Université d'Abomey-Calavi (UAC), Bénin

The Abdus-Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP), Italy

Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP), Bénin

Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Université d'Abomey-Calavi du Bénin

Option : Mathématiques

Par

Abdoul Salam DIALLO [1]

Contribution à l'étude des variétés d'Osserman, conformément d'Osserman et affines d'Osserman

Soutenue publiquement le 27 Avril 2011 devant le JURY composé comme suit :

Président	:	**Prof. Eugène OKASSA**, (Université Marien NGOUABI, Congo)
Rapporteurs	:	**Prof. Momo BANGOURA**, (Université Gamal Abdel Nasser, Guinée)
	:	**Prof. Mahamane BAZANFARE**, (Université Abdou Moumouni, Niger)
	:	**Prof. Joël TOSSA**, (IMSP/UAC, Bénin)
Examinateurs	:	**Prof. Nourou ISSA**, (FAST/UAC, Bénin)
	:	**Prof. Léonard TODJIHOUNDE**, (IMSP/UAC, Bénin)
Co-Directeurs	:	**Prof. Jean-Pierre EZIN**,
	:	**Prof. Joël TOSSA**.

1. Financement : ICTP, Italy

Dédicace

A Feue ma tante Aïssatou koïn DIALLO

Remerciements

C'est pour moi un réel plaisir d'exprimer sur cette page toute ma gratitude à tous qui m'ont aidé tout au long de cette formation.

Je suis très reconnaissant au Professeur Jean-Pierre Ezin avec qui j'ai commencé cette thèse en codirection avec le Professeur Joël Tossa. Je tiens à rendre hommage à ses qualités d'homme et d'homme de sciences.

Merci au Professeur Joël TOSSA d'avoir été un directeur de thèse extrêment patient et disponible. Je tiens à le remercier pour ses différentes contributions grâce auquelles la réalisation de ce travail a été possible. Merci pour la liberté qu'il m'a donnée, dans l'emploi du temps et le travail.

Merci au Professeur Eugène OKASSA de l'Université Marien NGouabi, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Les Professeurs Momo Bangoura et Mahamane Bazanfaré ont accepté de relire avec attention cette thèse. Je suis très content qu'ils aient accepté d'être rapporteurs.

Je tiens à remercier les Professeurs Abdou Nourou ISSA et Leonard TODJIHOUNDE qui contribuent à mon jury en tant qu'examinateurs.

Ma pensée va également aux professeurs, collègues et amis de l'IMSP. J'ai eu la chance d'y croiser des gens d'exception qui m'ont permis de progresser, par leurs conseils et leurs encouragements. Je tiens à saluer ceux qui m'ont aidé par leur joie de vivre et leur amitié à surmonter les difficultés morales inhérentes à un travail de recherche. Je pense notamment à Bakary MANGA et à Destin MANGANE. Merci aussi aux enseignants de l'Université Gamal Abdel Nasser de Conakry et plus particulièrement à ceux du département de Mathématiques.

Je suis très reconnaissant envers Ismaïlou BALDE et sa famille pour leur soutien moral et leurs encouragements. Un remerciement spécial à Kadiatou Pycole BARRY pour les divers soutiens qu'elle m'a apportée.

Je ne saurai terminer sans adresser une pensée très affectueuse à ma famille notamment mes parents dont le soutien est généreux et sans conditions depuis toujours. J'ai une pensée toute particulière pour *Habibatou Sadio*. Que vous soyez tous rassurés de ma profonde et sincère affection.

Table des matières

Introduction

Un bref survol du contexte

En géométrie pseudo-riemannienne, le tenseur de courbure de Riemann s'est dégagé comme l'invariant qui possède beaucoup d'information sur la variété. Le tenseur de courbure est en général difficile à appréhender. Il est un objet complexe, difficile à manipuler et à interpréter. C'est pourquoi on cherche à en extraire des objets plus simple, quitte à perdre un peu d'informations. Les plus importants de ces objets sont la courbure sectionnelle, la courbure de Ricci, la courbure scalaire et l'opérateur de Jacobi.

Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur l'opérateur de Jacobi.

L'opérateur de Jacobi est un invariant dont les valeurs propres donnent des informations sur les variétés riemanniennes. Il intervient dans l'étude des champs de vecteurs de Jacobi, de la variation des géodésiques et des points conjugués. L'étude de l'opérateur de Jacobi a permis d'avancer dans la connaissance des espaces localement symétriques. En effet, beaucoup de caractérisations des espaces localement symétriques s'appuient sur l'opérateur de Jacobi [5].

Si (M, g) est une variété riemannienne localement symétrique de rang 1 ou une variété riemannienne plate, alors le groupe des isométries locales agit transitivement sur la sphère unité du fibré tangent, et ainsi les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi sont constantes. En 1990, Robert Osserman dans [61] conjectura que l'inverse est vraie :

si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi $J_{\mathcal{R}}(X)$ sont indépendantes du point p de M et du vecteur unitaire X tangent en p à M, alors M est un espace localement symétrique de rang 1 ou un espace plat.

L'étude de cette conjecture est le début de cette théorie. Plusieurs chercheurs ont travaillé sur la conjecture. Les premiers résultats ont été publiés avant la conjecture elle-même par Chi [26] en 1988. Il démontra la conjecture pour les variétés riemanniennes de dimension $m = 2k + 1$, $m = 4k + 2$ et $m = 4$. Il obtient d'autres résultats dans [27, 28]. Cependant, en 1994 Gilkey dans [43] donna des exemples de tenseur de courbure qui ne sont pas localement symétriques, mais pour lesquels les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi dépendent de p et sont indépendantes de X. En 1995, Gilkey, Swann et Vanhecke dans l'article [46], ont suggéré une approche à deux étapes pour résoudre la conjecture d'Osserman. La première étape consiste à montrer qu'il existe une structure de Clifford compatible avec la structure d'Osserman. La deuxième étape est d'utiliser l'identité différentielle de Bianchi pour montrer que l'espace est localement symétrique. L'existence d'une dualité entre la structure d'Osserman et la structure de Clifford a été aupparavent signalée dans [43]. Inspiré par les articles [43, 46] et l'article de Rakić [65], Yuri Nikolayevsky dans une série de cinq articles [53, 54, 55, 56, 57] prouva la conjecture d'Osserman lorsque la dimension de la variété est différente de 16.

Le terme de variété d'Osserman fut introduit par Gilkey, Swann et Vanhecke en 1995. Diverses caractérisations des variétés d'Osserman ont été obtenues. Mais le développement de la théorie a aussi conduit à d'autres concepts d'Osserman comme celui des variétés conformément d'Osserman et des variétés affines d'Osserman.

Si l'opérateur de Jacobi des variétés riemanniennes est aujourd'hui assez bien connu et s'est révélé un outil fécond, celui des variétés pseudo-riemanniennes représente encore un vaste champ de recherche ouvert. Cet état de fait, ainsi que l'attrait du monde pseudo-riemannien, si semblable en apparence au cas riemannien et au comportement pourtant parfois très différent, son intérêt en relativité générale, incitent à s'intéresser au cas pseudo-riemannien.

En 1997, une réponse positive à la conjecture a été obtenue par García-Río, Kupeli et Vázquez-Abal [37] et par Blăzić, Bokan et Gilkey [9] en géométrie lorentzienne. Ils ont montré que toute variété lorentzienne d'Osserman est une forme d'espace réelle. Finalement la conjecture a été généralisée en géométrie pseudo-riemannienne. Il existe beaucoup de métriques pseudo-riemanniennes d'Osserman non symétriques [39, 40] et ainsi que des métriques d'Osserman symétriques qui ne sont pas de rang 1 [42, 64]. Ce qui diversifie la recherche sur les variétés pseudo-riemanniennes d'Osserman. Nous mentionnons les résultats suivants :

- Bonome, Castro, García-Rio, Hervella et Vázquez-Lorenzo dans [16], ont prouvé l'existence de variétés pseudo-riemanniennes kählérienne d'Osserman qui ne sont pas localement symétriques.
- García-Río, Vázquez-Abal et Vázquez-Lorenzo dans [40] ont construit des exemples de métriques pseudo-riemanniennes d'Osserman de signature $(2, 2)$ qui ne sont pas localement symétriques.
- Alekseevsky, Blăzić, Bokan et Rakić [2], ont montré qu'il existe une dualité entre les variétés pseudo-riemanniennes d'Osserman de dimension 4 et les variétés d'Einstein auto-duale (ou anti auto-duale).
- Dans [11], les auteurs ont construit des exemples de métriques d'Osserman de signature $(2, 2)$ qui ne sont pas localement homogènes.
- Dans [12], Blăzić, Bokan et Rakić ont prouvé l'existence des variétés pseudo-riemanniennes d'Osserman de rang 2. Le premier exemple a été construit par Rakić dans [64].
- Dans [42], García-Rio et Vázquez-Lorenzo ont donné une classification complète

des variétés pseudo-riemanniennes d'Osserman localement symétriques de signature $(2, 2)$.

— Garcío-Río, Rakić et Vázquez-Abal dans [41] ont montré qu'une variété kählérienne de dimension 4 est d'Osserman si et seulement si elle est une forme d'espace complexe indéfinie ou une surface complexe de courbure de Ricci nulle.

— Dans [34, 35], des exemples de métriques d'Osserman dont les opérateurs de Jacobi ne sont ni diagonalisables ni nilpotents sont construits. Les variétés avec un opérateur de Jacobi non-diagonalisable ont une géométrie très riche.

En 2003, Gilkey et Blăzić ont introduit la notion de variété conformément d'Osserman. *Une variété riemannienne est dite conformément d'Osserman si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi associé au tenseur de courbure conforme sont constantes.* Ils ont donné dans [13, 14] une classification complète des variétés riemanniennes conformément d'Osserman de dimension $m = 2k + 1, m = 4k + 2$ et $m = 4$. Dans le cas lorentzien, ils ont montré que toute variété lorentzienne conformément d'Osserman est conformément plate [8, 14]. L'étude des variétés pseudo-riemanniennes conformément d'Osserman a démarée en 2006 par Brozos-Vázquez et al. dans le papier [22]. La description n'est pas complète, mais des résultats importants ont été établis. Il a été prouvée dans [22] qu'une variété pseudo-riemannienne conformément d'Osserman de signature $(2, 2)$ est soit auto-duale soit anti-auto-duale. Nous avons exhibé dans [29] une famille de métriques conformément d'Osserman nilpotentes et géodésiquement complète de signature $(2, 2)$.

Les variétés d'Osserman ont surtout été étudiées dans le cadre de la géométrie pseudo-riemannienne, c'est-à-dire dans un cadre métrique. En 1999, García-Río, Kupeli, Vázquez-Abal et Vázquez-Lorenzo dans [38] ont introduit la notion de variété affine d'Osserman : *une variété affine d'Osserman est une variété affine qui satisfait la condition d'Osserman.*

La notion de variété affine d'Osserman a été introduite pour construire des métriques d'Osserman sur le fibré cotangent d'une variété affine via l'extension riemannienne. Elle se place à un point de confluence de deux théories : la géométrie affine et la géométrie pseudo-riemannienne.

L'étude de la conjecture d'Osserman et des variétés d'Osserman en géométrie pseudo-riemannienne et en géométrie affine est d'actualité. Depuis 1990, le sujet a fait l'objet de plusieurs articles et quatre monographies [18, 39, 44, 45] sont déjà publiées .

Objectif et présentation des résultats de la thèse

Notre principal intérêt ici est d'étudier deux différentes généralisations de la notion de variété d'Osserman. La première est celle qui consiste à étudier les variétés conformément d'Osserman. La seconde consiste, à étudier les variétés affines d'Osserman. On s'intéresse ensuite à construire explicitement des métriques d'Osserman en utilisant les techniques de construction de métriques suivantes : *transformation conforme, produit direct, produit tordu, produit doublement tordu et l'extension riemannienne.*

Cette dissertation comporte cinq (5) chapitres. Dans le chapitre I, nous rappelons quelques concepts de base de la géométrie pseudo-riemannienne. Il est surtout consacré à fixer le cadre général et les notations usuelles dans ce document.

Dans le chapitre II, nous présentons les variétés d'Osserman et conformément d'Osserman. La section 2 est consacrée à l'étude des variétés d'Osserman. Des exemples de variétés d'Osserman sont exposés et une classification est donnée. La section 3 est consacrée à l'étude des variétés conformément d'Osserman. Le résultat principal de ce chapitre est la description d'une famille de métriques pseudo-riemanniennes conformément d'Osserman de signature $(2,2)$.

Le chapitre III est consacré à l'étude de la préservation de la condition d'Osserman par changement conforme de métrique. Plus précisement, nous étudions le problème suivant :

Problème : Soit (M,g) une variété riemannienne d'Osserman et soit $\bar{g} = \psi^{-2} \cdot g$ une métrique conformément équivalente à g. A quelle condition sur ψ, la variété $(M, \bar{g} = \psi^{-2} \cdot g)$ est aussi d'Osserman ?

Le chapitre est divisé en deux parties. La première est inspirée par l'étude des tranformations conformes préservant le tenseur de Ricci [50, 52]. Nous avons établi une relation entre les opérateurs de Jacobi associés à deux métriques conformes. Nous avons également établi une condition suffisante sur le facteur de conformalité pour que la condition d'Osserman soit preservée par changement conforme de métriques. Nous avons aussi obtenu une relation entre les valeurs propres des opérateurs de Jacobi de deux métriques conformément équivalentes. Dans la deuxième partie, nous étudions les applications de Jacobi entre variétés d'Osserman. Après la définition et le rappel de certaines propriétés des applications de Jacobi, nous avons montré que toute application de Jacobi préserve la structure d'Osserman.

Dans le chapitre IV, nous étudions les conditions d'Osserman et conformément d'Osserman sur un produit doublement tordu de deux variétés riemanniennes (respectivement lorentziennes). Dans la première partie de ce chapitre, nous avons établit deux résultats qui ne sont pas tout à fait classiques. D'abord on a établit la relation entre la connexion de Levi-Civita d'une variété produit doublement tordue $M := B_f \times_b F$ et les connexions de Levi-Civita de B et F. Ensuite, on a établit la relation entre la courbure de la variété M et les courbures de B et F. Dans la deuxième partie, nous utilisons des résultats sur la description des variétés produit direct et produit tordu d'Osserman et conformément d'Osserman pour dégager une description des variétés riemanniennes et lorentziennes produit doublement tordu d'Osserman et conformément d'Osserman. Dans le cas riemannien, nous avons prouvée que toute variété produit doublement tordu conformément d'Osserman est localement conformément plate et que toute variété produit doublement tordu d'Osserman est à courbure sectionnelle constante. Dans le cas lorentzien, nous avons montré que toute variété produit doublement tordu conformément d'Osserman est localement conformément plate et que toute variété produit doublement tordu d'Osserman est à courbure sectionnelle constante.

Enfin, le chapitre V est consacré à l'étude des variétés affines d'Osserman. Le chapitre est divisé en cinq sections. A la deuxième section, nous donnons une définition des variétés affines d'Osserman et les premiers résultats concernant l'étude de cette classe de variété. Nous montrons que la propriété affine d'Osserman est preservée par le produit de variété. Dans la section 5.3, on obtient un théorème de description locale des surfaces affines d'Osserman et des exemples sont donnés. Nous obtenons une équivalence entre la notion de connexion affine d'Osserman et l'antisymmétrie du tenseur de Ricci d'une connexion affine. Nous prouvons que toute connexion affine d'Osserman localement symétrique est de courbure de Ricci nulle et toute connexion affine d'Osserman localement antisymétrique est de courbure de Ricci antisymétrique. Des exemples de connexions affines d'Osserman sont construits. La section 5.4 est consacrée à une étude d'une famille de variétés affines d'Osserman de dimension 3. Comme applications, des exemples de métriques d'Osserman de signature $(3,3)$ sont construits sur le fibré cotangent de la variété affine ; c'est l'object de la section 5.5.

Première partie

Condition d'Osserman en géométrie pseudo-riemannienne

Chapitre Un

Préliminaires

Sommaire

Ce chapitre est une revue de quelques concepts de géométrie pseudo-riemannienne qui seront utilisés dans cette thèse. En fait, il va permettre de fixer les notations et de rappeler quelques définitions. Les résultats énoncés dans cette partie ne seront pas tous démontrés. Toutefois des indications ou des démonstrations partielles seront fournies pour certains d'entre eux.

1.1 Rappel sur la géométrie pseudo-riemannienne

Soit M une variété différentiable de dimension m. Nous notons par $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur M. L'ensemble des champs de vecteurs lisses, le fibré tangent et le fibré cotangent de M sont respectivement notés $\mathfrak{X}(M)$, TM et T^*M.

Soit $(u_1, \cdots, u_m)$ un système de coordonnées locales au voisinage d'un point p de M. Une base de T_pM est donnée par $(\partial_1, \cdots, \partial_m)$, où nous notons $\partial_i := \frac{\partial}{\partial u_i}$. De même on désigne par $(du_1, \cdots, du_m)$ la base de T_p^*M.

1.1.1 Connexion

Définition 1.1.1. *Une connexion linéaire sur M est une application*

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array} \tag{1.1}$$

vérifiant les propriétés :

1. *$\nabla_X Y$ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X pour tous f, g dans $C^\infty(M)$:*

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y;$$

2. *$\nabla_X Y$ est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à Y pour a, b dans $\mathbb{R}$:*

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2;$$

3. *∇ vérifie la règle de Leibniz pour tout f dans $C^\infty(M)$:*

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X \cdot f)Y.$$

Dans un système de coordonnées locales (u_i), la connexion est complètement déterminée par

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

où les Γ_{ij}^k sont les coefficients de la connexion. A toute connexion ∇ sont associés deux tenseurs qui ont des significations géométriques intéressantes : le tenseur de torsion et le tenseur de courbure.

Le *tenseur de torsion* T de la connexion ∇ est l'application

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

donnée par :

$$T(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - [X, Y]. \tag{1.2}$$

En utilisant l'antisymétrie du crochet des champs de vecteurs ($[X, Y] = -[Y, X]$), on montre que le tenseur de torsion est antisymétrique. Dans une base $(\partial_i)_{i=1,\cdots,m}$, ce tenseur a pour composantes T_{ij}^k définies par

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

On constate que ce tenseur mesure le défaut des coefficients de la connexion à être antisymétriques. La nullité de la torsion est équivalente à la relation $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Une connexion ∇ dont le tenseur de torsion est nul est dite *sans torsion* ou *symétrique*. Les exemples principaux de connexions sans torsion sont les connexions de Levi-Civita

La *courbure* $\mathcal{R}$ de la connexion ∇ est l'application qui à chaque paire $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ fait correspondre l'application linéaire $\mathcal{R}(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ donnée par :

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{1.3}$$

La courbure mesure la non commutativité de ∇_X et ∇_Y.

1.1.2 Métrique pseudo-riemannienne

Définition 1.1.2. *Soit M une variété différentiable de dimension m et g un $(0,2)$-tenseur défini sur M. Le tenseur g est dit métrique pseudo-riemannienne si pour tout $p \in M$*

$$\begin{array}{rcl} g_p : T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & g_p(X,Y) \end{array} \tag{1.4}$$

est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur M.

Une variété pseudo-riemannienne est un couple (M,g), où M est une variété différentiable et g est une métrique pseudo-riemannienne.

Soit U un ouvert de M. L'expression de g en coordonnées locales en un point p de U est donnée par :

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(p) du_i \otimes du_j;$$

avec

$$g_{ij} = g_{ji} \quad \text{(symétrie)} \quad \text{et} \quad det(g_{ij}) \neq 0 \quad \text{(non-dégénéréscence)}.$$

Si la matrice de g, constituée des éléments $g_{ij}(p)$, a r valeurs propres positives et $s = m - r$ valeurs propres négatives, alors on dit que la métrique g est de *signature* (p,q). La signature ne dépend pas de la base choisie sur T_pM. Nous distinguons deux cas essentiels :

— le cas de la signature $(m,0) = (+,\cdots,+)$: on parle alors de *métriques riemanniennes* ;
— le cas de la signaure $(m-1,1) = (+,\cdots,+,-)$ ou $(1,m-1)$: on parle alors de *métriques lorentziennes.*

Il a été prouvé que de nombreuses différences existent entre les métriques riemanniennes et les métriques pseudo-riemanniennes, entrainant un intérêt à l'étude de la géométrie pseudo-riemannienne [3, 60]. Notons que toute variété paracompacte peut être munie d'une structure riemannienne, alors que l'existence d'une métrique lorentzienne sur une variété est subordonnée à la nullité de la classe d'Euler.

La métrique est de classe C^∞ si les fonctions g_{ij} dépendent de façon C^∞ des p. Lorsque les g_{ij} ne dépendent pas des p, la métrique est dite *plate*. Les métriques riemanniennes plates sont dites *euclidiennes*. Les métriques lorentziennes plates sont dites *métriques de Minkowski.*

Deux vecteurs $X, Y \in T_pM$ sont *orthogonaux* si $g(X,Y) = 0$. Notons que, si g admet des valeurs propres de signes contraires, alors il existe au moins un vecteur non trivial $Z \in T_pM$ tel que $g(Z,Z) = 0$; on parle alors de vecteur *isotrope.*

Définition 1.1.3. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne, $p \in M$ et $X \in T_pM$.*

1. *X est dit de type espace, si $g(X, X) > 0$.*
2. *X est dit de type temps, si $g(X, X) < 0$.*
3. *X est dit vecteur unité si $g(X, X) = 1$.*

Soient $S_p^+(M, g), S_p^-(M, g)$ et $S_p(M, g)$ les ensembles des vecteurs définis comme suit :

$$\begin{aligned} S_p^+(M,g) &= \{X \in T_pM/g(X,X) = 1\}; \\ S_p^-(M,g) &= \{X \in T_pM/g(X,X) = -1\}; \\ S_p(M,g) &= \{X \in T_pM/|g(X,X)| = 1\} = S_p^+(M,g) \cup S_p^-(M,g). \end{aligned}$$

Définition 1.1.4. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. Alors*

1. *$S^+(M, g) = \cup_{p\in M} S_p^+(M, g) = \{X \in TM/g(X, X) = 1\}$ est appelé fibré unité de type espace de (M, g).*
2. *$S^-(M, g) = \cup_{p\in M} S_p^-(M, g) = \{X \in TM/g(X, X) = -1\}$ est appelé fibré unité de type temps de (M, g).*
3. *$S(M, g) = \cup_{p\in M} S_p(M, g) = \{X \in TM/|g(X, X)| = 1\}$ est appelé fibré unité de (M, g).*

1.1.3 La courbure en géométrie pseudo-riemannienne

Tenseur de courbure de Riemann

Le premier invariant géométrique que l'on rencontre en s'éloignant de l'espace euclidien est la notion de courbure. Robert Osserman [61], décrit la courbure comme *le concept central en géométrie riemannienne qui permet de distinguer l'aspect géométrique de la variété des autres aspects qui sont analytiques, algébriques ou topologiques.*

— Si nous munissons une variété différentiable M d'une métrique g, alors sa courbure est complètement déterminée. Si la métrique g a des propriétés parfaites (par exemple un groupe d'isométries), alors ceci reflète une courbure parfaite.

— Réciproquement, nous pouvons déduire des informations sur la métrique à partir des propriétés de la courbure. Dans d'autres cas, la courbure détermine complètement la métrique (au moins localement). Les espaces localement symétriques en sont les principaux exemples ; ils se distinguent des non-symétriques par leurs courbures parallèles et à partir de la courbure, on peut reconstruire la variété et la métrique.

Les informations sur la courbure sont contenues dans le *tenseur de courbure de Riemannan R*. C'est un object analytique, un $(0, 4)$-tenseur qui n'est pas facile à appréhender, malgré le nombre de ses symétries. Il est très difficile d'extraire l'information géométrique comme telle.

L'objectif de la théorie de la courbure est de répandre la lumière sur la relation entre la courbure d'une variété et ses propriétés géométriques. *La courbure est un pont entre les propriétés géométriques et la métrique elle-même.*

L'étude de la variété à partir de la courbure a deux aspects complémentaires qui correspondent parfaitement aux deux passages suivants : de la métrique (et toutes ses implications géométriques) à la courbure et de la courbure à la métrique.

Étant donnée une variété pseudo-riemannienne (M, g), il existe une et une seule connexion linéaire appelée *connexion de Levi-Civita* de (M, g) telle que pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X &= [X, Y], && (1.5)\\ g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) &= X \cdot g(Y, Z). && (1.6) \end{aligned}$$

Ces formules traduisent respectivement la condition de nullité de la torsion et la compatibilité de la connexion avec la métrique.

Pour une variété pseudo-riemannienne, les coefficients de la connexion sont appelés *symboles de Christoffel*. Ils sont donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}).$$

La courbure associée à la connexion de Levi-Civita est appelé *tenseur de courbure de Riemann* et vérifie

$$R(X, Y, Z, T) := g(\mathcal{R}(X, Y)Z, T). \tag{1.7}$$

Sur une variété riemannienne, le tenseur de courbure de Riemann est l'obstruction à l'existence des coordonnées euclidiennes.

Propriétés algébriques du tenseur de courbure de Riemann

Proposition 1.1.1. *Pour tout $p \in M$ et tous $X, Y, Z, T \in T_p M$ on a :*

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, T) &= -R(Y, X, Z, T); && (1.8)\\ R(X, Y, Z, T) &= -R(X, Y, T, Z); && (1.9)\\ R(X, Y, Z, T) &= R(Z, T, X, Y); && (1.10)\\ R(X, Y, Z, T) &+ R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0. && (1.11) \end{aligned}$$

Définition 1.1.5. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. Pour tout point p de M et pour tout couple de vecteurs linéairement indépendants $X, Y \in T_p M$, la quantité $K(X, Y)$ définie par*

$$K(X, Y) = \frac{g(\mathcal{R}(Y, X)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \tag{1.12}$$

est appelée courbure sectionnelle de M.

La courbure sectionnelle ne dépend que du plan $\sigma \subset T_pM$ engendré par X, Y et nous écrirons plus souvent $K(\sigma)$ à la place de $K(X,Y)$. Avec le tenseur de courbure, on calcule les courbures sectionnelles. Il est intéressant de noter que la réciproque est vraie.

On dit que la variété pseudo-riemannienne (M, g) est de *courbure sectionnelle constante* c si $K(\sigma) = c$ pour tout plan $\sigma \in T_pM$ et tout $p \in M$.

