

REPUBLIQUE DU CAMEROUN  
Paix – Travail – Patrie

\*\*\*\*\*

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

\*\*\*\*\*

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION  
DOCTORALE EN SCIENCES TECHNOLOGIES  
ET GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION  
DOCTORALE EN PHYSIQUE ET APPLICATIONS

\*\*\*\*\*

FACULTE DES SCIENCES

\*\*\*\*\*

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

REPUBLIC OF CAMEROON  
Peace – Work – Fatherland

\*\*\*\*\*

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

\*\*\*\*\*

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,  
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING  
UNIT FOR PHYSICS AND APPLICATIONS

\*\*\*\*\*

FACULTY OF SCIENCE

\*\*\*\*\*

DEPARTMENT OF PHYSICS



LABORATOIRE DE MECANIQUE APPLIQUEE ET D'HYDRAULIQUE

Spécialité : Mécanique, Matériaux et Structures

EFFETS D'UN GRADIENT DE PRESSION EXTERNE CONSTANT  
SUR UN ECOULEMENT LAMINAIRE INCOMPRESSIBLE DANS  
UNE CONDUITE ANNULAIRE SEMI - POREUSE

## THESE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Doctorat/Ph.D

**MBOGBA GUY LEOPOLD**

Matricule : 09W0633

Titulaire du Master en Physique



Devant le jury constitué ainsi qu'il suit :

Président : **ESSIMBI ZOBO Bernard, Professeur, UYI**

Rapporteur : **NGO NYOBE Elisabeth, Maître de Conférences, UYI**

Membres : **PEMHA Elkana, Professeur, UYI**

**ALIM, Maître de Conférences, U. Maroua**

**NGOHE-EKAM Paul S, Maître de Conférences, UYI**

**BODO Bertrand, Maître de Conférences UYI**

Année 2022



DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THÈSE DE  
DOCTORAT/PhD

Nous soussignés, Professeur **ESSIMBI ZOBO Bernard** et Professeur **NGOHE-EKAM Paul Salomon**, respectivement Président et Examineur du jury de la Thèse de Doctorat/PhD de Monsieur **MBOGBA Guy Léopold**, Matricule **09W0633**, préparée sous la direction du Professeur **NGO NYOBE Elisabeth** intitulée : « **EFFETS D'UN GRADIENT DE PRESSION EXTERNE CONSTANT SUR UN ECOULEMENT LAMINAIRE INCOMPRESSIBLE DANS UNE CONDUITE ANNULAIRE SEMI - POREUSE** », soutenue le **Mercredi, 14 Décembre 2022**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/PhD en Physique, Spécialité **Mécanique, Matériaux et Structures**, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le ..... **18 JAN 2023** .....

Examineur

Pr NGOHE-EKAM Paul Salomon

Président du jury

Pr ESSIMBI ZOBO Bernard



Le Chef de Département de Physique

Professeur

---

---

Dédicace

---

---

---

---

DEDICACE

---

---

# DEDICACE

---

---

**A MES FILLES**  
**JOSEPHA MIREILLE MBOGBA**  
**ET**  
**EMILIENNE LEANA MBOGBA**

# REMERCIEMENTS

---

**L'homme se réalise grâce au concours de ceux qui l'entourent.**

**Au DIEU**, le père tout puissant pour nous avoir donné le courage, la force et la santé de mener ce travail à bout malgré les difficultés qui ont jonchées ce chemin nous disons merci.

Nous adressons nos sincères remerciements :Au professeur **NGO NYOBE Elisabeth**, notre encadreur, pour le temps, les sacrifices et les connaissances qu'elle a bien voulu nous accorder durant ce cycle de thèse, en nous fournissant l'outillage nécessaire et favorable à la compréhension de ce travail. Elle a suivi ces travaux de façon constante sans laisser les moindres détails à la structuration de ce mémoire. Ses critiques, suggestions, discussions et encouragements m'ont été d'un grand soutien.

A l'Université de Yaoundé I

A l'école Doctorale (U.R.F.D.)

Au Département de Physique

A tous les enseignants du département de Physique

Au Membres du Jury

Au professeur titulaire **PEMHA Elkana**, enseignant au département de physique, responsable du laboratoire de Mécanique Appliquée et Hydraulique de l'université de Yaoundé I, pour l'esprit de rigueur dans le travail, la régularité et ses grandes techniques d'approches de la Mécanique des fluides et dans les domaines de la vie, et l'amour d'un père qu'il a su nous inculquer à travers ses enseignements de qualités ;

Au Docteur **LAMARA Maurice**, je ne le remercierais jamais assez, pour le soutien, les conseils et les encouragements d'un grand frère académique dont il a fait preuve durant toute ma formation ;

Aux membres du jury qui d'avoir accepté d'examiner ce travail ;

A tous les enseignants du département de Physique de l'Université de Yaoundé I pour leurs enseignements et leurs conseils, en particulier au chef de département qui a réuni toutes les conditions nécessaires pour que mon dossier de thèse puisse avoir une issue favorable.

Je remercie également mes frères et camarades du laboratoire en particulier **M. BAYIHA Paul, MBAM Benjamin, MAKON Richard**, Pour la fraternité et l'amitié qui nous lie. Leurs encouragements ont été d'un grand apport moral pendant la préparation de cette thèse.

A ma très chère et tendre bien aimée **Mme MBOGBA Née ADZABA AMOUGUI Marguerite Flaure**

A mes parents **M. MBOGBA NYECK Isidore** et **Mme MBOGBA née NGO NDJIKI Bernadette**.

**M.et Mme BITJONG NDOMBOL**

**M.et Mme AMOUGUI EMMANUEL**

**M.et Mme AYIBODO ONDOUA**

**M. et Mme Dr. Emmanuel NDJOCK**

**MBOGBA ANDRE**

**NGO MBOGBA GISELE GERTRUDE**

**MBOGBA ANGELE SOLANGE**

A toute la grande famille **MBOGBA NYECK Isidore**

**Que tous ceux qui ont contribué pour la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude et mes sincères remerciements.**

# TABLE DES MATIERES

---



|  |             |
|--|-------------|
| <b>DEDICACE .....</b>  | <b>i</b>    |
| <b>REMERCIEMENTS .....</b>   | <b>iii</b>  |
| <b>TABLE DES MATIERES .....</b>  | <b>vi</b>   |
| <b>LISTES DES FIGURES .....</b>  | <b>ix</b>   |
| <b>LISTE DES SYMBOLES .....</b>  | <b>xi</b>   |
| <b>RESUME .....</b>  | <b>xiii</b> |
| <b>ABSTRACT .....</b>  | <b>xvi</b>  |
| <b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>   | <b>1</b>    |
| <b>CHAPITRE I : REVUE DE LA LITTERATURE .....</b>                                    | <b>8</b>    |
| I.1 FONDEMENT DE LA MECANIQUE DES FLUIDES .....                                      | 9           |
| I.1.1 Généralités.....   | 9           |
| I.1.2 Evolution de la mécanique des fluides aux temps modernes .....                 | 12          |
| I.2 APPLICATIONS DE LA MECANIQUE DES FLUIDES .....                                   | 13          |
| I.2.1 Domaine d'application antique et moderne .....                                 | 15          |
| I.2.2 Applications futures de la mécanique des fluides .....                         | 17          |
| I.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES .....                        | 19          |
| I.3.1 Notion d'hydrodynamique.....   | 19          |
| I.3.2 Fluide visqueux.....   | 20          |
| I.3.3 Principales caractéristiques des milieux fluides.....                          | 20          |
| I.3.4 Notion de cinématique .....  | 21          |
| I.4 EQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE : CONSERVATION DE LA<br>QUANTITE DE MOUVEMENT..... | 22          |
| I.4.1 Conservation de la masse .....   | 22          |
| a)-Tenseur des taux de déformation.....  | 22          |
| b)- Enoncé du principe de conservation de la masse.....                              | 24          |
| c)- Equation de continuité.....  | 24          |
| I.4.2Conservation de la quantité de mouvement.....                                   | 26          |
| a)- Force de contact .....   | 26          |
| b)- Enoncé de la conservation de la quantité de mouvement .....                      | 27          |

|   |           |
|---|-----------|
| c)- Tenseur de contrainte.....  | 28        |
| d)- Loi de Comportement.....  | 29        |
| e)- Equation de Navier-Stokes.....  | 31        |
| I.5 Ecoulements bidimensionnels .....   | 34        |
| I.5.1 Ecoulements plans .....   | 35        |
| I.5.2 Ecoulement axisymétrique .....  | 36        |
| <b>CHAPITRE II : MATERIELS ET METHODES .....</b>  | <b>39</b> |
| II.1 POSITION DU PROBLEME.....  | 40        |
| II.2 ÉQUATION DE VORTICITE.....   | 42        |
| II.2.1 Existence de la fonction de courant .....  | 42        |
| II.2.2 Equation de vorticité .....  | 43        |
| II.3 TECHNIQUE DE RESOLUTION DE L'EQUATION DE VORTICITE SUR LE<br>PLAN MERIDIEN : .....       | 53        |
| II.3.1 Equation vérifiée par la fonction de courant par unité de longueur                     | 53        |
| II.3.2 Conditions aux limites .....   | 57        |
| II 3.3 Méthode de résolution : Méthode de Tir .....   | 57        |
| II.3.4 Composantes du champ de vitesse de l'écoulement et trajectoires<br>des particules..... | 64        |
| <b>CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION.....</b>  | <b>66</b> |
| III.1. REMARQUES PRELIMINAIRES.....   | 67        |
| III.2 FONCTION DE COURANT PAR UNITE DE LONGUEUR DE LA<br>CONDUITE. ....                       | 68        |
| III.3. LIGNES DE COURANT OU TRAJECTOIRE DES PARTICULES.....                                   | 70        |
| III.4. COMPOSANTES RADIALE ET AXIALE DU CHAMP DE VITESSE .....                                | 71        |
| III.5 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT AU NIVEAU DES DEUX CYLINDRES.<br>.....                       | 76        |
| <b>CONCLUSION GENERALE.....</b>   | <b>79</b> |
| <b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>  | <b>84</b> |
| <b>PUBLICATION .....</b>  | <b>91</b> |

# LISTES DES FIGURES

---

|          |   |
|----------|---|
| Figure 1 | Sources bibliographiques de la Mécanique des Fluides.....14   |
| Figure 2 | Principe de conservation de la masse.....24   |
| Figure 3 | Domaine (D) du fluide délimité par une surface (S) .....27  |
| Figure 4 | Conduite annulaire semi poreuse .....40   |
| Figure 5 | Fonction de Courant par unité de longueur de la conduite pour différentes valeurs du gradient de pression externe constant adimensionnel : $s = 1$ (a) aspiration et $s = -1$ (b) injection....67                           |
| Figure 6 | Lignes de courant pour l'aspiration et l'injection, pour $\sigma = 1$<br>$\delta = 0.5$ , $Re = 2$ .....69  |
| Figure 7 | Profil de la composante radiale du champ de vitesse pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension $\sigma$ , pour $s = 1$ (a) l'aspiration ; $s = -1$ (b) l'injection et $\delta = 0.5$ .....70   |
| Figure 8 | Profil de la composante axiale du champ de vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension, pour $s = 1$ (a) l'aspiration ; $s = -1$ (b) l'injection et $\delta = 0.5$ .....73 |
| Figure 9 | Contrainte de cisaillement sur les deux parois en fonction du gradient adimensionnel de pression externe $\sigma$ , pour $s = 1$ (a) l'aspiration ; $s = -1$ (b) l'injection et $\delta = 0.5$<br>.....77                   |

# LISTE DES SYMBOLES

---

---

$R_e$  : Nombre de Reynolds

$\rho$  : Masse volumique

$\vec{V}(M, t)$  : Vitesse du fluide en un point M à un instant t

$\psi$  : Fonction de courant

$\sigma$  : Gradient de pression externe constant adimensionnel

$R_1$  : Rayon du cylindre intérieur

$R_2$  : Rayon du cylindre extérieur

$p$  : pression

$\delta$  : Rapport de gap

$W$  : Vitesse axiale maximale de Hagen-Poiseuille

$\nu$  : Viscosité cinématique

$h$  : Moitié de l'entrefer

$\xi$  : Longueur adimensionnelle

$\phi$  : Fonction coût

$V_r$  : *composante* champ de vitesse radiale

$V_z$  : *composante* champ de vitesse axiale

---

---

## Résumé

---

---

---

---

## RESUME

---

---

# RESUME

---

---

Dans ce travail nous étudions un écoulement laminaire permanent pour un fluide incompressible situé dans une conduite annulaire semi-poreuse horizontale et soumis aux effets d'un gradient de pression constant appliqué entre les deux extrémités de la conduite. La paroi du cylindre externe subit une aspiration ou une injection, à une vitesse constante uniforme, et orthogonale à la paroi ; la paroi du cylindre interne étant alors imperméable. Le problème à étudier dépend ainsi de trois paramètres à savoir : le rapport de gap, le gradient de pression externe adimensionnel et le nombre de Reynolds ; avec les conditions aux limites appropriées pour les deux cylindres, définies à partir de la vitesse d'aspiration ou d'injection et de la vitesse maximale de Hagen-Poiseuille. Ce problème est modélisé par les équations de Navier-Stokes donc les difficultés à trouver des solutions sont bien connues, car ces équations sont des équations aux dérivées partielles non linéaires où les champs de vitesses et de pression varient dans l'espace et dans le temps. L'équation de continuité issue de la conservation de la masse présente une contrainte qui doit être satisfaite compte tenu des conditions aux limites appliquées aux parois des deux cylindres. Ce problème peut être résolu directement par les algorithmes existants dans le domaine de la dynamique de fluides. Dans ce travail nous appliquons la méthode des solutions semblables pour ramener l'équation de vorticité qui est une équation aux dérivées partielles, en une équation différentielle ordinaire. Cette équation de vorticité, étant déduite des équations de Navier-Stokes dans le cadre des écoulements des fluides incompressibles. L'équation différentielle ordinaire obtenue est une équation différentielle d'ordre quatre qui est ensuite résolue à partir de la méthode de tir qui permet de transformer le problème à conditions aux limites en un problème à conditions initiales.



---

## Résumé

---

L'objectif final recherché de ce travail est d'étudier et d'analyser, les effets de ce gradient de pression externe constant appliqué aux deux extrémités de la conduite annulaire semi-poreuse, lorsque le rapport de gap et le nombre de Reynolds sont fixés.

**Mots clés :**

Ecoulement laminaire ; conduite annulaire semi poreuse ; Vorticité ; Méthodes des solutions semblables ; Méthode de Tir ; Algorithme de Newton- Raphson; Contrainte de cisaillement sur la paroi.

---

---

Abstract

---

---

---

---

ABSTRACT

---

---

**ABSTRACT**

---

---

We are, examine a steady laminar flow for an incompressible fluid located in semi-porous annular pipe and subjected to a favorable constant pressure gradient applied between the two borders of the pipe. The inner wall is impermeable and the fluid is sucked or injected at the outer wall at constant and velocity, orthogonally to wall.

The problem understudy depends on three parameters: the pipe gap ratio, the dimensionless external pressure gradient, and Reynolds number defined from the sum of the suction or injection velocity and the maximal Hagen-Poiseuille velocity. The conservation of mass induces the zero-divergence velocity field which allows replacing the steady-flows Navier-Stokes equation with a single equation satisfied by the stream function and called the vorticity equation. Assuming the similarity-solution hypothesis, the problem under consideration is reduced to a fourth-order nonlinear ordinary differential equation with two boundary conditions at each wall. The numerical shooting technique including the Runge-Kutta algorithm and the Newton-Raphson optimization method is applied to obtain the solution for steady flow. For various values of the dimensionless external pressure gradient, the profiles of the velocity components are found and investigations on the wall shear stress for both walls are performed. The results obtained are discussed and physical understandings for the problem studied are derived.

### **Keywords:**

Laminar flows in semi porous annular pipes; Newton - Ralphson optimization algorithm; Numeral shooting technique; Similarity solution method; Vorticity equation; Wall shears street

# INTRODUCTION GENERALE

---

Des trois états sous lesquels peut se présenter la matière ; il est reconnu sur notre planète, la prédominance de l'état liquide. L'eau est très utile pour tout être vivant, mieux encore une nécessité incontournable tout comme la plupart des gaz présents dans la nature. Cependant les lois de la Mécanique des fluides s'appliquent directement aux corps considérés homogènes et continus dans la catégorie des fluides.

Il n'est pas évident de définir de manière simple le mot fluide. On désigne ainsi sous le nom général de fluide : tout corps ou milieu matériel sans rigidité et essentiellement déformable pouvant se mettre sous une forme quelconque. L'interaction entre les particules fluides crée un mouvement qui peut être visible ou non à l'œil. Cette interaction peut provenir des raisons diverses à savoir : le contour du fluide ou du domaine sur lequel il s'appuie, la température ambiante du milieu. C'est ainsi que l'écoulement d'un fluide sur un domaine bien précis et soumis à une température bien définie, passe d'un état de repos ou d'équilibre, ou encore d'un état de base à un état dynamique et bien différent ou encore état de perturbation : on parle alors de déformation du milieu fluide. La maîtrise des écoulements de fluide dans les milieux poreux est essentielle pour tenter de répondre aux problèmes rencontrés dans un grand nombre d'applications technologiques, telles que : Dans l'industrie, on rencontre notamment le refroidissement des moteurs des avions et fusées, la manufacture du papier, du cuir et du caoutchouc. Dans la médecine, on a la modélisation de la circulation du sang dans le système cardiovasculaire et de l'air dans le système respiratoire. En fin dans l'agriculture à travers l'irrigation.

En raison de l'importance croissante accordée aux écoulements, les écoulements laminaires délimités par des frontières ont été longuement étudiés, et de nombreux articles [1-20] ont été publiés dans ce domaine. L'étude des

écoulements laminaires pour les fluides incompressibles situés entre les canaux remontent depuis les travaux de Berman [1] vers les années 1950. Motivé par une tentative de la modélisation de la séparation d'uranium, Berman a étudié l'écoulement d'un fluide laminaire incompressible entre deux parois planes poreuses parallèles avec une aspiration uniforme, et a réussi à transformer les équations de Navier-stokes en une seule équation différentielle ordinaire du quatrième ordre, pour laquelle il a trouvé une série de solutions. Quelques années plus tard 1956, Yuan et Finkelstein [2] ont étudié le problème basé sur un écoulement stationnaire dans un tube à section circulaire en utilisant la méthode analytique des perturbations. Une analyse complète des solutions semblables et théoriques pour l'écoulement dans une conduite circulaire uniformément poreuse avec une aspiration ou une injection constante au niveau de la paroi, remonte à Terrill et Thomas [3].

Les travaux réalisés sur les parois imperméables par Brady et Acrivos[4] et ceux de Uchida et Aoki [5] ont joué un rôle important dans l'étude des écoulements en développant les méthodes dans les directions longitudinale [4] et transversale [5]. Cette étude intéresse encore les scientifiques de nos jours lorsque les parois sont poreuses. Dans cette approche, Watson et Al. [6] ont étudié un écoulement de fluide dans un canal bidimensionnel lorsque les parois sont poreuses et accélérées. Goto et Uchida [7] ont analysé l'écoulement laminaire dans un canal semi-poreux où le rayon varie avec le temps dans le but de simuler le champ d'écoulement laminaire dans un moteur idéal de fusée. Inspiré par l'approche appliquée par Uchida et Aoki, Gafar, Ali et Ashraf [8] ont étudié les phénomènes d'instabilité d'un écoulement laminaire entre deux disques poreux se déplaçant orthogonalement aux parois suivant la direction de l'écoulement.

Dans le but d'étudier un écoulement dans un canal poreux en contraction ou en expansion Mohyud-Din, Yildirim et Sezer [9] ont appliqué la méthode des perturbations homotypiques et Dauenhauer et Majdalani [10] ont utilisé la méthode numérique de tir dans ce même cas. Robinson [11] a établi numériquement les solutions existantes pour un écoulement laminaire incompressible stable dans un canal poreux, avec aspiration uniforme sur les deux parois. Par application de la théorie des systèmes dynamiques, Banks et Zaturka [12] ont présenté les résultats approfondis sur l'écoulement laminaire à travers une conduite annulaire poreuse. D'autres résultats ont été présentés par Banks et Zaturka [13] qui ont étudié un écoulement bidimensionnel dans un canal tridimensionnel. Pour prendre en compte les effets d'aspiration ou d'injection d'un écoulement instationnaire à travers la paroi d'un cylindre poreux, on peut citer les travaux de Tsangaris, Kondasxakis et Vlachkis [14]. La présence d'un champ magnétique dans un écoulement d'un fluide viscoélastique est étudiée à travers les plaques parallèles poreuses par Dash et Ojha [15] et dans les conduites poreuses par Barik, Dash et Rath [16]. Durlofsky et Brady [17], Casalis, Avalon et Pineau [18], Ferro et Gnani [19], et Griffond et Casalis [20] ont effectué des travaux sur la stabilité hydrodynamique dans les écoulements visqueux délimités par des frontières poreuses.

Notre motivation pour ce présent travail provient du fait que dans les travaux mentionnés [1-20], et dans bien d'autres travaux existants dans la littérature, l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible situé dans le plan axisymétrique dans une conduite annulaire semi poreuse avec effets du gradient de pression externe constant appliqué aux deux extrémités de la conduite, n'a pas encore été étudié. De plus elle provient également du fait que le sujet traite présente de nombreuses applications technologiques et industrielles.

A cet effet, on peut citer :

Les procédés d'ingénierie en mécanique des fluides thermiques tels que ceux comprenant des cylindres chauffants [21-22], l'ingénierie biomédicale, l'irrigation agricole, l'ingénierie alimentaire, le refroidissement des moteurs d'avions, les procédés d'aspiration et d'injection au niveau des parois délimitant un domaine fluide, soumis à un gradient de pression axiale fournie par une pompe. Ce travail est consacré à l'étude des effets d'un gradient de pression externe sur un écoulement laminaire incompressible et constant à travers une conduite annulaire semi-poreuse, la paroi intérieure étant imperméable. Le fluide est aspiré ou injecté au niveau de la paroi extérieure à une vitesse constante et uniforme, orthogonalement à la paroi. Le gradient de pression externe est appliqué entre les deux extrémités de la conduite. Le problème ainsi soumis à l'étude dépend alors de trois paramètres : le rapport de gap sur l'entrefer, le gradient de pression constant externe sans dimension et le nombre de Reynolds défini à partir de la somme de la vitesse transversale et de la vitesse maximale de Hagen-Poiseuille. Le but de ce travail est d'étudier et d'analyser les effets de ce gradient de la pression externe constant sur cet écoulement laminaire incompressible, lorsque le nombre de Reynolds et le rapport de l'entrefer sont fixés. Le problème énoncé dans ce travail est modélisé par les équations de Navier- Stokes et pourrait être résolu par les méthodes numériques puissantes et d'optimisations existantes.

Dans ce travail, nous appliquons la méthode des solutions semblables à l'équation de la vorticité déduite des équations de Navier-Stokes, dans les conditions permettant l'existence de la fonction de courant. La méthode des solutions de semblables appliquée nous conduit à une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre avec les conditions aux limites sur les deux parois.



De nombreuses méthodes numériques développées dans la littérature scientifique [23] peuvent être appliquées pour résoudre cette dernière équation. A cet égard, on peut citer la méthode de collocation ou la méthode Galerkin basée sur les polynômes de Chebyshev [23] qui donnent des résultats satisfaisants. La méthode des éléments spectraux [24] peut également être utilisée avec une grande précision.

A cet effet, nous utilisons la méthode de tir associé à l'algorithme de Runge - Kutta et l'algorithme d'optimisation de Newton-Raphson. Cette technique donne des résultats tellement précis qu'elle a été largement utilisée en génie mécanique et en mathématique appliquée par de nombreux chercheurs [3-11] souhaitant trouver, à partir de la méthode des solutions semblables, les solutions exactes de l'équation de Navier- Stokes.

En appliquant la méthode des solutions semblables, la fonction de courant par unité de longueur est déterminée pour plusieurs valeurs du gradient de pression externe sans dimension. Les profils de la composante radiale et axiale du champ de vitesse de l'écoulement sont déduits et la contrainte de cisaillement sur des deux parois du cylindre est étudié en fonction du gradient de pression externe adimensionnel, pour un nombre de Reynolds et un rapport de gap de l'entrefer fixés.

Pour une meilleure compréhension de nos travaux, notre mémoire est subdivisé en trois chapitres. Dans le chapitre 1, Nous présentons la revue de la littérature où le fondement et l'évolution de la Mécanique des Fluides sont décrits, quelques applications de la Mécanique des Fluides sont également énumérées. Les équations fondamentales gouvernant les écoulements de fluides visqueux notamment les équations de continuité, de la conservation de la masse

qui aboutissent aux les équations de Navier-Stokes sont développées. Le chapitre 2 est consacré à l'analyse et à la formulation mathématique de notre problème. Dans ce même chapitre, nous présentons les méthodes de résolution des équations obtenues, les conditions aux limites y étant alors définies. Dans le chapitre 3 nous présentons les résultats obtenus et leur discussion

Notre mémoire se termine par une conclusion et des perspectives.

# CHAPITRE I : REVUE DE LA LITTERATURE

---

## I.1 FONDEMENT DE LA MECANIQUE DES FLUIDES

### I.1.1 Généralités

La Mécanique des fluides est la partie de la physique qui étudie les écoulements des fluides tant au repos qu'en mouvement. L'écoulement des fluides visqueux et incompressible à l'intérieur des canaux, de différentes sections, est d'une grande importance, du fait qu'il est fréquemment rencontré dans diverses applications. Mieux encore, ces écoulements s'avèrent indispensables dans les applications industrielles, biomédicales, notamment les transports d'huile et les produits pétroliers par pipeline.

