



DEPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA  
THÈSE DE DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeur **DJUIDJE KENMOE Germaine épouse ALOYEM KAZE** et Professeur **BOUETOU BOUETOU Thomas**, respectivement Examineur et Président du jury de la Thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur **KAMDOUM TAMO Pierre Hervé**, Matricule **01Y404**, préparée sous la direction du Professeur **KENFACK JIOTSA Aurélien** et sous la supervision du Professeur **KOFANE Timoléon Crépin**, intitulée : « **RECHERCHE DES SOLUTIONS EXACTES DES ÉQUATIONS DU TYPES GINZBURG-LANDAU COMPLEXES AVEC TERMES DE RENORMALISATION ET SATURATION** », soutenue le **vendredi, 30 Avril 2021**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique, Spécialité : **Mécanique, Matériaux et Structures**, Option : **Mécanique Fondamentale et Systèmes Complexes**, attestons que toutes les corrections demandées par le Jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

10 MAY 2021

Fait à Yaoundé, le .....

Les Examineurs

Pr. DUIDJE KENMOE Germaine  
épouse ALOYEM KAZE

Le Président du Jury

Pr. BOUETOU BOUETOU  
Thomas



Le Chef de Département de Physique

Pr. Biemou  
Professeur

**REPUBLIC OF CAMEROON**  
*Peace-Work-Fatherland*

\*\*\*\*\*

**UNIVERSITY OF YAOUNDE I**  
**FACULTY OF SCIENCE**

\*\*\*\*\*

**POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,  
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES**

\*\*\*\*\*

**RESEARCH AND POSTGRADUATE  
TRAINING UNIT FOR PHYSIC AND  
APPLICATIONS**

\*\*\*\*\*

*P.O. Box 812 Yaoundé*  
*Email : crfd\_stg@uy1.uninet.cm*



**REPUBLIQUE DU CAMEROUN**  
*Paix-Travail-Patrie*

\*\*\*\*\*

**UNIVERSITE DE YAOUNDE I**  
**FACULTE DES SCIENCES**

\*\*\*\*\*

**CENTRE DE RECHERCHE ET DE  
FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES,  
TECHNOLOGIE ET GEOSCIENCES**

\*\*\*\*\*

**UNITE DE RECHERCHE ET DE  
FORMATION DOCTORALE PHYSIQUE ET  
APPLICATIONS**

\*\*\*\*\*

*B.P 812 Yaoundé*  
*Email : crfd\_stg@uy1.uninet.cm*

## **DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE**

### **DEPARTMENT OF PHYSICS**

**LABORATOIRE DE MÉCANIQUE, MATÉRIAUX ET STRUCTURES**  
**LABORATORY OF MECHANICS, MATERIALS AND STRUCTURES**

# **RECHERCHE DES SOLUTIONS EXACTES DES ÉQUATIONS DU TYPE GINZBURG-LANDAU COMPLEXES AVEC TERMES DE RENORMALISATION ET SATURATION**

## **THÈSE**

Réalisée et défendue publiquement en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat/Ph. D en  
Physique

Option: Mécanique Fondamentale et Systèmes Complexes

Par

**KAMDOUM TAMO Pierre Hervé**

Matricule : 01Y404

Master en Physique

Sous la supervision de

**KENFACK JIOTSA Aurélien**  
Professeur


Université de Yaoundé I

**KOFANE Timoléon Crépin**  
Professeur

Université de Yaoundé I



**Année académique 2020-2021**

<b>UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I</b> <b>Faculté des Sciences</b> Division de la Programmation et du Suivi des Activités Académiques		<b>THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I</b> <b>Faculty of Science</b> Division of Programming and Follow-up of Academic Affairs
<b>LISTE DES ENSEIGNANTS PERMANENTS</b>		<b>LIST OF PERMANENT TEACHING STAFF</b>

**ANNÉE ACADEMIQUE 2019/2020**  
 (Par Département et par Grade)  
**DATE D'ACTUALISATION 12 Juin 2020**

**ADMINISTRATION**

**DOYEN** : TCHOUANKEU Jean- Claude, *Maitre de Conférences*  
**VICE-DOYEN / DPSAA** : ATCHADE Alex de Théodore, *Maitre de Conférences*  
**VICE-DOYEN / DSSE** : AJEAGAH Gideon AGHAINDUM, *Professeur*  
**VICE-DOYEN / DRC** : ABOSSOLO Monique, *Maitre de Conférences*  
**Chef Division Administrative et Financière** : NDOYE FOE Marie C. F., *Maitre de Conférences*  
**Chef Division des Affaires Académiques, de la Scolarité et de la Recherche DAASR** : MBAZE MEVA' A Luc Léonard, *Professeur*

**1- DÉPARTEMENT DE BIOCHIMIE (BC) (38)**

N°	NOMS ET PRÉNOMS	GRADE	OBSERVATIONS
1	BIGOGA DAIGA Jude	Professeur	En poste
2	FEKAM BOYOM Fabrice	Professeur	En poste
3	FOKOU Elie	Professeur	En poste
4	KANSCI Germain	Professeur	En poste
5	MBACHAM FON Wilfried	Professeur	En poste
6	MOUNDIPA FEWOU Paul	Professeur	Chef de Département
7	NINTCHOM PENLAP V. épouse BENG	Professeur	En poste
8	OBEN Julius ENYONG	Professeur	En poste

9	ACHU Merci BIH	Maître de Conférences	En poste
10	ATOGHO Barbara Mma	Maître de Conférences	En poste
11	AZANTSA KINGUE GABIN BORIS	Maître de Conférences	En poste
12	BELINGA née NDOYE FOE M. C. F.	Maître de Conférences	Chef DAF / FS
13	BOUDJEKO Thaddée	Maître de Conférences	En poste
14	DJUIDJE NGOUNOUE Marcelline	Maître de Conférences	En poste

15	EFFA NNOMO Pierre	Maître de Conférences	En poste
16	NANA Louise épouse WAKAM	Maître de Conférences	En poste
17	NGONDI Judith Laure	Maître de Conférences	En poste
18	NGUEFACK Julienne	Maître de Conférences	En poste
19	NJAYOU Frédéric Nico	Maître de Conférences	En poste
20	MOFOR née TEUGWA Clotilde	Maître de Conférences	Inspecteur de Service MINESUP
21	TCHANA KOUATCHOUA Angèle	Maître de Conférences	En poste

22	AKINDEH MBUH NJI	Chargé de Cours	En poste
23	BEBOY EDJENGUELE Sara Nathalie	Chargé de Cours	En poste
24	DAKOLE DABOY Charles	Chargé de Cours	En poste
25	DJUIKWO NKONGA Ruth Viviane	Chargée de Cours	En poste
26	DONGMO LEKAGNE Joseph Blaise	Chargé de Cours	En poste
27	EWANE Cécile Anne	Chargée de Cours	En poste
28	FONKOUA Martin	Chargé de Cours	En poste
29	BEBEE Fadimatou	Chargée de Cours	En poste
30	KOTUE KAPTUE Charles	Chargé de Cours	En poste
31	LUNGA Paul KEILAH	Chargé de Cours	En poste
32	MANANGA Marlyse Joséphine	Chargée de Cours	En poste
33	MBONG ANGIE M. Mary Anne	Chargée de Cours	En poste
34	PECHANGO NSANGO Sylvain	Chargé de Cours	En poste
35	Palmer MASUMBE NETONGO	Chargé de Cours	En poste

36	MBOUCHE FANMOE Marceline Joëlle	Assistante	En poste
37	OWONA AYISSI Vincent Brice	Assistant	En poste
38	WILFRIED ANGIE Abia	Assistante	En poste

## 2- DÉPARTEMENT DE BIOLOGIE ET PHYSIOLOGIE ANIMALES (BPA) (48)

1	AJEAGAH Gideon AGHAINDUM	Professeur	<i>VICE-DOYEN / DSSE</i>
2	BILONG BILONG Charles-Félix	Professeur	Chef de Département
3	DIMO Théophile	Professeur	En Poste

4	DJIETO LORDON Champlain	Professeur	En Poste
5	ESSOMBA née NTSAMA MBALA	Professeur	<i>Vice Doyen/FMSB/UYI</i>
6	FOMENA Abraham	Professeur	En Poste
7	KAMTCHOUING Pierre	Professeur	En poste
8	NJAMEN Dieudonné	Professeur	En poste
9	NJIOKOU Flobert	Professeur	En Poste
10	NOLA Moïse	Professeur	En poste
11	TAN Paul VERNYUY	Professeur	En poste
12	TCHUEM TCHUENTE Louis Albert	Professeur	<i>Inspecteur de service Coord.Progr./MINSANTE</i>
13	ZEBAZE TOGOUET Serge Hubert	Professeur	<i>En poste</i>

14	BILANDA Danielle Claude	Maître de Conférences	En poste
15	DJIOGUE Séfirin	Maître de Conférences	En poste
16	DZEUFIET DJOMENI Paul Désiré	Maître de Conférences	En poste
17	JATSA BOUKENG Hermine épouse MEGAPTCHÉ	Maître de Conférences	En Poste
18	KEKEUNOU Sévilor	Maître de Conférences	En poste
19	MEGNEKOU Rosette	Maître de Conférences	En poste
20	MONY Ruth épouse NTONE	Maître de Conférences	En Poste
21	NGUEGUIM TSOFAK Florence	Maître de Conférences	En poste
22	TOMBI Jeannette	Maître de Conférences	En poste

23	ALENE Désirée Chantal	Chargée de Cours	En poste
26	ATSAMO Albert Donatien	Chargé de Cours	En poste
27	BELLET EDIMO Oscar Roger	Chargé de Cours	En poste
28	DONFACK Mireille	Chargée de Cours	En poste
29	ETEME ENAMA Serge	Chargé de Cours	En poste
30	GOUNOUE KAMKUMO Raceline	Chargée de Cours	En poste
31	KANDEDA KAVAYE Antoine	Chargé de Cours	En poste

32	LEKEUFACK FOLEFACK Guy B.	Chargé de Cours	En poste
33	MAHOB Raymond Joseph	Chargé de Cours	En poste
34	MBENOUN MASSE Paul Serge	Chargé de Cours	En poste
35	MOUNGANG Luciane Marlyse	Chargée de Cours	En poste
36	MVEYO NDANKEU Yves Patrick	Chargé de Cours	En poste
37	NGOUATEU KENFACK Omer Bébé	Chargé de Cours	En poste
38	NGUEMBOK	Chargé de Cours	En poste
39	NJUA Clarisse Yafi	Chargée de Cours	Chef Div. UBA
40	NOAH EWOTI Olive Vivien	Chargée de Cours	En poste
41	TADU Zephyrin	Chargé de Cours	En poste
42	TAMSA ARFAO Antoine	Chargé de Cours	En poste
43	YEDE	Chargé de Cours	En poste

44	BASSOCK BAYIHA Etienne Didier	Assistant	En poste
45	ESSAMA MBIDA Désirée Sandrine	Assistante	En poste
46	KOGA MANG DOBARA	Assistant	En poste
47	LEME BANOCK Lucie	Assistante	En poste
48	YOUNOUSSA LAME	Assistant	En poste

### **3- DÉPARTEMENT DE BIOLOGIE ET PHYSIOLOGIE VÉGÉTALES (BPV) (33)**

1	AMBANG Zachée	Professeur	Chef Division/UYII
2	BELL Joseph Martin	Professeur	En poste
3	DJOCGOUE Pierre François	Professeur	En poste
4	MOSSEBO Dominique Claude	Professeur	En poste
5	YOUMBI Emmanuel	Professeur	Chef de Département
6	ZAPFACK Louis	Professeur	En poste

7	ANGONI Hyacinthe	Maître de Conférences	En poste
8	BIYE Elvire Hortense	Maître de Conférences	En poste
9	KENGNE NOUMSI Ives Magloire	Maître de Conférences	En poste
10	MALA Armand William	Maître de Conférences	En poste
11	MBARGA BINDZI Marie Alain	Maître de Conférences	CT/ MINESUP
12	MBOLO Marie	Maître de Conférences	En poste
13	NDONGO BEKOLO	Maître de Conférences	CE / MINRESI
14	NGODO MELINGUI Jean Baptiste	Maître de Conférences	En poste

15	NGONKEU MAGAPTCHE Eddy L.	Maître de Conférences	En poste
16	TSOATA Esaïe	Maître de Conférences	En poste
17	TONFACK Libert Brice	Maître de Conférences	En poste

18	DJEUANI Astride Carole	Chargé de Cours	En poste
19	GOMANDJE Christelle	Chargée de Cours	En poste
20	MAFFO MAFFO Nicole Liliane	Chargé de Cours	En poste
21	MAHBOU SOMO TOUKAM. Gabriel	Chargé de Cours	En poste
22	NGALLE Hermine BILLE	Chargée de Cours	En poste
23	NGOUO Lucas Vincent	Chargé de Cours	En poste
24	NNANGA MEBENGA Ruth Laure	Chargé de Cours	En poste
25	NOUKEU KOUAKAM Armelle	Chargé de Cours	En poste
26	ONANA JEAN MICHEL	Chargé de Cours	En poste

27	GODSWILL NTSOMBAH NTSEFONG	Assistant	En poste
28	KABELONG BANAHO Louis-Paul-Roger	Assistant	En poste
29	KONO Léon Dieudonné	Assistant	En poste
30	LIBALAH Moses BAKONCK	Assistant	En poste
31	LIKENG-LI-NGUE Benoit C	Assistant	En poste
32	TAEDOUNG Evariste Hermann	Assistant	En poste
33	TEMEGNE NONO Carine	Assistant	En poste

#### 4- DÉPARTEMENT DE CHIMIE INORGANIQUE (CI) (34)

1	AGWARA ONDOH Moïse	Professeur	<i>Chef de Département</i>
2	ELIMBI Antoine	Professeur	En poste
3	Florence UFI CHINJE épouse MELO	Professeur	<i>Recteur Univ.Ngaoundere</i>
4	GHOGOMU Paul MINGO	Professeur	<i>Ministre Chargé de Miss.PR</i>
5	NANSEU Njiki Charles Péguy	Professeur	En poste
6	NDIFON Peter TEKE	Professeur	<i>CT MINRESI</i>
7	NGOMO Horace MANGA	Professeur	<i>Vice Chancellor/UB</i>
8	NDIKONTAR Maurice KOR	Professeur	<i>Vice-Doyen Univ. Bamenda</i>
9	NENWA Justin	Professeur	En poste
10	NGAMENI Emmanuel	Professeur	<i>DOYEN FS UDs</i>

11	BABALE née DJAM DOUDOU	Maître de Conférences	<i>Chargée Mission P.R.</i>
12	DJOUFAC WOUMFO Emmanuel	Maître de Conférences	En poste
13	EMADACK Alphonse	Maître de Conférences	En poste
14	KAMGANG YOUBI Georges	Maître de Conférences	En poste
15	KEMMEGNE MBOUGUEM Jean C.	Maître de Conférences	En poste
16	KONG SAKEO	Maître de Conférences	En poste
17	NDI NSAMI Julius	Maître de Conférences	En poste
18	NJIOMOU C. épouse DJANGANG	Maître de Conférences	En poste
19	NJOYA Dayirou	Maître de Conférences	En poste

20	ACAYANKA Elie	Chargé de Cours	En poste
21	BELIBI BELIBI Placide Désiré	Chargé de Cours	CS/ ENS Bertoua
22	CHEUMANI YONA Arnaud M.	Chargé de Cours	En poste
23	KENNE DEDZO GUSTAVE	Chargé de Cours	En poste
24	KOUOTOU DAOUDA	Chargé de Cours	En poste
25	MAKON Thomas Beauregard	Chargé de Cours	En poste
26	MBEY Jean Aime	Chargé de Cours	En poste
27	NCHIMI NONO KATIA	Chargé de Cours	En poste
28	NEBA nee NDOSIRI Bridget NDOYE	Chargée de Cours	CT/ MINFEM
29	NYAMEN Linda Dyorisse	Chargée de Cours	En poste
30	PABOUDAM GBAMBIE A.	Chargée de Cours	En poste
31	TCHAKOUTE KOUAMO Hervé	Chargé de Cours	En poste
32	NJANKWA NJABONG N. Eric	Assistant	En poste
33	PATOUOSSA ISSOFA	Assistant	En poste
34	SIEWE Jean Mermoz	Assistant	En Poste

<b>5- DÉPARTEMENT DE CHIMIE ORGANIQUE (CO) (35)</b>			
1	DONGO Etienne	Professeur	Vice-Doyen
2	GHOGOMU TIH Robert Ralph	Professeur	Dir. IBAF/UDA
3	NGOUELA Silvère Augustin	Professeur	Chef de Département UDS
4	NKENGACK Augustin Ephrem	Professeur	Chef de Département
5	NYASSE Barthélemy	Professeur	En poste
6	PEGNYEMB Dieudonné Emmanuel	Professeur	<i>Directeur/ MINESUP</i>



7	WANDJI Jean	Professeur	En poste
8	Alex de Théodore ATCHADE	Maître de Conférences	Vice-Doyen / DPSAA
9	EYONG Kenneth OBEN	Maître de Conférences	En poste
10	FOLEFOC Gabriel NGOSONG	Maître de Conférences	En poste
11	FOTSO WABO Ghislain	Maître de Conférences	En poste
12	KEUMEDJIO Félix	Maître de Conférences	En poste
13	KEUMOGNE Marguerite	Maître de Conférences	En poste
14	KOUAM Jacques	Maître de Conférences	En poste
15	MBAZOA née DJAMA Céline	Maître de Conférences	En poste
16	MKOUNGA Pierre	Maître de Conférences	En poste
17	NOTE LOUGBOT Olivier Placide	Maître de Conférences	Chef Service/MINESUP
18	NGO MBING Joséphine	Maître de Conférences	Sous/Direct. MINERESI
19	NGONO BIKOBO Dominique Serge	Maître de Conférences	En poste
20	NOUNGOUE TCHAMO Diderot	Maître de Conférences	En poste
21	TABOPDA KUATE Turibio	Maître de Conférences	En poste
22	TCHOUANKEU Jean-Claude	Maître de Conférences	<i>Doyen /FS/ UYI</i>
23	TIH née NGO BILONG E. Anastasie	Maître de Conférences	En poste
24	YANKEP Emmanuel	Maître de Conférences	En poste

25	AMBASSA Pantaléon	Chargé de Cours	En poste
26	KAMTO Eutrophe Le Doux	Chargé de Cours	En poste
27	MVOT AKAK CARINE	Chargé de Cours	En poste
28	NGNINTEDO Dominique	Chargé de Cours	En poste
29	NGOMO Orléans	Chargée de Cours	En poste
30	OUAHOUE WACHE Blandine M.	Chargée de Cours	En poste
31	SIELINOU TEDJON Valérie	Chargé de Cours	En poste
32	TAGATSING FOTSING Maurice	Chargé de Cours	En poste
33	ZONDENDEGOUMBA Ernestine	Chargée de Cours	En poste

34	MESSI Angélique Nicolas	Assistant	En poste
35	TSEMEUGNE Joseph	Assistant	En poste

**6- DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE (IN) (27)**

1	ATSA ETOUNDI Roger	Professeur	<i>Chef Div. MINESUP</i>
2	FOUDA NDJODO Marcel Laurent	Professeur	<i>Chef Dpt ENS/Chef IGA. MINESUP</i>

3	NDOUNDAM René	Maître de Conférences	En poste
---	---------------	-----------------------	----------

4	AMINOU Halidou	Chargé de Cours	<i>Chef de Département</i>
5	DJAM Xaviera YOUH - KIMBI	Chargé de Cours	En Poste
6	EBELE Serge Alain	Chargé de Cours	En poste
7	KOUOKAM KOUOKAM E. A.	Chargé de Cours	En poste
8	MELATAGIA YONTA Paulin	Chargé de Cours	En poste
9	MOTO MPONG Serge Alain	Chargé de Cours	En poste
10	TAPAMO Hyppolite	Chargé de Cours	En poste
11	ABESSOLO ALO'O Gislain	Chargé de Cours	En poste
12	MONTHÉ DJIADEU Valéry M.	Chargé de Cours	En poste
13	OLLE OLLE Daniel Claude Delort	Chargé de Cours	C/D Enset. Ebolowa
14	TINDO Gilbert	Chargé de Cours	En poste
15	TSOPZE Norbert	Chargé de Cours	En poste
16	WAKU KOUAMOU Jules	Chargé de Cours	En poste

17	BAYEM Jacques Narcisse	Assistant	En poste
18	DOMGA KOMGUEM Rodrigue	Assistant	En poste
19	EKODECK Stéphane Gaël Raymond	Assistant	En poste
20	HAMZA Adamou	Assistant	En poste
21	JIOMEKONG AZANZI Fidel	Assistant	En poste
22	MAKEMBE. S. Oswald	Assistant	En poste
23	MESSI NGUELE Thomas	Assistant	En poste
24	MEYEMDOU Nadège Sylvianne	Assistante	En poste
25	NKONDOCK. MI. BAHANACK.N.	Assistant	En poste

**7- DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES (MA) (30)**

1	EMVUDU WONO Yves S.	Professeur	<i>Inspecteur MINESUP</i>
---	---------------------	------------	-------------------------------

2	AYISSI Raoult Domingo	Professeur	Chef de Département
3	KIANPI Maurice	Maître de Conférences	En poste
4	MBANG Joseph	Maître de Conférences	En poste
5	MBELE BIDIMA Martin Ledoux	Maître de Conférences	En poste
6	NKUIMI JUGNIA Célestin	Maître de Conférences	En poste
7	NOUNDJEU Pierre	Maître de Conférences	<i>Chef service des programmes &amp; Diplômes</i>
8	MBEHOU Mohamed	Maître de Conférences	En poste
9	TCHAPNDA NJABO Sophonie B.	Maître de Conférences	Directeur/AIMS Rwanda
10	TCHOUNDJA Edgar Landry	Maître de Conférences	En poste

11	AGHOUKENG JIOFACK Jean Gérard	Chargé de Cours	Chef Cellule MINPLAMAT
12	CHENDJOU Gilbert	Chargé de Cours	En poste
13	DJIADEU NGAHA Michel	Chargé de Cours	En poste
14	DOUANLA YONTA Herman	Chargé de Cours	En poste
15	FOMEKONG Christophe	Chargé de Cours	En poste
16	KIKI Maxime Armand	Chargé de Cours	En poste
17	MBAKOP Guy Merlin	Chargé de Cours	En poste
18	MENGUE MENGUE David Joe	Chargé de Cours	En poste
19	NGUEFACK Bernard	Chargé de Cours	En poste
20	NIMPA PEFOUKEU Romain	Chargée de Cours	En poste
21	POLA DOUNDOU Emmanuel	Chargé de Cours	En poste
22	TAKAM SOH Patrice	Chargé de Cours	En poste
23	TCHANGANG Roger Duclos	Chargé de Cours	En poste
24	TETSADJIO TCHILEPECK M. E.	Chargée de Cours	En poste
25	TIAYA TSAGUE N. Anne-Marie	Chargée de Cours	En poste
26	MBIAKOP Hilaire George	Assistant	En poste
27	BITYE MVONDO Esther Claudine	Assistante	En poste

28	MBATAKOU Salomon Joseph	Assistant	En poste
29	MEFENZA NOUNTU Thiery	Assistant	En poste
30	TCHEUTIA Daniel Duviol	Assistant	En poste

### 8- DÉPARTEMENT DE MICROBIOLOGIE (MIB) (18)

1	ESSIA NGANG Jean Justin	Professeur	<i>Chef de Département</i>
---	-------------------------	------------	----------------------------

2	BOYOMO ONANA	Maître de Conférences	En poste
3	NWAGA Dieudonné M.	Maître de Conférences	En poste
4	NYEGUE Maximilienne Ascension	Maître de Conférences	En poste
5	RIWOM Sara Honorine	Maître de Conférences	En poste
6	SADO KAMDEM Sylvain Leroy	Maître de Conférences	En poste

7	ASSAM ASSAM Jean Paul	Chargé de Cours	En poste
8	BODA Maurice	Chargé de Cours	En poste
9	BOUGNOM Blaise Pascal	Chargé de Cours	En poste
10	ESSONO OBOUGOU Germain G.	Chargé de Cours	En poste
11	NJIKI BIKOÏ Jacky	Chargée de Cours	En poste
12	TCHIKOUA Roger	Chargé de Cours	En poste

13	ESSONO Damien Marie	Assistant	En poste
14	LAMYE Glory MOH	Assistant	En poste
15	MEYIN A EBONG Solange	Assistante	En poste
16	NKOUDOU ZE Nardis	Assistant	En poste
17	SAKE NGANE Carole Stéphanie	Assistante	En poste
18	TOBOLBAÏ Richard	Assistant	En poste

### 9. DEPARTEMENT DE PYSIQUE(PHY) (40)

1	BEN- BOLIE Germain Hubert	Professeur	En poste
2	EKOBENA FOU DA Henri Paul	Professeur	Vice-Recteur UY1
3	ESSIMBI ZOBO Bernard	Professeur	En poste
4	KOFANE Timoléon Crépin	Professeur	En poste

5	NANA ENGO Serge Guy	Professeur	En poste
6	NDJAKA Jean Marie Bienvenu	Professeur	Chef de Département
7	NOUAYOU Robert	Professeur	En poste
8	NJANDJOCK NOUCK Philippe	Professeur	<i>Sous Directeur/ MINRESI</i>
9	PEMHA Elkana	Professeur	En poste
10	TABOD Charles TABOD	Professeur	Doyen Univ/Bda
11	TCHAWOUA Clément	Professeur	En poste
12	WOAFO Paul	Professeur	En poste

13	BIYA MOTTO Frédéric	Maître de Conférences	DG/HYDRO Mekin
14	BODO Bertrand	Maître de Conférences	En poste
15	DJUIDJE KENMOE épouse ALOYEM	Maître de Conférences	En poste
16	EYEBE FOUDA Jean sire	Maître de Conférences	En poste
17	FEWO Serge Ibraïd	Maître de Conférences	En poste
18	HONA Jacques	Maître de Conférences	En poste
19	MBANE BIOUELE César	Maître de Conférences	En poste
20	NANA NBENDJO Blaise	Maître de Conférences	En poste
21	NDOP Joseph	Maître de Conférences	En poste
22	SAIDOU	Maître de Conférences	MINERESI
23	SIEWE SIEWE Martin	Maître de Conférences	En poste
24	SIMO Elie	Maître de Conférences	En poste
25	VONDOU Derbetini Appolinaire	Maître de Conférences	En poste
26	WAKATA née BEYA Annie	Maître de Conférences	<i>Sous Directeur/ MINESUP</i>
27	ZEKENG Serge Sylvain	Maître de Conférences	En poste

28	ABDOURAHIMI	Chargé de Cours	En poste
29	EDONGUE HERVAIS	Chargé de Cours	En poste
30	ENYEGUE A NYAM épse BELINGA	Chargée de Cours	En poste
31	FOUEDJIO David	Chargé de Cours	Chef Cell. MINADER
32	MBINACK Clément	Chargé de Cours	En poste
33	MBONO SAMBA Yves Christian U.	Chargé de Cours	En poste

34	MELI'I Joelle Larissa	Chargée de Cours	En poste
35	MVOGO ALAIN	Chargé de Cours	En poste
36	OBOUNOU Marcel	Chargé de Cours	DA/Univ Inter Etat/Sangmalima
37	WOULACHE Rosalie Laure	Chargée de Cours	En poste

38	AYISSI EYEBE Guy François Valérie	Assistant	En poste
39	CHAMANI Roméo	Assistant	En poste
40	TEYOU NGOUPOU Ariel	Assistant	En poste

**10- DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA TERRE (ST) (43)**

1	BITOM Dieudonné	Professeur	<i>Doyen / FASA / UDs</i>
2	FOUATEU Rose épouse YONGUE	Professeur	En poste
3	KAMGANG Pierre	Professeur	En poste
4	NDJIGUI Paul Désiré	Professeur	Chef de Département
5	NDAM NGOUPAYOU Jules-Remy	Professeur	En poste
6	NGOS III Simon	Professeur	DAAC/Uma
7	NKOUMBOU Charles	Professeur	En poste
8	NZENTI Jean-Paul	Professeur	En poste

9	ABOSSOLO née ANGUE Monique	Maître de Conférences	<i>Vice-Doyen / DRC</i>
10	GHOGOMU Richard TANWI	Maître de Conférences	CD/Uma
11	MOUNDI Amidou	Maître de Conférences	<i>CT/ MINIMDT</i>
12	NGUEUTCHOUA Gabriel	Maître de Conférences	CEA/MINRESI
13	NJILAH Isaac KONFOR	Maître de Conférences	En poste
14	ONANA Vincent Laurent	Maître de Conférences	<i>Chef service Maintenance &amp; du Matériel</i>
15	BISSO Dieudonné	Maître de Conférences	<i>Directeur/Projet Barrage Memve'ele</i>
16	EKOMANE Emile	Maître de Conférences	En poste
17	GANNO Sylvestre	Maître de Conférences	En poste
18	NYECK Bruno	Maître de Conférences	En poste
19	TCHOUANKOUE Jean-Pierre	Maître de Conférences	En poste
20	TEMDJIM Robert	Maître de Conférences	En poste

21	YENE ATANGANA Joseph Q.	Maître de Conférences	<i>Chef Div. /MINTP</i>
22	ZO'O ZAME Philémon	Maître de Conférences	<i>DG/ART</i>

23	ANABA ONANA Achille Basile	Chargé de Cours	En poste
24	BEKOA Etienne	Chargé de Cours	En poste
25	ELISE SABABA	Chargé de Cours	En poste
26	ESSONO Jean	Chargé de Cours	En poste
27	EYONG JOHN TAKEM	Chargé de Cours	En poste
28	FUH Calistus Gentry	Chargé de Cours	<i>Sec. D'Etat/MINMIDT</i>
29	LAMILEN BILLA Daniel	Chargé de Cours	En poste
30	MBESSE CECILE OLIVE	Chargée de Cours	En poste
31	MBIDA YEM	Chargé de Cours	En poste
32	METANG Victor	Chargé de Cours	En poste
33	MINYEM Dieudonné-Lucien	Chargé de Cours	<i>CD/Uma</i>
34	NGO BELNOUN Rose Noël	Chargée de Cours	En poste
35	NGO BIDJECK Louise Marie	Chargée de Cours	En poste
36	NOMO NEGUE Emmanuel	Chargé de Cours	En poste
37	NTSAMA ATANGANA Jacqueline	Chargé de Cours	En poste
38	TCHAKOUNTE J. épouse NOUMBEM	Chargée de Cours	<i>Chef.cell / MINRESI</i>
39	TCHAPTCHET TCHATO De P.	Chargé de Cours	En poste
40	TEHNA Nathanaël	Chargé de Cours	En poste
41	TEMGA Jean Pierre	Chargé de Cours	En poste
42	FEUMBA Roger	Assistant	En poste
43	MBANGA NYOBE Jules	Assistant	En poste

**Répartition chiffrée des Enseignants de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I**

**NOMBRE D'ENSEIGNANTS**

<b>DÉPARTEMENT</b>	<b>Professeurs</b>	<b>Maîtres de Conférences</b>	<b>Chargés de Cours</b>	<b>Assistants</b>	<b>Total</b>
BCH	9 (1)	13 (09)	14 (06)	3 (2)	<b>39 (18)</b>
BPA	13 (1)	09 (06)	19 (05)	05 (2)	<b>46 (14)</b>
BPV	06 (0)	11 (02)	9 (06)	07 (01)	<b>33 (9)</b>
CI	10 (1)	9 (02)	12 (02)	03 (0)	<b>34 (5)</b>
CO	7 (0)	17 (04)	09 (03)	02 (0)	<b>35(7)</b>
IN	2 (0)	1 (0)	13 (01)	09 (01)	<b>25 (2)</b>
MAT	1 (0)	5 (0)	19 (01)	05 (02)	<b>30 (3)</b>
MIB	1 (0)	5 (02)	06 (01)	06 (02)	<b>18 (5)</b>
PHY	12 (0)	15 (02)	10 (03)	03 (0)	<b>40 (5)</b>
ST	8 (1)	14 (01)	19 (05)	02 (0)	<b>43(7)</b>
<b>Total</b>	<b>69 (4)</b>	<b>99 (28)</b>	<b>130 (33)</b>	<b>45 (10)</b>	<b>343 (75)</b>

Soit un total de **344 (75)** dont :

- Professeurs **68 (4)**
- Maîtres de Conférences **99 (28)**
- Chargés de Cours **130 (33)**
- Assistants **46 (10)**

( ) = Nombre de Femmes **75**



REPUBLIC OF CAMEROON  
*Peace-Work-Fatherland*

\*\*\*\*\*

UNIVERSITY OF YAOUNDE I  
FACULTY OF SCIENCE

\*\*\*\*\*

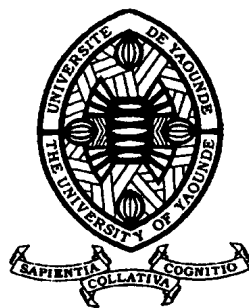
POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,  
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

RESEARCH AND POSTGRADUATE  
TRAINING UNIT FOR PHYSIC AND  
APPLICATIONS

\*\*\*\*\*

P.O. Box 812 Yaoundé  
Email : crfd\_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIQUE DU CAMEROUN  
*Paix-Travail-Patrie*

\*\*\*\*\*

UNIVERSITE DE YAOUNDE I  
FACULTE DES SCIENCES

\*\*\*\*\*

CENTRE DE RECHERCHE ET DE  
FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES,  
TECHNOLOGIE ET GEOSCIENCES

\*\*\*\*\*

UNITE DE RECHERCHE ET DE  
FORMATION DOCTORALE PHYSIQUE ET  
APPLICATIONS

\*\*\*\*\*

B.P 812 Yaoundé  
Email : crfd\_stg@uy1.uninet.cm

**DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE**

**DEPARTMENT OF PHYSICS**

**LABORATOIRE DE MÉCANIQUE, MATÉRIAUX ET STRUCTURES**  
**LABORATORY OF MECHANICS, MATERIALS AND STRUCTURES**

**RECHERCHE DES SOLUTIONS EXACTES DES ÉQUATIONS  
DU TYPE GINZBURG-LANDAU COMPLEXES AVEC TERMES  
DE RENORMALISATION ET SATURATION**

**THÈSE**

Réalisée et défendue publiquement en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat/Ph. D en  
Physique

Option: Mécanique Fondamentale et Systèmes Complexes

Par

**KAMDOUM TAMO Pierre Hervé**

Matricule : 01Y404

Master en Physique

Sous la supervision de

**KENFACK JIOTSA Aurélien**

Professeur

Université de Yaoundé I

**KOFANE Timoléon Crépin**

Professeur

Université de Yaoundé I

**Année académique 2020-2021**

CITATION

*"Ne cherchez pas à être aimé, cherchez à être compétent et vous serez absolument apprécié."*

**Roch Armel**

# Dédicace

*# À mon feu père, M. TAMO Frédéric ;*

# Remerciements

Que les honorables membres du jury acceptent ma reconnaissance pour l'évaluation scientifique de cette étude.

L'occasion m'est ici offerte d'adresser ma profonde et sincère gratitude aux Professeurs KENFACK JIOTSA Aurélien et KOFANE Timoléon Crépin, qui, malgré leurs multiples occupations et sollicitations ont accepté de diriger ce travail.

Par la même opportunité, j'adresse mes remerciements aux Professeurs WOAFU Paul, NDJAKA Jean-Marie Bienvenu, NJOMO Donatien, ESSIMBI ZOBO, TCHAWOUA Clément, ZEKENG Serge, PEMHA Elkana, BEGUIDE BONOMA, ATANGANA, BEN-BOLIE Germain, FEWO Serge Ibraïd, NANA MBENDJO Blaise Roméo, DJUIDJE KENMOE Germaine, et aux Docteurs GNOKAM Edmond, TALA TEBUE Éric pour leur soutien multiforme.

Je remercie mes compagnons de recherche : les Docteurs TSOBGNI Deschances et Fendzi Emmanuel. TIKENG Dyclos, MBONSOU Hervé, AZEGHAP SIMO Ibrahim pour l'esprit de solidarité qui a permis de surmonter bien de difficultés.

Puissent le Docteur MAKAMTHE et ONGOTO Charles accepter mes remerciements pour la relecture minutieuse de ce travail.

Je remercie ma tendre et chaleureuse famille pour toutes ses œuvres pendant mon parcours scolaire et particulièrement pour la réalisation de ce travail.

Que tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

# Table des matières

Dédicace	ii
Remerciements	iii
Table des matières	v
Liste des Figures	viii
Abstract	xiii
Résumé	xiv
Abréviations et Symboles	xv
Introduction Générale	1
<b>Chapitre 1 Revue de la littérature : Généralités sur les solitons, équations aux dérivées partielles non linéaires et les systèmes physiques modélisés par les équations de Ginzburg-Landau.</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Généralités sur les solitons . . . . .	6
1.2.1 Différents types de solitons . . . . .	7
1.2.2 Enjeux et applications des solitons . . . . .	8
1.3 Dispersion, non linéarité et dissipation . . . . .	9
1.3.1 La dispersion . . . . .	9
1.3.2 La non-linéarité . . . . .	10
1.3.3 La dissipation . . . . .	10
1.4 Interaction des solitons : le cas des lasers à fibre . . . . .	10

1.4.1	La non-linéarité et les interactions . . . . .	11
1.4.2	Les interactions entre solitons classiques . . . . .	11
1.4.3	Les interactions entre solitons dissipatifs . . . . .	13
1.5	Quelques types d'équations aux dérivées partielles non linéaires . . . . .	15
1.6	Les systèmes physiques modélisés par les équations de Ginzburg-Landau . . . . .	19
1.6.1	Condensats de Bose-Einstein gazeux . . . . .	20
1.6.2	Modélisation de l'hélium liquide superfluide . . . . .	21
1.6.3	Modèle de supersolide . . . . .	22
1.6.4	Optique non linéaire . . . . .	23
1.6.5	Mécanique des fluides . . . . .	23
1.6.6	Les supraconducteurs . . . . .	24
1.7	Quelques techniques de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires . . . . .	25
1.7.1	Méthode de la fonction exponentielle . . . . .	25
1.7.2	Méthode de l'équation simple modifiée . . . . .	27
1.7.3	Méthode généralisée de Kudryashov . . . . .	28
1.7.4	Méthode d'Hirota . . . . .	29
1.8	Conclusion . . . . .	30

**Chapitre 2 Méthodes mathématiques et applications de deux systèmes physiques aboutissant aux équations du type Ginzburg-Landau complexe 32**

2.1	Introduction . . . . .	32
2.2	Méthodes mathématiques . . . . .	32
2.2.1	Approche par troncature de painlevé . . . . .	32
2.2.2	Méthode alternative d'expansion ( $G'/G$ ) . . . . .	34
2.2.3	Méthode de la fonction sech . . . . .	35
2.2.4	Méthode de la fonction tanh . . . . .	36
2.2.5	Méthode de la fonction exponentielle rationnelle . . . . .	37
2.3	Applications de deux systèmes physiques aboutissant aux équations du type Ginzburg-Landau complexe . . . . .	39
2.3.1	la fibre optique : Équation de Ginzburg-Landau complexe . . . . .	39

2.3.2	La molécule ADN : Équation de Schrödinger non linéaire cubique- quintique . . . . .	44
2.4	Conclusion . . . . .	48
<b>Chapitre 3 Résultats et Discussions</b>		<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée avec terme de re- normalisation . . . . .	49
3.2.1	Méthode alternative d'expansion ( $G'/G$ ) . . . . .	52
3.2.2	Méthode de la fonction sech . . . . .	57
3.2.3	Méthode de la fonction tanh . . . . .	58
3.2.4	Approche par troncature de Painlevé . . . . .	60
3.3	Équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée avec terme de sa- turation : approche par troncature de Painlevé . . . . .	70
3.4	Équation de Schrödinger non linéaire d'ordre supérieur . . . . .	79
3.4.1	Portrait de phase du modèle . . . . .	79
3.4.2	Solutions exactes . . . . .	81
3.5	Ondes cnoïdales et solitaires d'une équation de Schrödinger non li- néaire dans une fibre optique . . . . .	90
3.5.1	Présentation du modèle . . . . .	91
3.5.2	Solutions exactes : Ondes Cnoïdales et solitaires . . . . .	92
3.6	Conclusion . . . . .	96
<b>Conclusion Générale</b>		<b>97</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>100</b>
<b>Liste des Publications</b>		<b>112</b>



# Liste des figures

<b>Figure 1</b>	<i>Simulation de l'observation de J.S. Russel (Heriot-watt university, 1995).</i>	7
<b>Figure 2</b>	<i>Exemple des ondes solitaires et solitons dans un milieu hydrodynamique.</i>	8
<b>Figure 3</b>	<i>Principe d'une fibre optique.</i>	40
<b>Figure 4</b>	<i>Solution tracée en utilisant l'équation (165) avec les paramètres suivants : <math>\lambda = 2</math>, <math>\mu = 0.25</math>, <math>C_1 = 0.5</math> et <math>C_2 = 0.3</math>; <math>a_0</math>, <math>a_1</math>, <math>k</math> et <math>v</math> sont pris avec un signe positif. En 3D, nous avons représenté le module. En 2D, nous avons l'enveloppe (trait fort) à <math>t = 0</math>. Les tirets de couleur verte correspondent à la partie imaginaire et les pointillés de couleur bleu représentent la partie réelle.</i>	55
<b>Figure 5</b>	<i>Solution affichée à partir de l'équation (168) avec les paramètres suivants : <math>\lambda = 0.25</math>, <math>\mu = 1.0</math>, <math>C_1 = 0.5</math> et <math>C_2 = 0.3</math>; <math>a_0</math> et <math>a_1</math> sont négatifs tandis que <math>k</math> et <math>v</math> sont positifs. La figure de dessus présente le module. La figure de dessous donne la représentation en 2D de l'enveloppe (trait fort) à <math>t = 0</math>. Elle a la même légende que dans la figure 4.</i>	56
<b>Figure 6</b>	<i>Représentation en 3D et 2D de l'équation (174) avec les paramètres suivants : <math>\gamma_r = 0.5</math>, <math>A = 0.02</math>, <math>p = 0.8</math>, <math>q = 0.5</math> et <math>c = 0.4</math>; <math>v</math> et <math>k</math> sont positifs. Les figures de dessus et de dessous correspondent respectivement au module et à la représentation en 2D de l'enveloppe, à <math>t = 0</math>. La partie imaginaire correspond aux tirets de couleur verte et la partie réelle aux pointillés de couleur bleu.</i>	59

- Figure 7** *Solution obtenue par la méthode tanh et correspondant à l'équation (180) avec les paramètres suivants :  $\gamma_r = 0.5$ ,  $A = 2$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.7$  et  $c = 0.5$ ;  $v$  est négatif tandis que  $k$  est positif. Le module est représenté au dessus alors que en dessous nous avons la représentation en 2D de l'enveloppe (trait fort) à  $t = 0$ . Même légende que dans la figure 4. . . . . 61*
- Figure 8** *Courbes simulant la propagation de l'onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 4. La courbe de gauche correspond au déplacement de l'onde dans son temps transitoire. Celle de droite visualise le déplacement de l'onde dans son état stable. . . . . 62*
- Figure 9** *Solution correspondant à l'équation (197) avec les paramètres suivants :  $\omega = 0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $p = -0.5$ ,  $c = 0.5$ ,  $q = -0.001$ ,  $U_0 = 1.9$ ,  $V_0 = 1.9$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma_i = 1$  et  $\gamma_r = -1$ . La figure de gauche présente le module. La figure de droite donne la représentation en 2D de l'enveloppe (trait continu) à  $t = 0$ . Elle a la même légende que dans la Figure 4. . . . . 67*
- Figure 10** *Solution tracée en utilisant l'équation (200). Ces courbes sont obtenues avec les paramètres suivants :  $\omega = -0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $p = -0.5$ ,  $c = -50$ ,  $q = 0.001$ ,  $U_0 = 10$ ,  $V_0 = 10$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma_i = 1$  et  $\gamma_r = -1$ . Le module est représenté sur la gauche alors que sur la droite nous décrivons la représentation en 2D de l'enveloppe à  $t = 0$  (même légende que dans la figure 4). . . . . 68*

- Figure 11** *Représentation en 3D et en 2D de la solution de l'équation (204) avec les paramètres suivants :  $\omega = -0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $p = -0.5$ ,  $c = 15$ ,  $q = 0.001$ ,  $U_0 = 20$ ,  $V_0 = 20$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma_i = 1$  et  $\gamma_r = -1$ . En 3D, nous avons représenté le module. En 2D nous avons l'enveloppe (trait continu) à  $t = 0$ . Les traits interrompus vert correspondent à la partie imaginaire tandis que les pointillés bleu représentent la partie réelle. . . . . 69*
- Figure 12** *Courbes simulant la propagation de l'onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 9 et correspondent à l'équation (197). Ces courbes correspondent au déplacement de l'onde dans son temps transitoire. . . . . 70*
- Figure 13** *Courbes simulant la propagation de l'onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 12 et correspondent à l'équation (204). Ces courbes correspondent au déplacement de l'onde dans son temps transitoire. . . . . 70*
- Figure 14** *Solution correspondant à l'équation (222) avec les paramètres suivants :  $\gamma_m = 0.001$ ,  $\gamma_r = -0.001$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $U_0 = 1.5$ ,  $V_0 = 1.5$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$  et  $k = 0.3$ . Le module est représenté sur la gauche alors que sur la droite nous décrivons la représentation en 2D de l'enveloppe à  $t = 0$ . Les traits interrompus vert correspondent à la partie imaginaire tandis que les pointillés bleu représentent la partie réelle. . . . . 75*
- Figure 15** *Solution correspondant à l'équation (225) avec les paramètres suivants :  $\gamma_m = 0.001$ ,  $\gamma_r = -0.001$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $U_0 = 1.5$ ,  $V_0 = 1.5$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$  et  $k = 0.3$ . Même légende que dans la figure 14. . . . . 76*
- Figure 16** *Solution correspondant à l'équation (228) avec les paramètres suivant :  $\gamma_m = 0.001$ ,  $\gamma_r = -0.001$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $U_0 = 1.5$ ,  $V_0 = 1.5$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$  et  $k = 0.3$ . Même légende que dans la figure 14. . . . . 77*

- Figure 17** *Courbes simulant la propagation de l'onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 14. La courbe de gauche qui correspond à la solution (222) est la représentation en 3D. La courbe de droite présente la collision de deux ondes solitaires. . . . . 78*
- Figure 18** *Courbes simulant la propagation de l'onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 16. La courbe de gauche qui correspond à la solution (229) est la représentation en 3D. La courbe de droite présente la collision de trains d'ondes solitaires. . . . . 78*
- Figure 19** *Différents portraits de phase de ESNLOS (230). La courbe (a) est obtenue pour  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -2.0$ ,  $\alpha_3 = 3.0$ ,  $\alpha_4 = 1.0$ ,  $\alpha_5 = 0.6$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ ; La courbe (b) est obtenue pour  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.5$ ,  $\alpha_3 = 2.0$ ,  $\alpha_4 = 0.1$ ,  $\alpha_5 = 6.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ ; La courbe (c) est obtenue pour  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = -6.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ ; La courbe (d) est obtenue pour  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = 6.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ . . . . . 82*
- Figure 20** *Le potentiel effectif  $U(A)$  de l'équation SNLOS (232). Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres comme dans la Figure 19. La courbe (a) correspond au portrait de phase de la Figure 19(a); La courbe (b) correspond au portrait de phase de la Figure 19(b); La courbe (c) correspond au portrait de phase de la Figure 19(c); La courbe (d) correspond au portrait de phase de la Figure 19(d). . . . . 83*
- Figure 21** *Solution correspondant à l'équation (245). Ces figures sont obtenues avec les paramètres suivants :  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = 6.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ . La courbe (a) est tracé pour  $m = 0.6$  tandis que la courbe (b) est tracé pour  $m = 1.0$ . . . . . 88*

- Figure 22** *Solution correspondant à l'équation (248). Ces figures sont obtenues avec les paramètres suivants :  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 10.0$  et  $u = 3.0$ . La courbe (a) est tracé pour  $m = 0.6$  tandis que la courbe (b) est tracé pour  $m = 1.0$ . . . . . 89*
- Figure 23** *Solution correspondant à l'équation (251). Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres comme dans la Figure 22. La courbe (a) est tracée pour  $m = 0.6$  tandis que la courbe (b) est tracée pour  $m = 1.0$ . . . . . 90*

# Abstract

In this thesis, we propose to study the modified complex Ginzburg-Landau equation. For this, we use mathematical methods proposing solutions by passing the singularities in the type CGL equation, at first, we consider the modified CGL equation with the renormalization term. We use three different methods namely : alternative  $(G'/G)$ -expansion method, sech function method and tanh function method to have some exact solutions mathematically acceptable. Afterwards, considering the same modified complex Ginzburg-Landau equation with renormalization term, we combine with the Method of soliton ansatz, the Painleve truncated approach to obtain soliton solutions, therefore physically acceptable and finally we study the influence of the renormalization term in the propagation of the solitary wave. In the second time, it is MCGL equation with both a renormalization term and a saturation term. As in the first case, we combine with method of soliton ansatz, the Painleve truncated approach to obtain soliton solutions, so physically acceptable. But except that in this case, it is the influence of the saturation term that we study in the propagation of the solitary wave. Then we apply two methods which are the arbitrary nonlinear parameters and the exponential rational function method to construct many new exact solutions of the higher order nonlinear partial differential equations namely, the higher order nonlinear Schrödinger (HNLS) equation. The solutions obtained by the current methods are generalized periodic solutions. Finally, new exact analytical solutions of a nonlinear Schrödinger equation with a cubic-quintic nonlinearity and in presence of a couple of perturbation terms. This equation describes the dynamics of soliton propagation through an optical fiber. Several solutions are found without applying the computer codes and by considering the integration constant.

**Keywords :** Soliton ; Ginzburg-Landau equation ; Renormalization term ; Saturation term ; Painleve truncated approach ; Alternative  $(G'/G)$ -expansion method ; Sech function method ; Tanh function method ; Exponential rational function method ; Optical fiber.

# Résumé

Dans cette thèse, nous nous proposons d'étudier les équations du type Ginzburg-Landau complexes. Pour cela, nous utilisons des méthodes mathématiques proposant des solutions contournant les singularités dans les équations du type Ginzburg-Landau complexe. Dans un premier temps nous considérons l'équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée avec terme de renormalisation. Nous utilisons trois méthodes différentes à savoir : la méthode alternative d'expansion  $(G'/G)$ , la méthode de la fonction sech et la méthode de la fonction tanh pour avoir des solutions nouvelles du type ondes solitaires. Considérant la même équation modifiée de Ginzburg-Landau complexe avec terme de renormalisation, nous combinons à l'ansatz de type soliton, l'approche par troncature de Painlevé pour obtenir des solutions de types soliton bright, soliton dark et soliton kink. Ensuite nous étudions l'équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée avec terme de saturation. Comme dans le premier cas, nous combinons à l'ansatz de type soliton, l'approche par troncature de Painlevé pour obtenir des solutions de types ondes solitaires. Par la suite, nous appliquons deux méthodes qui sont les paramètres non linéaires arbitraires et la méthode de la fonction exponentielle rationnelle pour construire beaucoup de nouvelles solutions exactes de l'équation de Schrödinger non linéaire d'ordre supérieure. Les solutions obtenues par les méthodes citées ci-dessus sont des solutions périodiques généralisées. Enfin, nous présentons de nouvelles solutions analytiques exactes d'une équation de Schrödinger non linéaire cubique quintique en présence de quelques terme de perturbation. Cette équation décrit la dynamique de propagation des solitons dans une fibre optique. Plusieurs solutions sont trouvées sans appliquer les codes informatiques et en tenant compte de la constante d'intégration.

**Mots clés :** Soliton ; Équation de Ginzburg-Landau ; Terme de renormalisation ; Terme de Saturation ; Approche par troncature de Painlevé ; Méthode alternative d'expansion  $(G'/G)$  ; Méthode de la fonction Sech ; Méthode de la fonction tanh ; Méthode de la fonction exponentielle rationnelle ; Fibre optique.

# Abréviations et Symboles

**KDV** : Korteweg-de-Vries ;

**GLC** : Ginzburg-Landau Complex ;

**EGL** : Équation de Ginzburg-Landau ;

**EDP** : Équation aux Dérivées Partielles ;

**ESNL** : Équation de Schrödinger Non linéaire ;

**LTNL** : Ligne de Transmission Non Linéaire ;

**ESNLOS** : Équation de Schrödinger Non linéaire d'Ordre Supérieure ;

**EGLCM** : Équation de Ginzburg-Landau Complexe Modifiée ;

**EDPNL** : Équation aux Dérivées Partielles Non linéaires ;

**EGLCNL** : Équation de Ginzburg-Landau Complexe Non linéaire ;

**EGLCQ** : Équation de Ginzburg-Landau Cubique-Quintique ;

**EDO** : Équation Différentielle Ordinaire ;

**BBM** : Benjamin-Bona-Mahony ;



**ZK** : Zakharov-Kuznetsov ;

**JM** : Jaulent-Miodek ;

**CDG** : Caudrey-Dodd-Gibbon ;

**BK** : Broer-Kaup ;

**NNV** : Nizhnik-Novikov-Vesselov ;

**KP** : Kadomtsev-Petviashvili ;

**GP** : Gross-Pitaevskii ;

**DBM** : Dodd-Bullough-Mikhailov ;

**SPM** : Self-Phase Modulation ;

**XPM** : Cross-Phase Modulation ;

**DVG** : Dispersion de la vitesse de groupe (Dispersion d'ordre 2) ;

**ADN** : Acide Désoxyribonucléique ;

**PB** : Peyrard Bishop ;

# Introduction Générale

Comme le dit Newton : "Il est utile de résoudre des équations différentielles". Dès lors que l'analyse avait prit son essor sous l'impulsion de Newton, Leibniz et de Bernoulli, l'on s'est préoccupé de résoudre des problèmes de géométrie avec des outils mathématiques, et plus encore, avec des outils mécaniques. De 1692 à 1752, pendant soixante ans, il a été développé toute une industrie mécanique destinée à résoudre graphiquement les équations différentielles. Le traité de Vincenzo Riccati, publié en 1752 est à ce titre tout à fait remarquable d'une technique ayant atteint son sommet et qui va disparaître totalement dans les méandres du temps, lorsque de nouveau le besoin se fait sentir d'avoir des outils mécaniques. Entre 1880 et 1920, on retrouvera les anciennes solutions sans savoir que de telles solutions existaient plus d'un siècle avant : l'analyseur différentiel est l'aboutissement de cette méthode. De la même manière, on a cherché à résoudre de manière analogique les équations aux dérivées partielles en se servant des phénomènes physiques à l'origine de ces équations. Ainsi, l'équation de Laplace se résout par une analogie électrique et cette méthode était enseignée au niveau universitaire au milieu des années 1970. Des calculateurs électroniques analogiques ont vu le jour, le premier par Helmut date de la fin des années 1930 et du début des années 1940. C'est dans cette même optique que Painlevé en 1904, déclarait "la vague s'arrêta quand tout ce qui était intégrable, dans les domaines naturels fût intégré", et il croyait cette question définitivement résolue. On pensait que jamais on ne pourrait trouver un algorithme permettant de savoir si une équation différentielle est résoluble par une formule. Cependant, cette question a reçu aujourd'hui un regain d'intérêt.

L'on sait déterminer depuis une cinquantaine d'années si une équation différentielle admet une solution exprimable par une formule ou s'il faut se contenter d'un calcul numérique. De même, l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires se trouve dans l'interface de nombreux problèmes scientifiques. En ef-

fet, la plupart des phénomènes de la physique ou des sciences de l'ingénieur sont non linéaires et une modélisation par des équations linéaires risque, dans certains cas, d'effacer des événements que les équations linéaires ne peuvent pas prendre en compte.

Inversement, on peut dire que c'est l'existence de ces phénomènes nouveaux à savoir l'apparition de chocs ou de singularités, comportement asymptotique profondément différent de celui des problèmes linéaires qui rend la théorie difficile et qui conduit à faire appel à un arsenal mathématique très vaste. L'interaction avec le reste de la mathématique se fait aussi en sens inverse, car un certain nombre de problèmes abstraits se traitent à l'aide d'équations aux dérivées partielles non linéaires. C'est dans cette optique que la recherche des solutions exactes, en particulier des solitons, pour les équations physique mathématiques non linéaires est un sujet important et intéressant. De nombreux auteurs ont porté leur attention sur ce sujet.

Les solitons dans les systèmes Hamiltoniens (mais non intégrables) peuvent nous permettre de décrire le comportement des systèmes avec un nombre infini de degrés de liberté. Les solitons de ces systèmes entrent en collision de manière inélastique et interagissent avec des ondes de rayonnement, ce qui montre qu'ils sont qualitativement différents de ceux des systèmes intégrables .