Proposition 1.1.2. *(M, g) est de courbure sectionnelle constante c si et seulement si le tenseur de courbure satisfait*

$$\mathcal{R}(X,Y)Z := c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]. \tag{1.13}$$

Définition 1.1.6. *La courbure de Ricci de g en p est la forme bilinéaire symétrique qui à deux vecteurs $X, Y \in T_pM$ associe le nombre réel $Ric(X,Y)$ défini par*

$$Ric(X,Y) := tr\{Z \mapsto \mathcal{R}(X,Z)V\} = \sum_{i=1}^{m} g(e_i, e_i) g(\mathcal{R}(X, e_i)Y, e_i) \tag{1.14}$$

où $(e_i)_{i=1,\cdots,m}$ est une base orthonormée de T_pM.

Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite à *courbure de Ricci constante* s'il existe $\rho \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout vecteur unitaire X, son tenseur de Ricci Ric soit proportionnelle à la métrique g i.e.

$$Ric(X,X) = \rho. \tag{1.15}$$

Cette condition est équivalente à dire que $Ric = \rho g$. Les variétés à courbure de Ricci constante sont appelées *variétés d'Einstein.*

Définition 1.1.7. *La courbure scalaire de la variété pseudo-riemannienne (M, g) est la fonction $\tau : M \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\tau = Scal := \sum_{i=1}^{m} Ric(e_i, e_i) \tag{1.16}$$

où $(e_i)_{i=1,\cdots,m}$ est une base pseudo-orthonormée de T_pM.

Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite à *courbure scalaire constante* si la fonction τ est constante.

Remarque 1.1.1. *Le tenseur de courbure de Riemann et la courbure de Ricci peuvent être définis pour des connexions linéaires sans faire intervenir la métrique. Par contre la courbure scalaire fait usage de la métrique.*

En dimension 2, il n'y a qu'une seule notion de courbure, la *courbure de Gauss*. Toutes les trois autres courbures lui sont équivalentes. En dimension 3, la courbure de Ricci détermine la courbure de Riemann. Les trois notions de courbures ne sont pleinement distinctes qu'à partir de la dimension 4.

Décomposition du tenseur de courbure

Définition 1.1.8. *On appelle produit de Kulkarni-Nomizu de deux formes bilinéaires symétriques h et k noté $h \odot k$ le tenseur défini par :*

$$\begin{aligned}(h \odot k)(X,Y,Z,T) &= h(X,Z)k(Y,T) + h(Y,T)k(X,Z) \\ &- h(X,T)k(Y,Z) - h(Y,Z)k(X,T).\end{aligned} \tag{1.17}$$

A l'aide de ce produit, le tenseur de courbure de Riemann R s'écrit de façon unique :

$$R = \frac{\tau}{2m(m-1)} g \odot g + \frac{1}{m-2}\Big(Ric - \frac{\tau}{m} g\Big) \odot g + W \tag{1.18}$$

où :

— $U = \frac{\tau}{2m(m-1)} g \odot g$ est la partie de R à courbure sectionnelle constante.

— $Z = \frac{1}{m-2}(\rho - \frac{\tau}{m} g) \odot g$ est la partie sans trace du tenseur de Ricci de R. Elle mesure le défaut de la métrique à être une métrique d'Einstein.

— W est le tenseur de courbure conforme de Weyl.

Si nous considérons les sous-espaces correspondant, c'est-à-dire

$$\mathfrak{R} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}$$

nous avons :

$\dim M$	$\dim \mathfrak{R}$	$\dim \mathcal{U}$	$\dim \mathcal{Z}$	$\dim \mathcal{W}$
2	1	1	0	0
3	6	1	5	0
4	20	1	9	10
m	$\frac{1}{2}m^2(m^2-1)$	1	$\frac{1}{2}m(m+1)-1$	différence

Tenseur de courbure de Weyl

Soit $(e_1, \cdots, e_m)$ une base orthonormée de T_pM. On note g^{ij} les éléments de la matrice inverse de g. On définit l'opérator de Ricci ρ et le tenseur de Ricci $\rho(\cdot,\cdot)$ par

$$\rho X := \sum_{i,j} g^{ij}\mathcal{R}(X,e_i)e_j, \qquad \rho(X,Y) := g(\rho X, Y).$$

Soit τ la courbure scalaire. On définit de même le tenseur de courbure de Weyl $\mathcal{W}$ par :

$$\mathcal{W}(X,Y)Z = \mathcal{R}(X,Y)Z + \frac{1}{(m-1)(m-2)}\tau\mathcal{R}^0(X,Y)Z + \frac{1}{(m-2)}\mathcal{L}(X,Y)Z,$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^0(X,Y)Z &= g(Y,Z)X - g(X,Z)Y,\\ \mathcal{L}(X,Y)Z &= g(\rho Y,Z)X - g(\rho X,Z)Y + g(Y,Z)\rho X - g(X,Z)\rho Y.\end{aligned}$$

Définition 1.1.9. *Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite localement conformément plate si tout point de M admet un voisinage ouvert conforme à un ouvert euclidien.*

Cette définition est équivalente à :

1. (M, g) est conformément plate s'il existe localement une fonction positive f de classe C^∞ telle que $e^f g$ soit une métrique plate.
2. Si $m \geq 4$, (M^m, g) est conformément plate si et seulement si le tenseur de Weyl est nul.

1.2 La géométrie de l'opérateur de courbure

En géométrie pseudo-riemannienne, le tenseur de courbure d'une variété M induit sur l'espace tangent T_pM en un point $p \in M$ des opérateurs de courbure dont les valeurs propres déterminent la géométrie de la variété. Les plus importants sont les opérateurs [1] : de *Jacobi*, de *Szabó* et de *courbure antisymétrique*.

1.2.1 L'opérateur de Jacobi

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et soit $\mathcal{R}$ son opérateur de courbure. Soit X un vecteur unité de l'espace tangent T_pM en un point $p \in M$. *L'opérateur de Jacobi* lié à X est l'opérateur linéaire $J_{\mathcal{R}}(X) : T_pM \longrightarrow T_pM$, défini par

$$J_{\mathcal{R}}(X)Y = \mathcal{R}(Y,X)X, \tag{1.19}$$

où $Y \in T_pM$.

Proposition 1.2.1. *L'opérateur de Jacobi $J_{\mathcal{R}}(X)$ est un opérateur auto-adjoint.*

Démonstration. Pour tous $Y, Z \in T_pM$ on a :

$$\begin{aligned}g(J_{\mathcal{R}}(X)Y,Z) &= g(\mathcal{R}(Y,X)X,Z)\\ &= g(\mathcal{R}(Z,X)X,Y)\end{aligned}$$

d'où $g(J_{\mathcal{R}}(X)Y,Z) = g(Y,J_{\mathcal{R}}(X)Z)$. □

1. Ce sont des opérateurs linéaires qui assignent à chaque point de la variété pseudo-riemannienne un nombre réel ou complexe (valeur propre) caractérisant la courbure intrinsèque de la variété en ce point.

Proposition 1.2.2. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et soit $\mathcal{R}$ l'opérateur de courbure de (M, g). Si $J_{\mathcal{R}} = 0$ alors $R = 0$.*

Démonstration. Supposons que $J_{\mathcal{R}} = 0$. Alors $R(Y, X, X, T) = 0$ pour tous X, Y, T. En remplaçant en X par $X + V$ on obtient

$$R(Y, X, V, T) + R(Y, V, X, T) = 0.$$

A partir de l'identité algébrique de Bianchi on a :

$$\begin{aligned} R(Y, X, V, T) + R(Y, V, T, X) + R(Y, T, X, V) &= 0 \\ R(Y, X, V, T) - R(Y, V, X, T) + R(Y, T, X, V) &= 0 \\ R(Y, X, V, T) + R(Y, X, V, T) - R(Y, X, T, V) &= 0 \\ 3R(Y, X, V, T) &= 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.3. *Soit $J_{\mathcal{R}}(X)$ l'opérateur de Jacobi d'une variété pseudo-riemannienne (M, g). Alors :*

$$trace\{J_{\mathcal{R}}(X)\} = Ric(X, X).$$

Démonstration. Par définition

$$\begin{aligned} trace\{J_{\mathcal{R}}(X)\} &= \sum_{i=1}^{m} g(J_{\mathcal{R}}(X)e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(\mathcal{R}(e_i, X)X, e_i) \\ &= Ric(X, X). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.4. *Soient $J_{\mathcal{R}}(X)$ l'opérateur de Jacobi d'une variété pseudo-riemannienne (M, g) et $X \in S_p(M, g)$. Considérons le plan $\sigma = vect\{Y, X\} \in T_pM$ avec $Y \in X^{\perp}$. Alors la courbure sectionnelle de σ notée $K(\sigma)$ est donnée par :*

$$K(\sigma) = g(J_{\mathcal{R}}(X)Y, Y).$$

En géométrie riemannienne, les valeurs propres de $J_{\mathcal{R}}(X)$ représentent les valeurs extrémales des courbures sectionnelles, et en géométrie lorentzienne les valeurs propres jouent un rôle fondamental dans la formulation des modèles mathématiques en rélativité générale.

1.2.2 L'opérateur de Jacobi conforme

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et soit $\mathcal{W}$ l'opérateur de courbure conforme de Weyl de (M, g). Soit X un vecteur unité de l'espace tangent T_pM en un point $p \in M$. L'*opérateur de Jacobi conforme* est l'opérateur linéaire $J_{\mathcal{W}}(X) : T_pM \longrightarrow T_pM$, défini par

$$J_{\mathcal{W}}(X)Y = \mathcal{W}(Y, X)X, \tag{1.20}$$

où $Y \in T_pM$. L'opérateur de Jacobi conforme est un outil très utile en géométrie conforme.

Proposition 1.2.5. *L'opérateur de Jacobi conforme $J_{\mathcal{W}}(X)$ est un opérateur auto-adjoint.*

Proposition 1.2.6. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. L'opérateur de Jacobi conforme $J_{\tilde{\mathcal{W}}}$ associé à la métrique[2] $\bar{g} = \psi^{-2} \cdot g$ et l'opérateur de Jacobi conforme $J_{\mathcal{W}}$ associé à la métrique g, vérifie la relation*

$$J_{\tilde{\mathcal{W}}} = J_{\mathcal{W}}$$

Démonstration. Soit $\bar{g} = \psi^{-2} \cdot g$, où ψ est une fonction non nulle sur M. On a :

$$\begin{aligned} \bar{g}(J_{\bar{\mathcal{W}}}(X)Y, Z) &= \bar{g}(\bar{\mathcal{W}}(Y, X)X, Z) \\ &= \bar{\mathcal{W}}(Y, X, X, Z) \end{aligned}$$

vue comme un (4,0)-tenseur, on a : $\bar{\mathcal{W}} = \psi^{-2} \cdot \mathcal{W}$. Alors

$$\begin{aligned} \bar{g}(J_{\bar{\mathcal{W}}}(X)Y, Z) &= \bar{\mathcal{W}}(Y, X, X, Z) = \psi^{-2} \cdot \mathcal{W}(Y, X, X, Z) \\ &= \psi^{-2} \cdot g(\mathcal{W}(Y, X)X, Z) \\ &= \psi^{-2} \cdot g(J_{\mathcal{W}}(X)Y, Z) \\ &= \bar{g}(J_{\mathcal{W}}(X)Y, Z). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.7. *Soit $J_{\mathcal{W}}(X)$ l'opérateur de Jacobi conforme. Alors :*

$$trace\{J_{\mathcal{W}}(X)\} = 0.$$

2. La métrique $\bar{g}$ est dite conformément équivalente à g sur M.

1.2.3 L'opérateur de Szabó

Soit X un vecteur unité, l'*opérateur de Szabó* est défini par

$$S_{\mathcal{R}}(X)Y = (\nabla_X(\mathcal{R})(Y, X)X. \tag{1.21}$$

Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite *Szabó de type espace* (respectivement *Szabó de type temps*) si les valeurs propres de l'opérateur de Szabó $S_{\mathcal{R}}$ sont constantes sur $S^+(M, g)$ (respectivement $S^-(M, g)$). Gilkey a montré dans [44] que les deux notions sont équivalentes.

Soit (M, g) une variété riemannienne. Nous disons que (M, g) est un espace *homogène doublement transitive* si les isométries locales de (M, g) agissent transitivement sur la sphère unité du fibré tangent. Ceux ci impliquent que les valeurs propres de $S_{\mathcal{R}}$ sont constantes sur $S(M, g)$. Szabó [67] a montré que ceci implique que $\nabla R = 0$ et il utilisa cette observation pour donner une preuve sur le fait que toute variété riemannienne homogène doublement transitive est soit plate ou un espace symétrique de rang 1. Pour cette raison, l'opérateur porte son nom.

1.2.4 L'opérateur de courbure antisymétrique

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et soit $\{x, y\}$ une base orienté d'un plan π. L'opérateur de courbure antisymétrique $\mathcal{R}(\pi)$ est défini par

$$\mathcal{R}(\pi) = \frac{\mathcal{R}(x, y)}{(g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2)^{1/2}}. \tag{1.22}$$

Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite *IP*[3] *de type espace*, *IP de type mixte* ou *IP de type temps* si les valeurs propres de l'opérateur de courbure antisymétrique $\mathcal{R}(\tilde{x}, \tilde{y})$ sont constantes sur les grassmiennes[4] $Gr^+_{0,2}(T_pM)$, $Gr^+_{1,1}(T_pM)$ et $Gr^+_{0,2}(T_pM)$.

1.3 Variétés de Walker

Définition 1.3.1. *[18] Une variété de Walker est un triplet $(M, g, \mathcal{D})$, où M est une variété différentiable de dimension m, g est une métrique indéfinie et $\mathcal{D}$ est une distribution totalement isotrope de dimension n.*

Théorème 1.3.1. *[18] Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension m admettant une distribution parallèle totalement isotrope $\mathcal{D}$ de dimension n. Une forme*

3. IP=Ivanova Petrova

4. Les grassmanniennes sont des variétés dont les points correspondent aux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel fixé. On note $Gr_{k,m}(T_pM)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension k dans un espace de dimension m.

canonique de la métrique de Walker est donnée par :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_n \\ 0 & A & H \\ Id_n & {}^tH & B \end{pmatrix},$$

où Id_n est la matrice identité d'ordre (n,n) et A, B, H sont des matrices dont les coefficients sont fonctions des coordonnées satisfaisant

1. *A et B sont des matrices symétriques d'ordre respectivement $(m-2n, m-2n)$ et (n,n) . H est une matrice d'ordre $(m-2n, n)$ et ${}^tH$ est la transposé de H.*
2. *A et H ne dépendent pas des coordonnées $(u_1, \cdots, u_n)$.*

La distribution totalement isotrope $\mathcal{D}$ est localement engendré par

$$\{\partial_1, \cdots, \partial_n\}.$$

Soit une métrique pseudo-riemannienne de signature $(2,2)$ et de dimension 4 admettant une distribution parallèle totalement isotrope maximale [5] $\mathcal{D}$. Alors il existe un système de coordonnées $(u_1, \cdots, u_4)$ dans lequel la matrice de g a la forme réduite suivante :

$$g_{(u_1,\cdots,u_4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix},$$

où a, b, c sont des fonctions dépendant de $(u_1, \cdots, u_4)$. Voir [18] pour plus de détails sur les variétés de Walker.

1.4 Produit direct pseudo-riemannien

Définition 1.4.1. *Soient (B, g_B) et (F, g_F) deux variétés pseudo-riemanniennes de dimensions réelles r et s respectivement. Le produit direct de B et F, noté $M := B \times F$ est la variété produit $B \times F$ munie du tenseur métrique*

$$g = \pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F).$$

où π et σ sont les projections naturelles de $B \times F$ sur B et F respectivement.

De façon explicite, si X et Y sont des vecteurs tangents à $B \times F$ en un point (p,q), alors

$$g(X,Y)(p,q) = g_B(\pi_{*(p,q)}(X), \pi_{*(p,q)}(Y)) + g_F(\sigma_{*(p,q)}(X), \sigma_{*(p,q)}(X)).$$

Remarque 1.4.1. *Soit $M := B \times F$ un produit direct pseudo-riemannien.*

1. *La variété B est appelée la base et la variété F la fibre.*

5. Une distribution parallèle totalement isotrope est maximale si $n = \frac{m}{2}$.

2. *Le produit direct est riemannien si* (B, g_B) *et* (F, g_F) *sont riemanniennes.*
3. *Le produit direct est lorentzien si l'un des facteurs est riemannien et l'autre est lorentzien.*

Dans un système de coordonnées locales, la représentation matricielle de la métrique pseudo-riemannienne (g_{ij}) de M en fonction de celles (g_{ab}) et $(g_{\alpha\beta})$ de B et F respectivement, est donnée par la matrice :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

où $a, b = 1, 2, \cdots, r$; $\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, s$ et $i, j = 1.2, \cdots, r+s$.

Proposition 1.4.1. *([60]) Soient* ∇^B, ∇^F *et* ∇ *les connexions de Levi-Civita de* B, F *et de* $B \times F$ *respectivement. Soient* $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ *et* $U, V \in \mathfrak{X}(F)$*. Alors :*

1. $\nabla_X Y = \nabla^B_X Y$;
2. $\nabla_U V = \nabla^F_U V$;
3. $\nabla_X U = \nabla_U X = 0$.

Proposition 1.4.2. *([60]) Soient* $\mathcal{R}^B$, $\mathcal{R}^F$ *et* $\mathcal{R}$ *les opérateurs de courbure de* B, F *et* $B \times F$ *respectivement. Soient* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ *et* $U, V, W \in \mathfrak{X}(F)$*. Alors*

1. $\mathcal{R}(X, Y)Z = \mathcal{R}^B(X, Y)Z$;
2. $\mathcal{R}(U, V)W = \mathcal{R}^F(U, V)W$;
3. $\mathcal{R}(X, U)Y = \mathcal{R}(X, U)V = 0$.

1.5 Produit tordu pseudo-riemannien

Définition 1.5.1. *Soient* (B, g_B) *et* (F, g_F) *deux variétés pseudo-riemanniennes de dimensions réelles* r *et* s*. Soit* f *une fonction strictement positive sur* B*. Le produit tordu de* B *et* F *par* f*, noté* $M := B \times_f F$*, est la variété produit* $B \times F$ *munie du tenseur métrique*

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F). \tag{1.23}$$

De façon explicite, si X *et* Y *sont des vecteurs tangents à* $M \times N$ *en un point* (p, q)*, alors*

$$g(X, Y)(p, q) = g_B(\pi_{*(p,q)}(X), \pi_{*(p,q)}(Y)) + f^2(p) g_F(\sigma_{*(p,q)}(X), \sigma_{*(p,q)}(X)). \tag{1.24}$$

B *est appelé la base et* F *la fibre.*

Remarque 1.5.1. *Soit* $B \times_f F$ *un produit tordu pseudo-riemannien.*

1. *Comme dans le cas du produit direct pseudo-riemannian,* B *est appelée la base et* F *la fibre.*

2. *Si la fonction tordante f est constante, alors le produit tordu se réduit à un produit direct.*
3. *Le produit tordu est riemannien si (B, g_B) et (F, g_F) sont riemanniennes.*
4. *Le produit tordu est lorentzien si l'un des facteurs est riemannien et l'autre est lorentzien.*

Dans un système de coordonnées locales, la représentation matricielle de la métrique pseudo-riemannienne (g_{ij}) de M en fonction de celles (g_{ab}) et $(g_{\alpha\beta})$ de B et F respectivement, est donnée par la matrice :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 \\ & \\ 0 & f^2 g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

où $a, b = 1, 2, \cdots, r$; $\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, s$ et $i, j = 1.2, \cdots, r + s$.

Lemme 1.5.1. *Toute métrique d'un produit tordu est dans la classe conforme d'une métrique d'un produit direct.*

Démonstration. Soit $B \times_f F$ la variété produit tordu munie de la métrique définie par :

$$g = g_B + f^2 g_F.$$

On a :

$$g = f^2\Big[\frac{1}{f^2} g_B + g_F\Big].$$

Posons $\bar{g} = \tilde{g}_B \oplus g_F$, où $\tilde{g}_B = \frac{1}{f^2} g_B$. Ainsi on a : $g = f^2 \bar{g}$, c'est à dire que la métrique du produit tordu est conformément équivalente à une métrique d'un produit direct, où le facteur conforme est $\Psi = f^2$. □

Proposition 1.5.1. *([60]) Soient ∇^B et ∇^F les connexions de Levi-Civita de (B, g_B) et (F, g_F). Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ et $U, V \in \mathfrak{X}(F)$. La connexion de Levi-Civita ∇ de $B \times_f F$ est donnée par :*

1. $\nabla_X Y = \nabla^B_X Y$
2. $\nabla_X U = \nabla_U X = (\frac{Xf}{f})U$
3. $\mathcal{H}(\nabla_U V) = -f g_F(U, V)\nabla^B f$
4. $\mathcal{V}(\nabla_U V) = \nabla^F_U V.$

Proposition 1.5.2. *([60]) Soient $\mathcal{R}^B$ et $\mathcal{R}^F$ les tenseurs de courbures de (B, g_B) et (F, g_F). Soient $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ et $U, V, W \in \mathfrak{X}(F)$. Le tenseur de courbure $\mathcal{R}$ de $B \times_f F$ est donné par :*

1. $\mathcal{R}(X, Y)Z = \mathcal{R}^B(X, Y)Z,$
2. $\mathcal{R}(U, X)Y = -f^{-1}\nabla^2 f(X, Y)U,$

3. $\mathcal{R}(X,Y)V = \mathcal{R}(U,V)X = 0$,
4. $\mathcal{R}(X,U)V = -f^{-1}g_F(U,V)\nabla_X\nabla f$,
5. $\mathcal{R}(U,V)W = \mathcal{R}^F(U,V)W - f^{-2}g_B(\nabla f,\nabla f)\Big[g_F(U,W)V - g_F(V,W)U\Big]$.

La notion du produit tordu est une technique très importante en géométrie riemannienne qui généralise le produit direct. Elle a été introduite pour la première fois par R. L. Bishop et B. O'Neil [7] pour obtenir une large classe de variétés riemanniennes complètes à courbure négative. Le fait que beaucoup de modèles cosmologiques sont des produits tordus renforce leurs importances en relativité générale et dans l'étude des solutions de l'équation d'Einstein [3, 19]. En plus de la rélativité générale, les produits tordus ont été utilisés pour construire des exemples de variétés riemanniennes à courbure intéressante [20, 21].

Chapitre Deux

Variétés d'Osserman et Conformément d'Osserman

Sommaire

Dans ce chapitre, nous introduisons les variétés d'Osserman et conformément d'Osserman. Nous consacrons la première section à un rappel sur les tenseurs de courbure algébrique, à la définition et aux rappels de quelques résultats sur les tenseurs de courbure algébrique d'Osserman. Dans la section 2, nous introduisons les variétés d'Osserman. Des exemples de variétés d'Osserman sont exposés et une classification est donnée. La section 3 est consacrée à l'étude des variétés conformément d'Osserman. Dans la section 4, nous construisons explicitement une famille de métriques pseudo-riemanniennes conformément d'Osserman de signature $(2, 2)$. Cette dernière section à fait l'object d'une publication [29].

2.1 Introduction algébrique

Dans cette section, nous rappelons certains résultats sur les tenseurs de courbure algébriques d'Osserman. Soit V un espace vectoriel de dimension m muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note par V^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur V.

2.1.1 Tenseurs de courbures algébriques

Définition 2.1.1. *Une application quadrilinéaire $A : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ est appelée une forme de type courbure (ou tenseur de courbure algébrique) si elle satisfait les symétries* *du tenseur de courbure de Riemann, i.e.,*

$$\begin{array}{rcl} A(X,Y,Z,T) & = & -A(Y,X,Z,T), \\ A(X,Y,Z,T) & = & -A(X,Y,T,Z), \\ A(X,Y,Z,T) & = & A(Z,T,X,Y), \\ A(X,Y,Z,T) & + & A(X,Z,T,Y)+A(X,T,Y,Z)=0. \end{array}$$

Proposition 2.1.1. *Soit $A, B \in \otimes^4 V^*$ deux tenseurs de courbures algébriques. Si X, Y, respectivement X', Y' engendrent un plan α et Z, T, respectivement Z', T' engendrent un plan β alors*

$$\frac{A(X,Y,Z,T)}{B(X,Y,Z,T)} = \frac{A(X',Y',Z',T')}{B(X',Y',Z',T')}.$$

Démonstration. Soient X, Y et X', Y' deux bases du plan α avec

$$X' = a_1X + b_1Y \,\text{et}\, Y' = c_1X + d_1Y.$$

Soit Z, T et Z', T' deux bases du plan β avec

$$Z' = a_2Z + b_2T \,\text{et}\, T' = c_2Z + d_2T.$$

D'une part on a :

$$A(X',Y',Z',T') = A(a_1X + b_1Y, c_1X + d_1Y, a_2Z + b_2T, c_2Z + d_2T).$$

Après un long calcul, on trouve :

$$A(X',Y',Z',T') = (a_1d_1a_2d_2 + b_1c_1b_2c_2 - a_1d_1b_2c_2 - b_1c_1a_2d_2)A(X,Y,Z,T). \tag{2.1}$$

D'autre part on a :

$$B(X',Y',Z',T') = B(a_1X + b_1Y, c_1X + d_1Y, a_2Z + b_2T, c_2Z + d_2T).$$

Après un long calcul, on trouve :

$$B(X',Y',Z',T') = (a_1d_1a_2d_2 + b_1c_1b_2c_2 - a_1d_1b_2c_2 - b_1c_1a_2d_2)B(X,Y,Z,T). \tag{2.2}$$

En faisant le rapport de (2.1) et (2.2), on obtient le résultat. □

Proposition 2.1.2. *Soit $A \in \otimes^4 V^*$ un tenseur de courbure algébrique et soit Q la forme biquadratique $Q(X,Y) = A(X,Y,Y,X)$ associée à A. Alors*

$$\begin{array}{rcl} 24A(X,Y,Z,T) & = & Q(X+T,Y+Z) - Q(X-T,Y+Z) \\ & - & Q(X+T,Y-Z) - Q(X-T,Y-Z) \\ & - & Q(Y+T,X+Z) - Q(Y-T,X+Z) \\ & + & Q(Y+T,X-Z) - Q(Y-T,X-Z). \end{array}$$

Tenseurs de courbures canoniques

Soit $\mathcal{C}(V^*)$ l'espace des tenseurs de courbures algébriques sur V. Soit $\mathcal{S}^2(V^*)$ et $\Lambda^2(V^*)$ les sous-espaces des formes bilinéaires symétriques et antisymétriques..