L'ingénierie dans son ensemble et dans plusieurs domaines, a rencontré des problèmes liés au développement notamment, la distribution de l'eau dans le ménage en zone urbaine et l'irrigation des cultures. Nous savons que sans eau aucune vie n'est possible. C'est donc des chercheurs archéologiques physiciens, mécaniciens, et mathématiciens, par une motivation poussée qui ont montré que la prospérité de la civilisation préhistorique a été très déterminante dans la découverte, la construction et la maintenance des systèmes de distributions de l'eau.

Cependant, l'eau, comme l'air, a marqué les hommes depuis la préhistoire dans la résolution des problèmes tant dans l'irrigation que dans les déplacements des navires ou bateaux, c'est la mécanique des fluides manifestée (liquides, gaz, plasmas). Une extension de la mécanique des fluides dite rationnelle a été déterminante à la résolution des problèmes d'irrigation en agriculture, les fontaines, canaux etc....

L'époque des années 6500 avant Jésus Christ a été marquée par l'invention de certains instruments de mesures. Au niveau des crues, des zones marécageuses sont drainées et asséchées, les barrages et les digues pour être à

l'abri de la menace des crues. Nous pouvons citer les travaux effectués sur le Nil, le fleuve Jaune, et Euphrate etc.

L'étude de Mécanique des fluides et celle de l'eau avec son comportement remonte à l'époque des grecs antiques avec le célèbre savant Archimède (285 ; 212 avant Jésus Christ) qui a été le véritable initiateur de la Mécanique des fluides, qui en prenant son bain découvrit le principe qui porte son nom et qui formula ainsi le principe qui est à l'origine de statique des fluides notamment son principe éponyme. Dans cette même dynamique, Héron d'Alexandrie a poursuivi le travail de la statique des fluides en découvrant lui aussi un autre principe dont le principe de la pression et surtout du débit.

Pendant l'antiquité tardive, certains travaux hydrauliques poursuivent et se confirment tels que les aqueducs, les systèmes de distribution d'assainissement de l'eau, des fontaines et des bains. Ces travaux deviennent perceptibles et continuent à être décrits au troisième siècle. Ces travaux continuent à être décrits au troisième siècle à Rome Sextus Lulius Frontin, les techniques utilisées pour le transport de masse (l'eau, pétrole etc..), des affluents ont permis de réorganiser le système des aqueducs comme la plupart des sciences. En Europe, la traduction des œuvres d'Archimède, d'Eclucide, et la publication par la maison d'édition Al-Jazari dans le livre de mécanique ingénieuse décrivant les machines automatisées et perfectionne l'horloge hydraulique ainsi que l'hydrostatique d'Archimede.

Cependant l'utilisation des rouages des fluides s'est progressivement avancé et développé au moyen âge avec satisfaction ; ensuite on note un développement harmonieux des pompes à piston ont été développé pour l'assèchement des mines. Les moulins à eau et moulins à vent ont aussi eu une amélioration pour résoudre le grain. C'est donc cet ensemble de progrès successifs qui ont permis à l'humanité de réaliser les travaux sans utilisation de

la puissance musculaire ou animale (vache, âne). Ces progrès scientifiques ont alors été considérés comme étant la base de la révolution industrielle.

En réalité, c'est au moyen âge que le système d'irrigation disparaît progressivement et cette situation a provoqué l'effondrement de la population locale. La société romaine a utilisé ses applications pour la construction des canaux pour la distribution des eaux ; c'est au quinzième siècle que la Mécanique des fluides devient un des sujets préoccupant en Europe.

En 1564, dans un village de Toscan est né un jeune homme doté d'une intelligence extraordinaire, le nommé Léonard De Vinci, qui analysa la mécanique de pompe cardiaque avec description détaillée, la structure et le fonctionnement des valves du cœur. C'est encore lui, le premier concepteur d'un parachute, l'anémomètre (appareil qui mesure la vitesse du vent), et la pompe centrifuge ; il est encore à l'origine de la description des multiples types d'écoulements et de la fameuse formule du principe de la conservation de masse ou principe de continuité. Il continuera par la suite avec les fondements de la discipline et il introduira de nombreuses notions d'hydrodynamique telle que la notion de ligne de courant qui engendra la problématique de la résistance à l'écoulement.

Plusieurs chercheurs ont continué à travailler pour développer le système fluide et les machines, avec une amélioration scientifique et les méthodes d'utilisation. En Europe on peut citer : Simon Steven (1548-1620) Galio Galilé (1564-1642), Edme Mariotte (1620 – 1684) et Evangelista Toricelli (1608 – 1647). Tour à tour, ils ont appliqué la mécanique des fluides en accentuant les recherches sur la distribution de la pression hydraulique. Ce travail a été intégré par le mathématicien Blaise Pascal (1623 – 1662) ; Il donna le premier exposé homogène et ordonné de ces principes fondamentaux de l'hydrostatique.

Le moine Benedetto Castelli fut le premier à faire une publication parlant de l'état de continuité des fluides. En parallèle à la formulation des équations du mouvement du solide, Issac Newton (1647-1727) a appliqué ses lois aux fluides, et a exploré l'inertie et la résistance des fluides et la viscosité, des jets libres dans son ouvrage intitulé Livre II des principia mathematica qui traite les mouvements des corps en milieux résistants. Par ailleurs, Clifford Truedell à son avis les travaux de Newton ont donné naissance à deux autres disciplines, ne laisse aucun acquis scientifique substantiel. Cependant, il faut attendre les travaux d'Alexis Claude Clairant (1713 -1765) et Jean le Rond d'Alembert (1717 -1783) pour que commence à s'établir les lois des fluides. Il faut souligner que ces travaux bien qu'ils soient de légers progrès sont venus donner une nouvelle impulsion dans le développement bien que tout était focalisé sur le domaine technique ; mais cela a permis l'ouverture à plusieurs portes scientifiques pour l'évolution des temps modernes.

### **I.1.2 Evolution de la mécanique des fluides aux temps modernes**

L'application des outils mathématiques à la physique a permis à la mécanique des fluides de résoudre de nombreux problèmes ; mieux encore cela a permis de définir les équations d'énergie et de la quantité de mouvement qui servent beaucoup dans la résolution des problèmes de la Mécanique des fluides. Plusieurs travaux ont été repris durant les siècles suivants avec, en particulier les innovations Pitot (rendement des machines hydrauliques, tubes de Pitot) Venturis (travaux hydrauliques, construction d'une tuyère à cônes divergents).

C'est grâce au Suisse Daniel Bernoulli (1700- 1782) qui vient concrétiser la recherche d'où le traité de Bernoulli de 1738 c'est lui qui établit les lois applicables aux fluides non visqueux en appliquant le principe de la conservation de l'Energie mécanique. Cependant dans une autre vision, Jean d'Alembert utilise le calcul différentiel et développe une idée sur la composante

de la vitesse et l'accélération, l'expression différentielle de la continuité, c'est-à-dire le paradoxe de non résistance à l'avancement uniforme. Ainsi il exposa en 137 pages, sur les bases d'hydrodynamiques en présentant le principe de la pression interne d'un fluide, du champ de vitesse et des dérivées partielles appliquées aux fluides. Léonhard Euler (1707 -1783) viendra lui aussi à son tour compléter plus tard l'analyse d'Alembert sur la pression interne et les équations dynamique sur les fluides incompressibles.

En 1755 Euler publie ainsi le traité qui donne les équations partielles décrivant le fluide parfait incompressibles. Cette progression accélérée et accompagnée à celle analysées par les mathématiciens ont été au demeurant les mêmes personnes qui font la mathématique dans diverse domaine et qui analyse les problèmes sur les fluides incompressibles.

Evangelista Torricelli explique les effets de la progression atmosphérique sur L'hydraulique en utilisant les lois de la similitude, et invente le baromètre en (1643).

Henry Pitot introduit un instrument pour mesurer la vitesse du tube de Pitot, et Bernoulli utilise une approche mathématique des écoulements qui lui permet d'établir le fameux théorème de Bernoulli. Jean Alembert dans la même période introduit la notion des milieux continus et favorise la résolution de divers problèmes dans son traite de la dynamique en 1743. Euler et Lagrange introduit respectivement le calcul infinitésimal.

## **I.2 APPLICATIONS DE LA MECANIQUE DES FLUIDES**

La Mécanique des fluides a fait l'objet de plusieurs applications dans la société antique et moderne. De nombreux métiers ont été développés grâce à l'amélioration des mécaniques des fluides. La société a retrouvé son équilibre grâce aux problèmes résolus par la mécanique des fluides ; elle s'applique alors sur plusieurs domaines à savoir :



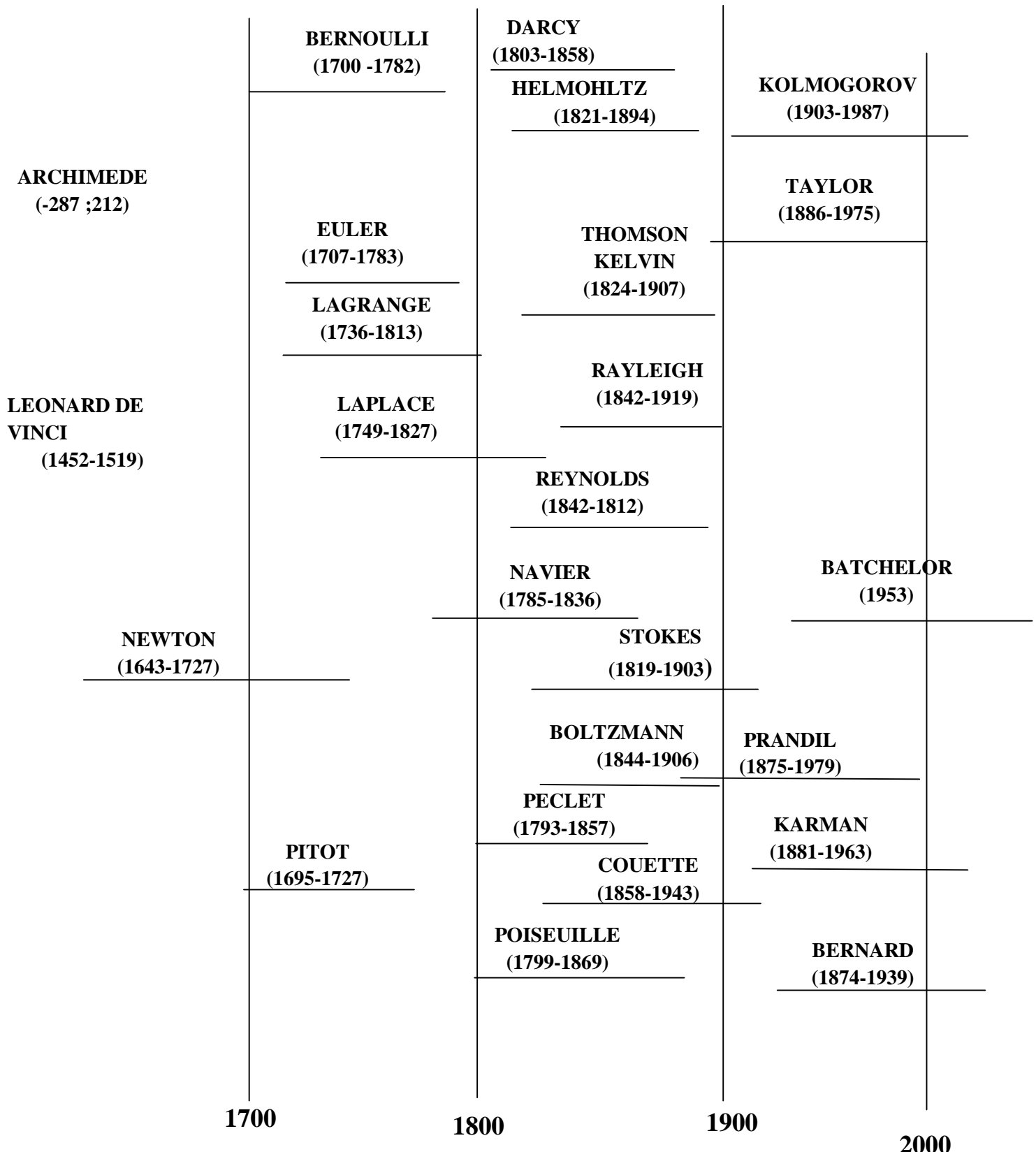


Figure 1 : Sources bibliographiques de la Mécanique des Fluides.

### **I.2.1 Domaine d'application antique et moderne**

La Mécanique des fluides est considérée comme un sous ensemble de la mécanique des milieux continus, elle est basée et concerne l'étude des gaz et liquide en équilibre (repos) et en mouvement avec interaction de ces corps (gaz, liquide) avec les corps solides. Son importance et son efficacité s'explique par le fondement des théories qu'elle offre a de nombreuse discipline tels que l'aérodynamique, hydraulique, la météorologie et le plasma.

De nombreux chercheurs physiciens et mécaniciens ont préparé le chemin pour que l'application soit une réalité effective et efficace dans la société. Les grands travaux publics (pont, chaussée, eau et foret) et les grandes entreprises de leur dimension de réalisation hydraulique, n'ont pas pu. C'est le même cas dans les constructions de l'ensemble des ouvrages et installations hydrauliques et aqueducs, les centrales hydrauliques, thermiques et nucléaires pour la mise en place de l'exploitation des grands périmètres, d'irrigation, d'instabilité dues à la cavitation dans les turbo machines hydrauliques.

Le moyen âge marque l'époque des grandes réalisations de la mécanique des fluides notamment dans le cas de l'hydraulique, l'évolution au niveau de la construction des barrages, des aqueducs, des turbines hydrauliques de haute chute, les pompes de d'accumulation réversible de grande hauteur d'évaluation, les pompes alimentaires de chaudières. Il faut attendre la fin du moyen âge pour que les premières expériences concluantes et approuves voient le jour en 1420.

Un modèle d'oiseau propulse par fusée, fit un vol de 30 mètres, c'est un témoignage de l'amélioration de l'aérodynamique. Elle contribuera à son tour, a la construction au développement de l'automobile, des souffleries mais également à la navigation ou du chemin de fer ; dans le cas de la balistique et du domaine, supersonique et hypersonique.

Les temps modernes marquent l'amélioration intensive et accélérée des machines hydrauliques, les constructions ont également acquis la position privilégiée dans le cadre des grandes pompes à volutes en béton armé et des turbines hydrauliques de grande puissance. Les techniques d'optimisation présentées sont dans la plupart originales et fondées sur les outils d'analyses les plus récents. Certaines applications peuvent être dite particulières et intéressantes dans les secteurs tels que : La propulsion navale l'industrie nucléaire, chimie ou pétrolière. L'édification du laser et l'explosion rapide des méthodes informatiques de traitement d'image ont démocratisé type de méthodes.

Au temps présent, tout le domaine industriel qui met en œuvre un écoulement liquide ou gazeux suffisant transparent et théoriquement concerné, à condition que le phénomène étudié se déroule en atmosphère libre ou soit confirmé dans une structure également transparente. Nous avons plusieurs domaines d'applications. Le refroidissent aérodynamique ou liquides des machines électriques et thermiques ; la circulation d'air dans le système de climatisation et le chauffage ; les écoulements internes dans les moteurs thermiques de la chambre de combustion à l'échappement ; Ecoulement atmosphérique ou génie civil et environnement ; Ecoulements externes autour des véhicules terrestres ou aériens.

Les domaines d'applications restent variés et sont spécifiques à des disciplines concernées aussi diversifiées. Toute fois ; il est important de noter que la connaissance de la nature du fluide et ou du domaine de la vitesse es utile.

En définitive, nous retenons que les écoulements hydrauliques constituent un domaine d'investigation des problèmes que pose ce dernier ; le cas le plus simple ceux pour lequel le régime laminaire et conservé. Dans cette

configuration, de véritables trajectographiques sont possibles l'accès aux champs de vitesse est également envisageable, à condition que l'écoulement soit bidimensionnel ou faiblement tridimensionnel.

### **I.2.2 Applications futures de la mécanique des fluides**

La Mécanique des fluides, avant qu'elle ne soit étudiée, a été largement employée pour des applications quotidiennes comme l'irrigation en agriculture, les canaux, les fontaines, etc. La sédentarisation des humains a entraîné la nécessaire invention de moyens de maîtrise de l'eau. De nos jours elle occupe une place importante dans la formation surtout des mécaniciens, des ingénieurs. Nous constatons que la discipline a connu une évolution grandissante à travers divers domaines d'activités, car elle a servi de base à hydraulique, et à l'aéronautique. Elle s'est avérée comme un champ d'expérience fondamentale de l'hydrodynamique physique, la physique non linéaire, les mathématiques appliquées, et la turbulence. Elle est cette discipline de la physique qui a fait l'évolution accélérée de la technologie dans les domaines et secteurs économiques on peut citer : les transports, énergies renouvelables, sécurité, aménagement du territoire, élaboration des matériaux, biomédical. Elle est au centre des grandes branches dans le domaine de la science de l'univers à savoir : la météorologie, climatologie, océanographie, planétologie, magnétisme naturel, cosmologie.

La Mécanique des fluides possède une particularité qui tient à partir des outils d'investigation pour que cette discipline se développe. Les domaines de la météorologie et de la simulation numérique. Notons qu'on la retrouve dans physique non linéaire, les plasmas l'astrophysique, la chimie, etc. La mécanique des fluides est à l'origine du développement des compétences des algorithmes numériques.

Cependant cette large et constante évolution, n'étonnera pas que la mécanique des fluides soit aujourd'hui répartie sur plusieurs sections. Il y'a déjà une partie importante qui gère un des secteurs, développement technologique, et un certain nombre de sujets propres au cœur de la discipline y sont fortement présents. Ainsi telle est le cas de la turbulence, un problème clé d'importance fondamentale ; elle est étudiée dans les conditions significatives pour les champs d'application. C'est la turbulence développée qui retient de notre attention. La connaissance des écoulements turbulents permet également de tester des différentes modélisations numériques de la turbulence par des diverses méthodes de dissipation, statiques. L'avancée dans la modélisation numérique de la turbulence en configuration réelle constitue un enjeu stratégique pour les applications industrielles actuelles et futures. De nos jours la mécanique des fluides est utilisée pour modéliser les contraintes des fluides sur certains systèmes tels que : l'étude du ballotement de gaz dans les containers gazinières ou les effets de la houle sur les coques de navires, la circulation automobile (gestion des feux dans agglomérations) elle étudie l'écoulement l'air autour de la voiture l'air décolle de l'engin et crée un trou d'air donc une dépression qui aspire la voiture vers l'arrière cette même présence d'un aileron crée, présente des turbulences chargées de combler ce vide et de diminuer la traînée pour optimiser la vitesse.

La Mécanique des fluides est beaucoup utilisée dans d'autres secteurs ce qui donne un grand et large champ d'application. Dans le secteur de la chimie, elle intervient dans les Procédés et la Combustion, (raffinerie) en Biologie, elle est présente dans la Biomécanique des fluides, la Mécanique et l'automatique. La Mécanique des fluides est complexe c'est-à-dire qu'elle intervient dans plusieurs domaines d'applications. Dans le domaine énergétique, la Mécanique des fluides est considérée comme un axe central car c'est avec la fabrication des

turbomachines, leur conception et leur maintenance que ce secteur a évolué. Dans la magnétohydrodynamique qui est l'un des domaines d'application de la Mécanique des fluides, elle intervient dans l'étude des gaz ionisés ou plasma ; elle permet la réalisation des prototypes des centrales convertissant directement de l'énergie thermique en énergie électrique.

En définitive les domaines d'applications de la Mécanique des fluides sont assez larges que nous ne pouvons pas tous les citer ; cependant il demeure un éternel problème celui de comprendre le phénomène de l'écoulement des fluides et ses conséquences, de nouvelles technologies sont en train de prendre un rôle très important c'est le cas de la simulation des écoulements. Elle est désormais au centre de nombreux métiers et des défis sociétaux dans l'efficacité énergétique et leur développement mais aussi dans la réalisation complétive avec d'autres disciplines de l'ingénierie à savoir : La thermodynamique qui est un facteur déterminant dans plusieurs processus de la Mécaniques des fluides.

### **I.3 EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES**

Il est question dans cette partie de rappeler les caractéristiques des milieux fluides, puis les principes fondamentaux et les équations de conservation de masse, de la quantité de mouvement, et d'énergie qui régissent les écoulements des fluides en régime laminaire ou turbulent, pour enfin établir les équations d'hydrodynamiques encore appelées les équations de Navier-Stokes.

#### **I.3.1 Notion d'hydrodynamique**

Le fluide peut être considéré comme étant un milieu matériel sans rigidité et essentiellement déformable. Sur le plan microscopique, les fluides tout comme les solides sont constitués des molécules ordonnées dans une structure

lacunaire, c'est-à-dire discontinue. Contrairement aux solides qui sont formés des molécules pouvant osciller et se maintenir en moyen à des distances peu variables les unes des autres.

Sur le plan macroscopique, les fluides sont constitués des particules matérielles. Une particule étant un ensemble de  $N$  molécules voisines, cet ensemble est suffisamment petit pour être supposé ponctuel et est suffisamment grand pour avoir un volume élémentaire  $dv$ . Physiquement, cet ensemble est caractérisé par le fait que les grandeurs physiques comme la température, la pression, la masse volumique et d'autres paramètres restent constant à l'intérieur d'une particule. Le transport de ses particules globalement d'un point à un autre constitue un écoulement. L'étude de l'écoulement en Mécanique des fluides très souvent revient à résoudre les équations de Navier-Stokes qui régissent cet écoulement.

### **I.3.2 Fluide visqueux**

Un fluide est visqueux lorsqu'il possède la caractéristique de s'opposer à toute action qui tend à déformer un quelconque élément de volume d'un domaine ( $D$ ) considéré de celui-ci. Dans ces conditions, les effets inertiels sont négligés. Il est caractérisé par une viscosité dynamique noté  $\mu$  et une viscosité cinématique notée  $\nu$ . Ces viscosités sont liées à la masse volumique du fluide par a relation

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{I.1}$$

### **I.3.3 Principales caractéristiques des milieux fluides**

On reconnaît aux fluides trois propriétés essentiels : ils sont continus, très déformables et visqueux.

## **Milieu continu**

Un milieu matériel est dit continu lorsque toutes ses propriétés (champ de vitesse, contraintes et loi de comportement) sont des fonctions continues de l'espace et du temps. La définition des milieux continus implique de considérer les éléments de volume  $dv$  très grand à l'échelle moléculaire et très petit à l'échelle macroscopique. En mécanique des fluides, un élément de volume  $dv$  répondant à ces spécificités est appelé *particule du fluide*. La température, la masse volumique sont uniformes sur  $dv$  à chaque instant.

## **Viscosité des fluides**

Les interactions entre molécules dans un fluide au repos sont caractérisées par les forces de pression, normales aux surfaces tandis que dans le fluide en mouvement ces interactions sont représentées par des forces tangentielles appelées *forces de viscosité ou force de cisaillement* et elles se traduisent par une résistance aux mouvements.

### **I.3.4 Notion de cinématique**

Le mouvement d'un fluide est étudié dans l'espace physique qui est espace affine, euclidien de dimension 3 à un repère orthonormé qu'on suppose fixe et galiléen. Pour décrire le mouvement du fluide, on distingue deux points de vue :

Le point de vue d'Euler qui consiste à associer à chaque point de l'écoulement un observateur capable de permettre la détermination du champ de vitesse en ce point. Le point de vue de Lagrange qui consiste à considérer individuellement une particule fluide, à suivre dans son mouvement et à déterminer sa position. Ainsi, l'évolution de la position de la particule qui permet la description de l'écoulement.



## Mouvement permanent

Le champ de vitesse d'une particule dépend de la position  $M$ , il dépend aussi du temps d'où  $\vec{V} = \vec{V}(M, t)$ .

Le mouvement est dit permanent ou stationnaire si le champ de vitesse ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire :  $\vec{V} = \vec{V}(M(t))$ .

## Mouvement non permanent

Le mouvement du fluide est *non permanent ou instationnaire* lorsqu'il n'est pas permanent, c'est dire lorsqu'il n'y a pas dépendance explicite du champ de vitesses par rapport au temps c'est dire :

$$\vec{V} = \vec{V}(M, t) \text{ avec } M = M(M, t).$$

## I.4 EQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE : CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Les équations d'hydrodynamiques expriment le principe de la conservation de la masse à travers l'équation de continuité et le principe de conservation de la quantité de mouvement à travers les équations de Navier-Stokes.

### I.4.1 Conservation de la masse

#### a)-Tenseur des taux de déformation

Soient  $M$  et  $M'$  deux points infiniment voisins d'un milieu fluide. Les vitesses du fluide aux points  $M$  et  $M'$  sont liées par la relation (I.2) :

$$\vec{V}(\vec{M}') = \vec{V}(\vec{M}) + \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{MM}' + \vec{D}(\vec{M}) \quad (I.2) \quad \text{Où}$$

$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}$  est le vecteur tourbillon,  $2\vec{\Omega}$  la *vorticité* du fluide au point  $M$  ;

$\vec{D}(M)$  Le vecteur vitesse de déformation.