Cependant, comme dans le cas intégrable, les solitons constituent toujours une famille de solutions à un ou quelques paramètres. Les systèmes dissipatifs sont plus compliqués que les systèmes Hamiltoniens en ce sens qu'en plus de la nonlinéarité et de la dispersion, ils incluent l'échange d'énergie avec des sources externes. L'équation générique qui décrit les systèmes dissipatifs au dessus du point de bifurcation est l'équation de Ginburg-Landau Complexe (EGL) [1, 2]. Une revue des expériences décrites par l'équation de GLC est donnée par [3]. En optique, elle décrit les systèmes lasers [4–7], les lignes de transmission à solitons [8], les cavités non linéaires avec pompe externe [9], et les oscillateurs paramétriques [10]. Mais surtout, les solitons, peuvent être considérés comme des modes de ces systèmes, nous permettant ainsi de décrire le comportement du système en terme de quelques degrés de liberté.

Beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'étude des EDP non linéaires et à la théorie des solitons, motivées par leurs applications et leurs rôles important dans l'étude de la physique non linéaire des phénomènes, notamment dans la physique des plasmas, les fibres optiques, la mécanique des fluides, la biologie, la cinétique chimique et la géochimie.

Au cours de ces dernières années, un certain nombre de méthodes puissantes et efficaces pour trouver des solutions analytiques aux équations non linéaires ont suscité un vif intérêt de la part de différents groupes scientifiques. Celles-ci incluent par exemple : la méthode de la transformation de Bäcklund [11,12], la méthode de transformation bilinéaire [13,14], la méthode d'expansion  $(G'/G)$  [15–20], la méthode de l'équation de Riccati généralisée [21], la méthode de la première intégrale [22,23], la méthode de l'équation auxiliaire [24,25], la méthode des symétries [26].

## Contexte et motivation de la thèse

Depuis plusieurs années déjà, L. Stenflo, Yomba E. et al, Kenfack Jiotsa auriélien et al, Mohamadou et al, [148–152] ont résolu l'équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée afin d'étudier les paramètres de renormalisation et de saturation. Ils ont présenté les variations importantes qui se produisent dans le domaine de la stabilité de ces solutions en fonction des valeurs du coefficient de renormalisation et de saturation. Sauf que selon leurs résultats, ce paramètre qui peut être considéré pour des valeurs de solutions à branches non nulles n'existe pas [148,151]. Dans ce travail, nous voulons montrer que toutes solutions mathématiquement acceptable ne le sont pas nécessairement physiquement. Parmi les deux types des solutions obtenues, il existe une catégorie à branches infinies nulles, pour lesquelles aucune simulation numérique directe ne peut être effectuée. Ce type de solutions est toutefois mathématiquement bien fondé. La deuxième catégorie concerne les solutions nouvelles à branches infinies non nulles. Pour ce second type, des simulations numériques directes sont effectuées pour montrer qu'elles sont physiquement valides. Aussi, nous voulons étendre notre recherche en vérifiant l'hypothèse selon laquelle le comportement de l'équation de Schrödinger d'ordre supérieure peut être prédit au moyen du tracé des portraits de plans de phase et si les solutions obtenues peuvent être utiles dans les télécommunications. Enfin, est ce que la présence des termes de perturbation dans l'équation de Schrödinger cubique quintique peut influencer la forme des solutions attendues ?

## Organisation de l'étude

La présente thèse qui est à la fois analytique et numérique, est répartie de la manière suivante :

★ Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques généralités sur les

solitons. Nous y présentons différents types de solitons et leurs applications. Ensuite, nous citons quelques exemples d'équations aux dérivées partielles non linéaires et quelques systèmes physiques modélisés par les équations de Ginzburg-Landau. Nous terminons ce chapitre en développant de façon sommaire quelques techniques de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires, à savoir, la méthode de la fonction exponentielle, la méthode de l'équation simple modifiée, la méthode généralisée de Kudryashov et la méthode d'Hirota.

★ Le chapitre 2 est consacré à la présentation des différentes méthodes mathématiques utilisées pour atteindre nos objectifs, notamment l'approche par troncation de Painlevé, la méthode alternative d'expansion  $(G'/G)$ , la méthode de la fonction sech, la méthode de la fonction tanh et la méthode de la fonction exponentielle rationnelle. Deux systèmes physiques qui aboutissent à l'équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée (avec terme de renormalisation et ensuite avec terme de saturation) et à celle de Schrödinger non linéaire cubique-quintique y sont présentés (la fibre optique et La molécule ADN).

★ Le chapitre 3 présente les résultats obtenus. Des discussions y sont menées afin de mieux expliquer les résultats d'analyses mathématiques et numériques.

Une conclusion générale résume tous les résultats. Nous y proposons également des sujets connexes qui peuvent être effectués dans le futur.

# Revue de la littérature : Généralités sur les solitons, équations aux dérivées partielles non linéaires et les systèmes physiques modélisés par les équations de Ginzburg-Landau.

## 1.1 Introduction

L'étude des ondes solitaires dans les systèmes physiques a connu une attention particulière pendant les cinq dernières décennies. Il s'agit d'une onde qui se propage en ignorant les lois classiques de la dispersion de l'énergie. En règle générale, cette onde est suffisamment intense pour exciter un effet non linéaire qui va compenser l'effet normal de dispersion de l'énergie. L'énergie par le phénomène non linéaire crée un puits de potentiel dans son milieu de propagation ; ce puits piège l'énergie sans être désintégré et l'empêche de se disperser. Ces paquets d'énergie peuvent subir des forces qui leur donnent des propriétés matérielles : d'où le nom de soliton. Ce phénomène se retrouve dans biens de domaines, notamment les solitons et peut être décrit par l'équation de schrödinger non linéaire et plus généralement par l'équation de Ginzburg-Landau complexe. Dans cette première partie, nous allons présenter le soliton, à savoir ses origines, les différents types de soliton, ses applications, ses enjeux et les interactions entre divers types de solitons.

Aussi, nous allons donner quelques exemples d'équations aux dérivées partielles et quelques applications des équations de Ginzburg-Landau. Enfin nous finirons par quelques techniques de résolution des équations aux dérivées partielles.

## 1.2 Généralités sur les solitons

La première observation d'une onde solitaire fût faite en août 1834 par un ingénieur Écossais du nom de John Scott-Russel. Alors qu'il observait le mouvement d'une péniche sur l'union canal qui relie la ville d'Edinburg à celle de Glasgow [27], il remarqua un nouveau type d'ondes se propageant à la surface du canal ayant les propriétés suivantes :

- ❖ Ces ondes ont des structures dynamiques localisées et indépendantes qui se propagent sans modification de forme, ni de vitesse [28] ;
- ❖ Ces ondes se propagent sur l'eau de profondeur  $d$ , avec une vitesse  $v$ , qui croit avec sa hauteur  $h$ , selon la formule [29] :

$$v = \sqrt{g(d+h)}.$$

- ❖ Ces ondes peuvent entrer en collision et en ressortir sans aucun changement ;

Un soliton est donc une onde solitaire qui se propage sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif. Il possède une énergie localisée dans l'espace et qui se révèle extrêmement stable en présence de perturbation. Il a la particularité d'entrer en collision et d'en ressortir sans aucun changement [30]. Il se déplace sans changer de forme ni de caractéristique et cela explique le fait qu'il soit assez facile de l'observer en milieu naturel. En résumé, le soliton est :

- Stable sous toute forme de perturbation infinitésimale ;
- Possède une énergie localisée dans l'espace ;
- Se déplace sans changer de forme, ni de caractéristique [31] ;

Un soliton est une onde unique auto-renforçante, qui se déplace à une vitesse constante, tout en conservant sa forme. Les solitons représentent des solutions à une grande classe d'équations différentielles partielles dispersives, faiblement non linéaires, qui sont associées aux systèmes physiques. Les solitons sont causés par une annulation des effets non linéaires et dispersifs dans le milieu. (Le terme "effets dispersifs" fait référence à une propriété de certains systèmes où la vitesse des ondes varie en fonction de la fréquence). La dispersion et la non-linéarité peuvent se combiner et entraîner des formes d'ondes permanentes et localisées. Les solitons sont

le résultat de l'effet Kerr non linéaire : l'indice de réfraction d'un matériau à une fréquence donnée dépend de l'amplitude de l'onde. Si l'impulsion a juste la bonne forme, l'effet Kerr annulera précisément l'effet dissipatif autrement perturbateur et la forme de l'impulsion ne changera pas avec le temps.



FIG. 1 – Simulation de l'observation de J.S. Russel (Heriot-watt university, 1995).

### 1.2.1 Différents types de solitons

Jusqu'à présent deux types d'ondes solitaires ont été identifiées.

❖ Le soliton de Korteweg-de-Vries ou soliton non topologique, dont le milieu de propagation est dans le même état avant et après le passage de l'onde. Ces solitons sont ceux que l'on observe en hydrodynamique (même si certains sont aussi observés en mécanique du solide). Le soliton non topologique en milieux hydrodynamiques peut être décrit par l'équation de KDV (écrit par le mathématicien Korteweg et l'hydraulicien Gustav de Vries) [32] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

avec pour solution :



$$\phi = \frac{3\nu}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\nu}{2} (X - \nu t) \right].$$

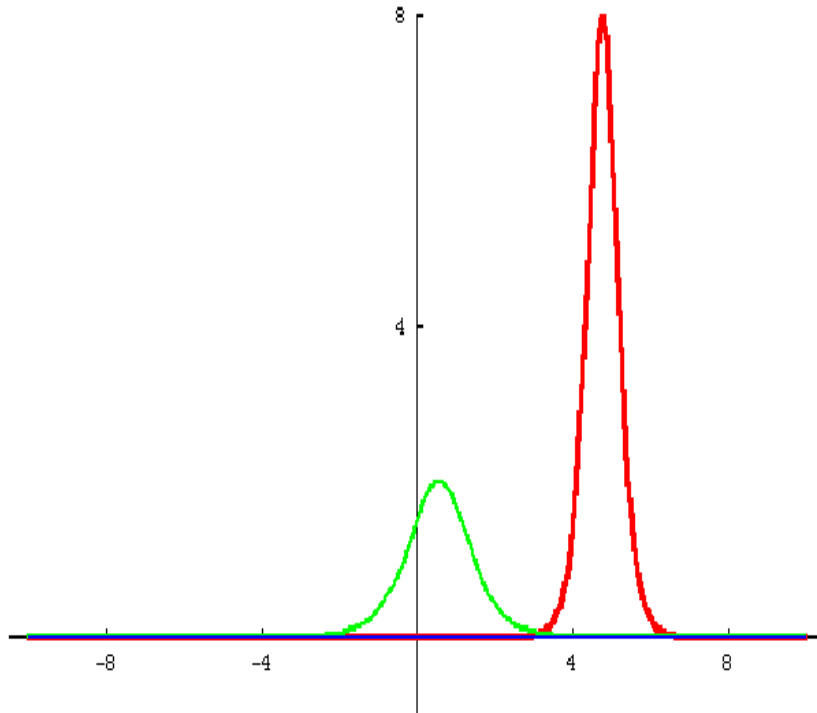


FIG. 2 – Exemple des ondes solitaires et solitons dans un milieu hydrodynamique.

❖ Le soliton enveloppe ou soliton topologique, issu de l'équation de Schrödinger non linéaire. Ici le milieu de propagation est dans des états différents avant et après le passage de l'onde. Ce soliton peut être décrit par l'équation de Sine-Gordon [33] :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \sin \theta = 0. \quad (2)$$

### 1.2.2 Enjeux et applications des solitons

Depuis le début des années 1990, les applications des solitons sont de plus en plus nombreuses :

★ En 1991, une équipe transmet des solitons sur plus de 1400 km en utilisant une technique d'amplification des signaux de différentes longueurs d'onde pour réaliser une transmission de débit supérieur à un téraoctet par secondes [34] ;

★ En 2000, les chimistes montrent que la conduction électrique des plastiques conducteurs est assurée par les solitons [35];

★ En 2001, les solitons trouvent une application pratique avec le premier équipement de télécommunications transportant du trafic réel sur un réseau commercial [36];

★ En 2004, N. Sugimoto de l'université d'Osaka, un chercheur japonais crée les premiers solitons acoustiques. Une utilisation potentielle de ces solitons est la réduction des ondes de choc lors de l'entrée des trains dans le tunnel [37];

★ En 2006, les solitons sont observés au sein de cristaux d'aluminium portés par une température élevée grâce à des expériences de diffusion par des rayons X et des neutrons [38].

Actuellement, le principal enjeu des solitons à la fois du point de vue technique et économique se situe dans le domaine de la télécommunication.

En effet, l'étude de la propagation d'un signal électromagnétique dans une fibre optique montre que les effets non linéaires peuvent devenir importants, ce qui permet la propagation des solitons. Un modèle mathématique a d'ailleurs mis en évidence le phénomène des solitons optiques il y a 30 ans [39]. Cependant, ce modèle mathématique n'a pas encore pu être parfaitement adapté à la physique et développé en applications commerciales.

Aujourd'hui de nombreux laboratoires de recherche en transmission de l'information travaillent sur la propagation des solitons dans les fibres optiques. En effet, le soliton ayant la capacité de se propager en gardant ses propriétés, il peut permettre de concevoir des systèmes optiques plus performants et donc d'améliorer également les technologies de l'information et de la communication [40].

## 1.3 Dispersion, non linéarité et dissipation

Les lignes de transmission non linéaires (LTNL) ont en générales trois principales caractéristiques qui sont : la non linéarité, la dissipation et la dispersion. La particularité de chaque ligne se situe au niveau du degré avec lequel ces caractéristiques interagissent. Dans la fibre optique par exemple, on a une faible dissipation, une petite nonlinéarité et une dispersion modérée.

### 1.3.1 La dispersion

La dispersion est la variation de la vitesse de phase en fonction de la fréquence. Dans les lignes de transmission non linéaire, les ondes ont un caractère

dispersif [41]. Dans ces conditions, un paquet d'ondes composé de la superposition de ces ondes va s'étaler, c'est à dire changer de forme au cours de la propagation.

### 1.3.2 La non-linéarité

Les effets non linéaires sont celles qui ne se produisent pas de façon directement proportionnelle à l'action. C'est la plupart des effets du monde réel et la raison de la difficulté à reproduire fidèlement des informations par des techniques analogiques. Dans les dipôles par exemples on distingue la non linéarité conductrice et la non linéarité réactive. Dans les systèmes optiques les effets non linéaires les plus courants sont l'effet Kerr, la diffusion Brillouin et Raman [42, 43].

### 1.3.3 La dissipation

La dissipation désigne le phénomène selon lequel un système dynamique perd de l'énergie au cours du temps. Dans les lignes de transmission électrique non linéaires par exemple, les principales sources de dissipation proviennent de la résistance de contact non nulle et de la résistance de masse dans les diodes. La forte présence de ces pertes diminue l'efficacité du dispositif.

## 1.4 Interaction des solitons : le cas des lasers à fibre

L'idée d'utiliser la non-linéarité de Kerr pour compenser la dispersion dans les réseaux de télécommunications par fibre optique a été proposée il y a déjà une trentaine d'années. Suite à cette proposition, beaucoup d'études ont été effectuées pour analyser en détail la propagation de solitons dans les fibres. La raison principale de cet intérêt est de réduire au minimum le taux d'erreurs sur les données transmises. L'une des sources d'erreurs potentielle est l'interaction entre les solitons à mesure qu'ils se propagent le long d'une fibre. L'idée, dans sa plus simple expression, est de transmettre de l'information binaire en associant un soliton à chaque «1» et une absence de soliton à chaque «0». La résultante est une suite de «0» et de «1» injectés à intervalles réguliers dans la fibre. Il est évident que si deux solitons successifs s'attirent ou se repoussent, le signal détecté à la sortie de la fibre sera altéré. Cela peut possiblement mener à des erreurs de détection dans la suite binaire. Plusieurs groupes ont donc étudié ce type d'interactions en détails dans le contexte des systèmes de télécommunications. Au cours de cette section, nous allons présenter un résumé des connaissances théoriques concernant les interactions

entre solitons.

### 1.4.1 La non-linéarité et les interactions

Deux signaux lumineux tels des impulsions se propageant dans un milieu linéaire obéissent au principe de superposition. Mathématiquement, deux solutions de l'équation différentielle de propagation peuvent s'additionner pour former une nouvelle solution. En d'autres termes, la présence de la première impulsion n'affecte pas le comportement de la deuxième et vice-versa. Ces impulsions se propagent donc indépendamment et peuvent même se croiser sans s'affecter l'une et l'autre. Dans ce cas on ne peut pas vraiment parler d'interactions entre les impulsions.

Aussitôt que la propagation est non linéaire, comme celle qui se produit dans la fibre optique, les deux impulsions qui se croisent s'affectent mutuellement. Pour représenter ce phénomène, de nouveaux termes doivent être introduits dans l'équation de propagation. Deux solutions de l'équation ne peuvent donc plus s'additionner pour en donner une troisième. L'interaction peut mener à différents scénarios selon les effets considérés, la valeur des paramètres les représentant et les conditions initiales.

Le principe de base pour expliquer toute interaction non linéaire est le suivant. Une impulsion solitaire possède certaines propriétés bien établies. Par exemple, sa fréquence porteuse, son amplitude et sa vitesse de propagation sont fixes. Si une seconde impulsion s'en approche, le profil en puissance du signal est alors modifié. Comme les termes non linéaires de l'équation de propagation dépendent du profil en puissance, il en découle différents changements dans la propagation des impulsions par rapport à leur propagation en mode solitaire.

### 1.4.2 Les interactions entre solitons classiques

En première approximation, pour modéliser la propagation d'un signal dans une fibre optique, il suffit de considérer les effets de la dispersion d'ordre 2 et de la non-linéarité de Kerr. L'équation de propagation qui en résulte est l'équation de Schrödinger non linéaire (ESNL). Il est connu que cette équation est intégrable et peut être solutionnée par la méthode de diffusion inverse [44]. En dispersion anormal, on obtient alors une solution localisée de forme sécante hyperbolique que nous appellerons soliton classique.

Pour étudier l'interaction entre deux solitons classiques, une approche par perturbations fut développée par Karpman et Sulev'ev [45] en étudiant le problème

dans le cadre de la méthode de diffusion inverse. Une étude des interactions comme une solution exacte de ESNL fut également effectuée par Gordon [46]. Il arriva à la conclusion que deux solitons ayant la même amplitude et la fréquence et séparés d'un certain intervalle initial vont éventuellement se séparer à moins que leur différence phase initiale soit nulle. Si c'est le cas, ils vont s'attirer et se repousser périodiquement pour former un soliton d'ordre 2. Cette phase nulle attractive est un point d'équilibre instable cependant, deux solitons classiques ne peuvent pas coexister à une distance fixe pour former un état lié rapproché.

Cette conclusion fut confirmée expérimentalement par Mitschke et Molle-  
nauer [47]. Dans leur article, ils apportent aussi une interprétation intéressante du mécanisme en jeu lors de l'interaction entre solitons.

Ils expliquent que pour un soliton fondamental, le profil en puissance symétrique génère un profil de fréquence instantanée par la SPM qui est exactement compensé par l'effet DVG, d'où un signal qui se propage sans déformation. Pour un soliton recouvert partiellement par un second soliton, le profil de puissance n'est plus symétrique et le profil de fréquence instantanée engendré par la SPM en présence de cette modification du profil de puissance devient asymétrique. Par exemple, si les solitons sont en phase, la puissance dans l'aile du côté de l'interaction est légèrement plus élevée et la dérivée de la puissance plus faible. Comme la modification au profil de fréquence instantanée est proportionnelle à la dérivée de la puissance, elle est réduite de ce côté. La fréquence moyenne du soliton est alors affectée et, en combinaison avec la DVG, ceci produit une accélération nette du soliton vers son voisin. En d'autres termes, le second soliton affecte la fréquence moyenne du premier soliton par une modulation de phase croisée (XPM) et ce changement de fréquence résulte en une modification de la vitesse de ce soliton en raison de la DVG.

Si les solitons ne possèdent pas la même fréquence, comme c'est le cas dans les systèmes de télécommunications à multiples canaux en fréquence (WDM), l'interaction sera toujours attractive car la phase relative des solitons balaie toute les valeurs possibles et leur puissances s'additionnent en moyenne. Ceci est similaire au cas en phase discuté plus haut [47]. Suite à ces découvertes, plusieurs groupes étudièrent ce type d'interaction expérimentalement et théoriquement. Il fut trouvé que d'autres effets peuvent devenir importants et modifier les conclusions tirées dans le cadre des ESNLs. Par exemple, la présence du signal CW dans le système [48], l'effet Raman [49], les pertes et une amplification périodique [50], la largeur du milieu de gain [51] et la dispersion d'ordre trois [52] peuvent affecter l'interaction selon les conditions expérimentales.

Il faut donc adapter le modèle du soliton classique pour étudier le phénomène des interactions.

### 1.4.3 Les interactions entre solitons dissipatifs

Étant donné que les fibres optiques présentent des pertes linéaires, il fut réalisé très rapidement que la solution solitonique de ESNL ne représente pas exactement ce qui se produit dans la réalité. En fait dans un système de télécommunications, il faut introduire un gain pour compenser ces pertes. Plusieurs groupes se sont donc intéressés à l'étude des solutions localisées de type solitonique de ces systèmes dits dissipatifs. Il fut réalisé que la présence d'un filtre spectrale ou la largeur spectrale du milieu de gain peuvent jouer un rôle important sur la forme des solitons dissipatifs.

Puis on proposa d'ajouter du gain non linéaire pour augmenter la stabilité de ces solitons [52]. L'analyse théorique de ces effets se faisait en modifiant ESNL par l'ajout de termes spécifiques que l'on considérait généralement comme des perturbations. On parle alors d'équation de Schrödinger modifiée ou perturbée.

Cependant, lorsqu'on inclut tous les effets sus-mentionnés en plus d'un terme de saturation du gain non linéaire, sans supposer qu'ils ont une valeur faible, l'équation de propagation obtenue est appelée équation de Ginzburg-Landau complexe. Cette équation fut introduite dans le domaine de la supraconductivité et étudiée grandement dans le domaine de la dynamique des fluides [53, 54]. Évidemment, elle est très appropriée pour étudier l'amplification d'impulsions par des fibres avec gain et aussi pour les lasers à fibre. En incluant le terme représentant la saturation du gain non linéaire, elle s'écrit :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \gamma |\psi|^2 \psi = iG\psi + iF \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + i\delta |\psi|^2 \psi - i\mu |\psi|^4 \psi. \quad (3)$$

Les différents termes et leur coefficient sont associés aux effets physiques suivants :  $\beta_2$  est la DVG,  $\gamma$  est l'automodulation de phase,  $G$  est le coefficient de gain en puissance linéaire normalisée,  $F$  est la largeur spectrale du milieu de gain normalisée,  $\delta$  est l'automodulation d'amplitude et  $\mu$  représente la saturation de l'automodulation d'amplitude. Pour des paramètres  $G$ ,  $F$ ,  $\delta$  et  $\mu$  arbitraires, l'équation (3) ne possède pas de solution analytique connue. Par contre si les termes de droite sont considérés comme perturbateurs, une solution de type impulsion solitaire avec une amplitude crête  $\psi_0$  est trouvée à l'aide d'une approche par perturbation. Cette solution sera nommée soliton dissipatif et sera très proche du soliton classique en ce sens que son profil est de forme sécante hyperbolique.

Par contre son amplitude n'est plus un paramètre libre. En effet le gain et les pertes en viennent à un équilibre qui fixe la puissance crête de l'impulsion par l'équation suivante :

$$\psi_0^2 = \frac{\gamma}{16\mu} \left[ 5 \left( 2\frac{\delta}{\gamma} + \frac{F}{\beta_2} \right) + \sqrt{25} \left( 2\frac{\delta}{\gamma} + \frac{F}{\beta_2} \right)^2 + 480 \frac{G\mu}{\gamma^2} \right]. \quad (4)$$

Loin du centre d'impulsion, on peut faire l'approximation que celle-ci est asymptotiquement représentée par :

$$\psi(x, t) \approx 2\psi_0 \exp \left[ - \left( \frac{-\gamma}{\beta_2} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_0(t) + i\Omega |t| \right], \quad (5)$$

où le paramètre  $\Omega$  est défini comme suit :

$$\Omega = -\frac{F}{\beta_2} \left( \frac{-\gamma}{\beta_2} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_0 - \frac{G}{\gamma (-\beta_2)^{\frac{1}{2}} \psi_0}. \quad (6)$$

En conclusion nous avons pouvons dire qu'il existe une différence entre le soliton dissipatif et le soliton classique. Le soliton classique est une impulsion avec un profil de puissance de type sécante hyperbolique sans glissement de fréquence. Le soliton dissipatif, quant à lui, est une impulsion avec un profil de sécante hyperbolique et un profil de fréquence instantanée qui varie le long de l'impulsion. Asymptotiquement, la solution (5) nous montre que la phase de l'impulsion augmente linéairement avec  $t$ . Ceci correspond à une fréquence instantanée constante ayant une valeur  $\Omega$ . Les ailes du soliton dissipatif possèdent donc, asymptotiquement, une fréquence instantanée différente de la fréquence moyenne du soliton [52].

L'équation de Ginzburg-Landau prend pour acquis que, lors de la propagation du signal, tous les effets sont distribués. En d'autres termes, on considère que les pertes, le gain non linéaire et la saturation du gain non linéaire se produisent de façon graduelle en tout point du système.

## 1.5 Quelques types d'équations aux dérivées partielles non linéaires

Dans cette partie, nous présentons quelques types d'équations aux dérivées partielles non linéaires. En effet, ces équations jouent un rôle essentiel dans la science de la non linéarité en nous fournissant de nombreuses informations physiques nous permettant de comprendre les mécanismes qui gouvernent ces systèmes physiques. Ainsi nous pouvons citer par exemple :

1) Équation de KDV-Burgers [56]

$$U_t + pUU_x + qU^2U_x + rU_{xx} - sU_{xxx} = 0 \quad (7)$$

Cette équation permet de décrire la dynamique des fluides. Elle fut écrite par les physiciens Diederick Korteweg, Gustav de Vries et Johannes Martinus Burgers.

2) Équation de Gardner [57]

$$U_t + a(t)UU_x + b(t)U^2U_x + h(t)U_{xxx} + d(t)U_x + f(t)U = F(t) \quad (8)$$

Elle est introduite par le mathématicien Clifford Gardner en 1968 pour généraliser l'équation de KDV et l'équation modifiée de KDV. Elle trouve ses applications en hydrodynamique, dans la physique du plasma et dans la théorie quantique des champs.

3) Équation de Benjamin-Bona-Mahony [58]

$$U_t + UU_x + U_x - kU_{xxt} = 0 \quad (9)$$

Cette équation a été étudiée par Benjamin, Bona et Mahony en 1972, comme une amélioration de l'équation de KdV pour la modélisation d'ondes de gravité de grande surface et de faible amplitude, c'est à dire, à l'étude des ondes dans le plasma ou des ondes dans les fluides.

4) Équation de Zakharov-Kuznetsov (ZK) [59]

$$U_t + aUU_x + bU^2U_x + cU_{xxx} + dU_{xyy} = 0 \quad (10)$$

Vladimir E. Zakharov et Kuznetsov en sont à l'origine ; elle décrit le développement non linéaire d'ondes ioniques acoustiques dans un plasma magnétisé sous les restrictions des amplitudes des petites ondes, de la faible dispersion et des champs magnétiques puissants.



5) Équation de Klein-Gordon [60]

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \nabla^2 \psi + \frac{m^2 C^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (11)$$

C'est une version relativiste de l'équation de Schrödinger décrivant des particules massives de spin nul avec ou sans charge électrique. Elle fut établie indépendamment en 1926 par Oskar Klein et Walter Gordon.

6) Équation dissipative de Ginzburg-Landau complexe [61]

$$i \frac{\partial A}{\partial t} + P \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + Q |A|^2 A = i\gamma A \quad (12)$$

Elle est utilisée pour démontrer la stabilité des impulsion solitaires sous l'action simultanée du gain linéaire et non linéaire. Elle s'appuie sur la théorie de Ginzburg-Landau, théorie phénoménologique des supraconducteurs, proposée en 1950 par les physiciens soviétiques Vitaly L. Ginzburg et Lev D. Landau.

7) Équation Benjamin-Bona-Mahony (BBM) [62]

$$-U_{xxx} + U_t - \alpha U_{xx} + (1 + U) U_x = 0 \quad (13)$$

Cette autre équation a été proposée comme modèle pour étudier les ondes unidirectionnelles longues de faibles amplitudes dans l'eau.

8) Équation dispersive de Schrödinger non linéaire d'ordre supérieur [63]

$$iU_x - \frac{\beta_2}{2} U_{tt} - i \frac{\beta_3}{6} U_{ttt} - \frac{\beta_4}{24} U_{tttt} + \gamma_2 |U|^2 U + \gamma_4 |U|^4 U = 0 \quad (14)$$

Elle permet de décrire la dynamique des solitons.

9) Équation de Ginzburg-Landau

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - 2eA)^2 \psi = 0 \quad (15)$$

Elle s'applique dans la supraconductivité.

10) Équation de Biswas-Milovic [64]

$$i(q^m)_t + a(q^m)_{xx} + b(|q|^{2n} + k|q|^{4n}) q^m = 0 \quad (16)$$

L'équation de Biswas-Milovic est un modèle généralisé pour la propagation des solitons à travers des guides d'ondes optiques.

11) Équation de Schrödinger non linéaire hyperbolique [65, 66]

$$iU_y + \frac{1}{2}(U_{xx} - U_{tt}) + |U|^2U = 0 \quad (17)$$

Conçue par le physicien Autrichien Erwin Schrödinger en 1925, elle permet de décrire de nombreux systèmes physiques dans les domaines des fluides.

12) Équation de Schrödinger non linéaire cubique [67]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + A|\psi|^2\psi = 0 \quad (18)$$

C'est une équation à champ classique dont les applications sont la propagation de la lumière dans les fibres optiques non linéaires et les guides d'ondes planaires. Elle permet de décrire de nombreux systèmes physiques dans les domaines des solides quantiques.

13) Équation de Jaulent-Miodek (JM) [68, 69]

$$\begin{aligned} U_t + U_{xxx} + \frac{3}{2}VV_{xxx} + \frac{9}{2}V_xV_{xx} - 6UU_x - 6UVV_x - \frac{3}{2}U_xV^2 &= 0, \\ V_t + V_{xxx} - 6U_xV - 6UV_x - \frac{15}{2}V_xV^2 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Cette équation permet de décrire la dynamique des solitons, notamment les solitons topologiques et les solitons singuliers.

14) Équation de Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) [70, 71]

$$U_t + U_{xxxxx} + 30UU_{xxx} + 30U_xU_{xx} + 180U^2U_x = 0 \quad (20)$$

Comme son nom l'indique, cette équation a été écrite par Caudrey, Dodd et Gibbon en 1976 pour décrire la dynamique des solitons.

15) Équation de Hirota et Satsuma [72]

$$\begin{aligned} U_t + U_{xxxx} + 6UU_x - 6VV_x &= 0, \\ V_t - 2V_{xxx} - 6UV_x &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

L'équation d'Hirota et Satsuma est apparue dans la théorie des vagues en eaux peu profondes ; elle fut d'abord discutée par Hirota Ryogo, puis par Satsuma Junkichi en 1976. Elle trouve son application en mécanique des fluides.

16) Équation de Ginzburg-Landau cubique quintique [73]

$$iU_z + \frac{1}{2}U_{xx} + \frac{1}{2}(\beta - i)U_{\tau\tau} + iU + (1 - ir_1)U|U|^2 + ir_2U|U|^4 = 0 \quad (22)$$

Elle trouve son application dans la propagation de la lumière dans la fibre

optique.

**17)** Équation de Broer-Kaup (BK) [74]

$$\begin{cases} U_{yt} + 2V_{xx} + 2(UU_x)_y - U_{xxy} = 0 \\ V_t + 2(UV)_x + V_{xx} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Cette équation est l'œuvre de Lambertus Broer et de D.J. Kaup. Elle permet de décrire la mécanique des ondes.

**18)** Équation de Nizhnik-Novikov-Vesselov (NNV) [75, 76]

$$\begin{cases} U_t - U_{xxx} - 3(UV)_x = 0 \\ U_x - V_y = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Elle est nommée d'après S.P. Novikov et A.P. Veselov qui l'ont publiée dans Novikov et Veselov (1984). Elle dérive d'un modèle d'optique géométrique non linéaire.

**19)** Équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP) [77, 78]

$$U_{xt} + 6U_x^2 + 6UU_{xx} + U_{xxx} - U_{yy} = 0 \quad (25)$$

Elle a été écrite pour la première fois en 1970, par les physiciens soviétiques Boris B. Kadomtsev (1928-1998) et Vladimir L. Petviashili (1936-1993). Il s'agissait d'une généralisation naturelle de l'équation de KdV. Alors que dans l'équation de KdV les ondes sont strictement unidimensionnelles, dans l'équation de KP, cette restriction est assouplie ; donc elle permet de décrire le mouvement des ondes non linéaires.

**20)** Équation de Boussinesq [79-81]

$$\begin{cases} U_t + V_x + UU_x = 0 \\ V_t + (UV)_x + U_{xxx} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Elle a été écrite en 1872 par le mathématicien Joseph Valentin Boussinesq pour modéliser le soliton hydrodynamique.

**21)** Équation de Sine-Gordon [82, 83]

$$U_{tt} - U_{xx} - U_{yy} + m^2 \sin U = 0 \quad (27)$$

L'équation écrite par Walter Gordon, s'applique aux réseaux de verres vortex et aux surfaces de substrat désordonné.

L'application au soliton de l'équation de Sine-Gordon permet de décrire à partir de la mécanique Lagrangienne, une chaîne de pendules infinies par exemple.

22) Équation de Dodd-Bullough-Mikhailov (DBM) [84, 85]

$$U_{xt} + Pe^U + Qe^{-2U} = 0 \quad (28)$$

C'est une équation aux dérivées partielles introduite par Roger Dodd, Robin Bullough et Alexander Mikhailov, elle a des solutions sous forme d'ondes progressives.

23) Équation d'Euler [86]

$$U_t + (U \cdot \nabla) U + \nabla P = 0 \quad (29)$$

Cette équation a été écrite par Leonhard Euler, mathématicien suisse né en 1707 à Bâle. Elle s'applique en mécanique des fluides.

## 1.6 Les systèmes physiques modélisés par les équations de Ginzburg-Landau

L'équation de GL permet de décrire de nombreux systèmes physiques dans les domaines aussi divers que les fluides et solides quantiques, les écoulements compressibles, la propagation de la lumière dans les fibres optiques, la propagation d'ondes de surface sur des couches de liquides minces, les supraconducteurs. L'équation de Schrödinger étant une forme simplifiée de l'équation de Ginzburg-Landau, nous nous proposons d'étudier ici l'équation de Schrödinger non linéaire. La forme générale de l'équation de Schrödinger en dimension  $d$  s'écrit :

$$i \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi(r, t) + G |\psi(r, t)|^2 \psi(r, t) \quad (30)$$

où

$$r = \sum_{i=1}^d x_i e_i$$

et

$$\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Le paramètre  $G$  caractérise la non linéarité du problème.

Dans le contexte des fluides et solides quantiques, ESNL est également appelée équation de G-P (Gross-Pitaevskii). Dans la suite, nous utiliserons la dénomination "équation de G-P" dans le cadre des fluides quantiques et "ESNL" dans les autres contextes.

### 1.6.1 Condensats de Bose-Einstein gazeux

La condensation de Bose-Einstein d'un gaz atomique dilué a été observée expérimentalement en 1995, à partir de vapeurs d'atomes alcalins confinés dans un piège magnétique. L'assemblée d'atome est amenée au seuil de condensation par refroidissement laser, suivi d'un refroidissement par évaporation, la température finale étant inférieure au microKelvin. L'équation de G-P décrit de manière quantitative les propriétés de ces condensats de Bose-Einstein [87–89]. À température nulle, on peut considérer en bonne approximation que toutes les particules occupent le même état quantique  $\psi(r, t)$ , dont l'évolution est donnée par

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(r, t) + V(r, t) \psi(r, t) + Ng |\psi(r, t)|^2 \psi(r, t) \quad (31)$$

La fonction  $\psi(r, t)$  est à valeurs complexes et est appelée fonction d'onde du condensat. Le paramètre  $m$  représente la masse d'un atome,  $V(r, t)$  le potentiel extérieur qui confine le gaz (confinement magnétique ou optique, qui peut dépendre du temps) et  $N$  le nombre de particules dans le condensat. La constante de couplage  $g$  est liée à la longueur de diffusion  $a$  qui caractérise l'interaction entre deux atomes à basse énergie :  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ . Notons que  $a$  (et donc  $g$ ) peut être positive ou négative suivant l'espèce atomique utilisée. Pour les condensats réalisés expérimentalement, on a souvent  $a$  positif.

En première approximation, le potentiel  $V$  est souvent considéré harmonique :

$$V(r) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^d \omega_i^2 x_i^2, \quad (32)$$

où les  $\omega_i$  sont les fréquences de piégeage, qui peuvent éventuellement dépendre du temps. Comme le potentiel  $V$  tend vers l'infini quand  $|r| \rightarrow \infty$ , la fonction  $\psi$  est choisie de carré sommable, avec la condition de normalisation usuelle en physique quantique :

$$\int_D \psi(r, t) \psi^*(r, t) d^d r = \int_D |\psi(r, t)|^2 d^d r = 1, \quad (33)$$

où le domaine d'intégration  $D$  correspond au domaine physique étudié en dimension  $d$ . Avec cette convention, la densité du condensat est donnée par :

$$\rho(r, t) = N|\psi(r, t)|^2, \quad (34)$$

et le terme non linéaire de l'équation (31) correspond à l'évolution de la fonction d'onde  $\psi$  dans le potentiel de champ moyen  $V_{cm}(r, t)$ ,

$$V_{cm}(r, t) = g\rho(r, t), \quad (35)$$

créé par l'ensemble des particules du gaz au point  $r$ . La vitesse locale  $v(r, t)$  est reliée au courant de particules par

$$j(r, t) = \frac{iN\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) = \rho(r, t) v(r, t). \quad (36)$$

### 1.6.2 Modélisation de l'hélium liquide superfluide

L'équation de G-P a été proposée indépendamment par Gross et Pitaevskii en 1961 pour modéliser les propriétés de l'hélium superfluide. En dessous de la température de transition  $T_\lambda$ , appelée le point  $\lambda$  (environ 2.2 kelvins), l'hélium liquide présente la propriété de superfluide, c'est à dire qu'il peut s'écouler sans frottement (expérimentalement, on observe l'annulation de la viscosité de l'hélium lors du passage au travers de tubes capillaires fins).

Dans le cadre de la modélisation de l'hélium superfluide, l'équation de G-P s'écrit sous la forme générale :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(r, t) + \psi(r, t) \int_D U(r' - r) |\psi(r', t)|^2 d^3 r', \quad (37)$$

où  $\psi(r, t)$  est une fonction à valeurs complexes appelée ici fonction d'onde du superfluide,  $m$  la masse effective de l'atome d'hélium et  $U(r)$  modélise le potentiel d'interaction entre deux atomes d'hélium dans le superfluide.

Bien que cette équation permette de modéliser de nombreuses propriétés d'un superfluide, on ne sait pas la démontrer à partir de la description quantique microscopique du liquide formé par les atomes d'hélium en interaction [90]. En effet, la justification de l'équation de G-P à partir de l'équation de Schrödinger pour  $N$  particules en interaction implique des hypothèses sur la faiblesse des interactions qui ne sont pas satisfaites pour l'hélium liquide, alors qu'elles le sont pour les condensats gazeux. L'équation de G-P appliquée à l'hélium liquide doit donc être considérée comme une description phénoménologique, qui s'est avérée très fructueuse au fil des années.

On se place souvent dans l'approximation d'un potentiel d'interaction à courte portée, pour lequel on peut prendre  $U(r) = g\delta(r)$  ( $\delta(r)$  étant la masse de Dirac en  $r$ ) et qui donne l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(r,t) + g|\psi(r,t)|^2 \psi(r,t). \quad (38)$$

Cette équation est très voisine de l'équation (31) écrite pour les condensats gazeux. Notons toutefois deux différences. D'une part, le potentiel de piègeage est absent car on s'intéresse ici à un liquide de densité uniforme, occupant tout l'espace. D'autre part, puisque le nombre de particules  $N$  qui figurait dans (31) n'est plus un paramètre pertinent, on modifie légèrement la signification physique de  $|\psi(r,t)|^2$ . Alors que pour le condensat gazeux, la densité de particules était donnée par  $\rho = N|\psi|^2$ , on pose pour l'hélium liquide  $\rho(r,t) = |\psi(r,t)|^2$ , ce qui conduit au terme de potentiel moyen  $V_{cm} = g\rho = g|\psi|^2$  dans (38), identique à celui apparaissant dans (35).

Comme pour les condensats gazeux, on déduit la vitesse  $v$  du superfluide à partir du courant de probabilité

$$j(r,t) = \frac{iN\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) = \rho v(r,t). \quad (39)$$

### 1.6.3 Modèle de supersolide

Récemment, des propriétés de superfluidité ont été observées dans l'hélium solide pour des températures inférieures à 100 mK. Cette "supersolidité" se caractérise par un découplage de la masse du solide en rotation : tout se passe comme si une partie de l'hélium solide ne tournait pas lorsque l'on met le solide en rotation.

On peut obtenir un modèle de supersolide à partir de l'équation SNL (33)

en prenant un potentiel à deux corps  $U(r)$  de portée finie ou plus simplement un potentiel en créneau.

### 1.6.4 Optique non linéaire

La propagation d'une lumière intense dans une fibre optique ou dans certains matériaux conduit à des effets non linéaires, c'est à dire à des effets qui vont au delà du traitement habituel par un indice de refraction  $n_0$  constant. On retrouve ces caractéristiques dans les diodes électroluminescentes ou dans les lasers miniatures à sémi-conducteur qu'on utilise par exemple dans les lecteurs de disques compacts, les lecteurs de code-barres ou certains pointeurs lasers.

La propagation de l'onde lumineuse en présence d'effets non linéaires se modélise en première approximation par :

$$i \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi(r, t) + f(|\psi(r, t)|^2) \psi(r, t), \quad (40)$$

où  $f(|\psi(r, t)|^2)$  est une fonction réelle caractérisant la nonlinéarité de l'interaction lumière-matière. La fonction d'onde  $\psi$  est reliée à la composante de Fourier lentement variable du champ électromagnétique de l'onde se propageant à une fréquence donnée. Le terme de diffraction (le laplacien) peut provenir de la diffraction proprement dite des ondes ou de leur dispersion. La non linéarité est due au fait que l'indice de réfraction dépend de l'intensité lumineuse.

On retrouve l'équation SNL (30) dans le cas de l'effet Kerr, pour lequel on peut prendre une relation affine entre l'indice de refraction  $n$  et l'intensité  $I = |\psi|^2$  dans le domaine optique considéré :  $n(I) = n_0 + \alpha I$ . En optique non linéaire, la fonction d'onde n'est pas normalisée puisqu'elle est liée à l'intensité lumineuse. La propagation de l'information dans les fibres optiques peut se faire grâce à des solutions particulières de l'équation qui se propagent le long de la fibre optique sans s'altérer : il s'agit de solitons [91].

### 1.6.5 Mécanique des fluides

L'équation SNL apparaît également en mécanique des fluides. Comme pour l'optique non linéaire, elle s'obtient comme l'équation d'enveloppe des ondes de surface en eau profonde. On décrit la surface de l'eau par la fonction  $h(x, t)$  comme un paquet d'ondes centrées autour du nombre d'onde  $k_0$ .

Pour simplifier, on s'intéresse ici aux ondes suivant la direction  $x$  uniquement.  $A(x, t)$  est une fonction à valeurs complexes dont les variations spatiales sont



à grande échelle par rapport à la longueur d'onde du paquet d'ondes ( $k|A| \ll 1$ ). La relation de dispersion des ondes de gravité à la surface de l'eau vérifie que

$$\omega_0 = \sqrt{gk_0}. \quad (41)$$

La dynamique de ces ondes dans la limite inviscide est décrite par la cinématique de l'interface et l'équation de Bernoulli ( pour le potentiel de vitesse  $\phi(x, y, t)$ ) calculée en tous points de l'interface :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh = -\frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right). \quad (43)$$

On peut appliquer une méthode dite multi-échelles pour développer ces équations pour un paquet d'ondes. Cette technique consiste à séparer des variables lentement en espace et en temps, des variations rapides associées au paquet d'ondes ( de longueur d'onde  $2\pi/k_0$  et pulsation  $2\pi/\omega_0$  ). On obtient alors l'équation pour ces variables "lents"  $X$  et  $T$  qui est l'équation d'évolution de l'enveloppe :

$$\frac{\partial A}{\partial T} = -i \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - i \frac{\omega_0 k_0^2}{2} A^2 A^*. \quad (44)$$

On reconnaît bien alors l'équation SNL pour l'évolution de l'amplitude complexe du paquet d'ondes [92].

### 1.6.6 Les supraconducteurs

La théorie de Ginzburg-Landau est une théorie phénoménologique des supraconducteurs. L'équation de GL permet de prédire qu'il existe deux types de supraconducteurs, de type I dans lequel la longueur de cohérence du paramètre d'ordre est plus grande que la longueur de pénétration du champ magnétique ( $K < 1/\sqrt{2}$ ), et qui revient à l'état normal au delà d'un champ critique  $H_c$ , et les supraconducteurs de type II où la longueur de cohérence est faible devant la longueur de pénétration du champ magnétique ( $K > 1/\sqrt{2}$ ).

#### Les supraconducteurs de type I

Dans les supraconducteurs de type I, au delà d'un champ magnétique critique  $H_c$ , la supraconductivité est détruite dans tout l'échantillon, ce qui revient à l'état normal. Ici le champ critique est de quelques centaines de Gauss, ce qui

prohibe toute application électronique.

### Les supraconducteurs de type II

Ici, lorsque le champ magnétique dépasse une valeur  $H_{c1}$ , il se forme des vortex (défauts linéaires le long desquels le paramètre d'ordre  $\psi$  s'annule) où un cœur de métal normal laisse passer le champ magnétique, tandis qu'autour de ce champ il existe un tourbillon de courant supraconducteur qui empêche la pénétration du flux magnétique dans le reste du matériaux [93].

Une caractéristique remarquable des vortex est qu'ils portent un quantum de flux  $h/e^*$  en raison du caractère univoque de la phase du paramètre d'ordre  $\psi$ .

La solution de l'équation de GL décrivant le vortex apparaît aussi dans le contexte de la théorie des champs sous le nom de "Nielsen-Olsen String".

### Réseau de vortex dans les supraconducteurs de type II

En utilisant l'équation de GL, A.A. Abrikosov a établi que les vortex formeraient un réseau hexagonal en raison des forces repulsives créées entre vortex par les courants supraconducteurs. Ce réseau vortex au-dessus du champ  $H_{c1}$  peut être mis en évidence par les expériences de décoration de Bitter où des particules magnétiques sont projetées à la surface de l'échantillon supraconducteur. Les particules sont attirées là où se trouve le champ magnétique le plus fort, c'est à dire à l'endroit où l'extrémité des vortex touche la surface de l'échantillon.

Enfin pour un champ encore plus fort  $H_{c2}$ , qui peut aussi être calculé par l'équation de GL, la supraconductivité est détruite. Le champ  $H_{c2}$  est de l'ordre du tesla, ce qui fait que les supraconducteurs de type II peuvent être utilisés dans les bobines destinées à générer les champs magnétiques intenses [94].

## 1.7 Quelques techniques de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires

Dans cette partie, nous présentons de façon sommaire quelques techniques de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires devant la multitude de méthodes qui existent.

### 1.7.1 Méthode de la fonction exponentielle

Soit l'équation aux dérivées partielle non linéaire de la forme

$$F(U, U_t, U_x, U_{tt}, U_{xt}, U_{xx}, \dots) = 0, \tag{45}$$

où  $U(x, t) = U$  est une fonction inconnue,  $F$  est un polynôme en  $U = U(x, t)$  et de ses dérivées partielles, dans lesquelles les dérivées d'ordre les plus élevées et les termes non linéaires sont impliqués.

Les principales étapes de la méthode de la fonction exponentielle [95–103] sont décrites comme suit :

**Étape 1** : Tout d'abord, nous allons utiliser la transformation suivante :

$$U(x, t) = U(\xi), \quad \text{avec} \quad \xi = kx + \omega t, \quad (46)$$

où  $k$  et  $\omega$  sont des constantes non nulles, afin de réduire l'équation (45) en une équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire de la forme :

$$P(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (47)$$

où  $P$  est un polynôme en  $U$  et de ses dérivées totale  $U', U'', U'''$  tel que  $U' = \frac{dU}{d\xi}$ ,  $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}$ , etc.

**Étape 2** : Selon la méthode de la fonction exponentielle développée par He et Wu, nous supposons que la solution de l'équation (47) peut être exprimée sous la forme suivante

$$U(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^q b_m \exp(m\xi)}, \quad (48)$$

où  $p, q, c, d$  sont des entiers à déterminer et  $a_n, a_m$  des constantes à déterminer également. Nous pouvons écrire l'équation (48) sous la forme équivalente suivante

$$U(\xi) = \frac{a_{-c} \exp(-c\xi) + \dots + a_d \exp(d\xi)}{b_{-p} \exp(-p\xi) + \dots + b_q \exp(q\xi)}. \quad (49)$$

**Étape 3** : Nous déterminons les valeurs de  $c$  et  $p$  en égalant le terme linéaire le plus grand avec le terme de nonlinéarité le plus élevé de l'équation (47). De même, nous pouvons déterminer les valeurs de  $d$  et  $q$  en égalant le terme linéaire le plus petit avec le terme de nonlinéarité le plus bas.

**Étape 4** : Nous substituons l'équation (49) dans l'équation (47) et nous calculons les coefficients de  $\exp(j\xi)$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). En mettant tous les coefficients à zéro, nous obtenons un ensemble d'équations algébriques. Par conséquent, nous

pouvons obtenir les solutions d'ondes progressives de l'équation (45).

### 1.7.2 Méthode de l'équation simple modifiée

Soit l'équation aux dérivées partielle non linéaire de la forme

$$H(U, U_t, U_x, U_{tt}, U_{xt}, U_{xx}, \dots) = 0, \quad (50)$$

où  $U(x, t) = U$  est une fonction inconnue,  $F$  est un polynôme en  $U = U(x, t)$  et de ses dérivées partielles, dans lesquelles les dérivées d'ordre les plus élevées et les termes non linéaires sont impliquées.

Les principales étapes de la méthode de l'équation simple modifiée [104–108] sont décrites comme suit :

**Étape 1** : Tout d'abord, nous allons utiliser la transformation suivante :

$$U(x, t) = U(\xi), \quad \text{avec} \quad \xi = kx + \omega t, \quad (51)$$

où  $k$  et  $\omega$  sont des constantes non nulles, afin de réduire l'équation (50) en une équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire de la forme :

$$K(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (52)$$

où  $K$  est un polynôme en  $U$  et de ses dérivées totale  $U', U'', U''', \dots$  tel que  $U' = \frac{dU}{d\xi}$ ,  $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}$ , etc.

**Étape 2** : Nous supposons que l'équation (52) a une solution formelle de la forme

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N A_i \left[ \frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)} \right]^i \quad (53)$$

où  $A_i$  sont des constantes à déterminer tel que  $A_N \neq 0$ . La fonction  $\psi(\xi)$  est une fonction inconnue que nous déterminerons plus tard, tel que  $\psi'(\xi) \neq 0$ .

**Étape 3** : De l'équation (53), nous déterminons un entier positif  $N$  en égalant de l'équation (52) sa dérivée la plus grande et son terme de nonlinéarité le plus élevé.

**Étape 4** : Nous substituons l'équation (53) dans (52), ainsi on calcule toutes les dérivées nécessaires  $U', U'', U''', \dots$  de la fonction inconnue  $\psi(\xi)$ . À la suite des substitutions, on obtient le polynôme  $\psi^{-i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Dans ce polynôme on regroupe tous les termes de même puissance et nous les assimilons à zéro. Cette opération nous donne un système d'équations algébriques qui peut être résolu afin de chercher  $A_i$  et  $A_i\psi(\xi)$ . Ainsi nous pouvons obtenir les solutions exactes d'ondes

progressives de l'équation (50).

Une précision reste à faire ; cette méthode est différente de la méthode alternative d'expansion ( $G'/G$ ) où les solutions nous sont imposées en fonction des différents cas étudiés.

### 1.7.3 Méthode généralisée de Kudryashov

Dans cette partie, nous donnons plusieurs étapes de résolution de la Méthode généralisée de Kudryashov, déroulée comme suit :

Soit l'équation aux dérivées partielles non linéaires de la forme

$$F(U, U_t, U_x, U_{tt}, U_{xt}, U_{xx}, \dots) = 0, \quad (54)$$

où  $U(x, t) = U$  est une fonction inconnue,  $F$  est un polynôme en  $U = U(x, t)$  et de ses dérivées partielles, dans lesquelles les dérivées d'ordre les plus élevées et les termes non linéaires sont impliqués.

Les principales étapes de la méthode généralisée de Kudryashov [109] sont décrites comme suit :

**Étape 1** : Nous allons utiliser la transformation suivante :

$$U(x, t) = U(\xi), \quad \text{avec} \quad \xi = kx \pm \lambda t, \quad (55)$$

où  $k$  et  $\lambda$  sont des constantes arbitraires avec  $\lambda \neq 0$  et  $k \neq 0$ , afin de réduire l'équation (54) en une équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire de la forme

$$H(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (56)$$

où  $H$  est un polynôme en  $U$  et de ses dérivées totale  $U', U'', U'''$  tel que  $U' = \frac{dU}{d\xi}$ ,  $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}$ , etc.

**Étape 2** : Nous supposons que la solution de l'EDO (56) peut s'écrire sous la forme rationnelle

$$U(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i Q^i(\xi)}{\sum_{j=0}^m a_j Q^j(\xi)} = \frac{A[Q(\xi)]}{B[Q(\xi)]}, \quad (57)$$

où  $Q = \frac{1}{1 \pm a\xi}$ ,  $B[Q(\xi)] = \sum_{j=0}^m a_j Q^j(\xi)$ ,  $A[Q(\xi)] = \sum_{i=0}^n a_i Q^i(\xi)$ , avec  $Q$  qui est la solution de l'équation

$$Q' = Q(Q-1) \ln(a), \quad \text{avec } a \neq 1, \quad 0 < Q, \quad (58)$$

en prenant en considération l'équation (57), on obtient

$$U'(\xi) = Q(Q-1) \left[ \frac{A'B - AB'}{B^2} \right] \ln(a), \quad (59)$$

$$\begin{aligned} U''(\xi) &= Q(Q-1)(2Q-1) \left( \frac{A'B - AB'}{B^2} \right) \ln^2(a) \\ &+ Q^2(Q-1)^2 \left[ \frac{B(A''B - AB'') - 2A'B'B + 2A(B')^2}{B^3} \right] \ln^2(a). \end{aligned} \quad (60)$$

ainsi, des solutions similaires s'appliquent aux termes de différenciation d'ordre supérieur.

**Étape 3 :** Au terme de la méthode donnée, on suppose que la solution de l'équation (56) peut être écrite sous la forme suivante :

$$U(\xi) = \frac{a + a_1 Q + a_2 Q^2 + \dots + a_n Q^n}{b + b_1 Q + b_2 Q^2 + \dots + b_m Q^m}. \quad (61)$$

Pour calculer les valeurs de  $m$  et  $n$  dans l'équation (61), nous progressons conformément à la méthode classique de Kudryashov, en égalant la dérivée la plus grande de  $U(\xi)$  au terme de nonlinéarité le plus élevé dans l'équation (56).

**Étape 4 :** Nous substituons (57) dans (56) pour obtenir un polynôme  $\mathfrak{R}(Q)$  de  $Q$  et assimiler tous les coefficients de  $Q_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) à zéro, pour obtenir un système d'équation algébrique pour  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) et  $b_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ).

**Étape 5 :** Nous resolvons les équations algébriques obtenues à l'étape 4 pour obtenir  $k$ ,  $\lambda$  et les coefficients  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) et  $b_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ). De cette façon, nous obtenons les solutions exactes de l'équation (56).

#### 1.7.4 Méthode d'Hirota

Soit l'équation de GLC à gradient non linéaire. La méthode d'Hirota [110–115] consiste à considérer l'ansatz sous la forme choisie de la solution recherchée et utiliser l'équation à intégrer pour déterminer les relations entre les coefficients du système et les paramètres caractéristiques de la solution.

