
CENTRE DE RECHERCHE ET
DE FORMATION DOCTORALE
EN SCIENCES, TECHNOLOGIES
ET GEOSCIENCES



POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

Unité de Recherche et de Formation
Doctorale en Mathématiques,
Informatique, Bioinformatique
et Applications

Research & Training Unit for
Doctorate in Mathematics,
Computer Sciences
and Applications

Laboratoire d'Algèbre, Géométrie et Applications
Laboratory of Algebra, Geometry and Applications

Topologie des Cordes sur les Espaces de Gorenstein

Thèse Soumise pour l'Obtention du
Doctorat/Ph.D en Mathématiques

Option: Topologie Algébrique
Spécialité: Théorie Topologique des Cordes.
Par

MBIAKOP Hilaire George

Matricule : 02Z223

D.E.A en Mathématiques



Soutenue le 15 Juin 2020 devant le Jury composé de :

Président: DOSSA Marcel, PR., Université de Yaoundé 1, Cameroun;

Rapporteurs: BITJONG NDOMBOL , PR., Université de 1, Cameroun;
NKUIMI JUGNIA Célestin, MC, Université de Yaoundé I, Cameroun;
MENICHI Luc, PR., Université d'Angers, France;

Examineurs: BEKOLLE David, PR., Université de Yaoundé 1, Cameroun;
WAMON François, MC, Université de Yaoundé 1, Cameroun.

Année académique 2019-2020

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
PAIX-TRAVAIL-PATRIE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GEOSCIENCES



REPUBLIC OF CAMEROON
PEACE-WORK-FATHERLAND

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

POSTGRADUATE SCHOOL OF
SCIENCE, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE DOCTORAT / Ph.D

Nous soussignés, DOSSA Marcel, Pr., UYI, Président du jury ; BIJONG NDOMBOLI, Pr., UYI, NKUIMI JUGNIA Célestin, MC, UYI, Rapporteurs ; BEKOLLE David, Pr, UYI, WAMON François, MC, UYI, Examineurs ; membres du jury de la thèse de Doctorat / Ph.D présenté par M. MBIAKOP Hilaire George, Matricule 02Z223, intitulé: «**TOPOLOGIE DES CORDES SUR LES ESPACES DE GORENSTEIN** » et soutenue en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat / Ph.D en mathématiques, Spécialité : **Théorie topologique des cordes**, Option : **Topologie algébrique**, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance en vue de l'amélioration de ce travail ont été effectuées.

En foi de quoi la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Président

Rapporteurs

Examineurs

DOSSA Marcel, Pr., UYI

BIJONG NDOMBOLI, Pr., UD

BEKOLLE David, Pr, UYI

NKUIMI J. Célestin, MC, UYI

WAMON François, MC, UYI

Dedicace

A la mémoire de mon père

FANMI David

et à ma mère

WANDJI Rebecca

Remerciements

Cette œuvre n'aurait pas vu le jour sans la volonté de l'Éternel dont la crainte constitue le début de la connaissance.

C'est avec un réel plaisir que je remercie ici tous ceux qui, par leur appui, leur aide, leur présence, m'ont soutenu dans la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes directeurs de thèse. Je veux leur exprimer ma gratitude pour le temps qu'ils m'ont consacré, pour leur grande disponibilité et leur efficacité. Je ne cesserai de citer entre autres le Pr. Bitjong Ndombol et le Pr. Kuimi Jugnia Célestin. Les bureaux du Pr. Jean Claude Thomas et du Pr. Luc Menichi m'ont toujours été ouverts et leurs anecdotes savoureuses sur les mathématiques ont pimenté nos nombreuses rencontres ! Je les remercie très chaleureusement.

Je remercie l'ISP, le SARIMA, l'AUF... dont les financements ont joué un rôle indéniable dans la réalisation de cette œuvre ; au LAREMA (Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques) pour m'avoir offert un cadre de recherche enviable lors de mes différents séjours de stage.

Merci aussi à mes enseignants qui, tout au long de mon cursus, ont su me faire goûter la rigueur et la beauté des raisonnements mathématiques et m'ont ainsi donné le désir de travailler dans ce domaine.

Merci vivement à mon aimable épouse Tchoutah Nzouatcha Carène pour tous les sacrifices consentis et à mes enfants Mbiakop Wandji Marie Gabrielle, Mbiakop Leukouan Michelle Jolie, Mbiakop Famy Franck Noé.

Je remercie grandement mes frères et sœurs pour leur infaillible soutien. Je citerai particulièrement mon frère aîné Fandio Hermann à qui j'exprime ma sincère gratitude.

Merci à mes amis et collègues notamment au Dr Mbang Joseph. Les bons moments partagés m'ont procuré une détente tout à fait propice à mon travail de recherche.

Table des matières

Table des matières	vii
Résumé	1
Abstract	2
1 Introduction.	3
1.1 Motivation : la Théorie Physique des Cordes.	4
1.2 Théorie des champs topologiques.	5
1.3 Théorie topologique des cordes fermées.	7
1.4 Mon travail de thèse.	9
2 Cas des espaces de Gorenstein.	11
2.1 Espaces vectoriels gradués.	11
2.1.1 Notations et isomorphismes canoniques.	11
2.1.2 Algèbres graduées et modules gradués	12
2.1.3 Les modules bigradués Tor et Ext.	14
2.2 Espaces de Gorenstein.	16
2.3 L'application de Gysin pour un espace de Gorenstein.	18
2.3.1 Le cas classique des variétés	18
2.3.2 Le cas des espaces de Gorenstein.	20
2.4 Définition $r_{in}!$ pour les espaces de Gorenstein.	21
3 Rappels sur les modèles de Sullivan.	24
3.1 Compléments sur les algèbres graduées commutatives.	24
3.2 Algèbres de cochaînes et algèbres de Sullivan.	26
3.2.1 Algèbres de cochaînes	26
3.2.2 Algèbres de Sullivan.	28
3.2.3 Algèbres de Sullivan relatives.	32
3.3 Foncteur des formes de Sullivan.	33

4	Utilisation des modèles minimaux.	38
4.1	Quelques applications en topologie.	38
4.1.1	Notations.	38
4.1.2	Fibration associée à une application.	39
4.1.3	Fibration associée à la diagonale $\Delta : X \rightarrow X^{\times 2}$	39
4.1.4	Fibration associée à la diagonale $\Delta_{(k)} : X \rightarrow X^{\times k}$	40
4.1.5	Fibration associée à un produit d'applications diagonales $\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)} : X^r \rightarrow X^{\times k_1 + \dots + k_r}$	41
4.2	Représentant de Sullivan d'une application.	41
4.2.1	Lemme de relèvement à homotopie près	41
4.2.2	Cas d'un produit de deux espaces.	42
4.2.3	Cas de l'application diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times X$	43
4.2.4	Cas de l'application diagonale $\Delta_{(k)} : X \rightarrow X^{\times k}$	44
4.2.5	Cas d'un produit d'applications diagonales.	45
4.3	Quelques calculs de modèles relatifs de Sullivan.	46
4.3.1	Modèle relatif de la diagonale.	46
4.3.2	Modèle relatif de la fibration des lacets libres.	48
4.3.3	Modèle relatif de la diagonale $\Delta_{(3)} = (Id \times \Delta) \circ \Delta$	51
4.3.4	Modèle relatif de Sullivan de la diagonale $\Delta_{(k)} : X \rightarrow X^{\times k}$	55
4.3.5	Modèle relatif de Sullivan d'un produit d'applications diagonales.	57
4.4	$r_{in!}$ et modèles de Sullivan.	60
4.5	Définition des $\Phi_{g,p+q}$ à l'aide des modèles.	62
4.6	Modèle de Sullivan de la construction de Borel.	63
5	Le produit de Chas-Sullivan.	66
5.1	Construction générale.	66
5.1.1	Retour à la topologie	66
5.1.2	Usage des modèles de Sullivan	67
5.2	Cas de la sphère $X = S^n, n > 1$	73
5.3	Cas de l'espace projectif complexe. $X = \mathbb{C}P^n, n \geq 1$	77
5.4	Cas du quotient homotopique associé à une action de groupe.	79
6	Le coproduit de Chas-Sullivan	83
6.1	Construction générale.	83
6.1.1	Retour à la topologie	83
6.1.2	Usage des modèles de Sullivan.	85

TABLE DES MATIÈRES

6.2	Cas de la sphère $X = S^n$, $n > 1$.	90
6.3	Cas de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$, $n > 1$.	93
6.4	Cas du quotient homotopique associé à une action de groupe.	94
6.5	Remarque sur l'opération $\Phi_{0,2+2}$.	95
7	L'opération $\Phi_{0,3+1}$	97
7.1	Construction générale.	97
7.1.1	Retour à la topologie	97
7.1.2	Usage des modèles de Sullivan	99
7.2	Cas de la sphère S^n , $n > 1$.	106
7.3	Remarque sur l'opération $\Phi_{0,3+2}$.	107
	Conclusion et perspectives	108
	Annexe	114

Résumé

La topologie des cordes est l'étude de structures algébriques sur l'homologie $H_*(LX)$ où LX désigne l'espace des lacets libres d'un espace topologique X . Le premier résultat a été obtenu en 1999 par Chas et Sullivan. Ils considèrent le cas $X = M$ est une variété fermée orientée et montrent que $H_*(LX)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky. Ce résultat a été étendu par Cohen-Godin en 2004 toujours pour le cas $X = M$ comme ci-dessus et par Chataur-Menichi en 2007 pour $X = BG$ le classifiant d'un groupe de Lie compact. Ils montrent que $H_*(LX)$ est une théorie conforme homologique des champs de degré $\dim M$ (resp. $-\text{rang } G$). Bien que M et BG soient de types bien distincts ce sont tous les deux des espaces de Gorenstein. En 2008, Félix-Thomas ont montré que les opérations de la topologie des cordes peuvent être définies dans ce contexte plus général. L'objet de ma thèse est de fournir une description explicite de ces opérations pour les espaces de Gorenstein, en termes de modèles de Sullivan lorsque le corps des coefficients est supposé de caractéristique zéro. Cette méthode permet de retrouver les rares calculs connus (sphères et espaces projectifs complexes) et aussi d'effectuer des calculs sur l'espace de Borel associé à une action d'un groupe de Lie compacte connexe.

Mots clés : topologie, homotopie, homologie, espaces de Gorenstein, modèles de Sullivan.

Abstract

String topology on Gorenstein spaces. String topology is the study of algebraic structures on the homology $H_*(LX)$ where LX denotes the free loop space of X . The first result was given by Chas and Sullivan in 1999. They took $X = M$ a closed oriented manifold and showed that $H_*(LM)$ is a Batalin-Vilkovisky algebra. This result was extended by Cohen-Godin in 2004 for $X = M$ as above and by Chataur-Menichi in 2007 when $X = BG$ is the classifying space of compact Lie group. They prove that $H_*(LX)$ is a homological conformal field theory of degree $\dim M$ (respectively $-\text{rank}G$). While M and BG are very different in nature they are both Gorenstein spaces. As proved by Felix-Thomas, in 2008, string operations can be defined in this more general situation. The purpose of my thesis is to provide an explicit way to compute these operations for Gorenstein spaces with the aid of Sullivan minimal models when the coefficient field is of characteristic zero. This method allows to rediscover the few known results (spheres and complex projective spaces) as well as to make computations with the Borel space associated with a group action of a compact connected Lie group.

Key words : Topology, Homotopy, Homology, Gorenstein spaces, Sullivan models.

CHAPITRE 1

Introduction.

Ce travail de thèse concerne la *Théorie Topologique des Cordes Fermées*. L'origine de cette théorie est la *théorie physique des cordes (ouvertes ou fermées)*. Nous précisons brièvement cette origine dans la première section de l'introduction en montrant l'implication de la théorie des champs topologiques dans les sections (§2 et §3) avant de situer notre contribution personnelle.

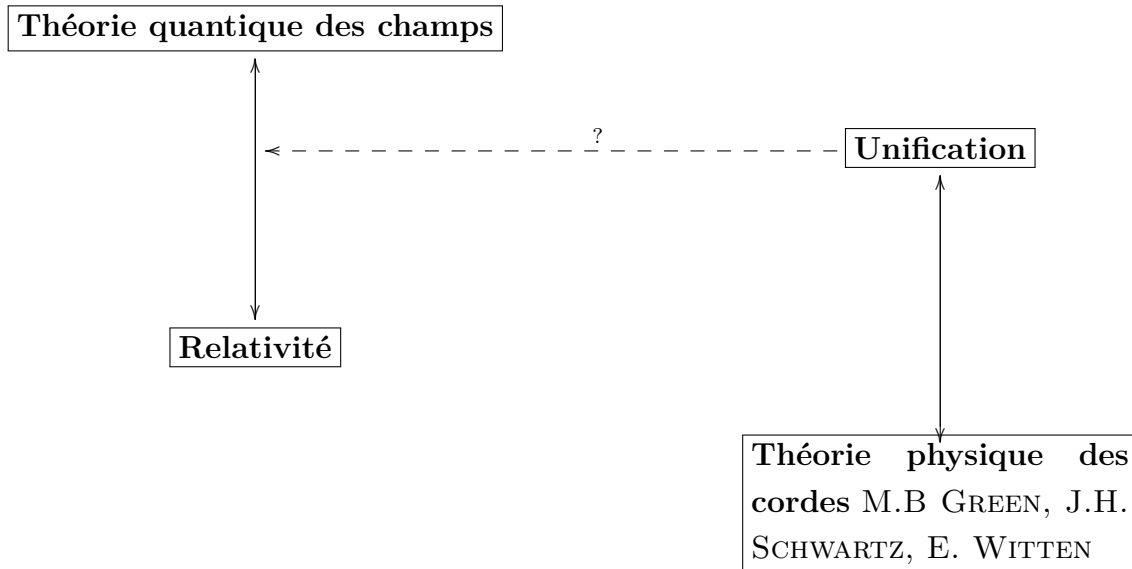
Signalons que la topologie des cordes intervient dans de nombreux domaines de recherche en y apportant une source de problèmes nouveaux. Citons quelques exemples.

1. la K-théorie équivariante tordue [12],[31],
2. la théorie topologique des champs, [56], [45],
3. la géométrie symplectique [2],
4. la théorie de Morse [32], [17], [43],
5. la géométrie de Poisson [4],
6. la théorie des gerbes et des “stacks” [7],
7. la géométrie non commutative [39],
8. la dualité de Van den Bergh [50],
9. les algèbres et les catégories de Calabi-Yau [37], [41],

Pour terminer, signalons aussi qu'une autre approche de la topologie des cordes est via l'homologie de Hochschild de l'algèbre des chaînes singulières d'une variété 1-connexe compacte sans bord. Cf par exemple : [63], [29], [48], [49], [67], [66], Dans cette thèse nous n'aborderons pas ce point de vue. Nous étudions les structures algébriques sur l'homologie des espaces de lacets libres directement à partir de la fibration canonique dont l'espace total est cet espace. Il convient aussi dans ce préambule de rappeler le rôle essentiel que joue l'homologie de l'espace des lacets libres dans nombreux problèmes tels que : Problème des trois corps, Problème des géodésiques fermées, Conjectures de Gromov Cf par exemple [33], [53], [52], [60], [43], [8], [9], [27], [10],

1.1 Motivation : la Théorie Physique des Cordes.

La théorie physique des cordes intervient de manière conjecturale dans le problème de la *théorie de l'unification* comme schématisée ci-dessous ;



Extrait de l'encyclopédie Wikipedia : “According to string theorists, each kind of fundamental particle corresponds to a different pattern of fundamental string. All strings are essentially the same, although they may be open (lines) or closed (loops). Different particles differ in the coordination of their strings. Modern string theories include supersymmetry, making them superstring theories.








One particular prediction of string theory is the existence of extremely massive counterparts of ordinary particles due to vibrational excitations of the fundamental string. Another important prediction of string theory is the existence of a massless spin-2 particle behaving like the graviton. By predicting gravity, string theory unifies quantum mechanics with general relativity, making it the first consistent theory of quantum gravity.

One problem with string theory is that it predicts that the number of dimensions for spacetime much greater than 4 (the number of observed dimensions). These extra dimensions are supposedly compactified or rolled-up. Other related theories such as brane theories contain extended extra dimensions, which are hidden from us by our confinement to a brane.” [38], [14], [64].

En *physique des cordes* une particule est vue comme une *corde fermée ou ouverte* d'un certain espace temps de dimension ≤ 11 . Nous nous limitons ici aux cordes fermées i.e en topologie à une application continue du cercle dans un espace topologique. Il en résulte

1.2 Théorie des champs topologiques.

une correspondance entre “points” et “cordes” comme illustrée ci-dessous.

	Feynman.	Witten	Cobordisme.
Particule	.		S^1
fusion			$F_{0,2+1}$
scission			$F_{0,1+2}$
scission o			$F_{1,1+1}$
fusion			

Dans le tableau ci-dessus les 2 -cobordismes $\mathbf{F}_{g,p+q}$ apparaissent comme le bord d'un voisinage tubulaire d'un diagramme de Feynman. Plus précisément, il s'agit d'une surface compacte orientée à bord (supposée ici connexe) avec p cercles entrants, q cercles sortants, g désigne le genre de la surface et $\chi = 2 - 2g - p - q$ la caractéristique d'Euler de la surface, [51, §21]. Ci-dessous est représenté le cobordisme $F_{2,3+2}$ avec ses trois cercles entrants et ses deux cercles sortants.

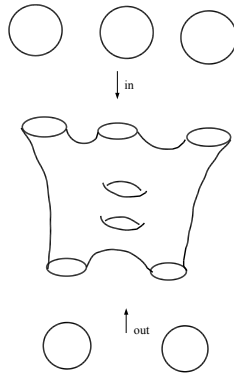


Figure 1.

1.2 Théorie des champs topologiques.

Les 2 -cobordismes $F_{g,p+q}$ servent à définir la théorie mathématique des *champs topologiques* qui est liée, comme on vient de le voir, à la théorie physique des cordes. Elle permet de définir une famille infinie de structures algébriques sur un espace vectoriel gradué.

Notons \underline{VectGr} la catégorie des espaces vectoriels (en physique l'espace des sections d'un fibré vectoriel). Etant donné un espace vectoriel gradué A , un foncteur de la forme

$$\underline{C} \rightarrow \underline{VectGr}, \quad \left\{ \begin{array}{l} [n] = \sqcup_{i=1}^n S^1 \mapsto A^{\otimes n} \\ F_{g,p+q} \mapsto \left(A^{\otimes p} \xrightarrow{\Phi_{g,p+q}} A^{\otimes q} \right) \\ \text{recollement} \mapsto \text{composition} \end{array} \right\}$$

est appelé une 2-TQFT (resp. une 2-CFT, une 2-TCFT) sur A , suivant la nature de la 2-catégorie \mathbf{C} , [57], [58] (Q= Quantique et C=Conformal). Voir : [56] pour une interprétation physique et [6] pour une interprétation des invariants de Gromov-Witten.

Donnons ci-dessous deux exemples classiques.

Exemple 1 : Algèbre de Frobenius. Rappelons qu'une k -algèbre commutative (graduée) A est une *algèbre de Frobenius* s'il existe un coproduit :

$$\psi : A \rightarrow A \otimes A, \quad a \mapsto \sum_{\text{finie}} a_i \otimes a'_i \text{ vérifiant } \psi(ba) = \sum_{\text{finie}} ba_i \otimes a'_i = \sum_{\text{finie}} \pm a_i \otimes ba'_i.$$

(L. Abrams, [1]) a démontré qu'une 2-TQFT est définie sur l'espace vectoriel gradué A si et seulement si A est une algèbre de Frobenius. Il est important de remarquer ici que dans le dictionnaire "2-TQFT/Frobenius" nous avons les correspondances suivantes :

$$\begin{array}{c} \text{Diagramme d'un cône pointé vers le bas} \\ := \left(\emptyset \xrightarrow{\text{cobordisme}} S^1 \right) \longleftrightarrow \left(k \xrightarrow{\text{unité}} A \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagramme d'un cône pointé vers le haut} \\ := \left(S^1 \xrightarrow{\text{cobordisme}} \emptyset \right) \longleftrightarrow \left(A \xrightarrow{\text{co-unité}} k \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagramme d'un cylindre avec un étranglement} \\ := \left(S^1 \sqcup S^1 \xrightarrow{\text{cobordisme}} S^1 \right) \longleftrightarrow \left(A^{\otimes 2} \xrightarrow{\text{produit}} A \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagramme d'un cylindre avec un étranglement inversé} \\ := \left(S^1 \xrightarrow{\text{cobordisme}} S^1 \sqcup S^1 \right) \longleftrightarrow \left(A \xrightarrow{\text{co-produit}} A^{\otimes 2} \right) \end{array}$$

Exemple 2 : Algèbre de Batalin-Vilkovisky. Rappelons qu'une k algèbre graduée commutative G est une *algèbre de Gerstenhaber* s'il existe un crochet de Lie de degré 1

$$G_i \otimes G_j \rightarrow G_{i+j+1}, \quad x \otimes y \mapsto \{x, y\}$$

1.3 Théorie topologique des cordes fermées.

tel que $x \mapsto \{x, -\}$ est une dérivation. De plus G est une B-V algèbre s'il existe $\delta : G_i \rightarrow G_{i+1}$ tel que $\delta \circ \delta = 0$ et G est de Gerstenhaber pour le crochet :

$$\{x, y\} = \delta(xy) - (\delta(x)y \pm x\delta(y)) .$$

Voir par exemple, [35], [5], [42]. E. Getzler, [36] a démontré que

$$\begin{aligned} \text{une } 2\text{-TCFT}_{|g=0, q=1} \text{ est définie sur } A &\implies A \text{ est une algèbre sur l'opérade des f-disques} \\ &\implies A \text{ est une BV-algèbre .} \end{aligned}$$

Le lecteur curieux pourra se reporter à [13] afin de compléter ces quelques éléments.

1.3 Théorie topologique des cordes fermées.

Soient X, Y deux espaces topologiques, notons $X^Y :=$ espace des applications continues $Y \rightarrow X$ muni de la topologie compacte ouverte et notons $LX = X^{S^1}$ l'espace des lacets libres sur X (i.e. l'espace des cordes de la physique).

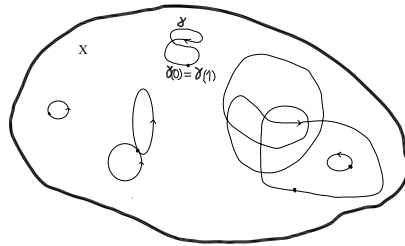


Figure 2.

La théorie topologique des cordes fermées est l'étude des opérations

$$\Phi_{g,p+q} : H_*(LX)^{\otimes p} \longrightarrow (H_*(LX)^{\otimes q})_{*-d\chi}$$

définies sur l'homologie (à coefficients dans un anneau principal) de LX . Ces opérations définissent une certaine théorie de champs topologique, appelée *théorie de champs topologique homologique*.

Ces opérations existent sous certaines hypothèses concernant l'espace topologique X . (C.f Chapitre 1.) pour plus de détails.

Signalons que si M est une variété compacte connexe orientée l'opération

$$\Phi_{0,2+1} : H_*(LX)^{\otimes 2} \longrightarrow (H_*(LX))_{*-d\chi} ,$$

appelée le produit de Chas-Sullivan [15], est définie de telle manière que $\mathbb{H}_*(LM; k) := H_{*+m}(LM; k)$ soit une algèbre commutative graduée. C'est en fait une BV-algèbre. La définition donnée par Chas et Sullivan est purement géométrique. Le produit de Chas-Sullivan est obtenu en mixant la composition des lacets libres de même origine et le produit d'intersection de l'homologie de la variété. La structure elle provient de l'action canonique du cercle sur LX . Voir [16] et [44] pour une autre description du produit de Chas-Sullivan.

Plus généralement, lorsque M est une variété 1-connexe compacte sans bord, R. Cohen et V. Godin [20], ont montré qu'un 2-cobordisme $\mathbf{F}_{g,p+q}$ (C.f. Figure 1) fournit le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 (H_*(LX))^{\otimes p} & \xleftarrow{H_*(r_{in})} & H_*(X^{F_{g,p+q}}) & \xrightarrow{H_*(r_{out})} & (H_*LX)^{\otimes q}, & (1.1) \\
 & \searrow & & \swarrow & & \\
 & & (r_{in})! & & & \\
 & & \Phi_{g,p+q} = H_*(r_{out}) \circ (r_{in})! & & &
 \end{array}$$

où

- a) r_{in} (resp. r_{out}) désigne les restrictions au bord rentrant (resp. au bord sortant)
- b) l'application linéaire $r_{in}!$, de degré $\chi_{F_{g,p+q}}$ est obtenue grâce à la dualité de Poincaré sur l'homologie de X et à l'application d'écrasement de Thom.

Ceci leur permet, dans le cas des variétés, de définir toutes les opérations $\Phi_{g,p+q}$ pour $q > 0$ et en particulier le produit de Chas-Sullivan. Ces opérations ne dépendent que de l'homologie de $F_{g,p+q}$ et elles sont compatibles avec le recollement des 2-cobordismes.

Le diagramme (1.1) montre aussi qu'il suffit de construire une application $r_{in}!$ pour chaque 2-cobordisme $F_{g,p+q}$ afin d'établir l'existence des opérations $\Phi_{g,p+q}$. Cette remarque est l'origine des nombreuses extensions de la théorie topologique des cordes fermées :

- aux espaces classifiants des groupes de Lie par Chataur-Menichi [18].
- aux "orbifolds" par K. Behrend, G. Ginot, B. Noohi and P. Xu [7] et E. Lupercio, B. Uribe and M. Xicotécatl, [46].

1.4 Mon travail de thèse.

Le point de départ de ma thèse est l'extension de la construction des opérations $\Phi_{g,p+q}$ aux espaces de Gorenstein, par Félix et Thomas [30], dans le cas où k est un corps. Parmi les exemples d'espaces de Gorenstein de dimension formelle $n \in \mathbb{Z}$ on trouve les espaces à dualité de Poincaré de dimension n rel. k , les espaces classifiants BG des groupes de Lie compacts connexes G , qui sont de dimension formelle $-\text{rang } G$ et l'espace total E d'une fibration de base un espace de Gorenstein B et de fibre un espace à dualité de Poincaré F . Dans ce dernier cas, la dimension formelle de E est la somme de la dimension formelle de B et la dimension de F (C.f. [24] pour plus de détails). En particulier, si Γ est un groupe de Lie compacte connexe qui opère topologiquement sur une variété connexe compact sans bord de dimension m alors nous obtenons la fibration de Borel

$$M \longrightarrow E_\Gamma \longrightarrow B\Gamma$$

où E_Γ est un espace de Gorenstein de dimension formelle $m - \text{rang } \Gamma$.

Dans ce travail je me limite aux cas où le corps est supposé de caractéristique 0 ce qui me permet d'utiliser la théorie des modèles minimaux de Sullivan conduisant aux calculs explicites. Les éléments de la théorie des modèles minimaux nécessaires à la compréhension des chapitres 3, 4 et 5 sont rappelés dans le chapitre 2.

L'originalité de ma démarche est que je n'utilise que les objets de l'homologie différentielle : le *Ext différentiel* au sens de Eilenberg-Moore [23] et surtout la notion de *résolutions semi-libres* d'un module différentiel gradué sur une algèbre différentielle graduée (Cf Chapitre 2 §1 pour une définition précise). Une résolution semi-libre d'un (R, d) -module différentiel gradué (M, d) est la généralisation de la notion de résolution dans la catégorie des modules sur un anneau. Les deux notions sont reliées par une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_{H(M,d)}^{p,q}(k, H(M, d)) \implies \text{Ext}_{H(M,d)}^{p+q}(k, M).$$

(Cette suite spectrale montre que si X est un espace à dualité de Poincaré alors il est de Gorenstein). La construction de l'application de Gysin, définie par Félix et Thomas [29], repose sur la construction de résolution semi-libre, définie dans la section 2.1, de certains modules différentiels comme on le verra en détails dans le chapitre 4 et dans les chapitres 5, 6 et 7. Les résolutions semi-libres ad-hoc sont obtenues à partir de différentes descriptions topologiques d'espaces associés à l'espace des lacets.

Les rares calculs effectués jusqu'à présent l'ont été à l'aide de la dualité de Poincaré

par [20], la classe diagonale par [19]. Un de nos buts est de montrer que le point de vue de Félix-Thomas conduit à des calculs explicites (et nouveaux) tout au moins dans le cas où le corps est supposé de caractéristique zéro.

Dans le chapitre 3) nous faisons quelques rappels et compléments sur les modèles minimaux de Sullivan puis dans le chapitre 4) nous montrons comment l'application de Gysin de $r_{in}!$ et le dual en cohomologie de chacune des opérations $\Phi_{g,p+q}$ peut s'exprimer à l'aide des modèles minimaux de Sullivan.

Dans le chapitre 5) nous spécialisons les constructions du chapitre 3 pour le dual du produit de Chas-Sullivan sur la cohomologie des espaces de lacets libres d'un espace de Gorenstein de dimension formelle d . Nous calculons par cette méthode le produit de Chas-Sullivan sur les sphères, les espace projectifs complexes puis sur l'espace de Borel associé à une action d'un groupe sur un espace projectif complexe. Dans le cas des sphères et des espaces projectifs complexes nous retrouvons les résultats de Cohen, Jones et Yuan [21] qui sont obtenus à l'aide de suites spectrales.

Dans le chapitre 6) nous spécialisons les constructions du chapitre 4 pour le dual du coproduit de Chas-Sullivan sur la cohomologie de l'espace des lacets libres d'un espace de Gorenstein de dimension formelle d . Nous calculons par cette méthode le coproduit de Chas-Sullivan sur les sphères, les espace projectifs complexes puis sur l'espace de Borel associé à une action d'un groupe sur l'espace projectif complexe. Nous étendons les résultats de Chataur et Thomas [19].

Dans le chapitre 7) nous spécialisons les constructions du chapitre 4) pour le dual de l'opération $\Phi_{0,3+1}$ sur la cohomologie des espaces de lacets libres d'un espace de Gorenstein de dimension formelle d . Nous calculons par cette méthode cette opération sur la sphère de dimension impaire. Ce calcul est motivé par le résultat de Tamanoi [62] qui énonce que les opérations $\Phi_{g,p+q}$ définies par Cohen-Godin sont nulles si $g > 0$ ou si $g = 0$ et $q > 2$.

CHAPITRE 2

Cas des espaces de Gorenstein.

Dans ce chapitre k désigne un corps quelconque. Dans la première section nous précisons les notations employées dans la suite du texte ainsi que les définitions classiques de l'algèbre homologique sur les espaces vectoriels gradués.

2.1 Espaces vectoriels gradués.

2.1.1 Notations et isomorphismes canoniques.

- $\underline{\text{Vect}}$ désigne la catégorie des espaces vectoriels.
- $\underline{\text{VectGr}}$ désigne la catégorie des espaces vectoriels gradués.
- $V = \{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \underline{\text{VectGr}}$ si $V_i \in \underline{\text{Vect}}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Si V et V' sont deux espaces vectoriels gradués alors :

- $f := \{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : V \rightarrow V'$ où $f_i \in \underline{\text{Vect}}(V_i, V'_{i+k})$ est une application linéaire de degré k .
- $V \times V' = \{(V_i \times V'_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$.
- $V \otimes_k V' = \{(V \otimes_k V')_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(V \otimes_k V')_k = \bigoplus_{i+j=k} V_i \otimes_k V'_j$.
- $\text{Hom}_k(V, V') = \{\text{Hom}_k(V, V')_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ et $\text{Hom}_k(V, V')_k = \prod_i \text{Hom}_k(V_i, V'_{i+k})$.
- $\underline{\text{VectGr}}(V, V') = \text{Hom}_k(V, V')_0$.

Lemme 2.1.1. *Nous avons les isomorphismes naturels dans la catégorie $\underline{\text{VectGr}}$*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}, -) &\rightarrow \prod_{\alpha} \text{Hom}(V_{\alpha}, -) & \text{et} & \quad \text{Hom}(-, \prod_{\alpha} V_{\alpha}) \rightarrow \prod_{\alpha} \text{Hom}(-, V_{\alpha}) \\ (\bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}) \otimes_k - &= \bigoplus_{\alpha} (V_{\alpha} \otimes_k -) & \text{et} & \quad (\prod_{\alpha} V_{\alpha}) \otimes_k - = \prod_{\alpha} (V_{\alpha} \otimes_k -) \\ - \otimes_k (\bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}) &= \bigoplus_{\alpha} (- \otimes_k V_{\alpha}) & \text{et} & \quad - \otimes_k (\prod_{\alpha} V_{\alpha}) = \prod_{\alpha} (- \otimes_k V_{\alpha}). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Les isomorphismes résultent de ceux obtenus dans le cas non gradué en regardant composante par composante. □

Si $\{V(\alpha)\}_\alpha$ est une famille d'espaces vectoriels gradués telle que pour chaque α , $V(\alpha) = \{V_i(\alpha)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ on définit les espaces gradués :

$$\begin{aligned} \bigoplus_\alpha V(\alpha) &= \{(\bigoplus_\alpha V(\alpha))_i\}_{i \in \mathbb{Z}} && \text{avec } (\bigoplus_\alpha V(\alpha))_i = \bigoplus_\alpha V_i(\alpha) \\ \prod_\alpha V(\alpha) &= \{(\prod_\alpha V(\alpha))_i\}_{i \in \mathbb{Z}} && \text{avec } (\prod_\alpha V(\alpha))_i = \prod_\alpha V_i(\alpha) \end{aligned}$$

2.1.2 Algèbres graduées et modules gradués

Soit $R = \{R_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ une k -algèbre graduée et $M = \{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ un R -module gradué à gauche i.e il existe des homomorphismes d'espaces vectoriels gradués

$$\begin{aligned} R \otimes R &\rightarrow R, x \otimes y \mapsto xy \\ R \otimes M &\rightarrow M, x \otimes m \mapsto xm \end{aligned}$$

tels que tout $x, y, z \in R$ et tout $m \in M$

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z, & 1_R x &= x = x 1_R \\ x(ym) &= (xy)m, & 1_R m &= m. \end{aligned}$$

Soient R et R' deux algèbres graduées. Une application k -linéaire de degré 0, $f : R \rightarrow R'$ est un *homomorphisme d'algèbres graduées* si

$$f(xx') = f(x)f(x'), \quad \text{pour tout } x, x' \in R \text{ et si } f(1_R) = 1_{R'}.$$

Soient M et M' deux R -modules à gauche. Une application k -linéaire de degré d , $f : M \rightarrow M'$ est *A -linéaire* si

$$f(xm) = (-1)^{d|x|} x f(m), \quad \text{pour tout } x \in R \text{ et tout } m \in M.$$

Les algèbres graduées et les homomorphismes d'algèbres graduées (resp. les R -modules gradués à gauche et les homomorphismes de R -modules gradués) constituent une catégorie notée

$$\underline{\text{AlgGr}} \quad (\text{resp. } \underline{\text{ModGr}}_R).$$

Ce sont des sous-catégorie (non pleines) de $\underline{\text{VectGr}}$.

Notons R^{op} l'*algèbre opposée* de R i.e le produit dans R^{op} est défini par

$$x \cdot y = (-1)^{|x||y|} y \cdot x, \quad \text{pour tout } x, y \in R.$$

2.1 Espaces vectoriels gradués.

Un R -module gradué à gauche est un R^{op} -module gradué à droite.

On note usuellement $(m \otimes x) \mapsto mx := (-1)^{|x||m|}xm$ l'action à droite ainsi définie et

$$\underline{\text{ModGr}}_{R^{op}}$$

la catégorie des A -modules gradués à droite.

Un R -bimodule M est R -module à droite et à gauche tel que

$$x(my) = (xm)y, \quad \text{pour tout } x, y \in R \text{ et tout } m \in M.$$

Un R -bimodule M est un $R \otimes R^{op}$ -module gradué à gauche.

Exemple 2.1.2. Une algèbre graduée R est naturellement un R -module gradué à gauche (resp. un R -module gradué à droite, un R -bimodule gradué). Un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) de l'algèbre graduée R est un R -sous-module à gauche (resp. un R -sous-module à droite, un R -sous-bimodule)

Lemme 2.1.3. Si $M(\alpha)$ est une famille de R -modules gradués alors les espaces vectoriels gradués

$$\bigoplus_{\alpha} M(\alpha) \quad \text{et} \quad \prod_{\alpha} M(\alpha)$$

sont des R -modules gradués tels que les application canoniques

$$M_{\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\alpha} M(\alpha) \quad \text{et} \quad \prod_{\alpha} M(\alpha) \rightarrow M_{\alpha}$$

sont des homomorphismes de R -modules gradués.

DÉMONSTRATION. Clair. □

Pour le lecteur non habitué aux graduations précisons les relations entre le cas gradué et le cas non gradué.

A un espace vectoriel gradué $V = \{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est associé l'espace vectoriel non gradué

$$\text{tot } V := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$$

et à un homomorphisme d'espaces vectoriels gradués $f := \{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : V \rightarrow V'$ est associé l'application linéaire

$$\text{tot } f := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} f_i : \text{tot } V \rightarrow \text{tot } V'.$$

(Ici la somme est dans la catégorie $\underline{\text{VectGr}}$). Ceci définit le *foncteur de totalisation*

$$\text{tot} : \underline{\text{VectGr}} \rightarrow \underline{\text{Vect}}$$

Lemme 2.1.4. *Soit $R = \{R_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ une algèbre gradué alors le produit interne*

$$\text{tot } R \otimes \text{tot } R \rightarrow \text{tot } R, \quad (x_j)_j \otimes (y_k)_k \mapsto \left(\sum_{j+k=l} x_j y_k \right)_l$$

définit sur $\text{tot } R$ une algèbre.