Cette déformation est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{MM} \quad (I.3)$$

Dans l'équation (I.3),  $\overline{\overline{\varepsilon}}$  représente le tenseur des taux de déformation dont les composantes sont définies à partir des gradients de vitesse tels que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.4)$$

Pour  $i = j$ ,  $\varepsilon_{ij}$  est le taux de dilatation linéaire d'un élément de longueur initialement parallèle à l'axe  $\vec{x}_i$  et pour  $i \neq j$ ,  $\varepsilon_{ij}$  est le taux de déformation angulaire ou taux de glissement d'un angle initialement droit dont les côtés sont parallèles aux axes  $\vec{x}_i$  et  $\vec{y}_j$ . La divergence de la vecteur vitesse, est le taux de dilatation cubique relative et s'exprime par la relation :

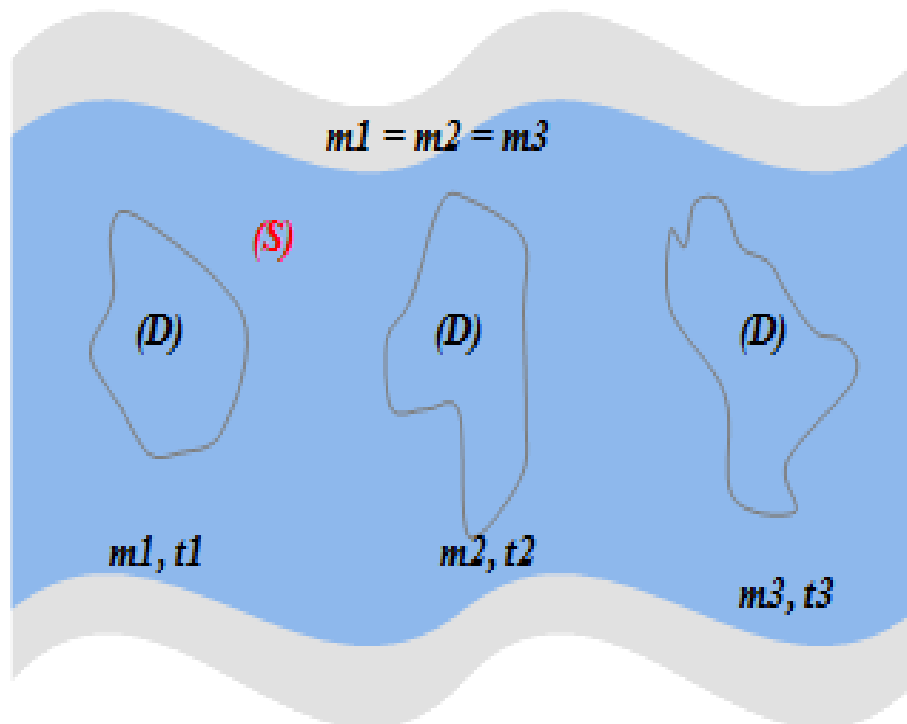
$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{dt} \left( \frac{dw' - dw}{dw} \right) \quad (I.5)$$

Ou encore

$$\text{div} \vec{V} dt = \frac{dw' - dw}{dw'}$$

**b)- Enoncé du principe de conservation de la masse**

Quel que soit le domaine ( $D$ ) du fluide limité par une surface fermée ( $S$ ) et entièrement contenu dans le fluide que l'on suit son mouvement au cours du temps, sa masse reste constante quand on suit le fluide dans son mouvement. Le schéma de la figure ci-dessous montre un domaine ( $D$ ) du fluide évoluant dans le temps.



**Figure 2 : Principe de conservation de la masse**

**c)- Equation de continuité**

Soit  $V$  le volume de fluide contenu dans le domaine ( $D$ ) et soit  $dv$  le volume élémentaire pris autour d'une particule de fluide contenu dans ( $D$ ) à l'instant  $t$ . le principe de conservation de la masse nous permet d'écrire :  $m = cte$

Pour une particule de fluide de masse  $dm$  contenue dans (D), la masse totale du fluide dans le domaine (D) est donnée par la relation suivante.

$$m = \iiint_D dm \quad (I.6)$$

En tenant compte du fait que  $dm = \rho dv$ , on obtient la relation suivante :

$$m = \iiint_D \rho(M, t) dv \quad (I.7)$$

Où  $\rho$  est la densité de la masse volumique du fluide.

D'après le principe de conservation la masse, la masse reste constante au cours du temps. Ce qui donne :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D \rho(M, t) dv = 0 \quad (I.8)$$

En utilisant la dérivée lagrangienne définie par :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{grad}$$

Et en tenant compte de l'expression donnant la relation entre la divergence du vecteur vitesse et le taux de dilatation cubique, l'équation (I.6) devient :

$$\iiint_D \left[ \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div} \rho(M, t) \vec{V} \right] dv = 0 \quad (I.9)$$

Cette équation devant être vérifiée pour tout domaine, le théorème de l'intégrale multiple permet d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div}[\rho(M, t)\vec{V}] = 0 \quad (\text{I.10})$$

Où  $\text{div}(\rho\vec{V}) = \rho \text{div}\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{grad}\rho$

Pour les fluides incompressibles en transformation isotherme, la masse volumique varie très faiblement avec la pression ainsi  $\rho = \rho_0 = \text{cte}$  l'équation (I.12) devient:

$$\text{div}\vec{V} = 0 \quad (\text{I.11})$$

Cette équation est appelée équation de continuité elle montre que le champ de vitesse est à flux conservatif (pour un fluide incompressible).

#### I.4.2 Conservation de la quantité de mouvement

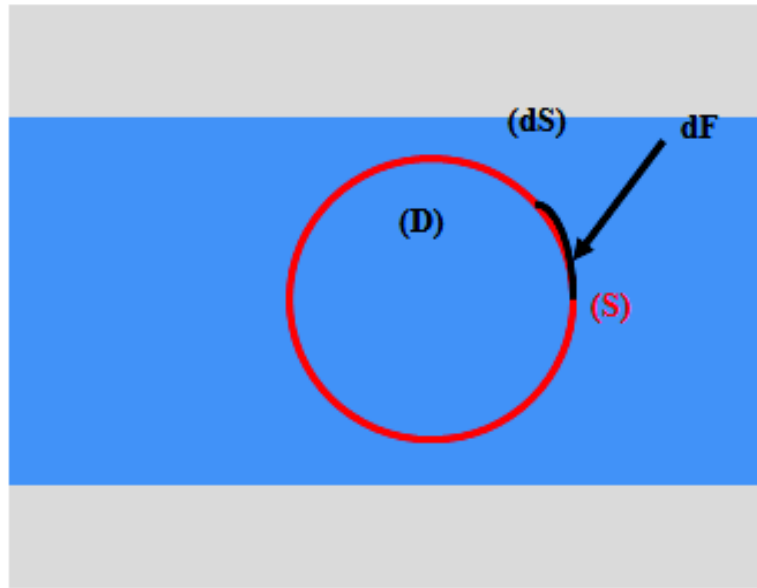
##### a)- Force de contact

On appelle force de contact sur une portion de fluide ( $D$ ) limité par une surface fermée ( $S$ ), la force exercée par le fluide extérieur sur le fluide intérieur à ( $D$ ) et qui s'applique sur la surface ( $S$ ) à raison de  $\vec{T} \cdot d\vec{S}$  sur un élément de surface ( $S$ ) telle que  $d\vec{F} = \vec{T}(M) d\vec{S}$ , où:

$d\vec{F}$  est la force de contact sur  $d\vec{S}$

$\vec{T}(M)$  est la tension ou la contrainte au point  $M$

La figure ci-dessous illustre une particule fluide sur laquelle est appliquée la force de contact sur l'élément de surface.



**Figure 3** : Domaine de fluide (D) délimité par une surface (S)

La contrainte  $\vec{T}$  contient une composante normale ou contrainte normale à  $ds$  et une composante parallèle ou contrainte tangentielle à  $ds$  (contrainte de glissement ou contrainte de cisaillement) et on a la relation suivante

$$\vec{T} = \vec{T}_n - \vec{T}_f \quad (I.12)$$

**b)- Enoncé de la conservation de la quantité de mouvement**

Ce principe s'énonce comme suit: Quel que soit le domaine (D) du fluide que l'on suit dans son mouvement dans son référentiel supposé galiléen, la dérivée par rapport au temps du tenseur des quantités de mouvement au domaine (D) est égale au tenseur des forces extérieures au domaine. Ce pendant avant de donner l'expression de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, il est important de rappeler les notions de forces de contact, les tenseurs des contraintes, et de la loi de comportement.

**c)- Tenseur de contrainte**

Dans le cas des fluides newtoniens étudiés, les propriétés suivantes doivent être vérifiées :

**Propriété 1 :** la distribution des contraintes  $\vec{T}(M)$ , en tout point  $M$  du fluide est totalement déterminée dès que l'on connaît les contraintes qui s'exercent sur les trois éléments de surface  $dS_1, dS_2, dS_3$  formant un trièdre orthonormé ayant pour origine  $O$ .

**Propriété 2 :** Si l'on considère maintenant un petit parallélépipède rectangle bâti sur le point  $M$  et aux arrêts parallèles aux axes de coordonnées, et qu'on exprime l'équilibre des moments des forces appliquées, on trouve que le tenseur des contraintes  $\overset{=}{\sigma}$  est symétrique, c'est-à-dire  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

On démontre que la contrainte  $\vec{T}$  sur un élément de surface pris autour du point  $M$  du fluide est liée à la normale unitaire  $\vec{n}$  de cet élément de surface par la relation suivante.

$$\vec{T} = \overset{=}{\sigma} \vec{n} \tag{I.13}$$

Où  $\overset{=}{\sigma}$  est le tenseur d'ordre 2 des contraintes.

La composante  $\sigma_{jk}$  de ce tenseur s'interprète comme la contrainte sur l'axe  $x_j$  sur une surface normale  $x_k$ . Pour  $\sigma_{jk}$  est appelé contrainte normale et pour  $j \neq k, \sigma_{jk}$  est appelé contrainte tangentielle.

### d)- Loi de Comportement

Pour les fluides newtoniens, les contraintes sont par définition des fonctions linéaires des taux de déformation du milieu la loi de comportement qui en découle de cette définition est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{jk} = (-p + \eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \delta_{jk} + 2\mu \varepsilon_{jk} \quad (\text{I.14})$$

Cette relation ci-dessus peut aussi se mettre sous la forme tensorielle

$$\bar{\sigma} = (-p + \eta \operatorname{div} \mathbf{V}) \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} \quad (\text{I.15})$$

Où

- P est la pression statique (indépendante de la direction en point donné)

$$\delta_{ij} \text{ le symbole de Kronecker } \begin{cases} \delta_{ij} = 1, \text{ si } i = j \\ \delta_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

$\mu$  et  $\eta$  paramètres caractérisant les propriétés visqueuses des fluides

$\mu$  Est viscosité de cisaillement ou dynamique

$\eta$  Est la viscosité de dilatation ou cinématique

$$\frac{d\bar{\mathbf{C}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}}_{ext} \quad (\text{I.17})$$

L'égalité entre les deux tenseurs le tenseur de taux de déformation et tenseur de contrainte précédents équivaut à égalité entre les moments résultants.



$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \begin{cases} \frac{d\vec{R}}{dt} = \iiint_D \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv \\ \frac{d\vec{M}_o}{dt} = \iiint_D \rho \frac{d(\mathbf{OM} \wedge \vec{V})}{dt} dv \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

On montre que la deuxième égalité (I.15) n'apporte aucune information supplémentaire sur la détermination du champ de vitesse du fluide, car elle aboutit à la symétrie du tenseur des contraintes. Donc la première égalité est intéressante :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_D \rho \vec{f} dv + \oint_S \overline{\sigma \vec{n}} dS \quad (\text{I.19})$$

Où  $\rho \vec{f} dv$  est la résultante des forces de masse sur la particule fluide de masse  $dm$

Les forces de masse sont les forces qui sont proportionnelles à la masse et qui sont dues à l'existence d'un ou plusieurs champs de force dans le domaine où se trouve le fluide. En utilisant le théorème d'Ostrogradski, on obtient :

$$\oint_S \overline{\sigma \vec{n}} dS = \iiint_D \overline{\sigma} dv \quad (\text{I.20})$$

La relation (I.18) devient alors

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_D \rho \vec{f} dv + \iiint_D \overline{\text{div} \sigma} dv \quad (\text{I.21})$$

Soit

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \iiint_D \left( \rho \vec{f} + \overline{\text{div} \sigma} \right) dv \quad (\text{I.22})$$

En effet, on aboutit à l'équation locale de la quantité de mouvement à savoir :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \text{div} \vec{\sigma}. \quad (\text{I.23})$$

Cette relation obtenue ci-dessus peut aussi se

mettre sous forme d'une notation indicielle telle que :

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{I.24})$$

L'équation (I.23) est appelée relation de Cauchy. Cette relation est valable quel que soit le fluide, qu'il soit Newtonien ou pas.

Rappelons qu'un fluide newtonien est un fluide de Stokes vérifiant l'hypothèse de Newton à savoir : les contraintes sont des fonctions linéaires des taux de déformations. Pour la plupart des fluides usuels dans la condition standard, ce modèle est très satisfaisant.

### e)- Equation de Navier-Stokes

En appliquant l'opérateur divergence sur la relation (I.13) on obtient :

$$\text{div} \vec{\sigma} = -\text{grad} p + \text{grad}(\eta \text{div} \vec{V}) + 2\mu \text{div} \varepsilon \quad (\text{I.25})$$

Compte tenu des propriétés de la divergence l'équation (I.25) devient

$$\text{div} \vec{\sigma} = -\text{grad} p + \text{grad}(\eta \text{div} \vec{V}) + 2\text{div} \mu \varepsilon \quad (\text{I.26})$$

En substituant l'équation (I.26) à (I.24) on obtient :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} - \text{grad} p + \text{grad}(\eta \text{div} \vec{V}) + 2\text{div} \mu \varepsilon \quad (\text{I.27})$$

Où  $\varepsilon$  est le tenseur des taux de formation, et est lié au gradient de vitesse par la relation suivante:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \overline{\text{grad} \vec{V}} + {}^t \overline{\text{grad} \vec{V}} \right) \quad (\text{I.28})$$

En substituant l'équation (I.28) à l'équation (I.27) on obtient de nouvelles équations appelées équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right) = \rho \vec{f} - \mathbf{grad} p + (\mu + \eta) \mathbf{grad} (\text{div} \vec{V}) + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{I.29})$$

Dans la relation (I.29) obtenue ci-dessus, le terme de gauche représente les forces d'inerties. Les termes de droite représentent respectivement les forces de masses, de pression et viscosité par unité de volume.

$\eta$  et  $\mu$  sont des constantes:

Pour les fluides incompressibles en transformation isotherme ou de faible variations de masse volumique.

$$\text{div} \vec{V} = 0 ,$$

De plus  $\nu$  et  $\mu$  sont des constantes liées par la relation  $\mu = \rho \nu$

Les équations (I.29) sont les équations de Navier-Stokes pour des fluides se réduisent :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right) = \rho \vec{f} - \mathbf{grad} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{I.30})$$

En considérant que dans la relation (I.30) obtenue ci-dessus le premier terme de gauche (forces d'inertie) peut se mettre sous la forme suivante, quel que soit le

système coordonnées (coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques), on

a.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\vec{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} \right]$$

Par ailleurs en insérant cette relation dans l'équation (I.30), On obtient une nouvelle forme des équations de Navier-Stokes quelques que soit le système de coordonnées :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\vec{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{I.31})$$

Si on néglige l'action du poids en supposant que le mouvement du fluide a lieu dans une direction orthogonale que celle du poids alors les forces la masse seront alors négligeables et la relation (I.31) devient :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\vec{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{I.32})$$

Ces équations de Navier-Stokes peuvent être détaillées dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques pour un champ de vitesse  $\vec{V}$ .

Dans le système de coordonnées cartésiennes, les composantes du champ de vitesse sont  $V_x, V_y, V_z$  sur les axes  $(x, y, z)$  on a alors :

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \quad (\text{I.33a})$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \quad (\text{I.33b})$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{I.33c})$$

Dans le système des coordonnées cylindriques le champ de vitesse s'écrit :

$$\vec{V} = \vec{V}_r \vec{e}_r + \vec{V}_\theta \vec{e}_\theta + \vec{V}_z \vec{e}_z$$

Sur les trois axes, les équations (I.33) deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) & \end{aligned} \quad (\text{I.34a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} - \frac{V_r V_\theta}{r} &= \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) & \end{aligned} \quad (\text{I.34b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) & \end{aligned} \quad (\text{I.34c})$$

## I.5 Ecoulements bidimensionnels

Un écoulement est dit bidimensionnel lorsque les vitesses sont toutes parallèles dans un plan et dont les composantes de vitesses ne dépendent que des coordonnées de ce plan.

L'équation de continuité pour un fluide incompressible est donnée par la relation :

$$\text{div}\vec{\mathbf{V}} = 0 \quad (\text{I.35})$$

L'équation (I.35) signifie que le flux du champ de vitesse se conserve, c'est à dire la somme des débits volumiques à travers une surface fermée est nulle. Pour un temps  $t$  donné, le champ de vitesse  $\mathbf{V}$  a pour composante dans les systèmes de coordonnées :

$$\vec{V}(x, y, t), \vec{V}(r, \theta, t) \text{ ou } \vec{V}(r, z, t)$$

### I.5.1 Ecoulements plans

Les écoulements plans sont des écoulements où le champ de vitesse possède deux composantes non nulles. Dans le système de coordonnées cartésiennes et polaires ce champ de vitesse se présente respectivement sous la forme :

$$\mathbf{V} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j} \text{ et } \mathbf{V} = V_r(r, \theta)\mathbf{e}_r + V_\theta(r, \theta)\mathbf{e}_\theta$$

Considérons un écoulement plan de fluide isochore dans le plan  $(O, x, y)$ , il est décrit par les relations suivantes (I.36a), (I.36b), (I.36c).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u \quad (\text{I.36a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v \quad (\text{I.36b})$$

En dérivant l'équation (I.36a) par rapport à  $y$  et (I.36b) on obtient l'équation de vorticité donnée par :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\Omega \mathbf{V}) = \nu \Delta \Omega \quad (\text{I.37})$$

$$\text{Avec } \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

L'équation (I.37) se présente comme un bilan local de vorticité (dérivée du bilan de quantité de mouvement avec un terme source qui s'identifie à un mécanisme de diffusion).

### I.5.2 Ecoulement axisymétrique

Dans l'écoulement axisymétrique le champ de vitesse s'écrit en coordonnées cylindro- polaire et est donné sous la forme :

$$\mathbf{V} = V_r(r, z)\mathbf{e}_r + V_z(r, z)\mathbf{e}_\theta$$

Ce champ de vitesse est indépendant de  $\theta$  et la vitesse ortho radiale est nulle.

Les écoulements à symétrie cylindrique constituent une famille des écoulements bidimensionnels pour lesquels les méthodes appliquées dans les écoulements plans restent valable. Dans le plan méridien  $(r, z)$  ( $z$  : direction axiale,  $r$  : direction radiale), les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) \quad (\text{I.38a})$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} V_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{I.38b})$$

En dérivant (I.38a) par rapport à  $z$  (I.38b) par rapport  $r$  on obtient l'équation de vorticité donnée par la relation (I.39):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\Omega \mathbf{V}) = \nu \Delta \Omega \quad (\text{I.39})$$

Avec 
$$\Omega = \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}$$

Pour un écoulement de fluide incompressible se situant dans un canal, l'équation de continuité est donnée par la relation :

$$\text{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.40a})$$

Cette relation peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{I.40b})$$

L'équation (I.40b) est satisfaite en posant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Où  $\psi$  représente la fonction de courant.

Pour un écoulement axisymétrique de fluide incompressible, l'équation de continuité devient :

$$\text{div}\vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{I.41a})$$

L'équation (I.41a) peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = -\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.41b})$$

L'équation (I.42b) est satisfaite en posant :

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{I.42})$$

Où  $\psi$  est la fonction de courant qui existe dans le plan méridien



En conclusion, Les équations fondamentales de la dynamique des fluides ont été établies ; nous pouvons ainsi poser la problématique de notre travail qui porte sur les effets d'un gradient de pression constant sur un écoulement laminaire incompressible dans une conduite annulaire semi-poreuse. La mise en équation, la détermination des conditions aux limites et la méthodologie de résolution de ces équations feront alors l'objet du chapitre II.

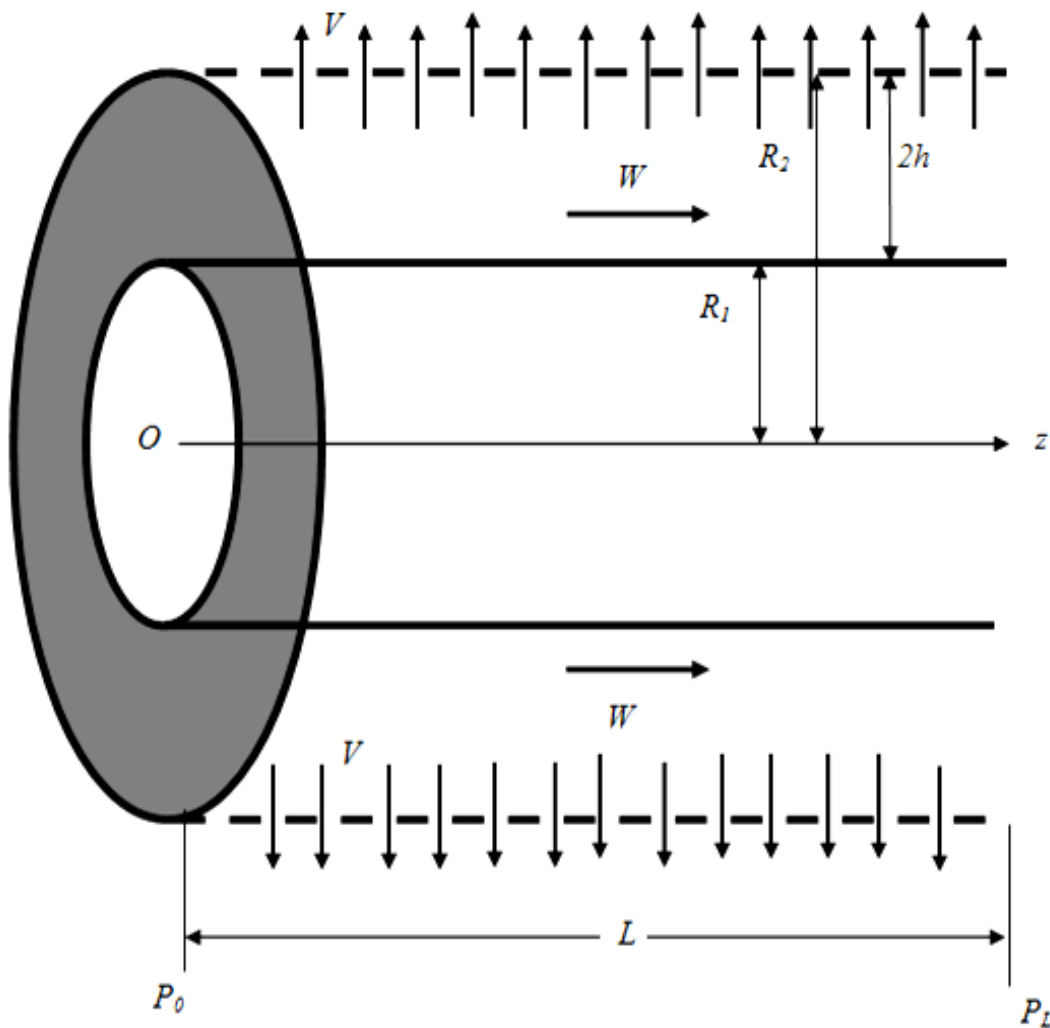
# CHAPITRE II : MATERIELS ET METHODES

---

Dans ce chapitre, nous allons présenter la configuration géométrique de l'écoulement considéré. Les équations de Navier-Stokes qui en découlent sont ensuite résolues analytiquement, puis modéliser en appliquant les méthodes puissantes d'optimisation basées sur les algorithmes fournis par la dynamique des fluides. Dans ce travail nous appliquons la méthode des solutions semblables pour ramener l'équation de vorticité qui est une équation aux dérivées partielles, en une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre avec des conditions aux limites définies sur les deux parois.

## II.1 POSITION DU PROBLEME

Considérons un fluide newtonien incompressible, situé dans une conduite annulaire semi-poreuse constituée d'un cylindre intérieur imperméable avec un rayon  $R_1$  et d'un cylindre extérieur poreux de rayon  $R_2$ . L'axe des deux cylindres est suivant  $(z)$ ,  $W$  et  $V$  respectivement représentent la vitesse maximale d'Hagen poiseuille et la vitesse d'injection ou d'aspiration.  $P_l - P_0$  la pression à l'entrée et à la sortie du cylindre horizontal et ayant une même longueur  $(L)$  tel que  $0 \leq z \leq L$ . Le fluide subit une aspiration ou une injection à une vitesse constance et uniforme, orthogonalement à la paroi comme l'indique la figure1, et un gradient de pression externe  $(P_L - P_0)/L$  constant dans le temps est appliqué entre les deux extrémités de la conduite. Les propriétés physiques du fluide c'est-à-dire sa masse spécifique  $\rho$  et sa viscosité cinématique  $\nu$  restent constantes.



**Figure 4 :** Conduite annulaire semi-poreuse

La conduite annulaire est semi-poreuse avec aspiration radiale et uniforme au niveau de la paroi extérieure poreuse, le cylindre interne étant imperméable. Le fluide est extorqué à vitesse constante et uniforme  $V$ , orthogonalement à la paroi.

$W$  désigne la vitesse axiale maximale de l'écoulement de Hagen-Poiseuille et représente l'ordre de grandeur des vitesses axiales fournies par le gradient de pression axiale constant

L'aspect géométrique de la conduite annulaire semi-poreuse considéré est caractérisé par le rapport d'entrefer  $\delta$  qui est défini afin de comparer la demi-largeur  $h$  de l'entrefer par rapport au rayon moyen du tuyau annulaire.

$$\delta = \frac{\frac{(R_2 - R_1)}{2}}{\frac{(R_1 + R_2)}{2}} = \frac{h}{R_1 + h} \quad (\text{II.1})$$

Avec  $2h = R_2 - R_1$

Les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  sont alors adoptées avec l'origine située sur l'axe  $z$  et les vecteurs unitaires  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ , pour les directions radiale, azimutale et axiale respectivement. L'écoulement est supposé axisymétrique et peut alors être étudié dans le plan méridien  $(r, z)$  avec les composantes radiales et axiale  $V_r, V_z$  de la vitesse d'écoulement. Cette hypothèse tient parce que l'aspiration ou l'injection de fluide est radiale et uniformément actionnée à travers l'extérieure de la paroi des cylindres.

## II.2 ÉQUATION DE VORTICITE

### II.2.1 Existence de la fonction de courant

Pour que la conservation de la masse soit satisfaite automatiquement, l'équation de continuité [25-27] pour un fluide incompressible dans le tuyau annulaire semi-poreux conduit à une équation dont la divergence du champ de vitesse est nulle. Cette équation permet de définir la fonction de courant  $\psi$ .