Exemple 2.1.1. *Soit $\phi \in \mathcal{S}^2(V^*)$ et $\psi \in \Lambda^2(V^*)$.*

1. *Le tenseur A_ϕ défini par :*
$$A_\phi(X, Y, Z, T) = \phi(Y, Z)\phi(X, T) - \phi(X, Z)\phi(Y, T), \tag{2.3}$$
est un tenseur de courbure algébrique.
2. *Le tenseur A_ψ défini par*
$$A_\psi(X, Y, Z, T) = \psi(Y, Z)\psi(X, T) - \psi(X, Z)\psi(Y, T) - 2\psi(X, Y)\psi(Z, T), \tag{2.4}$$
est un tenseur de courbure algébrique.

Les tenseurs (2.3) et (2.4) jouent un rôle important dans la théorie des tenseurs de courbures algébriques.

Proposition 2.1.3. *([44]) La dimension de l'espace des tenseurs de courbure algébriques est donnée par :*

$$\dim \mathcal{C}(V^*) = \frac{m^2(m^2 - 1)}{12}.$$

Démonstration. □

A toute forme bilinéaire symétrique ϕ sur $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ on peut faire correspondre un opérateur symétrique Φ sur V définie par :

$$\phi(X, Y) = \langle \Phi X, Y \rangle.$$

A toute forme bilinéaire antisymétrique ψ sur $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ on peut faire correspondre un opérateur antisymétrique Ψ sur V définie par :

$$\psi(X, Y) = \langle \Psi X, Y \rangle.$$

Ainsi nous obtenons à partir de (2.3) et (2.4) les relations suivantes :

$$A_\Phi(X, Y, Z, T) := A_\phi(X, Y, Z, T) = \langle \Phi Y, Z \rangle \langle \Phi X, T \rangle - \langle \Phi X, Z \rangle \langle \Phi Y, T \rangle, \tag{2.5}$$

et

$$\begin{aligned} A_\Psi(X, Y, Z, T) : &= A_\psi(X, Y, Z, T) \\ &= \langle \Psi Y, Z \rangle \langle \Psi X, T \rangle - \langle \Psi X, Z \rangle \langle \Psi Y, T \rangle - 2\langle \Psi X, Y \rangle \langle \Psi Z, T \rangle. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Proposition 2.1.4. *On montre que :*

$$A_\Phi = A_{-\Phi} \quad et \quad A_\Psi = A_{-\Psi}.$$

Si $\Phi = Id$, alors on a : $\phi = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Ainsi la relation (2.5) devient :

$$A_{\langle \cdot,\cdot \rangle}(X,Y,Z,T) = \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle. \tag{2.7}$$

Si $\Psi = J$ avec $J^2 = -Id$, alors on a : $\psi(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$. Ainsi (2.6) devient :

$$\begin{aligned} A_J(X,Y,Z,T) &= \langle JY,Z\rangle\langle JX,T\rangle - \langle JX,Z\rangle\langle JY,T\rangle \\ &- 2\langle JX,Y\rangle\langle JZ,T\rangle. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En utilisant les tenseurs de courbures algébriques (2.7),(2.8) et les structures de Clifford, nous pouvons construire une famille de tenseur de courbure algébrique. Nous rappelons d'abord quelques résultats sur les structures de Clifford.

Structure de Clifford

Définition 2.1.2. *Une structure de Clifford d'ordre $\nu(m)$ sur V, (avec $\nu(m) \leq m$) est une collection de $\nu(m)$ applications J_i sur V satisfaisant la règle de commutation de Clifford $J_iJ_j + J_jJ_i = -2\delta_{ij}id$ pour $i,j = 1,...,\nu(m)$.*

L'ensemble $J_1,...,J_{\nu(m)}$ est une famille antisymétrique de structures complexes sur V (i.e, chaque J_i est une application linéaire $J_i : V \longrightarrow V$ satisfaisant $J_i^2 = -Id$).

Une condition topologique liée à l'existence d'une stucture de Clifford est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *([46]) Soit $m = 2^{4a+b}c$, avec c entier impair et $0 \leq b \leq 3$; a,b,c des entiers naturels.*

1. *V admet une structure de Clifford d'ordre $\nu(m)$ si et seulement si $\nu(m) \leq \rho(m)$;*
2. *TS^{m-1} admet une distribution de dimension k pour $2k \leq m-1$ si et seulement si $k \leq \rho(m)$.*

La quantité $\rho(m)$ est définie par $\rho(m) = 2^b + 8a$ et est appelée *nombre de Radon*. La quantité $\nu(m)$ est définie par $\nu(m) \leq \rho(m) - 1$ et est appelée *nombre d'Adams*. Voir [1] pour plus de détails.

Théorème 2.1.2. *[1] Soit S^{m-1} la sphère unité dans $\mathbb{R}^m$. Si le fibré tangent TS^{m-1} admet la décomposition non-triviale suivante :*

$$TS^{m-1} = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_l,$$

où les E_i sont des fibrés vectoriels de dimensions $\mu_l := \dim(E_l)$, avec $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_l$, alors : $\mu_1 + \cdots + \mu_l \leq \nu(m)$.

Définition 2.1.3. *Un tenseur $A \in \otimes^4 V^*$ admet une structure de Clifford d'ordre ν, si*

$$A(X,Y,Z,T) = c_0 A_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(X,Y,Z,T) + \sum_{i=1}^{\nu} c_i A_{J_i}(X,Y,Z,T), \tag{2.9}$$

où $c_0, c_1, \cdots, c_\nu$ sont des nombres réels avec $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$.

Nous noterons par $Cliff(\nu)$ tout tenseur de courbure algébrique qui admet une structure de Clifford d'ordre ν.

Théorème 2.1.3. *[46] Un tenseur muni d'une structure de Clifford d'ordre $\nu(m)$ est un tenseur de courbure algébrique.*

2.1.2 Tenseur de courbure algébrique d'Osserman

Tenseur de courbure algébrique d'Osserman

Soit A un tenseur de courbure algébrique sur $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. L'opérateur de Jacobi $J_{\mathcal{A}}(X)$ lié à X est l'endomorphisme $J_{\mathcal{A}}(X) : V \longrightarrow V$ défini par :

$$\langle J_{\mathcal{A}}(X)Y, T\rangle = A(Y,X,X,T), \quad \forall X \in V. \tag{2.10}$$

Définition 2.1.4. *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Alors*

1. *$S^+(V) := \{X \in V : \langle X, X\rangle = +1\}$ est appelé sphère unité de type espace de V.*
2. *$S^-(V) := \{X \in V : \langle X, X\rangle = -1\}$ est appelé sphère unité de type temps de V.*
3. *$S(V) := \{X \in V : |\langle X, X\rangle| = 1\}$ est appelé sphère unité de V*

Définition 2.1.5. *Un tenseur de courbure algébrique*

1. *A est dit d'Osserman de type espace, si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi $J_{\mathcal{A}}$ sont constantes sur $S^+(V)$.*
2. *A est dit d'Osserman de type temps, si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi $J_{\mathcal{A}}$ sont constantes sur $S^-(V)$.*

Exemple 2.1.2.

1. *L'opérateur de courbure associé au tenseur de courbure algébrique (2.7) est donné par :*

$$\mathcal{A}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(X,Y)Z := \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y. \tag{2.11}$$

On montre facilement que : $J_{\mathcal{A}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}}(X)Y = \langle X, X\rangle Y$; i.e., que le tenseur (2.7) est un tenseur de courbure algébrique d'Osserman.

2. *L'opérateur de courbure associé au tenseur de courbure algébrique (2.8) est donné par :*

$$\mathcal{A}_J(X,Y)Z = \langle JY, Z\rangle JX - \langle JX, Z\rangle JY - 2\langle JX, Y\rangle JZ. \tag{2.12}$$

On montre facilement que : $J_{\mathcal{A}_J}(X)JX = 3\langle X, X\rangle JX$; i.e., que le tenseur (2.8) est un tenseur de courbure algébrique d'Osserman.

Plus généralement on a :

Proposition 2.1.5. *Un tenseur de courbure algébrique muni d'une structure de Clifford d'ordre ν est un tenseur de courbure algébrique d'Osserman.*

Démonstration. L'opérateur de courbure associé au tenseur de courbure algébrique (2.9) est donné par :

$$\mathcal{A}(X,Y)Z = c_0\mathcal{A}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(X,Y)Z + \sum_{i=1}^{\nu} c_i\mathcal{A}_{J_i}(X,Y)Z.$$

Pour tout vecteur unitaire on a :

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{A}}(X)Y = \mathcal{A}(Y,X)X &= c_0[\langle X,X\rangle Y - \langle Y,X\rangle X] \\ &+ \sum_{i=1}^{\nu} c_i[\langle J_iX,X\rangle J_iY - \langle J_iY,X\rangle J_iX - 2\langle J_iY,X\rangle J_iX]. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} J_{\mathcal{A}}(X)Y = c_0 Y \,\mathrm{si}\, Y \perp \{X, J_1X, \cdots, J_\nu X\} \\ J_{\mathcal{A}}(X)J_iX = (c_0 + 3c_i)J_iX. \end{cases}$$

□

Remarque 2.1.1. *Notons que l'inverse n'est pas vraie. Il existe des tenseurs de courbure algébriques d'Osserman qui n'admettent pas de structures de Clifford.*

Définition 2.1.6. *Une variété riemannienne (M,g) admet une structure de Clifford $Cliff(\nu)$ en un point p de M si son tenseur de courbure est $Cliff(\nu)$ en $p \in M$. Une variété riemannienne (M,g) admet une structure de Clifford $Cliff(\nu)$ si son tenseur de courbure est $Cliff(\nu)$ en tout point.*

Définition 2.1.7. *([65]) Soit A un tenseur de courbure algébrique d'Osserman. On dit que la valeur propre λ satisfait le principe de dualité de Rakic, si pour tous vecteurs unitaires $X, Y \in S(V)$, on a :*

$$J_{\mathcal{A}}(X)Y = \lambda Y \Leftrightarrow J_{\mathcal{A}}(Y)X = \lambda X.$$

Théorème 2.1.4. *([65]) Tout tenseur de courbure algébrique d'Osserman satisfait le principe de dualité de Rakic.*

Spectre du tenseur de courbure algébrique d'Osserman

Puisque $J_{\mathcal{A}}(X)X = 0$, nous noterons par $\bar{J}_{\mathcal{A}}$ la restriction $J_{\mathcal{A}}$ sur $X^{\perp}$.

Théorème 2.1.5. *([26]) Soit A un tenseur de courbure algébrique d'Osserman sur V. Soit $\{\lambda_s, \mu_s\}_{0\leq s\leq l}$ les valeurs propres et les multiplicités de $\bar{J}_{\mathcal{A}}$ sur $S(V)$ où les multiplicités sont telles que $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_l$.*

1. *Nous avons $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_l \leq \nu(m)$.*
2. *Si $m \equiv 1 \bmod 2$, alors $\bar{J}_{\mathcal{A}}$ a une seule valeur propore.*
3. *Si $m \equiv 2 \bmod 4$, alors $\bar{J}_{\mathcal{A}}$ a au plus deux valeurs propres ; si $\bar{J}_{\mathcal{A}}$ a deux valeurs propres distinctes, alors l'une des valeurs propres est de multiplicité 1.*

Théorème 2.1.6. *([26]) Soit A un tenseur de courbure algébrique d'Osserman sur V.*

1. *Si $\bar{J}_{\mathcal{A}}$ a une seule valeur propre, alors il existe une constante c telle que $A = cA_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.*
2. *Si $\bar{J}_{\mathcal{A}}$ a deux valeurs propres distinctes et si l'une est de multiplicité 1, alors il existe une structure complexe presque hermitienne J sur V et des constantes réelles c_0 et c_1 telles que $A = c_0A_{\langle\cdot,\cdot\rangle} + c_1A_J$.*

2.2 Variétés d'Osserman

2.2.1 La condition d'Osserman en un point sur une variété pseudo-riemannienne

Définition 2.2.1. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et p un point de M. (M, g) est dite d'Osserman*

1. *de type espace en $p \in M$ si le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi $J_{\mathfrak{R}}(X)$ est indépendant de $X \in S^+_p(M, g)$;*
2. *de type temps en $p \in M$ si le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi $J_{\mathfrak{R}}(X)$ est indépendant de $X \in S^-_p(M, g)$.*

La relation entre les conditions d'Osserman de type espace et de type temps en un point $p \in M$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *([38, 39, 44]) Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et soit p un point de M. Alors (M, g) est d'Osserman de type espace en p si et seulement si (M, g) est d'Osserman de type temps en p.*

Définition 2.2.2. *Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite d'Osserman en $p \in M$ si (M, g) est d'Osserman de type espace ou (M, g) d'Osserman de type temps en p.*

Proposition 2.2.1. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. Si (M, g) est d'Osserman en $p \in M$ alors (M, g) est d'Einstein en $p \in M$.*

Remarque 2.2.1. *Notons que si (M, g) est une variété riemannienne, alors l'opérateur de Jacobi $J_{\mathfrak{R}}(X)$ est diagonaliable. Ainsi (M, g) est dite d'Osserman en $p \in M$ si et seulement si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi $J_{\mathfrak{R}}(X)$ sont indépendantes de $X \in S(M, g)$.*

2.2.2 Variétés pseudo-riemanniennes point par point et globalement d'Osserman

Définition 2.2.3. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. Alors (M, g) est d'Osserman point par point si (M, g) est d'Osserman en chaque point p de M.*

Définition 2.2.4. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. Alors (M, g) est dite globalement d'Osserman si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi $J_{\mathcal{R}}(X)$ sont indépendantes de $X \in S(M, g)$ et du point $p \in M$.*

Proposition 2.2.2. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. Si (M, g) est d'Osserman point par point, alors (M, g) est d'Einstein en chaque point p de M. Si de plus M est connexe et si $\dim M \geq 3$, alors par le Lemme de Schur, (M, g) est une variété d'Einstein.*

Le résultat suivant donne une relation entre les variétés d'Osserman point par point et globalement d'Osserman.

Théorème 2.2.2. *([39, 46]) Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe, d'Osserman point par point. On suppose que :*

1. $\dim M \geq 3$ *et qu'en tout point de M l'opérateur de Jacobi a une valeur propre ; où*
2. $\dim > 4$ *et qu'en tout point de M l'opérateur de Jacobi a deux valeurs propres distinctes.*

Alors (M, g) est globalement d'Osserman .

Remarque 2.2.2. *Toute variété globalement d'Osserman est d'Osserman point par point. Mais l'inverse n'est pas vraie, il existe des variétés d'Osserman point par point qui ne sont pas globalement d'Osserman ([2, 46]).*

2.2.3 Exemples de variétés d'Osserman

Exemples de variétés globalement d'Osserman

Une variété pseudo-riemannienne (M, g) à courbure sectionnelle constante est dite *forme d'espace réelle*. Le tenseur de courbure d'une forme d'espace réelle est donné par

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = c\mathcal{R}^0(X, Y)Z,$$

où $\mathcal{R}^0(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Z$, avec $X, Y, Z \in T_pM$ et $c \in \mathbb{R}$. L'opérateur de Jacobi de $X \in T_pM$ est donné par

$$J_{\mathcal{R}}(X)Y = cg(X, X)Y, \quad \forall Y \in T_pM.$$

Ainsi le polynôme caractéristique de $J_{\mathcal{R}}(X)$ est

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}}(X)] = [\lambda - cg(X, X)]^{m-1},$$

pour tout $X \in S(M,g)$; et ainsi une forme d'espace réelle est globalement d'Osserman.

Une variété kählérienne (M,g,J) à courbure sectionnelle holomorphe constante est dite *forme d'espace complexe*. Le tenseur de courbure d'une forme d'espace complexe est donné par

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \frac{c}{4}\Big[\mathcal{R}^0(X,Y)Z + \mathcal{R}^J(X,Y)Z\Big],$$

où $\mathcal{R}^J(X,Y)Z = g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY - 2g(JX,Y)JZ$, avec $X,Y,Z \in T_pM$ et $c \in \mathbb{R}$. L'opérateur de Jacobi de $X \in T_pM$ est donné par

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{R}}(X)Y &= \frac{c}{4}g(X,X)Y \quad \text{si} \quad Y \perp \{X, JX\}; \\ J_{\mathcal{R}}(X)JX &= cg(X,X)JX. \end{aligned}$$

Alors le polynôme caractéristique de $J_{\mathcal{R}}(X)$ est

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}}(X)] = \big(\lambda - cg(X,X)\big)\Big(\lambda - \frac{c}{4}g(X,X)\Big)^{m-2}$$

pour tout $X \in S(M,g)$; et ainsi une forme d'espace complexe est globalement d'Osserman.

2.3 Variétés conformément d'Osserman

2.3.1 Définition

Définition 2.3.1. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne de dimension m et soit p un point de M. Alors (M,g) est dite conformément d'Osserman*

1. *de type espace en $p \in M$ si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi conforme $J_{\mathcal{W}}(X)$ sont indépendantes de $X \in S_p^+(M,g)$.*
2. *de type temps en $p \in M$ si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi conforme $J_{\mathcal{W}}(X)$ sont indépendantes de $X \in S_p^-(M,g)$.*

La relation entre les variétés conformément d'Osserman de type espace et de type temps en un point $p \in M$ est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne et soit p un point de M. Alors (M,g) est conformément d'Osserman de type espace en p si et seulement si (M,g) est conformément d'Osserman de type temps en p.*

Définition 2.3.2. *Une variété pseudo-riemannienne (M,g) est dite conformément d'Osserman en $p \in M$ si (M,g) est conformément d'Osserman de type espace et conformément d'Osserman de type temps en p.*

Définition 2.3.3. *Une variété pseudo-riemannienne* (M,g) *est dite conformément d'Osserman point par point si* (M,g) *est conformément d'Osserman en chaque* $p \in M$.

Définition 2.3.4. *Une variété pseudo-riemannienne* (M,g) *est dite globalement conformément d'Osserman si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi conforme* $J_{\mathcal{W}}(X)$ *sont constantes sur* $S(M,g)$.

Théorème 2.3.1. *([15]) Soient* g_1 *et* g_2 *deux métriques conformément équivalentes sur* M. *Alors la variété* (M,g_1) *est conformément d'Osserman si et seulement si* (M,g_2) *est conformément d'Osserman.*

Théorème 2.3.2. *([15]) Si* (M,g) *est Einstein, alors* (M,g) *est conformément d'Osserman si et seulement si* (M,g) *est d'Osserman point par point.*

Exemples de variétés conformément d'Osserman comme forme d'espace

Une variété riemannienne (M,g) est dite *forme d'espace conforme* si son tenseur de courbure conforme est donné par

$$\mathcal{W}(X,Y)Z = c\mathcal{R}^0(X,Y)Z,$$

où $X,Y,Z \in T_pM$ et $c \in \mathbb{R}$. L'opérateur de Jacobi conforme est donné par

$$J_{\mathcal{W}}(X)Y = \mathcal{W}(X,X)Y, \quad \forall Y \in T_pM.$$

Si $\mathcal{W} = c\mathcal{R}^0$, alors $0 = tr\{J_{\mathcal{R}}(X)\} = (m-1)c$. Donc $c = 0$ et ainsi (M,g) est conformément plate.

Une variété riemannienne (M,g) est dite *forme d'espace complexe conforme* si son tenseur de courbure conforme est donné par

$$\mathcal{W}(X,Y)Z = c_0\mathcal{R}^0(X,Y)Z + c_1\mathcal{R}^J(X,Y)Z,$$

où $X,Y,Z \in T_pM$ et $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

2.4 Exemples de variétés conformément d'Osserman de signature $(2,2)$

Dans cette partie, nous construisons explicitement un exemple d'une famille de métrique pseudo-riemannienne conformément d'Osserman de signature $(2,2)$.

Proposition 2.4.1. *([29]) Soit* $M = \mathbb{R}^4$, *muni de la métrique* g *définie par :*

$$g_{(f_1,f_2,h)} = \begin{pmatrix} u_3 f_1 & h & a & 0 \\ h & u_4 f_2 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

où (u_1,u_2,u_3,u_4) *est un système de coordonnés sur* M *;* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $f_1 = f(u_1)$, $f_2 = f(u_2)$, $h = f(u_1,u_2)$ *sont des fonctions à valeurs réelles. Alors* $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ *est :*

1. *une variété conformément d'Osserman de signature* $(2,2)$ *;*
2. *nilpotent conformément d'Osserman ;*
3. *geodésiquement complete ;*
4. *n'est pas localement conformément symétrique pour* f_1, f_2, h *telle que* $\frac{\partial\Phi}{\partial u^k} + \frac{f_k}{2a}\Phi \neq 0,\ k = 1,2,$ *où*

$$\Phi(u_1,u_2) = \frac{1}{a}\Big[\partial^2_{12}h + \frac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \frac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \frac{1}{4a^2}f_1f_2h\Big]. \tag{2.14}$$

Description de la métrique (2.13)

Lemme 2.4.1. *Les composantes non-nulles de la dérivée covariante de* $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ *sont données par :*

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_1}\partial_1 &= -\frac{1}{2a}f_1\partial_1 + \Big(\frac{1}{2a}u_3\partial_1 f_1 + \frac{u_3}{2a^2}f_1^2\Big)\partial_3 + \Big[\frac{1}{a}\partial_1 h + \frac{1}{2a^2}f_1 h\Big]\partial_4, \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 &= -\frac{1}{2a}f_2\partial_2 + \Big(\frac{1}{2a^2}f_2 h + \frac{1}{a}\partial_2 h\Big)\partial_3 + \Big(\frac{1}{2a}u_4\partial_2 f_2 + \frac{u_4}{2a^2}f_2^2\Big)\partial_4, \\ \nabla_{\partial_1}\partial_3 &= \frac{1}{2a}f_1\partial_3, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_4 = \frac{1}{2a}f_2\partial_4. \end{cases} \tag{2.15}$$

Lemme 2.4.2. *Les composantes non nulles de l'opérateur de courbure de* $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ *sont :*

$$\begin{cases} \mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 &= -\frac{1}{a}\Big(\partial^2_{12}h + \frac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \frac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \frac{1}{4a^2}f_1f_2h\Big)\partial_4, \\ \mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_2 &= \frac{1}{a}\Big(\partial^2_{12}h + \frac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \frac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \frac{1}{4a^2}f_1f_2h\Big)\partial_3. \end{cases} \tag{2.16}$$

Lemme 2.4.3. *Les composantes du tenseur de courbure de* $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ *sont données par :*

$$\begin{cases} R_{1212} &= -\Big(\partial^2_{12}h + \frac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \frac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \frac{1}{4a^2}f_1f_2h\Big), \\ R_{1221} &= \Big(\partial^2_{12}h + \frac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \frac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \frac{1}{4a^2}f_1f_2h\Big). \end{cases} \tag{2.17}$$

Lemme 2.4.4. *Les composantes du tenseur de Ricci de* $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ *sont données par :*

$$\begin{cases} \rho_{11} = g^{\alpha\beta}R_{1\alpha1\beta} = g^{22}R_{1212} = 0, \\ \rho_{12} = g^{\alpha\beta}R_{1\alpha2\beta} = g^{21}R_{1221} = 0, \\ \rho_{22} = g^{\alpha\beta}R_{2\alpha2\beta} = g^{11}R_{2121} = 0, \end{cases} \tag{2.18}$$

Lemme 2.4.5. *La courbure scalaire de* $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ *est donnée par :*

$$\tau = g^{11}\rho_{11} + g^{22}\rho_{22} + 2g^{12}\rho_{12} = 0. \tag{2.19}$$

Lemme 2.4.6. *Les équations des géodésiques de* $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ *sont :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{u}_1 - \frac{1}{2a}\dot{u}_1\dot{u}_1 f_1 = 0, \quad \ddot{u}_2 - \frac{1}{2a}\dot{u}_2\dot{u}_2 f_2 & = & 0, \\ \ddot{u}_3 + \Big(\frac{1}{2a}u_3\partial_1 f_1 + \frac{1}{2a^2}u_3 f_1^2\Big)\dot{u}_1\dot{u}_1 + \frac{1}{2a}f_1\dot{u}_1\dot{u}_3 + \Big(\frac{1}{a}\partial_2 h + \frac{1}{2a^2}hf_2\Big)\dot{u}_2\dot{u}_2 & = & 0, \\ \ddot{u}_4 + \Big(\frac{1}{a}\partial_1 h + \frac{h}{2a^2}f_1\Big)\dot{u}_1\dot{u}_1 + \frac{1}{2a}f_2\dot{u}_2\dot{u}_4 + \Big(\frac{1}{2a}u_4\partial_2 f_2 + \frac{1}{2a^2}u_4 f_2^2\Big)\dot{u}_2\dot{u}_2 & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.20}$$

Preuve de la Proposition 2.4.1

Soit $X = \sum_{i=1}^4 \alpha_i\partial_i$ un vecteur tangent sur M, alors l'opérateur de Jacobi $J_{\mathcal{R}}(X) = \mathcal{R}(\cdot, X)X$ est donné par :

$$\begin{array}{rcl} J_{\mathcal{R}}(X) & = & \alpha_1^2\mathcal{R}(\cdot,\partial_1)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2\mathcal{R}(\cdot,\partial_1)\partial_2 + \alpha_1\alpha_3\mathcal{R}(\cdot,\partial_1)\partial_3 + \alpha_1\alpha_4\mathcal{R}(\cdot,\partial_1)\partial_4 \\ & + & \alpha_1\alpha_2\mathcal{R}(\cdot,\partial_2)\partial_1 + \alpha_2^2\mathcal{R}(\cdot,\partial_2)\partial_2 + \alpha_2\alpha_3\mathcal{R}(\cdot,\partial_2)\partial_3 + \alpha_3\alpha_4\mathcal{R}(\cdot,\partial_2)\partial_4 \\ & + & \alpha_1\alpha_3\mathcal{R}(\cdot,\partial_3)\partial_1 + \alpha_2\alpha_3\mathcal{R}(\cdot,\partial_3)\partial_2 + \alpha_3^2\mathcal{R}(\cdot,\partial_3)\partial_3 + \alpha_3\alpha_4\mathcal{R}(\cdot,\partial_3)\partial_4 \\ & + & \alpha_1\alpha_4\mathcal{R}(\cdot,\partial_4)\partial_1 + \alpha_2\alpha_4\mathcal{R}(\cdot,\partial_4)\partial_2 + \alpha_3\alpha_4\mathcal{R}(\cdot,\partial_4)\partial_3 + \alpha_4^2\mathcal{R}(\cdot,\partial_4)\partial_4. \end{array}$$

Soit la décomposition $TM = U_1 \oplus U_2$, avec

$$U_1 := Vect\{\partial_1, \partial_2\} \quad \text{et} \quad U_2 := Vect\{\partial_3, \partial_4\}.$$

On remarque que $U_2 = \{\partial_3, \partial_4\}$ est totalement isotrope par rapport à $g_{(f_1,f_2,h)}$, alors nous avons :

$$\begin{array}{rcl} J_{\mathcal{R}}(X)\partial_3 & = & 0, \\ J_{\mathcal{R}}(X)\partial_4 & = & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} J_{\mathcal{R}}(X)\partial_1 & = & \alpha_1\alpha_2\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 + \alpha_2^2\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_2 \\ & = & \alpha_1\alpha_2\Big\{-\dfrac{1}{a}\Big[\partial_{12}^2 h + \dfrac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \dfrac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \dfrac{1}{4a^2}f_1f_2h\Big]\Big\}\partial_4 \\ & + & \alpha_2^2\Big\{\dfrac{1}{a}\Big[\partial_{12}^2 h + \dfrac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \dfrac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \dfrac{1}{4a^2}f_1f_2h\Big]\Big\}\partial_3 \\ & = & \alpha_1\alpha_2(-\Phi)\partial_4 + \alpha_2^2(\Phi)\partial_3; \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} J_{\mathcal{R}}(X)\partial_2 & = & -\alpha_1^2\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 - \alpha_1\alpha_2\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_2 \\ & = & -\alpha_1^2\Big\{-\dfrac{1}{a}\Big[\partial_{12}^2 h + \dfrac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \dfrac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \dfrac{1}{4a^2}f_1f_2h\Big]\Big\}\partial_4 \\ & - & \alpha_1\alpha_2\Big\{\dfrac{1}{a}\Big[\partial_{12}^2 h + \dfrac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \dfrac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \dfrac{1}{4a^2}f_1f_2h\Big]\Big\}\partial_3 \\ & = & -\alpha_1^2(-\Phi)\partial_4 - \alpha_1\alpha_2(\Phi)\partial_3, \end{array}$$

où $\Phi = \frac{1}{a}\left[\partial^2_{12}h + \frac{1}{2a}f_2\partial_1 h + \frac{1}{2a}f_1\partial_2 h + \frac{1}{4a^2}f_1 f_2 h\right]$.