Si $M = \{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est un R -module gradué à gauche alors le produit externe

$$\text{tot } R \otimes \text{tot } M \rightarrow \text{tot } M, \quad (x_j)_j \otimes (m_k)_k \mapsto \left(\sum_{j+k=l} x_j m_k \right)_l$$

définit sur $\text{tot } M$ un $\text{tot } R$ -module.

De plus nous avons les foncteurs

$$\text{tot} : \underline{\text{AlgGr}} \rightarrow \underline{\text{AlgGr}} \quad \text{et} \quad \text{tot} : \underline{\text{ModGr}}_R \rightarrow \underline{\text{Mod}}_{\text{Tot } R}.$$

DÉMONSTRATION. Clair. □

Si R est une algèbre graduée commutative (i.e $xy = (-1)^{|x||y|}yx$) alors $\text{tot } R$ n'est pas une algèbre commutative.

2.1.3 Les modules bigradués Tor et Ext.

Dans cette sous section nous précisons les définitions des foncteurs dérivés Tot et Ext dans le cas gradué en insistant sur la bigraduation.

$$\text{Hom}_R(M, M') = \{f \in \text{Hom}_k(V, V') \mid f \text{ est } R\text{-linéaire}\}$$

et

$$M \otimes_R M' = \{m \otimes m' \in M \otimes_k M' \mid mx \otimes m' = m \otimes xm'\}$$

Un R -module gradué M est projectif s'il est facteur direct d'un R -module libre.

Lemme 2.1.5. *Un R -module gradué P est projectif ssi $\text{tot } P$ est $\text{tot } R$ -projectif.*

2.1 Espaces vectoriels gradués.

DÉMONSTRATION. Si $P = \{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est un R -module projectif alors il existe un sous-espace vectoriel S d'un R -module libre L tel que $P \oplus S = L$. Par suite $(\oplus_i P_i) \oplus (\oplus_i S_i) = \oplus_i L_i$. Ecrivons $L = R \otimes_k V$ donc $L_i = \oplus_{p+q=i} R_p \otimes_k V_q$ et donc $\oplus_i L_i = \oplus_i \oplus_{p+q=i} R_p \otimes V_q = (\oplus_p A_p) \otimes (\oplus_q V_q) = \text{tot } R \otimes \text{tot } V$ est un tot R -module libre et donc tot P est tot R -projectif.

Réciproquement, supposons que tot $P := \oplus P_i$ est tot R -projectif alors $(\oplus_i P_i) \oplus S = (\oplus R_i) \otimes W$. Si nous considérons l'espace vectoriel gradué $\{W_i\}$ avec $W_0 = W$ et $W_i = 0$ si $i \neq 0$ alors $(\oplus R_i) \otimes_k W = \{R_i\} \otimes_k \{W_i\}$. Le sous-module S de tot $R \otimes W$ s'identifie alors à un sous espace vectoriel gradué $\{S_i\}$ de $\{R_i\} \otimes \{W_i\}$ où $S_i = S \cap R_i \otimes W$ alors $R_i S_j \subset R_{i+j}$, $\oplus_i S_i = S$ et $(\oplus_i P_i) \oplus S = (\oplus_i P_i) \oplus (\oplus_i S_i)$. Ceci montre que P est un facteur direct d'un R -module gradué libre et donc P est R -projectif. \square

Corollaire 2.1.6. *La catégorie $\underline{\text{ModGr}}_R$ possède assez de projectifs.*

Une résolution d'un R -module gradué M est une suite exacte

$$\cdots P_i \xrightarrow{\partial} P_{i-1} \xrightarrow{\partial} \cdots P_1 \xrightarrow{\partial} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

dans la catégorie $\underline{\text{ModGr}}_R$. Elle est projective si chaque P_i est un R -module gradué projectif à droite.

Notons P_* le complexe de chaînes dans la catégorie $\underline{\text{ModGr}}_R$

$$\cdots P_i \xrightarrow{\partial} P_{i-1} \xrightarrow{\partial} \cdots P_1 \xrightarrow{\partial} P_0 \xrightarrow{\partial} 0$$

avec pour chaque $i \geq 0$, $P_i := \{P_{i,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ et $\partial : P_{i,j} \rightarrow P_{i-1,j}$.

Pour tout R -module gradué N à gauche on a le complexe de chaînes $P_* \otimes_R N$ dans la catégorie $\underline{\text{VectGr}}$ où

$$\cdots P_i \otimes_R N \xrightarrow{\partial \otimes_R \text{id}} P_{i-1} \otimes_R N \xrightarrow{\partial \otimes_R \text{id}} \cdots P_1 \otimes_R N \xrightarrow{\partial \otimes_R \text{id}} P_0 \otimes_R N \xrightarrow{\partial \otimes_R \text{id}} 0$$

avec

$$H_{i,j}(P_* \otimes_R N) := \frac{\ker \left((P_i \otimes_R N)_j \xrightarrow{\partial \otimes_R \text{id}} P_{i-1} \otimes_R N_j \right)}{\text{im} \left((P_{i+1} \otimes_R N)_j \xrightarrow{\partial \otimes_R \text{id}} P_i \otimes_R N_j \right)}$$

Pour tout R -module gradué N à droite on a le complexe de cochaînes $\text{Hom}_R(P_*, N)$

dans la catégorie VectGr où

$$\cdots \text{Hom}_R(P_i, N) \xleftarrow{\text{Hom}_R(\partial, \text{id})} \text{Hom}_R(P_{i-1}, N) \xleftarrow{\text{Hom}_R(\partial, \text{id})} \cdots \text{Hom}_R(P_1, N) \xleftarrow{\text{Hom}_R(\partial, \text{id})} \text{Hom}_R(P_0, N) \xleftarrow{\text{Hom}_R(\partial, \text{id})} 0$$

avec

$$H^{i,-j}(\text{Hom}P_*, N) = \frac{\ker \left(\text{Hom}_R(P_{i+1}, N)_j \xleftarrow{\text{Hom}_R(\partial, \text{id})} \text{Hom}_R(P_i, N)_j \right)}{\text{im} \left(\text{Hom}_R(P_i, N)_j \xleftarrow{\text{Hom}_R(\partial, \text{id})} \text{Hom}_R(P_{i-1}, N)_j \right)}$$

Notation 2.1.7.

$$\text{Tor}_{i,j}^A(M, N) = H_{i,j}(P \otimes_A N) \quad \text{et} \quad \text{Ext}_A^{i,-j}(M, N) := H^{i,-j}(\text{Hom}P_*, N),$$

et on obtient les espaces vectoriels bigradués

$$\text{Tor}^A(M, N) = \{\text{Tor}_{i,j}^A(M, N)\}_{i \geq 0, j \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \text{Ext}_A(M, N) = \{\text{Ext}_A^{i,j}(M, N)\}_{i \geq 0, j \in \mathbb{Z}}.$$

2.2 Espaces de Gorenstein.

Soient (R, d) une algèbre différentielle graduée (avec unité $k \subset R$) et (M, d_M) un (R, d) -module différentiel gradué.

(M, d_M) est (R, d) -semi-libre s'il existe une suite de sous- R -modules de M

$$M(0) \subset M(1) \subset \dots \subset M(k) \subset \dots$$

telle que

1. $M = \cup_{k \geq 0} M(k)$
2. $d_M(M(k)) \subset M(k)$
3. $(M(0), d_M)$ est isomorphe au (R, d) -module libre $(R, d) \otimes (V(0), 0)$
4. pour chaque $k \geq 1$ le quotient $(M(k), d_M)/(M(k-1), d_M) = (M(k)/M(k-1), \bar{d}_M)$ est isomorphe au (R, d) -module libre $(R, d) \otimes (V(k), 0)$

lorsque chaque $V(k)$ désigne un k -espace vectoriel gradué.

Définition équivalente. Le (R, d) -module (M, d_M) est isomorphe au (R, d) -module $(R \otimes V, d)$ où

2.2 Espaces de Gorenstein.

- a) $V = \bigoplus_{k \geq 0} V(k)$ où chaque $V(k)$ est un \mathbb{k} -espace vectoriel gradué
b) la différentielle d de $R \otimes V$ vérifie

$$d(\mathbb{k} \otimes V(k)) \subset R \otimes V(k-1).$$

Considérons (M, d) et (N, d) deux modules différentiels gradués sur une algèbre différentielle graduée et le Hom-complexe $\text{Hom}_R((M, d_M), (N, d))$. Rappelons que la différentielle de ce complexe est définie par

$$Df = d \circ f - (-1)^{\deg f} f \circ d.$$

Les résultats suivant étendent aux modules semi-libres les propriétés classiques des modules projectifs et permettent la définition du ext-différentiel.

Lemme 2.2.1. ([3]-Lemma 3.2) *Soient (P, d) et (P', d') deux \mathbb{k} -espaces vectoriels gradués et $\psi : P \rightarrow P'$ une application \mathbb{k} -linéaire de degré r telle que $d' \circ \psi = (-1)^r \psi \circ d$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $H(\psi) : H(P) \rightarrow H(P')$ est un isomorphisme.
2. Pour tout $(x, x') \in P \times P'$ satisfaisant $\begin{cases} dx = 0 \\ dx' = \psi(x) \end{cases}$ il existe $(y, y') \in P \times P'$ tel que $\begin{cases} x = dy \\ x' = \psi(y) + d'y' \end{cases}$.

Proposition 2.2.2. ([3]-Proposition 6.4(i)) *Si (M, d_M) est un (R, d) -module semi-libre alors le foncteur*

$$\text{Hom}_R((M, d_M), -) : \underline{\text{ModDiffGr}}_{(R, d)} \rightarrow \underline{\text{VectDiffGr}}$$

préserve les quasi-isomorphismes.

Soient $\varphi : (N, d_N) \rightarrow (N', d_{N'})$ un quasi-isomorphisme de (R, d) -modules et $f \in \text{Hom}_R^0(M, N') \cap \text{Ker } D$. D'après la Proposition, il existe $g \in \text{Hom}_R^0(M, N) \cap \text{Ker } D$ tel que le diagramme ci-dessous commute **à homotopie près**.

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow g & \downarrow \simeq \varphi \\ M & \xrightarrow{f} & N' \end{array}$$

Si on suppose en outre que φ est **surjective** alors g peut être choisi de telle sorte que le diagramme commute **exactement**.

Les propriétés rappelées ci-dessus justifient les définitions suivantes.

Définition 2.2.3.

1. $\text{Ext}_{(R,d)}((M, d), (N, d))$ est appelé un *ext-différentiel*.
2. Une algèbre différentielle graduée augmentée (A, d) est de Gorenstein de dimension formelle n si

$$\text{Ext}_{(A,d)}^i(\mathbb{k}, (A, d)) = 0, \quad i \neq n, \quad \text{et} \quad \text{Ext}_{(A,d)}^n(\mathbb{k}, (A, d)) \cong \mathbb{k}.$$

3. Un espace topologique X pointé est un espace de Gorenstein si l'algèbre des cochaînes singulières normalisées est une algèbre de Gorenstein.

Ces espaces ont été introduits dans [24]. Il s'agit d'une généralisation de la notion classique d'anneaux de Gorenstein aux algèbres différentielles graduées sur un corps \mathbb{k} . Nous avons déjà cité dans l'introduction (§1.4) des exemples d'espaces de Gorenstein.

2.3 L'application de Gysin pour un espace de Gorenstein.

2.3.1 Le cas classique des variétés

Un \mathbb{k} -espace à dualité de Poincaré de dimension d [11, Chap.VI-§6] est un espace 1-connexe X tel qu'il existe, pour chaque $i \geq 0$, un isomorphisme

$$D_X : H_i(X) \rightarrow H^{d-i}(X)$$

appelé *dualité de Poincaré*. La classe d'homologie $[X] \in H_d(X)$ telle que $D_X([X]) = 1$ est appelée une *classe d'orientation* de X .

Par exemple une variété différentiable de dimension d , 1-connexe, compacte, sans bord et orientée est un \mathbb{k} -espace à dualité de Poincaré de dimension d et ceci pour tout corps \mathbb{k} .

Soit $f : X \rightarrow X'$ une application entre deux \mathbb{k} -espaces à dualité de Poincaré de

2.3 L'application de Gysin pour un espace de Gorenstein.

dimensions respectives d, d' . Les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(X') & \xrightarrow{H^*(f)} & H^i(X) & & H_i(X) & \xrightarrow{H_*(f)} & H_i(X') \\
 D_{X'}^{-1} \downarrow \cong & & \cong \downarrow D_X^{-1} & & D_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow D_{X'} \\
 H_{d'-i}(X') & \xrightarrow{f_!} & H_{d-i}(X) & & H^{d-i}(X) & \xrightarrow{f^!} & H^{d'-i}(X')
 \end{array}$$

définissent l'application de Gysin en homologie $f_!$ et en cohomologie $f^!$ de l'application f . Si nous désignons par $(\)^\#$ la dualité linéaire degré par degré nous obtenons la relation

$$(f_!)^\# = f^!.$$

Soit X un k -espace à dualité de Poincaré de dimension d . Notons $\mathbb{H}_*(X)$ l'homologie dé-suspendue définie par $\mathbb{H}_i(X) := H_{d+i}(X)$. Lorsque $f = \Delta : X \rightarrow X \times X = X'$ désigne la diagonale, les applications

$$H_i(X) \otimes H_j(X) \xrightarrow{\Delta_!} H_{i+j-d}(X), \quad a \otimes b \mapsto a \bullet b := D_X^{-1}(D_X(a) \cup D_X(b))$$

définissent un produit

$$\mathbb{H}_*(X) \otimes \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X), \quad a \otimes b \mapsto a \bullet b$$

appelé le *produit d'intersection*. Il résulte des propriétés du cup produit que $\mathbb{H}_*(X)$ est une algèbre graduée commutative.

Il est important de préciser ici que, contrairement au cup produit, le produit d'intersection ne provient pas d'un produit défini globalement sur les chaînes singulières. Il a été défini par Lefschetz, bien avant le cup produit, à l'aide des *chaînes simpliciales transverses*. L'exemple suivant illustre cette construction.

Exemple 2.3.1. Les sous-variétés C et T d'une variété X de dimension 3 dessinées ci-dessous, une fois triangulées, représentent deux chaînes simpliciales transverses.

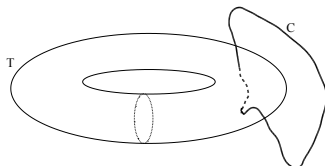


Figure 3

Fixons les classes d'orientation $[C] \in H_1(C) \cong \mathbb{Z}$ et $[T] \in H_2(T) \cong \mathbb{Z}$ et considérons les inclusions

$$C \xrightarrow{i_C} X \xleftarrow{i_T} T$$

Posons $a = H_1(i_C)([C]) \in H_1(X)$ et $a' = H_2(i_T)([T]) \in H_2(X)$ alors $a \bullet a' \in H_0(X)$ est la classe représentée par la sous-variété canoniquement orientée réduite aux deux points $C \cap T$.

2.3.2 Le cas des espaces de Gorenstein.

Application de Gysin d'une application continue. Etant donné une application continue $f : (Y, *) \rightarrow (X, *)$ entre deux espaces 1-connexes pointés, alors $C^*(Y)$ est un $C^*(X)$ -module via $C^*(f)$. Par définition, une *application de Gysin* pour f est un élément

$$f^! \in \text{Ext}_{C^*(X)}(\mathbb{k}, C^*(Y)) ,$$

cette classe, si elle existe, est représentée par un cocycle

$$f^! : P_X \rightarrow C^*(Y)$$

où désigne P_X désigne une résolution semi-libre de $\mathbb{k} = C^*(*)$ en tant que $C^*(X)$ -module.

Le résultat suivant établit l'existence d'une application de Gysin pour le produit des diagonales d'un espace de Gorenstein.

Théorème 2.3.2. [30] *Soit X un \mathbb{k} -espace de Gorenstein de dimension d . Notons Δ_s l'application diagonale $X \rightarrow X^{\times s}$, $x \mapsto (x, \dots, x)$. Pour chaque décomposition $k = k_1 + \dots + k_r$ le produit des diagonales*

$$\Delta_{k_1, \dots, k_r} := \Delta_{k_1} \times \dots \times \Delta_{k_r} : X^{\times r} \rightarrow X^{\times k_1} \times \dots \times X^{\times k_r} = X^{\times k} , \quad r < k ,$$

admet une application de Gysin en cohomologie, de degré $d(k-r) \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta_{k_1, \dots, k_r}^! : H^*(X^{\times r}) \rightarrow H^{*+d(k-r)}(X^{\times k}) .$$

Il résulte des propriétés d'unicité à une constante multiplicative près que :

Si la fibre homotopique $F \simeq \Omega(X, x_0)^{\times k-r}$ de Δ_{k_1, \dots, k_r} est un \mathbb{k} -espace à dualité de Poincaré alors $\Delta_{k_1, \dots, k_r}^!$ est, après normalisation, l'intégration le long de la fibre

$$\int_F^* : H^*(X^{\times r}) \longrightarrow H^{*+d(k-r)}(X^{\times k}) ,$$

définie usuellement, à l'aide de la suite spectrale de Serre.

2.4 Définition $r_{in}!$ pour les espaces de Gorenstein.

Le théorème suivant permet de relever de manière unique une application de Gysin. Par abus, nous notons de la même manière le relevé d'une application de Gysin et une application de Gysin. Les propriétés d'unicité permettent d'éviter les confusions. Dans le cas différentiable le relevé d'une application de Gysin a été défini, [20] et [16], à l'aide de la technologie de Thom-Pontryagin étendue en dimension infinie. C'est un cas particulier de notre définition.

Théorème 2.3.3. [30] Soit le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \text{où } \begin{cases} B \text{ est 1-connexe} \\ \pi \text{ est une fibration} \\ \dim H^i(E) < \infty \text{ pour tout } i \geq 0 \end{cases} .$$

Si f admet une application de Gysin $f^! : H^*(B') \rightarrow H^{*+d}(B)$ alors il existe une **unique** application $H^*(E)$ -linéaire, $g^!$, telle que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^*(E') & \xrightarrow{g^!} & H^{*+d}(E) \\ H^*(\pi') \uparrow & & \uparrow H^*(\pi) \\ H^*(B') & \xrightarrow{f^!} & H^{*+d}(B) \end{array} .$$

Remarquons que si $f : X \rightarrow X'$ est une application entre deux k -espaces à dualité de Poincaré de dimensions respectives d, d' alors l'application de Gysin de degré $d' - d$ est égale, après normalisation, avec celle définie dans la section 1.

2.4 Définition $r_{in}!$ pour les espaces de Gorenstein.

Rappelons le 2-cobordisme orienté de l'introduction :

$$\coprod_{i=1}^p S_i^1 \xrightarrow{in} F_{g,p+q} \xleftarrow{out} \coprod_{j=1}^q S_j^1 .$$

Pour tout espace topologique X connexe, nous obtenons

$$\begin{array}{ccc} \text{map}(\coprod_{i=1}^p (S_i^1, X)) & \xleftarrow{r_{in}} & \text{map}(F_{g,p+q}, X) & \xrightarrow{r_{out}} & \text{map}(\coprod_{j=1}^q (S_j^1, X)) \\ \parallel & & & & \parallel \\ (LX)^{\times p} & & & & (LX)^{\times q} \end{array}$$

avec r_{in} et r_{out} désignant les restrictions définies par : $r_{in}(f) = f \circ in$ et $r_{out}(f) = f \circ out$. Les injections in et out sont supposées des cofibrations. Par suite r_{in} et r_{out} sont des fibrations.

Nous allons montrer que r_{in} peut être considéré comme une fibration image réciproque. Pour cela nous utilisons la notion de diagramme de corde associé à un 2-cobordisme comme défini dans [22].

Il s'agit d'un graphe particulier qui est un rétract par déformation d'un 2-cobordisme orienté et qui décrit la combinatoire de cette surface. Un diagramme de cordes est constitué de

r arbres T_1, \dots, T_r ,

k extrémités des arbres e_1, \dots, e_k situés sur les p cercles entrant du 2-cobordisme. Par exemple, la surface de type $(2, 3 + 2)$

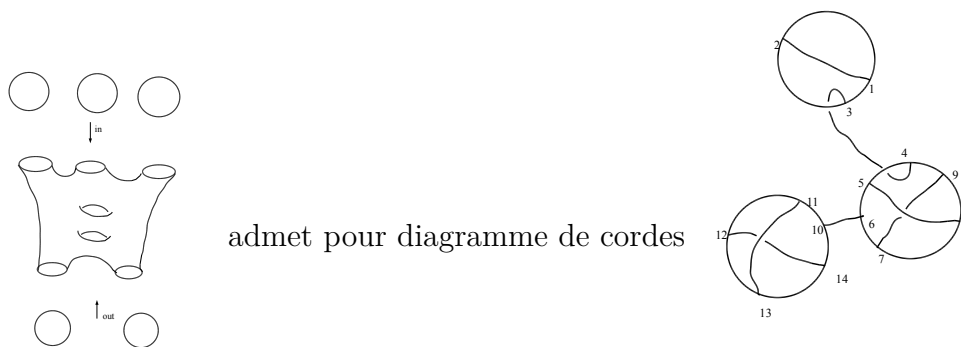


Figure 4

En particulier, pour étudier le produit et le coproduit de Sullivan nous avons la situation décrite ci-dessous.

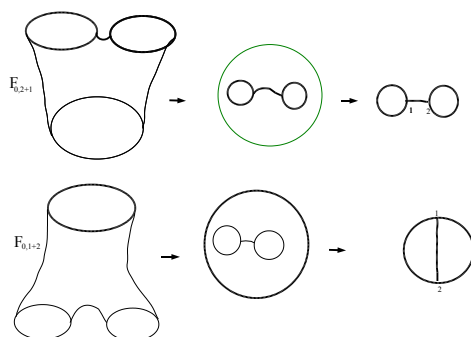


Figure 5.

2.4 Définition $r_{in}!$ pour les espaces de Gorenstein.

Dans le cas général considérons deux partitions de l'ensemble des sommets $\{e_1, \dots, e_k\}$:

$$\begin{cases} \{e_1, \dots, e_k\} = \coprod_{i=1}^r K_i = \coprod_{j=1}^p L_j \\ \text{card } K_i = k_i \geq 2, \quad \text{card } L_j = l_j \\ e_s \in K_i \iff e_s \text{ est l'extrémité d'un arbre } T_i \\ e_s \in L_j \iff e_s \in \text{in}(S_j^1) \end{cases}$$

Par exemple pour le diagramme de corde de la figure 4 $r = 7, k = 14, L_1 = \{e_1, e_2, e_3\}, L_2 = \{e_4, \dots, e_9\}, L_3 = \{e_{10}, \dots, e_{14}\}, K_1 = \{e_1, e_2\}, K_2 = \{e_3, e_4\}, K_3 = \{e_5, e_8\}, K_4 = \{e_7, e_9\}, K_5 = \{e_6, e_{10}\}, K_6 = \{e_{11}, e_{13}\}, K_7 = \{e_{12}, e_{14}\}$.

Dans le cas général, nous obtenons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{map}(F_{g,p+q}, X) & \xrightarrow{r_{in}} & \text{map}\left(\prod_{j=1}^p S_j^1, X\right) & (2.1) \\ \text{map}(\subset, X) \downarrow \simeq & & \parallel & \\ \text{map}(C, X) & & (LX)^{\times p} & \\ \text{map}(\subset, X) \downarrow & & \downarrow \text{ev}_{L_1} \times \dots \times \text{ev}_{L_p} & \\ \text{map}\left(\prod_{i=1}^r T_i, X\right) = \prod_{i=1}^r \text{map}(T_i, X) & \xrightarrow{\text{ev}_{K_1} \times \dots \times \text{ev}_{K_r}} & X^{\times k} & \\ \text{map}(\subset, X) \downarrow \simeq & \nearrow \Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)} & & \\ \text{map}\left(\prod_{i=1}^r \{e_i\}, X\right) = X^{\times r} & & & \end{array}$$

où

1. les applications verticales de gauche sont induites par les inclusions.
2. si $E = \{e_1, \dots, e_s\}$ alors ev_E désigne l'application d'évaluation $f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_s))$.
3. Δ_s désigne l'application diagonale $X \rightarrow X^{\times s}, \quad x \mapsto (x, \dots, x)$
4. le rectangle est un pullback.
5. le triangle est commutatif à homotopie près.

La définition de $r_{in}!$ résulte alors du théorème 2.3.3.

CHAPITRE 3

Rappels sur les modèles de Sullivan.

Dans ce chapitre k désigne un corps de caractéristique 0.

La théorie des modèles de Sullivan a été introduite dans [59]. Un exposé complet des fondements de cette théorie est contenu dans les chapitres 1 à 17 du livre de Félix-Halperin-Thomas [26]. Cependant pour la commodité de la lecture nous faisons quelques rappels nécessaires à la compréhension de notre description des opérations de la topologie des cordes.

3.1 Compléments sur les algèbres graduées commutatives.

Précisons qu'une *algèbre graduée commutative* est une algèbre graduée A qui vérifie

$$aa' = (-1)^{|a||a'|} a'a, \quad a \in A.$$

Soient $V := \{V^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ un espace vectoriel gradué et $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

Un mot $v_{\alpha_1} v_{\alpha_2} \cdots v_{\alpha_k}$ est un monôme gradué commutatif si pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$

$$v_{\alpha_{\sigma 1}} v_{\alpha_{\sigma 2}} \cdots v_{\alpha_{\sigma k}} = (-1)^\sigma v_{\alpha_1} v_{\alpha_2} \cdots v_{\alpha_k}$$

où $(-1)^\sigma$ désigne la signature graduée obtenue à l'aide d'une décomposition de σ en un produit de transpositions. Par exemple, $xyz = (-1)^{|z||y|+|z||x|} zyx$. En particulier, tout monôme gradué commutatif $v_{\alpha_1} v_{\alpha_2} \cdots v_{\alpha_k}$ est nul si $v_{\alpha_i} = v_{\alpha_j}$ pour $i \neq j$ et $|v_{\alpha_i}|$ est impair. Si l'on ordonne \mathcal{A} tout monôme gradué commutatif s'écrit de manière unique sous la forme

$$v_{\alpha_1}^{n_1} v_{\alpha_2}^{n_2} \cdots v_{\alpha_k}^{n_k}, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k \tag{3.1}$$

3.1 Compléments sur les algèbres graduées commutatives.

avec $n_i = 1$ si $|v_{\alpha_i}|$ est impair. La somme $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ est appelée la longueur du monôme.

Si $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ constitue une base de V alors les monômes de longueur n constituent une base de l'espace vectoriel gradué noté

$$\wedge^n V \text{ ou } \wedge^n (v_\alpha).$$

$(\wedge^n V)^i$ désigne l'espace vectoriel (non gradué) dont la base est constituée par les monômes de la forme (1) tel que $i = n_1 |v_{\alpha_1}| + n_2 |v_{\alpha_2}| + \dots + n_k |v_{\alpha_k}|$.

Par convention on pose $\wedge^0 V = \mathbb{k}$.

La somme directe des espaces vectoriels gradués $\wedge V := \bigoplus_{n \geq 0} \wedge^n V$ est une algèbre graduée commutative pour la multiplication naturelle des monômes.

Exemple 3.1.1. *En tant qu'espace vectoriel gradué,*

$$\wedge x = \begin{cases} \mathbb{k} \oplus x\mathbb{k} & \text{si } |x| \text{ est impair} \\ \mathbb{k} \oplus x\mathbb{k} \oplus x^2\mathbb{k} \oplus \dots \oplus x^n\mathbb{k} \oplus \dots & \text{si } |x| \text{ est pair} \end{cases}$$

Proposition 3.1.2. *Soit $V = \{V^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ un espace vectoriel gradué et A une algèbre graduée commutative. Si $f : V \rightarrow A$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels gradués alors il existe un unique homomorphisme d'algèbres graduées $\hat{f} : \wedge V \rightarrow A$ qui prolonge f*

DÉMONSTRATION. On fait une récurrence sur la longueur des monômes. On pose $\hat{f}(1_{\mathbb{k}}) = 1_A$ et $\hat{f}(v) = f(v)$ pour tout $v \in V = \wedge^1 V$. Ceci définit de manière unique un prolongement de f à $\wedge^{\leq 1} V = \mathbb{k} \oplus V$. Si on suppose \hat{f} défini sur $\wedge^{\leq n} V := \mathbb{k} \oplus V \oplus \dots \oplus \wedge^n V$ et prolongeant f alors on prolonge \hat{f} à $\wedge^{\leq n+1} V \cong \wedge^{\leq n} V \otimes V$ en posant $\hat{f}(\phi v) = \hat{f}(\phi)f(v)$ pour tout $\phi \in \wedge^{\leq n} V$ et tout $v \in V$. Les vérifications restantes sont aussi immédiates. □

Exemple 3.1.3. *Les inclusions naturelles (resp. les projections naturelles)*

$$V \xrightarrow{i_V} V \oplus W \xleftarrow{i_W} W, \quad V \xleftarrow{p_V} V \oplus W \xrightarrow{p_W} W$$

s'étendent de manière unique en des homomorphismes d'algèbres graduées

$$\wedge V \xrightarrow{\iota_V} \wedge(V \oplus W) \xleftarrow{\iota_W} \wedge W, \quad \wedge V \xleftarrow{\pi_V} \wedge(V \oplus W) \xrightarrow{\pi_W} \wedge W.$$

Les homomorphismes d'algèbres graduées

$$\begin{aligned} (\wedge V) \otimes (\wedge W) &\rightarrow \wedge(V \oplus W) & x \otimes y &\mapsto \iota_V(x)\iota_W(y) \\ \wedge(V \oplus W) &\rightarrow (\wedge V) \otimes (\wedge W) & z &\mapsto \pi_V(z) \otimes \pi_W(z) \end{aligned}$$

sont inverses l'un de l'autre.

3.2 Algèbres de cochaînes et algèbres de Sullivan.

3.2.1 Algèbres de cochaînes

- Une différentielle sur l'espace vectoriel gradué $\{E^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est une application linéaire de degré 1 telle que $d \circ d = 0$
- Une dérivation de degré n sur une algèbre graduée A est une application linéaire $\theta : A \rightarrow A$ de degré n tel que

$$\theta(ab) = \theta(a)b + (-1)^{n|a|}a\theta(b)$$

pour tous $a, b \in A$.

- Une algèbre différentielle graduée (resp. commutative), (A, d_A) , en abrégé une a.d.g. (resp. une a.d.g.c.) est une algèbre graduée (resp. commutative) A munie d'une différentielle qui est une dérivation.
- Un homomorphisme d'a.d.g. $\varphi : (A, d_A) \rightarrow (A', d_{A'})$ est un homomorphisme d'algèbres graduées tel que $\varphi \circ d_A = d_{A'} \circ \varphi$. Les a.d.g (resp les a.d.g.c.) et leurs homomorphismes constituent une catégorie.
- Une a.d.g.c. concentrée en degré ≥ 0 est appelée une algèbre de cochaînes commutative. Elles constituent des catégories notées CochCom.
- L'homologie d'une algèbre de cochaînes commutative (A, d_A) est par définition l'homologie du complexe

$$\{0\} \xrightarrow{d} A^0 \xrightarrow{d} A^1 \cdots \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^{i-1} \xrightarrow{d} A^i \xrightarrow{d} A^{i+1} \cdots \xrightarrow{d} \cdots$$

C'est une algèbre graduée commutative, notée $H(A, d_A)$, pour le produit induit par celui de l'a.d.g.c. .

$$H : \text{Coch} \rightarrow \text{AlgGr} \text{ et } H : \text{CochCom} \rightarrow \text{AlgGrCom}$$

sont deux foncteurs.

3.2 Algèbres de cochaînes et algèbres de Sullivan.

Exemple 3.2.1. Soient (A, d_A) et (B, d_B) deux a.d.g. (resp. deux a.d.g.c.-) leur produit tensoriel $(A, d_A) \otimes (B, d_B)$ est une a.d.g. (resp. une a.d.g.c.) notée $(A \otimes B, d_{A \otimes B})$ telle que les injections

$$(A, d_A) \xrightarrow{i_A} (A \otimes B, d_{A \otimes B}) \xleftarrow{i_B} (B, d_B)$$

sont des homomorphismes d'a.d.g. . De plus, l'isomorphisme d'a.d.g.

$$(A, d_A) \otimes (B, d_B) \longrightarrow (A \otimes B, d_{A \otimes B}), \quad a \otimes b \mapsto i_A(a)i_B(b)$$

induit l'isomorphisme canonique $H(A, d_A) \otimes H(B, d_B) \cong H(A \otimes B, d_{A \otimes B})$.

Exemple 3.2.2. Pour chaque $n \geq 0$ notons

$$P\Omega_{n+1} = \wedge(t_0, t_1, \dots, t_n, dt_0, dt_1, \dots, dt_n), \quad |t_i| = 0, |dt_j| = 1.$$

Un élément ω de $P\Omega_{n+1}^k$ est une forme différentielle de degré k à coefficients polynomiaux i.e

$$\omega = \sum_{i_j=0,1, \sum_j i_j=k} P_{i_1, \dots, i_n} (dt_0)^{i_0} (dt_1)^{i_1} \dots (dt_n)^{i_n},$$

où chaque $P_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{k}[t_0, t_1, \dots, t_n]$.

La projection

$$P\Omega_{n+1} \rightarrow \overline{P\Omega}_n = \frac{\mathbb{k}[t_0, \dots, t_n] \otimes \wedge(dt_0, \dots, dt_n)}{\sum t_i = 1, \sum dt_i = 0}, \quad \omega \mapsto \bar{\omega}$$

permet de définir sur $\overline{P\Omega}_n$ une structure d'algèbre de cochaînes commutative.

$P\Omega_{n+1}$ est une sous a.d.g. de l'algèbre des formes différentielles, Ω_{n+1} définie sur \mathbb{R}^{n+1} tandis que $\overline{P\Omega}_n$ s'identifie à une sous-a.d.g. de l'algèbre des formes différentielles sur l'hyperplan affine de \mathbb{R}^{n+1} d'équation $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$.

En particulier, si $\bar{\omega} \in \overline{P\Omega}_n^k$ alors $\bar{\omega} = 0$ si $k > n$.

Exemple 3.2.3. Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, les formes différentielles sur une variété différentiable M constituent une algèbre de cochaînes commutative, notée $\Omega_{DR}(M)$ dont l'homologie est la cohomologie de de Rham de la variété M .

Proposition 3.2.4. Soit $V = \{V^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ un espace vectoriel gradué. Si $f : V \rightarrow \wedge V$ est une application linéaire de degré n alors il existe une unique dérivation θ_f sur $\wedge V$ qui prolonge f

DÉMONSTRATION. On fait une récurrence sur la longueur des monômes comme dans la démonstration de la Proposition 1.5.

□

D'après la proposition précédente, une algèbre de cochaînes commutative $(\wedge V, d)$ est entièrement déterminée par l'espace vectoriel gradué $V = \{V^i\}_{i \geq 0}$ et une application linéaire $d : V \rightarrow \wedge V = \sum_{n \geq 0} \wedge^n V$. Remarquons que

$$d = d_1 \oplus d_2 \oplus \dots$$

où $d_n(V) \subset \wedge^n V$.

Si $d_i = 0$ pour $i < n$, la relation $d \circ d = 0$ entraîne que $(\wedge V, d_n)$ est une algèbre de cochaînes commutative.

- Si d_1 est nulle on dit que $(\wedge V, d_n)$ est une *algèbre minimale*.
- Si d_i est nulle sauf pour $i = 2$ on dit que $(\wedge V, d_n)$ est une *algèbre quadratique*.

Clairement toute algèbre quadratique est minimale.

Exemple 3.2.5. Si V est concentré en degré 1 (i.e. $V = V^1$) alors toute différentielle d vérifie $d(V) \subset (\wedge V)^2 = \wedge^2 V$. i.e $\wedge V$ est quadratique et en particulier minimale.

Exemple 3.2.6. Le produit tensoriel de deux algèbres de cochaînes commutatives $(\wedge V, d')$ et $(\wedge W, d'')$ est isomorphe à l'algèbre $(\wedge(V \oplus W), d)$ (C.f. Exemple 2.1).

Exemple 3.2.7. L'algèbre de cochaînes commutative $(\wedge(u, v), d)$ définie par $du = 0$ et $dv = u$ est acyclique i.e $H(\wedge(u, v), d) = \mathbb{k}$. Elle n'est pas minimale.