L'écoulement étant axisymétrique, les équations de continuité et de Navier-Stokes définies dans le chapitre 1 deviennent alors :  $div\vec{V} = 0$ .

En coordonnées cylindriques, cette relation s'écrit comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (\text{II.2})$$

Où  $V_r$  et  $V_z$  représentent respectivement les composantes radiale et axiale du champ de vitesse du fluide incompressible. En simplifiant la relation obtenue

ci-dessus par  $\frac{1}{r}$ , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial r} (rV_z) = -\frac{\partial}{\partial z} (rV_r) \quad (\text{II.3})$$

Ce qui explique réellement l'existence d'une fonction de courant  $\psi$  dans le plan méridien qui est défini par la relation.

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

L'existence de la fonction de courant nous emmène à rechercher le rotationnel du champ de vitesse qui lie la fonction de courant et le champ de vitesse donné par la relation suivante :

$$\text{rot}V = -\frac{1}{r} (D^2\psi) \mathbf{e}_\theta \quad (\text{II.4})$$

### II.2.2 Equation de vorticité

Pour obtenir cette équation nous avons utilisé deux méthodes :

La première méthode consiste à utiliser les dérivées partielles des composantes du champ de vitesse en introduisant la fonction de courant et la seconde la méthode utilise le rotationnel du champ de vitesse.

**Première méthode :**

Le problème posé se situant dans le plan méridien, les équations de Navier-Stokes déjà établies précédemment se réduisent à la forme suivante :

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right] \quad (\text{II.5a})$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.5b})$$

En dérivant l'équation (II.5a) par rapport à  $z$  et l'équation (II.5b) par rapport à  $r$  il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = \quad (\text{II.6a})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V_r}{r^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \quad (\text{II.6b})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right] + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \right]$$

En introduisant les expressions de la fonction de courant dans la relation ci-dessus et en factorisant on a les relations suivantes :

$$\frac{\partial^2 D^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{\partial^2 D^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial D^2 \psi}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) \quad (\text{II.9})$$

$$D^2 \psi = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) \quad (\text{II.10})$$

En remplaçant les termes trouvés dans l'expression à démontrer, nous déduisons alors la relation suivante :

$$\frac{\partial D^2 \psi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial D^2 \psi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} D^2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} D^2 \psi = \nu D^2 D^2 \psi \quad (\text{II.11})$$

L'équation (II.11) est l'équation de vorticité recherchée de l'écoulement.

### Seconde méthode

Pour utiliser cette méthode de résolution, nous signalons que le problème est régi par l'équation de la quantité de mouvement présentée déjà dans le chapitre 1 définie par :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V} \quad (\text{II.2})$$

Où  $\vec{V}$  représente le vecteur vitesse,  $p$  la pression,  $\Delta$  l'opérateur laplacien et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. L'écoulement se situe dans le plan méridien alors notre travail consiste à établir l'équation de vorticité.

Pour cela, nous appliquons le rotationnel dans les deux membres de l'équation. (II.12).



$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right) + \mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)\right) + \mathbf{rot}[\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}] = \\ \mathbf{rot}\left(-\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p\right) + \mathbf{rot}(v\Delta \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Nous calculons ensuite chaque terme de l'équation (II.13) après avoir introduit le rotationnel. Il vient :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rotV}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2)\mathbf{e}_\theta \quad (\text{II.14})$$

Par la suite nous appliquons les propriétés mathématiques sur les opérateurs. On a alors :

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)\right) = 0 \quad (\text{II.15})$$

En calculant ce terme  $\mathbf{rot V} \wedge \mathbf{V}$

On obtient l'expression suivante

$$\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{r}(D^2\psi)\mathbf{e}_\theta \wedge \left(-\frac{1}{r}(D^2\psi)V_r\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}(D^2\psi)V_z\mathbf{e}_z\right) \quad (\text{II.16})$$

En remplaçant  $V_r$  et  $V_z$  par leurs expressions qui les lient à  $\psi$ , il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V} &= \frac{1}{r}(D^2\psi)\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_z - \frac{1}{r}D^2\psi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\mathbf{e}_r \\ &= -\frac{1}{r^2}(D^2\psi)\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial \psi}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Ainsi la relation (II.17) obtenue peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V} = -(\nabla^2\psi)\mathbf{grad}\psi \quad (\text{II.18})$$

Avec

$$\mathbf{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z + \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r \quad (\text{II.19})$$

En appliquant le rotationnel à l'équation (II.18) obtenue on a :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{rot}(-(\nabla^2\psi)\mathbf{grad}\psi) \quad (\text{II.20})$$

En appliquant la propriété sur les opérateurs à savoir :

$\mathbf{rot}(f\mathbf{A}) = f\mathbf{rotA} + \mathbf{grad}f \wedge \mathbf{A}$  Dans la relation (II.20), on obtient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = -(\nabla^2\psi)\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\psi) + \mathbf{grad}(-\nabla^2\psi) \wedge \mathbf{grad}\psi \quad (\text{II.21})$$

Or d'après les propriétés sur les opérateurs  $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\psi) = \mathbf{0}$  alors l'équation (II.21) devient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = -\mathbf{grad}(\nabla^2\psi) \wedge \mathbf{grad}\psi \quad (\text{II.22})$$

En remplaçant le gradient défini en coordonnées cylindriques, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = \\ - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} D^2\psi \right) \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^2} D^2\psi \right) \mathbf{e}_z \right] \wedge \left[ \frac{\partial\psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial\psi}{\partial z} \mathbf{e}_z \right] \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Cette relation peut encore s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotV} \wedge \mathbf{V}) = \left[ -\frac{2}{r^3} \frac{\partial\psi}{\partial z} D^2\psi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (D^2\psi) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} (D^2\psi) \right] \mathbf{e}_\theta$$

Le fluide est incompressible lorsque sa masse volumique ne dépend pas de la pression et celle-ci varie faiblement quand la température varie aussi très peu. Dans notre cas présent, on a un fluide liquide ; alors sa masse volumique est constante.

$$\mathbf{rot}\left(-\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p\right)=-\frac{1}{\rho}\mathbf{rot}(\mathbf{grad}p)=0 \quad (\text{II.24})$$

Calculons le terme  $\mathbf{rot}(v\Delta\mathbf{V})$

Lorsque  $\rho$  est constant, les coefficients de viscosités  $\mu$  et  $\nu$  sont aussi constants. On a la relation suivante :

$$\mathbf{rot}(v\Delta\mathbf{V})=v\mathbf{rot}(\Delta\mathbf{V}) \quad (\text{II.25})$$

Appliquons la relation suivante pour avoir l'expression vectorielle équivalente valable quel que soit le système de coordonnées.

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A})=\mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}$$

$$\Delta\mathbf{A}=\mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{A})-\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A})$$

Ainsi on alors

$$\Delta\mathbf{V}=\mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{V})-\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{V}) \quad (\text{II.26})$$

Pour un écoulement plan de fluide incompressible, on a

$$\mathit{div}\mathbf{V}=0$$

L'équation (II.26) se réduit à :

$$\Delta\mathbf{V}=-\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{V}) \quad (\text{II.27})$$

En remplaçant le rotationnel du champ de vitesse trouvé, la relation (II.27) devient :

$$\Delta\mathbf{V}=-\mathbf{rot}\left[\left(-\frac{1}{r}\nabla^2\psi\right)\mathbf{e}_\theta\right]. \quad (\text{II.28})$$

En appliquant la propriété sur les opérateurs donnés précédemment

La relation (II.28) obtenue prend une nouvelle forme à savoir :

$$\Delta \mathbf{V} = -\text{rot} \left[ \left( -\frac{1}{r} \nabla^2 \psi \right) \mathbf{e}_\theta \right] = \left( -\frac{1}{r} \nabla^2 \psi \right) \text{rote}_\theta + \text{grad} \left( -\frac{1}{r} \nabla^2 \psi \right) \wedge \mathbf{e}_\theta \quad (\text{II.29})$$

En remplaçant ce terme et en arrangeant la relation (II.29) on obtient :

$$\Delta \mathbf{V} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \nabla^2 \psi \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nabla^2 \psi \right) \mathbf{e}_\theta \quad (\text{II.30})$$

En insérant le rotationnel à l'équation (II.30), il vient :

$$\text{rot}(\Delta \mathbf{V}) = -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \psi + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi \right) \right] \mathbf{e}_\theta \quad (\text{II.31})$$

La relation (II.31) peut encore se mettre sous la forme :

$$\text{rot}(\Delta \mathbf{V}) = -\frac{1}{r} \left( \nabla^2 \nabla^2 \psi \right) \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{II.32})$$

Avec 
$$\nabla^2 = D^2 \psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Remplaçons les relations déjà trouvées pour chacun des termes dans l'équation (II.12) ; on obtient finalement une équation appelée l'équation de vorticité donnée par la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} D^2 \psi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi \right) = \nu D^2 D^2 \psi \quad (\text{II.33})$$

Cette équation obtenue est l'équation de vorticité. Pour un écoulement stationnaire, on a :

$$\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} D^2 \psi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi \right) = \nu D^2 D^2 \psi \quad (\text{II.34})$$

Nous pouvons conclure qu'en utilisant les deux méthodes de résolutions, nous avons retrouvé la même équation de vorticité en régime permanent.

Dans le processus de recherche des solutions à notre problème, il est important d'adimensionnaliser l'équation de vorticité obtenue, cela nous permettant de rendre les variables du problème adimensionnel par rapport à leurs valeurs caractéristiques.

A cet effet, nous allons définir les variables adimensionnelles pour les grandeurs temps, longueur, vitesse et fonction de courant.

### II.2.3 Adimensionnalisation de L'équation de Vorticité

Il s'agit d'adimensionnaliser les variables  $\psi, t, z, r$ . On a alors :

$$r^* = \frac{r}{h} \quad (\text{II.35})$$

$$\tau = \frac{tV_r}{h} \quad (\text{II.36})$$

$$z^* = \frac{z}{h} \quad (\text{II.37})$$

$$\psi^* = \frac{\psi}{V_r h^2} \quad (\text{II.38})$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r^*} \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} \quad (\text{II.39})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{Et} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{h} \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \quad (\text{II.40}) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{V_r}{h} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (\text{II.41})$$

En appliquant ces expressions dans la relation (II.34), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{V_r^2}{h} \frac{\partial}{\partial \tau} D^2 \psi^* + \frac{2V_r^2}{r^{*2} h} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} D \psi^* . + \\ & \frac{V_r^2}{h} \frac{1}{r^*} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial r^*} \right) = \frac{V_r}{h} \nu D^2 D^2 \psi^* \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

En multipliant la relation ci-dessus par  $\frac{h}{V_r^2}$ , et en simplifiant, il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} D^2 \psi^* + \frac{2V_r^2}{r^{*2} h} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} D \psi^* . + \\ & \frac{1}{r^*} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\nu}{V_r h} D^2 D^2 \psi^* \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} D^2 \psi^* + \frac{2V_r^2}{r^{*2} h} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} D \psi^* . + \\ & \frac{1}{r^*} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial D^2 \psi^*}{\partial r^*} \right) = \frac{1}{R_e} D^2 D^2 \psi^* \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Avec  $R_e = \frac{(V + W)h}{\nu}$ , le nombre de Reynolds.

L'équation (II.43) obtenue est l'équation de vorticité adimensionnelle. Elle peut ainsi être généralisée sur la forme :

$$\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} D^2 \psi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi \right) = \frac{1}{R_e} D^2 D^2 \psi \quad (\text{II.44})$$

### II.3 TECHNIQUE DE RESOLUTION DE L'EQUATION DE VORTICITE SUR LE PLAN MERIDIEN :

#### Hypothèse de Berman

L'hypothèse sur les solutions semblables stipule que : la composante de vitesse transversale  $V_r$  est indépendante de la coordonnée  $z$ . Cette hypothèse a été envisagée pour la première fois par Berman [1]. Elle reste valable car le rayon du cylindre ne varie pas dans le sens de l'écoulement injection-aspiration. Le fluide est actionné uniformément sur toute la paroi.

#### II.3.1 Equation vérifiée par la fonction de courant par unité de longueur

Nous considérons l'expression de la vitesse radiale donnée par la relation

$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ . En intégrant cette équation et en tenant compte de ce que pour  $z = 0, \psi = 0$ , on obtient la relation suivante:

$$\psi(r, z) = zF(r) \tag{II.45}$$

Où  $F(r) = -rV_r(r)$

$F$  Désigne la fonction de courant de l'écoulement permanent par unité de longueur.

En dérivant la relation (II.45) par rapport à  $z$  on a ;

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = F(r) \tag{II.46}$$

Calculons chacun des termes de l'équation (II.44), on a :

$$D^2\psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{II.47}$$



$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = z \frac{dF(r)}{dr} \quad (\text{II.48})$$

Calculons encore la dérivée seconde de l'équation (II.48), on a :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} F(r) = 0 \quad (\text{II.49})$$

$$D^2 \psi = zr \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) = z D_r^2 F(r) \quad (\text{II.50})$$

En dérivant (II.50) par rapport à z on a ;

$$\frac{\partial}{\partial z} D^2 \psi = r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right) \quad (\text{II.51})$$

Dérivons ensuite (II.50) par rapport à r, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi = r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right) + zr \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right) = z \frac{d}{dr} D^2 F(r) \quad (\text{II.52})$$

$$D^2 D^2 \psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi \right) = z D^2 D_r^2 \psi F(r) \quad (\text{II.53})$$

On pose  $F(r) = F$

En remplaçant ces termes dans notre équation de vorticité (II.44) et en la simplifiant par z, on obtient :

$$\frac{1}{r^2} F D_r^2 F + \frac{1}{r} \left( \frac{dF}{dr} D_r^2 F - F \frac{d}{dr} D_r^2 F \right) = \frac{1}{R_e} D_r^2 D_r^2 F \quad (\text{II.54})$$

Avec : 
$$D_r^2 F = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) = \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}$$

Dans le but de résoudre l'équation (II.54) numériquement, il est indispensable de définir un nouveau paramètre  $\xi$  qui est fonction de  $r$  noté :

$$\xi = Ar^2 + B \quad (\text{II.55})$$

tel que pour  $\xi = 0$ ,  $r = \delta^{-1} - 1$  et pour  $\xi = 1$ ,  $r = \delta^{-1} - 1$

$A$  et  $B$  sont des constantes données par les relations ci-dessous :

$$A = \frac{\delta}{4} \text{ et } B = \frac{1 - \delta^2}{4\delta} \quad (\text{II.56})$$

En remplaçant  $A$  et  $B$  dans l'expression de  $\xi$ , on obtient :

$$\xi = \left(\frac{\delta}{4}\right)r^2 - \frac{(1 - \delta)^2}{4\delta} \quad (\text{II.57})$$

Avec  $0 \leq \xi \leq 1$

Pour obtenir une nouvelle équation vérifiée par la fonction  $F$  en fonction de  $\xi$ , nous dérivons l'équation (II.57) par rapport à  $r$ . On obtient :

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{2r\delta}{4} \quad (\text{II.58})$$

Nous remarquons que le second membre ne dépend pas de  $r$ . Ainsi, on peut écrire que :

$$\frac{d}{dr} = \frac{r\delta}{2} \frac{d}{d\xi} \text{ et } \frac{dF}{dr} = \frac{r\delta}{2} \frac{dF}{d\xi} \quad (\text{II.59})$$

En écrivant les différents termes de l'équation (II.54) en fonction de l'équation (II.57), on a :

$$D_r^2 F = r \left( \frac{r\delta}{2} \right) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{r} \frac{r\delta}{2} \frac{dF}{d\xi} \right) = \frac{r^2 \delta^2}{4} \frac{d^2 F}{d\xi^2} \quad (\text{II.60a})$$

$$\frac{dF}{dr} \cdot D_r^2 F = \frac{r^2 \delta^3}{8} \frac{d^2 F}{d\xi^2} \quad (\text{II.60b})$$

$$\frac{d}{dr} D_r^2 F = \frac{r\delta^2}{2} \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{r^3 \delta^3}{8} \frac{d^3 F}{d\xi^3} \quad (\text{II.60c})$$

On pose alors :

$$F^{(1)} = \frac{dF}{d\xi}, \quad F^{(2)} = \frac{d^2 F}{d\xi^2}, \quad F^{(3)} = \frac{d^{(3)} F}{d\xi^3}, \quad F^{(4)} = \frac{d^4 F}{d\xi^4}$$

Que l'on peut généraliser sous la forme :  $F^{(m)} = \frac{d^{(m)} F}{d\xi^{(m)}}$

En introduisant les termes trouvés dans les relations (II.60) dans l'équation de vorticité (II.54), nous obtenons :

$$\delta \left( F^{(1)} F^{(2)} - F F^{(3)} \right) = \frac{1}{R_e} \left( 4\delta\xi + (1-\delta)^2 \right) F^{(4)} + 8\delta F^{(2)} \quad (\text{II.61})$$

En tenant compte de la relation (II.57), obtient l'équation suivante :

$$\left( 4\delta\xi + (1-\delta)^2 \right) F^{(4)} + 8\delta F^{(3)} - 2R_e \delta \left( F^{(1)} F^{(2)} - F F^{(3)} \right) = 0 \quad (\text{II.62})$$

L'équation (II.62) est une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre 4 vérifiée par la fonction de courant par unité de longueur en fonction de la variable adimensionnelle  $\xi$ . La résolution de cette dernière équation nécessite la détermination des conditions aux limites.

### II.3.2 Conditions aux limites

Afin de pouvoir résoudre l'équation différentielle (II.62), il est important de fixer les conditions aux limites. On a alors :

$$\text{Pour } \xi = 0, F = 0, F^{(1)} = 0, \quad (\text{II.63})$$

$$\text{Pour } \xi = 1, F = -s(\delta^{-1} + 1)(1 + \sigma)^{-1}, F^{(1)} = 0 \quad (\text{II.64})$$

Le problème étant ainsi bien posé car le nombre de conditions aux limites est égale au degré de l'équation, l'utilisation des méthodes numériques est alors bien adaptée.

### II 3.3 Méthode de résolution : Méthode de Tir

La méthode de Tir est une méthode d'optimisation qui permet de transformer un problème à conditions aux limites en un problème à conditions initiales.

#### II.3.3.1 Transformation du problème aux limites en un problème à condition initiale

Sur la frontière  $\xi = 0$  on obtient deux conditions aux limites pour l'équation (II.62) vérifiée par  $F$  et  $F^{(1)}$ . On choisit ensuite arbitrairement les deux autres valeurs manquantes notées  $(u_1, u_2)$  sur la deuxième et la troisième dérivée de  $F$

Posons alors:  $F = \phi$ , en remplaçant  $F$  par  $\phi$  dans l'équation (II.62), il vient:

$$(4\delta\xi + (1 - \delta)^2)\phi^{(4)} + 8\delta\phi^{(3)} - 2R_e\delta(\phi^{(1)}\phi^{(2)} - \phi\phi^{(3)}) = 0 \quad (\text{II.65})$$

Les conditions initiales sont alors données par les relations ci-dessous :

$$\text{Pour } \xi = 0, \phi = 0, \phi^{(1)} = 0, \phi^{(2)} = u_1, \phi^{(3)} = u_2 \quad (\text{II.66})$$

La fonction  $\phi$  est déterminée en appliquant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 et le processus itératif est répété jusqu'à ce que la fonction  $\phi$  satisfasse les mêmes conditions aux limites sur la frontière supérieure  $\xi = 1$ .

Cela nécessite de définir un vecteur  $\mathbf{E}(E_1, E_2)$  dont les composantes permettent de calculer la distance à laquelle les valeurs de la fonction  $\phi$  sont satisfaites à la borne supérieure  $\xi = 1$ .

On a alors :

$$E_1(u_1, u_2) = \phi(\xi = 1) - (-s(\delta^{-1} + 1)(1 + \sigma)^{-1}) \quad (\text{II.68})$$

$$E_2(u_1, u_2) = \phi^{(1)}(\xi = 1) - 0 \quad (\text{II.69})$$

### II.3.3.2 Optimisation sur la borne supérieure

Il faut minimiser la fonction coût définie comme suit ;

$$J(u_1, u_2) = |E|^2 = E_1^2(u_1, u_2) + E_2^2(u_1, u_2) \quad (\text{II.70})$$

A cet effet, on peut appliquer l'algorithme de descente par gradient ou une autre méthode d'optimisation, comme cela a été fait par notre équipe de recherche dans les travaux antérieurs.

Dans ce travail, la procédure itérative d'optimisation sur la borne supérieure est effectuée par l'algorithme de Newton-Raphson et cela passe par le calcul de la matrice Jacobienne  $M$  tel que :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{(q+1)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^q - ([M]^q)^{-1} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.71})$$

Dans la relation ci-dessus,  $q$  représente l'indice d'itération.

Pour minimiser la fonction cout  $J$ , on applique l'algorithme d'optimisation basé sur la descente par gradient.

Partant du couple  $(u_1, u_2)$  et de l'écart  $(\delta u_1, \delta u_2)$ ,  $(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2)$  permet d'obtenir une valeur de  $E_1$  et  $E_2$  minimale. En appliquant le développement limité d'ordre un de  $E_1$  et  $E_2$  autour de  $\delta u_1$  et  $\delta u_2$  on a :

$$E_1(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2) = E_1(u_1, u_2) + \left(\frac{\partial E_1}{\partial u_1}\right)\delta u_1 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial u_2}\right)\delta u_2 \quad (\text{II.72})$$

$$E_2(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2) = E_2(u_1, u_2) + \left(\frac{\partial E_2}{\partial u_1}\right)\delta u_1 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial u_2}\right)\delta u_2 \quad (\text{II.73})$$

### II.3.3.3 Détermination des composantes de la matrice Jacobéenne

Cherchons  $E_1$  et  $E_2$ . On a :

$$E_1(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2) = 0 \quad (\text{II.74})$$

$$E_2(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2) = 0 \quad (\text{II.75})$$

Alors choisissons  $\delta u_1$  et  $\delta u_2$  on a alors

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial u_1}\right)\delta u_1 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial u_2}\right)\delta u_2 = -E_1(u_1, u_2) \quad (\text{II.76})$$

$$\left(\frac{\partial E_2}{\partial u_1}\right)\delta u_1 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial u_2}\right)\delta u_2 = -E_2(u_1, u_2) \quad (\text{II.77})$$

Cette relation peut encore se mettre sous la forme matricielle :

$$[M] \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } [M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial u_1} & \frac{\partial E_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial E_2}{\partial u_1} & \frac{\partial E_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.78})$$

Où  $[M]$  représente une matrice Jacobéenne carrée.

Alors ;

$$M_{1,1} = \frac{\partial E_1}{\partial u_1}, M_{1,2} = \frac{\partial E_1}{\partial u_2}, M_{2,1} = \frac{\partial E_2}{\partial u_1}, M_{2,2} = \frac{\partial E_2}{\partial u_2} \quad (\text{II.79})$$

C'est ainsi que le calcul des composantes nous amène à chercher les fonctions

$\frac{\partial \phi}{\partial u_2}$  et  $p = \frac{\partial \phi}{\partial u_1}$ . On pose alors :

$$p = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \text{ et } q = \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \quad (\text{II.80})$$

En concevant que

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\phi(\xi = 1)) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right)_{\xi=1} = p(\xi = 1) \quad (\text{II.81})$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) = \frac{\partial p}{\partial \xi} = p^{(1)} \quad (\text{II.82})$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial q}{\partial \xi} = q^{(1)} \quad (\text{II.83})$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial q}{\partial \xi} = q^{(1)} \quad (\text{II.84})$$

Nous remarquons que les composantes de  $M_{i,j}$  sont déjà données. On a alors :

$$M_{1,1} = p(\xi = 1), M_{1,2} = q(\xi = 1), M_{2,1} = p^{(1)}(\xi = 1), M_{2,2} = q^{(1)}(\xi = 1) \quad (\text{II.85})$$

Différencions maintenant l'équation (II.66) par rapport à  $u_1$  et à  $u_2$  On a :

$$\begin{aligned} & \left(4\delta\xi + (1 - \delta)^2\right) \left(\frac{\partial\phi^{(4)}}{\partial u_2}\right) + 8\delta \left(\frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial u_2}\right) \\ & - 2R_e\delta \left(\phi^{(2)} \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial u_2} + \phi^{(1)} \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial u_2} - \phi^{(3)} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} - \phi \frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial u_2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

$$\begin{aligned} & \left(4\delta\xi + (1 - \delta)^2\right) \left(\frac{\partial\phi^{(4)}}{\partial u_2}\right) + 8\delta \left(\frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial u_2}\right) \\ & - 2R_e\delta \left(\phi^{(2)} \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial u_2} + \phi^{(1)} \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial u_2} - \phi^{(3)} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} - \phi \frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial u_2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

Les dérivées liant  $p$  à la fonction  $\phi$  par rapport  $\xi$  sont données par les relations suivantes:

$$\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial u_1} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right) = \frac{dp}{d\xi} = p^{(1)} \quad (\text{II.88})$$

$$\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial u_1} = \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right) = \frac{d^2 p}{d\xi^2} = p^{(2)} \quad (\text{II.89})$$

$$\frac{\partial\phi^{(3)}}{\partial u_1} = \frac{d^3}{d\xi^3} \left(\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right) = \frac{d^3 p}{d\xi^3} = p^{(3)} \quad (\text{II.90})$$

$$\frac{\partial\phi^{(4)}}{\partial u_1} = \frac{d^4}{d\xi^4} \left(\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right) = \frac{d^4 p}{d\xi^4} = p^{(4)} \quad (\text{II.91})$$



$$\frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial u_1} = \frac{d^4}{d\xi^4} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) = \frac{d^4 p}{d\xi^4} = p^{(4)} \quad (\text{II.92})$$

De la même manière, on obtient celles de  $q$  à savoir :

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial u_2} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) = \frac{dq}{d\xi} = q^{(1)} \quad (\text{II.93})$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial u_2} = \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) = \frac{d^2 q}{d\xi^2} = q^{(2)} \quad (\text{II.94})$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial u_2} = \frac{d^3}{d\xi^3} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) = \frac{d^3 q}{d\xi^3} = p^{(3)} \quad (\text{II.95})$$

$$\frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial u_2} = \frac{d^4}{d\xi^4} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) = \frac{d^4 q}{d\xi^4} = q^{(4)} \quad (\text{II.96})$$

Remplaçons les relations (II.88), (II.89), (II.90) et (II.91), (II.92), (II.93) trouvées dans la relation (II.66) il vient :

$$\left(4\delta\xi + (1 - \delta)^2\right) p^{(4)} + 2\delta(4 + R_e\phi) p^{(3)} - 2R_e\delta\phi^1 p^2 - 2R_e\delta\phi^2 p^1 + 2R_e\phi^3 p = 0 \quad (\text{II.97})$$

$$\left(4\delta\xi + (1 - \delta)^2\right) q^{(4)} + 2\delta(4 + R_e\phi) q^{(3)} - 2R_e\delta\phi^1 q^2 - 2R_e\delta\phi^2 q^1 + 2R_e\phi^3 q = 0 \quad (\text{II.98})$$

Les relations (II.97), (II.98) sont appelées équations de perturbation vérifiées par  $p$  et  $q$ .