Soit l'équation de GLC à gradient non linéaire

$$i\psi_t + p\psi_{xx} + q|\psi|^2\psi = c|\psi_x|^2\psi + i\gamma\psi, \quad (62)$$

les coefficients  $p, q, c, \gamma$  sont des complexes, c'est à dire de la forme

$$p = p_r + ip_i, q = q_r + iq_i, c = c_r + ic_i.$$

Pour la recherche des solutions, nous prenons l'ansatz suivant

$$\psi(x, t) = g e^{i(kx - \omega t)} / f^{1+i\alpha}, \quad (63)$$

où  $k, \omega, \alpha$  sont des constantes réelles ;  $f(x, t)$  est une fonction réelle et  $g(x, t)$  une fonction complexe. En substituant l'expression (63) dans (62), l'on obtient la forme

$$\begin{aligned} & f^3 / (qg) (\omega - pk^2 - \lambda + iD_{2,x} + 2ipkD_{2,x}^2) (gf) \\ & - \frac{c}{q} \{ |g_x|^2 f^2 + [k^2 f^2 + (1 + \alpha^2) f_x^2 - 2\alpha k f f_x] |g|^2 + 2k f^2 R_e(i\bar{g}_x g) - 2f f_x R_e((1 + i\alpha) \bar{g}_x g) \} \\ & = f^2 \{ (p\hat{\alpha}/q) D_{2,x}^2 + (i\gamma - \lambda)/q \} (ff) - |g|^2 f^2. \end{aligned} \quad (64)$$

L'opérateur bilinéaire modifié est obtenu de l'égalité entre  $\psi_t, |\psi_x|^2$  et défini comme suit.

$$D_{2,x}(gf) = [(\partial_x - (1 + i\alpha)\partial_x)g(x)f(x)]_{x=x'}, \quad (65)$$

et

$$\hat{\alpha} = (1 + i\alpha)(2 + i\alpha)/2. \quad (66)$$

La constante complexe  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  et le coefficient  $\alpha$  sont déterminés de manière à ce que le membre de droite de l'équation (64) devienne réel, soit :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\beta \pm (2 + \beta^2)^{1/2} \\ \beta &= 3 / 2 \frac{p_r q_r + p_i q_i}{p_r(q_r^2 - q_i^2) + 2p_i q_i q_r} \\ q_i(\lambda_r + \lambda_i) &= q_r(\lambda_r + \lambda_i). \end{aligned} \quad (67)$$

Il survient alors deux types de solutions selon la forme du développement choisi pour les fonctions  $f$  et  $g$ , à savoir les solutions du type trou et du type onde de choc.

## 1.8 Conclusion

Cette partie était consacrée à quelques généralités sur les solitons. Elle nous a permis en effet de connaître les types de solitons et leurs applications. Ensuite, nous avons cité quelques exemples d'équations aux dérivées partielles non linéaires et

quelques systèmes physiques modélisés par les équations de Ginzburg-Landau. Nous avons terminé ce chapitre en développant de façon sommaire quelques techniques de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires, à savoir, la méthode de la fonction exponentielle, la méthode de l'équation simple modifiée, la méthode généralisée de Kudryashov et la méthode d'Hirota.



# Chapitre 2

## Méthodes mathématiques et applications de deux systèmes physiques aboutissant aux équations du type Ginzburg-Landau complexe

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes méthodes mathématiques utilisées pour atteindre nos objectifs, notamment l'approche par troncature de Painlevé, la méthode alternative d'expansion  $(G'/G)$ , la méthode de la fonction sech, la méthode de la fonction tanh et la méthode de la fonction exponentielle rationnelle. Deux systèmes physiques qui aboutissent aux équations du type Ginzburg-Landau complexe y sont présentés (la fibre optique et la molécule ADN).

### 2.2 Méthodes mathématiques

#### 2.2.1 Approche par troncature de painlevé

Considérons l'équation aux dérivées partielles de la forme :

$$i \frac{\partial A_j}{\partial x} + P_j \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} + (Q_{jj}|A_j|^2 + Q_{j,3-j}|A_{3-j}|^2) A_j = i\gamma_i A_j, \quad (68)$$

avec  $j=1,2$ .

Pour la résolution de cette équation, nous considérons que les solutions sont sous la forme :

$$A_j(x, t) = U_j(x, t) e^{i(\phi_j(t) - \omega_j(x))}. \quad (69)$$

En remplaçant l'équation (69) dans l'équation (68), on obtient le système d'équations suivant, séparé en partie imaginaire et en partie réelle [116–118].

$$\begin{cases} U_j \omega_j + U'' P_{jr} - P_{ji} \phi_j'' U_j - 2\phi_j' P_{ji} (U_j')^2 + Q_{jj} U_j^3 + (Q_{j,3-j})_{rj} (U_{3-j})^2 = -U_j' \gamma_{ji}, \\ U'' P_{ji} + P_{jr} \phi_j'' U_j + 2\phi_j' P_{jr} (U_j')^2 - P_{ji} \phi_j' U_j + Q_{jj} U_j^3 + (Q_{j,3-j})_{ij} (U_{3-j})^2 = U_j' \gamma_{jr}. \end{cases} \quad (70)$$

Par la suite, nous posons

$$\begin{aligned} \phi_j(t) &= C_j \int_0^t \frac{dt'}{U_j^2(t')}, \\ \phi_j' &= \frac{C_j}{U_j^2}. \end{aligned} \quad (71)$$

$C_j$  étant la constante d'intégration.

En remplaçant  $\phi_j$ ,  $\phi_j'$  par leur valeur dans le système (70), on obtient :

$$\begin{cases} \Omega_j U_j^4 + P_{jr} U_j^3 U_j'' - P_{jr} C_j^2 + Q_{jj,r} U^6 + Q_{j,3-j,r} U_j^4 U_{3-j}^2 = 0, \\ -\gamma_{jr} U_j^4 + P_{ji} U_j^3 U_j'' - P_{ji} C_j^2 + Q_{jj,i} U^6 + Q_{j,3-j,i} U_j^4 U_{3-j}^2 = 0. \end{cases} \quad (72)$$

avec  $\Omega_j = \omega_j + \gamma_{ji}$

Ici nous nous intéressons aux solutions pour lesquelles  $\Omega_j = 0 \Rightarrow C_j = 0$ .

Dans ces conditions, le système (72) devient

$$\begin{cases} \Omega_1 U_1 + P_{1r} U_1'' + Q_{11,r} U_1^3 + Q_{12,r} U_1 U_2^2 = 0, \\ \Omega_2 U_2 + P_{2r} U_2'' + Q_{22,r} U_2^3 + Q_{21,r} U_2 U_1^2 = 0. \end{cases} \quad (73)$$

Dans cette section, nous prenons l'approche par troncature de painlevé en posant [119, 120] :

$$\begin{aligned} U_1(t) &= u_0 + u_1 f(t), \\ U_2(t) &= v_0 + v_1 f(t). \end{aligned} \quad (74)$$

En remplaçant  $U_1(t)$  et  $U_2(t)$  dans le système (73), on obtient finalement :

$$\begin{cases} \left(\frac{df}{dt}\right)^2 = D_0 + D_1 f + D_2 f^2 + D_3 f^3 + D_4 f^4, \\ \left(\frac{df}{dt}\right)^2 = D_0' + D_1' f + D_2' f^2 + D_3' f^3 + D_4' f^4. \end{cases} \quad (75)$$

qu'on peut résoudre en faisant des réductions successives.

### 2.2.2 Méthode alternative d'expansion ( $G'/G$ )

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaires suivante

$$P(U, U_t, U_x, U_{tt}, U_{xt}, U_{xx}, \dots) = 0, \quad (76)$$

où  $U(x, t) = U$  est une fonction inconnue,  $P$  est un polynôme en  $U = U(x, t)$  et de ses diverses dérivées partielles, dans lesquelles les dérivées les plus élevées et les termes non linéaires sont impliqués. Nous allons donner ici, les différentes étapes qui nous permettront de résoudre notre modèle au chapitre suivant [121–125].

**Étape 1 :** Nous allons prendre la solution de l'onde en mouvement sous la forme suivante

$$U(x, t) = U(\xi), \quad \text{avec} \quad \xi = k(x - ct), \quad (77)$$

où  $k$  et  $c$  sont respectivement le nombre d'onde et la vitesse de l'onde. Sous la transformation (77), l'équation (76) devient une équation différentielle ordinaire (EDO),

$$K(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (78)$$

où  $K$  est un polynôme en  $U$  et de ses dérivées totale  $U', U'', U'''$  tel que  $U' = \frac{dU}{d\xi}$ ,  $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}$ , etc.

**Étape 2 :** Supposons que la solution de l'équation (78) a la forme suivante

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^N a_j \left( \frac{G'}{G} \right)^j, \quad (79)$$

où  $G = G(\xi)$  vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0, \quad (80)$$

où  $a_j$  ( $j=0,1,2,\dots,N$ )  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes à déterminer ultérieurement. Le nombre entier positif  $N$  peut être déterminé en considérant l'équilibre homogène entre la dérivée la plus grande et le terme de nonlinéarité le plus élevé apparaissant dans l'équation (78).

**Étape 3 :** La solution de l'équation différentielle (80) est :

**1- si**  $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ,

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi\right)}{C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\xi\right)} \right]. \quad (81)$$

2- si  $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ,

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[ \frac{-C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)} \right]. \quad (82)$$

3- si  $\lambda^2 - 4\mu = 0$ ,

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2\xi}, \quad (83)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes arbitraires

**Étape 4** : En remplaçant l'équation (79) dans (78), et en utilisant l'équation (80), nous pouvons regrouper tous les termes en  $(G'/G)^j$  ( $j=0,1,2,\dots,N$ ) ayant la même puissance, puis nous égalons chaque coefficient en  $(G'/G)^j$  ( $j=0,1,2,\dots,N$ ) à zéro pour obtenir un système d'équations algébriques.

**Étape 5** : Nous résolvons le système d'équations algébriques obtenues à l'étape 4 pour obtenir  $a_j$  ( $j=0,1,2,\dots,N$ ),  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $k$  et  $c$ .

### 2.2.3 Méthode de la fonction sech

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaires (76)

où  $U(x, t) = U$  est une fonction inconnue,  $P$  est un polynôme en  $U = U(x, t)$  et de ses diverses dérivées partielles, dans lesquels les dérivées les plus élevées et les termes non linéaires sont impliqués [126–129]. Nous allons donner ici, les différentes étapes qui nous permettront de résoudre notre modèle au chapitre suivant

**Étape 1 :** Nous allons prendre la solution de l'onde en mouvement sous la forme suivante

$$U(x, t) = U(\xi), \quad \text{avec} \quad \xi = k(x - \lambda t), \quad (84)$$

où  $k$  et  $\lambda$  sont des constantes arbitraires avec  $\lambda \neq 0$  et  $k \neq 0$ , afin de réduire l'équation (76) en une équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire de la forme

$$H(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (85)$$

où  $H$  est un polynôme en  $U$  et de ses dérivées totales  $U', U'', U'''$  tel que  $U' = \frac{dU}{d\xi}$ ,  $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}$ , etc.

**Étape 2 :** Nous supposons que la solution de l'EDO (85) peut s'écrire sous la forme rationnelle

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^N a_j (\text{Sech}(\xi))^j. \quad (86)$$

Le nombre entier positif  $N$  peut être déterminé en considérant l'équilibre homogène entre la dérivée la plus grande et le terme de nonlinéarité le plus élevé apparaissant dans l'équation (85).

**Étape 3 :** En remplaçant l'équation (86) dans (85), nous pouvons regrouper tous les termes en  $\text{sech}(\xi)^j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, N$ ) ayant la même puissance, puis nous égalons chaque coefficient en  $\text{sech}(\xi)^j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, N$ ) à zéro pour obtenir un système d'équations algébriques.

**Étape 4 :** Nous résolvons le système d'équations algébriques obtenues à l'étape 3 pour obtenir  $a_j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, N$ ),  $\lambda$ ,  $k$ .

### 2.2.4 Méthode de la fonction tanh

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaires (76)

où  $U(x, t) = U$  est une fonction inconnue,  $P$  est un polynôme en  $U = U(x, t)$  et de ses diverses dérivées partielles, dans lesquelles les dérivées les plus élevées et les termes non linéaires sont impliqués [130, 131]. Nous allons donner ici, les différents étapes qui nous permettront de résoudre notre modèle au chapitre suivant

**Étape 1 :** Nous allons prendre la solution de l'onde en mouvement sous la forme suivante

$$U(x, t) = U(\xi), \quad \text{avec} \quad \xi = k(x - \lambda t), \quad (87)$$

où  $k$  et  $\lambda$  sont des constantes arbitraires avec  $\lambda \neq 0$  et  $k \neq 0$ , afin de réduire l'équation (76) en une équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire de la forme

$$H(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (88)$$

où  $H$  est un polynôme en  $U$  et de ses dérivées totales  $U', U'', U'''$  tel que  $U' = \frac{dU}{d\xi}$ ,  $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}$ , etc.

**Étape 2 :** Nous supposons que la solution de l'EDO (88) peut s'écrire sous la forme rationnelle

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^N a_j (\tanh(\xi))^j. \quad (89)$$

Le nombre entier positif  $N$  peut être déterminé en considérant l'équilibre homogène entre la dérivée la plus grande et le terme de nonlinéarité le plus élevé apparaissant dans l'équation (88).

**Étape 3 :** En remplaçant l'équation (89) dans (88), nous pouvons regrouper tous les termes en  $\tanh(\xi)^j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, N$ ) ayant la même puissance, puis nous égalons chaque coefficient en  $\tanh(\xi)^j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, N$ ) à zéro pour obtenir un système d'équations algébriques.

**Étape 4 :** Nous résolvons le système d'équations algébriques obtenues à l'étape 3 pour obtenir  $a_j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, N$ ),  $\lambda$ ,  $k$ .

### 2.2.5 Méthode de la fonction exponentielle rationnelle

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaires (76)

où  $U(x, t) = U$  est une fonction inconnue,  $P$  est un polynôme en  $U = U(x, t)$  et de ses diverses dérivées partielles, dans lesquelles les dérivées les plus élevées et les termes non linéaires sont impliqués [132]. Nous allons donner ici, les différents étapes qui nous permettront de résoudre notre modèle au chapitre suivant.

**Étape 1 :** Nous allons prendre la solution de l'onde en mouvement sous la forme suivante

$$U(x, t) = U(\xi), \quad \text{avec} \quad \xi = k(x - \lambda t), \quad (90)$$

où  $k$  et  $\lambda$  sont des constantes arbitraires avec  $\lambda \neq 0$  et  $k \neq 0$ , afin de réduire l'équation (76) en une équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire de la forme

$$H(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (91)$$

où  $H$  est un polynôme en  $U$  et de ses dérivées totales  $U', U'', U'''$  tel que  $U' = \frac{dU}{d\xi}$ ,  $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}$ , etc.

**Étape 2** : Nous supposons que la solution de l'EDO (91) peut s'écrire sous la forme rationnelle :

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^M \frac{\beta_i}{(1 + e^{\mu\xi})^i}, \quad (92)$$

où  $\mu$  et  $\beta_i$  sont des constantes inconnues qu'on déterminera plus tard. Le paramètre  $M$  est déterminé en égalant la dérivée la plus grande et le terme de nonlinéarité le plus élevé de l'équation (91).

**Étape 3** : En remplaçant l'équation (92) dans (91),

nous pouvons regrouper tous les termes en  $e^{\mu\xi}$  ayant la même puissance que nous posons égale à zéro pour obtenir un système d'équations algébriques.

**Étape 4** : Nous résolvons le système d'équations algébriques obtenues à l'étape 3 pour obtenir  $\mu, \beta_i, \lambda$  et  $k$ . Nous obtenons ainsi les solutions exactes de l'équation (76).

## 2.3 Applications de deux systèmes physiques aboutissant aux équations du type Ginzburg-Landau complexe

### 2.3.1 la fibre optique : Équation de Ginzburg-Landau complexe

#### ★Description générale

Une fibre optique est un fil dont l'âme, très fine, en verre ou en plastique a la propriété de conduire la lumière et sert pour la fibroscopie, l'éclairage ou la transmission des données numériques.

Elle offre un débit d'information nettement supérieure à celui des câbles coaxiaux et peut servir de support à un réseau "large bande" par lequel transitent aussi bien la télévision, le téléphone, la visioconférence ou les données informatiques.

Entourée d'une gaine protectrice, la fibre optique peut être utilisée pour conduire de la lumière entre deux lieux distants de plusieurs centaines, voire milliers de kilomètres. Le signal lumineux codé par une variation d'intensité est capable de transmettre une grande quantité d'information. En permettant les communications à très longue distance et à des débits jusqu'alors impossibles. Les fibres optiques ont constitué l'un des éléments clés de la révolution des télécommunications. Ses propriétés sont également exploitées dans le domaine des capteurs (température, pression, etc.) dans l'imagerie et dans l'éclairage.

On distingue deux catégories de fibres optiques classées selon le diamètre de leur cœur et la longueur d'onde utilisée : les fibres multimodes (MMF, pour Multi Mode Fiber) et les fibres monomodes (SMF, pour Single Mode Fiber).

#### ★Modélisation mathématique

Comme tous les phénomènes électromagnétiques, la propagation des champs optiques dans les fibres est gouvernée par les équations de Maxwell, introduites par le physicien Ecossais James Clerk Maxwell en 1873. Pour un support non conducteur sans charge libre, ces équations sont de la forme [138] :

$$\nabla \times E = -\partial B/\partial t, \tag{93}$$

$$\nabla \times H = \partial D/\partial t, \tag{94}$$



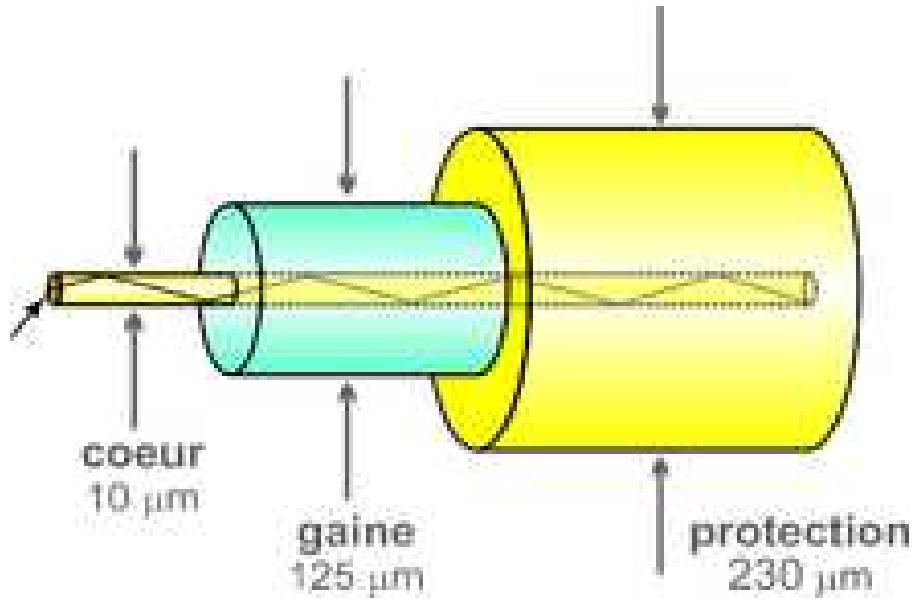


FIG. 3 – Principe d'une fibre optique.

$$\nabla \cdot D = \rho, \quad (95)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (96)$$

où  $E$  et  $H$  sont les vecteurs de champ électrique et magnétique,  $D$  et  $B$  sont les densités de flux correspondantes.  $J$  est le vecteur densité surfacique du courant.  $\rho$  est la densité volumique de charges électriques.  $J$  et  $\rho$  sont nulles dans les milieux tels que les fibres optiques dépourvus de charges libres. Les densités de flux sont liées aux vecteurs de champ par les relations

$$D = \varepsilon_0 E + P, \quad (97)$$

$$B = \mu_0 H + M, \quad (98)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\mu_0$  la perméabilité du vide.  $P$  et  $M$  sont respectivement les polarisations électriques et magnétiques induites. Pour les fibres optiques,  $M = 0$  en raison de la nature non magnétique du verre de silice. Il faut noter que l'application d'un champ électromagnétique sur un matériau diélectrique tel que la silice se traduit par une modification de la répartition des charges positives et négatives, et ce phénomène est responsable de la création d'une polarisation électrique  $P$  et magnétique  $M$ .

Au vu de tout ce qui précède, nous pouvons récrire nos équations de Maxwell dans la fibre optique ainsi qui suit :

$$\nabla \times E = -\partial B/\partial t, \quad (99)$$

$$\nabla \times H = \partial D/\partial t, \quad (100)$$

$$\nabla \cdot D = 0, \quad (101)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (102)$$

avec,

$$D = \varepsilon_0 E + P, \quad (103)$$

$$B = \mu_0 H. \quad (104)$$

Calculons le rotationnel de l'équation (99), on aura

$$\nabla \times \nabla \times E = -\frac{\partial \nabla \times B}{\partial t}. \quad (105)$$

Remplaçons (104) dans (105), on aura

$$\nabla \times \nabla \times E = -\frac{\partial \nabla \times (\mu_0 H)}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \nabla \times H}{\partial t}. \quad (106)$$

En Insérant l'équation (100) dans (106), nous obtenons l'équation (107) ci-dessous

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}. \quad (107)$$

En remplaçant  $D$  par son expression dans l'équation (107), nous avons l'équation (108)

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial^2 (\varepsilon_0 E + P)}{\partial t^2}. \quad (108)$$

Le champ électrique  $E(r, t)$ , où  $t$  représente le temps et  $r$  le vecteur position associé à trois coordonnées d'espace  $x, y$ , et  $z$  est donnée par

$$E(r, t) = \frac{1}{2} [E_v(r, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c], \quad (109)$$

où  $E_v(r, t)$  représente l'enveloppe complexe du champ et  $\omega_0$  est la fréquence angulaire centrale de l'onde porteuse. La transformée de Fourier du champ électrique est définie comme suit

$$\tilde{E}(r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(r, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt. \quad (110)$$

Le champ  $E(r, t)$  peut être décomposé en deux fonctions, l'une transversale qui dépend de  $x$  et  $y$ . L'autre longitudinale qui dépend de  $z$  et  $t$ .

$$E(r, t) = \frac{1}{2} \hat{e} [F(x, y) A(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c], \quad (111)$$

où  $c.c$  est le complex conjugué,  $\hat{e}$  le vecteur unitaire de polarisation,  $F(x, y)$  est la distribution transverse du champ électrique,  $A(z, t)$  est la fonction transverse représentant l'amplitude complexe de l'enveloppe,  $\beta_0$  est la constante de propagation à la fréquence de la porteuse  $\omega_0$ . Les transformées de Fourier des vecteurs  $D$  et  $E$  sont liées par la relation

$$\tilde{D}(r, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \tilde{E}(r, \omega), \quad (112)$$

avec  $\varepsilon(\omega)$  la constant diélectrique complexe définie par

$$\varepsilon(\omega) = n_f^2(\omega) + \frac{2in_f\alpha c}{\omega} + \chi_a(\omega), \quad (113)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de perte de la fibre optique,  $c$  la célérité de la lumière dans le vide,  $n_f$  l'indice de refraction de la fibre, c'est à dire elle inclut à la fois les effets non linéaires et linéaires  $\chi_a(\omega)$  est la susceptibilité du système atomique pour un système à deux niveaux atomiques de temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$  associés aux populations et à la polarisation. Cette susceptibilité est donnée par la relation

$$\chi_a(\omega) = \frac{g_p c (\omega - \omega_a) T_2 - i}{\omega [1 + (\omega - \omega_a)^2 T_2^2]}, \quad (114)$$

En appliquant le développement de Taylor de l'équation (114), nous obtenons

$$\chi_a(\omega) = \frac{g_p}{2n_0} \left[ \frac{\delta - i}{1 + \delta^2} + \frac{1 - \delta^2 + 2i\delta}{(1 + \delta^2)^2} (\omega - \omega_0) T_2 + \frac{\delta(\delta^2 - 3) + i(1 - 3\delta^2)}{(1 + \delta^2)^3} (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 \right], \quad (115)$$

où  $\delta = (\omega_0 - \omega_a) T_2$ ,  $\omega_a$  est la fréquence de résonance atomique,  $g_p = \sigma(N_2 - N_1)$  le pic de gain,  $\sigma$  la section de transition,  $N_1$  et  $N_2$  les densités de populations des deux niveaux de système atomique. Des équations du taux de populations, on obtient l'équation du taux pour le gain.

$$\frac{dg_p}{dt} = \frac{g_0 - g_p}{T_1} - \left[ \frac{2\sigma}{\hbar\omega} \right] g_p |E|^2, \quad (116)$$

où  $g_0$  est le gain du signal crée par le pompage optique.

L'équation (108) peut être résolue en utilisant la méthode de la séparation des variables décrite en [140] dans le cas où la solution est donnée par la forme du champ dans le domaine fréquentiel

$$\tilde{E}(r, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i(\beta_0 z - i\omega_0 t) \hat{e}}, \quad (117)$$

où  $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$  est la transformée de Fourier de l'enveloppe lentement variable du champ électrique et  $\beta_0$  est la constante de propagation. l'équation (108) devient

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1^{eff} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2^{eff} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{\alpha_f}{2} A + \frac{g_p}{2n_0} \left[ \frac{\delta - i}{1 + \delta^2} \right] A + i\gamma |A|^2 A, \quad (118)$$

avec,

$$\beta_1^{eff} = \beta_1 + \frac{g_p T_2}{2n_0} \frac{1 - \delta^2 + 2i\delta}{(1 + \delta^2)^2}, \quad (119)$$

$$\beta_2^{eff} = \beta_2 + \frac{g_p T_2}{2n_0} \frac{\delta(\delta^2 - 3) + i(1 - 3\delta^2)}{(1 + \delta^2)^3}, \quad (120)$$

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c a_{eff}}, \quad (121)$$

$$a_{eff} = \frac{\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^4 dx dy}. \quad (122)$$

$a_{eff}$  est l'aire effective de la fibre

en faisant un changement de variable  $T = t - \beta_1^{eff} z$ , on obtient l'équation de Ginzburg-Landau complexe ci-dessus

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iP \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = \lambda A + i\gamma |A|^2 A, \quad (123)$$

avec,  $\lambda = \frac{1}{2} \left[ \frac{g_0}{n_0} - \alpha_f \right]$  et  $P = \frac{1}{2} \left[ \beta_2 + \frac{ig_0 T_2^2}{n_0} \right]$

### Équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée

En incluant aux effets non linéaires un terme de saturation

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + n_s \frac{|E_t|^2}{\varphi + |E|^2}. \quad (124)$$

Aussi en effectuant la transformée de galilée suivante

$t - \beta_1^{eff} z \rightarrow T$  et  $\beta_1^{eff} = \beta_1 + \frac{b}{2n_0} + n_s \beta_0$ .

Si nous intéressent uniquement au cas limite  $\varphi \ll |E|^2$ , nous retrouvons en négligeant le terme  $\left(\frac{A}{A}\right) \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ , l'équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée avec terme de renormalisation suivante

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iP \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \lambda A = i\gamma |A|^2 A + iC \frac{|A_T|^2}{|A|^2} A, \quad (125)$$

avec  $C$  le coefficient de renormalisation qui est une constante complexe ne dépendant pas du milieu physique.

Dans le cadre général où  $\varphi$  n'est pas négligé devant  $|E|^2$ , nous avons l'équation de Ginzburg-Landau complex avec terme de saturation

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iP \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \lambda A = i\gamma |A|^2 A + iC \frac{|A_T|^2}{\varphi + |A|^2} A \quad (126)$$

Dans ce cas  $C$  est le coefficient de saturation.

### 2.3.2 La molécule ADN : Équation de Schrödinger non linéaire cubique-quintique

L'acide désoxyribonucléique ou ADN est une macromolécule biologique présente dans toutes les cellules ainsi que chez de nombreux virus. L'ADN contient toute l'information génétique, appelée génome, permettant le développement, le fonctionnement et la reproduction des êtres vivants. C'est un acide nucléique, au même titre que l'acide ribonucléique (ARN). Les acides nucléiques sont, avec les peptides et les glucides, l'une des trois grandes familles de biopolymères essentiels à toutes les formes de vie connues.

Les molécules d'ADN des cellules vivantes sont formées de deux brins antiparallèles enroulés l'un autour de l'autre pour former une double hélice. On dit que l'ADN est bicaténaire, ou double brin. Chacun de ces brins est un polymère appelé polynucléotide. Chaque monomère qui le constitue est un nucléotide, lequel est formé d'une base nucléique. Les nucléotides polymérisés sont unis les uns aux autres par des liaisons covalentes entre le désoxyribose d'un nucléotide et le groupe phosphate du nucléotide suivant, formant ainsi une chaîne où alternent oses et phosphates, avec des bases nucléiques liées chacune à un ose. L'ordre dans lequel se succèdent les nucléotides le long d'un brin d'ADN constitue la séquence de ce brin. C'est cette séquence qui porte l'information génétique. Celle-ci est structurée en gènes, qui sont exprimés à travers la transcription en ARN. Ces ARN peuvent être non codants, ARN de transfert et ARN ribosomique notamment, ou bien codants : il s'agit dans ce cas d'ARN messagers, qui sont traduits en protéines par des ribosomes. La succession des bases nucléiques sur l'ADN détermine la succession des acides aminés qui constituent les protéines issues de ces gènes. La correspondance entre bases nucléiques et acides aminés est le code génétique. L'ensemble des gènes d'un organisme constitue son génome

Considérons le modèle de P.B. de la molécule D'ADN, ses équations de mouvement sont données par

$$m\ddot{y}_n = k(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + 2\sqrt{2}aD \left( e^{-2a\sqrt{2}y_n} - e^{-a\sqrt{2}y_n} \right), \quad (127)$$

nous développons  $e^{-ay_n}$  jusqu'aux deuxième et troisième ordres. Cela nous conduit à l'équation modifiée

$$\ddot{y}_n = \omega_0^2 (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) - \omega_g^2 (y_n + \alpha y_n^2 + \beta y_n^3), \quad (128)$$

$$\text{où } \alpha = \frac{-3a}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{7a^2}{3}, \omega_g^2 = \frac{4a^2 D_n}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Nous utilisons ici l'approximation sémi-discrète pour obtenir le soliton enveloppe de faible longueur d'onde. Cette approche asymptotique permet de décrire l'enveloppe dans l'approximation du continuum et de traiter correctement l'onde porteuse avec son caractère discret.

En raison de la faible nonlinéarité supposée, nous développons  $y_n$  dans la série asymptotique suivante [139],

$$y_n(t) = \sum [\varepsilon^l y_{l,m}(n, t)] e^{im\theta(t)} C.C. \quad (129)$$

En utilisant l'idée développée par Taniuti et Yajima [118], la solution  $y_n$  est

considérée comme suit

$$y_n(t) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} y_{11}(n, t) e^{i\theta} + C.C + \varepsilon [y_{20} + y_{22}(n, t) e^{2i\theta} + C.C] + \varepsilon^{\frac{3}{2}} y_{33}(n, t) + C.C + \varepsilon^2 [y_{42} + y_{44}(n, t) e^{4i\theta} + C.C] + \varepsilon^{\frac{5}{2}} [y_{53}(n, t) e^{3i\theta} + y_{55}(n, t) e^{5i\theta} + C.C] + 0 \left( \varepsilon^{\frac{7}{2}} \right), \quad (130)$$

où  $C.C$  est le complexe conjugué et  $\theta_n = nql - \omega t$ . Le paramètre très petite  $\varepsilon$  qui est compris entre 0 et 1 ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ) représente la taille de l'amplitude de la perturbation.

Dans l'équation résultante, il ya des termes  $y_{l,m}(n \pm 1)$  non nul, qui sont développés dans l'approximation continue autour de  $y_{l,m}(n, t)$  avec le changement  $n = x$ . Ainsi le changement rapide de la phase  $\theta$  dans l'équation (130) est correctement pris en compte en considérant les différences de phase pour la variable discrète  $n$ . Nous avons également mis à l'échelle les dérivées du temps et de l'espace comme  $\frac{\partial}{\partial x} \sim 0(\varepsilon)$  et  $\frac{\partial}{\partial t} \sim 0(\varepsilon)$  respectivement. Nous avons également négligé de manière cohérente les termes d'ordre élevé en  $\varepsilon$ . Ensuite nous nous en tenons aux termes de la dérivée seconde de  $y_n$  pour équilibrer la dispersion et la nonlinéarité.

À partir de l'équation en  $(\varepsilon^{\frac{1}{2}}, e^{i\theta})$ , c'est à dire, les termes de  $0(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  pour le premier harmonique, on obtient la relation de dispersion linéaire

$$\omega^2 = \omega_g^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \left( \frac{ql}{2} \right), \quad (131)$$

à partir de l'équation en  $(\varepsilon^{\frac{1}{2}}, e^{0i\theta})$ , on obtient l'expression de la vitesse de groupe suivante

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial q} = \frac{4\omega_0^2 \sin^2(ql)}{\omega}. \quad (132)$$

Suivant l'ordre de  $(\varepsilon, e^{0i\theta})$ , nous avons

$$y_{20} = a_{20} |y_{11}|^2, \quad a_{20} = -2\alpha. \quad (133)$$

Suivant l'ordre de  $(\varepsilon, e^{2i\theta})$ , nous avons

$$y_{22} = a_{22} y_{11}^2; \quad a_{22} = \frac{\alpha \omega_g^2}{4(\omega^2 - \omega_0^2 \sin^2(ql)) - \omega_g^2}. \quad (134)$$

Suivant l'ordre de  $(\varepsilon^{\frac{3}{2}}, e^{3i\theta})$ , nous avons

$$y_{33} = a_{33}y_{11}^3 ; a_{33} = a_{30} (\beta + 2\alpha a_{22}) ; a_{22} = \frac{\omega_g^2}{9\omega^2 - \omega_0^2 \sin^2 \left(\frac{3ql}{2}\right) - \omega_g^2} . \quad (135)$$

Suivant l'ordre de  $(\varepsilon^2, e^{2i\theta})$ , nous avons

$$y_{22} = a_{22} |y_{11}^2| y_{11}^2 ; a_{42} = \left[ a_{22} (4a_{20}a_{22} + 2a_{33}) + 6\frac{\beta a_{22}}{\alpha} (a_{20} + a_{22}) \right] . \quad (136)$$

Suivant l'ordre de  $(\varepsilon^2, e^{4i\theta})$ , nous avons

$$y_{44} = a_{44}y_{11}^4 ; a_{44} = a_{40} \left[ \alpha (a_{22}^2 + 2a_{33}) + 3\beta a_{22} \right] ; a_{40} = \frac{\omega_g^2}{4(4\omega^2 - \omega_0^2 \sin^2(2ql)) - \omega_g^2} . \quad (137)$$

Suivant l'ordre de  $(\varepsilon^{\frac{3}{2}}, e^{3i\theta})$ , nous avons

$$y_{53} = a_{53} |y_{11}|^2 y_{11}^3 ; a_{53} = a_{30} \left[ \alpha (2a_{42} + 2a_{44} + 4a_{33}a_{20}) + \beta (12a_{20}a_{22} + 6a_{33} + 3a_{22}^2) \right] . \quad (138)$$

Suivant l'ordre de  $(\varepsilon^{\frac{5}{2}}, e^{5i\theta})$ , nous avons

$$y_{55} = a_{55}y_{11}^5 ; a_{55} = a_{50} \left[ 2\alpha (a_{44} + a_{22}a_{33}) + 3\beta (a_{33} + a_{22}^2) \right] ; a_{50} = \frac{\omega_g^2}{25\omega^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \left(\frac{5ql}{2}\right) - \omega_g^2} . \quad (139)$$

À partir de l'équation de  $(\varepsilon^{\frac{5}{2}}, e^{5i\theta})$  et en considérant la vitesse de groupe, l'équation résultante décrivant la dynamique d'un paquet d'onde à la forme suivante :

$$i\frac{\partial y_{11}}{\partial \tau} + P\frac{\partial^2 y_{11}}{\partial \xi^2} + Q_1 |y_{11}|^2 y_{11} + Q_2 |y_{11}|^4 y_{11} = 0, \quad (140)$$

qui est l'équation de Schrödinger cubique-quintique pour la molécule ADN.

Où  $\tau = t$  et  $\xi = x - V_g t$ , avec

$$P = \frac{l^2 \omega_0^2 \cos(ql) - V_g^2}{2\omega}$$

$$Q_1 = -\frac{\omega_g^2 [3\beta + 2\alpha (2a_{20} + a_{22})]}{2\varepsilon\omega}$$

$$Q_2 = -\frac{\omega_g^2 [2\alpha (2a_{22}a_{33}) + \beta (12a_{22}a_{20} + 3a_{33} + a_{20} + 6a_{22}^2 + 12a_{20}^2)]}{2\omega}$$



En posant  $y_{11}(\xi, t) = \psi(X, t)$  avec  $\xi = X$ , nous obtenons la forme générale de l'équation de Schrödinger cubique-quintique

$$i\psi_t + P\psi_{XX} + Q_1 |\psi|^2 \psi + Q_2 |\psi|^4 \psi = 0. \quad (141)$$

## 2.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des différentes méthodes mathématiques utilisées pour résoudre les différentes équations non linéaires considérées. Aussi, dans ce même chapitre, nous avons aussi effectué des applications (le cas de la fibre optique et de la molécule d'ADN) pour obtenir respectivement les équations de Ginzburg-Landau complexe modifiée et de Schrödinger non linéaire cubique-quintique.

## Résultats et Discussions

### 3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons donné les généralités sur les solitons, quelques exemples d'équations aux dérivées partielles non linéaires et enfin quelques techniques de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires. Nous avons aussi présenté les différentes méthodes mathématiques utilisées pour atteindre nos objectifs. Dans le présent chapitre, nous présentons les différents résultats obtenus à partir des équations du type Ginzburg-Landau complexes. Ici notre objectif est de trouver les solutions nouvelles de types ondes solitaires de l'équation GLCM avec terme de renormalisation ensuite avec terme de saturation. Aussi, nous présentons les solutions de types solitons de l'équation de Schrödinger non linéaire cubique quintique. Nous voulons également montré que le comportement de l'équation de Schrödinger d'ordre supérieur peut être facilement prédie au moyen du tracé des portraits de plans de phases. Enfin, nous voulons étudier l'influence de quelques termes de perturbation sur l'équation de Schrödinger d'ordre supérieur.

### 3.2 Équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée avec terme de renormalisation

De façon générale, l'équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée (GLCM) a été introduite par Newell et Whitehead [140, 141]. Cette équation a été utilisée ces dernières années pour décrire qualitativement et quantitativement une grande variété de phénomènes tels que les transitions de phase [142], la supraconductivité [143, 144], la superfluidité [145] et les chaînes dans la théorie des champs [146]. Dans cette partie, nous utilisons la méthode alternative d'expansion  $(G'/G)$ , la méthode de la

fonction sech, la méthode de la fonction tanh et l'approche par troncature de Painlevé pour rechercher des solutions nouvelles de type ondes solitaires de l'équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée avec terme de renormalisation. L'équation GLCM avec terme de renormalisation a également une large gamme d'applications. Comme par exemple, pour les transitions de phase dans les systèmes non équilibrés, la convection de Benard, l'écoulement de Taylor-couette, l'écoulement de Poiseuille dans les systèmes de fluide et l'onde dissipative dans les plasmas [147].

La particularité de cette équation est l'introduction du dernier terme  $C \frac{|\psi_x|^2}{\psi^*}$  par L. Stenflo [148] comme terme habituellement manquant pendant que nous essayons de récupérer l'équation régissant la dynamique de la loi de dispersion, où  $\psi$  est la fonction enveloppe complexe de l'onde modulée qui varie lentement avec le nombre d'onde  $k$ . Le terme  $C \frac{|\psi_x|^2}{\psi^*}$  est considéré comme le terme de renormalisation de la dispersion, c'est à dire qui corrige les effets de dispersion si et seulement si l'amplitude  $|\psi|$  est non nulle, sinon elle ne peut pas être prise en compte. En effet, les solutions analytiques exactes rapportées dans la littérature pour cette équation ont leurs branches infinies égale à zéro ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) [148–152]. Ce n'est pas physiquement acceptable, car le module doit être différent de zéro à cause du terme  $\frac{|\psi_x|^2}{\psi^*} = \frac{|\psi_x|^2}{|\psi|^2} \psi$ . Ici Nous présentons deux catégories de solutions. La première est telle qu'aucune simulation numérique directe n'est possible. La deuxième catégorie de solution permet de procéder à des simulations numériques directes. La première catégorie de solutions est mathématiquement acceptable. La seconde est en outre physiquement éligible, donc valide.

Nous considérons l'équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée

$$i\psi_t + P\psi_{xx} + Q|\psi|^2\psi = i\gamma\psi + C \frac{|\psi_x|^2}{\psi^*}, \quad (142)$$

où  $t$  est le temps et  $x$  est la distance de propagation;  $P, Q, \gamma, C$  sont des constantes complexes liées respectivement à la dispersion de la vitesse de groupe, la non linearité cubique, la dissipation et au coefficient de renormalisation du terme de dispersion, avec,

$$P = P_r + iP_m, Q = Q_r + iQ_m, C = C_r + iC_m, \gamma = \gamma_r + i\gamma_m.$$

L'équation (142) peut être réduite comme suit

$$i\Psi_t\Psi^* + P\Psi_{xx}\Psi^* + Q|\Psi|^2\Psi\Psi^* = i\gamma\Psi\Psi^* + C|\Psi_x|^2, \quad (143)$$

avec  $i^2 = -1$ .

Tout d'abord, nous allons chercher les solutions de l'équation (143) en prenant l'ansatz sous la forme

$$\psi(x, t) = U(kx - vt)e^{i(Ax+Bt)}, \quad (144)$$

où  $k$ ,  $v$ ,  $A$ ,  $B$  sont des constantes réelles.  $U$  est un réel fonction de  $t$  et  $x$ . Combinons les variables indépendantes  $x$  et  $t$  en une seule variable,

$$\xi = kx - vt, \quad (145)$$

et insérons l'équation (144) dans l'équation (143) nous obtenons,

$$\begin{cases} -BU^2 - ivUU_\xi + P_r k^2 UU_{\xi\xi} + 2iP_r k AUU_\xi - P_r A^2 U^2 \\ + iP_m k^2 UU_{\xi\xi} - 2P_m k AUU_\xi - iP_m A^2 U^2 + Q_r U^4 + iQ_m U^4 \\ = i\gamma_r U^2 - \gamma_m U^2 + C_r k^2 U_\xi^2 - C_r A^2 U^2 + 2iC_r k AUU_\xi \\ + iC_m k^2 U_\xi^2 - iC_m A^2 U^2 - 2C_m k AUU_\xi. \end{cases} \quad (146)$$

L'équation (146) peut être séparée en deux parties, partie réelle et partie imaginaire. Ainsi nous avons un système de deux équations :

$$\begin{cases} -BU^2 + P_r k^2 UU_{\xi\xi} - P_r A^2 U^2 - 2P_m k AUU_\xi + Q_r U^4 \\ = -\gamma_m U^2 + C_r k^2 U_\xi^2 - C_r A^2 U^2 - 2C_m k AUU_\xi, \\ vUU_\xi + 2P_r k AUU_\xi + P_m k^2 UU_{\xi\xi} - P_m A^2 U^2 + Q_m U^4 \\ = \gamma_r U^2 + 2C_r k AUU_\xi + C_m k^2 U_\xi^2 - C_m A^2 U^2. \end{cases} \quad (147)$$

Si nous divisons chaque membre de l'équation (147) par  $U$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} (\gamma_m - B + C_r A^2 - P_r A^2) U + (-2P_m k A + 2C_i k A) U_\xi + P_r k^2 U_{\xi\xi} + Q_r U^3 + C_r k^2 \frac{U_\xi^2}{U} = 0, \\ (-\gamma_r + C_m A^2 - P_m A^2) U + (2P_r k A - v - 2C_r k A) U_\xi + P_m k^2 U_{\xi\xi} + Q_m U^3 - C_m k^2 \frac{U_\xi^2}{U} = 0. \end{cases} \quad (148)$$

Pour simplifier la résolution du système ci-dessus, nous posons les relations de compatibilité :

$$\begin{cases} \gamma_m - B + C_r A^2 - P_r A^2 = -\gamma_r + C_m A^2 - P_m A^2, \\ 2P_r k A - v - 2C_r k A = -2P_i k A + 2C_i k A, \\ P_m = P_r = p, \\ Q_r = Q_m = q, \\ C_r = C_m = c. \end{cases} \quad (149)$$

Ainsi, nous pouvons résoudre une seule équation de ce système

$$(-\gamma_r + cA^2 - pA^2)U + (2pkA - v - 2ckA)U_\xi + pk^2U_{\xi\xi} + qU^3 - ck^2\frac{U_\xi^2}{U} = 0. \quad (150)$$

### 3.2.1 Méthode alternative d'expansion ( $G'/G$ )

La solution de l'équation (150) sera exprimée par sa forme polynomiale en ( $G'/G$ ) comme suit :

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^N a_j \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^j, \quad (151)$$

où  $G(\xi)$  satisfait à EDO du second ordre sans second membre de la forme :

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0. \quad (152)$$

Dans cette équation,  $a_j$  sont des constantes que nous déterminerons plus tard. L'ordre de la solution est  $N = 1$ . Ainsi,  $U(\xi)$  peut être exprimé comme suit :

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right). \quad (153)$$

Nous aurons :

$$U_\xi = -a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 - \lambda a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) - a_1 \mu, \quad (154)$$

$$U_{\xi\xi} = 2a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^3 + 3a_1 \lambda \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 + a_1 (2\mu + \lambda^2) \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) + a_1 \lambda \mu, \quad (155)$$

$$U^3 = a_1^3 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^3 + 3a_0 a_1^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 + 3a_1 a_0^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) + a_0^3, \quad (156)$$

$$U_\xi^2 = a_1^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^4 + 2a_1^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^3 + (\lambda^2 a_1^2 + 2\mu a_1^2) \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 + 2\lambda \mu a_1^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) + a_1^2 \mu^2. \quad (157)$$

Substituons (153), (154), (155), (156) et (157) dans l'équation (150), nous obtenons :

$$a_0 = \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{3\lambda} - \frac{1}{4} \sqrt{6},$$

$$a_1 = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2 - 8\mu}},$$

$$k = - \frac{\frac{1}{5} \frac{(15\lambda^2 - 60\mu) \left( \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu - 4} \right)}{\sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu}} + (4\lambda^2 - 16\mu) \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2 - 8\mu}} \left( \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{3\lambda} - \frac{1}{4} \sqrt{6} \right) - 3\lambda}{6\lambda^2 - 4\mu},$$

$$v = \frac{1}{5} \frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu} - 4}{\sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu}}.$$

Les solutions générales de l'équation (150) seront écrites comme suit :

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right), \quad (158)$$

où,

$$\xi = kx - \left( \frac{1}{5} \frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu} - 4}{\sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu}} \right) t. \quad (159)$$

De même les solutions générales de l'équation (152) seront écrites comme suit :

1- si  $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ,

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{C_1 \sinh \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + C_2 \cosh \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)}{C_1 \cosh \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + C_2 \sinh \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right]. \quad (160)$$

2- if  $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ,

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[ \frac{-C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\xi\right)} \right]. \quad (161)$$

3- si  $\lambda^2 - 4\mu = 0$ ,

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2\xi}. \quad (162)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes arbitraires.

À cause du fait que  $\lambda^2 - 4\mu$  ne peut pas être égale à zéro, nous n'obtenons que deux catégories de solutions à ondes progressives.

**solution 1 : Fonction hyperbolique à ondes progressives**

Si  $\lambda^2 - 4\mu > 0$

$$U_1(x, t) = a_0 + a_1 \left[ \frac{-\lambda}{2} + \frac{\eta}{2} \left( \frac{C_1 \sinh\left(\frac{\eta(kx-vt)}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\eta(kx-vt)}{2}\right)}{C_1 \cosh\left(\frac{\eta(kx-vt)}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\eta(kx-vt)}{2}\right)} \right) \right], \quad (163)$$

avec,

$$\eta = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}, \quad (164)$$

dans ce cas,

$$\psi_1(x, t) = U_1(kx - vt)e^{i(Ax+Bt)}. \quad (165)$$

**solution 2 : Fonction trigonométrique à ondes progressives**

Si  $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ,

$$U_2(x) = a_0 + a_1 \left[ \frac{-\lambda}{2} + \frac{\eta}{2} \left( \frac{-C_1 \sin\left(\frac{\eta(kx-vt)}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\eta(kx-vt)}{2}\right)}{C_1 \cos\left(\frac{\eta(kx-vt)}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\eta(kx-vt)}{2}\right)} \right) \right], \quad (166)$$

avec,

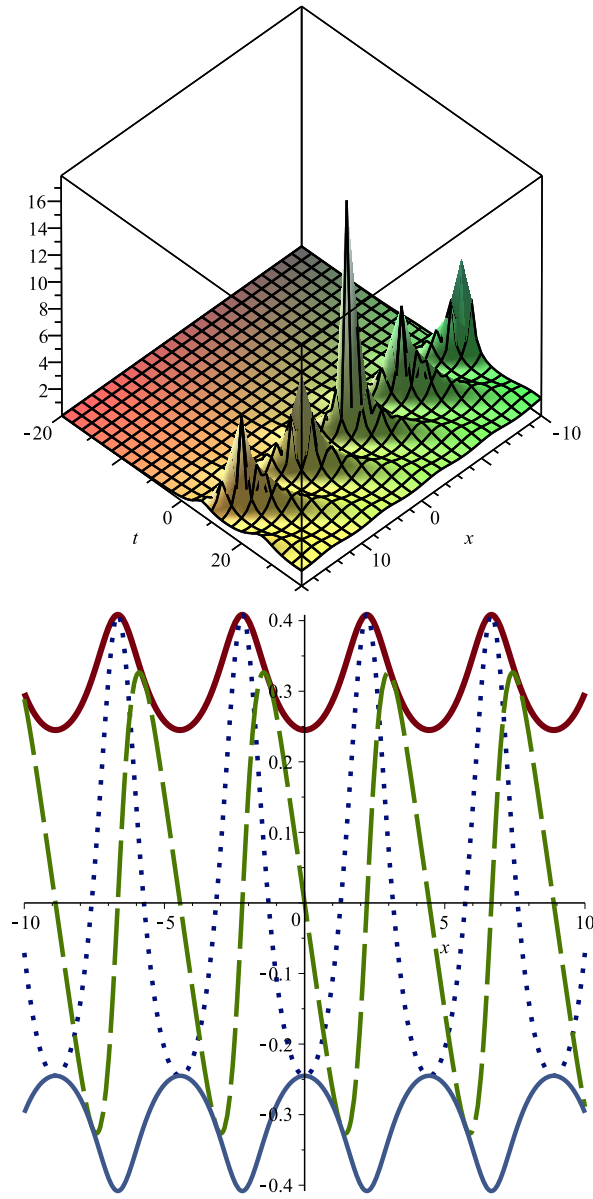


FIG. 4 – Solution tracée en utilisant l'équation (165) avec les paramètres suivants :  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 0.25$ ,  $C_1 = 0.5$  et  $C_2 = 0.3$ ;  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $k$  et  $v$  sont pris avec un signe positif. En 3D, nous avons représenté le module. En 2D, nous avons l'enveloppe (trait fort) à  $t = 0$ . Les tirets de couleur verte correspondent à la partie imaginaire et les pointillés de couleur bleu représentent la partie réelle.

$$\eta = \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}, \quad (167)$$

dans ce cas,



$$\psi_2(x, t) = U_2(kx - vt)e^{i(Ax+Bt)}. \quad (168)$$

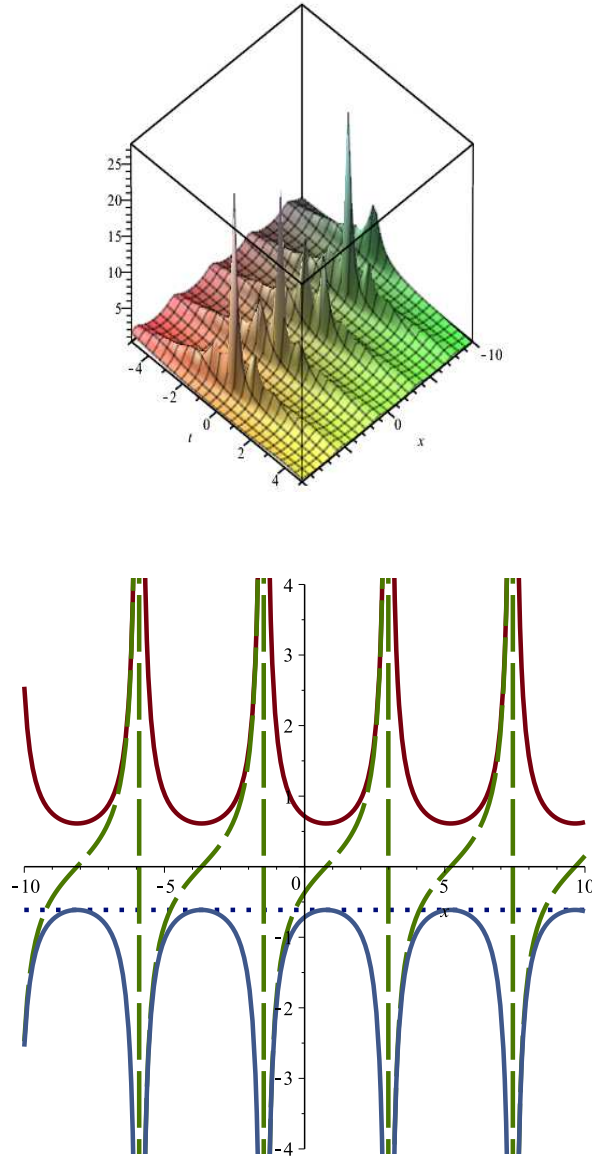


FIG. 5 – Solution affichée à partir de l'équation (168) avec les paramètres suivants :  $\lambda = 0.25$ ,  $\mu = 1.0$ ,  $C_1 = 0.5$  et  $C_2 = 0.3$  ;  $a_0$  et  $a_1$  sont négatifs tandis que  $k$  et  $v$  sont positifs. La figure de dessus présente le module. La figure de dessous donne la représentation en 2D de l'enveloppe (trait fort) à  $t = 0$ . Elle a la même légende que dans la figure 4.

Les courbes de dessus des figures 4 et 5 présentent le module des solutions des équations (165) et (168). Ce sont des trains d'ondes solitaires et des trains d'ondes multi-solitaires. Les courbes de dessous correspondent au zoom de ces solutions à  $t = 0$ . On peut clairement voir que le module est toujours différent de zéro. Cela convient bien avec le terme de renormalisation dans (142) qui s'écrit aussi  $\frac{|\psi_x|^2}{|\psi|^2}\psi$ . Pour cette classe de solution, nous pouvons propager l'onde à travers des simulations directes (fig.8).

### 3.2.2 Méthode de la fonction sech

Les solutions de l'équation (150), peuvent être exprimées par un polynôme en sech comme suit :

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^N a_j (\operatorname{sech} h(\xi))^j, \quad (169)$$

où  $a_j$  sont des constantes à déterminer plus tard ; l'ordre de la solution est  $N = 1$ . Ainsi,  $U(\xi)$  peut être exprimé comme suit :

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \operatorname{sech} h(\xi). \quad (170)$$

Substituons l'équation (170) dans l'équation (150) et résolvons, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= \sqrt{-\frac{A^2c^2 - 3A^2cp + 2A^2p^2 - c\gamma_r + 2p\gamma_r}{cq - pq}}, \\ k &= \sqrt{-\frac{A^2c + A^2p + \gamma_r}{c - p}}, \\ v &= 2kA(p - c). \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation (150) est écrite comme suit :

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \operatorname{sech} h(\xi), \quad (171)$$

où,

$$\xi = kx - 2kA(p - c)t, \quad (172)$$

ensuite nous avons,

$$U(x, t) = a_0 + a_1 \operatorname{sech}(kx - vt). \quad (173)$$

La solution est,

$$\psi(x, t) = U(kx - vt)e^{i(Ax+Bt)}. \quad (174)$$

Le soliton pulse correspondant à la solution (174) est représenté par la figure 6. La figure de dessus est la représentation en 3D du module tandis que la figure de dessous affiche la représentation en 2D de l'enveloppe à  $t = 0$ . Les branches ici sont nulles impliquant que le terme de renormalisation diverge. Par conséquent, aucune simulation directe ne peut être effectuée en utilisant cette solution comme condition initiale. Cependant, cette solution est acceptable d'un point de vue mathématique.

