonction coût quadratique notée Q :

$$Q(\alpha, \beta) = |\mathbf{U}|^2 = U_1^2(\alpha, \beta) + U_2^2(\alpha, \beta). \quad (3.19)$$

où \mathbf{U} est un vecteur dont les composantes U_1 et U_2 mesurent l'écart entre les conditions vérifiées à la borne $\eta = 1$ par la solution numérique G et la solution désirée F telles que:

$$U_1(\alpha, \beta) = G(\eta=1) - K\sigma \quad (3.20a)$$

$$U_2(\alpha, \beta) = G^{(1)}(\eta=1) - 0 \quad (3.20b)$$

III-3-3 Calcul des composantes de la matrice Jacobienne

Dans le but de minimiser \mathbf{U} , c'est-à-dire U_1 et U_2 , on initialise la procédure avec un couple de valeur initiale (α_0, β_0) puis on peut appliquer l'algorithme d'optimisation par la méthode de plus grande pente comme cela a été fait dans les travaux antérieurs de notre équipe de recherche [65-68]. Dans le cadre de notre travail, nous appliquons l'algorithme de Newton-Raphson [24,69] décrit comme suit. Partant d'un couple (α, β) afin d'obtenir l'écart $(\delta\alpha, \delta\beta)$ tel que $(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta)$ donne les valeurs minimales de U_1 et U_2 , on applique le développement limité de Taylor à l'ordre 1 de U_1 et U_2 autour de α et β . Ce qui donne :

$$U_1(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta) = U_1(\alpha, \beta) + \left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha + \left(\frac{\partial U_1}{\partial \beta}\right)\delta\beta \quad (3.21a)$$

$$U_2(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta) = U_2(\alpha, \beta) + \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha + \left(\frac{\partial U_2}{\partial \beta}\right)\delta\beta. \quad (3.21b)$$

On désire avoir U_1 et U_2 nulles ; pour cela on pose:

$$U_1(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta) = 0 \text{ et } U_2(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta) = 0. \quad (3.22)$$

On obtient alors le système lineaire suivant avec pour inconnues $\delta\alpha$ et $\delta\beta$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha + \left(\frac{\partial U_1}{\partial \beta}\right)\delta\beta &= -U_1(\alpha, \beta) \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha + \left(\frac{\partial U_2}{\partial \beta}\right)\delta\beta &= -U_2(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3.23)$$

La relation (3.23) obtenue ci-dessus peut encore se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$[J] \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } [J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial U_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial U_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial U_2}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (3.24a)$$

où $[J]$ représente la matrice Jacobienne construite à partir de U_1 et U_2 telle que :

$$J_{1,1} = \frac{\partial U_1}{\partial \alpha}, J_{1,2} = \frac{\partial U_1}{\partial \beta}, J_{2,1} = \frac{\partial U_2}{\partial \alpha}, \text{ et } J_{2,2} = \frac{\partial U_2}{\partial \beta} \quad (3.24b)$$

A l'itération numéro n , on a alors à résoudre :

$$[J]^{(n)} \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \end{pmatrix}^{(n)} = - \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}^{(n)}, \quad (3.25a)$$

puis à obtenir le couple (α, β) à l'itération suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^{(n)} + \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \end{pmatrix}^{(n)}, \quad (3.25b)$$

Ainsi, les calculs des composantes de la Jacobienne $J_{i,j}$ ($i=1,2 ; j=1,2$) nous

amènent à chercher les fonctions $\frac{\partial G}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial G}{\partial \beta}$. Pour cela on pose :

$$p = \frac{\partial G}{\partial \alpha} \quad \text{et} \quad q = \frac{\partial G}{\partial \beta} \quad (3.26)$$

En admettant que :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(G(\eta=1)) = \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right)_{\eta=1} = p(\eta=1) \quad (3.27a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(G(\eta=1)) = \left(\frac{\partial G}{\partial \beta} \right)_{\eta=1} = q(\eta=1) \quad (3.27b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial p}{\partial \eta} = p^{(1)} \quad (3.28a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial G}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial q}{\partial \eta} = q^{(1)} \quad (3.28b)$$

Les composantes $J_{i,j}$ de la matrice jacobienne sont alors données par les relations:

$$J_{1,1} = p(\eta=1), J_{1,2} = q(\eta=1), J_{2,1} = p^{(1)}(\eta=1) \quad \text{et} \quad J_{2,2} = q^{(1)}(\eta=1). \quad (3.29)$$

Par conséquent, le calcul de $J_{i,j}$ nécessite de connaître p, q et leurs dérivées premières $p^{(1)}$ et $q^{(1)}$ à la borne finale $\eta=1$. Pour obtenir ces valeurs, nous différencions l'équations (3.18a) par rapport à α . On a alors :

$$\begin{aligned}
& (1 + \delta^2 + 2\eta\delta)^2 \frac{\partial G^{(4)}}{\partial \alpha} + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\eta\delta) \frac{\partial G^{(3)}}{\partial \alpha} + 8\delta^2 \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \alpha} \\
& + R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta) \left(G^{(2)} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial \alpha} + G^{(1)} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \alpha} - G^{(3)} \frac{\partial G}{\partial \alpha} - G \frac{\partial G^{(3)}}{\partial \alpha} \right) \\
& + 2R_e\delta(1 - \delta) \left(2G^{(1)} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial \alpha} - 2G^{(2)} \frac{\partial G}{\partial \alpha} - 2G \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \alpha} \right) = 0. \tag{3.30a}
\end{aligned}$$

De même, on applique la différenciation à la relation (3.18b) par rapport à β ;

on a :

$$\begin{aligned}
& (1 + \delta^2 + 2\eta\delta)^2 \frac{\partial G^{(4)}}{\partial \beta} + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\eta\delta) \frac{\partial G^{(3)}}{\partial \beta} + 8\delta^2 \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \beta} \\
& + R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta) \left(G^{(2)} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial \beta} + G^{(1)} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \beta} - G^{(3)} \frac{\partial G}{\partial \beta} - G \frac{\partial G^{(3)}}{\partial \beta} \right) \\
& + 2R_e\delta(1 - \delta) \left(2G^{(1)} \frac{\partial G^{(1)}}{\partial \beta} - 2G^{(2)} \frac{\partial G}{\partial \beta} - 2G \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \beta} \right) = 0. \tag{3.30b}
\end{aligned}$$

En évaluant les dérivées par rapport à η liant p et q à G , on a :

$$\frac{\partial G^{(1)}}{\partial \alpha} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) = \frac{dp}{d\eta} = p^{(1)} \tag{3.31a}$$

$$\frac{\partial G^{(2)}}{\partial \alpha} = \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) = \frac{d^2 p}{d\eta^2} = p^{(2)} \tag{3.31b}$$

$$\frac{\partial G^{(3)}}{\partial \alpha} = \frac{d^3}{d\eta^3} \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) = \frac{d^3 p}{d\eta^3} = p^{(3)} \tag{3.31c}$$

$$\frac{\partial G^{(4)}}{\partial \alpha} = \frac{d^4}{d\eta^4} \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) = \frac{d^4 p}{d\eta^4} = p^{(4)} \tag{3.31d}$$

De manière analogue avec q , on a :

$$\frac{\partial G^{(1)}}{\partial \beta} = \frac{dq}{d\eta} = q^{(1)} \tag{3.32a}$$

$$\frac{\partial G^{(2)}}{\partial \beta} = \frac{d^2 q}{d\eta^2} = q^{(2)} \quad (3.32b)$$

$$\frac{\partial G^{(3)}}{\partial \beta} = \frac{d^3 q}{d\eta^3} = q^{(3)} \quad (3.32c)$$

$$\frac{\partial G^{(4)}}{\partial \beta} = \frac{d^4 q}{d\eta^4} = q^{(4)} \quad (3.32d)$$

En remplaçant les relations (3.31a), (3.31b), (3.31c) et (3.31d) trouvées dans la relation (3.30a), il vient :

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\eta\delta)^2 p^{(4)} + (1 + \delta^2 + 2\eta\delta)(8\delta - R_e(1 - \delta)G)p^{(3)} \\ & + (8\delta^2 R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)G^{(1)} - 4R_e\delta(1 - \delta)G)p^{(2)} \\ & + (R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)G^{(2)} + 4R_e\delta(1 - \delta)G^{(1)})p^{(1)} \\ & - (R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)G^{(3)} + 4R_e\delta(1 - \delta)G^{(2)})p = 0. \end{aligned} \quad (3.33a)$$

De même avec q , on a aussi :

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\eta\delta)^2 q^{(4)} + (1 + \delta^2 + 2\eta\delta)(8\delta - R_e(1 - \delta)G)q^{(3)} \\ & + (8\delta^2 R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)G^{(1)} - 4R_e\delta(1 - \delta)G)q^{(2)} \\ & + (R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)G^{(2)} + 4R_e\delta(1 - \delta)G^{(1)})q^{(1)} \\ & - (R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\eta\delta)G^{(3)} + 4R_e\delta(1 - \delta)G^{(2)})q = 0. \end{aligned} \quad (3.33b)$$

Alors, les relations (3.33a) et (3.33b) sont appelées les équations de perturbation vérifiées par p et q respectivement.

Trouvons maintenant les conditions aux limites vérifiées par p et q . Pour cela on dérive la relation (3.18b) par rapport à α en $\eta = -1$, on a :

$$G(-1) = K, \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha}(-1) = 0 \quad (3.34a)$$

En tenant compte de l'expression de p posée ($p = \partial G / \partial \alpha$), la relation (3.26) devient :

$$p(-1) = 0. \quad (3.34b)$$

De même, opérons les dérivées sur G pour obtenir les conditions aux limites définies par p , on a :

$$G^{(1)}(-1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} [G^{(1)}(-1)] = \frac{dp}{d\eta}(-1) = 0. \quad (3.35c)$$

$$G^{(2)}(-1) = \alpha, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{d^2 G}{d\eta^2}(-1) \right] = \frac{d^2 p}{d\eta^2}(-1) = 1 \quad (3.35d)$$

$$G^{(3)}(-1) = \beta, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{d^3 G}{d\eta^3}(-1) \right] = \frac{d^3 p}{d\eta^3} = 0 \quad (3.35e)$$

Pour les conditions aux limites vérifiées par q , on dérive la relation (3.18b) par rapport à β en $\eta = -1$, on a :

$$G(-1) = K, \quad \frac{\partial G}{\partial \beta}(-1) = 0 \quad (3.36a)$$

Compte tenu de l'expression définissant q ($q = \partial G / \partial \beta$), la relation (3.26) se réduit :

$$q(-1) = 0. \quad (3.37a)$$

En utilisant la même technique de calcul employée dans le cas de p , on obtient aussi les conditions sur q telles que :

$$G^{(1)}(-1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} [G^{(1)}(-1)] = \frac{dq}{d\eta}(-1) = 0. \quad (3.37b)$$

$$G^{(2)}(-1) = \alpha, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{d^2 G}{d\eta^2}(-1) \right] = \frac{d^2 q}{d\eta^2}(-1) = 0 \quad (3.37c)$$

$$G^{(3)}(-1) = \beta, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{d^3 G}{d\eta^3}(-1) \right] = \frac{d^3 q}{d\eta^3} = 1 \quad (3.37d)$$

Alors les fonctions p et q sont des solutions du problème linéaire à valeurs initiales obtenues pour la même équation différentielle ordinaire de fonction inconnue $y = p$ ou $y = q$:

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\delta\eta)^2 y^{(4)} + (1 + \delta^2 + 2\delta\eta)(8\delta - R_e(1 - \delta)G)y^{(3)} \\ & + (8\delta^2 + R_e(1 - \delta))(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)G^{(1)} - 4R_e\delta(1 - \delta)G)y^{(2)} \\ & + (R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)G^{(2)} + 4R_e\delta(1 - \delta)G^{(1)})y^{(1)} \\ & - (R_e(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)G^{(3)} + 4R_e\delta(1 - \delta)G^{(2)})y = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Les conditions initiales sont alors résumées de la manière suivante:

$$p = 0, p^{(1)} = 0, p^{(2)} = 1, p^{(3)} = 0, \text{ pour } \eta = -1 \quad (3.39a)$$

$$q = 0, q^{(1)} = 0, q^{(2)} = 0, q^{(3)} = 1, \text{ pour } \eta = -1 \quad (3.39b)$$

où $p^{(1)} = \frac{dp}{d\eta}$, $p^{(2)} = \frac{d^2p}{d\eta^2}$, $p^{(3)} = \frac{d^3p}{d\eta^3}$, $q^{(1)} = \frac{dq}{d\eta}$, $q^{(2)} = \frac{d^2q}{d\eta^2}$ et $q^{(3)} = \frac{d^3q}{d\eta^3}$

L'équation de vorticité a  t e trouvée ainsi que ses conditions aux limites. Celle-ci a  t e transformée en une équation diff erentielle ordinaire non linéaire d'ordre quatre avec deux conditions aux limites pour chaque paroi. Le problème à résoudre devient alors un problème aux limites en deux points. Pour obtenir sa solution, nous avons appliqué la méthode de tir contenant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre pour résoudre le problème à conditions initiales associé, et l'algorithme de Newton-Raphson pour l'optimisation à la borne supérieure.

III-4 REMARQUES PRELIMINAIRES

Les calculs sont effectués pour un nombre de Reynolds $R_e = 2$ et le rapport d'entrefer $\delta = 5/8$. Le choix $R_e = 2$ nous permet de travailler avec une solution unique du problème. En effet en 1993 Banks et Zaturka ont montré pour la même configuration que les nombres de Reynolds supérieurs à 6 donnent des multiples solutions. En ce qui concerne le choix $\delta = 5/8$. Nous avons obtenu

plusieurs échantillons de lignes de courant pour plusieurs valeurs de δ . La valeur $\delta = 5/8$ est celle qui convient pour une meilleure visibilité des lignes de courant.

Pour les exigences de convergence des algorithmes de Runge-Kutta et de Newton-Raphson, 101 valeurs discrétisées sont adoptées pour le paramètre η , formant 100 intervalles de même longueur $\Delta\eta = 2 \cdot 10^{-2}$.

Le critère d'arrêt que l'on a appliqué pour la procédure d'optimisation de Newton-Raphson permet de réduire la fonction Q définie dans l'équation (2.72), à la valeur minimale $Q_{\min} \approx 10^{-25}$. Ceci prouve la grande précision de la technique de tir utilisée, l'objectif de l'optimisation étant de réduire Q à zéro [65].

Les résultats présentés contiennent la fonction de courant par unité d'angle polaire, les lignes de courant ou les trajectoires des particules de fluide et les composantes du champ de vitesse dans le fluide. Avant tout nous prouvons d'abord la validation du code numérique utilisé pour la méthode de tir.

III-5-1 VALIDATION DU CODE NUMERIQUE

Dans cette partie, il est question de montrer le bon fonctionnement du code de calcul par la méthode de tir appliqué à un problème dont la solution analytique est connue. Pour cela, les résultats numériques obtenus par la méthode de tir seront comparés aux résultats analytiques. A cet égard, considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre quatre et ses conditions limites définies par :

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(2)}(x) + y = 0, \quad (3.40a)$$

$$y(-1) = 1, \quad y^{(1)}(-1) = -1, \quad y(1) = 0, \quad y^{(1)}(1) = 0, \quad (3.40b)$$

$$\text{avec } y^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}, \quad y^{(2)}(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{et } -1 \leq x \leq 1$$

Méthode de résolution analytique

L'équation (3.1a) a pour équation caractéristique :

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0. \quad (3.41a)$$

Cette relation ci-dessus peut prendre la forme factorisée suivante :

$$(r^2 - 1)^2 = 0 \quad (3.42b)$$

Après la résolution de l'équation caractéristique, les solutions obtenues sont -1 et 1 , la solution générale pour l'équation (3.40a) se présente sous la forme :

$$y(x) = (C_1 + C_2x)\exp(x) + (C_3 + C_4x)\exp(-x). \quad (3.43)$$

En utilisant les conditions aux limites ci-dessus de la relation (3.40b), on obtient alors un système d'équations à quatre inconnues suivant :

$$\begin{aligned} C_1 - C_2 + e^2C_3 - e^2C_4 &= e \\ C_1 - e^2C_3 + 2e^2C_4 &= -e \\ e^2C_1 + e^2C_2 + C_3 + C_4 &= 0 \\ e^2C_1 + 2e^2C_2 - C_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

où $e = \exp(1)$, $e^2 = \exp(2)$

Après la résolution du système obtenu par la méthode de Cramer, ces constantes sont alors trouvées:

$$C_1 = \frac{-3e^5 - e}{e^8 - 18e^4 + 1}, \quad C_2 = \frac{2e^5 - 2e}{e^8 - 18e^4 + 1}, \quad C_3 = \frac{e^7 - 5e^3}{e^8 - 18e^4 + 1}, \quad C_4 = \frac{8e^3}{e^8 - 18e^4 + 1}$$

L'équation (3.1a) a pour solution générale :

$$y(x) = (C_1 + C_2x)\exp(x) + (C_3 + C_4x)\exp(-x), \quad (3.45)$$

où C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont les constantes obtenues ci-dessus.

Résolution par la méthode de tir

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(2)}(x) + y = 0, \quad (3.46a)$$

$$y(-1) = 1, \quad y^{(1)}(-1) = -1, \quad y(1) = 0, \quad y^{(1)}(1) = 0. \quad (3.46b)$$

Pour débiter, nous transformons d'abord l'équation différentielle d'ordre quatre ci-dessus en une équation différentielle d'ordre 1, pour cela on pose :

$$y_1 = y, \quad y_2 = y^{(1)}, \quad y_3 = y^{(2)}, \quad y_4 = y^{(3)}. \quad (3.47)$$

En se servant de ces expressions posées ci-dessus, l'équation (3.6a) devient:

$$y_4^{(1)}(x) - 2y_3(x) + y_1(x) = 0, \quad (3.48)$$

Pour la résolution numérique de cette équation différentielle, on transforme cette équation aux limites en deux points en une équation à condition initiale comme indiqué au chapitre précédent (voir relation (3.18b)). Pour cela on introduit deux valeurs a et b pour remplacer les conditions initiales manquantes, ce qui donne le problème à condition initiale suivant à résoudre :

$$y_4^{(1)}(x) - 2y_3(x) + y_1(x) = 0 \quad (3.49a)$$

$$y_1(-1) = 1, \quad y_2(-1) = -1, \quad y_3(-1) = a, \quad y_4(-1) = b. \quad (3.49b)$$

L'objectif est de trouver les valeurs $a = a^*$ et $b = b^*$ pour lesquelles les conditions à la borne finale $x=1$ imposées sont vérifiées. A cet effet, une technique d'optimisation est nécessaire à la borne finale $x=1$. On cherche à trouver les équations de perturbation ainsi que leurs conditions à valeur initiale comme à la technique utilisée aux relations (3.30a) et (3.30b), pour cela, la relation (3.48) est différenciée par α et puis par β respectivement on a :

$$\frac{\partial y_4^{(1)}(x)}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial y_3(x)}{\partial \alpha} + \frac{\partial y_1(x)}{\partial \alpha} = 0. \quad (3.50a)$$

Dans la même lancée avec β , on obtient :

$$\frac{\partial y_4^{(1)}(x)}{\partial \beta} - 2 \frac{\partial y_3(x)}{\partial \beta} + \frac{\partial y_1(x)}{\partial \beta} = 0. \quad (3.50b)$$

En posant $(\partial y_1 / \partial \alpha = p_1$ et $\partial y_1 / \partial \alpha = q_1)$ alors il vient les équations de perturbation vérifiées par p et q suivantes :

$$p_4^{(1)} - 2p_3 + p_1 = 0 \quad (3.51a)$$

$$q_4^{(1)} - 2q_3 + q_1 = 0 \quad (3.51b)$$

Les conditions à valeur initiale s'obtiennent en utilisant la méthode la relation (3.28a) comme au chapitre précédent :

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1, p_4 = 0 \text{ à } x = -1 \quad (3.52a)$$

$$q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 1 \text{ à } x = -1 \quad (3.52b)$$

III-5-2 Résultats de la validation du code numérique

Les résultats des solutions analytiques et numériques montrent un parfait accord entre eux. Les courbes tracées en noir représentent les solutions analytiques et celles en bleu les solutions numériques, comme le montre la figure 9. L'évolution de la solution analytique en y présente la même allure, la même similitude que celle de la solution numérique et ces solutions sont représentées en cercle et en barre respectivement. De même, les solutions analytique et numérique de la première dérivée $y^{(1)}$ présentent aussi la même allure et similitude et rencontrent celles de y en $x = 0$, représentées en étoiles et tirets de 6 respectivement. Alors que les courbes en square et trait interrompu sont celles de la solution analytique et de la solution numérique de la deuxième dérivée $y^{(2)}$ respectivement et présentent la même allure et similitude et rencontrent celles de y en un point de $x = -0.3$. Quant aux courbes de la troisième dérivée $y^{(3)}$ représentées en losange et en daemon pour les solutions analytique et

numérique respectivement, elles présentent la même allure et similitude, et elles rencontrent y en $x=0.3$ et $y^{(1)}$ en $x=0.8$.

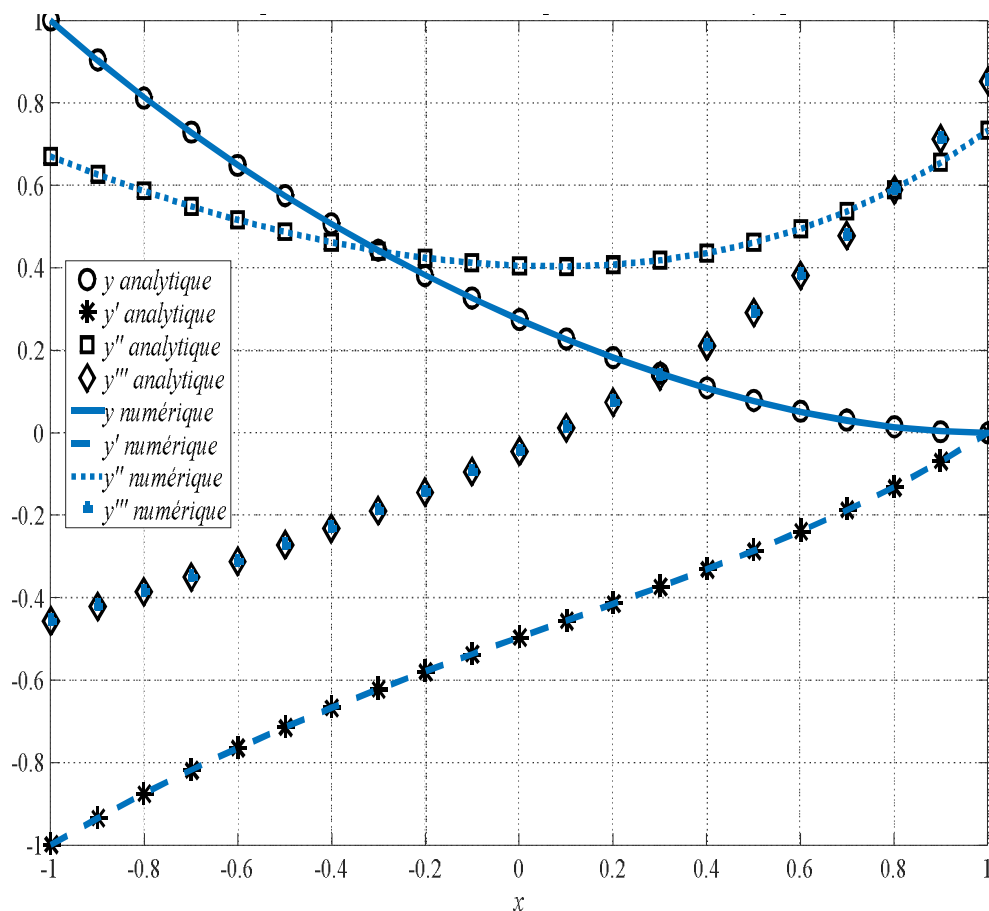


Figure 9 : Courbes comparatives des solutions analytiques et numériques

III-6 TRAJECTOIRES DES PARTICULES DE FLUIDE OU LIGNES DE COURANT

Il est bien connu que pour tout écoulement laminaire dans lequel la fonction de courant ψ existe, les équations des trajectoires des particules de fluide ou lignes de courant sont données par la relation :

$$\psi = \text{constant} = C, \quad (3.53a)$$

où C est une constante d'intégration.

