



*République de Côte d'Ivoire
Union – Discipline – Travail*

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



**Unité de Formation et de
Recherche Sciences
Fondamentales et Appliquées**

N^o d'ordre : **483**

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

Présentée par
BOMISSO GOSSRIN JEAN-MARC

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

.....
MENTION : MATHEMATIQUES APPLIQUEES
SPECIALITES : EDP ET ANALYSE NUMERIQUE

**STABILITE EXPONENTIELLE, APPROXIMATION DU
SPECTRE ET DISSIPATIVITE NUMERIQUE D'UNE
POUTRE FLEXIBLE D'EULER-BERNOULLI**

Soutenue publiquement le **Judi 14 Mars 2019** à l'Université NANGUI ABROGOUA

devant le jury composé de :

M. SANGARE Daouda	Professeur Titulaire, UNA	Président
M. YORO Gozo	Maître de Conférences, UNA	Co-Directeur de thèse
M. TOURE K. Augustin	Professeur Titulaire, INPHB	Co-Directeur de thèse
M. COULIBALY Adama	Maître de Conférences, UFHB	Rapporteur
M. DOSSO Mouhamadou	Maître de Conférences, UFHB	Rapporteur
M. DIAGANA M. Youssouf	Maître de Conférences, UNA	Examineur

Dédicace

Je dédie cette thèse, un événement marquant de ma vie à mon adorable mère,

N'GBO N'ZUE,

qui m'est chère et qui a œuvré à ma réussite de par son amour, son soutien et ses énormes sacrifices consentis. Puisse Jéhovah Dieu, le Tout puissant te soutenir dans toutes tes épreuves et t'accorder une longue vie!

Remerciements

Qu'il me soit permis de présenter ici mes remerciements à tout un petit monde de personnes qui ont rendu possible la présente étude et qui ont contribué à son élaboration sous quelque forme que ce soit.

Je tiens tout d'abord à dire ma profonde gratitude envers mon Directeur de thèse, Docteur YORO Gozo, Maître de Conférences à l'Université Nangui Abrogoua d'Abidjan qui, malgré les prérogatives qui sont siennes, a accepté de diriger cette thèse. Je tiens aussi à remercier mon co-Directeur de thèse, Professeur TOURÉ Kidjébo Augustin, Professeur Titulaire à l'Institut National Polytechnique Houphouët Boigny de Yamoussoukro qui s'y est grandement impliqué par ses directives, ses remarques et suggestions, mais aussi par ses encouragements dans les moments clés de son élaboration. Merci à lui pour sa très grande réactivité aux appels téléphoniques et aux e-mails. Ce qui a rendu possible une grande qualité d'échanges tout au long de ces trois dernières années. Je tiens à le remercier aussi pour cette liberté qu'il a permise, sans laquelle le chercheur ne saurait affirmer sa manière de penser et de procéder, sa manière d'être, bref toute sa personnalité.

Je remercie vivement Professeur SANGARÉ Daouda, Professeur Titulaire à l'Université Nangui Abrogoua d'Abidjan pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury de ce mémoire de thèse. Je le remercie aussi chaleureusement pour sa participation à ma formation à l'UFR SFA. C'est dans ce même cadre que je remercie également Docteur DIAGANA Youssouf, Maître de Conférences à l'Université Nangui Abrogoua d'Abidjan qui a accepté d'être examinateur dans ce Jury. Je remercie Docteur COULIBALY Adama, Maître de Conférences à l'Université Félix Houphouët Boigny d'Abidjan qui a accepté, malgré son emploi du temps chargé, de faire l'un des rapports de cette thèse. Merci aussi pour ses suggestions et conseils reçus lors de mes passages à son bureau. Je n'oublie pas Docteur DOSSO Mouhamadou, Maître de Conférences à l'Université Félix Houphouët Boigny d'Abidjan qui a accepté également d'être rapporteur de cette thèse.

Enfin, il me paraît important de mentionner ici toutes les personnes évoluant hors de la sphère professionnelle, mais sans qui cette thèse n'aurait sûrement jamais pu se faire. Toute ma famille bien entendu, qui m'a toujours apporté son soutien et qui m'a laissé la liberté de faire les études que je voulais, aussi longues soient-elles. Mais aussi l'ensemble de mes amis notamment MELEDJE Mathieu, agent d'État Civil à la Mairie du Plateau qui s'est constitué un père pour moi, un véritable conseiller et avec

qui j'ai partagé des moments inoubliables ainsi que N'GUESSAN Franck, étudiant à l'École Normale Supérieure d'Abidjan qui m'a également soutenu. Je voudrais terminer en remerciant tous mes étudiants pour leur attention et leur affection. Que c'est important de se sentir entouré et soutenu, tout particulièrement lors des passages à vide, inhérent à la vie d'un thésard.

Résumé

Dans cette thèse, on considère une poutre flexible d'Euler-Bernoulli encastrée à une extrémité et soumise à l'autre extrémité libre à un contrôle force en rotation et en vitesse de rotation. Ce système appartient à la classe des systèmes dynamiques de dimension infinie. L'objectif poursuivi consiste à étudier le caractère bien posé au sens des C_0 -semi-groupes, le spectre, la stabilité exponentielle et la dissipativité numérique de ce système.

La première partie de cette thèse est composée de deux chapitres. Le premier est consacré à la stabilisation de cette poutre à coefficients variables. Nous montrons que le contrôle force en rotation et en vitesse de rotation stabilise exponentiellement le système. Dans le second, nous ajoutons au système étudié au premier chapitre, un amortissement dont le coefficient est une fonction qui n'est pas de signe constant. La question qui se pose naturellement est de savoir si une telle fonction pourrait avoir une mauvaise influence sur la stabilité exponentielle de ce nouveau système. Nous donnons des conditions pour qu'il soit exponentiellement stable.

La deuxième partie se décompose en deux chapitres. Le premier développe une méthode numérique qui conserve fidèlement les propriétés obtenues dans le cas continu telles que la stabilité et la dissipativité de la fonction de Lyapunov. La discrétisation du système se fait en deux étapes : une première méthode numérique semi-discrète est obtenue en utilisant la méthode des éléments finis pour la discrétisation dans l'espace, et dans la deuxième étape, un schéma numérique totalement discrétisé est obtenu en se servant du schéma de Crank-Nicolson pour la discrétisation dans le temps. Chaque schéma numérique est développé en conservant l'argumentation de dissipativité. Par ailleurs, la convergence de la méthode est montrée et des estimations d'erreur a priori sont obtenues. Le deuxième présente des simulations numériques. Par la méthode des éléments finis, nous illustrons l'influence des paramètres de contrôles rétroactifs à la frontière sur le spectre approché. En outre, l'ordre de convergence des méthodes numériques obtenu dans le premier chapitre de la deuxième partie est confirmé.

Mots clés : poutre d'Euler-Bernoulli, semi-groupe, stabilité, éléments finis d'Hermite, schéma de Crank-Nicolson, dissipativité numérique.

Abstract

In this thesis, we consider a flexible Euler-Bernoulli beam clamped at one end and subjected to a force control in rotation and velocity rotation. This system belongs to the class of infinite dimensional dynamic systems. The goal of the two parts of this thesis is to study the well-posedness character in the sense of the C_0 -semigroups, the spectrum, the exponential stability and numerical dissipativity of this system.

The first part of this thesis is composed of two chapters. The first chapter is about stabilization of this beam with variable coefficients. We show that the force control in rotation and velocity rotation stabilizes exponentially the system. In the second, we add to the system studied in the first chapter, a damping whose coefficient is a function which changes sign. The natural question is whether such a function could have a bad influence on the exponential stability of the new system. We give conditions for obtain the exponential stability.

The second part is divided into two chapters. The first chapter develop a numerical method which faithfully reproduces some properties obtained in the continuous case such as stability and dissipativity of Lyapunov function. The discretization of the system is performed in two steps : first a semi-discrete numerical method is obtained using the finite element method for the discretization in space, and in the second step, a fully discrete scheme is obtained using the Crank-Nicolson scheme for discretization in time. The two numericals schemes are developed, followed by the dissipativity argumentation. Furthermore, the convergence of the method is shown and a-priori error estimates are obtained. The second chapter presents the simulations results. By finite elements method, we illustrate the influence of boundary feedback controls on approximate spectrum. Moreover, the order of convergence (o.o.c) of numerical method in both space and time obtained in the first chapter of second part is confirmed.

Keywords : Euler-Bernoulli beam, semigroup, stability, finite elements of Hermite, Crank-Nicolson scheme, numerical dissipativity.

Table des figures

1.1	Exemple d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli	6
1.2	Différentes configurations d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli : (a) en rotation (b) en translation.	7
4.1	Fonctions polynomiales hermitiennes	103
5.1	Représentation du spectre	134
5.2	Représentation du spectre lorsque $\alpha = 0$	135
5.3	Influence de la variation du paramètre α sur le spectre	136
5.4	Influence de la variation du paramètre β sur le spectre	137
5.5	Asymptote du spectre pour $\alpha = 0.75$	138
5.6	Asymptote du spectre pour $\alpha = 2$	139
5.7	Asymptote du spectre pour $\alpha = 5$	140
5.8	Asymptote du spectre pour $\alpha = 10$	141

Table des matières

Dédicace	ii
Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vi
Introduction générale	1
Chapitre 1 Généralités	5
1.1 Modélisation	5
1.2 Remarques sur les notations	8
1.3 Quelques espaces fonctionnels usuels	8
1.3.1 Espaces de Sobolev en dimension un	8
1.3.2 L'espace $L^2(a, b; X)$	10
1.3.3 Espaces intermédiaires ou d'interpolation	10
1.4 Systèmes dynamiques et stabilité de Lyapunov	13
1.4.1 Systèmes dynamiques	13
1.4.2 Définition d'un système dynamique et son étude qualitative	14
1.4.3 Stabilité de Lyapunov pour les systèmes dynamiques	16
1.5 Généralités sur les systèmes linéaires de dimension infinie	17
1.5.1 Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert	18
1.5.2 Semi-groupe d'opérateurs linéaires dans un espace de Banach	19
1.6 Lemme de Gronwall	30
1.7 Étude des problèmes aux valeurs propres	30

I Stabilisation exponentielle et approximation du spectre d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients variables amortie et non-amortie **33**

Chapitre 2 Une étude de la stabilité exponentielle pour une poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients variables **34**

2.1	Introduction	34
2.2	Problème bien posé au sens des semi-groupes	36
2.3	Analyse spectrale de l'opérateur et propriété de la base de Riesz	40
2.3.1	Analyse spectrale de l'opérateur	40
2.3.2	Propriété de la base de Riesz des fonctions propres de l'opérateur	51
2.4	Stabilité exponentielle du système	53

Chapitre 3 Stabilisation d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients variables sous l'effet d'un amortissement visqueux **57**

3.1	Introduction	57
3.2	Problème bien posé au sens des semi-groupes	59
3.3	Analyse spectrale de l'opérateur et propriété de la base de Riesz	63
3.3.1	Analyse spectrale de l'opérateur	63
3.3.2	Propriété de la base de Riesz des fonctions propres de l'opérateur	73
3.4	Stabilité exponentielle du système	75

II Méthode numérique dissipative par la méthode des éléments finis (MEF) d'une poutre flexible d'Euler Bernoulli **81**

Chapitre 4 Dissipativité d'une méthode numérique pour une poutre flexible d'Euler-Bernoulli **82**

4.1	Introduction	82
4.2	Existence, unicité et régularité de la solution faible	84
4.2.1	Problème bien posé au sens des semi-groupes	84
4.2.2	Formulation faible	86
4.3	Méthode numérique dissipative par la méthode des éléments finis	97
4.3.1	Schéma semi-discret	98
4.3.2	Schéma totalement discrétisé	110

Chapitre 5 Simulations numériques	120
5.1 Introduction	120
5.2 Étude numérique du spectre du système	122
5.2.1 Calcul des approximations des intégrales pour les matrices de masse et de rigidité	124
5.2.2 Tests numériques	134
5.2.3 Conclusion	141
5.3 Convergence de la méthode numérique	142
Conclusion générale et Perspectives	144
Annexes	146
Annexe A Pour la première partie	147
Annexe B Pour la deuxième partie	155
Annexe C Les trois (3) articles publiés dans deux (2) journaux spé- cialisés	158
Bibliographie	210
Résumé	216

Introduction générale

Cette thèse concerne les aspects analytiques et numériques des systèmes mécaniques avec des commandes de contrôle.

L'équation de la poutre d'Euler-Bernoulli (Euler-Bernoulli Beam en anglais) est un modèle très bien établi qui a une large gamme d'applications découlant de l'ingénierie et de l'industrie. On peut citer les satellites avec des appendices flexibles [3, 5], les Bras de robot flexibles [42], les oscillations d'antennes de télécommunication, les ailes flexibles des véhicules à micro-air [14], les bâtiments élevés en raison de forces externes [37], et même des vibrations des structures ferroviaires [56]. Ces quelques exemples démontrent que la question de stabilisation et des commandes de contrôle des poutres flexibles d'Euler-Bernoulli est un domaine de recherche important. L'intérêt des ingénieurs et des mathématiciens pour ces problèmes a été considérablement stimulé dans les années 1980, lorsque la National Aeronautics and Space Administration (NASA) a lancé le modèle SCOLE (Spacecraft Control Laboratory Experiment), dans le but de contrôler la dynamique des grands engins spatiaux flexibles (voir par exemple [39, 4, 5]). Le modèle SCOLE se compose d'un mât long et flexible \mathbf{M} et d'une poutre élastique reliant deux corps rigides. L'un des corps rigides représente l'orbite de navette spatiale \mathbf{S} et l'autre représente le réflecteur d'antenne \mathbf{A} . Chaque des corps rigides possède des propriétés d'inertie prescrites et est contrôlé par des équations différentielles ordinaires tandis que le mât flexible satisfait à une équation différentielle aux dérivées partielles avec des conditions aux limites imposées aux deux extrémités par des forces de contrôle et des couples de forces agissant à la fois sur \mathbf{S} et \mathbf{A} . Ainsi, les poutres flexibles d'Euler-Bernoulli étudiées dans cette thèse c'est-à-dire celles fixées à une extrémité et soumises à l'autre extrémité libre à une force de contrôle en rotation et en vitesse de rotation, font partie des structures comprises dans le projet SCOLE. Toutefois, sans perte de généralité, nous supposerons que la masse attachée à l'antenne est nulle.

La notion de stabilité correspond à l'idée du comportement d'un système qui dure dans le temps. Une manière naturelle d'aborder cette question consisterait à résoudre l'équation différentielle associée au système et d'étudier le comportement des solutions. Toutefois, cette étude de stabilité n'est pas aisée dans la pratique. Pour y arriver, plusieurs méthodes ont vu le jour dont la méthode de l'analyse spectrale qui

a fréquemment été utilisée au cours des dernières décennies pour déterminer le comportement dynamique des systèmes vibrants. En général, les problèmes de stabilité en dimension infinie sont beaucoup plus compliqués que ceux des systèmes en dimension finie. En effet, la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle ainsi que la propriété stipulant que toutes les valeurs propres sont situées dans le demi-plan gauche du plan complexe ouvert, sont équivalentes en dimension finie. Par contre, pour les systèmes linéaires en dimension infinie, l'équivalence ne tient pas en général. Contrairement au cas de dimension finie, la stabilité exponentielle pour les systèmes en dimension infinie ne peut être seulement déduit par le fait que le spectre du système se situe dans le demi-plan gauche du plan complexe ouvert. Des conditions supplémentaires sont donc nécessaires. Pour la stabilisation par feedback (rétroaction) des problèmes d'ingénierie, il est préférable, si possible, de trouver des contrôles qui stabilisent exponentiellement le système donné. Ceci est vraiment important car la stabilité exponentielle offre la convergence avec la garantie d'un bon ordre de convergence. Nous étudierons ce type de stabilité pour chacun des problèmes de cette thèse dans le cadre des semi-groupes et nous ferons une approximation du spectre. Tel est le premier objectif de cette thèse.

La seconde contribution de cette thèse se situe au niveau de la conception d'une méthode numérique dissipative pour le système considéré, qui reproduit fidèlement les propriétés obtenues dans le cas continu telles que la stabilité et la dissipativité de la fonctionnelle de Lyapunov. La méthode est développée de telle sorte que les systèmes discrétisés conservent la dissipativité. Pour la discrétisation dans l'espace, on utilise la méthode des éléments finis avec les fonctions polynomiales d'Hermite, et la méthode de Crank-Nicolson pour la discrétisation dans le temps. La méthode numérique est validée par des simulations et sa convergence est démontrée.

Le premier chapitre de la thèse est consacré aux rappels voire aux ressources nécessaires portant sur la notion des systèmes dynamiques et la stabilité de Lyapunov, la théorie des semi-groupes relative à de tels systèmes et l'étude des problèmes aux valeurs propres.

Dans le Chapitre **2**, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité exponentielle d'une poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables fixée à une extrémité et soumise à l'extrémité libre à un contrôle force en rotation et en vitesse de rotation. On montre que le système des fonctions propres généralisées forme une base de Riesz dans l'espace d'état correspondant. Par conséquent, le spectre détermine le taux de décroissance de l'énergie et on en déduit la stabilité exponentielle du système. Nous précisons que ce

système est le cas non uniforme ou variable de ceux étudiés par A. K. Touré, B. J. C. Koua et F. N. Diop (voir [58], cas $\beta \neq 0$) et par F. Saouri (voir [52], cas $\beta = 0$) dans lesquels les auteurs ont prouvé, en utilisant la théorie de Shkalikov, la propriété de la base de Riesz et aussi la stabilité exponentielle du système uniforme. Les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication à *Global Journal of Pure and Applied Mathematics* (voir [9]).

Dans le Chapitre **3**, on considère le système étudié au deuxième chapitre en ajoutant à la première équation un terme d'amortissement ou de frottement visqueux à coefficient variable modélisé par une fonction notée $\gamma(\cdot)$ (fonction n'ayant pas de signe constant). On penserait à première vue que l'ajout d'un amortissement aurait une mauvaise influence sur le système. Mais nous démontrons que ce nouveau système est exponentiellement stable sous certaines conditions. Ce qui n'est pas évident en raison de l'épaisseur physique non uniforme et de la densité de la poutre d'Euler-Bernoulli apparaissant avec le coefficient variable d'amortissement $\gamma(x)$ dans la première équation. Ce résultat a fait l'objet d'une publication à *Journal of Mathematics Research* (voir [10]).

Le Chapitre **4** est consacré aux résultats numériques obtenus à partir du système exponentiellement stable présenté au Chapitre **2** mais à coefficients constants c'est-à-dire ceux étudiés par A. K. Touré, B. J. C. Koua et F. N. Diop (voir [58], cas $\beta \neq 0$) et par F. Saouri ([52], cas $\beta = 0$). Nous développons une méthode numérique dissipative qui conserve fidèlement les propriétés dans le cas continu tels que la stabilité et la dissipativité de la fonctionnelle de Lyapunov. Cette méthode est développée de telle sorte que le système semi-discrétisé et celui totalement discrétisé conservent la dissipativité. Pour la discrétisation dans l'espace, on utilise la méthode des éléments finis avec les fonctions polynomiales cubiques d'Hermite, et le schéma de Crank-Nicolson pour la discrétisation dans le temps. La convergence de cette méthode est démontrée et des estimations a priori sont obtenues. Ce résultat a fait l'objet d'une publication à *Journal of Mathematics Research* (voir [8]).

Finalement, le Chapitre **5** est consacré aux simulations numériques afin d'illustrer l'efficacité de la méthode employée au Chapitre **4**. Par la méthode des éléments finis décrite au Chapitre **4**, nous étudions l'influence des paramètres de contrôle du système sur le spectre. Afin de vérifier aussi l'ordre de convergence (o.d.c) obtenu au Chapitre **4**, des simulations sont faites à différentes étapes de la discrétisation tant en espace que dans le temps.

Nous terminons cette rédaction par une conclusion générale qui rappelle les objectifs de la thèse et les résultats essentiels atteints ainsi que quelques perspectives soulignant les extensions de nos travaux qui peuvent être faites.

Chapitre 1

Généralités

Ce chapitre présente quelques généralités permettant de fixer les idées quant aux systèmes dynamiques, à la théorie des semi-groupes relative à de tels systèmes et à l'étude des problèmes aux valeurs propres.

1.1 Modélisation

Depuis l'avènement de la conception de grandes structures spatiales et la nécessité de les rendre aussi légères que possible, le besoin d'amortir rapidement les vibrations transitoires des objets s'est inévitablement imposé. C'est pourquoi, dans le cadre de cette thèse, nous contrôlons l'extrémité libre d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients variables de longueur l , encastree à une extrémité afin d'atténuer les effets de ses vibrations possibles. Nous la modélisons comme suit.

En supposant que la densité des forces extérieures est nulle, la poutre flexible satisfait l'équation d'Euler-Bernoulli suivante :

$$m(x) u_{tt}(x, t) + (EI(x) u_{xx})_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

où EI est la rigidité de flexion et m est la masse linéique de la poutre.

Tout au long de cette thèse, nous supposerons que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$m(x), EI(x) \in C^4(0, 1), \quad m(x), EI(x) > 0.$$

Notons que $u(x, t)$ désigne la déviation transversale de la poutre à la position x et au temps t . La notation $w = u_t$ sur la figure 1.1 désigne la vitesse de la poutre.

1.1. MODÉLISATION

Les conditions initiales sont considérées

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (1.2)$$

$$u_t(x, 0) = w_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (1.3)$$

Les conditions aux limites de l'équation (1.1) sont définies en considérant les 4 grandeurs suivantes dues à la flexion :

- Déplacement dû à la flexion : $u(x, t)$,
- Angle de rotation dû à la flexion : $\theta(x, t) = u_x(x, t)$,
- Moment de flexion : $M(x, t) = EIu_{xx}(x, t)$,
- Force de cisaillement : $Q(x, t) = -(EIu_{xx})_x(x, t)$.

On désigne par $\theta_t(x, t) = u_{xt}(x, t)$, la vitesse de rotation.

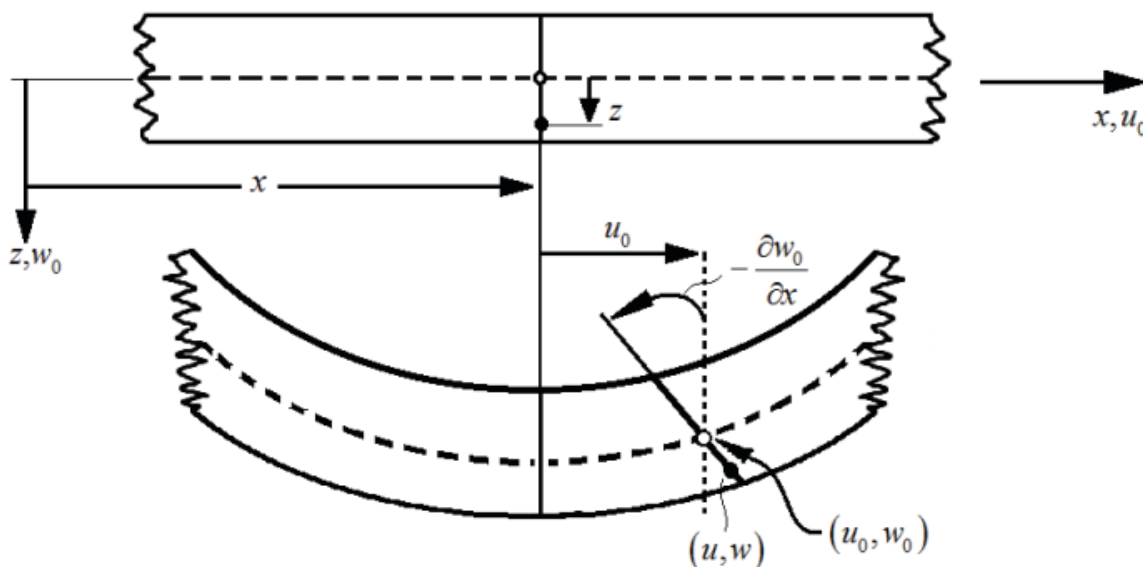


FIGURE 1.1 – Exemple d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli

Nous supposons en outre que l'extrémité de la poutre à $x = 0$ est encastree ou fixée, c'est-à-dire que les conditions aux limites suivantes sont satisfaites :

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.4)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (1.5)$$

1.1. MODÉLISATION

Nous donnons maintenant les conditions à l'extrémité libre de la poutre c'est-à-dire en $x = l$. A cet endroit, nous contrôlons la poutre seulement en moment par une combinaison linéaire de la vitesse de rotation et de l'angle de rotation et non en force. Cela signifie donc que la force de cisaillement est nulle en $x = l$:

$$- (EIu_{xx})_x(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

et le moment de flexion en $x = l$ vérifie l'égalité suivante :

$$- EIu_{xx}(l, t) = \alpha u_{xt}(l, t) + \beta u_x(l, t), \quad t > 0, \quad (1.7)$$

où α et β sont des paramètres positifs, des gains de rétroaction accordés dans la pratique.

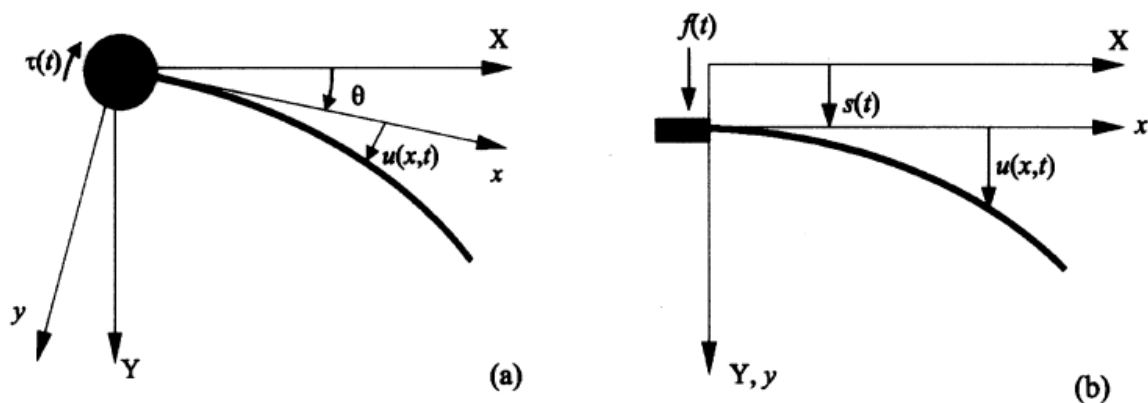


FIGURE 1.2 – Différentes configurations d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli :
(a) en rotation (b) en translation.

Nous montrons, dans des conditions appropriées, qu'une poutre d'Euler-Bernoulli, fixée à une extrémité avec des contrôles imposés à l'autre extrémité, peut être exponentiellement stable. Il est important de noter que la méthode employée dans les prochains chapitres peut également être appliquée à d'autres structures de poutres multiples comme évoquées dans l'introduction, avec des contrôles imposés à un bout de la poutre ou encore quelque part d'autre sur le long de la poutre.

1.2 Remarques sur les notations

Plusieurs notations sont utilisées pour la différentiation nommément $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $u_x(x,t)$ et $u'(x,t)$. Quelle que soit la forme utilisée, toutes désignent la dérivée partielle de $u(x,t)$ par rapport à x . De même, pour une fonction dépendante du temps $u(t)$, nous utiliserons $\frac{\partial}{\partial t}u(t)$, $\dot{u}(t)$ ou u_t pour désigner sa dérivée par rapport au temps. Les notations $\mathcal{O}(\cdot)$ et $o(\cdot)$ sont définies comme suit : pour $t > 0$ et pour un réel p ,

$$f(t) = \mathcal{O}(t^p) \text{ quand } t \rightarrow 0 \Leftrightarrow t^{-p}|f(t)| \text{ est borné quand } t \rightarrow 0,$$

$$f(t) = o(t^p) \text{ quand } t \rightarrow 0 \Leftrightarrow t^{-p}|f(t)| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

1.3 Quelques espaces fonctionnels usuels

Les informations suivantes qui figurent dans cette section proviennent de [38].

1.3.1 Espaces de Sobolev en dimension un

Soient Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R} . On désigne par $L^2(\Omega)$ l'espace fonctionnel suivant :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\Omega} |u|^2 dx < \infty \right\}.$$

Comme il est classique, L^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx$$

associé à la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} < \infty. \quad (1.8)$$

Soit maintenant m un entier supérieur ou égal à 1. En bref, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre m sur Ω est défini par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \leq m\}, \quad (1.9)$$

1.3. QUELQUES ESPACES FONCTIONNELS USUELS

où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \text{ et } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Il faut préciser à quel sens l'on prend les D^α dans la définition (1.9).

Pour cela, rappelons brièvement comment sont définies les distributions sur Ω .

On définit d'abord

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \text{ indéfiniment différentiable sur } \Omega \text{ et à support compact dans } \Omega\}.$$

On définit alors

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \text{dual de } \mathcal{D}(\Omega) = \text{espace des distributions sur } \Omega$$

et l'on munit $\mathcal{D}'(\Omega)$ de la topologie forte de dual.

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sa dérivée $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ est définie par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ce qui donne une application

$$T \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

linéaire et continue de $\mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Maintenant on peut définir le sens de la définition (1.9) si l'on note que

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

en identifiant tout élément u de $L^2(\Omega)$ à la distribution

$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle .$$

En conclusion, nous retenons que, dans la définition (1.9), les dérivées $D^\alpha u$ sont prises au sens des distributions sur Ω .

On a aussi le théorème suivant décrivant les espaces de Sobolev H^m , $m > 0$:

Théorème 1.1. *On munit $H^m(\Omega)$ de la norme :*

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Pour cette norme, l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Le produit scalaire de deux éléments u et v de $H^m(\Omega)$ est donné par

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} .$$

Il est important de noter les inclusions strictes suivantes :

$$H^{m_1}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$$

si $m_1 > m > 0$.