### 3.2.3 Méthode de la fonction tanh

Les solutions de l'équation (150), peuvent être exprimées par un polynôme en sech comme suit :

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^N a_j (\tanh(\xi))^j, \quad (175)$$

où  $a_j$  sont des constantes à déterminer plus tard. l'ordre de la solution est  $N = 1$ . Ainsi,  $U(\xi)$  peut être exprimé comme suit :

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \tanh(\xi). \quad (176)$$

Substituons l'équation (176) dans l'équation (150) et résolvons avec le logiciel maple, nous obtenons :

$$a_0 = \sqrt{-\frac{1}{4} \frac{A^2 c - A^2 p - \gamma_r}{q}},$$

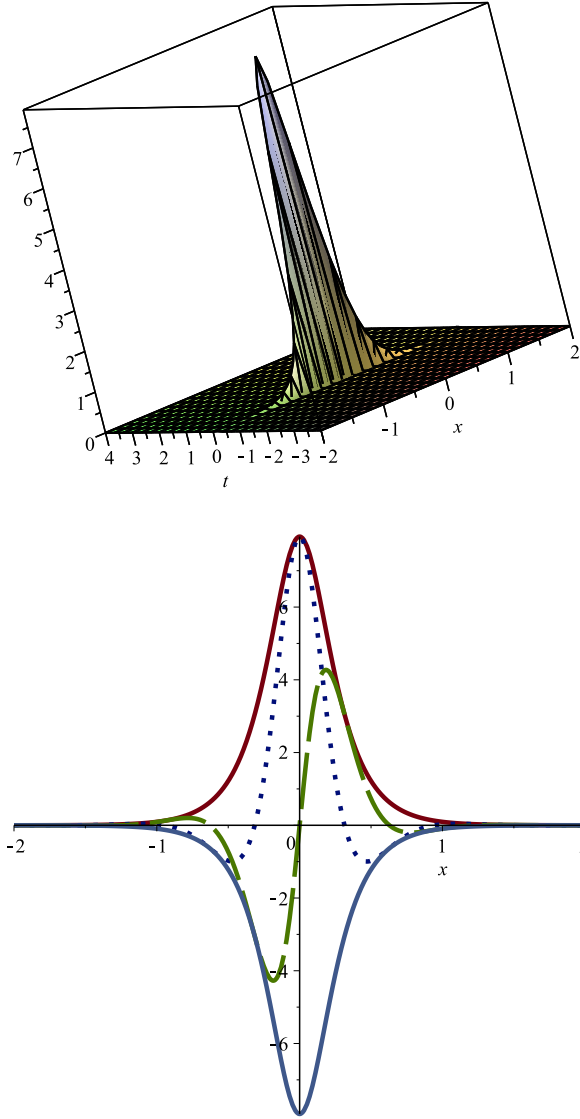


FIG. 6 – Représentation en 3D et 2D de l'équation (174) avec les paramètres suivants :  $\gamma_r = 0.5$ ,  $A = 0.02$ ,  $p = 0.8$ ,  $q = 0.5$  et  $c = 0.4$ ;  $v$  et  $k$  sont positifs. Les figures de dessus et de dessous correspondent respectivement au module et à la représentation en 2D de l'enveloppe, à  $t = 0$ . La partie imaginaire correspond aux tirets de couleur verte et la partie réelle aux pointillés de couleur bleu.

$$a_1 = \sqrt{-\frac{1}{4} \frac{A^2 c - A^2 p - \gamma_r}{q}},$$

$$k = \sqrt{-\frac{A^2 c - A^2 p - \gamma_r}{4c - 8p}},$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{1}{(c - 2p)} \left( \begin{array}{l} 2A^2c - 5A^2cp + 3A^2p^2 - 4Akc^2 \\ +12Akcp - 8Akp^2 - 2c\gamma_r + 3p\gamma_r \end{array} \right).$$

La solution générale de l'équation (150) est écrite comme suit :

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \tanh(\xi), \quad (177)$$

où,

$$\xi = kx - vt, \quad (178)$$

ensuite nous avons,

$$U(x, t) = a_0 + a_1 \tanh(kx - vt). \quad (179)$$

La solution est,

$$\psi(x, t) = U(kx - vt)e^{i(Ax+Bt)}. \quad (180)$$

La figure 7 correspond à la solution de l'équation (180) qui est un soliton kink (temporel) et un train d'ondes solitaires suivant l'axe des x. La courbe de dessous correspond également au zoom de cette solution au temps  $t = 0$ . On peut aussi voir que le module est toujours différent de zéro. Il est aussi en accord avec le terme de renormalisation.

La figure 8 montre un exemple de propagation de l'onde par simulation directe. Dans la courbe de gauche, l'onde part d'une position initiale. Elle se déplace pendant un temps transitoire pour atteindre une position stable. Sur la courbe de droite, la représentation de la vue de dessus montre que l'onde continue sa progression après le temps transitoire de manière stable.

### 3.2.4 Approche par troncature de Painlevé

Nous allons rechercher les solutions de l'équation (143) en utilisant l'approche par troncature de Painlevé, pour cela nous prenons l'ansatz sous la forme

$$\psi(x, t) = A(x, t)e^{i(kx-wt)} + B(x, t)e^{-i(kx-wt)}. \quad (181)$$

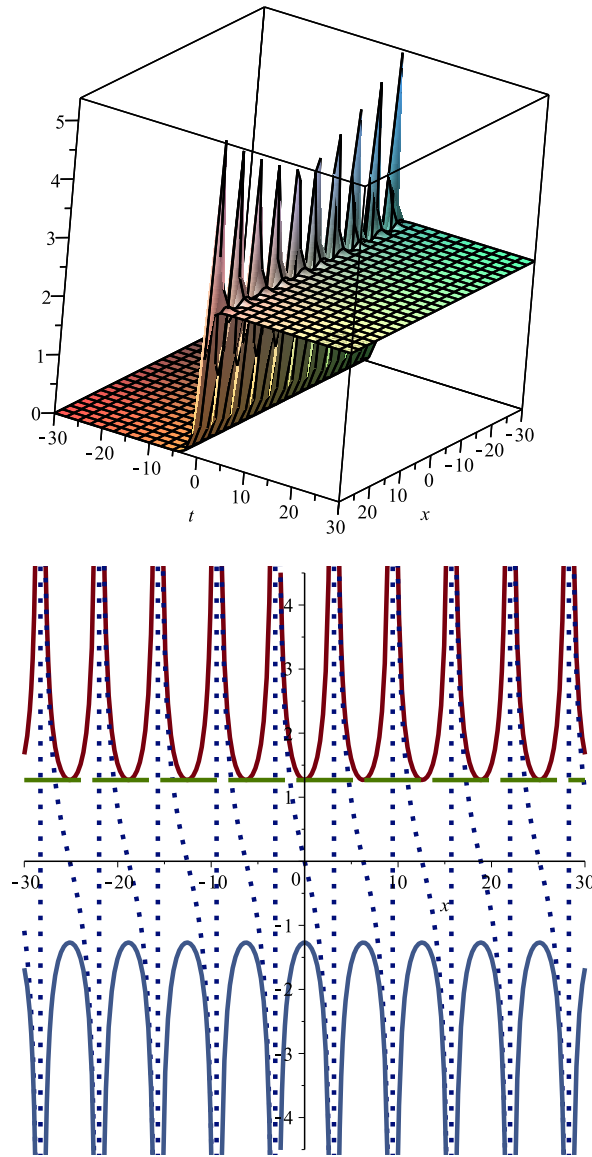


FIG. 7 – Solution obtenue par la méthode tanh et correspondant à l'équation (180) avec les paramètres suivants :  $\gamma_r = 0.5$ ,  $A = 2$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.7$  et  $c = 0.5$ ;  $v$  est négatif tandis que  $k$  est positif. Le module est représenté au dessus alors que en dessous nous avons la représentation en 2D de l'enveloppe (trait fort) à  $t = 0$ . Même légende que dans la figure 4.

où  $k, v, w$  sont des constantes réelles.  $A, B$  sont des complexes fonctions de  $t$  et  $x$ .  
 En insérant l'équation (181) dans l'équation (143) nous obtenons,

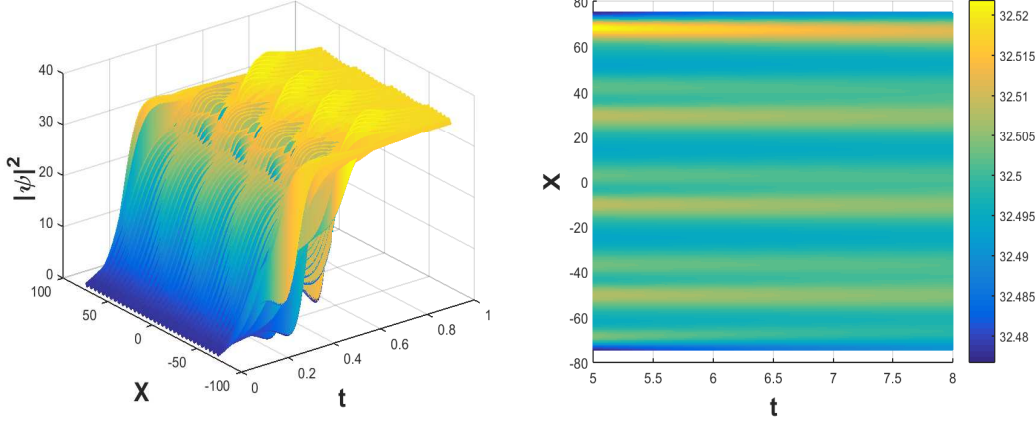


FIG. 8 – Courbes simulant la propagation de l'onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 4. La courbe de gauche correspond au déplacement de l'onde dans son temps transitoire. Celle de droite visualise le déplacement de l'onde dans son état stable.

$$\begin{aligned}
 & iA_t A^* + w|A|^2 + iB_t B^* - w|B|^2 + P_r A_{xx} A^* + 2iP_r k A_x A^* - P_r k^2 |A|^2 \\
 & - P_r B_{xx} B^* - 2iP_r k B_x B^* - P_r k^2 |B|^2 + iP_m A_{xx} A^* - 2P_m k A_x A^* - iP_m k^2 |A|^2 \\
 & - iP_m B_{xx} B^* + 2P_m k B_x B^* - iP_m k^2 |B|^2 + Q_r |A|^4 + 4Q_r |A|^2 |B|^2 + Q_r |B|^4 \\
 & + iQ_m |A|^4 + 4iQ_m |A|^2 |B|^2 + iQ_m |B|^4 = i\gamma_r |A|^2 + i\gamma_r |B|^2 - \gamma_i |A|^2 - \gamma_i |B|^2 \quad (182) \\
 & + C_r |A_x|^2 + iC_r k A^* A_x + iC_r k A A_x^* - C_r k^2 |A|^2 + C_r |B_x|^2 - iC_r k B^* B_x \\
 & - iC_r k B B_x^* - C_r k^2 |B|^2 - iC_m |A_x|^2 - C_m k A^* A_x - C_m k A A_x^* - iC_m k^2 |A|^2 \\
 & + iC_m |B_x|^2 + C_m k B^* B_x + C_m k B B_x^* - iC_m k^2 |B|^2.
 \end{aligned}$$

pour la résolution de l'équation (182), nous considérons que :

$$\begin{aligned}
 A(x, t) &= a(x) e^{i(\varphi_1(x) - \omega_1 t)}, \\
 B(x, t) &= b(x) e^{i(\varphi_2(x) - \omega_2 t)}.
 \end{aligned} \quad (183)$$

Pour simplifier la résolution de l'équation (182), nous introduisons la relation (183) dans l'équation (182).

**□ Résolution de l'équation en utilisant l'approche par troncature de Painlevé**

Les solutions de l'équation (182), peuvent s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= H_1 \int_0^x \frac{dx'}{a^2(x')}, \\ \varphi_2 &= H_2 \int_0^x \frac{dx'}{b^2(x')},\end{aligned}\tag{184}$$

et,

$$\begin{aligned}\varphi_1' &= \frac{H_1}{a^2}, \\ \varphi_2' &= \frac{H_2}{b^2}.\end{aligned}\tag{185}$$

Nous allons nous intéresser aux solutions qui respectent les conditions suivantes :

$$\varphi_j = 0 \Rightarrow H_j = 0\tag{186}$$

avec

$$(j=1,2)$$

L'équation (182) peut être séparée en deux parties : La partie réelle et la partie imaginaire. Ainsi, nous avons un système de deux équations.

$$\left\{ \begin{array}{l} +\omega_1 a^2 + \omega_2 b^2 + \omega a^2 - \omega b^2 + P_r a_{xx} a - P_r k^2 a^2 - P_r b_{xx} b - P_r k^2 b^2 - 2k P_m a_x a \\ + 2k P_m b_x b + 4Q_r a^2 b^2 + Q_r a^4 + Q_r b^4 = -\gamma_m a^2 - \gamma_m b^2 + \\ C_r a_x^2 + C_r b_x^2 - C_r k^2 a^2 - C_r k^2 b^2 - 2C_m k a_x a + 2C_m k b_x b \\ a + b - P_m a_{xx} a - P_m k^2 a^2 - P_m b_{xx} b - P_m k^2 b^2 + 2k P_r a_x a \\ - 2k P_r b_x b + 4Q_m a^2 b^2 + Q_m a^4 + Q_m b^4 = \gamma_r a^2 + \gamma_r b^2 - C_m a_x^2 \\ + C_m b_x^2 - C_m k^2 a^2 - C_m k^2 b^2 + 2C_r k a_x a - 2C_r k b_x b. \end{array} \right.\tag{187}$$

Nous prenons l'approche par troncature de Painlevé :

$$\begin{aligned}a(x) &= U_0 + U_1 f(x), \\ b(x) &= V_0 + V_1 f(x).\end{aligned}\tag{188}$$

Substituons l'équation (188) dans l'équation (187), nous obtenons :



$$\begin{cases} l_0 + l_1 f + l_2 f^2 + l_3 f^3 + l_4 f^4 + l_5 f_x + l_6 f_{xx} + l_7 f_x f + l_8 f_{xx} f + l_9 f_x^2 = 0 \\ d_0 + d_1 f + d_2 f^2 + d_3 f^3 + d_4 f^4 + d_5 f_x + d_6 f_{xx} + d_7 f_x f + d_8 f_{xx} f + d_9 f_x^2 = 0, \end{cases} \quad (189)$$

où les coefficients  $l_n (n=1,2,\dots,9)$  et  $d_n (n=1,2,\dots,9)$  sont définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 l_0 = \omega_1 U_0^2 + \omega_2 V_0^2 + \omega U_0^2 - \omega V_0^2 - P_r k^2 U_0^2 - P_r k^2 V_0^2 + 4Q_r U_0^2 V_0^2 \\
 + Q_r U_0^4 + Q_r V_0^4 + \gamma_m U_0^2 + \gamma_m V_0^2 + C_r k^2 U_0^2 + C_r k^2 V_0^2, \\
 l_1 = 2U_0 U_1 \omega_1 + 2V_0 V_1 \omega_2 + 2U_0 U_1 \omega - 2V_0 V_1 \omega - 2P_r k^2 U_0 U_1 - 2P_r k^2 V_0 V_1 \\
 + 8Q_r V_0 V_1 U_0^2 + 8Q_r U_0 U_1 V_0^2 + 4Q_r U_1 U_0^3 + 4Q_r V_1 V_0^3 \\
 + 2\gamma_m U_0 U_1 + 2\gamma_m V_0 V_1 + 2C_r k^2 U_0 U_1 + 2C_r k^2 V_0 V_1, \\
 l_2 = \omega_1 U_1^2 + \omega_2 V_1^2 + \omega U_1^2 - \omega V_1^2 - P_r k^2 U_1^2 - P_r k^2 V_1^2 + 4Q_r U_0^2 V_1^2 + 4Q_r U_1^2 V_0^2 \\
 + 16Q_r U_0 U_1 V_0 V_1 + 6Q_r U_0^2 U_1^2 + 6Q_r V_0^2 V_1^2 + \gamma_m V_1^2 + \gamma_m U_1^2 + C_r k^2 U_1^2 + C_r k^2 V_1^2, \\
 l_3 = 8Q_r U_0 U_1 V_1^2 + 8Q_r V_0 V_1 U_1^2 + 4Q_r U_0 U_1^3 + 4Q_r V_0 V_1^3, \\
 l_4 = 4Q_r U_1^2 V_1^2 + Q_r U_1^4 + Q_r V_1^4, \\
 l_5 = -2kP_m U_1 U_0 + 2kP_m V_1 V_0 + 2C_m k U_0 U_1 - 2C_m k V_0 V_1, \\
 l_6 = P_r U_1 U_0 - P_r V_1 V_0 \\
 l_7 = -2P_m k U_1^2 + 2P_m k V_1^2 + 2kC_m U_1^2 - 2kC_m V_1^2, \\
 l_8 = P_r U_1^2 - P_r V_1^2, \\
 l_9 = -C_r U_1^2 + C_r V_1^2 \\
 d_0 = U_0 + V_0 - P_m k^2 U_0^2 - P_m k^2 V_0^2 + 4Q_m U_0^2 V_0^2 \\
 + Q_m U_0^4 + Q_m V_0^4 - \gamma_r U_0^2 - \gamma_r V_0^2 + C_m k^2 U_0^2 + C_m k^2 V_0^2, \\
 d_1 = U_1 + V_1 - 2P_m k^2 U_0 U_1 - 2P_m k^2 V_0 V_1 \\
 + 8Q_m V_0 V_1 U_0^2 + 8Q_m U_0 U_1 V_0^2 + 4Q_m U_1 U_0^3 + 4Q_m V_1 V_0^3 \\
 - 2\gamma_r U_0 U_1 - 2\gamma_r V_0 V_1 + 2C_m k^2 U_0 U_1 + 2C_m k^2 V_0 V_1, \\
 d_2 = -P_m k^2 U_1^2 - P_m k^2 V_1^2 + 4Q_m U_0^2 V_1^2 + 4Q_m U_1^2 V_0^2 \\
 + 16Q_m U_0 U_1 V_0 V_1 + 6Q_m U_0^2 U_1^2 + 6Q_m V_0^2 V_1^2 - \gamma_r V_1^2 - \gamma_r U_1^2 + C_m k^2 U_1^2 + C_m k^2 V_1^2, \\
 d_3 = 8Q_m U_0 U_1 V_1^2 + 8Q_m V_0 V_1 U_1^2 + 4Q_m U_0 U_1^3 + 4Q_m V_0 V_1^3, \\
 d_4 = 4Q_m U_1^2 V_1^2 + Q_m U_1^4 + Q_m V_1^4, \\
 d_5 = -2kP_r U_1 U_0 + 2kP_r V_1 V_0 + 2C_r k U_0 U_1 - 2C_r k V_0 V_1, \\
 d_6 = P_m U_1 U_0 - P_m V_1 V_0, \\
 d_7 = -2P_r k U_1^2 + 2P_r k V_1^2 + 2kC_r U_1^2 - 2kC_r V_1^2, \\
 d_8 = P_m U_1^2 - P_m V_1^2, \\
 d_9 = -C_m U_1^2 + C_m V_1^2.
 \end{array} \right. \tag{190}$$

Pour simplifier la résolution du système ci-dessus, nous posons les relations de compatibilité ci-dessous

$$l_n = d_n(n=1,2,\dots,9). \quad (191)$$

Ensuite nous avons,

$$\begin{cases} Q_r = Q_m = q, \\ C_r = C_m = c, \\ P_r = P_m = p, \\ -\gamma_r = \gamma_m. \end{cases} \quad (192)$$

Ainsi, nous avons une seule équation à résoudre

$$l_0 + l_1f + l_2f^2 + l_3f^3 + l_4f^4 + l_5f_x + l_6f_{xx} + l_7f_xf + l_8f_{xx}f + l_9f_x^2 = 0. \quad (193)$$

**Réduction de l'équation (GLCM) en une équation différentielle ordinaire (EDO) elliptique du 1<sup>er</sup> type**

EDO (193) prendra la forme :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = l_4f^4 + l_2f^2 + l_0. \quad (194)$$

**Solution 1**

$$\begin{cases} l_0 = 0, \\ l_2 \succ 0, \\ l_4 \prec 0. \end{cases} \quad (195)$$

Dans ce cas,

$$f(x) = \sqrt{\frac{-l_2}{l_4}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{l_2}x\right). \quad (196)$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} A(x, t) \\ B(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1f(x) \\ V_0 + V_1f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \quad (197)$$

Les courbes de gauche et de droite de la figure 9 montrent respectivement le module en 3D et l'enveloppe en 2D à  $t = 0$ . Le soliton bright obtenu ici correspond à la solution de l'équation (197). Les branches de cette solution sont non nulles. Ainsi, des simulations numériques directes peuvent être effectuées (fig.12).

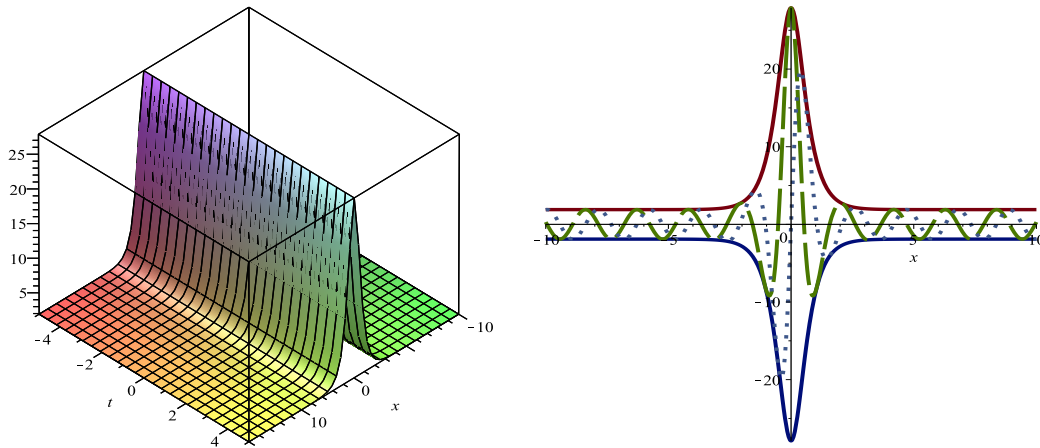


FIG. 9 – Solution correspondant à l'équation (197) avec les paramètres suivants :  $\omega = 0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $p = -0.5$ ,  $c = 0.5$ ,  $q = -0.001$ ,  $U_0 = 1.9$ ,  $V_0 = 1.9$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma_i = 1$  et  $\gamma_r = -1$ . La figure de gauche présente le module. La figure de droite donne la représentation en 2D de l'enveloppe (trait continu) à  $t = 0$ . Elle a la même légende que dans la Figure 4.

### Solution 2

$$\begin{cases} l_0 \neq 0, \\ l_2 < 0, \\ l_4 > 0. \end{cases} \quad (198)$$

Dans ce cas,

$$f(x) = \sqrt{\frac{-l_2}{l_4}} \tanh\left(\sqrt{-l_2}x\right). \quad (199)$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} A(x, t) \\ B(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \quad (200)$$

Le soliton kink correspondant à la solution (200) est représenté par la figure 10. En 3D, nous avons le module et en 2D l'enveloppe à  $t = 0$ . Les branches de cette solution sont nulles. Aucune simulation directe ne peut être effectuée dans ce cas. Cependant, la solution est mathématiquement acceptable.

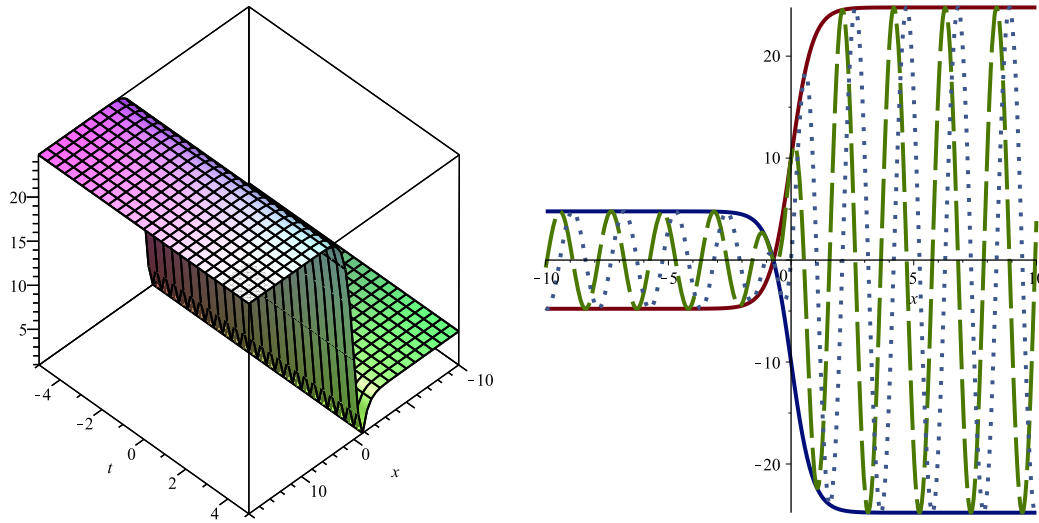


FIG. 10 – Solution tracée en utilisant l'équation (200). Ces courbes sont obtenues avec les paramètres suivants :  $\omega = -0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $p = -0.5$ ,  $c = -50$ ,  $q = 0.001$ ,  $U_0 = 10$ ,  $V_0 = 10$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma_i = 1$  et  $\gamma_r = -1$ . Le module est représenté sur la gauche alors que sur la droite nous décrivons la représentation en 2D de l'enveloppe à  $t = 0$  (même légende que dans la figure 4).

### Réduction de l'équation (GLCM) en une équation différentielle ordinaire (EDO) elliptique du 2<sup>nd</sup> type

EDO (193) prendra la forme :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = l_3 f^3 + l_2 f^2 + l_0. \quad (201)$$

si nous prenons,

$$\begin{cases} l_0 \neq 0, \\ l_2 > 0, \\ l_3 > 0. \end{cases} \quad (202)$$

Dans ce cas,

$$f(x) = \frac{l_2}{l_3} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{l_2}x\right). \quad (203)$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} A(x, t) \\ B(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \quad (204)$$

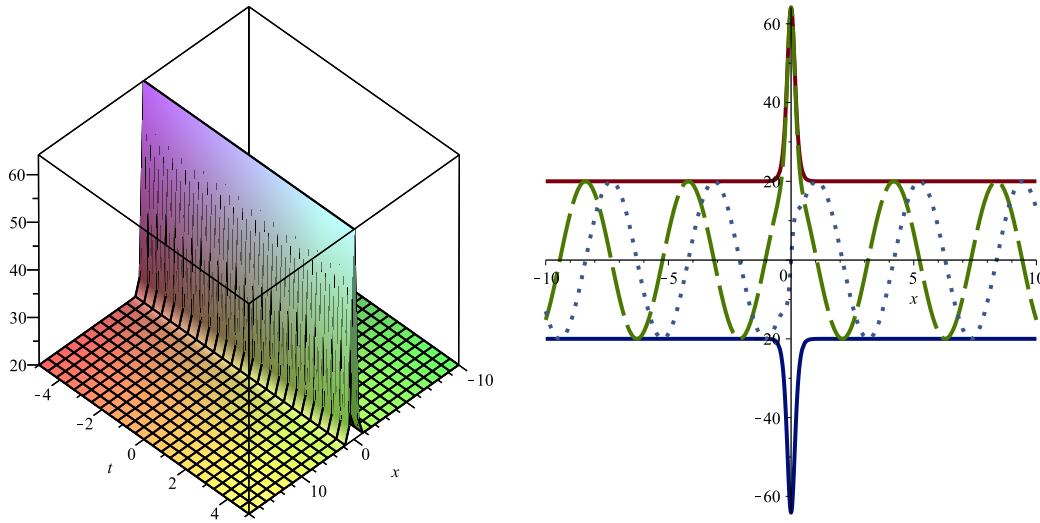


FIG. 11 – Représentation en 3D et en 2D de la solution de l'équation (204) avec les paramètres suivants :  $\omega = -0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $p = -0.5$ ,  $c = 15$ ,  $q = 0.001$ ,  $U_0 = 20$ ,  $V_0 = 20$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma_i = 1$  et  $\gamma_r = -1$ . En 3D, nous avons représenté le module. En 2D nous avons l'enveloppe (trait continu) à  $t = 0$ . Les traits interrompus vert correspondent à la partie imaginaire tandis que les pointillés bleu représentent la partie réelle.

La Figure 11 est du même type que celle de la figure 9. Il s'agit d'un soliton bright à branches infinies non nulles correspondant à la solution de l'équation (204). De même, une simulation directe sera réalisée (figure 13).

Sur la figure 12 et 13, des simulations directes sont effectuées afin de montrer la propagation de l'onde. Les courbes de gauche correspondent aux équations (197) et (204). Pour le cas de la figure 12, l'onde part d'une position initiale et diminue pendant un temps transitoire pour atteindre une position stable. La figure 13 nous montre que l'onde croît plutôt pour atteindre une position stable. Dans les courbes de droite nous simulons la propagation de deux ondes pour voir s'il peut avoir collision. Nous observons clairement dans les deux cas, qu'il ne peut avoir collision, et par conséquent ces ondes sont stable durant leur parcours.

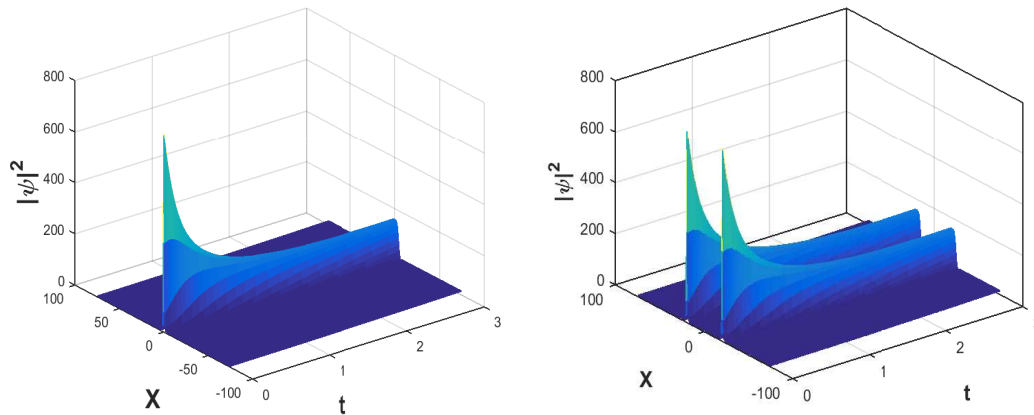


FIG. 12 – Courbes simulant la propagation de l’onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 9 et correspondent à l’équation (197). Ces courbes correspondent au déplacement de l’onde dans son temps transitoire.

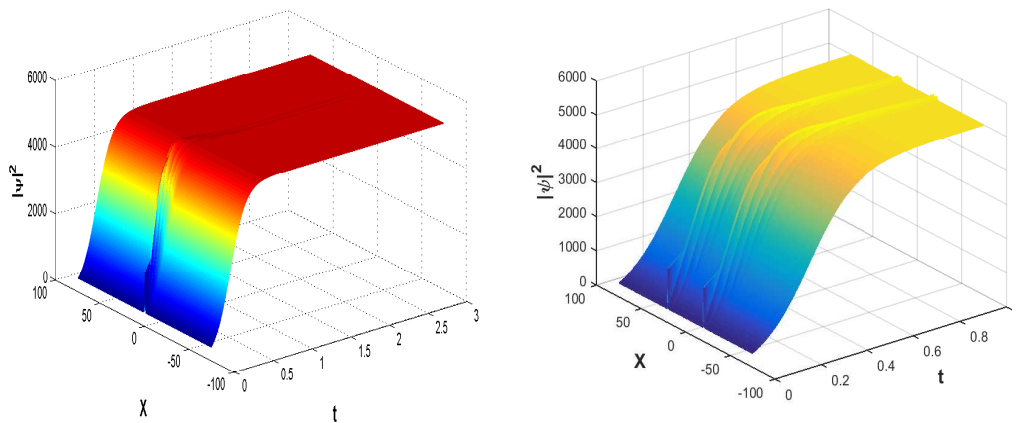


FIG. 13 – Courbes simulant la propagation de l’onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 12 et correspondent à l’équation (204). Ces courbes correspondent au déplacement de l’onde dans son temps transitoire.

### 3.3 Équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée avec terme de saturation : approche par troncature de Painlevé

Considérant la solution pulse, nous dérivons différentes classes de l’équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée (GLCM) et nous utilisons l’approche par troncature de Painlevé pour construire les solutions de type solitons. Alors nous

études les solutions de cette équation qui sont des solutions nouvelles de types solitons bright et soliton dark. Les simulations numériques ont été effectuées afin de montrer comment l'onde se propage. La forme des solutions peut être bien contrôlée en ajustant les paramètres du système.

Nous considérons l'équation de Ginzburg-Landau complexe modifiée unidimensionnelle qui s'écrit comme suit,

$$i\psi_t + P\psi_{xx} + Q|\psi|^2\psi = i\gamma\psi + C\frac{|\psi_x|^2}{1 + \delta|\psi|^2}\psi. \quad (205)$$

L'équation (205) peut se réduire à

$$(1 + \delta|\psi|^2) (i\psi_t + P\psi_{xx} + Q|\psi|^2\psi) = i\gamma\psi (1 + \delta|\psi|^2) + C|\psi_x|^2\psi. \quad (206)$$

Dans un premier temps nous recherchons la solution de l'équation (205) en prenant l'ansatz

$$\psi(x, t) = A(x, t) e^{i(kx - wt)} + B(x, t) e^{-i(kx - wt)}, \quad (207)$$

où  $k, v, w$  sont des constantes réelles.  $A, B$  sont des complexes fonctions de  $t$  et  $x$ . Insérons l'équation (207) dans l'équation (206) nous obtenons,

$$\begin{aligned} & iA_t + \omega A + P_r A_{xx} + 2iP_r k A_x - P_r k^2 A - 2P_m k A_x - iP_m k^2 A + Q_r A |A|^2 + 2Q_r A |B|^2 + iQ_m A |A|^2 \\ & + 2iQ_m A |B|^2 + i\delta_r |A|^2 A_t + \omega A \delta_r |A|^2 + P_r \delta_r A_{xx} |A|^2 + 2iP_r k A_x \delta_r |A|^2 - P_r k^2 A \delta_r |A|^2 \\ & - 2P_m k A_x \delta_r |A|^2 - iP_m k^2 A \delta_r |A|^2 + Q_r \delta_r A |A|^4 + 2Q_r \delta_r A |A|^2 |B|^2 + iQ_m \delta_r A |A|^4 \\ & + 2iQ_m \delta_r A |A|^2 |B|^2 + i\delta_r |B|^2 A_t + \omega A \delta_r |B|^2 + P_r \delta_r A_{xx} |B|^2 + 2iP_r k A_x \delta_r |B|^2 - P_r k^2 A \delta_r |B|^2 \\ & - 2P_m k A_x \delta_r |B|^2 - iP_m k^2 A \delta_r |B|^2 + Q_r \delta_r A |A|^2 |B|^2 + 2Q_r \delta_r A |B|^4 + iQ_m \delta_r A |A|^2 |B|^2 \\ & + 2iQ_m \delta_r A |B|^4 - \delta_i |A|^2 A_t + i\omega A \delta_m |A|^2 + iP_r \delta_m A_{xx} |A|^2 - 2P_r k A_x \delta_i |A|^2 - iP_r k^2 A \delta_m |A|^2 \\ & - 2iP_m k A_x \delta_m |A|^2 + P_m k^2 A \delta_m |A|^2 + iQ_r \delta_m A |A|^4 + 2iQ_r \delta_m A |A|^2 |B|^2 - Q_m \delta_m A |A|^4 \\ & - 2Q_r \delta_m A |A|^2 |B|^2 - \delta_m |B|^2 A_t - i\omega A \delta_m |B|^2 + iP_r \delta_m A_{xx} |B|^2 - 2P_r k A_x \delta_m |B|^2 - iP_r k^2 A \delta_m |B|^2 \\ & - 2iP_m k A_x \delta_m |B|^2 + P_m k^2 A \delta_m |B|^2 + iQ_r \delta_m A |A|^2 |B|^2 + 2iQ_r \delta_m A |B|^4 - Q_m \delta_m A |A|^2 |B|^2 \\ & - 2iQ_m \delta_m A |B|^4 + iP_m A_{xx} + i\delta_r P_m A_{xx} |A|^2 + iP_m \delta_r A_{xx} |B|^2 - \delta_m P_i A_{xx} |A|^2 + P_m \delta_m A_{xx} |B|^2 \\ & = i\gamma_r A - \gamma_m A + i\gamma_r \delta_r A |A|^2 - \gamma_m \delta_r A |A|^2 + i\gamma_r \delta_r A |B|^2 - \gamma_m \delta_r A |B|^2 - \gamma_r \delta_m A |A|^2 \\ & - i\gamma_m \delta_m A |A|^2 - \gamma_r \delta_m A |B|^2 - i\gamma_m \delta_m A |B|^2 + C_r A |A_x|^2 + iC_r k |A|^2 A_x + iC_r k A^2 A_x^* - k^2 C_r A |A|^2 \\ & + C_r A |B_x|^2 - iC_r k A B^* B_x - iC_r k A B B_x^* - k^2 C_r A |B|^2 + iC_m A |A_x|^2 - C_m k A_x |A|^2 - C_m k A^2 A_x^* \\ & - iC_m k^2 A |A|^2 + iC_m A |B_x|^2 + C_m k A B^* B_x + C_m k A B B_x^* - iC_m k^2 A |B|^2. \end{aligned} \quad (208)$$



Pour la résolution de l'équation (208), nous considérons ;

$$\begin{aligned} A(x, t) &= a(x) e^{i(\varphi_1(x) - \omega_1 t)}, \\ B(x, t) &= b(x) e^{i(\varphi_2(x) - \omega_2 t)}. \end{aligned} \tag{209}$$

Pour simplifier la résolution de l'équation (208), nous introduisons la relation (209) dans l'équation (208)

**□ Résolution de l'équation en utilisant l'approche par troncature de Painlevé**

Les solutions de l'équation (208), peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= H_1 \int_0^x \frac{dx'}{a^2(x')}, \\ \varphi_2 &= H_2 \int_0^x \frac{dx'}{b^2(x')}. \end{aligned} \tag{210}$$

et,

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \frac{H_1}{a^2}, \\ \varphi_2' &= \frac{H_2}{b^2}. \end{aligned} \tag{211}$$

Nous allons nous intéresser aux solutions qui respectent les conditions suivantes :

$$\varphi_j = 0 \Rightarrow H_j = 0, \tag{212}$$

avec

$$(j=1, 2).$$

L'équation (208) peut être séparée en deux parties : la partie réelle et la partie imaginaire. Nous avons donc un système de deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a\omega_1 + \omega a + P_r a_{xx} - P_r k^2 a_{xx} - 2P_m k a_x + Q_r a^3 + 2Q_r a b^2 + \delta_r a^3 \omega_1 \\
 + \omega \delta_r a^3 + P_r \delta_r a^2 a_{xx} \\
 - P_r k^2 \delta_r a^3 \\
 - 2P_m k \delta_r a_x a^2 + Q_r \delta_r a^5 + 3Q_r \delta_r a^3 b^2 + \delta_r \omega_1 b^2 a + \omega \delta_r a b^2 + P_r \delta_r a_{xx} b^2 \\
 - P_r k^2 \delta_r a b^2 - 2P_m k \delta_r a_x b^2 \\
 + 2Q_r \delta_r a b^4 - \delta_m a^3 \omega_1 - 2P_r k \delta_m a_x a^2 + P_m k^2 \delta_m a^3 - Q_m \delta_m a^5 - 2Q_r \delta_m a^3 b^2 \\
 - \delta_m \omega_1 b^2 a - 2P_r k \delta_m a_x b^2 \\
 + P_m k^2 \delta_m a b^2 - Q_m \delta_m a^3 b^2 - \delta_m P_m a_{xx} a^2 + P_m \delta_m a_{xx} b^2 = -\gamma_m a - \gamma_m \delta_r a^3 \\
 - \gamma_m \delta_m a b^2 - \gamma_r \delta_m a^3 - \gamma_r \delta_m a b^2 \\
 - C_r a a_x^2 - C_r k^2 a^3 + C_r a b_x^2 - C_r k^2 a b^2 - 2C_m k a_x a^2 + 2C_m k a b b_x \\
 a_t + 2P_r k a_x - P_m k^2 a + Q_m a^3 + 2Q_m a b^2 + \delta_r a^2 a_t + 2P_r k \delta_r a_x a^2 - P_m k^2 \delta_r a^3 \\
 + Q_m \delta_r a^5 \\
 + 3Q_m \delta_r a^3 b^2 \\
 + 2P_r k \delta_r a_x b^2 - P_m k^2 a \delta_r b^2 + 2Q_m \delta_r a b^4 - \delta_m a^2 a_t + \omega \delta_m a^3 + P_r \delta_m a_{xx} a^2 \\
 - P_r k^2 \delta_m a^3 - 2P_i k \delta_m a_x a^2 \\
 + Q_r \delta_m a^5 + 3Q_r \delta_m a^3 b^2 - \delta_m b^2 a_t - \omega \delta_m a b^2 + P_r \delta_m a_{xx} b^2 - P_r k^2 a \delta_m b^2 \\
 - 2P_m k \delta_m a_x b^2 + 2Q_r \delta_m a b^4 \\
 - 2Q_m \delta_m a b^4 + P a_{xx} + P_m \delta_r a_{xx} a^2 + P_m \delta_r a_{xx} b^2 = \gamma_r a + \gamma_r \delta_r a^3 \\
 + \gamma_r \delta_r a b^2 - \gamma_m \delta_m a^3 - \gamma_m \delta_m a b^2 + C_r k a^2 a_x \\
 + 2C_r k a^2 a_x - 2C_r k a b b_x - C_m a a_x^2 - C_m k^2 a^3 + C_m a b_x^2 - C_m k^2 a b^2.
 \end{array} \right. \quad (213)$$

Nous adoptons l'approche par troncature de Painlevé :

$$\begin{aligned}
 a(x) &= U_0 + U_1 f(x), \\
 b(x) &= V_0 + V_1 f(x).
 \end{aligned} \quad (214)$$

Substituons l'équation (214) dans l'équation (213), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S_0 + S_1 f + S_2 f^2 + S_3 f^3 + S_4 f^4 + S_5 f^5 + S_6 f_x + S_7 f_{xx} + S_8 f_x f + S_9 f_{xx} f \\
 + S_{10} f_x f^2 + S_{11} f_{xx} f^2 + S_{12} f_x^2 + S_{13} f f_x^2 + S_{14} f^2 f_x^2 + S_{15} f_x f^3 + S_{16} f_x f^4 = 0, \\
 T_0 + T_1 f + T_2 f^2 + T_3 f^3 + T_4 f^4 + T_5 f^5 + T_6 f_x + T_7 f_{xx} + T_8 f_x f + T_9 f_{xx} f \\
 + T_{10} f_x f^2 + T_{11} f_{xx} f^2 + T_{12} f_x^2 + T_{13} f f_x^2 + T_{14} f^2 f_x^2 + T_{15} f_x f^3 + T_{16} f_x f^4 = 0.
 \end{array} \right. \quad (215)$$

Pour simplifier la résolution du système ci-dessus, on pose les relations de compatibilité suivantes

$$\begin{aligned}
 S_0 = T_0; S_1 = T_1; S_2 = T_2; S_3 = T_3; S_4 = T_4; S_5 = T_5; \\
 S_6 = T_6; S_7 = T_7; S_8 = T_8; S_9 = T_9; S_{10} = T_{10}; S_{11} = T_{11}; \\
 S_{12} = T_{12}; S_{13} = T_{13}; S_{14} = T_{14}; S_{15} = T_{15}; S_{16} = T_{16}.
 \end{aligned} \tag{216}$$

Ensuite nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_r = Q_m = q, \\ C_r = C_m = c, \\ P_r = P_m = p, \\ \delta_r = \delta_r = \delta, \\ -\gamma_r = \gamma_m. \end{array} \right. \tag{217}$$

Ainsi, nous n'avons qu'une seule équation à résoudre

$$\begin{aligned}
 S_0 + S_1 f + S_2 f^2 + S_3 f^3 + S_4 f^4 + S_5 f^5 + S_6 f_x + S_7 f_{xx} + S_8 f_x f + S_9 f_{xx} f \\
 + S_{10} f_x f^2 + S_{11} f_{xx} f^2 + S_{12} f_x^2 + S_{13} f f_x^2 + S_{14} f^2 f_x^2 + S_{15} f_x f^3 + S_{16} f_x f^4 = 0.
 \end{aligned} \tag{218}$$

**Réduction de l'équation (GLCM) en une équation différentielle ordinaire (EDO) elliptique du 1<sup>er</sup> type**

EDO (218) prendra la forme :

$$\left( \frac{df}{dx} \right)^2 = S_4 f^4 + S_2 f^2 + S_0. \tag{219}$$

Si on prend,

**Solution 1**

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = 0, \\ S_2 \succ 0, \\ S_4 \succ 0. \end{array} \right. \tag{220}$$

Dans ce cas,

$$f(x) = \sqrt{\frac{S_2}{S_4}} \operatorname{sech}(\sqrt{S_2} x). \tag{221}$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} A(x, t) \\ B(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \tag{222}$$

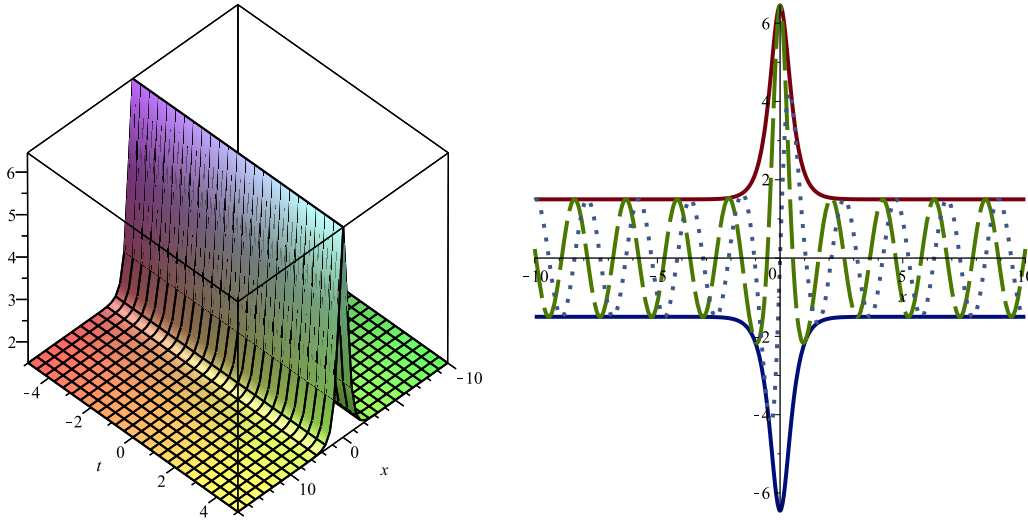


FIG. 14 – Solution correspondant à l'équation (222) avec les paramètres suivants :  $\gamma_m = 0.001$ ,  $\gamma_r = -0.001$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $U_0 = 1.5$ ,  $V_0 = 1.5$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$  et  $k = 0.3$ . Le module est représenté sur la gauche alors que sur la droite nous décrivons la représentation en 2D de l'enveloppe à  $t = 0$ . Les traits interrompus vert correspondent à la partie imaginaire tandis que les pointillés bleu représentent la partie réelle.

Les figures de gauche et de droite de la figure 14 montrent respectivement le module en 3D et l'enveloppe en 2D à  $t = 0$ . Le soliton bright obtenu ici correspond à la solution de l'équation (222). Les branches de cette solution sont non nulles. Ainsi, des simulations numériques directes peuvent être effectuées (fig.17).

### Solution 2

$$\begin{cases} S_0 \neq 0, \\ S_2 > 0, \\ S_4 > 0. \end{cases} \quad (223)$$

Dans ce cas,

$$f(x) = \sqrt{\frac{S_2}{S_4}} \tanh(\sqrt{S_2}x). \quad (224)$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} A(x, t) \\ B(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \quad (225)$$

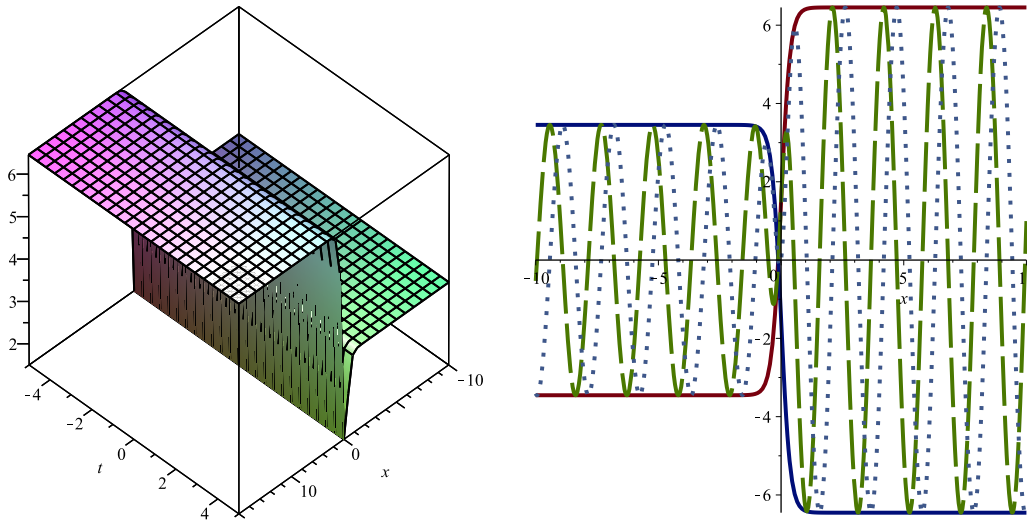


FIG. 15 – Solution correspondant à l'équation (225) avec les paramètres suivants :  $\gamma_m = 0.001$ ,  $\gamma_r = -0.001$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $U_0 = 1.5$ ,  $V_0 = 1.5$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$  et  $k = 0.3$ . Même légende que dans la figure 14.

Le soliton kink correspondant à la solution (225) est représenté par la figure 15. En 3D, nous avons le module et en 2D l'enveloppe à  $t = 0$ .

**Réduction de l'équation (GLCM) en une équation différentielle ordinaire (EDO) elliptique du 2<sup>nd</sup> type**

EDO (218) prendra la forme :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = S_3 f^3 + S_2 f^2 + S_0. \quad (226)$$

Si nous prenons,

$$\begin{cases} S_0 \neq 0, \\ S_2 > 0, \\ S_3 > 0. \end{cases} \quad (227)$$

Dans ce cas,

$$f(x) = \frac{S_2}{S_3} \operatorname{sech}^2(\sqrt{S_2}x). \quad (228)$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} A(x, t) \\ B(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \quad (229)$$

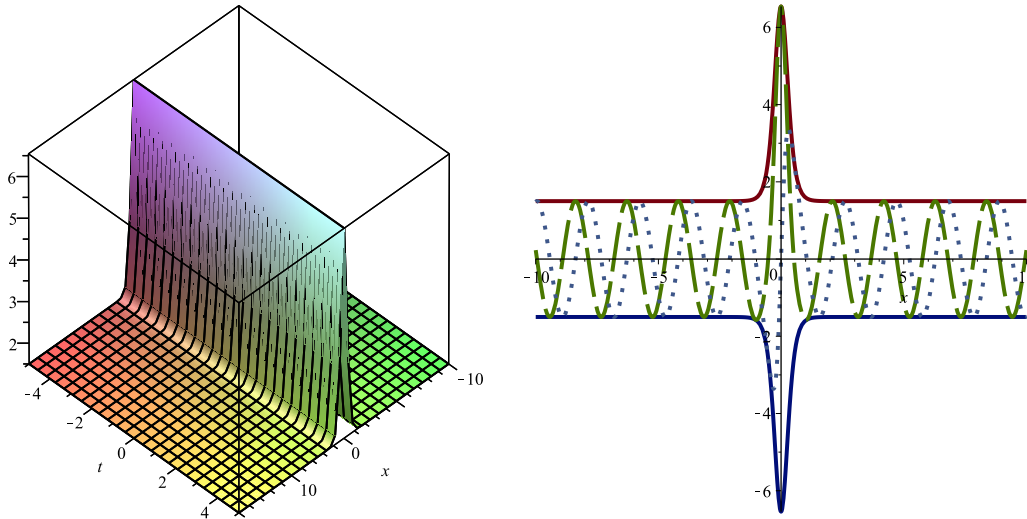


FIG. 16 – Solution correspondant à l'équation (228) avec les paramètres suivant :  $\gamma_m = 0.001$ ,  $\gamma_r = -0.001$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $U_0 = 1.5$ ,  $V_0 = 1.5$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$  et  $k = 0.3$ . Même légende que dans la figure 14.

Les courbes de gauche et de droite de la figure 16 montrent respectivement le module en 3D et l'enveloppe en 2D à  $t = 0$ . Le soliton bright obtenu ici correspond à la solution (228). Les branches de cette solution sont non nulles. Ainsi, des simulations numériques directes peuvent être effectuées (fig.18).

Sur la figure 17, nous pouvons apercevoir sur la courbe de gauche la propagation de l'onde en 3D. tandis que sur la courbe de droite nous montrons la collision de deux ondes. Cette onde entre en collision et en ressort sans être déformée : ce qui est caractéristique des ondes solitaires. Ces figure correspondent à la solution (222).

En revanche, la figure 18 correspond à l'équation (229). la courbe de gauche nous montre que cette solution part d'une onde solitaire unique, pour donner deux trains d'ondes solitaires. La collision de ces deux trains d'ondes solitaires visualisée à travers la courbe de droite, nous donne encore un train d'onde solitaire.

Nous venons d'appliquer quatre méthodes, à savoir la méthode alternative d'expansion ( $G'/G$ ), la méthode de la fonction tanh, la méthode de la fonction sech et l'approche par troncature de Painlevé pour trouver des solutions exacte de l'équation GLCM. Les solutions obtenues par les méthodes sus-citées, sont les solitons kink, les solitons dark et les solitons bright. Nous observons que nos solutions sont nouvelles, notamment à branches infinies non nulles, ce qui convient bien avec

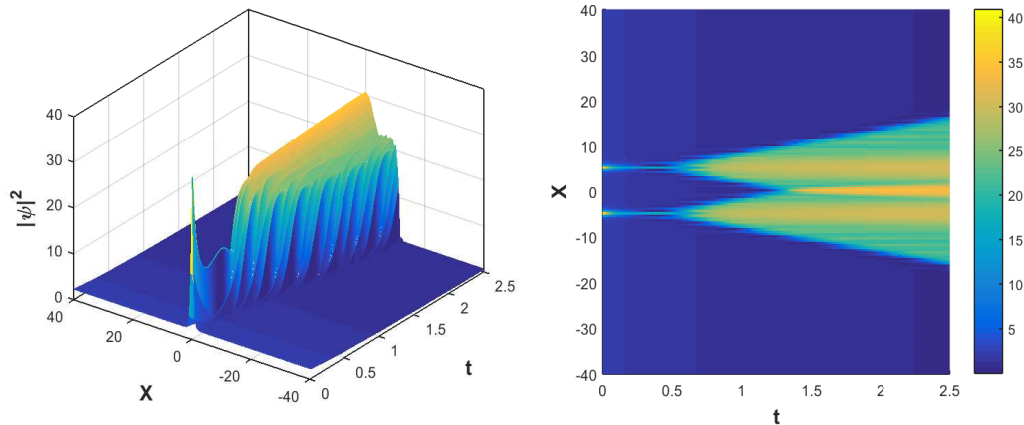


FIG. 17 – Courbes simulant la propagation de l’onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 14. La courbe de gauche qui correspond à la solution (222) est la représentation en 3D. La courbe de droite présente la collision de deux ondes solitaires.

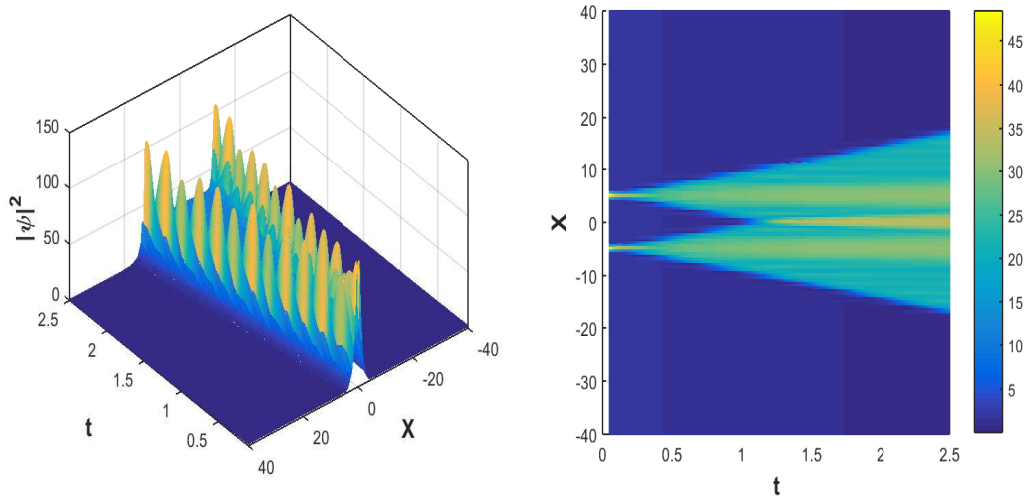


FIG. 18 – Courbes simulant la propagation de l’onde. Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres que dans la figure 16. La courbe de gauche qui correspond à la solution (229) est la représentation en 3D. La courbe de droite présente la collision de trains d’ondes solitaires.

le terme de renormalisation de l’équation (142) qui est  $\frac{|\psi_x|^2}{|\psi|^2} \psi$ . Les simulations numériques ont été réalisées pour montrer comment l’onde se propage dans le modèle étudié (voir les figures 8, 12 et 16). Cette équation a une large gamme d’applications, comme par exemple, les transmissions de phase dans les systèmes non équilibrés, la convection de Benard, l’écoulement de Taylor-Couette, l’écoulement de Poiseuille

dans les systèmes fluides et les ondes dissipatives dérivant du plasma, pour ne citer que ceux là [141].