En utilisant la définition de ψ donnée dans l'équation (2.54), nous trouvons que les équations des lignes de courant pour un δ donné sont :

$$\theta F(\eta) = C. \quad (3.53b)$$

Puisque les calculs numériques donnent une valeur non nulle pour F , l'équation de toute ligne de courant dans l'écoulement peut alors être écrite sous la forme :

$$\theta = \frac{C}{F(\eta)}. \quad (3.53c)$$

La valeur de C est déterminée à partir des coordonnées d'au moins un point par lequel passe la ligne de courant donnée. Des recherches sont alors effectuées pour deux cas selon la valeur de K ($K = -1$ ou $K = 1$). Le cas $K = 1$ correspond aux lignes de courant qui partent du cylindre intérieur C_1 par injection en tout point ($\theta = a, \eta = -1$); cela donne $C = aF(-1)$. Ces lignes de courant se terminent par succion au niveau du cylindre extérieur. Le cas $K = -1$ est la configuration inverse, et correspond aux lignes qui se terminent par succion au niveau du cylindre intérieur et partent du cylindre extérieur C_2 par injection en tout point ($\theta = b, \eta = 1$); cela donne $C = bF(1)$.

En appliquant les coordonnées cartésiennes $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$ à partir des coordonnées polaires (r, θ) de toute particule de fluide, on constate que pour une valeur donnée de δ , les trajectoires des particules de fluide sont définies par les équations cartésiennes paramétriques suivantes, η jouant le rôle de paramètre il vient:

$$X = \frac{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta}}{\delta} \cos\left(\frac{aF(-1)}{F(\eta)}\right) \quad (3.54a)$$

$$Y = \frac{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\eta\delta}}{\delta} \sin\left(\frac{aF(-1)}{F(\eta)}\right), \quad (3.54b)$$

Avec $r = \frac{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\eta\delta}}{\delta}$, pour le cas des lignes de courant partant du cylindre intérieur C_1 ($K = 1$).

On a les équations:

$$X = \frac{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta}}{\delta} \cos\left(\frac{bF(\eta)}{F(\eta)}\right), \quad (3.55a)$$

$$Y = \frac{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta}}{\delta} \sin\left(\frac{bF(\eta)}{F(\eta)}\right), \quad (3.55b)$$

pour le cas des lignes de courant partant du cylindre extérieur C_2 ($K = -1$)

Dans ces équations, on a:

X et Y : désignent les coordonnées cartésiennes de la particule de fluide

δ : désigne le rapport de gap de la conduite ;

η : joue le rôle de paramètre ;

a et b définissent la trajectoire donnée pour les deux configurations.

Après avoir obtenu quelques échantillons, les figures des lignes de courant sont tracées dans les figures ci-dessous.

Pour obtenir des schémas clairs, chaque figure contient 21 lignes de courant correspondant à la valeur discrétisée (a_i) de a et (b_j) de b définie par $a_i = i(2\pi)/20$ et $b_j = j(2\pi)/20$ ($i, j = 0, 1, \dots, 20$), pour $K=1$ et $K=-1$ respectivement. Après avoir trouvé la fonction de courant par unité d'angle polaire que nous vous présentons après, nous trouvons les trajectoires des particules de fluide dans le plan polaire de l'écoulement. A l'aide des programmes Fortran et Matlab appliquées sur les relations (3.54a), (3.54b), (3.55a) et (3.55b), nous avons pu tracer les trajectoires acceptables et montrer celles qui sont inacceptables. Nous présentons d'abord les lignes de courant inacceptables.

III-6-1-Lignes de courant inacceptables

Les calculs numériques prouvent que pour les deux cas ($K=1$ et $\sigma < 1$) et pour ($K=-1$ et $\sigma > 1$) la vitesse sans dimension amont est supérieure à celle en aval. La totalité de la surface du cylindre aval n'est pas suffisante pour évacuer le débit total de la masse du fluide entrant et créée depuis le cylindre amont par injection. La partie restante de ce débit entrant passe à travers le cylindre aval et crée un débit supplémentaire dont les lignes de courant croisent la première famille des lignes de courant. Par conséquent, les figures des lignes de courant obtenues présentent de nombreux points d'intersection comme le montrent la figure 10a pour $K=1$, et la figure 10b pour $K=-1$. Cette intersection n'est pas autorisée pour un écoulement laminaire permanent et ces solutions sont alors inacceptables. Ainsi, la solution des équations de Navier-Stokes de la fonction de courant par unité d'angle polaire F obtenue pour les cas mentionnés ci-dessus, n'est pas acceptable car cette solution ne correspond à un écoulement laminaire permanent.

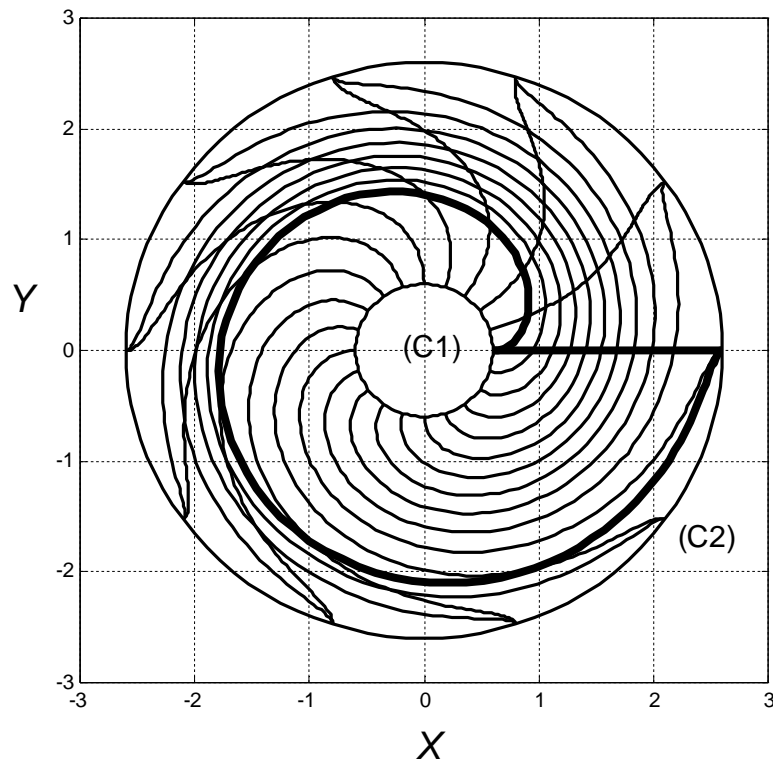


Figure 10a : Lignes de courant inacceptables pour injection C_1 et suction C_2 ($K=1$ et $0 < \sigma < 1$), tracées pour $\sigma = 0.5$

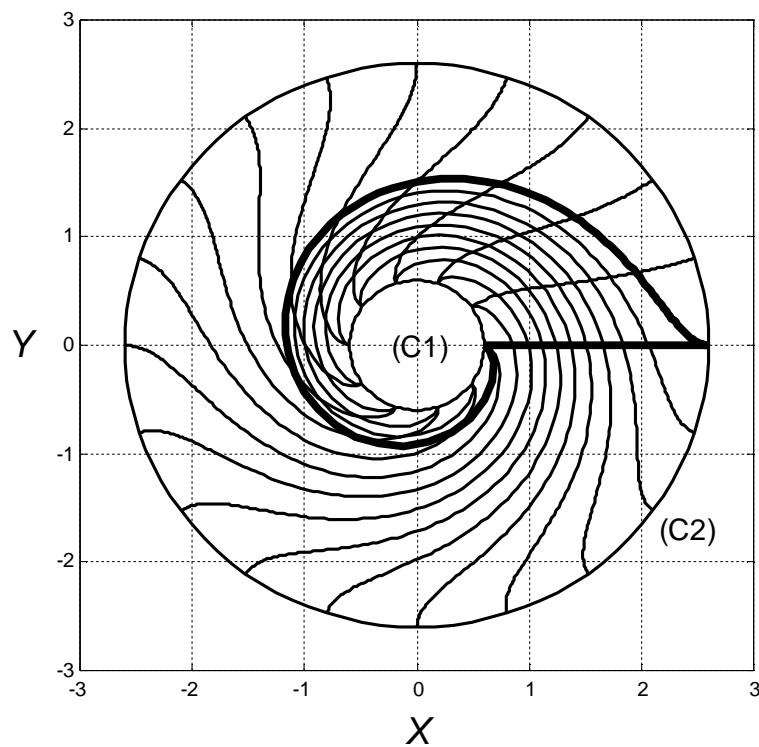


Figure 10b : Lignes de courant inacceptables avec injection sur C_2 et suction sur C_1 ($K=1$ et $\sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 2$

Nous passons alors aux lignes de courant acceptables. Pour cela nous commençons par le cas de l'écoulement radial.

III-6-2-Lignes de courant acceptables

D'après les recherches numériques de ces lignes de courant, on constate que la valeur $\sigma = 1$ pour lesquelles les vitesses sans dimension amont et aval, V_1 et V_2 sont égales, correspond à l'écoulement radial entre les deux cylindres. La figure (11a) présente le cas où le cylindre intérieur C1 subit l'injection du fluide (cylindre amont) et la figure (11b) montre le cas où le cylindre intérieur C1 subit la succion du fluide (cylindre aval). Comme le montrent les figures (11a) et (11b), la masse totale du fluide entrant par injection sur le cylindre amont est totalement évacuée par succion à travers toute la surface du cylindre aval.

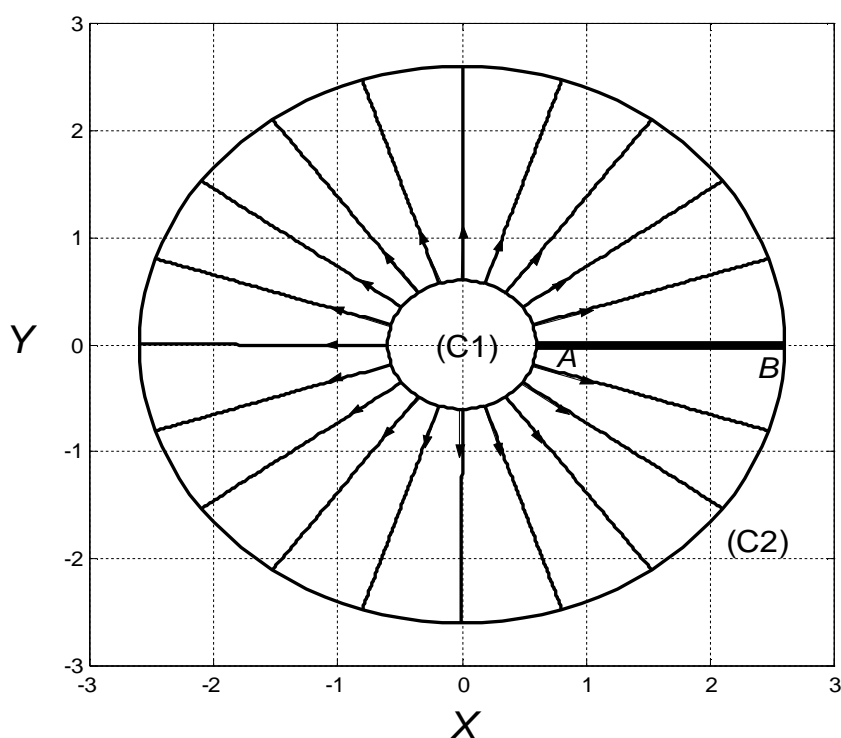


Figure 11a: Lignes de courant de l'écoulement radial pour $\sigma = 1$ avec injection sur C_1 et succion sur C_2 ($K = 1$)

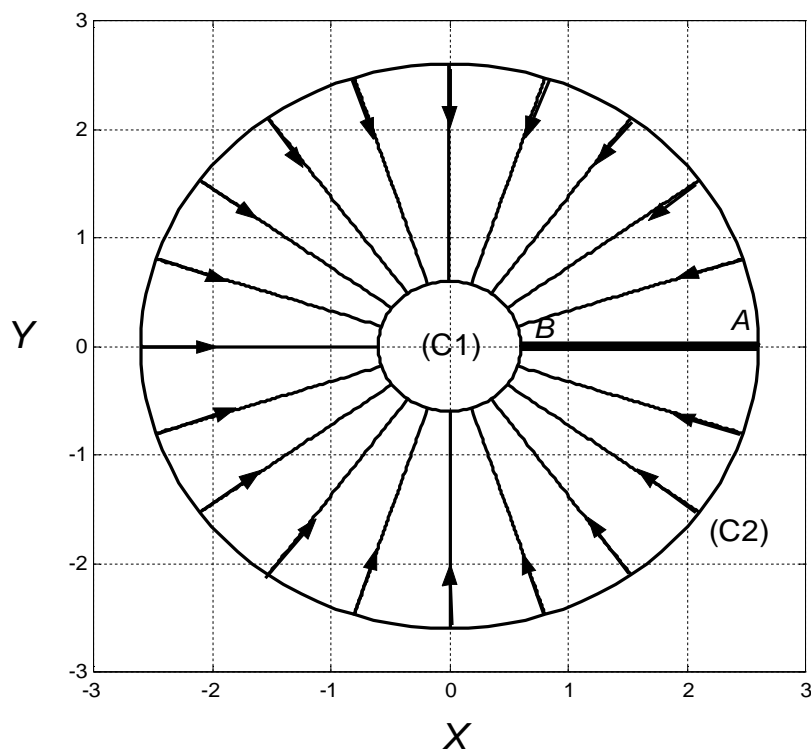


Figure 11b: Lignes de courant de l'écoulement radial pour $\sigma = 1$ avec injection sur C_2 et suction sur C_1 ($K = -1$)

Il reste à présenter le cas où toute la masse du fluide entrant par le cylindre amont (le cylindre qui subit l'injection du fluide) utilise une partie du cylindre aval pour être évacué totalement.

Le troisième type de la solution F pour les équations de Navier-Stokes définie pour ($K=1$ et $\sigma > 1$) et pour ($K=-1$ et $0 < \sigma < 1$), donnent lieu aux lignes de courant qui sont acceptables. Ces trajectoires des particules de fluide sont présentées sur les figures 12 et 13. Elles correspondent aux cas pour lesquels la vitesse amont sans dimension est inférieure à celle en aval. Pour ces écoulements, le débit entrant total créé par injection au niveau du cylindre amont est évacué à travers une partie de la surface du cylindre aval, de sorte que la partie restante de cette surface ne subit aucune suction de fluide. Ainsi, le fluide situé dans la conduite annulaire est divisé en deux régions : une première région dans laquelle le fluide reste au repos et une seconde région dans laquelle le

fluide est en mouvement et présente un écoulement laminaire ayant des lignes de courant régulières et ordonnées. Les figures 12 et 13 montrent que les deux régions du fluide sont séparées par deux lignes de courant singulières AB et AC définies par les valeurs $a_i = b_j = 0$ ($i, j = 0$) et $a_i = b_j = 2\pi$ ($i, j = 20$) respectivement (une ligne de courant en écoulement permanent est dite singulière lorsqu'elle correspond à une solution mathématique des équations de Navier-Stokes qui est physiquement inacceptable car aucune particule de fluide ne prend cette ligne de courant comme sa trajectoire située pas). A est un point singulier situé sur la surface du cylindre amont (c'est-à-dire le cylindre C_1 pour $K=1$ et le cylindre C_2 pour $K=-1$), B et C sont deux points situés sur la surface du cylindre aval (c'est-à-dire le cylindre C_2 pour $K=1$ et le cylindre C_1 pour $K=-1$). La longueur circulaire BC dans laquelle le fluide est évacué à travers le cylindre aval est égale à la valeur $2\pi/\sigma$ pour $K=1$, et $2\sigma\pi$ pour $K=-1$.

Au fur et à mesure que le point C s'éloigne de B , on obtient d'autres lignes de courant pour le cylindre intérieur en amont et le cylindre extérieur en aval. Le volume du fluide immobile croît et celui du fluide en mouvement décroît.

Pour le cas du cylindre extérieur en amont et le cylindre intérieur en aval, et que le point C se rapproche du point B alors le volume du fluide immobile décroît et celui du fluide en mouvement croît. Toutes ces figures sont représentées ci-dessous. Pour le cylindre intérieur en amont, nous avons les figures 12 et dans le cas où il est en aval nous avons les figures 13

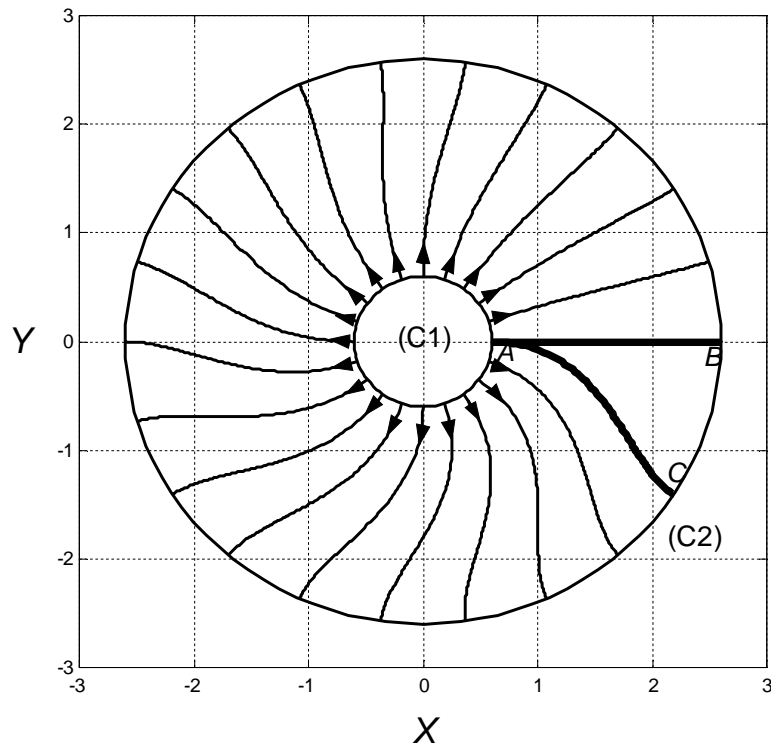


Figure 12a : Lignes de courant acceptables pour injection sur (C_1) et succion sur C_2 , avec $R_e = 2$, $\delta = 5/8$, ($K = 1$; $\sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 1.1$

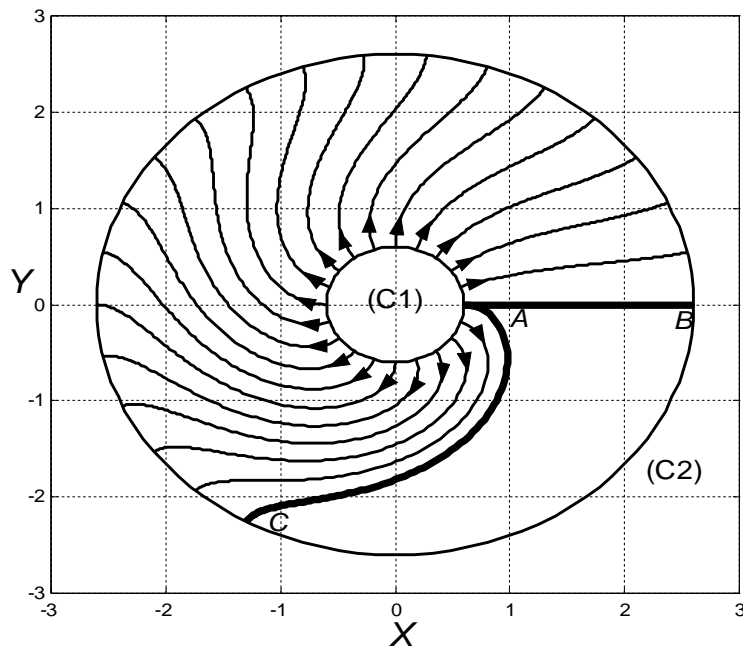


Figure 12b : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_1 et succion sur C_2 , avec $R_e = 2$; $\delta = 5/8$. ($K = 1$; $\sigma > 1$) tracées pour $\sigma = 1.5$

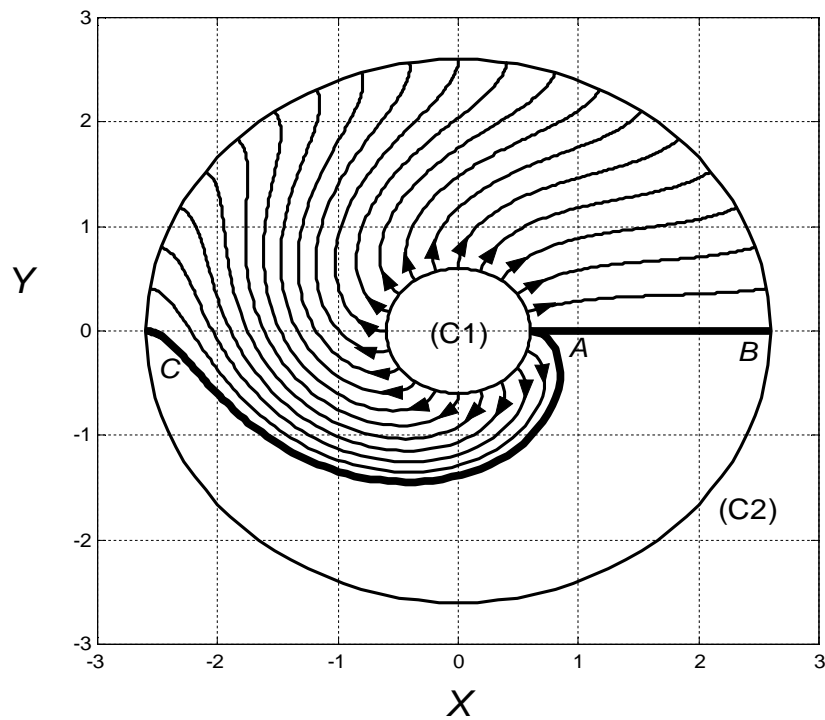


Figure 12c : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_1 et suction sur C_2 avec $R_e = 2$; $\delta = 5/8$. ($K = 1$; $\sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 2$.