3.2.2 Algèbres de Sullivan.

Définition 3.2.8. • Une algèbre de cochaîne commutative $(\wedge V, d)$ est une algèbre de Sullivan si

(i) $V = \{V^i\}_{i \geq 1}$

(ii) il existe une suite de sous-espace vectoriels gradués $V(0) \subset V(1) \subset \dots \subset V(p) \subset \dots$ telle que

a) $V = \bigcup_{p \geq 0} V(p)$,

b) $dV(0) = \{0\}$

c) pour $p \geq 0$ et tout pour tout $i \geq 1$

$$dV^i(p+1) \subset \wedge(V^{<i} + V(p)). \tag{3.2}$$

3.2 Algèbres de cochaînes et algèbres de Sullivan.

La condition (3.2) signifie que la différentielle d'un générateur de degré i et de filtration $p + 1$ ne s'exprime qu'à l'aide de générateurs de degrés $< i$ ou de filtration $< p + 1$. Elle est équivalente à

$$dV^i(p + 1) \subset \left(\wedge \left(V^{<i} \oplus V^i(p) \oplus V^{i+1}(p) \right) \right)^{i+1}.$$

Par suite l'algèbre de Sullivan $(\wedge V, d)$ est minimale ssi

$$dV^i(p + 1) \subset \left(\wedge^{\geq 2} \left(V^{<i} \oplus V^i(p) \right) \right)^{i+1}. \quad (3.3)$$

Proposition 3.2.9. $(\wedge V, d)$ est une algèbre de Sullivan ssi $V^{\leq 0} = \{0\}$ et s'il existe une filtration

$$F(0) = \{0\} \subset F(1) \cdots \subset F(r) \subset \cdots \subset \bigcup_{r \geq 1} F(r) = V$$

telle que :

$$dF(r + 1) \subset \wedge F(r), \quad r \geq 0. \quad (3.4)$$

DÉMONSTRATION.

a) (3) \implies (2). (On pose $Z(r) = F(r + 1)$ pour $r \geq 0$).

b) Supposons que $V^0 = 0$ et montrons que (2) \implies (3). Posons $F(0) = 0$ et pour $r \geq 1$

$$F(r) := \{v \in V \mid dv \in \wedge F(r - 1)\} \text{ et } F = \bigcup_{r \geq 0} F(r).$$

Montrons que $F = V$. Pour cela fixons un $r \geq 0$ et un $n \geq 0$ et supposons qu'il existe r' tel que

$$(\mathcal{H}(n, r)) \quad V^{<n} \subset F^{<n}(r') \text{ et } V(r) \subset F(r')$$

La condition (2) entraîne que

$$dV^n(r + 1) \subset \wedge F(r')$$

ce qui entraîne, par définition de la filtration $F(r)$, que $V^n(r + 1) \subset F^n(r' + 1)$. L'hypothèse $(\mathcal{H}(n, 0))$ étant vérifiée pour tout n , une récurrence sur $r \geq 0$ montre que $V^n \subset F^n$. Cette dernière relation étant vérifiée pour $n = 0$, une récurrence sur $n \geq 0$ montre que $V \subset F$ d'où l'égalité requise.

□

Exemple 3.2.10. La seule structure d'a.d.g.c. définie sur $\wedge x$ avec $|x| \geq 1$ est l'algèbre de cochaînes commutative $(\wedge x, 0)$. C'est une algèbre de Sullivan minimale. ($V(0) = \mathbb{k}x = V(1) = \dots$) Son homologie $H(\wedge x, 0) = \wedge x$ est isomorphe, en tant qu'algèbre graduée commutative à $H^*(S^n; \mathbb{k})$. Remarquer que si n est impair $H^*(S^n; \mathbb{k}) = H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k})$.

Exemple 3.2.11. Soit $(\wedge(x, y, z), d)$ avec $|x| = |y| = |z| = 1$ l'algèbre de cochaînes commutative définie par

$$dx = \alpha yz, dy = \beta xz, dz = \gamma xy, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}.$$

Si $\alpha = 0$ alors $(\wedge(x, y, z), d)$ est une algèbre de Sullivan quadratique. ($V(0) = \mathbb{k}x, V(1) = V(0) \oplus \mathbb{k}y \oplus \mathbb{k}z = V(1) = \dots$).

Si $\alpha\beta\gamma \neq 0$ alors $(\wedge(x, y, z), d)$ est une algèbre quadratique qui n'est pas une algèbre de Sullivan.

Théorème 3.2.12. (Lemme de relèvement stricte) Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & (A, d_A) \\ & & \downarrow \pi \\ (\wedge V, d) & \xrightarrow{\varphi} & (B, d_B) \end{array}$$

où (A, d_A) et (B, d_B) sont des algèbres de cochaînes commutatives, $(\wedge V, d)$ une algèbre de Sullivan, φ et π des homomorphismes d'a.d.g.c.

Si π est surjectif et $H(\pi)$ un isomorphisme alors il existe un homomorphisme d'a.d.g. ψ tel que $\pi \circ \psi = \varphi$.

Dans la démonstration de ce théorème nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 3.2.13. Soit $\pi : (A, d_A) \rightarrow (B, d_B)$ un homomorphisme d'a.d.g. tel que π est surjectif et $H(\pi)$ un isomorphisme alors l'homomorphisme π se restreint en un homomorphisme surjectif

$$\pi : \ker d_A \rightarrow \ker d_B.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soit $b \in \ker d_B$. Puisque $H(\pi)$ est surjectif, il existe $a \in \ker d_A$ tel que $H(\pi)([a]) = [b]$. Ceci entraîne que $\pi(a) = b + d_B(b')$. Puisque π est surjectif, $b' = \pi(a')$ pour un $a' \in A$ et donc $\pi(a - d_A a') = b$.

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit $(V(p))_{p \geq 0}$ une filtration définissant la structure d'algèbre de Sullivan de $(\wedge V, d)$ telle que dans la Proposition 3.2.9. Nous construisons ψ

3.2 Algèbres de cochaînes et algèbres de Sullivan.

par récurrence sur p .

a) Si $v \in V(0)$ alors $dv = 0$ d'où $d_B(\varphi(v)) = \varphi(dv) = 0$. D'après le lemme précédent, il existe un cocycle $a \in A$ tel que $\pi(a) = \varphi(v)$. On pose $\psi(v) = a$. En appliquant cette construction à une base $(v_\alpha)_\alpha$ de V_0 on définit un homomorphisme d'a.d.g. $\psi_0 : (\wedge V_0, 0) \rightarrow (A, d_A)$ tel que $\pi \circ \psi_0 = \varphi|_{\wedge V_0}$.

b) La restriction de d à $\wedge V(p)$, fait de $(\wedge V(p), d)$ une algèbre de cochaînes commutative. Supposons avoir construit un homomorphisme d'a.d.g. $\psi_p : (\wedge V(p), d) \rightarrow (A, d_A)$ tel que $\pi \circ \varphi_p = \psi|_{\wedge V(p)}$.

Posons $V(p+1) = V(p) \oplus V_{p+1}$ et considérons $x \in V_{p+1}$ alors

$$dx \in \wedge V(p), \quad d_B(\varphi(dx)) = \varphi(d \circ dx) = 0 \text{ et } \pi(\psi_p(dx)) = \varphi(dx) = d_B(\varphi(x)).$$

D'autre part, puisque π est surjectif il existe $a \in A$ tel que $\pi(a) = \varphi(x)$. Alors,

$$\pi(d_A a) = d_B(\pi(a)) = d_B(\varphi(x)) = \pi(\psi_p(dx)),$$

et donc

$$d_A a - \psi_p(dx) \in \ker \pi \cap \ker d_A.$$

Puisque $H(\pi)$ est un isomorphisme $\ker \pi$ est acyclique. Il existe donc $a' \in \ker \pi$ tel que $d_A a' = d_A a - \psi_p(dx)$. Posons $\psi_{p+1}(x) = a - a'$ alors

$$\pi \circ \psi_{p+1}(x) = \pi(a - a') = \pi(a) = \varphi(x) \text{ et } d_A \circ \psi_{p+1}(x) = d_A(a - a') = \psi_p(dx) = \psi_{p+1} \circ d(x).$$

Comme précédemment, en appliquant cette construction à une base $(v_\alpha)_\alpha$ de V_{p+1} on prolonge ψ_p en un homomorphisme d'a.d.g. $\psi_{p+1} : \wedge V(p+1) \rightarrow A$ tel que $\pi \circ \psi_{p+1} = \varphi|_{\wedge V(p+1)}$.

c) Le principe de récurrence termine la démonstration. □

Remarque Le lemme de relèvement s'exprime de manière plus formelle :

Les algèbres de Sullivan sont des objets cofibrants dans la catégorie $\underline{CochCom}$ munie de la structure de catégorie modèle dont les fibrations sont les surjections et les équivalences faibles sont les homomorphismes d'a.d.g. qui induisent des isomorphismes en homologie.

D'un point de vue moins formel les algèbres minimales sont aux algèbres de cochaînes commutatives ce que sont aux espaces topologiques les CW complexes. Cette analogie se précisera dans la suite.

3.2.3 Algèbres de Sullivan relatives.

Définition 3.2.14. Une algèbre de Sullivan relative est une algèbre de cochaînes de la forme

$$(B \otimes \wedge V, d)$$

où

1. (B, d) est sous-algèbre différentielle graduée de $(B \otimes \wedge V, d)$ avec $H^0(B, d) = \mathbb{k}$,
2. $V = \{V^i\}_{i \geq 2}$
3. V est la réunion croissante des sous-espaces $0 = V(0) \subset \dots \subset V(r) \subset \dots$ tels que

$$d : 1 \otimes V^p(r) \rightarrow B \otimes (\wedge(V(r-1)))^{p+1}, \quad r \geq 1. \quad (3.5)$$

En particulier, si $(B, d) = (\mathbb{k}, 0)$ alors nous retrouvons la définition d'une algèbre de Sullivan.

Si $B^0 = 0$ nous avons la suite

$$(B, d) \xrightarrow{\iota} (B \otimes \wedge V, d) \xrightarrow{\rho} (\wedge V, \bar{d}) \quad (3.6)$$

où l'algèbre quotient $(\wedge V, \bar{d})$ est une algèbre de Sullivan. Lorsqu'elle est minimale nous dirons que l'algèbre de Sullivan relative est minimale.

Théorème 3.2.15. [26, Theorem 14.12] Soit $\varphi : (B, d) \rightarrow (A, d)$ un homomorphisme d'algèbres de cochaînes commutatives tel que

(i) $H^0(A) = \mathbb{k} = H^0(B)$

(ii) $H^1(\varphi)$ est injective

alors il existe une algèbre de Sullivan relative minimale $(B \otimes \wedge V, d)$ et un quasi-isomorphisme $(B \otimes \wedge V, d) \xrightarrow{m} (A, d)$ tel que $m \circ \iota = \varphi$.

De plus si $(B \otimes \wedge V, d) \xrightarrow{m'} (A, d)$ désigne un autre quasi-isomorphisme tel que $m \circ \iota = \varphi$ alors il existe un isomorphisme $(B \otimes \wedge V, d) \xrightarrow{\alpha} (B \otimes \wedge V, d)$ qui se restreint en l'identité de B et tel que $m' \circ \alpha$ est homotope à m relativement à B .

Définition 3.2.16. Le quasi-isomorphisme $(B \otimes \wedge V, d) \xrightarrow{m} (A, d)$ ou par abus $(B \otimes \wedge V, d)$ est appelé le modèle de Sullivan relatif de φ .

Dans le cas absolu, le quasi-isomorphisme $(\wedge V, d) \xrightarrow{m} (A, d)$ ou par abus $(\wedge V, d)$ est appelé le modèle de Sullivan relatif de A

La seconde partie du théorème montre que le modèle minimal (absolu ou relatif) est unique à isomorphisme près.

3.3 Foncteur des formes de Sullivan.

La propriété des algèbres de Sullivan relatives, qui est très importante pour nous dans la suite est qu'elles fournissent des résolutions semi-libres (Cf §2.1)

Théorème 3.2.17. [26, Lemma 14.1] *Pour tout algèbre de Sullivan relative $(B \otimes \wedge V, d)$ alors le B -module différentiel gradué $(B \otimes \wedge V, d)$ est semi-libre.*

3.3 Foncteur des formes de Sullivan.

L'exemple des formes différentielles sur une variété se généralise simultanément dans deux directions :

- a) pour tout corps \mathbb{k} de caractéristique nulle
- b) pour tout espace topologique X .

L'idée de cette construction vient de l'interprétation suivante d'une forme différentielle sur une variété M de dimension n :

- $\omega \in \Omega_{DR}^k(M)$ est la donnée d'une famille de formes différentielles, $\{\omega_{U_\alpha}\}_\alpha$ où

1. $\omega_{U_\alpha} \in \Omega_n$,
2. $U_\alpha \rightarrow M$ est une carte de M
3. $\omega_{U_\alpha} = \varphi_{U_\alpha, U_\beta}^* \omega_{U_\beta}$ pour tout changement de cartes $\varphi_{U_\alpha, U_\beta}$.

On procède de la manière suivante :

1. Les cartes sont remplacées par les simplexes singuliers

$$\sigma : \Delta^n \rightarrow X, \quad n \geq 0$$

où $\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \in [0, 1] \text{ et } t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1\}$.

2. A chaque simplexe singulier σ est associé $\bar{\omega}_\sigma \in \underline{P}\Omega_n$ (C.f. Exemple 3.2.2).
3. Les conditions de recollement des cartes sont remplacées par les relations simpliciales définies ci-dessous.

- Un *objet simplicial* E_\bullet est la donnée d'une suite $(E_i)_{i \geq 0}$ d'objets d'une catégorie $\underline{\mathcal{C}}$ et pour chaque $i \geq 0$ de deux morphismes de $\underline{\mathcal{C}}$,

$$E_i \xrightarrow{s_i} E_{i+1} \xrightarrow{d_i} E_i$$

tels que

$$\begin{aligned} d_i \circ d_j &= d_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ s_i \circ s_j &= s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j \end{aligned}, \quad d_i \circ s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ \text{id} & \text{si } i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1 \end{cases}$$

Les objets simpliciaux forment une catégorie notée \underline{sC} dont les morphismes $f \in \underline{sC}(E_\bullet, F_\bullet)$ sont les suites $(f_i)_{i \geq 0}$ où chaque $f_i \in \underline{C}(E_i, F_i)$ vérifie $f_{i+1} \circ s_i = s_i \circ f_i$ et $d_i \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i$.

Exemple 3.3.1. Si X est un espace topologique. Notons

$$\text{Sing}_n(X) = \text{Top}(\Delta^n, X)$$

Notons

$$\begin{aligned} d^i : \Delta^n &\rightarrow \Delta^{n+1}, & (t_0, \dots, t_n) &\mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n) \\ s^i : \Delta^n &\rightarrow \Delta^{n-1}, & (t_0, \dots, t_n) &\mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n) \end{aligned}$$

et

$$d_i \sigma = \sigma \circ d^i \text{ et } s_i \sigma = \sigma \circ s^i.$$

Les applications d_i et s_i définissent l'ensemble simplicial, noté Sing_\bullet .

Exemple 3.3.2. Les applications d^i et s^i définies ci-dessus sont les restrictions d'applications affines définies sur \mathbb{R}^{n+1} qui sont notées de la même manière. Ainsi les homomorphismes d'a.d.g.

$$d_i := (d^i)^* : \overline{P\Omega}_n \rightarrow \overline{P\Omega}_{n-1} \text{ et } s_i := (s^i)^* : \overline{P\Omega}_{n+1} \rightarrow \overline{P\Omega}_n$$

définissent une structure d'algèbre de cochaînes commutative simpliciale sur $\overline{P\Omega}_\bullet$.

Nous posons pour tout $k \geq 0$

$$A_{PL}^k(X) = \underline{sEns}(\text{Sing}_\bullet X, \overline{\Omega}_\bullet^k)$$

Un élément de $A_{PL}^k(X)$ est une application simpliciale

$$\phi : \text{Sing}_\bullet X \rightarrow PL_\bullet, \quad \sigma \mapsto \phi_\sigma$$

c'est-à-dire

3.3 Foncteur des formes de Sullivan.

- a) pour chaque $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, $\phi_\sigma \in PL_n^k$
- b) on a les relations $(d_i\phi)_\sigma = \phi_{d_i\sigma}$ et $(s_i\phi)_\sigma = \phi_{s_i\sigma}$.
- Cette construction permet de définir un foncteur

$$A_{PL} : \underline{Top}^{op} \longrightarrow \underline{CochCom}$$

qui est appelé le *foncteur des formes de Sullivan*. (C.f. [59] ou [26, §10] pour plus de détails.)

Le théorème de de Rham pour les variétés différentiables se généralise de la manière suivante.

Pour tout espace topologique X notons $C^*(X; \mathbb{k})$ le complexe des chaînes singulières normalisé à coefficients dans \mathbb{k} et $H^*(X; \mathbb{k})$ son homologie, appelée la cohomologie singulière de X à coefficients dans \mathbb{k} . Le cup-produit définit sur $C^*(X; \mathbb{k})$ une structure d'algèbre de cochaînes non commutative et une structure d'algèbre graduée commutative sur $H^*(X; \mathbb{k})$ (C.f. [26, Chapter 5]).

Théorème 3.3.3. [26, Corollary 10.10] *Il existe deux homomorphismes d'a.d.g.*

$$C^*(X; \mathbb{k}) \xrightarrow{\varphi_X} A \xleftarrow{\psi_X} A_{PL}(X)$$

tels que $H(\varphi_X)$ et $H(\psi_X)$ sont des isomorphismes d'algèbres graduées.

De plus φ_X et ψ_X sont naturels en X .

Dans ce théorème l'a.d.g. c. intermédiaire A est l'analogue du complexe de Cech-de Rham.

Définition 3.3.4. *Le modèle minimal d'un espace connexe par arcs X est le modèle minimal de $A_{PL}(X)$ au sens de 3.2.16. De même,*

Le modèle minimal relatif d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ est le modèle minimal relatif de $A_{PL}(f) : A_{PL}(Y) \rightarrow A_{PL}(X)$.

Etant donné une fibration

$$F \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y$$

telle $H^0(Y) = \mathbb{k} = H^0(X)$ et $H^1(f)$ est injective alors nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(Y) & \xrightarrow{A_{PL}(f)} & A_{PL}(X) & \xrightarrow{A_{PL}(j)} & A_{PL}(F) \\ \sim \uparrow m_X & & \sim \uparrow m & & \uparrow \bar{m} \\ \mathcal{M}_X & \xrightarrow{\iota} & (\mathcal{M}_X \otimes \wedge V, d) & \xrightarrow{\rho} & (\wedge V, d) \end{array}$$

où

- (i) \mathcal{M}_X désigne un modèle minimal de X
- (ii) la ligne du bas est un modèle relatif de f .

Théorème 3.3.5. [26, Theorem 15.3] *Si Y est simplement connexe et si $\dim H^i(Y) < \infty$ pour tout $i \geq 0$ ou si $\dim H^i(F) < \infty$ pour tout $i \geq 0$ alors \bar{m} est aussi un quasi-isomorphisme.*

Considérons le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & A_{PL}(Y) & \xrightarrow{A_{PL}(g)} & A_{PL}(Y') & (3.7) \\ & \nearrow m_Y \simeq & \downarrow \iota_g & & \nearrow m_{Y'} \simeq & \downarrow A_{PL}(f') \\ \mathcal{M}_Y & \xrightarrow{\quad} & (\mathcal{M}_Y \otimes \wedge W, d) & & & \\ \downarrow \iota_f & \nearrow m_X \simeq & \downarrow A_{PL}(f) & & \downarrow \bar{\iota}_f & \\ (\mathcal{M}_Y \otimes \wedge V, d) & \xrightarrow{\quad} & A_{PL}(X) & \xrightarrow{A_{PL}(g')} & A_{PL}(X') & \\ & \searrow \bar{\iota}_g & \downarrow \bar{\iota}_f & & \nearrow m_{X'} & \\ & & A & & & \end{array}$$

où la face de devant du cube est un diagramme cocartésien. Plus précisément A désigne l'algèbre différentielle graduée

$$A = (\mathcal{M}_Y \otimes \wedge V \otimes \wedge W, d) \cong (\mathcal{M}_Y \otimes \wedge V, d) \otimes_{\wedge V} (\mathcal{M}_Y \otimes \wedge W, d)$$

et les applications $\bar{\iota}_f$, $\bar{\iota}_g$ étant induites par les inclusions naturelles de $(\mathcal{M}_Y \otimes \wedge V)$ et $(\mathcal{M}_Y \otimes \wedge W)$ dans $(\mathcal{M}_Y \otimes \wedge V) \otimes (\mathcal{M}_Y \otimes \wedge W)$.

Théorème 3.3.6. [26, Proposition 15.8] *Si f est une fibration vérifiant les hypothèses du Théorème (3.3.5) alors*

$$(\mathcal{M}_Y \otimes \wedge V, d) \xrightarrow{\bar{\iota}_g} (\mathcal{M}_Y \otimes \wedge V \otimes \wedge W, d)$$

3.3 Foncteur des formes de Sullivan.

est un modèle relatif de la fibration image réciproque de f le long de g .

CHAPITRE 4

Utilisation des modèles minimaux.

Dans ce chapitre k désigne un corps de caractéristique zéro.

Nous développons dans le contexte des modèles de Sullivans quelques applications à la topologie qui sont essentielles pour établir la transcription des opérations en termes de modèles. Comme vu dans le théorème 2.3.2 le principal problème à résoudre est le calcul d'une résolution semi-libre d'un module différentiel gradué. Ce problème sera résolu en construisant des modèles de Sullivan relatifs ad-hoc pour certaines applications diagonales. Nous terminons par le calcul d'un modèle de Sullivan (non minimal) pour un type d'espace de Gorenstein qui n'est ni un espace à dualité de Poincaré ni un espace classifiant d'un groupe de Lie.

4.1 Quelques applications en topologie.

4.1.1 Notations.

- X et Y deux espaces topologiques.
- $Y^{[0,1]}$ espace des chemins $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$.
- Si $y \in Y$ alors $\hat{y} \in Y^{[0,1]}$ désigne le chemin constant en $y : \hat{y}(t) = y$ pour tout $t \in [0, 1]$.
- $ev_{t_1, \dots, t_r} : Y^{[0,1]} \rightarrow Y^{\times r}$, $\gamma \mapsto (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_r))$.
- $P_t(Y, y) = \{\gamma \in Y^{[0,1]}, \gamma(t) = y\}$.
- $\Omega(Y, y) = \{\gamma \in Y^{[0,1]}, \gamma(0) = y = \gamma(1)\}$.
- $L(Y) = \{\gamma \in Y^{[0,1]}, \gamma(0) = \gamma(1)\}$.

On a le pullback

$$\begin{array}{ccc} L(Y) & \hookrightarrow & Y^{[0,1]} \\ ev_0 \downarrow & & \downarrow ev_{0,1} \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & Y^{\times 2} \end{array}$$

où Δ désigne l'application diagonale $y \mapsto (y, y)$ et $ev_{0,1}$ (et donc ev_0) est une fibration.

4.1.2 Fibration associée à une application.

$$f : X \rightarrow Y$$

On a le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X_{f \times_{ev_0}} Y^{[0,1]} & \xrightarrow{pr_1} & X \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow f \\ Y^{[0,1]} & \xrightarrow{ev_0} & Y \end{array}$$

$$X_{f \times_{ev_0}} Y^{[0,1]} = \{(x, \gamma), \gamma(0) = f(x)\}.$$

On obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ell \simeq} & X_{f \times_{ev_0}} Y^{[0,1]} \\ & \searrow f & \swarrow Ev_1 \\ & & Y \end{array} \quad \ell(x) = (x, \widehat{f(x)}), Ev_1(x, \gamma) = \gamma(1).$$

où ℓ est une équivalence d'homotopie et Ev_1 une fibration, appelée *la fibration homotopique associée à f* . Si y est un point fixé de Y alors

$$Ev_1^{-1}(\{y\}) \simeq X_{f \times_{ev_0}} P_1(Y, y)$$

avec $P_1(Y, y) = \{\gamma \in Y^{[0,1]}, \gamma(1) = y\}$. Si Y est connexe par arcs, $F_f := X_{f \times_{ev_0}} P_1(Y, y)$ est appelé *la fibre homotopique de f* .

4.1.3 Fibration associée à la diagonale $\Delta : X \rightarrow X^{\times 2}$.

On a le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X \times_0 (X^{\times 2})^{[0,1]} & \xrightarrow{pr_1} & X \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow \Delta \\ (X^{\times 2})^{[0,1]} = (X^{[0,1]})^{\times 2} & \xrightarrow{ev_0 \times ev_0} & X^{\times 2} \end{array}$$

où

$$X \times_0 (X^{\times 2})^{[0,1]} = \{(x, \gamma, \gamma'), \gamma(0) = x = \gamma'(0)\}$$

De plus on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow[\simeq]{\ell} & X \times_0 (X^{\times 2})^{[0,1]} & \xrightarrow[\cong]{h} & X^{[0,1]} \\
 & \searrow f & \downarrow Ev_1 & \swarrow ev_{0,1} & \\
 & & X^{\times 2} & &
 \end{array}$$

où h désigne l'homéomorphisme : $(\gamma, \gamma') \mapsto \gamma^{-1} * \gamma'$, $\ell(x) = (x, \widehat{x}, \widehat{x})$ et $Ev_1(x, \gamma, \gamma') = (\gamma(1), \gamma'(1))$. Ainsi on peut considérer que $ev_{0,1}$ est la fibration associée à l'application diagonale. Si Y est connexe par arcs la fibre homotopique de Δ est identifiée à $ev_{0,1}^{-1}(\{(x, x)\})$ qui est homéomorphe à $\Omega(X, x)$.

4.1.4 Fibration associée à la diagonale $\Delta_{(k)} : X \rightarrow X^{\times k}$.

Posons $\Delta_{(2)} = \Delta$ et pour $k \geq 2$,

$$\Delta_{(k+1)} := (id_X \times \Delta_{(k)}) \circ \Delta : X \longrightarrow X \times X \longrightarrow X \times X^{\times k} = X^{\times k+1}$$

On a le produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_0 (X^{\times k})^{[0,1]} & \xrightarrow{pr_1} & X \\
 pr_2 \downarrow & & \downarrow \Delta_{(k)} \\
 (X^{\times k})^{[0,1]} = (X^{[0,1]})^{\times k} & \xrightarrow{ev_0^{\times k}} & X^{\times k}
 \end{array}$$

où

$$X \times_0 (X^{\times k})^{[0,1]} = \{(x, \gamma_1, \dots, \gamma_k), x = \gamma_1(0) = \dots = \gamma_k(0)\}$$

De plus on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow[\simeq]{\ell_{(k)}} & X \times_0 (X^{\times k})^{[0,1]} & \xrightarrow[\cong]{h_{(k)}} & X^{[0,1]} \\
 & \searrow f & \downarrow Ev_1 & \swarrow ev_{0, \frac{1}{2^{k-2}}, \dots, \frac{1}{2}, 1} & \\
 & & X^{\times k} & &
 \end{array}$$

où $h_{(k)}$ désigne l'homéomorphisme $(x, \gamma_1, \dots, \gamma_k) \mapsto (\dots(\gamma_1^{-1} * \gamma_2) * \gamma_2^{-1}) * \dots * \gamma_{k-1}^{-1} * \gamma_k$, $\ell_{(k)}(x) = (x, \widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_k)$ et $Ev_1(x, \gamma_1, \dots, \gamma_k) = (\gamma_1(1), \dots, \gamma_k(1))$. Ainsi on peut considérer que $ev_{0, \frac{1}{2^{k-2}}, \dots, \frac{1}{2}, 1}$ est la fibration associée à l'application diagonale $\Delta_{(k)}$. Si Y est connexe

4.2 Représentant de Sullivan d'une application.

par arcs la fibre homotopique de $\Delta_{(k)}$ est identifiée à $ev_{0, \frac{1}{2^{k-2}}, \dots, \frac{1}{2}, 1}^{-1}(\{(x, \dots, x)\})$ qui est homéomorphe à $(\Omega(X, x))^{\times k-1}$.

4.1.5 Fibration associée à un produit d'applications diagonales

$$\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)} : X^r \rightarrow X^{\times k_1 + \dots + k_r}.$$

Posons $k = k_1 + \dots + k_r$, $k_i \geq 1$ (avec la convention $\Delta_{(1)} = id$) alors le produit des diagonales $\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)} : X^{\times r} \rightarrow X^{\times k}$ est bien défini. Il y a $p(k, r)$ produits de diagonales de $X^{\times r} \rightarrow X^{\times k}$ avec $\sum_{k=0}^{\infty} p(k, r) x^k = \frac{x^r}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}$.

Supposons que les $k_i \geq 2$. On vérifie facilement que la fibration associée à $\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)} : X^{\times r} \rightarrow X^{\times k}$ est le produit des fibrations

$$ev_{0, \frac{1}{2^{k_1-2}}, \dots, \frac{1}{2}, 1} \times \dots \times ev_{0, \frac{1}{2^{k_r-2}}, \dots, \frac{1}{2}, 1}$$

et la fibre homotopique est

$$(\Omega(X, x))^{\times k-r}.$$

4.2 Représentant de Sullivan d'une application.

4.2.1 Lemme de relèvement à homotopie près

Considérons le diagramme du Théorème 3.2.12 où le quasi-isomorphisme π n'est plus supposé surjectif. Dans ce cas il existe un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\psi : (\wedge V, d) \rightarrow A,$$

unique à homotopie près, tel que $\pi \circ \psi \simeq \varphi$. (Cf [26, Proposition 12.9]. Ce résultat, appelé le *Lemme de relèvement à homotopie près*, est une conséquence du lemme de relèvement stricte vu au Théorème 3.2.12. Le lecteur est renvoyé à [26, 12-b)] pour la notion d'homotopie entre deux homomorphismes d'adgc.

Considérons maintenant une application continue $X \rightarrow Y$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_Y & & \mathcal{M}_X \\ \simeq \downarrow m_Y & & \simeq \downarrow m_X \\ A_{PL}(Y) & \xrightarrow{A_{PL}(f)} & A_{PL}(X) \end{array}$$

où m_Y (resp. m_X) désigne un modèle de Sullivan de Y (resp. X).

D'après le lemme de relèvement homotopique, il existe un homomorphisme d'adg

$$m_f : \mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X ,$$

unique à homotopie près, tel que $m_X \circ m_f \simeq A_{PL}(f) \circ m_Y$.

Définition 4.2.1. *L'homomorphisme m_f ainsi défini est appelé un représentant de Sullivan de f .*

4.2.2 Cas d'un produit de deux espaces.

- $\rho_X : \mathfrak{M}_X \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$ désigne un modèle de Sullivan de X .

Posons

$$X \xleftarrow{pr_1} X \times Y \xrightarrow{pr_2} Y$$

et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{PL}(X) & \xrightarrow{A_{PL}(pr_1)} & A_{PL}(X \times Y) & \xleftarrow{A_{PL}(pr_2)} & A_{PL}(Y) \\
 \uparrow \simeq \rho_X & \searrow i_1 & \uparrow \varphi_{X \times Y} & \swarrow i_2 & \uparrow \simeq \rho_Y \\
 & & A_{PL}(X) \otimes A_{PL}(Y) & & \\
 & & \uparrow \simeq \rho_X \otimes \rho_Y & & \\
 \mathcal{M}_X & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y & \xleftarrow{i_2} & \mathcal{M}_Y
 \end{array}$$

avec $i_1(\alpha) = \alpha \otimes 1$, $i_2(\beta) = 1 \otimes \beta$ et $\varphi_{X \times Y}(\alpha \otimes \beta) = A_{PL}(pr_1)(\alpha)A_{PL}(pr_2)(\beta)$. Alors :

- 1) ce diagramme est commutatif.
- 2) $\varphi_{X \times Y}$ est un quasi-isomorphisme d'adg.
- 3) $\rho_X \otimes \rho_Y$ est quasi-isomorphisme d'adg.

Nous avons donc établi que le quasi-isomorphisme :

$$\mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y \xrightarrow[\rho_{X \times Y} := (\rho_X \otimes \rho_Y) \circ \varphi_{X \times Y}]{\simeq} A_{PL}(X \times Y)$$

est le modèle de Sullivan de $X \times Y$, de plus

$$\mathcal{M}_X \xrightarrow{i_1} \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y \xleftarrow{i_2} \mathcal{M}_Y$$

sont des représentants de Sullivan des projections pr_1 et pr_2 .

4.2.3 Cas de l'application diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times X$.

Rappelons que l'application diagonale

$$\Delta : X \rightarrow X \times X, \quad x \mapsto (x, x)$$

est l'unique application rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{pr_1} & X \times Y & \xrightarrow{pr_2} & Y \\ & \searrow id & \uparrow \Delta & \nearrow id & \\ & & X & & \end{array}$$

Nous avons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(X) & \xrightarrow{A_{PL}(pr_1)} & A_{PL}(X \times X) & \xleftarrow{A_{PL}(pr_2)} & A_{PL}(X) \\ & \searrow & \downarrow A_{PL}(\Delta) & \nearrow & \\ & & A_{PL}(X) & & \end{array}$$

D'autre part, nous avons un diagramme commutatif, ($\varepsilon = 1, 2$)

$$\begin{array}{ccccc} & & id & & \\ & & \curvearrowright & & \\ A_{PL}(X) & \xrightarrow{A_{PL}(pr_\varepsilon)} & A_{PL}(X \times X) & \xrightarrow{A_{PL}(\Delta)} & A_{PL}(X) \\ \parallel & & \uparrow \varphi_{X \times X} & & \parallel \\ A_{PL}(X) & \xrightarrow{i_\varepsilon} & A_{PL}(X) \otimes A_{PL}(X) & \xrightarrow{A_{PL}(\Delta) \circ \varphi_{X \times X}} & A_{PL}(X) \\ \rho_X \uparrow \simeq & & \rho_X \otimes \rho_X \uparrow \simeq & & \rho_X \uparrow \simeq \\ \mathcal{M}_X & \xrightarrow{i_\varepsilon} & \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_X & & \mathcal{M}_X \\ & & \curvearrowright id & & \end{array}$$

Remarquons que

- A est une algèbre graduée commutative ssi son produit $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$, $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha\beta$ est un homomorphisme d'algèbres graduées.
- A est une algèbre différentielle graduée ssi son produit $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$, $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha\beta$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels gradués.

Par suite :

- a) $\mu_{A_{PL}(X)}$ et $\mu_{\mathcal{M}_X}$ sont des homomorphismes d'adg.

b) $A_{PL}(\Delta) \circ \varphi_{X \times X} = \mu_{A_{PL}(X)}$. En effet,

$$\begin{aligned} A_{PL}(\Delta) \circ \varphi_{X \times X}(\alpha \otimes \beta) &= A_{PL}(\Delta) (A_{PL}(pr_1)((\alpha) A_{PL}(pr_2)(\beta)) \\ &= A_{PL}(\Delta) (A_{PL}(pr_1)((\alpha)) A_{PL}(\Delta) (A_{PL}(pr_2)(\beta)) \\ &= \alpha\beta. \end{aligned}$$

c) Soit $\psi : \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_X$ un homomorphisme d'adg faisant commuter le rectangle en bas à droite alors

$$\begin{aligned} \psi(\alpha \otimes \beta) &= \psi((\alpha \otimes 1)(1 \otimes \beta)) \\ &= \psi(\alpha \otimes 1)\psi(1 \otimes \beta) \\ &= \psi \circ i_1(\alpha)\psi \circ i_2(\beta) \\ &= \alpha\beta. \end{aligned}$$

Par suite ψ est égale à $\mu_{\mathcal{M}_X}$. Ceci démontre que $\mu_{\mathcal{M}_X}$ est le seul homomorphisme d'adg rendant commutatif le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(X \times X) & \xrightarrow{A_{PL}(\Delta)} & A_{PL}(X) \\ \rho_{X \times X} \uparrow \simeq & & \rho_X \uparrow \simeq \\ \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_X & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{M}_X}} & \mathcal{M}_X \end{array}$$

En particulier $\mu_{\mathcal{M}_X}$ est un représentant de Sullivan de l'application diagonale Δ .

4.2.4 Cas de l'application diagonale $\Delta_{(k)} : X \rightarrow X^{\times k}$.

Posons $\mu_{(2)} = \mu_{\mathcal{M}_X}$ et pour $k \geq 2$

$$\mu_{(k+1)} = \mu \circ (id \otimes \mu_k) : (\mathcal{M}_X)^{\otimes k+1} = \mathcal{M}_X \otimes (\mathcal{M}_X)^{\otimes k} \longrightarrow \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{M}_X.$$

Par récurrence sur $k \geq 2$ on montre que $\mu_{(k)}$ est le seul homomorphisme d'adg rendant commutatif le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(X^{\times k}) & \xrightarrow{A_{PL}(\Delta_{(k)})} & A_{PL}(X) \\ \rho_{X^{\times k}} \uparrow \simeq & & \rho_X \uparrow \simeq \\ \mathcal{M}_X^{\otimes k} & \xrightarrow{\mu_{(k)}} & \mathcal{M}_X \end{array}$$

4.2 Représentant de Sullivan d'une application.

où $\rho_{X^{\times k}}$ désigne la composée

$$(\mathcal{M}_X)^{\otimes k} \xrightarrow{\rho_X^{\otimes k}} A_{PL}(X)^{\otimes k} \xrightarrow{\varphi_{X^{\times r}}} A_{PL}(X^{\times k})$$

avec $\varphi_{X^{\times r}}(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k) = A_{PL}(pr_1)(\alpha_1) \dots A_{PL}(pr_k)(\alpha_k)$.

En particulier $\mu_{(k)}$ est un représentant de Sullivan de l'application diagonale $\Delta_{(k)}$.

4.2.5 Cas d'un produit d'applications diagonales.

Posons $k = k_1 + \dots + k_r$, $k_i \geq 2$, $\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)} : X^r \rightarrow X^{\times k}$. Il résulte de ce qui précède que $\mu_{(k_1)} \otimes \dots \otimes \mu_{(k_r)}$ est le seul homomorphisme d'adg rendant commutatif le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(X^{\times k}) & \xrightarrow{A_{PL}(\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)})} & A_{PL}(X^r) \\ \rho_{X^{\times k}} \uparrow \simeq & & \rho_X \uparrow \simeq \\ \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{M}_X^{\otimes k_i} & \xrightarrow{\mu_{(k_1)} \otimes \dots \otimes \mu_{(k_r)}} & \mathcal{M}_X \end{array}$$

puisque $\rho_{X^{\times k}} := (\rho_X)^{\otimes k} \circ \varphi_{X^{\times k}}$ rend le diagramme ci-dessous commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_X)^{\otimes k} & \xrightarrow{\rho_{X^{\times k}}} & A_{PL}(X^{\times k}) \\ \parallel & & \uparrow \varphi_{X^{\times k_1} \times \dots \times X^{\times k_r}} \\ \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{M}_X^{\otimes k_i} & \xrightarrow{\rho_{X^{k_1}} \otimes \dots \otimes \rho_{X^{k_r}}} & \bigotimes_{i=1}^r A_{PL}(X^{\times k_i}) \end{array}$$

avec $\varphi_{X^{\times k_1} \times \dots \times X^{\times k_r}}(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_r) = A_{PL}(pr_1)(\alpha_1) \dots A_{PL}(pr_r)(\alpha_r)$.