Les conditions aux limites vérifiées par  $\phi$  par rapport à  $u_1$  en  $\xi = 0$  sont données par :

$$\phi(0) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial u_1} = 0 \quad (\text{II.99})$$

Posons:  $p = \frac{\partial \phi}{\partial u_1}$

Utilisons ensuite ces dérivées pour obtenir les conditions initiales définies pour l'équation en  $p$ , on a :

$$p(0) = u_1, p^{(1)}(0) = 0, p^{(2)}(0) = u_2, p^{(3)}(0) = 1 \quad (\text{II.100})$$

$$p^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_1} [p^{(1)}(0)] = 0 \Leftrightarrow p^{(1)} = 0 \quad (\text{II.101})$$

$$p^{(2)}(0) = u_1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_1} [p^{(2)}(0)] = 0 \Leftrightarrow p^{(2)} = 0 \quad (\text{II.102})$$

$$p^{(3)}(0) = 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_1} [p^{(3)}(0)] = 0 \Leftrightarrow p^{(3)} = 0 \quad (\text{II.102})$$

On déduit de la même manière les conditions initiales pour  $q$  à savoir :

$$p(0) = 1, p^{(1)}(0) = 0, p^{(2)}(0) = 0, p^{(3)}(0) = 0 \quad (\text{II.103})$$

$$q(0) = 0, q^{(1)}(0) = 0, q^{(2)}(0) = 1, q^{(3)}(0) = 0 \quad (\text{II.104})$$

Où

$$p^{(1)} = \frac{dp}{d\xi}, p^{(2)} = \frac{d^2 p}{d\xi^2}, p^{(3)} = \frac{d^3 p}{d\xi^3}, q^{(1)} = \frac{dq}{d\xi}, q^{(2)} = \frac{d^2 q}{d\xi^2}, q^{(3)} = \frac{d^3 q}{d\xi^3}$$

### II.3.4 Composantes du champ de vitesse de l'écoulement et trajectoires des particules.

Les composantes radiale et axiale du champ de vitesse de l'écoulement sont calculées en appliquant les relations suivantes :

$$V_r = \frac{\delta}{\sqrt{4\delta\xi + (1 + \delta)^2}} \cdot F \quad (\text{II.105a})$$

$$\frac{V_z}{z} = \frac{\delta}{2} F^{(1)} \quad (\text{II.105b})$$

Pour tout écoulement stationnaire pour lequel la fonction de courant existe, les trajectoires du fluide ou les lignes de courant sont définies par l'équation suivante ;  $\psi = cte$

Dans ce travail cette équation est donnée sous la forme :  $zF\xi = cte$

A partir de la relation (II.45) et étant donné que le fluide est aspiré ou injecté à travers la paroi extérieure de la conduite les coordonnées  $(\xi_k = 1, z_k)$  en tout point de la paroi poreuse peuvent être utilisées pour dériver l'équation de la ligne de courant passant par le point considéré. Par conséquent les lignes de courant sont définies comme des courbes du plan médian  $(\xi, z)$  donc l'équation est donnée par la relation ci-dessous :

$$z = \frac{z_k F(1)}{F(\xi)} \text{ pour } F(\xi) \neq 0, z \geq 0 \quad (\text{II.106})$$

Dans ce chapitre, il a été question pour nous de déterminer les équations pouvant conduire à la résolution du problème posé dans ce travail. A cet effet, à partir des équations de Navier-Stokes, nous avons déterminé l'équation de vorticité, puis en appliquant la méthode des solutions semblables, la fonction de

Le courant par unité de longueur est déterminée pour plusieurs valeurs du gradient de pression externe sans dimension. Les profils de la composante radiale et axiale du champ de vitesse de l'écoulement sont déduits et la contrainte de cisaillement sur des deux parois du cylindre est étudiée en fonction du gradient de pression externe adimensionnel, pour un nombre de Reynolds et un rapport de gap de l'entrefer fixés. Cette technique de résolution que nous avons mise sur pied nous permet ainsi d'automatiser notre problème dont les résultats sont consignés au chapitre suivant.

# CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION

---

Dans ce chapitre, nous présentons graphiquement les résultats obtenus à partir de l'étude numérique permettant d'étudier et d'analyser les effets d'un gradient de pression externe constant de l'écoulement considéré. Nous présentons ensuite les profils de la fonction de courant par unité de longueur, des lignes de courant de la trajectoire des particules fluides, la composante radiale et axiale du champ de vitesse en fonction des paramètres définis dans ce problème et les contraintes de cisaillement sur les deux parois des cylindres. Après analyse et interprétation des courbes obtenues, nous donnerons une conclusion.

### III.1. REMARQUES PRELIMINAIRES

Les calculs sont effectués pour différentes valeurs du gradient de pression externe constante sans dimension  $\sigma$ , du nombre de Reynolds  $R_e$  et du rapport de gap  $\delta$  fixés tels que :  $R_e = 2$  et  $\Delta\xi = 10^{-2}$ . Pour les exigences de convergence des algorithmes de Runge-Kutta et Newton-Raphson, 101 valeurs discrétisées sont adoptées pour le paramètre  $\xi$ , formant 100 intervalles de même longueur  $j_{\min} \approx 10^{-25}$ . Le critère d'arrêt que nous avons appliqué pour la procédure d'optimisation de Newton-Raphson permet de réduire la fonction coût  $J$  définie dans le chapitre II à la valeur minimale  $j_{\min} \approx 10^{-25}$ . Cela prouve la haute précision qu'offre la méthode de tir que nous avons utilisée, l'objectif étant de réduire  $J$  à zéro.

La compréhension de la physique du problème dérivant des résultats sont obtenus et tracés à l'aide du logiciel Matlab. Ces résultats sont discutés en considérant divers aspects de l'écoulement à savoir : la fonction de courant par unité de longueur de la conduite, les lignes de courant, les composantes radiale et axiale du champ de vitesse de l'écoulement et la contrainte de cisaillement sur les deux parois.

III.2 FONCTION DE COURANT PAR UNITE DE LONGUEUR DE LA CONDUITE.

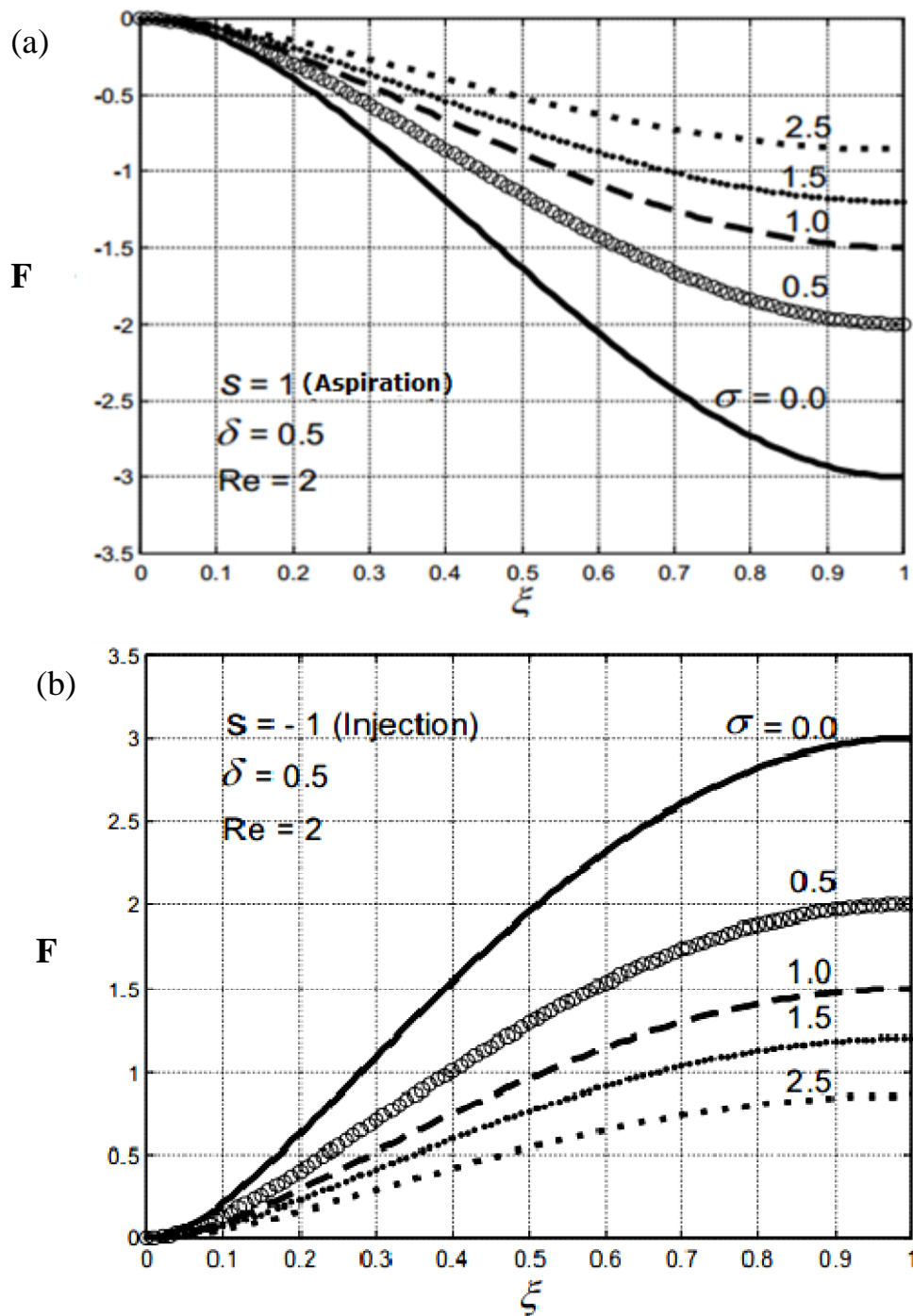


Figure 5 : Fonction de courant par unité de longueur de la conduite pour différentes valeurs du gradient de pression externe adimensionnelle : (a) aspiration ; (b) injection.

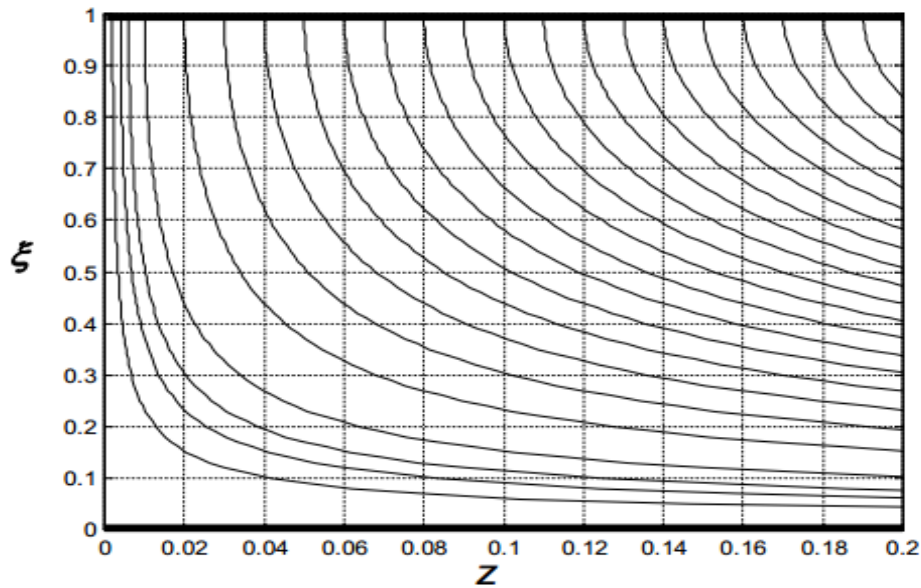
A partir de la méthode numérique utilisée basée sur la méthode de tir expliquée dans le chapitre II, les valeurs de la fonction de courant  $F$  par unité de longueur de la conduite ont été calculées. Ces valeurs sont tracées en fonction de la position de toute couche de fluide ; pour l'aspiration (figure 5a) et l'injection (Figure 5b), et pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension. Comme le montrent les figures (5a) et (5b), on constate que les valeurs absolues de  $F$  sont positives pour l'aspiration et négatives pour l'injection. Dans les deux cas de figure, les valeurs absolues de  $F$  décroissent quand  $\sigma$  augmente. Pour une valeur du gradient de pression adimensionnel donnée, ces valeurs absolues de  $F$  augmentent aussi bien pour l'aspiration que pour injection. On constate que dans les deux cas de figures,  $F$  ne change pas de signe. Ceci vient tout simplement confirmer Du point de vue physique, cela signifie l'absence de l'écoulement inverse dans le fluide.

En examinant simultanément la figure 5a et la figure 5b, on observe que  $F$  ne change pas de signe lorsque le fluide change de direction, selon que le fluide soit aspiré ou injecté dans la conduite. Cela mène à la conclusion selon laquelle il n'y a pas l'écoulement inverse dans le fluide si la fonction de courant par unité de longueur de la conduite change de signe pour un gradient de pression externe constant donné. Par ailleurs, lorsque le signe la fonction de courant par unité la longueur reste inchangé, cela confirme qu'aucun écoulement inverse ne se produit dans le fluide.

On remarque aussi que les valeurs de  $F$  pour l'aspiration sont symétriques par rapport à celles obtenus pour l'injection, comme on le voit sur les figures 5a et 5b. Cela signifie que les lignes de courant dans les deux cas sont identiques.



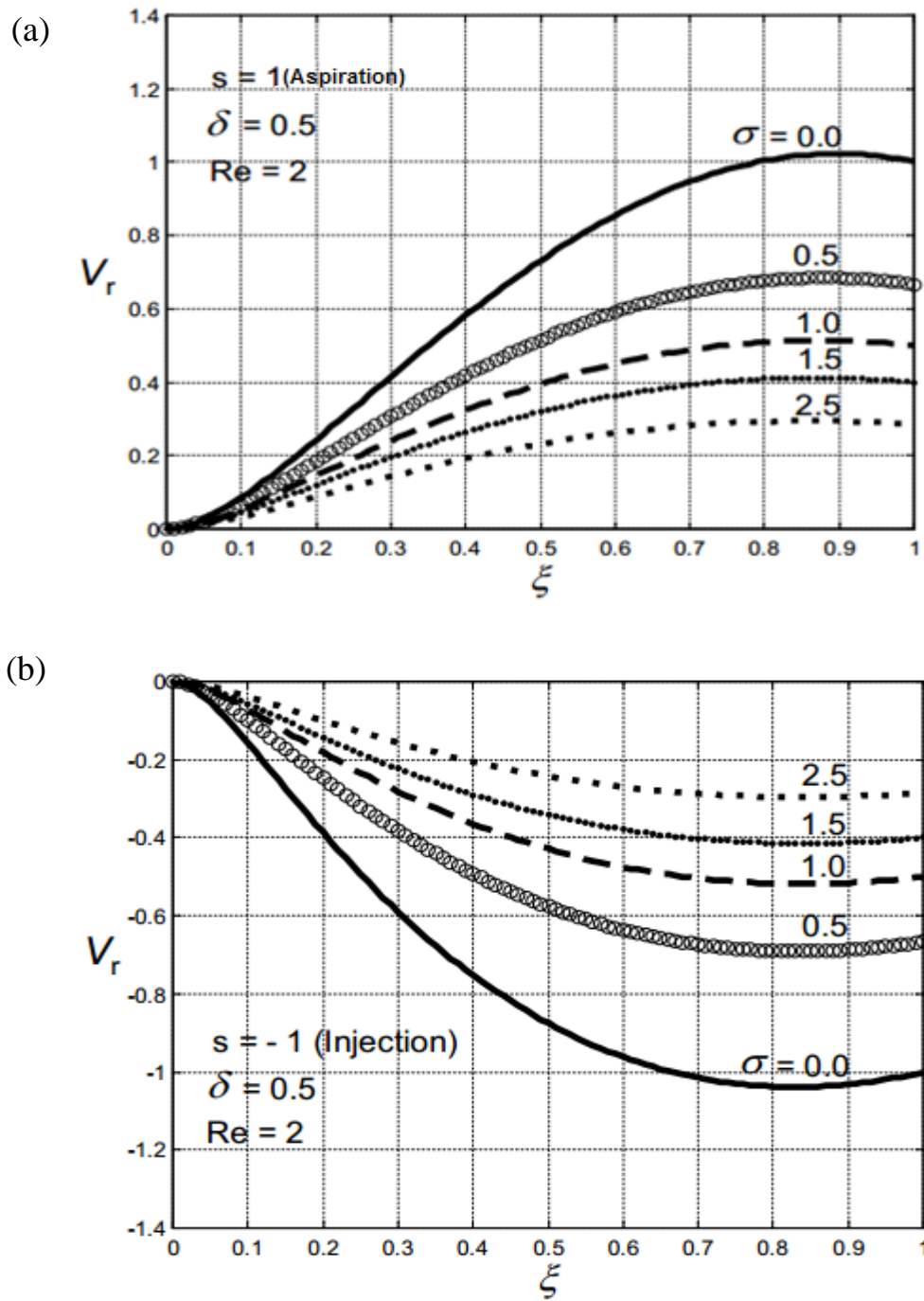
### III.3. LIGNES DE COURANT OU TRAJECTOIRE DES PARTICULES



**Figure 6** : Lignes de courant pour l'aspiration et l'injection pour  $\sigma = 1$  .

La figure 6 montre un échantillon d'écoulement formé par diverses lignes de courant de l'écoulement considéré, pour un gradient de pression externe adimensionnel, avec  $\delta = 0.5$ ,  $Re = 2$ , et  $\sigma = 1$ . Ces lignes de courant convergent et se terminent en plusieurs points  $Z_K$  de la paroi poreuse. Pour l'aspiration le gradient de pression axiale constant est positif, et les lignes de courant quittent la paroi poreuse. Alors que dans le cas de l'injection le gradient de pression externe constant adimensionnel est négatif sur toutes les couches fluides. Comme le montre la figure 6, le tracé confirme qu'il n'y a pas d'écoulement inverse dans le fluide. Cela conduit à la compréhension physique que l'action de traînée de toute couche fluide exercée sur les particules du fluide est favorable aux effets du gradient de pression imposé aux extrémités des cylindres.

### III.4. COMPOSANTES RADIALE ET AXIALE DU CHAMP DE VITESSE



*Figure 7 : Profil de la composante radiale du champ de vitesse pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension : (a) aspiration ; (b) injection*

Les composantes radiale et axiale des vitesses d'écoulement sont tracées en fonction de  $\xi$  obtenues à partir de la fonction de courant par unité de longueur. Selon que la paroi poreuse subit une aspiration ou une injection, les valeurs de  $V_r$  et  $V_z$  seront positifs et négatifs. Pour l'aspiration,  $V_z > 0$  et  $V_r < 0$ , comme le montrent les figures 7a et 8a. Les figures 7b et 8b montrent lorsque la paroi poreuse subit une injection, les valeurs de la composante radiale du champ de vitesse sont positives lorsque la paroi subit l'aspiration, alors qu'elles sont négatives lorsque celle-ci subit l'injection. Lorsque  $\sigma$  croit, cela signifie que la valeur absolue de la composante radiale du champ de vitesse décroît sur toutes les couches fluides. Ces profils montrent qu'il y a existence des couches fluides près de la paroi poreuse qui ont une vitesse radiale supérieure à la vitesse d'aspiration ou d'injection. Ceci est observé aussi pour la composante axiale lorsque  $V_r < 0$  et  $V_z > 0$  pour l'injection. Ce résultat est conforme au fait que le signe des composantes radiales et axiales du champ de vitesse dans la conduite détermine le sens du déplacement du fluide le long des lignes de courant et indiquent si le mouvement est une aspiration ou une injection. Comme on le voit sur les figures (7a) et (7b), le tracé correspondant à la valeur  $\sigma$  qui définit l'absence du gradient de pression externe mis en évidence les couches fluides que nous avons nommées (FL) ( $0.7 < \xi < 1$ ), dont la vitesse radiale dépasse la vitesse d'aspiration ou d'injection.

Ce phénomène intéressant a déjà été observé par Dauenhauer et Majdalani [10] lorsqu'ils ont étudié l'écoulement dans un canal poreux avec des parois qui se contractent ou se dilatent avec aspiration ou injection uniforme au niveau des parois. Les couches fluides considérées sont situées à proximité de la paroi poreuse comme on le voit sur les figures (7a) et (7b). Cela est dû à la condition d'adhérence sur la paroi imperméable qui empêche l'action du gradient de

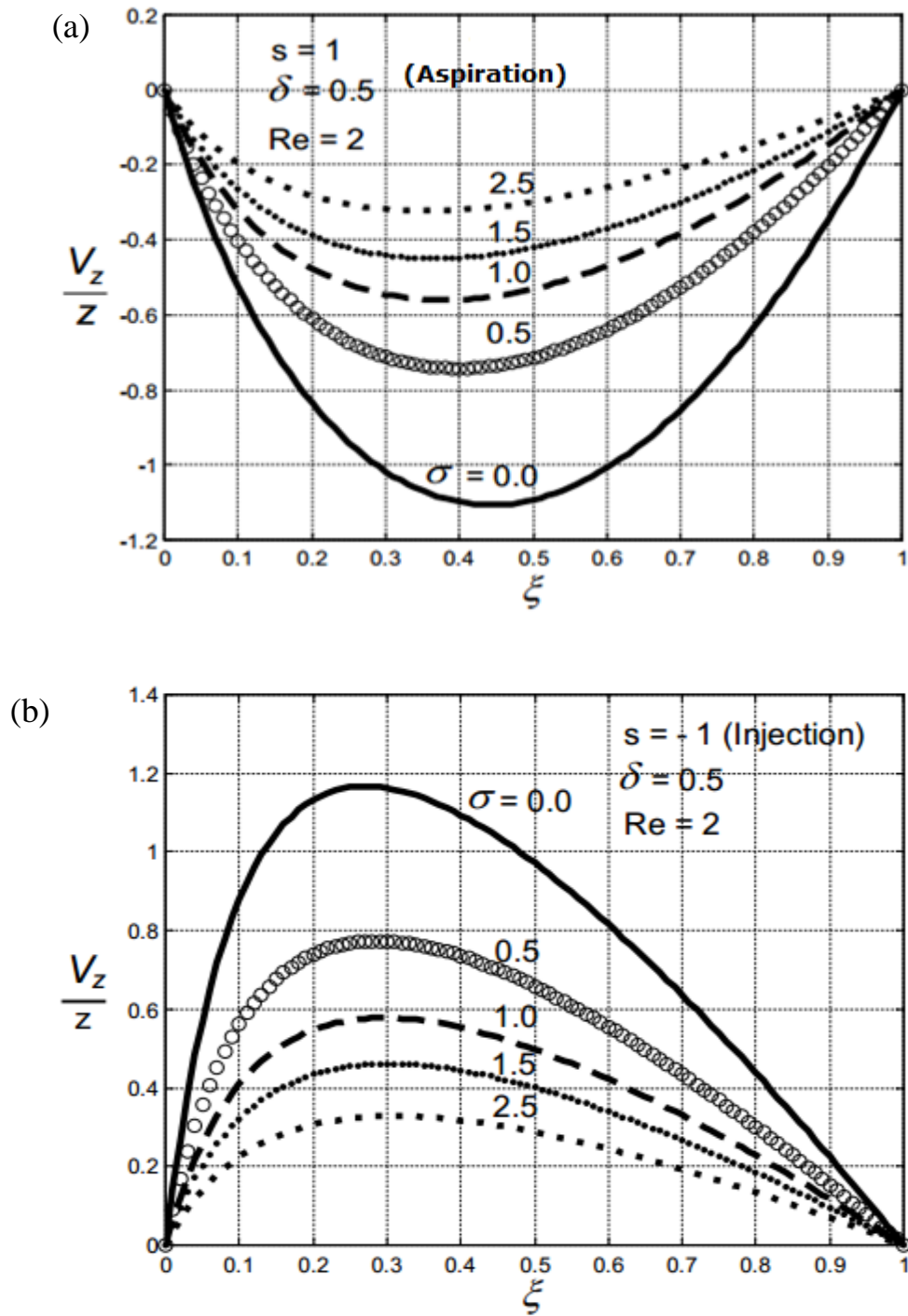
pression externe favorable sur les particules fluides au voisinage de la paroi imperméable.

Lorsque le gradient de pression externe sans dimension augmente à partir de la valeur 0, la force de pression agissant sur deux extrémités de la conduite augmente également et le fluide subit un gain de quantité de mouvement qui devrait augmenter la vitesse absolue d'aspiration ou d'injection.