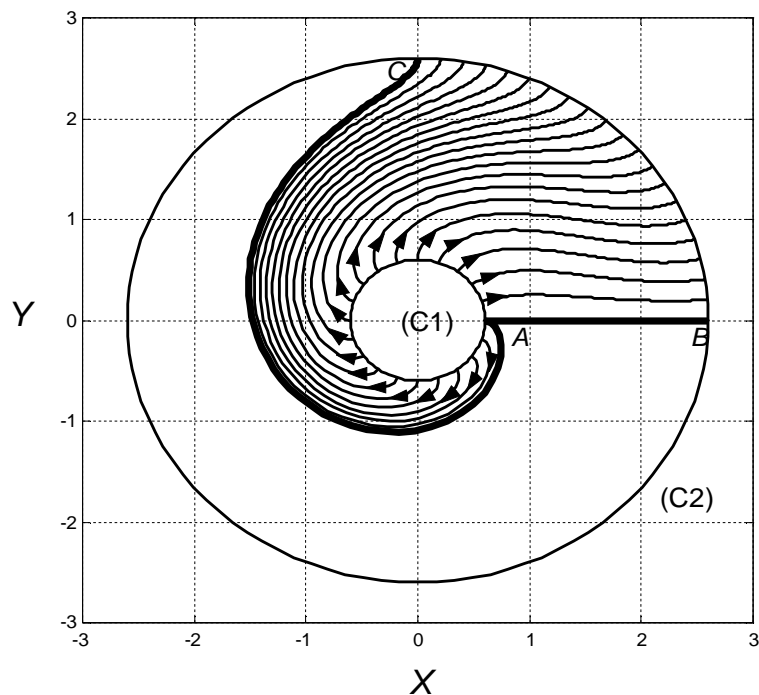


Figure. 12d : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_1 et suction sur C_2 , avec $R_e = 2$; $\delta = 5/8$. ($K = 1$; $\sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 3$

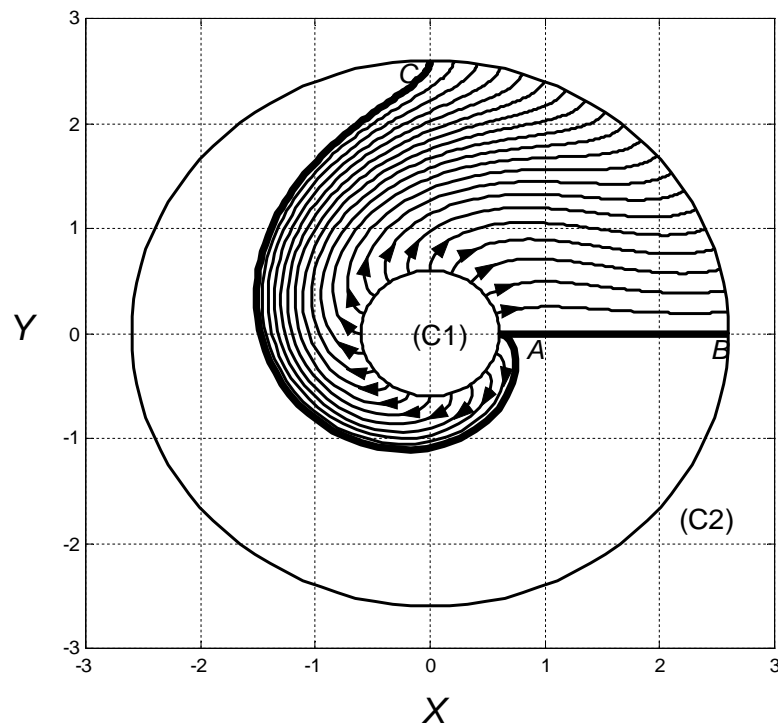


Figure 12e : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_1 et suction sur C_2 , avec $R_e = 2$; $\delta = 5/8$. ($K = 1$; $\sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 4$.

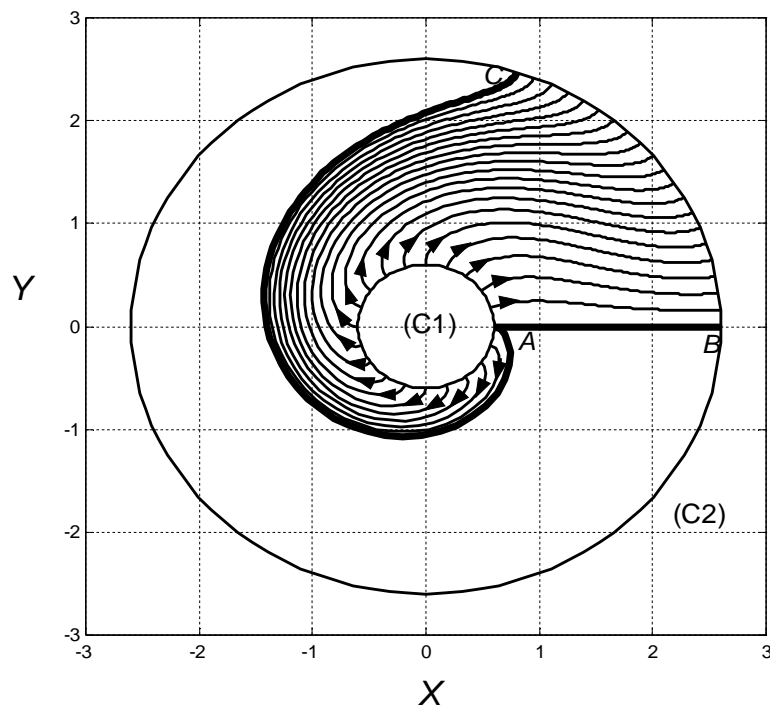


Figure 12f : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_1 et suction sur C_2 , avec $R_e = 2$; $\delta = 5/8$. ($K = 1$; $\sigma > 1$), tracées pour $\sigma = 5$

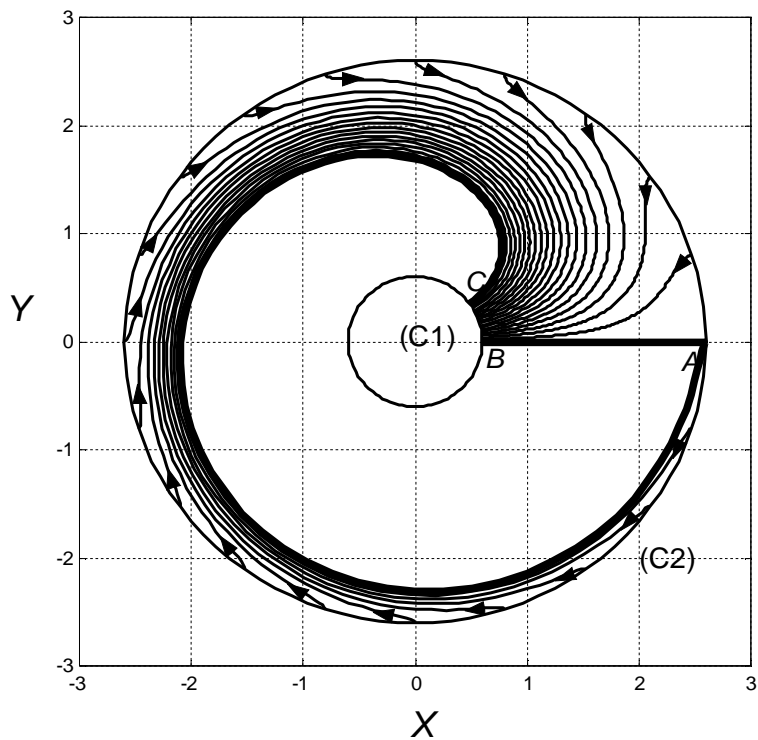


Figure 13a : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_2 et suction sur C_1 , avec $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$. ($K = -1; 0 < \sigma < 1$), tracées pour $\sigma = 0.1$

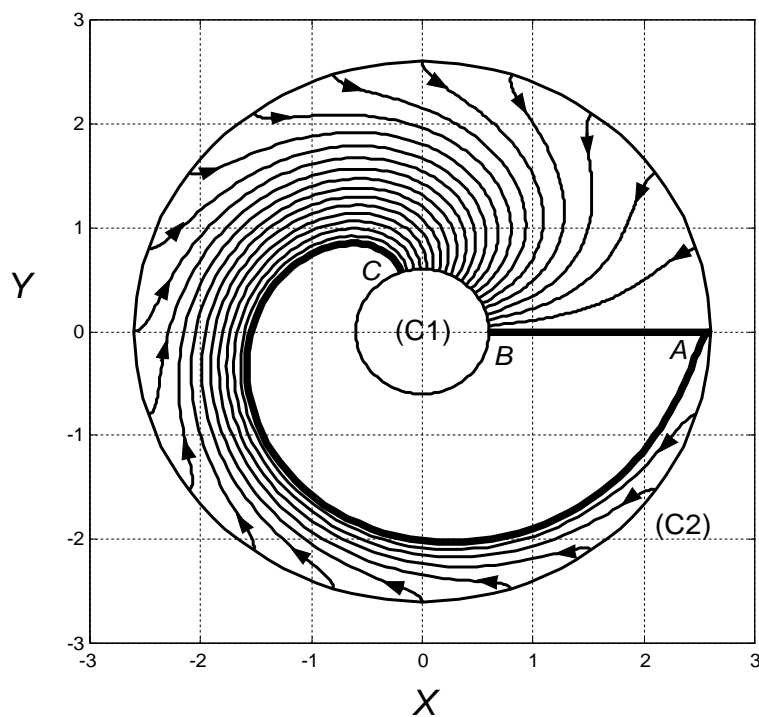


Figure 13b : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_2 et suction sur C_1 , avec $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$. ($K = -1; 0 < \sigma < 1$), tracées pour $\sigma = 0.3$

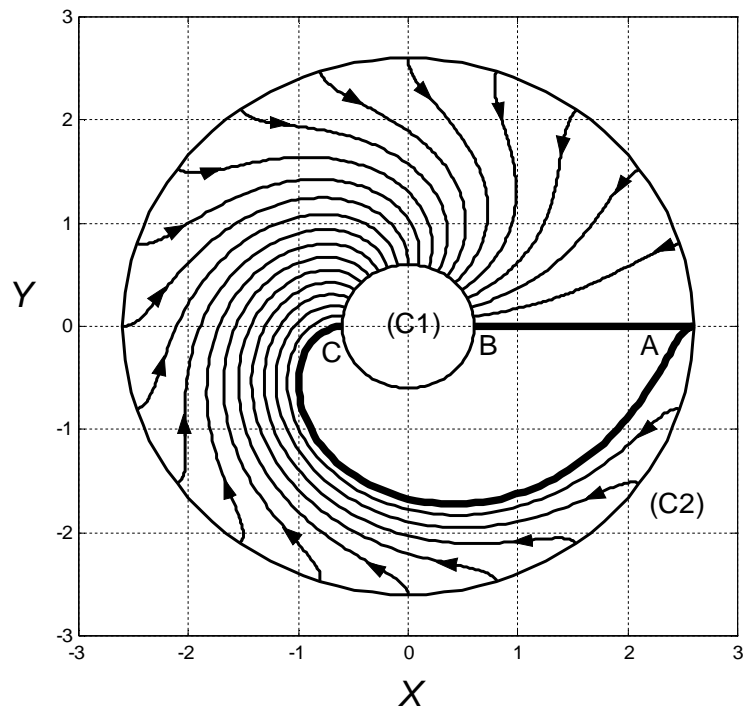


Figure 13c : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_2 et suction sur C_1 , avec $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$, ($K = -1$; $0 < \sigma < 1$) tracées pour $\sigma = 0.5$

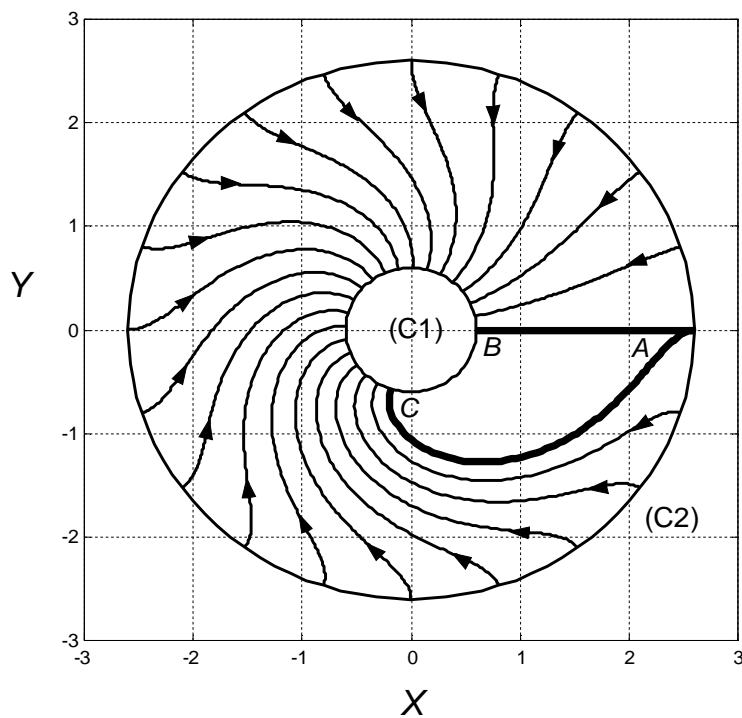


Figure 13d : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_2 et suction sur C_1 , avec $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$. ($K = -1$; $0 < \sigma < 1$) tracées pour $\sigma = 0.7$

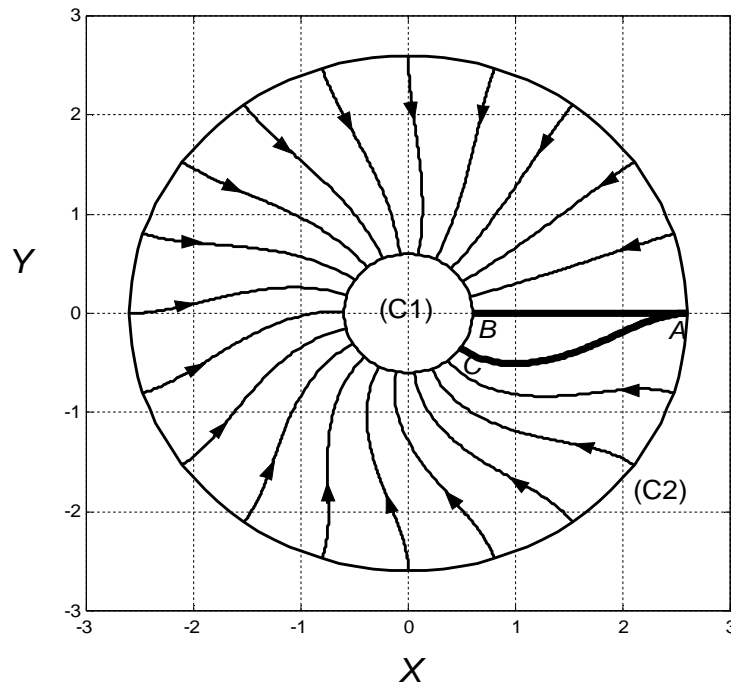


Figure 13e : Lignes de courant acceptables pour injection sur C_2 et suction sur C_1 avec $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$. ($K = -1; 0 < \sigma < 1$) tracées pour $\sigma = 0.9$

En plus de ces lignes de courant, nous avons trouvé la fonction de courant par unité d'angle polaire que nous vous présentons.

III-7 LA FONCTION DE COURANT PAR UNITE D'ANGLE POLAIRE

Certaines valeurs de F sont à rejeter et d'autres sont à retenir, nous faisons ce choix en utilisant les trajectoires des particules de fluide présentées dans la section III-3-2.

Les figures 14a et 14b sont représentées pour plusieurs valeurs du coefficient de vitesse σ . Le cas de la figure 14a correspond au cas où le cylindre (C1) est en amont et la figure 14b dans le cas, il est en aval. Les deux figures montrent que F est constant pour la valeur $\sigma = 1$, qui correspond à l'écoulement radial entre les deux cylindres. Dans la figure 14a, les valeurs de F sont positives et augmentent avec σ , pour $\sigma \geq 1$. La figure 14b montre que les valeurs négatives de F sont d'autant plus élevées que σ croît avec $0 < \sigma \leq 1$.

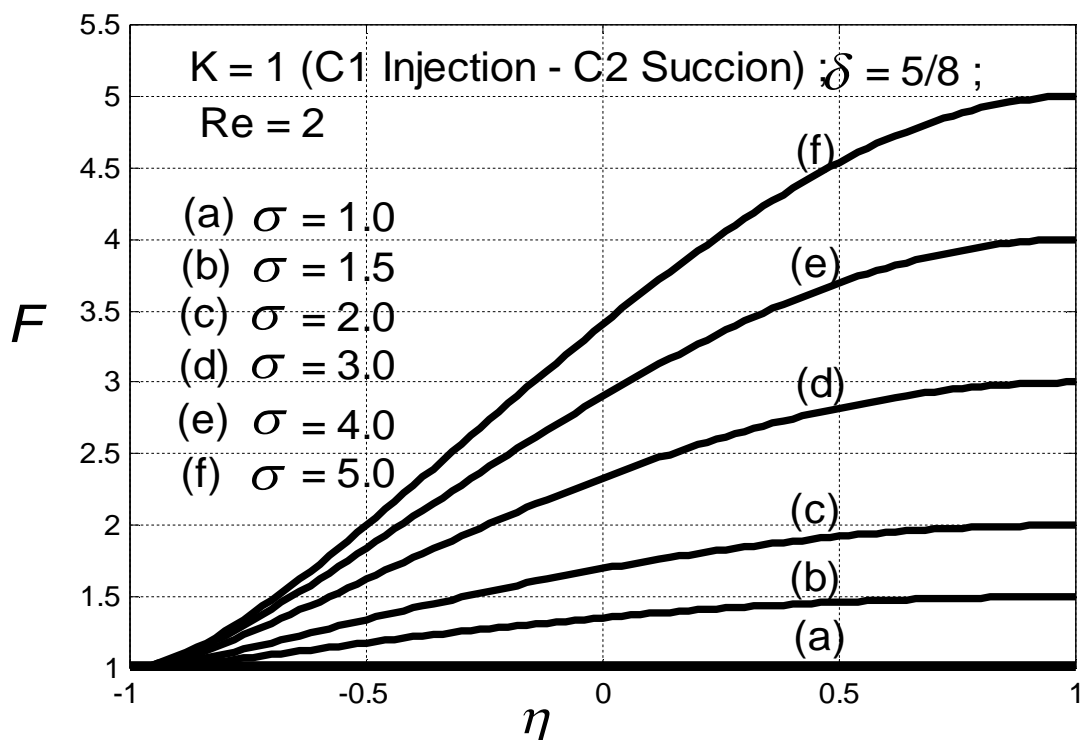


Figure 14a: Fonction de courant par unité d'angle polaire de η pour $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$, pour $K=1$ et $\sigma \geq 1$

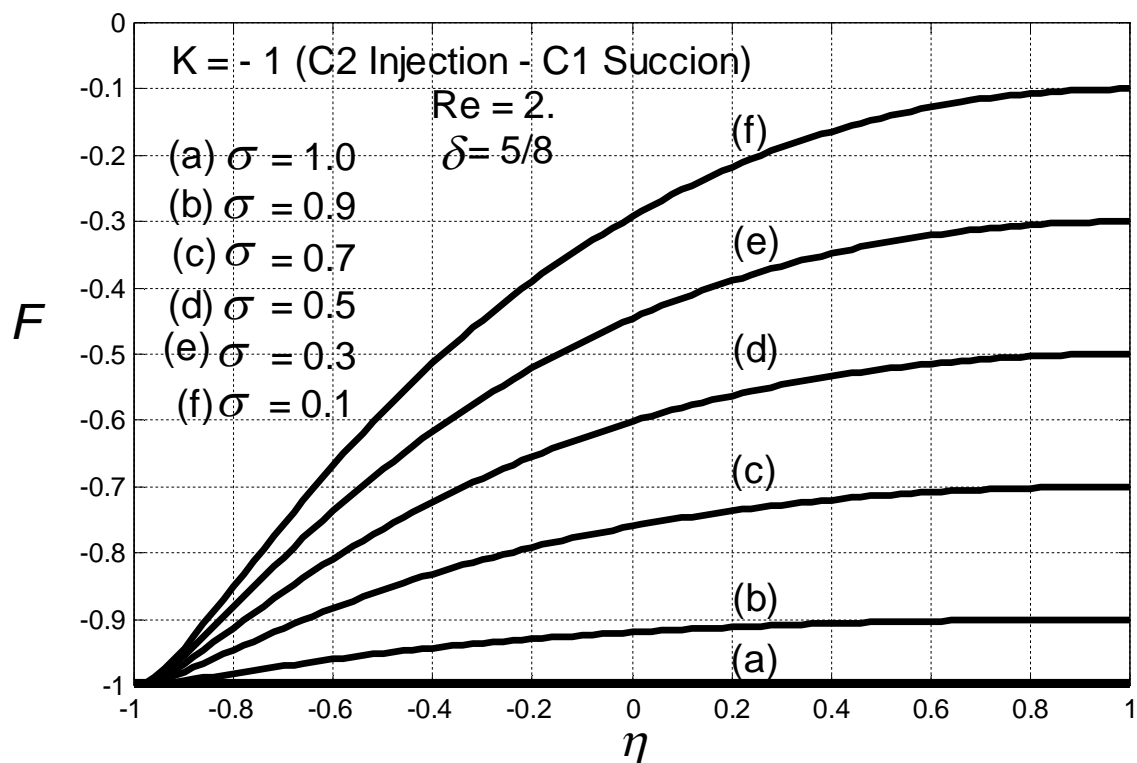


Figure 14b: Fonction de courant par unité d'angle polaire de η pour $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$, pour $K = -1$ et $0 < \sigma \leq 1$

En examinant ces deux figures simultanément, l'on peut voir que F change de signe quand le cylindre amont change, c'est-à-dire quand l'écoulement change d'orientation. Ceci conduit à la conclusion que l'écoulement inverse a lieu dans le fluide si F change de signe. Comme le signe de F reste le même dans les deux figures, ceci confirme qu'aucun écoulement inverse n'a lieu dans le fluide.