En particulier $\mu_{(k_1)} \otimes \dots \otimes \mu_{(k_r)}$ est un représentant de Sullivan du produit d'applications diagonales $\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)}$.

4.3 Quelques calculs de modèles relatifs de Sullivan.

4.3.1 Modèle relatif de la diagonale.

Soit X un espace 1-connexe telle que $\dim H^i(X; \mathbb{k}) < \infty$ pour tout i . Fixons $\rho_X : \mathcal{M}_X := (\wedge V, d) \rightarrow A_{PL}(X)$ un modèle minimal de X et considérons l'adgc acyclique

$$\left(\wedge(\widehat{V} \oplus \bar{V}), D \right) \quad \begin{cases} (\bar{V})^i = V^{i+1}, (\widehat{V})^i = V^i \\ D(\hat{v}) = 0, \hat{v} \in \widehat{V} \\ D(\bar{v}) = \hat{v}, \bar{v} \in \bar{V} \end{cases}$$

L'homomorphisme d'adg

$$\rho : (\wedge V, d) \otimes \left(\wedge(\widehat{V} \oplus \bar{V}), D \right) \rightarrow (\wedge V, d) \quad \begin{cases} \rho(v) = v \\ \rho(\hat{v}) = 0 = \rho(\bar{v}) \end{cases}$$

est un quasi-isomorphisme surjectif.

Notons $(\wedge V, d) \otimes \left(\wedge(\widehat{V} \oplus \bar{V}), D \right)$ par $\left(\wedge(V \oplus \widehat{V} \oplus \bar{V}), D \right)$.

Définissons la dérivation S de degré -1 sur $\wedge(V \oplus \widehat{V} \oplus \bar{V})$ en posant :

$$S(v) = \bar{v}, S(\bar{v}) = 0 = S(\hat{v}), v \in V, \bar{v} \in \bar{V}, \hat{v} \in \widehat{V}.$$

Alors $S^2 = 0$, et le crochet des dérivations D et S de $\wedge(V \oplus \widehat{V} \oplus \bar{V})$,

$$[D, S] = D \circ S + S \circ D,$$

est une dérivation de degré zéro sur $\wedge(V \oplus \widehat{V} \oplus \bar{V})$ qui commute à la différentielle D .

On vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} [D, S](\bar{v}) &= 0 \\ [D, S](\hat{v}) &= 0 \\ [D, S](v) &= \hat{v} + S(dv) \\ [D, S]^2(v) &= [D, S](S(dv)) = S \circ D \circ S \circ d(v) = (S \circ D)^2(v) \\ [D, S]^n(v) &= (S \circ D)^n(v), \text{ pour tout } n \geq 2. \end{aligned}$$

Puisque $V = V^{\geq 2}$ et que $(\wedge V, d)$ minimal alors

$$dv \in \left(\wedge^{\leq l} V \right)^{|v|+1} \subset \wedge^{\leq l} \left(V^{<|v|} \right), \quad l \geq 2.$$

4.3 Quelques calculs de modèles relatifs de Sullivan.

Il en résulte que $S(Dv) \in (\bar{V})^{<|v|-1} \otimes \wedge^{\leq l-1}(V^{<|v|})$ d'où $[D, S]^n(v) = 0$ si n est assez grand. Nous pouvons donc considérer l'automorphisme d'algèbres graduées

$$e^{[S,D]} : \wedge(V \oplus \hat{V} \oplus \bar{V}) \rightarrow \wedge(V \oplus \hat{V} \oplus \bar{V})$$

qui vérifie

$$\begin{aligned} e^{[D,S]}(\bar{v}) &= \bar{v} \\ e^{[D,S]}(\hat{v}) &= \hat{v} \\ e^{[D,S]}(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [D, S]^n(v) = v + \hat{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (S \circ D)^n(v) \end{aligned}$$

Définissons un homomorphisme d'algèbres graduées

$$\varphi : \wedge V \otimes \wedge V \otimes \wedge \bar{V} \rightarrow \wedge(V \oplus \hat{V} \oplus \bar{V})$$

en posant

$$\begin{aligned} \varphi(v \otimes 1 \otimes \bar{1}) &= \hat{v} \\ \varphi(1 \otimes v \otimes \bar{1}) &= v + \hat{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (S \circ D)^n(v) \\ \varphi(1 \otimes 1 \otimes \bar{v}) &= \bar{v} \end{aligned}$$

Posons

$$S' = \varphi^{-1} \circ S \circ \varphi \text{ et } d' = \varphi^{-1} \circ D \circ \varphi$$

alors S' est une dérivation de degré -1 sur l'algèbre graduée $\wedge V \otimes \wedge V \otimes \wedge \bar{V}$ qui vérifie

$$\begin{aligned} S'(v \otimes 1 \otimes \bar{1}) &= \bar{v} = S'(1 \otimes v \otimes \bar{1}) \\ S'(1 \otimes 1 \otimes \bar{v}) &= 0 \end{aligned}$$

et d' est une dérivation de carré nul sur $\wedge V \otimes \wedge V \otimes \wedge \bar{V}$ qui vérifie

$$\begin{aligned} d'(v \otimes 1 \otimes \bar{1}) &= dv \otimes 1 \otimes \bar{1} \\ d'(1 \otimes v \otimes \bar{1}) &= 1 \otimes dv \otimes \bar{1} \\ d'(1 \otimes 1 \otimes \bar{v}) &= \varphi^{-1}(\hat{v}) = 1 \otimes v \otimes \bar{1} - \varphi^{-1}(v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (S \circ D)^n(v)) \\ &= (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes \bar{1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (S' \circ d')^n(v \otimes 1 \otimes \bar{1}). \end{aligned}$$

Proposition 4.3.1. *L'inclusion d'adgc*

$$(\wedge V, d)^{\otimes 2} \xrightarrow{L} ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}, d')$$

est un modèle relatif de Sullivan $\left\{ \begin{array}{l} \text{du produit } \mu_{\wedge V}, \\ \text{de l'application diagonale } \Delta : X \rightarrow X \times X, \\ \text{de la fibration } ev_{0,1} : X^{[0,1]} \rightarrow X. \end{array} \right.$

DÉMONSTRATION. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\wedge V, d)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\mu_X} & (\wedge V, d) \\ & \searrow \iota & \uparrow \simeq \rho \circ \varphi \\ & & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}, d') \end{array}$$

où $\iota(\alpha \otimes \beta) = \alpha \otimes \beta \otimes \bar{1}$.

C'est donc un modèle relatif de Sullivan du produit μ_X . D'après (2.3) c'est un modèle relatif de l'application diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times X$. Il résulte alors de (1.2) que c'est aussi un modèle de la fibration $ev_{0,1} : X^{[0,1]} \rightarrow X$.

□

4.3.2 Modèle relatif de la fibration des lacets libres.

Conservons les notations et les hypothèses de la sous-section précédente.

Le produit fibré de la fibration $ev_{0,1}$ le long de Δ

$$\begin{array}{ccc} L(X) & \hookrightarrow & X^{[0,1]} \\ ev_0 \downarrow & & \downarrow ev_{0,1} \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \times 2 \end{array}$$

fournit la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} (\wedge V, d)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\iota} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}, d') \\ \downarrow \mu_{\wedge V} & & \downarrow i_2 \\ (\wedge V, d) & \xrightarrow{i_1} & (\wedge V, d) \otimes_{(\wedge V, d)^{\otimes 2}} ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}, d') \end{array}$$

où $i_1(\alpha) = \alpha \otimes 1$ et $i_2(\beta) = 1 \otimes \beta$.

D'après le Théorème 3.3.6 $(\wedge V, d) \otimes_{(\wedge V, d)^{\otimes 2}} ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}, d')$ est un modèle de Sullivan de LX .

4.3 Quelques calculs de modèles relatifs de Sullivan.

Remarquons que l'homomorphisme d'algèbres graduées

$$\psi : (\wedge V) \otimes_{\wedge V \otimes \wedge V} (\wedge V \otimes \wedge V \otimes \wedge \bar{V}) \rightarrow (\wedge V \otimes \wedge \bar{V})$$

défini par

$$\psi(v \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v}) = vv_1v_2 \otimes \bar{v}$$

est un isomorphisme.

Théorème 4.3.2. *Un modèle relatif de Sullivan de la fibration de l'espace des lacets libres*

$$ev_0 : LX \rightarrow X$$

est de la forme

$$(\wedge V, d) \xrightarrow{\iota} (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}, d), \quad \begin{cases} dv = dv \\ d\bar{v} = -s(dv) \end{cases}$$

lorsque s désigne la dérivation de degré -1 sur $\wedge V \otimes \wedge \bar{V}$ telle que $\begin{cases} s(v) = \bar{v} \\ s(\bar{v}) = 0 \end{cases}$.

Ce théorème a été énoncé pour la première fois dans [59] et utilisé dans [65]. Nous en donnons ici une démonstration utilisant uniquement la section précédente de ce chapitre et le chapitre 3.

DÉMONSTRATION. Posons

$$d = \psi^{-1} \circ d' \circ \psi, \quad s = \psi^{-1} \circ (id \otimes S') \circ \psi$$

où d' désigne la différentielle induite sur le quotient $(\wedge V, d) \otimes_{(\wedge V, d)^{\otimes 2}} ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}, d')$.

Remarquons que :

- (1) $s(v) = \bar{v}$ et $s(\bar{v}) = 0$,
- (2) s est une dérivation de degré -1 ,
- (3) $s^2 = \frac{1}{2}[s, s]$ est une dérivation. Comme elle est nulle sur les générateurs

$$s^2 = 0.$$

- (4) Puisque d et s sont des dérivations alors

$$[d, s] := d \circ s + s \circ d$$

est une dérivation (de degré 0).

(5) Il résulte immédiatement de la définition de d' et S' établies dans la section précédente que

$$dv = dv \text{ et } d\bar{v} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (s \circ d)^n(v).$$

(6) Il résulte de (3) et (5) que tout $v \in V$ et tout $\bar{v} \in \bar{V}$

$$[d, s](v) = d\bar{v} + s(dv) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} (s \circ d)^n(v) \text{ et } [d, s](\bar{v}) = s(d\bar{v}) = 0.$$

Il résulte de (5) et (6) que

Lemme 4.3.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

- a) Pour tout $v \in V$ et tout $\bar{v} \in \bar{V}$, $dv = dv$ et $d\bar{v} = -s(dv)$
- b) $[d, s] = 0$
- c) Pour tout $v \in V$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} (s \circ d)^n(v) = 0$.
- d) Pour tout $v \in V$, $s \circ d \circ s(dv) = 0$.

Le Théorème 3.2.6 résulte alors directement du lemme suivant.

Lemme 4.3.4. *Puisque $(\wedge V, d)$ est supposée minimale les conditions du Lemme 3.6.3 sont vérifiées.*

DÉMONSTRATION. Montrons que la condition d) est vérifiée par récurrence sur le degré de v . C'est le cas trivialement pour $n = 2$. Supposons que $n \geq 2$ et que pour tout $v \in V^{<n}$ on a $d\bar{v} = -s(dv)$. Il résulte alors du lemme 1 que

$$(*) \quad [d, s]_{|\wedge V^{<n}} = 0.$$

Soit $v \in V^n$ tel que $dv = \alpha + \beta \in \wedge^l(V^{<n}) \oplus \wedge^{<l}(V^{<n})$ pour un certain $l \geq 2$. Montrons par récurrence décroissante sur l que la condition d) est vérifiée. C'est le cas pour $l = 2$. En effet, dv est une somme de termes de la forme $v_1 v_2$ avec $v_1, v_2 \in V^{<n}$ il suffit de montrer que $s \circ d \circ s(v_1 v_2) = 0$.

$$\begin{aligned} s' \circ d \circ s''(v_1 v_2) &= s \circ d \left(\bar{v}_1 v_2 + (-1)^{|v_1|} v_1 \bar{v}_2 \right) \\ &= s \left((d\bar{v}_1) v_2 - (-1)^{|v_1|} \bar{v}_1 dv_2 + (-1)^{|v_1|} (dv_1) \bar{v}_2 + v_1 d\bar{v}_2 \right) \\ &= (-1)^{|v_1|} (d\bar{v}_1) \bar{v}_2 + \bar{v}_1 s''(dv_2) + (-1)^{|v_1|} s''(dv_1) \bar{v}_2 + \bar{v}_1 d\bar{v}_2 \quad \text{d'après (3)} \\ &= 0 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

4.3 Quelques calculs de modèles relatifs de Sullivan.

Pour $l \geq 2$, α est une somme de termes de la forme

$$v_1\beta \text{ avec } \beta \in \wedge^{<l} V^{<n}.$$

Il suffit donc de montrer que $s'' \circ \bar{d} \circ s''(v_1\beta) = 0$. Ce qui est le cas d'après le calcul suivant. Alors,

$$\begin{aligned} s \circ d \circ s''(v_1\beta) &= s \circ d \left(\bar{v}_1\beta + (-1)^{|v_1|} v_1 s''(\beta) \right) \\ &= s \left((d\bar{v}_1)\beta - (-1)^{|v_1|} \bar{v}_1 d\beta + (-1)^{|v_1|} (dv_1)\bar{\beta} + v_1 d(s(\beta)) \right) \\ &= (-1)^{|v_1|} (d\bar{v}_1)s(\beta) + \bar{v}_1 s(d\beta) + (-1)^{|v_1|} s(dv_1)s(\beta) + \bar{v}_1 d(s(\beta)) \quad \text{d'après (3)} \\ &= \bar{v}_1 s(d\beta) + \bar{v}_1 d(s(\beta)) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence sur } n \\ &= \bar{v}_1 [s, d](\beta) \\ &= 0 \quad \text{d'après (*)} \end{aligned}$$

La récurrence décroissante sur l termine la récurrence sur n . □

4.3.3 Modèle relatif de la diagonale $\Delta_{(3)} = (Id \times \Delta) \circ \Delta$.

On a le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} X^I \times_X X^I & \hookrightarrow & (X^I)^2 \\ q \downarrow & & \downarrow (ev_{0,1})^2 \\ X^3 & \xrightarrow{Id \times \Delta \times Id} & X^4 \end{array}$$

où

$$X^I \times_X X^I = \{(\alpha, \beta) \in (X^I)^2 : \alpha(1) = \beta(0)\} \text{ et } q = (ev_0, ev_1 = ev_0, ev_1).$$

L'application $(\sigma, \sigma) : X \longrightarrow X^I \times_X X^I$ définie par $(\sigma, \sigma)(x) = (\hat{x}, \hat{x})$, $x \in X$, est une équivalence homotopique.

En effet considérons l'application $Ev_0 : X^I \times_X X^I \longrightarrow X$ définie par :

$$Ev_0(\alpha, \beta) = \alpha(1) = \beta(0), \quad \alpha, \beta \in X^I \times_X X^I.$$

D'une part $Ev_0 \circ (\sigma, \sigma) = Id_X$.

D'autre part l'application continue $F : (X^I \times_X X^I) \times I \longrightarrow X^I \times_X X^I$ définie par

$$F((\alpha, \beta), t) = (\alpha_t, \beta_t), \quad \text{où } \alpha_t(s) = \alpha((1-t)s + t) \text{ et } \beta_t(s) = \beta((1-t)s),$$

est une homotopie de $Ev_0 \circ (\sigma, \sigma)$ à $Id_{X^I \times_X X^I}$.

Dès lors on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\cong]{(\sigma, \sigma)} & X^I \times_X X^I \\ & \searrow \Delta_{(3)} & \swarrow q \\ & & X^3 \end{array}$$

qui nous permet de considérer, à homotopie près, la fibration $q = (ev_0, ev_1 = ev_0, ev_1)$ comme la fibration associée à l'application diagonale $\Delta_{(3)}$.

L'espace $X^I \times_X X^I$ est également décrit comme le produit fibré de la fibration $Pr_2 \circ ev_{0,1} : X^I \rightarrow X$ le long de la fibration $Pr_1 \circ ev_{0,1} : X^I \rightarrow X$ à travers le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X^I \times_X X^I & \xrightarrow{Pr_1} & X^I \\ \downarrow Pr_2 & & \downarrow Pr_2 \circ ev_{0,1} \\ X^I & \xrightarrow{Pr_1 \circ ev_{0,1}} & X \end{array}$$

où $Pr_1 : X \times X \rightarrow X$ (respectivement $Pr_2 : X \times X \rightarrow X$) désigne la première projection (respectivement la deuxième projection).

Fixons toujours $\rho_X : \mathcal{M}_X := (\wedge V, d) \rightarrow A_{PL}(X)$ un modèle minimal de X . Posons $\mathcal{M}_{X^I} = ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}, d)$. Alors le diagramme ci-dessus est converti en une somme amalgamée dans la catégorie des \mathcal{M}_X -modules gradués de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_X & \xrightarrow{m_{ev_1}} & \mathcal{M}_{X^I} \\ \downarrow m_{ev_0} & & \downarrow \iota_2 \\ \mathcal{M}_{X^I} & \xrightarrow{\iota_1} & \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I} \end{array}$$

Ici :

1. $m_{ev_0}(v) = v \otimes 1 \otimes \bar{1}$

4.3 Quelques calculs de modèles relatifs de Sullivan.

2. $m_{ev_1}(v) = 1 \otimes v \otimes \bar{1}$
3. $\iota_1(a \otimes b \otimes \bar{c}) = a \otimes b \otimes \bar{c} \otimes_{\mathcal{M}_X} 1 \otimes 1 \otimes \bar{1}$
4. $\iota_2(a \otimes b \otimes \bar{c}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes_{\mathcal{M}_X} a \otimes b \otimes \bar{c}$, $v, a, b \in V$; $\bar{c} \in \bar{V}$.
5. La structure de \mathcal{M}_X -module à gauche (respectivement à droite) de \mathcal{M}_X^I est obtenue via l'homomorphisme d'adgc $m_{ev_{0,1}} \circ m_{Pr_1}$ (respectivement $m_{ev_{0,1}} \circ m_{Pr_2}$).

Plus précisément : pour tous $a, v_1, v_2 \in V$ et $\bar{v} \in \bar{V}$:

$$a.(v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v}) = av_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v} \text{ (respectivement } (v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v}).a = (-1)^{|a||\bar{v}|}v_1 \otimes v_2 a \otimes \bar{v})$$

Remarquons que l'homomorphisme d'algèbres graduées

$$\psi_{(3)} : ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}) \otimes_{\wedge V} ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}) \longrightarrow (\wedge V)^{\otimes 3} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}$$

défini par :

$$\psi_{(3)}(v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v} \otimes_{\wedge V} u_1 \otimes u_2 \otimes \bar{u}) = (-1)^{|\bar{v}|(|u_1|+|u_2|)}v_1 \otimes v_2 u_1 \otimes u_2 \otimes \bar{v} \otimes \bar{u}$$

est un isomorphisme.

Posons :

$$d = \psi_{(3)} \circ \bar{d} \circ \psi_{(3)}^{-1}, s_1^{(3)} = \psi_{(3)} \circ (s_1^{(2)} \otimes_{\wedge V} Id) \circ \psi_{(3)}^{-1} \text{ et } s_2^{(3)} = \psi_{(3)} \circ (Id \otimes_{\wedge V} s_1^{(2)}) \circ \psi_{(3)}^{-1}.$$

où \bar{d} désigne la différentielle induite sur le quotient $((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \bar{V}, d) \otimes_{\wedge V} ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \bar{V}, d)$ et $s_1^{(2)}$ la dérivation de degré -1 sur $(\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \bar{V}$ telle que : $s_1^{(2)} \circ s_1^{(2)} = 0$ et définie par :

$$\begin{cases} s_1^{(2)}(v \otimes 1 \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{v} = s_1^{(2)}(1 \otimes v \otimes \bar{1}) \\ s_1^{(2)}(1 \otimes 1 \otimes \bar{v}) = 0 \end{cases}$$

$s_1^{(3)}$ et $s_2^{(3)}$ sont par définition les seules dérivations de degré -1 sur $(\wedge V)^{\otimes 3} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}$ telles que $s_1^{(3)} \circ s_1^{(3)} = 0 = s_2^{(3)} \circ s_2^{(3)}$ et qui vérifient :

$$\begin{cases} s_1^{(3)}(v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} = s_1^{(3)}(1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ s_1^{(3)}(1 \otimes 1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 0 = s_2^{(3)}(v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ s_2^{(3)}(1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} = s_2^{(3)}(1 \otimes 1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \end{cases}$$

De même la différentielle d ainsi obtenue est une dérivation de $(\wedge V)^{\otimes 3} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}$ de degré

1 définie explicitement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = dv \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes dv \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes 1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1}) = (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (s_1^{(3)} \circ d)^n (v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v}) = 1 \otimes (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (s_2^{(3)} \circ d)^n (1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \end{array} \right.$$

Il s'en suit immédiatement que l'isomorphisme d'algèbres graduées $\psi_{(3)}$ défini plus haut est un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\psi_{(3)} : \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I} \longrightarrow ((\wedge V)^{\otimes 3} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d)$$

Nous obtenons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_X^{\otimes 3} & \xrightarrow{\mu_{(3)} = \mu \circ (Id \otimes \mu)} & \mathcal{M}_X \\ & \searrow \iota_{(3)} & \uparrow \cong \\ & & \mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_X \\ & & \uparrow \simeq (\rho \circ \phi) \otimes_{Id} (\rho \circ \phi) \\ & & \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I} \\ & & \uparrow \cong \psi_{(3)}^{-1} \\ & & ((\wedge V)^{\otimes 3} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) \end{array}$$

où $\iota_{(3)}$ est l'inclusion d'adgc définie par :

$$\iota_{(3)}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}; v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Rappelons que $\rho \circ \phi : \mathcal{M}_{X^I} \longrightarrow \mathcal{M}_X$ est le quasi-isomorphisme de \mathcal{M}_X -modules défini à la section précédente. Il s'en suit que le morphisme de \mathcal{M}_X -modules $(\rho \circ \phi) \otimes_{Id} (\rho \circ \phi)$ est un quasi-isomorphisme car le foncteur $-\otimes_{\mathcal{M}_X} -$ préserve les quasi-isomorphismes dans la catégorie des \mathcal{M}_X -modules.

Ainsi nous venons de démontrer que :

Proposition 4.3.5. *L'inclusion d'adgc*

$$\mathcal{M}_X^{\otimes 3} \xrightarrow{\iota_{(3)}} ((\wedge V)^{\otimes 3} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d)$$

est un modèle relatif de Sullivan $\left\{ \begin{array}{l} \text{du produit } \mu_{(3)}, \\ \text{de l'application diagonale } \Delta_{(3)} : X \longrightarrow X \times X \times X, \\ \text{de la fibration } (ev_0, ev_1 = ev_0, ev_1) : X^I \times_{X^I} X^I \longrightarrow X^3, \\ \text{également de la fibration } ev_{0, \frac{1}{2}, 1} : X^I \longrightarrow X^3. \end{array} \right.$

4.3.4 Modèle relatif de Sullivan de la diagonale $\Delta_{(k)} : X \rightarrow X^{\times k}$.

Fixons toujours $\rho_X : \mathcal{M}_X := (\wedge V, d) \rightarrow A_{PL}(X)$ un modèle minimal de X et adoptons les notations suivantes :

1. $\mathcal{M}_{X^I}^{\otimes \mathcal{M}_X^1} := \mathcal{M}_{X^I}$, $\mathcal{M}_{X^I}^{\otimes \mathcal{M}_X^i} := \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes \mathcal{M}_X^{i-1}} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I}$, $i \geq 2$;
2. $\rho_{(1)} := \rho \circ \phi$, $\rho_{(j)} := \rho_{(j-1)} \otimes_{Id} \rho_{(1)}$, $j \geq 2$;
3. Pour $v \in V$ et $\bar{v} \in \bar{V}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} v^{(n)(l)} := 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes v_l \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \in (\wedge V)^{\otimes n}, 1 \leq l \leq n \\ \bar{v}^{(p)(s)} := \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \dots \otimes \bar{v}_s \otimes \bar{1} \otimes \dots \otimes \bar{1} \in (\wedge \bar{V})^{\otimes p}, 1 \leq s \leq p. \end{array} \right.$$

Supposons construit, un modèle relatif de Sullivan de la l'application diagonale $\Delta_{(l)} : X \rightarrow X^{\times l}$ ($3 \leq l < k$).

Un raisonnement analogue à celui de la section précédente montre qu'on obtient alors le

diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_X^{\otimes k} & \xrightarrow{\mu^{(k)} = \mu \circ (Id \otimes \mu^{(k-1)})} & \mathcal{M}_X \\
 & \searrow \iota^{(k)} & \uparrow \cong \\
 & & \mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_X \\
 & & \uparrow \simeq \rho^{(k-1)} \\
 & & \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes \mathcal{M}_X^{k-2}} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I} \\
 & & \uparrow \cong \psi_{(k)}^{-1} \\
 & & ((\wedge V)^{\otimes k} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes k-1}, d)
 \end{array}$$

où $\iota^{(k)}$ est l'inclusion d'adgc définie par :

$$\iota^{(k)}(v_1^{(k)(1)} v_2^{(k)(2)} \dots v_k^{(k)(k)}) = v_1^{(k)(1)} v_2^{(k)(2)} \dots v_k^{(k)(k)} \otimes \bar{1}^{(1)(k-1)}; v_1, \dots, v_k \in V.$$

et la différentielle d définie pour tous $v \in V, \bar{v} \in \bar{V}$, par

$$\begin{cases} d(v^{(k)(i)}) = (dv)^{(k)(i)} \otimes \bar{1}^{(k-1)(1)} \\ d(1^{(k)(1)} \otimes \bar{v}^{(k-1)(j)}) = (v^{(k)(j+1)} - v^{(k)(j)}) \otimes \bar{1}^{(k-1)(1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (s_j^{(k)} \circ d)^n (v^{(k)(j)} \otimes \bar{1}^{(k-1)(1)}) \end{cases}$$

$$1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j < k.$$

Ici $s_j^{(k)}$ désigne pour tout $1 \leq j < k$, la dérivation de degré -1 sur $(\wedge V)^{\otimes k} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes k-1}$ telle que $s_j^{(k)} \circ s_j^{(k)} = 0$ et définie pour tous $v \in V, \bar{v} \in \bar{V}$ par :

$$s_j^{(k)}(v^{(k)(i)} \otimes \bar{1}^{(k-1)(1)}) = \begin{cases} 1^{(k)(1)} \otimes \bar{v}^{(k-1)(j)} & \text{si } i = j \text{ ou } i = j + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et $s_j^{(k)}(1^{(k)(1)} \otimes \bar{v}^{(k)(i)}) = 0, 1 \leq i \leq k$. Ainsi nous avons établi :

Proposition 4.3.6. *L'inclusion d'adgc*

$$\mathcal{M}_X^{\otimes k} \xrightarrow{\iota^{(k)}} ((\wedge V)^{\otimes k} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes k-1}, d)$$

est un modèle relatif $\begin{cases} \text{du produit } \mu_{(k)} = \mu \circ (Id \otimes \mu_{(k-1)}), \\ \text{de l'application diagonale } \Delta_{(k)} : X \longrightarrow X^k, \\ \text{de la fibration } ev_{0, \frac{1}{2^{k-2}}, \dots, \frac{1}{2}, 1} : X^I \longrightarrow X^k. \end{cases}$
 où d est la différentielle définie plus haut.

4.3.5 Modèle relatif de Sullivan d'un produit d'applications diagonales.

Posons $\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)} : X^{\times r} \longrightarrow X^{\times k}$, $k_i \geq 2$, $r \geq 1$; $k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$.

Pour cette construction, il suffit de montrer que le produit tensoriel de deux KS extensions est encore une KS extension.

Lemme 4.3.7. *Le produit de deux KS-extensions est une KS- extension.*

En effet, soit $(A \otimes \wedge X, d)$ et $(B \otimes \wedge Y, d)$ deux KS-extensions. Désignons par $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (resp. $\{y_\beta\}_{\beta \in J}$) une base homogène de X (resp. de Y) où I et J sont deux ensembles non vides bien ordonnés. Par définition d'une KS-extension,

$$dx_\alpha \in A \otimes (\wedge X)_{<\alpha} \text{ (resp. } dy_\beta \in B \otimes (\wedge Y)_{<\beta}),$$

où $(\wedge X)_{<\alpha}$ (resp. $(\wedge Y)_{<\beta}$) désigne le sous espace gradué de $\wedge X$ (resp. $\wedge Y$) engendré par les x_δ , $\delta < \alpha$ (resp. y_γ , $\gamma < \beta$).

Considérons sur l'ensemble $I \times J$ l'ordre lexicographique $((\alpha, \beta) < (\alpha', \beta') \iff (\alpha < \alpha') \text{ ou } (\alpha = \alpha' \text{ et } \beta < \beta'))$, on a :

$$\wedge(X \oplus Y)_{<(\alpha, \beta)} = (\wedge X)_{<\alpha} \otimes \wedge Y + \wedge X \otimes (\wedge Y)_{<\beta}.$$

Partant de l'isomorphisme d'ag $(A \otimes \wedge X \otimes B \otimes \wedge Y, d) \xrightarrow{Id_A \otimes T \otimes Id_{\wedge Y}} (A \otimes B \otimes \wedge(X \oplus Y), d)$ (où $T : \wedge X \otimes B \longrightarrow B \otimes \wedge X$ est l'isomorphisme d'ag $x \otimes b \longmapsto (-1)^{\deg x \deg y} b \otimes x$), et du fait que $(x_\alpha, y_\beta)_{(\alpha, \beta) \in I \times J}$ est une base de $X \oplus Y$, on a :

$$d(x_\alpha, y_\beta) \in (\wedge X_{<\alpha} \otimes \wedge Y) \oplus (\wedge X \otimes (\wedge Y)_{<\beta}) \cong A \otimes B \otimes \wedge(X \oplus Y)_{<(\alpha, \beta)}.$$

Désignons par :

$$\mathcal{M}_X^{\otimes k_i} \xrightarrow{\iota^{(k_i)}} ((\wedge V)^{\otimes k_i} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes k_i - 1}, d)$$

un modèle relatif de Sullivan de la l'application diagonale $\Delta_{(k_i)} : X \longrightarrow X^{\times k_i}$, $1 \leq i \leq r$.

Proposition 4.3.8. *Le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_X^{\otimes k} & \xrightarrow{\mu_{(k_1)} \otimes \mu_{(k_2)} \otimes \dots \otimes \mu_{(k_r)}} & \mathcal{M}_X^{\otimes r} \\
 & \searrow^{\substack{\text{\scriptsize } r \\ \otimes \\ \text{\scriptsize } \iota_{(k_i)}}} & \uparrow \cong \\
 & & \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{M}_X^{\otimes k_i} \\
 & & \uparrow \cong \\
 & & \bigotimes_{i=1}^r \rho_{(k_i)} \\
 & & \uparrow \cong \\
 & & \bigotimes_{i=1}^r ((\wedge V)^{\otimes k_i} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes k_i - 1}, d_{k_i}) \\
 & \searrow & \uparrow \cong \\
 & & ((\wedge V)^{\otimes k} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes k - 1}, d)
 \end{array}$$

nous permet de considérer l'inclusion d'adgc

$$\mathcal{M}_X^{\otimes k} \xrightarrow{\substack{\text{\scriptsize } r \\ \otimes \\ \text{\scriptsize } \iota_{(k_i)}}} ((\wedge V)^{\otimes k} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes k - 1}, d)$$

comme un modèle relatif

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{du produit d'applications diagonales } \Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)} : X^{\times r} \longrightarrow X^{\times k}, \\
 \text{du produit } \mu_{(k_1)} \otimes \mu_{(k_2)} \otimes \dots \otimes \mu_{(k_r)} : \mathcal{M}_X^{\otimes k} \longrightarrow \mathcal{M}_X^{\otimes r}, \\
 \text{du produit de fibrations } ev_{0, \frac{1}{2^{k_1-2}}, \dots, \frac{1}{2}, 1} \times ev_{0, \frac{1}{2^{k_2-2}}, \dots, \frac{1}{2}, 1} \times \dots \times ev_{0, \frac{1}{2^{k_r-2}}, \dots, \frac{1}{2}, 1}
 \end{array} \right.$$

Exemple 4.3.9. *Cas de la sphère : $X = S^k$, $k \geq 1$.*

1. Sphère de dimension impaire S^{2n+1} , $n \geq 1$.

Il est bien connu que $\mathcal{M}_{S^{2n+1}} = (\wedge(x), 0)$ avec $|x| = 2n + 1$.

a) Un modèle relatif de la diagonale $\Delta_{(2)} : X \longrightarrow X^2$ est donné par l'inclusion

$$(\wedge(x, x'), 0) \xrightarrow{\iota_{(2)}} (\wedge(x, x', \bar{x}), d) := \mathcal{M}_{X^2}$$

4.3 Quelques calculs de modèles relatifs de Sullivan.

avec $|\bar{x}| = 2n$ et $d\bar{x} = x' - x$.

b) Un modèle relatif de la diagonale $\Delta_{(3)} : X \longrightarrow X^3$ est donné par l'inclusion

$$(\wedge(x, x', x''), 0) \xrightarrow{\iota^{(3)}} (\wedge(x, x', x'', \bar{x}, \tilde{x}), d) := \mathcal{M}_{X^I} \otimes_X \mathcal{M}_{X^I} \quad \text{où}$$

$$|\bar{x}| = |\tilde{x}| = 2n \quad \text{et} \quad \begin{cases} d\bar{x} = x' - x \\ d\tilde{x} = x'' - x'. \end{cases}$$

2. Sphère de dimension paire S^{2n} , $n \geq 1$.

On sait qu'un modèle minimal de S^{2n} est donné par : $(\wedge(x, y), d)$ avec $|x| = 2n$ et $dy = x^2$.

a) Un modèle relatif de la diagonale $\Delta_{(2)} : X \longrightarrow X^2$ est donné par l'inclusion

$$(\wedge(x, y, x', y'), d) \xrightarrow{\iota^{(2)}} (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) := \mathcal{M}_{X^I}$$

avec $|\bar{x}| = 2n - 1$, $|\bar{y}| = 4n - 2$; $d\bar{x} = x' - x$ et $d\bar{y} = y' - y - (x + x')\bar{x}$.

b) Un modèle relatif de la diagonale $\Delta_{(3)} : X \longrightarrow X^3$ est donné par l'inclusion

$$(\wedge(x, y, x', y', x'', y''), d) \xrightarrow{\iota^{(3)}} (\wedge(x, y, x', y', x'', y'', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d) := \mathcal{M}_{X^I} \otimes_X \mathcal{M}_{X^I}$$

$$\text{où } |\bar{x}| = |\tilde{x}| = 2n - 1, |\bar{y}| = |\tilde{y}| = 4n - 2 \text{ et } \begin{cases} d\bar{x} = x' - x; \quad d\tilde{x} = x'' - x', \\ d\bar{y} = y' - y - (x + x')\bar{x}, \\ d\tilde{y} = y'' - y' - (x' + x'')\tilde{x}. \end{cases}$$

Exemple 4.3.10. *Cas de l'espace projectif complexe : $X = \mathbb{C}P^n$, $n \geq 1$.*

Ici on a $\mathcal{M}_X = (\wedge(x, y), d)$ avec $|x| = 2$ et $dy = x^{n+1}$.

a) Un modèle relatif de la diagonale $\Delta_{(2)} : X \longrightarrow X^2$ est donné par l'inclusion

$$(\wedge(x, y, x', y'), d) \xrightarrow{\iota^{(2)}} (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) := \mathcal{M}_{X^I}$$

avec $|\bar{x}| = 1$, $|\bar{y}| = 2n$; $d\bar{x} = x' - x$ et $d\bar{y} = y' - y - \sum_{i+j=n} x^i x'^j \bar{x}$.

b) La diagonale $\Delta_{(3)} : X \longrightarrow X^3$ possède un modèle relatif de Sullivan donné par l'inclusion

$$(\wedge(x, y, x', y', x'', y''), d) \xrightarrow{\iota^{(3)}} (\wedge(x, y, x', y', x'', y'', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d) := \mathcal{M}_{X^I} \otimes_X \mathcal{M}_{X^I}$$

$$\text{où } |\bar{x}| = |\tilde{x}| = 1, |\bar{y}| = |\tilde{y}| = 2n \text{ et } \begin{cases} d\bar{x} = x' - x; & d\tilde{x} = x'' - x', \\ d\bar{y} = y' - y - \sum_{i+j=n} x^i x'^j \bar{x}, \\ d\tilde{y} = y'' - y' - \sum_{j+k=n} x'^j x''^k \tilde{x}. \end{cases}$$

4.4 $r_{in}!$ et modèles de Sullivan.