1.3.2 L'espace $L^2(a, b; X)$

Soit X un espace de Hilbert. On désigne par $L^2(a, b; X)$ l'espace des (classes de) fonctions f fortement mesurables sur $[a, b]$ à valeurs dans X (pour la mesure de Lebesgue dt sur $[a, b]$) et telles que

$$\left(\int_a^b \| f(t) \|_X^2 dt \right)^{1/2} = \| f \|_{L^2(a, b; X)} < +\infty. \quad (1.10)$$

Muni de la norme (1.10), $L^2(a, b; X)$ est *un espace de Hilbert*.

On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow X$ est dite fortement mesurable s'il existe une suite de fonctions simples $f_k : [a, b] \rightarrow X$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f, \text{ p.p sur } [a, b].$$

1.3.3 Espaces intermédiaires ou d'interpolation

Soient X et Y deux espaces de Hilbert que nous supposerons séparables avec $X \subset Y$, X étant dense dans Y avec injection continue.

Nous rappelons ici un procédé donné dans [38] pour définir les espaces intermédiaires liés à la formulation variationnelle d'un système.

D'abord, définissons l'opérateur Λ .

L'espace X peut être défini comme le domaine d'un opérateur Λ non borné dans Y , auto-adjoint, positif (Λ étant d'ailleurs non unique). La norme de X est équivalente à celle du graphe

$$\left(\|u\|_Y^2 + \|\Lambda u\|_Y^2\right)^{1/2}, \quad u \in D(\Lambda) = X.$$

Désignons par $D(S)$ l'ensemble des u tel que la forme anti-linéaire

$$v \mapsto \langle u, v \rangle_X, \quad v \in X$$

soit continue pour la topologie induite par Y . Alors on a :

$$\langle u, v \rangle_X = \langle Su, v \rangle_Y, \tag{1.11}$$

ce qui définit S comme un opérateur non borné dans Y , de domaine $D(S)$. Le domaine $D(S)$ est aussi dense dans Y .

S est un opérateur auto-adjoint et strictement positif. En effet, il existe une constante M telle que :

$$\langle Sv, v \rangle_Y = \|v\|_X^2 \geq M\|v\|_Y^2.$$

Grâce à la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints, on peut définir les puissances S^θ de S , avec $\theta \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).

On utilisera en particulier :

$$\Lambda = S^{1/2}. \tag{1.12}$$

L'opérateur Λ est auto-adjoint positif dans Y , de domaine X . On déduit des équations (1.11) - (1.12) que :

$$\langle u, v \rangle_X = \langle \Lambda u, \Lambda v \rangle_Y, \quad \forall u, v \in X. \tag{1.13}$$

L'opérateur S dépend du choix des produits scalaires sur X et Y sans changer évidemment les topologies de X et Y et donc l'opérateur Λ dépend aussi de ces produits scalaires ; il n'est donc pas intrinsèquement lié aux espaces X et Y .

On donne à présent la définition des espaces intermédiaires $[X, Y]_\theta$:

Définition 1.2. Soient X et Y deux espaces de Hilbert que nous supposons séparables avec $X \subset Y$, X étant dense dans Y avec injection continue. Λ étant défini par (1.12), on pose

$$[X, Y]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

avec $D(\Lambda^{1-\theta})$ le domaine de $\Lambda^{1-\theta}$ et la norme de $[X, Y]_\theta =$ norme du graphe de $\Lambda^{1-\theta}$ c'est-à-dire $(\|u\|_Y^2 + \|\Lambda^{1-\theta}u\|_Y^2)^{1/2}$.

Des propriétés de la décomposition spectrale, on en déduit que X est dense dans $[X, Y]_\theta$.

Il est important de noter que :

$$[X, Y]_0 = X, \quad [X, Y]_1 = Y.$$

De plus, puisque

$$X \subset [X, Y]_\theta \subset Y,$$

chaque espace étant dense dans le suivant, on a par dualité sans aucune identification entre l'espace et son dual :

$$Y' \subset [X, Y]_\theta' \subset X',$$

chaque espace étant dense dans les suivants.

On peut maintenant énoncer le théorème de dualité dans le cadre des espaces intermédiaires :

Théorème 1.3. Pour tout $\theta \in]0, 1[$, on a :

$$[X, Y]_\theta' = [Y', X']_{1-\theta},$$

avec équivalence de normes.

Démonstration. Pour la démonstration, on peut se référer à [38] aux pages 34-35. \square

1.4 Systèmes dynamiques et stabilité de Lyapunov

Dans cette section, nous examinerons certains concepts fondamentaux sur les systèmes dynamiques et nous décrirons la stabilité de Lyapunov associée à ce type de système.

1.4.1 Systèmes dynamiques

La notion de système dynamique a son origine dans la mécanique newtonienne. Tout comme dans certaines sciences naturelles et disciplines d'ingénierie, la règle d'évolution des systèmes dynamiques est une relation implicite qui donne l'état du système dans le futur pour un court laps de temps. La relation peut être une équation différentielle, une échelle de temps, etc. Pour déterminer l'état du système dans le futur, il faut itérer la relation à plusieurs reprises, chaque temps d'avancement étant une petite étape. La procédure d'itération est appelée la *résolution du système* ou l'*intégration du système*. Si le système peut être résolu, étant donné un point initial, il est possible de déterminer toutes ses positions futures qui est un ensemble de points connu sous le nom de trajectoire ou d'orbite.

Avant l'apparition des ordinateurs, la recherche d'une orbite nécessitait des techniques mathématiques sophistiquées et ne pouvait être réalisée que pour une petite classe de systèmes dynamiques. De nos jours, les méthodes numériques mises en œuvre sur les machines informatiques et électroniques ont simplifié la tâche de la détermination des orbites d'un système dynamique.

Pour les systèmes dynamiques simples, connaître la trajectoire est souvent suffisant, mais la plupart des systèmes dynamiques sont trop compliqués pour être compris en termes de trajectoires individuelles. Les difficultés sont énumérées comme suit :

1- Les systèmes étudiés ne peuvent être connus que approximativement (les paramètres du système peuvent ne pas être connus précisément ou des termes peuvent manquer dans les équations). Ainsi, les approximations utilisées remettent donc en question la validité ou la pertinence des solutions numériques. Pour surmonter cette difficulté, plusieurs notions de stabilité ont été introduites dans l'étude des systèmes dynamiques. Ce sont : la stabilité de Lyapunov, la stabilité de Lagrange et la stabilité de Hurwitz. La stabilité des systèmes dynamiques implique qu'il existe des conditions initiales pour lesquelles les trajectoires du système étudié et celles de son approxi-

mation seraient équivalentes. Notons que l'opération de comparaison des orbites pour établir leur équivalence change avec les différentes notions de stabilité.

2- Certaines trajectoires peuvent être périodiques, alors que d'autres peuvent parcourir de nombreux états différents du système. Ces différents comportements nécessitent souvent d'énumérer des classes ou de maintenir le système dans une classe. La classification de toutes les trajectoires possibles a conduit à l'étude qualitative des systèmes dynamiques, c'est-à-dire à l'étude des propriétés invariantes sous des transformations de coordonnées.

3- Le comportement des trajectoires en fonction d'un paramètre variable fait que les systèmes dynamiques peuvent avoir des points de bifurcation. Par exemple, il peut arriver de migrer uniquement d'un mouvement périodique à un comportement apparemment erratique (qui n'est pas fixe), comme dans la transition vers la turbulence d'un fluide.

4- Les trajectoires du système peuvent apparaître erratiques et stochastiques (aléatoires). Dans ces cas, il peut être nécessaire de calculer les moyennes en utilisant une très longue trajectoire ou de nombreuses trajectoires différentes. Les moyennes sont bien définies pour les systèmes ergodiques (c'est-à-dire les systèmes qui parcourent tous les états possibles avec des probabilités égales) et une compréhension plus détaillée a été élaborée pour les systèmes hyperboliques. La compréhension des aspects probabilistes des systèmes dynamiques a permis d'établir les fondements de la mécanique statistique et du chaos.

1.4.2 Définition d'un système dynamique et son étude qualitative

Un système dynamique est un concept en mathématiques où une règle fixe décrit comment un point dans un espace géométrique dépend du temps. Les exemples incluent les modèles mathématiques qui décrivent le mouvement d'une poutre en rotation, le basculement d'un pendule d'horloge, le débit d'eau dans un tuyau et le nombre de poissons chaque heure de printemps dans un lac. À tout moment donné, un système dynamique a un état qui est donné par un ensemble de nombres réels (un vecteur). Cet état peut être représenté par un point dans un espace d'état approprié. De petits changements dans l'état du système créent assurément de petits changements dans les résultats. La règle d'évolution du système dynamique est une règle fixe qui décrit les

états futurs en fonction de l'état actuel. La règle est déterministe ; en d'autres termes, pour un intervalle de temps donné, un seul état futur découle de l'état actuel.

Définition 1.4. (*Système dynamique*) Un système dynamique est un quadruplet $\{T, X, A, S\}$ où T désigne l'espace du temps, X l'espace des états (un espace métrique muni de la métrique d), A l'espace des états initiaux et S la famille des mouvements. En particulier, lorsque $T = \mathbb{R}^+$, on parle de systèmes dynamiques à temps continu et quand $T = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots, \}$, on parle de systèmes dynamiques à temps discret.

Pour tout mouvement $x(\cdot; x_0, t_0) \in S$, on a :

$$\begin{cases} x(t_0; x_0, t_0) = x_0 \in A \subset X \\ x(t; x_0, t_0) \in X, \forall t \in [t_0, t_1] \cap T, t_1 > t_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

où t est fini ou infini.

Un ensemble $M \subset A$ est dit *invariant* par rapport à l'ensemble des mouvements S si $x_0 \in M$ implique que $x(t; x_0, t_0) \in M$ pour tous $t \geq t_0$, $t_0 \in T$ et $x(\cdot; x_0, t_0) \in S$.

Un point $p \in X$ est un *point d'équilibre* pour le système dynamique $\{T, X, A, S\}$ si le singleton $\{p\}$ est un ensemble invariant par rapport à la famille de mouvements S .

Le terme de stabilité (plus précisément, la stabilité de Lyapunov) se réfère généralement au comportement qualitatif des mouvements par rapport à un ensemble invariant (ou à un équilibre), alors que le terme limite (plus particulièrement, la stabilité de Lagrange) se réfère aux propriétés (globales) de la limite des mouvements d'un système dynamique. Parmi les différents types de stabilité de Lyapunov qui ont été considérés dans la littérature, les plus importants concernent la stabilité uniforme, la stabilité asymptotique, la stabilité asymptotique uniforme, la stabilité exponentielle, la stabilité exponentielle uniforme. Les types de stabilité de Lagrange les plus importants comprennent la délimitation simple ainsi que la délimitation uniforme des mouvements.

En définitive, la théorie des systèmes dynamiques traite du comportement qualitatif à long terme des systèmes dynamiques. Grâce à elle, l'on peut rechercher des solutions précises aux équations définissant le système dynamique et aussi répondre aux questions telles que : Le système se stabilisera-t-il à long terme et, si oui, quels sont les états stables possibles ? Le comportement à long terme du système dépend-il de sa condition initiale ?

A présent, nous décrivons la stabilité de Lyapunov pour les systèmes dynamiques qui nous servira dans le Chapitre 4 de cette thèse.

1.4.3 Stabilité de Lyapunov pour les systèmes dynamiques

Lyapunov, dans son travail original de 1892 plus précisément dans son mémoire intitulé 'Problème général de la stabilité du mouvement', a proposé deux méthodes pour démontrer la stabilité. La première méthode consiste à développer la solution en série et montrer qu'elle est convergente en passant aux limites. La deuxième méthode, qui est presque universellement utilisée de nos jours, utilise une fonction de Lyapunov $V(x)$ qui est analogue à l'énergie mécanique d'un système dynamique classique. Elle est introduite comme suit pour un système ayant un point d'équilibre à $x = 0$.

Considérons le système dynamique non linéaire Σ défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

où $x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ est la solution du système vectorielle d'état, D est un ouvert contenant l'origine, et $f : D \subseteq \mathbb{R}^n$ est une fonctionnelle continue sur D .

La méthode de stabilité de Lyapunov est principalement axée sur le système (1.15), c'est-à-dire un système à entrée nulle. En fait, de nombreux systèmes ont des entrées de contrôle externes. Si la loi de contrôle est sous la forme d'un retour d'état, les systèmes en boucle fermée sont équivalents au système (1.15). Dans ce cas, la théorie de la stabilité de Lyapunov peut être appliquée directement. Cela reste vrai si (1.15) est un système dynamique linéaire.

Définition 1.5. (*Dérivation le long de la trajectoire d'un système [54]*) Soit le système dynamique Σ donné. La dérivée d'une fonctionnelle $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ le long de la trajectoire de Σ est définie par :

$$\frac{dV}{dt}|_{\Sigma} \equiv \frac{dV}{dt}|_{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(x(t)) - V(x_0)}{t}. \quad (1.16)$$

Il est généralement noté $\dot{V}(x)$.

Définition 1.6. (*Fonction de Lyapunov*) Une fonctionnelle $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée candidat pour une fonction de Lyapunov pour un système dynamique si elle vérifie :

- 1- $V(x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.
- 2- $\dot{V}(x(t)) \leq 0$.

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

Ainsi, le système est dit stable au sens de Lyapunov. De plus, le système est dit asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Remarque 1.7. Notons que dans (1-), $V(0) = 0$ est requise. Sinon par exemple, $V(x) = \frac{1}{1+|x|}$ prouverait que le système dynamique $\dot{x}(t) = x(t)$ est localement stable. La condition supplémentaire (2-) appelée en anglais *properness* ou *radial unboundedness* est nécessaire pour conclure la stabilité globale.

Il est plus facile de visualiser cette méthode d'analyse en pensant à un système physique (par exemple, système-ressort vibrant avec masse) et en considérant l'énergie d'un tel système. Si le système perd de l'énergie au fil du temps et que l'énergie n'est jamais restaurée, le système doit finalement s'arrêter et atteindre un état de repos final. Cet état final est appelé attracteur. Cependant, trouver une fonction qui donne l'énergie précise d'un système physique peut être difficile, et pour certains systèmes mathématiques abstraits, économiques ou biologiques, la notion d'énergie peut ne pas être applicable. L'idée de Lyapunov est que la stabilité du système peut être prouvée sans nécessiter de connaissances sur l'énergie physique réelle. Il suffit de trouver une fonction de Lyapunov qui satisfait les contraintes de la Définition 1.6.

1.5 Généralités sur les systèmes linéaires de dimension infinie

De nombreux problèmes physiques et d'ingénierie peuvent être modélisés par des équations différentielles partielles linéaires. Parmi ceux-ci, un cadre très utilisé est la théorie du semi-groupe d'opérateurs linéaires. Dans ce cadre, un système linéaire dans un espace de Hilbert \mathcal{H} est décrit par une équation d'évolution d'un opérateur linéaire \mathcal{A} non borné et fermé :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = \mathcal{A}z(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

où $z(t) \in \mathcal{H}$ représente l'état du système.

Notons que nous pouvons aussi considérer un système dynamique non linéaire. Un tel système est obtenu en remplaçant le terme $\mathcal{A}z(t)$ du côté droit de la première égalité de (1.17) par $f(z(t), t)$. Le système (1.17) est appelé problème de Cauchy. Toutefois, pour rester objectif, nous considérerons seulement le cas linéaire. Car dans cette thèse,

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

nous étudions uniquement les systèmes linéaires de dimension infinie.

L'un des avantages de cette approche est l'utilisation du théorème bien connu de Hille-Yosida. Ce théorème, s'il est applicable, donne à la fois l'existence et l'unicité de tous les résultats. Toutefois, il faut noter qu'on ne pourrait utiliser le théorème classique de Cauchy-Lipschitz-Picard (voir [13]). Ce théorème usuel affirme l'existence et l'unicité d'une solution à condition que la fonction f dans (1.15) soit continue et localement lipschitzienne par rapport à x . Mais en théorie de contrôle, ces conditions doivent être affaiblies car on est amené à considérer des contrôles discontinus ou continus par morceaux.

Avant d'énoncer le Théorème de Hille-Yosida, rappelons des définitions utiles.

1.5.1 Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert et \mathcal{A} un opérateur non borné dans \mathcal{H} , c'est-à-dire une application linéaire définie sur un espace vectoriel $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ à valeurs dans \mathcal{H} . Dans ce cas, $D(\mathcal{A})$ est appelé le domaine de l'opérateur.

Définition 1.8. *Le graphe d'un opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ défini par :*

$$\Gamma(\mathcal{A}) = \{(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : x \in D(\mathcal{A}), y = \mathcal{A}x\}.$$

L'opérateur \mathcal{A} est fermé si son graphe $\Gamma(\mathcal{A})$ est fermé dans l'espace $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ muni du produit scalaire :

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = \langle (u_1, v_1) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle (u_2, v_2) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Il est à domaine dense si

$$\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}.$$

Définition 1.9. *Soit \mathcal{A} un opérateur fermé dans \mathcal{H} . L'ensemble résolvant de \mathcal{A} , noté $\rho(\mathcal{A})$ est constitué de tous les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ soit bijectif de $D(\mathcal{A})$ dans \mathcal{H} avec un inverse borné. Si $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, l'opérateur $R_\lambda(\mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ est appelé résolvante de \mathcal{A} au point λ . Le complémentaire de $\rho(\mathcal{A})$ dans \mathbb{C} , noté $\sigma(\mathcal{A})$ s'appelle le spectre de \mathcal{A} .*

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

Une situation intéressante est le cas où la résolvante $R_\lambda(\mathcal{A})$ est compacte, pour un certain $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Si c'est le cas, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.10. ([49]) *Soit \mathcal{A} un opérateur fermé dans \mathcal{H} tel que $R_\lambda(\mathcal{A})$ est compacte, pour un certain $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Alors le spectre de \mathcal{A} est discret et formé uniquement de valeurs propres de multiplicité finie. De plus, $R_\xi(\mathcal{A})$ est compacte pour tout $\xi \in \rho(\mathcal{A})$.*

Définition 1.11. *Un opérateur \mathcal{A} dans un espace de Hilbert \mathcal{H} est dit symétrique si et seulement si*

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, \mathcal{A}v \rangle_{\mathcal{H}} \text{ pour tout } u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Il est autoadjoint si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^$. Il est antiadjoint si $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$.*

Nous définissons à présent les opérateurs dissipatifs et m -dissipatifs.

Définition 1.12. *Soit $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire non borné. On dit que \mathcal{A} est dissipatif si*

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \text{ pour tout } u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

On dit que \mathcal{A} est monotone si $-\mathcal{A}$ est dissipatif.

\mathcal{A} est dit m -dissipatif ou dissipatif maximal si \mathcal{A} est dissipatif et pour tout $\lambda > 0$, $I - \lambda\mathcal{A}$ est surjectif.

1.5.2 Semi-groupe d'opérateurs linéaires dans un espace de Banach

Cette partie est consacrée à un bref rappel de la notion de semi-groupes linéaires et des résultats standards pour une classe d'équations d'évolution linéaires. Soit X un espace de Banach. On notera par I_X l'application identité sur X .

Définition 1.13. (C_0 -**semi-groupe**) *Soit X un espace de Banach.*

Un semi-groupe continu d'opérateurs linéaires (C_0 -semi-groupe) sur X est une famille de fonctions $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs vérifiant :

- i) $T(0) = I_X$ et $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0$,
- ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X$.

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

Notons que si un semi-groupe d'opérateurs linéaires $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur X vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} T(t)x = T(t_0)x$$

pour chaque $x \in X$ alors le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit fortement continu en t_0 . En outre, un semi-groupe d'opérateurs linéaires $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sera dit fortement continu s'il est fortement continu en tout point $t \geq 0$.

Définition 1.14. (*C_0 -semi-groupe de contractions*) Un C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur X est dit contractant ou de contractions si

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq 1 \quad \forall t \geq 0,$$

où $L(X)$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés de X .

On définit à présent un générateur infinitésimal :

Définition 1.15. (*Générateur infinitésimal*) On appelle générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, l'opérateur \mathcal{A} de domaine $D(\mathcal{A})$ défini par :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X / \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

et pour tout $x \in D(\mathcal{A})$, on a :

$$\mathcal{A}x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}.$$

Théorème 1.16. (*Hille-Yosida*) [49] Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire dans un espace de Banach X . Alors \mathcal{A} est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ continu si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1- \mathcal{A} est fermé de domaine dense dans X .
- 2- Il existe des constantes positives M et ω telles que $\rho(\mathcal{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > \omega\}$ et

$$\|R_\lambda^n(\mathcal{A})\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \tag{1.18}$$

pour tout entier strictement positif n .

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

Le théorème précédent donne une caractérisation du générateur d'un C_0 -semi-groupe de contractions. Il existe des résultats de ce type dans des espaces de Banach. Cependant, il faut noter que la condition (1.18) est assez difficile à vérifier dans la pratique. Donc, la plupart du temps, pour y remédier, le Théorème de Lumer-Phillips est utilisé, lequel théorème n'est valable que pour les semi-groupes de contractions. La version du Théorème de Lumer-Phillips pour les espaces de Hilbert est donnée comme suit :

Théorème 1.17. ([49]) *Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire fermé dans un espace de Hilbert \mathcal{H} de domaine dense $D(\mathcal{A})$.*

1- *Si \mathcal{A} est dissipatif et s'il existe un nombre réel $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ alors \mathcal{A} est générateur d'un C_0 -semi-groupe de contractions sur \mathcal{H} .*

2- *Si \mathcal{A} est générateur d'un C_0 -semi-groupe de contractions sur \mathcal{H} alors \mathcal{A} est dissipatif et $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ pour tout $\lambda > 0$.*

Lorsque \mathcal{A} est un générateur infinitésimal, il engendre une solution pour le système sous la forme d'un C_0 -semi-groupe de contractions $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. En outre, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.18. ([49]) *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe et soit ω_0 défini par*

$$\omega_0 := \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|_{L(X)}}{t}.$$

Alors on obtient

1-

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|_{L(X)}}{t} = \omega_0.$$

2- *Pour tout $\omega > \omega_0$, il existe $M > 0$ qui peut dépendre de ω tel que*

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}.$$

Définition 1.19. *Un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est asymptotiquement stable si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0 \quad \text{pour chaque } x \in \mathcal{H}.$$

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

Un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est exponentiellement stable si

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|_{L(\mathcal{H})}}{t} < 0.$$

Définition 1.20. Soit \mathcal{A} un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'un espace de Hilbert \mathcal{H} . On appelle taux optimal de décroissance de l'énergie, le nombre défini par :

$$\omega(\mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|_{L(\mathcal{H})}$$

et le nombre

$$s(\mathcal{A}) = \sup\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$$

représente l'abscisse spectrale de l'opérateur \mathcal{A} .

Nous avons le résultat important suivant :

Si

$$\omega(\mathcal{A}) = s(\mathcal{A})$$

alors le taux optimal de décroissance de l'énergie du système est donné par l'abscisse spectrale de l'opérateur \mathcal{A} associé au système. Dans ce cas, si de plus, $s(\mathcal{A}) < 0$ alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable.

Remarque 1.21. Par le Théorème de Hille-Yosida, on a toujours $s(\mathcal{A}) \leq \omega(\mathcal{A})$ pour tout semi-groupe fortement continu. En général, l'inégalité $s(\mathcal{A}) \geq \omega(\mathcal{A})$ ne peut être vraie pour les semi-groupes fortement continus dans les espaces de Hilbert. Pour s'en convaincre, l'on peut consulter le contre-exemple de Zabczyk dans [66].

En général, il est assez difficile d'établir la condition : le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur associé au système. Mais ce serait automatique si les fonctions propres (généralisées) forment une base de Riesz laquelle base sera définie dans la Définition 1.23. Nous extrayons de [20, 25, 31, 41, 65] les informations suivantes.

Définition 1.22. (Vecteur propre généralisé) Un vecteur non nul Φ d'un espace de Hilbert est appelé vecteur propre généralisé d'un opérateur linéaire fermé \mathcal{A} ,

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

correspondant à une valeur propre λ de \mathcal{A} s'il existe un entier positif n tel que :

$$(\lambda I - \mathcal{A})^n \Phi \neq 0 \quad \text{et} \quad (\lambda I - \mathcal{A})^{n+1} \Phi = 0.$$

Une remarque découle de la Définition 1.22 : si $n = 0$ alors Φ est un vecteur propre usuel.

Le sous-espace caractéristique de \mathcal{A} correspondant à la valeur propre λ est donné par :

$$E(\lambda, \mathcal{A}) := \{\Phi \in \mathcal{H} \mid \text{il existe un entier positif } n \text{ tel que } (\lambda I - \mathcal{A})^n \Phi = 0\}.$$

La dimension $m_{\lambda, \mathcal{A}}$ de $E(\lambda, \mathcal{A})$ est appelée **multiplicité algébrique** de λ . Quand $m_{\lambda, \mathcal{A}} = 1$, on dit que la valeur propre λ est **algébriquement simple**.

L'ensemble de tous les vecteurs propres de \mathcal{A} correspondant à une valeur propre λ est défini par :

$$\text{Ker}(\lambda I - \mathcal{A}) := \{\Phi \in \mathcal{H} \mid (\lambda I - \mathcal{A})\Phi = 0\}$$

est appelé **espace propre géométrique** de λ . La dimension $m_{\lambda, g}$ de $\text{Ker}(\lambda I - \mathcal{A})$ est appelée **multiplicité géométrique** de λ . Quand $m_{\lambda, g} = 1$, on dit que λ est **géométriquement simple**.

Définition 1.23. (Base de Riesz) Une suite de vecteurs $\{\Phi_n, n \geq 1\}$ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} forme une base de Riesz pour \mathcal{H} si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1- (Complétude dans \mathcal{H})

$$\overline{\text{Vect}\{\Phi_n, n \geq 1\}} = \mathcal{H};$$

2- (Convergence inconditionnelle dans \mathcal{H})

Il existe des constantes positives ou nulles C_1 et C_2 telles que pour tout entier naturel arbitraire N et pour tout scalaire arbitraire α_n , $n = 1, 2, \dots, N$, l'inégalité suivante soit vérifiée

$$C_1 \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \Phi_n \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_2 \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2.$$

Il est clair qu'une base orthonormale est une base de Riesz.

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

Nous avons aussi une caractérisation d'une base de Riesz en terme de base orthonormale.

Lemme 1.24. *Une suite de vecteurs $\{\Phi_n, n \geq 1\}$ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} forme une base de Riesz si et seulement s'il existe un opérateur linéaire, inversible et borné \mathcal{L} et à inverse borné \mathcal{L}^{-1} sur \mathcal{H} tel que :*

$$\mathcal{L}\Phi_n = e_n, \quad n \geq 1,$$

où $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une base orthonormale de \mathcal{H} .

Définition 1.25. (Suites biorthogonales) *Deux suites de vecteurs $\{\Phi_i, i \geq 1\}$ et $\{\Psi_j, j \geq 1\}$ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} sont dites biorthogonales si*

$$\langle \Phi_i, \Psi_j \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{ij}$$

quelque soient les indices i et j . Ici, δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Lemme 1.26. *Pour une suite de vecteurs $\{\Phi_n, n \geq 1\}$ donnée dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , une suite biorthogonale $\{\Psi_n, n \geq 1\}$ existe si et seulement si $\{\Phi_n, n \geq 1\}$ est minimale dans \mathcal{H} . De plus, si la suite $\{\Phi_n, n \geq 1\}$ est minimale dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , alors la suite biorthogonale $\{\Psi_n\}$ est uniquement déterminée si et seulement si $\{\Phi_{n,n \geq 1}\}$ est complète dans \mathcal{H} .*

Nous énonçons à présent le lemme qui montre l'utilité de la propriété de la base de Riesz quand on étudie les systèmes de contrôle en dimension finie (voir [20]).