La matrice associée à $J_{\mathcal{R}}(X)$ par rapport à la base $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$ est de la forme

$$(J_{\mathcal{R}}(X)) = \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

1. *Étape 1 :* Il suit de l'expression de la matrice de $J_{\mathcal{R}}(X)$, que le polynôme caractéristique est défini par

$$P_\lambda(J_{\mathcal{R}}(X)) = \det(J_{\mathcal{R}}(X) - \lambda I_4) = \Phi \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 & -\lambda & 0 \\ -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1^2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \Phi\lambda^4.$$

   Ainsi toutes les valeurs propres sont égales à zero. Ceci implique que $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ est globalement d'Osserman.

   Étape 2 : A partir des relations (2.18) et (2.19), $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ est à courbure de Ricci nulle donc d'Einstein. Par conséquent $R = W$. Finalement, puisque $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ est d'Osserman et d'Einstein, du **Théorème 2.1** de [15], $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ est conformément Osserman.

2. Nous utilisons le résultat précédent 2.4.1 (1), pour vérifier que l'opérateur de Jacobi conforme de $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ est nilpotent. Comme $R = W$, on a : $J_{\mathcal{R}}(\cdot) = J_{\mathcal{W}}(\cdot)$. En utilisant la relation (2.21), nous avons

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{W}}(X)^2 &= \Phi^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Ceci implique que $J_{\mathcal{W}}(\cdot)$ est nilpotent d'ordre 2 et ainsi $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ est nilpotent conformément d'Osserman.

3. A partir des relations (2.20), les deux premières équations des géodésiques ont la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{2a}\frac{du}{dt}f(u) = F(u, \frac{du}{dt}). \tag{2.22}$$

Posons $du/dt = v$, par la dérivée de la chaîne, $\frac{d^2u}{dt^2} = v\frac{dv}{du}$.

En remplaçant $\frac{du}{dt}$ et $\frac{d^2u}{dt^2}$ dans (2.22) par v et $v\frac{dv}{du}$, nous obtenons l'équation suivante :

$$v\frac{dv}{du} = \frac{1}{2a}f(u)v^2. \tag{2.23}$$

Posons $\frac{1}{2a}f(u) = g(u)$, alors

$$v\frac{dv}{du} = g(u)v^2.$$

Une intégration nous donne :

$$v = Ke^{G(u)}, \tag{2.24}$$

où K est une constante et $G'(u) = g(u)$.

Finalement, en remplaccant v par du/dt et en intégrant, nous obtenons une solution de la forme suivante :

$$\frac{du}{dt} = Ke^{G(u)}. \tag{2.25}$$

Les deux autres géodésiques dans (2.20) ont la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} = G(u, \frac{du}{dt}),$$

qui peut être résolue. Il suit que $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ est géodésiquement complète.

4. La condition localement conformément symétrique est équivalente à :

$$\nabla_{X_1}W(X_2, X_3)X_4 = 0.$$

Pour $X_k = \alpha_i^k\partial_i$, avec $k, i = 1, 2, 3, 4$, nous avons :

$$\nabla_{\alpha_i^1\partial_i} W(\alpha_j^2\partial_j, \alpha_k^3\partial_k)\alpha_l^4\partial_l = 0, \quad i,j,k,l = 1,2,3,4. \tag{2.26}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{\alpha_1^1\partial_1} W(\alpha_j^2\partial_j, \alpha_k^3\partial_k)\alpha_l^4\partial_l + \nabla_{\alpha_2^1\partial_2} W(\alpha_j^2\partial_j, \alpha_k^3\partial_k)\alpha_l^4\partial_l \\
&+ \nabla_{\alpha_3^1\partial_3} W(\alpha_j^2\partial_j, \alpha_k^3\partial_k)\alpha_l^4\partial_l + \nabla_{\alpha_4^1\partial_4} W(\alpha_j^2\partial_j, \alpha_k^3\partial_k)\alpha_l^4\partial_l, \quad j,k,l = 1,2,3,4.
\end{aligned}$$

On obtient que :

$$\nabla_{\alpha_3^1\partial_3} W(\alpha_j^2\partial_j, \alpha_k^3\partial_k)\alpha_l^4\partial_l = 0, \qquad \nabla_{\alpha_4^1\partial_4} W(\alpha_j^2\partial_j, \alpha_k^3\partial_k)\alpha_l^4\partial_l = 0,$$

et

$$\begin{cases}
\nabla_{\alpha_1^1\partial_1} W(\alpha_j^2\partial_j, \alpha_k^3\partial_k)\alpha_l^4\partial_l = a_1\nabla_{\partial_1} W(\partial_1,\partial_2)\partial_1 + a_2\nabla_{\partial_1} W(\partial_1,\partial_2)\partial_2, \\
\\
\nabla_{\alpha_2^1\partial_2} W(\alpha_j^2\partial_j, \alpha_k^3\partial_k)\alpha_l^4\partial_l = a_3\nabla_{\partial_2} W(\partial_1,\partial_2)\partial_1 + a_4\nabla_{\partial_2} W(\partial_1,\partial_2)\partial_2,
\end{cases}$$

où

$$\begin{gathered}
a_1 = (\alpha_1^1\alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_1^4 - \alpha_1^1\alpha_2^2\alpha_1^3\alpha_1^4), \qquad a_2 = (\alpha_1^1\alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_2^4 - \alpha_1^1\alpha_2^2\alpha_1^3\alpha_2^4) \\
a_3 = (\alpha_2^1\alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_1^4 - \alpha_2^1\alpha_2^2\alpha_1^3\alpha_1^4), \quad \text{et} \quad a_4 = (\alpha_2^1\alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_2^4 - \alpha_2^1\alpha_2^2\alpha_1^3\alpha_2^4).
\end{gathered}$$

Alors l'équation (2.26) implique que

$$\begin{aligned}
0 &= a_1\nabla_{\partial_1}[(-\Phi)\partial_4] + a_2\nabla_{\partial_1}[(\Phi)\partial_3] + a_3\nabla_{\partial_2}[(-\Phi)\partial_4] + a_4\nabla_{\partial_2}[(\Phi)\partial_3] \\
0 &= a_1[-\Phi\nabla_{\partial_1}\partial_4 - \partial_1(\Phi)\partial_4] + a_2[\Phi\nabla_{\partial_1}\partial_3 + \partial_1(\Phi)\partial_3] \\
&+ a_3[-\Phi\nabla_{\partial_2}\partial_4 - \partial_2(\Phi)\partial_4] + a_4[\Phi\nabla_{\partial_2}\partial_3 + \partial_2(\Phi)\partial_3] \\
&= -a_1\partial_1(\Phi)\partial_4 + a_4\partial_2(\Phi)\partial_3 + a_2\Big[\frac{1}{2a}f_1\Phi + \partial_1(\Phi)\Big]\partial_3 - a_3\Big[\frac{1}{2a}f_2\Phi + \partial_2(\Phi)\Big]\partial_4.
\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{f_i}{2a}\Phi + \partial_i(\Phi) = 0, \quad i = 1,2.$$

La preuve est complète. $\square$

Corollaire 2.4.1. *Si* $h(u_1, u_2) \equiv C$ *(h est une constante), alors* $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2,h)})$ *est localement conformément symétrique si et seulement si*

$$\begin{cases} \left[\partial_1 f_1 + \frac{1}{2a} f_1^2\right] f_2 &= 0, \\ \left[\partial_2 f_2 + \frac{1}{2a} f_2^2\right] f_1 &= 0. \end{cases}$$

Remarque 2.4.1. *La classe des variétés conformément symétriques contient la classe des variétés localement symétriques et la classe des variétés conformément plates.*

Chapitre Trois

Changement conforme de métriques d'Osserman

Sommaire

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la préservation de la condition d'Osserman par changement conforme de métriques. Plus précisement, nous étudions le problème suivant :

Problème : Soit (M, g) une variété riemannienne d'Osserman et soit $\bar{g} = \psi^{-2} \cdot g$ une métrique conformément équivalente à g. A quelle condition sur ψ, la variété $(M, \bar{g} = \psi^{-2} \cdot g)$ est aussi d'Osserman ?

Le chapitre est divisé en deux parties. La première partie est inspirée par l'étude des tranformations conformes préservant le tenseur de Ricci [50, 52]. Nous avons établi une relation entre les opérateurs de Jacobi associés à deux métriques conformes. Comme conséquence, nous avons obtenu une condition suffisante sur le facteur de conformalité pour que la condition d'Osserman soit préservée par changement conforme de métriques . Nous avons aussi obtenu une relation entre les valeurs propres des opérateurs de Jacobi de deux métriques conformément équivalentes. Les résultats de cette section feront l'objet d'une publication [33].

Dans la deuxième partie, nous étudions les applications de Jacobi entre variétés d'Osserman. Après la définition et le rappel de certaines propriétés des applications de Jacobi, nous montrons que toute application de Jacobi préserve la structure d'Osserman.

3.2 Changement conforme préservant la condition d'Osserman

3.2.1 Transformations conformes

Définition 3.2.1. *Une application différentiable $\Phi : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ entre deux variétés riemanniennes est dite application conforme s'il existe une fonction ψ positive sur M telle que*

$$\Phi^* \bar{g} = \psi^{-2} \cdot g.$$

L'application Φ est dite isométrie si $\psi = 1$, et elle est dite homothétie si ψ est une constante. Dans le cas $M = \bar{M}$, l'application Φ est appelée transformation conforme.

Définition 3.2.2. *Une application conforme $\Phi : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ est dite application de Liouville si*

$$\bar{Ric}_{\Phi^* \bar{g}} = Ric_g.$$

Dans le cas $M = \bar{M}$, on dit que Φ est une transformation de Liouville.

Définition 3.2.3. *Soient g et $\bar{g}$ deux métriques pseudo-riemanniennes sur M. On dit que $\bar{g}$ est conformément équivalente à g s'il existe $\phi \in C^\infty(M)$ telle que*

$$\bar{g} = e^{-2\phi} \cdot g.$$

Le terme e^ϕ est appelé facteur conforme. On appelle classe conforme de g, et l'on note $[g]$, l'ensemble des métriques $\bar{g}$ sur M qui sont conformément équivalentes à g.

Soit $\phi \in C^\infty(M)$, on appelle *gradient* de ϕ le champ de vecteur noté $\nabla\phi$, et qui vérifie la relation suivante :

$$g(\nabla\phi, X) = X(\phi) = d\phi(X),$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, où d est la différentielle extérieure. Le *hessien* de ϕ est le $(0, 2)$-tenseur symétrique noté $\nabla d\phi$ et vérifiant la relation

$$(\nabla d\phi)(X, Y) = \nabla^2\phi(X, Y) = X(Y(\phi)) - \nabla_X Y(\phi),$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Avec un calcul simple, on montre que :

$$g(\nabla_X \nabla\phi, Y) = \nabla d\phi(X, Y).$$

Nous désignerons par $\Delta\phi$, le *laplacien* d'une fonction ϕ par rapport à la métrique

$$\Delta\phi = -tr(\nabla d\phi).$$

La relation entre la connexion de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ associée à $\bar{g}$, et la connexion de Levi-Civita ∇ de g est donnée par :

Lemme 3.2.1. *([6, 50, 51]) Soit $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et soit $\bar{g} = e^{-2\phi} \cdot g$. Alors :*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - X(\phi)Y - Y(\phi)X + g(X,Y)\nabla\phi.$$

La relation entre le tenseur de courbure de Riemann $\bar{\mathcal{R}}$ de $\bar{g}$ et le tenseur de courbure de Riemann $\mathcal{R}$ de g est donnée par :

Lemme 3.2.2. *([6, 50, 51]) Soit $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et soit $\bar{g} = e^{-2\phi} \cdot g$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{R}}(X,Y)Z &= \mathcal{R}(X,Y)Z - g(X,Z)\nabla_Y\nabla\phi + g(Y,Z)\nabla_X\nabla\phi \\
&- [\nabla^2\phi(X,Z) + (X\phi)(Z\phi) - g(X,Z)g(\nabla\phi,\nabla\phi)]Y \\
&+ [\nabla^2\phi(Y,Z) + (Y\phi)(Z\phi) - g(Y,Z)g(\nabla\phi,\nabla\phi)]X \\
&+ [(X\phi)g(Y,Z) - (Y\phi)g(X,Z)]\nabla\phi.
\end{aligned}$$

3.2.2 Opérateurs de Jacobi associés à deux métriques conformes

Il s'agira d'établir la relation entre opérateurs de Jacobi associés à deux métriques conformes ; c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *[33] Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m. L'opérateur de Jacobi $J_{\bar{\mathcal{R}}}(\cdot)$ associé à la métrique $\bar{g} = e^{-2\phi} \cdot g$ vérifie la relation*

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{R}}(Y,X)X &= \mathcal{R}(Y,X)X - \Big[g(Y,X)\nabla_X\nabla\phi - g(X,X)\nabla_Y\nabla\phi\Big] \\
&- \Big[\nabla^2\phi(Y,X) + (Y\phi)(X\phi) - g(Y,X)g(\nabla\phi,\nabla\phi)\Big]X \\
&+ \Big[\nabla^2\phi(X,X) + (X\phi)(X\phi) - g(X,X)g(\nabla\phi,\nabla\phi)\Big]Y \\
&+ \Big[(Y\phi)g(X,X) - (X\phi)g(Y,X)\Big]\nabla\phi. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du Lemme 3.2.2 □

Proposition 3.2.2. *Les opérateurs de Jacobi de deux métriques conformément équivalentes g et $\bar{g} = \psi^{-2} \cdot g$ satisfont la relation*

$$J_{\bar{\mathcal{R}}}(\cdot) = J_{\mathcal{R}}(\cdot)$$

si et seulement si la fonction ψ satisfait l'équation suivante :

$$\nabla\psi^2 = \frac{g(\nabla\psi,\nabla\psi)}{2\psi} \cdot g. \qquad (3.2)$$

La preuve de cette proposition utilise le lemme suivant :

Lemme 3.2.3. *Soit $\psi = e^{\phi}$. Alors :*

$$\nabla^2\phi(X,Y) + (X\phi)(Y\phi) = \frac{\nabla^2\psi(X,Y)}{\psi}. \qquad (3.3)$$

Démonstration. Par définition, on a :

$$\nabla^2 e^\phi(X,Y) = XY(e^\phi) - \nabla_X Y(e^\phi). \tag{3.4}$$

D'une part :

$$XY(e^\phi) = e^\phi d\phi(X)d\phi(Y) + e^\phi X(d\phi(Y)). \tag{3.5}$$

D'autre part :

$$\nabla_X Y(e^{\phi)}) = e^\phi d\phi(\nabla_X Y). \tag{3.6}$$

En remplaçant (3.5) et (3.6) dans (3.4), nous obtenons :

$$\nabla^2 e^\phi(X,Y) = e^\phi\{\nabla^2\phi(X,Y) + (X\phi)(Y\phi)\}.$$

c'est-à-dire,

$$\nabla^2\phi(X,Y) + (X\phi)(Y\phi) \quad = \quad \frac{\nabla^2 e^\phi(X,Y)}{e^\phi}.$$

□

Démonstration. (Preuve de la proposition 3.2.2) A partir des identités de la courbure on a : $J_{\mathcal{R}}(X)X = 0$. Pour $Y \in X^\perp$ on a :

$$\begin{aligned} g(J_{\bar{\mathcal{R}}}(X)Y,Y) &= g(J_{\mathcal{R}}(X)Y,Y) - g(X,X)g(\nabla\phi,\nabla\phi)g(Y,Y) \\ &+ g(X,X)\big[\nabla^2\phi(Y,Y) + (Y\phi)(Y\phi)\big] \\ &+ g(Y,Y)\big[\nabla^2\phi(X,X) + (X\phi)(X\phi)\big]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Supposons $g(J_{\bar{\mathcal{R}}}(X)Y,Y) = g(J_{\mathcal{R}}(X)Y,Y)$. Alors, en utilisant (3.3) dans (3.7), nous obtenons :

$$g(X,X)\frac{\nabla^2\psi(Y,Y)}{\psi} + g(Y,Y)\frac{\nabla^2\psi(X,X)}{\psi} = g(X,X)g(Y,Y)\frac{g(\nabla\psi,\nabla\psi)}{\psi^2}.$$

Ainsi nous déduisons

$$\nabla\psi^2 = \frac{g(\nabla\psi,\nabla\psi)}{2\psi}\cdot g.$$

□

Proposition 3.2.3. *Soit g et $\bar{g} = \psi^{-2} \cdot g$ deux métriques conformément équivalentes avec*

$$\nabla\psi^2 = \frac{g(\nabla\psi, \nabla\psi)}{2\psi} \cdot g. \tag{3.8}$$

Si (M, g) est d'Osserman, alors $(M, \bar{g} = \psi^{-2} \cdot g)$ est aussi d'Osserman.

Démonstration. A partir de la Proposition 3.2.2, on a :

$$\bar{\mathcal{R}}(Y, X, X, Y) = \mathcal{R}(Y, X, X, Y).$$

A un repère g-orthonormé $\{e_1, \cdots, e_m\}$ du fibré TM, nous associons le repère $\bar{g}$-orthonormé $\{f_1, \cdots, f_m\}$ avec $e_i = e^{-\phi} f_i$. Posons $X = e_i$, $Y = e_j$ avec $g(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. On a :

$$g(\bar{\mathcal{R}}(e_j, e_i)e_i, e_j) = \mathcal{R}(e_j, e_i, e_i, e_j).$$

$$e^{-4\phi} g(\bar{\mathcal{R}}(f_j, f_i)f_i, f_j) = \mathcal{R}(e_j, e_i, e_i, e_j).$$

Si (M, g) est d'Osserman i.e., $J_{\mathcal{R}}(e_i)e_j = \lambda_j e_j$, alors on a :

$$e^{-2\phi} \bar{g}(\bar{\mathcal{R}}(f_j, f_i)f_i, f_j) = \lambda_j.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\bar{\lambda}_j = \psi^2 \lambda_j.$$

Ainsi f_j est un vecteur propre de l'opérateur de Jacobi $J_{\bar{\mathcal{R}}}(f_i)$ associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_j$. □

Corollaire 3.2.1. *Si (M, g) et $(M, \bar{g} = \psi^{-2} \cdot g)$ sont des variétés d'Osserman et ψ vérifie*

$$\nabla\psi^2 = \frac{g(\nabla\psi, \nabla\psi)}{2\psi} \cdot g.$$

Alors les courbures de Ricci de (M, g) et $(M, \bar{g})$ sont nulles.

Démonstration. Les courbures scalaires $\bar{S}$ et S de $\bar{g}$ et g satisfont

$$e^{-2\phi} \cdot \bar{S} = S + \frac{2}{m}\Delta\phi - \frac{m-2}{m} \cdot g(\nabla\phi, \nabla\phi).$$

En utilisant le Lemme 3.2.3, cette relation s'exprime en fonction de ψ par :

$$\psi^{-2}\bar{S} = S + \frac{2}{m}\frac{\Delta\psi}{\psi} - \frac{g(\nabla\psi, \nabla\psi)}{\psi^2}.$$

En prenant la trace des deux membres de la relation (3.8), l'égalité précédente se réduit à :

$$\bar{S} = \psi^2 \cdot S.$$

Supposons que ψ n'est pas constante. Puisque $\bar{S}$ et S sont toutes deux des constantes, alors cette égalité est vraie lorsque $S = 0$, ainsi $\bar{Ric} = Ric = 0$. □

3.2.3 Relations entre les valeurs propres des opérateurs de Jacobi $J_{\bar{\mathcal{R}}}(\cdot)$ et $J_{\mathcal{R}}(\cdot)$

Théorème 3.2.1. *[33] Soient (M, g) et $(M, \bar{g} = \psi^{-2} \cdot g)$ deux variétés riemanniennes Osserman. Alors les valeurs propores de $J_{\bar{\mathcal{R}}}(\cdot)$ et $J_{\mathcal{R}}(\cdot)$ vérifie*

$$\bar{\lambda}_i = \psi^2 \lambda_i + \frac{2}{m} \cdot \psi \Delta \psi - g(\nabla \psi, \nabla \psi)$$

Démonstration. A partir de la relation (3.1), on a :

$$\begin{aligned} g(\bar{\mathcal{R}}(Y,X)X,Y) &= \mathcal{R}(Y,X,X,Y) - \Big[g(Y,X)g(\nabla_X \nabla \phi, Y) - g(X,X)g(\nabla_Y \nabla \phi, Y)\Big] \\ &- \Big[\nabla^2 \phi(Y,X) + (Y\phi)(X\phi) - g(Y,X)g(\nabla\phi,\nabla\phi)\Big] g(X,Y) \\ &+ \Big[\nabla^2 \phi(X,X) + (X\phi)(X\phi) - g(X,X)g(\nabla\phi,\nabla\phi)\Big] g(Y,Y) \\ &+ \Big[(Y\phi)g(X,X) - (X\phi)g(Y,X)\Big] g(\nabla\phi, Y). \end{aligned}$$

A un repère g-orthonormé $\{e_1, \cdots, e_m\}$ du fibré TM, nous associons le repère $\bar{g}$-orthonormé $\{f_1, \cdots, f_m\}$ avec $e_i = e^{-\phi} f_i$. Posons $X = e_i$,$Y = e_j$ avec $g(e_i, e_j) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$. On a :

$$\begin{aligned} g(\bar{\mathcal{R}}(e_j,e_i)e_i,e_j) &= \Big[\mathcal{R}(e_j,e_i,e_i,e_j) + g(e_i,e_i)g(\nabla_{e_j}\nabla\phi, e_j)\Big] \\ &+ \Big[\nabla^2\phi(e_i,e_i) + (e_i\phi)(e_i\phi) - g(e_i,e_i)g(\nabla\phi,\nabla\phi)\Big] g(e_j,e_j) \\ &+ (e_j\phi)(e_j\phi)g(e_i,e_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-4\phi} g(\bar{\mathcal{R}}(f_j,f_i)f_i,f_j) &= \Big[\mathcal{R}(e_j,e_i,e_i,e_j) + g(e_i,e_i)g(\nabla_{e_j}\nabla\phi, e_j)\Big] \\ &+ \Big[\nabla^2\phi(e_i,e_i) + (e_i\phi)(e_i\phi) - g(e_i,e_i)g(\nabla\phi,\nabla\phi)\Big] g(e_j,e_j) \\ &+ (e_j\phi)(e_j\phi)g(e_i,e_i). \end{aligned}$$

Supposons que (M, g) est Osserman i.e. $J_{\mathcal{R}}(e_i)e_j = \lambda_j e_j$ et que $(M, \bar{g})$ est aussi Osserman i.e. $J_{\bar{\mathcal{R}}}(f_i)f_j = \bar{\lambda}_j f_j$. Alors on a :

$$\begin{aligned} e^{-2\phi} \bar{g}(\bar{\mathcal{R}}(f_j,f_i)f_i,f_j) &= \Big[\mathcal{R}(e_j,e_i,e_i,e_j) + g(e_i,e_i)g(\nabla_{e_j}\nabla\phi, e_j)\Big] \\ &+ \Big[\nabla^2\phi(e_i,e_i) + (e_i\phi)(e_i\phi) - g(e_i,e_i)g(\nabla\phi,\nabla\phi)\Big] g(e_j,e_j) \\ &+ (e_j\phi)(e_j\phi)g(e_i,e_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-2\phi}\bar{\lambda}_j &= \lambda_j + \frac{\nabla^2\psi(e_i,e_i)}{\psi} + \frac{\nabla^2\psi(e_j,e_j)}{\psi} - g(\nabla\phi,\nabla\phi),\\
&= \lambda_j + \frac{2}{m}\frac{\Delta\psi}{\psi} - g(\nabla\phi,\nabla\phi),\\
&= \lambda_j + \frac{2}{m}\frac{\Delta\psi}{\psi} - \frac{g(\nabla\psi,\nabla\psi)}{\psi^2},\\
\bar{\lambda}_j &= \psi^2\lambda_j + \frac{2}{m}\psi\Delta\psi - g(\nabla\psi,\nabla\psi).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.2.2. *[33] Si la dimension de (M,g) est impaire alors*

$$\bar{\lambda} = \psi^2\lambda + \frac{2}{m}\cdot\psi\Delta\psi - g(\nabla\psi,\nabla\psi).$$