Le diagramme (2.1) se transforme en le diagramme ci-dessous dans la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives (section 3.3) :

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(\text{map}(S, X)) & \xleftarrow{A_{PL}(r_{in})} & A_{PL}((LX)^{\times p}) \\ \uparrow A_{PL}(\text{map}(c, X)) & & \uparrow A_{PL}(ev_{L_1} \times \dots \times ev_{L_p}) \\ A_{PL}(\prod_{i=1}^r \text{map}(T_i, X)) & \xleftarrow{A_{PL}(ev_{K_1} \times \dots \times ev_{K_r})} & A_{PL}(X^{\times k}) \\ \uparrow A_{PL}(\text{map}(c, X)) \simeq & \swarrow A_{PL}(\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)}) & \\ A_{PL}(X^{\times r}) & & \end{array} \quad (4.1)$$

où le rectangle est commutatif.

• Supposons que X est 1-connexe et que $\dim H^i(X) < \infty$, ($i \geq 0$) et fixons un modèle minimal $\mathcal{M}_X = (\wedge V, d) \rightarrow A_{PL}(X)$ de l'espace X . Alors la fibration des chemins $LX \xrightarrow{ev_0} X$ admet un modèle relatif de la forme (C.f. Proposition 3.6.2),

$$\mathcal{M}_X \xrightarrow{\iota} (\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d),$$

et d'après, 4.2.5, nous nous déduisons du diagramme (3.7) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(\text{map}(S, X)) & \xleftarrow{\mathcal{M}_{r_{in}}} & (\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p} \\ \uparrow A_{PL}(\text{map}(c, X)) & & \uparrow \mathcal{M}_{ev_{L_1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_{ev_{L_p}} \\ A_{PL}(\prod_{i=1}^r \text{map}(T_i, X)) & \xleftarrow{\mathcal{M}_{ev_{K_1} \times \dots \times ev_{K_r}}} & \mathcal{M}_X^{\otimes k} \\ \uparrow \mathcal{M}\text{map}(c, X) \simeq & \swarrow \mu_{(k_1)} \otimes \dots \otimes \mu_{(k_r)} & \\ \mathcal{M}_X^{\otimes r} & & \end{array} \quad (4.2)$$

où

1. $\mu_{(s)} : \mathcal{M}_X^{\otimes s} \rightarrow \mathcal{M}_X$, $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_s \mapsto \alpha_1 \dots \alpha_s$ désigne le produit de s éléments (cf 4.3),

2. le rectangle est commutatif,
3. le triangle est commutatif à homotopie d'adgc près, [26, Proposition 12.26].
4. et où nous considérons

- (a) $\mathcal{M}_X^{\otimes r}$ comme un $\mathcal{M}_X^{\otimes k}$ module différentiel gradué via $\mu_{(k_1)} \otimes \dots \otimes \mu_{(k_r)}$
- (b) $A_{PL}(\prod_{i=1}^r \text{map}(T_i, X))$ comme un $\mathcal{M}_X^{\otimes k}$ module différentiel gradué via $\mathcal{M}_{ev_{K_1} \times \dots \times ev_{K_r}}$,
- (c) $A_{PL}(\text{map}(S, X))$ comme un $(\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p}$ module différentiel gradué via $\mathcal{M}_{r_{in}}$.

Fixons un modèle relatif de $\mu_{(k_1)} \otimes \dots \otimes \mu_{(k_r)}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_X^{\otimes k} & \xrightarrow{\mu_{(k_1)} \otimes \dots \otimes \mu_{(k_r)}} & \mathcal{M}_X^{\otimes r} \\ & \searrow \iota & \uparrow \simeq \\ & & (\mathcal{M}_X^{\otimes k} \otimes \wedge W, d) \end{array} .$$

D'après le Théorème 3.2.17, $(\mathcal{M}_X^{\otimes k} \otimes \wedge W, d)$ est un modèle $\mathcal{M}_X^{\otimes k}$ semi-libre de $\mathcal{M}_X^{\otimes r}$ et nous déduisons du diagramme (3.8) le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} ((\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p} \otimes \wedge W, d) & & (4.3) \\ \downarrow \cong & \swarrow \rho_{in} & \\ (\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes k}} (\mathcal{M}_X^{\otimes k} \otimes \wedge W, d) & \xleftarrow{i_1} & (\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p} \\ \uparrow i_2 & & \uparrow \mathcal{M}_{ev_{L_1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_{ev_{L_p}} \\ (\mathcal{M}_X^{\otimes k} \otimes \wedge W, d) & \xleftarrow{\iota} & \mathcal{M}_X^{\otimes k} \end{array}$$

où $((\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p} \otimes \wedge W, d)$ est à la fois

1. un modèle de Sullivan de $A_{PL}(\text{map}(S, X))$,
2. un $(\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p}$ modèle semi-libre de $A_{PL}(\text{map}(S, X))$.

D'après le Théorème 2.3.2, si X est un espace de Gorenstein, 1-connexe et de dimension formelle d alors il existe des applications linéaires de degré $d\chi$ notée $\iota^!$ et $\rho_{in}^!$ telles que :

1. le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} ((\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p} \otimes \wedge W, d) & \xrightarrow{\rho_{in}^!} & (\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p} \\ \uparrow i_2 & & \uparrow \mathcal{M}_{ev_{L_1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_{ev_{L_p}} \\ (\mathcal{M}_X^{\otimes k} \otimes \wedge W, d) & \xrightarrow{\iota^!} & \mathcal{M}_X^{\otimes k} \end{array}$$

2. l'application $\iota^!$ est $\mathcal{M}_X^{\otimes k}$ -linéaire, unique à homotopie de modules différentiels gradués près. De plus $H(\iota^!) = \left(\Delta_{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{(k_r)} \right)^! : H^*(X)^{\otimes r} \rightarrow \left(H^*(X)^{\otimes k} \right)^{*+d_X}$,
3. l'application $\rho_{in}^!$ est $(\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p}$ -linéaire, unique à homotopie de modules différentiels gradués près. De plus $H(\rho_{in}^!) = r_{in}^! : H^*(\text{map}(S, X)) \rightarrow \left(H^*(LX)^{\otimes p} \right)^{*+d_X}$.

4.5 Définition des $\Phi_{g,p+q}$ à l'aide des modèles.

Soit X un espace de Gorenstein, 1-connexe et de dimension formelle d . Fixons un représentant de Sullivan pour r_{out} :

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}((LX)^{\times p}) & \xrightarrow{A_{PL}(r_{out})} & A_{PL}(\text{map}(S, X)) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ (\mathcal{M}_X \otimes \wedge \bar{V})^{\otimes q} & \xrightarrow{m_{r_{out}}} & ((\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes q} \otimes \wedge W, d) \end{array}$$

alors la composée

$$(\mathcal{M}_X \otimes \wedge \bar{V})^{\otimes q} \xrightarrow{m_{r_{out}}} ((\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes q} \otimes \wedge W, d) \xrightarrow{\rho_{in}^!} (\mathcal{M}_X \otimes \wedge sV, d)^{\otimes p}$$

induit l'application linéaire

$$H^*(LX)^{\otimes q} \rightarrow \left(H^*(LX)^{\otimes p} \right)^{*+d_X}$$

qui se dualise en

$$\Phi_{g,p+q} : H_*(LX)^{\otimes p} \longrightarrow \left(H_*(LX)^{\otimes q} \right)_{*-d_X} .$$

4.6 Modèle de Sullivan de la construction de Borel.

Dans cette section nous faisons un calcul explicite d'un modèle de Sullivan non minimal d'un espace de Gorenstein obtenu par la construction de Borel associée à une action d'un groupe de Lie Γ .

$$X \rightarrow E_\Gamma \rightarrow B\Gamma$$

lorsque le groupe Γ opère sur X et $B\Gamma$ désigne le classifiant du groupe Γ [40, Chapter III].

En général la construction explicite d'un tel modèle est difficile mais dans le cas particulier où Γ opère sur un espace homogène la construction est plus aisée. Cet exemple sera utilisé dans les chapitres suivants.

Soit G un groupe de Lie connexe compacte et BG son espace classifiant. Il est bien connu que

$$H^*(G; \mathbb{Q}) = \wedge P_G, \text{ et } H^*(BG; \mathbb{Q}) = \wedge Q_G$$

où P_G désigne un espace vectoriel gradué de dimension finie concentré en degré impair et $Q_G = sP_G$.

Il est aussi bien connu que $H^*(BS^1; \mathbb{Q}) = \wedge u$ avec $|u| = 2$.

Si K est un sous-groupe fermé de G simplement connexe et si

$$S^1 \xrightarrow{h} G \xleftarrow{j} K$$

désigne respectivement un homomorphisme de groupe et l'inclusion naturelle alors nous obtenons les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} G/K \xrightarrow{\cong} EK \times_j G \longrightarrow EG & \text{et} & ES^1 \times_h G/K \longrightarrow (EG)/K \xrightarrow{\cong} BK \\ \searrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \swarrow \\ & BK \xrightarrow{Bj} & BG & & BS^1 \xrightarrow{Bh} & BG \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} EK \times_j G & := \{(e, g) \mid (ek, g) = (e, j(k)g)\} \\ ES^1 \times_h G/K & := \{(x, gK) \mid (xe^{2i\pi\theta}, gK) = (x, (h(e^{2i\pi\theta})g)K)\} \end{aligned}$$

et où les carrés sont des produits fibrés.

Le modèle minimal de G/K est obtenu comme la somme amalgamée :

$$(\wedge Q_K, 0) \xleftarrow{H^*(Bj; \mathbb{Q})} (\wedge Q_G, 0) \xrightarrow{\iota_G} (\wedge Q_G \otimes \wedge P_G, d)$$

où $dx = sx$ pour $x \in P_K$ et $d(sx) = 0$, via l'isomorphisme

$$(\wedge Q_K, 0) \otimes_{\wedge Q_G} (\wedge Q_G \otimes \wedge P_G, \bar{d}) \rightarrow (\wedge Q_K, 0) \wedge P_G, d), \quad y \bar{\otimes} (y' \otimes x) \mapsto y H(Bj; \mathbb{Q})(y') \otimes x$$

Il en résulte que $d(y' \otimes 1) = 0$ et $\bar{d}(y' \otimes x) = H(Bj; \mathbb{Q})(y') \otimes x$ avec $y' \in Q_G$ et $x \in P_G$.

D'autre part un modèle de $Bj : BK \rightarrow BG$ est de forme

$$(\wedge Q_G, 0) \xrightarrow{\iota} (\wedge Q_G \otimes \wedge Q_K \otimes \wedge P_G, d) \rightarrow (\wedge Q_K \otimes P_G, \bar{d})$$

avec $d(y \otimes y' \otimes x) = y \otimes y' H(Bj; \mathbb{Q})(sx) \otimes 1 - y(sx) \otimes y' \otimes 1$ avec $y \in Q_K, y' \in Q_G$ et $x \in P_G$. Par suite le modèle minimal de $BS^1 \times_h G/K$ est obtenu par la somme amalgamée

$$(\wedge u, 0) \xleftarrow{H^*(Bh; \mathbb{Q})} (\wedge Q_G, 0) \xrightarrow{\iota} (\wedge Q_G \otimes \wedge Q_K \otimes \wedge P_G, d)$$

à l'aide de l'isomorphisme

$$(\wedge u, 0) \otimes_{\wedge Q_G} (\wedge Q_G \otimes \wedge Q_K \otimes \wedge P_G, d) \rightarrow (\wedge u, 0) \otimes \wedge Q_K \otimes \wedge P_G, d)$$

tel que $u^k \bar{\otimes} (y \otimes y' \otimes x) \mapsto u^k H^*(Bh; \mathbb{Q})(y) \otimes y' \otimes x$. Par suite, pour tout $x \in P_G$ alors

$$d(1 \otimes 1 \otimes x) = H^*(Bh; \mathbb{Q})(sx) \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes H(Bj; \mathbb{Q})(sx) \otimes 1.$$

Exemple 1. Rappelons que $U(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}), AA^* = I\}$. Considérons le cas où $G = U(n+1)$, $K = U(n) \times U(1)$. Alors $G/K \cong \mathbb{C}P^n$. Notons x_1, x_2, \dots, x_{n+1} une base de P_G telle que $|x_i| = 2i - 1 \geq 1$ et $y_i = sx_i$ alors, d'après [54, Theorem 5.8]

$$H^*(Bj; \mathbb{Q}) : \wedge(y_1, \dots, y_{n+1}) \rightarrow \wedge(y'_1, \dots, y'_n) \otimes \wedge y''_1,$$

$$y_i \mapsto \begin{cases} y'_1 + y''_1 & \text{si } i = 1 \\ y'_i + y'_{i-1} \otimes y''_1 & \text{si } 2 \leq i \leq n \\ y'_n \otimes y''_1 & \text{si } i = n + 1 \end{cases}$$

et

$$H(Bh; \mathbb{Q}) : \wedge(y_1, \dots, y_{n+1}) \rightarrow \wedge u, \quad y_i \mapsto \lambda_i u^i, \quad \lambda_i \in \mathbb{Q}.$$

Un modèle relatif de Sullivan de $ES^1 \times_h U(n+1)/U(n) \times U(1)$ est de la forme

$$(\wedge(u, y'_1, \dots, y'_n, y''_1, x_1, \dots, x_{n+1}), d)$$

avec la différentielle définie par :

$$d(1 \otimes 1 \otimes x_i) = \lambda_i u^i \otimes 1 \otimes 1 - \begin{cases} 1 \otimes y'_1 \otimes 1 & \text{si } i = 1 \\ 1 \otimes (y'_i + y'_{i-1} y''_1) \otimes 1 & \text{si } 2 \leq i \leq n \\ 1 \otimes y'_n y''_1 \otimes 1 & \text{si } i = n + 1 \end{cases} .$$

La différentielle ne dépend que du $n + 1$ -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{Q}^{\times n+1}$. On en déduit le modèle minimal de l'espace $E_h := BS^1 \times_h U(n+1)/U(n) \times U(1)$ en considérant la partie linéaire qui est définie par :

$$d_0(1 \otimes 1 \otimes x_i) = \begin{cases} \lambda_1 u \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes y'_1 \otimes 1 & \text{si } i = 1 \\ -1 \otimes y'_i \otimes 1 & \text{si } 2 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si } i = n + 1 \end{cases} .$$

Posons $V = \mathbb{Q}u \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q}y'_i \oplus \mathbb{Q}y''_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}x_i$. Alors $H(V, d_0) = \mathbb{Q}[u, v] \otimes \mathbb{Q}x$. Il vient alors d'après [26, Théorème 14.9] que le modèle minimal de E_h est de la forme

$$(\wedge(u, v, x), d) \text{ où } du = dv = 0 \text{ et } dx = v^{n+1} + \lambda u^{n+1}, \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Exemple 2. Rappelons que $Sp(n) = \{X \in Mn \times n(\mathbb{H}), XX^* = I\}$. En écrivant $X = A + jB$ et identifiant $A + jB$ avec $\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}$ on peut considérer $Sp(n)$ comme un sous-groupe de $U(2n)$.

Considérons le cas où $G = U(2n)$, $K = Sp(n)$. D'après, [54, Proof of Theorem 5.8]

$$H^*(Bj; \mathbb{Q}) : \wedge(y_1, \dots, y_{2n}) \rightarrow \wedge(y'_1, \dots, y'_n), \quad y_i \mapsto \begin{cases} (-1)^j y'_j & \text{si } i = 2j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H(Bf; \mathbb{Q}) : \wedge(y_1, \dots, y_{2n}) \rightarrow \wedge u, \quad y_i \mapsto \lambda_i u^i, \quad \lambda_i \in \mathbb{Q}$$

d'où les formules

$$d(1 \otimes 1 \otimes x_i) = \lambda_i u^i \otimes 1 \otimes 1 - \begin{cases} (-1)^j \otimes y'_j \otimes 1 & \text{si } i = 2j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La différentielle ne dépend que du $n + 1$ -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{Q}^{\times n+1}$.

CHAPITRE 5

Le produit de Chas-Sullivan.

Dans ce chapitre nous spécialisons la construction générale des opérations $\Phi_{g,p+q}$ vue au chapitre précédent au cas du produit de Chas-Sullivan $\Phi_{0,2+1}$. Nous retrouvons par notre méthode les cas classiques des sphères et des espaces projectifs complexes. Nous montrons que le produit de Chas-Sullivan pour l'espace de Borel associé à l'action de S^1 sur un espace projectif complexe est nul ou non suivant le paramétrage de cette action.

5.1 Construction générale.

5.1.1 Retour à la topologie

Rappelons que X est toujours un espace simplement connexe de Gorenstein sur $k = \mathbb{Q}$ de dimension d . Le produit de Chas-Sullivan est un cas particulier des opérations d'ordre supérieur

$$\Phi_{g,p+q} : H_*(LX)^{\otimes p} \longrightarrow (H_*(LX)^{\otimes q})_{*+d\chi},$$

obtenu à partir de l'espace X et du 2-cobordisme $F_{0,2+1}$ de genre $g = 0$ ayant deux composantes de bord entrant et une composante de bord sortant, et de caractéristique d'Euler $\chi_S = 2 - 2 \times 0 - 1 - 2 = -1$. C.f. figure 5 section 2.4.

Rappelons la fibration des lacets libres vue en §3.6.2. Du diagramme 2.1 nous déduisons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{map}(S^1 \amalg S^1, X) & \xleftarrow{r_{in}} & \text{map}(F_{0,2+1}, X) & \xrightarrow{r_{out}} & \text{map}(S^1, X) \\
 \parallel & & \downarrow \simeq & & \parallel \\
 LX \times LX & \xleftarrow{incl} & LX \times_X LX & \xrightarrow{Comp} & LX \\
 \downarrow ev_0 \times ev_0 & & \downarrow q_{F_{0,2+1}} & & \\
 X^2 & \xleftarrow{\Delta} & X & &
 \end{array}$$

5.1 Construction générale.

où :

- $LX \times_X LX = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in LX \times LX : \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$.
- L'application $Comp : LX \times_X LX \rightarrow LX$ est la concaténation des lacets définie pour tous $(\gamma_1, \gamma_2) \in LX \times_X LX$ par :

$$Comp(\gamma_1, \gamma_2)(t) = (\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad t \in I = [0, 1]$$

- $q_{F_{0,2+1}}(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$
- Les rectangles supérieurs de gauche et de droite sont commutatifs à homotopie près.
- Le rectangle inférieur de gauche est un produit fibré.

Nous en déduisons que

- L'application linéaire

$$H^*(LX) \longrightarrow (H^*(LX) \otimes H^*(LX))^{*+d}$$

obtenue comme la composée :

$$H^*(LX) \xrightarrow{H(Comp)} H^*(LX \times_X LX) \xrightarrow{incl^! = H(\rho_{in}^!)} (H^*(LX) \otimes H^*(LX))^{*+d}$$

se dualise en l'opération

$$\Phi_{0,2+1} : H_*(LX) \otimes H_*(LX) \longrightarrow H_{*-d}(LX)$$

où l'application $\rho_{in}^! : \mathcal{M}_{LM} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{LM} \rightarrow \mathcal{M}_{LM} \otimes \mathcal{M}_{LM}$ est un représentant de Sullivan qui induit l'application de Gysin de l'inclusion $incl : LX \times_X LX \hookrightarrow LX \times LX$.

5.1.2 Usage des modèles de Sullivan

Dans cette partie nous décrivons en termes de modèles de Sullivan les applications

$$Comp : LX \times_X LX \rightarrow LX \quad \text{et} \quad incl : LX \times_X LX \hookrightarrow LX \times LX$$

afin d'en déduire celles qui induisent le dual du produit de Chas-Sullivan Dlp .

Notons $Comp' : X^I \times_X X^I \rightarrow X^I$ la concaténation des chemins.

Il résulte du lemme de relèvement à homotopie près (§3.5.1) le résultat suivant :

Lemme 5.1.1. *Il existe un unique homomorphisme $m_{Comp'}$ d'algèbres différentielles gra-*

duées tel que , dans le diagramme suivant, le carré supérieur commute pendant que le carré inférieur commute à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_X & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \mathcal{M}_X \\
 \mathcal{M}_{(\sigma,\sigma)} \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow m_\sigma \\
 \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I} & \xleftarrow{m_{Comp'}} & \mathcal{M}_{X^I} \\
 \lambda_q \uparrow & & \uparrow \lambda_{ev_{0,1}} \\
 \mathcal{M}_X^{\otimes 3} & \xleftarrow{m_{pr_{1,3}}} & \mathcal{M}_X^{\otimes 2}
 \end{array}$$

L'application $\sigma : X \xrightarrow{\simeq} X^I$ (respectivement $(\sigma, \sigma) : X \xrightarrow{\simeq} X^I \times_X X^I$) est la section canonique de la fibration des chemins $ev_0 : X^I \rightarrow X$ (respectivement la section canonique de la fibration $q : X^I \times_X X^I \rightarrow X$) définie pour tout $x \in X$ par $\sigma(x) = \hat{x}$ (respectivement $(\sigma, \sigma)(x) = (\hat{x}, \hat{x})$), où \hat{x} désigne le lacet constant en x .

Les homomorphismes d'adg λ_q , $\lambda_{ev_{(0,1)}}$ et $m_{pr_{1,3}}$ sont définis respectivement par :

$$\begin{cases}
 \lambda_q(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes \bar{1} \otimes_{\mathcal{M}_X} 1 \otimes z \otimes \bar{1} = x \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes_{\mathcal{M}_X} y \otimes z \otimes \bar{1}, \\
 \lambda_{ev_{(0,1)}}(x \otimes y) = x \otimes y \otimes \bar{1}, \\
 m_{pr_{1,3}}(a \otimes b) = a \otimes 1 \otimes b; \quad x, y, z, a, b \in \mathcal{M}_X
 \end{cases}$$

Avec $p_{1,3} : X^3 \rightarrow X^2$ défini pour tous $x, y, z \in X$ par $p_{1,3}(x, y, z) = (x, z)$.

D'autre part le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{M}_{X^I} & \xrightarrow{m_{Comp'}} & \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I} & \xrightarrow{\cong} & (\mathcal{M}_X^{\otimes 3} \otimes (\wedge V)^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{X^I \times_X X^I} \\
 \downarrow m_j = \mu \otimes id & & \downarrow m_j \otimes m_j \\
 & & \mathcal{M}_X & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mu \circ (\mu \otimes id) \otimes id \\
 \mathcal{M}_{LX} & \xrightarrow{m_{Comp}} & \mathcal{M}_{LX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{LX} & \xrightarrow{\cong} & (\mathcal{M}_X \otimes (\wedge V)^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{LX \times_X LX}
 \end{array}$$

où l'application $LX \xrightarrow{j} X^I$ désigne l'inclusion, permet d'affirmer (§3.5.1) :

Proposition 5.1.2. *L'homomorphisme m_{Comp} est un représentant de Sullivan de Comp : $LX \times_X LX \rightarrow LX$.*

5.1 Construction générale.

Pour ce qui est de l'application de Gysin de l'inclusion

$$\text{incl} : LX \times_L LX \hookrightarrow LX \times LX$$

notons que l'application diagonale $\Delta : X \rightarrow X^2$ fait de $C^*(X)$ un $C^*(X^2)$ – module. D'après le théorème 2.3.3

$$\text{Ext}_{C^*(X^2)}^d(C^*(X), C^*(X^2)) \cong H^0(X) \cong \mathbb{Q}$$

Remarque 5.1.3. Dans ce cas, tout cocycle f de degré d de $(\text{Hom}_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}}(\mathcal{M}_{X^1}, \mathcal{M}_X^{\otimes 2}), D)$, qui n'est pas un cobord satisfait la relation

$$H(f) \in \text{Ext}_{C^*(X^2)}^d(C^*(X), C^*(X^2)) \cong H^0(X) \cong \mathbb{Q}; \text{ de plus } \Delta! = H(f) \circ H(\sigma)^{-1}.$$

Notons que deux tels cocycles f et f' sont homotopes, à une constante multiplicative près. L'existence d'une telle classe d'homotopie d'applications $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ – linéaires de degré d constitue le point crucial de la description du produit de Chas-Sullivan ($r = 1, k = 2$), et plus généralement des opérations d'ordre supérieur $\Phi_{g,p+q}$ en théorie des cordes.

Notation 5.1.4. Soit Y, Z et W des espaces topologiques connexes par arcs, $g : Y \rightarrow W$ et $h : Z \rightarrow W$ des applications continues. Alors \mathcal{M}_Y (respectivement \mathcal{M}_Z) est un \mathcal{M}_W -module à droite (respectivement à gauche) via $m_g : \mathcal{M}_W \rightarrow \mathcal{M}_Y$ (respectivement $m_h : \mathcal{M}_W \rightarrow \mathcal{M}_Z$); l'action étant définie par :

$$y.a = ym_g(a) \text{ (respectivement } a.z = m_h(a)z); a \in \mathcal{M}_W, y \in \mathcal{M}_Y, z \in \mathcal{M}_Z.$$

Par suite l'adg $\mathcal{M}_Y \otimes_{\mathcal{M}_W} \mathcal{M}_Z$ est un \mathcal{M}_W -module à gauche via l'action

$$\begin{aligned} a.(y \otimes_{\mathcal{M}_W} z) &= (-1)^{|a||y|} ym_g(a) \otimes_{\mathcal{M}_W} z \\ &= (-1)^{|a||y|} y \otimes_{\mathcal{M}_W} m_h(a)z \end{aligned}$$

Ces propriétés seront résumées par la notation :

$$(\mathcal{M}_Y \otimes_{\mathcal{M}_W} \mathcal{M}_Z)_{g,h}.$$

Proposition 5.1.5. Le diagramme suivant nous permet de décrire en termes de modèles

de Sullivan les applications qui induisent en homologie le dual gradué du produit de Chas-Sullivan $DLp = (\Phi_{0,2+1})^\#$.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}} \mathcal{M}_X)_{ev_{0,1}, \Delta} & \xrightarrow{\cong_1} & (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}, d) = \mathcal{M}_{LM} \\
 \downarrow m_{Comp'} \otimes_{\mathcal{M}_{pr1,3}} Id & (R_1) & \downarrow m_{Comp} \\
 (\mathcal{M}_{X^I \times X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 3}} \mathcal{M}_X)_{q, \Delta_{(3)}} & \xrightarrow{\cong_2} & (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{LX \times LX} \\
 \simeq \uparrow \pi \otimes Id & (R_2) & \parallel \\
 (\mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X)_{(ev_{0,1})^2, \Delta_{(4)}} & \xrightarrow{\cong_3} & (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{LX \times LX} \\
 \simeq \uparrow Id \otimes m_\sigma & (R_3) & \simeq \uparrow \bar{m}_\sigma \\
 (\mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_{X^I})_{(ev_{0,1})^2, \Delta^2 \circ ev_{0,1}} & \xrightarrow{\cong_4} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 3}, d) = \mathcal{M}_E \\
 \downarrow Id \otimes f & (R_4) & \downarrow \bar{f} \\
 (\mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X^{\otimes 2})_{(ev_{0,1})^2, \Delta^2} & \xrightarrow{\cong_5} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) \cong \mathcal{M}_{LX}^{\otimes 2}
 \end{array}$$

- Dans le rectangle supérieur (R_1) ,

Les isomorphismes \cong_1 et \cong_2 sont respectivement définis par :

$$(u_1 \otimes u_2 \otimes \bar{u}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}} a \mapsto (-1)^{\zeta_1} u_1 u_2 \otimes \bar{u} \text{ et}$$

$$(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \otimes \bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 3}} a \mapsto (-1)^{\zeta_2} u_1 u_2 u_3 a \otimes \bar{v}_1 \bar{v}_2;$$

avec $\zeta_1 = |a| |\bar{u}|$ et $\zeta_2 = |a| (|\bar{v}_1| + |\bar{v}_2|)$.

Rappelons que la différentielle sur $\mathcal{M}_{LX} = (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}, d)$ est définie par :

$$d(v \otimes \bar{1}) = dv \otimes \bar{1} \text{ et } d(1 \otimes \bar{v}) = -s(dv \otimes 1)$$

où s est l'unique dérivation de degré -1 sur $\wedge V \otimes \wedge \bar{V}$ telle que :

$$s(v \otimes 1) = 1 \otimes \bar{v}, \text{ et } s(1 \otimes \bar{v}) = 0.$$

5.1 Construction générale.

Sur $\mathcal{M}_{LX \times_x LX} = (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d)$:

$$\begin{cases} d(v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1}) = -s(dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v}) = -s'(dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \end{cases}$$

Ici s et s' sont les seules dérivations de degré -1 sur $\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}$ vérifiant $s \circ s = 0 = s' \circ s'$ et telles que :

$$\begin{cases} s(v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \\ s'(v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \end{cases}$$

- Dans le restangle commutatif (R_2) :

π désigne la surjection canonique définie par :

$$\begin{aligned} \pi((u_1 \otimes u_2 \otimes \bar{u}) \otimes (v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v})) &= (u_1 \otimes u_2 \otimes \bar{u}) \otimes_{\mathcal{M}_X} (v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v}) \\ &= (-1)^{|v_1||\bar{u}|} (u_1 \otimes u_2 v_1 \otimes \bar{u}) \otimes_{\mathcal{M}_X} (1 \otimes v_2 \otimes \bar{v}) \\ &= (-1)^{|u_2||\bar{u}|} (u_1 \otimes 1 \otimes \bar{u}) \otimes_{\mathcal{M}_X} (u_2 v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v}). \end{aligned}$$

Le quasi isomorphisme $\pi \otimes_{Id \otimes \mu \otimes Id} Id$ provient du diagramme commutatif suivant où les carrés de droite et de gauche sont des produits fibrés :

$$\begin{array}{ccccc} X^I \times_X X^I & \xleftarrow{incl} LX \times_X LX & \xrightarrow{incl} & (X^I)^{\times 2} \\ q \downarrow & & \downarrow q_{F_{0,2+1}} & \downarrow (ev_{0,1})^{\times 2} \\ X^3 & \xleftarrow{\Delta(3)} X & \xrightarrow{\Delta(4)} & X^4 \end{array}$$

L'isomorphisme \cong_3 est défini par :

$$(u_1 \otimes u_2 \otimes \bar{u} \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} a \mapsto (-1)^{\zeta_3} u_1 u_2 v_1 v_2 a \otimes \bar{u} \otimes \bar{v};$$

avec $\zeta_3 = (|v_1| + |v_2|)|\bar{u}| + (|\bar{u}| + |\bar{v}|)|a|$.

- Dans le rectangle commutatif (R_3)

L'isomorphisme \cong_4 est défini par :

$$(u_1 \otimes u_2 \otimes \bar{u} \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} (a \otimes b \otimes \bar{c}) \mapsto (-1)^{\zeta_4} u_1 u_2 a \otimes v_1 v_2 b \otimes \bar{u} \otimes \bar{v} \otimes \bar{c};$$

avec $\zeta_4 = (|u_2| + |v_1| + |v_2| + |\bar{u}| + |\bar{v}|)|a| + (|v_1| + |v_2| + |\bar{u}| + |\bar{v}|)|b| + (|\bar{v}_1| + |\bar{v}_2|)|\bar{u}|$.

La différentielle sur $((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 3}, d)$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = dv \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = -s(dv \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1}) = -s(1 \otimes dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v}) = (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} - \sum_{i \geq 1} (d \circ s')^i (dv \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \end{array} \right.$$

Où s , et s' sont les seules dérivations de degré -1 sur $(\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 3}$ telles que $s \circ s = s' \circ s' = 0$ et qui vérifient les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} s(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ s(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \\ s'(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} = s'(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \end{array} \right.$$

L'homomorphisme d'adg \bar{m}_σ induit par le quasi isomorphisme m_σ est également un quasi isomomorphisme. Il est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{m}_\sigma(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ \bar{m}_\sigma(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ \bar{m}_\sigma(1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ \bar{m}_\sigma(1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \\ \bar{m}_\sigma(1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v}) = 0 \end{array} \right.$$

• Dans le restangle commutatif (R_4) :

L'isomomorphisme \cong_5 est défini par :

$$(u_1 \otimes u_2 \otimes \bar{u} \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \bar{v}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} (a \otimes b) \mapsto (-1)^{\zeta_5} u_1 u_2 a \otimes v_1 v_2 b \otimes \bar{u} \otimes \bar{v};$$

avec $\zeta_5 = \zeta_4 = (|u_2| + |v_1| + |v_2| + |\bar{u}| + |\bar{v}|)|a| + (|v_1| + |v_2| + |\bar{u}| + |\bar{v}|)|b| + (|\bar{v}_1| + |\bar{v}_2|)|\bar{u}|$.
L'application $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ -linéaire f de degré d est définie telle que

$$H(f) \in Ext_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}}^d(\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_X^{\otimes 2}) \cong \mathbb{Q} \text{ (Théorème 2.3.2).}$$

5.2 Cas de la sphère $X = S^n$, $n > 1$.

Par suite :

$$\bar{f}(u \otimes v \otimes \bar{x} \otimes \bar{y} \otimes \bar{z}) = (-1)^\zeta (u \otimes v) f(1 \otimes 1 \otimes \bar{z}) \otimes \bar{x} \otimes \bar{y},$$

avec $\zeta = |d|(|u| + |v|) + |\bar{z}|(|\bar{x}| + |\bar{y}|)$.

A présent on peut déduire de ce qui précède que :

Proposition 5.1.6. *Si X est un espace de Gorenstein sur \mathbb{Q} , de dimension formelle d , et simplement connexe alors le dual du produit de Chas-Sullivan $Dlp := (\Phi_{0,2+1})^\# : H^*(LX) \rightarrow (H^*(LX) \otimes H^*(LX))^{*+d}$ est défini comme la composée des applications suivantes :*

$$Dlp = H(\bar{f}) \circ H(\bar{m}_\sigma)^{-1} \circ H(m_{Comp}).$$

5.2 Cas de la sphère $X = S^n$, $n > 1$.

C'est donc un espace de Gorenstein sur \mathbb{Q} , simplement connexe et de dimension formelle n .

Cas de la sphère de dimension impaire $n > 1$. Rappelons que :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_X = (\wedge x, 0) \cong (H^*(X), 0); \\ \mathcal{M}_{LX} = (\wedge(x, \bar{x}), 0) \cong (H^*(LX), 0); \\ \mathcal{M}_{LX \times_X LX} = (\wedge(x, \bar{x}, \tilde{x}), 0) \cong (H^*(LX \times_X LX), 0) \end{cases} ; |x| = n, |\bar{x}| = |\tilde{x}| = n - 1.$$

$$\mathcal{M}_{Comp}(\bar{x}) = \bar{x} + \tilde{x}.$$

Considérons par abus de notation, $\bar{x}^l, x\bar{x}^s$; $l, s \in \mathbb{N}$ comme une base de $H^*(LX)$. Alors on a $H(Comp)(x\bar{x}^s) = x(\bar{x} + \tilde{x})^s$, car m_{Comp} est un homomorphisme d'adg vu aussi comme une application \mathcal{M}_X – linéaire.

Déterminons à présent l'application $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ – linéaire

$$f : \mathcal{M}_{X^I} = (\wedge(x, x', \bar{x}), d) \longrightarrow (\wedge(x, x', 0) = \mathcal{M}_X^{\otimes 2}$$

de degré n annoncée dans le théorème 2.3.2. Il nous suffit de définir l'application $(\wedge(x, x', 0))$ – linéaire f sur 1 et \bar{x} . Pour des raisons de degrés, on pose :

$$f(1) = \alpha x + \beta x' \text{ et } f(\bar{x}) = 0; \alpha, \beta \in \mathbb{Q}.$$

La relation $d \circ f - (-1)^n f \circ d = d \circ f + f \circ d = 0$ donne $\beta = -\alpha$. D'où $f(1) = \alpha(x - x')$; $\alpha \in \mathbb{Q}$. Remarquons que f n'est pas un cobord dans $(Hom_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}}(\mathcal{M}_X^l, \mathcal{M}_X^{\otimes 2}), D)$ si, et seulement si, $\alpha \neq 0$; si bien que nous posons

$$f(1) = x - x' \text{ et } f(\bar{x}) = 0.$$

D'autre part nous avons :

$$m_\sigma(x) = m_\sigma(x') = x \text{ et } m_\sigma(\bar{x}) = 0.$$

Enfin le dual du produit de Chas-Sullivan

$$Dlp : H^*(LX) = (\wedge x \otimes \wedge \bar{x}) \longrightarrow ((\wedge x \otimes \wedge \bar{x}) \otimes (\wedge x \otimes \wedge \bar{x})) = H^*(LX)^{\otimes 2}$$

est défini pour tous $l, s \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} Dlp(1 \otimes \bar{x}^l) &= (x \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes x \otimes 1)(1 \otimes \bar{x} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{x})^l \\ Dlp(x \otimes \bar{x}^s) &= -(x \otimes 1 \otimes x \otimes 1)(1 \otimes \bar{x} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{x})^s; \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} Dlp(1 \otimes \bar{x}^{[l]}) &= (x \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes x) \sum_{i=0}^l (1 \otimes \bar{x}^{[i]}) \otimes (1 \otimes \bar{x}^{[l-i]}) \\ Dlp(x \otimes \bar{x}^{[s]}) &= - \sum_{j=0}^s (x \otimes \bar{x}^{[j]}) \otimes (x \otimes \bar{x}^{[s-j]}), \end{aligned}$$

où $A^{[r]} = A^r/r!$; $A \in H^*(LX)$, $r \in \mathbb{N}$.

La base duale de la base $\bar{x}^l, x\bar{x}^s$, est donnée par : a_l, b_s , avec $|a_l| = (n-1)l$, $|b_s| = n + (n-1)s$; $l, s \in \mathbb{N}$. C'est une base de $H_*(LX)$.