Lemme 1.27. *Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire fermé et de domaine dense dans un espace de Hilbert \mathcal{H} et soit $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ses valeurs propres avec un ordre de multiplicité fini et soit $\{\Phi_{n,j} \mid 1 \leq j \leq m_{\lambda_n, \mathcal{A}}\}$ la famille de vecteurs propres généralisés correspondant à la valeur propre λ_n qui forme une base pour l'espace de dimension finie $E(\lambda_n, \mathcal{A})$. Supposons que λ_n est séparée et simple pour n suffisamment grand c'est-à-dire*

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}| \leq \dots, \quad \lambda_j \neq \lambda_k \quad \text{si } j \neq k.$$

Supposons que la multiplicité algébrique vérifie

$$m_{\lambda_n, \mathcal{A}} = 1, \quad \text{pour } n \geq N,$$

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

avec N un entier suffisamment grand et

$$\{\Phi_{n,j} \mid 1 \leq j \leq m_{\lambda_n,a}\}_{n=1}^{N-1} \cup \{\Phi_n\}_{n=N}^{\infty}$$

forme une base de Riesz dans \mathcal{H} . Alors on a :

1. Si $\{\Psi_{n,j} \mid 1 \leq j \leq m_{\bar{\lambda}_n,a}\}$ est une famille de vecteurs propres généralisés de \mathcal{A}^* , l'adjoint de \mathcal{A} correspondant à la valeur propre $\bar{\lambda}_n$ qui forme une base pour l'espace de dimension finie $E(\bar{\lambda}_n, \mathcal{A}^*)$, alors $\{\Psi_{n,j} \mid 1 \leq j \leq m_{\bar{\lambda}_n,a}\}$ peut être convenablement normalisé de telle sorte que $\{\Phi_{n,j} \mid 1 \leq j \leq m_{\lambda_n,a}\}$ et $\{\Psi_{n,j} \mid 1 \leq j \leq m_{\bar{\lambda}_n,a}\}$ soient biorthogonales. En général, les vecteurs propres généralisés $\{\Phi_{n,j} \mid 1 \leq j \leq m_{\lambda_n,a}\}$ et $\{\Psi_{n,j} \mid 1 \leq j \leq m_{\bar{\lambda}_n,a}\}$ peuvent être construits par les procédures suivantes :

$$\mathcal{A}\Phi_{n,1} = \lambda_n \Phi_{n,1}$$

$$\mathcal{A}\Phi_{n,j} = \lambda_n \Phi_{n,j} + \Phi_{n,j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, m_{\lambda_n,a}$$

$$\mathcal{A}^*\Psi_{n,1} = \bar{\lambda}_n \Psi_{n,1}$$

$$\mathcal{A}^*\Psi_{n,j} = \bar{\lambda}_n \Psi_{n,j} + \Psi_{n,j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, m_{\bar{\lambda}_n,a}.$$

2. Chaque élément x de \mathcal{H} peut être représenté par

$$x = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{m_{\lambda_n,a}} \langle x, \Psi_{n,j} \rangle \Phi_{n,j} + \sum_{n=N}^{\infty} \langle x, \Psi_n \rangle \Phi_n$$

et il existe deux constantes C_1 et C_2 indépendantes de x telles que

$$\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \geq C_1 \left(\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{m_{\lambda_n,a}} |\langle x, \Psi_{n,j} \rangle|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |\langle x, \Psi_n \rangle|^2 \right)$$

$$\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_2 \left(\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{m_{\lambda_n,a}} |\langle x, \Psi_{n,j} \rangle|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |\langle x, \Psi_n \rangle|^2 \right).$$

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

3. L'opérateur \mathcal{A} s'exprime comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= \sum_{n=1}^{N-1} \left(\lambda_n \langle x, \Psi_{n,j} \rangle \Phi_{n,j} + \sum_{j=2}^{m_{\lambda_n,a}} \langle x, \Psi_{n,j} \rangle (\lambda_n \Phi_{n,j} + \Phi_{n,j-1}) \right) \\ &+ \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n \langle x, \Psi_n \rangle \Phi_n \end{aligned}$$

pour tout $x \in D(\mathcal{A})$ et

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathcal{H} \left| \sum_{n=N}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, \Psi_n \rangle|^2 < \infty \right. \right\}.$$

4. L'opérateur \mathcal{A} est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dans \mathcal{H} si et seulement si

$$\sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty.$$

De plus, $T(t)$ peut être donné par, pour tout $t \geq 0$,

$$T(t) = \sum_{n=1}^{N-1} e^{\lambda_n t} \sum_{j=1}^{m_{\lambda_n,a}} \langle \cdot, \Psi_{n,j} \rangle \sum_{s=1}^j \frac{t^s}{s!} \Phi_{n,s} + \sum_{n=N}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \cdot, \Psi_n \rangle \Phi_n.$$

5. Si $\sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty$ alors le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur associé au système c'est-à-dire

$$\omega(\mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|_{L(\mathcal{H})} = s(\mathcal{A}) = \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty.$$

Grâce à ce lemme, beaucoup de travaux récents ont utilisé l'approche appelée *propriété de base de Riesz* pour établir la stabilité exponentielle pour divers systèmes de poutres puisque dans ces cas, cette propriété de base de Riesz y tient habituellement. Bien que cette approche soit un peu compliquée, elle conduit automatiquement à un ensemble complet de résultats. Ceux-ci comprennent l'obtention d'un générateur d'un C_0 -semi-groupe, la condition liée au fait que le taux optimal de décroissance de l'énergie soit déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur associé au système et les divers types de stabilités. En outre, le fait que les fonctions propres généralisées forment une base de Riesz est également une propriété importante dans les calculs

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

numériques. Néanmoins, cette façon d'établir la stabilité exponentielle impliquerait plus de travail car elle nécessiterait d'abord de prouver l'existence de la propriété d'une base de Riesz et ensuite, trouver des informations sur le spectre.

Enfin, le théorème suivant ([49], p. 76) montre qu'un générateur d'un C_0 -semi-groupe de contractions perturbé par un opérateur linéaire borné, est aussi un générateur d'un C_0 -semi-groupe de contractions. Ce théorème sera utilisé dans le Chapitre 3 où il est question de l'étude de la stabilité exponentielle d'un système amorti.

Théorème 1.28. *Soit X un espace de Banach et \mathcal{A} un générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe de contractions sur X tel que*

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}.$$

Si \mathcal{B} est un opérateur linéaire borné dans X alors $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe sur X noté par $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, tel que

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq M e^{(\omega + M \|\mathcal{B}\|)t}.$$

Aussi, faut-il signifier que (1.17) admet une unique solution classique pour $t \geq 0$, définie par

$$z(t) = e^{At} z_0 \tag{1.19}$$

pour tout $z_0 \in D(\mathcal{A})$.

Une fonction $z : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}$ est dite *solution classique* de (1.17) si

$$z \in C([0, \infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H})$$

et si z vérifie les conditions initiales et (1.17) sur $(0, \infty)$.

La solution (1.19) est dite *asymptotiquement stable* ou *fortement stable* si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\|_{\mathcal{H}} = 0 \tag{1.20}$$

et est dite *exponentiellement stable* ou *uniformément stable* s'il existe une constante positive M et ω telles que

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M e^{-\omega t} \|z_0\|_{\mathcal{H}} \tag{1.21}$$

1.5. GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE DIMENSION INFINIE

où $\|z(t)\|_{\mathcal{H}}$ désigne la norme de $z(t)$ sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} .

Il est connu que les propositions suivantes sont équivalentes pour les systèmes linéaires en dimension finie tels que (1.17) :

(P1) La solution $z(t)$ est asymptotiquement stable.

(P2) La solution $z(t)$ est exponentiellement stable.

(P3) Toutes les valeurs propres de \mathcal{A} sont situées dans le demi-plan gauche du plan complexe ouvert.

(P4) Pour tout entier positif p avec $p \geq 1$, on a $\int_{t_0}^{\infty} \|z(t)\|_{\mathcal{H}}^p dt < \infty$ pour tout $t_0 \geq 0$. Toutefois, pour les systèmes linéaires en dimension infinie, les propositions (P1)-(P4) ne sont pas équivalentes en général. Pour des exemples illustratifs, on peut consulter [43] où figurent des exemples portant sur l'équation de chaleur, sur l'équation d'une poutre rotatif.

Pour la stabilisation par retour d'état des problèmes d'ingénierie, il est préférable, si possible, de trouver des contrôles qui stabilisent exponentiellement le système donné. Ceci est vraiment important car la stabilité exponentielle offre la convergence et donne la garantie d'un meilleur ordre de convergence. C'est pourquoi, dans cette thèse, nous cherchons à obtenir la stabilité exponentielle. Il existe quatre moyens d'obtenir la stabilité exponentielle dans le cadre des semi-groupes :

1. Critère de domaine temporel : Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe défini sur un espace de Banach X , si pour tout $p \geq 1$,

$$\int_0^{\infty} \|T(t)x\|_X^p dt < \infty, \quad \forall x \in X,$$

alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable.

Ce critère est souvent utilisé avec $p = 2$. On se ramène alors à la recherche de multiplicateur de manière à avoir une bonne majoration de $\|T(t)x\|_X^2$, pour t assez grand. Cependant, il n'est pas toujours évident de trouver le bon multiplicateur (voir par exemple le système étudié dans [15]).

2. Critère de domaine fréquentiel : Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe uniformément borné sur un espace de Hilbert ayant pour générateur infinitésimal \mathcal{A} alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si l'axe imaginaire est contenu

dans l'ensemble résolvant de \mathcal{A} et

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|R_{i\tau}(\mathcal{A})\| < \infty.$$

3. Méthode de l'analyse spectrale : Il s'agit de vérifier pour les C_0 -semi-groupes que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur associé au système. De plus, si l'abscisse spectrale $s(\mathcal{A}) < 0$ alors le semi-groupe est exponentiellement stable. C'est la méthode que nous emploierons dans l'étude de chacun des problèmes de cette thèse.

4. Méthode du multiplicateur d'énergie : Supposons que, pour tout $t \geq 0$, l'énergie du système notée $E(t)$ est décroissante c'est-à-dire $\frac{d}{dt}E(t) < 0$ tout au long de la trajectoire de la solution du système. Si nous pouvons trouver une fonction appropriée $\rho(t)$ telle que

$$|\rho(t)| \leq c_1 E(t) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\rho(t) < -c_2 E(t), \quad c_1, c_2 > 0$$

alors en utilisant une fonction auxiliaire $V(t) = E(t) + \rho(t)$, nous pouvons déduire aisément que $E(t)$ décroît exponentiellement et par déduction, la solution du système est aussi exponentiellement stable s'il existe un C_0 -semi-groupe du système donné. Par ailleurs, la fonction auxiliaire $V(t)$ peut être choisie comme suit

$$V(t) = tE(t) + \varepsilon\rho(t)$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi tel que $\frac{d}{dt}V(t) \leq 0$ tout au long de la trajectoire de la solution du système donné.

Remarque 1.29. *Le critère du domaine temporel peut être prouvé en utilisant les propriétés des semi-groupes. C'est le Théorème de Datko [24]. Le critère de domaine fréquentiel est apparu dans Prüss [50] et Huang [33]. La méthode de l'analyse spectrale s'applique uniquement aux systèmes vérifiant la condition de croissance déterminée par le spectre : le taux optimal de décroissance de l'énergie du système est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur du système. C'est la méthode la mieux adaptée pour étudier chacun des problèmes de cette thèse. Quant à la méthode du multiplicateur d'énergie, elle est actuellement une combinaison de la méthode de Lyapunov et le critère du domaine temporel décrit ci-dessus.*

1.6 Lemme de Gronwall

Lemme 1.30. Soient $T > 0$, $\lambda \in L^1(0;T)$, $\lambda \geq 0$ presque partout et $C > 0$. Soit $\varphi \in L^\infty(0;T)$, $\varphi \geq 0$ presque partout tel que

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds,$$

pour presque tout $t \in (0;T)$.

Alors on a :

$$\varphi(t) \leq C \exp \left\{ \int_0^t \lambda(s)ds \right\},$$

pour presque tout $t \in (0;T)$.

1.7 Étude des problèmes aux valeurs propres

Dans cette section, on décrit la méthode employée pour étudier les problèmes aux valeurs propres.

Soit $L(f)$ un opérateur différentiel ordinaire d'ordre $n = 2m \in \mathbb{N}$ défini comme suit

$$L(f) = f^{(n)}(x) + \sum_{\nu=1}^n f_\nu(x) f^{(n-\nu)}(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1.22)$$

sous les conditions aux bords suivantes :

$$B_j(f) = \sum_{\nu=0}^{k_j} \left(\alpha_{j\nu} f^{(k_j-\nu)}(0) + \beta_{j\nu} f^{(k_j-\nu)}(1) \right), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.23)$$

où $k_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k_j \leq n-1$ et $\alpha_{j\nu}, \beta_{j\nu} \in \mathbb{C}$, $|\alpha_{j0}| + |\beta_{j0}| > 0$. Supposons que les coefficients des fonctions $f_\nu(x)$ ($1 \leq \nu \leq n$) dans (1.22) sont suffisamment régulières dans $(0,1)$, et que les conditions aux bords sont normalisées au sens que $K = \sum_{j=1}^n k_j$ soit minimal par rapport à toutes les conditions aux limites équivalentes (voir [44]).

Soit $f_k(x, \rho)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) les solutions fondamentales de l'équation :

$$L(f) + \rho^n f + \rho^m \mu(x) f(x) = 0, \quad \rho \in \mathbb{C} \quad (1.24)$$

1.7. ÉTUDE DES PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES

telles que $\mu(x)$ soit continue dans $[0, 1]$. On désigne la $k^{\text{ième}}$ racine de l'équation $\omega^n + 1 = 0$ par ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) et le déterminant caractéristique de (1.24) sous les conditions aux bords (1.23) par $\Delta(\rho)$ défini comme suit :

$$\Delta(\rho) = \det \left[B_j(f_k(\cdot, \rho)) \right]_{j,k=1,2,\dots,n}.$$

De plus, asymptotiquement, $\Delta(\rho)$ peut être réécrit sous la forme suivante pour ($r \geq 1$)

$$\Delta(\rho) = \rho^k \sum_{\mathbb{k}_k} e^{\rho \mu_{\mathbb{k}_k}} \left[F^{\mathbb{k}_k} \right]_r, \quad (1.25)$$

quand ρ est assez grand (voir [44, 53]). Ici, \mathbb{k}_k désigne les k -éléments d'un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$, $\mu_{\mathbb{k}_k} = \sum_{j \in \mathbb{k}_k} \omega_j$,

$$\left[F^{\mathbb{k}_k} \right]_r = F_0^{\mathbb{k}_k} + \rho^{-1} F_1^{\mathbb{k}_k} + \dots + \rho^{-r+1} F_{r-1}^{\mathbb{k}_k} + \mathcal{O}(\rho^{-r}),$$

et la somme s'exécute sur toutes les sélections possibles de \mathbb{k}_k .

La définition suivante figure dans [63].

Définition 1.31. *Le problème aux limites (1.24) avec (1.23) est dit régulier si les coefficients $F_0^{\mathbb{k}_k}$ dans (1.25) sont non nuls. Il est dit fortement régulier si en plus, tous les zéros de $\Delta(\rho)$ sont asymptotiquement simples et séparés.*

Soit $W_2^m(0, 1)$ l'espace de Sobolev usuel d'ordre m et soit

$$V_E^m(0, 1) = \{f(x) \in W_2^m(0, 1) \mid B_j(f) = 0, \quad k_j < m\}.$$

Soit H un espace de Hilbert défini comme suit :

$$H = V_E^m(0, 1) \times L^2(0, 1),$$

avec

$$\|(f, g)\|_H^2 = \|f\|_{W_2^m}^2 + \|g\|_2^2$$

qui désigne sa norme correspondante et soit \mathbb{A} un opérateur dans H défini par :

$$\begin{cases} \mathbb{A}(f, g) = (g, -L(f) - \mu(x)g) \\ D(\mathbb{A}) = \{(f, g) \in H \mid \mathbb{A}(f, g) \in H, \quad B_j(f) = 0, \quad k_j \geq m\}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Le théorème suivant utilisé dans [63] a été présenté dans [64]. On peut aussi se référer

au Chapitre 3 de [62].

Théorème 1.32. *Si le système différentiel ordinaire de paramètre $\lambda = \rho^m$*

$$\begin{cases} L(f, \lambda) = L(f) + \lambda^2 f + \lambda \mu(x) f \\ B_j(f) = 0, \quad 1 \leq j \leq 2m \end{cases} \quad (1.27)$$

possède des conditions aux bords fortement régulières alors le système de fonctions propres généralisées de \mathbb{A} forme une base de Riesz dans l'espace de Hilbert H .

Nous rappelons à présent une propriété importante concernant la division du plan complexe en n secteurs distincts [6, 7].

On divise le plan complexe en $2n$ secteurs $S_k, k = 0, 1, 2, \dots, (2n - 1)$, tels que

$$\frac{k\pi}{n} \leq \arg \rho \leq \frac{(k+1)\pi}{n}, \quad (1.28)$$

avec $\rho \in S_k$.

Comme nous verrons plus tard au sein des chapitres **2** et **3**, les solutions asymptotiques du problème aux valeurs propres dépendront essentiellement de chaque secteur S_k .

Désignons par

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n,$$

les racines n -ièmes distincts de -1 . Elles sont ordonnées dans le sens du théorème suivant :

Théorème 1.33. *Pour chaque secteur S_k , les nombres $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ peuvent être ordonnés tels que, pour tout $\rho \in S_k$, les inégalités suivantes soient vérifiées*

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_n) \quad (1.29)$$

où $\operatorname{Re}(z)$ désigne la partie réelle de z .

Démonstration. On peut retrouver la preuve dans [6]. L'idée de la démonstration est de prouver l'assertion du théorème pour deux secteurs adjacents S_k . \square

Première partie

Stabilisation exponentielle et
approximation du spectre d'une
poutre flexible d'Euler-Bernoulli à
coefficients variables amortie et
non-amortie

Chapitre 2

Une étude de la stabilité exponentielle pour une poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la propriété d'une base de Riesz et la stabilité exponentielle de la poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients variables modélisée au Chapitre 1. Nous rappelons les équations du mouvement du système :

$$m(x)w_{tt}(x, t) + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$(EI(\cdot)w_{xx})_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$-EI(1)w_{xx}(1, t) = \alpha w_{xt}(1, t) + \beta w_x(1, t), \quad t > 0, \quad (2.4)$$

où α et β sont deux constantes positives données. Nous rappelons aussi que les indices t et x désignent respectivement les dérivées partielles par rapport au temps t et par rapport à la position x . Sans perte de généralité, la longueur de la poutre est supposée égale à l'unité. $-(EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx}$ est la force latérale totale agissant sur une tranche de la poutre de longueur dx , située à une position x et au temps t .

Les coefficients sont supposés variables car il est courant, en ingénierie, d'être confronté aux problèmes avec des matériaux non homogènes tels que les matériaux intelligents ([35]). Un matériau intelligent est sensible, adaptatif et évolutif. Il possède des fonctions qui lui permettent de se comporter comme un capteur (détecter des signaux), un actionneur (effectuer une action sur son environnement) ou parfois comme un processeur (traiter, comparer, stocker des informations). Ce matériau est capable de modifier spontanément ses propriétés physiques, par exemple sa forme, sa connectivité, sa couleur, en réponse à des excitations naturelles ou provoquées venant de l'extérieur ou de l'intérieur du matériau.

La stabilité exponentielle est le type de stabilité la plus souhaitable parmi tant d'autres. Remarquons que le problème (2.1)-(2.4) est la version non-uniforme de ([58], cas $\beta \neq 0$) et ([52], cas $\beta = 0$). Dans ces articles, les auteurs ont prouvé que le système uniforme à boucle fermée est bien posé au sens des C_0 -semi-groupes de contractions. Par la méthode de Shkalikov [53], l'analyse spectrale de l'opérateur et la propriété de l'existence d'une base de Riesz furent établies afin d'en déduire la stabilité exponentielle du système. Aussi, faut-il souligner qu'il existe deux étapes habituellement utilisées dans l'étude des systèmes linéaires à coefficients variables (voir par exemple [28]) : la première étape consiste à transformer la première équation du système à étudier en une équation uniforme où aucun coefficient variable n'est impliqué par une transformation successive d'espace et d'état. La seconde étape est de déterminer une expression asymptotique des valeurs propres du système à l'aide de ces équations uniformes. Cette idée fondamentale provient essentiellement des travaux de Birkhoff (voir [6]) et ceux de Naimark (voir [44]). Cette approche a été utilisée pour étudier les équations d'Euler-Bernoulli à coefficients variables (voir [28, 29, 62, 63]). Plusieurs méthodes sont utilisées pour vérifier la propriété de la base de Riesz notamment le Théorème de Bari [31] et celui de Huang. Toutefois, pour ce qui est du système (2.1)-(2.4), nous utilisons un résultat récent dû à Wang et al (voir par exemple [62]) pour étudier le problème aux valeurs propres associé au système qui est sous la forme d'une équation différentielle $L(f) = \lambda f$ avec les conditions aux limites λ -polynomiales (voir [53, 61]). Nous établissons des conditions sur les deux paramètres de retour d'état à la frontière α et β afin d'obtenir la propriété de la base de Riesz et la stabilité exponentielle du système (2.1)-(2.4).

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2.2, le système (2.1)-(2.4) est formulé comme un problème d'évolution et étudié dans le cadre d'un semi-

groupe. Afin d'examiner la stabilité exponentielle du système contrôlé, dans la section 2.3, le spectre de l'opérateur du système est analysé et il est démontré que les fonctions propres généralisées de l'opérateur forment une base de Riesz dans l'espace d'état correspondant. Enfin, dans la section 2.4, nous donnons des conditions sur les paramètres de rétroaction α et β afin d'obtenir la stabilité exponentielle.

2.2 Problème bien posé au sens des semi-groupes

La théorie des semi-groupes est vitale pour l'étude des propriétés des opérateurs aux dérivées partielles. En particulier, les semi-groupes engendrés par l'opérateur du système d'un problème de Cauchy abstrait, peuvent être utilisés pour étudier le caractère bien posé et la stabilité de sa solution. Par conséquent, la formulation semi-groupe suivante fournit un outil efficace pour la discussion sur la stabilité asymptotique ou exponentielle.

Dans ce qui suit, la notation $v = w_t$ indiquant la vitesse de la poutre est utilisée.

Introduisons les espaces suivants :

$$H_E^2(0, 1) = \{w \in H^2(0, 1) \mid w(0) = w_x(0) = 0\} \quad (2.5)$$

ainsi que l'espace de Hilbert suivant

$$\mathcal{H} = H_E^2(0, 1) \times L^2(0, 1), \quad (2.6)$$

muni du produit scalaire

$$\langle w, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 \left(m(x) f_2(x) \overline{g_2(x)} + EI(x) f_1''(x) \overline{g_1''(x)} \right) dx + \beta f_1'(1) \overline{g_1'(1)}, \quad (2.7)$$

où $w = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H}$, $v = (g_1, g_2)^T \in \mathcal{H}$.

Nous désignons par $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ la norme correspondante.

La lettre T en exposant représente la transposée. Les espaces $L^2(0, 1)$ et $H^k(0, 1)$ sont définis respectivement par

$$L^2(0, 1) = \left\{ w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^1 |w|^2 dx < \infty \right\} \quad (2.8)$$

$$H^k(0, 1) = \left\{ w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)} \in L^2(0, 1) \right\}. \quad (2.9)$$

2.2. PROBLÈME BIEN POSÉ AU SENS DES SEMI-GROUPES

Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire non borné de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (f, g)^T \in (H^4(0, 1) \cap H_E^2(0, 1)) \times H_E^2(0, 1) \mid \begin{aligned} & (EI(\cdot) f''(\cdot))'(1) = 0, \\ & -EI(1) f''(1) = \alpha g_x(1) + \beta f_x(1) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

défini par

$$\mathcal{A}(f, g)^T = \left(g(x), -\frac{1}{m(x)} (EI(x) f''(x))'' \right)^T. \quad (2.11)$$

Nous pouvons maintenant écrire formellement le système (2.1)–(2.4) comme un problème d'évolution du premier ordre

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t) = \mathcal{A}y(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \quad (2.12)$$

où $y(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T$, $y(0) = (w_0, v_0)^T$ pour tout $t > 0$.

Nous démontrons maintenant un résultat fondamental concernant le caractère bien posé du système (2.1)–(2.4).

Théorème 2.1. *L'opérateur \mathcal{A} défini par (2.10) et (2.11) engendre un C_0 -semi-groupe de contractions dans \mathcal{H} noté par $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ et est à résolvante compacte. De plus, \mathcal{A} est inversible d'inverse \mathcal{A}^{-1} compact.*

Démonstration. Ce résultat a été obtenu dans [58], pour le cas uniforme c'est-à-dire quand les fonctions $m = EI = 1$. Ici, nous nous servons aussi du théorème connu de Lumer-Phillips énoncé dans le Théorème 1.17.

D'abord, nous montrons que l'opérateur \mathcal{A} est m -dissipatif.

Pour tout $w = (f, g)^T \in D(\mathcal{A})$,

$$\langle \mathcal{A}w, w \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \left(g(x), -\frac{1}{m(x)} (EI(x) f''(x))'' \right)^T, (f, g)^T \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\langle \mathcal{A}w, w \rangle_{\mathcal{H}} = - \int_0^1 (EI(x) f''(x))'' \overline{g(x)} dx + \int_0^1 EI(x) g''(x) \overline{f''(x)} dx + \beta g'(1) \overline{f'(1)}.$$

En intégrant deux fois par parties et en utilisant les conditions aux bords (2.2)–(2.4),

2.2. PROBLÈME BIEN POSÉ AU SENS DES SEMI-GROUPES

on a pour tout $w = (f, g)^T \in D(\mathcal{A})$,

$$\langle \mathcal{A}w, w \rangle_{\mathcal{H}} = - \int_0^1 EI(x) [g''(x)\overline{f''(x)} - f''(x)\overline{g''(x)}] dx + \beta (g'(1)\overline{f'(1)} - f'(1)\overline{g'(1)}) - \alpha |g'(1)|^2.$$

En prenant la partie réelle, on obtient $Re \langle \mathcal{A}w, w \rangle = -\alpha |g'(1)|^2 \leq 0$, pour tout $w = (f, g)^T \in D(\mathcal{A})$. Ainsi, \mathcal{A} est un opérateur dissipatif.

Ensuite, nous montrons qu'il est m -dissipatif. Il suffit de prouver que l'opérateur $(I - \mathcal{A}) : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est surjectif c'est-à-dire pour tout $z = (f, g)^T \in \mathcal{H}$ donné, nous pouvons trouver $y = (w, v)^T \in D(\mathcal{A})$ tel que $z = (I - \mathcal{A})y$.

Ainsi, on a le système d'équations suivant :

$$v = w - f, \quad (2.13)$$

$$mv + (EIw_{xx})_{xx} = mg, \quad (2.14)$$

$$(EI(\cdot)w_{xx})_x(1) = w(0) = w_x(0) = 0, \quad (2.15)$$

$$-EI(1)w_{xx}(1) = \alpha v_x(1) + \beta w_x(1) \quad (2.16)$$

où $w \in H^2(0, 1)$ et $f = w - v \in L^2(0, 1)$.

Déterminons la formulation faible de (2.14)-(2.16).

En multipliant l'équation (2.14) par $\overline{\varphi} \in H_E^2(0, 1)$ et en intégrant sur $(0, 1)$, nous obtenons

$$\int_0^1 m(x)v(x)\overline{\varphi(x)} dx + \int_0^1 (EI(x)w(x)_{xx})_{xx}\overline{\varphi(x)} dx = \int_0^1 m(x)g(x)\overline{\varphi(x)} dx.$$

En utilisant (2.13), nous avons

$$\int_0^1 m(x)w(x)\overline{\varphi(x)} dx + \int_0^1 (EI(x)w_{xx}(x))_{xx}\overline{\varphi(x)} dx = \int_0^1 (g + f)(x)m(x)\overline{\varphi(x)} dx. \quad (2.17)$$

Par une double intégration par parties de l'intégrale $\int_0^1 (EI(x)w_{xx}(x))_{xx}\overline{\varphi(x)} dx$ et en utilisant les conditions aux bords (2.15)-(2.16), l'expression (2.17) devient

$$\begin{aligned} \int_0^1 mw\overline{\varphi} dx + \int_0^1 EIw_{xx}\overline{\varphi_{xx}} dx &+ (\alpha + \beta)w_x(1)\overline{\varphi_x(1)} \\ &= \int_0^1 (g + f)m\overline{\varphi} dx + \alpha f_x(1)\overline{\varphi_x(1)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La formulation faible (2.18) admet une solution unique $w \in H_E^2(0, 1)$ selon le Théo-

2.2. PROBLÈME BIEN POSÉ AU SENS DES SEMI-GROUPES

rème de Lax-Milgram (Voir le Théorème A.1 de l' Annexe A).

D'où il existe une unique solution de $H^4(0, 1) \cap H_E^2(0, 1)$ du problème (2.14)-(2.16). Ceci montre que $I - \mathcal{A}$ est surjectif, alors l'opérateur \mathcal{A} est m -dissipatif, donc d'après le Théorème de Lumer-Phillips, \mathcal{A} est générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions.

Puisque l'opérateur \mathcal{A} est m -dissipatif alors l'opérateur $I - \mathcal{A}$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{A})$ sur \mathcal{H} et la résolvante de \mathcal{A} est un opérateur linéaire et continu sur \mathcal{H} . L'injection $i : H^4(0, 1) \times H^2(0, 1) \rightarrow H^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ étant compacte, il est donc de même pour $i : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$. D'autre part, l'application $(I - \mathcal{A})^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow D(\mathcal{A})$ est bornée donc compacte. Ainsi d'après le Théorème d'injection de Sobolev, l'opérateur \mathcal{A} est à résolvante compacte.

Enfin, il reste à prouver que l'opérateur \mathcal{A}^{-1} existe. Pour tout $\Psi = (g_1, g_2)^T \in \mathcal{H}$, nous devons trouver un unique $\Phi = (f_1, f_2)^T \in D(\mathcal{A})$ tel que $\mathcal{A}\Phi = \Psi$. On a donc le système suivant à résoudre :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= g_1(x), \quad g_1 \in H_E^2(0, 1) \\ ((EI(x) f_1''(x)))'' &= -m(x)g_2(x), \quad g_2 \in L^2(0, 1) \\ f_1(0) &= f_1'(0) = (EI(\cdot) f_1''(\cdot))'(1) = 0 \\ -EI(1) f_1''(1) &= \alpha f_2'(1) + \beta f_1'(1) = \alpha g_1'(1) + \beta f_1'(1). \end{aligned}$$

Le Théorème A.2 de l'Annexe A (vrai pour le cas $\gamma = 0$) montre que la solution du système précédent est le couple $(f_1, f_2)^T$ défini par

$$\begin{cases} f_2(x) = g_1(x) \\ f_1(x) = - \int_0^x \int_0^s \left[\frac{\beta f_1'(1) + \alpha g_1'(1)}{EI(\xi)} + \frac{1}{EI(\xi)} \int_\eta^1 \int_\xi^1 m(r) g_2(r) dr d\eta \right] d\xi ds. \end{cases}$$

avec

$$f_1'(1) = - \frac{\int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 m(r) g_2(r) dr d\eta d\xi + \alpha g_1'(1) \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi}{1 + \beta \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi}.$$

Ainsi, \mathcal{A}^{-1} existe et est borné sur \mathcal{H} . Par conséquent, le théorème d'injection de Sobolev nous permet de déduire que l'opérateur \mathcal{A}^{-1} est compact sur \mathcal{H} . \square

2.3 Analyse spectrale de l'opérateur et propriété de la base de Riesz

La propriété de la base de Riesz (voir la Définition 1.23 du Chapitre 1) est une propriété élégante pour obtenir des résultats intéressants de stabilité asymptotique ou exponentielle. Elle est beaucoup employée dans la littérature [21, 16, 28, 29]. Nous utilisons un résultat récent dû à Wang et al (voir par exemple [62]) pour étudier le problème aux valeurs propres lié au système (2.1)-(2.4) sous la forme d'une équation différentielle $L(f) = \lambda f$ soumise aux conditions aux limites λ -polynomiales (voir [53, 61]).