Pour un coefficient de vitesse donné, les vitesses d'injection et de suction sont maintenues constantes à $V_2 = \sigma (3/13)V_1$, F ne change pas de signe (pas d'écoulement inverse) puis augmente de façon monotone avec η selon les conditions aux limites données dans les équations (2.72a) et (2.72b), comme le montrent les figures 14a et 14b ci-dessus.

Comme σ augmente, avec $\sigma \geq 1$, la vitesse d'injection étant maintenue constante, la vitesse de suction V_2 augmente alors selon la relation donnée dans l'équation (2.15). Les particules de fluide à la vitesse la plus élevée augmentent alors en nombre et en masse de sorte que le débit massique de l'écoulement augmente avec la distance radiale et le long d'une circonférence donnée.

Cet argument explique pourquoi la fonction de courant par unité d'angle polaire F augmente en fonction de η pour différentes valeurs de σ , comme le montre la figure 14a. Pour la figure 14b, des arguments similaires expliquent la courbe présentée.

A partir de la fonction de courant par unité d'angle polaire, nous avons obtenu les composantes radiale et orthoradiale du champ de vitesse dans le fluide, nous présentons d'abord la composante radiale.

III-8 LES COMPOSANTES DU CHAMP DE VITESSE DANS LE FLUIDE.

III-8-1 La composante radiale du champ de vitesse dans le fluide.

A partir de la fonction de courant par unité d'angle polaire F , nous avons obtenu les valeurs de la composante de vitesse radiale V_r dans le fluide en appliquant la relation:

$$V_r = \frac{1-\delta}{\sqrt{1+\delta^2+2\delta\eta}} F \quad (3.56a)$$

Ces valeurs sont représentées dans les figures 15a et 15b. Ces figures montrent les courbes de variation de V_r en fonction de η pour plusieurs valeurs du coefficient de vitesse σ , quand le cylindre intérieur est en amont (figure 15a) et le cylindre extérieur est en amont (figure 15b).

Dans la figure 15a, la vitesse radiale décroît lorsque η croît pour $\sigma \geq 1$ sauf pour les valeurs de σ dépassant 2 et pour lesquelles la courbe V_r présente un point d'inflexion. Contrairement à la figure 15a, la figure 15b montre que les valeurs de V_r augmentent avec η pour toute valeur de σ , et sont d'autant plus grandes que σ décroît avec $0 < \sigma \leq 1$.

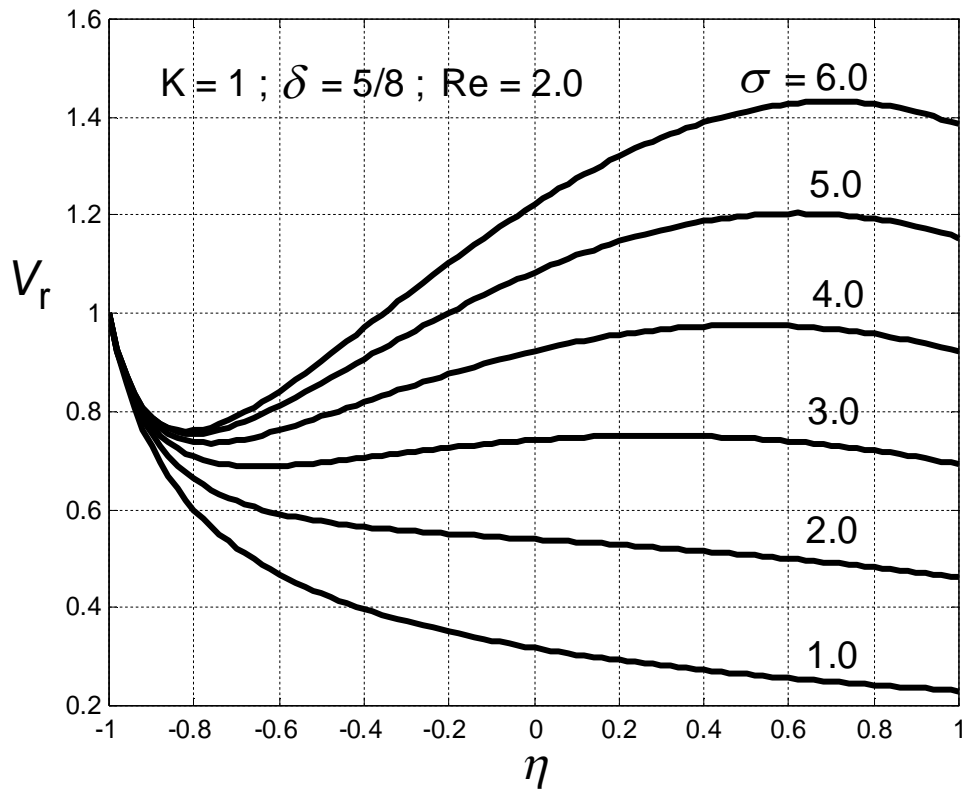


Figure 15a: Composante radiale du champ vitesse en fonction de η pour $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$, pour $K = 1$ et $\sigma \geq 1$

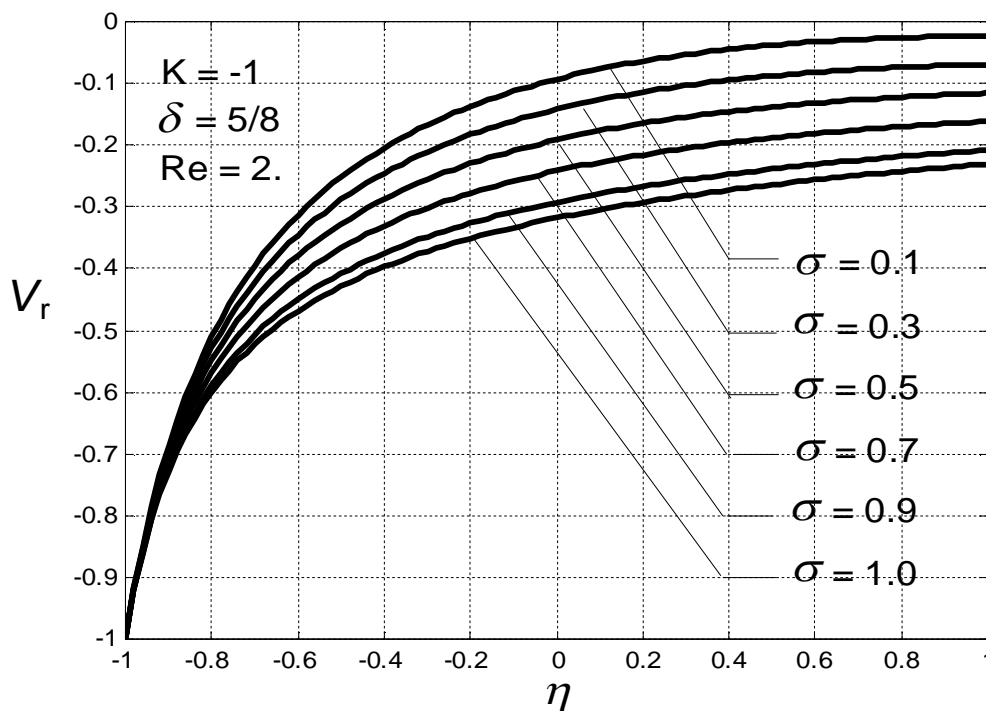


Figure 15b: Composante radiale du champ vitesse en fonction de η pour $R_e = 2$ et $\delta = 5/8$, pour $K = -1$ et $0 < \sigma \leq 1$

Le gradient de pression dont l'action favorable a été mentionnée dans la section 4, crée dans l'écoulement à étudier un phénomène intéressant vu sur la figure 15a, et qui a été déjà observé par Dauenhauer et Majdalani [11] pour l'écoulement se produisant dans un canal poreux à parois transversalement mobiles. Ce phénomène consiste à l'existence des couches fluides que l'on peut noter (CF), dont la vitesse radiale dépasse les vitesses d'injection et de suction qui créent de l'écoulement radial entre les deux cylindres. Comme on le voit sur les figures 15a et 15b, les couches fluides CF sont situées à proximité du cylindre aval (cylindre extérieur) et occupent une épaisseur (égale à l'intervalle $0,4 \leq \eta \leq 0,9$ pour $\sigma = 6$) qui augmente au fur et à mesure que σ augmente. La figure 15a montre également que les couches fluides CF n'existent pas pour le coefficient de vitesse $\sigma \leq 0,4$.

Pour expliquer ces aperçus physiques, on donne les arguments suivants :

Comme dans l'écoulement dit de Couette avec une paroi mobile longitudinalement et un gradient de pression négatif, la localisation des couches fluides CF est cohérente avec le fait que le gradient de pression favorable à l'écoulement agit faiblement sur les couches fluides ayant une vitesse lente. A cet égard, on mentionne que plus le coefficient de vitesse est faible, plus la suction au niveau du cylindre aval (cylindre extérieur) est faible, de sorte que les particules de fluide les plus lentes augmentent en nombre et en masse dans la conduite annulaire, comme le montre la figure 15a pour les petites valeurs de σ . Les effets du gradient de pression sont alors faibles dans ces conditions. Ceci explique pourquoi les couches fluides CF n'existent pas pour de petites valeurs de σ . Aussi, on comprend à partir de la figure 15a que le fait d'avoir une vitesse d'injection fixe sur le cylindre intérieur amont, qui est une condition aux limites ne dépendant pas de σ , empêche l'action favorable du gradient de pression sur la vitesse radiale des particules de fluide situées au voisinage de ce cylindre.

Lorsque σ croît avec $\sigma \geq 0,4$, les particules de fluide ayant la vitesse la plus élevée existent et sont situées à proximité du cylindre extérieur de sorte que les couches fluides CF sont situées à proximité du même cylindre, comme le montre la figure 15a.

Dans la configuration pour laquelle le cylindre extérieur est en amont, la figure 15b montre que la vitesse radiale en valeur absolue diminue fortement lorsque η augmente, pour toute valeur de σ , avec $0 < \sigma < 1$. Ainsi, les particules de fluide ayant la vitesse la plus élevée n'existent pas dans la conduite annulaire, sauf à proximité du cylindre intérieur qui est une zone de fluide protégée contre l'action favorable du gradient de pression. Cet argument explique pourquoi les couches fluides n'existent pas lorsque le cylindre extérieur est en amont, comme le montre la figure 15b.

Contrairement à la figure 15a, la figure 15b ne montre aucun point d'inflexion. Par conséquent, sur la base du critère de point d'inflexion de Rayleigh connu comme étant valable pour les écoulements plans parallèles non visqueux, et que l'on souhaite pouvoir étendre à l'écoulement étudié, on peut conclure que la configuration dans laquelle le cylindre extérieur est en amont est plus stable que la configuration pour laquelle le cylindre extérieur est en aval.

Il nous reste à présenter la composante orthoradiale du champ de vitesse dans le fluide.

III-8-2 La composante orthoradiale du champ de vitesse dans le fluide.

En exploitant encore la fonction de courant par unité d'angle polaire, on trouve les valeurs de la composante orthoradiale dans le fluide, données par la relation :

$$\frac{V_{\theta}}{\theta} = \frac{(\delta - 1)}{\delta} \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta} \left(\frac{dF}{d\eta} \right) \quad (3.56b)$$

Ces valeurs sont représentées dans les figures 16a et 16b.

Dans le cas de la figure 16a, le cylindre (C1) est en amont et pour le cas de la figure 16b, le cylindre (C2) est en amont. Les figures 16a et 16b montrent que V_θ est négatif pour toute valeur de σ et s'annule sur les parois conformément aux conditions aux limites imposant les vitesses d'injection et de suction orthogonales aux parois.

Dans ces figures, on peut voir que V_θ est nul pour toute valeur de η lorsque $\sigma = 1$. Ce résultat confirme que la valeur $\sigma = 1$ correspond bien à l'écoulement radial pour laquelle la vitesse orthoradiale est nulle.

Quand la distance radiale augmente à partir du cylindre intérieur, les deux figures montrent que la vitesse orthoradiale en valeur absolue décroît jusqu'à atteindre un minimum et elle se met à croître fortement au-delà de ce minimum.

Quand σ croît, la valeur de ce minimum croît dans la figure 16a avec σ supérieur à 1, et elle décroît dans la figure 16b avec $0 < \sigma \leq 1$.

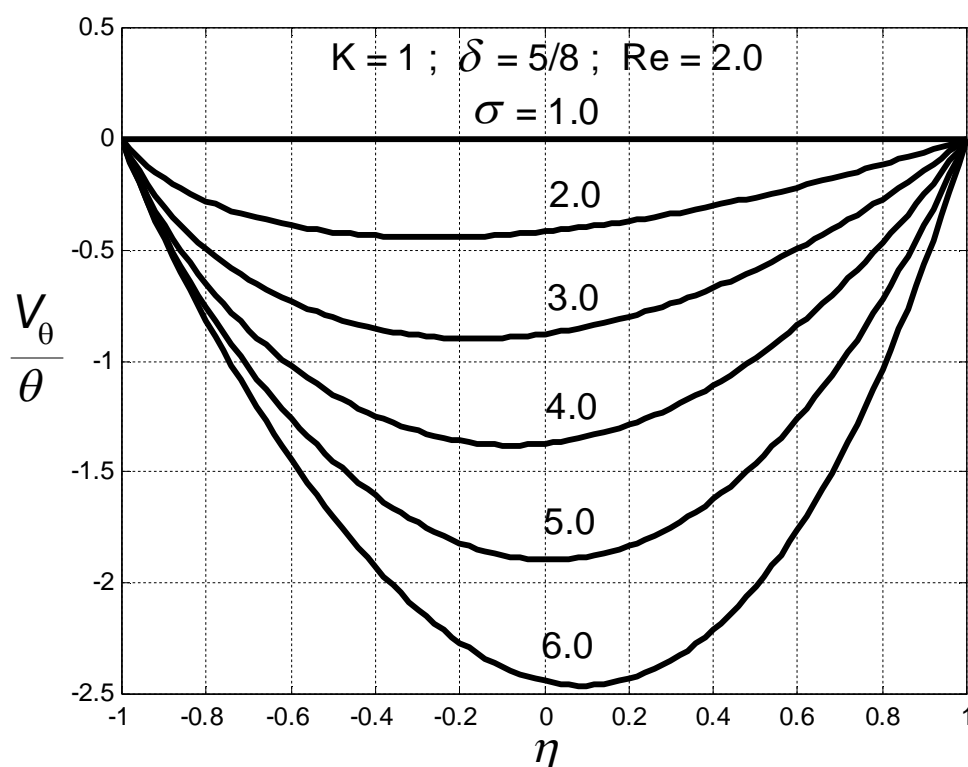


Figure 16a: Composante orthoradiale du champ vitesse par unité d'angle polaire en fonction de η pour $Re = 2$ et $\delta = 5/8$, pour $K = 1$ et $\sigma \geq 1$

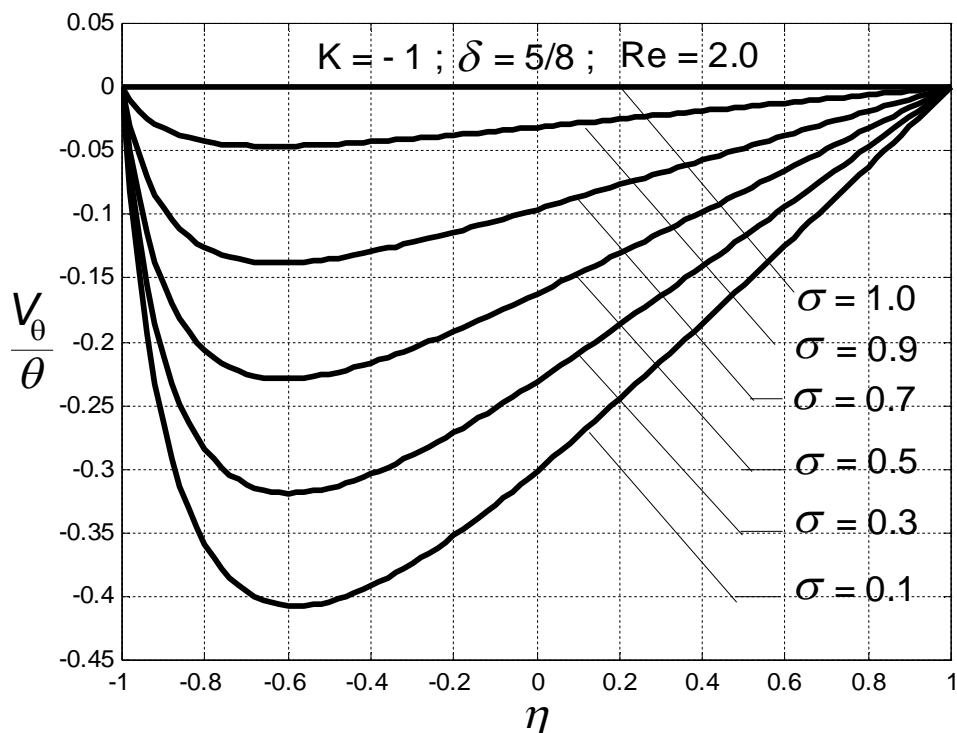


Figure 16b: Composante orthoradiale du champ vitesse par unité d'angle polaire en fonction de η pour $R_e = 2$ et , pour $K = -1$ et $0 < \sigma \leq 1$

A l'aide des arguments précédents donnés pour le comportement de la composante de la vitesse radiale, on comprend du point de vue physique, les raisons pour lesquelles le phénomène mis en évidence par les couches fluides CF n'est pas observé pour la composante de vitesse orthoradiale, comme le montre les figures 16a et 16b. La raison de cet aperçu physique est la suivante. La vitesse orthoradiale s'annule sur les parois interne et externe, contrairement à la vitesse radiale. Ainsi, si la vitesse orthoradiale était seule, son profil de vitesse serait parabolique comme dans l'écoulement de Hagen-Poiseuille. Dans une telle configuration, il n'y a pas de couches fluides comme celles capturées sur la figure 15a. En raison de la conservation de la masse dans laquelle la vitesse radiale doit exister, le profil de vitesse orthoradiale présente la vue spécifique tracée sur les figures 16a et 16b, pour laquelle le profil parabolique attendu n'est pas observé.

Les figures 16a et 16b permettent de déduire des informations physiques sur les couches limites au voisinage des cylindres extérieur et intérieur. Comme la vitesse radiale ne dépend pas de la coordonnée orthoradiale selon l'hypothèse pionnière de Berman, le comportement des couches limites est déduit par le seul gradient de vitesse orthoradiale dans la direction radiale. A cet égard, les figures 16a et 16b peuvent être exploitées.

Pour une valeur donnée du coefficient de vitesse σ , la figure 16a montre que la valeur absolue du gradient $\partial V_\theta / \partial \eta$ au cylindre intérieur est presque égale à celle du même gradient au cylindre extérieur, pour toute valeur du coefficient de vitesse σ , avec $\sigma \geq 1$. Ceci conduit à conclure que, pour cette configuration, l'épaisseur des couches limites et les effets de viscosité au voisinage des deux cylindres sont presque égaux, pour toute valeur de σ . Au fur et à mesure que σ augmente à partir de la valeur égale à 1, l'épaisseur des deux couches limites augmente ainsi que les effets de viscosité. Cela s'explique par le fait que la valeur absolue du gradient $\partial V_\theta / \partial \eta$ au niveau des deux cylindres augmente lorsque σ augmente, avec $\sigma \geq 1$, comme le montre la figure 16a.

La configuration dans laquelle le cylindre extérieur est en amont, on obtient des résultats. La figure 16b montre que, pour une valeur donnée de σ avec $0 < \sigma < 1$, la valeur absolue du gradient ci-dessus au niveau du cylindre intérieur est très grande par rapport à celle du cylindre extérieur. A partir de cette figure, on peut également voir que cette valeur absolue augmente lorsque σ diminue avec $0 < \sigma < 1$. On conclut alors que l'épaisseur des couches limites au cylindre intérieur, ainsi que les effets de viscosité à ce cylindre, sont très importants par rapport à ceux évalués au cylindre extérieur.

En définitive, les résultants présentés contiennent la fonction de courant par unité d'angle polaire, les trajectoires de particules de fluide et les composantes du champ de vitesse dans le fluide. Pour cela nous avons trouvé la fonction de

courant par unité d'angle polaire, certaines valeurs de F ont été rejetées et d'autres ont été retenues, ce choix s'est fait en utilisant les lignes de courant pour plusieurs valeurs du coefficient de vitesse σ . Après la fonction de courant par unité d'angle polaire nous avons étudié les trajectoires des particules de fluide et nous avons pu tracer ces trajectoires de particules de fluide acceptables en montrant celles qui sont inacceptables pour un nombre de valeurs de σ . En plus de ces trajectoires de particules de fluide, les composantes radiale V_r et orthoradiale V_θ du champ de vitesse. L'analyse de ces résultats est résumée dans la dernière partie de notre travail qui est consacrée sur la conclusion générale.

CONCLUSION GENERALE

La motivation de ce travail vient du fait que ; dans tous les travaux de recherche largement consacrés aux écoulements laminaires à parois poreuses pour les fluides incompressibles newtoniens, seules les configurations pour les écoulements dans les canaux poreux et les écoulements axisymétriques dans les conduites annulaires poreuses ont été étudiées. L'écoulement laminaire qui se produit dans le plan polaire à parois poreuses n'a pas encore été étudié.

Ce travail a étudié un écoulement laminaire se produisant dans le plan polaire pour un fluide incompressible situé au niveau de l'entrefer formé par deux cylindres coaxiaux poreux et entraîné par succion-injection à travers les parois, à vitesse constante et uniforme orthogonalement aux parois. Le problème considéré dépend du nombre de Reynolds de succion ou d'injection, du rapport de l'entrefer de la conduite et du coefficient de vitesse défini à partir du rapport de densité de pores et du rapport de surface des pores. Le but de ce travail était de trouver les conditions qui permettent l'existence de cet écoulement polaire avec conservation de la masse et d'en déduire un aperçu physique de cet écoulement, à nombre de Reynolds et rapport de l'entrefer fixés.