En posant $Lp(u \otimes v) = \Phi_{0,2+1}(u \otimes v) = u \bullet v$, on a les relations :

$$b_p \bullet b_q = b_{p+q}; \quad a_p \bullet b_q = a_{p+q} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

En posant $\mathbb{H}_*(LX) = H_{*+n}(LX)$, on retrouve ainsi un résultat de Ralph, Jones et Jun Yan à savoir :

$$\text{Pour } n > 1 \text{ et } n \text{ impair, } \mathbb{H}_*((LS^n); \mathbb{Q}) \cong \wedge(a) \otimes \mathbb{Q}[u]$$

Où $a \in \mathbb{H}_{-n}(LS^n)$ et $u \in \mathbb{H}_{n-1}(LS^n)$.

5.2 Cas de la sphère $X = S^n$, $n > 1$.

Cas de la sphère de dimension paire $n \geq 2$. Nous avons $\mathcal{M}_X = (\wedge(x, y), d); |x| = n, dy = x^2$.

$$\mathcal{M}_{LX} = (\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}), d) \text{ avec } d\bar{y} = -2x\bar{x}.$$

et

$$\mathcal{M}_{LX \times_L LX} = (\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d) \text{ où } d\bar{y} = -2x\bar{x}; d\tilde{y} = -2x\tilde{x}.$$

Nous avons également :

$$m_{Comp}(\bar{x}) = \bar{x} + \tilde{x}; m_{Comp}(\bar{y}) = \bar{y} + \tilde{y} + \bar{x}\tilde{x}.$$

L'application $(\wedge(x, y, x', y'), d)$ -linéaire

$$f : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y, x', y'), d)$$

définie par :

$$\begin{cases} f(1) = x + x' \\ f(\bar{x}) = y' - y \\ f(\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

vérifie les conditions du théorème 2.3.2.

L'application induite

$$\bar{f} : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}, \hat{x}, \hat{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d)$$

satisfait

$$\begin{cases} \bar{f}(1) = x + x' \\ \bar{f}(\bar{x}) = (x + x')\bar{x}, \quad \bar{f}(\tilde{x}) = (x + x')\tilde{x}, \quad \bar{f}(\hat{x}) = y' - y \\ \bar{f}(\bar{y}) = (x + x')\bar{y}, \quad \bar{f}(\tilde{y}) = (x + x')\tilde{y}, \quad \bar{f}(\hat{y}) = 0. \end{cases}$$

L'homomorphisme d'adg

$$m_\sigma : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y), d)$$

est défini par :

$$m_\sigma(x) = x = m_\sigma(x'), \quad m_\sigma(y) = y = m_\sigma(y'), \quad m_\sigma(\bar{x}) = 0 = m_\sigma(\bar{y}).$$

Pour passer en homologie, il est nécessaire pour nous de déterminer $H^*(X)$. Remarquons que nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\wedge(x, y), d) & \hookrightarrow & (\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}), d) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ (\wedge(x)/(x^2), 0) & \hookrightarrow & (\wedge(x)/(x^2), 0)_{\wedge(x, y)}(\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}), d) \end{array}$$

qui nous permet d'avoir la relation

$$H^*(LX) \cong H((\wedge(x)/(x^2) \otimes \wedge(\bar{x}, \bar{y}), \bar{d}))$$

via l'isomorphisme

$$(\wedge(x)/(x^2), 0)_{\wedge(x, y)}(\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}), d) \xrightarrow{\cong} (\wedge(x)/(x^2) \otimes \wedge(\bar{x}, \bar{y}), \bar{d}).$$

Ici \bar{d} est la différentielle déduite de d par passage au quotient.

Une base de $H^*(LX)$ est donnée (par abus de notation) par :

$$\{1, x \otimes \bar{y}^l, 1 \otimes \bar{x}\bar{y}^s; l, s \in \mathbb{N}\}$$

Le dual du loop produit

$$Dlp : H((\wedge(x)/(x^2) \otimes \wedge(\bar{x}, \bar{y}), \bar{d})) \rightarrow (H((\wedge(x)/(x^2) \otimes \wedge(\bar{x}, \bar{y}), \bar{d}))^{\otimes 2})$$

est définie sur cette base par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Dlp(1) = x \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \\ Dlp(x \otimes \bar{y}^{[l]}) = \sum_{i=0}^l x \otimes \bar{y}^{[i]} \otimes x \otimes \bar{y}^{[l-i]} \\ Dlp(1 \otimes \bar{x}\bar{y}^{[s]}) = (x \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{x} - 1 \otimes \bar{x} \otimes x \otimes 1) \sum_{j=0}^s 1 \otimes \bar{y}^{[j]} \otimes 1 \otimes \bar{y}^{[s-j]} \end{array} \right.$$

Soit $\{1, c_l, e_s; |c_l| = n + (2n - 2)l, |e_s| = n - 1 + (2n - 2)s, l, s \in \mathbb{N}\}$ la base duale de la base $\{1, x \otimes \bar{y}^l, 1 \otimes \bar{x}\bar{y}^s\}$; c'est une base de $H_*(LX)$.

Dès lors, le produit de Chas-Sullivan est défini explicitement par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \bullet 1 = 0, 1 \bullet c_0 = c_0 \bullet 1 = 1, 1 \bullet c_r = 0, 1 \bullet e_s = 0; r \geq 1, s \geq 0; \\ c_p \bullet c_q = c_{p+q}, c_p \bullet e_q = e_{p+q}; p, q \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

5.3 Cas de l'espace projectif complexe. $X = \mathbb{C}P^n, n \geq 1$.

Ce qui justifie l'isomorphisme d'algèbres graduées :

$$(\mathbb{H}_*(LS^n); \mathbb{Q}) \cong \wedge(b) \otimes \mathbb{Q}[a, v]/(a^2, ab, av)$$

où $a \in \mathbb{H}_{-n}(LS^n)$, $b \in \mathbb{H}_{-1}((LS^n)$, et $v \in \mathbb{H}_{2n-2}(LS^n)$.

5.3 Cas de l'espace projectif complexe. $X = \mathbb{C}P^n, n \geq 1$.

Nous avons $\mathcal{M}_X = (\wedge(x, y), d); |x| = 2, dy = x^{n+1}$.

$$\mathcal{M}_{LX} = (\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}), d) \text{ avec } d\bar{y} = -(n+1)x\bar{x}.$$

et

$$\mathcal{M}_{LX \times_X LX} = (\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d) \text{ où } d\bar{y} = -(n+1)x\bar{x}; d\tilde{y} = -(n+1)x\tilde{x}.$$

Nous avons également :

$$m_{Comp}(\bar{x}) = \bar{x} + \tilde{x}; m_{Comp}(\bar{y}) = \bar{y} + \tilde{y} + \frac{n(n+1)}{2}\bar{x}\tilde{x}.$$

Définissons à présent l'application $(\wedge(x, y, x', y'), d)$ -linéaire

$$f : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y, x', y'), d)$$

Pour des raisons de degrés, nous avons

$$f(1) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i x'^{n-i} \text{ et } f(\bar{x}) = \beta y + \beta' y'; \beta, \beta', \alpha_i \in \mathbb{Q} (i = 0, 1, \dots, n).$$

La relation de compatibilité aux différentielles

$$d[f(\bar{x})] = f(d\bar{x})$$

nous conduit aux relations

$$\beta = -\alpha_n, \beta' = \alpha_0, \text{ et } \alpha_i = \alpha_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1.$$

D'où

$$f(1) = \alpha \sum_{i=0}^n x^i x'^{m-i} \text{ et } f(\bar{x}) = \alpha(y' - y), \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Dès lors, f n'est pas un cobord dans $Hom_{m_x^{\otimes 2}}^{2n}(\mathcal{M}_{X^1}, \mathcal{M}_x^{\otimes 2})$ si, et seulement si, $\alpha \neq 0$. Ceci nous permet donc de poser :

$$\begin{cases} f(1) = \sum_{i=0}^n x^i x'^{m-i} \\ f(\bar{x}) = y' - y \\ f(\bar{y}) = 0. \end{cases}$$

L'application induite

$$\bar{f} : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}, \hat{x}, \hat{y}), d) \rightarrow (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d)$$

satisfait

$$\begin{cases} \bar{f}(1) = \sum_{i=0}^n x^i x'^{m-i} \\ \bar{f}(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n x^i x'^{m-i} \bar{x}, \quad \bar{f}(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^n x^i x'^{m-i} \tilde{x}, \quad \bar{f}(\hat{x}) = y' - y \\ \bar{f}(\bar{y}) = \sum_{i=0}^n x^i x'^{m-i} \bar{y}, \quad \bar{f}(\tilde{y}) = \sum_{i=0}^n x^i x'^{m-i} \tilde{y}, \quad \bar{f}(\hat{y}) = 0. \end{cases}$$

L'homomorphisme d'adg

$$m_\sigma : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y), d)$$

est défini par :

$$m_\sigma(x) = x = m_\sigma(x'), \quad m_\sigma(y) = y = m_\sigma(y'), \quad m_\sigma(\bar{x}) = 0 = m_\sigma(\bar{y}).$$

Pour le passage en homologie, nous avons la relation

$$H^*(LX) = H((\wedge(x)/(x^{n+1}) \otimes \wedge(\bar{x}, \bar{y}), \bar{d})).$$

Ici \bar{d} est la différentielle déduite de d par passage au quotient.

Une base de $H^*(LX)$ est donnée (par abus de notation) par :

$$\{1, x^k \otimes \bar{y}^l, x^r \otimes \bar{x}\bar{y}^s; 1 \leq k \leq n, 0 \leq r \leq n-1, l, s \in \mathbb{N}\}.$$

5.4 Cas du quotient homotopique associé à une action de groupe.

Alors,

$$Dlp : H((\wedge(x)/(x^{n+1}) \otimes \wedge(\bar{x} \bar{y}), \bar{d})) \rightarrow (H((\wedge(x)/(x^{n+1}) \otimes \wedge(\bar{x} \bar{y}), \bar{d})))^{\otimes 2}$$

est défini sur cette base par :

$$\begin{cases} Dlp(1) = \sum_{i=0}^n x^i \otimes 1 \otimes x^{n-i} \otimes 1 \\ Dlp(x^k \otimes \bar{y}^{[l]}) = \sum_{i=1}^{n+k} \sum_{j=0}^l x^i \otimes \bar{y}^{[j]} \otimes x^{n+k-i} \otimes \bar{y}^{[l-j]} \\ Dlp(x^r \otimes \bar{x}\bar{y}^{[s]}) = \sum_{i=1}^{n+r} \sum_{j=0}^s x^i \otimes \bar{x}\bar{y}^{[j]} \otimes x^{n+r-i} \otimes \bar{y}^{[l-j]} + \sum_{i=1}^{n+r} \sum_{j=0}^s x^i \otimes \bar{y}^{[j]} \otimes x^{n+r-i} \otimes \bar{x}\bar{y}^{[l-j]} . \end{cases}$$

avec $1 \leq k \leq n$, $0 \leq r \leq n-1$; $l, s \in \mathbb{N}$.

Soit $\{1, a_{k,l}, b_{r,s}; |a_{k,l}| = 2k + 2nl, |b_{r,s}| = 2r + 1 + 2ns; 1 \leq k \leq n, 0 \leq r \leq n-1, l, s \in \mathbb{N}\}$ la base duale de la base $\{1, x^k \otimes \bar{y}^l, x^r \otimes \bar{x}\bar{y}^s\}$. C'est une base de $H_*(LX)$.

Dès lors, le produit de Chas-Sullivan est défini explicitement par les relations :

$$\begin{cases} 1 \bullet a_{n,0} = 1, a_{k,0} \bullet a_{n-k,0} = 1, 1 \bullet a_{k,l+1} = 0, 1 \bullet b_{r,s} = 0; \\ a_{k,l} \bullet a_{k',l'} = a_{k+k'-n,l+l'}, a_{k,l} \bullet b_{r,s} = b_{k+r-n,l+s}. \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} (a_{n-1,0})^n = 1, 1 \bullet a_{n,1} = 0, 1 \bullet b_{n-1,0} = 0; \\ a_{k,l} = (a_{n,1})^l (a_{n-1,0})^{n-k}, b_{r,s} = (a_{n,1})^s (a_{n-1,0})^{n-r-1} b_{n-1,0}. \end{cases}$$

Désignons par a, b , et t des éléments de $\mathbb{H}_*(LCP^n)$ représentant respectivement les éléments $a_{n-1,0}, b_{n-1,0}$ et $a_{n,1}$. Nous obtenons alors l'isomorphisme d'algèbres graduées :

$$\mathbb{H}_*(LCP^n; \mathbb{Q}) \cong \wedge(a, b, t)/(\wedge(a^{n+1}, a^n b, a^n t))$$

où $|a| = -2$, $|b| = -1$ et $|t| = 2n$ (cf. [21]).

5.4 Cas du quotient homotopique associé à une action de groupe.

Considérons le cas particulier (§4.6) où $G = U(n+1)$ et $K = U(n) \times U(1)$, ($n \geq 1$). Alors $G/K \cong \mathbb{C}P^n$ et l'action de S^1 sur G/K est définie par $:e^{2\pi i \theta} \cdot (x, gG/K) =$

$(x, (h(e^{2\pi i\theta})g)G/K)$. Notons $H^*(BS^1; \mathbb{Q}) = \wedge u$ avec $|u| = 2$ et $E_h := ES^1 \times_h G/K$. L'espace E_h est un espace de Gorenstein simplement connexe, de dimension formelle $2n - 1$. Rappelons (C.f. section 4.5) que le modèle minimal de l'espace E_h est de la forme : $\mathcal{M}_{E_h} = (\wedge(u, v, x), d)$, avec $|u| = |v| = 2, du = dv = 0$ et $dx = \lambda u^{n+1} + v^{n+1}$, où $\lambda \in \mathbb{k}$ est une constante déterminée par $H^*(Bh)$.

1. $\lambda = 0$. Dans ce cas l'espace de Borel E_h est le produit $BS^1 \times \mathbb{C}P^n$ et $\mathcal{M}_{E_h} = (\wedge u \otimes \wedge(v, x), d)$ avec $|u| = |v| = 2; du = dv = 0, dx = v^{n+1}$.

Un modèle de Sullivan relatif de la fibration des chemins $E_h^I \rightarrow E_h \times E_h$ fournit la résolution semi-libre de \mathfrak{M}_{E_h} :

$\mathfrak{M}_{E_h^I} = (\wedge(u, v, x, u', v', x', \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d)$ où $|\bar{u}| = |\bar{v}| = 1, |\bar{x}| = 2n$ et

$$d\bar{u} = u' - u; \quad d\bar{v} = v' - v; \quad d\bar{x} = x' - x - \sum_{i+j=n} v^i v'^j \bar{v}$$

$\mathfrak{M}_{E_h^I \times_{E_h} E_h^I} = (\wedge(u, v, x, u', v', x', u'', v'', x'', \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d)$ avec

$$\begin{cases} d\bar{u} = u' - u; \quad d\bar{v} = v' - v; \quad d\tilde{u} = u'' - u'; \quad d\tilde{v} = v'' - v'; \\ d\bar{x} = x' - x - \sum_{i+j=n} v^i v'^j \bar{v}; \quad d\tilde{x} = x'' - x' - \sum_{j+k=n} v'^j v''^k \tilde{v}. \end{cases}$$

$\mathfrak{M}_{LE_h} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d)$ où $d\bar{u} = d\bar{v} = 0$ et $d\bar{x} = -(n+1)v^n \bar{v}$.

$\mathfrak{M}_{LE_h \times_{E_h} LE_h} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d)$,

avec $d\bar{u} = d\bar{v} = 0, d\bar{x} = -(n+1)v^n \bar{v}, d\tilde{u} = d\tilde{v} = 0, d\tilde{x} = -(n+1)v^n \tilde{v}$.

Un représentant de Sullivan $\mathfrak{M}_{Comp'} : \mathfrak{M}_{E_h^I} \rightarrow \mathfrak{M}_{E_h^I \times_{E_h} E_h^I}$ de la composition des chemins

$Comp' : E_h^I \times_{E_h} E_h^I \rightarrow E_h^I$ est donné par :

$$\mathfrak{M}_{Comp'} : \begin{cases} u \mapsto u, \quad v \mapsto v, \quad x \mapsto x, \quad u' \mapsto u'', \quad v' \mapsto v'', \quad x' \mapsto x'', \\ \bar{u} \mapsto \bar{u} + \tilde{u}, \quad \bar{v} \mapsto \bar{v} + \tilde{v}, \quad \bar{x} \mapsto \bar{x} + \tilde{x} + \sum_{p+q+r=n-1} v^p v'^q v''^r \bar{v} \tilde{v}. \end{cases}$$

Nous en déduisons un représentant de Sullivan $\mathfrak{M}_{Comp} : \mathfrak{M}_{LE_h} \rightarrow \mathfrak{M}_{LE_h \times_{E_h} LE_h}$ de la composition des lacets libres $Comp : LE_h \times_{E_h} LE_h \rightarrow LE_h$ tel que :

$$\mathfrak{M}_{Comp} : \begin{cases} \bar{u} \mapsto \bar{u} + \tilde{u}, \quad \bar{v} \mapsto \bar{v} + \tilde{v}, \\ \bar{x} \mapsto \bar{x} + \tilde{x} + \frac{n(n+1)}{2} v^{n-1} \bar{v} \tilde{v}. \end{cases}$$

5.4 Cas du quotient homotopique associé à une action de groupe.

L'application $\mathfrak{M}_{E_h}^{\otimes 2}$ -linéaire de degré $2n - 1$, $f : \mathfrak{M}_{E_h^I} \longrightarrow \mathfrak{M}_{E_h}^{\otimes 2}$ annoncée dans la proposition 5.1.5 est un cocycle (qui n'est pas un cobord) du complexe $(Hom_{\mathfrak{M}_{E_h}^{\otimes 2}}(\mathfrak{M}_{E_h^I}, \mathfrak{M}_{E_h}^{\otimes 2}), D)$ de degré d où $Dh = d \circ h - (-1)^{|h|} h \circ d$. Pour des raisons de degrés et de compatibilité aux différentielles nous obtenons le candidat suivant :

$$f : \begin{cases} 1 \longmapsto 0 \\ \bar{u} \longmapsto \sum_{i+j=n} v^i v'^j + (u' - u)P, & \bar{v} \longmapsto (v' - v)P, & \bar{x} \longmapsto (x' - x)P, & P = \sum_{k+l=n-1} u^k u'^l; \\ \bar{u}\bar{v} \longmapsto x - x', & \bar{u}^\epsilon \bar{v}^{\epsilon'} \bar{x}^k \longmapsto 0, & \text{pour } \epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\} \text{ et } (1 + \epsilon + \epsilon')k \geq 2, & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

D'autre part l'homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\mathfrak{M}_\sigma : \mathfrak{M}_{E_h^I} \longrightarrow \mathfrak{M}_{E_h}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\sigma(u) &= u = \mathfrak{M}_\sigma(u'), & \mathfrak{M}_\sigma(v) &= v = \mathfrak{M}_\sigma(v'), & \mathfrak{M}_\sigma(x) &= x = \mathfrak{M}_\sigma(x') \\ \text{et} & & \mathfrak{M}_\sigma(\bar{u}) &= \mathfrak{M}_\sigma(\bar{v}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$Dlp(\bar{v}\bar{x}) = (v \otimes 1 - 1 \otimes v) \sum_{i+j=n-1} \sum_{k+l=n} u^i v^k \otimes u^j v^l,$$

et le produit de Chas-Sullivan est non nul sur E_h .

2. $\lambda = 1$. Dans ce cas un modèle minimal de l'espace de Borel E_h est donné par $\mathcal{M}_{E_h} = (\wedge(u, v, x), d)$ avec $|u| = |v| = 2$; $du = dv = 0$, $dx = u^{n+1} + v^{n+1}$. Dès lors nous obtenons :

$\mathfrak{M}_{LE_h} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d)$ où $d\bar{u} = d\bar{v} = 0$ et $d\bar{x} = -(n+1)(u^n \bar{u} + v^n \bar{v})$. Par suite

$$\mathfrak{M}_{LE_h \times_{E_h} LE_h} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d),$$

avec $d\tilde{u} = d\tilde{v} = 0$, $d\tilde{x} = -(n+1)(u^n \tilde{u} + v^n \tilde{v})$, $d\tilde{u} = d\tilde{v} = 0$, $d\tilde{x} = -(n+1)(u^n \tilde{u} + v^n \tilde{v})$.

Un représentant de Sullivan $\mathfrak{M}_{Comp} : \mathfrak{M}_{LE_h} \longrightarrow \mathfrak{M}_{LE_h \times_{E_h} LE_h}$ de la composition des lacets libres $Comp : LE_h \times_{E_h} LE_h \longrightarrow LE_h$ est défini tel que :

$$\mathfrak{M}_{Comp} : \begin{cases} \bar{u} \mapsto \bar{u} + \tilde{u}, & \bar{v} \mapsto \bar{v} + \tilde{v}, \\ \bar{x} \mapsto \bar{x} + \tilde{x} + \frac{n(n+1)}{2}(u^{n-1} \bar{u} \tilde{u} + v^{n-1} \bar{v} \tilde{v}). \end{cases}$$

L'application $\mathfrak{M}_{E_h}^{\otimes 2}$ -linéaire de degré $2n - 1$, $f : \mathfrak{M}_{E_h^I} \longrightarrow \mathfrak{M}_{E_h}^{\otimes 2}$ annoncée dans la proposition 5.1.5 est un cocycle (qui n'est pas un cobord) du complexe $(Hom_{\mathfrak{M}_{E_h}^{\otimes 2}}(\mathfrak{M}_{E_h^I}, \mathfrak{M}_{E_h}^{\otimes 2}), D)$

de degré d où $Dh = d \circ h - (-1)^{|h|} h \circ d$. Pour des raisons de degrés et de compatibilité aux différentielles nous obtenons le candidat suivant :

$$f : \begin{cases} 1 \mapsto 0 \\ \bar{u} \mapsto -\sum_{i+j=n} v^i v'^j, \quad \bar{v} \mapsto \sum_{k+l=n} u^i u'^j, \quad \bar{u}\bar{v} \mapsto x - x', \quad \bar{x} \mapsto 0 \\ \bar{u}^\epsilon \bar{v}^{\epsilon'} \bar{x}^k \mapsto 0; \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

D'autre part l'homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\mathfrak{M}_\sigma : \mathfrak{M}_{E_h^I} \longrightarrow \mathfrak{M}_{E_h}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\sigma(u) &= u = \mathfrak{M}_\sigma(u'), \quad \mathfrak{M}_\sigma(v) = v = \mathfrak{M}_\sigma(v'), \quad \mathfrak{M}_\sigma(x) = x = \mathfrak{M}_\sigma(x') \\ \text{et} \quad \mathfrak{M}_\sigma(\bar{u}) &= \mathfrak{M}_\sigma(\bar{v}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Remarquons que nous avons l'isomorphisme

$$H^*(LX) \cong H(\wedge(u, v)/(u^{n+1} + v^{n+1}) \otimes \wedge(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), \bar{d})$$

où \bar{d} est la différentielle obtenue par passage au quotient. Il s'en suit qu'une base de $H^*(LX)$ est donnée par :

$$\{[u^i v^j \otimes \bar{1}], [u^k v^l \otimes \bar{u}], [u^p v^q \otimes \bar{v}], [u^r v^s \otimes \bar{u}\bar{v}], [u^a v^b \otimes \bar{u}\bar{v}\bar{x}]\}$$

avec $i, k, p, r, a \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j, l, q, s, b \leq n$.

Un calcul de routine de Dlp sur chacun des éléments de cette base nous permet de conclure dans ce cas que le produit de Chas-Sullivan est nul sur l'espace de Borel E_h .

CHAPITRE 6

Le coproduit de Chas-Sullivan

Dans ce chapitre nous spécialisons la construction générale des opérations $\Phi_{g,p+q}$ vue au chapitre 4 au cas du produit de Chas-Sullivan $\Phi_{0,1+2}$. Nous retrouvons par notre méthode les cas classiques des sphères et des espaces projectifs complexes. Nous étendons nos calculs à l'espace de Borel associé à l'action de S^1 sur un espace projectif complexe. X est toujours un espace simplement connexe de Gorenstein sur $k = \mathbb{Q}$ de dimension d . Nous garderons les mêmes notations comme dans le cas du produit de Chas-Sullivan, sauf mention expresse du contraire. Le coproduit de Chas-Sullivan est un cas particulier des opérations d'ordre supérieur

$$\Phi_{g,p+q} : H_*(LX)^{\otimes p} \longrightarrow (H_*(LX)^{\otimes q})_{*+d\chi},$$

obtenu à partir de l'espace X et du 2-cobordisme $F_{0,1+2}$ de genre $g = 0$ ayant une composante de bord entrant et deux composantes de bord sortant, et de caractéristique d'Euler $\chi_S = 2 - 2 \times 0 - 1 - 2 = -1$, C.f. figure 5 section 2.4.

6.1 Construction générale.

6.1.1 Retour à la topologie

D. Chataur et J-C. Thomas [19] ont donné une description en termes de modèles de Sullivan du dual du coproduit de Chas-Sullivan sur un espace à dualité de Poincaré. Nous étendons ici cette description sur tout \mathbb{Q} -espace de Gorenstein simplement connexe.

Du diagramme 2.1 nous déduisons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{map}(S^1, X) & \xleftarrow{r_{in}} & \text{map}(S, X) & \xrightarrow{r_{out}} & \text{map}(S^1 \amalg S^1, X) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \parallel \\
 LX' & \xleftarrow{incl} & LX \times_X LX & \xrightarrow{j} & LX \times LX \\
 \downarrow q_{LX'} & & \downarrow q_S & & \\
 X^2 & \xleftarrow{\Delta} & X & &
 \end{array}$$

où

- $LX' = \{(\alpha, \beta) \in X^I : \alpha(0) = \beta(1) \text{ et } \alpha(1) = \beta(0)\}$;
- $q_{LX'}(\alpha, \beta) = (\alpha(0) = \beta(1), \alpha(1) = \beta(0)), (\alpha, \beta) \in LX'$;
- $q_S(\gamma, \gamma') = \gamma(0) = \gamma'(0), (\gamma, \gamma') \in LX \times_X LX$.

Intéressons-nous à présent au rectangle supérieur gauche du diagramme ci-dessus en justifiant l'équivalence homotopique

$$\text{map}(S^1, X) = LX \simeq LX'.$$

En effet considérons les applications

$$\phi : LX' \longrightarrow LX : (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha * \beta,$$

obtenue en composant les chemins α et β , et

$$\psi : LX \longrightarrow LX', \gamma \longmapsto (\gamma, \gamma(\hat{0})),$$

où \hat{x} est le lacet constant en x , $x \in X$.

Alors

$$\phi \circ \psi(\gamma) = \gamma * \gamma(\hat{0}) \sim \gamma$$

et une homotopie $F : LX' \times I \rightarrow LX'$ entre $\psi \circ \phi$ et $Id_{LX'}$ est définie pour tous $(\alpha, \beta) \in LX'$ et $t \in I$ par :

$$F((\alpha, \beta), t) = (G_t^{\alpha, \beta}, H_t^{\alpha, \beta})$$

$$\text{où : } G_t^{\alpha, \beta}(s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2s}{1+t}) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ \beta(2s - t - 1) & \text{si } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad \text{et } H_t^{\alpha, \beta}(s) = \beta(1 - t + ts)$$

Définition 6.1.1. *L'application linéaire*

$$H^*(LX) \otimes H^*(LX) \longrightarrow H^{*+d}(SX) \cong H^{*+d}(LX)$$

obtenue comme la composée :

$$H^*(LX) \otimes H^*(LX) \xrightarrow{H(r_{out})=H(j)} H^*(LX \times_X LX) \xrightarrow{r_{in!}=H(\rho_{in!})} H^{*+d}(SX) \cong H^{*+d}(LX)$$

se dualise en l'opération

$$\Phi_{0,1+2} : H_*(LX) \longrightarrow (H_*(LX) \otimes H_*(LX))_{*-d}$$

où les applications $r_{in!}$ et $\rho_{in!}$ sont celles définies au chapitre 3.

6.1.2 Usage des modèles de Sullivan.

Dans cette partie, nous décrivons en termes de modèles de Sullivan l'application qui induit le dual du coproduit de Chas-Sullivan $Dlcp$. Cette description nous mènera directement au calcul explicite du coproduit de Chas-Sullivan sur quelques exemples. Afin de déterminer un modèle relatif de Sullivan de l'application $q_{LX'} : LX' \longrightarrow X^2$, nous allons considérer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & LX & \xrightarrow{\text{incl}} & X^I & \\
 & \swarrow \psi & \simeq & \swarrow \psi' & \\
 LX' & \xrightarrow{\text{incl}} & (X^I)^2 & & \\
 \downarrow q_{LX'} & \downarrow ev_0 & \downarrow (ev_{0,1})^2 & \downarrow ev_{0,1} & \\
 X & \xrightarrow{\Delta} & X^2 & & \\
 \downarrow \Delta & \downarrow \tilde{\Delta} & & & \\
 X^2 & \xrightarrow{\Delta'} & X^4 & &
 \end{array}$$

où :

- La face avant (respectivement arrière) de ce diagramme est un produit fibré.
- Pour tous tous $x, y \in X$, $\Delta'(x, y) = (x, y, y, x)$ et $\tilde{\Delta}(x, y) = (x, y, x, x)$;
- Pour tout $\alpha \in X^I$, $\psi'(\alpha) = (\alpha, \alpha(\hat{0}))$;
- Les faces latérales commutent, de même que les faces supérieure et inférieure.
- Le produit fibré de la face avant est converti en la somme amalgamée dans la catégorie

des $\mathcal{M}_X^{\otimes 4}$ -modules comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_X^{\otimes 4} & \xrightarrow{\mu_{\Delta'}} & \mathcal{M}_X^{\otimes 2} \\ \lambda_{e^{v_0,1}}^{\otimes 2} \downarrow & & \downarrow \lambda_{q_{LX'}} \\ \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X^{\otimes 2} \end{array}$$

où $\mu_{\Delta'}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = (-1)^{|d|(|b|+|c|)}ad \otimes bc$. L'isomorphisme d'algèbres graduées

$$\mathcal{M}_X^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \longrightarrow (\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}$$

défini pour tous $a, b, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ et $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{V}$ par :

$$a \otimes b \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} u_1 \otimes v_1 \otimes \bar{x} \otimes u_2 \otimes v_2 \otimes \bar{y} \longmapsto (-1)^{\nu'} au_1v_2 \otimes bv_1u_2 \otimes \bar{x}\bar{y}$$

où $\nu' = |b|(|u_1| + |v_2|) + |v_2|(|v_1| + |u_2|) + (|u_2| + |v_2|)|\bar{x}|$, nous permet de déduire que :

Lemme 6.1.2. [19, Sect. 3] *Un modèle relatif de Sullivan de la fibration*

$$q_{LX'} : LX' \longrightarrow X^2$$

est de la forme :

$$((\wedge V)^{\otimes 2}, d) \xrightarrow{\lambda_{q_{LX'}}} ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d)$$

lorsque la différentielle sur $((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) := \mathcal{M}_{LX'}$ est donnée par :

$$\begin{cases} d(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = dv \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1}) = (v \otimes 1 - 1 \otimes v) \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} - \sum_{i \geq 1} (s \circ d)^i (v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v}) = (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} - \sum_{j \geq 1} (s' \circ d)^j (v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \end{cases}$$

où s et s' sont les seules dérivations de degré -1 sur $(\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}$ telles que $s \circ s =$

6.1 Construction générale.

$0 = s' \circ s'$ et qui sont définies pour tout $v \in V$ par :

$$\begin{cases} s(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} = s(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ s'(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} = s'(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \end{cases}$$

La démonstration de ce lemme découle de la proposition 4.3.1.

La face latérale gauche du cube ci-dessus nous permet également d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 6.1.3. [19, Lemme 1] Soit μ (respectivement $\mu_{\wedge \bar{V}}$) le produit sur $\wedge V$ (respectivement sur $\wedge \bar{V}$). L'homomorphisme surjectif d'algèbres différentielles graduées

$$\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}} : \mathcal{M}_{LX'} = ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) \longrightarrow (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}, d) = \mathcal{M}_{LM}$$

est un quasi-isomorphisme.

DÉMONSTRATION. L'homomorphisme d'adg $\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}}$ est un représentant de Sullivan de l'équivalence homotopique $\psi : LX \longrightarrow LX', \gamma \longmapsto (\gamma, \gamma(\hat{0}))$.

□

Déterminons à présent un représentant de Sullivan de l'inclusion

$$j : LX \times_X LX \hookrightarrow LX \times LX.$$

Le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} LX \times_X LX \hookrightarrow LX \times LX & & \\ \downarrow qs & & \downarrow ev_0 \times ev_0 \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \end{array}$$

est converti en la somme amalgamée dans la catégorie des $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ -modules :

$$\begin{array}{ccc} ((\wedge V)^{\otimes 2}, d) & \xrightarrow{\mu} & (\wedge V, d) \\ \downarrow m_{ev_0} \otimes m_{ev_0} & & \downarrow \lambda_{qs} \\ ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) & \xrightarrow{\mu \otimes Id} & (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) \end{array}$$

où :

$$\lambda_{qs}(v) = v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \text{ et } \lambda_{ev_0}(v) = v \otimes \bar{1}; v \in V.$$

Dès lors l'homomorphisme d'adg

$$m_j := \mu \otimes Id : ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) \longrightarrow (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d)$$

est un représentant de Sullivan de l'inclusion j , si bien que

$$H^*(r_{out}) = H^*(j) = H(m_j).$$

Nous venons ainsi de démontrer que :

Proposition 6.1.4. *Si X est un \mathbb{Q} -espace de Gorenstein simplement connexe, de dimension formelle d , alors le dual gradué du coproduit de Chas-Sullivan*

$$Dlcp := (\Phi_{0,1+2})^\# : H^*(LX) \otimes H^*(LX) \longrightarrow H^{*+d}(LX)$$

vérifie l'égalité :

$$Dlcp = H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}}) \circ H(\bar{f}) \circ H(\bar{m}_\sigma)^{-1} \circ H(\mu \otimes id) \circ H(T)$$

où les applications intervenant dans cette relation sont décrites à l'aide du diagramme

6.1 Construction générale.

suivant :

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}} \mathcal{M}_{X^I})_{\Delta, ev_{0,1}}^{\otimes 2} & \xlongequal{\hspace{10em}} & \mathcal{M}_{LX} \otimes \mathcal{M}_{LX} \\
\cong \downarrow T & & \cong \downarrow T \\
(\mathcal{M}_X^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2})_{\Delta^2, (ev_{0,1})^2} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) \\
\downarrow \mu \otimes Id_{Id} & & \downarrow \mu \otimes Id \\
(\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2})_{\Delta_{(4)}, (ev_{0,1})^2} & \xrightarrow{\cong} & (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{LX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{LX} \\
\cong \uparrow m_\sigma \otimes Id_{Id} & & \cong \uparrow \bar{m}_\sigma \\
(\mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2})_{\Delta_{X^2 \circ ev_{0,1}}, (ev_{0,1})^2} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 3}, d) = \mathcal{M}_E \\
\downarrow f \otimes Id_{Id} & & \downarrow \bar{f} \\
(\mathcal{M}_X^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2})_{\Delta', (ev_{0,1})^2} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{LX'} \\
\cong \downarrow \mu \otimes m_{\psi'} & & \cong \downarrow \mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}} \\
(\mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}} \mathcal{M}_{X^I})_{\Delta, ev_{0,1}} & \xrightarrow{\cong} & (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}, d) = \mathcal{M}_{LX}
\end{array}$$

Dans ce diagramme nous avons pour tous $u_1, u_2, v_1, v_2, v \in V$ et $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{V}$:

- $T((a_1 \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}} u_1 \otimes v_1 \otimes \bar{x}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}} (a_2 \otimes u_2 \otimes v_2 \otimes \bar{y})) = (-1)^\nu (a_1 \otimes a_2) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}} (u_1 \otimes v_1 \otimes \bar{x} \otimes u_2 \otimes v_2 \otimes \bar{y})$

avec $\nu = |a_2|(|u_1| + |u_2| + |\bar{x}|)$.

- $\mu_{X^I}((u_1 \otimes v_1 \otimes \bar{x}) \otimes (u_2 \otimes v_2 \otimes \bar{y})) = (-1)^\zeta u_1 u_2 \otimes v_1 v_2 \otimes \bar{x} \bar{y}$ où $\zeta = |u_2||v_1| + (|u_2| + |v_2|)|\bar{x}|$.

- $\mu_{\bar{\Delta}}(u_1 \otimes u_2 \otimes v_1 \otimes v_2) = (-1)^{|u_2|(|v_1| + |v_2|)} u_1 v_1 v_2 \otimes u_2$.

- L'application $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ -linéaire $f \in \text{Hom}_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}}(\mathcal{M}_{X^I}, \mathcal{M}_X^{\otimes 2}, D)$ de degré d est telle que

$$H(f) \in \text{Ext}_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}}^d(\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_X^{\otimes 2}) \cong \mathbb{Q} \text{ (Théorème 2.3.2);}$$

si bien que nous obtenons la relation

$$r_{in}! = H(\rho_{in}!) = H(\bar{f}) \circ H(\bar{m}_\sigma)^{-1}.$$

Comme dans le cas du produit de Chas-Sullivan , nous allons donner à présent quelques exemples de calcul du coproduit de Chas-Sullivan , notamment sur les sphères, les espaces projectifs et l'espace total de la construction de Borel étudié à la section 4.6 .