2.3.1 Analyse spectrale de l'opérateur

Dans cette sous-section, le problème aux valeurs propres de l'opérateur \mathcal{A} est étudié. Une caractérisation du spectre découle du Théorème 2.1. L'opérateur \mathcal{A} est à résolvante compacte alors d'après le Théorème 1.10 du Chapitre 1, le spectre de \mathcal{A} noté $\sigma(\mathcal{A})$ est discret. De plus, \mathcal{A}^{-1} existe et est compact sur \mathcal{H} donc le spectre est constitué entièrement de valeurs propres séparées, qui se répartissent en paires conjuguées dans le plan complexe.

Soient $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ et $\Phi = (\phi, \Psi)$ une fonction propre de \mathcal{A} correspondant à λ . Alors on a $\Psi = \lambda\phi$ et la fonction ϕ vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda^2 m(x)\phi(x) + (EI(x)\phi''(x))'' = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot)\phi''(\cdot))'(1) = 0, \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \quad (2.19)$$

Afin de résoudre (2.19), les transformations spatiales utilisées dans [28] sont effectuées, ce qui convertit la première équation de (2.19) en une forme plus pratique. Pour cette raison, par développement de la première équation, le système (2.19) est d'abord réécrit comme suit :

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

$$\begin{cases} \phi^{(4)}(x) + \frac{2EI'(x)}{EI(x)}\phi'''(x) + \frac{EI''(x)}{EI(x)}\phi''(x) + \frac{\lambda^2 m(x)}{EI(x)}\phi(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = \left(EI(\cdot)\phi''(\cdot) \right)'(1) = 0, \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \quad (2.20)$$

Dans le but de rendre constant le coefficient de ϕ (une fonction dépendant de x) dans la première expression de (2.20), une transformation d'espace est utilisée. Elle est donnée par :

$$f(z) = \phi(x), \quad z = z(x) = \frac{1}{h} \int_0^x \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta \quad (2.21)$$

où

$$h = \int_0^1 \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta.$$

Ainsi, en se servant de (2.21), le système (2.20) peut être transformé comme suit :

$$\begin{cases} f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \lambda^2 h^4 f(z) = 0, & 0 < z < 1, \\ f(0) = f'(0) = 0, \\ EI(1)z_x^3(1)f'''(1) + \left[EI'(1)z_x^2(1) + 3EI(1)z_{xx}(1)z_x(1) \right] f''(1) \\ + \left[EI(1)z_{xxx}(1) + EI'(1)z_{xx}(1) \right] f'(1) = 0, \\ f''(1) + \left[\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha\lambda + \beta}{EI(1)z_x(1)} \right] f'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

avec

$$a(z) = \frac{6z_{xx}}{z_x^2} + \frac{2EI'(x)}{z_x EI(x)} \quad (2.23)$$

$$b(z) = \frac{3z_{xx}^2}{z_x^4} + \frac{6z_{xx}EI'(x)}{z_x^3 EI(x)} + \frac{EI''(x)}{z_x^2 EI(x)} + \frac{4z_{xxx}}{z_x^3} \quad (2.24)$$

$$c(z) = \frac{z_{xxxx}}{z_x^4} + \frac{2z_{xxx}EI'(x)}{z_x^4 EI(x)} + \frac{z_{xx}EI''(x)}{z_x^4 EI(x)} \quad (2.25)$$

$$z_x = \frac{1}{h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad z_x^4 = \frac{1}{h^4} \frac{m(x)}{EI(x)} \quad (2.26)$$

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

et

$$z_{xx} = \frac{1}{4h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{d}{dx} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.27)$$

(Pour le détail des calculs, on pourra se référer à l'annexe A).

Ensuite, pour résoudre (2.22), la stratégie du Chapitre 2, section 4 de [44] est utilisée. Dans le but de supprimer le terme de la dérivée troisième à savoir $a(z) f'''(z)$ de (2.22), une nouvelle transformation spatiale et inversible est appliquée. Elle est définie par :

$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) f(z), \quad 0 < z < 1.$$

Par suite, le problème aux limites (2.22) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} g^{(4)}(z) + b_1(z) g''(z) + c_1(z) g'(z) + d_1(z) g(z) + \lambda^2 h^4 g(z) = 0, & 0 < z < 1, \\ g(0) = g'(0) = 0 \\ g''(1) + b_{11} g'(1) + b_{12} g(1) = 0 \\ g'''(1) + b_{21} g''(1) + b_{22} g'(1) + b_{23} g(1) = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

où

$$b_1(z) = -\frac{3}{2} a'(z) - \frac{3}{8} a^2(z) + b(z) \quad (2.29)$$

$$c_1(z) = \frac{1}{8} a^3(z) - \frac{1}{2} a(z) b(z) - a''(z) + c(z) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} d_1(z) &= \frac{3}{16} a'^2(z) - \frac{1}{4} a'''(z) + \frac{3}{32} a'(z) a^2(z) - \frac{3}{256} a^4(z) \\ &+ b(z) \left(\frac{1}{16} a^2(z) - \frac{1}{4} a'(z) \right) - \frac{a(z) c(z)}{4} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$b_{11} = -\frac{1}{2} a(1) + \frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha \lambda}{EI(1) z_x(1)} + \frac{\beta}{EI(1) z_x(1)} \quad (2.32)$$

$$b_{12} = -\frac{1}{4} a'(1) + \frac{1}{16} a^2(1) - \frac{1}{4} a(1) \left(\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha \lambda}{EI(1) z_x(1)} + \frac{\beta}{EI(1) z_x(1)} \right) \quad (2.33)$$

$$b_{21} = -\frac{3}{4} a(1) + \frac{3 z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{EI'(1)}{EI(1) z_x(1)} \quad (2.34)$$

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

$$\begin{aligned}
 b_{22} = & -\frac{3}{4}a'(1) + \frac{3}{16}a^2(1) - \frac{EI'(1)a(1)}{2EI(1)z_x(1)} - \frac{3z_{xx}(1)a(1)}{2z_x^2(1)} + \frac{z_{xxx}(1)}{z_x^3(1)} \\
 & + \frac{EI'(1)z_{xx}(1)}{EI(1)z_x^3(1)}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 b_{23} = & -\frac{1}{4}a''(1) + \frac{3}{16}a'(1)a(1) - \frac{1}{64}a^3(1) - \frac{a'(1)EI'(1)}{4EI(1)z_x(1)} \\
 & - \frac{3a'(1)z_{xx}(1)}{4z_x^2(1)} + \frac{EI'(1)a^2(1)}{16EI(1)z_x(1)} + \frac{3z_{xx}(1)a^2(1)}{16z_x^2(1)} \\
 & - \frac{a(1)z_{xxx}(1)}{4z_x^3(1)}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

(Pour le détail des calculs, on pourra se référer à l'Annexe A).

En raison de l'inversion des transformations définies plus haut, le problème aux valeurs propres (2.28) est équivalent au problème initial (2.19).

En posant $\lambda = \frac{\rho^2}{h^2}$, la première équation du système (2.28) devient :

$$g^{(4)}(z) + b_1(z)g''(z) + c_1(z)g'(z) + d_1(z)g(z) + \rho^4g(z) = 0, \quad 0 < z < 1.$$

Cette équation a pour polynôme caractéristique $\theta^4 + 1$.

Pour résoudre le problème aux valeurs propres (2.28), nous suivons la procédure contenue dans les ouvrages de G. D. Birkhoff [6, 7] et M. A. Naimark [44]. Divisons donc le plan complexe en 8 secteurs distincts car la puissance du paramètre des valeurs propres est égale à l'ordre de l'équation différentielle. Les secteurs S_k sont définis comme suit :

$$S_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{k\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{(k+1)\pi}{4} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7 \tag{2.37}$$

et soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ les racines de l'équation $\theta^4 + 1 = 0$ qui sont rangées de la manière suivante :

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_3) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_4), \quad \forall \rho \in S_k. \tag{2.38}$$

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

Plus particulièrement, dans le secteur S_1 , nous notons les racines quatrièmes de -1 comme suit :

$$\omega_1 = \exp\left(i\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_2 = \exp\left(i\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_3 = \exp\left(i\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

et

$$\omega_4 = \exp\left(i\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Notons que ces racines vérifient les inégalités dans l'expression (2.38) et des choix semblables peuvent être faits dans les autres secteurs. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons uniquement au comportement asymptotique des valeurs propres des secteurs S_1 et S_2 car nous obtiendrons les mêmes résultats dans les autres secteurs avec des preuves similaires.

Supposons que $\lambda = \frac{\rho^2}{h^2}$, dans chaque secteur S_k . Dans le but d'analyser les solutions fondamentales asymptotiques du système (2.28), nous avons besoin du résultat suivant (voir [44, 63]) :

Lemme 2.2. *Pour $\rho \in S_k$ avec $|\rho|$ assez grand, l'équation :*

$$g^{(4)}(z) + b_1(z)g''(z) + c_1(z)g'(z) + d_1(z)g(z) + \rho^4g(z) = 0, \quad 0 < z < 1,$$

admet quatre solutions asymptotiques fondamentales linéairement indépendantes de la forme :

$$\Phi_s(z, \rho) = e^{\rho\omega_s z} \left(1 + \frac{\Phi_{s,1}(z)}{\rho} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \right), \quad s = 1, 2, 3, 4$$

et où leurs dérivées pour $s = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, 2, 3$ sont données par :

$$\frac{d^j}{dz^j} \Phi_s(z, \rho) = (\rho\omega_s)^j e^{\rho\omega_s z} \left(1 + \frac{\Phi_{s,1}(z)}{\rho} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \right)$$

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

où

$$\Phi_{s,1}(z) = -\frac{1}{4\omega_s} \int_0^z b_1(\zeta) d\zeta.$$

Ainsi, pour $s = 1, 2, 3, 4$, on a :

$$\Phi_{s,1}(0) = 0, \quad \Phi_{s,1}(1) = -\frac{1}{4\omega_s} \int_0^1 b_1(\zeta) d\zeta = \frac{\mu_1}{\omega_s}, \quad \text{avec } \mu_1 = -\frac{1}{4} \int_0^1 b_1(\zeta) d\zeta.$$

Le lemme suivant nous sera également utile :

Lemme 2.3. Pour $\rho \in S_1$, si nous posons $\delta = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors nous avons les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq -|\rho|\delta, \quad \operatorname{Re}(\rho\omega_4) \geq |\rho|\delta \quad \text{et} \quad e^{\rho\omega_1} = \mathcal{O}(\rho^{-2}) \quad \text{quand } |\rho| \rightarrow \infty.$$

Pour la commodité des calculs, nous introduisons la notation suivante :

$$[a]_2 = a + \mathcal{O}(\rho^{-2}).$$

En utilisant le Lemme 2.2, nous obtenons des expressions asymptotiques pour les conditions aux limites $|\rho|$ assez grand pour $s = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} U_4(\Phi_s, \rho) &= \Phi_s(0, \rho) = 1 + \mathcal{O}(\rho^{-2}) = [1]_2, \\ U_3(\Phi_s, \rho) &= \Phi'_s(0, \rho) = \rho\omega_s(1 + \mathcal{O}(\rho^{-2})) = \rho\omega_s[1]_2, \\ U_2(\Phi_s, \rho) &= \Phi''_s(1, \rho) + b_{11}\Phi'_s(1, \rho) + b_{12}\Phi_s(1, \rho), \\ U_2(\Phi_s, \rho) &= (\rho\omega_s)^2 e^{\rho\omega_s} (1 + \gamma\omega_s^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_s^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_s^{-3} + \mathcal{O}(\rho^{-2})) \end{aligned}$$

où

$$\gamma = -\frac{\alpha a(1)}{4EI(1)z_x(1)h^2}.$$

Ensuite, nous avons :

$$U_2(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^2 e^{\rho\omega_s} [1 + \gamma\omega_s^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_s^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_s^{-3}]_2.$$

De manière similaire, pour $s = 1, 2, 3, 4$, on a :

$$U_1(\Phi_s, \rho) = \Phi_s'''(1, \rho) + b_{21}\Phi_s''(1, \rho) + b_{22}\Phi_s'(1, \rho) + b_{23}\Phi_s(1, \rho)$$

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

$$U_1(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^3 e^{\rho\omega_s} (1 + (\mu_1 + b_{21}) \rho^{-1} \omega_s^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2}))$$

$$U_1(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^3 e^{\rho\omega_s} [1 + (\mu_1 + b_{21}) \rho^{-1} \omega_s^{-1}]_2.$$

Notons que $\lambda = \frac{\rho^2}{h^2} \neq 0$ est valeur propre de (2.28) si et seulement si ρ vérifie l'équation caractéristique :

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} U_4(\Phi_1, \rho) & U_4(\Phi_2, \rho) & U_4(\Phi_3, \rho) & U_4(\Phi_4, \rho) \\ U_3(\Phi_1, \rho) & U_3(\Phi_2, \rho) & U_3(\Phi_3, \rho) & U_3(\Phi_4, \rho) \\ U_2(\Phi_1, \rho) & U_2(\Phi_2, \rho) & U_2(\Phi_3, \rho) & U_2(\Phi_4, \rho) \\ U_1(\Phi_1, \rho) & U_1(\Phi_2, \rho) & U_1(\Phi_3, \rho) & U_1(\Phi_4, \rho) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.39)$$

En substituant les expressions asymptotiques des conditions aux limites dans (2.39) et en utilisant le Lemme 2.3, nous obtenons ce qui suit :

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} [1]_2 & & & [1]_2 \\ \rho\omega_1 [1]_2 & & & \rho\omega_2 [1]_2 \\ 0 & (\rho\omega_2)^2 e^{\rho\omega_2} [1 + \gamma\omega_2^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_2^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_2^{-3}]_2 & & \\ 0 & (\rho\omega_2)^3 e^{\rho\omega_2} [1 + (\mu_1 + b_{21}) \rho^{-1}\omega_2^{-1}]_2 & & \\ & & [1]_2 & \\ & & \rho\omega_3 [1]_2 & \\ (\rho\omega_3)^2 e^{\rho\omega_3} [1 + \gamma\omega_3^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_3^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_3^{-3}]_2 & & & \\ (\rho\omega_3)^3 e^{\rho\omega_3} [1 + (\mu_1 + b_{21}) \rho^{-1}\omega_3^{-1}]_2 & & & \\ & & 0 & \\ & & 0 & \\ (\rho\omega_4)^2 e^{\rho\omega_4} [1 + \gamma\omega_4^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_4^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_4^{-3}]_2 & & & \\ (\rho\omega_4)^3 e^{\rho\omega_4} [1 + (\mu_1 + b_{21}) \rho^{-1}\omega_4^{-1}]_2 & & & \end{vmatrix}.$$

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

$$\Delta(\rho) = \rho^6 e^{\rho\omega_4} \begin{vmatrix} [1]_2 & & & & [1]_2 \\ \omega_1 [1]_2 & & & & \omega_2 [1]_2 \\ 0 & \omega_2^2 e^{\rho\omega_2} [1 + \gamma\omega_2^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_2^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_2^{-3}]_2 & & & \\ 0 & \omega_2^3 e^{\rho\omega_2} [1 + (\mu_1 + b_{21})\rho^{-1}\omega_2^{-1}]_2 & & & \\ & & [1]_2 & & \\ & & \omega_3 [1]_2 & & \\ \omega_3^2 e^{\rho\omega_3} [1 + \gamma\omega_3^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_3^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_3^{-3}]_2 & & & & \\ \omega_3^3 e^{\rho\omega_3} [1 + (\mu_1 + b_{21})\rho^{-1}\omega_3^{-1}]_2 & & & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ \omega_4^2 e^{\rho\omega_4} [1 + \gamma\omega_4^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_4^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_4^{-3}]_2 & & & & \\ \omega_4^3 e^{\rho\omega_4} [1 + (\mu_1 + b_{21})\rho^{-1}\omega_4^{-1}]_2 & & & & \end{vmatrix}.$$

En développant le déterminant ci-dessus suivant la première colonne puis suivant la première ligne, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) = \rho^6 e^{\rho\omega_4} \{ & (-1)(\omega_3 - \omega_1) [(\omega_2^{-2} - \omega_4^{-2})\gamma + (\mu_1 + b_{21})(\omega_4^{-1} - \omega_2^{-1})\rho^{-1} \\ & + \gamma(\mu_1 + b_{21})(\omega_2^{-2}\omega_4^{-1} - \omega_4^{-2}\omega_2^{-1})\rho^{-1} \\ & + \mu_1(\omega_2^{-1} - \omega_4^{-1})\rho^{-1} + \gamma\mu_1(\omega_2^{-3} - \omega_4^{-3})\rho^{-1}] e^{\rho\omega_2} \\ & + (\omega_2 - \omega_1) [(\omega_3^{-2} - \omega_4^{-2})\gamma + (\mu_1 + b_{21})(\omega_4^{-1} - \omega_3^{-1})\rho^{-1} \\ & + \gamma(\mu_1 + b_{21})(\omega_3^{-2}\omega_4^{-1} - \omega_4^{-2}\omega_3^{-1})\rho^{-1} \\ & + \mu_1(\omega_3^{-1} - \omega_4^{-1})\rho^{-1} + \gamma\mu_1(\omega_3^{-3} - \omega_4^{-3})\rho^{-1}] e^{-\rho\omega_2} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \}. \end{aligned}$$

Dans le secteur S_1 , les choix donnent :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = -i, \quad \omega_2^2 = i, \quad \omega_3^2 = i, \quad \omega_4^2 = -i, \quad \omega_3^{-1}\omega_4 = i, \quad \omega_2^{-1}\omega_4 = -i, \quad \omega_3 = -\omega_2, \\ \omega_4 - \omega_3 = \sqrt{2}, \quad \omega_1 - \omega_3 = \sqrt{2}i, \quad \omega_2 - \omega_1 = \sqrt{2}, \quad \omega_4 - \omega_2 = -i\sqrt{2}, \\ \omega_2^{-2} - \omega_4^{-2} = -2i, \quad \omega_3^{-2} - \omega_4^{-2} = -2i, \quad \omega_3^2\omega_4^2 = 1, \quad \omega_2^2\omega_4^2 = 1, \\ \omega_2^{-3} - \omega_4^{-3} = -(1+i)\omega_2, \quad \omega_3^{-3} - \omega_4^{-3} = (1-i)\omega_2. \end{aligned}$$

En remplaçant les valeurs précédentes dans $\Delta(\rho)$, on obtient ce qui suit :

$$\Delta(\rho) = 2\sqrt{2}\gamma\rho^6 e^{\rho\omega_4} \{ e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + [\mu_2 e^{\rho\omega_2} + \mu_3 e^{-\rho\omega_2}] \rho^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \}, \quad (2.40)$$

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

où

$$\begin{cases} \mu_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2\mu_1 + b_{21} - \frac{b_{21}}{\gamma} \right] \\ \mu_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2\mu_1 + b_{21} + \frac{b_{21}}{\gamma} \right]. \end{cases} \quad (2.41)$$

Le théorème suivant mentionne le type de régularité du problème aux valeurs propres (2.28) :

Théorème 2.4. *Si $\gamma \neq 0$, le problème aux valeurs propres (2.28) est fortement régulier.*

Démonstration. Puisque

$$\Theta_{-1,0} = -2\sqrt{2}i\gamma, \quad \Theta_{1,0} = 2\sqrt{2}\gamma \quad \text{et} \quad \Theta_{0,0} = 0$$

alors on a :

$$\Theta_{0,0}^2 - 4\Theta_{-1,0}\Theta_{1,0} \neq 0.$$

Par conséquent, le problème aux valeurs propres (2.28) est fortement régulier selon la Définition 3.2.5 p. 43 de [62]. \square

A présent, nous cherchons à obtenir une expression asymptotique du problème aux valeurs propres (2.28).

L'équation $\Delta(\rho) = 0$ et (2.40) implique que

$$e^{\rho\omega_2} - ie^{-\rho\omega_2} + \mu_2\rho^{-1}e^{\rho\omega_2} + \mu_3\rho^{-1}e^{-\rho\omega_2} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) = 0 \quad (2.42)$$

qui peut être réécrit comme suit :

$$e^{\rho\omega_2} - ie^{-\rho\omega_2} + \mathcal{O}(\rho^{-1}) = 0. \quad (2.43)$$

En ignorant les termes d'ordre supérieur, l'équation suivante :

$$e^{\rho\omega_2} - ie^{-\rho\omega_2} = 0$$

admet pour solutions

$$\rho_n = \left(\frac{1}{4} - n \right) \frac{\pi i}{\omega_2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

Soit $\widetilde{\rho}_n$ les solutions de (2.42). Alors en appliquant le Théorème de Rouché (voir M. A. Naimark, p.70 dans [44] ou Krantz dans [34]) à (2.43), nous obtenons l'expression

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

suivante :

$$\widetilde{\rho}_n = \rho_n + \alpha_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} + \alpha_n, \quad \alpha_n = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n = N, N+1, \dots, \quad (2.45)$$

où N est un entier positif assez grand.

En substituant $\widetilde{\rho}_n$ dans (2.42), et en utilisant le fait que $e^{\rho\omega_2} = ie^{-\rho\omega_2}$, nous obtenons :

$$e^{\alpha_n\omega_2} - e^{-\alpha_n\omega_2} + \mu_2\widetilde{\rho}_n^{-1}e^{\alpha_n\omega_2} - i\mu_3\widetilde{\rho}_n^{-1}e^{-\alpha_n\omega_2} + \mathcal{O}(\widetilde{\rho}_n^{-2}) = 0.$$

Le développement de la fonction exponentielle en série de Taylor au voisinage de 0 nous donne :

$$\alpha_n = -\frac{\mu_2}{2\omega_2\rho_n} + \frac{\mu_3}{2\omega_2\rho_n}i + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n = N, N+1, \dots$$

Par conséquent, on a :

$$\widetilde{\rho}_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} + \frac{\mu_2}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi}i + \frac{\mu_3}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n = N, N+1, \dots$$

Notons que $\lambda_n = \frac{\widetilde{\rho}_n^2}{h^2} \neq 0$, $\omega_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\omega_2^2 = i$. Alors on a :

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2}(\mu_3 - \mu_2) + \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu_3 + \mu_2) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (2.46)$$

où $n = N, N+1, \dots$ avec N assez grand.

La même preuve peut être appliquée au secteur S_2 parce que les valeurs propres du problème (2.28) peuvent être obtenues par un calcul similaire avec les choix suivants :

$$\omega_1 = \exp(i\frac{1}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_2 = \exp(i\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

$$\omega_3 = \exp(i\frac{7}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_4 = \exp(i\frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Ces choix satisfont les inégalités (2.38) pour le secteur S_2 c'est-à-dire :

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_3) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_4), \quad \forall \rho \in S_2.$$

Ainsi, dans le secteur S_2 , le déterminant caractéristique $\Delta(\rho)$ de (2.19) est donné par :

$$\Delta(\rho) = 2\sqrt{2}\gamma\rho^6 e^{\rho\omega_4} \left\{ e^{\rho\omega_2} + i e^{-\rho\omega_2} - [\mu_2 e^{\rho\omega_2} + \mu_3 e^{-\rho\omega_2}] \rho^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \right\}.$$

Comme précédemment, nous avons :

$$\tilde{\rho}_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} - \frac{\mu_2}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} i + \frac{\mu_3}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n = N, N+1, \dots \quad (2.47)$$

avec N un entier assez grand.

Aussi, en se servant de $\lambda_n = \frac{\rho_n^2}{h^2} \neq 0$, $\omega_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $\omega_2^2 = -i$, on a l'expression asymptotique suivante :

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2} (\mu_3 - \mu_2) - \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\mu_3 + \mu_2) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + \mathcal{O}(n^{-1}) \quad (2.48)$$

où $n = N, N+1, \dots$ avec N un entier assez grand.

Ici, nous devrions souligner que les valeurs propres engendrées par les autres secteurs S_k coïncident avec celles déterminées dans les secteurs S_1 et S_2 . Un argument détaillé peut être trouvé dans M. A. Naimark [44].

En combinant (2.46) et (2.48), nous obtenons le résultat suivant sur les valeurs propres :

Théorème 2.5. *Soit \mathcal{A} l'opérateur défini par (2.10) et (2.11). Si $\gamma \neq 0$, alors une*

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

expression asymptotique des valeurs propres du problème (2.28) est donnée par :

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2} (\mu_3 - \mu_2) \pm \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\mu_3 + \mu_2) + \left(\frac{1}{4} - n \right)^2 \pi^2 \right] i + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (2.49)$$

où $n = N, N + 1, \dots$ avec N assez grand, et

$$\mu_3 - \mu_2 = \frac{\sqrt{2}b_{21}}{\gamma} = -\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{2}h(m(1))^{\frac{1}{4}}(EI(1))^{\frac{3}{4}} \right), \quad (2.50)$$

$$\mu_3 + \mu_2 = \sqrt{2}(2\mu_1 + b_{21}). \quad (2.51)$$

De plus, les valeurs propres λ_n ($n = N, N + 1, \dots$) avec un module suffisamment grand sont simples et distinctes excepté pour un nombre fini d'entre elles, et satisfont

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \lambda_n = -\frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right). \quad (2.52)$$

Remarquons que (2.52) représente l'asymptote du spectre. Dans le cas uniforme c'est-à-dire quand on a

$$m(x) = EI(x) = 1,$$

nous retrouvons l'asymptote obtenue dans [58] :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \lambda_n = -\frac{1}{\alpha}$$

dont l'étude numérique est faite au Chapitre 5.

2.3.2 Propriété de la base de Riesz des fonctions propres de l'opérateur

Dans cette sous-section, nous étudions la propriété de la base de Riesz des fonctions propres de l'opérateur \mathcal{A} du système (2.12).

Pour cela, nous suivons une idée due à Wang (voir [63] p. 473-475).

Ainsi, nous commençons par montrer que les fonctions propres généralisées de \mathcal{A} forment une base de Riesz dans l'espace d'énergie \mathcal{H} .

2.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

Introduisons donc la transformation \mathcal{L} définie par

$$\mathcal{L}(f, g)^T = (\phi, \psi)^T$$

où

$$\phi(x) = f(z), \quad \psi(x) = g(z), \quad z = \frac{1}{h} \int_0^x \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta, \quad (2.53)$$

avec

$$h = \int_0^1 \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta. \quad (2.54)$$

Nous remarquons que \mathcal{L} est un opérateur inversible et borné sur \mathcal{H} .

Ensuite, définissons l'opérateur différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(f) = f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z), \\ B_1(f) = f(0) = 0, \quad B_2(f) = f'(0) = 0, \\ B_3(f) = f''(1) + \left[\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{(\alpha\lambda + \beta)}{EI(1)z_x(1)} \right] f'(1) = 0 \\ B_4(f) = EI(1)z_x^3(1)f'''(1) + [EI'(1)z_x^2(1) + 3EI(1)z_{xx}(1)z_x(1)]f''(1) \\ \quad + [EI(1)z_{xxx}(1) + EI'(1)z_{xx}(1)]f'(1) = 0, \end{array} \right. \quad (2.55)$$

où les coefficients $a(z), b(z), c(z), z_x$ et z_{xx} sont donnés par (2.23)-(2.27).

Soient maintenant l'opérateur \mathbb{A} défini comme dans (2.12), $\eta \in \sigma(\mathbb{A})$ une valeur propre de \mathbb{A} et (f, g) une fonction propre correspondante à η . Alors on a $g = \eta f$ et la fonction f devrait vérifier l'équation :

$$f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \eta^2 f(z) = 0,$$

avec les conditions aux limites $B_j(f) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$.

Maintenant, en prenant $\lambda = \frac{\eta}{h^2}$ et

$$\mathcal{L}(f, g) = (\phi(x), \psi(x)),$$

on voit que $\psi = \lambda\phi$ et la fonction ϕ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \phi^{(4)}(x) + \frac{2EI'(x)}{EI(x)}\phi'''(x) + \frac{EI''(x)}{EI(x)}\phi''(x) + \frac{\lambda^2 m(x)}{EI(x)}\phi(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot)\phi'')'(1) = 0, \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \quad (2.56)$$

Ainsi on a le résultat important suivant : $\eta \in \sigma(\mathbb{A}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(\mathcal{A})$.

Théorème 2.6. *Soit l'opérateur \mathcal{A} défini comme dans le système (2.12). Alors les valeurs propres de l'opérateur \mathcal{A} sont toutes simples excepté pour un nombre fini d'entre elles, et les fonctions propres généralisées de l'opérateur \mathcal{A} forment une base de Riesz pour l'espace d'énergie \mathcal{H} .*

Démonstration. Selon le Théorème 2.4, le problème aux limites (2.28) est fortement régulier. Donc les valeurs propres sont séparées et simples sauf pour un nombre fini d'entre elles. De plus, selon le Théorème 1.32, la forte régularité des conditions aux limites assure que la suite des fonctions propres généralisées $F_n = (f_n, \eta_n f_n)$ de l'opérateur \mathbb{A} forme une base de Riesz pour \mathcal{H} . Puisque \mathcal{L} est un opérateur borné et inversible sur \mathcal{H} , il s'ensuit que $\Psi_n = (\phi_n, \lambda_n \phi_n) = \mathcal{L}F_n$ forme aussi une base de Riesz sur \mathbb{H} d'après le Lemme 1.24. \square

Intéressons-nous à présent à l'étude de la stabilité exponentielle du système (2.8).

2.4 Stabilité exponentielle du système

Le Théorème 2.6 est l'une des propriétés fondamentales découlant du système évolutif (2.12). D'autres propriétés importantes de ce système peuvent être déduites de ce théorème. La stabilité exponentielle indiquée ci-dessous est l'une d'entre elles.