Les résultats de la présente analyse peuvent être résumés comme suit :

- Pour que l'écoulement laminaire considéré existe avec conservation de la masse, l'un des cylindres subit la succion et l'autre l'injection.
- De plus, la vitesse d'écoulement au niveau de la paroi externe V_2 et celle au niveau de la paroi interne V_1 doivent être liées par la relation $V_2 = \sigma (1 - \delta)(1 + \delta)^{-1}V_1$ où δ représente le rapport de l'entrefer de la conduite annulaire poreuse, σ un coefficient de vitesse dépendant des rapport des densités des pores et des surfaces des pores, et du coefficient de transmission imposé arbitrairement par l'expérimentateur entre la vitesse d'injection et de succion au niveau des cylindres amont et aval.

- La configuration dans laquelle le cylindre extérieur est en amont donne lieu à un écoulement polaire plus stable que celui pour laquelle le cylindre intérieur est en amont.
- Au fur et à mesure que la distance radiale augmente depuis le cylindre intérieur, la vitesse orthoradiale en valeur absolue diminue jusqu'à atteindre un minimum dépendant de la valeur du coefficient de vitesse.
- Des écoulements radiaux se produisent pour les configurations lorsque le coefficient de vitesse est égal 1 ($\sigma = 1$).

Pour la configuration dans laquelle le cylindre intérieur est en amont :

- L'écoulement met en évidence des lignes de courant acceptables si le coefficient de vitesse est supérieur à 1 ($\sigma > 1$).
- Pour un rapport d'entrefer δ donné, l'écoulement comprend des couches de fluide situées à proximité du cylindre aval et ayant les vitesses radiales qui dépendent des vitesses d'injection et de succion si le coefficient de vitesse σ est supérieur à la valeur critique $\sigma_c = (1 + \delta)(1 - \delta)^{-1}$.
- Au fur et à mesure que le coefficient de vitesse augmente à partir de sa plus petite valeur égale à 1, le minimum de vitesse orthoradiale en valeur absolue augmente.
- Les couches limites au voisinage des deux cylindres ont une épaisseur égale pour un coefficient de vitesse donné.
- Les effets de vitesse au voisinage des deux parois sont d'égale importance, pour un coefficient de vitesse donné.
- Au fur et à mesure que le coefficient de vitesse augmente à partir de sa plus petite valeur égale à 1, les épaisseurs des deux couches limites augmentent, ainsi que les effets de viscosité au voisinage des deux parois.

Pour la configuration dans laquelle le cylindre extérieur est en amont :

- L'écoulement met en évidence des lignes de courant acceptables si le coefficient de vitesse est compris entre 0 et 1.
- Aucune couche de fluide n'a une vitesse radiale qui dépasse les vitesses d'injection et de suction.
- Au fur et à mesure que le coefficient de vitesse diminue à partir de sa valeur supérieure égale à 1, le minimum de vitesse orthoradiale en valeur absolue augmente.
- L'épaisseur de la couche limite au voisinage du cylindre intérieur est très importante par rapport à celle de la couche limite extérieure.
- Les effets de viscosité au voisinage du cylindre intérieur sont très importants par rapport à ceux évalués au voisinage du cylindre extérieur.
- Au fur et à mesure que le coefficient de vitesse augmente à partir de 0 avec la valeur située entre 0 et 1, les épaisseurs des deux couches limites diminuent, ainsi que les effets de viscosité au voisinage des deux parois.

L'intérêt principal de cette étude était de fournir une orientation de recherche potentielle dans le futur pour cet écoulement laminaire polaire qui n'a pas encore été étudié.

La présente étude constitue une étape préliminaire nécessaire pour les travaux ultérieurs dans lesquels nous allons examiner l'influence du rapport de l'entrefer et celle du nombre de Reynolds afin de saisir d'autres informations physiques sur la richesse profonde de la structure de cet écoulement laminaire polaire.

**REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**

-
- [1] **A. S Berman**, Laminar flow in channels with porous wall *Journal Applications of Physics*. **24**, 11232-1235 (1953).
- [2] **S. M Yuan, A. B Finkeltein**, stability of pipe flow with blowing, *Trans. ASME* 78(1956) 719.
- [3] **R. M Terrill**, On laminar flow in a uniformly channel with large injection. *Aeronaut. Q.* **16**, 323-332(1965).
- [4] **J. F Brady, A. Acrivos**, Steady flow in channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow, *Journal of Fluid Mechanics*. **112** (1981).
- [5] **S. Uchida, H. Aoki**, Unsteady flow in a semi-infinite contracting or Expanding Pipe. *Journal of Fluid Mechanics*. **82**, 371-387(1977).
- [6] **P. Watson, W. H. H Banks, M. B Zaturka, P. G Drazin**, Laminar channel flow driven by accelerating walls, *European Journal Applications Mathematical*. **2** (4) (1991) 359-385.
- [7] **M. Goto, S. Uchida**, Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall, *Trans. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci.* **33**(1990) 14.
- [8] **W. H. H Banks, M. B Zaturka**, On flow through porous annular pipe *Physics of Fluids A* **4**, 1131-1141(1992).
- [9] **W. A Robinson**, The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls, *Journal Engineering Mathematical*. **10** (1) (1992) 23-40.
- [10] **M. B Zaturka, W. H. H Banks**, New solutions for flows in a channel with porous walls and/or non-rigid walls, *Fluid Dynamics Research*. **33** (1-2) (2003) 57-71.
- [11] **E. C Dauenhauer, J. Majdalani**, Exact self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving, *Physics of Fluids* **15** (6) (2003) 1485, <https://doi.org/10.1063/1.1567719>.
- [12] **S. Tsangaris, D. Kondaxakis, N. W Vlachakis**, Exact solution for flow in a porous pipe with unsteady wall suction and /or injection, *Communication Nonlinear Science*. **12** (7) (2007) 1181-1189.

- [13] **G. C Dash, K. L Ojha**, Viscoelastic hydromagnetic flow between two porous parallel plates in the presence of sinusoidal pressure gradient, *Alexandria Engineering Journal* 57 (4) (2018) 3463-3471.
- [14] **R. N Barik, G. C Dash, P. K Rath**, Steady laminar MHD flow of viscoelastic fluid through a porous pipe embedded in a porous medium, *Alexandria Engineering Journal* 57 (2) (2018) 973-982.
- [15] **L. Durlofsky, J. F Brady**, The spatial stability of a class of similarity solutions, *Physics of Fluids* 27 (5) (1984) 1068, <https://doi.org/10.1063/1.864736>.
- [16] **G. Cassalis, G. Avalon, J. P Pinceau**, Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls, *Physics of Fluids* 10 (1998) 2558.
- [17] **S. Ferro, G. Gnani**, Spatial stability of similarity solutions for viscous flows in channel with porous walls, *Physics of Fluids* 12 (4) (2000) 797-802.
- [18] **S. Ferro, G. Gnani**, Effects of temperature-dependent viscosity in channels with porous walls, *Physics of Fluids* 14 (2) (2002) 839-849.
- [19] **J. Griffond, G. Cassalis**, On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow, *Physics of Fluids* 13 (2001) 1635.
- [20] **G. D Raithby, D. C Knudsen**, Hydrodynamic development in a duct with suction and blowing, Trans. ASME, *Journal Applications Mechanics*. 41 (1974) 896.
- [21] **A. A Siviridenkov, V. I Yagodkin**, Flow in the initial sections of channels with permeable walls, *Fluid Dynamics*. 11 (1976) 689.
- [22] **V. N Varapaev, V. I Yagodkin**, Flow stability in a channel with porous walls, *Fluid Dynamics*. 4 (5) (1972) 60-62.
- [23] **J. T Barron, W. K VanMoorhem, J. Majdalani**, A novel investigation of the oscillatory field over a transpiring surface, *J. Sound Vib.* 235 (2) (2000) 281-297
- [24] **H. W Press, A. S Teukolsky, T. W Vetterling, P. B Flannery**, Numerical Recipes in Fortran, Second Edition, Cambridge 1992.

- [25] **I. Mahariq, A. Erciyas**, A spectral element method for the solution of magnetostatic fields, *T, J. Electr. Eng. Comput. Sci.* 25 (4) (2017) 2922-2932.
- [26] **I. Mahariq, H. Kurt, M. Kuzuoglu**, Questioning degree of accuracy offered by the spectral element method in computational electromagnetics, *Appl.Comput.Electromagnet. Soc. J.* 30 (7) (2015) 698-705.
- [27] **I. Mahariq**, On the application of the spectral element method in electromagnetic problems involving domain decomposition, *T, J. Electr. Eng. and Comput. Sci.* 25 (2) (2017) 1059-1069.
- [28] **I. Mahariq, M. Kuzuoglu, I. H Tarman, H. Kurt**, Photonic nanojetanalysis by spectral element method, *IEEE Photonics J.* 6 (5) (2014) 1-14.
- [29] **I. Mahariq, M. Kuzuoglu, I. H Tarman**, On the attenuation of the perfectly matched layer in electromagnetic scattering problems with the spectral element method, *Appl. Comput. Electromagnet.Soc. J.* 29 (2014) 9.
- [30] **I. Mahariq, H. I Giden, H. Kurt**, Strong field enhancement of resonance modes in dielectric microcylinders, *JOSA B* 33 (3) (2016) 656-662.
- [31] **I. Mahariq, H. I Tarman, M. Kuzuoglu**, On the accuracy of spectral element method in electromagnetic scattering problems, *Int. J. Comput. Theory Eng.* 6 (6) (2014) 495-499.
- [32] **I. Mahariq, I. H Giden, H. Kurt, O. V Minin, I. V Minin**, Strong electromagnetic field localization near the surface of hemicylindrical particles, *Opt. Quant. Electron.* 50 (11) (2018) 1-8.
- [33] **I. Mahariq, T. Abdeljawad, A. S Karar, S. A Alboon, H. Kurt, A. V Maslov**, PhotonicNanojets and Whispering Gallery Modes in smoothand Corrugated Micro-Cylinders under Point-Source Illumination, *Photonics*, 7, 3.Multidisciplinary Digital Publishing Institutue, (2020).
- [34] **G. K Batchelor**, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [35] **S. David**, Horologium oscillatorium de Huygens et Principes . in revue philosophique de Louvain. Quatrième série 86, 1988, p.485-504.

- [36] **B. M. Françoise**, Les Principes mathématiques; défi aux principes cartésiens ou réalité. In revue philosophique de Louvain. Quatrième série, tome 86, 1988 p.440-466.
- [37] **W. E. K Middleton**, The place of Torricelli in the history of the barometer vol.54, 1963 p253-320.
- [38] **H. Pitot**, Description d'une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes et le sillage des vaisseaux, histoire de l'académie royale des sciences, 1732, p.363-376.
- [39] **J. Boussinesq**, Essai sur la théorie des eaux courantes, compte rendu de l'académie des sciences, vol.23, 1877, p.1-680.
- [40] **J. L. Lagrange**, Introduction à la notion d'écoulements à potentiel de vitesse, formaliser la notion de lignes de courant et précise la notion d'onde dans le fluide à la surface libre, 1781, p123-132.
- [41] **J. Boussinesque**, Théorie d'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquids dans les lits rectilignes à grandes section vol.1, Gauthier- Villas, 1897, p367-458.
- [42] **J. L. M. Poiseuille**,
Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres ; imprimerie royale, 1844, p189-236.
- [43] **O. Reynolds**, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channel, philosophical transaction of the society vol clxxiv, 1883, p579-687.
- [44] **O. Reynolds**, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids, and the determination of the criterion, philosophical transactions of the royal society A, vol clxxx, 1895, p93-184.
- [45] **G. G. Stokes**, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and on the equilibrium and motion of elastic solids, transactions of the Cambridge philosophical society, vol.8, p.287-305.
- [46] **C. L. M. H. Navier**, Mémoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, Vol. 6, 1845, p389-416.

- [47] **S. W Thompson**, XLVI, hydrokinetic solutions and observations, the London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science, Taylor & Francis, vol.42, 1871, p.362-377.
- [48] **J. W. S Rayleigh**, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids, and the determination of the criterion, philosophical transactions of the royal society A, vol.1, 1877, P342-370.
- [49] **J. Leray**, Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace, Acta Mathematica, vol.63, 1934, p.193-248.
- [50] **J. W Rayleigh**, On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side, the London, Edinburgh, and Dublin, philosophical magazine and journal of science, sixième série, vol.32, 1916, p.529-546.
- [51] **C. W Oseen**, Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications, Acta Mathematica, vol.34, 1911, p.205-284.
- [52] **L. Euler**, Principes généraux du mouvement des fluides, Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et des belles lettres de Berlin, vol.11, 1757, p.234-310.
- [53] **W. Thomson**, On vortex Motion, Transactions of the royal society of Edinburgh vol.25, 1868, p.217-260.
- [54] **M. Couette**, Etudes sur les frottements liquides, Annals.Chm. phys, 21^e série, vol.6, 1938, p.433-510.
- [55] **A. N Kolmogorov**, On the regeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid, Doklady Akademik Nauk, vol.31, 1941, p.319-323.
- [56] **Viollet, Chabard, and P. Esposito**, Mécanique des fluides appliquée : écoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières autour des structures et dans l'environnement. Presses des Ponts, vol.3, 2003, p.123-211.
- [57] **V. Karman, T. H. L Rubach**, On the Mechanisms of fluid resistance", Physics Z, Ol.13, pp.49-67, 1912.

- [58] **Batchelor, G. K.**, An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2000.
- [59] **Guyon, E., J. P Hulin, and L. Petit**, Hydrodynamique Physique. Inter Editions/Editions. EDP Sciences/CNRS Editions 5.7 52001).
- [60] **Morgan, B.**, Mécanique des fluids”. Résumé de cours, Ecole Normale Supérieure de Cachan, (2009).
- [61] **H. Schlichting**, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill series in Mechanical Engineering, New-York (1968).
- [62] **S. Goldstein**, Modern Developments in Fluid dynamics, Vol. 1, Dover Publications Inc., New York, 1968.
- [63] **E. Pemha**, Markovian model for the propagation of a light in a heated turbulent jet of air, PhD Dissertation, Laboratory of fluid Mechanics, Ecole centrale de Lyon, Ecully, France (1990).
- [64] **E. Pemha, B. Gay, A. Tailland**, Measurement of the diffusion coefficient in a heated plane airstream, Phys. Fluids A5, 1289-1292 (1993).
- [65] **E. Ngo Nyobe, E. Pemha**, Shape optimization using genetic algorithms and laser beam propagation for the determination of the diffusion coefficient in a hot turbulent jet of air, Prog. Electromagn. Res. B 4 (2008) 211-221.
- [66] **E. Pemha, E. Ngo Nyobe**, Genetic algorithm approach and experimental confirmation of a laser-based diagnostic technique for the local thermal turbulence in a hot wind tunnel jet, Prog. Electromagn. Res. B 28 (2011) 325-350.
- [67] **M. Lamara, E. Ngo Nyobe, E. Pemha**, Engineering laser-based diagnostic in a hot wind tunnel jet: measurement of the temperature structure coefficient by using an optimization technique, Prog. Electromagn. Res. M 74 (2018) 93-103.
- [68] **G. N Vanderplaats**, Numerical Optimization techniques for Engineering Design and Applications. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, New-York (1984).

**PUBLICATION ISSUE DE
LA THÈSE**



Alexandria University
Alexandria Engineering Journal

www.elsevier.com/locate/aej
www.sciencedirect.com



On the existence and determination of the incompressible laminar flow located in the polar plane of a porous annular pipe

Noé Richard Makon^a, Elisabeth Ngo Nyobe^{a,b,*}, Maurice Lamara^a,
 Yves Christian Mbono Samba^a, Elkana Pemha^a

^a Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon

^b Department of Mathematics and Physical Science, National Advanced School of Engineering, University of Yaoundé I, P.O. Box 8390, Yaoundé, Cameroon

Received 8 May 2021; revised 11 August 2021; accepted 18 August 2021

Available online 30 August 2021

KEYWORD

Polar laminar flows in porous annular pipes;
 Conservation of mass with incoming and outgoing flow rates;
 Vorticity equation in polar coordinates;
 Similarity-solutions method;
 Numerical shooting technique;
 Optimisation by Newton-Raphson algorithm

Abstract Despite the extensive research already done on laminar flows with porous boundaries, polar flows bounded by cylinders have not yet been studied. This paper investigates the polar laminar flow for an incompressible fluid located in a porous annular pipe and driven by suction-injection at the walls. The fluid being confined between the cylinders with zero axial velocity, it is proven that the flow takes place in the polar plane with conservation of mass if an incoming flow exists in the same plane to compensate the mass of fluid extorted by suction. So, one of the cylinders undergoes the suction, and the other the injection. Suitable boundary conditions for both cylinders are then found. The problem depends on the Reynolds number, the pipe gap ratio, and the pore density and surface ratios. The method of solution utilizes the shooting technique including the Runge-Kutta and Newton-Raphson algorithms. Radial flows are found as a possible solution. When the flow is not radial, the patterns of the acceptable streamlines highlight a particular zone in which the fluid is at rest, bounded by two singular streamlines and the downstream cylinder. The flow velocity is determined. Physical understandings of the flow are derived.

© 2021 THE AUTHORS. Published by Elsevier BV on behalf of Faculty of Engineering, Alexandria University. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

1. Introduction

Since the pioneer works of Berman [1] motivated by an attempt to model the separation of uranium, laminar flows of incompressible Newtonian fluids bounded by porous rigid boundaries have extensively been investigated by many authors because of various applications of this kind of flow in a wide range of industries including biomedical engineering,

* Corresponding author at: Department of Mathematics and Physical Science, National Advanced School of Engineering, University of Yaoundé I, P.O. Box 8390, Yaoundé, Cameroon.

E-mail address: nyobe_eli@yahoo.fr (E. Ngo Nyobe).

Peer review under responsibility of Faculty of Engineering, Alexandria University.

<https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.08.046>

1110-0168 © 2021 THE AUTHORS. Published by Elsevier BV on behalf of Faculty of Engineering, Alexandria University.

This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

agriculture irrigation, cooling of rocket and jet motors, food engineering, manufacturing of textiles, paper, leather, and rubber.

Yuan and Finkelstein [2] firstly treated the problem of finding similarity solutions of the steady flow in a tube with circular cross section by using an analytical perturbation method. A complete analysis of numerical and theoretical solutions for the laminar flow in a uniformly porous circular pipe with constant suction or injection at the wall is traced back to Terrill and Thomas [3].

The work done with impermeable walls by Brady and Acrivos [4] and that done by Uchida and Aoki [5] have played an important role by helping to know the treatments for accelerating walls in longitudinal direction [4] and in transverse direction [5], which continue to be applied for porous boundaries. Applying the approach for moving walls used in [4], Watson et al. [6] have investigated the two-dimensional channel flow symmetrically driven by porous accelerating walls. Following the approach for transversely moving walls developed in [5], Goto and Uchida [7] have analyzed the laminar incompressible flow in a semi-infinite porous pipe where radius varies with time, in order to simulate the laminar flow field in an idealized solid rocket motor.

In the light of the theory of dynamical systems, Banks and Zaturaska [8] have presented results of an extensive work for the laminar flow through a porous annular pipe. A numerical investigation has been carried out by Robinson [9] to establish whether multiple solutions exist for a steady incompressible laminar flow in a porous channel with uniform suction at both walls. The results of an investigation of a three-dimensional porous-channel flow defined as a two-dimensional flow to which is superimposed a perpendicular finite disturbance, have been presented by Zaturaska and Banks [10]. Dauenhauer and Majdalani [11] have investigated the flow in a porous channel with contracting or expanding walls and uniform suction or injection. To take into account the effects of unsteady suction-injection through the wall of a porous pipe with circular section, one can cite the work of Tsangaris, Kondaxakis and Vlachakis [12]. Papers have been devoted to MHD flows for viscoelastic fluid through porous parallel plates [13] and porous pipes [14]. Durlofsky and Brady [15], Casalis, Avalon and Pineau [16], Ferro and Gnani [17,18] and Griffond and Casalis [19] have done works on hydrodynamic stability in viscous flows bounded by porous boundaries.

Some laboratory experimental works have been carried out in order to highlight the richness of the structure of laminar flows bounded by porous boundaries. In this regard, the experiments achieved by Raithby and Knudsen [20], by Sviridenkov and Yagodkin [21], by Varapaev and Yagodkin [22], and by Barron, Majdalani and Moorhem [23] can be mentioned.

The motivation for the present work came in noting that in all the works mentioned above, and as well as in others referred to in these papers, the laminar flow which could take place in the polar plane with porous cylindrical walls has not yet been investigated. This paper is devoted to a laminar flow occurring in the polar plane, for an incompressible fluid located in the annular space formed by two coaxial porous cylinders and driven by suction-injection through the walls, at constant and uniform velocity, orthogonally to the walls. The problem considered depends on the suction or injection Reynolds number, the pipe gap ratio, and a velocity coefficient defined from the pore density ratio and the pore surface ratio.

The aim of this work is to find the conditions which allow the existence of this polar flow with conservation of mass and to derive physical insights of the flow, at fixed Reynolds number and gap ratio.

The problem stated in this paper is modelled by the Navier-Stokes equations whose difficulties of finding solutions are well-known and the continuity equation coming from the conservation of mass represents an avoidable constraint which must be satisfied by the unknown components of the flow velocity. Taking into account the boundary conditions applied on the surface of the two cylinders, this problem can be directly solved in the field of computational fluid dynamics (CFD). In this paper, is applied the similarity-solutions method for the vorticity equation deduced from the Navier-Stokes equations, under conditions allowing the existence of the flow stream function.

As it will be seen in this paper, the similarity-solutions method enables to reduce the steady-flow Navier-Stokes equations to a single fourth-order nonlinear ordinary differential equation with two boundary conditions at each wall. To solve this two-point boundary value problem, many numerical methods [24] can be applied. In this regard, one can cite the spectral element method (SEM) which gives satisfactory results with high accuracy [25–33]. In this paper, the shooting technique including the Runge-Kutta algorithm and the Newton-Raphson optimization algorithm is utilized. This technique gives results so accurate that it has extensively been used in mechanical engineering and applied mathematics by many researchers [3–11] wishing to find, from the similarity-solutions method, the richness of the structure of the exact solution of the Navier-Stokes equation for the so-called two-dimensional configuration.

Unlike the preceding papers [1–23] in which axisymmetric flows are studied in porous tubes and pipes or Cartesian flows are investigated in porous channels, this paper includes the vorticity equation in its unusual polar-coordinates which is demonstrated by means of an unusual approach directly applied in the vector form of the momentum equation. From the computed solutions obtained for this vorticity equation, the conditions under which this steady polar laminar flow exists are then determined, and the patterns of acceptable streamlines are found and plotted. The radial flow is found as a possible solution. When the flow is not radial, the patterns of acceptable streamlines highlight a particular zone in which the fluid is at rest, bounded by two singular streamlines and the downstream cylinder. For various values of the velocity coefficient, the steady-flow stream function is computed and the components of the flow velocity are deduced. Physical understandings of the flow are derived from the results obtained.