6.2 Cas de la sphère $X = S^n$, $n > 1$.

Sphère de dimension impaire $n > 1$. Rappelons que :

$$\mathcal{M}_X = (\wedge(x), 0); |x| = n, .$$

$$\mathcal{M}_{LX} = (\wedge(x, \bar{x}), 0) \text{ et } \mathcal{M}_{LX \times_X LX} = (\wedge(x, \bar{x}, \tilde{x}), 0)$$

L'application $(\wedge(x, x'), 0)$ –linéaire

$$f : (\wedge(x, x', \bar{x}), 0) \longrightarrow (\wedge(x, x'), 0)$$

définie par :

$$f(1) = x - x' \text{ et } f(\bar{x}) = 0$$

vérifie les conditions du théorème 2.3.2.

L'application induite

$$\bar{f} : (\wedge(x, x', \bar{x}, \tilde{x}, \hat{x}), d) \rightarrow (\wedge(x, x', \bar{x}, \tilde{x}), 0)$$

où $d\hat{x} = x' - x$, satisfait :

$$\bar{f}(1) = x - x', \quad \bar{f}(\bar{x}) = (x - x')\bar{x}, \quad \bar{f}(\tilde{x}) = (x - x')\tilde{x} \text{ et } \bar{f}(\hat{x}) = 0.$$

L'homomorphisme d'adg

$$m_\sigma : (\wedge(x, x', \bar{x}), 0) \longrightarrow (\wedge(x), 0)$$

est défini par :

$$m_\sigma(x) = x = m_\sigma(x'), \quad m_\sigma(\bar{x}) = 0.$$

6.2 Cas de la sphère $X = S^n$, $n > 1$.

Etant donné que

$$H^*(LX; \mathbb{Q}) \cong \wedge(x) \otimes \wedge(\bar{x}) \text{ et } H^*(LX \times_X LX; \mathbb{Q}) \cong \wedge(x) \otimes \wedge(\bar{x}) \otimes \wedge(\bar{x}); |x| = n, |\bar{x}| = n-1,$$

nous obtenons, pour tout $l, p \in \mathbb{N}$ et $\epsilon, \epsilon' = 0, 1$:

$$\begin{aligned} D\text{Icp}((x^\epsilon \otimes \bar{x}^l) \otimes (x^{\epsilon'} \otimes \bar{x}^p)) &= H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}}) \circ H(\bar{f}) \circ H(\bar{m}_\sigma)^{-1}(x^{\epsilon+\epsilon'} \otimes \mu_{\wedge \bar{V}} \otimes \bar{x}^l \otimes \bar{x}^p) \\ &= H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}}) \circ H(\bar{f})(x^\epsilon \otimes x^{\epsilon'} \otimes \bar{x}^l \otimes \bar{x}^p \otimes \bar{1}) \\ &= H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}})((x^\epsilon \otimes x^{\epsilon'})(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \otimes \bar{x}^l \otimes \bar{x}^p) \\ &= H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}})((x^{\epsilon+1} \otimes x^{\epsilon'} - x^\epsilon \otimes x^{\epsilon'+1}) \otimes \bar{x}^l \otimes \bar{x}^p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par suite le coproduit de Chas-Sullivan est nul sur la sphère de dimension impaire $n > 1$ et ceci est vrai pour tout espace à dualité de Poincaré dont la caractéristique d'Euler est nulle [19].

Sphère de dimension paire $n \geq 2$. Rappelons que :

$$\mathcal{M}_X = (\wedge(x, y), d); |x| = n, dy = x^2.$$

$$\mathcal{M}_{LX} = (\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}), d) \text{ avec } d\bar{y} = -2x\bar{x}.$$

et

$$\mathcal{M}_{LX \times_X LX} = (\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d) \text{ où } d\bar{y} = -2x\bar{x}; d\tilde{y} = -2x\tilde{x}.$$

L'application $(\wedge(x, y, x', y'), d)$ -linéaire

$$f : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y, x', y'), d)$$

définie par :

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2}(x + x') \\ f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(y' - y) \\ f(\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

vérifie les conditions du théorème 2.3.2.

L'application induite

$$\bar{f} : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}, \hat{x}, \hat{y}), d) \rightarrow (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d)$$

satisfait

$$\begin{cases} \bar{f}(1) = \frac{1}{2}(x + x') \\ \bar{f}(\bar{x}) = \frac{1}{2}(x + x')\bar{x}, \quad \bar{f}(\tilde{x}) = \frac{1}{2}(x + x')\tilde{x}, \quad \bar{f}(\hat{x}) = \frac{1}{2}(y' - y) \\ \bar{f}(\bar{y}) = \frac{1}{2}(x + x')\bar{y}, \quad \bar{f}(\tilde{y}) = \frac{1}{2}(x + x')\tilde{y}, \quad \bar{f}(\hat{y}) = 0. \end{cases}$$

L'homomorphisme d'adg

$$m_\sigma : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y), d)$$

est défini par :

$$m_\sigma(x) = x = m_\sigma(x'), \quad m_\sigma(y) = y = m_\sigma(y'), \quad m_\sigma(\bar{x}) = 0 = m_\sigma(\bar{y}).$$

D'autre part

$$H^*(LX) \cong H((\wedge(x)/(x^2) \otimes \wedge(\bar{x} \bar{y}), \bar{d}))$$

De même

$$H^*(LX \times_X LX) \cong H((\wedge(x)/(x^2) \otimes \wedge(\bar{x} \bar{y}) \otimes \wedge(\bar{x} \bar{y}), \bar{d}))$$

Une base de $H^*(LX)$ est donnée (par abus de notation) par :

$$\{1, x \otimes \bar{y}^l, 1 \otimes \bar{x}\bar{y}^s; l, s \in \mathbb{N}\}.$$

Dès lors on obtient pour tous $l, k, s, s' \in \mathbb{N}$ et $\epsilon, \epsilon' = 0, 1$:

$$\begin{aligned} Dlcp(x^k \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes x^l \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) &= H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}}) \circ H(\bar{f})(x^k \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes x^l \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'} \otimes \bar{1}) \\ &= H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}})((x^k \otimes x^l) \bar{f}(1 \otimes 1 \otimes \bar{1}) \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) \\ &= \frac{1}{2} H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}})((x^{k+1} \otimes x^l + x^k \otimes x^{l+1}) \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) \\ &= x^{k+l+1} \otimes \bar{x}^{\epsilon+\epsilon'} \bar{y}^{s+s'} \end{aligned}$$

Ce calcul nous permet d'avoir une expression explicite du dual du coproduit de Chas-Sullivan sur cette base. Plus précisément :

$$Dlcp(x^k \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes x^l \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k+l > 0 \\ x \otimes \bar{x}^{\epsilon+\epsilon'} \bar{y}^{s+s'} & \text{si } k+l = 0. \end{cases}$$

6.3 Cas de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$, $n > 1$.

Rappelons que :

$$\mathcal{M}_X = (\wedge(x, y), d); |x| = 2, \quad dy = x^{n+1} \text{ (Exemple 4.3.10).}$$

$$\mathcal{M}_{LX} = (\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}), d) \text{ avec } d\bar{y} = -(n+1)x^n\bar{x}.$$

et

$$\mathcal{M}_{LX \times_L LX} = (\wedge(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d) \text{ où } d\bar{y} = -(n+1)x^n\bar{x}; \quad d\tilde{y} = -(n+1)x^n\tilde{x}.$$

L'application $(\wedge(x, y, x', y'), d)$ -linéaire

$$f : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y, x', y'), d)$$

définie par :

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x^i x'^{n-i} \\ f(\bar{x}) = \frac{1}{n} (y' - y) \\ f(\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

vérifie les conditions du théorème 2.3.2.

L'application induite

$$\bar{f} : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}, \hat{x}, \hat{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y}), d)$$

satisfait :

$$\begin{cases} \bar{f}(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x^i x'^{n-i} \\ \bar{f}(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x^i x'^{n-i} \bar{x}, \quad \bar{f}(\tilde{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x^i x'^{n-i} \tilde{x}, \quad \bar{f}(\hat{x}) = \frac{1}{n} (y' - y) \\ \bar{f}(\bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x^i x'^{n-i} \bar{y}, \quad \bar{f}(\tilde{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x^i x'^{n-i} \tilde{y}, \quad \bar{f}(\hat{y}) = 0. \end{cases}$$

L'homomorphisme d'adg

$$m_\sigma : (\wedge(x, y, x', y', \bar{x}, \bar{y}), d) \longrightarrow (\wedge(x, y), d)$$

est défini par :

$$m_\sigma(x) = x = m_\sigma(x'), \quad m_\sigma(y) = y = m_\sigma(y'), \quad m_\sigma(\bar{x}) = 0 = m_\sigma(\bar{y}).$$

D'autre part

$$H^*(LX) \cong H((\wedge(x)/(x^{n+1}) \otimes \wedge(\bar{x} \bar{y}), \bar{d}))$$

De même

$$H^*(LX \times_X LX) \cong H((\wedge(x)/(x^{n+1}) \otimes \wedge(\bar{x} \bar{y}) \otimes \wedge(\bar{x} \bar{y}), \bar{d}))$$

Une base de $H^*(LX)$ est donnée (par abus de notation) par :

$$\{1, x \otimes \bar{y}^l, \dots, x^n \otimes \bar{y}^l, 1 \otimes \bar{x}\bar{y}^s, x \otimes \bar{x}\bar{y}^s, \dots, x^{n-1} \otimes \bar{x}\bar{y}^s; l, s \in \mathbb{N}\}.$$

Dès lors on obtient pour tous $l, k, s, s' \in \mathbb{N}$ et $\epsilon, \epsilon' = 0, 1$:

$$\begin{aligned} Dlcp(x^k \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes x^l \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) &= H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}}) \circ H(\bar{f})(x^k \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes x^l \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'} \otimes \bar{1}) \\ &= H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}})((x^k \otimes x^l) \bar{f}(1 \otimes 1 \otimes \bar{1}) \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) \\ &= \frac{1}{n} H(\mu \otimes \mu_{\wedge \bar{V}})((x^k \otimes x^l) \sum_{i=0}^n x^i \otimes x^{n-i} \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) \\ &= x^{n+k+l} \otimes \bar{x}^{\epsilon+\epsilon'} \bar{y}^{s+s'} \end{aligned}$$

Ce calcul nous permet d'avoir une expression explicite du dual du coproduit de Chas-Sullivan sur cette base. Plus précisément :

$$Dlcp(x^k \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes x^l \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k+l > 0 \\ x^n \otimes \bar{x}^{\epsilon+\epsilon'} \bar{y}^{s+s'} & \text{si } k=l=0 \end{cases} \quad [19].$$

6.4 Cas du quotient homotopique associé à une action de groupe.

Rappelons (C.f. section 4.5) que le modèle minimal de l'espace E_h est de la forme : $\mathcal{M}_{E_h} = (\wedge(u, v, x), d)$, avec $|u| = |v| = 2$, $du = dv = 0$ et $dx = \lambda u^{n+1} + v^{n+1}$, où $\lambda \in \mathbb{k}$ est une constante déterminée par $H^*(Bh)$.

Rappelons que :

$$\mathcal{M}_{E_h^I} = (\wedge(u, v, x, u', v', x', \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d) \text{ où } |\bar{u}| = |\bar{v}| = 1, |\bar{x}| = 2n \quad \text{et}$$

6.5 Remarque sur l'opération $\bar{\Phi}_{0,2+2}$.

$$d\bar{u} = u' - u; \quad d\bar{v} = v' - v; \quad d\bar{x} = x' - x - \sum_{i+j=n} v^i v'^j \bar{v} - \lambda \sum_{k+l=n} u^k u'^l \bar{u}$$

$$\mathcal{M}_{E_h^I \times_{E_h} E_h^I} = (\wedge(u, v, x, u', v', x', u'', v'', x'', \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d) \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} d\bar{u} = u' - u; \quad d\bar{v} = v' - v; \quad d\tilde{u} = u'' - u'; \quad d\tilde{v} = v'' - v'; \\ d\bar{x} = x' - x - \sum_{i+j=n} v^i v'^j \bar{v}; \quad d\tilde{x} = x'' - x' - \lambda \sum_{j+k=n} v'^j v''^k \tilde{v}. \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_{LE_h} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d) \quad \text{où} \quad d\bar{u} = d\bar{v} = 0 \quad \text{et} \quad d\bar{x} = -\lambda(n+1)v^n \bar{v}.$$

Par suite,

$$H^*(LE_h) \cong H[(\wedge(u, v)/v^{n+1} \otimes \wedge(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d)].$$

$$\mathcal{M}_{LE_h \times_{E_h} LE_h} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d);$$

$$d\tilde{u} = d\tilde{v} = 0, \quad d\tilde{x} = -\lambda(n+1)v^n \tilde{v}, \quad d\bar{u} = d\bar{v} = 0, \quad d\bar{x} = -\lambda(n+1)v^n \bar{v}.$$

Nous avons pour tous $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon'_1, \epsilon'_2 \in \{0, 1\}; l, l', s, s' \in \mathbb{N}; 1 \leq p, p' \leq n :$

$$\begin{aligned} \mu \otimes id^{\otimes 2} \circ T(u^p v^l \otimes \bar{u}^{\epsilon_1} \bar{v}^{\epsilon_2} \bar{x}^s \otimes u^{p'} v^{l'} \otimes \bar{u}^{\epsilon'_1} \bar{v}^{\epsilon'_2} \bar{x}^{s'}) &= u^{p+p'} v^{l+l'} \otimes \bar{u}^{\epsilon_1} \bar{v}^{\epsilon_2} \bar{x}^s \otimes \bar{u}^{\epsilon'_1} \bar{v}^{\epsilon'_2} \bar{x}^{s'} \\ &= \bar{m}_\sigma(u^p v^l \otimes u^{p'} v^{l'} \otimes \bar{u}^{\epsilon_1} \bar{v}^{\epsilon_2} \bar{x}^s \otimes \bar{u}^{\epsilon'_1} \bar{v}^{\epsilon'_2} \bar{x}^{s'} \otimes \bar{1}) \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} \bar{f}(u^p v^l \otimes u^{p'} v^{l'} \otimes \bar{u}^{\epsilon_1} \bar{v}^{\epsilon_2} \bar{x}^s \otimes \bar{u}^{\epsilon'_1} \bar{v}^{\epsilon'_2} \bar{x}^{s'} \otimes \bar{1}) &= f(u^p v^l \otimes u^{p'} v^{l'} \otimes \bar{1}) \otimes \bar{x}^s \otimes \bar{u}^{\epsilon'_1} \bar{v}^{\epsilon'_2} \bar{x}^{s'} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique que le coproduit de Chas-Sullivan est nul sur E_h .

6.5 Remarque sur l'opération $\bar{\Phi}_{0,2+2}$.

La connaissance du (co)produit de Chas-Sullivan sur X nous conduit à celle de l'opération d'ordre supérieur

$$\Phi_{0,2+2} : H_*(LX) \otimes H_*(LX) \longrightarrow (H_*(LX) \otimes H_*(LX))_{*-2d}$$

à l'aide du théorème suivant, dû à R. Cohen et V. Godin :

Théorème 6.5.1. [20, Théorème 6] Soit M une variété compacte connexe. Alors :

$$\Phi_{g_2, q+r}(M) \circ \Phi_{g_1, p+q}(M) = \Phi_{g, p+r}(M)$$

où $g = g_1 + g_2 + q - 1$.

Corollaire 6.5.2. L'opération d'ordre supérieur

$$\Phi_{0, 2+2} : H_*(LX) \otimes H_*(LX) \longrightarrow (H_*(LX) \otimes H_*(LX))_{*-2d}$$

est non nulle lorsque X est l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 1$.

DÉMONSTRATION. Le théorème 6.5.1 nous donne la relation

$$\Phi_{0, 2+2} = \Phi_{0, 1+2} \circ \Phi_{0, 2+1}.$$

Les calculs du loop (co)produit que nous avons effectués sur l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$, ($n \geq 1$) nous permettent d'obtenir la relation

$$\begin{aligned} & (Dlp \circ Dlc p) (x^k \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes x^l \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) \\ = & \begin{cases} (1 \otimes \bar{x} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{x}) \sum_{j=0}^{s+s'} \binom{s+s'}{j} x^n \otimes \bar{y}^j \otimes x^n \otimes \bar{y}^{s+s'-j} & \text{si } \epsilon + \epsilon' = 1 \\ \sum_{j=0}^{s+s'} \binom{s+s'}{j} x^n \otimes \bar{y}^j \otimes x^n \otimes \bar{y}^{s+s'-j} & \text{si } \epsilon = \epsilon' = 0 \end{cases} \quad [19]. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

CHAPITRE 7

L'opération $\Phi_{0,3+1}$

Dans ce dernier chapitre, nous donnons une description de l'opération $\Phi_{0,3+1}$, qui est une des opérations d'ordre supérieure jusqu'ici non explorée et nous dégageons à l'aide des calculs sur des exemples précis la non nullité de cette opération. Cette opération nous permettra par la suite de déduire le calcul de l'opération $\Phi_{0,3+2}$ sur les exemples sus-cités. Ceci constituera notre contribution dans ce travail qui, loin d'être suffisante, nous permettra probablement d'avancer dans cette étude des opérations d'ordre supérieur en théorie des cordes.

7.1 Construction générale.

7.1.1 Retour à la topologie

Au chapitre 2, nous avons donné une description des opérations $\Phi_{g,p+q}$ dont l'opération $\Phi_{0,3+1}$ constitue un cas particulier, avec $g = 0$, $p = 3$, $q = 1$. Cette opération est réalisée sur un \mathbb{Q} -espace de Gorenstein, à partir du 2-cobordisme $F_{0,3+1}$ ayant trois composantes de bord entrant et une composante de bord sortant, toutes supposées disjointes. Les applications suivantes illustrent cette construction :

$$\text{map}\left(\coprod_{i=1}^3 S_i^1, X\right) \xleftarrow{r_{in}} \text{map}(S, X) \xrightarrow{r_{out}} \text{map}(S^1, X)$$

où

$$\coprod_{i=1}^3 S_i^1 \xleftarrow{in} S \xrightarrow{out} S^1$$

sont les inclusions, supposées des cofibrations, si bien que r_{in} et r_{out} sont des fibrations. Le diagramme de cordes de Sullivan associé à $F_{0,3+1}$ est composé de trois cercles et deux arbres T_1 et T_2 dont les extrémités sont réparties sur les trois cercles. Nous partionnons

l'ensemble des sommets e_1, e_2, e_3, e_4 en deux blocs $K = \{K_1, K_2\}$ et $L = \{L_1, L_2, L_3\}$ suivant qu'un sommet est l'extrémité d'un arbre ou situé sur un cercle. Alors :

$$K_1 = \{e_1, e_2\}, K_2 = \{e_3, e_4\}, L_1 = \{e_1\}, L_2 = \{e_2, e_3\}, L_3 = \{e_4\}.$$

En se servant de l'interprétation de l'application r_{in} comme image réciproque d'une fibration, telle que matérialisée par le diagramme (2.1), nous obtenons le diagramme suivant, qui nous permet de définir l'opération $\Phi_{0,3+1}$.

$$\begin{array}{ccccc} \text{map}(S^1 \amalg S^1 \amalg S^1, X) & \xleftarrow{r_{in}} & \text{map}(F_{0,3+1}, X) & \xrightarrow{r_{out}} & \text{map}(S^1, X) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \parallel \\ LX \times SX \times LX & \xleftarrow{incl} & LX \times_X SX \times_X LX & \xrightarrow{Comp_{0,3+1}} & SX \xleftarrow[\simeq]{\chi} LX \\ \downarrow ev_0 \times q_{SX} \times ev_0 & & \downarrow q_{F_{0,3+1}} & & \\ X^4 & \xleftarrow{\Delta^2} & X^2 & & \end{array}$$

Ici :

- $SX = \{(\alpha, \beta) \in X^I : \alpha(0) = \beta(0) \text{ et } \alpha(1) = \beta(1)\}$
- L'application

$$\chi : LX \rightarrow SX, \gamma \mapsto (\gamma, \hat{\gamma}(0))$$

est une équivalence homotopique. En effet considérons l'application

$$\theta : SX \rightarrow LX : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta^{-1},$$

obtenue en composant les chemins α et β^{-1} ,

Alors

$$\theta \circ \chi(\gamma) = \gamma * \hat{\gamma}(0) \sim \gamma$$

et une homotopie $K : SX \times I \rightarrow SX$ entre $\chi \circ \theta$ et Id_{SX} est définie pour tous $(\alpha, \beta) \in SX$ et $t \in I$ par :

$$K((\alpha, \beta), t) = (A_t^{\alpha, \beta}, B_t^{\alpha, \beta})$$

$$\text{où : } A_t^{\alpha, \beta}(s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2s}{1+t}) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ \beta(2 - 2s + t) & \text{si } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad \text{et } B_t^{\alpha, \beta}(s) = \beta(ts)$$

- $LX \times_X SX \times_X LX = \{(\gamma_1, (\alpha, \beta), \gamma_2) \in LX \times SX \times LX : \gamma_1(0) = \alpha(0) = \beta(0), \alpha(1) = \beta(1) = \gamma_2(0)\}$;

7.1 Construction générale.

- Le rectangle supérieur de gauche (respectivement de droite) est commutatif à homotopie près ;
- Le rectangle inférieur de gauche est un produit fibré ;
- $q_{F_{0,3+1}}(\gamma_1, (\alpha, \beta), \gamma_2) = (\gamma_1(0) = \alpha(0) = \beta(1), \gamma_2(0) = \beta(0) = \alpha(1))$;
- $Comp_{0,3+1}(\gamma_1, (\alpha, \beta), \gamma_2) = (\gamma_1 * \alpha, \beta * \gamma_2)$.

Définition 7.1.1. *L'application linéaire*

$$H^*(LX) \longrightarrow (H^*(LX)^{\otimes 3})^{*+2d}$$

obtenue comme la composée :

$$H^*(LX) \xrightarrow{H^*(Comp) \circ (H^*(\psi))^{-1}} H^*(LX \times_X SX \times_X LX) \xrightarrow{incl^!} (H^*(LX)^{\otimes 3})^{*+2d}$$

se dualise en l'opération

$$\Phi_{0,3+1} : H_*(LX)^{\otimes 3} \longrightarrow H_{*-2d}(LX).$$

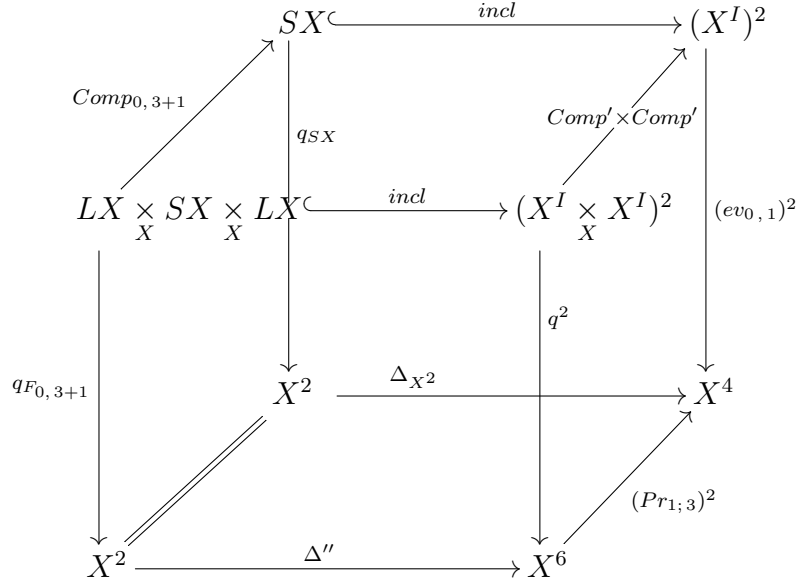
7.1.2 Usage des modèles de Sullivan

Cette partie est consacrée à la description en termes de modèles de Sullivan des applications

$$Comp_{0,3+1} : LX \times_X SX \times_X LX \rightarrow SX \text{ et } incl : LX \times_X SX \times_X LX \rightarrow LX \times LX \times LX$$

afin d'en déduire par passage à l'homologie le dual gradué linéaire $(\Phi_{0,3+1})^\#$ de l'opération $\Phi_{0,3+1}$. En se servant de l'espace des chemins sur X , nous donnons une interprétation des espaces SX et $LX \times_X SX \times_X LX$ comme produits fibrés et par la même occasion l'analogie de l'application $Comp_{0,3+1}$ sur cet espace des chemins. L'avantage de cette méthode est que l'existence d'un représentant de Sullivan d'un tel analogue induit l'existence d'un représentant de Sullivan de l'application $Comp_{0,3+1}$.

Démarrons par le diagramme suivant :



où :

- la fibration $q : X^I \times_X X^I \rightarrow X^3$ est définie pour tout couple $(\alpha, \beta) \in X^I \times_X X^I$ par :

$$q(\alpha, \beta) = (\alpha(0), \alpha(1) = \beta(0), \beta(1));$$

- $\Delta''(x, y) = (x, x, y, x, y, y)$ et $\Delta_{X^2}(x, y) = (x, y, x, y)$; $x, y \in X$;
- les carrés des faces avant et arrière sont des produits fibrés;
- les carrés des faces de dessus et de base sont commutatifs, de même que les faces latérales du diagramme ci-dessus.

En projetant ce diagramme dans la catégorie des algèbres différentielles graduées com-

7.1 Construction générale.

mutatives, on en tire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}} \mathcal{M}_X)_{ev_{0,1}, \Delta} & \xlongequal{\quad} & (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}, d) = \mathcal{M}_{LX} \\
 \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \mathcal{M}_\psi \\
 ((\mathcal{M}_{X^I} \otimes \mathcal{M}_{X^I}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X^{\otimes 2})_{(ev_{0,1})^2, \Delta_{X^2}} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) \\
 \downarrow m_{Comp'}^{\otimes 2} \otimes Id^{\otimes 2} & & \downarrow \mathcal{M}_{Comp0,3+1} \\
 ((\mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I})^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 6}} \mathcal{M}_X^{\otimes 2})_{q^2, \Delta''} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}, d)
 \end{array}$$

où :

Les rectangles supérieur et inférieur sont commutatifs à homotopie près.

L'isomorphisme d'algèbres graduées

$$(\mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I})^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 6}} \mathcal{M}_X^{\otimes 2} \longrightarrow (\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}$$

défini pour tous $a, b, u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ et $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{V}$ par :

$$\begin{aligned}
 & u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 \otimes \bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2 \otimes u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 \otimes \bar{y}_1 \otimes \bar{y}_2 \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 6}} a \otimes b \\
 & \longmapsto (-1)^\tau au_1v_1u_2 \otimes bw_1v_2w_2 \otimes \bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2 \otimes \bar{y}_1 \otimes \bar{y}_2
 \end{aligned}$$

où $\tau = |u_2|(|w_1| + |\bar{x}_1\bar{x}_2|) + |v_2w_2|(|\bar{x}_1\bar{x}_2| + |ab|(|\bar{x}_1\bar{x}_2| + |\bar{y}_1\bar{y}_2|))$, nous permet de déduire que :

Lemme 7.1.2. *Un modèle relatif de Sullivan de la fibration*

$$q_{F_0,3+1} : LX \times_X SX \times_X LX \longrightarrow X^2$$

est de la forme :

$$((\wedge V)^{\otimes 2}, d) \xhookrightarrow{\lambda_{q_{F_0,3+1}}} ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}, d)$$

lorsque la différentielle sur

$$((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}, d) := \mathcal{M}_{LX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{SX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{LX}$$

est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = dv \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = -s(dv \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} - \sum_{i \geq 1} (s' \circ d)^i (v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1}) = (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} - \sum_{i \geq 1} (s'' \circ d)^i (v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v}) = -s(1 \otimes dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \end{array} \right.$$

où s , s' et s'' sont les seules dérivations de degré -1 sur $(\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}$ telle que $s \circ s = 0$, $s' \circ s' = 0$, $s'' \circ s'' = 0$ et qui sont définies pour tout $v \in V$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} s(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ s(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \\ s'(v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ s'(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ s''(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \\ s''(1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \end{array} \right.$$

Construisons à présent à l'aide des modèles de Sullivan les applications qui nous permettront d'obtenir en homologie l'application de Gysin

$$incl^! : H^*(LX \times_X SX \times_X LX) \rightarrow (H^*(LX)^{\otimes 3})^{*+2d}$$

définie à la section précédente.

7.1 Construction générale.

Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{M}_{LX} \otimes \mathcal{M}_{SX} \otimes \mathcal{M}_{LX}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X^{\otimes 2} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}, d) \\
 \uparrow \text{Id}^{\otimes 3} \otimes m_\sigma^{\otimes 2} \simeq & & \uparrow \simeq m_\sigma \bar{\otimes} m_\sigma \\
 (\mathcal{M}_{LX} \otimes \mathcal{M}_{SX} \otimes \mathcal{M}_{LX}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 4} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 6}, d) \\
 \downarrow \text{Id}^{\otimes 3} \otimes (f \otimes f) & & \downarrow f \bar{\otimes} f \\
 (\mathcal{M}_{LX} \otimes \mathcal{M}_{SX} \otimes \mathcal{M}_{LX}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X^{\otimes 4} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 4} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}, d) \\
 \downarrow \text{Id} \otimes \mathcal{M}_\psi \otimes \text{Id} \simeq & & \downarrow \simeq \bar{\mathcal{M}}_\psi \\
 \mathcal{M}_{LM}^{\otimes 3} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X^{\otimes 4} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 3} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 3}, d) \cong \mathcal{M}_{LX}^{\otimes 3}
 \end{array}$$

où :

- l'isomorphisme d'adg

$$(\mathcal{M}_{LX} \otimes \mathcal{M}_{SX} \otimes \mathcal{M}_{LX}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X^{\otimes 2} \xrightarrow{\cong} ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}, d) = \mathcal{M}_{LX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{SX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{LX}$$

provient du produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 LX \times_X SX \times_X LX & \hookrightarrow & LX \times SX \times LX \\
 \downarrow q_{F_{0,3+1}} & & \downarrow ev_0 \times q_{SX} \times ev_0 \\
 X^2 & \xrightarrow{\Delta^2} & X^4
 \end{array}$$

si bien que $\mathcal{M}_{LX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{SX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{LX}$ (respectivement $\mathcal{M}_{LX} \otimes \mathcal{M}_{SX} \otimes \mathcal{M}_{LX}$) hérite d'une structure de $\mathcal{M}_X^{\otimes 4}$ -module via $\Delta^2 \circ q_{F_{0,3+1}}$ (respectivement $ev_0 \times q_{SX} \times ev_0$) ;

- L'isomorphisme d'algèbres graduées

$$(\mathcal{M}_{LX} \otimes \mathcal{M}_{SX} \otimes \mathcal{M}_{LX}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \longrightarrow (\wedge V)^{\otimes 4} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 6}$$

est défini pour tous $x, y_1, y_2, z, u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$ et $\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}$ par :

$$\begin{aligned} & (x \otimes \bar{x} \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \bar{y}_1 \otimes \bar{y}_2 \otimes z \otimes \bar{z}) \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} (u_1 \otimes v_1 \otimes \bar{u} \otimes u_2 \otimes v_2 \otimes \bar{v}) \\ & \longmapsto (-1)^\zeta x u_1 \otimes y_1 v_1 \otimes y_2 u_2 \otimes z v_2 \otimes \bar{x} \otimes \bar{y}_1 \otimes \bar{y}_2 \otimes \bar{z} \otimes \bar{u} \otimes \bar{v}. \end{aligned}$$

Cet isomorphisme nous permet d'énoncer le lemme suivant, dont la démonstration est analogue à celle du théorème 4.3.2 :

Lemme 7.1.3. *La différentielle sur $((\wedge V)^{\otimes 4} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 6}, d)$ est définie pour tous $v \in V$ et $\bar{v} \in \bar{V}$ par :*

$$\left\{ \begin{aligned} d(v \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) &= dv \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) &= 1 \otimes dv \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes 1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) &= 1 \otimes 1 \otimes dv \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes dv \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ d(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) &= -s_1(dv \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) &= 1 \otimes (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ &\quad - \sum_{i \geq 1} (s_2 \circ d)^i (1 \otimes v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) &= 1 \otimes (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ &\quad - \sum_{i \geq 1} (s_3 \circ d)^i (1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) &= -s_1(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1}) &= (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ &\quad - \sum_{i \geq 1} (s_4 \circ d)^i (v \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ d(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v}) &= 1 \otimes 1 \otimes (1 \otimes v - v \otimes 1) \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ &\quad - \sum_{i \geq 1} (s_5 \circ d)^i (1 \otimes 1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \end{aligned} \right.$$

Ici s_k ($1 \leq k \leq 5$) est la seule dérivation de degré -1 sur $(\wedge V)^{\otimes 4} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 6}$ telle que

7.1 Construction générale.

$s_k \circ s_k = 0$, et qui vérifie les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1(v \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ s_1(1 \otimes v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 0 = s_1(1 \otimes 1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ s_1(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \\ s_2(v \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 0 = s_2(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ s_2(1 \otimes v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ s_2(1 \otimes 1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ s_3(v \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 0 = s_3(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ s_3(1 \otimes v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ s_3(1 \otimes 1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \\ s_4(v \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \\ s_4(1 \otimes v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \otimes \bar{1} \\ s_4(1 \otimes 1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 0 = s_4(1 \otimes 1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ s_5(v \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 0 = s_5(1 \otimes v \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) \\ s_5(1 \otimes 1 \otimes v \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \\ s_5(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes v \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{1} \otimes \bar{v} \end{array} \right.$$

• L'application $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ -linéaire de degré d , $f : \mathcal{M}_{X^I} \rightarrow \mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ et le quasi-isomorphisme $m_\sigma : \mathcal{M}_{X^I} \rightarrow \mathcal{M}_X$ sont ceux définis dans la description du (co)produit de Chas-Sullivan. Les informations obtenues ci-dessus nous permettent de conclure que :

Proposition 7.1.4. *L'opération d'ordre supérieur*

$$\Phi_{0,3+1} : H_*(LX)^{\otimes 3} \rightarrow H_{*-2d}(LX)$$

est le dual gradué de la composée

$$H(\bar{\mathcal{M}}_\psi) \circ H(f \bar{\otimes} f) \circ H(m_\sigma \bar{\otimes} m_\sigma)^{-1} \circ H(\mathcal{M}_{Comp_{0,3+1}}) \circ H(\mathcal{M}_\psi)^{-1}.$$

7.2 Cas de la sphère S^n , $n > 1$.

Sphère de dimension impaire $n > 1$. Rappelons que :

$\mathcal{M}_X = (\wedge x, 0)$ et $\mathcal{M}_{LX} = (\wedge(x, \bar{x}), 0)$. Nous avons également :

$$\mathcal{M}_{SX} = (\wedge(x, x', \bar{x}, \tilde{x}), d) \text{ avec } d\bar{x} = x' - x \text{ et } d\tilde{x} = x' - x.$$

$$\mathcal{M}_{LX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{SX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{LX} = (\wedge(x, x', \bar{x}, \tilde{x}, \hat{x}, \bar{\bar{x}}), d)$$

où $d\bar{x} = 0$, $d\tilde{x} = x' - x$, $d\hat{x} = x' - x$, $d\bar{\bar{x}} = 0$

Nous définissons le quasi-isomorphisme $\mathcal{M}_\psi : \mathcal{M}_{SX} \rightarrow \mathcal{M}_{LX}$ par :

$$\mathcal{M}_\psi(x) = \mathcal{M}_\psi(x') = x, \quad \mathcal{M}_\psi(\bar{x}) = \bar{x}, \quad \mathcal{M}_\psi(\tilde{x}) = 0.$$

L'homomorphisme d'adg $\mathcal{M}_{Comp0,3+1} : \mathcal{M}_{SX} \rightarrow \mathcal{M}_{LX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{SX} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{LX}$ est définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{Comp0,3+1}(x) = x, & \mathcal{M}_{Comp0,3+1}(x') = x'; \\ \mathcal{M}_{Comp0,3+1}(\bar{x}) = \bar{x} + \tilde{x}, & \mathcal{M}_{Comp0,3+1}(\tilde{x}) = \hat{x} + \bar{\bar{x}}. \end{cases}$$

L'application $(\wedge(x, x'), 0)$ -linéaire de degré n

$$f : \mathcal{M}_{X^I} = (\wedge(x, x', \bar{x}), d) \longrightarrow (\wedge(x, x'), 0) = \mathcal{M}_X^{\otimes 2}$$

définie par :

$$f(1) = x - x' \text{ et } f(\bar{x}) = 0$$

vérifie les conditions du théorème 2.3.2. Le quasi-isomorphisme surjectif d'adg

$$m_\sigma : (\wedge(x, x', \bar{x}), d) \longrightarrow (\wedge(x), 0)$$

est défini par :

$$m_\sigma(x) = x = m_\sigma(x'), \quad m_\sigma(\bar{x}) = 0.$$

Une base de $H^*(LX)$ est donnée par abus de notation par

$$\{1 \otimes \bar{x}^l, x \otimes \bar{x}^s; \quad l, s \in \mathbb{N}\}.$$

Nous obtenons après calculs :

7.3 Remarque sur l'opération $\Phi_{0,3+2}$.

$$(\Phi_{0,3+1})^\vee(x^\epsilon \otimes \bar{x}^s) = (x \otimes x \otimes x^\epsilon - x \otimes x^\epsilon \otimes x + x^\epsilon \otimes x \otimes x)(\bar{x} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x} \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes \bar{x})^s.$$

Dès lors l'opération

$$\Phi_{0,3+1} : H_*(LS^n)^{\otimes 3} \rightarrow H_{*-2n}(LS^n)$$

n'est pas nulle.