3.3 Application de Jacobi entre variétés d'Osserman

3.3.1 Application de Jacobi

Soient (M,g) une variété riemannienne de dimension m et $\mathcal{R}$ l'opérateur de courbure. Soit $X \in T_pM$ un vecteur unitaire de l'espace tangent en un point p. L'opérateur de Jacobi est l'application linéaire

$$J_{\mathcal{R}}(X) : T_pM \longrightarrow T_pM,$$

défini par :

$$J_{\mathcal{R}}(X)Y = \mathcal{R}(Y,X)X, \tag{3.9}$$

où $Y \in T_pM$. L'opérateur de Jacobi est un opérateur auto-adjoint. Soit $X \in T_pM$ est un vecteur arbitraire non nul ; et soit l'opérateur défini par

$$J_{\mathcal{R}}(X)Y = \frac{\mathcal{R}(Y,X)X}{g(X,X)}. \tag{3.10}$$

Le sous-espace $E_1 = \{Z \in T_pM : Z = \alpha X, \alpha \in \mathbb{R}\}$ de dimension 1 induit un opérateur auto-adjoint défini par :

$$J_{\mathcal{R}}(E_1)Y = \frac{\mathcal{R}(Y,X)X}{g(X,X)}. \tag{3.11}$$

Soit $(\bar{M}, \bar{g})$ une autre variété riemannienne de dimension m munie de l'opérateur de courbure $\bar{\mathfrak{R}}$. Soit $f : M \to \bar{M}$ un difféomorphisme et $f_{*p} : T_pM \to T_{\bar{p}}\bar{M}$ l'application tangente induite par f, où $\bar{p} = f(p)$. Le sous-espace E_1 est tranformé en

$$\bar{E}_1 = f_{*P}E_1 = \{f_{*p}Z, Z \in E_1\}.$$

Définition 3.3.1. *([4]) Un difféomorphisme f est appelé application de Jacobi (J-application), si pour chaque point $p \in M$ et chaque sous-espace $E_1 \subset T_pM$ de dimension 1 l'application tangente f_*p et l'opérateur de Jacobi $J_{\mathfrak{R}}(E_1)$ commute de la façon suivante :*

$$f_{*p} \circ J_{\mathfrak{R}}(E_1) = J_{\bar{\mathfrak{R}}}(\bar{E}_1) \circ f_{*p}. \tag{3.12}$$

Définition 3.3.2. *Une application de Jacobi est un difféomorphisme entre deux variétés riemanniennes préservant les opérateurs de Jacobi.*

Proposition 3.3.1. *([4]) Les deux premières conditions impliquent la troisième.*

1. *Toute application qui preserve la courbure, c'est-à-dire*

$$\bar{R}(f_{*p}X, f_{*p}Y)f_{*p}Z = f_{*p}R(X,Y)Z, \quad X, Y, Z \in T_pM; \tag{3.13}$$

2. *toute isométrie, c'est-à-dire*

$$\bar{g}(f_{*p}X, f_{*p}Y) = g(X,Y), \quad X, Y, \in T_pM; \tag{3.14}$$

3. *est une appliation de Jacobi.*

3.3.2 Application de Jacobi entre variétés d'Osserman

Proposition 3.3.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne d'Osserman et f une application de Jacobi. Alors $(\bar{M}, \bar{g})$ est aussi une variété d'Osserman.*

Démonstration. Soit Y un vecteur propre de $J_{\mathfrak{R}}(E_1)$ associé à la valeur propre $c(p, E_1)$. L'équation des valeurs propres entraine

$$J_{\mathfrak{R}}(E_1)Y = c(p, E_1)Y.$$

Alors

$$\begin{aligned} J_{\bar{\mathfrak{R}}}(\bar{E}_1) \circ f_{*p}(u) &= f_{*p} \circ J_{\mathfrak{R}}(E_1)u \\ &= c(p, E_1)f_{*p}u. \end{aligned}$$

Ainsi $f_{*p}u$ est un vecteur propre de l'opérateur de Jacobi $J_{\bar{\mathfrak{R}}}(\bar{E}_1)$ associé à la valeur propre $c(\bar{p}, \bar{E}_1) = c(p, E_1)$. □

Chapitre Quatre

Conditions d'Osserman et conformément d'Osserman sur une variété produit doublement tordu

Sommaire

4.1 Introduction

Après la définition et le rappel de certaines propriétés des variétés produits doublement tordus, nous établissons, dans une première partie de ce chapitre, deux résultats qui ne sont pas tout à fait classiques. D'abord nous avons établit la relation entre la connexion de Levi-Civita d'une variété produit doublement tordu $M := B_f \times_b F$ et les connexions de Levi-Civita de B et F. Ensuite, nous avons établit la relation entre la courbure de la variété M et les courbures de B et F.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous caractérisons les variétés riemanniennes et lorentziennes produits doublement tordus d'Osserman et conformément d'Osserman. Dans le cas riemannien, nous avons prouvée que toute variété produit doublement tordu conformément d'Osserman est localement conformément plate et que toute variété produit doublement tordu d'Osserman est à courbure sectionnelle constante. Dans le cas lorentzien, nous avons montrée que toute variété produit doublement tordu conformément d'Osserman est localement conformément plate et que toute variété produit doublement tordu d'Osserman est à courbure sectionnelle constante.

Le chapitre est divisé en cinq sections. Dans la deuxième section, nous rappelons la classification des variétés produits directs d'Osserman et conformément d'Osserman. La troisième section est consacrée à la classification des variétés produits tordus d'Osserman et conformément d'Osserman. Enfin, par des méthodes analogues à celles utilisées par Brozos-Vázquez et al. (cf. [23, 24]), nous donnerons dans la quatrième section une classification des variétés produits doublement tordus d'Osserman et conformément d'Osserman. Les résultats de ce chapitre feront l'objet d'une publication [30].

La motivation de rappeler les résultats sur les produits directs et les produits tordus vient du fait qu'une métrique produit doublement tordue est dans la classe conforme d'une métrique produit directe (lemme 4.2.1).

4.2 Produit doublement tordu

Définition 4.2.1. *Soient (B, g_B) et (F, g_F) deux variétés pseudo-riemanniennes de dimensions réelles r et s respectivement. Soient b et f deux fonctions strictement positives sur B et sur F respectivement. Le produit doublement tordu de B et F par b et f, noté $M := B_f \times_b F$, est la variété produit $B \times F$ munie du tenseur métrique $g = f^2 g_B \oplus b^2 g_F$ défini par*

$$g = (f \circ \sigma)^2 \pi^*(g) + (b \circ \pi)^2 \sigma^*(h), \tag{4.1}$$

où π et σ sont les projections naturelles de $B \times F$ sur B et F respectivement.

Remarque 4.2.1. *Soit $M := B_f \times_b F$ un produit doublement tordu.*

1. *Comme dans le cas du produit direct, B est appelé la base et F la fibre. Notons que, dans le cas du produit doublement tordu les rôles de la variété base et la variété fibre peuvent être interchangé.*
2. *Si une des fonctions tordantes b où f est constante, alors le produit doublement tordu se réduit à un produit tordu.*
3. *Le produit doublement tordu est riemannien si (B, g_B) et (F, g_F) sont riemanniennes.*
4. *Le produit doublement tordu est lorentzien si l'un des facteurs est riemannien et l'autre est lorentzien.*

Dans un système de coordonnées locales, la représentation matricielle de la métrique pseudo-riemannienne (g_{ij}) de M en fonction de celles (g_{ab}) et $(g_{\alpha\beta})$ de B et F respectivement, est donnée par

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} f^2 g_{ab} & 0 \\ 0 & b^2 g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

où $a, b = 1, 2, \cdots, r$; $\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, s$ et $i, j = 1.2, \cdots, r + s$.

Lemme 4.2.1. *Toute métrique produit doublement tordu est dans la classe conforme d'une métrique d'un produit direct.*

Démonstration. Soit $M := B_f \times_b F$ la variété produit doublement tordu munie de la métrique définie par $g = f^2 g_B + b^2 g_F$. On a :

$$\begin{aligned} g &= f^2 g_B + b^2 g_F \\ &= f^2\Big[g_B + b^2\Big(\frac{1}{f^2} g_F\Big)\Big] = b^2\Big[f^2\Big(\frac{1}{b^2} g_B\Big) + g_F\Big] \\ &= b^2 f^2\Big[\Big(\frac{1}{b^2} g_B\Big) + \Big(\frac{1}{f^2} g_F\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Posons $\bar{g} = \tilde{g}_B \oplus \tilde{g}_F$, où $\tilde{g}_B = \frac{1}{b^2} g_B$ et $\tilde{g}_F = \frac{1}{f^2} g_F$. Ainsi on a : $g = b^2 f^2 \bar{g}$, c'est à dire que la métrique du produit doublement tordu est conformément équivalente à une métrique d'un produit direct, où le facteur conforme est $\Psi = b^2 f^2$. □

Proposition 4.2.1. *Soit $(M, g) = B_f \times_b F$ un produit doublement tordu. Soit $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ et soit $U, V \in \mathfrak{X}(F)$. La connexion de Levi-Civita de (M, g) est donnée par :*

1. $\nabla_X Y = \nabla^B_X Y + X(l)Y + Y(l)X - g_B(X, Y)\nabla l$;
2. $\nabla_X V = \nabla_V X = V(\ln f)X + X(\ln b)V$;
3. $\nabla_U V = \nabla^F_U V + U(k)V + V(k)U - g_F(U, V)\nabla k$;

où $k = \ln b$ et $l = \ln f$.

Démonstration. La preuve utilise la formule de Koszul que nous rappelons : pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ et $U, V, W \in \mathfrak{X}(F)$ on a :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X+U}(Y+V), Z+W) &= (X+U)\cdot g(Y+V, Z+W) + (Y+V)\cdot g(Z+W, X+U) \\ &- (Z+W)\cdot g(X+U, Y+V) - g(Y+V, [X+U, Z+W]) \\ &- g(X+U, [Y+V, Z+W]) - g(Z+W, [Y+V, X+U]). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X\cdot g(Y, Z) + Y\cdot g(X, Z) - Z\cdot g(X, Y) \\ &- g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X V + \nabla_U Y, Z+W) &= X\cdot g(V, W) + Y\cdot g(U, W) - Z\cdot g(U, V) \\ &+ U\cdot g(Y, Z) + V\cdot g(X, Z) - W\cdot g(X, Y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U V, W) &= U\cdot g(V, W) + V\cdot g(U, W) - W\cdot g(U, V) \\ &- g(V, [U, W]) - g(U, [V, W]) - g(W, [V, U]). \end{aligned}$$

1. Par définition $g = f^2 g_B + b^2 g_F$. On a :

$$\begin{aligned} 2(f^2 g_B + b^2 g_F)(\nabla_X Y, Z) &= 2f^2 g_B(\nabla^B_X Y, Z) + 2f\big\{(X\cdot f)g_B(Y,Z) \\ &+ (Y\cdot f)g_B(X,Z) - (Z\cdot f)g_B(X,Y)\big\}. \end{aligned}$$

   Posons $f = e^l$. On a :

$$(X\cdot f) = (X\cdot e^l) = e^l dl(X) = e^l(X\cdot l),$$

   c'est-à-dire, $\frac{(X\cdot f)}{f} = X\cdot l$. D'où

$$\nabla_X Y = \nabla^B_X Y + X(l)Y + Y(l)X - g_B(X,Y)\nabla l.$$

2. Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ et $U, V \in \mathfrak{X}(F)$. La connexion ∇ étant sans torsion on a : $\nabla_X U - \nabla_U X - [X,U] = 0$. Or $[X,U] = 0$, alors

$$\nabla_X U = \nabla_U X.$$

   De plus $g(Y,U) = 0$ implique

$$g(\nabla_X Y, U) + g(Y, \nabla_X U) = 0.$$

   D'après 1) on a :

$$g(\nabla_X Y, U) = g(\nabla^B_X Y + X(l)Y + Y(l)X - g_B(X,Y)\nabla l, U) = -g_B(X,Y)g(\nabla l, U).$$

   D'où $g(Y, \nabla_X U) = g_B(X,Y)g(\nabla l, U)$. Ainsi $\nabla_X V \in \mathfrak{X}(B)$. La formule de Koszul entraine

$$\begin{aligned} 2(f^2 g_B + b^2 g_F)(\nabla_X V, Z) &= 2f^2 g_B(\nabla^B_X Y, Z) + 2f\big\{(X\cdot f)g_B(Y,Z) \\ &+ (Y\cdot f)g_B(X,Z) - (Z\cdot f)g_B(X,Y)\big\}. \end{aligned}$$

3. Par définition $g = f^2 g_B + b^2 g_F$. On a :

$$\begin{aligned} 2(f^2 g_B + b^2 g_F)(\nabla_U V, W) &= 2b^2 g_F(\nabla^F_U V, W) + 2b\{(U\cdot b)g_F(V,W) \\ &+ (V\cdot b)g_F(U,W) - (W\cdot b)g_F(U,V)\}. \end{aligned}$$

Posons $b = e^k$, on a :

$$(U \cdot b) = (U \cdot e^k) = e^k dk(U) = e^k (U \cdot k),$$

c'est à dire, $\frac{(U \cdot b)}{b} = U(k)$. Ainsi

$$\tilde{\nabla}_U V = \nabla^F_U V + U(k)V + V(k)U - g_F(U, V)\nabla k.$$

$\square$

Proposition 4.2.2. *Soit* $(M,g) = B_f \times_b F$ *un produit doublement tordu. Soit* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ *et soit* $U, V, W \in \mathfrak{X}(F)$. *Soit* $k = \ln b$ *et* $l = \ln f$. *L'opérateur de courbure de* (M,g) *est donné par :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,Y)Z &= \mathcal{R}^B(X,Y)Z - g_B(Y,Z)\nabla^B_X \nabla l + g_B(X,Z)\nabla^B_Y \nabla l \\
&+ \Big[\nabla^2 l(X,Z) - X(l)Z(l) + g_B(X,Z) g_B(\nabla l, \nabla l)\Big] Y \\
&- \Big[\nabla^2 l(Y,Z) - Y(l)Z(l) + g_B(Y,Z) g_B(\nabla l, \nabla l)\Big] X \\
&+ \Big[g_B(Y,Z) g_B(X, \nabla l) - g_B(X,Z) g_B(Y, \nabla l)\Big] \nabla l;
\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}(X,Y)U = \nabla^2 l(X,U)Y - \nabla^2 l(Y,U)X + U(l)X(l)Y - U(l)Y(l)X;$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,U)Y &= \Big[\nabla^2_B k(X,Y) + X(k)Y(k) - X(l)Y(k) - X(k)Y(l)\Big] U \\
&+ \Big[Y(k)U(l) - U(Y(l))\Big] X + \Big[U(l)\nabla l + \nabla_U \nabla l\Big] g_B(X,Y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(U,X)V &= \Big[\nabla^2_F l(U,V) + U(l)V(l) - U(k)V(l) - U(l)V(k)\Big] X \\
&+ \Big[V(l)X(k) - X(V(k))\Big] U + \Big[X(k)\nabla k + \nabla_X \nabla k\Big] g_F(U,V);
\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}(U,V)X = \nabla^2 k(U,X)V - \nabla^2 k(V,X)U + X(k)U(k)V - X(k)V(k)U;$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(U,V)W &= \mathcal{R}^F(U,V)W - g_F(V,W)\nabla^F_U \nabla k + g_F(U,W)\nabla^B_V \nabla k \\
&+ \Big[\nabla^2 k(U,W) - U(k)W(k) + g(U,W) g(\nabla k, \nabla k)\Big] V \\
&- \Big[\nabla^2 l(V,W) - V(k)W(k) + g(V,W) g(\nabla k, \nabla k)\Big] U \\
&+ \Big[g(V,W) g(U, \nabla k) - g(U,W) g(V, \nabla k)\Big] \nabla k;
\end{aligned}$$

où les $\nabla^2 l$ et $\nabla^2 k$ sont les hessiens sur M.

4.3 Conditions d'Osserman et conformément d'Osserman sur une variété produit direct

4.3.1 Variétés conforméments d'Osserman décomposable

Définition 4.3.1. *Une variété conformément d'Osserman est dite décomposable si elle est isomorphe au produit de deux variétés conformément d'Osserman. Une variété conformément d'Osserman est dite indécomposable si elle n'est pas décomposable*

Dans cette sous-section, nous caractérisons les variétés conformément d'Osserman de signature riemannienne et lorentzienne décomposable. Plus précisement :

Variétés riemanniennes conforméments d'Osserman décomposable

Lemme 4.3.1. *([23]) Soit (M, g) une variété riemannienne conformément d'Osserman décomposable. Alors (M, g) est localement conformément plate.*

Démonstration. Soit $M = B \times F$ une variété conformément d'Osserman et soit $p \in M$. Soit $\{e_1, \cdots, e_r, f_1, \cdots, f_s\}$ une base orthonormale de T_pM, avec $\{e_i\} \subset T_p^BM$ et $\{f_i\} \subset T_p^FM$. Par définition on a :

$$
\begin{aligned}
J_{\mathcal{W}}(e_i)e_j &= J_{\mathcal{R}}(e_i)e_j + \frac{1}{m-2}\Big[\frac{\tau}{m-1} + \rho(e_i, e_i) + \rho(e_j, e_j)\Big]e_j \in T_p^BM;\\
J_{\mathcal{W}}(f_i)e_j &= \frac{1}{m-2}\Big[\frac{\tau}{m-1} + \rho(f_i, f_i) + \rho(e_j, e_j)\Big]e_j \in T_p^BM;\\
J_{\mathcal{W}}(f_i)f_j &= J_{\mathcal{R}}(f_i)f_j + \frac{1}{m-2}\Big[\frac{\tau}{m-1} + \rho(f_i, f_i) + \rho(f_j, f_j)\Big]f_j \in T_p^FM;\\
J_{\mathcal{W}}(e_i)f_j &= \frac{1}{m-2}\Big[\frac{\tau}{m-1} + \rho(e_i, e_i) + \rho(f_j, f_j)\Big]f_j \in T_p^FM.
\end{aligned}
$$

Les termes mixtes du tenseur de Weyl s'annulent, c'est-à-dire,

$$\mathcal{W}(e_i, f_j)e_k = 0, \text{ et } \mathcal{W}(f_i, e_j)f_k = 0 \,\text{si}\, i \neq k.$$

Supposons $J_{\mathcal{W}}(e_1)f_j = \lambda f_j$, $J_{\mathcal{W}}(e_1)f_k = \mu f_k$ avec $\lambda \neq \mu$. Par le principe de dualité de Rakić, on a :

$$
\begin{aligned}
J_{\mathcal{W}}(\cos\theta f_j + \sin\theta f_k)e_1 &= \cos^2\theta J_{\mathcal{W}}(f_j)e_1 + \sin^2\theta J_{\mathcal{W}}(f_k)e_1\\
&+ \cos\theta\sin\theta(\mathcal{W}(e_1, f_j)f_k + \mathcal{W}(e_1, f_k)f_j)\\
&= \cos^2\theta J_{\mathcal{W}}(f_j)e_1 + \sin^2\theta J_{\mathcal{W}}(f_k)e_1\\
&= (\lambda\cos^2\theta + \mu\sin^2\theta)e_1.
\end{aligned}
$$

Ceci montre que e_1 est un vecteur propre de $J_{\mathcal{W}}(\cos\theta f_j + \sin\theta f_k)$ associé à la valeur propre $\lambda\cos^2\theta + \mu\sin^2\theta$; mais, puisque les valeurs propres sont constantes, nécessairement $\lambda = \mu$. En repétant la même procédure, nous montrons que toutes les valeurs propres de $J_{\mathcal{W}}(e_1)$ associées à des vecteurs propres f_j dans T_p^FM sont égales.

On montre qu'en effet, toutes les valeurs propres de $J_{\mathcal{W}}(e_1)$ sont égales. Soit $X \in T_p^BM$ un vecteur unité tel que $J_{\mathcal{W}}(e_1)X = \nu X$ et $J_{\mathcal{W}}(f_1)X = \lambda X$. Alors

$$
\begin{aligned}
J_{\mathcal{W}}(cos\theta e_1 + sin\theta f_1)X &= cos^2\theta J_{\mathcal{W}}(e_1)X + sin^2\theta J_{\mathcal{W}}(f_1)X\\
&+ cos\theta sin\theta(\mathcal{W}(X, e_1)f_1 + \mathcal{W}(X, f_1)e_1)\\
&= cos^2\theta J_R(e_1)X + sin^2\theta J_R(f_1)X\\
&= (cos^2\theta\nu + sin^2\theta\lambda)e_1.
\end{aligned}
$$

et nécessairement $\lambda = \nu$. Puisque la trace de $J_{\mathcal{W}}(\cdot)$ est nulle, nous concluons que toutes les valeurs propres de $J_{\mathcal{W}}(\cdot)$ sont nulles et ainsi donc le tenseur de Weyl est nul. □

Théorème 4.3.1. *Une variété riemannienne conformément d'Osserman décomposable est localement conformément plate.*

Démonstration. C'est une conséquence du Lemme 4.3.1 □

Variétés lorentziennes conforméments d'Osserman décomposable

Nous rappelons que le produit de deux variétés lorentziennes n'est pas lorentzienne. Donc ici, nous supposerons que (B, g_B) est une variété lorentzienne et (F, g_B) une variété riemannienne.

Corollaire 4.3.1. *Une variété lorentzienne conformément d'Osserman décomposable est localement conformément plate.*

Démonstration. C'est une conséquence des résultats des articles [8, 15], où il est montré que toute variété lorentzienne conformément d'Osserman est localement conformément plate. □

4.3.2 Variétés d'Osserman décomposable

Définition 4.3.2. *Une variété d'Osserman est dite décomposable si elle est isomorphe au produit de deux variétés d'Osserman. Une variété d'Osserman est dite indécomposable si elle n'est pas décomposable.*

Dans cette sous-section, nous caractérisons les variétés d'Osserman de signature riemannienne et lorentzienne décomposable. Plus précisement :

Variétés riemanniennes d'Osserman décomposable

Lemme 4.3.2. *([46]) Soit (M, g) une variété riemannienne d'Oserman qui se décompose en produit direct $B \times F$. Alors (M, g) est une variété plate.*

Démonstration. Soit (M, g) une variété d'Osserman localement réductible i.e., $M = B \times F$. Soit X et Y deux vecteurs tangents de M tels que $X \in B$ et $Y \in F$. Alors $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$tr\{J_{\mathcal{R}}^k(aX + bY)\} = \mu_2\|aX + bY\|^{2k}. \tag{4.2}$$

D'une part, le premier membre de l'égalité (4.2) donne :

$$tr\{J_{\mathcal{R}}^k(aX + bY)\} = \mu_k\{a^{2k}\|X\|^{2k} + b^{2k}\|Y\|^{2k}\}. \tag{4.3}$$

D'autre part, le second membre de l'égalité (4.2) donne :

$$\mu_k\|aX + bY\|^{2k} = \mu_k\{a^2\|X\|^2 + b^2\|Y\|^2\}^k. \tag{4.4}$$

Les membres de droite des égalités (4.3) et (4.4) sont incompatibles quand $k \geq 2$. Donc, l'égalité (4.2) est vraie si et seulement si $R = 0$. □

On déduit le résultat suivant :

Théorème 4.3.2. *Une variété d'Osserman décomposable est localement plate.*

Variétés lorentziennes d'Osserman décomposable

Nous rappelons que le produit de deux variétés lorentziennes n'est pas lorentzienne. Donc, nous supposerons que l'un des facteurs est une variété lorentzienne et l'autre facteur est une variété riemannienne.

Corollaire 4.3.2. *Soit (M, g) une variété lorentzienne d'Osserman qui se décompose comme un produit direct $B \times F$. Alors (M, g) est à courbure sectionnelle constante.*

Démonstration. C'est une conséquence des résultats des articles [9, 37], où il est montré que toute variété lorentzienne d'Osserman est à courbure sectionnelle constante. □

Variétés pseudo-riemanniennes d'Osserman décomposable

En géométrie pseudo-riemannienne, nous exprimons la condition d'Osserman en termes des valeurs propres du polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi. On a la relation suivante :

Proposition 4.3.1. *Soient $(M = B \times F, g)$ un produit direct pseudo-riemannien et p un point de M. Soit $X = (X_1, X_2) \in T_pM$ où X_1 désigne la projection sur T_p^BM de X et X_2 désigne la projection sur T_p^FM de X. Alors le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi sur M est donné par :*

$$P_\lambda[J_\mathcal{R}(X)] = P_\lambda[J_{\mathcal{R}^B}(X_1)] \cdot P_\lambda[J_{\mathcal{R}^F}(X_2)].$$

Démonstration. Soit p un point de M. Un vecteur $X \in T_pM$ peut s'écrire comme $X = X_1 + X_2$, avec $X_1 \in T_p^BM$ et $X_2 \in T_p^FM$. Le polynôme caractéristique de l'opéateur de Jacobi est défini par

$$P_\lambda[J_\mathcal{R}(X)] = det(J_\mathcal{R}(X) - \lambda I_{r+s}),$$

où $\dim B = r$ et $\dim F = s$. La matrice associée à $J_\mathcal{R}(X) = J_\mathcal{R}(X_1 + X_2)$ est donnée par :

$$J_\mathcal{R}(X)(\cdot) = J_\mathcal{R}(X_1 + X_2)(\cdot) = \begin{pmatrix} J_\mathcal{R}(X_1) & 0 \\ 0 & J_\mathcal{R}(X_2) \end{pmatrix}.$$

De même, la matrice I_{r+s} est donnée

$$I_{r+s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} P_\lambda[J_{\mathfrak{R}}(X)] &= det \begin{pmatrix} J_{\mathfrak{R}}(X_1) - \lambda I_r & 0 \\ & \\ 0 & J_{\mathfrak{R}}(X_2) - \lambda I_s \end{pmatrix}, \\ &= det(J_{\mathfrak{R}}(X_1) - \lambda I_r) det(J_{\mathfrak{R}}(X_2) - \lambda I_s). \end{aligned}$$

Ainsi

$$P_\lambda[J_{\mathfrak{R}}(X)] = det(J_{\mathfrak{R}^B}(X_1) - \lambda I_r) det(J_{\mathfrak{R}^F}(X_2) - \lambda I_s).$$

□

4.4 Conditions d'Osserman et conformément d'Osserman sur une variété produit tordu

4.4.1 Variétés produits tordus conforméments d'Osserman

Définition 4.4.1. *Une variété produit tordu conformément d'Osserman est une variété produit tordu qui satisfait la condition conformément d'Osserman.*

Dans cette sous-section, nous caractérisons les variétés produits tordus de signature riemannienne et lorentzienne qui satisfont la condition conformément d'Osserman.