Pour garder cette vitesse constante, le fluide crée à l'aide de sa viscosité une contrainte de cisaillement agissant sur les couches fluides. Ces forces de frottement supplémentaires sont plus intenses que les forces d'inertie provenant du gain de quantité de mouvement fourni par l'augmentation de la force axiale du gradient de pression imposée aux deux extrémités de la conduite.

Par conséquent, les particules de fluides dont la vitesse est la plus lente augmente en nombre et en masse. L'argument ci-dessus explique pourquoi lorsque  $\sigma$  augmente, les valeurs absolues des vitesses radiale et axiale diminuent pour toute couche de fluide comme le montrent les figures (7a) et (8a), et c'est pourquoi les couches fluides ont tendance à disparaître avec des valeurs croissantes de  $\sigma$ , comme le montrent les figures (5a) et (5b).

Le même argument explique aussi pourquoi le débit massique diminue au fur et à mesure que  $\sigma$  augmente, comme le montrent le tracé de la fonction de courant présenté dans les figures 5a et 5b



**Figure 8 :** Profil de la composante axiale de la vitesse d'écoulement pour différentes valeurs du gradient de pression externe sans dimension : (a) l'aspiration ; (b) injection

A l'aide des arguments précédemment donnés pour le comportement des profils de la vitesse radiale, on comprend du point de vue physique, les raisons pour lesquelles le phénomène mis en évidence par les couches fluides n'est pas observé pour la vitesse axiale en fonction du gradient de pression externe adimensionnel, comme le montrent les profils présentés dans les figures (8a) et (8b). La raison physique est la suivante : La vitesse axiale s'annule sur la paroi imperméable, contrairement à la vitesse radiale. Ainsi si la vitesse axiale était seule, son profil serait parabolique comme dans l'écoulement de Hagen-Poiseuille. Dans une telle configuration, il n'y a pas de couches fluides comme celles présentées dans les figures (7a) et (7b). En raison de la conservation de la masse dans laquelle la vitesse radiale doit exister, le profil de vitesse axiale présente les formes spécifiques sur les figures (8a) et (8b), formes dans lesquelles le profil parabolique attendu n'est pas observé la composante axiale présente un minimum pour l'aspiration et un maximum pour l'injection. Les figures (8a) et (8b) permettent de déduire des informations physiques sur les couches limites au voisinage des cylindres intérieur et extérieur. Puisque la vitesse radiale ne dépend pas de la vitesse axiale selon l'hypothèse de la solution semblable, le comportement des couches limites est déduit par le seul gradient de vitesse axiale dans la direction radiale. À cet égard, les figures (8a) et (8b) peuvent être exploitées.

Pour une valeur donnée du gradient de pression externe adimensionnel, la figure 8a qui correspond au cas de l'aspiration montre que la valeur absolue du gradient  $\frac{\partial V_z}{\partial \eta}$  à l'intérieur du cylindre est presque égale à celle du même gradient au cylindre extérieur, pour toute valeur de  $\sigma$ . Cela conduit à conclure que l'épaisseur des couches limites et les effets de viscosité au voisinage des deux

cylindres sont presque égaux. Lorsque le gradient de pression externe constant augmente à partir de la valeur 0, l'épaisseur des deux couches limites diminue ainsi que les effets de la viscosité. Cela s'explique par le fait que la valeur absolue du gradient  $\sigma$  aux deux cylindres diminue à mesure que  $\sigma$  augmente, comme le montre la figure 8a.

Pour le cas de l'injection, on obtient des résultats différents. La figure (8b) montre que, pour une valeur donnée du gradient de pression externe constant, la valeur absolue du gradient de vitesse ci-dessus au cylindre intérieur est très grande par rapport à celle du cylindre extérieur. A partir de la figure (8b), on peut également voir que la valeur absolue de ce gradient de vitesse diminue au fur et à mesure que  $\sigma$  augmente. Ainsi, dans le cas de l'injection, on conclut alors que l'épaisseur de la couche limite au voisinage du cylindre intérieur ainsi que les effets de viscosité sur ce cylindre, sont très importants par rapport à celui évalué pour le cylindre extérieur. De plus, comme dans le cas de l'aspiration, l'épaisseur de la couche limite et les effets de la viscosité diminuent pour des valeurs croissantes de  $\sigma$ .

### **III.5 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT AU NIVEAU DES DEUX CYLINDRES.**

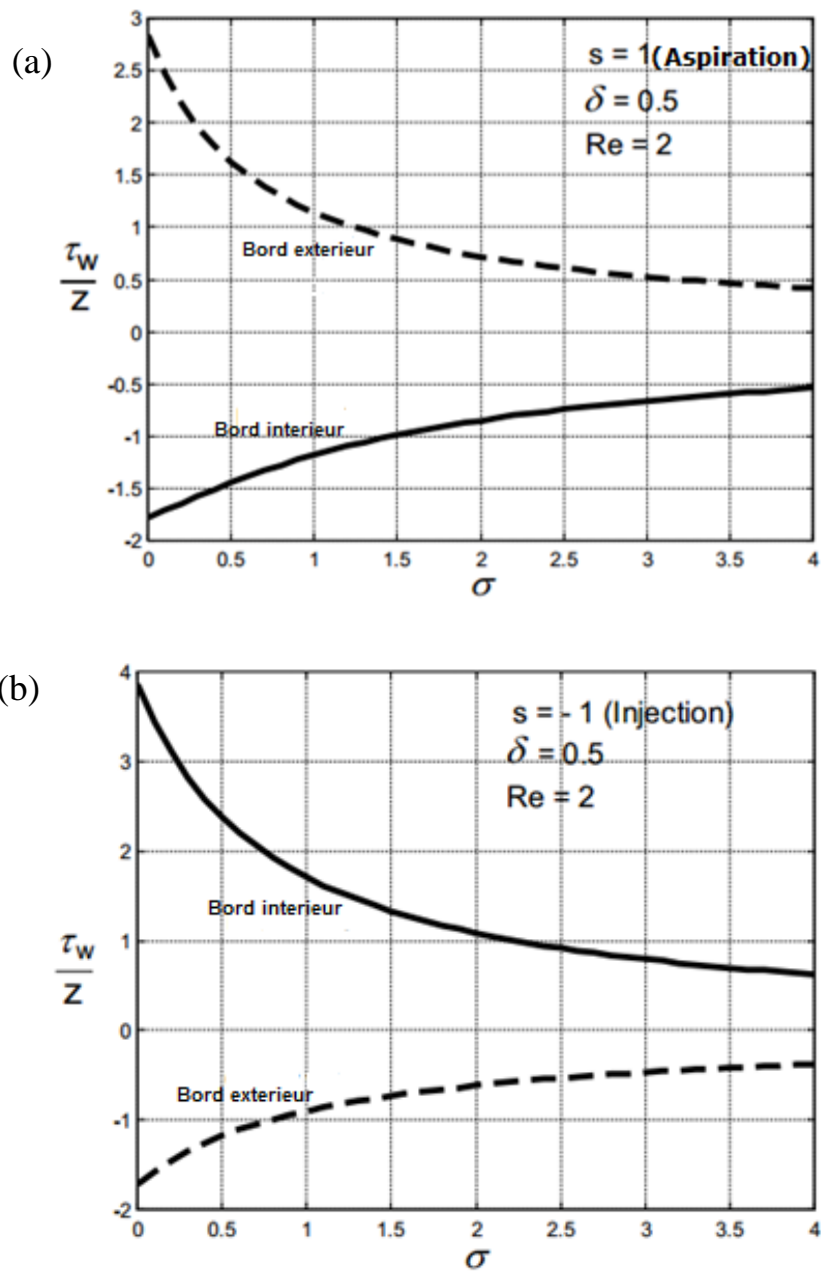
Les valeurs de la contrainte de cisaillement sans dimension pour les deux parois sont tracées dans les figures (9a) pour l'aspiration et (9b) pour l'injection. Les figures 9a et 9b montrent un comportement opposé des profils des contraintes pariétales pour les cylindres interne et externe selon qu'il s'agit de l'aspiration ou de l'injection. Dans le cas de l'aspiration (figure 9a), la valeur absolue de la contrainte pariétale sur le cylindre intérieur croît alors que sur le cylindre extérieur, elle décroît lorsque  $\sigma$  croît. Dans le cas de l'injection c'est-à-dire

sur la figure 9b c'est plutôt la contrainte pariétale sur le cylindre extérieur qui croit alors que celle du cylindre intérieur décroît, lorsque  $\sigma$  croit.

Pour des valeurs croissantes du gradient de pression axiale constant sans dimension, la valeur absolue de la contrainte de cisaillement sur les parois diminue, comme le montrent les figures (9a) et (9b). Ces figures montrent les comportements opposés des contraintes de cisaillement sur les parois extérieure et intérieure selon l'aspiration ou l'injection. En cas d'aspiration, la valeur absolue de la contrainte de cisaillement pour la paroi intérieure varie entre 0,5 et 1,80 alors qu'elle varie entre 0,5 et 2,80 pour l'extérieur.

Dans le cas de l'injection, les limites de la valeur absolue de la contrainte de cisaillement pour la paroi extérieure sont presque identiques à celles obtenues pour la paroi intérieure dans le cas précédent. Pour la paroi intérieure, cette valeur absolue varie entre 0,7 et 4. Les résultats obtenus dans les figures (9a) et (9b) confirment ceux obtenus dans Les figures (8a) et (8b) pour les couches limites au voisinage des deux parois.





**Figure 9 :** Contrainte de cisaillement sur les deux parois en fonction de la pression externe sans dimension et du gradient  $\sigma$  : (a) aspiration ; (b) injection

Les interprétations physiques qui résultent du tracé des figures (9a) et (9b) sont identiques à celles qui ont été expliquées dans le commentaire de la courbe précédente en ce qui concerne l'épaisseur de la couche limite sur la frontière et les effets de viscosité.

# CONCLUSION GENERALE

---

## Conclusion Générale

---

Dans de ce travail, on retrouve l'un des grands enjeux auxquels est confronté la communauté scientifique de la Mécanique des Fluides, c'est-à-dire l'étude d'un écoulement laminaire newtonien incompressible en milieux poreux ou semi poreux. Les écoulements en milieux poreux présentent de nombreuses applications dans de nombreux domaines de l'industrie notamment dans l'ingénierie thermique des procédés tels que ceux comportant des cylindres chauffants ; les procédés d'aspiration et d'injection au niveau les parois délimitant un domaine fluide, soumis à un gradient de pression axiale fournie par une pompe ; dans l'ingénierie aérospatiale à travers le processus de refroidissement des moteurs d'avions et fusées.

Le travail effectué dans ce mémoire consiste à déterminer et à étudier les effets d'un gradient de pression externe axial constant appliqué aux deux extrémités de la conduite annulaire semi poreuse formée par deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur étant imperméable. Le fluide est injecté ou aspiré à travers la paroi externe sous une vitesse constante, orthogonalement aux parois. Le problème à étudier dépend alors de trois paramètres : le rapport de gap, le gradient de pression axial constant sans dimension et le nombre de Reynolds défini à partir de la somme de la vitesse transversale et la vitesse maximale de Hagen-Poiseuille.

A partir de l'équation de conservation de la masse et de la quantité de mouvement qui conduisent aux équations de Navier- Stokes, nous avons obtenu l'équation de vorticité qui exige l'existence d'un champ de vitesse dont la divergence est nulle. Nous avons appliqué ensuite la méthode de solutions semblables basée sur l'hypothèse pionnière de Berman, et avons transformé l'équation de vorticité adimensionnelle obtenue en une équation différentielle ordinaire non linéaire de quatrième ordre avec deux conditions aux limites sur

chaque paroi. La méthode de tir comprenant l'algorithme de Runge-Kutta et l'algorithme d'optimisation de Newton-Raphson est utilisée dans le but de minimiser au mieux la fonction cout définie dans notre travail.

Les résultats très intéressants obtenus dans ce travail peuvent ainsi être résumés comme suit :

- Le nombre de Reynolds construit à partir de la somme de la vitesse absolue d'aspiration ou injection et la vitesse maximale de Hagen-Poiseuille déduite à partir du gradient de pression constant a été défini comme suit :

$$\text{Re} = \left( V + \frac{h^2}{4\rho\nu} \frac{|P_L - P_0|}{L} \right) \frac{h}{\nu}$$

- En gardant  $h$  et  $\delta$  ou  $\sigma$  constants, le gradient de pression constant imposé entre les deux parois des cylindres est rendu sans dimension. Ce qui permet de définir un gradient de pression adimensionnelle axiale constant donné par la relation :

$$\sigma = \frac{|P_L - P_0|}{4\rho\nu} L^{-1} \frac{h^2}{V}$$

- A cause de l'action de ce gradient de pression externe favorable, aucun écoulement inverse ne se produit dans la conduite annulaire semi poreuse.
- La condition de non glissement sur la paroi imperméable empêche l'action de ce gradient de pression externe sur les couches fluides situées près de cette paroi.

---

## Conclusion Générale

---

- En l'absence du gradient de pression externe ( $\sigma=0$ ), l'écoulement présente des couches fluides situées près de la paroi poreuse et ayant une vitesse radiale qui dépasse la vitesse d'aspiration ou injection. Ces couches fluides ont tendance à disparaître lorsque  $\sigma$  augmente. Pour garder cette vitesse constante, le fluide à l'aide de sa viscosité crée un cisaillement fractionnel antagoniste agissant sur les couches fluides. Ces forces de frottement supplémentaires sont plus intenses que les forces d'inertie provenant du gain de quantité de mouvement fourni par l'augmentation de  $\sigma$ .
- Quand le gradient de pression externe augmente, les particules fluides ayant la vitesse la plus lente augmentent en nombre et en masse.
- Lorsque  $\sigma$  décroît, les composantes radiale et axiale du champ de vitesse de l'écoulement diminuent pour toute couche de fluide.
- Lorsque le fluide est aspiré à travers la paroi externe, l'épaisseur des couches limites et les effets de viscosité au voisinage des deux cylindres sont presque égaux, pour n'importe quelle valeur du gradient de pression externe sans dimension.
- Lorsque la paroi externe poreuse subit l'injection, l'épaisseur de la couche limite au voisinage du cylindre intérieur, ainsi que les effets de viscosité au niveau de ce cylindre, sont très grande par rapport à celles évaluées pour le cylindre extérieur, pour toute valeur de  $\sigma$ .
- Dans le cas de l'injection ou de l'aspiration, l'épaisseur des deux couches limites diminue ainsi que les effets de la viscosité au fur et à mesure que le gradient de pression externe adimensionnelle  $\sigma$  augmente à partir de sa plus petite valeur 0.

---

## Conclusion Générale

---

Le présent travail constitue une étape préliminaire et nécessaire pour les travaux ultérieurs dans lesquels nous allons examiner :

L'influence du rapport de gap et celle du nombre de Reynolds. Ceci nous permettrait de saisir d'autres informations physiques sur la richesse profonde de la structure de cet écoulement laminaire. Nous pourrions envisager par exemple d'examiner le cas où le rapport de l'écartement entre les deux cylindres et le nombre de Reynolds varient pour étudier la transition laminaire-turbulent de cet écoulement.

# **BIBLIOGRAPHIE**

---

---

- [1] A. S. Berman, “*Laminar flow channels with porous wall*”, J. Appl. Phys. vol 24, 1232-1235 (1953).
- [2] S. W. Yuan, A B. Finkelstein, “*Stability of pipe flow with blowing*”, Trans. ASME vol.78, 719- 727 (1956).
- [3] R. M Terrill, P. W. Thomas, “*on laminar flow through a uniformly porous pipe*”, *App. Sci. Rés. Vol. 21*, 37-67 (1969).
- [4] J. F. Brady, A. Acrivos, “*Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes with Reverse Flow*”, *J. FluidMech.*, vol. 112, 127-150 (1981).
- [5] S. Uchida, H. Aoki, “*Unsteady flow in a semi –infinite contracting or expanding pipe*”. *J. Fluid Mech. Vol. 82*, 371-387 (1977).
- [6] P. Watson, W. H. H. Banks, M. B. Zaturka, P. G. Drazin,” *Laminar channel flow driven by accelerating walls*”, *Eur. J. Appl. Math. Vol. 2*, 359 (1991).
- [7] M. Goto, S. Uchida, *Unsteady flow in a semi –infinite contracting or expanding pipe with injection through wall*”, *Trans. Jnp Soc. Aeronaut. Space Sci. Vol. 33*, 14 (1990).
- [8] M. Ghaffar, K. Ali, A. Yasmin, M. Ashraf, “*Unsteady flow between two orthogonally moving porous disk*”, *J. Mech.*, vol. 31, 2, (2015).
- [9] S. T. Mohyud-Din, A. Yıldırım, S. A. Sezer,” *Anlytical approach to a slowly deforming channel with weak permeability*”, *Z. Naturforsch.vol. 65a*, pp1033 – 1038, (2010)



- [10] E. C. Dauenhauer, J. Majdalani, ‘*Exact self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls*’, *Phys. Fluids*. Vol. 15, no. 6, pp.1485- 1495 (2003)
- [11] W. A. Robinson, ‘*The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls*’, *J. Eng. Math.*, vol. 10, no. 1, pp 23-40,(1976).
- [12] W. H. H. Banks, M. B. Zaturka, ‘*On flow through a porous annular pipe*’, *Phys. Fluids A* vol.4, no.6, pp. 1131-1141, (1992).
- [13] M. B. Zaturka, W. H. H. Banks, ‘*New solutions for flow in a channel with a porous walls and/or non-rigid wall*’, *Fluid Dynam. Res*, vol 33, pp. 57-71 (2003).
- [14] S. Tsangaris, D. Kondaxakis, N. W. Vlachakis, ‘*Exact solution for flow in a porous pipe with unsteady wall suction and/or injection*’, *Commun Nonlinear Sci.*, vol12, pp. 1181-1189, (2007)
- [15] G. C. Dash, K. L. Ojha, *Viscoelastic hydro magnetic flow between two porous parallel plates in the presence of sinusoidal pressure gradient*’, *Alex. Ing. J.* 57, 4, 3463-3471 (2018).
- [16] R. N. Barik, G. C. Dash, P. K. Rath, ‘*Steady laminar MHD flow of viscoelastic fluid through a porous pipe embedded in a porous medium*’, *Alex. Ing. J.* vol 57, no. 2, pp. 973-982, (2018).
- [17] L. Durlofsky, J. F. Brady, ‘*The spatial stability of a class of similarity solutions*’, *Phys. Fluids* vol. 27, p. 1068, (1984).

- [18] G. Casalis, G. Avalon, J.-P. Pineau, ‘‘*Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls*’’, *Phys. Fluides* vol.10, p. 2558, (1998).
- [19] S. Ferro, G. Gnani, ‘‘*Spatial instability of similar solutions for viscous flows in channel with porous walls*’’, *Phys. Fluids*, vol.12, no. 4, pp.797-802, (2000).
- [20] J. Griffond, G. Casalis, ‘‘*On the nonparallel stability of the injection induced two dimension Taylor flow,*’’, *Phys. Fluides*, vol.13, p. 1635 (2001).
- [21] B. Bhandari, ‘‘*In handbook of industrial drying*’’ A. S. Mujumdar, Ed., Boca Raton, CRC, (2015).
- [22] J. Cellier, ‘‘*Heating cylinder for products such as films, foils, slabs or the likes*’’, EP0200658B1, European Patent Office, (1988).
- [23] H. W. Press, A. S. Teukolsky, T. W. Vetterling, P. B. Flannery, ‘‘*Numerical Recipes in Fortran*’’, 2<sup>nd</sup>ed, Cambridge, (1992).
- [24] I. Mahariq, A. Erciyas, ‘‘*A spectral element method for the solution of magneto static fields T*’’, *J. Electr. Ing. And comput. Sci.* Vol. 25, no. 4, pp. 2922-2932, (2017).
- [25] G. K. Batchelor, ‘‘*An Introduction to Fluid Dynamics*’’, Cambridge Cambridge University Press, (1967).
- [26] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, New-York, McGraw-Hill ‘‘*Series in Mechanical Ingénierie*’’, (1968).
- [27] S. Goldstein, ‘‘*Modern developments in Fluid Dynamic*’’, Vol. 1, New-York, Dover Publications Inc. (1965).

- [28] N. R. Makon, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, Y. C. Mbono Samba, E. Pemha, “*On the existence and determination of the incompressible laminar flow located in the polar plane of a porous annular pipe*”, *Alex. Eng. J.* (2021). <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.08.046>
- [29] E. Pemha, “*Markovian model for the propagation of a light wave in a heated turbulent jet of air*”, PhD Thesis, Ecole centrale of Lyon, (France) (1990).
- [30] E. Ngo Nyobe, “*A new laser-based diagnostic technique using genetic algorithm for the optical and thermal turbulence in a hot jet air*’ PhD, Thesis Yaounde, Applied Mechanics Laboratory of the Faculty of Sciences, University of Yaounde I (2008).
- [31] E. Pemha, B. Gay, A. Tailland, “*Measuring of the diffusion coefficient in a heated plane airstream*”, *Phys. Fluids A*, vol. 5, pp. 1289-1295, (1993).
- [32] E. Ngo Nyobe, E. Pemha, “*Shape optimization using genetic algorithms and beam propagation for the determination of the diffusion coefficient in hot turbulence jet air*”, *Prog. Electromagnet. Res. B*, vol. 4, pp.211-221, (2008).
- [33] E. Pemha, E. Ngo Nyobe, “*Genetic algorithm approach and experimental confirmation of a laser based diagnostic technique for the local thermal turbulence in a hot wind tunnel jet*”, *Prog. Électromagn. Res. B*, vol. 28, pp. 325-350, (2011).
- [34] M. Lamara, E. Ngo Nyobe, E. Pemha, “*Engineering laser-based diagnostic in a hot wind tunnel: measurement of the temperature structure coefficient by using and optimization technique*”, *Prog. Électromagn. Res. M*, vol. 74, pp. 93-103 (2018).

- [35] G. N. Vander plats, '*Numerical Optimization Technique Engineering Design and Applications*', New-York, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, (1984).
- [36] Jean Leonard Marie Poiseuille, '*Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petites diamètre*' ; imprimerie royale, (1844).
- [37] Georges Gabriel Stokes, '*On the theories of the internal friction of fluids in motion, and on the equilibrium and motion of elastic solids*', transactions of the cambridge philosophical society, vol.8, p.287-305.
- [38] A. N. Kolmogorov, '*On the generation of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid*', Doklady Akademii Nauk, vol.31, 1941, p.319-323.
- [39] Von Karman, T.H.L. Rubach. '*On the Mechanisms of fluid resistance*', physics Z, Ol vol.13, pp.49-67,(1912)
- [40] Leonard Euler '*Principes généraux du mouvement des fluides*' Nouveaux memoires de l'Academie Royale des sciences et des belles lettres de berlin, vol.11, (1757).
- [41] Viollet, P.L.J.P, Chabard, and P Esposito, '*Mécanique des fluides appliquée : écoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières autour des structures et dans l'environnement*'. Presses des ponts (2003).
- [42] Batchelor, G.K, An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, (2000)
- [43] Morgan, B. '*Mécanique des fluides*'. Résumé de cours, Ecole Normale Supérieure de Cachan, (2009)

- [44] M. Couette, ‘*Etudes sur les frottements liquides*’ Ann. Chm. phys , 21 serie, vol.6, p. 433-510.
- [45] Guyon, E. J. P. Hulin, and L. Petit ‘*Hydrodynamique physique. inter Editions/Editions*’. EDP Sciences/CNRS Editions 5.7 5 (2001).
- [46] O. Reynolds, ‘*An experimental investigation of the circumstances which determine wheter the notion of water. Shall be direct of sinuous, and of the law of resistance in parallel chanel*’, phylosophical transaction of the society vol cl xxxv, (1895).
- [47] A.J. Chorin. ‘*A numerical methode for solving incompressible viscous flow problem*’. *Journal of computational physics*. (1967).
- [48] G. Bayada and M.Chambat. ‘*The transition between the stokes equation and the reynolds equation*’ : a mathematical proof. Applied Mathematics and Optimization, (1986).
- [49] F. Boyer and P Fabrie. ‘*Elements d’analyse pour l’etude de quelques modeles d’écoulement de fluides visqueux incompressibles*’. Springer, (2006).
- [50]J.M Adam, S.M. Fielding; and P.D. Olmsted.‘*The interplay between boundary condition and flow geometries in shear banding : Hysteresis*’, band configurations and surface transitions. *Journal of Non-Newtonian Fluid mechanic*; (2008).
- [51] J.M. Adams and P.D. Olmsted. ‘*A non-monotonic constitutive model is not necessary to obtain shear banding phenomena in entangled polymer solutions*’. *Physical Reviewletters*, (2009).

---

---

**Publication**

---

---

---

---

**PUBLICATION**

---

---

**PUBLICATION**

---

---

Guy Leopold Mbogba, Elisabeth Ngo Nyobe\*, Maurice Lamara, Yves Christian Mbono Samba and Elkana Pemha

# Effects of an external constant pressure gradient on a steady incompressible laminar flow through a semi-porous annular pipe

<https://doi.org/10.1515/zna-2021-0257>

Received September 4, 2021; accepted October 25, 2021;

published online November 11, 2021

**Abstract:** In this paper, we examine a steady laminar flow for an incompressible fluid located in a semi porous annular pipe and subjected to a favorable constant pressure gradient applied between the two borders of the pipe. The inner wall is impermeable and the fluid is sucked or injected at the outer wall at constant and uniform velocity, orthogonally to the wall. The problem under study depends on three parameters: the pipe gap ratio, the dimensionless external pressure gradient, and the Reynolds number defined from the sum of the suction or injection velocity and the maximum Hagen–Poiseuille velocity. The conservation of mass induces the zero-divergence velocity field which allows replacing the steady-flow Navier–Stokes equations with a single equation satisfied by the stream function and called the vorticity equation. Assuming the similarity-solution hypothesis, the problem under consideration is reduced to a fourth-order nonlinear ordinary differential equation with two boundary conditions at each wall. The numerical shooting technique including the Runge–Kutta algorithm and the Newton–Raphson optimization method is applied to obtain the solution for the steady flow. For various values of the dimensionless external pressure gradient, the profiles of the velocity components are found and investigations on the wall shear stress for both walls are performed. The results obtained are discussed and physical understandings for the problem studied are derived.