7.3 Remarque sur l'opération $\Phi_{0,3+2}$.

La connaissance du (co)produit de Chas-Sullivan sur et de l'opération d'ordre supérieur $\Phi_{0,3+1}$ que nous venons de construire sur X nous conduit à celle de l'opération d'ordre supérieur

$$\Phi_{0,3+2} : H_*(LX)^{\otimes 3} \longrightarrow (H_*(LX)^{\otimes 2})_{*-3d}$$

Corollaire 7.3.1. *L'opération d'ordre supérieur*

$$\Phi_{0,3+2} : H_*(LX)^{\otimes 3} \longrightarrow (H_*(LX)^{\otimes 2})_{*-3d}$$

est non nulle lorsque X est la sphère de dimension paire S^n , $n \geq 2$.

DÉMONSTRATION. Le théorème 6.5.1 nous donne la relation

$$\Phi_{0,3+2} = \Phi_{0,1+2} \circ \Phi_{0,3+1}.$$

Les calculs du loop (co)produit et de l'opération $(\Phi_{0,3+2})^\vee$ que nous avons effectués sur la sphère de dimension paire S^n , ($n \geq 2$), nous permettent d'obtenir la relation

$$(\Phi_{0,3+2})^\vee(x^k \otimes \bar{x}^\epsilon \bar{y}^s \otimes x^l \otimes \bar{x}^{\epsilon'} \bar{y}^{s'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k+l > 0 \\ (\Phi_{0,3+1})^\vee(x \otimes \bar{x}^{\epsilon+\epsilon'} \bar{y}^{s+s'}) \neq 0 & \text{si } k+l = 0. \end{cases}$$

D'où le résultat. □

Conclusion et perspectives

Nous venons de montrer, grâce aux techniques de l'homotopie rationnelle que les opérations de Tamanoï $(0, 2+2)$, $(0, 3+1)$ et $(0, 3+2)$ en théorie topologique des cordes sont non nulles. Ce résultat vient ajouter à cette liste de Tamanoï trois autres opérations. Ceci pourra nous aider dans l'avancée de la démarche d'unification des forces fondamentales. Néanmoins beaucoup de choses restent à faire surtout au niveau de la caractérisation complète de ces opérations.

Dans nos futurs travaux nous nous attèlerons à la description des opérations de type $(0, n+1)$ et $(0, n+2)$ et aux calculs explicites pour $n \geq 4$, peut-être par induction à partir de ce qui a déjà été fait pour $n \leq 3$. Ce qui nous donnera une caractérisation complète de ces opérations. Il sera aussi question par la suite de caractériser toujours par les techniques de l'homotopie rationnelle, l'algèbre différentielle graduée $\mathbb{H}_*(LX)$, où $X = U(n)/U(k) \times U(n-k)$ est une variété grassmannienne, munie du produit de Chas-Sullivan.

Bibliographie

- [1] L. Abrams, *Two dimensional quantum field theory and Frobenius algebras*, J. of Knot Theory Ramifications **5** (1996) 569-587.
- [2] A. Abbondandolo and M. Schwartz, *On the Floer homology of cotangent bundle*, Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), 254-316.
- [3] M.F. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publication mathématiques de l'IHES **68** (1968) 175-186.
- [4] H. Abbaspour and M. Zeinalian, *String bracket and flat connections*, Algebraic & Geometric Topology **7** (2007) 197-231.
- [5] I.A Batalin et G.A Vilkovisky, *Gauge Algebra and quantization*, Phys. Lett. **102 B** (1981) 27-31.
- [6] K. Behrend, *Gromov-Witten invariants in algebraic geometry*, Invent. Math. **127** (1997) 601-617.
- [7] K. Behrend, G. Ginot, B. Noohi and P. Xu, *String topology for stacks*, Astérisque No. 343 (2012).
- [8] Bitjong Ndombol and J.-C. Thomas, *On the cohomology algebra of free loop spaces*, Topology **41** (2002) 85-106.
- [9] Bitjong Ndombol and J.-C. Thomas, *A contribution to the closed geodesic problem*, Journal of Pure and Applied Algebra **214** (2010) 937-949.
- [10] Bitjong Ndombol, Y. Félix and J.-C. Thomas, *The Hochschild cohomology of a sheaf algebra*, manuscripta math. **143** (2014) 419-443.
- [11] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **139**, Springer-Verlag 1993.
- [12] U. Bunke and I. Schoder, *Twisted K-theory and TQFT*, Seminars Winter Term 2004/2005, 33-80, Universitätsdrucke Gottingen, Gottingen, 2005.

-
- [13] A. S. Cattaneo, J. Frohlich, B. Pedrini, *Topological field theory interpretation of string topology*, Comm. Math. Phys. **240** (2003) 397-421.
- [14] J. Clark, *The Essential Dictionary of Sciences*, Barnes & Noble. 2004.
- [15] M. Chas and D. Sullivan, *String topology*, preprint math.GT/0107187.
- [16] D. Chataur, A bordism approach to string topology. Int. Math. Res. Not. **46** (2005) 2829-2875.
- [17] D. Chataur and J.-F. Leborgne, *Homology of spaces of regular loops in the sphere*, ArXiv :mathAT/0811.3319.
- [18] D. Chataur and L. Menichi, *String topology of classifying spaces*, J. Reine Angew. Math. **669** (2012) 1-45.
- [19] D. Chataur and J.-C. Thomas, *Frobenius rational loop algebra*, Manuscripta Math. **122** (2007) 305-319.
- [20] R. Cohen and V. Godin, *A polarized view of string topology*, In : Topology, geometry and quantum field theory, London Math. Soc. Lecture Notes **308**, Cambridge University press, (2005) 127-154.
- [21] R. Cohen, J.D.S. Jones and J. Yuan, *The loop homology algebra of spheres and projective spaces*, in : Categorical Decomposition Techniques in Algebraic Topology, Progress in Math. **215** Birkhauser (2004) 77-92.
- [22] R.L. Cohen, S. Voronov, *Notes on string topology*, in String Topology and cyclic homology, Advanced courses in Mathematics CRM Barcelona. Birkhauser-Verlag (2006) 1-89.
- [23] S. Eilenberg and J.-C. Moore, *Homology and fibrations*, Comment. math. Helv. **40** (1966) 199-236.
- [24] Y. Félix, S. Halperin and J.-C. Thomas, *Gorenstein spaces*, Adv. in Math. **71** (1988) 92-112.
- [25] Y. Félix, S. Halperin and J.-C. Thomas, *Differential graded algebras in topology*, Chapter 16 in Handbook of algebraic topology, Edited by I.M. James, North-Holland 1995.
- [26] Y. Félix, S. Halperin and J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Springer-Verlag, 2001.
- [27] Y. Félix, S. Halperin and J.-C. Thomas, *On the growth of the homology of a free loop space*, Pure and Applied Mathematics Quarterly- Dennis Sullivan issue- **9** (2013) 167-187.

BIBLIOGRAPHIE

- [28] Y. Félix and J.-C. Thomas, *Rational BV algebra in string topology*, Bull. SMF **136** (2008) 311-327.
- [29] Y. Félix, J.-C. Thomas and M. Vigué-Poirrier, *The Hochschild cohomology of a closed manifold*, Publ. IHES **99** (2004) 235-252.
- [30] Y. Félix and J.-C. Thomas, *String topology on Gorenstein spaces*, Math. Ann. **345** (2009), no. 2, 417-452.
- [31] D. S. Freed, *The Verlinde algebra is twisted equivariant K-theory*, Turk. J. math. **25** (2001) 159-167.
- [32] M. Goresky and N. Higston, *Loop product and closed geodesics*, Duke Math. J. **150** (2009) 117-209.
- [33] D. Gromoll and W. Meyer, *Periodic geodesic on compact Riemannian manifold*, J. of Differential Geom., **3** (1969) 493-510.
- [34] K. Gruher and P. Salvatore, *Generalized string topology operations*, Proceedings of the London Mathematical Society **96** (2008) 78-106.
- [35] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. Math. **78** (1963) 59-103.
- [36] E. Getzler, *Batalin-Vilkovisky algebras and two dimensional topological field theory*, Commun. Math. Phys. **159** (1994) 265-285.
- [37] V. Ginsburg, *Calabi-Yau algebras*, ArXiv :mathAG/0612139v3(Janv. 2007).
- [38] J. Gribbon, *Q is for Quantum - An Encyclopedia of Particle Physics*, Simon & Schuster 2000.
- [39] A. Hamilton and A. Lazarev, *Cohomology theories for homotopy algebras and non-commutative geometry*, Journal of A.G.T **9** (2009) 1503-1583.
- [40] Wu Hi Hsiang, *Cohomology theory of Topological Transformation groups* Ergennisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **85** Springer-Verlag 1975.
- [41] P. Jørgensen, *Calabi-Yau categories and Poincaré duality spaces*, ArXiv :mathRT//082052v1.
- [42] J.-L. Koszul, *Le crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque (Hors série) (1985) 257-271.
- [43] P. Lambrechts, *The Betti numbers of the free loop space of a connected sum*, Journal of the London Math. Soc. **64** (2001) 205-228.
- [44] F. Laudénbach, *A note on the Chas-Sullivan product*, Enseign. Math. (2) **57** (2011), no. 1-2, 3-21..

-
- [45] J. Lurie, *On the classification of topological field theory*, Current developments in mathematics, 2008, 129–280, Int. Press, Somerville, MA, 2009.
- [46] E. Lupercio, B. Uribe and M. Xicoténcatl, *Orbifold string Topology*, Preprint, *Geom. Topol.* **12** (2008), no. 4, 2203–2247.
- [47] L. Menichi, *Batalin-Bilkovisky algebras and Cyclic cohomology of Hopf algebras*, *K-Theory* **32** (2004) 231-251.
- [48] L. Menichi, *String topology for spheres*, *Comment. math. Helv.* **84** (2009) 135-157.
- [49] L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology*, *Bull. Soc. Math. France* **137** 361-379.
- [50] L. Menichi, *Van Den Bergh isomorphisms in String Topology*, *J. Non Commutative Geom.* **5** (2011) 69-105.
- [51] E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in math. **47** Springer-Verlag 1977.
- [52] J. Mac Cleary, *On the mod p Betti numbers of loop spaces*, *Invent. math.* **87** (1987) 643-654.
- [53] J. Mac Cleary and W. Ziller, *On the free loop space of homogeneous spaces*, *Amer. J. of Math.* **109** (1987) 765-781.
- [54] M. Mimura and H. Toda, *Topology of Lie groups I and II* Translations of Mathematical Monographs **91**, American Mathematical Society 1991.
- [55] G. Segal, *Topological fields Theory*, “Stanford Notes” <http://www.cgtp.duke.edu/ITP99/Segal/> (1999).
- [56] G. Segal, *Topological structures in string theory*, *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. Math Phys. Eng. Sci.* **359** (2001) 1389-1398.
- [57] G. Segal, *Elliptic cohomology (after Landweber-Stong, Ochanine, Witten and others)*, Séminaire Bourbaki 1987/88 Exposé 695
- [58] G. Segal, *The definition of conformal field theory*, *Topology, Geometry and Quantum Field Theory*, London Math. Soc. Lecture Notes **308** (2004) 421-577.
- [59] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, *Publ. IHES* **47** (1977) 269-331.
- [60] D. Sullivan et M. Vigué-Poirrier, *The homology theory of the closed geodesic problem*, *J. Differential Geom.* **11** (1976) 633-644.
- [61] D. Sullivan, *Open and closed string field theory interpreted in classical algebraic topology*, *Topology, Geometry and Quantum Field Theory*, London math. Soc. Lecture Notes **308** (2004) 344-357.

BIBLIOGRAPHIE

- [62] H. Tamanoi, *Triviality of string operations associated to higher genus orientable surfaces*, J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), no. 5, 605–615.
- [63] T. Tradler et M. Zeinalian, *Infinity structure of Poincaré duality spaces* Algebr. Geom. Topol. **7** (2007) 233-260, Appendix by D. Sullivan.
- [64] M. Veltman, *Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics*, World Scientific 2003.
- [65] M. Vigué-Poirrier and D. Sullivan, *The homology theory of the closed geodesic problem*, Journal of Differential Geometry **11** (1976) 633-644.
- [66] N. Wahl *Universal operations in Hochschild homology*, arXiv :1212.6498.
- [67] N. Wahl et C. Westerland, *Hochschild homology of structured algebras*, arXiv :1110.0651.
- [68] E. Witten, *Introduction to cohomological field theories*, Internat. J. Modern Phys. in Topological Methods in Quantum Physics - Trieste 1990 **16** (1991) 2775-2792.

Annexe : publication



Topologie

Produit de Chas–Sullivan et actions d'un groupe de Lie connexe



Loop product and connected Lie group actions

Hilaire George Mbiakop¹

Département de mathématiques, faculté des sciences, université de Yaoundé-1, BP 812, Cameroun

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 12 mai 2014

Accepté après révision le 12 décembre 2014

Disponible sur Internet le 4 mars 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Soient Γ un groupe de Lie connexe, X un Γ -espace et $E_\Gamma = E\Gamma \times_\Gamma X$ le quotient homotopique associé. Dans cette note, nous expliquons comment calculer le produit de Chas–Sullivan sur E_Γ et nous construisons un exemple où ce produit est nul ou non suivant l'action du groupe Γ .

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

Let Γ be a connected Lie group, X be Γ -space and $E_\Gamma = E\Gamma \times_\Gamma X$ the associated homotopy quotient. In this short note, we explain how rational homotopy theory provides explicit computations of the loop product on E_Γ and we construct an example where this product is trivial or not depending on the given action.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

À tout espace topologique X est associé son espace des lacets libres LX . Lorsque M est une variété connexe compacte sans bord de dimension m , Chas et Sullivan [1] ont défini un produit de degré $-m$ sur l'homologie de LM à coefficients dans un anneau commutatif \mathbb{k} ,

$$H_*(LM; \mathbb{k}) \otimes H_*(LM; \mathbb{k}) \rightarrow H_{*-m}(LM, \mathbb{k}), \quad x \otimes y \mapsto x \bullet y$$

de telle manière que $\mathbb{H}_*(LM; \mathbb{k}) := H_{*+m}(LM; \mathbb{k})$ soit une algèbre commutative graduée. Le point de départ de cette note est l'extension de ce produit de Chas–Sullivan aux espaces de Gorenstein [5] dans le cas où \mathbb{k} est un corps. Parmi les exemples d'espaces de Gorenstein de dimension formelle $n \in \mathbb{Z}$, on trouve les espaces à dualité de Poincaré de dimension n rel. \mathbb{k} , les espaces classifiants BG des groupes de Lie compacts connexes G , qui sont de dimension formelle $-\text{rang } G$ et l'espace total E d'une fibration de base un espace de Gorenstein B et de fibre un espace à dualité de Poincaré F . Dans ce dernier cas, la dimension formelle de E est la somme de la dimension formelle de B et la dimension de F (cf. [3] pour plus de détails).

Adresse e-mail : hilairegeorge@yahoo.fr.¹ Titulaire d'une bourse de l'AUF à l'Université d'Angers.

En particulier, si Γ est un groupe de Lie compact connexe qui opère topologiquement sur une variété connexe compacte sans bord de dimension m , alors nous obtenons la fibration de Borel

$$M \longrightarrow E_\Gamma \longrightarrow B\Gamma$$

où E_Γ est un espace de Gorenstein de dimension formelle $m - \text{rang } \Gamma$. Dans un premier temps (section 2), nous établirons une description du dual du loop produit pour un espace de Gorenstein de dimension formelle n en termes de modèles de Sullivan (cf. [5,2,6]). Ensuite (section 3), nous donnerons le modèle minimal de Sullivan de l'espace E_Γ lorsque M est un espace homogène G/H via une action de Γ sur le groupe de Lie compact connexe G et finalement (section 3), nous indiquerons un exemple avec une action de $\Gamma = S^1$ sur $G = U(n + 1)$ dépendant d'un paramètre $\lambda = 0, 1$.

2. Produit de Chas–Sullivan pour un espace de Gorenstein

Soit X un espace topologique. Désignons par $C_*(X; \mathbb{k})$ (respectivement $H_*(X, \mathbb{k})$) le complexe de chaînes singulières (respectivement l'homologie singulière) de l'espace X . Nous avons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} LX \times_X LX & \xrightarrow{\iota} & LX \times LX \\ \downarrow ev'_0 & & \downarrow ev_0 \times ev_0 \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \end{array}$$

où $ev_0(\gamma) = \gamma(0)$ (respectivement $ev'_0(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$) pour tout $\gamma \in LX$ (respectivement $(\gamma_1, \gamma_2) \in LX \times_X LX$); $\Delta : X \rightarrow X \times X$ l'application diagonale et $\iota : LX \times_X LX \rightarrow LX \times LX$, l'inclusion. Si X est un espace de Gorenstein de dimension formelle d simplement connexe, alors d'après [5, Théorème C], l'application linéaire $Dlp := H^*(\iota!) \circ H^*(Comp)$, de degré d

$$H^*(LX; \mathbb{k}) \xrightarrow{H^*(Comp)} H^*(LX \times_X LX; \mathbb{k}) \xrightarrow{H^*(\iota!)} H^*(LX; \mathbb{k}) \otimes H^*(LX; \mathbb{k})$$

coïncide avec le dual linéaire du produit de Chas–Sullivan. Ici, $Comp : LX \times_X LX \rightarrow LX$ désigne la composition des lacets libres et $\iota!$ l'application de Gysin associée à l'inclusion ι qui est définie de la manière suivante. L'application de Gysin associée à Δ est l'unique élément, à multiplication par un scalaire près,

$$H(\Delta!) \in Ext_{C^*(X^2; \mathbb{k})}^d(C^*(X; \mathbb{k}), C^*(X^2; \mathbb{k})) \cong \mathbb{k}$$

où $C^*(X; \mathbb{k})$ est considéré comme un $C^*(X^2; \mathbb{k})$ -module via Δ et où $Ext_{C^*(X^2; \mathbb{k})}(C^*(X), C^*(X^2))$ désigne le ext-différentiel, au sens d'Eilenberg–Moore [3]. Un représentant de cette application de Gysin est une application, notée $\Delta!$, qui est définie dans la catégorie dérivée des $C^*(X^2)$ -modules. Dans cette catégorie dérivée, $\Delta!$ se relève en une application

$$\iota! : C^*(LX \times_X LX; \mathbb{k}) \rightarrow C^*(LX \times LX; \mathbb{k}),$$

qui est définie de façon unique, à la multiplication par un scalaire près.

Dans la suite, \mathbb{k} désigne un corps de caractéristique 0 qui sera sous entendu afin d'alléger les notations. Le point clé pour notre propos est que nous pouvons remplacer l'algèbre graduée $C^*(X)$ par le modèle minimal de X . Considérons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} LX & \xrightarrow{\iota_X} & X^I \\ \downarrow ev_0 & & \downarrow ev_{0,1} \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \end{array}$$

où $I = [0, 1]$ et la flèche $ev_{0,1}$ désigne la fibration des chemins. En effet, la composition des lacets libres se déduit de la multilplication des chemins et le modèle minimal de X^I , qui se calcule facilement à partir de celui de X , permet à la fois de d'obtenir un représentant de Sullivan de la composition des chemins et donc de celle des lacets libres, et fournit une résolution semi-libre du modèle minimal \mathcal{M}_X de X , en tant que $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ -module différentiel gradué, permettant ainsi le calcul de l'application de Gysin $\iota!$. Nous renvoyons le lecteur au [4, chapitre 12] pour les notations, la terminologie et résultats concernant les modèles de Sullivan. Toutefois, précisons que si $V = \{V^i\}_{i \geq 1}$ est un espace vectoriel gradué alors $\wedge V$ désigne l'algèbre graduée commutative libre sur V et \bar{V} l'espace vectoriel gradué défini par $(\bar{V})^i = V^{i+1}$. Tout espace connexe par arcs X admet un modèle de Sullivan

$$\rho_X : \mathcal{M}_X := (\wedge V, d) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(X)$$

où A_{PL} est le foncteur contravariant des formes PL sur X et ρ_X un quasi-isomorphisme. Si X et Y sont deux espaces connexes par arcs, alors toute application admet un représentant de Sullivan $\mathcal{M}_f : \mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$. Nous faisons ainsi les identifications suivantes :

$$H^*(X) = H(A_{PL}(X)) = H(\mathcal{M}_X) \quad \text{et} \quad H^*(f) = H(A_{PL}(f)) = H(\mathcal{M}_f).$$

Notre premier résultat s'énonce comme suit.

Proposition 2.1. Si X est un espace de Gorenstein de dimension formelle d simplement connexe alors le dual du loop produit, Dlp , est la composée

$$H(\bar{g}) \circ H(\bar{\mathcal{M}}_\sigma)^{-1} \circ H(Comp),$$

où les applications intervenant dans ces relations sont décrites à l'aide du diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_{X^I} \otimes \mathcal{M}_X^{\otimes 2} \mathcal{M}_X & \xrightarrow{\cong} & (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}, d) = \mathcal{M}_{LX} \\
 \downarrow \mathcal{M}_{Comp'} \otimes \mathcal{M}_{pr_{1,3}} Id & & \downarrow \mathcal{M}_{Comp} \\
 \mathcal{M}_{X^I \times_X X^I} \otimes \mathcal{M}_X^{\otimes 3} \mathcal{M}_X & \xrightarrow{\cong} & (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{LX \times_X LX} \\
 \uparrow \simeq \pi \otimes Id \otimes \mu \otimes Id & & \parallel \\
 \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{M}_X^{\otimes 4} \mathcal{M}_X & \xrightarrow{\cong} & (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{LX \times_X LX} \\
 \uparrow \simeq Id \otimes Id \mathcal{M}_\sigma & & \uparrow \simeq \bar{\mathcal{M}}_\sigma \\
 \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{M}_X^{\otimes 4} \mathcal{M}_{X^I} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 3}, d) = \mathcal{M}_E \\
 \downarrow Id \otimes Id g & & \downarrow \bar{g} \\
 \mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{M}_X^{\otimes 4} \mathcal{M}_X^{\otimes 2} & \xrightarrow{\cong} & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}, d) \cong \mathcal{M}_{LX}^{\otimes 2}
 \end{array}$$

Dans ce diagramme,

- (1) $X^I \times_X X^I = \{(\alpha, \beta) \in X^I \times X^I : \alpha(1) = \beta(0)\}$; et l'application $Comp' : X^I \times_X X^I \rightarrow X^I$ est la composition des chemins;
- (2) $\mathcal{M}_{X^I} = ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}, d)$ est une $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ -résolution semi-libre de \mathcal{M}_X et $\mathcal{M}_{X^I \times_X X^I} = \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I} = ((\wedge V)^{\otimes 3} \otimes \wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d)$ est une $\mathcal{M}_X^{\otimes 3}$ -résolution semi-libre de \mathcal{M}_X ;
- (3) $\sigma : X \rightarrow X^I$ désigne la section canonique de la fibration des chemins;
- (4) μ désigne le produit de \mathcal{M}_X et $pr_{1,3}$ la projection sur la première et la dernière coordonnée;
- (5) l'application $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$ -linéaire g est telle que $H(g) \in Ext_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}}^d(\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_X^{\otimes 2}) \cong \mathbb{k}$.

3. Un exemple de calcul du loop produit de E_Γ

Soit G un groupe de Lie connexe compact et BG son espace classifiant. Il est bien connu que $H^*(G; \mathbb{Q}) = \wedge P_G$ et $H^*(BG; \mathbb{Q}) = \wedge Q_G$, où P_G désigne un espace vectoriel gradué de dimension finie concentré en degré impair et $s : P_G \rightarrow Q_G$ un isomorphisme linéaire de degré 1. Si K est un sous-groupe fermé de G connexe et si

$$S^1 \xrightarrow{f} G \xleftarrow{j} K$$

désigne respectivement un homomorphisme de groupe et l'inclusion naturelle, alors nous obtenons les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 G/K \xrightarrow{\cong} EK \times_j G \longrightarrow EG & \text{et} & ES^1 \times_f G/K \longrightarrow (EG)/K \xrightarrow{\cong} BK \\
 \searrow & \downarrow p_G & \downarrow Bf \\
 BK \xrightarrow{Bj} BG & & BS^1 \xrightarrow{Bf} BG
 \end{array}$$

où

$$\begin{aligned}
 EK \times_j G &:= \{(e, g) \mid (ek, g) = (e, j(k)g)\} \\
 ES^1 \times_f G/K &:= \{(x, gK) \mid (xe^{2i\pi\theta}, gK) = (x, (f(e^{2i\pi\theta})g)K)\}
 \end{aligned}$$

et où les carrés sont des produits fibrés. Un modèle relatif de Sullivan (non nécessairement minimal) de l'homomorphisme $G/K \rightarrow BK$ est de la forme, [4, Proposition 15.16]

$$(\wedge Q_K, 0) \hookrightarrow (\wedge Q_K \otimes \wedge PG, \bar{d}) \twoheadrightarrow (\wedge P_G, 0)$$

où $d(y' \otimes 1) = 0$ et $\bar{d}(1 \otimes x) = H(Bj; \mathbb{Q})(sx) \otimes 1$ avec $y' \in Q_K$ et $x \in P_G$.

Par ailleurs [4, Proposition 15.8], un modèle relatif de Sullivan de $E := BS^1 \times_f G/K$ est de la forme

$$(\wedge u, 0) \hookrightarrow (\wedge u \otimes \wedge Q_K \otimes \wedge P_G, d) \twoheadrightarrow (\wedge Q_K \otimes \wedge P_G, \bar{d})$$

tel que, pour tout $x \in P_G$,

$$d(1 \otimes 1 \otimes x) = H^*(Bf; \mathbb{Q})(sx) \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes H(Bj; \mathbb{Q})(sx) \otimes 1. \tag{1}$$

Considérons le cas particulier où $G = U(n + 1)$ et $K = U(n) \times U(1)$, ($n \geq 1$). Alors, d'après [7, III-Theorem 5.8] $H(Bj) : \wedge(y_1, \dots, y_{n+1}) \rightarrow \wedge(y'_1, \dots, y'_n) \otimes \wedge y''_1$ et pour des raisons de degrés, $H(Bf) : \wedge(y_1, \dots, y_{n+1}) \rightarrow \wedge u, y_1 \mapsto \wedge u$, où $\wedge = 0, 1$. Un modèle de Sullivan relatif de E est obtenu en appliquant (1). L'espace E est un espace de Gorenstein simplement connexe, de dimension formelle $2n - 1$.

Remarquons que $G/K \cong \mathbb{C}P^n$ et que l'action de S^1 sur $\mathbb{C}P^n$ est définie via cette identification par : $e^{2\pi i \theta} \cdot (x, gG/K) = (x, (f(e^{2\pi i \theta})g)G/K)$. À chaque valeur de λ (correspondant à l'action triviale ou une action régulière sur un espace projectif projectif complexe), nous associons le type d'homotopie rationnelle de l'espace de Borel. C'est le produit $BS^1 \times \mathbb{C}P^n$ lorsque $\lambda = 0$. Ces deux types d'homotopie rationnelle seront distingués par le loop produit. Pour des raisons de degrés, la suite spectrale de Serre cohomologique d'une fibration de base BS^1 et de fibre $\mathbb{C}P^n$ dégénère au terme E_2 et admet un modèle relatif de la forme $\mathfrak{M}_E = (\wedge u \otimes (v, x), d)$, avec $du = 0, dv = 0$ et $dx = v^{n+1} + \Phi$, où $\Phi \in \wedge(u, v)$. Dans notre cas particulier, $\Phi = \lambda u^{n+1}$. Ceci peut être déduit directement de la formule (1) en observant que le modèle minimal de $(\wedge u \otimes \wedge Q_K \otimes \wedge P_G, d)$ est obtenu en identifiant y'_1 et y''_1 , car $dx_1 = y'_1 + y''_1$.

1. $\lambda = 0$. Dans ce cas l'espace de Borel E est le produit $BS^1 \times \mathbb{C}P^n$ et $\mathfrak{M}_E = (\wedge u \otimes \wedge(v, x), d)$ avec $|u| = |v| = 2; du = dv = 0, dx = v^{n+1}$.

Un modèle de Sullivan relatif de la fibration des chemins $E^I \rightarrow E \times E$ fournit la résolution semi-libre de \mathfrak{M}_E :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{E^I} &= (\wedge(u, v, x, u', v', x', \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d) \quad \text{où } |\bar{u}| = |\bar{v}| = 1, \quad |\bar{x}| = 2n \quad \text{et} \\ d\bar{u} &= u' - u; \quad d\bar{v} = v' - v; \quad d\bar{x} = x' - x - \sum_{i+j=n} v^i v'^j \bar{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{E^I \times_E E^I} &= (\wedge(u, v, x, u', v', x', u'', v'', x'', \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d) \quad \text{avec} \\ \begin{cases} d\tilde{u} = u'' - u; & d\tilde{v} = v'' - v; & d\tilde{x} = x'' - x'; & d\tilde{v} = v'' - v'; \\ d\bar{x} = x' - x - \sum_{i+j=n} v^i v'^j \bar{v}; & d\tilde{x} = x'' - x' - \sum_{j+k=n} v'^j v''^k \tilde{v}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}_{LE} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d)$ où $d\bar{u} = d\bar{v} = 0$ et $d\bar{x} = -(n + 1)v^n \bar{v}$. $\mathfrak{M}_{LE \times_E LE} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d)$, avec $d\tilde{u} = d\tilde{v} = 0, d\tilde{x} = -(n + 1)v^n \tilde{v}, d\bar{u} = d\bar{v} = 0, d\bar{x} = -(n + 1)v^n \bar{v}$.

Un représentant de Sullivan $\mathfrak{M}_{Comp'} : \mathfrak{M}_{E^I} \rightarrow \mathfrak{M}_{E^I \times_E E^I}$ de la composition des chemins $Comp' : E^I \times_E E^I \rightarrow E^I$ est donné par :

$$\mathfrak{M}_{Comp'} : \begin{cases} u \mapsto u, & v \mapsto v, & x \mapsto x, & u' \mapsto u'', & v' \mapsto v'', & x' \mapsto x'', \\ \bar{u} \mapsto \bar{u} + \tilde{u}, & \bar{v} \mapsto \bar{v} + \tilde{v}, & \bar{x} \mapsto \bar{x} + \tilde{x} + \sum_{p+q+r=n-1} v^p v'^q v''^r \tilde{v} \bar{v}. \end{cases}$$

Nous en déduisons un représentant de Sullivan $\mathfrak{M}_{Comp} : \mathfrak{M}_{LE} \rightarrow \mathfrak{M}_{LE \times_E LE}$ de la composition des lacets libres $Comp : LE \times_E LE \rightarrow LE$ tel que :

$$\mathfrak{M}_{Comp} : \begin{cases} \bar{u} \mapsto \bar{u} + \tilde{u}, & \bar{v} \mapsto \bar{v} + \tilde{v}, \\ \bar{x} \mapsto \bar{x} + \tilde{x} + \frac{n(n+1)}{2} v^{n-1} \bar{v} \tilde{v}. \end{cases}$$

L'application $\mathfrak{M}_E^{\otimes 2}$ -linéaire de degré $2n - 1, g : \mathfrak{M}_{E^I} \rightarrow \mathfrak{M}_E^{\otimes 2}$, annoncée dans la proposition 2.1, est un cocycle (qui n'est pas un cobord) du complexe $(Hom_{\mathfrak{M}_E^{\otimes 2}}(\mathfrak{M}_{E^I}, \mathfrak{M}_E^{\otimes 2}), D)$ de degré d où $Dh = d \circ h - (-1)^{|h|} h \circ d$. Pour des raisons de degrés et de compatibilité aux différentielles, nous obtenons le candidat suivant :

$$g : \begin{cases} 1 \mapsto 0 \\ \bar{u} \mapsto \sum_{i+j=n} v^i v'^j + (u' - u)P, & \bar{v} \mapsto (v' - v)P, & \bar{x} \mapsto (x' - x)P, & P = \sum_{k+l=n-1} u^k u'^l; \\ \tilde{u} \bar{v} \mapsto x - x', & \tilde{u} \bar{v} \epsilon' \bar{x}^k \mapsto 0, & \text{pour } \epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\} \text{ et } (1 + \epsilon + \epsilon')k \geq 2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Par ailleurs, l'homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\mathfrak{M}_\sigma : \mathfrak{M}_{E^I} \rightarrow \mathfrak{M}_E$ est défini par :

$$\mathfrak{M}_\sigma(u) = u = \mathfrak{M}_\sigma(u'), \quad \mathfrak{M}_\sigma(v) = v = \mathfrak{M}_\sigma(v'), \quad \mathfrak{M}_\sigma(x) = x = \mathfrak{M}_\sigma(x') \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_\sigma(\bar{u}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{v}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{x}) = 0.$$

Il en résulte que :

$$Dlp(\bar{v}\bar{x}) = (v \otimes 1 - 1 \otimes v) \sum_{i+j=n-1} \sum_{k+l=n} u^i v^k \otimes u^j v'^l,$$

et le produit de Chas–Sullivan est non nul sur E .

2. $\lambda = 1$. Dans ce cas un modèle minimal de l'espace de Borel E est donné par $\mathcal{M}_E = (\wedge(u, v, x), d)$ avec $|u| = |v| = 2$; $du = dv = 0$, $dx = u^{n+1} + v^{n+1}$. Dès lors, nous obtenons :

$$\mathfrak{M}_{LE} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d) \quad \text{où} \quad d\bar{u} = d\bar{v} = 0 \text{ et } d\bar{x} = -(n+1)(u^n \bar{u} + v^n \bar{v}).$$

Par suite

$$\mathfrak{M}_{LE \times_E LE} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d),$$

avec $d\tilde{u} = d\tilde{v} = 0$, $d\tilde{x} = -(n+1)(u^n \tilde{u} + v^n \tilde{v})$, $d\bar{u} = d\bar{v} = 0$, $d\bar{x} = -(n+1)(u^n \bar{u} + v^n \bar{v})$.

Un représentant de Sullivan $\mathfrak{M}_{Comp} : \mathfrak{M}_{LE} \rightarrow \mathfrak{M}_{LE \times_E LE}$ de la composition des lacets libres $Comp : LE \times_E LE \rightarrow LE$ est défini tel que :

$$\mathfrak{M}_{Comp} : \begin{cases} \bar{u} \mapsto \bar{u} + \tilde{u}, \bar{v} \mapsto \bar{v} + \tilde{v}, \\ \bar{x} \mapsto \bar{x} + \tilde{x} + \frac{n(n+1)}{2}(u^{n-1} \bar{u} \tilde{u} + v^{n-1} \bar{v} \tilde{v}). \end{cases}$$

L'application $\mathfrak{M}_E^{\otimes 2}$ -linéaire de degré $2n-1$, $g : \mathfrak{M}_{E^I} \rightarrow \mathfrak{M}_E^{\otimes 2}$ annoncée dans la proposition 2.1, est un cocycle (qui n'est pas un cobord) du complexe $(Hom_{\mathfrak{M}_E^{\otimes 2}}(\mathfrak{M}_{E^I}, \mathfrak{M}_E^{\otimes 2}), D)$ de degré d où $Dh = d \circ h - (-1)^{|h|} h \circ d$. Pour des raisons de degrés et de compatibilité aux différentielles, nous obtenons le candidat suivant :

$$g : \begin{cases} 1 \mapsto 0 \\ \bar{u} \mapsto -\sum_{i+j=n} v^i v'^j, \quad \bar{v} \mapsto \sum_{k+l=n} u^k u'^l, \quad \bar{u}\bar{v} \mapsto x - x', \quad \bar{x} \mapsto 0 \\ \bar{u}^\epsilon \bar{v}^{\epsilon'} \bar{x}^k \mapsto 0; \quad k \in \mathbb{N}^*, \epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Par ailleurs, l'homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\mathfrak{M}_\sigma : \mathfrak{M}_{E^I} \rightarrow \mathfrak{M}_E$ est défini par :

$$\mathfrak{M}_\sigma(u) = u = \mathfrak{M}_\sigma(u'), \quad \mathfrak{M}_\sigma(v) = v = \mathfrak{M}_\sigma(v'), \quad \mathfrak{M}_\sigma(x) = x = \mathfrak{M}_\sigma(x') \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_\sigma(\bar{u}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{v}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{x}) = 0.$$

Remarquons que nous avons l'isomorphisme

$$H^*(LX) \cong H(\wedge(u, v) / (u^{n+1} + v^{n+1}) \otimes \wedge(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), \bar{d})$$

où \bar{d} est la différentielle obtenue par passage au quotient. Il s'en suit qu'une base de $H^*(LX)$ est donnée par :

$$\{[u^i v^j \otimes \bar{1}], [u^k v^l \otimes \bar{u}], [u^p v^q \otimes \bar{v}], [u^r v^s \otimes \bar{u}\bar{v}], [u^a v^b \otimes \bar{u}\bar{v}\bar{x}]\}$$

avec $i, k, p, r, a \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j, l, q, s, b \leq n$.

Un calcul de routine de Dlp sur chacun des éléments de cette base nous permet de conclure dans ce cas que le produit de Chas–Sullivan est nul sur l'espace de Borel E .

Références

[1] M. Chas, D. Sullivan, String topology, Preprint, arXiv:math.GT/0107187.
 [2] D. Chataur, L. Menichi, String topology of classifying spaces, J. Reine Angew. Math. 669 (2012) 1–45.
 [3] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, Gorenstein spaces, Adv. Math. 71 (1988) 92–112.
 [4] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, Rational Homotopy Theory, Springer-Verlag, 2001.
 [5] Y. Félix, J.-C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann. 208 (2009) 417–452.
 [6] K. Kuribayashi, L. Menichi, T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg–Moore spectral sequence, Preprint, arXiv:math.AT/1211683, 2012.
 [7] M. Mimura, H. Toda, Topology of Lie Groups I and II, Transl. Math. Monogr., vol. 91, American Mathematical Society, 1991.