Variétés riemanniennes produits tordus conforméments d'Osserman

Théorème 4.4.1. *([23]) Un produit tordu riemannien $B \times_f F$ est conformément d'Osserman si et seulement si $B \times_f F$ est localement conformément plat.*

Démonstration. D'une part, nous savons qu'une métrique produit tordu est dans la classe conforme d'une métrique produit direct. D'autre part, la condition conformément d'Osserman est un invariant conforme. Enfin, on déduit le résultat à partir du Lemme 4.3.1. □

Variétés lorentziennes produits tordus conforméments d'Osserman

Corollaire 4.4.1. *Une variété lorentzienne produit tordu $B \times_f F$ conformément d'Osserman est localement conformément plat.*

Démonstration. C'est une conséquence des résultats des articles [8, 15], où il est montré que toute variété lorentzienne conformément d'Osserman est localement conformément plate. □

Un espace-temps de Robertson-Walker est un espace-temps $(I \times_f F, g)$ tel que

$$(I \times_f F, g) = (I \times F, -dt^2 + f(t)g_F),$$

où I est un intervalle de la droite réelle, $f : I \to \mathbb{R}$ et g_F est une métrique riemannienne à courbure constante sur la 3-variété F.

Exemple 4.4.1. *Les espaces temps de Robertson-Walker sont des exemples de variétés lorentziennes produits tordus conformément d'Osserman.*

En relativité générale, les espaces temps de Robertson-Walker sont les solutions de l'équation d'Einstein qui modélisent la forme globale de l'univers, en négligeant les irrégularités locales de la distribution de la matière. Ces solutions ont une importance considérable en astrophysique : ils sont à l'origine de la théorie prédisant l'existence du *Big Bang*, c'est grâce à eux qu'on estime l'âge de l'univers.

4.4.2 Variétés produits tordus d'Osserman

Définition 4.4.2. *Une variété produit tordu d'Osserman est une variété produit tordu qui satisfait la condition d'Osserman.*

Dans cette sous-section, nous caractérisons les variétés produits tordus de signature riemannienne et lorentzienne qui satisfont la condition d'Osserman. Plus précisement :

Variétés riemanniennes produits tordus d'Osserman

Théorème 4.4.2. *Un produit tordu riemannien $B \times_f F$ est d'Osserman si et seulement si $B \times_f F$ est de courbure sectionnelle constante.*

Démonstration. Supposons que $B \times_f F$ est d'Osserman. Alors $B \times_f F$ est d'Einstein et conformément d'Osserman. A partir du Théorème 4.4.1, un produit tordu conformément d'Osserman est localement conformément plat. Puisque $B \times_f F$ est d'Einstein et localement conformément plat, alors il est à courbure sectionnelle constante. □

Corollaire 4.4.2. *Les espaces $\mathbb{C}P^m, \mathbb{Q}P^m, \mathbb{O}P^m, \mathbb{C}H^m, \mathbb{Q}H^m, \mathbb{O}P^m$ ne peuvent pas se décomposer comme un produit tordu.*

Variétés lorentziennes produits tordus d'Osserman

Corollaire 4.4.3. *Une variété lorentzienne produit tordu $B \times_f F$ d'Osserman est à courbure sectionnelle constante.*

Démonstration. C'est une conséquence des résultats des articles [9, 37], où il est montré que toute variété lorentzienne d'Osserman est à courbure sectionnelle constante. □

4.5 Conditions d'Osserman et conformément d'Osserman sur une variété produit doublement tordu

4.5.1 Produits doublement tordus conforméments d'Osserman

Définition 4.5.1. *Une variété produit doublement tordu conformément d'Osserman est une variété produit doublement tordu qui satisfait la condition conformément d'Osserman.*

Dans cette sous-section, nous caractérisons les variétés produits doublement tordus de signatures riemannienne et lorentzienne qui satisfont la condition conformément d'Osserman.

Variétés riemanniennes produits doublement tordus conforméments d'Osserman

Une variété produit doublement tordu $(M, g) = (B_f \times_b F, f^2 g_B + b^2 g_F)$ est dite variété riemannienne produit doublement tordu si et seulement si (B, g_B) et (F, g_F) sont toutes deux riemanniennes.

Théorème 4.5.1. *([30]) Toute variété riemannienne produit doublement tordu $B_f \times_b F$ conformément d'Osserman est localement conformément plate.*

Démonstration. Soit $B_f \times_b F$ un produit doublement tordu. D'une part, on sait que $B_f \times_b F$ est dans la classe conforme d'un produit direct. D'autre part, la structure conformément d'Osserman est un invariant conforme. Ainsi g est conformément d'Osserman si et seulement si $\tilde{g} = \left(\frac{1}{b^2} g_B\right) + \left(\frac{1}{f^2} g_F\right)$ est conformément d'Osserman. Or, $\tilde{g}$ est un produit direct. Alors nous utilisons le résultat du **Lemme 4.3.1** pour conclure. Ce qui achève la demonstration. □

Variétés lorentziennes produits doublement tordus conforméments d'Osserman

Une variété produit doublement tordu $(M, g) = (B_f \times_b F, f^2 g_B + b^2 g_F)$ est dite variété lorentzienne produit doublement tordu si l'un des facteurs est lorentzien et l'autre riemannien.

Corollaire 4.5.1. *([30]) Une variété lorentzienne produit doublement tordu $B \times_f F$ conformément d'Osserman est localement conformément plate.*

Démonstration. On utilise le fait que toute métrique produit doublement tordu est dans la classe conforme d'une métrique produit directe et les résultats des articles [8, 15], où il est montré que toute variété lorentzienne conformément d'Osserman est localement conformément plate. □

4.5.2 Variétés produits doublement tordus d'Osserman

Définition 4.5.2. *Une variété produit doublement tordu d'Osserman est une variété produit doublement tordu qui satisfait la condition d'Osserman.*

Dans cette sous-section, nous caractérisons les variétés produits doublement tordus de signatures riemannienne et lorentzienne qui satisfont la condition d'Osserman. Plus précisement :

Variétés riemanniennes produits doublement tordus d'Osserman

Théorème 4.5.2. *([30]) Toute variété riemannienne produit doublement tordu $B_f \times_b F$ d'Osserman est à courbure sectionnelle constante.*

Démonstration. Supposons que $B_f \times_b F$ est d'Osserman. Alors $B_f \times_b F$ est d'Einstein et conformément d'Osserman. A partir du **Théorème 4.4.1**, un produit doublement tordu conformément d'Osserman est localement conformément plate. Ainsi $B_f \times_b F$ est d'Einstein et localement conformément plat, alors il est à courbure sectionnelle constante. □

Corollaire 4.5.2. *Un espace homogène doublement transitif qui se décompose comme un produit doublement tordu est de courbure sectionnelle constante.*

Corollaire 4.5.3. *Les espaces $\mathbb{C}P^m, \mathbb{Q}P^m, \mathbb{O}P^m, \mathbb{C}H^m, \mathbb{Q}H^m, \mathbb{O}P^m$ ne peuvent pas se décomposer comme un produit doublement tordu.*

Démonstration. Ces espaces sont des variétés d'Osserman dont la courbure sectionnelle n'est pas constante. □

Variétés lorentziennes produits doublement tordus d'Osserman

Corollaire 4.5.4. *([30]) Une variété lorentzienne produit doublement tordu $B \times_f F$ d'Osserman est à courbure sectionnelle constante.*

Démonstration. C'est une conséquence des résultats des articles [9, 37], où il est montré que toute variété lorentzienne d'Osserman est à courbure sectionnelle constante. □

Deuxième partie

Condition d'Osserman en géométrie affine

Condition d'Osserman en géométrie affine

Sommaire

5.1 Introduction

Les variétés d'Osserman ont surtout été étudiées dans le cadre de la géométrie pseudo-riemannienne, c'est-à-dire dans un cadre métrique. Une version affine a été introduite par García-Río, Kupeli, Vázquez-Abal et Vázquez-Lorenzo dans [38]. Ils ont montré que si une connexion affine est d'Osserman, alors le tenseur de Ricci de la connexion est anti-symétrique. Ils ont utilisé les connexions affines d'Osserman pour contruire des métriques d'Osserman de signature $(2, 2)$ sur le fibré cotangent de la variété affine à partir de la construction : *extension riemannienne.*

Les variétés affines d'Osserman se placent à un point de confluence de deux théories : *la géométrie affine et la géométrie pseudo-riemannienne* ; ce qui, en soit, confère un certains intérêt.

Le chapitre est divisé en cinq sections. Dans la section 5.2, nous rappelons la définition des variétés affines d'Osserman et les premiers résultats concernant l'étude de cette classe de variétés. Nous montrons que la propriété affine d'Osserman est preservée par le produit de variétés. Dans la section 5.3, nous donnons un théorème de description locale des surfaces affines d'Osserman et des exemples sont donnés. Nous obtenons une équivalence entre la notion de connexion affine d'Osserman et l'antisymétrie du tenseur de Ricci d'une connexion affine. Nous prouvons que toute connexion affine d'Osserman localement symétrique est de courbure de Ricci nulle et toute connexion affine d'Osserman localement non symétrique est de courbure de Ricci antisymétrique. La section 5.4 est consacrée à une étude d'une famille de variétés affines d'Osserman de dimension 3. Comme application des variétés affines d'Osserman, des métriques d'Osserman de signature $(3,3)$ sont construites sur le fibré cotangent de la variété affine ; c'est l'object de la section 5.5. Ces travaux ont conduit à la publication de deux articles [31, 32].

5.2 Variétés affines d'Osserman

Soit M une variété de dimension m munie d'une connexion ∇. Soit $\mathcal{R}^\nabla$ l'opérateur de courbure induit par ∇. Soit X un vecteur de l'espace tangent T_pM en un point p de M. *L'opérateur de Jacobi affine en* p est l'endomorphisme $J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)$ de T_pM défini par

$$J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)Y = \mathcal{R}^\nabla(Y,X)X, \tag{5.1}$$

pour tout Y dans T_pM.

Définition 5.2.1. *Soit M une variété de dimension m munie d'une connexion ∇. Alors (M,∇) est dite affine d'Osserman en $p \in M$ si le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine en p est indépendant du choix de X dans T_pM. De même, la variété (M,∇) est dite affine d'Osserman si (M,∇) est affine d'Osserman en chaque point $p \in M$.*

Théorème 5.2.1. *([38]) Soit M une variété de dimension m munie d'une connexion ∇. Alors (M,∇) est affine d'Osserman en $p \in M$ si et seulement si le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine $J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)$ est donné par*

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)] = \lambda^m, \tag{5.2}$$

pour tout $X \in T_pM$.

Démonstration. Si $P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)] = \lambda^m$, alors de façon évidente (M,∇) est affine d'Osserman. Montrons l'inverse : soit $X \in T_pM$, le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine $J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)$ est donné par :

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)] = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0; \tag{5.3}$$

où $a_{m-1} = -tr\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\}$ et $a_0 = det\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\}$. Alors pour $c \in \mathbb{R}^*$, le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine $J_{\mathcal{R}^\nabla}(cX)$ est donné par

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(cX)] = \lambda^m + c^2 a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdot + c^{2m}a_0. \tag{5.4}$$

Par définition (M,∇) est affine d'Osserman si et seulement si :

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)] = P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(cX)].$$

Puisque $c \neq 0$, il vient que :

$$a_{m-1} = \cdots = a_0 = 0.$$

□

Corollaire 5.2.1. *Si (M, ∇) est une variété affine d'Osserman, alors le spectre de l'opérateur de Jacobi affine noté $Spec\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\}$ a pour valeur propre zéro, c'est-à-dire que*

$$Spec\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\} = \{0\}.$$

Corollaire 5.2.2. *Si (M, ∇) est une variété affine d'Osserman, alors son tenseur de Ricci est antisymétrique.*

Démonstration. Par définition on a :

$$a_{m-1} = -tr\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\} = Ric(X, X). \tag{5.5}$$

Il vient du Théorème 5.2.1 que si (M, ∇) est affine d'Osserman en $p \in M$, alors

$$Ric(X, X) = 0, \tag{5.6}$$

pour tout $X \in T_pM$. Remplaçons X par $Y + Z$ dans (5.6) ; on obtient :

$$\begin{aligned} Ric(Y + Z, Y + Z) &= 0 \\ Ric(Y, Z) + Ric(Z, Y) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$Ric(Y, Z) = -Ric(Z, Y).$$

□

Remarque 5.2.1. *Contrairement aux variétés riemanniennes d'Osserman, les notions de variétés affine d'Osserman en un point, affine d'Osserman point par point et globalement affine d'Osserman sont équivalentes.*

Théorème 5.2.2. *[32] Soit (M_1, ∇_1) une variété affine d'Osserman en $p_1 \in M_1$ et soit (M_2, ∇_2) une variété affine d'Osserman en $p_2 \in M_2$. Alors le produit direct $(M_1 \times M_2, \nabla_1 \oplus \nabla_2)$ est affine d'Osserman en $p = (p_1, p_2)$.*

Démonstration. Supposons que (M_1, ∇_1) est affine d'Osserman en $p_1 \in M_1$ et (M_2, ∇_2) est affine d'Osserman en $p_2 \in M_2$. Soit $X = (X_1, X_2) \in T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$, alors

$$J_{\mathcal{R}^\nabla}(X) = J_{\mathcal{R}^{\nabla_1}}(X_1) \oplus J_{\mathcal{R}^{\nabla_2}}(X_2).$$

On a :

$$\begin{aligned} Spec\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\} &= Spec\{J_{\mathcal{R}^{\nabla_1}}(X_1)\} \cup Spec\{J_{\mathcal{R}^{\nabla_2}}(X_2)\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

□

5.3 Surfaces affines d'Osserman

5.3.1 Tenseurs de courbure de Riemann et de Ricci

Soit M une variété de dimension 2 munie d'une connexion ∇ sans torsion donnée par

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_1}\partial_1 &= f_{11}^1(u_1,u_2)\partial_1 + f_{11}^2(u_1,u_2)\partial_2; \\ \nabla_{\partial_1}\partial_2 &= f_{12}^1(u_1,u_2)\partial_1 + f_{12}^2(u_1,u_2)\partial_2; \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 &= f_{22}^1(u_1,u_2)\partial_1 + f_{22}^2(u_1,u_2)\partial_2; \end{cases} \tag{5.7}$$

où (u_1, u_2) est un système de coordonnées locales sur M, $\partial_i = (\partial/\partial u_i)\,(i = 1, 2)$. Nous noterons dans la suite les coefficients de la connexion par $f_{11}^1(u_1,u_2)$, $f_{11}^2(u_1,u_2)$, $f_{12}^1(u_1,u_2)$, $f_{12}^2(u_1,u_2)$, $f_{22}^1(u_1,u_2)$, $f_{22}^2(u_1,u_2)$ par f_{11}^1, f_{11}^2, f_{12}^1, f_{12}^2, f_{22}^1, f_{22}^2.

Lemme 5.3.1. *[31] Les composantes du tenseur de courbure de la connexion (5.7) sont données par*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\nabla(\partial_1,\partial_2)\partial_1 &= a\partial_1 + b\partial_2; \\ \mathcal{R}^\nabla(\partial_1,\partial_2)\partial_2 &= c\partial_1 + d\partial_2; \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a &= \partial_1 f_{12}^1 - \partial_2 f_{11}^1 + f_{12}^1 f_{12}^2 - f_{11}^2 f_{22}^1, \\ b &= \partial_1 f_{12}^2 - \partial_2 f_{11}^2 + f_{11}^2 f_{12}^1 + f_{12}^2 f_{12}^2 - f_{11}^1 f_{12}^2 - f_{11}^2 f_{22}^2, \\ c &= \partial_1 f_{22}^1 - \partial_2 f_{12}^1 + f_{11}^1 f_{22}^1 + f_{12}^1 f_{22}^2 - f_{12}^1 f_{12}^1 - f_{12}^2 f_{22}^1, \\ d &= \partial_1 f_{22}^2 - \partial_2 f_{12}^2 + f_{11}^2 f_{22}^1 - f_{12}^1 f_{12}^2. \end{aligned}$$

Soit (M, g) une variété affine. *Une connexion affine est plate si le tenseur de courbure* $\mathcal{R}^\nabla$ *s'annule sur* M. Il est connu dans la littérature que : *le tenseur de courbure et le tenseur de torsion d'une variété affine* (M,∇) *s'annulent si et seulement si en chaque point il existe un système de coordonnées locales tel que tous les coefficients de la connexion soient nuls.*

En dimension 2, le tenseur de Ricci détermine le tenseur de courbure. On a :

$$\mathcal{R}^\nabla(X,Y)Z = Ric^\nabla(Y,Z)X - Ric^\nabla(X,Z)Y.$$

On déduit la formule suivante :

$$Ric^\nabla(\partial_j,\partial_k) = \sum_i \mathcal{R}_{kij}^i.$$

Lemme 5.3.2. *[31] Les composantes du tenseur de Ricci de la connexion (5.7) sont données par*

$$\begin{array}{rcl} Ric^{\nabla}(\partial_1,\partial_1) &=& \partial_2 f_{11}^2 - \partial_1 f_{12}^2 + f_{12}^2(f_{11}^1 - f_{12}^2) + f_{11}^2(f_{22}^2 - f_{12}^1); \\ Ric^{\nabla}(\partial_1,\partial_2) &=& \partial_2 f_{12}^2 - \partial_1 f_{22}^2 + f_{12}^1 f_{12}^2 - f_{11}^2 f_{22}^1; \\ Ric^{\nabla}(\partial_2,\partial_1) &=& \partial_1 f_{12}^1 - \partial_2 f_{11}^1 + f_{12}^1 f_{12}^2 - f_{11}^2 f_{22}^1; \\ Ric^{\nabla}(\partial_2,\partial_2) &=& \partial_1 f_{22}^1 - \partial_2 f_{12}^1 + f_{22}^1(f_{11}^1 - f_{12}^2) + f_{12}^1(f_{22}^2 - f_{12}^1). \end{array}$$

Le tenseur de Ricci Ric^{∇} d'une connexion ∇ est *antisymétrique* si et seulement si :

$$Ric^{\nabla}(\partial_1,\partial_1) = Ric^{\nabla}(\partial_2,\partial_2),\ Ric^{\nabla}(\partial_1,\partial_2) + Ric^{\nabla}(\partial_2,\partial_1) = 0. \tag{5.8}$$

Proposition 5.3.1. *[31] Le tenseur de Ricci de la connexion (5.7) est antisymétrique si et seulement si les fonctions $f_{11}^1, f_{11}^2, f_{12}^1, f_{12}^2, f_{22}^1, f_{22}^2$ satisfont :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_2 f_{11}^2 - \partial_1 f_{12}^2 + f_{12}^2(f_{11}^1 - f_{12}^2) + f_{11}^2(f_{22}^2 - f_{12}^1) &=& 0; \\ \partial_1 f_{22}^1 - \partial_2 f_{12}^1 + f_{22}^1(f_{11}^1 - f_{12}^2) + f_{12}^1(f_{22}^2 - f_{12}^1) &=& 0; \\ \partial_1 f_{12}^1 - \partial_2 f_{11}^1 - \partial_1 f_{22}^2 + \partial_2 f_{12}^2 + 2(f_{12}^1 f_{12}^2 - f_{11}^2 f_{22}^1) &=& 0. \end{array}\right. \tag{5.9}$$

Démonstration. Elle découle d'un calcul direct de (5.8). □

5.3.2 Connexions affines localement symétriques

Une variété affine (M,∇) est dite *localement symétrique* si et seulement si, pour tout p de M, il existe un voisinage U_p de ce point stable par la symétrie géodésique σ_p au point p et tel que la restriction de σ_p à l'ouvert U_p, noté $\sigma_p|_{U_p}$, soit une transformation affine de (U_p,∇). Une variété affine (M,∇) est dite *affine symétrique*, si la symétrie géodésique locale σ_p en p s'étend en une transformation affine de (M,∇).

On a la condition d'intégrabilité suivante : (M,∇) est localement symétrique si la dérivée covariante de la courbure est nulle : $\nabla\mathcal{R}^{\nabla} = 0$.

Proposition 5.3.2. *[31] La connexion ∇ definie par (5.7) est localement symétrique si et seulement si les fonctions $f_{11}^1, f_{11}^2, f_{12}^1, f_{12}^2, f_{22}^1, f_{22}^2$ satisfont :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_1 a + f_{11}^1 a + f_{12}^1 b &=& 0, \\ \partial_1 b + f_{11}^2 a + f_{12}^2 b &=& 0, \\ \partial_1 c + f_{11}^1 c + f_{12}^1 d &=& 0, \\ \partial_1 d + f_{11}^2 c + f_{12}^2 d &=& 0, \\ \partial_2 a + f_{12}^1 a + f_{22}^1 b &=& 0, \\ \partial_2 b + f_{12}^2 a + f_{22}^2 b &=& 0, \\ \partial_2 c + f_{12}^1 c + f_{22}^1 d &=& 0, \\ \partial_2 d + f_{12}^2 c + f_{22}^2 d &=& 0. \end{array}\right. \tag{5.10}$$

Démonstration. Soit $X_k = \alpha_i^k \partial_i$, $k = 1,2,3,4$, $i = 1,2$. La condition

$$\nabla_{X_1} \mathcal{R}^\nabla (X_2, X_3) X_4 = 0$$

est équivalente à :

$$\nabla_{\alpha_i^1 \partial_i} \mathcal{R}^\nabla (\alpha_i^2 \partial_i, \alpha_i^3 \partial_i) \alpha_i^4 \partial_i = 0, \quad i, j, k = 1, 2;$$

c'est à dire que

$$\nabla_{\alpha_1^1 \partial_1} \mathcal{R}^\nabla (\alpha_j^2 \partial_j, \alpha_k^3 \partial_k) \alpha_l^4 \partial_l + \nabla_{\alpha_2^1 \partial_2} \mathcal{R}^\nabla (\alpha_j^2 \partial_j, \alpha_k^3 \partial_k) \alpha_l^4 \partial_l = 0, \ j, k, l = 1, 2.$$

Après un long calcul, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla_{\partial_1} \mathcal{R}^\nabla (\partial_1, \partial_2) \partial_1 & = & [\partial_1 a + f_{11}^1 a + f_{12}^1 b] \partial_1 + [\partial_1 b + f_{11}^2 a + f_{12}^2 b] \partial_2, \\ \nabla_{\partial_1} \mathcal{R}^\nabla (\partial_1, \partial_2) \partial_2 & = & [\partial_1 c + f_{11}^1 c + f_{12}^1 d] \partial_1 + [\partial_1 d + f_{11}^2 c + f_{12}^2 d] \partial_2, \\ \nabla_{\partial_2} \mathcal{R}^\nabla (\partial_1, \partial_2) \partial_1 & = & [\partial_2 a + f_{12}^1 a + f_{22}^1 b] \partial_1 + [\partial_2 b + f_{12}^2 a + f_{22}^2 b] \partial_2, \\ \nabla_{\partial_2} \mathcal{R}^\nabla (\partial_1, \partial_2) \partial_2 & = & [\partial_2 c + f_{12}^1 c + f_{22}^1 d] \partial_1 + [\partial_2 d + f_{12}^2 c + f_{22}^2 d] \partial_2. \end{array} \right.$$

□

5.3.3 Connexions affines localement homogènes

Une connexion affine ∇ sur une variété M est *localement homogène* si pour tous points p et q de M, il existe des voisinages U de p et V de q et une transformation affine f : $(U, \nabla_{|U}) \to (V, \nabla_{|V})$ tels que $f(p) = q$.

On a la caractérisation suivante :

Proposition 5.3.3. *[49] Une connexion ∇ sur une variété M est localement homogène si et seulement si elle admet au voisinage de tout point p de M au moins deux champs de vecteurs de Killing affines linéairement indépendants.*

Nous rappelons qu'un champs de vecteur de Killing affine X est caractérisé par l'équation suivante

$$[X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X, Z] - \nabla_{[X,Y]} Z = 0, \tag{5.11}$$

pour tous champs de vecteurs Y, Z (voir Proposition 2.2 chapitre VI de [47]).

Soit dans la base locale (∂_1, ∂_2), le champs de vecteur X défini par :

$$X = F(u_1, u_2) \partial_1 + G(u_1, u_2) \partial_2.$$

En utilisant (5.11) et les identités de bases de la torsion et des crochets de Lie, nous montrons que le champs de vecteur X est un champs de vecteur de Killing affine si et seulement si, il satisfait les six équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
\partial_{11}F + f_{11}^1\partial_1 F + \partial_1 f_{11}^1 F - f_{11}^2\partial_2 F + \partial_2 f_{11}^1 G + 2f_{12}^1\partial_1 G & = & 0, \\
\partial_{11}G + 2f_{11}^2\partial_1 F + (2f_{12}^2 - f_{11}^1)\partial_1 G - f_{11}^2\partial_2 G + \partial_1 f_{11}^2 F + \partial_2 f_{11}^2 G & = & 0, \\
\partial_{12}F + (f_{11}^1 - f_{12}^2)\partial_2 F + f_{22}^1\partial_1 G + f_{12}^1\partial_2 G + \partial_1 f_{12}^1 F + \partial_2 f_{12}^1 G & = & 0, \\
\partial_{12}G + f_{12}^2\partial_1 F + f_{11}^2\partial_2 F + (f_{22}^2 - f_{11}^2)\partial_1 G + \partial_1 f_{12}^2 F + \partial_2 f_{12}^2 G & = & 0, \\
\partial_{22}F - f_{22}^1\partial_1 F + (2f_{12}^1 - f_{22}^2)\partial_2 F + 2f_{22}^1\partial_2 G + \partial_1 f_{22}^1 F + \partial_2 f_{22}^1 G & = & 0, \\
\partial_{22}G + 2f_{12}^2\partial_2 F - f_{22}^1\partial_1 G + f_{22}^2)\partial_2 G\partial_1 f_{22}^2 F + \partial_2 f_{22}^2 G & = & 0.
\end{array}$$

5.3.4 Connexions affines d'Osserman

Lemme 5.3.3. *Soit ∇ une connexion sans torsion sur une surface Σ. L'opérateur de Jacobi affine $J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)$ associé à ∇ est nilpotent si et seulement si ∇ est antisymétrique.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique de l'opérateur de Jacobi affine est donné par :

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)] = \lambda^2 - tr\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\}\lambda + det\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\}.$$

Puisque

$$J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)X = \mathcal{R}^\nabla(X,X)X = 0,$$

nous pouvons conclure que

$$det\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\} = 0.$$

Ainsi, $Spect\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\} = \{0\}$ si et seulement si

$$Ric(X,X) = tr\{J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\} = 0.$$

On polarise cette identité pour montrer que le tenseur de Ricci est antisymétrique. □

Exemple 5.3.1. *([39]) Considérons le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la connexion définie par :*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_2 = \nabla_{\partial_2}\partial_1 = e^{u_2}u_1\partial_1; \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = \frac{1}{2}e^{u_2}u_1^2\partial_1 + e^{u_2}u_1\partial_2.$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\nabla}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 &= e^{u_2}\partial_1\\ \mathcal{R}^{\nabla}(\partial_1,\partial_2)\partial_2 &= e^{u_2}\partial_2.\end{aligned}$$

Les composantes du tenseur de Ricci sont définies par :

$$Ric(\partial_j,\partial_k)=\sum_i \mathcal{R}^i_{kij},$$

où

$$\mathcal{R}^{\nabla}(\partial_k,\partial_l)\partial_j=\sum_i \mathcal{R}^i_{jkl}\partial_i.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}Ric(\partial_1,\partial_2) &= \sum_i \mathcal{R}^i_{2i1}=\mathcal{R}^1_{211}+\mathcal{R}^2_{221}=\mathcal{R}^1_{211}=-\mathcal{R}^1_{121}=-e^{u_2}\\ Ric(\partial_2,\partial_1) &= \sum_i \mathcal{R}^i_{1i2}=\mathcal{R}^1_{112}+\mathcal{R}^2_{122}=\mathcal{R}^2_{122}=e^{u_2}.\end{aligned}$$

On remarque que

$$Ric(\partial_1,\partial_2)=-Ric(\partial_2,\partial_1);$$

c'est à dire que le tenseur de Ricci de cette connexion ∇ est antisymétrique. Ainsi, cette connexion ∇ est affine d'Osserman.