**Keywords:** laminar flows in semi porous annular pipes; Newton–Raphson optimization algorithm; numerical shooting technique; similarity-solution method; vorticity equation; wall shear stress.

## 1 Introduction

Mastery of fluid flows in porous boundaries is essential when trying to respond to the concerns encountered in a large number of technological applications such as industrial separation of isotopes, grain regression about combustion in solid rocket motors, industrial sweat cooling or heating, modeling of air or blood circulation in any respiratory system, and agricultural irrigation. Due to the increasing importance of laminar flows bounded by porous boundaries, many papers [1–20] have been published in the field of this kind of flow.

The problem of laminar flows for incompressible fluids located between porous boundaries is traced back to the work of Berman [1]. Motivated by an attempt to model the separation of uranium, Berman investigated the incompressible laminar flow between two parallel porous plane walls with uniform suction and succeeded in transforming the Navier–Stokes equations to a single fourth-order ordinary differential equation, for which he gave a series solution. Yuan and Finkelstein [2] for the first time attempted to get similarity solutions of the steady flow in a tube with circular cross section by using an analytical perturbation method. A complete analysis of numerical and theoretical solutions for the laminar flow in a uniformly porous circular pipe with constant suction or injection at the wall is traced back to Terrill and Thomas [3].

The work done with impermeable walls by Brady and Acrivos [4] and that done by Uchida and Aoki [5] have played an important role by helping to know the treatments for accelerating walls in longitudinal directions [4] and in transverse directions [5], which continue to be applied nowadays for porous boundaries. Using the approach for moving walls proposed by Brady and Acrivos [4], Watson et al. [6] have investigated the two-dimensional channel flow symmetrically driven by porous accelerating walls.

---

\*Corresponding author: Elisabeth Ngo Nyobe, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon; and Department of Mathematics and Physical Science, National Advanced School of Engineering, University of Yaoundé I, P.O. Box 8390, Yaoundé, Cameroon,  
E-mail: nyobe\_eli@yahoo.fr

Guy Leopold Mbogba, Maurice Lamara, Yves Christian Mbono Samba and Elkana Pemha, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon

Following the work done for transversely moving walls by Uchida and Aoki [5], Goto and Uchida [7] have analyzed the laminar incompressible flow in a semi-infinite porous pipe where radius varies with time, in order to simulate the laminar flow field in an idealized solid rocket motor. Inspired by the approach applied in [5], Ghaffar, Ali, and Ashraf [8] have investigated the problem of an unsteady flow between two orthogonally moving porous disks. To study the flow in a porous contracting or expanding channel by following the work done in [5], Mohyud-Din, Yıldırım, and Sezer [9] have applied the Homotopy perturbation method (HPM), and Dauenhauer and Majdalani [10] have used the numerical shooting technique.

A numerical investigation has been carried out by Robinson [11] to establish whether multiple solutions exist for a steady incompressible laminar flow in a porous channel with uniform suction at both walls. Applying the theory of dynamical systems, Banks and Zaturka [12] have presented results of an extensive work for the laminar flow through a porous annular pipe. The results of an investigation of a three-dimensional porous-channel flow defined as a two-dimensional flow to which is superimposed a perpendicular finite disturbance, have been presented by Zaturka and Banks [13]. To take into account the effects of unsteady suction–injection through the wall of a porous pipe with circular section, one can cite the work of Tsangaris, Kondaxakis, and Vlachakis [14]. The presence of a magnetic field in a flow of a viscoelastic fluid is investigated in porous parallel plates by Dash and Ojha [15] and in porous pipes by Barik, Dash, and Rath [16]. Durlofsky and Brady [17], Casalis, Avalon and Pineau [18], Ferro and Gnani [19], and Griffond and Casalis [20] have done works on hydrodynamic stability in viscous flows bounded by porous boundaries.

The motivation for the present work came when we noted that in all the works mentioned above [1–20] and as well as in others referred to in these papers, the laminar flow for an incompressible fluid located in a porous annular pipe and subjected to a constant pressure gradient applied between the two borders of the pipe has not yet been investigated. In addition, another part of the motivation for this work comes from the fact that the problem under consideration in this paper has many industrial applications. In this regard, one can point out that, in thermal fluid engineering processes such as those including heating cylinders [21, 22], a constant axial pressure gradient provided by a pump is usually superimposed to the suction–injection process at the walls bounding the domain in which the fluid is located.

This paper is devoted to the investigation of the effects of an external pressure gradient on a steady incompressible laminar flow through a semi porous annular pipe, the inner wall being impermeable. The fluid is sucked or injected at the outer wall at constant and uniform velocity, orthogonally to the wall. The pressure gradient constant in time is applied between the two borders of the pipe. The problem under study depends on three parameters: the pipe gap ratio, the dimensionless external pressure gradient, and the Reynolds number defined from the sum of the cross velocity and the maximum Hagen–Poiseuille velocity. The aim of this work is to investigate the effects of this external pressure gradient on the steady laminar flow under consideration, for fixed Reynolds number and pipe gap ratio.

The problem stated in this paper is modeled by the Navier–Stokes equations and could be solved by the algorithms provided by the computational fluid dynamics (CFD). In this paper, we apply the similarity-solutions method for the vorticity equation deduced from the Navier–Stokes equations, under conditions allowing the existence of the flow stream function.

As we shall see in this work, the similarity-solutions method gives rise to a two-point boundary value problem with a fourth-order nonlinear ordinary differential equation. Many numerical methods developed in the scientific literature [23] can be applied to solve this latter equation. In this regard, we can cite the collocation or Galerkin methods based on Chebyshev polynomials [23] which give satisfactory results. Spectral element method (SEM) [24] can also be used with high accuracy. In this paper, the shooting technique including the Runge–Kutta algorithm and the Newton–Raphson optimization algorithm is utilized. This technique gives results so accurate that it has extensively been used in mechanical engineering and applied mathematics by many researchers [3–11] wishing to find, from the similarity-solutions method, the richness of the structure of the exact solution of the Navier–Stokes equation for the so-called two-dimensional configuration. By means of this similarity-solution method, the stream function per unit length of the pipe is determined for various values of the dimensionless external pressure gradient. The profiles of the radial and axial components of the flow velocity field are deduced, and investigations on the wall shear stress for both walls are performed as a function of the dimensionless external pressure gradient, for fixed Reynolds number and pipe gap ratio. Physical understandings are derived from the results obtained.



The main interest of this study is to provide potential research directions in the future for the problem under consideration. The work done in this paper represents a preliminary step for subsequent investigations in which it would be interesting to examine the influence of the gap ratio and that of the Reynolds number, in order to capture further physical insights of the deep richness of the structure of the flow under study.

For a better understanding of this work, the rest of this paper is arranged as follows. In Section 2, the problem is stated and its mathematical formulation is given. Section 3 explains the method of solution. In Section 4, the results obtained are presented and discussed. In a Conclusion given in Section 5, the main results obtained are summarized and some interesting outlooks are presented.

## 2 Mathematical formulation

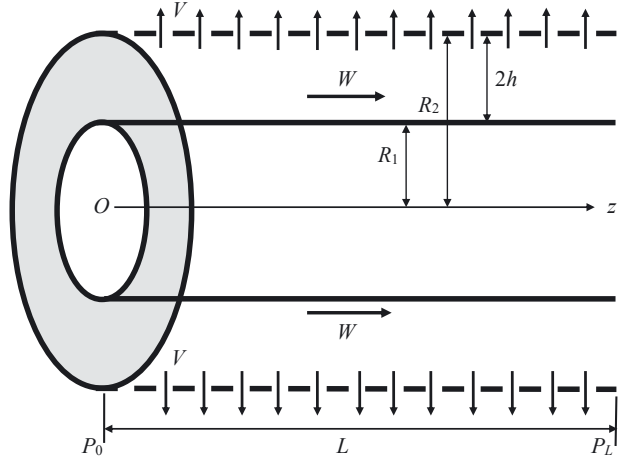
### 2.1 Statement of the problem

Consider a Newtonian incompressible fluid located in a semi porous annular pipe, having an impermeable inner cylinder with radius  $R_1$  and the other porous one with radius  $R_2$ , same horizontal  $z$ -axis and same length  $L$  such that  $0 \leq z \leq L$ . The outer porous cylinder undergoes suction or injection at constant and uniform velocity, orthogonally to the wall, as seen in Figure 1. A pressure gradient  $(P_L - P_0)/L$  constant in time is applied between the two borders of the pipe. The physical properties of the fluid that is, its specific mass  $\rho$  and its kinematic viscosity  $\nu$  remain constant.

The geometric aspect of the annular pipe considered is characterized by the gap ratio  $\delta$  which is defined in order to compare the half-width  $h$  of the air gap with respect to the mean radius of the annular pipe:

$$\delta = \frac{(R_2 - R_1)/2}{(R_1 + R_2)/2} = \frac{h}{R_1 + h}, \quad \text{with } 2h = R_2 - R_1. \quad (1)$$

The cylindrical polar coordinates  $(r, \theta, z)$  are then adopted with the origin located on the  $z$ -axis and the unit vectors  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  for radial, azimuthal and axial directions, respectively. The flow is assumed to be axisymmetric and can then be studied in the meridian plane  $(r, z)$  with the radial and axial components  $(V_r, V_z)$  of the flow velocity. This hypothesis holds because the suction or injection of fluid is radial and uniformly operated through the outer wall of the pipe.



**Figure 1:** Semi porous annular pipe with radial and uniform suction at the porous outer wall, the inner one being impermeable. The fluid is extorted at constant and uniform velocity  $V$ , orthogonally to the wall.  $W$  denotes the maximum axial velocity of the Hagen–Poiseuille flow which represents the order of magnitude of the axial velocities provided by the external constant axial pressure gradient.

### 2.2 Dimensionless vorticity equation

In the absence of body forces, the velocity vector  $\mathbf{V}$  of the flow satisfies the following momentum equation [25–27] where  $p$  denotes the pressure field in the fluid,  $\Delta$  is the vector Laplacian operator,  $t$  is the time,  $\text{Curl } \mathbf{V}$  represents the rotational of  $\mathbf{V}$ , and  $\times$  is the symbol defining the vector product:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \text{Curl} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{V}. \quad (2)$$

For the conservation of mass to be satisfied automatically, the continuity equation [25–27] for an incompressible fluid in the semi-porous annular pipe leads to a zero-divergence velocity field which allows defining the stream function  $\psi$  by the following relations:

$$rV_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{and} \quad rV_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3)$$

This gives the formula:

$$\text{Curl} \mathbf{V} = -\frac{1}{r} (D^2 \psi) \mathbf{e}_\theta, \quad (4)$$

with:

$$D^2 \psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (5)$$

To obtain the vorticity equation also called the transport equation of the vorticity, one takes the rotational of (2). After doing it, one applies the following relations that

we have initiated and found for any axisymmetric vector field, by using (4):

$$\Delta \mathbf{V} = -\text{Curl}(\text{Curl} \mathbf{V}) = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} D^2 \psi \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (D^2 \psi) \mathbf{e}_z, \quad (6a)$$

$$\text{Curl}(\Delta \mathbf{V}) = -\frac{1}{r} (D^2 D^2 \psi) \mathbf{e}_\theta. \quad (6b)$$

The vorticity equation is then deduced for the steady flow studied:

$$\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} D^2 \psi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi \right) = \nu D^2 D^2 \psi. \quad (7)$$

As seen in Figure 1, the boundary conditions are given by the following relations, in which  $V$  ( $V > 0$ ) is the absolute value of the suction or injection velocity:

$$V_r = 0 \quad \text{and} \quad V_z = 0, \quad \text{at} \quad r = R_1, \quad (8a)$$

$$V_r = sV \quad \text{and} \quad V_z = 0, \quad \text{at} \quad r = R_2 \quad (s = 1 \text{ for suction or } s = -1 \text{ for injection}). \quad (8b)$$

Let us construct dimensionless variables. So, lengths, velocities, and stream function are made dimensionless by:  $h = (R_2 - R_1)/2$ ,  $U$ , and  $h^2 U$ , respectively, where the reference velocity  $U$  is defined as:  $U = V + |W|$ ,  $W$  being the maximum Hagen–Poiseuille velocity provided by the constant axial pressure gradient and given by:  $W = -h^2 (P_L - P_0) / 4\rho\nu L$ . It is useful to notice that  $W$  is positive for negative pressure gradient and is negative for positive pressure gradient. Only the case of favorable pressure gradient is investigated in this paper. The pressure gradient is qualified to be favorable when the algebraic values  $W$  and  $sV$  have opposite signs: this occurs when the pressure gradient is negative for injection, or positive for suction.

Hence, by adopting the same denotations as those used for dimensional parameters, the dimensionless vorticity equation and the corresponding boundary conditions are obtained as follows:

$$\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} D^2 \psi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} D^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} D^2 \psi \right) = \frac{1}{Re} D^2 D^2 \psi, \quad (9)$$

$$V_r = 0 \quad \text{and} \quad V_z = 0, \quad \text{at} \quad r = \delta^{-1} - 1, \quad (10a)$$

$$V_r = s(1 + \sigma)^{-1} \quad \text{and} \quad V_z = 0, \quad \text{at} \quad r = \delta^{-1} + 1, \quad (10b)$$

where  $Re = (V + |W|)h/\nu$  is the Reynolds number,  $\delta$  is the pipe gap ratio defined in (1) and  $\sigma$  is a dimensionless parameter defined as:  $\sigma = |W|/V$ .

## 2.3 Dimensionless external constant axial pressure gradient

According to its definition, the parameter  $\sigma$  is seen as the velocity ratio comparing the radial and axial velocities of the flow. For the work done in this paper,  $\sigma$  is treated as the dimensionless external constant axial pressure gradient because it can be defined by using the formula of  $|W|$  as follows:

$$\sigma = \frac{|W|}{V} = \frac{h^2 |P_L - P_0| / (4\rho\nu L)}{V} = \frac{|P_L - P_0| L^{-1}}{\left( \frac{4\rho\nu}{h^2} V \right)}. \quad (11)$$

Hence, to make the dimensionless constant axial pressure gradient applied on the two borders of the pipe, in order to define  $\sigma$ , (11) shows that the pressure is made dimensionless by the reference pressure  $P_{\text{ref}} = \left( \frac{4\rho\nu}{h^2} V \right) L$ . For this purpose, the absolute velocity  $V$  of suction or injection is kept constant as well as  $h$  or  $\delta$ , while  $\sigma$  varies, that is while the difference in pressure  $|P_L - P_0|$  between the two borders of the pipe varies.

## 3 Method of solution

### 3.1 Calculation of the stream function per unit length by means of the shooting technique

All parameters being dimensionless, we assume the similarity-solution hypothesis which states that the transverse velocity component  $V_r$  is independent of the streamwise coordinate  $z$ . This hypothesis was first considered by Berman [1]. It holds because the pipe radius does not vary in the streamwise direction and the injection–suction of fluid through the pipe wall is operated uniformly over the whole wall surface. Considering the expression of  $V_r$  given in the definition of  $\psi$  in (3), one then obtains by integrating and by setting  $\psi = 0$  at  $z = 0$ :

$$\psi(r, z) = zF(r), \quad (12)$$

where  $F(r) = -rV_r(r)$ . Accordingly to (12),  $F$  can be regarded as the steady-flow stream function per unit length of the pipe. Introducing in (9) the result obtained in (12), the equation satisfied by  $F$  is obtained:

$$\frac{2}{r^2} F D_r^2 F + \frac{1}{r} \left( \frac{dF}{dr} D_r^2 F - F \frac{d}{dr} D_r^2 F \right) = \frac{1}{Re} D_r^2 D_r^2 F, \quad (13)$$

with:  $D_r^2 F = r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) = \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}$ . The boundary conditions required for (13) are derived:

$$F = 0, \quad dF/dr = 0, \quad \text{at } r = \delta^{-1} - 1, \quad (14a)$$

$$F = -s(\delta^{-1} + 1)(1 + \sigma)^{-1}, \quad dF/dr = 0, \quad \text{at } r = \delta^{-1} + 1. \quad (14b)$$

To solve the problem stated in (13) with (14a) and (14b), numerical methods are required. It is then needed to replace the varying boundaries  $r = \delta^{-1} - 1$  and  $r = \delta^{-1} + 1$  with fixed values. For this purpose, a new parameter  $\xi = Ar^2 + B$  is introduced in order to have  $\xi = 0$  at  $r = \delta^{-1} - 1$ , and  $\xi = 1$  at  $r = \delta^{-1} + 1$ . This gives:

$$\xi = (\delta/4)r^2 - (1 - \delta)^2/4\delta, \quad \text{with: } 0 \leq \xi \leq 1. \quad (15)$$

Rewriting (13), (14a), and (14b) in terms of  $\xi$ , one obtains the following relations:

$$(4\delta\xi + (1 - \delta)^2)F^{(4)} + 8\delta F^{(3)} - 2Re\delta(F^{(1)}F^{(2)} - FF^{(3)}) = 0, \quad (16)$$

$$F = 0, \quad F^{(1)} = 0, \quad \text{at } \xi = 0, \quad (17a)$$

$$F = -s(\delta^{-1} + 1)(1 + \sigma)^{-1}, \quad F^{(1)} = 0, \quad \text{at } \xi = 1, \quad (17b)$$

where  $F^{(m)}$  represents the derivative  $d^m F/d\xi^m$ .

The two-point boundary value problem obtained in (16), with the boundary conditions (17a) and (17b) is solved by means of the numerical shooting method [23]. This technique is explained in detail for polar coordinates by our research team in a recently published work [28] in which it is utilized to solve the problem of a laminar flow located in a polar plane of two porous coaxial cylinders and driven by suction–injection at the walls [28].

As required in the shooting technique, the problem under consideration is replaced with an initial boundary value problem which is defined by the same Eq. (16) for an unknown function  $\Phi$ . The conditions satisfied by  $\Phi$  at the starting border  $\xi = 0$  include the two boundary conditions of  $F$  verified by  $F$  and  $F^{(1)}$  at that border, and are completed by two free missing parameters  $(u_1, u_2)$  arbitrarily chosen as the values of  $F^{(2)}$  and  $F^{(3)}$ , respectively, at the same border. From any  $(u_1, u_2)$  guest values,  $\Phi$  is computed by applying the fourth-order Runge–Kutta algorithm, and the process is updated until  $\Phi$  satisfies the same conditions as  $F$  at the ending border  $\xi = 1$ . This requires defining a vector  $\mathbf{E}$  whose components  $(E_1, E_2)$  measure how far the  $\Phi$  values are from satisfying the desired conditions at the ending point  $\xi = 1$ :

$$E_1(u_1, u_2) = \Phi(\xi = 1) - (-s(\delta^{-1} + 1)(1 + \sigma)^{-1}), \quad (18a)$$

$$E_2(u_1, u_2) = \Phi^{(1)}(\xi = 1) - 0. \quad (18b)$$

One then needs to minimize the cost function defined as:

$$J(u_1, u_2) = |\mathbf{E}|^2 = E_1^2(u_1, u_2) + E_2^2(u_1, u_2). \quad (19)$$

For this purpose, one may apply the gradient-descent algorithm or other optimization technique as done in previously published works [29–34]. In this paper, the update procedure is performed by the Newton–Raphson optimization algorithm [23, 28, 35] and involves the computation of the Jacobean matrix  $[\mathbf{M}]$  according to the following relation in which  $q$  represents the iteration index:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{(q+1)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{(q)} - ([\mathbf{M}]^{(q)})^{-1} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}^{(q)}. \quad (20)$$

The method for determining the components  $M_{i,j} = \partial E_i / \partial u_j$  of the matrix  $\mathbf{M}$  (with  $i, j = 1, 2$ ) is well explained in [28] for the case of polar coordinates.

### 3.2 Components of the flow velocity and trajectories of the fluid particles

The values of the radial and axial components of the flow velocity are computed by applying the following relations obtained from (3), (12), and (15):

$$V_r = -\frac{\delta}{\sqrt{4\delta\xi + (1 - \delta)^2}}F \quad \text{and} \quad V_z/z = \frac{\delta}{2}F^{(1)}. \quad (21)$$

For any steady flow, for which a stream function  $\psi$  exists as in this paper, the trajectories of the fluid particles or streamlines are defined by the equation:  $\psi = cte$ . In the case of this work, this gives:  $zF(\xi) = cte$ , according to (12). Since the fluid is sucked or injected through the outer wall pipe whose equation is  $\xi = 1$ , the coordinates  $(\xi_k = 1, z_k)$  of any point of that porous wall can be used to derive the equation of the unique streamline passing through the point considered. Hence, the streamlines are defined as the curves of the meridian plane  $(\xi, z)$  whose equation is given by the following relation:

$$z = \frac{z_k F(1)}{F(\xi)}, \quad \text{with } F(\xi) \neq 0 \quad \text{and} \quad z_k \geq 0. \quad (22)$$

### 3.3 Shear stress in the fluid

The shear stress per unit length  $\tau/z$  is made dimensionless by  $\rho\nu U/h^2$ . By adopting the same denotations as those used for dimensional parameters, the dimensionless shear stress is defined as follows, for any fluid layer located at a given  $\xi$ :

$$\frac{\tau}{z} = \frac{1}{z} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\delta}{4} \sqrt{4\delta\xi + (1-\delta)^2 F^{(2)}}. \quad (23)$$

For the two cylinders, the wall shear stress  $\tau_W$  is deduced:

$$\frac{\tau_W}{z} = \frac{\delta}{4} (1-\delta) F^{(2)}(\xi=0) = \frac{\tau_W}{z}(\sigma, \delta), \quad \text{for the inner wall,} \quad (24a)$$

$$\frac{\tau_W}{z} = \frac{\delta}{4} (1+\delta) F^{(2)}(\xi=1) = \frac{\tau_W}{z}(\sigma, \delta), \quad \text{for the outer wall,} \quad (24b)$$

Equation (16) whose  $F$  is the solution depends on  $\delta$  and its boundary conditions also depend on  $\sigma$  and  $\delta$ . So, for a given  $\delta$ , the wall shear stress  $\tau_W$  is connected to  $\sigma$  by a complicated link which is unknown. The shooting technique provides the values of  $F^{(2)}$  from the Runge–Kutta algorithm and enables to compute  $\tau_W/z$ , according to (24a) and (24b).

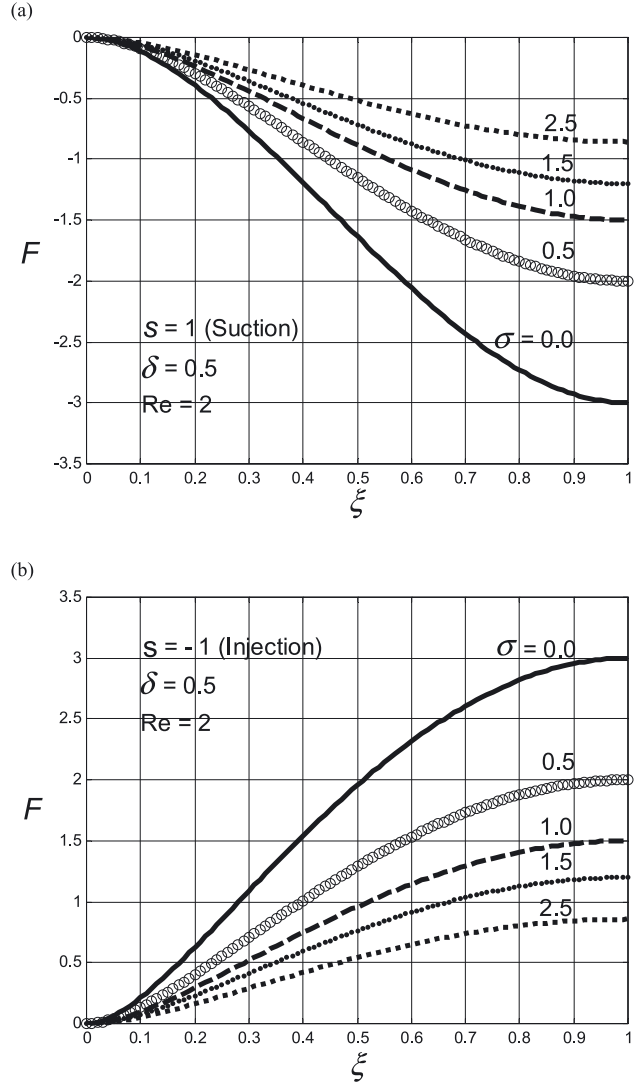
## 4 Results and discussion

### 4.1 Preliminary remarks

Computations are done for various values of the dimensionless constant axial pressure gradient  $\sigma$ ,  $Re$ , and  $\delta$  being kept constant with:  $Re = 2$  and  $\delta = 0.5$ . For convergence requirements of the Runge–Kutta and Newton–Raphson algorithms, 101 discretized values are adopted for the parameter  $\xi$ , forming 100 intervals of same length  $\Delta\xi = 10^{-2}$ . The stop criterion that we have applied for the Newton–Raphson optimization procedure enables to reduce the cost function  $J$  defined in (19) to the minimum  $J_{\min} \approx 10^{-25}$ . This proves the high accuracy of the shooting technique we have utilized, the objective being to reduce  $J$  to zero. Physical understandings derived from the results are discussed by considering the following aspects of the flow: the stream function per unit length of the pipe, the streamlines, the radial and axial components of the flow velocity field, and the wall shear stress for the two walls.

### 4.2 The stream function per unit length of the pipe

From the numerical shooting technique explained in Section 3.1, the values of the stream function  $F$  per unit length of the pipe have been computed. These values are plotted as function of the position  $\xi$  of any fluid layer, for the suction (Figure 2(a)) and injection (Figure 2(b)), and for various values of the dimensionless external pressure gradient  $\sigma$ .



**Figure 2:** Stream function per unit length of the pipe for various values of the dimensionless external pressure gradient, plotted for (a) suction and (b) injection.