### 3.4 Équation de Schrödinger non linéaire d'ordre supérieur

Dans cette partie, nous utilisons les paramètres non linéaires arbitraires et la méthode de la fonction exponentielle rationnelle pour construire beaucoup de nouvelles solutions exactes de l'équation de Schrödinger non linéaire d'ordre supérieur [153, 154]. Les solutions obtenues par les méthodes citées ci-dessus sont des solutions périodiques généralisées. La forme des solutions peut être bien contrôlée en ajustant les paramètres du système. Les solutions de type solitons optiques obtenues peuvent être utilisées pour transporter des informations dans le domaine des télécommunications. Il vient aussi de ce travail que le comportement de cette équation SNLOS peut être facilement étudié au moyen des portraits de phase [155].

#### 3.4.1 Portrait de phase du modèle

Nous considérons l'équation SNLOS unidimensionnelle suivante,

$$E_z = i(\alpha_1 E_{tt} + \alpha_2 |E|^2 E) + \varepsilon[\alpha_3 E_{ttt} + \alpha_4 (|E|^2 E)_t + \alpha_5 E(|E|^2)_t]. \quad (230)$$

Nous supposons que la solution est donnée par l'expression suivante

$$E(z, t) = A(\xi)e^{i\theta}, \quad (231)$$

où  $\xi = \delta t + uz$  et  $\theta = \beta t + rz$ ;  $A(\xi)$  est une fonction réelle qui représente l'amplitude.  $\delta$ ,  $u$ ,  $\beta$  et  $r$  sont des paramètres réels. Substituons l'équation (231) dans l'équation (230) et séparons partie imaginaire et partie réelle, nous obtenons

$$Im : -(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)A^3 + (r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)A - (\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)A'' = 0, \quad (232)$$

$$Re : (u + 2\alpha_1\beta\delta + 3\alpha_3\varepsilon\beta^2\delta)A' - (3\varepsilon\alpha_4\delta + 2\varepsilon\alpha_5\delta)A^2A' - \varepsilon\alpha_3\delta^3A''' = 0. \quad (233)$$



Il est possible d'intégrer l'équation (233) parce qu'elle a seulement une dérivée du premier et du troisième ordre. Nous avons donc

$$-\frac{u + 2\alpha_1\beta\delta + 3\alpha_3\varepsilon\beta^2\delta}{\varepsilon\alpha_3\delta^3}A + \frac{\alpha_4 + (2/3)\alpha_5}{\alpha_3\delta^2}A^3 + A'' = 0. \quad (234)$$

En comparant les équations (234) et (232) les paramètres  $\beta$  et  $r$  peuvent être évalués sous la forme :

$$\beta = -\frac{3\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_5 - 3\alpha_2\alpha_3}{6\varepsilon\alpha_3(\alpha_4 + \alpha_5)}, \quad (235)$$

et

$$r = -\frac{8\beta^3\delta\varepsilon^2\alpha_3^2 + 8\beta^2\delta\varepsilon\alpha_1\alpha_3 + 2\beta\delta\alpha_1^2 + 3\beta\varepsilon u\alpha_3 + u\alpha_1}{\delta\varepsilon\alpha_3}. \quad (236)$$

Donc, les équations (232) et (234) ont une forme similaire, nous pouvons nous concentrer sur l'équation (232) à partir de laquelle la première intégrale est obtenue en multipliant  $A'$  et intégrant le résultat, nous avons l'équation :

$$A'^2 - \frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}A^2 + \frac{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}{2(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)}A^4 = 2C, \quad (237)$$

où  $C$  est la constante d'intégration. Mentionons aussi que l'équation (237) peut être dérivée à partir de l'auxiliaire d'Hamilton  $\tilde{H}$  et le Lagrangien  $\tilde{L}$  défini par

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}m(A)[A'^2 + U(A)] \quad (238)$$

et

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m(A)[A'^2 - U(A)]. \quad (239)$$

Cet hamiltonien peut être considéré comme l'énergie d'une particule de masse effective  $m(A) = 1$  se déplaçant dans un potentiel effectif

$$U(A) = -\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}A^2 + \frac{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}{2(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)}A^4 - 2C. \quad (240)$$

Il est évident que l'équation (232) peut être transformée dans le système dynamique autonome équivalent suivant :

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\xi} = A' \\ \frac{dA'}{d\xi} = \left[ -\frac{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}A^2 + \frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2} \right] A, \end{cases} \quad (241)$$

où les solutions sont les points fixes du système. Le comportement de ce système

peut être facilement étudié au moyen du plan de phase. La représentation de la courbe qui est le meilleur outil pour observer l'évolution de la variable  $A$ . Le nombre de points d'équilibre, et par conséquent la dynamique de ce système dépend du signe de la quantité

$$F_0 = \frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}, \quad (242)$$

avec  $\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2 \neq 0$ .

Par exemple, si  $F_0 > 0$ , le système (241) admet trois points d'équilibre :  $(0, 0)$  et  $(0, F_{eq})$ , avec

$$F_{eq} = \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}}. \quad (243)$$

Toutefois, lorsque  $F_0 < 0$ , le système admet seulement le point d'équilibre  $(0, 0)$ . Par l'analyse qualitative, nous obtenons les différents portraits de phase topologiques illustrés à la Fig. 19 et les potentiels effectifs correspondant dans la Fig. 20. Nous observons qu'en modifiant les valeurs des constantes  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ), le comportement du système étudié change et par conséquent, de nouvelles solutions sont obtenues.

### 3.4.2 Solutions exactes

#### Solutions d'ondes cnoïdales et hyperboliques

Dans cette partie, nous discuterons de la construction de certaines solutions périodiques physiquement intéressante. Ces solutions dépendront des valeurs de la constante  $C$ .

1<sup>er</sup> cas :

Nous fixons  $C = -\frac{(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)^2 m^2}{(\alpha_1\delta^2+3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(\varepsilon\alpha_4\beta+\alpha_2)(1+m^2)^2}$  et nous obtenons la solution de l'équation (237) comme

$$A(\xi) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)m^2}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(1 + m^2)}} sn \left[ \sqrt{-\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(1 + m^2)}} \xi, m \right], \quad (244)$$

et la solution de l'équation (230) est

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)m^2}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(1 + m^2)}} sn \left[ \sqrt{-\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(1 + m^2)}} (\delta t + uz), m \right] e^{i(Bt + rz)}. \quad (245)$$

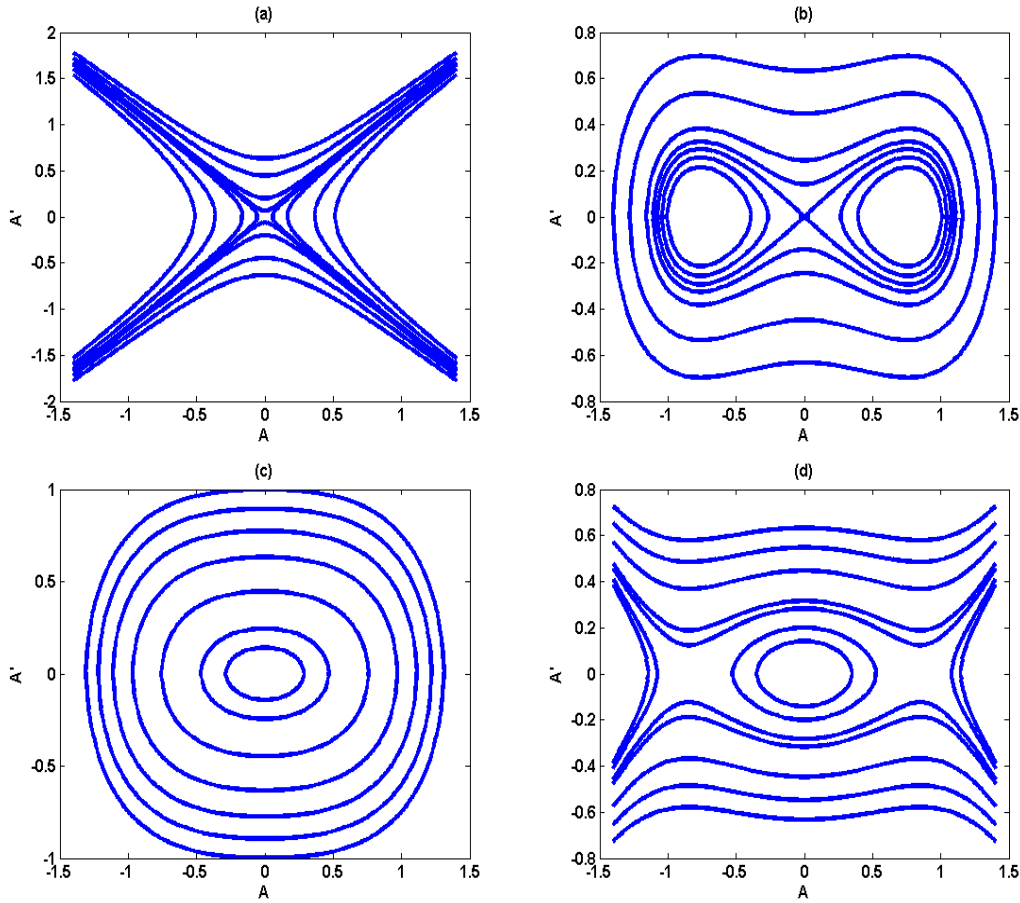


FIG. 19 – *Différents portraits de phase de ESNLOS (230). La courbe (a) est obtenue pour  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -2.0$ ,  $\alpha_3 = 3.0$ ,  $\alpha_4 = 1.0$ ,  $\alpha_5 = 0.6$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ ; La courbe (b) est obtenue pour  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.5$ ,  $\alpha_3 = 2.0$ ,  $\alpha_4 = 0.1$ ,  $\alpha_5 = 6.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ ; La courbe (c) est obtenue pour  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = -6.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ ; La courbe (d) est obtenue pour  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = 6.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ .*

Maintenant, si  $m \rightarrow 1$ ,  $sn(x, 1) = \tanh(x)$ , la solution précédente prend la forme suivante :

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{r + \alpha_1 \beta^2 + \varepsilon \alpha_3 \beta^3}{2(\varepsilon \alpha_4 \beta + \alpha_2)}} \tanh \left[ \sqrt{-\frac{r + \alpha_1 \beta^2 + \varepsilon \alpha_3 \beta^3}{2(\alpha_1 \delta^2 + 3\alpha_3 \varepsilon \beta \delta^2)}} (\delta t + uz) \right] e^{i(\beta t + rz)}. \quad (246)$$

2<sup>e</sup> cas :

Nous fixons  $C = -\frac{(r + \alpha_1 \beta^2 + \varepsilon \alpha_3 \beta^3)^2 (1 - m^2)}{(\alpha_1 \delta^2 + 3\alpha_3 \varepsilon \beta \delta^2)(\varepsilon \alpha_4 \beta + \alpha_2)(2 - m^2)^2}$  et nous obtenons la solution de l'équation (237) comme

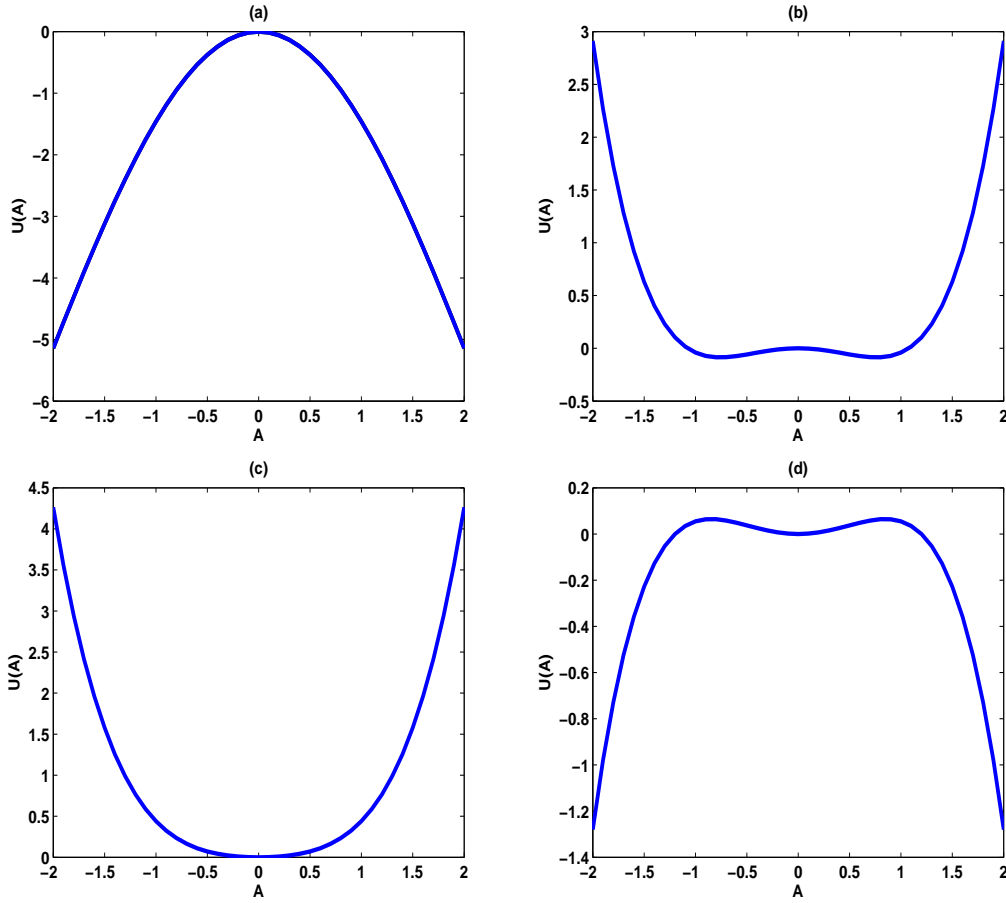


FIG. 20 – Le potentiel effectif  $U(A)$  de l'équation SNLOS (232). Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres comme dans la Figure 19. La courbe (a) correspond au portrait de phase de la Figure 19(a); La courbe (b) correspond au portrait de phase de la Figure 19(b); La courbe (c) correspond au portrait de phase de la Figure 19(c); La courbe (d) correspond au portrait de phase de la Figure 19(d).

$$A(\xi) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2 - m^2)}} dn \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(2 - m^2)}} \xi, m \right], \quad (247)$$

et la solution de (230) est

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2 - m^2)}} dn \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(2 - m^2)}} (\delta t + uz), m \right] e^{i(\beta t + rz)}. \quad (248)$$

Maintenant, si  $m \rightarrow 1$ ,  $dn(x, 1) = \operatorname{sech}(x)$  et la solution précédente prend la

forme suivante :

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}} (\delta t + uz) \right] e^{i(\beta t + rz)}. \quad (249)$$

3<sup>e</sup> cas :

Nous fixons  $C = -\frac{(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)^2(m^2 - 1)m^2}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2m^2 - 1)^2}$  et nous obtenons la solution de l'équation (237) comme

$$A(\xi) = \sqrt{\frac{2m^2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2m^2 - 1)}} \operatorname{cn} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(2m^2 - 1)}} \xi, m \right], \quad (250)$$

et la solution de l'équation (230) est

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2m^2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2m^2 - 1)}} \operatorname{cn} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(2m^2 - 1)}} (\delta t + uz), m \right] e^{i(\beta t + rz)}. \quad (251)$$

Maintenant, si  $m \rightarrow 1$ ,  $\operatorname{cn}(x, 1) = \operatorname{sech}(x)$  et la solution précédente prend la forme suivante :

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}} (\delta t + uz) \right] e^{i(\beta t + rz)}. \quad (252)$$

### La méthode de la fonction exponentielle rationnelle

Dans cette partie, nous présentons d'abord brièvement les différentes étapes de la méthode de la fonction exponentielle rationnelle [156, 157] :

1- Supposons que l'équation aux dérivées partielles non linéaire est donnée par

$$Q(v, v_x, v_{xx}, v_t, v_{tt}, v_{xt}, vv_x \dots) = 0. \quad (253)$$

2- Pour résoudre cette équation, on réduit les différentes variables en une seule. Ainsi,

$$v(x, t) = v(\xi). \quad (254)$$

et donc, l'équation (253) nous donne une équation différentielle ordinaire (EDO) de la forme

$$Q(v, v', v'', vv' \dots) = 0, \quad (255)$$

où ' désigne la dérivation par rapport à  $\xi$ . Si c'est possible, l'équation (255) peut être intégrée terme par terme, une ou plusieurs fois.

3- Selon la méthode actuelle, la solution de l'équation (255) est exprimée comme suit :

$$v(\xi) = \sum_{i=0}^M \frac{\beta_i}{(1 + e^{\mu\xi})^i}, \quad (256)$$

où  $\mu$  et  $\beta_i$  sont des constantes inconnues que nous déterminerons plus tard. Le paramètre  $M$  est déterminé en égalant le terme linéaire le plus élevé et le terme non linéaire le plus grand de l'équation ci-dessus. Substituons l'équation (256) dans l'équation (255), nous regroupons tous les coefficients des puissances de  $e^{\mu\xi}$  dans l'équation résultante où ces coefficients doivent disparaître. Cela conduit à un système d'équation algébrique impliquant les paramètres  $\mu$  et  $\beta_i$ . En résolvant ce système d'équation avec maple, nous obtenons les solutions exactes de l'équation (253).

Maintenant, considérons l'équation (237), le processus d'égalité donne  $M = 1$  et la solution suivante est considérée comme

$$A(\xi) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1 + e^{\mu\xi}}. \quad (257)$$

Substituons (257) dans (237) et regroupons tous les coefficients de  $(e^{\mu\xi})^j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ) et posons les égale à zéro, nous avons les équations algébriques suivantes :

$$(e^{\mu\xi})^4 : -2\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 + \epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 + \alpha_2\beta_0^4 - 4C\delta^2\alpha_1 - 12C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta - 2r\beta_0^2 - 2\alpha_1\beta^2\beta_0^2 = 0 \quad (258)$$

$$(e^{\mu\xi})^3 : \begin{aligned} & -16C\delta^2\alpha_1 - 8r\beta_0^2 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^3\beta_1 + 4\alpha_2\beta_0^4 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 - 8\alpha_1\beta^2\beta_0^2 - 4r\beta_0^2 \\ & -48C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta - 4\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0\beta_1 - 8\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 - 4\alpha_1\beta^2\beta_0\beta_1 + 4\alpha_2\beta_0^3\beta_1 = 0, \end{aligned} \quad (259)$$

$$(e^{\mu\xi})^2 : \begin{aligned} & 6\alpha_2\beta_0^4 - 72C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta - 12r\beta_0\beta_1 - 12r\beta_0^2 - 24C\delta^2\alpha_1 + 6\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 + 2\beta_1^2\mu^2\delta^2\alpha_3\epsilon\beta \\ & -12\alpha_1\beta^2\beta_0^2 - 2r\beta_1^2 + 12\alpha_2\beta_0^3\beta_1 - 12\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 - 12\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0\beta_1 + 6\alpha_2\beta_0^2\beta_1^2 \\ & -2\alpha_1\beta^2\beta_1^2 + 12\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^3\beta_1 + 6\beta_1^2\mu^2\delta^2\alpha_3\epsilon\beta - 2\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_1^2 \\ & +6\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^2\beta_1^2 - 12\alpha_1\beta^2\beta_0\beta_1 = 0, \end{aligned} \quad (260)$$

$$(e^{\mu\xi})^1 : \quad 12\alpha_2\beta_0^3\beta_1 + 12\alpha_2\beta_0^2\beta_1^2 - 12\alpha_1\beta^2\beta_0\beta_1 - 8r\beta_0^2 - 4\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_1^2 + 12\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^3\beta_1^3 \\ + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 - 12r\beta_0\beta_1 - 16C\delta^2\alpha_1 - 4r\beta_1^2 + 12\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^3\beta_1 - 48C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta \\ + 4\alpha_2\beta_0\beta_1^3 - 8\alpha_1\beta^2\beta_0^2 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0\beta_1^3 - 4\alpha_1\beta^2\beta_1^2 - 8\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 \\ - 12\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0\beta_1 + 4\alpha_2\beta_0^4 = 0,$$

$$(e^{\mu\xi})^0 : \quad \epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 - 2\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 + 4\alpha_2\beta_0^3\beta_1 - 4\alpha_1\beta^2\beta_0\beta_1 - 2\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta^2\beta_1^2 \\ - 4r\beta_0\beta_1 - 2r\beta_1^2 + 6\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^2\beta_1^2 + \alpha_2\beta_1^4 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0\beta_1^3 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^3\beta_1 \\ + 6\alpha_2\beta_0^2\beta_1^2 + \epsilon\alpha_4\beta\beta_1^4 - 2r\beta_0^2 - 2\alpha_1\beta^2\beta_0^2 - 4\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0\beta_1 - 12C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta \\ + 4\alpha_2\beta_0\beta_1^3 + \alpha_2\beta_0^4 - 4C\delta^2\alpha_1 = 0.$$

En résolvant les équations algébriques (258)-(262), nous avons les groupes de coefficients suivants :

**Groupe1 :**

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \epsilon\alpha_3\beta^3}{\epsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}}, \beta_1 = -2\sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \epsilon\alpha_3\beta^3}{\epsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}}, C = -\frac{1}{4}\frac{(r + \alpha_1\beta^2 + \epsilon\alpha_3\beta^3)^2}{\delta^2(\epsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(\alpha_1 + 3\alpha_3\epsilon\beta)}, \\ \mu = \eta\sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \epsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\epsilon\beta)}}$$

**Groupe2 :**

$$\beta_0 = -\sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \epsilon\alpha_3\beta^3}{\epsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}}, \beta_1 = 2\sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \epsilon\alpha_3\beta^3}{\epsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}}, C = -\frac{1}{4}\frac{(r + \alpha_1\beta^2 + \epsilon\alpha_3\beta^3)^2}{\delta^2(\epsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(\alpha_1 + 3\alpha_3\epsilon\beta)}, \\ \mu = \eta\sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \epsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\epsilon\beta)}}$$

Dans cette sous-section, les solutions de l'équation SNLOS dépendent de la constante  $\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \epsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1 + 3\alpha_3\epsilon\beta}$ .

1<sup>er</sup> cas : Si  $\frac{r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta} > 0$ , nous avons comme solutions

$$E(z, t) = \sqrt{K} \left[ 1 - \frac{2}{1 + \cosh\left(\sqrt{\frac{2(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right) + \eta \sinh\left(\sqrt{\frac{2(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right)} \right] e^{i(\beta t+rz)} \quad (263)$$

pour le groupe 1.

$$E(z, t) = -\sqrt{K} \left[ 1 - \frac{2}{1 + \cosh\left(\sqrt{\frac{2(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right) + \eta \sinh\left(\sqrt{\frac{2(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right)} \right] e^{i(\beta t+rz)} \quad (264)$$

pour le groupe 2. Avec  $K = \frac{r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta+\alpha_2}$

2<sup>e</sup> cas : Si  $\frac{r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta} < 0$ , nous avons  $\mu = i\eta\sqrt{-\frac{2(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta)}}$  avec  $-\frac{r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta} > 0$  et nous avons comme solutions

$$E(z, t) = \sqrt{K} \left[ 1 - \frac{2}{1 + \cos\left(\sqrt{-\frac{2(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right) + i\eta \sin\left(\sqrt{-\frac{2(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right)} \right] e^{i(\beta t+rz)} \quad (265)$$

pour le groupe 1.

$$E(z, t) = \sqrt{K} \left[ -1 + \frac{2}{1 + \cos\left(\sqrt{-\frac{2(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right) + i\eta \sin\left(\sqrt{-\frac{2(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1+3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right)} \right] e^{i(\beta t+rz)} \quad (266)$$

pour le groupe 2.

Pour toutes ces solutions,  $\xi = \delta t + uz$  et  $\eta = \pm 1$ .  $r$  et  $\beta$  sont données par l'équation (235) et l'équation (236) respectivement.  $\delta$  et  $u$  sont des constantes arbitraires.

### Représentations graphiques

Les résultats obtenus dans ce travail sont des solutions cnoïdales, des solutions kinks, des solutions pulses et des solutions trigonométriques. Ces solutions peuvent être utilisées pour le transport de l'information dans les fibres optiques. Nous avons tracé certaines solutions pour avoir une idée sur le mécanisme de l'équation originelle (230). Nous avons tracé spécifiquement les solutions (245), (248) et (251), ceci en prenant des valeurs appropriées des paramètres obtenus. Les repre-



sentations graphiques de ces solutions sont montrées à travers les figures 21, 22, et 23.

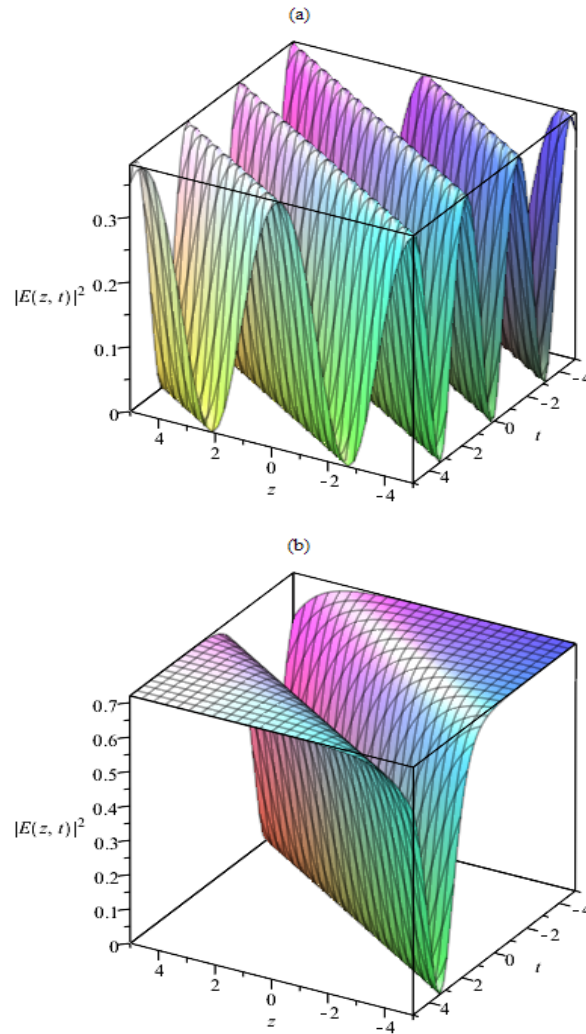


FIG. 21 – Solution correspondant à l'équation (245). Ces figures sont obtenues avec les paramètres suivants :  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = 6.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  et  $u = 3.0$ . La courbe (a) est tracé pour  $m = 0.6$  tandis que la courbe (b) est tracé pour  $m = 1.0$ .

En utilisant les paramètres arbitraires non linéaires et la méthode de la fonction exponentielle rationnelle, nous trouvons dans ce travail de nombreuses solutions exactes de l'équation SNLOS. Les solutions obtenues par les méthodes utilisées, sont les solitons cnoïdales, les solitons kinks, les solitons pulses et les solitons trigonométriques. En ajustant par exemple le module de certaines solutions obtenues ( $m = 0.6, 1$ ), la forme des solutions peut être bien contrôlées. Les solutions de type solitons optiques obtenues ici peuvent être utilisée pour le transport des

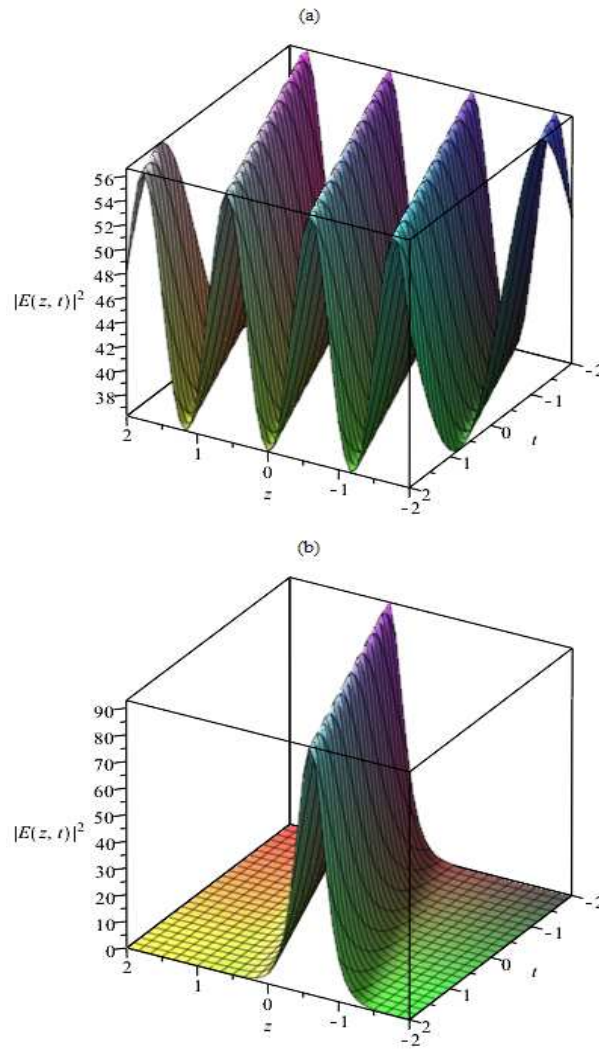


FIG. 22 – Solution correspondant à l'équation (248). Ces figures sont obtenues avec les paramètres suivants :  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 10.0$  et  $u = 3.0$ . La courbe (a) est tracé pour  $m = 0.6$  tandis que la courbe (b) est tracé pour  $m = 1.0$ .

informations dans le domaine des télécommunications et dans de nombreux autres domaines tels que les lignes de transmission électrique non linéaires ou les chaînes d'atomes non linéaires, etc. Il découle également de ce travail que le comportement de cette équation SNLOS peut être facilement étudié au moyen des portraits de phase qui est le meilleur outil pour prédire des solutions. Le comportement de ces portraits de phases est confirmé par les potentiels effectifs correspondants.

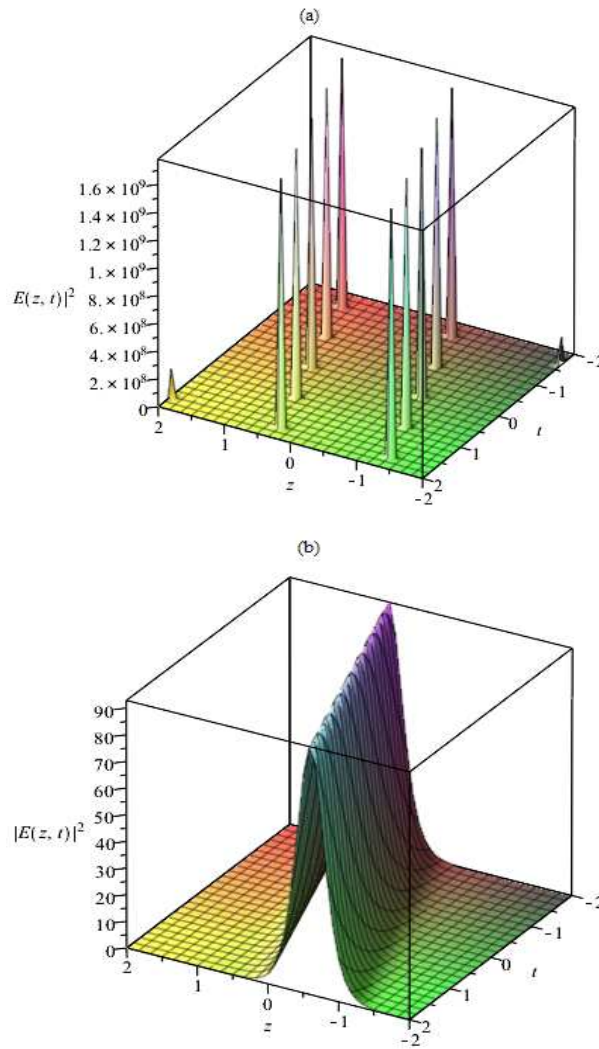


FIG. 23 – Solution correspondant à l'équation (251). Ces figures sont obtenues avec les mêmes paramètres comme dans la Figure 22. La courbe (a) est tracée pour  $m = 0.6$  tandis que la courbe (b) est tracée pour  $m = 1.0$ .

### 3.5 Ondes cnoïdales et solitaires d'une équation de Schrödinger non linéaire dans une fibre optique

Dans cette partie, nous présentons de nouvelles solutions analytiques exactes d'une équation de Schrödinger non linéaire cubique quintique en présence de quelques terme de perturbation. Cette équation décrit la dynamique de propagation des solitons dans une fibre optique. Plusieurs solutions sont trouvées sans appliquer les codes informatiques et en tenant compte de la constante d'intégration. Les solutions sont du type solitons bright, dark et cnoidal .

Ces solutions peuvent avoir des applications importantes dans les systèmes de télécommunications où les solitons sont utilisés pour codifier ou pour la transmission des données. La méthode utilisée ici est très efficace et puissante, et peut être appliquée à d'autres types d'équations non linéaire.

### 3.5.1 Présentation du modèle

Nous décrivons brièvement le modèle à étudier. Ce modèle est régi par l'équation de Schrödinger non linéaire (SNL) donnée par l'équation (267) comme suit :

$$i\psi_t + a_1\psi_{xx} + (a_3|\psi|^2 + a_5|\psi|^4)\psi - i\alpha\psi_x - i\beta(|\psi|^2\psi)_x = 0, \quad (267)$$

où  $a_1, a_3, a_5, \alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles liées respectivement à la dispersion de la vitesse de groupe, la nonlinearité cubique, la nonlinearité quintique, la dispersion intermodale et l'effet d'auto-atténuation. Maintenant, nous considérons que la fonction de champ  $\psi(x, t)$  de l'équation (267) peut être prise comme suit :

$$\psi(x, t) = A(\xi)e^{i\theta}, \quad \text{où } \theta = f(\xi) - \omega t \text{ et } \xi = kx - \lambda t. \quad (268)$$

Substituons l'équation (268) dans l'équation (267), et séparons partie réelle et partie imaginaire. Nous obtenons

$$[(\lambda + \alpha k)f' + \omega - a_1k^2f'^2]A + 3k\beta A^3f' + a_1k^2A'' + a_3A^3 + a_5A^5 = 0 \quad (269)$$

et

$$k^2a_1f''A + (2k^2a_1f' - \alpha k - \lambda)A' - 3k\beta A^2A' = 0. \quad (270)$$

Sous la contrainte

$$f' = \frac{\lambda + \alpha k}{2k^2a_1} + \frac{3\beta}{4ka_1}A^2, \quad (271)$$

l'équation (270) est satisfaite à l'identité. Introduisons l'équation (271) dans l'équation (269), nous obtenons

$$a_1 k^2 A'' + \left( \omega + \frac{(\lambda + \alpha k)^2}{4k^2 a_1} \right) A + \left( \frac{3\beta(\lambda + \alpha k)}{2ka_1} + a_3 \right) A^3 + \left( \frac{27\beta^2}{16a_1} + a_5 \right) A^5 = 0. \quad (272)$$

L'équation (272) est une équation différentielle elliptique décrivant l'évolution de l'onde dans la fibre optique. En ce qui suit, nous présentons de nouvelles solutions. Nous donnons aussi les conditions pour lesquelles les solutions solitons optiques existent.

### 3.5.2 Solutions exactes : Ondes Cnoïdales et solitaires

Afin d'obtenir les solutions exactes du modèle étudié, nous multiplions l'équation (272) par  $A'$  et intégrant avec le respect à  $\xi$ ; nous avons

$$(A')^2 = -\frac{1}{a_1 k^2} \left( \omega + \frac{(\lambda + \alpha k)^2}{4k^2 a_1} \right) A^2 - \frac{1}{2a_1 k^2} \left( \frac{3\beta(\lambda + \alpha k)}{2ka_1} + a_3 \right) A^4 - \frac{1}{3a_1 k^2} \left( \frac{27\beta^2}{16a_1} + a_5 \right) A^6 + C \quad (273)$$

où  $C$  est une constante d'intégration arbitraire. La solution de l'équation (273) peut être construite au moyen de certaines méthodes présentées ci-dessus. Cependant, nous pouvons obtenir la solution générale de cette équation en utilisant uniquement une résolution analytique.

Supposons

$$A(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y(\xi)}}, \quad (274)$$

l'équation (273) devient

$$(y')^2 = -2(Cy^3 - ay^2 - by - \sigma), \quad (275)$$

avec  $a = -\frac{2}{a_1 k^2} \left( \omega + \frac{(\lambda + \alpha k)^2}{4k^2 a_1} \right)$ ,  $b = -\frac{1}{a_1 k^2} \left( \frac{3\beta(\lambda + \alpha k)}{2ka_1} + a_3 \right)$  et  $\sigma = -\frac{2}{3a_1 k^2} \left( \frac{27\beta^2}{16a_1} + a_5 \right)$ .

1<sup>er</sup> cas :  $C = 0$

Quand  $C = 0$ ,  $a > 0$  et  $4a\sigma - b^2 > 0$ , nous avons l'intégrale suivante

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + by + \sigma}} = \sqrt{2}(\xi - \xi_0), \quad (276)$$

à partir de laquelle nous avons

$$\sinh^{-1} \left( \frac{2ay + b}{\sqrt{4a\sigma - b^2}} \right) = \sqrt{2}a(\xi - \xi_0). \quad (277)$$

l'équation (277) conduit à

$$y(\xi) = \frac{\sqrt{4a\sigma - b^2}}{2a} \sinh\left(\sqrt{2a}(\xi - \xi_0)\right) - \frac{b}{2a}. \quad (278)$$

En utilisant l'équation (274), nous avons

$$A(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{4a\sigma - b^2}}{2a} \sinh\left(\sqrt{2a}(\xi - \xi_0)\right) - \frac{b}{2a}}}, \quad (279)$$

et la solution du modèle étudié est

$$\psi(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{4a\sigma - b^2}}{2a} \sinh\left(\sqrt{2a}(\xi - \xi_0)\right) - \frac{b}{2a}}} e^{i(f(kx - \lambda t) - \omega t)}, \quad (280)$$

où  $f$  satisfait à l'équation (281) donnée ci-après

$$f(\xi) = \int \left[ \frac{\lambda + \alpha k}{2k^2 a_1} + \frac{3\beta}{4ka_1} \frac{1}{\frac{\sqrt{4a\sigma - b^2}}{2a} \sinh\left(\sqrt{2a}(\xi - \xi_0)\right) - \frac{b}{2a}} \right] d\xi. \quad (281)$$

2<sup>e</sup> cas :  $C \neq 0$   
 Considérons

$$F(y) = y^3 - \frac{a}{C}y^2 - \frac{b}{C}y - \frac{\sigma}{C}. \quad (282)$$

Pour rechercher les solutions exactes de l'équation (275), nous appliquons l'approche publiée dans [158]. Supposons que  $y_1, y_2$  et  $y_3$  sont de vraies racine de la solution algébrique  $F(y) = 0$  et vérifier la relation  $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ . Ainsi, nous avons

$$y^3 - \frac{a}{C}y^2 - \frac{b}{C}y - \frac{\sigma}{C} = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3). \quad (283)$$

De l'équation (283), nous trouvons que

$$y_1 y_2 y_3 = \frac{\sigma}{C}, \quad y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = -\frac{b}{C}, \quad y_1 + y_2 + y_3 = \frac{a}{C}. \quad (284)$$

L'équation (275) peut être transformé en

$$\frac{dy}{\sqrt{2(y_1 - y)(y - y_2)(y - y_3)}} = d\xi. \quad (285)$$

Nous fixons

$$y = y_1 - p(t)^2, \quad p(t) = \sqrt{y_1 - y_2}q(\xi), \quad S^2 = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3}. \quad (286)$$

En utilisant l'équation (286), nous pouvons réécrire l'équation (285) sous la forme

$$\int_0^{q(\xi)} \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - S^2\tau^2)}} = sn^{-1}(q, S) = \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0), \quad (287)$$

à partir de laquelle nous obtenons

$$q(\xi) = sn \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0), S^2 \right]. \quad (288)$$

Prennant en compte l'équation (286), nous avons

$$y(\xi) = y_1 - (y_1 - y_2)sn^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0), S^2 \right]. \quad (289)$$

Si nous considérons l'identité

$$sn^2(\xi, S^2) + cn^2(\xi, S^2) = 1, \quad (290)$$

L'équation (289) renvoie à

$$y(\xi) = y_2 + (y_1 - y_2)cn^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0), S^2 \right], \quad (291)$$

avec la période  $T$  donnée par

$$T = \sqrt{\frac{8}{y_1 - y_3}} \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - S^2\tau^2)}} = \sqrt{\frac{8}{y_1 - y_3}} K(S), \quad (292)$$

où  $K$  est l'intégrale elliptique complète du premier genre. En utilisant l'équation (274), nous avons

$$A(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y_2 + (y_1 - y_2)cn^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0), S^2 \right]}}, \quad (293)$$

et la solution du modèle étudié est

$$\psi(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y_2 + (y_1 - y_2)cn^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0), S^2 \right]}} e^{i(f(kx - \lambda t) - \omega t)}, \quad (294)$$

avec  $0 \leq S \leq 1$  et où  $f$  satisfait à l'équation (295) donnée en dessous

$$f(\xi) = \int \left[ \frac{\lambda + \alpha k}{2k^2 a_1} + \frac{3\beta}{4ka_1} \frac{1}{y_2 + (y_1 - y_2)cn^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0), S^2 \right]} \right] d\xi. \quad (295)$$

si  $S \rightarrow 1$ ,

$$y(\xi) = y_2 + (y_1 - y_2) \cosh^{-2} \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0) \right], \quad (296)$$

$$A(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y_2 + (y_1 - y_2) \cosh^{-2} \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0) \right]}}, \quad (297)$$

et la solution du modèle étudié est

$$\psi(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y_2 + (y_1 - y_2) \cosh^{-2} \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0) \right]}} e^{i(f(kx - \lambda t) - \omega t)}, \quad (298)$$

où  $f$  satisfait à l'équation (299) donnée en dessous

$$f(\xi) = \int \left[ \frac{\lambda + \alpha k}{2k^2 a_1} + \frac{3\beta}{4ka_1} \frac{1}{y_2 + (y_1 - y_2) \cosh^{-2} \left( \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}}(\xi - \xi_0) \right)} \right] d\xi. \quad (299)$$

Dans cette partie, nous avons étudié l'équation de Schrödinger non linéaire avec une nonlinéarité cubique-quintique en présence de quelques termes de perturbation. Nous avons trouvé les solutions générales de cette équation sans utiliser les codes informatiques. Comme solutions, nous avons obtenu les solutions de type soliton bright, soliton dark et



soliton cnoïdale. En observant ces solutions et celles obtenues en [159] par l'utilisation de la méthode expansive de l'équation auxiliaire ou dans [160] par l'utilisation de la méthode de la fonction  $\text{csch}$ , la méthode  $\text{tanh-coth}$  et la méthode de l'équation simple modifiée, nous remarquons que nos résultats sont de nouvelles solutions qui ne sont pas encore rapportées en littérature. Plus important encore, dans [160], les auteurs ont intégré l'équation (279) qui est identique à l'équation (272) avec la constance égale à zéro (ce qui n'est pas le cas ici). Cependant, cette constante d'intégration peut être utilisée pour trouver des solutions plus générales. Nous pensons alors que ces résultats aideront à la conduite des recherches futures dans divers domaines de la physique tels que la communication optique, les systèmes en cascade, le système DWDM, etc. La méthode utilisée ici peut être appliquée à d'autres équations aux dérivées partielles non linéaires.

## 3.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié plusieurs équations aux dérivées partielles, plus précisément, les équations de Ginzburg-Landau complexes modifiées, l'équations de Schrödinger non linéaire d'ordre supérieure et l'équation de Schrödinger non linéaire avec une nonlinéarité cubique-quintique en présence de quelques termes de perturbation. La résolution de ces différentes équations, grâce à plusieurs techniques de résolution mathématique, nous a donnée des solutions de types solitons optiques, importants pour le transport des informations, notamment dans le domaine des télécommunications. La forme des solutions peut être modifiée en ajustant certains paramètres de nos solutions.

# Conclusion Générale

## Principaux résultats de la thèse

Tout au long de cette thèse, nous avons étudié les équations aux dérivées partielles non linéaires, plus précisément les équations de Ginburg-Landau.

La thèse a été organisée en trois chapitres.

Au chapitre 1, nous avons effectué une revue de la littérature sur le soliton, ensuite nous avons cité quelques exemples d'équations aux dérivées partielles non linéaires et quelques techniques mathématiques de résolution de ces équations. Enfin, dans ce chapitre nous avons aussi présenté quelques applications des équations de Ginzburg-Landau.

Le deuxième chapitre était consacré aux différentes méthodes mathématiques utilisées pour atteindre nos objectifs et à la présentation des applications, à savoir deux modèles physiques qui aboutissent aux équations de Ginzburg-Landau complexe modifiée et de Schrödinger non linéaire cubique-quintique : il s'agit de la fibre optique et de la molécule ADN.

Le dernier chapitre était basé sur l'examen des résultats de obtenus. Des discussions y ont été mené afin de mieux expliquer les résultats d'analyses mathématiques et numériques.

## Les principaux objectifs de cette thèse étaient :

★ De trouver les solutions exacte de l'équation de GLC modifiée d'abord avec terme de renormalisation et ensuite avec terme de saturation. Pour résoudre notre équation, plusieurs méthodes ont été utilisées, à savoir : la méthode alternative d'expansion ( $G'/G$ ), la méthode sech, la méthode tanh et l'approche par troncature de Painlevé. Comme résultats, nous avons obtenu les solutions kink, les solitons bright et les solitons dark. Les auteurs [149–152] ont obtenu des solutions avec des

branches infinies nulles comme celles trouvées ici (voir figures 7 et 11).

En plus des solutions à branches nulles, les figures 5, 6, 8, 10 et 12 représentent les solutions avec des branches infinies non nulles. Des simulations numériques directes ont été effectuées sur ce dernier ensemble de solutions afin de montrer qu'elles sont à la fois mathématiquement et physiquement acceptables (voir figures 9, 13 et 14). Par conséquent, il est toujours important de s'assurer de la validité, du point de vue physique, des solutions analytiques exactes déterminées.

★ De procéder à l'approche par troncature de Painlevé pour trouver les solutions exactes de l'équation modifiée de Ginzburg-Landau complexe. Pour cela, beaucoup de résultats ont été trouvés. Nous avons montré que le paramètre de renormalisation peut être considéré pour des valeurs de solutions à branches non nulles. Par conséquent, les résultats positifs obtenus, à savoir, les solutions nouvelles de types ondes solitaires à branches non nulles, sont physiquement acceptables et applicables en télécommunications.

★ De montrer également que le comportement de l'équation SNLOS peut être facilement étudié au moyen du tracé des plans de phase, qui est le meilleur outil pour prédire les solutions. Le comportement de ces portraits de phase est confirmé par les potentiels effectifs correspondants. En utilisant les paramètres arbitraires non linéaires et la méthode de la fonction exponentielle rationnelle, nous trouvons les solutions de types solitons kinks, solitons pulses et solitons cnoïdales. En ajustant par exemple le module de certaines solutions obtenues, la forme des solutions peut être contrôlée et les solutions de type solitons optiques obtenues ici, peuvent être utilisées pour le transport des informations dans le domaine des télécommunications et dans de nombreux autres domaines tels que, les lignes électriques de transmission non linéaires et les chaînes d'atomes non linéaires.

★ D'étudier l'équation de Schrödinger non linéaire avec une non linéarité cubique-quintique en présence de quelques termes de perturbation. Pour cela, nous avons trouvé les solutions générales de cette équation sans utiliser les codes informatiques. Comme solutions, nous avons obtenu les solitons bright, les solitons dark et les solitons cnoïdales. En observant ces solutions et celles obtenues par Ding-Jiang et al, Anwar Jaafar et al, nous remarquons que nos résultats sont nouvelles et qu'ils ne sont pas encore rapportés dans la littérature. Plus important encore, nous avons travaillé pour le cas où, la constante d'intégration est différente de zéro, ce qui peut être utilisé pour trouver les solutions plus générales.

## Travaux futurs

Cette thèse ouvre plusieurs perspectives qui peuvent être le sujet des travaux à venir :

- Étudier la stabilité des différentes solutions ;
- Étudier d'autres types de solitons ;
- Appliquer les différentes méthodes de résolution utilisées ici à d'autres types d'équations aux dérivées partielles non linéaires ;
- Appliquer les résultats obtenus à partir des EGLCM dans les domaines tels que les transitions de phase, la supraconductivité, la superfluidité, l'écoulement de Taylor-Couette, la convection de Benard, les chaînes dans la théorie des champs et l'onde dissipative dans le plasma ;
- Les solutions de type solitons optiques obtenues en résolvant l'équation SNLOS via la méthode de la fonction exponentielle rationnelle, peuvent être utilisées pour le transport des informations dans le domaine des télécommunications et dans de nombreux autres domaines tels que les lignes de transmission électrique non linéaires ou les chaînes d'atomes non linéaires ;
- Nous avons étudié l'équation de Schrödinger non linéaire avec une nonlinéarité cubique-quintique en présence de quelques termes de perturbation. Dans [160], les auteurs ont intégré l'équation (279) qui est identique à l'équation (272) avec la constante égale à zéro (ce qui n'est pas le cas ici). Cependant, cette constante d'intégration peut être utilisée dans le futur pour trouver des solutions plus générales. Les résultats trouvés ici aideront à la conduite des recherches futures dans divers domaines de la physique tels que la communication optique, les systèmes en cascade, le système DWDM ;

# Bibliographie

- [1] Y. Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves and Turbulence, (*Berlin : Springer*), (1984).
- [2] C. Normand and Y. Pomeau networks communications internet, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 581 (1997).
- [3] M.C. Cross and P.C. Hohenberg, Pattern formation outside of equilibrium, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [4] H. Haus, Theory of mode locking with a fast saturable absorber, *J. Appl. Phys.* **46**, 3049 (1975).
- [5] P.A. Belanger, Coupled-cavity mode locking : a nonlinear model, *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 2077-2081 (1991).
- [6] C.O. Weiss, Spatio-temporal structures. Part II. Vortices and defects in lasers, *Phys. Rep.* **219**, 311-338 (1992).
- [7] J.D. Moores, On the Ginzburg-Landau lase mode-locking model with fifth-order saturable absorber term, *Opt. Commun.* **96**, 65-70 (1993).
- [8] L.F. Mollenauer, J.P. Gordon and S.G. Evangelides, The sliding-frequency guiding filter : an improved form of soliton jitter control, *Opt. Lett.* **17**, 1575-1577 (1992).
- [9] W.J. Firth and A.J. Scroggie, Optical bullet holes : Robust controllable localized states of a nonlinear cavity *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1623 (1996).
- [10] P.S. Jian, W.E. Torruellas, M. Haelterman, S. Trillo, U. Peschel and F. Lederer, Solitons of singly resonant optical parametric oscillators, *Opt. Lett.* **24**, 400-402 (1999).
- [11] M.R. Miura, Bäcklund Transformation (*Springer, Berlin, Germany*), (1978).
- [12] C. Rogers, W. F. Shadwick, Bäcklund Transformations and Their Applications (*Math. Sci. Eng., Academic Press, New York, NY, USA*), (1982).

- 
- [13] R. Hirota, Exact envelope soliton solutions of a nonlinear wave equation, *J. Math. Phys.* **14**, 805 (1973).
- [14] R. Hirota, J. Satsuma, Soliton solutions of a coupled KDV equation, *Phys. Lett. A* **85**, 404 (1981).
- [15] M.A. Akbar, N.H.M. Ali, E.M.E. Zayed, A generalized and improved  $(G'/G)$ -expansion method for nonlinear evolution equations, *Math. Probl. Eng.* **22**, 459879 (2012)
- [16] E.M.E. Zayed, S. Al-Joudi, Applications of an extended  $(G'/G)$ -expansion method to find exact solutions of nonlinear PDEs in mathematical physics, *Math. Probl. Eng.* **2010**, 768573 (2010).
- [17] E.M.E. Zayed, New traveling wave solutions dimensional nonlinear evolution equations using a generalized  $(G'/G)$ -expansion method, *J. Phys. A : Math. Theor.* **42**, 195202 (2009).
- [18] E.M.E. Zayed and A. Khaled Gepreel, some applications of the  $(G'/G)$ -expansion method to nonlinear partial differential equations, *Appl. Math. Comput.* **212**, 1 (2009).
- [19] E.M.E. Zayed, the  $(G'/G)$ -expansion method combined with the Riccati equation for finding exacts solutions of nonlinear PDEs, *J. Appl. Math. Inform.* **29**, 351 (2011).
- [20] E.M.E. Zayed, traveling wave solutions for higher dimensional nonlinear evolution equations using the  $(G'/G)$ -expansion, *J. Appl. Math. Inform.* **28**, 383 (2010).
- [21] Z. Yan and H. Zhang, New explicit solitary wave solutions and periodic wave solutions for Whitham-Broer-Kaup equation in shallow water, *Phys. Lett. A* **285**, 355 (2001).
- [22] R.M. El-Shiekh and A.G. Al-Nowehy, Integral methods to solve the variable coefficient nonlinear Schrödinger equation, *Z. Naturforsch 68a*, 255-260 (2013).
- [23] G.M. Moatimid, M. Rhehad El-Shiekh and A.G. Al-Nowehy, New exact solutions for the variable coefficient two-dimensional Burger equation without restrictions on the variablecoefficient, *Nonlinear Sci. Lett. A* **4**, 1-7 (2013).
- [24] N. Sirendaoreji, A new auxiliary equation and exact travelling wave solutions of nonlinear equations, *Phys. Lett. A* **356**, 124-130 (2006).
- [25] Sirendaoreji, Exact travelling wave solutions for four forms of nonlinear Klein-Gordon equations, *Phys. Lett. A* **363**, 440-447 (2006).

- [26] W.X. Ma, Z. Zhu, Solving the  $(3 + 1)$ -dimensional generalized KP and BKP equations by the multiple exp-function algorithm, *Appl. Math. Comput.* **218**, 11871-11879 (2012).
- [27] D. Olivier, worlds of flow, (2005).
- [28] J.S. Russel. Report on waves. In report on the Fourteenth Meeting of the british Association for Advancement of science, pages 311, 1884.
- [29] J. Norman Zabusky and A. Mason Porter, *Scholarpedia* **5** (8) : 2068 (2010)
- [30] E. Fermi, J. Pasta and S. Ulam : Collected papers of Enrico Fermi, volume **2**, chapitre studies of nonlinear problems . *University press of chicago press, chicago* 978-988 (1955).
- [31] Solitons optiques spaciaux kerr et photoréfractifs : *Propriétés fondamentales et applications à l'adressage optique*, 5-9.
- [32] D.J. Korteweg, G. de Vries, on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationnary waves, *Philos. Mag.* **539** (1895).
- [33] Livre : Quantum Hall Effect, Ezawa physique des solitons, Peyrad et Dauxois solitons and instantions, Rajaraman.
- [34] J.M. Senior : Optical fibers communications : principles and practice. *Second Edition, prentice Hall*, (1992).
- [35] Anne Crisinel, Chimie : les plastiques conducteurs d'électricité (2000).
- [36] M. Matsuzaki and H. Takayasu, Fractal Features of the Earthquake Phenomenon and a Simple Mechanical Model, *J. Geophys. Res.* **96**, 19925-19931 (1991).
- [37] B. Collet. Solitons Acoustiques Guidés dans une plaque Cristalline à symétrie cubique, *Journal de Physique* **02** (C1), 733-736 (1992).
- [38] T. Herr, V. Brash, J.D. Jost, C.Y. Wang, Kondratiev, M.L. Gorodetsky and T.J. Kippenberg, Temporal solitons in optical microresonators. *Nature photonics*, (2013).
- [39] F.M. Milschik and L.F. Mollenaur, Experimental observation of interaction forces between solitons in optical fiber, *Opt. Lett.* **12**, 355-357 (1987).
- [40] J.M. Senior, *Wavelength division in optical fiber networks communications internet* **15** (4), 52-54 (1988).
- [41] A. Kenfack-Jiotsa, Contribution à l'étude de l'instabilité modulationnelle et des structures propagatrices dans les équations du type Ginzburg-Landau complexe, *Thèse*, (2002).

- [42] S. Bigo, S. Gauchard and J-P. Hamaide, Experimental investigation of stimulated Raman scattering limitation on WDM transmission over various types of fiber infrastructures, *IEEE Photon. Technol. Lett.* **11**, 671-673 (1999).
- [43] L. Mouza, Y. Jaouën and C. Chabran, Transverse Brillouin effect characterization in optical fibers and its geometrical aspects, *IEEE Photon. Technol. Lett.* **10**, 1455-1457 (1998).
- [44] V.E. Zaakharov and A.B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulating waves in nonlinear media, *Soviet Physics JETP* **34**, 62-69 (1972).
- [45] V.I Karpman and V.V. Solev'ev, A perturbation approach of the two-soliton systems, *Physics 3D* **26**, 487-502 (1981).
- [46] J.P. Gordon, Interaction forces among solitons in optical fibers, *Optics Letters* **8**, 596-598 (1983).
- [47] F.M Mitschke and L.F. Mollenauer, Experimental observation of interaction forces between solitons in optical fiber, *Optics Letters* **12**, 355-357 (1987).
- [48] W.H. Loh, A.B. Grudinin, V.V. Afanasjev and D.N. Payne, Soliton interaction in the presence of a weak nonsoliton component, *Optics Letters* **19**, 698-700 (1994).
- [49] Y. Kodama and K. Nozaki, Soliton interaction in optical fibers, *Optics Letters* **12**, 1038-1040 (1987).
- [50] P.A. Andrekson, N.A. Olsson, P. C. Beckerer, J.R. Simpson and L.F. Mollenauer, T" Tanbun-Ek, R.A. Logan, and K.W. Wecht, Observation of multiple wavelength soliton collisions in optical systems, *Appl. Phys. Lett.* **57**, 1715-1717 (1990).
- [51] V.V. Afanasjev, Interpretation of the effect of reduction of soliton interaction by bandwidth-limited amplification, *Optics Letters* **18**, 790-792 (1993).
- [52] Y. Kodama, M. Romagnoli, S. Wabnitz and M. Midrio, Role of third-order dispersion on soliton instabilities and interactions in optical fibers, *Optics Letters* **19**, 165-167 (1994).
- [53] B.A. Malomed and A.A. Nepomnyashchy, Kinks and solitons in the generalized Ginzburg-Landau equation, *Physical Review A* **42**, 6009-6014 (1990).
- [54] N.N. Akhmediev, W. Krolikowski and A.J. Lowery, Influence of the Raman effect on solitons in optical fibers, *Optics Communications* **131**, 260-266 (1996).
- [55] P.A. Belanger, L. Gagnon and C. Pare, Solitary pulses in an amplified nonlinear dispersive medium, *Optics Letters* **14**, 943-945 (1989).