5.3.5 Description locale des connexions affines d'Osserman

Dans cette section, nous décrivons localement les connexions affines d'Osserman sur une variété de dimension 2.

Lemme 5.3.4. *[31] L'opérateur de Jacobi affine est donné par*

$$J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)\partial_1=A\partial_1+B\partial_2,\quad J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)\partial_2=C\partial_1+D\partial_2,$$

où

$$\begin{aligned}A &= \alpha_1\alpha_2 a+\alpha_2^2 c;\\ B &= \alpha_1\alpha_2 b+\alpha_2^2 d;\\ C &= -\alpha_1^2 a-\alpha_1\alpha_2 c;\\ D &= -\alpha_1^2 b-\alpha_1\alpha_2 d;\end{aligned}$$

Démonstration. Les composantes de l'opérateur de courbure affine sont données par

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\nabla}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 &= a\partial_1+b\partial_2;\\ \mathcal{R}^{\nabla}(\partial_1,\partial_2)\partial_2 &= c\partial_1+d\partial_2.\end{aligned}$$

Soit $X=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\partial_i$ un champ de vecteur sur M ; alors l'opérateur de Jacobi affine $J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)$ est donné par

$$J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)=\alpha_1^2\mathcal{R}^{\nabla}(\cdot,\partial_1)\partial_1+\alpha_1\alpha_2\mathcal{R}^{\nabla}(\cdot,\partial_1)\partial_2+\alpha_1\alpha_2\mathcal{R}^{\nabla}(\cdot,\partial_2)\partial_1+\alpha_2^2\mathcal{R}^{\nabla}(\cdot,\partial_2)\partial_2.$$

En appliquant l'opérateur de Jacobi affine aux vecteurs $\{\partial_1,\partial_2\}$, on obtient le résultat. □

Théorème 5.3.1. *[31] Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la connexion ∇ définie par (5.7) . Alors ∇ est affine d'Osserman si et seulement si les fonctions $f_{11}^1, f_{11}^2, f_{12}^1, f_{12}^2, f_{22}^1, f_{22}^2$ satisfont le système suivant :*

$$\left\{\begin{aligned}\partial_1 f_{12}^1-\partial_2 f_{11}^1-\partial_1 f_{22}^2+\partial_2 f_{12}^2+2f_{12}^1 f_{12}^2-2f_{11}^2 f_{22}^1 &= 0;\\ f_{11}^1 f_{22}^1+f_{12}^1 f_{22}^2-f_{12}^1 f_{12}^1-f_{12}^2 f_{22}^1+\partial_1 f_{22}^1-\partial_2 f_{12}^1 &= 0;\\ f_{11}^2 f_{12}^1+f_{12}^2 f_{12}^2-f_{11}^1 f_{12}^2-f_{11}^2 f_{22}^2-\partial_1 f_{12}^2-\partial_2 f_{11}^2 &= 0.\end{aligned}\right.$$

Démonstration. La matrice associée à $J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)$ par rapport à la base $\{\partial_1,\partial_2\}$ est donnée par

$$(J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X))=\begin{bmatrix}A & C\\ B & D\end{bmatrix}.$$

A partir de l'expression de la matrice de $J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)$, le polynôme caractéristique est donné par

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)]=\lambda^2-\lambda(A+D)+(AD-BC).$$

Par le Corollaire 5.2.1 (M,∇) est affine d'Osserman si et seulement si $Spec\{J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)\}=\{0\}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}A+D &= 0;\\ AD-BC &= 0.\end{aligned}$$

Puisque $J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)X=0$, la condition d'Osserman se réduit à

$$A+D=\alpha_1\alpha_2(a-d)+\alpha_2^2 b-\alpha_1^2 c.$$

Ceci achève la preuve. □

Corollaire 5.3.1. *([40]) Soit la connexion affine ∇ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par*

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_1}\partial_1 &= f_{11}^1(u_1,u_2)\partial_1; \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 &= f_{22}^2(u_1,u_2)\partial_2. \end{cases}$$

Alors, ∇ est affine d'Osserman si et seulement si les fonctions f_{11}^1, f_{22}^2 sont solution de l'équation au dérivée partielle suivant :

$$\partial_2 f_{11}^1 + \partial_1 f_{22}^2 = 0.$$

Corollaire 5.3.2. *Soit la connexion affine ∇ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = 0, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = f_{12}^2(u_1,u_2)\partial_2, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = f_{22}^2(u_1,u_2)\partial_2.$$

Alors ∇ est affine d'Osserman si et seulement si les fonctions f_{12}^1 et f_{22}^1 ont la forme suivante :

$$f_{12}^2(u_1,u_2) = \frac{1}{u_1}, \quad et \quad f_{22}^2(u_1,u_2) = f(u_2).$$

Exemple 5.3.2. *La connexion affine ∇ définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = 0, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = \frac{1}{u_1}\partial_2, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = e^{u_2}\partial_2 \tag{5.12}$$

est affine d'Osserman.

Corollaire 5.3.3. *Soit la connexion affine ∇ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = f_{11}^1(u_1,u_2)\partial_1 + f_{11}^2(u_1,u_2)\partial_2 \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = 0, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = 0.$$

Alors, ∇ est affine d'Osserman si et seulement si les fonctions f_{11}^1 et f_{11}^2 ont la forme suivante :

$$f_{11}^1(u_1,u_2) = f(u_1) \, et \, f_{11}^2(u_1,u_2) = f(u_1).$$

Exemple 5.3.3. *La connexion ∇ définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = u_1\partial_1 + u_1^2\partial_2, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = 0, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = 0; \tag{5.13}$$

est affine Osserman.

Corollaire 5.3.4. *Soit la connexion affine ∇ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = 0, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = f_{12}^1(u_1,u_2)\partial_1 + f_{12}^2(u_1,u_2)\partial_2, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = 0.$$

Alors, ∇ est affine d'Osserman si et seulement si les fonctions f_{12}^1, f_{12}^2 satisfont le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_1 f_{12}^2 + f_{12}^2 f_{12}^2 & = & 0; \\ \partial_2 f_{12}^1 + f_{12}^1 f_{12}^1 & = & 0; \\ \partial_1 f_{12}^1 + \partial_2 f_{12}^2 + 2 f_{12}^1 f_{12}^2 & = & 0. \end{cases}$$

Exemple 5.3.4. *Considérons le plan $\mathbb{R}^2$.*

— *La connexion suivante sur $\mathbb{R}^2$ est affine d'Osserman.*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = 0, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = \frac{1}{u_1}\partial_2, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = 0. \tag{5.14}$$

— *La connexion suivante sur $\mathbb{R}^2$ est affine d'Osserman.*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = 0, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = \frac{1}{u_2}\partial_1, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = 0. \tag{5.15}$$

Corollaire 5.3.5. *Soit la connexion affine ∇ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = 0, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = 0, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = f_{22}^1(u_1,u_2)\partial_1 + f_{22}^2(u_1,u_2)\partial_2.$$

Alors, ∇ est affine d'Osserman si et seulement si les fonctions f_{22}^1, f_{22}^2 ont la forme suivante :

$$f_{22}^1(u_1,u_2) = f(u_2), \quad et \quad f_{22}^2(u_1,u_2) = f(u_2).$$

Exemple 5.3.5. *La connexion ∇ sur $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = 0, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = 0, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = u_2^2\partial_1 - u_2\partial_2; \tag{5.16}$$

est affine d'Osserman.

5.3.6 Connexions affines d'Osserman localement symétriques

Théorème 5.3.2. *[31] Soit (M,∇) une variété affine d'Osserman de dimension 2. Si la connexion ∇ est localement symétrique, alors le tenseur de Ricci de ∇ est nul.*

Exemple 5.3.6. *Soit la connexion affine ∇ définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = 0, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = u_2\partial_1, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = u_1(1+u_2^2)\partial_1. \tag{5.17}$$

Un long calcul montre que cette connexion est affine d'Osserman et localement symétrique.

5.3.7 Connexions affines d'Osserman non symétrique

Théorème 5.3.3. *[31] Soit (M, ∇) une variété affine d'Osserman de dimension 2. Si laconnexion ∇ est non symétrique, alors le tenseur de Ricci de ∇ est antisymétrique.*

Exemple 5.3.7. *La connexion ∇ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :*

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_1}\partial_1 &= 0; \\
\nabla_{\partial_1}\partial_2 &= \nabla_{\partial_2}\partial_1 = e^{u_2}u_1\partial_1; \\
\nabla_{\partial_1}\partial_2 &= \frac{1}{2}e^{u_2}u_1^2\partial_1 + e^{u_2}u_1\partial_2;
\end{aligned}$$

est une connexion affine d'Osserman non symétrique.

5.4 Variétés affines d'Osserman de dimension 3

5.4.1 Sur une famille de connexions affines d'Osserman

Il n'existe pas de description complète des connexions affines d'Osserman sur une variété affine de dimension 3. Dans cette section, nous donnons une description locale d'une famille de connexions affines d'Osserman.

Soit M une variété de dimension 3 munie de la connexion ∇ sans torsion donnée par

$$\left\{\begin{aligned}
\nabla_{\partial_1}\partial_1 &= f_1(u_1, u_2, u_3)\partial_1; \\
\nabla_{\partial_2}\partial_2 &= f_2(u_1, u_2, u_3)\partial_2; \\
\nabla_{\partial_1}\partial_3 &= f_3(u_1, u_2, u_3)\partial_2.
\end{aligned}\right. \tag{5.18}$$

Lemme 5.4.1. *[32] Les composantes du tenseur de courbure de la connexion (5.18) sont données par*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^\nabla(\partial_1, \partial_2)\partial_1 &= -\partial_2 f_1\partial_1, \\
\mathcal{R}^\nabla(\partial_1, \partial_2)\partial_2 &= \partial_1 f_2\partial_2, \\
\mathcal{R}^\nabla(\partial_1, \partial_2)\partial_3 &= -[\partial_2 f_3 + f_2 f_3]\partial_2, \\
\mathcal{R}^\nabla(\partial_1, \partial_3)\partial_1 &= -\partial_3 f_1\partial_1 + [\partial_1 f_3 - f_1 f_3]\partial_2, \\
\mathcal{R}^\nabla(\partial_1, \partial_3)\partial_3 &= -\partial_3 f_3\partial_2, \\
\mathcal{R}^\nabla(\partial_2, \partial_3)\partial_1 &= [\partial_2 f_3 + f_2 f_3]\partial_2, \\
\mathcal{R}^\nabla(\partial_2, \partial_3)\partial_2 &= -\partial_3 f_2\partial_2.
\end{aligned}$$

Lemme 5.4.2. *[32] L'opérateur de Jacobi affine associé à la connexion (5.18) est donné par*

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\partial_1 &= a_1\partial_1 + b_1\partial_2; \\ J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\partial_2 &= a_2\partial_1 + b_2\partial_2; \\ J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)\partial_3 &= a_3\partial_1 + b_3\partial_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= -\alpha_1\alpha_2\partial_2 f_1 - \alpha_1\alpha_3\partial_3 f_1, \\ a_2 &= \alpha_1^2\partial_2 f_1, \\ a_3 &= \alpha_1^2\partial_3 f_1, \\ b_1 &= \alpha_2^2\partial_1 f_2 - \alpha_2\alpha_3(\partial_2 f_3 + f_2 f_3) + \alpha_1\alpha_3(\partial_1 f_3 - f_1 f_3) - \alpha_3^2\partial_3 f_3, \\ b_2 &= -\alpha_1\alpha_2\partial_1 f_2 + 2\alpha_1\alpha_3(\partial_2 f_3 + f_2 f_3) - \alpha_2\alpha_3\partial_3 f_2, \\ b_3 &= -\alpha_1^2(\partial_1 f_3 - f_1 f_3) + \alpha_1\alpha_3\partial_3 f_3 - \alpha_1\alpha_2(\partial_2 f_3 + f_2 f_3) + \alpha_2^2\alpha_3 f_2. \end{aligned}$$

Lemme 5.4.3. *[32] La connexion ∇ définie par (5.18) est affine Osserman si et seulement si les coefficients de la connexion ∇ sont solution du système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_3 f_2 = 0, \quad \partial_2 f_1\partial_3 f_1 & = & 0, \\ \partial_2 f_1\partial_3 f_2 = 0, \quad \partial_3 f_1\partial_3 f_2 & = & 0, \\ \partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 & = & 0, \\ \partial_2 f_1(\partial_1 f_3 - f_1 f_3) & = & 0, \\ 2(\partial_2 f_3 + f_2 f_3) - \partial_3 f_1 & = & 0, \\ (\partial_2 f_1 + 2\partial_3 f_1)(\partial_2 f_3 + f_2 f_3) - \partial_1 f_2\partial_3 f_1 & = & 0. \end{array} \right. \tag{5.19}$$

Démonstration. La matrice associée à l'opérateur de Jacobi affine $J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)$ par rapport à la base $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ est donnée par :

$$(J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vient que le polynôme caractéristique est donné par :

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)] = -\lambda^3 + \lambda^2(a_1 + b_2) + \lambda(a_2 b_1 - a_1 b_2).$$

Par le Corollaire 5.2.1, (M, ∇) est affine Osserman si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1 + b_2 & = & 0, \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 & = & 0. \end{array} \right.$$

Le système 5.19 dérive du système précédant. $\square$

Théorème 5.4.1. *[32] Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la connexion ∇ définie par (5.18). Alors $(\mathbb{R}^3, \nabla)$ est affine Osserman si et seulement si*

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, u_3) &= A(u_1, u_2); \\ f_2(u_1, u_2, u_3) &= B(u_1, u_2); \\ f_3(u_1, u_2, u_3) &= k(u_3)e^{C(u_1,u_2)}; \end{cases}$$

où k est une fonction et A, B et C satisfont :

$$\partial_2 A + \partial_1 B = 0 \quad \textit{où} \quad \partial_2 C = -B \quad \textit{et} \quad \partial_1 C = A.$$

Démonstration. A partir du système (5.19), on a $\partial_3 f_2 = 0$. Alors :

$$f_2 = f_2(u_1, u_2, u_3) = B(u_1, u_2). \tag{5.20}$$

Nous avons aussi que $\partial_2 f_1 \partial_3 f_1 = 0$. Alors :

$$\partial_2 f_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_3 f_1 = 0.$$

Supposons que $\partial_2 f_1 = 0$ et $\partial_3 f_1 \neq 0$. Alors on a :

$$f_1 = f_1(u_1, u_2, u_3) = A(u_1, u_3). \tag{5.21}$$

En insérant la fonction f_1 dans l'équation $\partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 = 0$ du système (5.19), on obtient :

$$f_2 = f_2(u_1, u_2, u_3) = B(u_1, u_2) = B(u_2). \tag{5.22}$$

Par ailleurs, les deux dernières équations du système (5.19) se réduisent à :

$$\begin{cases} 2(\partial_2 f_3 + f_2 f_3) &= \partial_3 f_1, \\ 2\partial_3 f_1(\partial_2 f_3 + f_2 f_3) &= 0. \end{cases} \tag{5.23}$$

Ce qui est absurde. Alors

$$\partial_3 f_1 = 0.$$

Pour $\partial_3 f_1 = 0$ et $\partial_2 f_1 \neq 0$, on a :

$$f_1 = f_1(u_1, u_2, u_3) = A(u_1, u_2). \tag{5.24}$$

et

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2(\partial_2 f_3 + f_2 f_3) & = & 0, \\ \partial_2 f_1(\partial_2 f_3 + f_2 f_3) & = & 0, \\ \partial_2 f_1(\partial_1 f_3 - f_1 f_3) & = & 0. \end{array}\right. \tag{5.25}$$

Le système (5.25) induit :

$$f_3 = f_3(u_1, u_2, u_3) = k(u_3)e^{C(u_1,u_2)}; \tag{5.26}$$

où $\partial_2 C(u_1, u_2) = -B(u_1, u_2)$, $\partial_1 C(u_1, u_2) = A(u_1, u_2)$ et $\partial_1 B + \partial_2 A = 0$. $\square$

5.4.2 Exemples de connexions affines d'Osserman

Exemple 5.4.1. *[32] Soit la connexion ∇ définie par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = u_2\partial_1; \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = -u_1\partial_2; \quad \nabla_{\partial_1}\partial_3 = e^{(u_1 u_2)}\partial_2. \tag{5.27}$$

Les composantes de l'opérateur de courbure de ∇ sont données par

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{R}^{\nabla}(\partial_1, \partial_2)\partial_1 & = & -\partial_1, \\ \mathcal{R}^{\nabla}(\partial_1, \partial_2)\partial_2 & = & -\partial_2. \end{array}$$

La matrice associée à l'opérateur de Jacobi affine $J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)$ par rapport à la base $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ est donnée par :

$$J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X) = \begin{pmatrix} -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1^2 & 0 \\ -\alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient que le polynôme caractéristique est donné par :

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)] = -\lambda^3;$$

et par conséquent, ∇ est affine Osserman.

Exemple 5.4.2. *[32] Soit la connexion ∇ définie par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = u_1 u_2\partial_1; \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = -\frac{1}{2}u_1^2\partial_2; \quad \nabla_{\partial_1}\partial_3 = e^{(\frac{1}{2}u_1^2 u_2)}\partial_2. \tag{5.28}$$

Les composantes de l'opérateur de courbure de ∇ sont données par

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\nabla}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 &= -u_1\partial_1;\\ \mathcal{R}^{\nabla}(\partial_1,\partial_2)\partial_2 &= -u_1\partial_2.\end{aligned}$$

La matrice associée à l'opérateur de Jacobi affine $J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)$ par rapport à la base $\{\partial_1,\partial_2,\partial_3\}$ est donnée par :

$$J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)=\begin{pmatrix}-\alpha_1\alpha_2u_1 & \alpha_1^2u_1 & 0\\ -\alpha_1^2u_1 & \alpha_1\alpha_2u_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Il vient que le polynôme caractéristique est donné par :

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)]=-\lambda^3;$$

et par conséquent, ∇ est affine Osserman.

Exemple 5.4.3. *[38] Soit $\mathbb{R}^3$ munie de la connexion ∇ définie par*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1=\frac{1}{2}\partial_1;\quad \nabla_{\partial_2}\partial_2=-u_2\partial_2;\quad \nabla_{\partial_1}\partial_3=e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_2. \tag{5.29}$$

La seule composante non nulle du tenseur de courbure est donnée par

$$\mathcal{R}^{\nabla}(\partial_1,\partial_3)\partial_1=\frac{1}{2}e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_2.$$

On a :

$$\begin{aligned}J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)\partial_1 &= \frac{\alpha_1\alpha_3}{2}e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)};\\ J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)\partial_2 &= 0;\\ J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)\partial_3 &= -\frac{\alpha_1^2}{2}e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}.\end{aligned}$$

La matrice de $J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X)$ par rapport à la base $\{\partial_1,\partial_2,\partial_3\}$ est donnée par

$$(J_{\mathcal{R}^{\nabla}}(X))=F^2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \alpha_1\alpha_3 & 0 & -\alpha_1^2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

où $F = \frac{1}{2}e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}$*. Il vient, de l'expression de* $J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)$*, que le polynôme caractéristique vérifie*

$$P_\lambda[J_{\mathcal{R}^\nabla}(X)] = \det(J_{\mathcal{R}^\nabla}(X) - \lambda I_3) = F^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ \alpha_1\alpha_3 & -\lambda & -\alpha_1^2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 F^2.$$

Ainsi toutes les valeurs propres sont nulles. Ceci prouve que (M, ∇) *est affine d'Osserman. La symétrie locale est équivalente à :*

$$\nabla_{X_i} R^\nabla(X_j, X_k)X_l = 0, \quad \textit{avec} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

On obtient l'expression suivante :

$$\nabla_{X_1}\mathcal{R}^\nabla(X_1, X_3)X_1 + \nabla_{X_1}\mathcal{R}^\nabla(X_3, X_1)X_1 + \nabla_{X_2}\mathcal{R}^\nabla(X_1, X_3)X_1 + \nabla_{X_2}\mathcal{R}^\nabla(X_3, X_1)X_1 = 0.$$

Pour $X_i = \alpha_i\partial_i$*, avec* $i = 1, 2, 3$ *; on a :*

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\alpha_1\partial_1}\mathcal{R}^\nabla(\alpha_1\partial_1, \alpha_3\partial_3)\alpha_1\partial_1 + \nabla_{\alpha_1\partial_1}\mathcal{R}^\nabla(\alpha_3\partial_3, \alpha_1\partial_1)\alpha_1\partial_1 \\ &+ \nabla_{\alpha_2\partial_2}\mathcal{R}^\nabla(\alpha_1\partial_1, \alpha_3\partial_3)\alpha_1\partial_1 + \nabla_{\alpha_2\partial_2}\mathcal{R}^\nabla(\alpha_3\partial_3, \alpha_1\partial_1)\alpha_1\partial_1. \end{aligned}$$

Ce qui implique,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1^3\alpha_3\nabla_{\partial_1}\mathcal{R}^\nabla(\partial_1, \partial_3)\partial_1 + \alpha_1^3\alpha_3\nabla_{\partial_1}\mathcal{R}^\nabla(\partial_3, \partial_1)\partial_1 \\ &+ \alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\nabla_{\partial_2}\mathcal{R}^\nabla(\partial_1, \partial_3)\partial_1 + \alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\nabla_{\partial_2}\mathcal{R}^\nabla(\partial_3, \partial_1)\partial_1. \end{aligned}$$

5.5 Métriques d'Osserman sur le fibré cotangent

5.5.1 Extension riemannienne

Soit T^*M le fibré cotangent d'une variété M de dimension m et soit la projection $\pi : T^*M \longrightarrow M$. T^*M a une structure de variété différentiable induite par celle de M. Un point ξ du fibré cotangent est représenté par une paire (p, ω), où $p = \pi(\xi)$ est un point de M et ω est une 1-forme sur T_pM. Toute carte locale $(U, u_i, i = 1, \cdots, m)$ induit une carte locale $(\pi^{-1}(U), u_i, u_{i'})$ $(i = 1, \cdots, m, i' = i + m)$. Pour tout $\xi \in \pi^{-1}(U)$, les u_i sont des coordonnées de $\pi(p)$ dans la carte locale $(U, u_i, i = 1, \cdots, m)$ de M, et les $u_{i'}$ sont les composantes vectorielles de ω dans la base $(du_i, \cdots, du_m)$ de $T^*_{\pi(p)}M$, c'est-à-dire que $\omega = \sum_{i=1}^m u_{i'}du_i$.

A tout champ de vecteur $X \in C^\infty(TM)$ sur M, on associe une fonction $\iota : T^*M \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\iota(X)(p, \omega) = \omega(X_p).$$

Pour $X = X^i\partial_{u_i}$, on a :

$$\iota(X)(u_i, u_{i'}) = u_{i'}X^i.$$

Le résultat suivant caractérise les champs de vecteurs sur $N := T^*M$.

Proposition 5.5.1. *Soient $\bar{Y}, \bar{Z} \in C^\infty(T(T^*M))$ des champs de vecteurs lisses sur T^*M. Alors $\bar{Y} = \bar{Z}$ si et seulement si $\bar{Y}(\iota X) = \bar{Z}(\iota X)$ pour tout champ de vecteurs lisses $X \in C^\infty(TM)$.*

Le relèvement complet X^C du champ de vecteurs $X \in C^\infty(TM)$ sur M est caractérisé par l'indentité

$$X^C(\iota Z) = \iota[X, Z], \quad \text{pour tout} \quad Z \in C^\infty(TM).$$

A tout endomorphisme du fibré tangent $S \in C^\infty(End(TM))$, on associe une 1-forme $\iota S \in C^\infty(T^*(T^*M))$ caractérisée par l'indentité

$$\iota(S)(X^C) = \iota(SX).$$

Définition 5.5.1. *Soit (M, ∇) une variété affine. L'extension riemannienne $\bar{g}$ est la métrique pseudo-riemannienne $\bar{g}$ sur $N := T^*M$ de signature (m, m) caractérisée par l'identité*

$$\bar{g}(X^C, Y^C) = -\iota(\nabla_X Y + \nabla_Y X). \tag{5.30}$$

Soit $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k$ les coefficients de la connexion affine ∇. Alors :

$$\bar{g} = 2du_i du_{i'} - 2u_{k'}\Gamma_{ij}^k du_i du_j.$$

La représentation matricielle de la métrique $\bar{g}$ est donnée par la matrice :

$$(\bar{g}) = \begin{pmatrix} g_{ij} & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \tag{5.31}$$

où I est la matrice unité $m \times m$; $g_{ij} = -2u_{k'}\Gamma_{ij}^k$ et $k' = k + m$. L'extension riemannienne a été introduite par Patterson et Walker dans ([63]). Cette technique permet de définir une métrique pseudo-riemannienne sur le fibré cotangent d'une variété affine (M, ∇). Voir ([68]) pour plus de détails sur l'extension riemannienne.