Théorème 2.7. *Le système (2.1)–(2.4) est exponentiellement stable pour tous $\beta \geq 0$ et $\alpha > 0$. Autrement dit, il existe des constantes strictement positives M, ω telles que l'énergie $E(t)$ du système (2.1)–(2.4) vérifie*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 m w_t^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x(1, t))^2 \leq ME(0) e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

pour toute donnée initiale $(w(x, 0), w_t(x, 0)) \in \mathcal{H}$.

2.4. STABILITÉ EXPONENTIELLE DU SYSTÈME

Démonstration. La propriété de la base de Riesz obtenue par le Théorème 2.6 nous permet d'affirmer, pour le semi-groupe de contractions $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$ engendré par l'opérateur dissipatif \mathcal{A} , que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur c'est-à-dire $\omega(\mathcal{A}) = s(\mathcal{A})$ (voir [20]). Aussi grâce à (2.52) qui décrit l'asymptote du spectre $\sigma(\mathcal{A})$, pour un tout petit $\varepsilon > 0$, il existe seulement un nombre fini de valeurs propres de \mathcal{A} dans le demi-plan suivant :

$$\Sigma : \operatorname{Re} \lambda > -\frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right) + \varepsilon. \quad (2.57)$$

Il reste à montrer qu'il n'existe aucune valeur propre sur l'axe imaginaire pour obtenir la stabilité exponentielle du système (2.1)-(2.4). Autrement dit, il s'agit de montrer que $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$.

Soit $\lambda = ir$ avec $r \in \mathbb{R}$ une valeur propre de l'opérateur \mathcal{A} sur l'axe imaginaire et $\Psi = (\phi, \psi)^T$ la fonction propre correspondante telle que $\psi = \lambda\phi$. Alors nous avons

$$\operatorname{Re}(\langle \mathcal{A}\Psi, \Psi \rangle_{\mathbb{H}}) = -\alpha |\psi'(1)|^2$$

$$0 = \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\langle \mathcal{A}\Psi, \Psi \rangle_{\mathcal{H}}) = -\alpha |\psi'(1)|^2.$$

Puisque $\alpha > 0$, on obtient

$$\psi'(1) = 0.$$

Par suite, $\phi'(1) = 0$.

$\phi(x)$ doit vérifier l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \lambda^2 m(x) \phi(x) + (EI(x) \phi''(x))'' = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = \phi'(1) = \phi''(1) = (EI(\cdot) \phi''(\cdot))'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

obtenue grâce à (2.20).

Démontrons que l'unique solution de (2.58) est la solution nulle.

Nous suivons la démarche de Guo dans [30].

Étape 1 : Initialisation

ϕ' est une fonction définie sur $[0, 1]$, continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et telle que $\phi'(0) = \phi'(1)$. Alors d'après le Théorème de Rolle, il existe au moins un point $c_1 \in]0, 1[$ tel que $\phi''(c_1) = 0$. De plus, on a $\phi''(1) = 0$, alors en appliquant encore le Théorème de Rolle, il existe au moins un point $c_2 \in]c_1, 1[$ tel que $(EI(\cdot) \phi''(\cdot))'(c_2) = 0$. Enfin, on a encore $(EI(\cdot) \phi''(\cdot))'(1) = 0$. En se servant à nouveau du Théorème de Rolle, il

existe au moins un point $c_3 \in]c_2, 1[$ tel que $(EI(\cdot)\phi'')''(c_3) = 0$. Et d'après la première équation de (2.58), on en déduit que $\phi(c_3) = 0$.

Étape 2 : Hérité

Supposons qu'il existe un nombre n de zéros distincts de ϕ dans l'intervalle $]0, 1[$. Montrons qu'il existe au moins $n + 1$ zéros distincts de ϕ dans l'intervalle $]0, 1[$.

On a $\phi(0) = 0$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit d'après le Théorème de Rolle qu'il existe également un nombre n de zéros distincts de ϕ' dans l'intervalle $]0, 1[$ c'est-à-dire $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < 1$ tel que

$$\phi'(c_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

On a aussi $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$ donc d'après le Théorème de Rolle, il existe pour tout $i = 1, 2, \dots, n + 1$, des réels d_i deux à deux distincts de ϕ'' . Autrement dit, on a $0 < d_1 < c_1 < d_2 < c_2 < \dots < c_{n-1} < d_n < c_n < d_{n+1} < 1$ tel que

$$\phi''(d_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

De plus, $\phi''(1) = 0$ donc en utilisant de nouveau le Théorème de Rolle, il existe pour tout $i = 1, 2, \dots, n + 1$, des réels α_i deux à deux distincts de $(EI\phi'')$. C'est-à-dire, on a $0 < d_1 < \alpha_1 < d_2 < \alpha_2 < \dots < d_{n-1} < \alpha_{n-1} < d_n < \alpha_n < d_{n+1} < \alpha_{n+1} < 1$ tel que

$$(EI(\cdot)\phi''(\cdot))'(\alpha_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Enfin, $(EI(\cdot)\phi''(\cdot))'(1) = 0$ donc en se servant encore du Théorème de Rolle, il existe pour tout $i = 1, 2, \dots, n + 1$, des réels β_i deux à deux distincts de $(EI\phi'')''$. Autrement dit, on a $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} < 1$ tel que

$$(EI(\cdot)\phi''(\cdot))''(\beta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Par conséquent, grâce à la première équation de (2.58), on a

$$\phi(\beta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Étape 3 : Conclusion

Il existe au moins $n + 1$ zéros distincts de ϕ dans l'intervalle $]0, 1[$.

2.4. STABILITÉ EXPONENTIELLE DU SYSTÈME

En vertu de la conclusion, il existe un nombre infini de zéros distincts $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de ϕ dans l'intervalle $]0, 1[$. Soit $x_0 \in [0, 1]$ un point d'accumulation de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Alors tout ouvert contenant x_0 contient au moins un autre point de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ainsi,

$$\phi^{(i)}(x_0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2.59)$$

Notons que ϕ vérifie l'équation différentielle linéaire

$$(EI(x)\phi''(x))'' = -\lambda^2 m(x)\phi(x). \quad (2.60)$$

Par conséquent, $\phi \equiv 0$ par unicité de la solution des équations différentielles linéaires. Finalement, on en déduit que $\psi \equiv 0$ qui contredit le fait que ψ soit une fonction propre et donc il n'y a aucune valeur propre sur l'axe imaginaire. Ainsi, nous obtenons $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Par le Théorème 2.6 et par le fait que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur, le système (2.1)-(2.4) est exponentiellement stable pour tous $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$. \square

Chapitre 3

Stabilisation d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients variables sous l'effet d'un amortissement visqueux

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la propriété de la base de Riesz puis la stabilité exponentielle d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli amortie à coefficients variables. L'amortissement de ce système est une atténuation de ses mouvements par dissipation de l'énergie qui les engendre. La viscosité de cet amortissement entraîne l'ajout du terme $\gamma(\cdot)w_t(\cdot, t)$ à la première équation (2.1) du Chapitre 2 où $\gamma(\cdot)$ et $w_t(\cdot, t)$ représentent respectivement la force de frottement et la vitesse de la poutre. Le modèle mathématique traduisant l'amortissement des vibrations de cette poutre est donné par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$m(x)w_{tt}(x, t) + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} + \gamma(x)w_t(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$(EI(\cdot)w_{xx})_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

$$-EI(1)w_{xx}(1, t) = \alpha w_{xt}(1, t) + \beta w_x(1, t), \quad t > 0, \quad (3.4)$$

3.1. INTRODUCTION

où α et β sont deux constantes positives données. Nous supposons que la longueur de la poutre est égale à l'unité. On rappelle que les fonctions $EI(\cdot)$ et $m(\cdot)$ vérifient les conditions suivantes :

$$m(x), EI(x) \in C^4(0, 1), \quad m(x), EI(x) > 0 \quad (3.5)$$

pour tout $x \in [0, 1]$. Comme indiqué dans le Chapitre **2**, les matériaux non homogènes, en particulier les matériaux intelligents utilisés en ingénierie, sont des exemples types à considérer pour révéler l'importance de prendre des coefficients comme variables [35]. De plus, la force de frottement visqueux $\gamma(\cdot)$ (une fonction continue) qui apparaît dans l'équation (3.1) satisfait à la condition suivante :

$$\int_0^1 \left(\frac{\gamma(x)}{m(x)} \right) \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{1/4} dx > 0. \quad (3.6)$$

Notons que la condition (3.6) permettra à ce que la fonction γ ne soit pas de signe constant dans l'intervalle $[0, 1]$.

Dans la théorie des systèmes dynamiques, la stabilité intéresse vivement les mathématiciens et les ingénieurs. Plus particulièrement, la stabilité exponentielle est la stabilité la plus souhaitable, en particulier pour les systèmes amortis ou avec frottements. L'étude du cas ($\gamma \equiv 0$) a été réalisée dans le Chapitre **2** où nous nous sommes servis de la démarche de Wang et al (voir par exemple [62, 63]) pour montrer la stabilité exponentielle du système. Dans [62], une question a été soulevée et est valable pour le système amorti (3.1) - (3.4) : En raison de la non-uniformité de l'épaisseur et/ou de la densité physique de la poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables avec $\gamma(\cdot)$, la fonction coefficient du frottement visqueux dans l'équation (3.1), quelles conditions faut-il mettre sur le terme d'amortissement $\gamma(\cdot)$ afin de garantir la stabilité exponentielle? Ici, il est très difficile de situer l'emplacement exact des valeurs propres parce que l'équation (3.1) contient des coefficients variables et est soumise à des conditions aux limites (3.2) - (3.4). Aussi, faut-il déjà souligner que cette question a été traitée quand l'équation (3.1) est associée à des conditions aux limites nulles (voir [62]), et lorsque l'équation (3.1) est soumise à un contrôle force en position et en vitesse (voir [58]). Dans ce chapitre, nous répondons à cette question quand l'équation (3.1) est soumise à un contrôle force en rotation et en vitesse de rotation. Nous suivrons la même démarche que celle du Chapitre **2**. Ainsi, dans le but d'étudier le système à

coefficients variables, nous utiliserons les deux étapes fournies par les travaux de Birkhoff ([6]) et les travaux de Naimark ([44]). Par ailleurs, pour étudier le problème aux valeurs propres associé au système (3.1) - (3.4) sous la forme d'une équation différentielle ordinaire $L(f) = \lambda f$ avec les conditions aux limites λ -polynomiales, nous nous appuyons sur l'idée de Wang et al (voir par exemple [62, 63]).

Le contenu du chapitre est le suivant. Dans la section 3.2, le système (3.1) - (3.4) est formulé comme un problème de Cauchy abstrait dans un espace de Hilbert (espace d'énergie approprié) et étudié dans le cadre des semi-groupes. Dans la section 3.3, une analyse spectrale est faite et ensuite, nous prouvons que l'opérateur associé au système vérifie la propriété de la base de Riesz dans l'espace d'état correspondant. Enfin, dans la section 3.4, en étudiant les cas où le paramètre d'amortissement γ change de signe dans l'intervalle $[0, 1]$, nous donnons des conditions pour obtenir la stabilité exponentielle du système (3.1) - (3.4).

3.2 Problème bien posé au sens des semi-groupes

Nous rappelons les espaces fonctionnels utilisés au Chapitre 2 et valables pour cette présente étude :

$$H_E^2(0, 1) = \left\{ w \in H^2(0, 1) \mid w(0) = w_x(0) = 0 \right\} \quad (3.7)$$

et

$$\mathbb{H} = H_E^2(0, 1) \times L^2(0, 1), \quad (3.8)$$

avec le produit scalaire suivant :

$$\langle w, v \rangle_{\mathbb{H}} = \int_0^1 m(x) f_2(x) \overline{g_2(x)} dx + \int_0^1 EI(x) f_1''(x) \overline{g_1''(x)} dx + \beta f_1'(1) \overline{g_1'(1)}, \quad (3.9)$$

où $w = (f_1, f_2)^T \in \mathbb{H}$, $v = (g_1, g_2)^T \in \mathbb{H}$.

Notons que $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ désigne la norme correspondante. De plus, on a :

$$L^2(0, 1) = \left\{ w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^1 |w|^2 dx < \infty \right\} \quad (3.10)$$

$$H^k(0, 1) = \left\{ w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)} \in L^2(0, 1) \right\}. \quad (3.11)$$

3.2. PROBLÈME BIEN POSÉ AU SENS DES SEMI-GROUPES

Soit $A_\gamma : D(A_\gamma) \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ l'opérateur linéaire non borné avec pour domaine

$$D(A_\gamma) = \left\{ (f, g)^T \in (H^4(0, 1) \cap H_E^2(0, 1)) \times H_E^2(0, 1) \mid \begin{aligned} & (EI(\cdot) f''(\cdot))'(1) = 0, \\ & -EI(1) f''(1) = \alpha g_x(1) + \beta f_x(1) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

défini par

$$A_\gamma (f, g)^T = \left(g(x), -\frac{1}{m(x)} [EI(x) f''(x)]'' + \gamma(x) g(x) \right)^T. \quad (3.13)$$

Nous pouvons maintenant écrire (3.1)–(3.4) sous la forme d'un problème d'évolution de premier ordre

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z(t) = A_\gamma z(t) \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{H}, \end{cases} \quad (3.14)$$

où $z(t) = (w, w_t)^T$, $z(0) = (w_0, v_0)^T$.

De plus, notons que

$$\Gamma_\gamma (f, g)^T = A_\gamma (f, g)^T - A_0 (f, g)^T = \left(0, -\frac{\gamma(x) g(x)}{m(x)} \right)^T$$

est un opérateur linéaire et borné sur \mathbb{H} où A_0 désigne l'opérateur du chapitre précédent. En effet, pour tout $(f, g)^T \in D(A_\gamma)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_\gamma (f, g)^T, (f, g)^T \rangle_{\mathbb{H}} &= \left\langle \left(0, -\frac{\gamma(x) g(x)}{m(x)} \right)^T, (f, g)^T \right\rangle_{\mathbb{H}} \\ &= -\int_0^1 \gamma(x) |g(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions $\gamma(\cdot)$, $m(\cdot)$ et $EI(\cdot)$ sont continues sur $[0, 1]$ avec $m(x) > 0$ sur $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \langle \Gamma_\gamma (f, g)^T, (f, g)^T \rangle_{\mathbb{H}} \right| &\leq M \left(\int_0^1 [m(x) |g(x)|^2 + EI(x) |f''(x)|^2] dx + \beta |f'(1)|^2 \right) \\ &\leq M \| (f, g)^T \|_{\mathbb{H}}^2, \end{aligned}$$

3.2. PROBLÈME BIEN POSÉ AU SENS DES SEMI-GROUPES

avec

$$M = \sup_{x \in [0,1]} \frac{|\gamma(x)|}{m(x)}.$$

Donc l'opérateur Γ_γ est borné sur \mathbb{H} .

Les deux résultats suivants sont immédiats et découlent de la théorie des semi-groupes. Le premier est une conséquence directe de la théorie des perturbations des semi-groupes (voir le Théorème 1.28).

Théorème 3.1. *Soient les opérateurs A_γ et A_0 définis plus haut. Alors A_0 est un opérateur m -dissipatif et engendre un C_0 -semi-groupe de contractions sur \mathbb{H} noté par $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ et par conséquent A_γ est un générateur d'un semi-groupe de contractions $e^{A_\gamma t}$ sur \mathbb{H} noté par $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.*

Démonstration. La première assertion a été prouvée dans le Chapitre 2 où nous avons utilisé le Théorème de Lumer-Phillips (voir le Théorème 1.17). Donc l'opérateur A_0 engendre un C_0 -semi-groupe noté $\{S(t)\}_{t \geq 0} = \{e^{A_0 t}\}_{t \geq 0}$ sur \mathbb{H} , tel que

$$\|S(t)\|_{L(\mathbb{H})} \leq Ce^{\omega t}, \text{ pour } M, \omega \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, le Théorème 1.28 nous permet de déduire que $A_\gamma = \Gamma_\gamma + A_0$ engendre un C_0 -semi-groupe noté $\{T(t)\}_{t \geq 0} = e^{A_\gamma t}$ tel que

$$\|T(t)\|_{L(\mathbb{H})} \leq Ce^{(\omega + C\|\Gamma_\gamma\|)t}.$$

□

Le deuxième résultat est le suivant :

Théorème 3.2. *L'opérateur A_γ est à résolvante compacte et $0 \in \rho(A_\gamma)$.*

Démonstration. Pour commencer, notons que A_γ est un opérateur dissipatif.

En effet, pour tout $w = (f, g)^T \in D(A_\gamma)$,

$$\langle A_\gamma w, w \rangle_{\mathbb{H}} = \left\langle \left(g(x), -\frac{1}{m(x)} \left(EI(x) f''(x) \right)'' + \gamma(x) g(x) \right)^T, (f, g)^T \right\rangle_{\mathbb{H}}$$

3.2. PROBLÈME BIEN POSÉ AU SENS DES SEMI-GROUPES

$$\begin{aligned} \langle A_\gamma w, w \rangle_{\mathbb{H}} = & - \int_0^1 \left[(EI(x)f''(x))'' \overline{g(x)} + \gamma(x)|g(x)|^2 \right] dx \\ & + \int_0^1 EI(x)g''(x)\overline{f''(x)} dx + \beta g'(1)\overline{f'(1)}. \end{aligned}$$

Par deux intégrations par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle A_\gamma w, w \rangle_{\mathbb{H}} = & - \int_0^1 EI(x) \left[g''(x)\overline{f''(x)} - f''(x)\overline{g''(x)} \right] dx + \beta \left(g'(1)\overline{f'(1)} - f'(1)\overline{g'(1)} \right) \\ & - \alpha |g'(1)|^2 - \int_0^1 \gamma(x)|g(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons

$$Re \langle A_\gamma w, w \rangle_{\mathbb{H}} = -\alpha |g'(1)|^2 - \int_0^1 \gamma(x)|g(x)|^2 dx \leq 0.$$

Ainsi, A_γ est un opérateur dissipatif et $\{e^{A_\gamma t}\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contractions sur \mathbb{H} . De plus, $I - A_\gamma$ est surjectif. Puisque l'opérateur A_γ est m -dissipatif alors l'opérateur $I - A_\gamma$ est un isomorphisme de $D(A_\gamma)$ sur \mathbb{H} .

La résolvante de A_γ est un opérateur linéaire et continu sur \mathbb{H} . Elle est aussi compacte. En effet, l'injection $j : H^4(0, 1) \times H^2(0, 1) \rightarrow H^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ étant compacte, il est donc de même pour $j : D(A_\gamma) \rightarrow \mathbb{H}$. Aussi, l'application $(I - A_\gamma)^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow D(A_\gamma)$ est bornée donc compacte. Ainsi d'après le théorème d'injection de Sobolev, l'opérateur A_γ est à résolvante compacte.

Il reste à montrer que $0 \in \rho(A_\gamma)$. Il suffit de prouver que A_γ^{-1} existe. Pour tout $\Psi = (g_1, g_2)^T \in \mathbb{H}$, il suffit de trouver un unique $\Phi = (f_1, f_2)^T \in D(A_\gamma)$ telle que $A_\gamma \Phi = \Psi$ vérifie le système suivant

$$\begin{cases} f_2(x) = g_1(x), & g_1 \in H_E^2(0, 1) \\ (EI(x)f_1''(x))'' = -m(x)g_2(x) - \gamma(x)f_2(x), & g_2 \in L^2(0, 1) \\ f_1(0) = f_1'(0) = (EI(\cdot)f_1''(\cdot))'(1) = 0 \\ -EI(1)f_1''(1) = \alpha f_2'(1) + \beta f_1'(1) = \alpha g_1'(1) + \beta f_1'(1). \end{cases}$$

La solution du système précédent est donnée par (voir Théorème A.2 de l'annexe A) :

$$\begin{cases} f_2(x) = g_1(x) \\ f_1(x) = - \int_0^x \int_0^s \left[\frac{\beta f_1'(1) + \alpha g_1'(1)}{EI(\xi)} + \frac{1}{EI(\xi)} \int_\eta^1 \int_\xi^1 m(r)g_2(r) + \gamma(r)g_1(r) dr d\eta \right] d\xi ds. \end{cases}$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

avec

$$f_1'(1) = -\frac{\int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 [m(r)g_2(r) + \gamma(r)g_1(r)] dr d\eta d\xi + \alpha g_1'(1) \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi}{1 + \beta \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi}.$$

Alors, A_γ^{-1} existe. Par suite, $0 \in \rho(A_\gamma)$. De plus, en utilisant le Théorème d'injection de Sobolev, nous en déduisons que A_γ^{-1} est un opérateur compact dans l'espace de Hilbert \mathbb{H} . \square

3.3 Analyse spectrale de l'opérateur et propriété de la base de Riesz

3.3.1 Analyse spectrale de l'opérateur

L'analyse spectrale est une méthode souvent utilisée pour déterminer le comportement des valeurs propres des opérateurs de systèmes dynamiques. Dans ce qui suit, nous allons suivre l'idée de Wang et al dans [63] pour étudier le problème aux valeurs propres associé au système (3.1) - (3.4).

Selon le Théorème 3.2, le spectre de l'opérateur A_γ noté par $\sigma(A_\gamma)$, est discret et est constitué entièrement de valeurs propres séparées, qui sont distribuées en paires conjuguées dans le plan complexe.

Étudions à présent le problème aux valeurs propres de l'opérateur A_γ . Soient λ une valeur propre du spectre $\sigma(A_\gamma)$ et $\Phi = (\phi, \Psi)$ sa fonction propre correspondante. Alors, nous avons $\Psi = \lambda\phi$ où ϕ satisfait aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda^2 m(x)\phi(x) + (EI(x)\phi''(x))'' + \lambda\gamma(x)\phi(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot)\phi''(\cdot))'(1) = 0 \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans l'objectif de résoudre (3.15), les transformations spatiales introduites dans [28] sont effectuées. Ce qui convertit la première équation de (3.15) en une forme simple et pratique. Pour y arriver, pour tout x élément de $(0, 1)$, le système (3.15) est d'abord

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \phi^{(4)}(x) + \frac{2EI'(x)}{EI(x)}\phi'''(x) + \frac{EI''(x)}{EI(x)}\phi''(x) + \frac{\lambda^2 m(x)}{EI(x)}\phi(x) + \frac{\lambda\gamma(x)}{EI(x)}\phi(x) = 0, \\ \phi(0) = \phi'(0) = \left(EI(\cdot)\phi''(\cdot)\right)'(1) = 0, \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \quad (3.16)$$

De plus, afin de rendre constant le coefficient de ϕ dans la première expression de (3.16), considérons la transformation d'espace suivante :

$$f(z) = \phi(x), \quad z = z(x) = \frac{1}{h} \int_0^x \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta \quad (3.17)$$

avec

$$h = \int_0^1 \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta. \quad (3.18)$$

Ainsi, le système (3.16) peut être transformé comme suit

$$\begin{cases} f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \lambda^2 h^4 f(z) + \lambda h^4 d(z)f(z) = 0, 0 < z < 1, \\ f(0) = f'(0) = 0, \\ EI(1)z_x^3(1)f'''(1) + \left[EI'(1)z_x^2(1) + 3EI(1)z_{xx}(1)z_x(1) \right] f''(1) \\ + \left[EI(1)z_{xxx}(1) + EI'(1)z_{xx}(1) \right] f'(1) = 0, \\ f''(1) + \left[\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha\lambda + \beta}{EI(1)z_x(1)} \right] f'(1) = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

avec

$$a(z) = \frac{6z_{xx}}{z_x^2} + \frac{2EI'(x)}{z_x EI(x)} \quad (3.20)$$

$$b(z) = \frac{3z_{xx}^2}{z_x^4} + \frac{6z_{xx}EI'(x)}{z_x^3 EI(x)} + \frac{EI''(x)}{z_x^2 EI(x)} + \frac{4z_{xxx}}{z_x^3} \quad (3.21)$$

$$c(z) = \frac{z_{xxxx}}{z_x^4} + \frac{2z_{xxx}EI'(x)}{z_x^4 EI(x)} + \frac{z_{xx}EI''(x)}{z_x^4 EI(x)} \quad (3.22)$$

$$d(z) = \frac{\gamma(x)}{m(x)} \quad (3.23)$$

$$z_x = \frac{1}{h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad z_x^4 = \frac{1}{h^4} \frac{m(x)}{EI(x)} \quad (3.24)$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

et

$$z_{xx} = \frac{1}{4h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{d}{dx} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.25)$$

(Pour le détail des calculs, on pourra se référer à l'annexe A).

Maintenant, nous utilisons l'idée de Naimark présentée dans le Chapitre 2 de [44] pour résoudre (3.19). Ensuite, afin de supprimer le terme de la dérivée troisième $a(z) f'''(z)$ dans (3.19), nous introduisons une nouvelle transformation d'espace. Elle est inversible et définie comme suit :

$$g(z) = \exp \left(\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta \right) f(z), \quad 0 < z < 1.$$

Le système (3.19) peut être écrit comme suit, pour tout $0 < z < 1$:

$$\begin{cases} g^{(4)}(z) + b_1(z) g''(z) + c_1(z) g'(z) + d_1(z) g(z) + \lambda^2 h^4 g(z) + \lambda h^4 d(z) g(z) = 0, \\ g(0) = g'(0) = 0, \\ g''(1) + b_{11} g'(1) + b_{12} g(1) = 0, \\ g'''(1) + b_{21} g''(1) + b_{22} g'(1) + b_{23} g(1) = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

où

$$b_1(z) = -\frac{3}{2} a'(z) - \frac{3}{8} a^2(z) + b(z) \quad (3.27)$$

$$c_1(z) = \frac{1}{8} a^3(z) - \frac{1}{2} a(z) b(z) - a''(z) + c(z) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} d_1(z) &= \frac{3}{16} a'^2(z) - \frac{1}{4} a'''(z) + \frac{3}{32} a'(z) a^2(z) - \frac{3}{256} a^4(z) \\ &\quad + b(z) \left(\frac{1}{16} a^2(z) - \frac{1}{4} a'(z) \right) - \frac{a(z)c(z)}{4} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$b_{11} = -\frac{1}{2} a(1) + \frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha \lambda}{EI(1)z_x(1)} + \frac{\beta}{EI(1)z_x(1)} \quad (3.30)$$

$$b_{12} = -\frac{1}{4} a'(1) + \frac{1}{16} a^2(1) - \frac{1}{4} a(1) \left(\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha \lambda}{EI(1)z_x(1)} + \frac{\beta}{EI(1)z_x(1)} \right) \quad (3.31)$$

$$b_{21} = -\frac{3}{4} a(1) + \frac{3z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{EI'(1)}{EI(1)z_x(1)} \quad (3.32)$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

$$\begin{aligned}
b_{22} = & -\frac{3}{4}a'(1) + \frac{3}{16}a^2(1) - \frac{EI'(1)a(1)}{2EI(1)z_x(1)} - \frac{3z_{xx}(1)a(1)}{2z_x^2(1)} \\
& + \frac{z_{xxx}(1)}{z_x^3(1)} + \frac{EI'(1)z_{xx}(1)}{EI(1)z_x^3(1)}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
b_{23} = & -\frac{1}{4}a''(1) + \frac{3}{16}a'(1)a(1) - \frac{1}{64}a^3(1) - \frac{a'(1)EI'(1)}{4EI(1)z_x(1)} \\
& - \frac{3a'(1)z_{xx}(1)}{4z_x^2(1)} + \frac{EI'(1)a^2(1)}{16EI(1)z_x(1)} + \frac{3z_{xx}(1)a^2(1)}{16z_x^2(1)} - \frac{a(1)z_{xxx}(1)}{4z_x^3(1)}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

(Pour le détail des calculs, on pourra se référer à l'annexe A).

Puisque les deux transformations spatiales sont inversibles, le système obtenu (3.26) est équivalent au problème initial (3.15).

Pour résoudre le problème aux valeurs propres (3.18), le plan complexe est subdivisé en 8 secteurs distincts :

$$S_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{n\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{(n+1)\pi}{4} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 7. \tag{3.35}$$

De plus, soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ les racines de l'équation $\theta^4 + 1 = 0$ telles que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_3) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_4), \quad \forall \rho \in S_n. \tag{3.36}$$

Notons que les choix dans le secteur S_1 satisfaisant (3.36) sont donnés comme suit

$$\omega_1 = \exp\left(i\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_2 = \exp\left(i\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_3 = \exp\left(i\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_4 = \exp\left(i\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

Notons que, de manière similaire, les mêmes choix peuvent être faits dans les autres secteurs.

Dans ce qui suit, nous étudierons le comportement asymptotique des valeurs propres uniquement pour deux secteurs adjacents S_1 et S_2 parce que les calculs sont similaires dans les autres secteurs.