- [56] M. Wang, Z. Li and J. Zhang, The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A* **372**, 417-423 (2008).
- [57] E.M.E. Zayed and M.A.M. Abdelaziz, Exact traveling wave solutions of nonlinear variable-coefficients evolution equations with forced terms using the generalized  $(G'/G)$ -expansion method, *Comput. Math. and Mod.* **24**, 103-113 (2013).
- [58] T.B. Benjamin, J.L. Bona and J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **272** 47-48 (1972).
- [59] H. Washimi and T. Taniuti, Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude, *Phys. Rev. Lett. A* **17**, 996-998 (1966).
- [60] S.N. Datta, A. Ghosh and R. Chakraborty, Variational aspects of Klein-Gordon equation, *Indian J. Phys.* **89**, 181-187 (2015).
- [61] F.B. Pelap, T.C. Kofane, N. Flytzanis, and M. Remoissenet, Wave modulations in the nonlinear biinductance transmission line, *J. Phys. Soc. Jpn* **70**, 2568-2577 (2001).
- [62] E. Yusufoglu, New solitary solutions for the MBBM equations using Exp-function method, *Phys. Lett. A* **372**, 442-446, (2008).
- [63] Y. Kodama, Optical solitons in a monomode fiber, *J. Stat. Phys.* **39**, 597-614 (1985).
- [64] M. Mirzazadeh, M. Eslami and A.H. Arnous, Dark Optical Solitons of Biswas-Milovic equation with dual-power law nonlinearity, *Eur. Phys. J. Plus* **130**, 1-7 (2015).
- [65] X. Yuanfen, Bifurcations of exact travelling waves solutions for  $(2+1)$ -dimensional HNLS equation, *Comm. Theor. Phys.* **57**, 68-70 (2012).
- [66] S.P. Gorza, M. Haelterman, Ultrafast transverse undulation of self-trapped laser beams, *Optics Express* **16**, 16935-16940 (2008).
- [67] F. Khani, S. Hamed-Nezhad and A. Molabahrani, *Phys. Lett. A* **371**, 234-240 (2007).
- [68] J.H. He and Li-Na Zhang, *Phys. Lett. A* **372**, 1044-1047 (2008).
- [69] A.M. Wazwaz, Multiple kink solutions and multiple singular kink solutions for  $(2+1)$ -dimensional nonlinear models generated by the Jaulent-Miodek hierarchy, *Physics Letters A* **372**, 1844-1846 (2009).

- [70] Y. Xu, X. Zhou and L. Yao, Solving the fifth order Caudrey-Dodd- Gibbon (CDG) equation using the Exp-function method, *Appl. Math. Comput.* **206**, 70-73 (2008).
- [71] M. Ali Akbar, H. Norhashidah, M. Ali and S.T. Mohyud-Din, the alternative  $(G'/G)$ -Expansion method whith generalized Riccati equation : Application to fifth order (1+1) dimensional Caudrey-Dodd-Gibbon equation, *Int. Jour. of the Phys. Sci.* **30**, 743-752 (2012).
- [72] J.L. Hu, Explicit solutions to three nonlinear physical models, *Phys. Lett. A* **287**, 81-89 (2001).
- [73] Y. Shi, Z. Dai and D. Li, Application of Exp-function method for 2D cubic-quintic Ginzburg-Landau equation, *Appl. Math. Comput.* **210**, 269-275 (2009).
- [74] Z. Jiao, W. Xiaoli and Y. Lu, A generalized  $(G'/G)$ -espansion method and its applications, *Phys. Lett. A* **372**, 3653-3658 (2008).
- [75] S.P. Novikov and A.P. Veslov, Finite-Zone, Two-dimensional, potential Schrödinger operators. Explicit formula and evolutions equations, *Sov. Math. Dokl.* **30**, 588-591 (1984).
- [76] R.G. Novikov, Absence of exponentially localized Solitons for the Novikov-Veselov at positive energy, *Phys. Lett. A* **375**, 1233-1235 (2011).
- [77] B.B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili, On the stability of Solitary waves in weakly dispersive media , *Sov. phys.* **15**, 539-541 (1979).
- [78] V.I. Petviashvili, Equation of an extraordinary soliton, *Plasma Physics* **2**, 469-472 (1976).
- [79] M. Wang, Y. Zhou and Z. Li, Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A* **216**, 67-75 (1996).
- [80] X. Feng, Exploratory approach to explicit solution of nonlinear evolution equations, *Int. J. Theor. Phys.* **39**, 207-222 (2000).
- [81] J. Hu and H. Zhang, A new method for finding exact traveling wave solutions to nonlinear partial differential equations, *Phys. Lett. A* **286**, 175-179 (2001).
- [82] W. Hauck, Kinks and rotations in long Josephson junctions, *Math. Methods Appl. Sci.* **24**, 1189-1217 (2001).
- [83] J.K. Perring and T.H.R. Skyrme, A model unified field equation, *Nucl. Phys. A* **31**, 550-555 (1962).

- [84] T. Yoshinaga, M. Wakamiya and T. Kakutani, Recurrence and chaotic behavior resulting from nonlinear interaction between long and short waves, *Phys. Fluids A : Fluid Dynamics* **3**, 83-89 (1991).
- [85] A.M. Wazwaz, The tanh method for travelling wave solutions to the Zhiber-Shabat equation and other related equations, *Commun. Nonlin. Sci. and num. simul.* **13**, 584-592 (2008).
- [86] J.T. Beale, T. kato and A. Madja, Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations, *Commun. Math. Phys.* **94**, 61-66 (1984).
- [87] A. Aftation, Vortices in Bose-Einstein Condensation Birkhauser, (2006).
- [88] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, Theory of Bose-Einstein Condensation in trapped gases, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [89] Y. Castin, Bose-Einstein Condensates in atomic gases : simple theoretical results, in coherent atomic matter waves, lectures notes of Les houches Summer School, edited by R. Kaiser, C. Westbrook and F. David, *EDP Sciences and Springer-Verlag* (2001)
- [90] N. Bogolubov, on the theory of superfluidity, *Journal of physics* **11**, 23 (1947).
- [91] M. Joffre, Optique non-linéaire en régimes continu et femtoseconde, *DEA en physique quantique*, (2007).
- [92] P. Huerre, Cours de mécanique des fluides, *École Polytechnique*.
- [93] A. Abrikosov, Nobel Lecture : type II superconductors and the vortex lattice, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 975-979 (2004).
- [94] F.K. Abdoullaev, S.A. Darmanian, and P.K. Khabibullaev, *Optical Solitons. Berlin : Springer Verlag Heidelberg*, (1993).
- [95] A.M. Wazwaz, solitary wave solutions of the generalized shallow water wave (GSWW) equation by Hirota's method, tanh-coth method and Exp-function method, *Appl. Math. Comput.* **202**, 275-286 (2008).
- [96] J.H. He and X.H. Wu, Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos Solitons Fract.* **30**, 700-708 (2006).
- [97] X.H. Wu and J.H. He, Solitary solutions periodic solutions and compacton-like solution of the Jaulent-Miodek equations using the Exp-function method, *Comput. Math. Appl.* **54**, 966-986 (2007).
- [98] J.H. He and L.N. Zhang, Generalized Solitary solutions and compacton-like solution of the Jaulent-Miodek equations using the Exp-function method, *Phys. Lett. A* **372**, 1044-1047 (2008).

- [99] S.D. Zhu, Exp-function method for the discrete mKdV lattice, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **8**, 465-468 (2007).
- [100] S. Zhang, Application of Exp-function method to high-dimensional nonlinear evolution equation, *Chaos Solitons Fract.* **38**, 270-276 (2008).
- [101] D.D. Ganji, A. Asgari and Z.Z. Ganji, Exp-function based solution of nonlinear Radhakrishnan, Kundu and Laskshmanan (RKL) equation, *Acta Appl. Math.* **104**, 201-209 (2008).
- [102] I. Aslan, V. Marinakis, Some remarks on Exp-function method and its applications, *Commun. Theor. Phys.* **56**, 397-403 (2011).
- [103] I. Aslan, some remarks on Exp-function method and its applications-A Supplement, *Commun. Theor. Phys.* **60**, 521-525 (2013).
- [104] A.J.M. Jawad, M.D. Petkovic, A Biswas, Modified simple equation method for nonlinear evolution equations, *Appl. Math. Comput.* **217**, 869-877 (2010).
- [105] E.M.E. Zayed, A note on the modified simple equation method applied to sharma-Tasso-Olver equation. *Appl. Math. Comput.* **218**, 3962-3964 (2011).
- [106] E.M.E. Zayed and S.A.H. Ibrahim, Exact solutions of nonlinear evolution equations in mathematical Physics using the modified simple equation method. *Chin. Phys. Lett.* **29**, 060201-060204 (2012).
- [107] E.M.E. Zayed and A.H. Arnous, Exact solutions for nonlinear ZK-MEW and the Potential YTSE equations using the modified simple equation method, *ATP Conf. Proc.* **1479**, 2044-2048 (2012).
- [108] E.M.E. Zayed and A.H. Arnous, Exact traveling wave solutions of nonlinear PDE in mathematical physics using the modified simple equation method, *Applications and Appl. Math.* **8**, 553-572 (2013).
- [109] E.M.E. Zayed, G.M. Moatimid and A.G. Al-Nowehy, The generalized Kudryashov method and its applications for solving nonlinear PDE in mathematical physics, *Scientific J. Math. Res.* **5**, 19 (2015).
- [110] R. Hirota, Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for the multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1192-1194 (1971).
- [111] R. Hirota in "Solitons", R.K. Bullough and P. J. Caudrey, (eds) Springer P157 (1980).
- [112] R. Hirota, A new form of Backlund transformations and its relation to the inverse scattering problem, *Prog. Theor. Phys.* **52**, 1498-1512 (1974).
- [113] R. Hirota, Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices, *J. Math. Phys.* **14**, 810 (1973).

- [114] R. Hirota, Exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation for the multiple collisions of solitons, *J. Phys. Soc. Jpn.* **33**, 1456-1458 (1972).
- [115] R. Hirota, Exact solution of the Sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons, *J. Phys. Soc. Jpn.* **33**, 1459-1463 (1972).
- [116] E. Kengne, S.T. Chui and W.M. Liu, Modulational instability criteria for coupled nonlinear transmission lines with dispersive elements, *Phys. Rev. E* **74**, 036614 (2006).
- [117] H.W. Schürmann, V.S. Serov and J. Nichel, Superposition in nonlinear wave and evolution equation, *Int. J. Theor. Phys.* **45**, 1057-1073 (2006).
- [118] T. Taniuti and N. Yajima, Perturbation method for a nonlinear wave modulation, *J. Math. Phys.* **10**, 1369-1372 (1969).
- [119] J.C. Bronski, L.D. Carr, R. Carretero-González, B. Deconinck, J.N. Kutz and K. Promislow, Stability of attractive Bose-Einstein condensates in a periodic potential, *Phys. Rev. E* **64**, 056615 (2001).
- [120] J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale, The painlevé property for partial differential equation, *J. Math. Phys.* **24**, 522-526 (1983).
- [121] N.A. Kudryashov, on types of nonlinear nonintegrable equations with exact solutions, *Phys. Lett. A* **155** 269-275 (1991).
- [122] M. Wang, X. Li and J. Zhang, The  $(G'/G)$ -expansion method and traveling wave Solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A* **312**, 417-423 (2002).
- [123] E.M.E. Zayed and K.A. Gepreel, The  $(G'/G)$ -expansion method for finding traveling wave Solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical Physics, *J. Math. Phys.* **50**, 013502-013513 (2009).
- [124] N.A. Kudryashov, A note on the  $(G'/G)$ -expansion method, *Appl. Math. Comput.* **217**, 1755-1758 (2010).
- [125] I. Islam, A note on the  $(G'/G)$ -expansion method again, *Appl. Math. Comput.* **217**, 937-938 (2007).
- [126] W. Malfliet, Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *Am. J. Phys.* **60**, 650 (1992).
- [127] W. Malfliet and W. Hereman, The tanh method : I. exact solutions of nonlinear evolution and waves equation, *Phys. Scr.* **54**, 563-568 (1996).
- [128] A.M. Wazwaz, The tanh method : Solitons and periodic solutions for the Dodd-Bullough-Mikhailov and the Tzitzeica-Dodd-Bullough equations, *Chaos Soliton Fract.* **25**, 55-63 (2005).

- [129] A.M. Wazwaz, The tanh method : exact solutions of the Sine-Gordon and the Sinh-Gordon equations, *Appl. Math. Comput.* **167**,1196-1210 (2005).
- [130] W. Malfliet, The tanh method : a tool for solving certain classes of nonlinear evolution and wave equations, *Journal of computational and Applied mathematics* **164-165**, 529-541 (2004).
- [131] Y. Ugurlu and D. Kaya, Exact and numerical solutions of generalized Drinfeld-Sokolov equation, *Phys. Lett. A* **372**, 2867-2873 (2008).
- [132] E. Tala-Tebue, Z.I. Djoufack, D.C. Tsobgni-Fozap, A. Kenfack-Jiotsa, F. Kapche-Tagne and T.C. Kofane, Traveling wave solutions along microtubules and in the Zhiber-Shabat equation, *Chin. J. Phys.* **55**, 939-946 (2017).
- [133] A.B. Togeu Motcheyo, C. Tchawoua and J.D. Tchingang Tchameu, Supratransmission induced by waves collisions in a discrete electrical lattice, *Phys. Rev. E* **88**, 040901(R) (2013).
- [134] A. Kenfack Jiotsa and E. Tala-Tebue, Effect of second -neighbor inductive coupling on the modulational instability in a coupled line of transmission, *J. Phys. Soc. Jpn.* **80**, 034003 (2011).
- [135] E. Kengne, A. Lakhssassi, R. Vaillancourt and W.M. Liu, On the Propagation of nonlinear signals in nonlinear transmission lines, *Eur. Phys. J. Plus* **63**, 128 (2013).
- [136] S. Abdoukary, A. Mohamadou and T. Beda, Exact traveling discrete kink-solitonsolutions for the discrete nonlinear electrical transmission lines, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulation* **16**, 3525-3532 (2011).
- [137] E. Tala-Tebue, D.C. Tsobgni-Fozap, A. Kenfack-Jiotsa and T.C. Kofane, Envelope periodic solutions for a discrete network with the Jacobi elliptic functions and the alternative  $(G'/G)$ -expansion method including the generalized Riccati equation, *Eur. Phys. J. Plus* **129**, 136 (2014).
- [138] P. Diament, Wave transmission and Fiber Optics, *Macmillanm, New york, Chap 3*, (1990).
- [139] M. Remoissenet, Waves called solitons 3rd ed, *Springer, Berlin*, (1999).
- [140] G.P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics 3rd, *Academic Press, San Diego, CA*, (2001).
- [141] Newell, Whitehead. Review of the finite bandwidth concept. In : Instability of continuous systems. *Berlin : Springer-Verlag*, (1971).
- [142] K. Stewartson and J.T. Stuart, A non-linear instability theory for a wave system in plan Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* **48**, 529-545 (1971).

- [143] B.I. Halperin, T.C. Lubensky, and shang-Keng Ma, First-order phase transitions in superconductors and smectic-A liquid crystals, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 292 (1974).
- [144] F. Liu, M. Mondello and N. Goldenfeld, Kinetics of the superconducting transition, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3071 (1991).
- [145] S. Igor Aranson and L. Kramer, The world of the complex Ginzburg-Landau equation, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 99 (2002).
- [146] H.G.E. Hentschel and I. Procaccia, Passive scalar fluctuations in intermittent turbulence with applications to wave propagation, *Phys. Rev. A* **28**, 417 (1983).
- [147] K. Nozaki and Bekki, Pattern selection and spatiotemporal transition to chaos in the Ginzburg-Landau equation, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2171 (1.983)
- [148] L. Stenflo, A solution of the generalised non-linear Schrödinger equation, *J. Phys. A : Math. Gen.* **21**, L499-L500 (1988).
- [149] E. Yomba and T.C. Kofané, On exact solutions of the generalized modified complex Ginzburg-Landau equation using the Weiss-Tabor-Carnevale method, *Phys. Scr.* **54**, 566 (1996).
- [150] E. Yomba and T.C. Kofané, On exact solutions of the modified complex Ginzburg-Landau equation, *Physica D.* **125**, 105 (1999).
- [151] A. Kenfack-Jiotsa, S.I. Fewo and T.C. Kofané, Effects of renormalization parameters on singularities and special soliton solutions of the modified complex Ginzburg-Landau equation, *Phys. Scr.* **74**, 499-502 (2006).
- [152] A. Mohamadou, F. II Ndzana and T.C. Kofané, Pulse solution of the modified cubic complex Ginzburg-Landau equation, *Phys. Scr.* **73**, 596-600 (2006).
- [153] Y. Kodama and A. Hasegawa, Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide, *IEEE J. Quantum Electron* **23**, 510-524 (1987).
- [154] Y. Kodama, Optical solitons in a monomode fiber, *J. Stat. Phys.* **39**, 597-614 (1985).
- [155] D. Wood, Constraints on the bit rates in direct detection optical communication systems using linear or soliton pulses, *IEEE J. Lightwave Tech.* **8**, 1097-1106 (1990).
- [156] E. Tala-Tebue, Z.I. Djoufack, D.C. Tsoigni-Fozap, A. Kenfack-Jiotsa, F. Kapche-Tagne and T.C. Kofané, Traveling wave solutions along microtubules and in the Zhiber-Shabat equation, *Chinese Journal of Physics* **55**, 939-946 (2017).

- 
- [157] A. Bekir and M. Kaplan, Exponential rational function method for solving nonlinear equations arising in various physical models, *Chinese Journal of Physics* **54**, 365-370 (2016).
- [158] N.A. Kudryashov, Methods of nonlinear mathematical Physics, *Intellect 364 p. (in Russian)*, (2010).
- [159] H. Ding-jiang, L. De-sheng and Z. Hong-qing, Explicit and exact travelling wave solutions for the generalized derivative Schrödinger equation. *Chaos, Solitons and Fractals* **31**, 586-593 (2007).
- [160] M.J. Anwar Jaafar, A. A. Mahmood Jawad, A. Biswas, Z. Qin, M. Seithuti and B. Milivoj, Hamiltonian perturbation of optical solitons with parabolic law nonlinearity using three integration methodologies, *Optik* **160**, 248-254 (2018)



# Liste des Publications

1. **P.H. Kamdoun-Tamo**, E. Tala-Tebue, A. Kenfack-Jiotsa and T.C. Kofane, Exact analytical solutions : Physical and/or mathematical validity, *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, **10**(1), 95-109 (2021).  
DOI : 10.5890/JAND.2021.03.006
2. **P.H. Kamdoun-Tamo**, A. Kenfack-Jiotsa and T.C. Kofane, Solitons solutions of the complex Ginzburg-Landau equation with saturation term using Painleve truncated approach, *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, **10**(2), 279-286 (2021).  
DOI : 10.5890/JAND.2021.06.007
3. E. Tala-Tebue, Aly R. Seadawy, **P.H. Kamdoun-Tamo** and Dianchen Lu, Dispersive Optical soliton solutions of the higher-order nonlinear Schrödinger equation via two different methods and its applications, *Eur. Phys. J. Plus*, **133**, 1-10 (2018).
4. E. Tala-Tebue, Z.I. Djoufack, **P.H. Kamdoun-Tamo** and A. Kenfack-Jiotsa, Cnoidal and solitary waves of a nonlinear Schrödinger equation in an optical fiber, *Optik*, **174**, 508-512 (2018).

Volume 10  
Issue 1  
March 2021

ISSN 2164-6457 (print)  
ISSN 2164-6473 (online)

---

# Journal of Applied Nonlinear Dynamics



# Journal of Applied Nonlinear Dynamics

Volume 10, Issue 1, March 2021

Editors

Albert Chao-Jun Luo

Miguel A. F. Sanjuan



L&H Scientific Publishing, LLC, USA



## Exact Analytical Solutions : Physical and/or Mathematical Validity

P.H. Kamdoun-Tamo<sup>1,2†</sup>, E. Tala-Tebue<sup>1,3</sup>, A. Kenfack-Jiotsa<sup>1,2</sup>, T.C. Kofane<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratory of Mechanics, Department of Physics, Faculty of Sciences, and African Center of Excellence in I.C.T (C.E.T.I.C) University of Yaounde I, P.O. Box 812, Yaounde, Cameroon

<sup>2</sup> Nonlinear Physics and Complex Systems Group, Department of Physics, The Higher Teachers Training College, University of Yaounde I, P.O. Box 47 Yaounde, Cameroon

<sup>3</sup> Department of Telecommunication and Network Engineering, IUT-Fotso Victor of Bandjoun, University of Dschang, P.O. Box 134, Bandjoun, Cameroon

### Submission Info

Communicated by A.C.J. Luo  
Received 17 October 2019  
Accepted 12 December 2019  
Available online 1 April 2021

### Keywords

Modified complex Ginzburg-Landau (MCGL) equation  
Alternative ( $G'/G$ )-expansion method  
Tanh method  
Painleve truncated approach  
Renormalization term

### Abstract

In this work, we use the alternative ( $G'/G$ )-expansion method, the sech method, the tanh method and the Painleve truncated approach to find solutions of the modified complex Ginzburg-Landau equation. We show that any mathematically acceptable solution is not necessarily physically suitable. Among the two types of obtained solutions, there is a category with null infinite branches, for which no direct numerical simulation can be carried out. This type of solutions is however mathematically well-grounded. The second type concerns new solutions with infinite non-zero branches. For this second type, direct numerical simulations are performed to show that they are physically valid.

©2021 L&H Scientific Publishing, LLC. All rights reserved.

## 1 Introduction

The investigation of exact soliton solutions for nonlinear mathematical physics equations is an important and interesting subject. In this context, several methods have been proposed by researchers in the literature. We can list the tanh method [1], the sine-cosine method [2], the homotopy perturbation method [3], the Hirota bilinear method [4], the exp-function method [5], the Bäcklund transform method [6], the unified method (UM) [7–12], the Darboux transform method [13], the generalized unified method (GUM) [14–18], the Painleve's singularity structure analysis [19], the generalized exponential function [12], the inverse scattering transform method [20], the ( $G'/G$ )-expansion method [21], among other.

The Complex Ginzburg-Landau equation was introduced phenomenologically by Newell and Whitehead [22,23]. This equation has been used these last years to describe qualitatively and quantitatively a

<sup>†</sup>Corresponding author.

Email address: [herve.kamdoun@yahoo.com](mailto:herve.kamdoun@yahoo.com)

rich variety of phenomena such as phase transitions [24], superconductivity [25], superfluidity [26] and strings in field theory [27]. In the present paper, our purpose is to use some integration tools, namely the alternative ( $G'/G$ )-expansion method, the sech method, the tanh method and the Painleve truncated approach to find exact analytical solutions of the modified complex Ginzburg-Landau (MCGL) equation. The MCGL equation also has a wide range of applications. As for example, for phase transitions in non-equilibrium systems, Benard convection, Taylor-couette flow, Poiseuille flow in fluid systems, drift dissipative waves in plasmas [28]. The particularity of this equation is that, the last term  $C \frac{|\psi_x|^2}{\psi^*}$  has been introduced by Stenflo [29] as a usually missing term while we attempt to recover the equation governing the dynamic from the dispersion law, where  $\psi$  is a slowly varying complex envelope function of the modulated wave with wave number  $k$ . The term  $C \frac{|\psi_x|^2}{\psi^*}$  is considered to be the term of renormalization of the dispersion, *ie*, corrects the effects of dispersion if and only if the amplitude  $|\psi|$  is non-zero, and otherwise can not be taken into account. Although various special soliton solutions have been found [30–33], in our paper, we are looking for periodic solitary waves different to the above special soliton solutions. The exact analytical solutions reported in the literature for this equation have their infinite branches equal to zero ( $x \rightarrow \pm\infty$ ). This is not physically acceptable since the modulus must be different from zero as a result of the term  $\frac{|\psi_x|^2}{\psi^*} = \frac{|\psi_x|^2}{|\psi|^2} \psi$ . Here we present two types of solutions. The first is such that no direct numerical simulations are possible. The second type of solution allows to proceed direct numerical simulations. The first type of solutions is mathematically acceptable solely. The second is in addition physically eligible, therefore valid.

On the other hand, we must remember that some physical systems allow saturation and they are modeled by terms of following form ( $|\psi|^2/(\delta + |\psi|^2))\psi$  [31] of which the two limiting cases are well known in the literature. However the similarity of the latter saturable term to the following form ( $|\psi_x|^2/(\delta + |\psi|^2))\psi$  could be envisaged even though it does not exist yet to the best of our knowledge in the literature, and one of its limiting cases is also the renormalization term ( $\frac{|\psi_x|^2}{\psi^*}$ ) [30].

This paper is structured as follows: In Section 2, we find the solutions with the alternative ( $G'/G$ )-expansion method, the sech method and the tanh method. In Section 3, we apply the Painleve truncated approach to find exact solutions of the MCGL equation. Finally, section 4 concludes the work.

## 2 Exact solutions of the MCGL equation using the alternative ( $G'/G$ )-expansion method, the sech method and the tanh method

We consider the one-dimensional modified CGL equation which reads,

$$i\psi_t + P\psi_{xx} + Q|\psi|^2\psi = i\gamma\psi + C\frac{|\psi_x|^2}{\psi^*}, \quad (1)$$

where  $t$  is the time and  $x$  is the distance of propagation;  $P, Q, C, \gamma$  are complex constants related to the group velocity dispersion, the cubic nonlinearity, the renormalization coefficient of dispersion term and the dissipation respectively, with

$$P = P_r + iP_m, Q = Q_r + iQ_m, C = C_r + iC_m, \gamma = \gamma_r + i\gamma_m.$$

Note that  $i^2 = -1$ .

Equation (1) may reduced under the following form

$$i\Psi_t\Psi^* + P\Psi_{xx}\Psi^* + Q|\Psi|^2\Psi\Psi^* = i\gamma\Psi\Psi^* + C|\Psi_x|^2. \quad (2)$$

We consider that the complex envelope function  $\psi(x, t)$  of Eq. (2) can be taken as follows

$$\psi(x, t) = U(kx - vt)e^{i(Ax+Bt)}, \quad (3)$$

where  $k, v, A, B$  are real constants.  $U$  is real function of  $t$  and  $x$ . Combining the independent variable  $x$  and  $t$  into one variable,

$$\xi = kx - vt \tag{4}$$

and inserting Eq.(3) into Eq.(2), we obtain:

$$\begin{aligned} & -BU^2 - i v U U_\xi + P_r k^2 U U_{\xi\xi} + 2i P_r k A U U_\xi - P_r A^2 U^2 + i P_m k^2 U U_{\xi\xi} \\ & - 2P_m k A U U_\xi - i P_m A^2 U^2 + Q_r U^4 + i Q_m U^4 \\ = & i \gamma_r U^2 - \gamma_m U^2 + C_r k^2 U_\xi^2 - C_r A^2 U^2 + 2i C_r k A U U_\xi \\ & + i C_m k^2 U_\xi^2 - i C_m A^2 U^2 - 2C_m k A U U_\xi. \end{aligned} \tag{5}$$

Equation (5) can be separated into two parts; the real part and the imaginary part. So we get a system of two equations:

$$\begin{aligned} -BU^2 + P_r k^2 U U_{\xi\xi} - P_r A^2 U^2 - 2P_m k A U U_\xi + Q_r U^4 &= -\gamma_m U^2 + C_r k^2 U_\xi^2 - C_r A^2 U^2 - 2C_m k A U U_\xi, \\ v U U_\xi + 2P_r k A U U_\xi + P_m k^2 U U_{\xi\xi} - P_m A^2 U^2 + Q_m U^4 &= \gamma_r U^2 + 2C_r k A U U_\xi + C_m k^2 U_\xi^2 - C_m A^2 U^2. \end{aligned} \tag{6}$$

If we divide each member of Eq. (6) by  $U$ , we obtain:

$$\begin{cases} (\gamma_m - B + C_r A^2 - P_r A^2) U + (-2P_m k A + 2C_m k A) U_\xi + P_r k^2 U_{\xi\xi} + Q_r U^3 + C_r k^2 \frac{U_\xi^2}{U} = 0, \\ (-\gamma_r + C_m A^2 - P_m A^2) U + (2P_r k A - v - 2C_r k A) U_\xi + P_m k^2 U_{\xi\xi} + Q_m U^3 - C_m k^2 \frac{U_\xi^2}{U} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

To simplify the resolution of the system above, we set the following compatibility relations:

$$\begin{cases} \gamma_m - B + C_r A^2 - P_r A^2 = -\gamma_r + C_m A^2 - P_m A^2, \\ 2P_r k A - v - 2C_r k A = -2P_m k A + 2C_m k A, \\ P_m = P_r = p, \\ Q_r = Q_m = q, \\ C_r = C_m = c. \end{cases} \tag{8}$$

Thus, we have only one equation to solve namely

$$(-\gamma_r + c A^2 - p A^2) U + (2p k A - v - 2c k A) U_\xi + p k^2 U_{\xi\xi} + q U^3 - c k^2 \frac{U_\xi^2}{U} = 0. \tag{9}$$

### 2.1 The alternative $(G'/G)$ -expansion method : analytic solutions and physical implication

The solutions of equation (9), may be expressed by a polynomial in  $(G'/G)$  as follows:

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^N a_j \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^j, \tag{10}$$

where  $G(\xi)$  satisfies the second-order ordinary differential equation (ODE) in the form:

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \tag{11}$$

in equation (10),  $a_j$  are constants to be determined later. The order of solution is  $N = 1$ . Thus,  $U(\xi)$  can be expressed as follows:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right). \tag{12}$$

Then, we have:

$$U_\xi = -a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 - \lambda a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) - a_1 \mu, \tag{13}$$

$$U_{\xi\xi} = 2a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^3 + 3a_1 \lambda \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 + 2a_1 \mu + \lambda^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) + a_1 \lambda \mu, \tag{14}$$

$$U^3 = a_1^3 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^3 + 3a_0 a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 + 3a_1 a_0^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) + a_0^3, \tag{15}$$

$$U_\xi^2 = a_1^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^4 + 2a_1^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^3 + \lambda^2 a_1^2 + 2\mu a_1^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 + 2\lambda \mu a_1^2 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) + a_1^2 \mu^2. \tag{16}$$

Substituting equations (12), (13), (14), (15) and (16) into equation (9), we obtain:

$$a_0 = \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{3\lambda} - \frac{1}{4} \sqrt{6},$$

$$a_1 = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2 - 8\mu}},$$

$$k = - \frac{\frac{1}{5} \frac{(15\lambda^2 - 60\mu) \left( \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu} - 4 \right)}{\sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu}} + (4\lambda^2 - 16\mu) \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2 - 8\mu}} \left( \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{3\lambda} - \frac{1}{4} \sqrt{6} \right) - 3\lambda}{6\lambda^2 - 24\mu},$$

$$v = \frac{1}{5} \frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu} - 4}{\sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu}}.$$

The general solutions of equation (9) are written as follows:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right), \tag{17}$$

where,

$$\xi = kx - \left( \frac{1}{5} \frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu} - 4}{\sqrt{-2\lambda^2 + 8\mu}} \right) t. \tag{18}$$

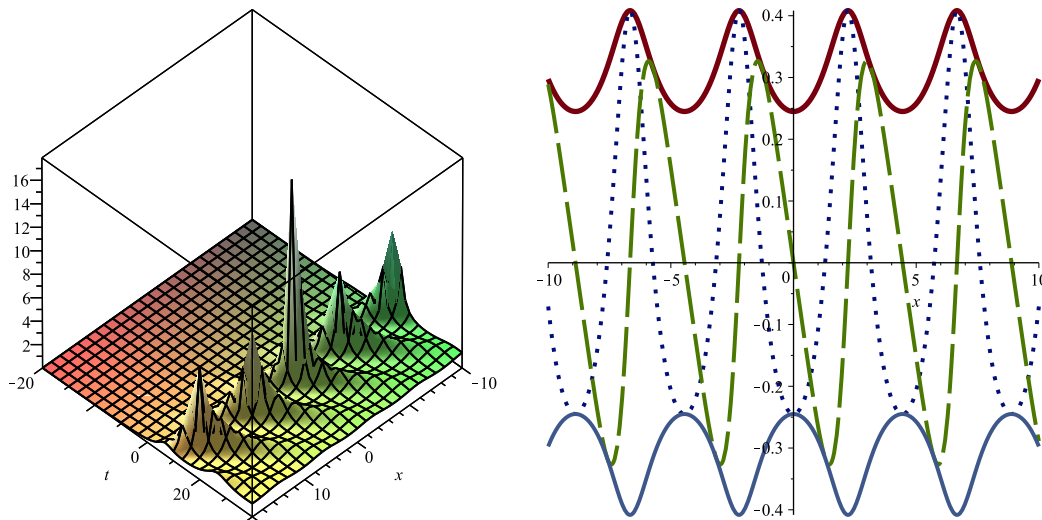
The solutions of equation (11) are as follows :

1- If  $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ,

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)}{C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)} \right]. \tag{19}$$

2- If  $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ,

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[ \frac{-C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)} \right]. \tag{20}$$



**Fig. 1** Solution plotted using Eq. (24) with the following parameters:  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 0.25$ ,  $C_1 = 0.5$  and  $C_2 = 0.3$ .  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $k$  and  $v$  are taken with a positive sign. In 3D, we have represented the modulus. In 2D, we have the envelope (solid line) at  $t = 0$ . The green dash color corresponds to the imaginary part and the blue dot stands for the real part.

**3- If  $\lambda^2 - 4\mu = 0$ ,**

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2\xi}, \tag{21}$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are arbitrary constants.

Due to the fact that  $\lambda^2 - 4\mu$  can't be equal to zero, we obtain only two categories of traveling wave solutions.

**Case 1: Hyperbolic function traveling wave solution.**

If  $\lambda^2 - 4\mu > 0$

$$U_1(x, t) = a_0 + a_1 \left[ \frac{-\lambda}{2} + \frac{\eta}{2} \left( \frac{C_1 \sinh(\frac{\eta(kx-vt)}{2}) + C_2 \cosh(\frac{\eta(kx-vt)}{2})}{C_1 \cosh(\frac{\eta(kx-vt)}{2}) + C_2 \sinh(\frac{\eta(kx-vt)}{2})} \right) \right], \tag{22}$$

with,

$$\eta = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}. \tag{23}$$

In this case,

$$\psi_1(x, t) = U_1(kx - vt)e^{i(Ax + Bt)}. \tag{24}$$

**Case 2: Trigonometric function traveling wave solution.**

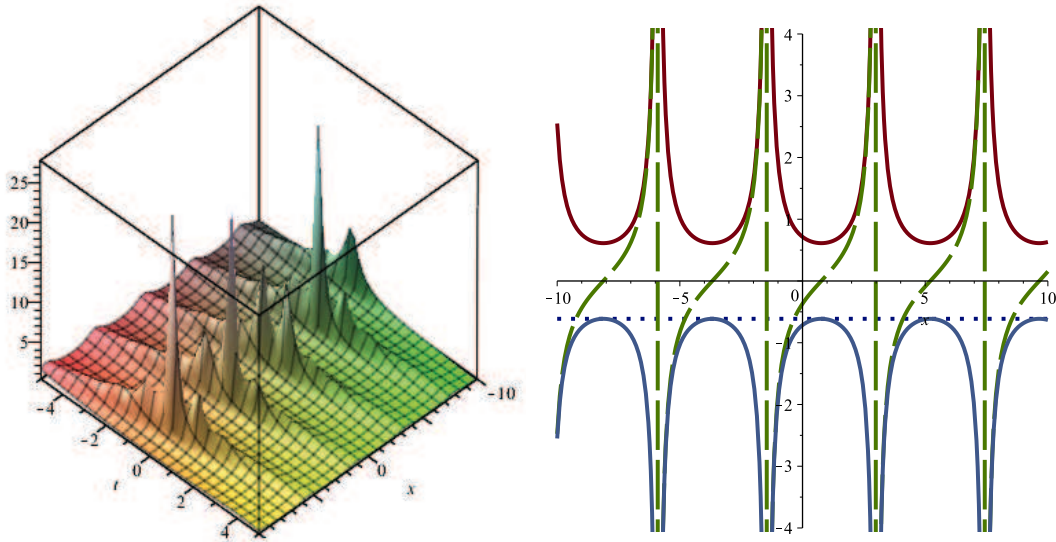
If  $\lambda^2 - 4\mu < 0$

$$U_2(x) = a_0 + a_1 \left[ \frac{-\lambda}{2} + \frac{\eta}{2} \left( \frac{-C_1 \sin(\frac{\eta(kx-vt)}{2}) + C_2 \cos(\frac{\eta(kx-vt)}{2})}{C_1 \cos(\frac{\eta(kx-vt)}{2}) + C_2 \sin(\frac{\eta(kx-vt)}{2})} \right) \right], \tag{25}$$

with,

$$\eta = \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}. \tag{26}$$





**Fig. 2** Solution displayed using Eq. (27) with the following parameters:  $\lambda = 0.25, \mu = 1.0, C_1 = 0.5$  and  $C_2 = 0.3$ .  $a_0$  and  $a_1$  are negative while  $k$  and  $v$  are positive. The left panel presents the modulus. The right panel exhibits the 2D representation of the envelope (solid line) at  $t = 0$ . It has the same captions as in Figure 1.

In this case,

$$\psi_2(x, t) = U_2(kx - vt)e^{i(Ax + Bt)}. \tag{27}$$

Left panels of figures 1 and 2 present the modulus of solutions Eq. (24) and Eq. (27). They are solitary wavetrains and multi-solitary wavetrains. The right panels correspond to a zoom of these solutions at  $t = 0$ . It can be clearly seen that the modulus is always different from zero. This agrees well with the renormalizing term in Eq. (1) which also reads  $\frac{|\psi_x|^2}{|\psi|^2} \psi$ . For this first class of solution, we can propagate the wave through direct numerical simulations (fig.5).

### 2.2 The sech method: analytic solutions and physical implication

The solutions of equation (9), may be expressed by a polynomial in sech as follows:

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^N a_j (\text{sech}(\xi))^j, \tag{28}$$

where  $a_j$  are constants to be determined later. The order of solution is  $N = 1$ . Thus,  $U(\xi)$  can be expressed as follows:

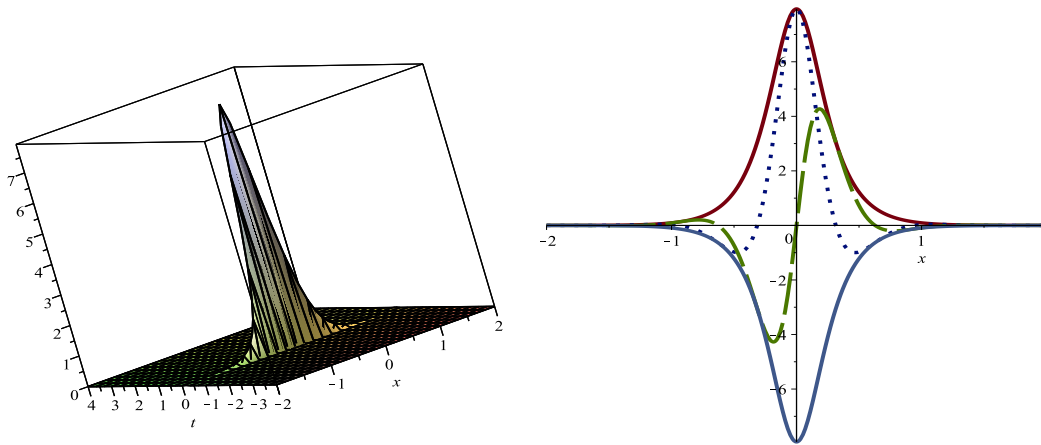
$$U(\xi) = a_0 + a_1 \text{sech}(\xi). \tag{29}$$

Substituting equation (29) into equation (9) and solving with maple software, we obtain:

$$a_0 = 0,$$

$$a_1 = \sqrt{-\frac{A^2 C^2 - 3A^2 c p + 2A^2 p^2 - c \gamma_r + 2p \gamma_r}{c q - p q}},$$

$$k = \sqrt{-\frac{A^2 c + A^2 p + \gamma_r}{c - p}},$$



**Fig. 3** 3D and 2D representation of Eq. (33) with the following parameters:  $\gamma_r = 0.5$ ,  $A = 0.02$ ,  $p = 0.8$ ,  $q = 0.5$  and  $c = 0.4$ .  $v$  and  $k$  are positive. The left and right panels correspond respectively to the the modulus and the 2D portrayal of the envelope at  $t = 0$ . The imaginary part corresponds to the green dash color and the real part to the blue dot.

$$v = 2kA(p - c).$$

The general solution of equation (9) are written as follows:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \operatorname{sech}(\xi), \tag{30}$$

where,

$$\xi = kx - 2kA(p - c)t. \tag{31}$$

Then we have,

$$U(x, t) = a_0 + a_1 \operatorname{sech}(kx - vt). \tag{32}$$

The solution is,

$$\psi(x, t) = U(kx - vt)e^{i(Ax+Bt)}. \tag{33}$$

The pulse soliton corresponding to solution Eq. (33) is represented on figure 3. The left panel is the 3D representation of the modulus while the right panel displays the 2D depiction of the envelope at  $t = 0$ . Branches are null implying that the renormalization term diverges. Hence, no direct simulation can be done using this solution as initial condition. However, this solution is acceptable from a mathematical point of view.

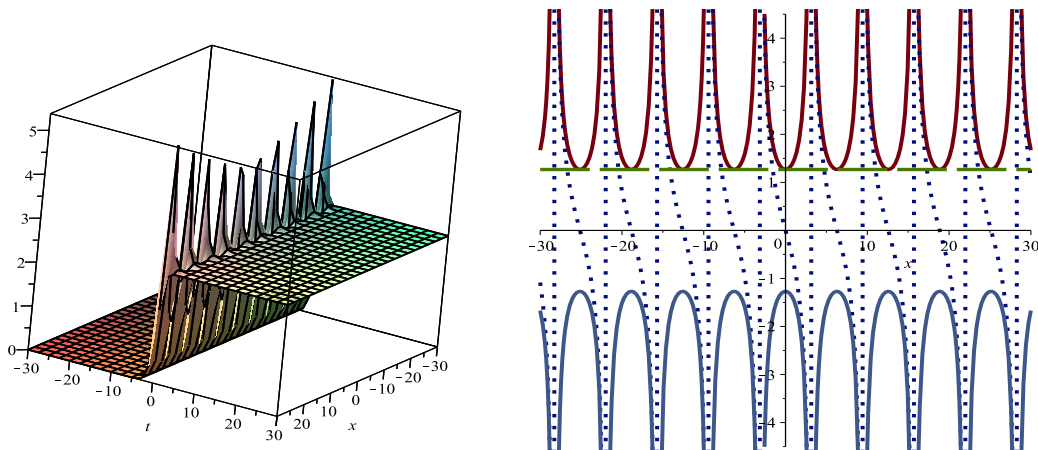
### 2.3 The tanh method : analytic solutions and physical implication

The solutions of equation (9), may be expressed by a polynomial in tanh as follows:

$$U(\xi) = \sum_{j=0}^N a_j (\tanh(\xi))^j, \tag{34}$$

where  $a_i$  are constants to be determined later. The order of solution is  $N = 1$ . Thus,  $U(\xi)$  can be expressed as follows:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \tanh(\xi). \tag{35}$$



**Fig. 4** Solution obtained by the tanh method and corresponding to Eq. (39) with the following parameters:  $\gamma_r = 0.5, A = 2, p = 0.5, q = 0.7$  and  $c = 0.5$ .  $v$  is negative while  $k$  is positive. The modulus is represented on the left whereas on the right we set out the 2D representation of the envelope (solid line) at  $t = 0$  (same caption as in figure 1).

Substituting equation (35) into equation (9) and solving with maple software, we obtain:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \sqrt{-\frac{1}{4} \frac{A^2c - A^2p - \gamma_r}{q}}, \\
 a_1 &= \sqrt{-\frac{1}{4} \frac{A^2c - A^2p - \gamma_r}{q}}, \\
 k &= \sqrt{-\frac{A^2c - A^2p - \gamma_r}{4c - 8p}}, \\
 v &= \frac{1}{2} \frac{1}{(c - 2p)} (2A^2c - 5A^2cp + 3A^2p^2 - 4Akc^2 + 4Akcp \\
 &\quad + 8Akcp - 8Akp^2 - 2C\gamma_r + 3p\gamma_r).
 \end{aligned}$$

The general solution of equation (9) are written as follows:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \tanh(\xi), \tag{36}$$

where,

$$\xi = kx - vt. \tag{37}$$

Then we have,

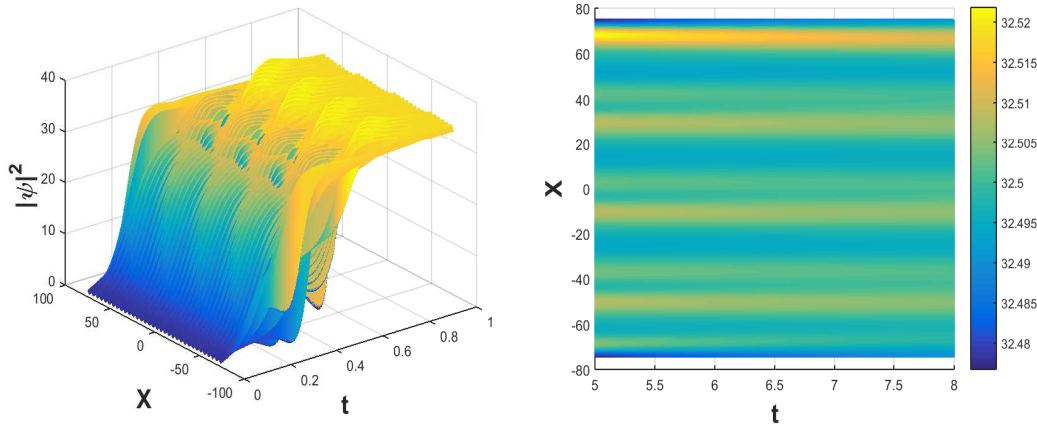
$$U(x, t) = a_0 + a_1 \tanh(kx - vt). \tag{38}$$

The solution is,

$$\psi(x, t) = U(kx - vt)e^{i(Ax+Bt)}. \tag{39}$$

Figure 4 corresponds to solution Eq. (39) which is a temporal kink soliton and along the x-axis, a solitary wavetrain. The right panel also corresponds to a zoom of that solution at time  $t = 0$ . It can be also seen that the modulus is always different from zero. It also agrees with the renormalizing term.

Figure 5 shows an example of propagation of the wave by direct simulation. In the left curve, the wave starts from an initial position. It grows during a transitory time to reach a stable position. On the right, the top view representation shows that the wave continues its progression after the transient time in a stable way.



**Fig. 5** Curves simulating the propagation of the wave. These figures are obtained with the same parameters as in figure 1. The left panel corresponds to the displacement of the wave in its transient time. The one on the right visualizes the propagation in the steady state.

### 3 Exact solution of the MCGL equation using Painleve truncated approach

Let us now solve equation (1) using the Painleve truncated approach. To this aim, we use the wave transformation:

$$\psi(x, t) = A(x, t)e^{i(kx-wt)} + B(x, t)^{-i(kx-wt)} \tag{40}$$

where  $k, w$  are real constants.  $A, B$  are complex function of  $t$  and  $x$ . Inserting Eq. (40) into Eq. (1) we obtain,

$$\begin{aligned} & iA_t A^* + w|A|^2 + iB_t B^* - w|B|^2 + P_r A_{xx} A^* + 2iP_r k A_x A^* - P_r k^2 |A|^2 \\ & - P_r B_{xx} B^* - 2iP_r k B_x B^* - P_r k^2 |B|^2 + iP_m A_{xx} A^* - 2P_m k A_x A^* - iP_m k^2 |A|^2 \\ & - iP_m B_{xx} B^* + 2P_m k B_x B^* - iP_m k^2 |B|^2 + Q_r |A|^4 + 4Q_r |A|^2 |B|^2 + Q_r |B|^4 \\ & + iQ_m |A|^4 + 4iQ_m |A|^2 |B|^2 + iQ_m |B|^4 = i\gamma_r |A|^2 + i\gamma_r |B|^2 - \gamma_m |A|^2 - \gamma_m |B|^2 \\ & + C_r |A_x|^2 + iC_r k A^* A_x + iC_r k A A_x^* - C_r k^2 |A|^2 + C_r |B_x|^2 - iC_r k B^* B_x \\ & - iC_r k B B_x^* - C_r k^2 |B|^2 - iC_m |A_x|^2 - C_i k A^* A_x - C_m k A A_x^* - iC_m k^2 |A|^2 \\ & + iC_m |B_x|^2 + C_m k B^* B_x + C_m k B B_x^* - iC_m k^2 |B|^2. \end{aligned} \tag{41}$$

For the resolution of Eq. (41), we consider:

$$\begin{aligned} A(x, t) &= a(x) e^{i(\varphi_1(x) - \omega_1 t)}, \\ B(x, t) &= b(x) e^{i(\varphi_2(x) - \omega_2 t)}. \end{aligned} \tag{42}$$

To simplify the resolution of the equation (41), we introduce relation Eq. (42) into Eq. (41). The solutions of equation (41), may be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= H_1 \int_0^x \frac{dx'}{a^2(x')}, \\ \varphi_2 &= H_2 \int_0^x \frac{dx'}{b^2(x')}, \end{aligned} \tag{43}$$

and,

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \frac{H_1}{a^2}, \\ \varphi_2' &= \frac{H_2}{b^2}. \end{aligned} \tag{44}$$

We are also going to interested us, to solutions who respect the conditions:

$$\varphi_j = 0 \Rightarrow H_j = 0 \tag{45}$$

where ( $j = 1, 2$ ).

Equation (41) can be separated into two parts; the real part and the imaginary part. So we get a system of two equations, then, we have:

$$\begin{aligned} &+ \omega_1 a^2 + \omega_2 b^2 + \omega a^2 - \omega b^2 + P_r a_{xx} a - P_r k^2 a^2 - P_r b_{xx} b - P_r k^2 b^2 - 2k P_m a_x a \\ &+ 2k P_m b_x b + 4Q_r a^2 b^2 + Q_r a^4 + Q_r b^4 \\ = & - \gamma_m a^2 - \gamma_m b^2 + C_r a_x^2 + C_r b_x^2 - C_r k^2 a^2 - C_r k^2 b^2 - 2C_m k a_x a + 2C_m k b_x b a + b \\ &- P_m a_{xx} a - P_m k^2 a^2 - P_m b_{xx} b - P_m k^2 b^2 + 2k P_r a_x a - 2k P_r b_x b + 4Q_m a^2 b^2 + Q_m a^4 + Q_m b^4 \\ = & \gamma_r a^2 + \gamma_r b^2 - C_m a_x^2 + C_m b_x^2 - C_m k^2 a^2 - C_m k^2 b^2 + 2C_r k a_x a - 2C_r k b_x b. \end{aligned} \tag{46}$$

We take the Painleve truncated approach:

$$\begin{aligned} a(x) &= U_0 + U_1 f(x), \\ b(x) &= V_0 + V_1 f(x). \end{aligned} \tag{47}$$

Substituting equation (47) into equation (46), we obtain:

$$\begin{cases} l_0 + l_1 f + l_2 f^2 + l_3 f^3 + l_4 f^4 + l_5 f_x + l_6 f_{xx} + l_7 f_x f + l_8 f_{xx} f + l_9 f_x^2 = 0, \\ d_0 + d_1 f + d_2 f^2 + d_3 f^3 + d_4 f^4 + d_5 f_x + d_6 f_{xx} + d_7 f_x f + d_8 f_{xx} f + d_9 f_x^2 = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Where coefficient  $l_n (n = 1 \dots 9)$  and  $d_n (n = 1 \dots 9)$  are defined as follows:

$$\left\{ \begin{aligned} l_0 &= \omega_1 U_0^2 + \omega_2 V_0^2 + \omega U_0^2 - \omega V_0^2 - P_r k^2 U_0^2 - P_r k^2 V_0^2 + 4Q_r U_0^2 V_0^2 \\ &+ Q_r U_0^4 + Q_r V_0^4 + \gamma_m U_0^2 + \gamma_m V_0^2 + C_r k^2 U_0^2 + C_r k^2 V_0^2, \\ l_1 &= 2U_0 U_1 \omega_1 + 2V_0 V_1 \omega_2 + 2U_0 U_1 \omega - 2V_0 V_1 \omega - 2P_r k^2 U_0 U_1 - 2P_r k^2 V_0 V_1 \\ &+ 8Q_r V_0 V_1 U_0^2 + 8Q_r U_0 U_1 V_0^2 + 4Q_r U_1 U_0^3 + 4Q_r V_1 V_0^3 \\ &+ 2\gamma_m U_0 U_1 + 2\gamma_m V_0 V_1 + 2C_r k^2 U_0 U_1 + 2C_r k^2 V_0 V_1, \\ l_2 &= \omega_1 U_1^2 + \omega_2 V_1^2 + \omega U_1^2 - \omega V_1^2 - P_r k^2 U_1^2 - P_r k^2 V_1^2 + 4Q_r U_0^2 V_1^2 + 4Q_r U_1^2 V_0^2 \\ &+ 16Q_r U_0 U_1 V_0 V_1 + 6Q_r U_0^2 U_1^2 + 6Q_r V_0^2 V_1^2 + \gamma_m V_1^2 + \gamma_m U_1^2 + C_r k^2 U_1^2 + C_r k^2 V_1^2, \\ l_3 &= 8Q_r U_0 U_1 V_1^2 + 8Q_r V_0 V_1 U_1^2 + 4Q_r U_0 U_1^3 + 4Q_r V_0 V_1^3, \\ l_4 &= 4Q_r U_1^2 V_1^2 + Q_r U_1^4 + Q_r V_1^4, \\ l_5 &= -2k P_m U_1 U_0 + 2k P_m V_1 V_0 + 2C_m k U_0 U_1 - 2C_m k V_0 V_1, \\ l_6 &= P_r U_1 U_0 - P_r V_1 V_0, \\ l_7 &= -2P_m k U_1^2 + 2P_m k V_1^2 + 2k C_m U_1^2 - 2k C_m V_1^2, \\ l_8 &= P_r U_1^2 - P_r V_1^2, \\ l_9 &= -C_r U_1^2 + C_r V_1^2, \end{aligned} \right. \tag{49a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} d_0 &= U_0 + V_0 - P_m k^2 U_0^2 - P_m k^2 V_0^2 + 4Q_m U_0^2 V_0^2 \\ &\quad + Q_m U_0^4 + Q_m V_0^4 - \gamma_r U_0^2 - \gamma_r V_0^2 + C_m k^2 U_0^2 + C_m k^2 V_0^2, \\ d_1 &= U_1 + V_1 - 2P_r k^2 U_0 U_1 - 2P_r k^2 V_0 V_1 \\ &\quad + 8Q_m V_0 V_1 U_0^2 + 8Q_m U_0 U_1 V_0^2 + 4Q_m U_1 U_0^3 + 4Q_m V_1 V_0^3 \\ &\quad - 2\gamma_r U_0 U_1 - 2\gamma_r V_0 V_1 + 2C_m k^2 U_0 U_1 + 2C_m k^2 V_0 V_1, \\ d_2 &= -P_m k^2 U_1^2 - P_m k^2 V_1^2 + 4Q_m U_0^2 V_1^2 + 4Q_m U_1^2 V_0^2 + 16Q_m U_0 U_1 V_0 V_1 \\ &\quad + 6Q_m U_0^2 U_1^2 + 6Q_m V_0^2 V_1^2 - \gamma_r V_1^2 - \gamma_r U_1^2 + C_m k^2 U_1^2 + C_m k^2 V_1^2, \\ d_3 &= 8Q_m U_0 U_1 V_1^2 + 8Q_m V_0 V_1 U_1^2 + 4Q_m U_0 U_1^3 + 4Q_m V_0 V_1^3, \\ d_4 &= 4Q_m U_1^2 V_1^2 + Q_m U_1^4 + Q_m V_1^4, \\ d_5 &= -2kP_r U_1 U_0 + 2kP_r V_1 V_0 + 2C_r k U_0 U_1 - 2C_r k V_0 V_1, \\ d_6 &= P_m U_1 U_0 - P_m V_1 V_0, \\ d_7 &= -2P_r k U_1^2 + 2P_r k V_1^2 + 2kC_r U_1^2 - 2kC_r V_1^2, \\ d_8 &= P_m U_1^2 - P_m V_1^2, \\ d_9 &= -C_m U_1^2 + C_m V_1^2. \end{aligned} \right. \tag{49b}$$

To simplify the resolution of the system above, we set the following compatibility relations

$$l_n = d_n (n = 1, 2, \dots, 9). \tag{50}$$

Then, we have

$$\left\{ \begin{aligned} Q_r &= Q_m = q, \\ C_r &= C_m = c, \\ P_r &= P_m = p, \\ -\gamma_r &= \gamma_m. \end{aligned} \right. \tag{51}$$

Thus, we have only one equation to solve namely

$$l_0 + l_1 f + l_2 f^2 + l_3 f^3 + l_4 f^4 + l_5 f_x + l_6 f_{xx} + l_7 f_x f + l_8 f_{xx} f + l_9 f_x^2 = 0. \tag{52}$$

### 3.1 Reduction of the MCGL equation to the elliptic ODE of the first kind

The ODE Eq. (52) will take the simple form:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = l_4 f^4 + l_2 f^2 + l_0. \tag{53}$$

#### Solution 1

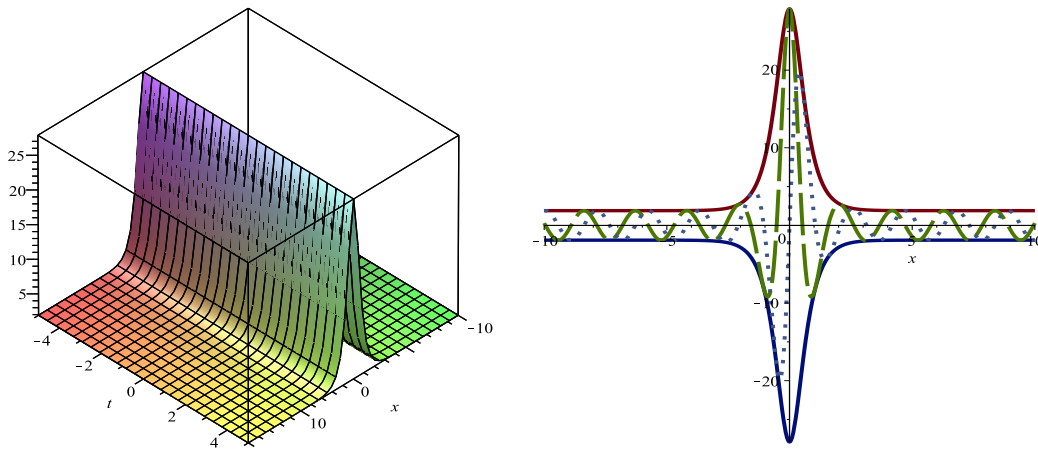
$$\left\{ \begin{aligned} l_0 &= 0 \\ l_2 &> 0 \\ l_4 &< 0. \end{aligned} \right. \tag{54}$$

In this case,

$$f(x) = \sqrt{\frac{-l_2}{l_4}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{l_2}x\right). \tag{55}$$

Finally,

$$\begin{pmatrix} A(x, t) \\ B(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \tag{56}$$



**Fig. 6** Solution corresponding to Eq. (56) with the following parameters:  $\omega = 0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $p = -0.5$ ,  $c = 0.5$ ,  $q = -0.001$ ,  $U_0 = 1.9$ ,  $V_0 = 1.9$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma_l = 1$ ,  $\gamma_r = -1$ . The left panel presents the modulus. The right panel exhibits the 2D representation of the envelope (solid line) at  $t = 0$ . It has the same captions as in Figure 1.