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(S^2(T^*M))$ un $(0, 2)$ tenseur symétrique sur M et soit $T, S \in C^\infty(End(TM))$. L'*extension riemannienne généralisée* est la métrique pseudo-riemannienne sur T^*M de signature neutre (m, m) définie par :

$$\bar{g}_{\phi,T,S} := \iota T \circ \iota S + \bar{g} + \pi^*\phi. \tag{5.32}$$

Lorsque $T = S = 0$, on obtient la métrique pseudo-riemannienne sur T^*M de signature neutre (m, m) suivante :

$$\bar{g}_\phi := \bar{g} + \pi^*\phi; \tag{5.33}$$

appelée *extension riemannienne twistée.* (Voir ([18]) pour plus de détails sur l'extension riemannienne généralisée et twistée.)

5.5.2 Extension riemannienne d'une variété affine d'Osserman

Théorème 5.5.1. *([38]) Pour tout vecteur $\bar{X} = \alpha_i\partial_i + \alpha_{i'}\partial_{i'}$ sur T^*M, l'opérateur de Jacobi $J_{\bar{\mathcal{R}}}(\bar{X})$ par rapport à la base $\{\partial_i, \partial_{i'}\}$ est de la forme*

$$J_{\bar{\mathcal{R}}}(\bar{X}) = \begin{bmatrix} [J_{\mathcal{R}}(X)] & 0 \\ * & [J_{\mathcal{R}}(X)], \end{bmatrix}; \tag{5.34}$$

où $[J_{\mathcal{R}}(X)]$ est la matrice de l'opérateur de Jacobi affine par rapport à un vecteur $X = \alpha_i\partial_i$ sur M.

Théorème 5.5.2. *([38]) L'extension riemannienne (T^*M, g_∇) est d'Osserman si et seulement si (M, ∇) est affine d'Osserman.*

5.5.3 Exemples de métriques d'Osserman de signature $(3,3)$

Soit (M,∇) une variété affine de dimension 3. Soit (u_1,u_2,u_3) un système de coordonnées locales sur M. Soit Γ_{ij}^k les coefficients de la connexion affine ∇ définis par $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k\partial_k$ pour $i,j,k = 1,2,3$. Soit $\omega = u_4du_1 + u_5du_2 + u_6du_3 \in T^*M : (u_4,u_5,u_6)$. L'extension riemannienne est la métrique pseudo-riemannienne $\bar{g}$ de signature $(3,3)$ définie sur le fibré cotangent T^*M par :

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\partial_1,\partial_4) &= \bar{g}(\partial_2,\partial_5) = \bar{g}(\partial_3,\partial_6) = 1, \\
\bar{g}(\partial_1,\partial_1) &= -2u_4\Gamma_{11}^1 - 2u_5\Gamma_{11}^2 - 2u_6\Gamma_{11}^3, \\
\bar{g}(\partial_1,\partial_2) &= -2u_4\Gamma_{12}^1 - 2u_5\Gamma_{12}^2 - 2u_6\Gamma_{12}^3, \\
\bar{g}(\partial_1,\partial_3) &= -2u_4\Gamma_{13}^1 - 2u_5\Gamma_{13}^2 - 2u_6\Gamma_{13}^3, \\
\bar{g}(\partial_2,\partial_2) &= -2u_4\Gamma_{22}^1 - 2u_5\Gamma_{22}^2 - 2u_6\Gamma_{22}^3, \\
\bar{g}(\partial_2,\partial_3) &= -2u_4\Gamma_{23}^1 - 2u_5\Gamma_{23}^2 - 2u_6\Gamma_{23}^3, \\
\bar{g}(\partial_3,\partial_3) &= -2u_4\Gamma_{33}^1 - 2u_5\Gamma_{33}^2 - 2u_6\Gamma_{33}^3.
\end{aligned}$$

Exemple 1

L'extension riemannienne de la connexion affine d'Osserman (5.29) est donnée par

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} -u_4 & 0 & -2u_5e^{u_1+\frac{1}{2}u_2^2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2u_2u_5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2u_5e^{u_1+\frac{1}{2}u_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

Les symboles de Christoffel non nuls de $\bar{g}$, $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum \bar{g}^{kl}\{\partial_j\bar{g}_{il} + \partial_i\bar{g}_{jl} - \partial_l\bar{g}_{ij}\}$ sont donnés par :

$$\bar{\Gamma}^1_{11} = \frac{1}{2}, \quad \bar{\Gamma}^4_{11} = \frac{1}{2}u_4, \quad \bar{\Gamma}^6_{11} = -u_5 e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)},$$
$$\bar{\Gamma}^6_{12} = -u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}, \quad \bar{\Gamma}^2_{13} = e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}, \quad \bar{\Gamma}^5_{13} = -u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)},$$
$$\bar{\Gamma}^4_{14} = -\frac{1}{2}, \quad \bar{\Gamma}^6_{15} = -e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}, \quad \bar{\Gamma}^2_{22} = -u_2, \quad \bar{\Gamma}^5_{22} = u_5(1+2u_2^2),$$
$$\bar{\Gamma}^4_{23} = -u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}, \quad \bar{\Gamma}^5_{25} = u_2, \quad \bar{\Gamma}^4_{35} = -e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}.$$

Les dérivées covariantes non nulles de $(\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k)$ sont données par :

$$\begin{array}{rcl}
\bar{\nabla}_{\partial_1}\partial_1 & = & \frac{1}{2}\partial_1 + \frac{1}{2}u_4\partial_4 - u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_6, \\
\bar{\nabla}_{\partial_1}\partial_2 & = & -u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_6, \\
\bar{\nabla}_{\partial_1}\partial_3 & = & e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_2 - u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_5, \\
\bar{\nabla}_{\partial_1}\partial_4 & = & -\frac{1}{2}\partial_4, \\
\bar{\nabla}_{\partial_1}\partial_5 & = & -e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_6, \\
\bar{\nabla}_{\partial_2}\partial_2 & = & -u_2\partial_2 + u_5(1+2u_2^2)\partial_5, \\
\bar{\nabla}_{\partial_2}\partial_3 & = & -u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_4, \\
\bar{\nabla}_{\partial_2}\partial_5 & = & u_2\partial_5, \\
\bar{\nabla}_{\partial_3}\partial_5 & = & -e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_4.
\end{array}$$

Les composantes de l'opérateur de courbure $\bar{\mathcal{R}}(\partial_i,\partial_j) = \bar{\nabla}_{\partial_i}\bar{\nabla}_{\partial_j} - \bar{\nabla}_{\partial_j}\bar{\nabla}_{\partial_i}$ sont données par :

$$\begin{array}{rcl}
\bar{\mathcal{R}}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 & = & \frac{1}{2}u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_6, \\
\bar{\mathcal{R}}(\partial_1,\partial_2)\partial_3 & = & -\frac{1}{2}u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_4, \\
\bar{\mathcal{R}}(\partial_1,\partial_3)\partial_1 & = & \frac{1}{2}e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_2 - \frac{1}{2}u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_5, \\
\bar{\mathcal{R}}(\partial_1,\partial_3)\partial_2 & = & -\frac{1}{2}u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_4, \\
\bar{\mathcal{R}}(\partial_1,\partial_3)\partial_5 & = & -\frac{1}{2}e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_4, \\
\bar{\mathcal{R}}(\partial_1,\partial_5)\partial_1 & = & \frac{1}{2}e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_6, \\
\bar{\mathcal{R}}(\partial_1,\partial_5)\partial_3 & = & -\frac{1}{2}e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\partial_4.
\end{array}$$

Soit $X = \sum_{i=1}^{6}\alpha_i\partial_i$ un vecteur sur M, alors l'opérateur de Jacobi associé est donné par :

$$\begin{aligned}
J_{\bar{\mathcal{R}}}(X) &= \alpha_1^2\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_1)\partial_1 + \alpha_1\alpha_2\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_1)\partial_2 + \alpha_1\alpha_3\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_1)\partial_3 + \alpha_1\alpha_4\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_1)\partial_4\\
&+ \alpha_1\alpha_5\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_1)\partial_5 + \alpha_1\alpha_6\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_1)\partial_6\\
&+ \alpha_1\alpha_2\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_2)\partial_1 + \alpha_2^2\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_2)\partial_2 + \alpha_2\alpha_3\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_2)\partial_3 + \alpha_2\alpha_4\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_2)\partial_4\\
&+ \alpha_2\alpha_5\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_2)\partial_5 + \alpha_2\alpha_6\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_2)\partial_6\\
&+ \alpha_1\alpha_3\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_3)\partial_1 + \alpha_2\alpha_3\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_3)\partial_2 + \alpha_3^2\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_3)\partial_3 + \alpha_3\alpha_4\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_3)\partial_4\\
&+ \alpha_3\alpha_5\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_3)\partial_5 + \alpha_3\alpha_6\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_3)\partial_6\\
&+ \alpha_1\alpha_4\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_4)\partial_1 + \alpha_2\alpha_4\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_4)\partial_2 + \alpha_3\alpha_4\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_4)\partial_3 + \alpha_4^2\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_4)\partial_4\\
&+ \alpha_4\alpha_5\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_4)\partial_5 + \alpha_4\alpha_6\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_4)\partial_6\\
&+ \alpha_1\alpha_5\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_5)\partial_1 + \alpha_2\alpha_5\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_5)\partial_2 + \alpha_3\alpha_5\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_5)\partial_3 + \alpha_4\alpha_5\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_5)\partial_4\\
&+ \alpha_5^2\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_5)\partial_5 + \alpha_5\alpha_6\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_5)\partial_6\\
&+ \alpha_1\alpha_6\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_6)\partial_1 + \alpha_2\alpha_6\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_6)\partial_2 + \alpha_3\alpha_6\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_6)\partial_3 + \alpha_4\alpha_4\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_6)\partial_4\\
&+ \alpha_5\alpha_6\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_6)\partial_5 + \alpha_6^2\bar{\mathcal{R}}(\cdot,\partial_6)\partial_6.
\end{aligned}$$

La matrice associée à $J_{\bar{\mathcal{R}}}(X)$ par rapport à la base $\{\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4,\partial_5,\partial_6\}$ est donnée par

$$(J_{\bar{\mathcal{R}}}(X)) = \begin{bmatrix} A & 0\\ B & A^t\end{bmatrix};$$

où A est une matrice carré 3×3 donnée par :

$$A = \frac{1}{2}e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ \alpha_1\alpha_3 & 0 & -\alpha_1^2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

et la matrice B a pour coefficients

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{1}{2}\big[-\alpha_2\alpha_3u_2u_5 - \alpha_3\alpha_5\big]e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)};\\
b_{21} &= -\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_3u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)};\\
b_{31} &= \frac{1}{2}\big[\alpha_1\alpha_2u_2u_5 + \alpha_1\alpha_5\big]e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)};\\
b_{12} &= \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_3u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)};\\
b_{22} &= 0;\\
b_{32} &= -\frac{1}{2}\alpha_1^2u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)};\\
b_{13} &= \frac{1}{2}\big[\alpha_1\alpha_2u_2u_5 + \alpha_1\alpha_5)\big]e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)};\\
b_{23} &= \frac{1}{2}\alpha_1^2u_2u_5e^{(u_1+\frac{1}{2}u_2^2)};\\
b_{33} &= 0.
\end{aligned}$$

Alors, nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.5.2. *Soit* $\mathbb{R}^3$ *muni de la connexion affine* ∇ *donnée par (5.29). Soit* $\bar{g}$ *sur* T^*M*. Alors* $\bar{g}$ *est une métrique d'Osserman de signature* $(3,3)$ *; de plus, l'opérateur de Jacobi* $\bar{g}$ *est nilpotent et* $\bar{g}$ *est localemnt symétrique.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique de $J_{\mathcal{R}}(X)$, donne

$$P_\lambda(J_{\mathcal{R}}(X)) = \det(J_{\mathcal{R}}(X) - \lambda I_6) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -\lambda & a_{21} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -\lambda & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & a_{23} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^6.$$

Ainsi toutes les valeurs propres sont nulles. Ceci prouve que $(\mathbb{R}^6, \bar{g})$ est globalement d'Osserman. □

Proposition 5.5.3. *[32] Soit* $\mathbb{R}^3$ *muni de la connexion affine* ∇ *donnée par (5.27). Soit* $\bar{g}$ *sur* T^*M*. Alors* $\bar{g}$ *est une métrique d'Osserman de signature* $(3,3)$.

Proposition 5.5.4. *[32] Soit* $\mathbb{R}^3$ *muni de la connexion affine* ∇ *donnée par (5.28). Soit* $\bar{g}$ *sur* T^*M*. Alors* $\bar{g}$ *est une métrique d'Osserman de signature* $(3,3)$.

Conclusion et Perspectives

1- Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié les variétés d'Osserman, conformément d'Osserman et affines d'Osserman. Nous avons construit des exemples de métriques d'Osserman et conformément d'Osserman en utilisant les techniques de construction de métriques suivantes : *transformation conforme, produit direct, produit tordu, produit doublement tordu et l'extension riemannienne.*

Nous avons étudiée la preservation de la condition d'Osserman par changement conforme de métriques. Une condition suffisante a été établie sur le facteur conforme pour que la condition d'Osserman soit preservée par changement conforme de métriques. Nous avons aussi obtenue une relation entre les valeurs propres des opérateurs de Jacobi de deux métriques conformément équivalentes. Enfin, nous avons montrée que la condition d'Osserman est transférable d'une variété à une autre par une application de Jacobi.

Nous avons également étudier les conditions d'Osserman et conformément d'Osserman sur une variété produit doublement tordue. A cet effet, deux résultats qui ne sont pas tout à fait classiques ont été établis, à savoir : la relation entre la connexion de Levi-Civita d'un produit doublement tordu $M := B_f \times_b F$ et les connexions de Levi-Civita des variétés B et F. Ensuite, nous avons exprimée la courbure d'un produit doublement tordu $M := B_f \times_b F$ en fonctions des courbures de B et F. Nous avons aussi donner une description des variétés riemanniennes et lorentziennes produits doublement tordues d'Osserman et conformément d'Osserman. Dans le cas riemannien, nous avons prouvé que toute variété produit doublement tordue conformément d'Osserman est localement conformément plate et que toute variété produit doublement tordues d'Osserman est à courbure sectionnelle constante. Dans le cas lorentzien, nous avons également prouvé que toute variété produit doublement tordue conformément d'Osserman est localement conformément plate et que toute variété produit doublement tordue d'Osserman est à courbure sectionnelle constante.

Un autre thème abordé dans cette thèse est l'étude des variétés affine d'Osserman. Nous avons donné une description des connexions affines d'Osserman sur une variété affine de dimension 2. Nous avons obtenu une équivalence entre la notion de connexion affine d'Osserman et l'antisymétrie du tenseur de Ricci d'une connexion affine. Nous avons prouvé que toute connexion affine d'Osserman localement symétrique est de courbure de Ricci nulle et que toute connexion affine d'Osserman localement antisymétrique est de courbure de Ricci antisymétrique. Des exemples de connexions affines d'Osserman sont construits.

Nous avons aussi montré que la propriété affine d'Osserman est preservée par le produit de variété. Ensuite, nous avons étudié la condition d'Osserman sur une variété affine de dimension 3. Comme application, nous avons construit des exemples de métriques d'Osserman de signature $(3,3)$ sur le fibré cotangent de la variété affine à partir de l'extension riemannienne.

2- Perspectives

Le travail entrepris dans cette thèse est loin d'être fini. D'où la possibilité d'étendre les résultats contenus dans celle-ci dans plusieurs directions. En voici quelques unes :

— Dans le chapitre 4, nous avons étudiée les conditions d'Osserman et conformément d'Osserman sur des variétés riemanniennes et lorentziennes produits doublement tordues. Nous envisageons étudier les mêmes conditions sur des variétés pseudo-riemanniennes produits doublement tordues.

— Dans le chapitre 5, nous avons étudié la condition d'Osserman sur une variété affine de dimension 2. Nous envisageons décrire complètement les connexions affines d'Osserman en dimension 3.

— L'étude de l'opérateur de Szabó sera l'une de nos préocupations.

Bibliographie

[1] J. F. Adams, *Vectors fields on spheres*, Ann. Math. 75 (1962), 603-632.

[2] D. Alekseevsky, N. Blăzić, N. Bokan and Z. Rakić, *Self duality and pointwise Osserman manifolds*, Arch. Math. Brno 35 (1999), (3), 193-201.

[3] J. K. Beem, P. E. Ehrlich and K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, Second Edition, New York, 1996.

[4] M. Belger, V. Milousheva, G. Stanilov, *Jacobi maps between Riemannian manifolds*, Contributions to Algebra and Geometry, 36 (1995), (2), 203-210.

[5] J. Berndt and L. Vanhecke, *Two naturally generalizations of locally symmetric spaces*, Diff. Deom. and Appl., 2 (1992), 57-80.

[6] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, Berlin, Heidelbergand New York, 1978.

[7] R. L. Bishop and B. O'Neil, *Manifolds of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 1-49 .

[8] N. Blažić, *Conformally Osserman Lorentzian manifolds*, Kragujevac J. Math. 28 (2005), 85-96.

[9] N. Blažić, N. Bokan, P. B. Gilkey, *A note on Osserman Lorentzian manifold*, Bull. London Math. Soc., 29 (1997), 227-230.

[10] N. Blažić, N. Bokan, P. Gilkey and Z. Rakić, *Pseudo-Riemannian Osserman manifolds*, J. Balkan Soc. Geometers 12 (1997), 1-12.

[11] N. Blažić, N. Bokan and Z. Rakić, *A note on the Osserman conjecture and isotropic covariant derivative of curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 245-253.

[12] N. Blažić, N. Bokan and Z. Rakić, *Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature* $(2, 2)$, J. Aust. Math. Soc. 71 (2001), 367-395.

[13] N. Blažić and P. Gilkey, *Conformally Osserman manifolds and conformally complex space forms*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 1 (2004), 97-106.

[14] N. Blažić and P. Gilkey, *Conformally Osserman manifolds and self-duality in Riemannian geometry*, Differential geometry and its applications, 15-18, Matfyzpress, Prague, 2005.

[15] N. Blažić, P. Gilkey, S. Nikcević and U. Simon, *The spectral geometry of the Weyl conformal tensor*, PDEs, submanifolds and affine differential geometry, 195-203, Banach center Publ., 69, Polish Acad Sci., Warsaw, 2005.

[16] A. Bonome, R. Castro, E. García-Río, L. Hervella and R. Vázquez-Lorenzo, *Nonsymmetric Osserman indefinite Kähler manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 2763-2769.

[17] M. Brozos-Vázquez, B. Fiedler, E. García-Rió, P. Gilkey, S. Nikcević, G. Stanilov, Y. Tsankov, R. Vázquez-Lorenzo and V. Videv, *Stanilov-Tsankov-Videv theory*, SIGMA 3 (2007), 095, 13 pages.

[18] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikcević and R. Vázquez-Lorenzo, *The Geometry of Walker Manifolds*,

[19] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río and R. Vázquez-Lorenzo, *Some remarks on locally conformally flat static space-times*, J. Math. Phys. 46 (2005), 11pp.

[20] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río and R. Vázquez-Lorenzo, *Warped product metrics and locally conformally flat structure*, Matemática Contemporanea, 28 (2005), 91-110.

[21] M. Brozos-Vázquez, E. Garcia-Río and R. Vázquez-Lorenzo, *Complete locally conformally flat manifolds of negative curvature* Pacific J. Math., 226 (2006), (2), 201-219.

[22] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río and R. Vázquez-Lorenzo, *Conformally Osserman four-dimensional manifolds whose conformal Jacobi operators have complex eigenvalues*, Proc. Royal Soc. A 462 (2006), 1425-1441.

[23] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río and R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman and conformally Osserman manifolds with warped and twisted product structure*, Result. Math. 52 (2008), 211-221.

[24] M. Brozos-Vázquez, M. E. Vázquez-Abal and R. Vázquez-Lorenzo, *Conformally Osserman multiply warped product structures in the Riemannian setting*, Differential Geom. : Proceding of the VIII International Colloquium, 2009, 185-194.

[25] P. Carpenter, A. Gray and T. J. Willmore, *The curvature of Einstein symmetric spaces*, Quart. J. Math. Oxford, 33 (1982), 45-64.

[26] Q.-S. Chi, *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*, J. Differentiel Geom., 28 (1988), 187-202.

[27] Q-S. Chi, *Quaternionic Kähler manifolds and a characterization of two-point homogenous spaces*, Illinois J. Math. 35 (1991), 408-418.

[28] Q.-S. Chi, *Curvature characterization and classification of rank-one symmetric spaces*, Pacific J. Math., 150 (1991), 31-42.

[29] A. S. Diallo, *Examples of conformally* 2*-nilpotent Osserman manifolds of signature* $(2,2)$, Afric. Diaspora J. Math., 9 (2010), (1), 96-103.

[30] A. S. Diallo, *The Osserman and conformally Osserman manifolds as doubly warped products*, Proc. Sixth International Workshop on Contemporary Problems in Mathematical Physics, (sous presse).

[31] A. S. Diallo, *Affine Osserman connections on* 2*-dimensional manifolds*, Afric. Diaspora J. Math., 11 (2011), (1), 103-109.

[32] A. S. Diallo and M. Hassirou, *Examples of Osserman metrics of* $(3,3)$*-signature*, Journal of Mathematical Sciences : Advances and Applications, 7 (2011), (2), 95-103.

[33] A. S. Diallo, *Conformal transformation preserving the Jacobi operator*, Soumis à Int. J. Contemp. Math. Sciences.

[34] J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río and R. Vázquez-Lorenzo, *New examples of Osserman metrics with nondiagonalisable Jacobi operators*, Differential Geom. App. 24 (2006), 433-442.

[35] J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río and R. Vázquez-Lorenzo, *Four-dimensional Osserman metrics with nondiagonalisable Jacobi operators*, J. Geom. Anal., 16 (2006), 39-52.

[36] B. Fiedler, *Determination of the structure of algebraic curvature tensors by means of Young symmetrizers*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 48 (2003), Article B48d.

[37] E. García-Río, D. N. Kupeli and M. E. Vázquez-Abal, *On a problem of Osserman in Lorentzian geometry*, Differential Geom. Appl., 7 (1997), 85-100.

[38] E. García-Río, D. N. Kupeli, M. E. Vázquez-Abal and R. Vázquez-Lorenzo, *Affine Osserman connection and their Riemannian extensions*, Differential Geom. Appl., 11 (1999), 145-153.

[39] E. García-Río, D. N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman Manifolds in Semi-Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1777, Springer (2002).

[40] E. García-Río, M. E. Vázquez-Abal and R. Vázquez-Lorenzo, *Nonsymmetric Osserman pseudo-Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 2771-2778.

[41] E. García-Río, M. E. Vázquez-Abal, Z. Rakić, *Four-dimensonal indefinite Kähler Osserman manifolds*, J. Math. Phys., 46 (2005), 073505.

[42] E. García-Río and R. Vázquez-Lorenzo, *Four-dimensional Osserman symmetric spaces*, Geom. Dedicata 88 (2001), 147-151.

[43] P. B. Gilkey, *Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint*, J. Geom. Anal., 4 (1994), 155-158.

[44] P. B. Gilkey, *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemannian Curvature Tensor*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ (2001).

[45] P. B. Gilkey *The Geometry of Curvature Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds*, ICP Advanced Texts in Mathematics-Vol. 2. Imperial College Press, London, (2007).

[46] P. B. Gilkey, A. Swann and L. Vanhecke, *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator*, Quart. J. Math. Oxford 46 (1995), 299-320.

[47] S. Kobayashi and K. Nomizu *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience Publisers, New York, 1963.

[48] O. Kowalski, B. Opozda, Z. Vlásek, *Curvature homogeneity of affine as connections on two-dimensional manifolds*, Colloquium Mathematicum 81 (1999), 123-139.

[49] O. Kowalski, B. Opozda, Z. Vlásek, *A classification of locally homogeneous affine connections with skew-symmetric Ricci tensor on 2-dimensional manifolds*, Monatsh. Math., 130 (2000), 109-125.

[50] W. Kühnel, *Conformal transformations between Einstein spaces*, Conformal Geometry (R.S. Kulkarni and U. Pinkall, eds.), Aspects of Mathematics, Vol. E12 (1988), Brassnchweig, 105-146.

[51] W. Kühnel, *Differential Geometry : Curves-Surfaces-Manifolds*, Stud. Math. libr. AMS, vol 16, 2002.

[52] W. Kühnel and H-B. Rademacher, *Conformal diffeomorphisms preserving the Ricci tensor*, Proc. Amer. Math. Soc., 123 (1995), 2841-2848.

[53] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds and Clifford structures*, Houston J. Math., 29 (2003), 59-75.

[54] Y. Nikolayevsky, *Two theorems on Osserman manifolds*, Diff. Geom. Appl., 18 (2003), 239-253.

[55] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds of dimension* 8, Manuscripta Math., 115 (2004), 31-53.

[56] Y. Nikolayevsky, *Osserman conjecture in dimension* $n \neq 8, 16$, Math. Ann., 331 (2005), 505-522.

[57] Y. Nikolayevsky, *On Osserman manifolds in dimension* 16, Proc. Conference Contemporary, Geometry and Related Topics, June 26-July 2, 2005, Belgrade, Matematicki facultet beograd (2006), 379-398.

[58] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[59] Z. Olszak, *On the existence of generalized complex spaces forms*, Israel J. Math., 65 (1989), 214-218.

[60] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geomtry*, Academic Press, New-York, 1983.

[61] R. Osserman, *Curvature in the eighties*, Amer. Math. Monthly 97 (1990), 731-756.

[62] R. Osserman, P. Sarnak, *A new curvature invariant and entropy of the geodesic flows*, Invent. Math., 77 (1984), 455-462.

[63] E. M. Patterson and A. G. Walker, *Riemann extensions*, Quart. J. Math., Oxford Ser., 2 (1952), 3, 19-28.

[64] Z. Rakić, *An exemple of rank two symmetric Osserman spaces*, Bull. Austral. Math. Soc., 56 (1997), 517-521.

[65] Z. Rakić, *On duality principle in Osserman manifolds*, Lin. Alg. Appl., 296 (1999), 183-189.

[66] C. Sterbeti, *Higher order Osserman pseudo-Riemannian manifolds of neutral signature* $(2, 2)$, Balkan J. Geom. Appl., 10 (2005), 175-178.

[67] Z. I. Szabó, *A short topological proof for the symmetry of 2 point homogeneous spaces*, Invent. Math., 106 (1991), 61-64.

[68] K. Yano and S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundles*, Marcel Dekker, New York, 1973.