The main interest of this study is to provide potential research directions in the future for this polar laminar flow which is not yet studied. The present investigation is a necessary preliminary step for subsequent works in which it would be interesting to investigate the influence of the gap ratio and that of the Reynolds number, in order to capture further physical insights of the deep richness of the structure of this polar laminar flow.

For a better understanding of this work, this paper contains five sections. In Section 2, the problem is stated and its mathematical formulation is given. Section 3 explains the method of

solution. Section 4 is devoted to the results obtained. The paper ends by a conclusion given in Section 5.

2. Statement of the problem and mathematical formulation

2.1. Statement of the problem

Consider an incompressible Newtonian fluid located in the annular space formed by two coaxial cylinders (C1) and (C2) having same length L . The physical properties of the fluid are constant. The cylindrical-coordinates system (r, θ, z) is adopted with the origin located on the horizontal z -axis of the cylinders, and the unit vectors along the radial, azimuthal and axial directions represented by (e_r, e_θ, e_z) respectively. The inner cylinder (C1) whose radius is $r = R_1$ and the outer one (C2) with radius $r = R_2$ have porous surfaces. The parameters of the setup being defined by the subscript (1) for the inner cylinder and the subscript (2) for the outer one, s_1 and s_2 represent the surfaces of the pores, λ_1 and λ_2 denote the surface densities of the pores, N_1 and N_2 represent the total numbers of pores, and V_1 and V_2 are the velocities of suction or injection.

As usually done for axisymmetric flows in annular tubes, the geometric aspect of the annular pipe considered is characterized by the gap ratio δ which is defined in order to compare the half-width h of the air gap with respect to the mean radius of the annular pipe:

$$\delta = \frac{(R_2 - R_1)/2}{(R_1 + R_2)/2} = \frac{h}{R_1 + h}, \text{ with } h = \frac{R_2 - R_1}{2} \quad (1)$$

The effects of the body forces are negligible and the flow is steady and driven by suction or injection operated through the porous walls, at constant and uniform velocity, orthogonally to the surfaces of the cylinders. The length L of the cylinders is supposed to be very great compared to R_1 and R_2 .

2.2. Conservation of mass and allowed setups

The equation of conservation of mass for fluids having incoming and outgoing flows is commonly written in the following form [34–36]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho(|q_i| - |q_s|), \quad (2)$$

where ρ represents the specific mass of the fluid, \mathbf{V} its velocity field, q_i denotes the rate of incoming flow (injection) per unit fluid mass with $q_i \leq 0$ and q_s represents the rate of outgoing flow (suction) per unit fluid mass with $q_s \geq 0$. For an incompressible fluid, Eq. (2) gives:

$$\text{div} \mathbf{V} = |q_i| - |q_s|. \quad (3)$$

Since the steady flow under study has zero-axial velocity, no impermeable wall is allowed and the following possible configurations are then considered, that is: both cylinders undergo injection, or both cylinders undergo suction, or one of the cylinders undergoes injection and the other one undergoes suction.

When both cylinders undergo injection, a practical problem exists. The fluid being incompressible and filled in the annular pipe, the injected fluid cannot take place inside the same pipe if there is no outgoing movement of the fluid. But this one can-

not exist because of the absence of axial movement of the fluid. So, the configuration for which both cylinders undergo the injection of fluid cannot be studied.

For the second configuration in which both cylinders undergo suction, the incoming flow does not exist in the pipe except in the axial direction. But the flow has zero axial velocity. So, the flow considered is an emptying process in the annular pipe. One then has: $q_i = 0$ with $q_s \neq 0$ and Eq. (3) becomes: $\text{div} \mathbf{V} = -|q_s|$. This means that the flow considered does not have zero divergence velocity, and the stream function does not exist. Hence, the vorticity equation cannot be expressed in terms of the stream function and cannot then be applied. Therefore, the configuration which corresponds to the suction of fluid applied in both cylinders cannot be studied in this paper because it does not satisfy the conservation of mass.

The third configuration in which one of the cylinders undergoes the injection (upstream cylinder) and the other the suction (downstream cylinder) remains to be considered. One can now find the completed expression of Eq. (3) in terms of the parameters of the setup, by calculating $|q_i|$ and $|q_s|$. Assuming that the pore surface is very small and taking into account that the suction and injection velocities are orthogonal to the surfaces of the cylinders, $|q_i|$ and $|q_s|$ can be determined by applying the definition of the rate of any flow through any given surface [34–36]. This gives the following results:

$$|q_i| = \frac{\rho N_2 (V_2 s_2)}{\rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L} \text{ and } |q_s| = \frac{\rho N_1 (V_1 s_1)}{\rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L}, \quad (4)$$

where ρ represents the specific mass of the fluid, if one considers that the fluid is injected through the outer cylinder (C2) and extorted through the inner one (C1).

Introducing in Eq. (4) the pore densities λ_1 and λ_2 which are defined as the total number of pores per unit surface $S_1 = 2\pi R_1 L$ for the inner cylinder and $S_2 = 2\pi R_2 L$ for the outer one, Eq. (3) then becomes:

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{2}{(R_2^2 - R_1^2)} (\lambda_2 R_2 V_2 s_2 - \lambda_1 R_1 V_1 s_1). \quad (5)$$

The preceding arguments lead to conclusion that the conservation of the fluid mass is ensured in the annular pipe if an incoming flow exists in the polar plane to compensate the mass of fluid extorted by suction in the same plane. So, the acceptable configuration is such that one of the cylinders undergoes the suction and the other the injection, with the equality $|q_i| = |q_s|$ leading to a zero-divergence velocity according to Eq. (3). Also, one obtains the relation connecting the velocities V_1 and V_2 found from Eq. (5):

$$V_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \left(\frac{s_1}{s_2}\right) \left(\frac{R_1}{R_2}\right) V_1. \quad (6)$$

If the experimenter applies an additional coefficient of velocity c arbitrarily chosen between the upstream and downstream velocities V_1 and V_2 , the relation obtained in Eq. (6) can be modified as:

$$V_2 = c \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \left(\frac{s_1}{s_2}\right) \left(\frac{R_1}{R_2}\right) V_1. \quad (7)$$

Setting $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$, $s = s_1/s_2$ and writing the ratio R_1/R_2 in terms of δ , Eq. (7) gives:

$$V_2 = \sigma \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta}\right) V_1, \quad (8)$$

where σ is a velocity coefficient defined by: $\sigma = c\lambda s$.

2.3. Derivation of the vorticity equation for the polar plane

Since the flow under study has zero-divergence velocity, one obtains the following relation in which V_r and V_θ represent the radial and azimuthal components of the velocity field:

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \text{ or } \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = -\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \quad (9)$$

Eq. (9) justifies the existence of the stream function ψ defined by the relations:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \text{ and } V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (10)$$

Now let's explain the approach applied in order to obtain the vorticity equation in polar coordinates. For this purpose, is used in this paper, an unusual method which is based on the single vector momentum equation, contrarily to commonly applied methods which use the axes projection of this equation. For the problem stated, the vector momentum equation is written as follows [34–36]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V} \quad (11)$$

where t denotes the time, p represents the pressure, Δ is the vector Laplacian operator, ν denotes the kinematic viscosity of the fluid and $\text{Curl} \mathbf{V}$ represents the rotational of \mathbf{V} defined in polar coordinates as [33]:

$$\text{Curl} \mathbf{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (12)$$

The stream function then satisfies the expected relation well-known [34–36] in Cartesian coordinates where ∇^2 represents the scalar Laplacian operator:

$$\text{Curl} \mathbf{V} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z \quad (13)$$

To obtain the partial differential equation satisfied by ψ and called the vorticity equation or the transport equation of vorticity, one takes the rotational of Eq. (11). After doing it, Eq. (13) is applied to demonstrate the following formulas valid for any vector field in polar coordinates, with the symbol \times representing the vector product:

$$\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -(\nabla^2 \psi) \mathbf{grad} \psi, \quad (14a)$$

$$\text{Curl}(\text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}) = -\mathbf{grad}(\nabla^2 \psi) \times \mathbf{grad} \psi, \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V} &= -\text{Curl}(\text{Curl} \mathbf{V}) = -\text{Curl}(-(\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_r - \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \psi) \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (14c)$$

$$\text{Curl}(\Delta \mathbf{V}) = -(\nabla^2 \nabla^2 \psi) \mathbf{e}_z. \quad (14d)$$

By applying the results obtained in Eqs. (14), the vorticity equation in polar coordinates is thus obtained:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (15)$$

For the steady flow which is the purpose of this paper, the equation to be solved is deduced:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (16)$$

So, the Navier-Stokes equations are then replaced with a single partial differential equation with the unknown function ψ . To solve this equation, boundary conditions are needed. They are dictated by the considerations developed about the conservation of mass in Section 2.2. Introducing the parameter K to take into account the two possible orientations of the flow, one then obtains the following boundary conditions:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = K V_1 \text{ and } V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \text{ at } r = R_1 \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= K V_2 = K \sigma \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right) V_1 \text{ and } V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= 0, \text{ at } r = R_2 \end{aligned} \quad (17b)$$

For $K = 1$, the fluid is injected through the inner wall and is extorted through the outer one. The case $K = -1$ corresponds to the opposite configuration, that is, the inner wall undergoes the suction and the injection is applied on the outer one.

3. Method of solution

3.1. Pioneer Berman hypothesis and normalization by Banks and Zaturka

As usually required, we need to construct dimensionless variables. So, lengths, velocities, and stream function are made dimensionless by h , V_1 , and $V_1 h$, respectively. By using the same denotations as those of dimensional parameters, the polar vorticity equation is then written in its dimensionless form:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi \right) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \nabla^2 \psi \quad (18)$$

where $Re = V_1 h / \nu$ is the Reynolds number.

According to pioneer similarity-solutions hypothesis [1], the transverse velocity V_r does not depend on the streamwise coordinate θ , that is: $V_r = V_r(r) = r^{-1}(\partial \psi / \partial \theta)$. This hypothesis holds because the pipe radius does not vary in the streamwise direction and the injection-suction of fluid through the pipe wall is operated uniformly along the whole wall surface. Integrating this latter equation and setting $\psi = 0$ at $\theta = 0$, one obtains the similarity form, all the parameters being dimensionless.

$$\psi(r, \theta) = \theta F(r), \text{ with } F(r) = r V_r(r) \quad (19)$$

As suggested by Banks and Zaturka [8], the above stream function formula for flows in annular pipes may be adjusted to take into account the particular case for which the annular pipe behaves like a set of two horizontal parallel plates. To have this configuration, the radii R_1 and R_2 must tend to infinity while h is kept constant. This occurs when the condition $h \ll R_1$ is satisfied so that the dimensionless streamwise parameter θ may be normalized by the dimensionless scale $\varepsilon = h/R_1 = (\delta^{-1} - 1)^{-1}$. This parameter then becomes θ/ε to allow the comparison of h with respect to R_1 in the stream function formula. This leads to write ψ in the following form [8]:

$$\psi(r, \theta) = \theta(\delta^{-1} - 1)F(r). \tag{20}$$

where F may be regarded as the steady-flow stream function per unit azimuthal angle.

3.2. Equations for the stream function per unit angle and boundary conditions

Inserting the above relation in the vorticity equation (Eq. (18)), one obtains the equation satisfied by the radial function F :

$$(\delta^{-1} - 1) \left(\frac{1}{r} F \frac{d}{dr} \nabla_r^2 F - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \nabla_r^2 F \right) = \frac{1}{Re} \nabla_r^2 \nabla_r^2 F. \tag{21}$$

Since the velocity components V_r and V_θ are given by the relations:

$$V_r = \frac{1}{r}(\delta^{-1} - 1)F, \quad V_\theta = -\theta(\delta^{-1} - 1) \frac{dF}{dr}, \tag{22}$$

the boundary conditions for F are deduced from the dimensional relations given in Eq. (17a) and Eq. (17b):

$$F = K \text{ and } \frac{dF}{dr} = 0, \text{ at } r = \delta^{-1} - 1, \tag{23a}$$

$$F = K\sigma \text{ and } \frac{dF}{dr} = 0, \text{ at } r = \delta^{-1} + 1. \tag{23b}$$

As seen in Eq. (23a) and Eq. (23b), the dimensionless radial boundaries depend on the gap ratio δ . For numerical investigations, one must work with fixed limit values for r or for any parameter playing the role of r , because it is needed to compare in the same figures, various numerical curves plotted as function of the radial distance for different values of δ . Also, a change of variable commonly operated replaces r with a new variable η by setting $\eta = Ar^2 + B$. Adjusting the constants A and B to have $\eta = -1$ at $r = \delta^{-1} - 1$, and $\eta = 1$ at $r = \delta^{-1} + 1$, one then obtains :

$$\eta = \frac{\delta}{2}r^2 - \frac{1 + \delta^2}{2\delta}, \text{ with } -1 \leq \eta \leq 1. \tag{24}$$

Rewriting Eq. (21) and the boundary conditions (23a) and (23b) in terms of η , one obtains the equations for the problem under study:

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\delta\eta)^2 F^{(4)} + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)F^{(3)} + 8\delta^2 F^{(2)} \\ & + Re(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)(F^{(1)}F^{(2)} - FF^{(3)}) \\ & + 2Re\delta(1 - \delta)\left((F^{(1)})^2 - 2FF^{(2)}\right) = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

with:

$$F = K \text{ and } F^{(1)} = 0, \text{ at } \eta = -1, \tag{26a}$$

$$F = K\sigma \text{ and } F^{(1)} = 0, \text{ at } \eta = 1. \tag{26b}$$

where $F^{(m)}$ represents the derivative $d^m F/d\eta^m$.

3.3. Calculation of the stream function by means of the numerical shooting technique

To solve the problem stated in Eq. (25) with the boundary conditions given in Eq. (26a) and Eq. (26b), one transforms the problem under consideration to an initial boundary value

problem by keeping the same ordinary differential equation and introducing two missing conditions freely chosen for the second and third derivatives α and β at the initial border $\eta = -1$, for the unknown function G . This gives:

$$\begin{aligned} & (1 + \delta^2 + 2\delta\eta)^2 G^{(4)} + 8\delta(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)G^{(3)} + 8\delta^2 G^{(2)} \\ & + Re(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)(G^{(1)}G^{(2)} - GG^{(3)}) \\ & + 2Re\delta(1 - \delta)\left((G^{(1)})^2 - 2GG^{(2)}\right) = 0, \end{aligned} \tag{27a}$$

with:

$$G = K, \quad G^{(1)} = 0, \quad G^{(1)} = 0, \quad G^{(2)} = \alpha, \text{ and } G^{(3)} = \beta, \text{ at } \eta = -1. \tag{27b}$$

For the guest values α and β , the above initial value problem is solved by means of the fourth-order Runge-Kutta algorithm [24]. The solution obtained for G is identical to that required for F when the values of (α, β) are adjusted to give the optimal values (α^*, β^*) so that the numerical solution for G match conditions required for F at the border $\eta = 1$. Also, at the ending point $\eta = 1$, a numerical optimization technique is needed. The solution $G(\eta)$ obtained for a given (α, β) is then used to define a quadratic cost function Q as:

$$Q(\alpha, \beta) = |U|^2 = U_1^2(\alpha, \beta) + U_2^2(\alpha, \beta), \tag{28}$$

where U is a discrepancy vector whose components U_1 and U_2 measure how far the solution computed is from satisfying the required conditions at $\eta = 1$, and are then defined as:

$$U_1(\alpha, \beta) = G(\eta = 1) - K\sigma \tag{29a}$$

$$U_2(\alpha, \beta) = G^{(1)}(\eta = 1) - 0 \tag{29b}$$

With a view to minimizing $|U|$, that is U_1 and U_2 , one starts with an initial guess $(\alpha, \beta)_{(0)}$ and may apply the gradient-descent algorithm or other optimization technique as done in previously published works [37–41]. In this paper, we apply the Newton-Raphson algorithm [24,42] which involves solving the set of two linear equations with $(\delta\alpha, \delta\beta)$ as unknown quantities:

$$[J]^{(q)} \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \end{pmatrix}^{(q)} = - \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}^{(q)}, \tag{30}$$

and then updating by the relation:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^{(q+1)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^{(q)} + \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \end{pmatrix}^{(q)}, \quad q = 0, 1, 2, \dots \tag{31}$$

where q is the iteration index and $[J]$ represents the Jacobian matrix whose components are given by:

$$\begin{aligned} J_{1,1} &= \partial U_1 / \partial \alpha, \quad J_{1,2} = \partial U_1 / \partial \beta, \quad J_{2,1} \\ &= \partial U_2 / \partial \alpha \text{ and } J_{2,2} = \partial U_2 / \partial \beta \end{aligned} \tag{32}$$

To compute $J_{i,j}$, one introduces two functions p and q as follows: $p = \partial G / \partial \alpha$ and $q = \partial G / \partial \beta$. Assuming that:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(G(\eta = 1)) &= \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right)_{\eta=1} = p(\eta \\ &= 1) \text{ and } \frac{\partial}{\partial \beta}(G(\eta = 1)) = \left(\frac{\partial G}{\partial \beta} \right)_{\eta=1} \\ &= q(\eta = 1), \end{aligned} \tag{33a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial p}{\partial \eta} = p^{(1)} \text{ and } \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial G}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial q}{\partial \eta} = q^{(1)}, \end{aligned} \tag{33b}$$

one finds that the components $J_{i,j}$ are given by:

$$\begin{aligned} J_{1,1} &= p(\eta = 1), J_{1,2} = q(\eta = 1), J_{2,1} = p^{(1)}(\eta \\ &= 1), \text{ and } J_{2,2} = q^{(1)}(\eta = 1) \end{aligned} \tag{34}$$

Hence, the computation of $J_{i,j}$ requires knowing at the end point $\eta = 1$, the functions p, q , and the first derivatives $p^{(1)}$ and $q^{(1)}$. To get these values, one differentiates Eq. (27a) and Eq. (27b) with respect to α and β and then proves that p and q are solutions of the initial value linear problem given by the same ordinary differential equation for p and q ($y = p$ or $y = q$):

$$\begin{aligned} (1 + \delta^2 + 2\delta\eta)^2 y^{(4)} + (1 + \delta^2 + 2\delta\eta)(8\delta - Re(1 - \delta)G)y^{(3)} \\ + (8\delta^2 + Re(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)G^{(1)} - 4Re\delta(1 - \delta)G)y^{(2)} \\ + (Re(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)G^{(2)} + 4Re\delta(1 - \delta)G^{(1)})y^{(1)} \\ - (Re(1 - \delta)(1 + \delta^2 + 2\delta\eta)G^{(3)} + 4Re\delta(1 - \delta)G^{(2)})y = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

with the following initial conditions :

$$p = 0, p^{(1)} = 0, p^{(2)} = 1, p^{(3)} = 0, \text{ at } \eta = -1 \tag{36a}$$

$$q = 0, q^{(1)} = 0, q^{(2)} = 0, q^{(3)} = 1, \text{ at } \eta = -1 \tag{36b}$$

3.4. Derivation of the fluid particle trajectories or streamlines

It is well-known that for any steady flow which allows the stream function ψ , the equations of the trajectories of the fluid particles or streamlines are given by the relation: $\psi = \text{constant} = C$ where C is a constant of integration. Using the definition of ψ given in Eq. (20), one finds that the equations of the streamlines for a given δ are given by: $\theta F(\eta) = C$. Since numerical computations give no-zero value for F , the equation of any streamline in the flow can then be written in the form:

$$\theta = \frac{C}{F(\eta)} \tag{37}$$

The value of C is determined from the coordinates of at least one point at which the given streamline passes. Investigations are then done for two cases according to the value of K ($K = -1$ or $K = +1$).

The case $K = 1$ corresponds to the streamlines which begin from the inner cylinder C1, by injection at any point ($\theta = a, \eta = -1$); this gives $C = aF(-1)$. These streamlines end by suction at the outer cylinder C2. The case $K = -1$ which is the opposite configuration, corresponds to the streamlines which end by suction at the inner cylinder and begin from the outer cylinder by injection at any point ($\theta = b, \eta = 1$); this gives $C = bF(1)$.

Applying the Cartesian coordinates (X, Y) computed from the polar ones (r, θ) by the well-known relations $X = r\cos\theta$ and $Y = r\sin\theta$ written for any fluid particle, one finds that for a given value of δ , the trajectories of the fluid particles are

defined by the following parametrical Cartesian equations in which η plays the role of parameter:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta}}{\delta} \cos\left(\frac{aF(-1)}{F(\eta)}\right) \text{ and } Y \\ &= \frac{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta}}{\delta} \sin\left(\frac{aF(-1)}{F(\eta)}\right) \end{aligned} \tag{38a}$$

for the streamlines beginning from the inner cylinder C1. For those which begin from the outer cylinder C2, one has:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta}}{\delta} \cos\left(\frac{bF(1)}{F(\eta)}\right) \text{ and } Y \\ &= \frac{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta}}{\delta} \sin\left(\frac{bF(1)}{F(\eta)}\right) \end{aligned} \tag{38b}$$

Eqs. (38a) and (38b) show that each streamline is defined by the given values of a and b , for the two configurations in which the inner cylinder is upstream and downstream.

4. Results and discussion

4.1. Preliminary remarks

Computations are done for a fixed Reynolds number $Re = 2$ and a given gap ratio $\delta = 5/8$. For convergence requirements of the Runge-Kutta and Newton-Raphson algorithms, 101 discretized values are adopted for the parameter η , forming 100 intervals of same length $\Delta\eta = 2 \times 10^{-2}$. The stop criterion that one has applied for the Newton-Raphson optimization procedure enables to reduce the cost function Q defined in Eq. (28), to the minimum $Q_{\min} \approx 10^{-25}$. This proves the high accuracy of the shooting technique utilized, the optimization objective being to reduce Q to zero.

Physical understandings derived from the results are discussed by considering the following aspects of the flow: the streamlines, the stream function per unit polar angle, the radial and azimuthal components of the flow velocity field.

4.2. Streamlines

Figs. 1–4 show the patterns of streamlines plotted after having obtained some samples by applying Eq. (38a) and Eq. (38b).