Posons $\lambda = \frac{\rho^2}{h^2}$, dans chaque secteur S_n . Dans le but d'analyser les solutions asymptotiques fondamentales du système (3.26), nous nous servirons du lemme suivant (voir [44, 63]) :

Lemme 3.3. *Pour $\rho \in S_n$ avec $|\rho|$ assez grand, l'équation :*

$$\begin{aligned} g^{(4)}(z) + b_1(z)g''(z) + c_1(z)g'(z) \\ + d_1(z)g(z) + \rho^4g(z) + \rho^2h^2d(z)g(z) = 0, \quad 0 < z < 1, \end{aligned}$$

admet quatre solutions asymptotiques fondamentales linéairement indépendantes, les fonctions

$$\Phi_s(z, \rho) = e^{\rho\omega_s z} \left(1 + \frac{\Phi_{s,1}(z)}{\rho} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \right), \quad s = 1, 2, 3, 4$$

et ainsi leurs dérivées successives pour $s = 1, 2, 3, 4$ et pour $j = 1, 2, 3$, sont données par

$$\frac{d^j}{dz^j} \Phi_s(z, \rho) = (\rho\omega_s)^j e^{\rho\omega_s z} \left(1 + \frac{\Phi_{s,1}(z)}{\rho} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \right)$$

où

$$\Phi_{s,1}(z) = -\frac{1}{4\omega_s} \int_0^z b_1(\zeta) d\zeta - \frac{h^2}{4\omega_s^3} \int_0^z d(\zeta) d\zeta.$$

Ainsi, pour $s = 1, 2, 3, 4$,

$$\begin{aligned} \Phi_{s,1}(0) = 0, \quad \Phi_{s,1}(1) = -\frac{1}{4\omega_s} \int_0^1 b_1(\zeta) d\zeta = \frac{\omega_s^2 \mu_1 + \mu_2}{\omega_s^3}, \\ \text{avec } \mu_1 = -\frac{1}{4} \int_0^1 b_1(\zeta) d\zeta \text{ et } \mu_2 = -\frac{h^2}{4} \int_0^1 d(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour la preuve, on pourra se référer à [59]. □

Nous utiliserons aussi le lemme suivant :

Lemme 3.4. *Pour $\rho \in S_1$, si nous posons $\delta = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors les inégalités suivantes*

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

sont vérifiées

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq -|\rho|\delta, \operatorname{Re}(\rho\omega_4) \geq |\rho|\delta \text{ et } e^{\rho\omega_1} = \mathcal{O}(\rho^{-2}) \text{ quand } |\rho| \rightarrow \infty.$$

Nous introduisons la notation suivante :

$$[a]_2 = a + \mathcal{O}(\rho^{-2}).$$

$$\text{Posons aussi } \kappa = -\frac{\alpha a(1)}{4EI(1)z_x(1)h}.$$

En utilisant le Lemme 3.3, les expressions asymptotiques suivantes pour $|\rho|$ assez grand sont obtenues pour $s = 1, 2, 3, 4$,

$$U_4(\Phi_s, \rho) = \Phi_s(0, \rho) = 1 + \mathcal{O}(\rho^{-2}) = [1]_2,$$

$$U_3(\Phi_s, \rho) = \Phi'_s(0, \rho) = \rho\omega_s(1 + \mathcal{O}(\rho^{-2})) = \rho\omega_s[1]_2,$$

$$U_2(\Phi_s, \rho) = \Phi''_s(1, \rho) + b_{11}\Phi'_s(1, \rho) + b_{12}\Phi_s(1, \rho),$$

$$U_2(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^2 e^{\rho\omega_s} (1 + \kappa\omega_s^{-2} + (\mu_1\omega_s^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_s^{-3} + \kappa(\omega_s^2\mu_1 + \mu_2)\omega_s^{-4}\rho^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2})),$$

$$U_2(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^2 e^{\rho\omega_s} [1 + \kappa\omega_s^{-2} + (\mu_1\omega_s^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_s^{-3} + \kappa(\omega_s^2\mu_1 + \mu_2)\omega_s^{-4}\rho^{-1}]_2,$$

$$U_1(\Phi_s, \rho) = \Phi'''_s(1, \rho) + b_{21}\Phi''_s(1, \rho) + b_{22}\Phi'_s(1, \rho) + b_{23}\Phi_s(1, \rho),$$

$$U_1(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^3 e^{\rho\omega_s} (1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_s^{-2})\rho^{-1}\omega_s^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2})),$$

$$U_1(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^3 e^{\rho\omega_s} [1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_s^{-2})\rho^{-1}\omega_s^{-1}]_2.$$

Notons que $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de (3.26) si et seulement si ρ vérifie l'équation caractéristique

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} U_4(\Phi_1, \rho) & U_4(\Phi_2, \rho) & U_4(\Phi_3, \rho) & U_4(\Phi_4, \rho) \\ U_3(\Phi_1, \rho) & U_3(\Phi_2, \rho) & U_3(\Phi_3, \rho) & U_3(\Phi_4, \rho) \\ U_2(\Phi_1, \rho) & U_2(\Phi_2, \rho) & U_2(\Phi_3, \rho) & U_2(\Phi_4, \rho) \\ U_1(\Phi_1, \rho) & U_1(\Phi_2, \rho) & U_1(\Phi_3, \rho) & U_1(\Phi_4, \rho) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.37)$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

Par substitution, l'expression suivante est obtenue

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} [1]_2 & & & & [1]_2 \\ \rho\omega_1 [1]_2 & & & & \rho\omega_2 [1]_2 \\ 0 & (\rho\omega_2)^2 e^{\rho\omega_2} [1 + \kappa\omega_2^{-2} + (\mu_1\omega_2^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_2^{-3} + \kappa(\omega_2^2\mu_1 + \mu_2)\omega_2^{-4}\rho^{-1}]_2 & & & \\ 0 & (\rho\omega_2)^3 e^{\rho\omega_2} [1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_2^{-2})\rho^{-1}\omega_2^{-1}]_2 & & & \\ & & [1]_2 & & \\ & & \rho\omega_3 [1]_2 & & \\ & & (\rho\omega_3)^2 e^{\rho\omega_3} [1 + \kappa\omega_3^{-2} + (\mu_1\omega_3^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_3^{-3} + \kappa(\omega_3^2\mu_1 + \mu_2)\omega_3^{-4}\rho^{-1}]_2 & & \\ & & (\rho\omega_3)^3 e^{\rho\omega_3} [1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_3^{-2})\rho^{-1}\omega_3^{-1}]_2 & & \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & (\rho\omega_4)^2 e^{\rho\omega_4} [1 + \kappa\omega_4^{-2} + (\mu_1\omega_4^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_4^{-3} + \kappa(\omega_4^2\mu_1 + \mu_2)\omega_4^{-4}\rho^{-1}]_2 \\ & & & & (\rho\omega_4)^3 e^{\rho\omega_4} [1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_4^{-2})\rho^{-1}\omega_4^{-1}]_2 \end{vmatrix}.$$

En développant le déterminant suivant la première colonne puis suivant la première ligne, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) = & \rho^6 e^{\rho\omega_4} \{ (-1)(\omega_3 - \omega_1) [\kappa(\omega_2^{-2} - \omega_4^{-2}) + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_4^{-2})(\omega_4^{-1} - \omega_2^{-1})\rho^{-1} \\ & + \kappa(\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_2^{-2})(\omega_2^{-2}\omega_4^{-1} - \omega_4^{-2}\omega_2^{-1})\rho^{-1} \\ & + (\mu_1 + \mu_2\omega_4^{-2})(\omega_2^{-1} - \omega_4^{-1})\rho^{-1} + \kappa(\mu_1 + \mu_2\omega_2^{-2})(\omega_2^{-3} - \omega_4^{-3})\rho^{-1}] e^{\rho\omega_2} \\ & + (\omega_2 - \omega_1) [\kappa(\omega_3^{-2} - \omega_4^{-2}) + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_4^{-2})(\omega_4^{-1} - \omega_3^{-1})\rho^{-1} \\ & + \kappa(\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_3^{-2})(\omega_3^{-2}\omega_4^{-1} - \omega_4^{-2}\omega_3^{-1})\rho^{-1} \\ & + (\mu_1 + \mu_2\omega_4^{-2})(\omega_3^{-1} - \omega_4^{-1})\rho^{-1} + \kappa(\mu_1 + \mu_2\omega_3^{-2})(\omega_3^{-3} - \omega_4^{-3})\rho^{-1}] e^{-\rho\omega_2} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \}. \end{aligned}$$

Nous avons les choix suivants dans le secteur S_1 :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = -i, \quad \omega_2^2 = i, \quad \omega_3^2 = i, \quad \omega_4^2 = -i, \quad \omega_3^{-1}\omega_4 = i, \quad \omega_2^{-1}\omega_4 = -i, \quad \omega_3 = -\omega_2, \\ \omega_4 - \omega_3 = \sqrt{2}, \quad \omega_1 - \omega_3 = \sqrt{2}i, \quad \omega_2 - \omega_1 = \sqrt{2}, \quad \omega_4 - \omega_2 = -i\sqrt{2}, \quad \omega_2^{-2} - \omega_4^{-2} = -2i, \\ \omega_3^{-2} - \omega_4^{-2} = -2i, \quad \omega_3^2\omega_4^2 = 1, \quad \omega_2^2\omega_4^2 = 1, \quad \omega_2^{-3} - \omega_4^{-3} = -(1+i)\omega_2, \quad \omega_3^{-3} - \omega_4^{-3} = (1-i)\omega_2. \end{aligned}$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

En substituant les précédentes valeurs dans l'expression de $\Delta(\rho)$, nous obtenons :

$$\Delta(\rho) = 2\sqrt{2}\kappa\rho^6 e^{\rho\omega_4} \left\{ e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + [\mu_3 e^{\rho\omega_2} + \mu_4 e^{-\rho\omega_2}] \rho^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \right\}, \quad (3.38)$$

où

$$\begin{cases} \mu_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2\mu_1 + 2\mu_2 + b_{21} - \frac{b_{21}}{\kappa} \right] \\ \mu_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2\mu_1 - 2\mu_2 + b_{21} + \frac{b_{21}}{\kappa} \right]. \end{cases} \quad (3.39)$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.5. *Si $\kappa \neq 0$, le problème aux valeurs propres (3.26) est fortement régulier.*

Démonstration. Nous avons

$$\Theta_{-1,0} = -2\sqrt{2}i\kappa \quad \Theta_{1,0} = 2\sqrt{2}\kappa \quad \Theta_{0,0} = 0.$$

Par conséquent, le problème aux valeurs propres (3.26) est fortement régulier d'après la Définition 3.2.5 p. 43 de [62]. Ce qui signifie que les valeurs propres sont asymptotiquement simples et séparées. \square

A présent, nous pouvons déduire une expression asymptotique des valeurs propres du problème (3.26).

L'équation $\Delta(\rho) = 0$ implique que :

$$e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + \mu_3 \rho^{-1} e^{\rho\omega_2} + \mu_4 \rho^{-1} e^{-\rho\omega_2} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) = 0. \quad (3.40)$$

L'équation (3.40) peut être réécrite de la manière suivante :

$$e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + \mathcal{O}(\rho^{-1}) = 0. \quad (3.41)$$

Remarquons que les solutions de l'équation

$$e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} = 0$$

sont de la forme :

$$\rho_n = \left(\frac{1}{4} - n \right) \frac{\pi i}{\omega_2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.42)$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

Soit $\widetilde{\rho}_n$ les solutions de (3.41).

En utilisant le Théorème de Rouché (voir par exemple [34]), nous obtenons l'expression suivante :

$$\widetilde{\rho}_n = \rho_n + \alpha_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} + \alpha_n, \quad \alpha_n = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n = N, N+1, \dots, \quad (3.43)$$

où N est un entier positif assez grand.

En mettant la valeur $\widetilde{\rho}_n$ dans (3.40) et en utilisant l'égalité suivante $e^{\rho\omega_2} = ie^{-\rho\omega_2}$, nous obtenons :

$$e^{\alpha_n\omega_2} - e^{-\alpha_n\omega_2} + \mu_3\widetilde{\rho}_n^{-1}e^{\alpha_n\omega_2} - i\mu_4\widetilde{\rho}_n^{-1}e^{-\alpha_n\omega_2} + \mathcal{O}(\widetilde{\rho}_n^{-2}) = 0.$$

De plus, par le développement en série de Taylor de la fonction exponentielle au voisinage de 0, nous obtenons

$$\alpha_n = -\frac{\mu_3}{2\omega_2\rho_n} + \frac{\mu_4}{2\omega_2\rho_n}i + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n = N, N+1, \dots$$

Par conséquent, nous avons

$$\widetilde{\rho}_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} + \frac{\mu_3}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi}i + \frac{\mu_4}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n = N, N+1, \dots$$

Notons que $\lambda_n = \frac{\widetilde{\rho}_n^2}{h^2} \neq 0$, $\omega_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\omega_2^2 = i$. Alors nous avons

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2}(\mu_4 - \mu_3) + \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu_4 + \mu_3) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (3.44)$$

où $n = N, N+1, \dots$ avec N suffisamment grand.

La même preuve peut être appliquée dans le secteur S_2 car les valeurs propres de (3.26) peuvent être obtenues par un calcul similaire avec les choix suivants :

$$\omega_1 = \exp(i\frac{1}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_2 = \exp(i\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_3 = \exp(i\frac{7}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

$$\omega_4 = \exp(i\frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

tels que les inégalités (3.36) soient satisfaites c'est-à-dire

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_3) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_4), \quad \forall \rho \in S_2.$$

Ainsi, dans le secteur S_2 , le déterminant caractéristique $\Delta(\rho)$ de (3.37) vaut :

$$\Delta(\rho) = 2\sqrt{2}\gamma\rho^6 e^{\rho\omega_4} \left\{ e^{\rho\omega_2} + i e^{-\rho\omega_2} - [\mu_2 e^{\rho\omega_3} + \mu_4 e^{-\rho\omega_2}] \rho^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \right\}.$$

Par un calcul semblable à celui fait dans le secteur S_1 , nous avons

$$\tilde{\rho}_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} - \frac{\mu_3}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} i + \frac{\mu_4}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n = N, N+1, \dots \quad (3.45)$$

avec N assez large.

En outre, en utilisant $\lambda_n = \frac{\tilde{\rho}_n^2}{h^2} \neq 0$, $\omega_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $\omega_2^2 = -i$, nous obtenons comme suit les valeurs propres conjuguées du problème (3.26)

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2} (\mu_4 - \mu_3) - \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\mu_4 + \mu_3) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (3.46)$$

où $n = N, N+1, \dots$ avec N assez grand.

Les expressions (3.44) et (3.46) donnent, dans le théorème suivant, l'expression asymptotique des valeurs propres :

Théorème 3.6. *Soit l'opérateur A_γ défini par (3.12) et (3.13). Si $\kappa \neq 0$, alors une expression asymptotique des valeurs propres du problème (3.26) est donnée par*

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2} (\mu_4 - \mu_3) \pm \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\mu_4 + \mu_3) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (3.47)$$

où $n = N, N+1, \dots$ avec N assez grand, et

$$\mu_4 - \mu_3 = \sqrt{2}(-2\mu_2 + \frac{b_{21}}{\gamma}) = -2\sqrt{2}\mu_2 - \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{2}h(m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right) \quad (3.48)$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

où

$$\begin{aligned}\mu_2 &= -\frac{h^2}{4} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \frac{1}{h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx \\ &= -\frac{h}{4} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx,\end{aligned}\quad (3.49)$$

et

$$\mu_4 + \mu_3 = \sqrt{2}(2\mu_1 + b_{21}). \quad (3.50)$$

De plus, les valeurs propres λ_n ($n = N, N + 1, \dots$) de modules suffisamment grands sont simples et séparées excepté un nombre fini d'entre elles, et satisfont

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \lambda_n = \frac{1}{2h} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx - \frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right). \quad (3.51)$$

En outre, en se référant à [44], nous pouvons dire que les valeurs propres obtenues par les autres secteurs S_n coïncident avec celles déterminées dans les secteurs S_1 et S_2 .

3.3.2 Propriété de la base de Riesz des fonctions propres de l'opérateur

Dans cette sous-section, nous suivons encore l'idée de Wang dans [63] afin de discuter de la propriété de base de Riesz des fonctions propres de l'opérateur A_γ du système (3.14). Pour débiter, nous prouvons que les fonctions propres généralisées de A_γ forment une base de Riesz dans l'espace de Hilbert \mathbb{H} .

Nous introduisons la transformation \mathcal{L} telle que

$$\mathcal{L}(f, g) = (\phi, \psi)$$

où

$$\phi(x) = f(z), \quad \psi(x) = g(z), \quad z = \frac{1}{h} \int_0^x \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta, \quad (3.52)$$

avec

$$h = \int_0^1 \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta. \quad (3.53)$$

3.3. ANALYSE SPECTRALE DE L'OPÉRATEUR ET PROPRIÉTÉ DE LA BASE DE RIESZ

Notons que \mathcal{L} est un opérateur inversible et borné sur \mathbb{H} .

Nous définissons l'opérateur différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(f) = f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z), \\ \mu(z) = h^2d(z), \\ B_1(f) = f(0) = 0, \quad B_2(f) = f'(0) = 0, \\ B_3(f) = f''(1) + \left[\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{(\alpha\lambda + \beta)}{EI(1)z_x(1)} \right] f'(1) = 0, \\ B_4(f) = EI(1)z_x^3(1)f'''(1) + [EI'(1)z_x^2 + 3EI(1)z_{xx}(1)z_x(1)]f''(1) \\ \quad + [EI(1)z_{xxx}(1) + EI'(1)z_{xx}(1)]f'(1) = 0, \end{array} \right. \quad (3.54)$$

où les coefficients sont donnés par (3.20)-(3.25).

Soient \mathbb{A} défini comme dans (3.14), $\eta \in \sigma(\mathbb{A})$ une valeur propre de \mathbb{A} et (f, g) une fonction propre correspondante à η , alors nous obtenons $g = \eta f$ et f vérifie l'équation suivante :

$$f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \eta\mu(z)f(z) + \eta^2f(z) = 0,$$

avec les conditions aux limites $B_j(f) = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Maintenant, quand nous prenons $\lambda = \frac{\eta}{h^2}$ et

$$\mathcal{L}(f, g) = (\phi(x), \psi(x)),$$

on obtient $\psi = \lambda\phi$ et ϕ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{(4)}(x) + \frac{2EI'(x)}{EI(x)}\phi'''(x) + \frac{EI''(x)}{EI(x)}\phi''(x) + \lambda\frac{\gamma(x)}{EI(x)}\phi(x) + \frac{\lambda^2m(x)}{EI(x)}\phi(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot)\phi'')'(1) = 0, \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Donc, le résultat suivant est obtenu :

$$\eta \in \sigma(\mathbb{A}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A_\gamma).$$

Théorème 3.7. *Soit A_γ défini par (3.12) et (3.13). Alors, les valeurs propres de A_γ sont toutes simples excepté un nombre fini d'entre elles et les fonctions propres généralisées de l'opérateur A_γ forment sur \mathbb{H} une base de Riesz.*

3.4. STABILITÉ EXPONENTIELLE DU SYSTÈME

Démonstration. Le Théorème 3.5 montre que le problème aux limites (3.26) est fortement régulier. Alors, la première assertion est vérifiée. De plus, les conditions aux limites fortement régulières assurent que la suite de fonctions propres généralisées $F_n = (f_n, \eta_n f_n)$ de l'opérateur \mathbb{A} forme une base de Riesz pour \mathbb{H} . Aussi, \mathcal{L} étant un opérateur inversible et borné sur \mathbb{H} , nous pouvons en déduire que $\Psi_n = (\phi_n, \lambda_n \phi_n) = \mathcal{L} F_n$ forme sur \mathbb{H} une base de Riesz. \square

Nous pouvons étudier maintenant la stabilité exponentielle du système (3.14). En se référant à [20], la propriété de la base de Riesz implique que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur du système et que (3.51) décrit l'asymptote du spectre $\sigma(A_\gamma)$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe seulement un nombre fini de valeurs propres de A_γ dans le demi-plan suivant :

$$\Sigma : \operatorname{Re} \lambda > \frac{1}{2h} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx - \frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right) + \varepsilon. \quad (3.56)$$

Dans la section suivante, nous avons deux résultats de stabilité qui décrivent l'influence de la fonction coefficient γ d'amortissement ou de frottement sur la stabilité exponentielle du système.

3.4 Stabilité exponentielle du système

Le théorème suivant donne des conditions pour obtenir la stabilité exponentielle du système (3.1)–(3.4).

Théorème 3.8. *Si $\gamma(x) > 0$, le système (3.1)–(3.4) est stable exponentiellement pour tous $\beta \geq 0$ et $\alpha > 0$. Dans ce cas, il existe alors les constantes $M > 0$ et $\omega > 0$ telles que l'énergie $E(t)$ du système (3.1)–(3.4) vérifie*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 m w_t^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x(1, t))^2 \leq M E(0) e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

pour toute condition initiale $(w(x, 0), w_t(x, 0)) \in \mathbb{H}$.

Démonstration. A_γ est un opérateur dissipatif et $\{e^{A_\gamma t}\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de

3.4. STABILITÉ EXPONENTIELLE DU SYSTÈME

contractions sur \mathbb{H} d'après le Théorème 3.2. De plus, il existe une asymptote

$$\operatorname{Re}\lambda \sim \frac{1}{2h} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx - \frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right)$$

pour le spectre de A_γ .

Pour obtenir la stabilité exponentielle, il reste à montrer qu'il n'existe aucune valeur propre sur l'axe imaginaire.

Soit $\lambda = i\tau$ où $\tau \in \mathbb{R}^*$, une valeur propre de l'opérateur A_γ sur l'axe imaginaire. Soit $\Psi = (\phi, \psi)^T$ la fonction propre correspondante. Donc $\psi = \lambda\phi$. Aussi nous avons :

$$0 = \operatorname{Re} \left(\langle A_\gamma \Psi, \Psi \rangle_{\mathbb{H}} \right) = -\alpha |\psi'(1)|^2 - \int_0^1 \gamma(x) |\psi(x)|^2 dx,$$

$$0 = \|\Psi\|_{\mathbb{H}}^2 \operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re} \left(\langle A_\gamma \Psi, \Psi \rangle_{\mathbb{H}} \right) = -\alpha |\psi'(1)|^2 - \int_0^1 \gamma(x) |\psi(x)|^2 dx.$$

Puisque $\gamma(x) > 0$ et $\psi(x)$ sont continues avec $\alpha > 0$, nous obtenons

$$\psi'(1) = 0$$

et

$$\gamma(x) |\psi(x)|^2 = 0, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.57)$$

Puisque $\gamma > 0$, nous avons $\psi \equiv 0$. Cela implique que la fonction Ψ de A_γ est nulle car $\psi = \lambda\phi$. L'équation différentielle vérifiée par $\phi(x)$ est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \lambda^2 m(x) \phi(x) + (EI(x) \phi''(x))'' + \lambda \gamma(x) \phi(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = \phi'(1) = \phi''(1) = (EI(\cdot) \phi''(\cdot))'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Montrons à présent que la fonction nulle est solution unique de l'équation (3.58).

Tout comme dans le Chapitre 2, nous suivons une idée de Guo émise dans [30].

Étape 1 : Initialisation

ϕ' est une fonction définie sur $[0, 1]$, continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et telle que $\phi'(0) = \phi'(1)$. Alors d'après le Théorème de Rolle, il existe au moins un point $c_1 \in]0, 1[$ tel que $\phi''(c_1) = 0$. De plus, on a $\phi''(1) = 0$, alors en appliquant encore le Théorème de Rolle, il existe au moins un point $c_2 \in]c_1, 1[$ tel que $(EI(\cdot) \phi''(\cdot))'(c_2) = 0$. Enfin, on a encore $(EI(\cdot) \phi''(\cdot))'(1) = 0$. En se servant à nouveau du Théorème de Rolle, il existe au moins un point $c_3 \in]c_2, 1[$ tel que $(EI(\cdot) \phi''(\cdot))''(c_3) = 0$. D'après la première

3.4. STABILITÉ EXPONENTIELLE DU SYSTÈME

équation de (3.58), on a :

$$\lambda^2 m(c_3) \phi(c_3) + \lambda \gamma(c_3) \phi(c_3) = 0.$$

Ce qui équivaut à :

$$\lambda m(c_3) \lambda \phi(c_3) + \gamma(c_3) \lambda \phi(c_3) = 0.$$

Puisque $\psi = \lambda \phi$, on a :

$$\lambda m(c_3) \psi(c_3) + \gamma(c_3) \psi(c_3) = 0.$$

En multipliant les deux membres de la somme de l'équation ci-dessus par le conjugué de $\psi(c_3)$, on obtient :

$$\lambda m(c_3) \psi(c_3) \overline{\psi(c_3)} + \gamma(c_3) \psi(c_3) \overline{\psi(c_3)} = 0.$$

Ce qui équivaut à

$$\lambda m(c_3) |\psi(c_3)|^2 + \gamma(c_3) |\psi(c_3)|^2 = 0.$$

Grâce à (3.57), on a $\lambda m(c_3) |\psi(c_3)|^2 = 0$ donc finalement $\phi(c_3) = 0$.

Étape 2 : Hérité

Supposons qu'il existe un nombre n de zéros distincts de ϕ dans l'intervalle $]0, 1[$.

Montrons qu'il existe au moins $n + 1$ zéros distincts de ϕ dans l'intervalle $]0, 1[$.

On a $\phi(0) = 0$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit d'après le Théorème de Rolle qu'il existe également un nombre n de zéros distincts de ϕ' dans l'intervalle $]0, 1[$ c'est-à-dire $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < 1$ tel que

$$\phi'(c_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

On a aussi $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$ donc d'après le Théorème de Rolle, il existe pour tout $i = 1, 2, \dots, n + 1$, des réels d_i deux à deux distincts de ϕ'' . Autrement dit, on a $0 < d_1 < c_1 < d_2 < c_2 < \dots < c_{n-1} < d_n < c_n < d_{n+1} < 1$ tel que

$$\phi''(d_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

3.4. STABILITÉ EXPONENTIELLE DU SYSTÈME

De plus, $\phi''(1) = 0$ donc en utilisant le Théorème de Rolle, il existe des réels α_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$ deux à deux distincts de $(EI\phi'')$ '. C'est-à-dire, on a $0 < d_1 < \alpha_1 < d_2 < \alpha_2 < \dots < d_{n-1} < \alpha_{n-1} < d_n < \alpha_n < d_{n+1} < \alpha_{n+1} < 1$ tel que

$$(EI(\cdot)\phi''(\cdot))'(\alpha_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Enfin, $(EI(\cdot)\phi''(\cdot))'(1) = 0$ donc en se servant du Théorème de Rolle, il existe des réels β_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$ deux à deux distincts de $(EI\phi'')''$. Autrement dit, on a $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} < 1$ tel que

$$(EI(\cdot)\phi''(\cdot))''(\beta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Par conséquent, grâce à la première équation de (3.58) et par le même raisonnement que celui fait dans l'initialisation, on a

$$\phi(\beta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Étape 3 : Conclusion

Il existe au moins $n + 1$ zéros distincts de ϕ dans l'intervalle $]0, 1[$.

En vertu de la conclusion, il existe un nombre infini de zéros distincts $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de ϕ dans l'intervalle $]0, 1[$. Soit $x_0 \in [0, 1]$ un point d'accumulation de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Alors tout ouvert contenant x_0 contient au moins un autre point de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ainsi,

$$\phi^{(i)}(x_0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (3.59)$$

Notons que ϕ vérifie l'équation différentielle linéaire

$$(EI(x)\phi''(x))'' = -\lambda^2 m(x)\phi(x) - \gamma(x)\lambda\phi(x). \quad (3.60)$$

Par conséquent, $\phi \equiv 0$ par unicité de la solution des équations différentielles linéaires. On en déduit que $\Psi \equiv 0$. Ce qui contredit le fait que Ψ est une fonction propre. Il n'existe donc aucune valeur sur l'axe imaginaire. Par conséquent, $\text{Re}(\lambda) < 0$. Par le Théorème 3.7 et grâce au fait que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur, nous pouvons conclure que le système (3.1) - (3.4) est exponentiellement stable. \square

3.4. STABILITÉ EXPONENTIELLE DU SYSTÈME

Ensuite, en utilisant toujours une idée de Wang dans [62], nous étudions la situation où la fonction continue $\gamma(\cdot)$ n'est pas de signe constant dans $[0, 1]$.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.9. *Soient*

$$\gamma_+(x) = \max \{ \gamma(x), 0 \}, \quad \gamma_-(x) = \max \{ -\gamma(x), 0 \},$$

et soit

$$A_{\gamma_+}(f, g) = \left(g(x), -\frac{1}{m(x)}((EI(x) f''(x))'' + \gamma_+(x)g(x)) \right)^T, \quad \forall (f, g)^T \in D(A_{\gamma_+}) = D(A_\gamma)$$

et

$$\Gamma_-(f, g) = \left(0, \frac{\gamma_-(x)}{m(x)}g(x) \right)^T, \quad \forall (f, g)^T \in H.$$

Ainsi, A_γ peut être écrit comme :

$$A_\gamma = A_{\gamma_+} + \Gamma_-.$$

Soit $s(A_{\gamma_+}) = \sup \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A_{\gamma_+}) \}$.

Si nous avons la condition suivante

$$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \frac{\gamma_-(x)}{m(x)} \right\} < |s(A_{\gamma_+})|,$$

alors nous obtenons la stabilité exponentielle du système (3.14).

Démonstration. Γ_- est un opérateur autoadjoint. Posons

$$\|\Gamma_-\| = \max_{x \in [0,1]} \left\{ \frac{\gamma_-(x)}{m(x)} \right\}. \quad (3.61)$$

Selon le Théorème 3.8 et selon la définition de l'opérateur A_{γ_+} , $\{e^{A_{\gamma_+}t}\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contractions et $s(A_{\gamma_+}) < 0$.

De plus, grâce à la théorie de la perturbation des semi-groupes pour les opérateurs linéaires (voir Théorème 1.28 du Chapitre 1), nous obtenons $\lambda \in \rho(A_\gamma)$ tant que $\operatorname{Re} \lambda > s(A_{\gamma_+}) + \|\Gamma_-\|$. Nous avons aussi par le Théorème 3.7, le résultat important suivant

$$\omega(A_\gamma) = s(A_\gamma) \leq s(A_{\gamma_+}) + \|\Gamma_-\|.$$

3.4. STABILITÉ EXPONENTIELLE DU SYSTÈME

Donc pour qu'on ait stabilité exponentielle, il faut que

$$s(A_{\gamma_+}) + \|\Gamma_-\| < 0.$$

Ce qui implique que

$$\|\Gamma_-\| < |s(A_{\gamma_+})|.$$

Par conséquent, nous pouvons conclure la stabilité exponentielle du système (3.14) si

$$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \frac{\gamma_-(x)}{m(x)} \right\} < |s(A_{\gamma_+})|.$$

□

Deuxième partie

Méthode numérique dissipative par
la méthode des éléments finis
(MEF) d'une poutre flexible
d'Euler Bernoulli

Chapitre 4

Dissipativité d'une méthode numérique pour une poutre flexible d'Euler-Bernoulli

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la dissipativité d'une méthode numérique basée sur la méthode des éléments finis. Le système à étudier est un cas particulier du Chapitre 2, celui à coefficients constants que nous décrivons par les équations suivantes :

$$w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (4.1)$$

$$w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.2)$$

$$w_{xxx}(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.3)$$

$$w_{xx}(1, t) = -\alpha w_{xt}(1, t) - \beta w_x(1, t), \quad t > 0 \quad (4.4)$$

où α et β sont deux constantes positives données. La longueur de la poutre, la masse linéique ainsi que la rigidité en flexion sont supposées égale à un.