The left and right panels of figure 6 show the modulus in 3D and the envelope in 2D at  $t = 0$ . The soliton pulse obtained here corresponds to solution Eq. (56). The branches of this solution are non-zero. Thus, direct numerical simulations can be performed (fig.9).

**Solution2**

$$\begin{cases} l_0 \neq 0 \\ l_2 < 0 \\ l_4 > 0. \end{cases} \tag{57}$$

In this case,

$$f(x) = \sqrt{\frac{-l_2}{l_4}} \tanh(\sqrt{-l_2}x). \tag{58}$$

Finally,

$$\begin{pmatrix} A(x,t) \\ B(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \tag{59}$$

The kink soliton corresponding to solution Eq. (59) is represented by figure 7. In 3D, we have the modulus and in 2D the envelope at  $t = 0$ . The branches of this solution are zero. No direct numerical simulation can be performed in this case. However, the solution is mathematically acceptable.

**3.2 Reduction of the MCGL equation to the elliptic ODE of the second kind**

The ODE (15) will take the simple form:

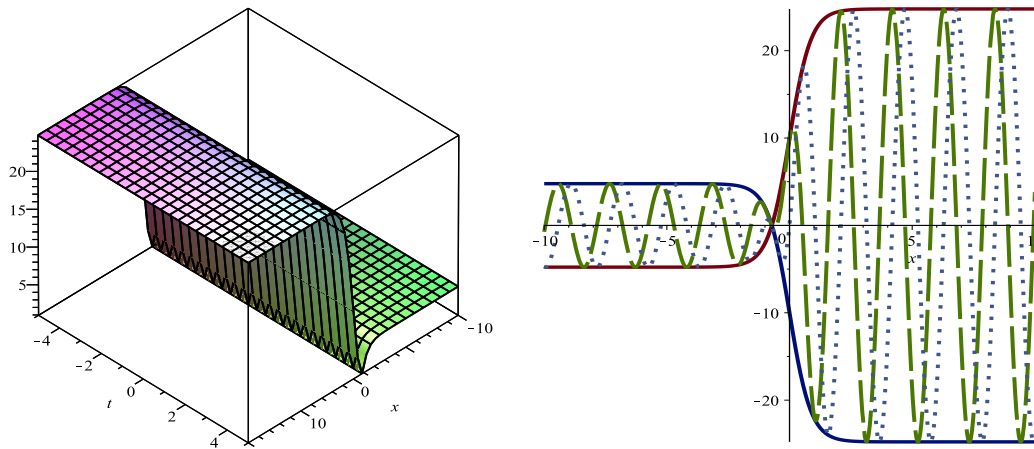
$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = l_3 f^3 + l_2 f^2 + l_0. \tag{60}$$

If we take,

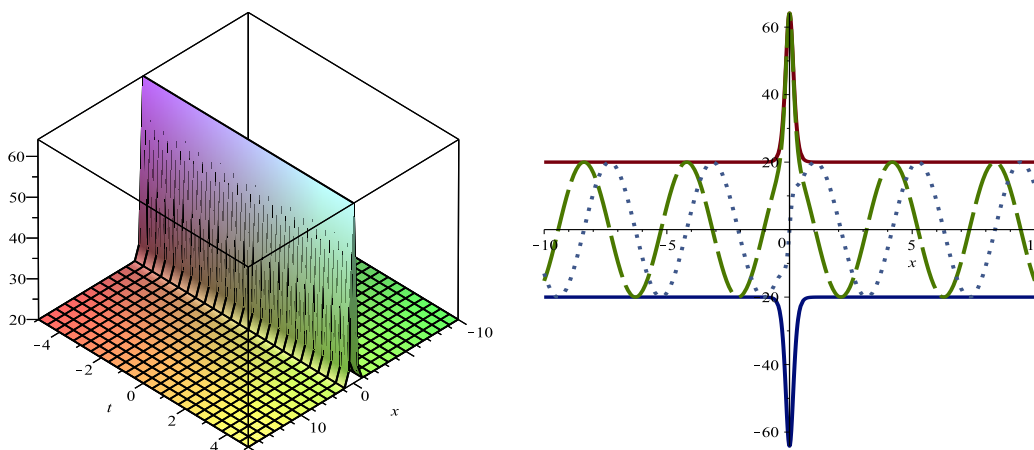
$$\begin{cases} l_0 \neq 0 \\ l_2 > 0 \\ l_3 > 0. \end{cases} \tag{61}$$

In this case,

$$f(x) = \frac{l_2}{l_3} \operatorname{sech}^2(\sqrt{l_2}x). \tag{62}$$



**Fig. 7** Solution plotted using Eq. (59). These figures are obtained with the following parameters:  $\omega = -0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $p = -0.5$ ,  $c = -50$ ,  $q = 0.001$ ,  $U_0 = 10$ ,  $V_0 = 10$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma_i = 1$ ,  $\gamma_r = -1$ . The modulus is represented on the left whereas on the right we set out the 2D representation of the envelope (solid line) at  $t = 0$  (same caption as in figure 1).



**Fig. 8** 3D and 2D representation of Eq. (63) with the following parameters:  $\omega = -0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $p = -0.5$ ,  $c = 15$ ,  $q = 0.001$ ,  $U_0 = 20$ ,  $V_0 = 20$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma_i = 1$ ,  $\gamma_r = -1$ . In 3D, we have represented the modulus. In 2D, we have the envelope (solid line) at  $t = 0$ . The green dash color corresponds to the imaginary part while the blue dot stands for the real part.

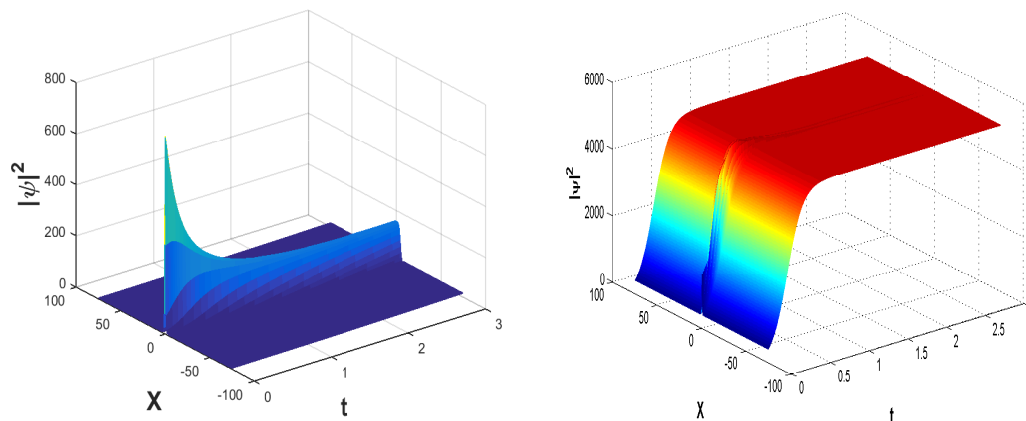
Finally,

$$\begin{pmatrix} A(x,t) \\ B(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \tag{63}$$

Figure 8 has the same shape as figure 6. It is a pulse soliton with non-zero infinite branches, corresponding to the solution Eq. (63). Similarly, direct numerical simulation will be carried out (figure 9).

In figure 9, direct simulations are performed to show the propagation of the wave. The left-hand panel corresponds to Eq. (56). It starts from an initial position and decreases during a transient time to reach a stable position. On the other hand, the right-hand panel corresponds to Eq. (63). This solution starts from an initial position and also increases rather during a transitory time to reach a stable position.





**Fig. 9** Curves simulating the propagation of the wave. The left panel which corresponds to Eq. (56) is obtained with the same parameters as in figure 6. The right one which corresponds to Eq. (63) is obtained with the same parameters as in figure 8. These curves correspond to the displacement of the wave in its transient time.

## 4 Conclusion

In this paper, we have shown that we can obtain new solutions of the modified complex Ginzburg-Landau equation. We have applied four methods which are the alternative( $G'/G$ )-expansion method, the sech method, the tanh method and the Painleve truncated approach to find exact solitary wavetrain solutions. As outcomes, we have obtained the kink solutions and the pulse solutions for the equation considered. The authors of [30–33] have obtained solutions with null infinite branches as those found here (see figures 3 and 7). The set of figures 1, 2, 4, 6, and 8 are solutions with non-zero infinite branches. Direct numerical simulations have been carried out on this latter set of solutions to show that they are both mathematically and physically legitimate. Therefore, it is always important to ensure the validity, from the physical point of view, of the exact analytical solutions determined.

## References

- [1] Li, D.S. and Zhang, H.Q. (2004), A new extended tanh-function method and its application to the dispersive long wave equations in (2+1) dimensions, *Appl. Math. Comput.*, **147**, 789-797.
- [2] Bekir, A. (2008), New solitons and periodic wave solutions for some nonlinear physical models by using the sine-cosine method, *Phys. Scr.*, **77**, 501-505.
- [3] Mehdi, D. and Fatemeh, S. (2007), Solution of a partial differential equation subject to temperature over-specification by He's homotopy perturbation method, *Phys. Scr.*, **75**, 778-787.
- [4] Hirota, R. (1971), Exact solution of the Korteweg-de-Vries equation for multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.*, **27**, 1192-1194.
- [5] Zayed, E.M.E. and Abdelaziz, M.A.M. (2011), Exact solutions for the nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients using the generalized extended tanh-function, the sine-cosine and the exp-function method, *Appl. Math. Comput.*, **218**, 2259-2268.
- [6] Tsigaridas, G., Fragos, A., Polyzos, I., Fakis, M., Ioannou, A., Giannetas, V., and Persephonis, P. (2005), Evolution of near-soliton initial conditions in non-linear wave equations through their Bäcklund transforms, *Chaos Solitons Fract.*, **23**, 1841-1854.
- [7] Osman, M.S., Abdel-Gawad, H.I., and El Mahdy, M.A. (2018), Two-layer-atmospheric blocking in a medium with high nonlinearity and lateral dispersion, *Results in Physics*, **8**, 1054-1060.
- [8] Osman, M.S. (2018), On complex wave solutions governed by the 2D Ginzburg-Landau equation with variable coefficients, *Optik*, **156**, 169-174.
- [9] Osman, M.S., Korkmaz, A., Rezazadeh, H., Mirzazadeh, M., Eslami, M., and Zhou, Q. (2018), The unified method for conformable time fractional Schrödinger equation with perturbation terms, *Chin. J. of Phys.*, **56**,

2500-2506.

- [10] Rezaazadeh, H., Osman, M.S., Eslami, M., Ekici, M., Sonmezoglu, A., Asma, M., Othman, W.A.M., Wong, B.R., Mirzazadeh, M., Zhou, Q., Biswas, A., and Belic, M. (2018), Mitigating Internet bottleneck with fractional temporal evolution of optical solitons having quadratic-cubic nonlinearity, *Optik*, **164**, 84-92.
- [11] Abdel-Gawad, H.I. and Osman, M.S. (2014), Exact solutions of the Korteweg-de-Vries equation with space and time dependent coefficients by the extended unified method, *Ind. J. Pure Appl. Math.*, **45**, 1-12.
- [12] Osman, M.S., Ghanbari, B., and Machado, J.A.T. (2019), New complex waves in nonlinear optics based on the complex Ginzburg-Landau equation with Kerr law nonlinearity, *Eur. Phys. J. Plus*, **134**, 20-30.
- [13] Suzo, A.A. (2005), Intertwining technique for the matrix Schrödinger equation, *Phys. Lett. A*, **335**, 88-102.
- [14] Abdul-Majid, W. and Osman, M.S. (2018), Analyzing the combined multi-waves polynomial solutions in a two-layer-liquid medium, *Comp. and Math. with Appl.*, **76**, 276-283.
- [15] Osman, M.S. and Machado, J.A.T. (2018), New monotonous combined multi-wave solutions for (2+1)-dimensional variable coefficients KdV equation, *Nonlinear Dyn.*, **93**, 733-740.
- [16] Osman, M.S. and Machado, J.A.T. (2017), The dynamical behavior of mixed-type soliton solutions described by (2+1)-dimensional Bogoyavlensky-Konopelchenko equation with variable coefficients, *J. of Elect. Waves and Appl.*, **32**, 1457-1464.
- [17] Osman, M.S. (2016), Multi-soliton rational solutions for some nonlinear evolution equations, *Open Phys.*, **14**, 26-36.
- [18] Osman, M.S. (2017), Analytical study of rational and double-soliton rational solutions governed by the KdV-Sawada-Kotera-Ramani equation with variable coefficients, *Nonlinear Dyn.*, **89**, 2283-2289.
- [19] Banerjee, R.S. (1998), Painlevé analysis of the  $K(m,n)$  equations which yield compactons, *Phys. Scr.*, **57**, 598-600.
- [20] Vakhnenko, V.O., Parkes, E.J., and Morrison, A.J. (2003), A Bäcklund transformation and the inverse scattering transform method for the generalised Vakhnenko equation, *chaos solitons Fractals*, **17**, 683-692.
- [21] Wang, M., Li, X., and Zhang, J. (2008), The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A*, **372**, 417-423.
- [22] Newell and Whitehead (1971), *Review of the finite bandwidth concept. In: Instability of continuous systems.* Berlin: Springer-Verlag.
- [23] Stewartson, K. and Stuart (1971), A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **48**, 529-545.
- [24] Halperin, B.I., Lubensky, T.C., and Shang-Keng (1974), First-order phase transitions in superconductors and smectic-A liquid crystals, *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 292-295.
- [25] Liu, F., Mondello, M., and Goldenfeld, N. (1991), Kinetics of the superconducting transition, *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 3071-3074.
- [26] Igor Arangon, S., and Kramer, L. (2002), The world of the complex Ginzburg-Landau equation, *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 99-143.
- [27] Hentschel, H.G.E. and Procaccia, I. (1983), Passive scalar fluctuations in intermittent turbulence with applications to wave propagation, *Phys. Rev. A*, **28**, 417-428.
- [28] Nozaki, K. and Bekki (1983), Pattern selection and spatiotemporal transition to chaos in the Ginzburg-Landau equation, *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 2171-2174.
- [29] Stenflo, L. (1988), A solution of the generalised non-linear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**, L499-L500.
- [30] Kenfack-Jiotsa, A., Fewo, S.I., and Kofan, T.C. (2006), Effects of renormalization parameters on singularities and special soliton solutions of the modified complex Ginzburg-Landau equation, *Phys. Scr.*, **74**, 499-502.
- [31] Mohamadou, A., Ndzana II, F., and Kofan, T.C. (2006), Pulse solution of the modified cubic complex Ginzburg-Landau equation, *Phys. Scr.*, **73**, 596-600.
- [32] Yomba, E. and Kofan, T.C. (1996), On exact solutions of the generalized modified complex Ginzburg-Landau equation using the Weiss-Tabor-Carnevale method, *Phys. Scr.*, **54**, 576-580.
- [33] Yomba, E. and Kofan, T.C. (1999), On exact solutions of the modified complex Ginzburg-Landau equation, *Physica D*, **125**, 105-122.

Dear Author,

Here are the proofs of your article.

- You can submit your corrections **online**, via **e-mail** or by **fax**.
- For **online** submission please insert your corrections in the online correction form. Always indicate the line number to which the correction refers.
- You can also insert your corrections in the proof PDF and **email** the annotated PDF.
- For fax submission, please ensure that your corrections are clearly legible. Use a fine black pen and write the correction in the margin, not too close to the edge of the page.
- Remember to note the **journal title**, **article number**, and **your name** when sending your response via e-mail or fax.
- **Check** the metadata sheet to make sure that the header information, especially author names and the corresponding affiliations are correctly shown.
- **Check** the questions that may have arisen during copy editing and insert your answers/ corrections.
- **Check** that the text is complete and that all figures, tables and their legends are included. Also check the accuracy of special characters, equations, and electronic supplementary material if applicable. If necessary refer to the *Edited manuscript*.
- The publication of inaccurate data such as dosages and units can have serious consequences. Please take particular care that all such details are correct.
- Please **do not** make changes that involve only matters of style. We have generally introduced forms that follow the journal's style. Substantial changes in content, e.g., new results, corrected values, title and authorship are not allowed without the approval of the responsible editor. In such a case, please contact the Editorial Office and return his/her consent together with the proof.
- If we do not receive your corrections **within 48 hours**, we will send you a reminder.
- Your article will be published **Online First** approximately one week after receipt of your corrected proofs. This is the **official first publication** citable with the DOI. **Further changes are, therefore, not possible.**
- The **printed version** will follow in a forthcoming issue.

#### **Please note**

After online publication, subscribers (personal/institutional) to this journal will have access to the complete article via the DOI using the URL: [http://dx.doi.org/\[DOI\]](http://dx.doi.org/[DOI]).

If you would like to know when your article has been published online, take advantage of our free alert service. For registration and further information go to: <https://www.lhscientificpublishing.com/>.

Due to the electronic nature of the procedure, the manuscript and the original figures will only be returned to you on special request. When you return your corrections, please inform us if you would like to have these documents returned.



## Solitons Solutions of the Complex Ginzburg-Landau Equation with Saturation Term Using Painleve Truncated Approach

P.H. Kamdoun-Tamo<sup>1,2†</sup>, A. Kenfack-Jiotsa<sup>1,2</sup>, T.C. Kofane<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratory of Mechanics, Department of Physics, Faculty of Sciences, and African Center of Excellence in I.C.T ( C.E.T.I.C ) University of Yaounde I, P.O. Box 812, Yaounde, Cameroon

<sup>2</sup> Nonlinear Physics and Complex Systems Group, Department of Physics, The Higher Teachers' Training College, University of Yaounde I, P.O. Box 47 Yaounde, Cameroon

### Submission Info

Communicated by A.C.J. Luo  
Received 28 September 2019  
Accepted 23 March 2020  
Available online 1 July 2021

### Keywords

Modified complex Ginzburg-Landau equation  
Saturation term  
Painleve truncated approach

### Abstract

Considering the pulse ansatz, we derive different classes of the modified complex Ginzburg-Landau (MCGL) equation and we use the Painleve truncated approach to construct the solitons solutions . We then present the importance of the saturation term. The solutions obtained by the combined methods are asymmetric- dark and bright solitons. Numerical simulations are performed to show how the wave propagates. The shape of solutions can be well controlled by adjusting the parameters of the system.

©2021 L&H Scientific Publishing, LLC. All rights reserved.

## 1 Introduction

The solitons solutions of the complex Ginzburg-Landau equations play an essential role in the nonlinear science. Nonlinear phenomena appear in various scientific and engineering fields, such as plasma physics, optical fibers, biology, fluid mechanics, superfluidity, superconductivity and chemical physics. As is well known, many methods for searching for soliton solutions have been developed, such as algebra-geometric method [1, 2], the variable separation method [3, 4], the Painleve truncated approach [5], the tanh method [6], the sine-cosine method [7], the homotopy perturbation method [8], the Hirota bilinear method [9], the exp-function method [10], the Kudryashov method [11, 12], the symmetry method [13, 14], the soliton ansatz method [15, 16], the Bäcklund transformation method [17], the (G'/G)-expansion method [18], the inverse scattering transform method [19], and so on.

The objective of this paper is to apply the Painleve truncated approach to construct the solitons solutions of the modified (CGL) equation.

$$i\psi_t + P\psi_{xx} + Q|\psi|^2\psi = i\gamma\psi + C\frac{|\psi_x|^2}{1 + \delta|\psi|^2}\psi, \quad (1)$$

<sup>†</sup>Corresponding author.

Email address: herve.kamdoun@yahoo.com

13 where  $\frac{|\psi_x|^2}{1+\delta|\psi|^2}\psi$  is the saturation term,  $t$  is the retarded time and  $x$  is the distance of propagation;  
 14  $P, Q, \gamma, \delta$  are complex constants *ie*,

$$P = P_r + iP_m, Q = Q_r + iQ_m, C = C_r + iC_m, \gamma = \gamma_r + \gamma_m, \delta = \delta_r + \delta_m.$$

15 With  $i^2 = -1$

16 This paper is organized as follows: In Section 2, we present the model and mathematical background.  
 17 In sections 3, 4 and 5 we find the solutions with the Painleve truncated approach and construct solitons  
 18 solutions. Finally in section 6 some conclusions are presented.

19 **2 Model and mathematical background**

20 We consider the one-dimensional modified CGL equation which reads,

$$i\psi_t + P\psi_{xx} + Q|\psi|^2\psi = i\gamma\psi + C\frac{|\psi_x|^2}{1 + \delta|\psi|^2}\psi. \tag{2}$$

21 Equation (2) may reduce to

$$(1 + \delta|\psi|^2)(i\psi_t + P\psi_{xx} + Q|\psi|^2\psi) = i\gamma\psi(1 + \delta|\psi|^2) + C|\psi_x|^2\psi. \tag{3}$$

22 Initially, we will search the solution of equation (2) by taking an ansatz given by

$$\psi(x, t) = A(x, t)e^{i(kx-wt)} + B(x, t)e^{-i(kx-wt)}, \tag{4}$$

23 where  $k, v, w$  are real constants.  $A, B$  are complex function of  $t$  and  $x$ . Inserting Eq.(4) into Eq.(3) we  
 24 obtain,

$$\begin{aligned} & iA_t + \omega A + P_r A_{xx} + 2iP_r k A_x - P_r k^2 A - 2P_m k A_x - iP_m k^2 A + Q_r A |A|^2 + 2Q_r A |B|^2 + iQ_m A |A|^2 \\ & + 2iQ_m A |B|^2 + i\delta_r |A|^2 A_t + \omega A \delta_r |A|^2 + P_r \delta_r A_{xx} |A|^2 + 2iP_r k A_x \delta_r |A|^2 - P_r k^2 A \delta_r |A|^2 \\ & - 2P_m k A_x \delta_r |A|^2 - iP_m k^2 A \delta_r |A|^2 + Q_r \delta_r A |A|^4 + 2Q_r \delta_r A |A|^2 |B|^2 + iQ_m \delta_r A |A|^4 \\ & + 2iQ_m \delta_r A |A|^2 |B|^2 + i\delta_r |B|^2 A_t + \omega A \delta_r |B|^2 + P_r \delta_r A_{xx} |B|^2 + 2iP_r k A_x \delta_r |B|^2 - P_r k^2 A \delta_r |B|^2 \\ & - 2P_m k A_x \delta_r |B|^2 - iP_m k^2 A \delta_r |B|^2 + Q_r \delta_r A |A|^2 |B|^2 + 2Q_r \delta_r A |B|^4 + iQ_m \delta_r A |A|^2 |B|^2 \\ & + 2iQ_m \delta_r A |B|^4 - \delta_m |A|^2 A_t + i\omega A \delta_m |A|^2 + iP_r \delta_m A_{xx} |A|^2 - 2P_r k A_x \delta_m |A|^2 - iP_r k^2 A \delta_m |A|^2 \\ & - 2iP_m k A_x \delta_m |A|^2 + P_m k^2 A \delta_m |A|^2 + iQ_r \delta_m A |A|^4 + 2iQ_r \delta_m A |A|^2 |B|^2 - Q_m \delta_m A |A|^4 \\ & - 2Q_r \delta_m A |A|^2 |B|^2 - \delta_m |B|^2 A_t - i\omega A \delta_m |B|^2 + iP_r \delta_m A_{xx} |B|^2 - 2P_r k A_x \delta_m |B|^2 - iP_r k^2 A \delta_m |B|^2 \\ & - 2iP_m k A_x \delta_m |B|^2 + P_m k^2 A \delta_m |B|^2 + iQ_r \delta_m A |A|^2 |B|^2 + 2iQ_r \delta_m A |B|^4 - Q_m \delta_m A |A|^2 |B|^2 \\ & - 2iQ_m \delta_m A |B|^4 + iP_m A_{xx} + i\delta_r P_m A_{xx} |A|^2 + iP_m \delta_r A_{xx} |B|^2 - \delta_m P_m A_{xx} |A|^2 + P_m \delta_m A_{xx} |B|^2 \\ = & i\gamma_r A - \gamma_m A + i\gamma_r \delta_r A |A|^2 - \gamma_m \delta_r A |A|^2 + i\gamma_r \delta_r A |B|^2 - \gamma_m \delta_r A |B|^2 - \gamma_r \delta_m A |A|^2 \\ & - i\gamma_m \delta_m A |A|^2 - \gamma_r \delta_m A |B|^2 - i\gamma_m \delta_m A |B|^2 + C_r A |A_x|^2 + iC_r k |A|^2 A_x + iC_r k A^2 A_x^* - k^2 C_r A |A|^2 + C_r A |B_x|^2 \\ & - iC_r k A B^* B_x - iC_r k A B B_x^* - k^2 C_r A |B|^2 + iC_m A |A_x|^2 - C_m k A_x |A|^2 - C_m k A^2 A_x^* \\ & - iC_m k^2 A |A|^2 + iC_m A |B_x|^2 + C_m k A B^* B_x \\ & + C_m k A B B_x^* - iC_m k^2 A |B|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

25 For the resolution of Eq.(5), we let:

$$\begin{aligned} A(x,t) &= a(x,t) e^{i(\varphi_1(x)-\omega_1 t)}, \\ B(x,t) &= b(x,t) e^{i(\varphi_2(x)-\omega_2 t)}. \end{aligned} \tag{6}$$

26 To simplify the resolution of the equation (5), we introduce relation Eq.(6) into Eq.(5)

### 27 **3 Resolution of the equation by the Painleve truncated approach**

28 The solutions of equation (5), may be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= H_1 \int_0^x \frac{dx'}{a^2(x')}, \\ \varphi_2 &= H_2 \int_0^x \frac{dx'}{b^2(x')}, \end{aligned} \tag{7}$$

29 and,

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \frac{H_1}{a^2}, \\ \varphi_2' &= \frac{H_2}{b^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

30 We now focus on the solutions that satisfy the following conditions:

$$\varphi_j = 0 \Rightarrow H_j = 0. \tag{9}$$

31 Equation (5) can be separated into two parts; the real part and the imaginary part. So we get a  
32 system of two equations. We have,

$$\left\{ \begin{aligned} &a\omega_1 + \omega a + P_r a_{xx} - P_r k^2 a_{xx} - 2P_m k a_x + Q_r a^3 + 2Q_r a b^2 + \delta_r a^3 \omega_1 + \omega \delta_r a^3 + P_r \delta_r a^2 a_{xx} - P_r k^2 \delta_r a^3 \\ &- 2P_m k \delta_r a_x a^2 + Q_r \delta_r a^5 + 3Q_r \delta_r a^3 b^2 + \delta_r \omega_1 b^2 a + \omega \delta_r a b^2 + P_r \delta_r a_{xx} b^2 - P_r k^2 \delta_r a b^2 - 2P_m k \delta_r a_x b^2 \\ &+ 2Q_r \delta_r a b^4 - \delta_m a^3 \omega_1 - 2P_r k \delta_m a_x a^2 + P_m k^2 \delta_m a^3 - Q_m \delta_m a^5 - 2Q_r \delta_m a^3 b^2 - \delta_m \omega_1 b^2 a - 2P_r k \delta_m a_x b^2 \\ &+ P_m k^2 \delta_i a b^2 - Q_m \delta_m a^3 b^2 - \delta_m P_m a_{xx} a^2 + P_m \delta_m a_{xx} b^2 = -\gamma_m a - \gamma_m \delta_r a^3 - \gamma_m \delta_m a b^2 - \gamma_r \delta_m a^3 - \gamma_r \delta_m a b^2 \\ &- C_r a a_x^2 - C_r k^2 a^3 + C_r a b_x^2 - C_r k^2 a b^2 - 2C_m k a_x a^2 + 2C_m k a b b_x \\ &a_t + 2P_r k a_x - P_m k^2 a + Q_m a^3 + 2Q_m a b^2 + \delta_r a^2 a_t + 2P_r k \delta_r a_x a^2 - P_m k^2 \delta_r a^3 + Q_m \delta_r a^5 + 3Q_i \delta_r a^3 b^2 \\ &+ 2P_r k \delta_r a_x b^2 - P_m k^2 a \delta_r b^2 + 2Q_m \delta_r a b^4 - \delta_m a^2 a_t + \omega \delta_m a^3 + P_r \delta_m a_{xx} a^2 - P_r k^2 \delta_m a^3 - 2P_m k \delta_m a_x a^2 \\ &+ Q_r \delta_m a^5 + 3Q_r \delta_m a^3 b^2 - \delta_m b^2 a_t - \omega \delta_m a b^2 + P_r \delta_m a_{xx} b^2 - P_r k^2 a \delta_m b^2 - 2P_m k \delta_m a_x b^2 + 2Q_r \delta_m a b^4 \\ &- 2Q_m \delta_m a b^4 + P a_{xx} + P_m \delta_r a_{xx} a^2 + P_m \delta_r a_{xx} b^2 = \gamma_r a + \gamma_r \delta_r a^3 + \gamma_r \delta_r a b^2 - \gamma_m \delta_m a^3 - \gamma_m \delta_m a b^2 + C_r k a^2 a_x \\ &+ 2C_r k a^2 a_x - 2C_r k a b b_x - C_m a a_x^2 - C_m k^2 a^3 + C_m a b_x^2 - C_m k^2 a b^2. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

33 We take the Painleve truncated approach:

$$\begin{aligned} a(x,t) &= U_0 + U_1 f(x), \\ b(x,t) &= V_0 + V_1 f(x). \end{aligned} \tag{11}$$

34 Substituting equation (11) into equation (10), we obtain:

$$\left\{ \begin{aligned} &S_0 + S_1 f + S_2 f^2 + S_3 f^3 + S_4 f^4 + S_5 f^5 + S_6 f_x + S_7 f_{xx} + S_8 f_x f + S_9 f_{xx} f \\ &+ S_{10} f_x f^2 + S_{11} f_{xx} f^2 + S_{12} f_x^2 + S_{13} f f_x^2 + S_{14} f^2 f_x^2 + S_{15} f_x f^3 + S_{16} f_x f^4 = 0, \\ &T_0 + T_1 f + T_2 f^2 + T_3 f^3 + T_4 f^4 + T_5 f^5 + T_6 f_x + T_7 f_{xx} + T_8 f_x f + T_9 f_{xx} f \\ &+ T_{10} f_x f^2 + T_{11} f_{xx} f^2 + T_{12} f_x^2 + T_{13} f f_x^2 + T_{14} f^2 f_x^2 + T_{15} f_x f^3 + T_{16} f_x f^4 = 0. \end{aligned} \right. \tag{12}$$

35 To simplify the resolution of the system above, we set the following compatibility relationships:

$$\begin{aligned} S_0 = T_0; S_1 = T_1; S_2 = T_2; S_3 = T_3; S_4 = T_4; S_5 = T_5; \\ S_6 = T_6; S_7 = T_7; S_8 = T_8; S_9 = T_9; S_{10} = T_{10}; S_{11} = T_{11}; \\ S_{12} = T_{12}; S_{13} = T_{13}; S_{14} = T_{14}; S_{15} = T_{15}; S_{16} = T_{16}. \end{aligned} \quad (13)$$

36 Then, we have

$$\begin{cases} Q_r = Q_m = q, \\ C_r = C_m = c, \\ P_r = P_m = p, \\ \delta_r = \delta_m = \delta, \\ -\gamma_r = \gamma_m. \end{cases} \quad (14)$$

37 Thus, we have only one equation to solve, namely:

$$\begin{aligned} S_0 + S_1 f + S_2 f^2 + S_3 f^3 + S_4 f^4 + S_5 f^5 + S_6 f_x + S_7 f_{xx} + S_8 f_x f + S_9 f_{xx} f \\ + S_{10} f_x f^2 + S_{11} f_{xx} f^2 + S_{12} f_x^2 + S_{13} f f_x^2 + S_{14} f^2 f_x^2 + S_{15} f_x f^3 + S_{16} f_x f^4 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

#### 38 4 Reduction of the modified (CGL) equation to the elliptic ODE of the first kind

39 General ODE (15) takes a simpler form, by taking that of the elliptic equation of the first kind,

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = S_4 f^4 + S_2 f^2 + S_0 f. \quad (16)$$

#### 40 **Solution 1**

41 By taking

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_2 \succ 0, \\ S_4 \succ 0, \end{cases} \quad (17)$$

42 We obtain the soliton solution,

$$f(x) = \sqrt{\frac{S_2}{S_4}} \operatorname{sech}(\sqrt{S_2}x). \quad (18)$$

43 Finally,

$$\begin{pmatrix} A(x,t) \\ B(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \quad (19)$$

44 The left and right panels of Figure 1 show respectively the modulus in 3D and the envelope in 2D  
45 at  $t = 0$ . The bright soliton obtained here corresponds to the solution given by Eq.(19). The branches  
46 of this solution are non-zero.

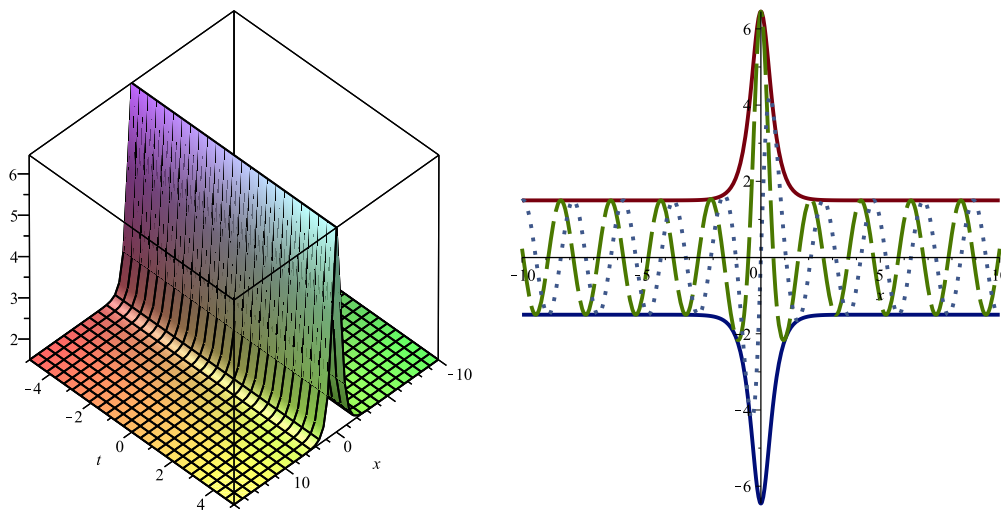
#### 47 **Solution 2**

48 If we take

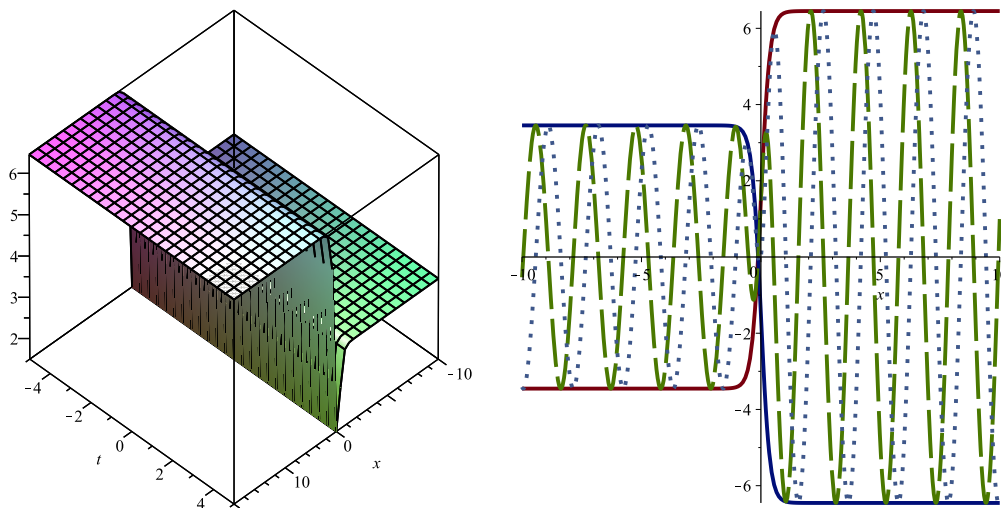
$$\begin{cases} S_0 \neq 0, \\ S_2 \succ 0, \\ S_4 \succ 0, \end{cases} \quad (20)$$

49 We obtain solution to Eq.(16)

$$f(x) = \sqrt{\frac{S_2}{S_4}} \tanh(\sqrt{S_2}x). \quad (21)$$



**Fig. 1** Solution displayed using Eq.(19) with the following parameters:  $\gamma_m = 0.001$ ,  $\gamma_r = -0.001$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $U_0 = 1.5$ ,  $V_0 = 1.5$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ . The modulus is shown on the left while on the right we describe the 2D representation of the envelope at  $t = 0$ . The green dash color corresponds to the imaginary part and the blue dot stands for the real part.



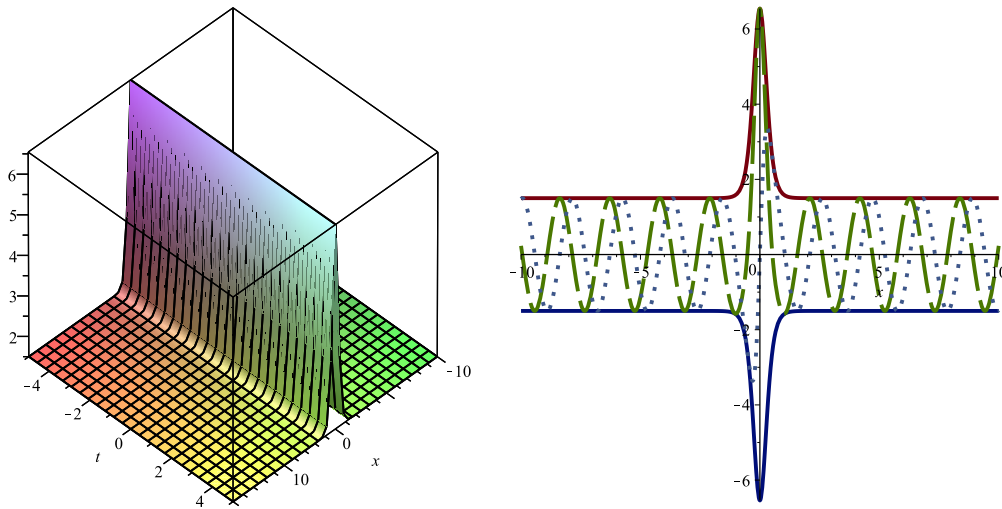
**Fig. 2** Solution corresponding to equation (22) with the following parameters:  $\gamma_m = 0.001$ ,  $\gamma_r = -0.001$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $U_0 = 1.5$ ,  $V_0 = 1.5$ ,  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 1$ ,  $k = 0.3$ . It has the same captions as in Figure 1.

50 Finally,

$$\begin{pmatrix} A(x,t) \\ B(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \tag{22}$$

51 In figure 2, we have on the left, represented in 3D, the kink-like soliton, and on the right panel,  
52 represented in 2D at  $t = 0$ , asymmetric-dark soliton envelope.





**Fig. 3** 3D and 2D representation of Eq.(26) with the following parameters:  $\gamma_m = 0.001, \gamma_r = -0.001, \delta = 0.05, \omega_1 = 1, \omega = 1, p = 0.5, q = 0.25, U_0 = 1.5, V_0 = 1.5, U_1 = 1, V_1 = 1, k = 0.3$ . It has the same captions as in Figure 1.

53 **5 Reduction of the modified (CGL) equation to the elliptic ODE of the second kind**

54 The ODE (15) will take the simple form:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = S_3 f^3 + S_2 f^2 + S_0 f. \tag{23}$$

55

$$\begin{cases} S_0 \neq 0, \\ S_2 > 0, \\ S_3 > 0, \end{cases} \tag{24}$$

56 In this case,

$$f(x) = \frac{S_2}{S_3} \operatorname{sech}^2(\sqrt{S_2}x). \tag{25}$$

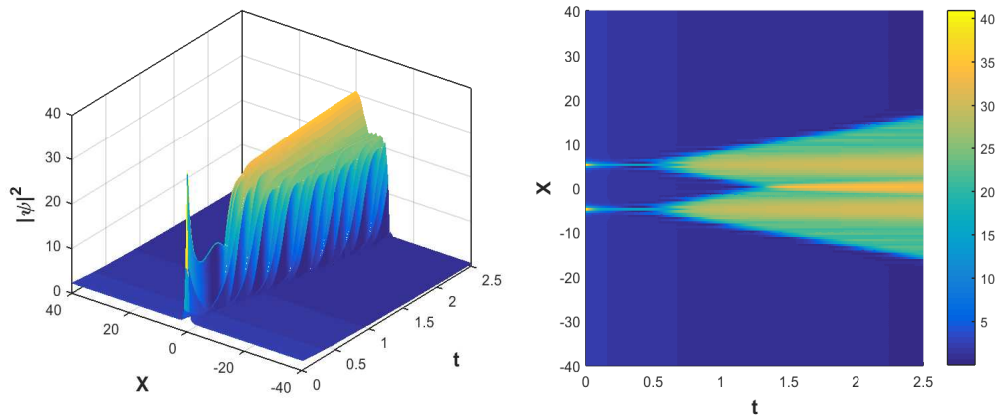
57 Finally,

$$\begin{pmatrix} A(x,t) \\ B(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 + U_1 f(x) \\ V_0 + V_1 f(x) \end{pmatrix} \exp(-i\omega_j t). \tag{26}$$

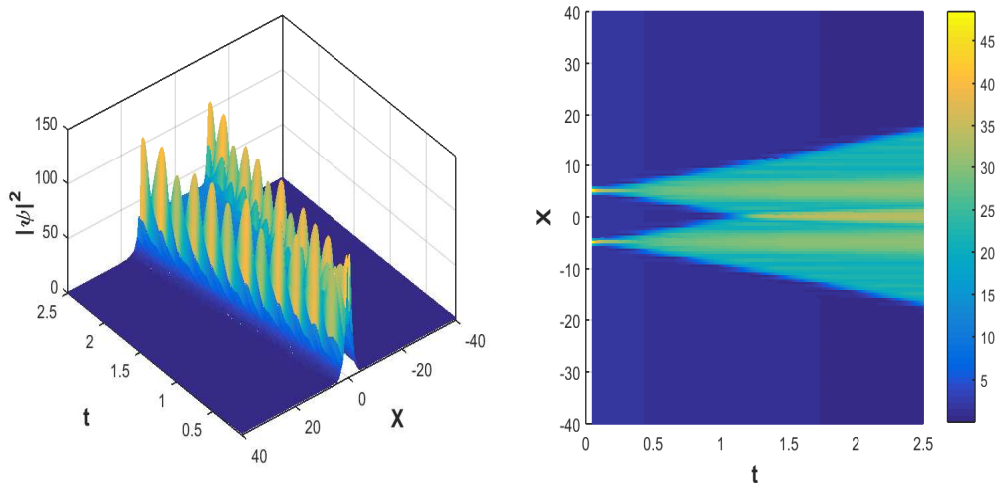
58 The left and right panels of Figure 3 show respectively the modulus in 3D and the envelope in 2D  
 59 at  $t = 0$ . The bright soliton obtained here corresponds to the solution given by Eq.(26). The branches  
 60 of this solution are non-zero.

61 In the left panel of Figure 4, the initial solitary wave evolves into a single, grouped block of solitary  
 62 waves. In the right panel, we present the collision of two secondary solitary waves. This collision gives  
 63 rise to another higher solitary wave. This figure corresponds to the solution given by Eq.(19).

64 The right and the left panels of Figure 5 correspond to Eq.(26). In the left panel, we have the  
 65 original soliton that separates progressively to give two sets of solitary waves. In the panel on the right,  
 66 the collision of a series of two solitary waves gives birth to a series of central solitary waves higher than  
 67 the two initials.



**Fig. 4** Curves simulating the propagation of the wave. This figure is obtained with the same parameters as in figure 1. The left panel corresponds to the solution given by Eq.(19). The right panel presents the collision of two solitary waves.



**Fig. 5** Curves simulating the propagation of the wave. This figure is obtained with the same parameters as in figure 3. The left panel corresponds to the solution given by Eq.(26). The right panel presents the collision of two solitary wave trains.

68 **6 Conclusion**

69 In summary, via the Painleve truncated approach and symbolic computation, we construct the asymmet-  
 70 ric-dark soliton and the bright soliton for the modified complex Ginzburg-Landau equation. On compar-  
 71 ing our results obtained in this paper using this method with the well-known results obtained in [20–22]  
 72 using other different methods, we conclude that our results for Eq.(1) are new. Another important  
 73 aspect of this work is that the methods used can be applied to other nonlinear equations.

74 **References**

75 [1] Cheng, J.B. and Geng, X.G. (2005), Algebraic-geometric solution to the modified Kadomtsev-Petviashvili  
 76 equation, *J. Phys. Soc. Japan*, **74**, 2217-2222.

- 77 [2] Geng, X.G., Dai, H.H., and Cao, C.W. (2003), Algebro-geometric constructions of the discrete Ablowitz-Ladik  
78 flow and applications, *J. Math. Phys.*, **44**, 4573-4588.
- 79 [3] Lou, S.Y., Tang, X.Y., and Lin, J. (2001), Exact solutions of the coupled KdV system via formally variable  
80 separation approach, *Commun. Theor. Phys.*, **36**, 145-148.
- 81 [4] Zhang, S.L., Lou, S.Y., and Qu, C.Z. (2006), The derivative-dependent functional variable separation for the  
82 solving equations, *Chin. Phys.*, **15**, 2765-2776.
- 83 [5] Kengne, E., Vaillancour, R., and Malomed, B.A. (2006), Coupled nonlinear Schrödinger equationa for solitary-  
84 wave kink signals propagating in discrete nonlinear dispersive transmission lines, *Int. J. of Modern Phy. B.*,  
85 **23**, 133-147.
- 86 [6] Li, D.S. and Zhang, H.Q. (2004), A new extended tanh-function method and its application to the dispersive  
87 long wave equations in (2+1) dimensions, *Appl. Math. Comput.*, **147**, 789-797.
- 88 [7] Bekir, A. (2008), New solitons and periodic wave solutions for some nonlinear physical models by using the  
89 sine-cosine method, *Phys. Scr.*, **77**, 501-505.
- 90 [8] Mehdi, D. and Fatemeh, S. (2007), Solution of a partial differential equation subject to temperature over-  
91 specification by He's homotopy perturbation method, *Phys. Scr.*, **75**, 778-787.
- 92 [9] Hirota, R. (1971), Exact solution of the Korteweg-de-Vries equation for multiple collisions of solitons, *Phys.*  
93 *Rev. Lett.*, **27**, 1192-1194.
- 94 [10] Zayed, E.M.E. and Abdelaziz, M.A.M. (2011), Exact solutions for the nonlinear Schrödinger equation with  
95 variabe coefficients using the generalized extended tanh-function, the sine-cosine and the exp-function meth-  
96 ods, *Appl. Math. Comput.*, **218**, 2259-2268.
- 97 [11] Kudryashov, N.A. (2012), One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations, *commun.*  
98 *Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **17**, 2248-2253.
- 99 [12] Zayed, E.M.E., Moatimid, G.M., and Al-Nowehy Abdul-Ghani A.A. (2015), The generalized Kudryashov  
100 method andits applicationsfor solving nonlinear PDEs in mathematical physics, *Scientific J. Math. Res.*, **5**,  
101 19-39.
- 102 [13] Moatimid, G.M., El-Shiekh Rehad, M., and Al-Nowehy Abdul-Ghani A.A. (2013), Exact solutions for  
103 Calegero-Bogoyavlenskii-Schiff equation using symmetry mthod, *Appl. Math. comput.*, **220**, 455-462.
- 104 [14] Moussa, M.H.M. and El-Schiek Rehab, M. (2006), Similarity reduction and similarity solutions of Zabolotskay-  
105 Khoklov equatio with a dissipative term via symmetry method, *Physica A*, **371**, 325-335.
- 106 [15] Biswas, A., Milovic, D., and Edwards, M. (2010), *Mathematical Theory of Dispersion-Managed Optical Soli-*  
107 *tons*, Springer-Verlag, New York.
- 108 [16] Sarma, A.K., Saha, M., and Biswas, A. (2010), Optical solitons with power law nonlinearity and hamiltonian  
109 perturbation: an exact solution, *J. Infrared Milli. Terahertz Waves*, **31**, 1048-1056.
- 110 [17] Tsigaridas, G., Fragos, A., Polyzos, I., Fakis, M., Ioannou, A., Giannetas, V., and Persephonis, P. (2005),  
111 Evolution of near-soliton initial conditions in non-linear wave equations through their Bäcklund transforms,  
112 *Chaos Solitons Fract.*, **23**, 1841-1854.
- 113 [18] Wang, M., Li, X., and Zhang, J. (2008), The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of  
114 nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A*, **372**, 417-423.
- 115 [19] Vakhnenko, V.O., Parkes, E.J., and Morrison, A.J. (2003), A Bäcklund transformation and the inverse  
116 scattering transform method for the generalised Vakhnenko equation, *chaos solitons Fractals*, **17**, 683-692.
- 117 [20] Mohamadou, A., Ndzana II, F., and Kofané, T.C. (2006), Pulse solution of the modified cubic complex  
118 Ginzburg-Landau equation, *Phys. Scr.*, **73**, 596-600.
- 119 [21] Yomba, E. and Kofané T.C. (1996), On exact solutions of the generalized modified complex Ginzburg-Landau  
120 equation using the Weiss-Tabor-Carnevale method, *Phys. Scr.*, **54**, 576-580.
- 121 [22] Yomba, E. and Kofané T.C. (1999), On exact solutions of the modified complex Ginzburg-Landau equation,  
122 *Physica D*, **125**, 105-122.

# Dispersive optical soliton solutions of the higher-order nonlinear Schrödinger dynamical equation via two different methods and its applications

E. Tala-Tebue<sup>1,2</sup>, Aly R. Seadawy<sup>3,4,a</sup>, P.H. Kamdoum-Tamo<sup>2,5</sup>, and Dianchen Lu<sup>6</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Appliquée (LAIA), IUT-FV of Bandjoun, The University of Dschang, BP 134, Bandjoun, Cameroon

<sup>2</sup> Laboratory of Mechanics, Department of Physics, Faculty of Sciences, and African Center of Excellence in I.C.T (C.E.T.I.C) University of Yaounde I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon

<sup>3</sup> Mathematics Department, Faculty of Science, Taibah University, Al-Madinah Al-Munawarah, Saudi Arabia

<sup>4</sup> Mathematics Department, Faculty of Science, Beni-Suef University, Beni-Suef, Egypt

<sup>5</sup> Nonlinear Physics and Complex Systems Group, Department of Physics, The Higher Teachers' Training College, University of Yaounde I, P.O. Box 47 Yaoundé, Cameroon

<sup>6</sup> Department of Mathematics, Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjian, China

Received: 5 May 2018 / Revised: 11 June 2018

Published online: 31 July 2018

© Società Italiana di Fisica / Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature, 2018

**Abstract.** In this paper, we apply two methods which are the arbitrary nonlinear parameters and the exponential rational function method to construct many new exact solutions of the higher-order nonlinear partial differential equations, namely, the higher-order nonlinear Schrödinger (HNLS) equation. The solutions obtained by the current methods are generalized periodic solutions. The shape of the solutions can be well controlled by adjusting the parameters of the system. Optical soliton solutions obtained can be used to transport information in the telecommunication domain. It also comes from this work that the behavior of this HNLS equation may be easily studied by means of the phase plane plot which is the best tool to predict some solutions.

## 1 Introduction

Since the first observation of a soliton by John Scott Russell in 1834 [1], this type of solitary wave with exceptional stability has fascinated scientists; primarily because of their spectacular experimental properties and their undeniable elegances, but also due to their mathematical properties. Soliton research has been conducted in diverse fields such as meteorology, nonlinear electrical lines, biology, cosmology and optical fibers, to cite a few. Optical solitons have promising potential to become principal information carriers in telecommunication due to their capability of propagating a long distance without attenuation and changing their shapes. The pioneering works of Hasegawa and Tappert [2], who predicted solitons theoretically, and Mollenauer, Stolen, and Gordon [3], who observed them experimentally, made solitons a realistic tool for this cause. In a single mode fiber, the pulse envelope function satisfies a nonlinear Schrödinger (NLS) equation [4] in the following form:

$$iE_z - \alpha_1 E_{tt} - \alpha_2 |E|^2 E = 0, \quad (1)$$

where  $z$  is the propagation direction of the pulse,  $t$  is the retarded-time variable,  $E = E(z, t)$  is the pulse envelope function,  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are constants related to the group velocity dispersion (GVD) and the self-phase modulation (SPM), respectively. On the other hand, in the subpicosecond or femtosecond regime, the NLS equation has been claimed to be inadequate since the optical pulse becomes shorter [5, 6]. Thus, it becomes absolutely necessary to include the third-order dispersion (TOD), the self-steepening (SS), and the stimulated Raman scattering (SRS) as considered in [7]

$$E_z = i(\alpha_1 E_{tt} + \alpha_2 |E|^2 E) + \varepsilon[\alpha_3 E_{ttt} + \alpha_4 (|E|^2 E)_t + \alpha_5 E (|E|^2)_t]. \quad (2)$$

<sup>a</sup> e-mail: Aly742001@yahoo.com (corresponding author)

Equation (2) is a higher-order nonlinear Schrödinger (HNLS) equation. In this equation,  $E$  is the slowly varying envelope of the electric field, the subscripts  $z$  and  $t$  are the spatial and temporal partial derivatives, and  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4,$  and  $\alpha_5,$  are the parameters related to the GVD, the SPM, the TOD, the SS, and the SRS, respectively. Now, if  $\varepsilon = 0,$  eq. (2) reduces to the NLS equation. This higher-order equation was derived by Kodama *et al.* [8,9] and using perturbation theory they treated all higher-order terms as perturbation to the NLS soliton. The main advantage of eq. (2) is that the self-frequency shift is a potentially detrimental effect in soliton communication systems because power fluctuations at the source translate into frequency fluctuations in the fiber through the power dependence of the soliton self-frequency shift and hence into timing jitter at the receiver [10].