To obtain clear figures, each pattern contains 21 streamlines corresponding to the discretized values (a_i) and (b_j) , defined for constants a and b by:

$$a_i = i(2\pi)/20, \text{ with } i = 0, 1, \dots, 20 \text{ and for } K = 1 \tag{39a}$$

$$b_j = j(2\pi)/20, \text{ with } j = 0, 1, \dots, 20 \text{ and for } K = -1 \tag{39b}$$

From the numerical investigations of those streamlines, one finds that the value of the velocity ratio $\sigma = 1$ gives a solution which corresponds to the radial flow. In Fig. 1 is plotted the pattern of radial streamlines for the configuration in which the inner cylinder is downstream. This figure highlights a singular streamline AB defined by the polar equation $\theta(\eta) = 0$, with $-1 \leq \eta \leq 1$. Reversing the direction of the arrows which orient the radial streamlines in this figure, one obtains the opposite configuration in which the inner cylinder is upstream. As seen plotted in Fig. 1, the total incoming fluid mass from the upstream outer cylinder is evacuated through the whole

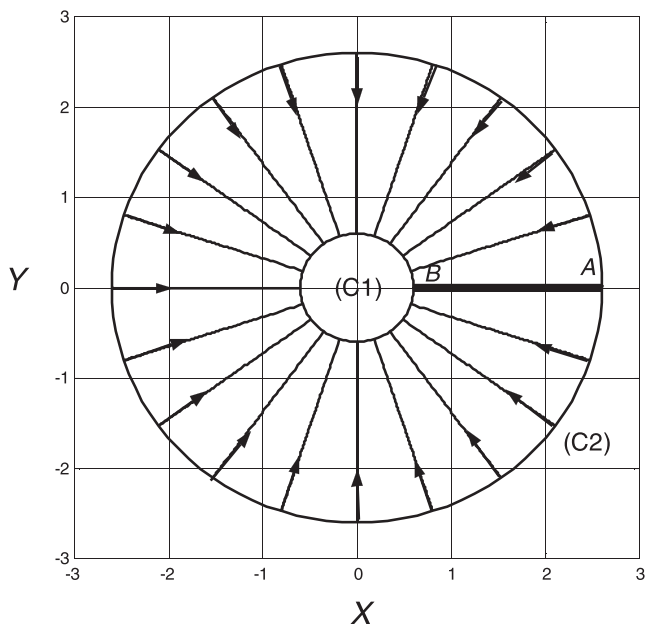


Fig. 1 Pattern of streamlines for the radial flow which occurs when $\sigma = 1$ with $K = 1$. This corresponds to the configuration in which the outer cylinder C2 undergoes the injection and the inner one C1 the suction. Reversing the direction of the arrows which orient the radial streamlines, one obtains the opposite configuration for the radial flow.

surface of the downstream inner cylinder. Two other cases are to be considered, depending on whether or not the whole surface of the downstream cylinder is sufficient to evacuate the total mass of fluid coming from the upstream cylinder.

In this regard, Fig. 2 shows the case for which the whole surface of the downstream cylinder cannot evacuate the total incoming mass of fluid provided by the upstream cylinder.

The remaining part of this incoming flow passing through the downstream cylinder then creates an additional flow whose streamlines necessarily intersect the first part of streamlines. In Fig. 2a, is plotted the pattern of streamlines for which the inner cylinder is upstream and Fig. 2b shows the case for which the outer one is upstream. Computations prove that these situations occur in Fig. 2a for $K = 1$ with $0 < \sigma < 1$, and in Fig. 2b for $K = -1$ with $\sigma > 1$.

As seen in Fig. 2a and in Fig. 2b, the two patterns of streamlines highlight many intersection points: this is not allowed for any steady laminar flow. So, these streamlines are unacceptable. One concludes that the solution of the Navier-Stokes equation obtained for the stream function F is also unacceptable.

There remains the last case for which the total incoming flow created by injection at the upstream cylinder is evacuated through a part of the surface of the downstream cylinder such that the remaining part of that surface does not undergo any fluid suction. In Fig. 3a, b, c, d and e are plotted five configurations in which the inner cylinder is upstream and Fig. 4a, b, c, d and e show the cases for which the outer cylinder is upstream.

From the computations done, one finds that these situations occur in Fig. 3 for $K = 1$, with $\sigma > 1$, and in Fig. 4 for $K = -1$ with $0 < \sigma < 1$. Fig. 3a, b, c, d and e are obtained

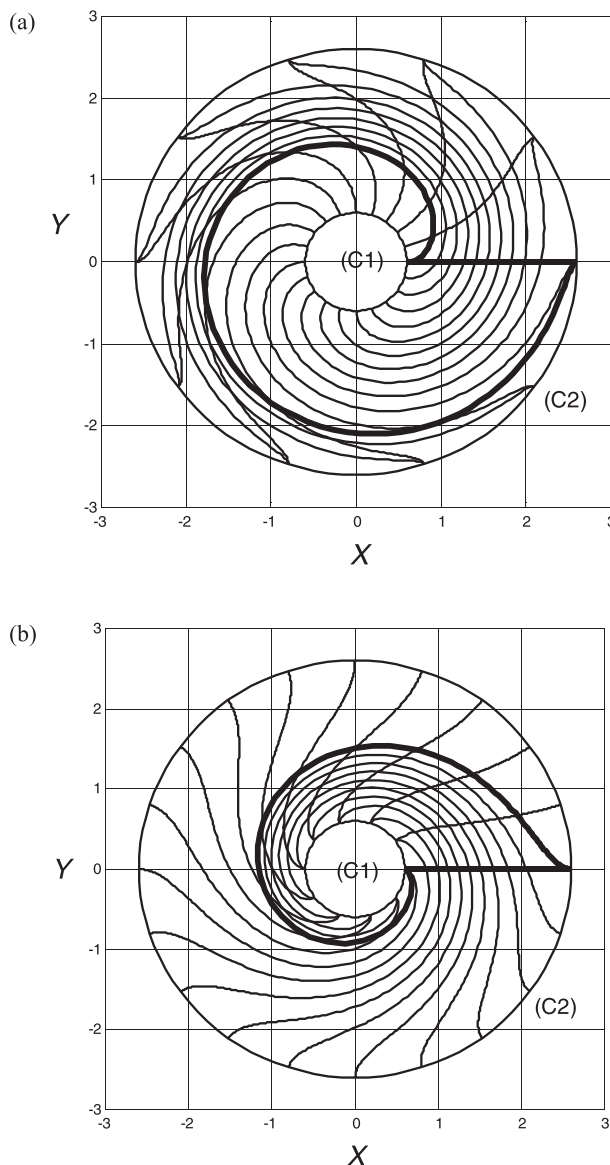


Fig. 2 Unacceptable patterns of streamlines for (a) the configuration in which the inner cylinder is upstream ($K = 1$ with $0 < \sigma < 1$), plotted for $\sigma = 0.5$, and for (b) the configuration in which the outer cylinder is upstream ($K = -1$ with $\sigma > 1$), plotted for $\sigma = 2$.

for the value $K = 1$, with $\sigma = 1.1, \sigma = 1.5, \sigma = 2.0, \sigma = 3.0$ and $\sigma = 5.0$ respectively, and Fig. 4a, b, c, d and e correspond to the value $K = -1$, with $\sigma = 0.1, \sigma = 0.3, \sigma = 0.5, \sigma = 0.7$ and $\sigma = 0.9$ respectively.

As seen plotted in Figs. 3 and 4, the fluid located in the annular pipe is divided in two regions. There is a first part in which the fluid is at rest, and one observes a second part in which the laminar flow takes place with regular and ordered streamlines.

These patterns of streamlines show that the two regions of the fluid are separated by two particular streamlines AB and AC defined by the values $a_i = b_j = 0$ ($i, j = 0$) and $a_i = b_j = 2\pi$ ($i, j = 20$) respectively. Point A is a singular point located on the surface of the upstream cylinder whereas points B and C are located on the surface of the downstream cylinder.

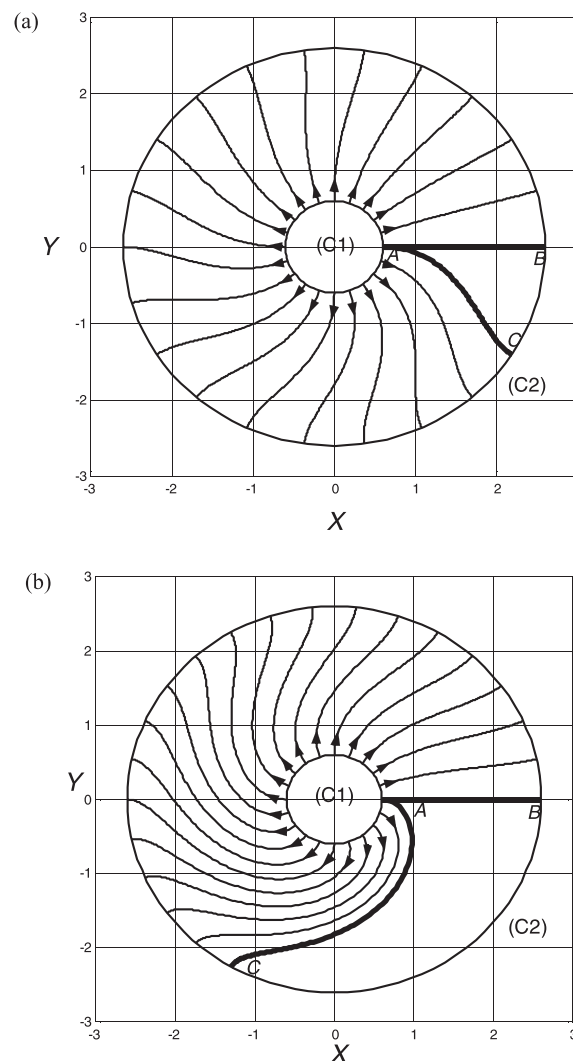
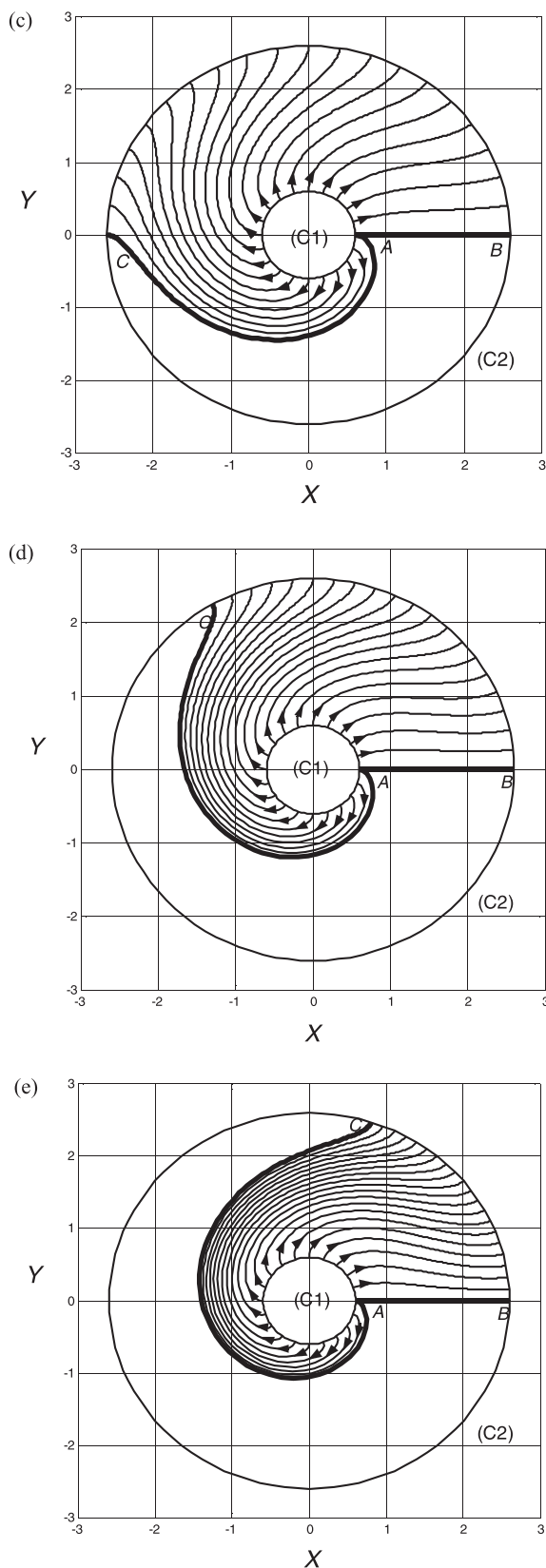


Fig. 3 Acceptable patterns of streamlines for five configurations in which the inner cylinder is upstream ($K = 1$ with $\sigma > 1$), plotted for (a) $\sigma = 1.1$, (b) $\sigma = 1.5$, (c) $\sigma = 2.0$, (d) $\sigma = 3.0$ and (e) $\sigma = 5.0$.

From the pattern of the streamlines presented, some physical insights of the flow can be derived. First of all, it is noticed that the streamlines of the steady laminar flow seen in Figs. 3 and 4 exhibit zero intersection point. This confirms the reality of the polar laminar flow under consideration. As seen plotted in these figures, no reverse flow occurs in the fluid. From the physical point of view, this means that the dragging action of any fluid layer exerted on fluid particles is favourable to the effects of pressure gradient applied on this fluid layer, when the injection and the suction are operated on the porous walls at the Reynolds number $Re = 2$ and for the gap ratio $\delta = 5/8$.

4.3. The stream function F per unit polar angle

One only considers the solutions F corresponding to the steady laminar flow that exists, that is solutions which give rise to acceptable streamlines. In Fig. 5a and b, are plotted the acceptable values of F for various values of the velocity coefficient σ , when the upstream velocity defined as the reference injection

Fig. 3 (continued)

The circular length BC in which the fluid is evacuated through the downstream cylinder is equal to the value $2\pi/\sigma$ for $K = 1$, and $2\pi\sigma$ for $K = -1$.

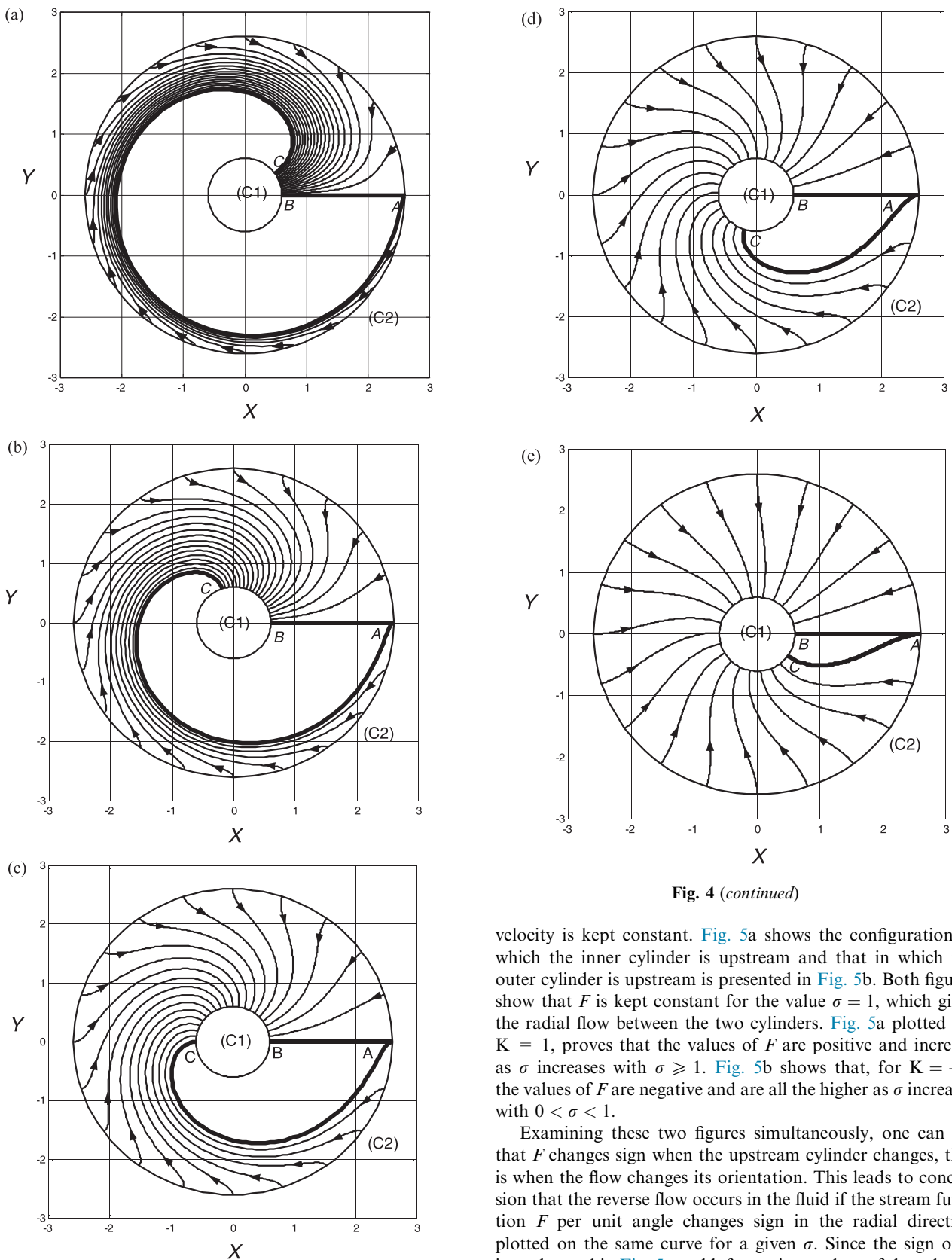


Fig. 4 (continued)

Fig. 4 Acceptable patterns of streamlines for five configurations in which the outer cylinder is upstream ($K = -1$ with $0 < \sigma < 1$), plotted for (a) $\sigma = 0.1$, (b) $\sigma = 0.3$, (c) $\sigma = 0.5$, (d) $\sigma = 0.7$ and (e) $\sigma = 0.9$.

velocity is kept constant. Fig. 5a shows the configuration in which the inner cylinder is upstream and that in which the outer cylinder is upstream is presented in Fig. 5b. Both figures show that F is kept constant for the value $\sigma = 1$, which gives the radial flow between the two cylinders. Fig. 5a plotted for $K = 1$, proves that the values of F are positive and increase as σ increases with $\sigma \geq 1$. Fig. 5b shows that, for $K = -1$, the values of F are negative and are all the higher as σ increases with $0 < \sigma < 1$.

Examining these two figures simultaneously, one can see that F changes sign when the upstream cylinder changes, that is when the flow changes its orientation. This leads to conclusion that the reverse flow occurs in the fluid if the stream function F per unit angle changes sign in the radial direction plotted on the same curve for a given σ . Since the sign of F is unchanged in Fig. 5a and b for various values of the velocity coefficient σ , this confirms that no reverse flow occurs in the fluid even if σ takes any acceptable value.

For a given velocity coefficient, the injection and suction velocities are kept constant ($V_2 = \sigma(3/13)V_1$), F does not

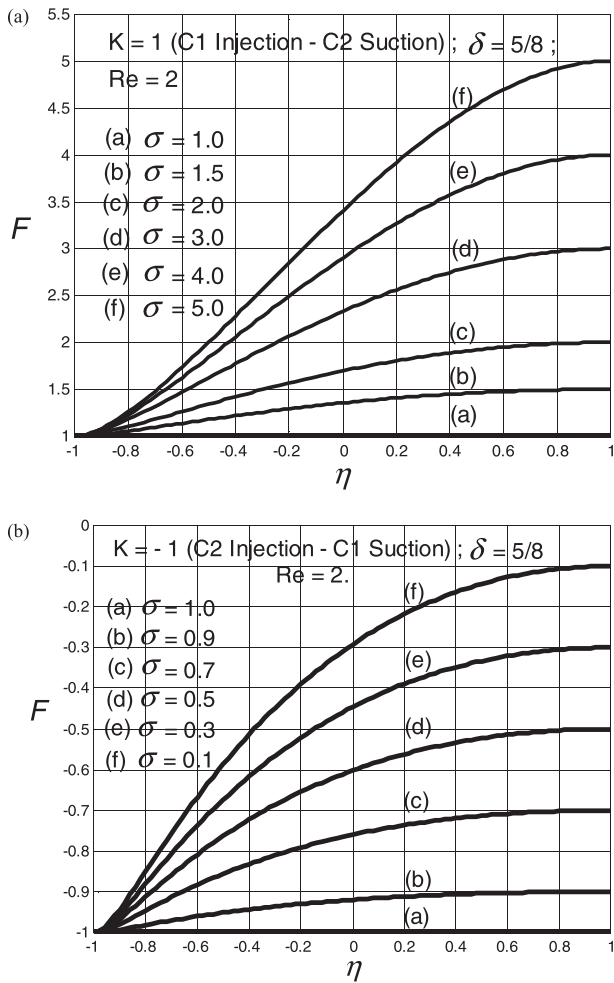


Fig. 5 Stream function per unit polar angle for various values of σ , plotted for the configurations in which (a) the inner cylinder is upstream and (b) the outer one is upstream.

change sign (no reverse flow) and then increases monotonically with η according to the boundary conditions given in Eqs. (26), as seen in Fig. 5a and b.

As σ increases with $\sigma > 1$, the injection velocity being kept constant, the suction velocity V_2 then increases according to the relation given in Eq. (8). Fluid particles with highest velocity then increase in number and mass so that the mass rate of the flow increases with the radial distance and along a given circumference.

This argument explains why the stream function F per unit angle increases as function of η for various values of σ , as seen plotted in Fig. 5a. For Fig. 5b, similar arguments explain the plots presented.

4.4. The radial component of the velocity field

From the computed values of the stream function F per unit polar angle, the radial velocity component V_r is determined by applying the following relation:

$$V_r = \frac{1 - \delta}{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta}} F \tag{40}$$

Fig. 6a and b show the values of V_r as function of η for various values of the velocity coefficient σ , plotted for the configuration in which the inner cylinder is upstream (see Fig. 6a) and that in which the outer cylinder is upstream (see Fig. 6b) ($K = 1$ and $K = -1$ respectively). These figures confirm that for any values of σ , V_r is positive for $K = 1$ and negative for $K = -1$, as expected from the possible orientations of the streamlines observed in Section 4.2.

Examining closely these figures, one can see that the plots presented in Fig. 6a show the decrease of V_r as η increases, for $\sigma \geq 1$, except for the values of σ exceeding 2.0 and for which the plots exhibit an inflexion point. Unlike Fig. 6a, Fig. 6b shows that the values of V_r increase with η for any σ , and are all the greater as σ decreases with $0 < \sigma \leq 1$.