Dans [58], il fut démontré que le problème (4.1)-(4.4) est bien posé au sens des semi-groupes. Aussi, par la méthode de Shkalikov [53], ces auteurs ont fait une analyse spectrale du système et ont établi la propriété de la base de Riesz afin de déduire la stabilité exponentielle du système.

Par ailleurs, il faut remarquer que l'énergie mécanique totale $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ du système

(4.1)-(4.4) est donnée par :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 v^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x(1, t))^2 \quad (4.5)$$

qui décroît dans le temps et définit une fonction de Lyapunov.

En effet, on calcule formellement la dérivée de $\varepsilon(t)$ le long des solutions classiques du système (4.1)-(4.4) :

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \int_0^1 w_{xxt} w_{xx} dx + \int_0^1 w_{tt} w_t dx + \beta(w_x(1, t))(w_{tx}(1, t)).$$

Par une intégration par parties de $\int_0^1 w_{xxt} w_{xx} dx$, on a :

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = [w_{xx} w_{xt}]_0^1 - \int_0^1 w_{xt} w_{xxx} dx + \int_0^1 w_{tt} w_t dx + \beta(w_x(1, t))(w_{tx}(1, t))$$

Par une seconde intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varepsilon(t) &= [w_{xx} w_{xt}]_0^1 - [w_{xxx} w_t]_0^1 + \int_0^1 w_t w_{xxxx} dx + \int_0^1 w_{tt} w_t dx + \beta(w_x(1, t))(w_{tx}(1, t)) \\ \frac{d}{dt} \varepsilon(t) &= w_{xx}(1, t) w_{xt}(1, t) - w_{xx}(0, t) w_{xt}(0, t) - w_{xxx}(1, t) w_t(1, t) + w_{xxx}(0, t) w_t(0, t) \\ &+ \int_0^1 w_t (w_{xxxx} + w_{tt}) dx + \beta(w_x(1, t))(w_{tx}(1, t)). \end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites (4.2)-(4.4) avec $w_{tx}(0, t) = w_t(0, t) = 0$, on a après simplification :

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = -\alpha [v_x(1, t)]^2 \leq 0 \quad (4.6)$$

car $\alpha \geq 0$. L'égalité de (4.6) sert de motivation dans la conception de la commande $\alpha w_{xt}(1, t) + \beta w_x(1, t)$ qui assure la décroissance de l'énergie du système dans le temps. En outre, selon le Théorème 2.7 du Chapitre 2, le système (4.1)-(4.4) est exponentiellement stable pour tous $\beta \geq 0$ et $\alpha > 0$.

L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode numérique stable et convergente reproduisant fidèlement les propriétés du problème continu notamment la stabilité et la dissipativité.

Le plan du chapitre est le suivant : Dans la section 4.2, à partir de la formulation faible, nous démontrons l'existence, l'unicité et la régularité de la solution faible. Dans la section 4.3, nous développons par la méthode des éléments finis, une méthode numérique

qui conserve la propriété de la dissipativité. Cette méthode est développée de telle sorte que le système semi-discrétisé et celui totalement discrétisé conservent la dissipativité. Pour la discrétisation dans l'espace, on utilise la méthode des éléments finis avec les fonctions polynomiales cubiques d'Hermite, et le schéma de Crank-Nicolson pour la discrétisation dans le temps. La convergence de cette méthode numérique est démontrée et des estimations a priori sont obtenues.

4.2 Existence, unicité et régularité de la solution faible

4.2.1 Problème bien posé au sens des semi-groupes

On introduit l'espace fonctionnel suivant :

$$V = \{w \in H^2(0,1) \mid w(0) = w_x(0) = 0\}. \quad (4.7)$$

On prend aussi pour espace d'énergie, l'espace de Hilbert suivant :

$$\chi = \{y = (w, v)^T : w \in V, v \in L^2(0,1)\} = V \times L^2(0,1), \quad (4.8)$$

où T désigne la transposée. Dans l'espace χ , nous définissons le produit scalaire suivant :

$$\langle y, \hat{y} \rangle_\chi = \frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx} \hat{w}_{xx} dx + \int_0^1 v \hat{v} dx + \frac{\beta}{2} w_x(1) \hat{w}_x(1) \quad (4.9)$$

où $y = (w, v)^T \in \chi$ et $\hat{y} = (\hat{w}, \hat{v})^T \in \chi$.

Nous notons par $\|\cdot\|_\chi$ la norme correspondante.

Maintenant, nous définissons l'opérateur linéaire et non borné $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \chi \rightarrow \chi$ comme suit :

$$\mathcal{A}(w, v) = (v, -w_{xxxx}) \quad (4.10)$$

4.2. EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

où $D(\mathcal{A})$, le domaine de l'opérateur \mathcal{A} est défini comme suit

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (w, v) \in \chi : w \in (H^4(0, 1) \cap V), v \in V, w_{xxx}(1) = 0, \right. \\ \left. w_{xx}(1) = -\alpha v_x(1) - \beta w_x(1) \right\}. \quad (4.11)$$

Le système à boucle fermée (4.1)-(4.4) peut être formulé d'une façon équivalente sous forme d'un problème d'évolution sur χ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t) = \mathcal{A}y(t) \\ y(0) = y_0 \in \chi, \end{cases} \quad (4.12)$$

où $y(t) = (w(\cdot, t), v(\cdot, t))^T$, $y(0) = (w_0, v_0)^T$ pour tout $t > 0$.

Nous rappelons ici un résultat fondamental concernant le caractère bien posé du problème (4.1)-(4.4) (voir le Théorème 2.1 du Chapitre 2).

Théorème 4.1. *L'opérateur \mathcal{A} défini par (4.10)-(4.11) engendre un C_0 -semi-groupe de contractions sur χ défini par $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.*

Le résultat suivant découle directement du Théorème 4.1 :

Théorème 4.2. *Pour tout $y_0 \in \chi$, (4.12) admet une unique solution généralisée $y \in C([0, \infty); \chi)$.*

Notons que la contraction du semi-groupe implique aussi que $\|\cdot\|_\chi$ est un meilleur candidat pour la fonctionnelle de Lyapunov pour (4.12). Pour être plus précis, prenons la fonctionnelle $\ell : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit

$$\ell(y) = \|y\|_\chi^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 v^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x(1, t))^2. \quad (4.13)$$

De manière analogue à (4.6), pour toute solution classique y , on montre que :

$$\frac{d}{dt} \ell(y) = \frac{d}{dt} \|y\|_\chi^2 = -\alpha w_{tx}^2(1) \leq 0. \quad (4.14)$$

Ainsi l'évolution dans le temps de la fonctionnelle de Lyapunov tout au long de la solution classique est décroissante. Pour les solutions généralisées, en raison du manque

4.2. EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

de régularité, la dérivée partielle par rapport au temps (dérivée temporelle) est généralisée :

Définition 4.3. *La dérivée temporelle généralisée de la fonctionnelle ℓ tout au long de la solution généralisée $y(t)$ de (4.12) avec pour valeur initiale $y_0 \in \chi$ est définie comme suit :*

$$\dot{\ell}(y_0) = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\ell(y(t)) - \ell(y_0)}{t},$$

qui peut prendre la valeur $-\infty$.

Nous donnons la définition d'une fonctionnelle de Lyapunov sur un espace de Hilbert analogue à la Définition 1.6.

Définition 4.4. *La fonctionnelle $\ell : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonctionnelle de Lyapunov du problème d'évolution (4.12) si les propositions suivantes sont vérifiées :*

- i) $\ell(y) > 0, \quad \forall y \in \chi - \{0\}$,
- ii) $\ell(0) = 0$,
- iii) $\dot{\ell}(y_0) \leq 0, \quad \forall y_0 \in \chi$.

De plus, grâce au Théorème 4.1, la décroissance de l'énergie tout au long des solutions classiques peut être étendue aux solutions généralisées :

Théorème 4.5. *Soit $y(t)$ la solution généralisée de (4.12), pour tout $y_0 \in \chi$. Alors $y(t) \rightarrow 0$ dans χ lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Maintenant, écrivons le système d'équations (4.1)-(4.4) sous la forme faible.

4.2.2 Formulation faible

Dans cette sous-section, le système (4.1)-(4.4) est écrit sous la forme faible. L'existence et l'unicité de la solution faible sont démontrées. La nouvelle formulation établie sera utile dans la section 4.3 pour développer une méthode numérique dissipative pour le système observé.

4.2.2.1 Définition de la solution faible

Soit $\phi \in V$. On multiplie (4.1) par ϕ . En intégrant sur $[0, 1]$, on a :

$$\int_0^1 w_{tt} \phi \, dx + \int_0^1 w_{xxxx} \phi \, dx = 0$$

4.2. EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

Par deux intégrations par parties de (4.1) et en tenant compte des conditions aux limites (4.2)-(4.4), on obtient :

$$\int_0^1 w_{tt}\phi \, dx + \int_0^1 w_{xx}\phi_{xx} \, dx + [\beta w_x(1, t) + \alpha w_{tx}(1, t)] \phi_x(1) = 0 \quad (4.15)$$

pour tout $\phi \in V$ et pour tout $t > 0$.

L'égalité (4.15) est appelée la formulation faible du problème (4.1)-(4.4).

On cherche à définir une solution faible de (4.1)-(4.4).

La première étape consiste à choisir de manière appropriée les espaces fonctionnels car ils jouent un rôle crucial dans la définition d'une solution faible. Les choix suivants sont motivés par ce qui est décrit dans [5].

Soit l'espace de Hilbert

$$Y = \mathbb{R}^2 \times L^2(0, 1)$$

muni du produit scalaire défini par :

$$\langle \eta, \xi \rangle_Y = \langle \eta_{(3)}, \xi_{(3)} \rangle_{L^2} + \eta_{(1)}\xi_{(1)} + \eta_{(2)}\xi_{(2)}, \quad (4.16)$$

pour tous $\eta = (\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \eta_{(3)})$, $\xi = (\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)}) \in Y$.

Aussi, choisissons l'espace de Hilbert

$$X = \mathbb{R}^2 \times V = \{y = (w(1), w_x(1), w)\}$$

où $w \in V$. Son produit scalaire est défini par :

$$\langle y_1, y_2 \rangle_X = \langle (w_1)_{xx}, (w_2)_{xx} \rangle_{L^2}. \quad (4.17)$$

Nous pouvons remarquer que X est un sous-espace vectoriel dense dans Y et supposons que l'injection canonique de X dans Y est continue.

Y est l'espace pivot et l'on a le triplet de Gelfand :

$$X \subset Y \subset X' \text{ où } X' \text{ est le dual topologique de } X.$$

4.2. EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

En outre, soient les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (y_1, y_2) &\mapsto a_1(y_1, y_2) = \langle y_1, y_2 \rangle_X + \beta(w_1)_x(1)(w_2)_x(1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_2 : Y \times Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\eta, \xi) &\mapsto \alpha \eta_{(2)} \xi_{(2)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant définir la solution faible du problème (4.1)-(4.4).

Définition 4.6. Prenons $T > 0$ bien fixé. On dit que $\hat{w} = (w(1), w_x(1), w)$ est une solution faible du problème de (4.1)-(4.4) sur $[0, 1]$ si

$$\hat{w} \in L^2(0, T; X) \cap H^1(0, T; Y) \cap H^2(0, T; X')$$

et qui vérifie

$$\langle \hat{w}_{tt}, \hat{\phi} \rangle_{X, X'} + a_1(\hat{w}, \hat{\phi}) + a_2(\hat{w}_t, \hat{\phi}) = 0 \quad (4.18)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$ et pour tout $\hat{w} \in X$,
avec les conditions initiales

$$\hat{w}(0) = \hat{w}_0 = (w_0(1), (w_0)_x(1), w_0) \in X \quad (4.19)$$

$$\hat{w}_t(0) = \hat{v}_0 = (v_0(1), (v_0)_x(1), v_0) \in Y. \quad (4.20)$$

Dans la Définition 4.6, la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X, X'}$ est le crochet de dualité entre X et X' qui est une extension naturelle du produit scalaire dans Y .

Remarque 4.7. Dans l'expression (4.19), les deux premières composantes du côté droit de \hat{w}_0 représentent les traces de $w_0 \in V$ tandis que dans (4.20), les termes $v_0(1)$ et $(v_0)_x(1)$ sont juste des valeurs complémentaires données. De plus, dans le cas où $\hat{w} \in H^2(0, T; X)$, la formulation (4.18) est équivalente à l'égalité (4.15). Ici le terme w_{tx} doit être également considéré. Les termes aux bords de premier ordre en t inclus dans $a_2(\cdot, \cdot)$, exige une légère généralisation de la théorie standard énoncée par exemple dans [38].

4.2.2.2 Existence et unicité de la solution

Dans le but de donner un sens aux conditions initiales (4.19)-(4.20), rappelons les lemmes suivants à savoir le Lemme 4.8 et le Lemme 4.9 qui sont des cas particuliers du Théorème 3.1 p. 23 de [38].

Lemme 4.8. *Soient X et Y deux espaces de Hilbert tels que X soit continûment dense dans Y . Supposons que*

$$w \in L^2(0, T; X)$$

$$v = w_t \in L^2(0, T; Y)$$

Alors

$$w \in C\left([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}}\right)$$

après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle.

Notons que $[X, Y]_{\frac{1}{2}}$ est un espace intermédiaire tel que défini dans la Définition 1.2 du Chapitre 1.

Nous rappelons le *théorème de dualité* (voir le Théorème 1.3 du Chapitre 1) :

Lemme 4.9. *Soient X et Y deux espaces de Hilbert tels que X soit continûment dense dans Y . Pour tout $\theta \in]0, 1[$, on a*

$$[X, Y]_{\theta}' = [Y', X']_{1-\theta}$$

avec équivalence de normes.

Nous énonçons maintenant un lemme important que nous utiliserons dans la démonstration du Théorème 4.11. On retrouve la preuve de ce lemme dans l'Annexe B.

Lemme 4.10. *Soit V le sous-espace de $H^2(0, 1)$ défini au (4.7).*

Alors il existe une suite de fonctions $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ telle que

$$\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ soit une base orthogonale de } V$$

et

$$\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ soit une base orthonormale de } L^2(0, 1).$$

4.2. EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

Nous énonçons à présent le théorème d'existence de la solution faible :

Théorème 4.11. *La formulation faible (4.18)-(4.20) possède une solution faible \hat{w} vérifiant :*

$$\hat{w} \in L^\infty(0, T; X), \hat{w}_t \in L^\infty(0, T; Y), \quad (4.21)$$

$$\hat{w} \in C\left([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}}\right), \quad (4.22)$$

$$\hat{w}_t \in C\left([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}}'\right). \quad (4.23)$$

Démonstration. La démonstration de l'existence est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin.

D'après le Lemme 4.10, il existe une suite de fonctions $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^\infty$ qui soit une base orthonormale pour Y et une base orthogonale pour X . Considérons une telle suite.

Introduisons les espaces de dimension finie engendrés par $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^m$:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \hat{V}_m := \text{Vect}\{\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{\phi}_j, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.24)$$

Étape 1 (Construction des solutions approchées) :

On cherche alors $\hat{w} = \hat{w}_m(t) \in \hat{V}_m$ la solution approchée du problème sous la forme :

$$\hat{w}_m = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \hat{\phi}_i,$$

où les $g_{im}(t) \in \mathbb{R}$ ($0 \leq t \leq T$, $i = 1, \dots, m$) sont solutions de la formulation (4.18) sur \hat{V}_m . Pour un entier m fixé, on a :

$$\langle (\hat{w}_m)_{tt}, \hat{\phi} \rangle_Y + a_1(\hat{w}_m, \hat{\phi}) + a_2((\hat{w}_m)_t, \hat{\phi}) = 0, \quad \forall \hat{\phi} \in \hat{V}_m. \quad (4.25)$$

Le système d'équations différentielles (4.25) est à compléter avec les conditions initiales :

$$\hat{w}_m(0) = \hat{w}_{m0}, \quad \hat{w}_{m0} = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} \hat{\phi}_i \rightarrow \hat{w}_0 \text{ dans } X \text{ quand } m \rightarrow \infty, \quad (4.26)$$

$$\hat{v}_m(0) = \hat{v}_{m0}, \quad \hat{v}_{m0} = \sum_{i=1}^m \beta_{im} \hat{\phi}_i \rightarrow \hat{v}_0 \text{ dans } Y \text{ quand } m \rightarrow \infty, \quad (4.27)$$

avec $\alpha_{im} = g_{im}(0)$ et $\beta_{im} = (g_{im})_t(0)$.

Ainsi, ce système d'équations différentielles de second ordre admet une solution unique $\hat{w}_m \in C^2([0, T]; X)$ de (4.18)-(4.20) pour $0 \leq t \leq T$.

Étape 2 (Estimations à priori sur les solutions approchées) :

Soit $\widehat{E} : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle d'énergie pour la trajectoire w analogue à celle définie par l'expression de la fonctionnelle de Lyapunov (4.13) :

$$\widehat{E}(t, \widehat{w}) = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \widehat{w}_t^2 dx + \int_0^1 \widehat{w}_{xx}^2 dx + \beta \widehat{w}_{(2)}^2(t) \right] \quad (4.28)$$

$$\widehat{E}(t, \widehat{w}) = \frac{1}{2} \|\widehat{w}_t(t)\|_Y^2 + \frac{1}{2} \|\widehat{w}(t)\|_X^2 + \frac{\beta}{2} (\widehat{w}_{(2)}(t))^2. \quad (4.29)$$

Ainsi, nous avons

$$\widehat{E}(t, \widehat{w}) = \|(w, v)\|_X. \quad (4.30)$$

En supposant qu'il existe une solution $\widehat{w}_m \in C^2([0, \tau]; \widehat{V}_m)$ dans (4.25) sur un intervalle $[0, \tau]$ et en prenant $\widehat{\phi} = (\widehat{w}_m)_t$ dans (4.25), un calcul analogue donne

$$\frac{d}{dt} \widehat{E}(t, \widehat{w}_m) = -\alpha \left[\{(\widehat{w}_m)_{(2)}\}_t(t) \right]^2 \leq 0,$$

pour tout $t \in [0, \tau]$. La décroissance de l'énergie E correspond à celle de (4.14) pour la solution classique. Cela implique la bornitude uniforme de la solution sur $[0, \tau]$:

$$\widehat{E}(t, \widehat{w}_m) \leq \widehat{E}(0, \widehat{w}_{m0}), \quad t \geq 0.$$

Ceci implique que

$$\{\widehat{w}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ est bornée dans } C([0, T]; X) \quad (4.31)$$

et

$$\{(\widehat{w}_m)_t\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ est bornée dans } C([0, T]; Y). \quad (4.32)$$

Il reste à déterminer l'ensemble dans lequel $\{(\widehat{w}_m)_{tt}\}_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Au regard des résultats de bornitude (4.31)-(4.32), il est montré que pour tout $\widehat{\phi} \in X$:

$$|a_1(\widehat{w}_m(t), \widehat{\phi}) + a_2((\widehat{w}_m)_t(t), \widehat{\phi})| \leq M \|\widehat{\phi}\|_X, \quad (4.33)$$

pour presque tout $t \in (0, T)$ avec M une constante positive qui ne dépend pas de m .

A présent, soit un entier $m \in \mathbb{N}$ bien fixé. De plus, prenons $\widehat{\phi} \in X$ et $\widehat{\phi} = \widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2$ telles que $\widehat{\varphi}_1 \in \widehat{V}_m$ et $\widehat{\varphi}_2$ orthogonal à \widehat{V}_m dans Y .

Alors, on obtient

$$\langle (\widehat{w}_m)_{tt}, \widehat{\phi} \rangle_Y = \langle (\widehat{w}_m)_{tt}, \widehat{\varphi}_1 \rangle_Y.$$

Grâce à (4.25) et à (4.33), nous obtenons :

$$\langle (\widehat{w}_m)_{tt}, \widehat{\phi} \rangle_Y = -a_1(\widehat{w}_m(t), \widehat{\varphi}_1) - a_2((\widehat{w}_m)_t(t), \widehat{\varphi}_1) \leq M \|\widehat{\varphi}_1\|_X \leq M \|\widehat{\phi}\|_X. \quad (4.34)$$

On en déduit que

$$\{(\widehat{w}_m)_{tt}\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ est bornée dans } C([0, T]; X'). \quad (4.35)$$

Étape 3 (Passage à la limite) :

D'après le Théorème de Eberlein-Šmulian (voir par exemple dans [13]), on peut extraire des sous-suites faiblement convergentes $\{\widehat{w}_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$, $\{(\widehat{w}_{m_l})_t\}_{l \in \mathbb{N}}$ et $\{(\widehat{w}_{m_l})_{tt}\}_{l \in \mathbb{N}}$ avec $\widehat{w} \in L^2(0, T; X)$, $\widehat{w}_t \in L^2(0, T; Y)$ et $\widehat{w}_{tt} \in L^2(0, T; X')$ telle que :

$$\{\widehat{w}_{m_l}\} \rightharpoonup \widehat{w} \text{ dans } L^2(0, T; X), \quad (4.36)$$

$$\{(\widehat{w}_{m_l})_t\} \rightharpoonup \widehat{w}_t \text{ dans } L^2(0, T; Y), \quad (4.37)$$

$$\{(\widehat{w}_{m_l})_{tt}\} \rightharpoonup \widehat{w}_{tt} \text{ dans } L^2(0, T; X'). \quad (4.38)$$

En outre, (4.37) implique

$$\{(\widehat{w}_{(2)m_l})_t\} \rightharpoonup \widehat{w}_{(2)t} \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}) \quad (4.39)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Soit maintenant $m_0 \in \mathbb{N}$.

Pour toutes fonctions $\widehat{\varphi} \in L^2(0, T; \widehat{V}_{m_0})$ de la forme

$$\widehat{\varphi}(t, x) = \sum_{j=1}^{m_0} \mu_j(t) \phi_j(x) \quad (4.40)$$

où $\mu_j \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ et pour tout $m_l \geq m_0$, la formulation (4.25) devient :

$$\int_0^T \left[\langle (\widehat{w}_{m_l})_{tt}, \widehat{\varphi} \rangle_Y + a_1(\widehat{w}_{m_l}, \widehat{\varphi}) + a_2((\widehat{w}_{m_l})_t, \widehat{\varphi}) \right] dt = 0. \quad (4.41)$$

4.2. EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

Par conséquent, en passant à la limite dans (4.41) pour $m = m_l$, quand $l \rightarrow \infty$ et en utilisant les résultats de convergence (4.36)-(4.38), on obtient :

$$\int_0^T [\langle \widehat{w}_{tt}, \widehat{\varphi} \rangle_{X, X'} + a_1(\widehat{w}, \widehat{\varphi}) + a_2(\widehat{w}_t, \widehat{\varphi})] dt = 0. \quad (4.42)$$

Alors, on obtient

$$\langle \widehat{w}_{tt}, \widehat{\varphi} \rangle_{X, X'} + a_1(\widehat{w}, \widehat{\varphi}) + a_2(\widehat{w}_t, \widehat{\varphi}) = 0 \text{ p.p sur } [0, T]$$

pour tout $\widehat{\varphi} \in L^2(0, T; X)$.

Toutefois, les fonctions de la forme (4.40) sont denses dans $L^2(0, T; X)$ et donc (4.42) est bien défini pour tout $\widehat{\varphi} \in L^2(0, T; X)$. On obtient donc l'expression de la formulation faible (4.18) presque partout sur $[0, T]$. D'où w est solution de la formulation faible.

Pour ce qui concerne les régularités supplémentaires, par définition de la solution faible et (4.31)-(4.32), \widehat{w} vérifie la régularité (4.21). Quant à (4.22), elle découle immédiatement du Lemme 4.8, après une modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle et enfin, la régularité (4.23) se déduit du Lemme 4.8 et du Lemme 4.9. \square

Théorème 4.12. *La formulation faible (4.18) avec les conditions (4.19)-(4.20) admet une solution unique \widehat{w} .*

Démonstration. La preuve suivante de l'unicité de la solution faible est une adaptation de la preuve du Théorème 8.1 p. 290 - 291 dans [38].

Mais bien avant de montrer l'unicité, il serait utile de montrer que la solution \widehat{w} vérifie les conditions initiales (4.19)-(4.20).

Soit $\widehat{w} \in C^2([0, T]; Y)$ telle que $\widehat{w}(T) = 0$ et $\widehat{w}_t(T) = 0$. Intégrons l'équation (4.18) sur $[0, T]$. On a :

$$\int_0^T [\langle \widehat{w}_{tt}, \widehat{\phi} \rangle_{X, X'} + a_1(\widehat{w}, \widehat{\phi}) + a_2(\widehat{w}_t, \widehat{\phi})] d\tau = 0. \quad (4.43)$$

En intégrant deux fois par parties sur $[0, T]$ sous le crochet de dualité, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T [\langle \widehat{w}, \widehat{\phi}_{tt} \rangle_Y + a_1(\widehat{w}, \widehat{\phi}) + a_2(\widehat{w}_t, \widehat{\phi})] d\tau \\ = \langle \widehat{w}_t(0), \widehat{\phi}(0) \rangle_{X, X'} - \langle \widehat{w}(0), \widehat{\phi}_t(0) \rangle_Y. \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.2. EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

De manière analogue, pour m fixé, en intégrant par parties (4.25), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T [\langle \widehat{w}_m, \widehat{\phi}_{tt} \rangle_Y + a_1(\widehat{w}_m, \widehat{\phi}) + a_2((\widehat{w}_m)_t, \widehat{\phi})] d\tau \\ = \langle \widehat{v}_{m0}, \widehat{\phi}(0) \rangle_Y - \langle \widehat{w}_{m0}, \widehat{\phi}_t(0) \rangle_Y. \end{aligned} \quad (4.45)$$

De par (4.26)-(4.27) et (4.36)-(4.38) et en passant à la limite l'expression (4.45) le long de la sous-suite $\{\widehat{w}_{m_i}\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T [\langle \widehat{w}, \widehat{\phi}_{tt} \rangle_Y + a_1(\widehat{w}, \widehat{\phi}) + a_2((\widehat{w})_t, \widehat{\phi})] d\tau \\ = \langle \widehat{v}_0, \widehat{\phi}(0) \rangle_Y - \langle \widehat{w}_0, \widehat{\phi}_t(0) \rangle_Y. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Quand on compare l'expression (4.44) avec celle de (4.46), on obtient $\widehat{w}_0 = \widehat{w}(0)$ et $\widehat{w}_t(0) = \widehat{v}(0)$ d'où les conditions initiales supposées (4.19)-(4.20) sont vérifiées.

Maintenant, prouvons l'unicité de la solution faible de (4.18).

Fixons $0 \leq s \leq T$. Introduisons la fonction auxiliaire définie ci-après

$$\begin{aligned} \widehat{\psi} :]0, T[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \widehat{\psi}(t) = \begin{cases} \int_t^s \widehat{w}(\tau) d\tau, & 0 < t < s \\ 0, & t \geq s. \end{cases} \end{aligned}$$

En multipliant (4.18) par $\widehat{\psi}(t)$, en intégrant sur $(0, T)$ avec $\widehat{\psi}(t) = \widehat{\phi}(t)$ et en utilisant une intégration par parties dans (4.18), on obtient :

$$\int_0^s [\langle \widehat{w}_t(\tau), \widehat{w}(\tau) \rangle_Y - a_1(\widehat{\psi}_t(\tau), \widehat{\psi}(\tau)) + a_2(\widehat{w}(\tau), \widehat{w}(\tau))] d\tau = 0. \quad (4.47)$$

On en déduit grâce à (4.47), l'égalité suivante

$$\int_0^s \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|\widehat{w}(\tau)\|_Y^2 - \frac{1}{2} a_1(\widehat{\psi}(\tau), \widehat{\psi}(\tau)) \right] d\tau = - \int_0^s a_2(\widehat{w}(\tau), \widehat{w}(\tau)) d\tau. \quad (4.48)$$

Cela est équivalent à

$$\left[\frac{1}{2} \|\widehat{w}(\tau)\|_X^2 - \frac{1}{2} a_1(\widehat{\psi}(\tau), \widehat{\psi}(\tau)) \right]_0^s = - \int_0^s a_2(\widehat{w}(\tau), \widehat{w}(\tau)) d\tau.$$

Alors nous obtenons

4.2. EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

$$\frac{1}{2}\|\widehat{w}(s)\|_X^2 + \frac{1}{2}a_1(\widehat{\psi}(0), \widehat{\psi}(0)) \leq 0.$$

La forme bilinéaire $a_1(., .)$ étant coercive, on en déduit que $\widehat{w}(s) \equiv 0$ et $\widehat{\psi}(0) = 0$. De plus, puisque $s \in]0; T[$ est arbitraire, on a $\widehat{w} \equiv 0$. \square

4.2.2.3 Résultat complémentaire de régularité

Dans cette sous-section, on démontrera également la continuité forte de la solution faible \widehat{w} , solution de (4.18)-(4.20). Avant d'énoncer le théorème de la continuité forte de la solution faible, rappelons un lemme cité dans [38] plus précisément le Lemme 8.1 p. 297 qui nous servira par la suite dans la démonstration de ce théorème.