Our objective here is to find new exact solutions of this equation. Over the last few years, finding the appropriate solutions of nonlinear equations have been the subject of intense investigation. In this context, several methods have been proposed by researchers in the literature. We can list the projective Riccati equation method [11], the Backlund transformation, inverse scattering method [12], the Hirota bilinear forms, the pseudo spectral method, the tanh-sech method [13], the Darboux transform method [14], the Painlevé's singularity structure analysis [15], the homotopy perturbation method [16], the variational iteration method [17], the inverse scattering transform method [18], the  $(G'/G)$ -expansion method [19], the Hirota's bilinear method [20], the exp-function method [21], the  $\exp(-\phi(\varepsilon))$ -expansion method [22], the modified simple equation method [23], the exponential rational function method [24,25], the semi-inverse variational principle [26], the Bilinear representation [27], the generalized tanh-coth method [28], the modified extended direct algebraic method [29], the auxiliary equation method [30], and so on [31–48].

The rest of the paper is structured as follows: In sect. 2, we discuss the bifurcations of phase portraits of the model studied. In sect. 3, we find the solutions of the model using arbitrary nonlinear parameters [49] and the exponential rational function method. The graphical representations are given in sect. 4. Finally, sect. 5 concludes the work.

## 2 Phase portraits of the model

We consider the one-dimensional HNLS equation which reads,

$$E_z = i(\alpha_1 E_{tt} + \alpha_2 |E|^2 E) + \varepsilon[\alpha_3 E_{ttt} + \alpha_4 (|E|^2 E)_t + \alpha_5 E (|E|^2)_t]. \quad (3)$$

We assume a solution given by the following expression:

$$E(z, t) = A(\xi) e^{i\theta}, \quad (4)$$

where  $\xi = \delta t + uz$  and  $\theta = \beta t + rz;$   $A(\xi)$  is a real amplitude function,  $\delta, u, \beta$  and  $r$  are real parameters. Substituting eq. (4) into eq. (3) and separating real and imaginary parts, we obtain

$$Im : -(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)A^3 + (r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)A - (\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)A'' = 0, \quad (5)$$

$$Re : (u + 2\alpha_1\beta\delta + 3\alpha_3\varepsilon\beta^2\delta)A' - (3\varepsilon\alpha_4\delta + 2\varepsilon\alpha_5\delta)A^2 A' - \varepsilon\alpha_3\delta^3 A''' = 0. \quad (6)$$

It is possible to integrate eq. (6) because it has only first- and third-order derivatives. We then have

$$-\frac{u + 2\alpha_1\beta\delta + 3\alpha_3\varepsilon\beta^2\delta}{\varepsilon\alpha_3\delta^3}A + \frac{\alpha_4 + (2/3)\alpha_5}{\alpha_3\delta^2}A^3 + A'' = 0. \quad (7)$$

Comparing eqs. (7) and (5) the parameters  $\beta$  and  $r$  can be evaluated in the form

$$\beta = -\frac{3\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_5 - 3\alpha_2\alpha_3}{6\varepsilon\alpha_3(\alpha_4 + \alpha_5)}, \quad (8)$$

and

$$r = -\frac{8\beta^3\delta\varepsilon^2\alpha_3^2 + 8\beta^2\delta\varepsilon\alpha_1\alpha_3 + 2\beta\delta\alpha_1^2 + 3\beta\varepsilon u\alpha_3 + u\alpha_1}{\delta\varepsilon\alpha_3}. \quad (9)$$

Therefore, eqs. (5) and (7) have similar form and we concentrate ourselves on eq. (5) from which the first integral is obtained by multiplying it by  $A'$  and integrating the resulting equation:

$$A'^2 - \frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}A^2 + \frac{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}{2(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)}A^4 = 2C, \quad (10)$$

where  $C$  is the constant of integration. Let us mention that, eq. (10) can be also derived from the auxiliary Hamiltonian  $\tilde{H}$  and lagrangian  $\tilde{L}$  defined by

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}m(A)[A'^2 + U(A)] \quad (11)$$

and

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m(A)[A'^2 - U(A)]. \tag{12}$$

This Hamiltonian may be viewed as the energy of a particle with an effective mass  $m(A) = 1$  moving in the effective potential

$$U(A) = -\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}A^2 + \frac{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}{2(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)}A^4 - 2C. \tag{13}$$

It is obvious that eq. (5) can be transformed into the following equivalent autonomous dynamic system:

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\xi} = A', \\ \frac{dA'}{d\xi} = \left[ -\frac{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}A^2 + \frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2} \right] A, \end{cases} \tag{14}$$

where solutions are the fixed points of the system. The behavior of this system may be easily studied by means of the phase plane plot which is the best tool for observing the evolution of the variable  $A$ . The number of equilibrium points, and consequently the dynamic of this system depend on the sign of the quantity

$$F_0 = \frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}, \tag{15}$$

with  $\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2 \neq 0$ .

For example, if  $F_0 > 0$ , the system (14) admits three equilibrium points:  $(0, 0)$  and  $(0, \pm F_{eq})$ , with

$$F_{eq} = \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}}. \tag{16}$$

However, when  $F_0 < 0$ , the system admits only the equilibrium point  $(0, 0)$ . By the qualitative analysis, we obtain the different topological phase portraits shown in fig. 1 and the corresponding effective potentials in fig. 2. We observe that by changing the values of the constants  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), the behavior of the system studied change and consequently, new solutions are obtained.

### 3 Exact solutions of eq. (3)

#### 3.1 Cnoidal and hyperbolic wave solutions

In this section, we shall discuss the construction of some of the physically interesting periodic solutions. These solutions will depend of the value of the constant  $C$ .

Case 1.

We set  $C = -\frac{(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)^2 m^2}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(1 + m^2)^2}$  and we get the solution of eq. (10) as

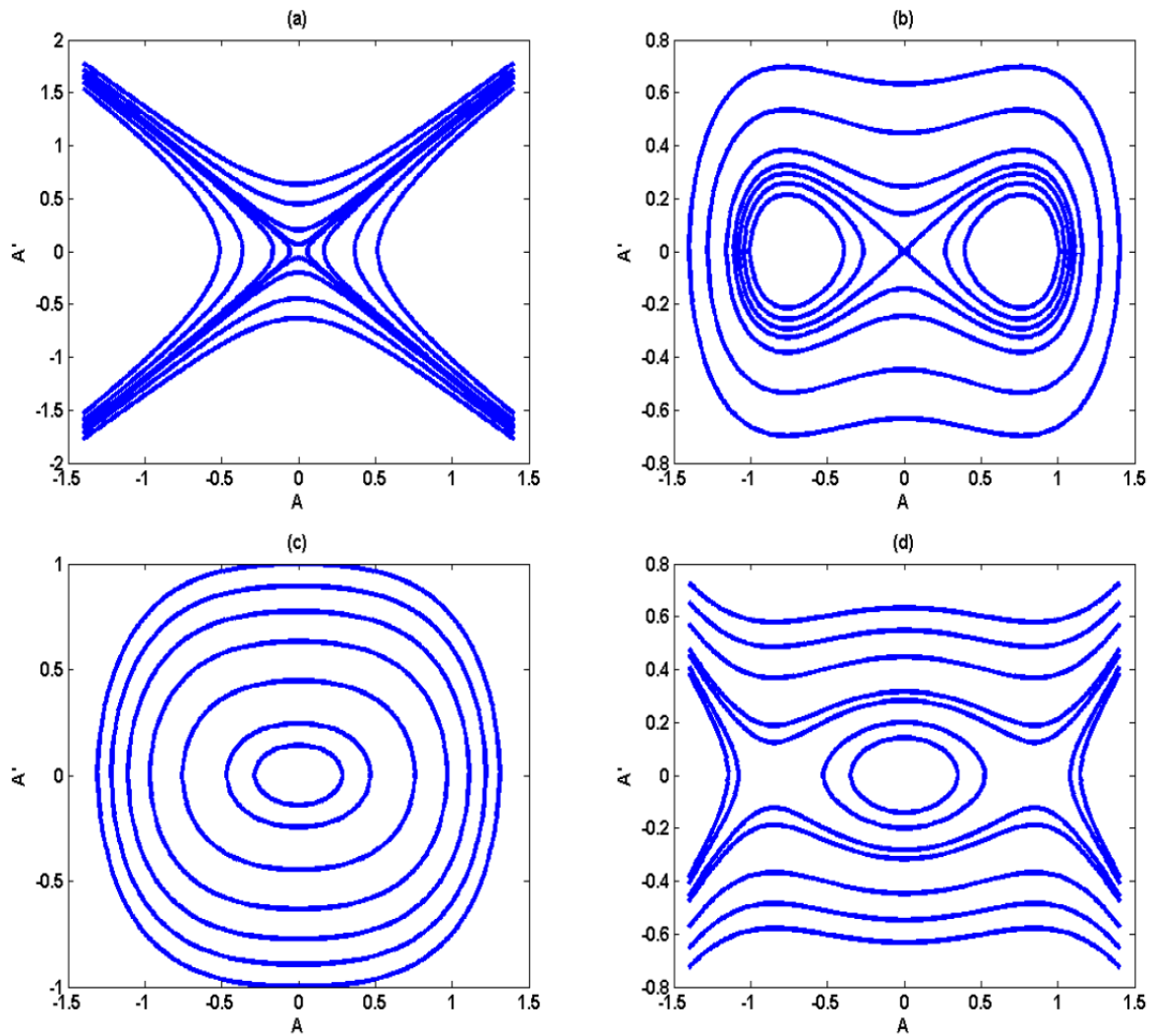
$$A(\xi) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)m^2}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(1 + m^2)}} \operatorname{sn} \left[ \sqrt{-\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(1 + m^2)}} \xi, m \right] \tag{17}$$

and the solution of (3) is

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)m^2}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(1 + m^2)}} \operatorname{sn} \left[ \sqrt{-\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(1 + m^2)}} (\delta t + uz), m \right] e^{i(\beta t + rz)}. \tag{18}$$

Now, if  $m \rightarrow 1$ ,  $\operatorname{sn}(x, 1) = \tanh(x)$  and the previous solution takes the following form:

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{2(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)}} \tanh \left[ \sqrt{-\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{2(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)}} (\delta t + uz) \right] e^{i(\beta t + rz)}. \tag{19}$$



**Fig. 1.** Different phase portraits of the HNLS equation (2). Panel (a) is obtained for  $\alpha_1 = 1.0, \alpha_2 = -2.0, \alpha_3 = 3.0, \alpha_4 = 1.0, \alpha_5 = 0.6, \varepsilon = 0.5, \delta = 2.0$  and  $u = 3.0$ . Panel (b) is obtained for  $\alpha_1 = 1.0, \alpha_2 = -0.5, \alpha_3 = 2.0, \alpha_4 = 0.1, \alpha_5 = 6.0, \varepsilon = 0.5, \delta = 2.0$  and  $u = 3.0$ . Panel (c) is obtained for  $\alpha_1 = 1.0, \alpha_2 = 2.0, \alpha_3 = -3.0, \alpha_4 = -1.0, \alpha_5 = -6.0, \varepsilon = 0.5, \delta = 2.0$  and  $u = 3.0$ . Panel (d) is obtained for  $\alpha_1 = 1.0, \alpha_2 = 2.0, \alpha_3 = -3.0, \alpha_4 = -1.0, \alpha_5 = 6.0, \varepsilon = 0.5, \delta = 2.0$  and  $u = 3.0$ .

Case 2.

We set  $C = -\frac{(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)^2(1 - m^2)}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2 - m^2)^2}$  and we get the solution of eq. (10) as

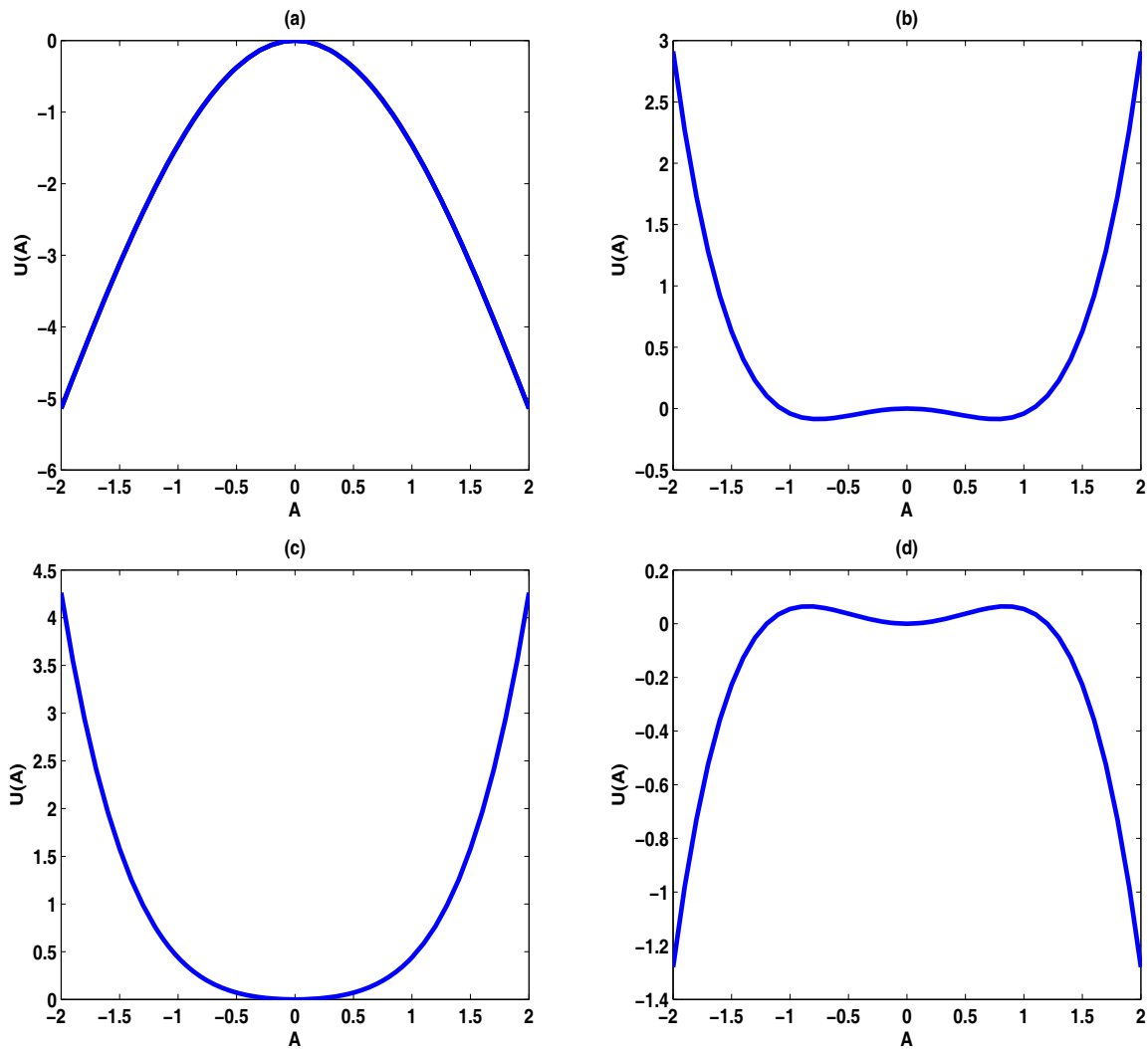
$$A(\xi) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2 - m^2)}} \operatorname{dn} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(2 - m^2)}} \xi, m \right], \tag{20}$$

and the solution of (3) is

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2 - m^2)}} \operatorname{dn} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(2 - m^2)}} (\delta t + uz), m \right] e^{i(\beta t + rz)}. \tag{21}$$

Now, if  $m \rightarrow 1$ ,  $\operatorname{dn}(x, 1) = \operatorname{sech}(x)$  and the previous solution takes the following form:

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}} (\delta t + uz) \right] e^{i(\beta t + rz)}. \tag{22}$$



**Fig. 2.** Effective potential  $U(A)$  of the HNLS equation (2). These figures are obtained with the same parameters as in fig. 1. Panel (a) corresponds to phase portrait fig. 1(a); Panel (b) corresponds to phase portrait fig. 1(b); Panel (c) corresponds to phase portrait fig. 1(c); Panel (d) corresponds to phase portrait fig. 1(d).

Case 3.

We set  $C = -\frac{(r+\alpha_1\beta^2+\varepsilon\alpha_3\beta^3)^2(m^2-1)m^2}{(\alpha_1\delta^2+3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(\varepsilon\alpha_4\beta+\alpha_2)(2m^2-1)^2}$  and we get the solution of eq. (10) as

$$A(\xi) = \sqrt{\frac{2m^2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2m^2 - 1)}} \operatorname{cn} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(2m^2 - 1)}} \xi, m \right], \tag{23}$$

and the solution of (3) is

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2m^2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(2m^2 - 1)}} \operatorname{cn} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{(\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2)(2m^2 - 1)}} (\delta t + uz), m \right] e^{i(\beta t + rz)}. \tag{24}$$

Now, if  $m \rightarrow 1$ ,  $\operatorname{cn}(x, 1) = \operatorname{sech}(x)$  and the previous solution takes the following form:

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1\delta^2 + 3\alpha_3\varepsilon\beta\delta^2}} (\delta t + uz) \right] e^{i(\beta t + rz)}. \tag{25}$$



### 3.2 The exponential rational function method

In this subsection, we first present the different steps of the exponential rational function method [25]:

- 1) Suppose that a nonlinear partial differential equation is given by

$$Q(v, v_x, v_{xx}, v_t, v_{tt}, v_{xt}, vv_x \dots) = 0. \quad (26)$$

- 2) To solve this equation, we reduce the number of variables to only one. Thus,

$$v(x, t) = v(\xi). \quad (27)$$

And therefore, eq. (26) constructs an ordinary differential equation (ODE) of the form

$$Q(v, v', v'', vv' \dots) = 0, \quad (28)$$

where ' denotes the derivation with respect to  $\xi$ . If it is possible, eq. (28) can be integrated term by term one or more times.

- 3) According to the present method, a solution of eq. (28) is expressed as follows:

$$v(\xi) = \sum_{i=0}^M \frac{\beta_i}{(1 + e^{\mu\xi})^i}, \quad (29)$$

where  $\mu$  and  $\beta_i$  are unknown constants which will be determined. The parameter  $M$  is determined by balancing the linear terms of the highest order in the resulting equation with the highest-order nonlinear terms. Substituting eq. (29) into eq. (28), we collect all coefficients of powers of  $e^{\mu\xi}$  in the resulting equation where these coefficients have to vanish. This leads to a system of algebraic equations involving the parameters  $\mu$  and  $\beta_i$ . Solving this system with the aid of Maple, we obtain the exact solutions of eq. (26).

Now, considering eq. (10), the balancing process gives  $M = 1$  and the following solution is considered:

$$A(\xi) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1 + e^{\mu\xi}}. \quad (30)$$

Substituting (30) into (10) and collecting all the coefficients of  $(e^{\mu\xi})^j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ) and setting them to zero, we have the following algebraic equations:

$$(e^{\mu\xi})^4 : -2\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 + \epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 + \alpha_2\beta_0^4 - 4C\delta^2\alpha_1 - 12C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta - 2r\beta_0^2 - 2\alpha_1\beta^2\beta_0^2 = 0, \quad (31)$$

$$(e^{\mu\xi})^3 : -16C\delta^2\alpha_1 - 8r\beta_0^2 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^3\beta_1 + 4\alpha_2\beta_0^4 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 - 8\alpha_1\beta^2\beta_0^2 - 4r\beta_0\beta_1 \\ - 48C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta - 4\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0\beta_1 - 8\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 - 4\alpha_1\beta^2\beta_0\beta_1 + 4\alpha_2\beta_0^3\beta_1 = 0, \quad (32)$$

$$(e^{\mu\xi})^2 : 6\alpha_2\beta_0^4 - 72C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta - 12r\beta_0\beta_1 - 12r\beta_0^2 - 24C\delta^2\alpha_1 + 6\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 + 2\beta_1^2\mu^2\delta^2\alpha_1 \\ - 12\alpha_1\beta^2\beta_0^2 - 2r\beta_1^2 + 12\alpha_2\beta_0^3\beta_1 - 12\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 - 12\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0\beta_1 + 6\alpha_2\beta_0^2\beta_1^2 \\ - 2\alpha_1\beta^2\beta_1^2 + 12\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^3\beta_1 + 6\beta_1^2\mu^2\delta^2\alpha_3\epsilon\beta - 2\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_1^2 \\ + 6\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^2\beta_1^2 - 12\alpha_1\beta^2\beta_0\beta_1 = 0, \quad (33)$$

$$(e^{\mu\xi})^1 : 12\alpha_2\beta_0^3\beta_1 + 12\alpha_2\beta_0^2\beta_1^2 - 12\alpha_1\beta^2\beta_0\beta_1 - 8r\beta_0^2 - 4\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_1^2 + 12\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^2\beta_1^2 \\ + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 - 12r\beta_0\beta_1 - 16C\delta^2\alpha_1 - 4r\beta_1^2 + 12\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^3\beta_1 - 48C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta \\ + 4\alpha_2\beta_0\beta_1^3 - 8\alpha_1\beta^2\beta_0^2 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0\beta_1^3 - 4\alpha_1\beta^2\beta_1^2 - 8\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 \\ - 12\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0\beta_1 + 4\alpha_2\beta_0^4 = 0, \quad (34)$$

$$(e^{\mu\xi})^0 : \epsilon\alpha_4\beta\beta_0^4 - 2\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0^2 + 4\alpha_2\beta_0^3\beta_1 - 4\alpha_1\beta^2\beta_0\beta_1 - 2\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta^2\beta_1^2 \\ - 4r\beta_0\beta_1 - 2r\beta_1^2 + 6\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^2\beta_1^2 + \alpha_2\beta_1^4 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0\beta_1^3 + 4\epsilon\alpha_4\beta\beta_0^3\beta_1 \\ + 6\alpha_2\beta_0^2\beta_1^2 + \epsilon\alpha_4\beta\beta_1^4 - 2r\beta_0^2 - 2\alpha_1\beta^2\beta_0^2 - 4\epsilon\alpha_3\beta^3\beta_0\beta_1 - 12C\delta^2\alpha_3\epsilon\beta \\ + 4\alpha_2\beta_0\beta_1^3 + \alpha_2\beta_0^4 - 4C\delta^2\alpha_1 = 0. \quad (35)$$

Solving the above algebraic eqs. (31)–(35), we have the following sets of coefficients:

Set 1:

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}}, \quad \beta_1 = -2\sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}},$$

$$C = -\frac{1}{4} \frac{(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)^2}{\delta^2(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}, \quad \mu = \eta\sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}.$$

Set 2:

$$\beta_0 = -\sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}}, \quad \beta_1 = 2\sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}},$$

$$C = -\frac{1}{4} \frac{(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)^2}{\delta^2(\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2)(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}, \quad \mu = \eta\sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}.$$

In this subsection, the solutions of the HNLS equation depend of the constant  $\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta}$ .

Case 1.

If  $\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta} > 0$ , we have as solutions

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}} \left[ 1 - \frac{2}{1 + \cosh\left(\sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right) + \eta \sinh\left(\sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right)} \right] e^{i(\beta t + rz)}, \quad (36)$$

for set 1 and

$$E(z, t) = -\sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}} \left[ 1 - \frac{2}{1 + \cosh\left(\sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right) + \eta \sinh\left(\sqrt{\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right)} \right] e^{i(\beta t + rz)}, \quad (37)$$

for set 2.

Case 2.

If  $\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta} < 0$ , we have  $\mu = i\eta\sqrt{-\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}$  with  $-\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta} > 0$  and the solutions are

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}} \left[ 1 - \frac{2}{1 + \cos\left(\sqrt{-\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right) + i\eta \sin\left(\sqrt{-\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right)} \right] e^{i(\beta t + rz)}, \quad (38)$$

for set 1 and

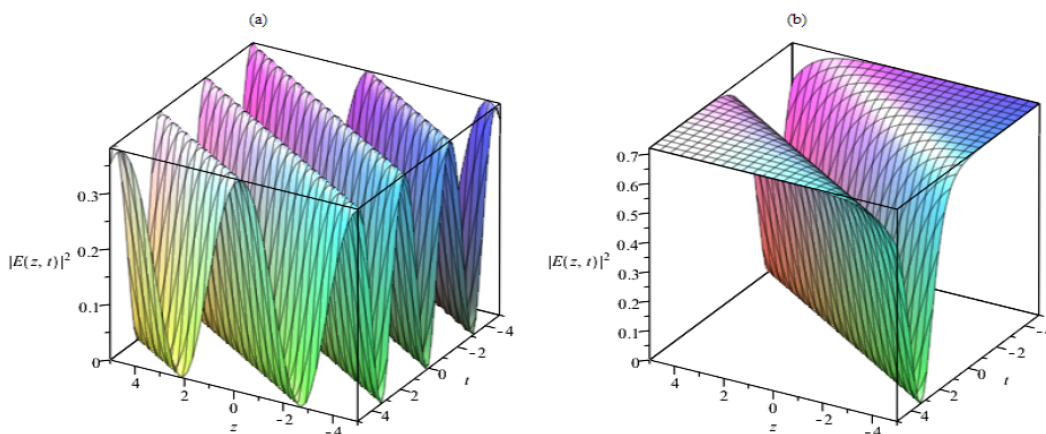
$$E(z, t) = \sqrt{\frac{r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3}{\varepsilon\alpha_4\beta + \alpha_2}} \left[ -1 + \frac{2}{1 + \cos\left(\sqrt{-\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right) + i\eta \sin\left(\sqrt{-\frac{2(r + \alpha_1\beta^2 + \varepsilon\alpha_3\beta^3)}{\delta^2(\alpha_1 + 3\alpha_3\varepsilon\beta)}}\xi\right)} \right] e^{i(\beta t + rz)}, \quad (39)$$

for set 2.

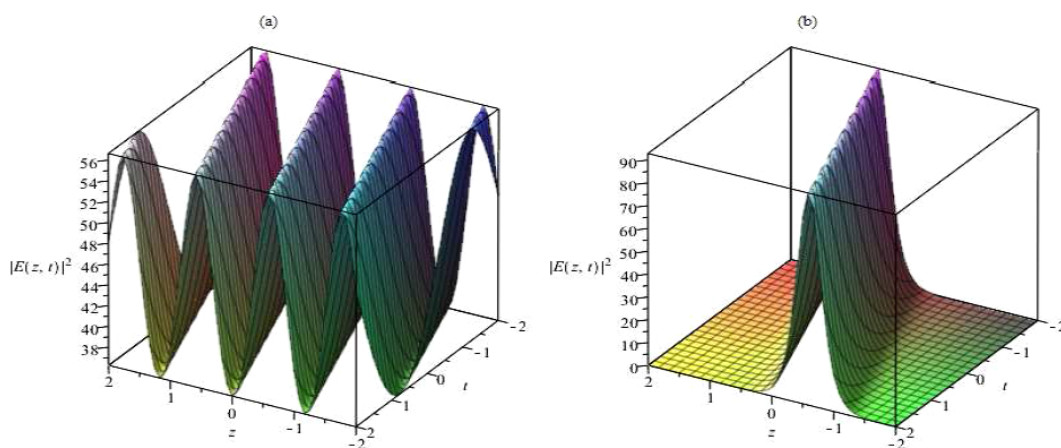
In all these solutions,  $\xi = \delta t + uz$  and  $\eta = \pm 1$ ;  $r$  and  $\beta$  are given by eq. (8) and eq. (9), respectively;  $\delta$  and  $u$  are arbitrary constants.

### 4 Graphical representations

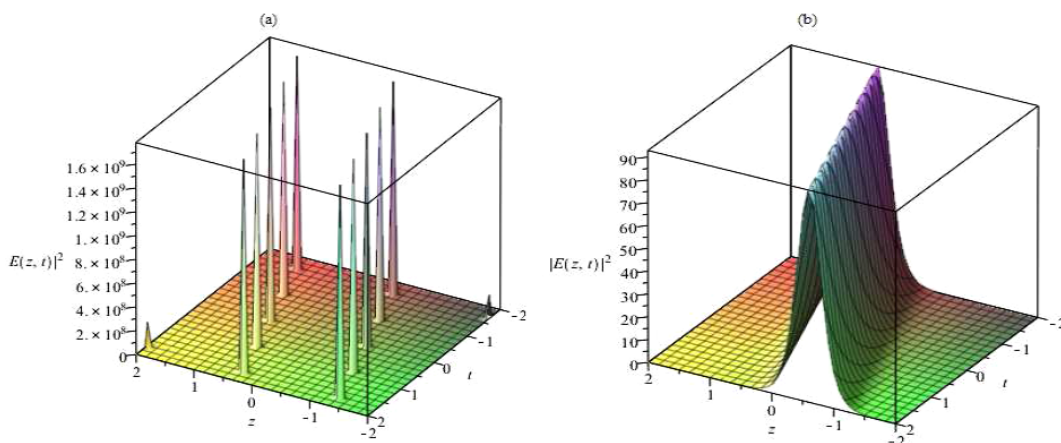
The results obtained in this work are cnoidal solutions, kink solutions, pulse solutions and trigonometric solutions. These solutions can be utilized to transport information in optical fibers. We plot some solutions to have an idea on the mechanism of the original eq. (3). Specifically, we plot solutions (18), (21) and (24), this by taking suitable values of the parameters obtained. The graphical representations of these solutions are shown in figs. 3, 4, and 5.



**Fig. 3.** Solution corresponding to eq. (18). These figures are obtained with the following parameters:  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = 6.0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 2.0$  and  $u = 3.0$ . Panel (a) is plotted for  $m = 0.6$ , while panel (b) is plotted for  $m = 1.0$ .



**Fig. 4.** Solution corresponding to eq. (21). These figures are obtained with the following parameters:  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 2.0$ ,  $\alpha_3 = -3.0$ ,  $\alpha_4 = -1.0$ ,  $\alpha_5 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\delta = 10.0$  and  $u = 3.0$ . Panel (a) is plotted for  $m = 0.6$ , while panel (b) is plotted for  $m = 1.0$ .



**Fig. 5.** Solution corresponding to eq. (24). These figures are obtained with the same parameters as in fig. 4. Panel (a) is plotted for  $m = 0.6$ , while panel (b) is plotted for  $m = 1.0$ .

## 5 Conclusion

By using the arbitrary nonlinear parameters and the exponential rational function method, we find in this work many new exact solutions of the higher-order nonlinear Schrödinger equation. The solutions obtained by the current methods are cnoidal solutions, kink solutions and trigonometric solutions. By adjusting, for example, the modulus of some solutions obtained ( $m = 0.6, 1$ ), the shape of solutions can be well controlled. Optical soliton solutions obtained here can be used to transport information in telecommunication domain and in many other domains like nonlinear electrical transmission lines or nonlinear chains of atoms to list a few. It also comes from this work that the behavior of this HNLS equation may be easily studied by means of the phase plane plot which is the best tool to predict some solutions. The behavior of these phase portraits are confirmed by the corresponding effective potentials. It is also important to mention that the solutions found in this paper are new solutions of the model not yet reported in the literature.

## References

1. J.S. Russell, *Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844* (London, 1845) pp. 311–390, Plates XLVII–LVII.
2. A. Hasegawa, F. Tappert, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142 (1973).
3. L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, J.P. Gordon, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1095 (1980).
4. G.B. Whithman, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974) chapt. 17.
5. G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, New York, 2001).
6. C. Zhao, Y.T. Gao, Z.Z. Lan, J.W. Yang, C.Q. Su, *Phys. Lett. B* **30**, 1650312 (2016).
7. K. Porsezian, K. Nakkeeran, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3955 (1996).
8. Y. Kodama, A. Hasegawa, *IEEE J. Quantum Electron.* **23**, 510 (1987).
9. Y. Kodama, *J. Stat. Phys.* **39**, 597 (1985).
10. D. Wood, *IEEE J. Lightwave Technol.* **8**, 1097 (1990).
11. R. Conte, M. Musette, *J. Phys. A* **25**, 5609 (1992).
12. M.J. Ablowitz, B.M. Herbst, C. Schober, *J. Comput. Phys.* **126**, 299 (1996).
13. W. Malfliet, W. Hereman, *Phys. Scr.* **54**, 563 (1996).
14. Z.S. Yersultanova, M. Zhassybayeva, K. Yesmakhanova, G. Nugmanova, R. Myrzakulov, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **13**, 1550134 (2016).
15. R.S. Banerjee, *Phys. Scr.* **57**, 598 (1998).
16. D. Mehdi, S. Fatemeh, *Phys. Scr.* **75**, 778 (2007).
17. J.H. He, *Phys. Scr.* **76**, 680 (2007).
18. V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes, A.J. Morrison, *Chaos, Solitons Fractals* **17**, 683 (2003).
19. E. Tala-Tebue, D.C. Tsobgni-Fozap, A. Kenfack-Jiotsa, T.C. Kofane, *Eur. Phys. J. Plus* **129**, 136 (2014).
20. R. Hirota, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1192 (1971).
21. M.B. Laila Assas, *J. Comput. Appl. Math.* **233**, 97 (2009).
22. K. Hosseini, A. Bekir, R. Ansari, *Opt. Quantum Electron.* **49**, 131 (2017).
23. A.J.M. Jawad, M.D. Petkovic, A. Biswas, *Appl. Math. Comput.* **217**, 869 (2010).
24. E. Tala-Tebue, Z.I. Djoufack, E. Fendzi-Donfack, A. Kenfack-Jiotsa, T.C. Kofane, *Optik* **127**, 11124 (2016).
25. E. Tala-Tebue, Z.I. Djoufack, D.C. Tsobgni-Fozap, A. Kenfack-Jiotsa, F. Kapche-Tagne, T.C. Kofané, *Chin. J. Phys.* **55**, 939 (2017).
26. A. Biswas, M. Zaka Ullah, M. Asma, Q. Zhou, P. Seithuti, M. Belic, *Optik* **139**, 16 (2017).
27. F. Lian-Li, T. Shou-Fu, H. Yan, L. Wang, Z. Tian-Tian, *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 241 (2016).
28. J. Manafian, M. Lakestani, *Indian J. Phys.* **91**, 243 (2017).
29. Lu Dianchen, Aly R. Seadawy, M. Arshad, *Opt. Quantum Electron.* **50**, 23 (2018).
30. U.T. Kalim, Aly R. Seadawy, *Optik* **154**, 785 (2018).
31. Aly Seadawy, Jalil Manafian, *Results Phys.* **8**, 1158 (2018).
32. Mehdi Dehghan, Jalil Manafian, Abbas Saadatmandi, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* **26**, 448 (2010).
33. Jalil Manafian, *Optik* **127**, 4222 (2016).
34. Mohammadreza Foroutan, Isa Zamanpour, Jalil Manafian, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 421 (2017).
35. Jalil Manafian, *Eur. Phys. J. Plus* **130**, 255 (2015).
36. Jalil Manafiana, Mehdi Fazli Aghdaieb, Morteza Khaliliane, Ramin Sarbaz Jeddi, *Optik* **135**, 395 (2017).
37. Cevat Teymuri Sindi, Jalil Manafian, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 67 (2017).
38. Jalil Manafian, Jalal Jalali, Arash Ranjbaran, *Opt. Quantum Electron.* **49**, 406 (2017).
39. Jalil Manafian, Mehrdad Lakestani, *Optik* **127**, 5543 (2016).
40. Asghar Ali, Aly Seadawy, Dianchen Lu, *Optik* **145**, 79 (2017).
41. Aly Seadawy, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 518 (2017).
42. Aly R. Seadawy, *Pramana J. Phys.* **89**, 49 (2017).
43. Aly Seadawy, *J. Electromagn. Waves Appl.* **31**, 1353 (2017).

44. Aly Seadawy, *Optik* **139**, 31 (2017).
45. Aly R. Seadawy, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 29 (2017).
46. A.H. Khater, D.K. Callebaut, W. Malfliet, A.R. Seadawy, *Phys. Scr.* **64**, 533 (2001).
47. A.H. Khater, D.K. Callebaut, A.R. Seadawy, *Phys. Scr.* **67**, 340 (2003).
48. Aly R. Seadawy, Dipankar Kumar, Anuz Kumar Chakrabarty, *Eur. Phys. J. Plus* **133**, 182 (2018).
49. H. Triki, A. Biswas, D. Milović, M. Belić, *Acta Phys. Pol. A* **130**, 718 (2016).



Contents lists available at ScienceDirect

Optik

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/ijleo](http://www.elsevier.com/locate/ijleo)

Short note

## Cnoidal and solitary waves of a nonlinear Schrödinger equation in an optical fiber

E. Tala-Tebue<sup>a,c,\*</sup>, Z.I. Djoufack<sup>a</sup>, P.H. Kamdoum-Tamo<sup>b</sup>, A. Kenfack-Jiotsa<sup>c</sup><sup>a</sup> Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Appliquée (LAIA), IUT-FV of Bandjoun, The University of Dschang, BP 134 Bandjoun, Cameroon<sup>b</sup> Laboratory of Mechanics, Department of Physics, Faculty of Sciences, University of Yaounde I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon<sup>c</sup> Nonlinear Physics and Complex Systems Group, Department of Physics, The Higher Teachers' Training College, University of Yaoundé I, P.O. Box 47, Yaoundé, Cameroon

### ARTICLE INFO

#### PACS:

05.45.Yv

04.20.Jb

42.65.Tg

#### Keywords:

Nonlinear Schrödinger equation

Optical fiber

Cnoidal soliton

Telecommunication systems

### ABSTRACT

This paper presents new exact analytical solutions of a nonlinear Schrödinger equation with a cubic–quintic nonlinearity and in presence of a couple of perturbation terms. This equation describes the dynamics of soliton propagation through an optical fiber. Several solutions are found without applying the computer codes and by considering the integration constant. The solutions are bright, dark and cnoidal solitons. These solutions may have significant applications in telecommunication systems where solitons are used to codify or for the transmission of data. The method used here is very effective and powerful and can be applied to other types of nonlinear equations.

## 1. Introduction

Nonlinear optic is today one of the areas which attracts the attention of many researchers. This attention is motivated by the fact that optic medium can be used to transport energy or information in telecommunication for example. The dynamics of optic mediums is generally described by the nonlinear Schrödinger equation, the Ginzburg–Landau equation and the Korteweg de Vries equation. The solutions of these equations are most often solitons. The concept of soliton is a fascinating notion which attracts the attention of the great majority of researchers. The beginning of soliton physics is dated back to the month of August 1834 when John Scott Russell observed the great wave of translation [1]. After that, solitons research has been conducted in diverse fields such as meteorology, nonlinear electrical lines, biology, cosmology and optical fibers, to cite a few. Optical solitons have promising potential to become principal information carriers in telecommunication due to their capability of propagating long distance without attenuation and changing their shapes. The pioneering works of Hasegawa and Tappert [2], who predicted solitons theoretically, and Mollenauer, Stolen, and Gordon [3], who observed them experimentally, made solitons a realistic tool for this cause.

This paper studies the dynamics of soliton propagation through an optical fiber with a cubic–quintic nonlinearity and in presence of a couple of perturbation terms. This optical fiber is governed by a nonlinear Schrödinger's equation. In the literature, there are many powerful methods which have been proposed to obtain exact analytic solutions of nonlinear partial differential equations [4–31]. Our objective here is to find exact solutions of the model under consideration without applying the computer codes. In the continuation, we will present the model. After that, we will deal with the investigation of solutions and we will end by a conclusion.

\* Corresponding author at: Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Appliquée (LAIA), IUT-FV of Bandjoun, The University of Dschang, BP 134 Bandjoun, Cameroon.

E-mail address: [tebue2007@gmail.com](mailto:tebue2007@gmail.com) (E. Tala-Tebue).

<https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.08.094>

Received 22 March 2018; Received in revised form 29 June 2018; Accepted 23 August 2018

0030-4026/ © 2018 Elsevier GmbH. All rights reserved.

## 2. Presentation of the model

In this section, we briefly outline the model studied. This model is governed by a perturbed nonlinear Schrödinger's (NLS) equation given by Eq. (1):

$$i\psi_t + a_1\psi_{xx} + (a_3|\psi|^2 + a_5|\psi|^4)\psi - i\alpha\psi_x - i\beta(|\psi|^2\psi)_x = 0, \tag{1}$$

where  $a_1, a_3, a_5, \alpha$  and  $\beta$  are real constants related to the group velocity dispersion, the cubic nonlinearity, the quintic nonlinearity, the inter-modal dispersion and the self-steepening effect respectively. Now, we consider that the field function  $\psi(x, t)$  of Eq. (1) can be taken as follows

$$\psi(x, t) = A(\xi)e^{i\theta}, \quad \text{where } \theta = f(\xi) - \omega t \quad \text{and } \xi = kx - \lambda t. \tag{2}$$

Substituting Eq. (2) into Eq. (1), and separating real and imaginary parts, we obtain

$$[(\lambda + \alpha k)f' + \omega - a_1k^2f'^2]A + 3k\beta A^3f' + a_1k^2A'' + a_3A^3 + a_5A^5 = 0 \tag{3}$$

and

$$k^2a_1f''A + (2k^2a_1f' - \alpha k - \lambda)A' - 3k\beta A^2A' = 0. \tag{4}$$

Under the constraint

$$f' = \frac{\lambda + \alpha k}{2k^2a_1} + \frac{3\beta}{4ka_1}A^2, \tag{5}$$

Eq. (4) is satisfied identically. Introducing Eq. (5) into Eq. (3), we obtain

$$a_1k^2A'' + \left(\omega + \frac{(\lambda + \alpha k)^2}{4k^2a_1}\right)A + \left(\frac{3\beta(\lambda + \alpha k)}{2ka_1} + a_3\right)A^3 + \left(\frac{27\beta^2}{16a_1} + a_5\right)A^5 = 0. \tag{6}$$

Eq. (6) is an elliptic differential equation describing the evolution of the wave amplitude in the optical fiber. In what follows, we present novel solutions. We also give the conditions for which these optical soliton solutions exist.

## 3. Exact solutions: cnoidal and solitary waves

In order to obtain the exact solutions of the model studied, we multiply Eq. (6) by  $A'$  and integrating with respect to  $\xi$ ; we get

$$(A')^2 = -\frac{1}{a_1k^2}\left(\omega + \frac{(\lambda + \alpha k)^2}{4k^2a_1}\right)A^2 - \frac{1}{2a_1k^2}\left(\frac{3\beta(\lambda + \alpha k)}{2ka_1} + a_3\right)A^4 - \frac{1}{3a_1k^2}\left(\frac{27\beta^2}{16a_1} + a_5\right)A^6 + C, \tag{7}$$

where  $C$  is an arbitrary constant of integration. Solution of Eq. (7) can be constructed by means of some of the methods presented above. However, we can obtain the general solution of this equation by using only an analytical resolution.

Supposing

$$A(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y(\xi)}}, \tag{8}$$

Eq. (7) becomes

$$(y')^2 = -2(Cy^3 - ay^2 - by - \sigma), \tag{9}$$

with  $a = -\frac{2}{a_1k^2}\left(\omega + \frac{(\lambda + \alpha k)^2}{4k^2a_1}\right)$ ,  $b = -\frac{1}{a_1k^2}\left(\frac{3\beta(\lambda + \alpha k)}{2ka_1} + a_3\right)$  and  $\sigma = -\frac{2}{3a_1k^2}\left(\frac{27\beta^2}{16a_1} + a_5\right)$ .

### 3.1. Case 1: $C = 0$

When  $C = 0$ ,  $a > 0$  and  $4a\sigma - b^2 > 0$ , we have the following integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + by + \sigma}} = \sqrt{2}(\xi - \xi_0), \tag{10}$$

from which we have

$$\sinh^{-1}\left(\frac{2ay + b}{\sqrt{4a\sigma - b^2}}\right) = \sqrt{2a}(\xi - \xi_0). \tag{11}$$

Eq. (11) leads to

$$y(\xi) = \frac{\sqrt{4a\sigma - b^2}}{2a} \sinh(\sqrt{2a}(\xi - \xi_0)) - \frac{b}{2a}. \tag{12}$$

Using Eq. (8), we have

$$A(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{4a\sigma - b^2}}{2a} \sinh(\sqrt{2a}(\xi - \xi_0)) - \frac{b}{2a}}}, \tag{13}$$

and the solution of the model studied is

$$\psi(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{4a\sigma - b^2}}{2a} \sinh(\sqrt{2a}(\xi - \xi_0)) - \frac{b}{2a}}} e^{i(f(kx - \lambda t) - \omega t)}, \tag{14}$$

where  $f$  satisfy Eq. (15) given below

$$f(\xi) = \int \left[ \frac{\lambda + \alpha k}{2k^2 a_1} + \frac{3\beta}{4ka_1} \frac{1}{\frac{\sqrt{4a\sigma - b^2}}{2a} \sinh(\sqrt{2a}(\xi - \xi_0)) - \frac{b}{2a}} \right] d\xi. \tag{15}$$

### 3.2. Case 2: $C \neq 0$

Consider

$$F(y) = y^3 - \frac{a}{C}y^2 - \frac{b}{C}y - \frac{\sigma}{C}. \tag{16}$$

To look for exact solutions of Eq. (9), we apply the approach published in [32]. Let us assume that  $y_1, y_2$  and  $y_3$  are real roots of algebraic solution  $F(y) = 0$  and verifying the relation  $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ . Thus, we have

$$y^3 - \frac{a}{C}y^2 - \frac{b}{C}y - \frac{\sigma}{C} = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3). \tag{17}$$

From Eq. (17), we find that

$$y_1 y_2 y_3 = \frac{\sigma}{C}, \quad y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = -\frac{b}{C}, \quad y_1 + y_2 + y_3 = \frac{a}{C}. \tag{18}$$

Eq. (9) can be transformed into

$$\frac{dy}{\sqrt{2(y_1 - y)(y - y_2)(y - y_3)}} = d\xi. \tag{19}$$

We set

$$y = y_1 - p(t)^2, \quad p(t) = \sqrt{y_1 - y_2} q(\xi), \quad S^2 = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3}. \tag{20}$$

Using Eq. (20), we can rewrite Eq. (19) in the form

$$\int_0^{q(\xi)} \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - S^2\tau^2)}} = \text{sn}^{-1}(q, S) = \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0), \tag{21}$$

from which we obtain

$$q(\xi) = \text{sn} \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0), S^2 \right]. \tag{22}$$

Taking into account Eq. (20), we have

$$y(\xi) = y_1 - (y_1 - y_2) \text{sn}^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0), S^2 \right]. \tag{23}$$

If we consider the identity

$$\text{sn}^2(\xi, S^2) + \text{cn}^2(\xi, S^2) = 1, \tag{24}$$

Eq. (23) yields to

$$y(\xi) = y_2 + (y_1 - y_2) \text{cn}^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0), S^2 \right], \tag{25}$$

with the period  $T$  given by

$$T = \sqrt{\frac{8}{y_1 - y_3}} \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - S^2\tau^2)}} = \sqrt{\frac{8}{y_1 - y_3}} K(S), \tag{26}$$



where  $K$  is the full elliptic integral of the first genus. Using Eq. (8), we have

$$A(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y_2 + (y_1 - y_2)\text{cn}^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0), S^2 \right]}}, \tag{27}$$

and the solution of the model studied is

$$\psi(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y_2 + (y_1 - y_2)\text{cn}^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0), S^2 \right]}} e^{i(f(kx - \lambda t) - \omega t)}, \tag{28}$$

with  $0 \leq S \leq 1$  and where  $f$  satisfy Eq. (29) given below

$$f(\xi) = \int \left[ \frac{\lambda + \alpha k}{2k^2 a_1} + \frac{3\beta}{4ka_1} \frac{1}{y_2 + (y_1 - y_2)\text{cn}^2 \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0), S^2 \right]} \right] d\xi. \tag{29}$$

If  $S \rightarrow 1$ ,

$$y(\xi) = y_2 + (y_1 - y_2) \cosh^{-2} \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0) \right], \tag{30}$$

$$A(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y_2 + (y_1 - y_2) \cosh^{-2} \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0) \right]}}, \tag{31}$$

and the solution of the model studied is

$$\psi(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{y_2 + (y_1 - y_2) \cosh^{-2} \left[ \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0) \right]}} e^{i(f(kx - \lambda t) - \omega t)}, \tag{32}$$

where  $f$  satisfy Eq. (33) given below

$$f(\xi) = \int \left[ \frac{\lambda + \alpha k}{2k^2 a_1} + \frac{3\beta}{4ka_1} \frac{1}{y_2 + (y_1 - y_2) \cosh^{-2} \left( \sqrt{\frac{y_1 - y_3}{2}} (\xi - \xi_0) \right)} \right] d\xi. \tag{33}$$

### 4. Conclusion

In this paper, we have considered a nonlinear Schrödinger equation with a cubic–quintic nonlinearity and in presence of a couple of perturbation terms. We have found the general solutions of this equation without using computer codes. As solutions, we have obtained a bright soliton solution, a dark soliton solution and a cnoidal soliton solution. Observing these solutions and those obtained in [33] by using the auxiliary equation expansion method or in [34] by using the csch function method, the tanh–coth Method and the modified simple equation method, we notice that our outcomes are new solutions which are not yet reported in the literature. More importantly, in [34], the authors have integrated Eq. (13) which is identical to Eq. (6) in the present work with zero constant (which is not the case here). However, this integration constant can be used to find more general solutions as shown in this paper. We then think that these results will help for conducting future research in various areas of physics such as optical switching, cascaded system, DWDM system, differential group delay and so on. The method used here can be applied to other nonlinear partial differential equations.

### References

- [1] J. Scott Russell, Report on waves, Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science (1844).
- [2] A. Hasegawa, F. Tappert, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion, Appl. Phys. Lett. 23 (1973) 142–144.
- [3] L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, J.P. Gordon, Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 1095.
- [4] F. Mohammadreza, J. Manafian, A. Ranjbaran, Solitons in optical metamaterials with anti-cubic law of nonlinearity by generalized (G'/G)-expansion method, Optik 162 (2018) 86–94.
- [5] E.M.E. Zayed, M.A.M. Abdelaziz, Exact solutions for the nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients using the generalized extended tanh-function, the sine-cosine and the exp-function methods, Appl. Math. Comput. 218 (2011) 2259–2268.
- [6] Z. Xin-Wei, Exp-function method for solving Fisher's equation, J. Phys. Conf. Ser. 96 (012063) (2008) 1–5.
- [7] K. Hosseini, A. Bekir, R. Ansari, Exact solutions of nonlinear conformable time-fractional Boussinesq equations using the  $\exp(-\phi(\epsilon))$ -expansion method, Opt. Quant. Electron. 49 (2017) 131.
- [8] E.M.E. Zayed, A note on the modified simple equation method applied to Sharma–Tasso–Olver equation, Appl. Math. Comput. 218 (2011) 3962–3964.
- [9] E. Tala-Tebue, Z.I. Djoufack, E. Fendzi-Donfack, A. Kenfack-Jiotsa, T.C. Kofane, Exact solutions of the unstable nonlinear Schrödinger equation with the new

- Jacobi elliptic function rational expansion method and the exponential rational function method, *Optik* 127 (2016) 11124–11130.
- [10] E. Tala-Tebue, Z.I. Djoufack, D.C. Tsoigni-Fozap, A. Kenfack-Jiotsa, F. Kapche-Tagne, T.C. Kofané, Traveling wave solutions along microtubules and in the Zhiber–Shabat equation, *Chin. J. Phys.* 55 (2017) 939–946.
- [11] E. Aksoy, M. Kaplan, A. Bekir, Exponential rational function method for space-time fractional differential equations, *Waves Random Complex Media* (2016), <https://doi.org/10.1080/17455030.2015.1125037>.
- [12] A. Bekir, M. Kaplan, Exponential rational function method for solving nonlinear equations arising in various physical models, *Chin. J. Phys.* 54 (2016) 365–370.
- [13] A. Biswas, M. Zaka Ullah, M. Asma, Q. Zhou, P. Seithuti, M. Belic, Optical solitons with quadratic–cubic nonlinearity by semi-inverse variational principle, *Optik* 139 (2017) 16–19.
- [14] F. Lian-Li, T. Shou-Fu, H. Yan, L. Wang, Z. Tian-Tian, On periodic wave solutions and asymptotic behaviors to a generalized Konopelchenko–Dubrovsky–Kaup–Kupershmidt equation, *Eur. Phys. J. Plus* 131 (2016) 241.
- [15] J. Manafian, M. Lakestani, A new analytical approach to solve some of the fractional-order partial differential equations, *Indian J. Phys.* 91 (2017) 243–258.
- [16] L. Dianchen, R.S. Aly, M. Arshad, Bright-dark solitary wave and elliptic function solutions of unstable nonlinear Schrödinger equation and their applications, *Opt. Quant. Electron.* 23 (2018) 1–10.
- [17] M.A. Mostafa Khater, R.S. Aly, L. Dianchen, Bifurcations of solitary wave solutions for (two and three)-dimensional nonlinear partial differential equation in quantum and magnetized plasma by using two different methods, *Results Phys.* 9 (2018) 142–150.
- [18] M. Dehghan, J. Manafian, A. Saadatmandi, Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method, *Num. Meth. Partial Diff. Eq. J.* 26 (2010) 448–479.
- [19] M. Dehghan, Application of the Exp-function method for solving a partial differential equation arising in biology and population genetics, *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow* 21 (2011) 736–753.
- [20] M. Dehghan, J. Manafian, Abbas Saadatmandi, Analytical treatment of some partial differential equations arising in mathematical physics by using the Exp-function method, *Int. J. Modern Phys. B.* 25 (2011) 2965–2981.
- [21] J. Manafian, J. Jalali, A. Ranjbaran, Applications of IBSOM and ETEM for solving a discrete electrical lattice, *Opt. Quant. Electron.* 9 (2017) 4406 [10.1007/s11082-017-1239-5](https://doi.org/10.1007/s11082-017-1239-5).
- [22] J. Manafian, Optical soliton solutions for Schrödinger type nonlinear evolution equations by the  $\tan(\phi/2)$ -expansion method, *Optik* 127 (2016) 4222–4245.
- [23] J. Manafian, M. Lakestani, Abundant soliton solutions for the Kundu–Eckhaus equation via  $\tan(\phi/2)$ -expansion method, *Optik* 127 (2016) 5543–5551.
- [24] M. Foroutan, I. Zamanpour, J. Manafian, Applications of IBSOM and ETEM for solving the nonlinear chains of atoms with long-range interactions, *Eur. Phys. J. Plus* 132 (2017) 1–18.
- [25] J. Manafian, On the complex structures of the Biswas–Milovic equation for power, parabolic and dual parabolic law nonlinearities, *Eur. Phys. J. Plus* 130 (2015) 1–20.
- [26] J. Manafian, M.F. Aghdaei, Morteza Khalilian, R.S. Jeedi, Application of the generalized  $G'/G$ -expansion method for nonlinear PDEs to obtaining soliton wave solution, *Optik* 135 (2017) 395–406.
- [27] C.T. Sindi, J. Manafian, Soliton solutions of the quantum Zakharov–Kuznetsov equation which arises in quantum magneto-plasmas, *Eur. Phys. J. Plus* 132 (2017) 1–23.
- [28] C.T. Sindi, J. Manafian, Wave Solutions for Variants of the KdV–Burger and the  $K(n, n)$ -Burger Equations by the Generalized  $G'/G$ -expansion Method (wileyonlinelibrary.com), (2017), <https://doi.org/10.1002/mma.4309>.
- [29] Gang-wei Wang, Symmetry analysis and rogue wave solutions for the  $(2+1)$ -dimensional nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients, *Appl. Math. Lett.* 56 (2016) 56–64.
- [30] Gang-Wei Wang, A.H. Kara, Group analysis, fractional exact solution and conservation laws of the time fractional generalized Burgers equation, *Commun. Theor. Phys.* 69 (2018) 5–8.
- [31] Gang-wei Wang, Xing Su, Yue Wang, Qi Wang, Xiaofang Dong, Analytical optical soliton solutions of  $(2+1)$ -dimensional Schrödinger equation with PT-like potentials, *Optik* 160 (2018) 396–401.
- [32] N.A. Kudryashov, *Methods of Nonlinear Mathematical Physics Intellect*, (2010), p. 364 (in Russian).
- [33] H. Ding-jiang, L. De-sheng, Z. Hong-qing, Explicit and exact travelling wave solutions for the generalized derivative Schrödinger equation, *Chaos Solitons Fract.* 31 (2007) 586–593.
- [34] M.J. Anwar Jaafar, A.A. Mahmood Jawad, A. Biswas, Z. Qin, M. Seithuti, B. Milivoj, Hamiltonian perturbation of optical solitons with parabolic law nonlinearity using three integration methodologies, *Optik* 160 (2018) 248–254.