The pressure gradient whose favourable action has already been mentioned in Section 4.3 creates in the flow under study an interesting phenomenon seen in Fig. 6a, and which is already observed for the flow in a porous channel with orthogonally moving walls [11]. This phenomenon consists of the existence of the fluid layers that one can name (FL), whose radial velocity exceeds the injection and suction velocities driving the radial flow between the two cylinders. As seen in

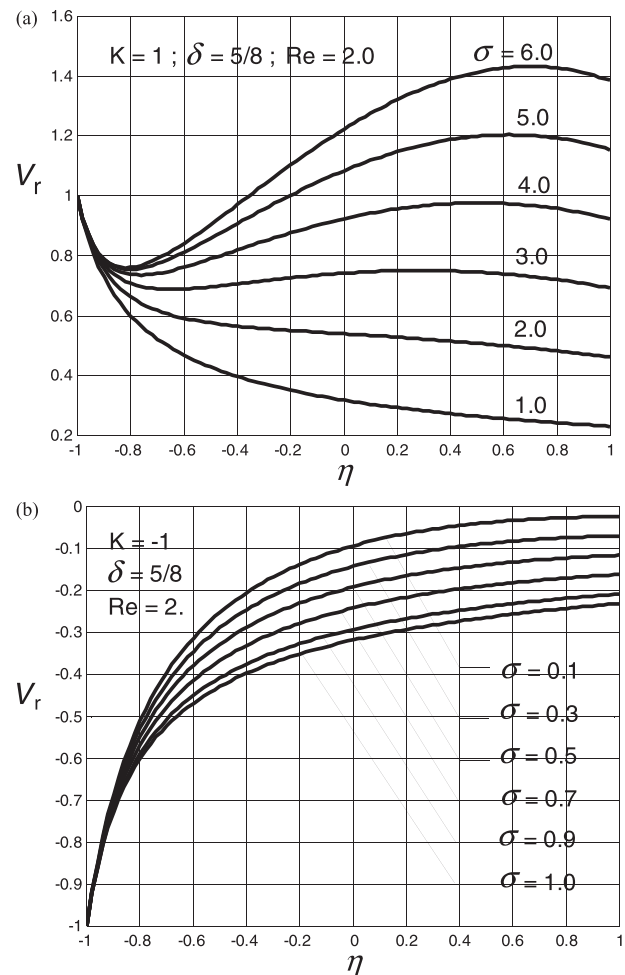


Fig. 6 Radial component of the velocity field for various values of the velocity coefficient σ , plotted for (a) the configuration in which the inner cylinder is upstream and (b) the configuration in which the outer one is upstream.

Fig. 6a, the fluid layers (FL) are located near the outer downstream cylinder and occupy a thickness (equal to the interval $0.4 \leq \eta \leq 0.9$ for $\sigma = 6.0$) which increases as σ increases. Fig. 6a also shows that the fluid layers (FL) do not exist for the velocity coefficient σ less than 0.4.

To explain these physical insights, one gives the following arguments. As in the so-called Couette flow with longitudinally moving wall and negative pressure gradient, the localisation of the fluid layers (FL) is consistent with the fact that the flow-friendly pressure gradient weakly acts on fluid layers having slow velocity. In this regard, one mentions that the smaller the velocity coefficient, the weaker the suction velocity at the outer downstream cylinder C2, so that the slowest fluid particles increase in number and mass in the annular pipe, as seen plotted in Fig. 6a for small values of σ . The effects of the pressure gradient are then weak in these conditions. This explains why the fluid layers (FL) do not exist for small values of σ . Also, one understands from Fig. 6a that the fixed injection velocity at the upstream inner cylinder C1, which is a boundary condition not depending on σ , prevents the action of the favourable pressure gradient on the radial velocity of the fluid particles located in the vicinity of that cylinder.

For increasing values of σ greater than 0.4, the fluid particles having highest velocity exist and are located near the downstream outer cylinder C2 so that the fluid layers (FL) are also located near the same cylinder, as seen in plotted in Fig. 6a.

In the configuration for which the outer cylinder C2 is upstream, Fig. 6b shows that the radial velocity in absolute value strongly diminishes as η increases, for any value of σ , with $0 < \sigma < 1$. So, the fluid particles having highest velocity do not exist in the annular pipe, except in the vicinity of the inner upstream cylinder which is a fluid zone protected against the action of the favourable pressure gradient. This argument explains why the fluid layers (FL) do not exist when the outer cylinder is upstream, as seen in Fig. 6b.

Unlike Fig. 6a, Fig. 6b shows no inflexion point. So, on the basis of the Rayleigh inflexion point criterion known to be valid for parallel inviscid flows, and which we wish to be able to extend to the flow under study, one can conclude that the configuration in which the outer cylinder is upstream is more stable than the opposite configuration in which the inner cylinder is upstream.

4.5. The azimuthal component of the velocity field

The values of V_θ/θ are computed according to the following formula:

$$\frac{V_\theta}{\theta} = \frac{\delta - 1}{\delta} \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta\eta} \left(\frac{dF}{d\eta} \right), \tag{41}$$

and are plotted in Fig. 7a and b for various values of σ . Fig. 7a shows the configuration in which the inner cylinder is upstream and one observes in Fig. 7b the configuration in which the outer cylinder is upstream. Both figures shows that V_θ is negative for any value of σ , and vanishes at the two walls according to the boundary conditions which impose injection and suction velocities orthogonally to the walls. In both figures, one can see that V_θ is equal to zero for any value of η , when $\sigma = 1$. This latter result confirms that the value $\sigma = 1$ corre-

sponds to the radial flow for which the azimuthal velocity vanishes.

As the radial distance increases from the inner cylinder, the plot presented in these figures show that the azimuthal velocity in absolute value decreases until reaching a minimum, and begins to increase strongly beyond this minimum. As σ increases, the value of this minimum increases in Fig. 7a with $\sigma > 1$, and decreases in Fig. 7b with $0 < \sigma < 1$.

By the aid of the preceding arguments given for the behaviour of the radial velocity component, one understands from the physical point of view, the reasons why the phenomenon highlighted by the fluid layers (FL) is not observed for the azimuthal velocity component, as seen in the plots in Fig. 7a and b. The reason of this physical insight is as follows. The azimuthal velocity vanishes on the inner and outer walls, contrarily to the radial velocity. So, if the azimuthal velocity was alone, its velocity profile would be parabolic as in the Hagen-Poiseuille flow. In such a configuration, there are no fluid layers (FL) as those captured in Fig. 6a. Because of conservation of mass in which the radial velocity has to exist, the azimuthal velocity profile presents the specific forms seen plot-

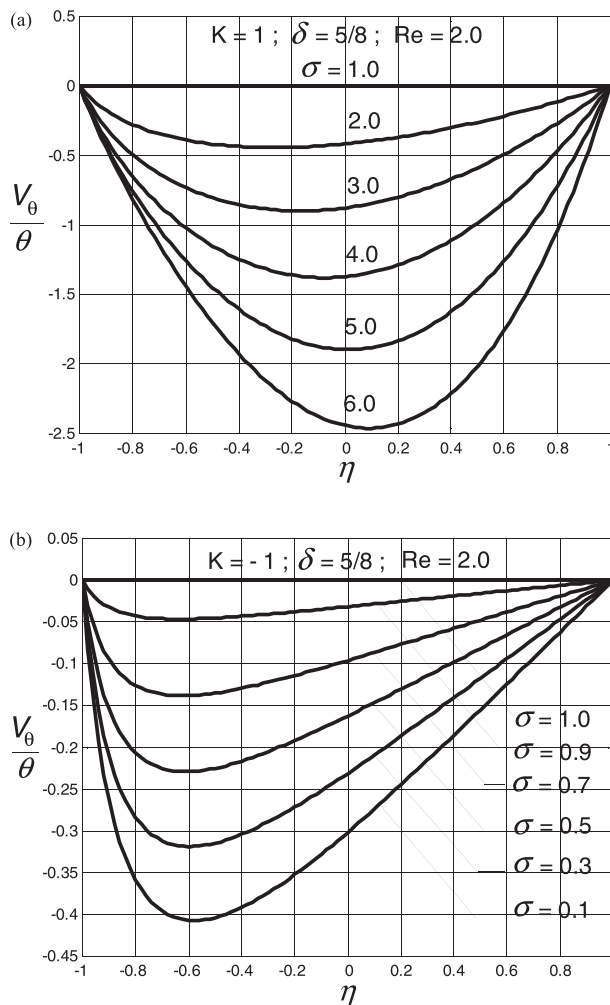


Fig. 7 Azimuthal component of the velocity field per unit polar angle for various values of the velocity coefficient, plotted for (a) the configuration in which the inner cylinder is upstream and for (b) the configuration in which the outer cylinder is upstream.

ted in Fig. 7a and b, for which the parabolic profile expected is not observed.

Fig. 7a and b enable to derive physical insights about the boundary layers at the vicinity of the inner and outer cylinders. Since the radial velocity does not depend on the polar coordinate according to the similarity-solution hypothesis, the boundary-layers behaviour is deduced by the only azimuthal velocity gradient in the radial direction. In this regard, Fig. 7a and b can be exploited.

For a given value of the velocity coefficient σ , Fig. 7a shows that the absolute value of the gradient $\partial V_\theta / \partial \eta$ at the inner cylinder is nearly equal to that of the same gradient at the outer cylinder, for any value of the velocity coefficient σ with $\sigma > 1$. This leads to conclusion that, for this configuration, the thickness of the boundary layers and the viscosity effects at the vicinity of the two cylinders are nearly equal, for any value σ . As σ increases from the value equals to 1, the thickness of the two boundary layers increase as well as the effects of viscosity. This is explained by the fact that the absolute value of the gradient $\partial V_\theta / \partial \eta$ at the two cylinders increases as σ increases with $\sigma > 1$, as seen in Fig. 7a.

For the configuration in which the outer cylinder is upstream, one obtains different results. Fig. 7b shows that, for a given value of σ with $0 < \sigma < 1$, the absolute value of the above gradient at the inner cylinder is very great compared to that of the outer cylinder. From this figure, one can also see that this absolute value increases as σ decreases with $0 < \sigma < 1$. One then concludes that the thickness of the boundary layer at the inner cylinder, as well as the viscosity effects at this cylinder, are very great compared to those evaluated at the outer cylinder.

4.6. Comparison with other results

It can be seen from Fig. 8, that the results obtained for the present work show many similarities with those obtained by Mbogba, Ngo Nyobe and Pemha (Personal Notes), when studying the axisymmetric laminar flow for an incompressible

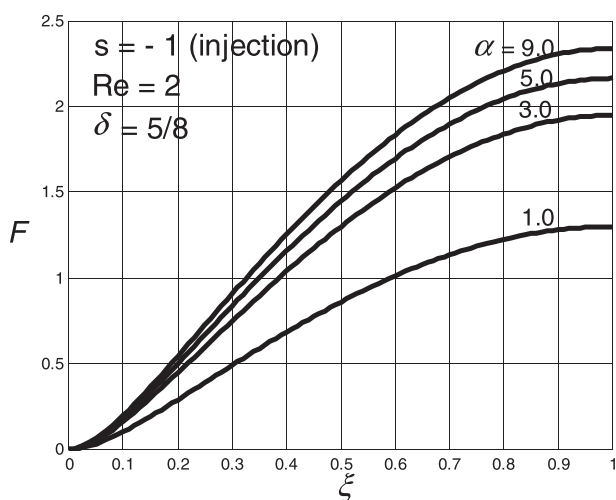


Fig. 8 Stream function per unit length of the pipe for various values of the velocity ratio, plotted for the axisymmetric flow in a semi porous annular pipe with injection at the wall, by Mbogba, Ngo Nyobe and Pemha (Personal Notes, 2021).

fluid located in a semi porous annular pipe with an inner impermeable wall ($\xi = 0$) and injection at the outer porous one ($\xi = 1$), under the action of a constant axial pressure gradient. In this figure, the parameter α represents a velocity ratio defined to compare the orders of magnitude of the radial and axial velocities in the axisymmetric flow considered.

In the other work mentioned above, the flow velocity is kept constant and equal to zero at the impermeable wall (condition of no-slip). Likewise, one has in the present work, the injection velocity which is kept constant at the upstream cylinder.

In that other work, the injection or suction velocity at the outer porous wall depends on the velocity ratio α , the Reynolds number and the gap ratio being kept constant. Likewise, in the present investigation, the suction velocity at the outer porous wall depends on the velocity coefficient σ . As there is no reverse flow in both works, the stream function per unit streamwise parameter does not change sign in the radial direction and increases monotonically with the radial distance as seen plotted in Figs. 7a and 8.

5. Concluding remarks

The motivation for this work came by noting that, in all the research papers extensively devoted to laminar flows with porous boundaries for Newtonian incompressible fluids, only the Cartesian configurations for the flows in porous channels, and the axisymmetric configurations for the flows in tubes and in annular pipes, have been studied. The laminar flow which takes place in the polar plane with porous cylindrical walls has not yet been studied.

This paper has investigated a laminar flow occurring in the polar plane, for an incompressible fluid located in the annular space formed by two coaxial porous cylinders and driven by suction-injection through the walls, at constant and uniform velocity, orthogonally to the walls. The problem considered depends on the suction or injection Reynolds number, the pipe gap ratio, and a velocity coefficient defined from the pore density ratio and the pore surface ratio. The aim of this work is to find the conditions which allow the existence of this polar flow with conservation of mass and to derive physical insights of this flow, at fixed Reynolds number and gap ratio.

The main interest of this study is to provide potential research directions in the future for this polar laminar flow which has not yet been studied. The present investigation is a necessary preliminary step for subsequent works in which it would be interesting to examine the influence of the gap ratio and that of the Reynolds number in order to capture further physical insights for the deep richness of the structure of this polar laminar flow.

The results of the present analysis may be summarized as follows.

- For the flow considered to exist, one of the cylinders undergoes the suction, and the other the injection.
- In addition, the flow velocity at the outer wall V_2 and that at the inner wall V_1 must be connected by the relation $V_2 = \sigma(1 - \delta)(1 + \delta)^{-1}V_1$ where δ represents the gap ratio of the annular pipe, and σ is a velocity coefficient depending on the pore density ratio, the pore surface ratio, and the

transmission coefficient arbitrarily imposed by the experimenter between the injection and suction velocities at the upstream and downstream cylinders.

- The configuration in which the outer cylinder is upstream gives rise to a polar flow which is more stable than that for which the inner cylinder is upstream.
- As the radial distance increases from the inner cylinder, the azimuthal velocity in absolute value decreases until reaching a minimum, and begins to increase strongly beyond this minimum. The value of this minimum depends on the value of the velocity coefficient.
- Radial flows occur for both configurations when the velocity coefficient is equal to 1.

For the setup in which the inner cylinder is upstream

- The flow highlights acceptable streamlines if the velocity coefficient is greater than 1.
- For a given gap ratio δ , the flow includes fluid layers located near the downstream cylinder and having radial velocities which exceed the injection and suction velocities driving the flow, if the velocity coefficient σ is greater than the value $\sigma_c = (1 + \delta)(1 - \delta)^{-1}$.
- As the velocity coefficient increases from its smaller value equal to 1, the minimum of the azimuthal velocity in absolute value increases.
- The boundary layers at the vicinity of the two cylinders have equal thickness, for a given velocity coefficient.
- The viscosity effects at the vicinity of the two walls are of equal importance, for any given velocity coefficient.
- As the velocity coefficient increases from its smaller value equal to 1, the thicknesses of the two boundary layers increase, as well as the viscosity effects at the vicinity of the two walls.

For the setup in which the outer cylinder is upstream

- The flow highlights acceptable streamlines if the velocity coefficient is between 0 and 1.
- No fluid layer has radial velocity which exceeds the injection and suction velocities.
- As the velocity coefficient decreases from its greater value equal to 1, the minimum of the azimuthal velocity in absolute value increases.
- The thickness of the boundary layer at the vicinity of the inner cylinder is very great compared to that of the outer boundary layer.
- The viscosity effects at the vicinity of the inner cylinder are very important compared to that evaluated at the vicinity of the outer cylinder.
- As the velocity coefficient increases from the vicinity of zero with the values located between 0 and 1, the thicknesses of the two boundary layers decrease, as well as the viscosity effects at the vicinity of the two walls.

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgement

The authors would like to thank the Editor and the Reviewers for the corrections they have made to the paper and the valuable comments they have recommended for improving it.

References

- [1] A.S. Berman, Laminar flow in channels with porous walls, *J. Appl. Phys.* 24 (1953) 1232–1235.
- [2] S.M. Yuan, A.B. Finkelstein, Stability of pipe flow with blowing, *Trans. ASME* 78 (1956) 719.
- [3] R.M. Terrill, P.W. Thomas, On laminar flow in a uniformly channel with large Injection, *Aeronaut. Q.* 16 (1965) 323–332.
- [4] J.F. Brady, A. Acrivos, Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow, *J. Fluid Mech.* 112 (1981) 127–150.
- [5] S. Uchida, H. Aoki, Unsteady flow in a semi-infinite contracting or expanding pipe, *J. Fluid Mech.* 82 (1977) 371–387.
- [6] P. Watson, W.H.H. Banks, M.B. Zatorska, P.G. Drazin, Laminar channel flow driven by accelerating walls, *Eur. J. Appl. Math.* 2 (4) (1991) 359–385.
- [7] M. Goto, S. Uchida, Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall, *Trans. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci.* 33 (1990) 14.
- [8] W.H.H. Banks, M.B. Zatorska, On flow through a porous annular pipe, *Phys. Fluids A* 4 (6) (1992) 1131–1141.
- [9] W.A. Robinson, The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls, *J. Eng. Math.* 10 (1) (1976) 23–40.
- [10] M.B. Zatorska, W.H.H. Banks, New solutions for flow in a channel with porous walls and/or non-rigid walls, *Fluid Dynam. Res.* 33 (1-2) (2003) 57–71.
- [11] E.C. Dauenhauer, J. Majdalani, Exact self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls, *Phys. Fluids* 15 (6) (2003) 1485, <https://doi.org/10.1063/1.1567719>.
- [12] S. Tsangaris, D. Kondaxakis, N.W. Vlachakis, Exact solution for flow in a porous pipe with unsteady wall suction and/or injection, *Commun. Nonlinear Sci.* 12 (7) (2007) 1181–1189.
- [13] G.C. Dash, K.L. Ojha, Viscoelastic hydromagnetic flow between two porous parallel plates in the presence of sinusoidal pressure gradient, *Alex. Eng. J.* 57 (4) (2018) 3463–3471.
- [14] R.N. Barik, G.C. Dash, P.K. Rath, Steady laminar MHD flow of visco-elastic fluid through a porous pipe embedded in a porous medium, *Alex. Eng. J.* 57 (2) (2018) 973–982.
- [15] L. Durlofsky, J.F. Brady, The spatial stability of a class of similarity solutions, *Phys. Fluids* 27 (5) (1984) 1068, <https://doi.org/10.1063/1.864736>.
- [16] G. Casalis, G. Avalon, J.-P. Pineau, Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls, *Phys. Fluids* 10 (1998) 2558.
- [17] S. Ferro, G. Gnani, Spatial stability of similarity solutions for viscous flows in channels with porous walls, *Phys. Fluids* 12 (4) (2000) 797–802.
- [18] S. Ferro, G. Gnani, Effects of temperature-dependent viscosity in channels with porous walls, *Phys. Fluids* 14 (2) (2002) 839–849.
- [19] J. Griffond, G. Casalis, On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow, *Phys. Fluids* 13 (2001) 1635.
- [20] G.D. Raithby, D.C. Knudsen, Hydrodynamic development in a duct with suction and blowing, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 41 (1974) 896.
- [21] A.A. Siviridenkov, V.I. Yagodkin, Flow in the initial sections of channels with permeable walls, *Fluid Dyn.* 11 (1976) 689.

- [22] V.N. Varapaev, V.I. Yagodkin, Flow stability in a channel with porous walls, *Fluid Dyn.* 4 (5) (1972) 60–62.
- [23] James.T. Barron, William.K. Van Moorhem, Joseph Majdalani, A novel investigation of the oscillatory field over a transpiring surface, *J. Sound Vib.* 235 (2) (2000) 281–297.
- [24] H.W. Press, A.S. Teukolsky, T.W. Vetterling, P.B. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran, Second Edition*, Cambridge, 1992.
- [25] I. Mahariq, A. Erciyas, A spectral element method for the solution of magnetostatic fields, *T, J. Electr. Eng. Comput. Sci.* 25 (4) (2017) 2922–2932.
- [26] I. Mahariq, H. Kurt, M. Kuzuoğlu, Questioning degree of accuracy offered by the spectral element method in computational electromagnetics, *Appl. Comput. Electromagnet. Soc. J.* 30 (7) (2015) 698–705.
- [27] I. Mahariq, On the application of the spectral element method in electromagnetic problems involving domain decomposition, *T, J. Electr. Eng. and Comput. Sci.* 25 (2) (2017) 1059–1069.
- [28] I. Mahariq, M. Kuzuoğlu, I.H. Tarman, H. Kurt, Photonic nanojet analysis by spectral element method, *IEEE Photonics J.* 6 (5) (2014) 1–14.
- [29] I. Mahariq, M. Kuzuoğlu, I.H. Tarman, On the attenuation of the perfectly matched layer in electromagnetic scattering problems with the spectral element method, *Appl. Comput. Electromagnet. Soc. J.* 29 (2014) 9.
- [30] I. Mahariq, H. Kurt, Strong field enhancement of resonance modes in dielectric microcylinders, *JOSA B* 33 (4) (2016) 656–662.
- [31] I. Mahariq, H.I. Tarman, M. Kuzuoğlu, On the accuracy of spectral element method in electromagnetic scattering problems, *Int. J. Comput. Theory Eng.* 6 (6) (2014) 495–499.
- [32] I. Mahariq, I.H. Giden, H. Kurt, O.V. Minin, I.V. Minin, Strong electromagnetic field localization near the surface of hemicylindrical particles, *Opt. Quant. Electron.* 50(11)(2018)1–8.
- [33] I. Mahariq, T. Abdeljawad, A. S. Karar, S. A. Alboon, H. Kurt, A. V. Maslov, Photonic Nanojets and Whispering Gallery Modes in Smooth and Corrugated Micro-Cylinders under Point-Source Illumination, *Photonics*, 7, 3. Multidisciplinary Digital Publishing Institute, (2020).
- [34] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [35] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, New-York, 1968.
- [36] S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid dynamics, Vol. 1*, Dover Publications Inc., New York, 1965.
- [37] E. Pemha, Markovian model for the propagation of a light wave in a heated turbulent jet of air, PhD dissertation, Laboratory of Fluid Mechanics, Ecole Centrale de Lyon, Ecully, France (1990).
- [38] E. Pemha, B. Gay, A. Tailland, Measurement of the diffusion coefficient in a heated plane airstream, *Phys. Fluids A* 5 (6) (1993) 1289–1295.
- [39] E. Ngo Nyobe, E. Pemha, Shape optimization using genetic algorithms and laser beam propagation for the determination of the diffusion coefficient in a hot turbulent jet of air, *Prog. Electromagn. Res. B* 4 (2008) 211–221.
- [40] E. Pemha, E. Ngo Nyobe, Genetic algorithm approach and experimental confirmation of a laser-based diagnostic technique for the local thermal turbulence in a hot wind tunnel jet, *Prog. Electromagn. Res. B* 28 (2011) 325–350.
- [41] M. Lamara, E. Ngo Nyobe, E. Pemha, Engineering laser-based diagnostic in a hot wind tunnel jet: measurement of the temperature structure coefficient by using an optimization technique, *Prog. Electromagn. Res. M* 74 (2018) 93–103.
- [42] G.N. Vanderplaats, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design and Applications*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, New-York, 1984.