As seen in Figure 2(a) and (b), the absolute values of  $F$  for a given value of  $\sigma$  decrease as  $\xi$  increases. As  $\sigma$  increases, these absolute values decrease for both suction and injection. From the physical point of view, this means that the flow mass rate diminishes as  $\sigma$  increases. The physical reason which explains this behavior will be developed in Section 4.4.

Examining Figure 2(a) and (b) simultaneously, one can see that  $F$  changes sign when the flow changes its orientation, according to the suction or injection. This leads to conclusion that the reverse flow occurs in the fluid if the stream function  $F$  per unit length of the pipe changes sign in the radial direction plotted on the same curve, that is for a given  $\sigma$ . Since the sign of  $F$  is unchanged

in Figure 2(a) and (b) for various values of the constant axial pressure gradient  $\sigma$ , this confirms that no reverse flow occurs in the fluid for any  $\sigma$ .

### 4.3 The streamlines or trajectories of the fluid particles

We notice that the values of  $F$  for the suction are symmetrical with respect to the  $\xi$  axis, to those obtained for the injection, as seen in Figure 2(a) and (b). This induces that the streamlines for both cases are identical, according to (22). Figure 3 shows a pattern of the flow formed by various streamlines derived by applying (22) for various  $z_k$  values, with  $\delta = 0.5$ ,  $Re = 2$ , and  $\sigma = 1$ . These streamlines end at several points ( $z_k$ ) of the porous wall for the suction with positive constant axial pressure gradient, or come from the same points in the case of the injection with negative pressure gradient.

As seen in Figure 3, the plot confirms that there is no reverse flow in the fluid. This leads to the physical understanding that the dragging action of any fluid layer exerted on fluid particles is favorable to the effects of the pressure gradient imposed between the two borders of the cylinders.

### 4.4 The radial and axial components of the velocity field

From the calculations performed by applying (21), the radial and axial components of the flow velocity are plotted as a function of  $\xi$  in Figures 4 and 5, respectively, for five values of the dimensionless constant axial pressure gradient  $\sigma$ .

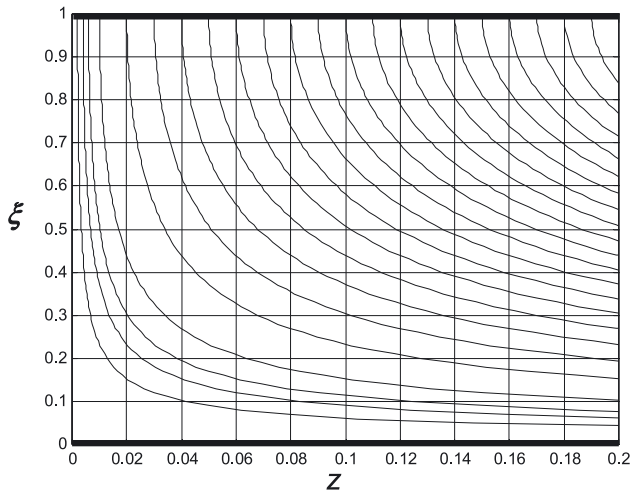


Figure 3: The pattern of streamlines for both suction and injection, plotted for  $\sigma = 1$ .

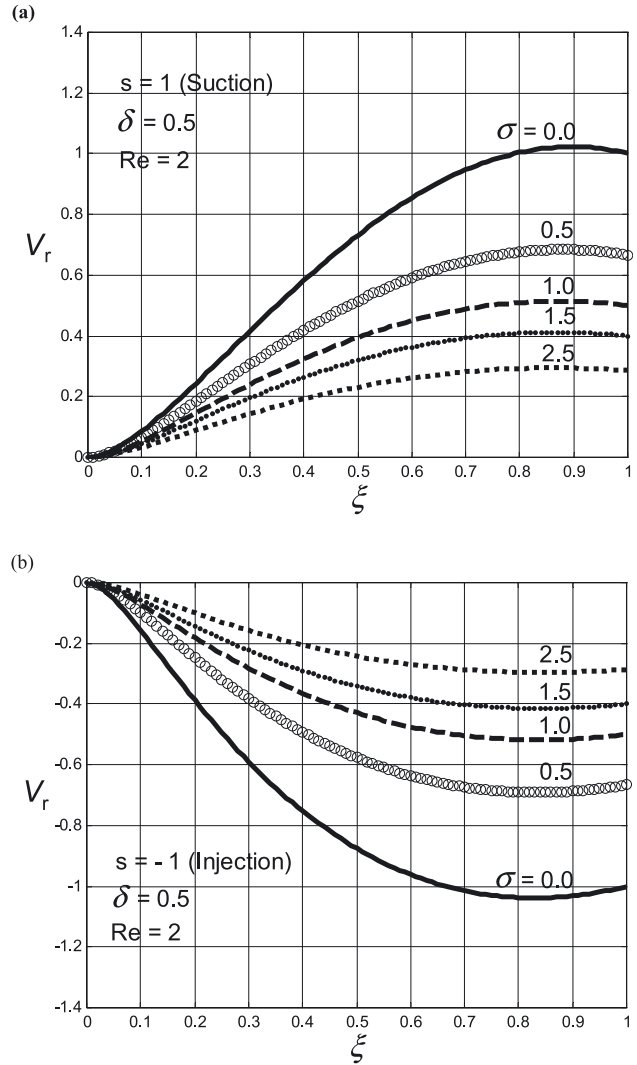
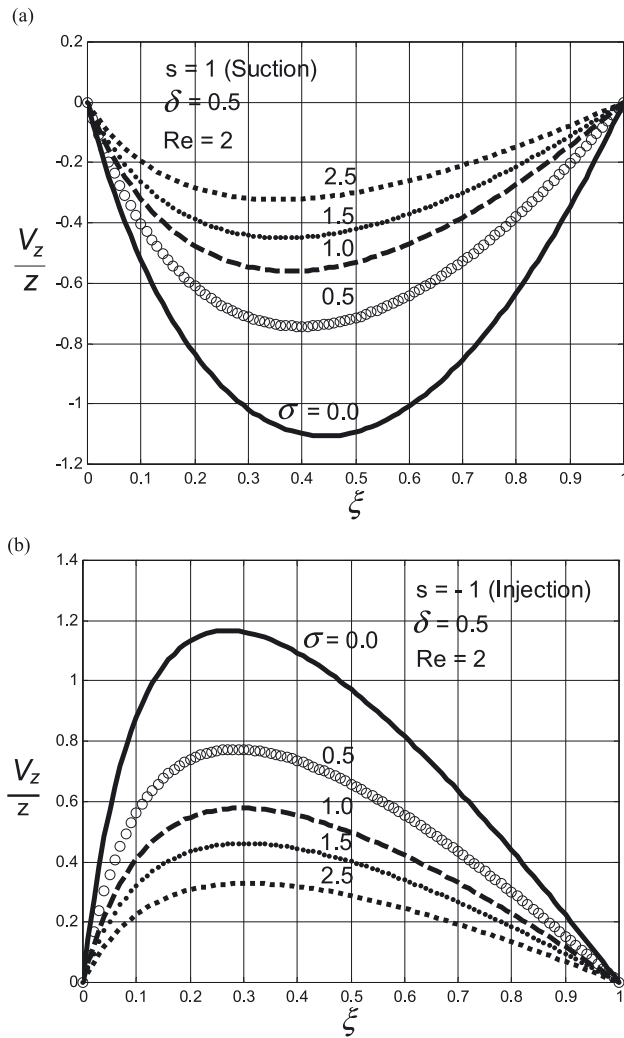


Figure 4: Profile of the radial component of the velocity field for various values of the dimensionless external pressure gradient  $\sigma$ , plotted for (a) suction and (b) injection.

Depending on whether the porous wall undergoes suction or injection, the values of  $V_r$  and  $V_z$  will be positive and negative. For the suction,  $V_r > 0$  and  $V_z < 0$ , as seen in Figures 4(a) and 5(a). Figures 4(b) and 5(b) show that  $V_r < 0$  and  $V_z > 0$  for the injection. This result is in accordance with the fact that the sign of the radial and axial components of the velocity field in the pipe determine the sense of the fluid displacement along the streamlines and then indicates whether the motion is a suction or injection.

As seen in Figure 4(a) and (b), the plot corresponding to the value  $\sigma = 0$  which defines the absence of the external pressure gradient highlights particular fluid layers that we have named (FL) ( $0.7 < \xi < 1$ ), whose radial velocity exceeds the velocity of suction or injection. This interesting phenomenon has already been observed by



**Figure 5:** Profile of the axial component of the flow velocity for various values of the dimensionless external pressure gradient  $\sigma$ , plotted for (a) suction and (b) injection.

Dauenhauer and Majdalani [10] when studying the flow in a porous channel with contracting or expanding walls and uniform suction or injection at the walls. The FLs under consideration are located near the porous wall as seen plotted in Figure 4(a) and (b). This is due to the condition of no-slip on the impermeable wall which prevents the action of the favorable external pressure gradient in the region located near that wall.

As the dimensionless external pressure gradient  $\sigma$  increases from the value 0, the pressure force acting on the two borders of the pipe also increases and the fluid undergoes a gain of momentum which should increase the absolute velocity of suction or injection. To keep this velocity constant, the fluid by the aid of its viscosity creates an antagonist frictional shearing stress acting on the fluid particles. These additional frictional forces are more intense

than the inertial forces coming from the gain of momentum provided by the increasing axial pressure gradient imposed between the two borders of the pipe. Therefore, the fluid particles with slowest velocity increase in number and mass. The above argument explains why when  $\sigma$  increases, the absolute values of the radial and axial velocities decrease for any fluid layer as seen plotted in Figures 4 and 5, and why the FLs tend to disappear with increasing values of  $\sigma$ , as seen in Figure 4(a) and 4(b). The same argument also explains why the flow mass rate decreases as  $\sigma$  increases, as seen in the plots of the stream function presented in Figure 2(a) and (b).

By the aid of the preceding arguments given for the behavior of the radial velocity component, one understands from the physical point of view, the reasons why the phenomenon highlighted by the FLs is not observed for the axial velocity component, as seen in the plots presented in Figure 5(a) and (b). The reason of this physical insight is as follows. The axial velocity vanishes on the inner and outer walls, contrarily to the radial velocity. So, if the axial velocity was alone, its profile would be parabolic as in the Hagen–Poiseuille flow. In such a configuration, there are no FLs as those captured in Figure 4(a) and (b). Because of the conservation of mass in which the radial velocity has to exist, the axial velocity profile presents the specific forms seen plotted in Figure 5(a) and (b), for which the parabolic profile expected is not observed.

Figure 5(a) and (b) enable to derive physical insights about the boundary layers at the vicinity of the inner and outer cylinders. Since the radial velocity does not depend on the axial coordinate according to the similarity-solution hypothesis, the boundary-layers behavior is deduced by the only axial velocity gradient in the radial direction. In this regard, Figure 5(a) and (b) can be exploited.

For a given value of the dimensionless external pressure gradient  $\sigma$ , Figure 5(a) which corresponds to the case of the suction shows that the absolute value of the gradient  $\partial V_z / \partial \xi$  at the inner cylinder is nearly equal to that of the same gradient at the outer cylinder, for any value of  $\sigma$ . This leads to conclusion that the thickness of the boundary layers and the viscosity effects at the vicinity of the two cylinders are nearly equal, for any value of  $\sigma$ .

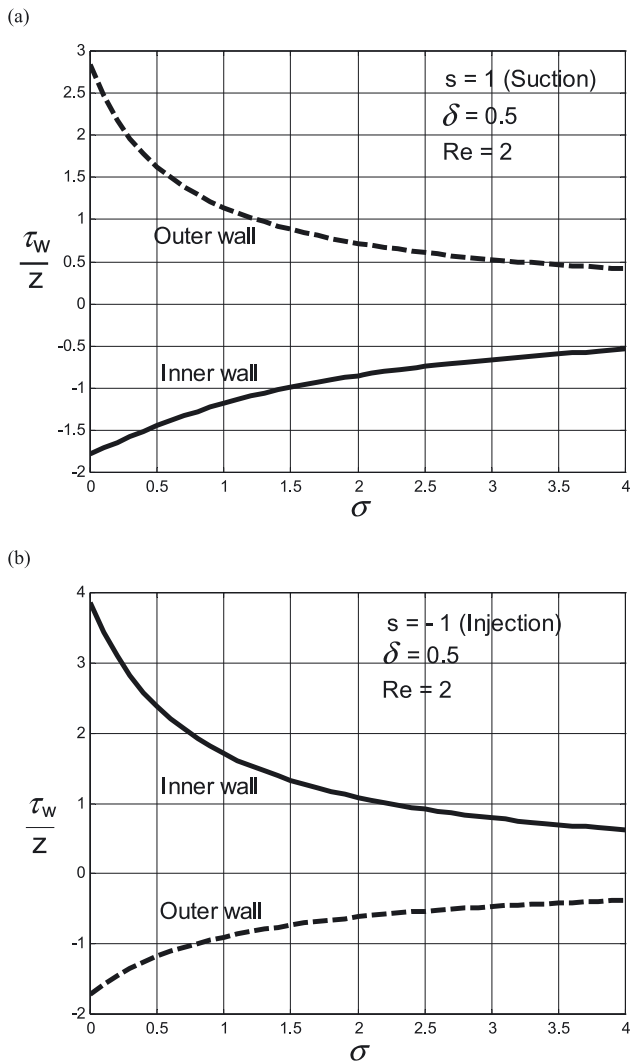
As  $\sigma$  increases from the value 0, the thickness of the two boundary layers decreases as well as the effects of viscosity. This is explained by the fact that the absolute value of the gradient  $\partial V_z / \partial \xi$  at the two cylinders decreases as  $\sigma$  increases, as seen in Figure 5(a).

For the case of the injection, one obtains different results. Figure 5(b) shows that, for a given value of  $\sigma$ , the absolute value of the above velocity gradient at the inner

cylinder is very great compared to that of the outer cylinder. From Figure 5(b), one can also see that the absolute value of that velocity gradient decreases as  $\sigma$  increases. Hence, in the case of the injection, one then concludes that the thickness of the boundary layer at the vicinity of the inner cylinder as well as the viscosity effects at this cylinder is very great compared to those evaluated for the outer cylinder. In addition, as in the case of the suction, the thickness of the two boundary layers and the effects of viscosity decreases for increasing values of  $\sigma$ .

#### 4.5 Wall shear stress at the two cylinders

The values of the dimensionless wall shear stress for the two walls are plotted in Figure 6(a) for the suction and



**Figure 6:** Wall shear stress for the two walls as function of the dimensionless external pressure gradient  $\sigma$ , plotted for (a) suction and (b) injection.

in Figure 6(b) for the injection. For increasing values of the dimensionless constant axial pressure gradient  $\sigma$ , the absolute value of the wall shear stress decreases, as seen in Figure 6(a) and (b).

Figure 6(a) and (b) show the opposite behaviors for the outer and inner walls according to suction or injection. In the case of suction, the absolute value of the wall shear stress for the inner wall varies between 0.5 and 1.80, whereas it varies between 0.5 and 2.80 for the outer one. In the case of injection, the limits of the absolute value of the wall shear stress for the outer wall are nearly identical to those obtained for the inner one in the preceding case. For the inner wall, this absolute value varies between 0.7 and 4.

As we can see, the results obtained in Figure 6(a) and (b) confirm those derived in Figure 5(a) and (b) for the boundary layers at the vicinity of the two walls.

The physical arguments which explain the plots seen in Figure 6(a) and (b) are the same as those which have explained in the preceding sub-section, the behavior of the boundary layers thickness and that of the viscosity effects.

## 5 Concluding remarks

The motivation for the present work came when we noted that in all the works devoted to laminar flows with porous boundaries and as well as in others referred to in these papers, the problem considered in the present work has not yet been investigated. Another part of the motivation for this work comes from the fact that the problem solved has many applications in thermal fluid engineering processes such as those including heating cylinders, where an external axial pressure gradient provided by a pump is usually superimposed to the suction/injection at the walls bounding the fluid.

This paper has investigated a steady incompressible laminar flow through a semi porous annular pipe, with a constant axial pressure gradient applied on the two borders of the pipe. The fluid is sucked or injected at the porous outer wall at constant and uniform velocity, orthogonally to the wall. The problem under study depends on three parameters: the pipe gap ratio, the dimensionless constant axial pressure gradient, and the Reynolds number defined from the sum of the cross velocity and the maximal Hagen–Poiseuille velocity. The aim of this work is to investigate the effects of the constant axial pressure gradient on the flow under consideration, for fixed Reynolds number and pipe gap ratio.

The main interest of this study is to provide potential research directions in the future for the problem studied. The work done in this paper represents a preliminary step for subsequent investigations in which it would be interesting to examine the influence of the gap ratio and that of the Reynolds number, in order to capture further physical insights of the deep richness of the structure of the flow under study. Another interesting outlook is to examine the effects of the adverse constant pressure gradient between the two borders of the pipe, that is, the negative pressure gradient for suction and positive pressure gradient for injection.

The results of the present analysis may be summarized as follows.

- The Reynolds number constructed from the sum of the absolute velocity  $V$  of suction or injection and the maximum Hagen–Poiseuille velocity deduced from the constant axial pressure gradient, is defined as follows:  $Re = \left( V + \frac{h^2 |P_L - P_0|}{4\rho\nu L} \right) \frac{h}{\nu}$ .
- Keeping  $V$  and  $h$  (or  $\delta$ ) constant, the constant pressure gradient imposed between the two borders of the pipe is made dimensionless. This gives rise to the dimensionless constant axial pressure gradient  $\sigma$  given by the relation:  $\sigma = \frac{|P_L - P_0| L^{-1}}{\left( \frac{4\rho\nu}{h^2} V \right)}$ .
- Due to the action of that favorable external pressure gradient, no reverse flow occurs in the semi porous annular pipe.
- The condition of no-slip on the impermeable wall prevents the action of that external pressure gradient in the region located near that wall.
- In the absence of the external pressure gradient ( $\sigma = 0$ ), the flow highlights FLs located near the porous wall and having radial velocity which exceeds the velocity of suction or injection. These FLs tend to disappear for increasing values of  $\sigma$ .
- As  $\sigma$  increases from the value 0, the fluid undergoes a gain of momentum which should increase the absolute velocity of suction or injection. To keep this velocity constant, the fluid by the aid of its viscosity creates an antagonist frictional shearing stress acting on the fluid particles. These additional frictional forces are more intense than the inertial forces coming from the gain of momentum provided by the increase of  $\sigma$ .
- As  $\sigma$  increases, the fluid particles with slowest velocity increase in number and mass.
- With increasing  $\sigma$  values, the radial and axial components of the flow velocity field decrease for any fluid layer.

- When the porous outer wall is sucked, the thickness of the boundary layers and the viscosity effects at the vicinity of the two cylinders are nearly equal, for any value of the dimensionless external pressure gradient.
- When the porous outer wall undergoes the injection, the thickness of the boundary layer at the vicinity of the inner cylinder as well as the viscosity effects at this cylinder is very great compared to those evaluated for the outer cylinder, for any value of  $\sigma$ .
- For both suction and injection, the thickness of the two boundary layers decreases as well as the effects of viscosity, as  $\sigma$  increases from its smaller value 0.

**Acknowledgements:** One of the authors (E. P.) would like to thank Emeritus Professor Bernard Gay from the advanced school of engineering “Ecole Centrale de Lyon” (France) for his unforgettable training about Numerical Methods in Fluid Mechanics. The authors are extremely grateful to the Editor and the Reviewers for the valuable comments they have made about the paper.

**Author contribution:** All the authors have accepted responsibility for the entire content of this submitted manuscript and approved submission.

**Research funding:** None declared.

**Conflict of interest statement:** The authors declare no conflicts of interest regarding this article.

## References

- [1] A. S. Berman, “Laminar flow in channels with porous walls,” *J. Appl. Phys.*, vol. 24, pp. 1232–1235, 1953.
- [2] S. W. Yuan and A. B. Finkelstein, “Stability of pipe flow with blowing,” *Trans. ASME*, vol. 78, pp. 719–727, 1956.
- [3] R. M. Terrill and P. W. Thomas, “On laminar flow through a uniformly porous pipe,” *Appl. Sci. Res.*, vol. 21, pp. 37–67, 1969.
- [4] J. F. Brady and A. Acrivos, “Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 112, pp. 127–150, 1981.
- [5] S. Uchida and H. Aoki, “Unsteady flow in a semi-infinite contracting or expanding pipe,” *J. Fluid Mech.*, vol. 82, pp. 371–387, 1977.
- [6] P. Watson, W. H. H. Banks, M. B. Zatorska, and P. G. Drazin, “Laminar channel flow driven by accelerating walls,” *Eur. J. Appl. Math.*, vol. 2, p. 359, 1991.
- [7] M. Goto and S. Uchida, “Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall,” *Trans. Jpn. Soc. Aeronaut. Space Sci.*, vol. 33, p. 14, 1990.
- [8] M. Ghaffar, K. Ali, A. Yasmin, and M. Ashraf, “Unsteady flow between two orthogonally moving porous disks,” *J. Mech.*, vol. 31, p. 2, 2015.



- [9] S. T. Mohyud-Din, A. Yildirim, and S. A. Sezer, “Analytical approach to a slowly deforming channel flow with weak permeability,” *Z. Naturforsch.*, vol. 65a, pp. 1033–1038, 2010.
- [10] E. C. Dauenhauer and J. Majdalani, “Exact self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls,” *Phys. Fluids*, vol. 15, no. 6, pp. 1485–1495, 2003.
- [11] W. A. Robinson, “The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls,” *J. Eng. Math.*, vol. 10, no. 1, pp. 23–40, 1976.
- [12] W. H. H. Banks and M. B. Zaturka, “On flow through a porous annular pipe,” *Phys. Fluids A*, vol. 4, no. 6, pp. 1131–1141, 1992.
- [13] M. B. Zaturka and W. H. H. Banks, “New solutions for flow in a channel with porous walls and/or non-rigid walls,” *Fluid Dynam. Res.*, vol. 33, pp. 57–71, 2003.
- [14] S. Tsangaris, D. Kondaxakis, and N. W. Vlachakis, “Exact solution for flow in a porous pipe with unsteady wall suction and/or injection,” *Commun. Nonlinear Sci.*, vol. 12, pp. 1181–1189, 2007.
- [15] G. C. Dash and K. L. Ojha, “Viscoelastic hydromagnetic flow between two porous parallel plates in the presence of sinusoidal pressure gradient,” *Alex. Eng. J.*, vol. 57, no. 4, pp. 3463–3471, 2018.
- [16] R. N. Barik, G. C. Dash, and P. K. Rath, “Steady laminar MHD flow of viscoelastic fluid through a porous pipe embedded in a porous medium,” *Alex. Eng. J.*, vol. 57, no. 2, pp. 973–982, 2018.
- [17] L. Durlinsky and J. F. Brady, “The spatial stability of a class of similarity solutions,” *Phys. Fluids*, vol. 27, p. 1068, 1984.
- [18] G. Casalis, G. Avalon, and J.-P. Pineau, “Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls,” *Phys. Fluids*, vol. 10, p. 2558, 1998.
- [19] S. Ferro and G. Gnani, “Spatial stability of similarity solutions for viscous flows in channels with porous walls,” *Phys. Fluids*, vol. 12, no. 4, pp. 797–802, 2000.
- [20] J. Griffond and G. Casalis, “On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow,” *Phys. Fluids*, vol. 13, p. 1635, 2001.
- [21] B. Bhandari in *Handbook of Industrial drying*, A. S. Mujumdar, Ed., Boca Raton, CRC Press, 2015.
- [22] J. Cellier, “Heating cylinder for products such as films, foils, slabs or the like,” EP0200658B1, European Patent Office, 1988.
- [23] H. W. Press, A. S. Teukolsky, T. W. Vetterling, and P. B. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, 2nd ed, Cambridge, 1992.
- [24] I. Mahariq and A. Erciyas, “A spectral element method for the solution of magnetostatic fields, T,” *J. Electr. Eng. and Comput. Sci.*, vol. 25, no. 4, pp. 2922–2932, 2017.
- [25] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1967.
- [26] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, New York, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1968.
- [27] S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vol. 1, New York, Dover Publications Inc., 1965.
- [28] N. R. Makon, E. Ngo Nyobe, M. Lamara, Y. C. Mbono Samba, and E. Pemha, “On the existence and determination of the incompressible laminar flow located in the polar plane of a porous annular pipe,” *Alex. Eng. J.*, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.08.046>.
- [29] E. Pemha, “Markovian model for the propagation of a light wave in a heated turbulent jet of air,” PhD Thesis, Ecully, France, Laboratory of Fluid Mechanics, Ecole Centrale de Lyon, 1990.
- [30] E. Ngo Nyobe, “A new laser-based diagnostic technique using genetic algorithms for the optical and thermal turbulence in a hot turbulent jet of air,” PhD Thesis, Yaoundé, Applied Mechanics Laboratory of the Faculty of Science, University of Yaoundé I, 2008.
- [31] E. Pemha, B. Gay, and A. Tailland, “Measurement of the diffusion coefficient in a heated plane airstream,” *Phys. Fluids A*, vol. 5, pp. 1289–1295, 1993.
- [32] E. Ngo Nyobe and E. Pemha, “Shape optimization using genetic algorithms and laser beam propagation for the determination of the diffusion coefficient in a hot turbulent jet of air,” *Prog. Electromagn. Res. B*, vol. 4, pp. 211–221, 2008.
- [33] E. Pemha and E. Ngo Nyobe, “Genetic algorithm approach and experimental confirmation of a laser-based diagnostic technique for the local thermal turbulence in a hot wind tunnel jet,” *Prog. Electromagn. Res. B*, vol. 28, pp. 325–350, 2011.
- [34] M. Lamara, E. Ngo Nyobe, and E. Pemha, “Engineering laser-based diagnostic in a hot wind tunnel jet: measurement of the temperature structure coefficient by using an optimization technique,” *Prog. Electromagn. Res. M*, vol. 74, pp. 93–103, 2018.
- [35] G. N. Vanderplaats, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design and Applications*, New York, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1984.