Lemme 4.13. *Soient X et Y deux espaces de Banach, $X \subset Y$ avec injection continue, X étant réflexif. On pose :*

$$C_w([0, T]; Y) = \{w \in L^\infty(0, T; Y) : t \mapsto \langle f, w(t) \rangle \text{ est continue sur } [0, T], \forall f \in Y'\}.$$

qui désigne l'espace des fonctions faiblement continues à valeurs dans Y .

Alors on a

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_w([0, T]; Y) = C_w([0, T]; X).$$

Démonstration. Pour la preuve, voir le Lemme 8.1 p. 297 – 298 de [38]. \square

Nous pouvons à présent énoncer le théorème qui prouve que la solution faible est continue dans le temps :

Théorème 4.14. *Après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la solution faible \widehat{w} de (4.18)-(4.20) vérifie*

$$\widehat{w} \in C([0, T]; X), \tag{4.49}$$

$$\widehat{w}_t \in C([0, T]; Y). \tag{4.50}$$

Démonstration. La preuve est une adaptation des stratégies standards évoquées dans la section 8.4 de [38] p. 297-301 et dans la section 2.4 de [57]. En utilisant le Lemme 4.13, il résulte de (4.21)-(4.23) que $\widehat{w} \in C_w([0, T]; X)$. De même, (4.21) et (4.23) impliquent $\widehat{w}_t \in C_w([0, T]; Y)$.

4.2. EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

Maintenant, nous utilisons une technique courante en analyse fonctionnelle, plus précisément en théorie des distributions afin de passer d'un problème avec les fonctions généralisées à une restriction des fonctions régulières, plus simples à manipuler.

Soit la fonction scalaire $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ fixée telle que

$$\begin{aligned}\xi(x) &= 1 \text{ si } x \in J \subset\subset [0, T] \\ \xi(x) &= 0 \text{ sinon,}\end{aligned}$$

où $\subset\subset$ désigne l'inclusion stricte et compacte.

Alors la fonction $\xi\hat{w}$ est à support compact. Soit η^ε une suite régularisante dépendante du temps (voir la définition par exemple dans [13]). Par exemple, la fonction η^ε peut être donnée par $\eta^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ où

$$\eta(t) = \begin{cases} C \exp[-1/(1 - |t|^2)], & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

appartient à $C_c^\infty(\mathbb{R})$ pour tout réel C et telle que $\int_{\mathbb{R}} \eta dx = 1$.

En utilisant la régularisation par convolution des distributions, définissons

$$\hat{w}^\varepsilon = \eta^\varepsilon * \xi\hat{w} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, X).$$

La suite \hat{w}^ε converge vers \hat{w} dans X et $(\hat{w}^\varepsilon)_t$ converge vers \hat{w}_t dans Y presque partout sur J . Ainsi, de même $\hat{E}(t, \hat{w}^\varepsilon)$ converge vers $\hat{E}(t, \hat{w})$ presque partout sur J . Puisque \hat{w}^ε est suffisamment régulière, un calcul direct sur J et analogue à (4.6) donne :

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{w}^\varepsilon) = -\alpha \left[(\hat{w}_t^\varepsilon)_{(2)}(t) \right]^2.$$

En passant à la limite, on obtient quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{w}) = -\alpha \left[(\hat{w}_t)_{(2)}(t) \right]^2 \tag{4.51}$$

au sens des distributions sur J . Puisque J est arbitraire, (4.51) est vérifiée pour tout sous-intervalle compact de $[0, T]$.

Soit $t \in [0, \infty[$ bien fixé, et soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t.$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Soit une suite $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\nu_n = \frac{1}{2} \|\widehat{w}(t) - \widehat{w}(t_n)\|_X^2 + \frac{1}{2} \|\widehat{w}_t(t) - \widehat{w}_t(t_n)\|_Y^2 + \frac{\beta}{2} \left(\widehat{w}_{(2)}(t) - \widehat{w}_{(2)}(t_n) \right)^2. \quad (4.52)$$

Alors, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\nu_n = \widehat{E}(t, \widehat{w}) + \widehat{E}(t_n, \widehat{w}) - \langle \widehat{w}(t), \widehat{w}(t_n) \rangle_X - \langle \widehat{w}_t(t), \widehat{w}_t(t_n) \rangle_Y - \beta \widehat{w}_{(2)}(t) \widehat{w}_{(2)}(t_n). \quad (4.53)$$

Puisque \widehat{w} , \widehat{w}_t sont continues faiblement et \widehat{E} est continue en t , nous avons, en passant à la limite dans (4.53) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = 0.$$

Par conséquent, cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{w}(t) - \widehat{w}(t_n)\|_X^2 = 0 \quad (4.54)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{w}_t(t) - \widehat{w}_t(t_n)\|_Y^2 = 0. \quad (4.55)$$

Ainsi, on obtient $\widehat{w} \in C([0, T]; X)$ et $\widehat{w}_t \in C([0, T]; Y)$. \square

Après avoir démontré l'existence et l'unicité de la solution faible, nous développons une méthode numérique qui conserve fidèlement certaines propriétés du système (4.1)-(4.4).

4.3 Méthode numérique dissipative par la méthode des éléments finis

Rappelons d'abord que la norme de la solution $y(t)$ pour le problème d'évolution (4.12) décroît dans le temps car

$$\frac{d}{dt} \|y\|_X^2 = -\alpha [w_{tx}(1)]^2 \leq 0. \quad (4.56)$$

Notons aussi que le second membre de l'égalité (4.56) est formé par des variables de contrôle. Ainsi, l'équation $\frac{d}{dt} \|y\|_X^2 = 0$ n'implique pas que $y = 0$. Cela se justifie en

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

observant l'expression (4.12).

Par conséquent, il est important que la méthode numérique correspondante préserve aussi la propriété structurelle de dissipativité. En effet, l'importance de cette propriété est double. D'une part, pour les calculs avec un temps de longue durée, elle favorise la convergence du schéma numérique au sens classique (c'est-à-dire sur des intervalles de temps fini) mais aussi donner correctement et avec précision la limite du temps. D'autre part, la dissipativité du schéma implique immédiatement la stabilité inconditionnelle.

Dans cette section, la méthode des éléments finis d'abord en temps continu puis en temps discret, est développée de telle sorte qu'elle dissipe la norme dans le temps. De plus, les principaux résultats sur la convergence des schémas numériques seront énoncés dans des théorèmes 4.17 et 4.21.

Discutons brièvement différentes manières de procéder. La formulation d'évolution (4.12) est un point de départ inopportun pour l'obtention de la formulation faible en raison des traces aux bords élevées de w à $x = 1$. En effet, la régularité naturelle de la formulation faible impose que $w \in C([0, \infty[; V)$ et $v = w_t \in C([0, \infty[; L^2(0, 1))$. Ainsi, l'insertion des termes $w_{xxx}(1, t)$ et $w_{xx}(1, t)$ dans la formulation d'évolution n'est possible que si l'on recourt aux conditions aux limites (4.3)-(4.4). C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous trouvons approprié de démarrer par le système initial (4.1)-(4.4).

4.3.1 Schéma semi-discret

Dans cette sous-section, la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace est présentée, suivi de l'argumentation de dissipativité. Ensuite, nous signalons le choix approprié de l'espace discret que nous avons fait. Enfin, des estimations à priori sont obtenues.

4.3.1.1 Discrétisation de l'espace

A cause du cumul des erreurs d'arrondi dues à l'ordre élevé des dérivées partielles dans l'équation de la poutre (4.1) (les dérivées spatiales étant d'ordre 4), nous proposons un schéma d'éléments finis semi-discrétisé en espace. En fait, une approche variationnelle nous permet de diminuer l'ordre des dérivées grâce à l'intégration par parties.

Prenons $V_h \subset V$ un espace de dimension finie arbitrairement choisi. Ses éléments sont globalement dans $C^1([0, 1])$ en raison de l'injection de Sobolev. Aussi prenons arbi-

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

trairement $\phi_j, j = 1, \dots, N$ des éléments fixés qui forment une base de V_h . Comme nous l'avons vu dans les démonstrations des théorèmes 4.11 et 4.12, l'approximation de Galerkin de (4.18) s'écrit comme suit :

Trouver $w_h \in C^2([0, \infty[, V^h)$ c'est-à-dire $\hat{w}_h = (w_h(1), (w_h)_x(1), w) \in C^2([0, \infty[, X)$ avec

$$\begin{aligned} \int_0^1 (w_h)_{tt} \phi_j \, dx + \int_0^1 (w_h)_{xx} (\phi_j)_{xx} \, dx + \beta (w_h)_x(1) (\phi_j)_x(1) \\ + \alpha (w_h)_{tx}(1) (\phi_j)_x(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

pour tout $j = 1, \dots, N$ et $t > 0$,

avec les conditions initiales

$$w_h(., 0) = w_{h,0} \in V^h, \quad (4.58)$$

$$(w_h)_t(., 0) = v_{h,0} \in V^h. \quad (4.59)$$

L'équation (4.57) est un système d'équations différentielles ordinaires de second ordre dans le temps. Par la séparation de variables, sa solution peut être écrite dans la base choisie sous la forme suivante :

$$(w_h)(x, t) = \sum_{i=1}^N W_i(t) \phi_i(x) \quad (4.60)$$

où W est la représentation vectorielle de la fonction w_h définie comme suit :

$$W = [W_1 \ W_2 \ \dots \ W_N]^T.$$

L'équation (4.57) est donc équivalente à l'équation vectorielle suivante :

$$MW_{tt} + SW_t + KW = 0. \quad (4.61)$$

Les matrices correspondantes M, S et K sont données respectivement par :

$$M_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j \, dx, \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

$$S_{ij} = \alpha (\phi_i)_x(1) (\phi_j)_x(1), \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

$$K_{ij} = \int_0^1 (\phi_i)_{xx} (\phi_j)_{xx} \, dx + \beta (\phi_i)_x(1) (\phi_j)_x(1), \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

M est appelée matrice de masse et K la matrice de rigidité. La matrice K est symétrique, définie et positive car $\beta > 0$ et donc K est *invertible*. Puisque la matrice M l'est

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

aussi, cela entraîne l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.57)-(4.59).

Les calculs des éléments des matrices M , S et K seront faits dans le Chapitre 5.

4.3.1.2 Dissipativité du schéma numérique

Nous montrons à présent la dissipativité du schéma semi-discret. De manière analogue à la norme $\|y\|_{\mathcal{X}}$ définie dans la sous-section 4.2.1, la fonctionnelle E dépendante du temps tout au long de la trajectoire $w \in C([0, \infty[; V)$ est définie premièrement par :

$$E(t, w) = \frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 v^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x(1))^2. \quad (4.62)$$

Pour la solution classique de (4.12) dans $D(\mathcal{A})$, on a $E(t, w) = \|y(t)\|_{\mathcal{X}}^2$.

Nous avons le résultat suivant qui traduit la dissipativité numérique du schéma semi-discret.

Théorème 4.15. *Soit $w_h \in C([0, \infty[; V^h)$ solution de (4.57)-(4.59). Alors nous obtenons :*

$$\forall t > 0, \quad \frac{d}{dt} E(t, w_h) = -\alpha [(w_h)_{tx}(1)]^2 \leq 0. \quad (4.63)$$

Démonstration. Par dérivation temporelle de $E(t, w_h)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad \frac{d}{dt} E(t, w_h) = \int_0^1 (w_h)_{xxt} (w_h)_{xx} dx &+ \int_0^1 (w_h)_{tt} (w_h)_t dx \\ &+ \beta (w_h)_{tx}(1) (w_h)_x(1). \end{aligned} \quad (4.64)$$

En utilisant (4.57) avec la fonction test $\phi_h = (w_h)_t$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad \int_0^1 (w_h)_{tt} (w_h)_t dx + \int_0^1 (w_h)_{xx} ((w_h)_{xxt}) dx &+ \beta (w_h)_x(1) ((w_h)_{tx}(1)) \\ &+ \alpha (w_h)_{tx}(1) (w_h)_{tx}(1) = 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Ainsi nous obtenons l'égalité (4.63). □

Remarque 4.16. *Notons qu'il a été montré dans les démonstrations des théorèmes 4.11 et 4.12 que la fonctionnelle de l'énergie pour la solution faible \hat{w} de (4.18)-(4.20) a une propriété de dissipativité analogue à (4.51). Notons aussi que la propriété de dissipativité de la norme du Théorème 4.15 a été écrit indépendamment de la base ϕ_i , $i = 1, \dots, N$. Par conséquent, la propriété de dissipativité du Théorème 4.15 s'applique à tout choix du sous-espace $V_h \subset V$.*

4.3.1.3 Fonctions polynomiales cubiques d'Hermite

Dans cette partie, un choix approprié d'espace discret par la méthode des éléments finis est déterminé.

Une question naturelle est de savoir quelle est la régularité de la solution approchée w_h . En particulier, w_h est-elle continue? dérivable? La solution approchée w_h étant obtenue par combinaison linéaire des fonctions de base globales ϕ_i^j , la question revient donc à déterminer la régularité de celles-ci. Par construction, on voit que la régularité de ϕ_i^j sera donnée par sa régularité au niveau des interfaces entre les éléments adjacents formant son support.

Aussi, la continuité sur la dérivée spatiale d'ordre 1 de la solution (la pente de la courbe entre les intervalles adjacents) doit être garantie car la solution devrait évoluer dans V . Afin de surmonter cette difficulté, nous introduisons l'interpolation dite hermitienne avec une classe de fonctions polynomiales spécifiques qui vérifient la contrainte de continuité.

Notre travail numérique consiste à construire un espace approprié de fonctions de classe C^2 définies par morceaux sur l'intervalle $Z = [0, 1]$.

Subdivisons Z en P sous-intervalles de la forme

$$Z_i = [x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, P - 1.$$

Ainsi,

$$Z = \bigcup_{i=0}^P Z_i.$$

Déterminons des fonctions polynomiales cubiques notées par

$$N_j^i, \quad i = 0, 1, \dots, P - 1 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

qui vérifient les conditions suivantes aux points x_i et x_{i+1} , pour tout $x \in Z_i$:

$$\begin{cases} N_1^i(x_i) = 1, & N_{1x}^i(x_i) = N_1^i(x_{i+1}) = N_{1x}^i(x_{i+1}) = 0, \\ N_{2x}^i(x_i) = 1, & N_2^i(x_i) = N_2^i(x_{i+1}) = N_{2x}^i(x_{i+1}) = 0, \\ N_3^i(x_{i+1}) = 1, & N_3^i(x_i) = N_{3x}^i(x_i) = N_{3x}^i(x_{i+1}) = 0, \\ N_{4x}^i(x_{i+1}) = 1, & N_4^i(x_i) = N_{4x}^i(x_i) = N_{4x}^i(x_{i+1}) = 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Maintenant, on définit la transformation affine

$$\theta_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}],$$

qui nous permet de manipuler toutes les opérations sur l'unique élément canonique $[0, 1]$.

Il est avantageux d'effectuer ces transformations pour que le calcul matriciel du système global (4.1)-(4.4) soit simplifié par concaténation des blocs de sous-matrices obtenus sur chaque élément canonique. Les variables intermédiaires θ_i sont appelées *coordonnées locales*.

Grâce à cette transformation, les conditions aux limites que doivent vérifier les fonctions inconnues $N_j(\theta)$ se réécrivent comme suit :

$$\begin{cases} \widetilde{N}_1(0) = 1, & \widetilde{N}_{1\theta}(0) = \widetilde{N}_1(1) = \widetilde{N}_{1\theta}(1) = 0 \\ \widetilde{N}_{2\theta}(0) = 1, & \widetilde{N}_2(0) = \widetilde{N}_2(1) = \widetilde{N}_{2\theta}(1) = 0 \\ \widetilde{N}_3(1) = 1, & \widetilde{N}_3(0) = \widetilde{N}_{3\theta}(0) = \widetilde{N}_{3\theta}(1) = 0 \\ \widetilde{N}_{4\theta}(1) = 1, & \widetilde{N}_4(0) = \widetilde{N}_{4\theta}(0) = \widetilde{N}_4(1) = 0. \end{cases} \quad (4.67)$$

Déterminons par calcul les expressions explicites des fonctions $N_j(\theta)$.

On sait que $N_j(\theta)$ est un polynôme de degré 3 donc il est de la forme

$$N_j(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d.$$

Grâce à la première ligne de (4.67), 1 est une racine double de N_1 . Donc $N_1(\theta) = (\theta - 1)^2(a\theta + b)$. En utilisant les deux conditions restantes, on trouve $a = 2$ et $b = 1$. D'où

$$N_1(\theta) = (\theta - 1)^2(2\theta + 1).$$

De la même manière, on trouve les expressions explicites de $N_2(\theta)$, $N_3(\theta)$ et de $N_4(\theta)$ définies comme suit :

$$N_2(\theta) = \theta(\theta - 1)^2,$$

$$N_3(\theta) = \theta^2(3 - 2\theta),$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

$$N_4(\theta) = \theta^2(\theta - 1),$$

pour tout $\theta \in [0, 1]$.

Les représentations graphiques des fonctions polynomiales hermitiennes dans un même repère sont données dans la Figure 4.1.

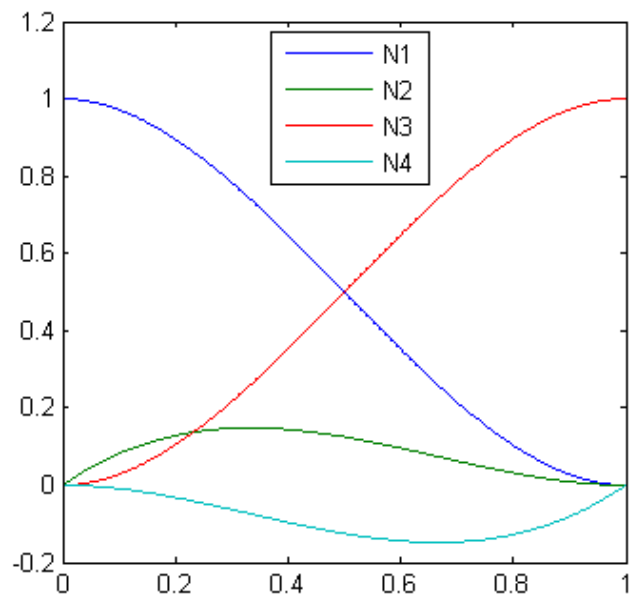


FIGURE 4.1 – Fonctions polynomiales hermitiennes

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

En prolongeant vers 0 les fonctions définies sur $Z \setminus Z_i$, on peut définir les fonctions hermitiennes sur Z tout entier pour tout $i = 0, \dots, P - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_j^i(x) = N_j(\theta_i) \Big|_{\theta_i = \frac{x - x_i}{h}}, \quad j = 1, 3 \\ N_j^i(x) = -h N_j(\theta_i) \Big|_{\theta_i = \frac{x - x_i}{h}}, \quad j = 2, 4 \\ N_j^i = 0 \Big|_{Z \setminus Z_i}, \quad i = 0, \dots, P - 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{array} \right. \quad (4.68)$$

où $h = x_{i+1} - x_i$ désigne un pas constant.

En concaténant les fonctions hermitiennes obtenues ci-dessus, nous pouvons obtenir les fonctions de base sur les différents supports :

Avec le support Z_0 ,

$$\phi_1^0(x) = N_1^0(x)$$

$$\phi_2^0(x) = N_2^0(x);$$

avec le support Z_{i-1} ,

$$\phi_1^i(x) = N_3^{i-1}(x) = \phi_1^{2i-3}$$

$$\phi_2^i(x) = N_4^{i-1}(x) = \phi_2^{2i-2} ;$$

avec le support Z_i ,

$$\phi_1^i(x) = N_1^i(x) = \phi_1^{2i-1}$$

$$\phi_2^i(x) = N_2^i(x) = \phi_2^{2i} ;$$

et avec le support Z_P ,

$$\phi_1^P(x) = N_3^{P-1}(x)$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

$$\phi_2^P(x) = N_4^{P-1}(x).$$

L'ensemble

$$B = \{\phi_l^k, k = 0, \dots, P, l = 1, 2\}$$

forme une base qui engendre un sous-espace de V de dimension $2P + 2$ noté par \widehat{V}_h . Avec la séparation des variables, la solution approchée $w_h \in \widehat{V}_h$ peut s'écrire sous la forme

$$w_h(x, t) = \sum_{j=0}^N [w_h^j(t)\phi_1^j(x) + \widehat{w}_h^j(t)\phi_2^j(x)].$$

Et les conditions aux bords (4.2) à savoir $w(0, t) = w_x(0, t) = 0$ impliquent que :

$$w_h^0\phi_1^0(0) + \widehat{w}_h^0\phi_2^0(0) + w_h^1\phi_1^1(0) + \widehat{w}_h^1\phi_1^2(0) = 0$$

$$w_h^0\phi_{1x}^0(0) + \widehat{w}_h^0\phi_{2x}^0(0) + w_h^1\phi_{1x}^1(0) + \widehat{w}_h^1\phi_{2x}^2(0) = 0$$

de sorte que nous avons $w_h^0 = \widehat{w}_h^0 = 0$. Nous pouvons donc choisir l'espace

$$V_h = Vect\{\phi_1^1, \phi_2^1, \dots, \phi_1^P, \phi_2^P\}$$

qui est de dimension $2P$ comme l'espace de discrétisation.

Un avantage du choix de cet espace discret et de sa base est l'obtention des relations suivantes :

$$w_h(t, 1) = W_{N-1}(t), \quad (w_h)_x(t, 1) = W_N(t) \quad \text{avec } N = 2P.$$

4.3.1.4 Estimations d'erreur a priori

Dans ce paragraphe, les estimations d'erreur à priori pour la solution de l'approximation semi-discrète de Galerkin (4.57) sont obtenues.

Soit l'espace discret V_h , l'espace des fonctions polynomiales d'Hermite introduit dans la sous-section 4.3.1.3.

Nous adapterons une méthode classique d'obtention des estimations d'erreur presen-

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

tée dans [18]. Puisque les polynômes cubiques d'Hermite sont utilisés comme espace d'approximation, la précision d'ordre 2 en espace (dans $H^2(0, 1)$) est obtenue.

L'interpolation d'Hermite de la solution faible w de V_h ou encore appelée projection de w sur $H^2(0, 1)$ noté \bar{w} est définie par :

$$\forall x \in (0, 1), \forall t > 0, \bar{w}(x, t) = \sum_{j=1}^N w(t, x_j) \phi_1^j(x) + \sum_{j=1}^N w_x(t, x_j) \phi_2^j(x).$$

On pose

$$G = \{w \in H^4(0, 1), w(0) = w_x(0) = 0\}.$$

Supposons pour la suite que :

$$w \in C([0, T]; G), \tag{4.69}$$

$$w_t \in L^2([0, T]; G), \tag{4.70}$$

$$w_{tt} \in L^2([0, T]; V). \tag{4.71}$$

En se référant au Lemme 2.1 p. 31 de [18], nous avons les estimations suivantes pour presque tout t :

$$\|w - \bar{w}\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w\|_{H^4(0,1)}, \tag{4.72}$$

$$\|w_t - \bar{w}_t\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w_t\|_{H^4(0,1)}, \tag{4.73}$$

et d'après le Théorème 5.4.8 p. 149 de [11], on a l'estimation :

$$\|w_{tt} - \bar{w}_{tt}\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w_{tt}\|_{H^2(0,1)}. \tag{4.74}$$

Il est maintenant temps d'énoncer le théorème de convergence du schéma semi-discret :

Théorème 4.17. *Soit V^h l'espace des polynômes cubiques d'Hermite. Supposons les expressions (4.69)-(4.71). L'estimation d'erreur pour $w_h \in C^2([0, T], V^h)$ solution de*

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

(4.57) est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \left[E(t, w_h - w) \right]^{1/2} \leq & C \left(E(0, w_h(0) - w(0))^{1/2} + h^2 \left(\|w\|_{C([0, T], H^4(0, 1))} \right. \right. \\ & \left. \left. + \|w_t\|_{L^2(0, T; H^4(0, 1))} + \|w_{tt}\|_{L^2(0, T; H^2(0, 1))} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.75)$$

De plus, si w_{h0} et v_{h0} sont respectivement des interpolations d'Hermite de w_0 et de v_0 , alors il existe une constante positive C telle que :

$$\begin{aligned} \left[E(t, w_h - w) \right]^{1/2} \leq & Ch^2 \left(\|w\|_{C([0, T], H^4(0, 1))} + \|w_t\|_{L^2(0, T; H^4(0, 1))} \right. \\ & \left. + \|w_{tt}\|_{L^2(0, T; H^2(0, 1))} \right). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Démonstration. L'erreur d'estimation de la solution semi-discrète w_h est définie par :

$$e_h = w_h - \bar{w}.$$

On remarque que e_h est un élément de V_h . Alors en remplaçant $w_h = e_h + \bar{w}$ dans (4.57), on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (e_h)_{tt} \phi \, dx + \int_0^1 (e_h)_{xx} \phi_{xx} \, dx + \beta (e_h)_x(1) \phi_x(1) + \alpha (e_h)_{tx}(1) \phi_x(1) \\ & = - \int_0^1 (\bar{w})_{tt} \phi \, dx - \int_0^1 (\bar{w})_{xx} \phi_{xx} \, dx - \beta (\bar{w})_x(1) \phi_x(1) - \alpha (\bar{w})_{tx}(1) \phi_x(1) \end{aligned}$$

pour tout $\phi \in V^h$ et pour tout $t > 0$.

De plus, \bar{w} est la projection de la solution faible w sur l'espace discret V^h .

En utilisant encore (4.57), on a l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (e_h)_{tt} \phi \, dx + \int_0^1 (e_h)_{xx} \phi_{xx} \, dx + \beta (e_h)_x(1) \phi_x(1) + \alpha (e_h)_{tx}(1) \phi_x(1) \\ & = \int_0^1 (w - \bar{w})_{tt} \phi \, dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx} \phi_{xx} \, dx \end{aligned} \quad (4.77)$$

pour tout $\phi \in V^h$ et pour tout $t > 0$.

En prenant maintenant $\phi = (e_h)_t \in V^h$, (4.77) devient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (e_h)_{tt} (e_h)_t \, dx + \int_0^1 (e_h)_{xx} (e_h)_{txx} \, dx + \beta (e_h)_x(1) (e_h)_{tx}(1) + \alpha (e_h)_{tx}(1) (e_h)_{tx}(1) \\ & = \int_0^1 (w - \bar{w})_{tt} (e_h)_t \, dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx} (e_h)_{txx} \, dx, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^1 (e_h)_{tt}^2 dx + \int_0^1 (e_h)_{xx}^2 dx + \beta((e_h)_x(1))^2 \right] \\ = & \int_0^1 (w - \bar{w})_{tt}(e_h)_t dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx}(e_h)_{txx} dx - \alpha(e_h)_{tx}(1)(e_h)_{tx}(1). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Alors on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t, e_h) = \int_0^1 (w - \bar{w})_{tt}(e_h)_t dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx}(e_h)_{txx} dx - \alpha(e_h)_{tx}(1)(e_h)_{tx}(1), \quad \forall t \in [0, T].$$

Ceci implique que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t, e_h) \leq \int_0^1 (w - \bar{w})_{tt}(e_h)_t dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx}(e_h)_{txx} dx \quad (4.79)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

(4.79) est équivalent à

$$\frac{d}{dt} E(t, e_h) \leq 2 \int_0^1 (w - \bar{w})_{tt}(e_h)_t dx + 2 \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx}(e_h)_{txx} dx, \quad (4.80)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

En intégrant (4.80) sur $t \in [0, T]$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(t, e_h) & \leq E(0, e_h(0)) \\ & + 2 \int_0^t \int_0^1 (w - \bar{w})_{tt}(e_h)_t dx d\tau \\ & + 2 \int_0^t \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx}(e_h)_{txx} dx d\tau. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Par une intégration par parties de $\int_0^t (w - \bar{w})_{xx}(e_h)_{txx} d\tau$, la majoration (4.81) devient

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
E(t, e_h) &\leq E(0, e_h(0)) \\
&+ 2 \int_0^t \int_0^1 (w_{tt}(x, \tau) - \bar{w}_{tt}(x, \tau))(e_h)_t(x, \tau) \, dx \, d\tau \\
&- 2 \int_0^t \int_0^1 (w_{txx}(x, \tau) - \bar{w}_{txx}(x, \tau))(e_h)_{xx}(x, \tau) \, dx \, d\tau \\
&+ 2 \int_0^1 (w_{xx}(x, t) - \bar{w}_{xx}(x, t))(e_h)_{xx}(x, t) \, dx \\
&+ 2 \int_0^1 (w_{xx}(x, 0) - \bar{w}_{xx}(x, 0))(e_h)_{xx}(x, 0) \, dx. \tag{4.82}
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (4.82), on a pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
E(t, e_h) &\leq E(0, e_h(0)) \\
&+ C_1 \left[\|w_{tt} - \bar{w}_{tt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 + \int_0^t \|(e_h)_t(\cdot, \tau)\|_{L^2(0,1)}^2 \, d\tau \right] \\
&+ C_2 \left[\|w_{xx}(\cdot, t) - \bar{w}_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|(e_h)_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}^2 \right] \\
&+ C_3 \left[\|w_{xx}(\cdot, 0) - \bar{w}_{xx}(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|(e_h)_{xx}(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \right] \\
&+ C_4 \left[\|w_t - \bar{w}_t\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2 + \int_0^t \|(e_h)_{xx}(\cdot, \tau)\|_{L^2(0,1)}^2 \, d\tau \right],
\end{aligned}$$

où C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes positives.

En utilisant les estimations (4.72)-(4.74), on a :

$$\begin{aligned}
E(t, e_h) &\leq M_1 E(0, e_h(0)) + C_1 \int_0^t E(\tau, e_h) \, d\tau \\
&+ Ch^4 \left(\|w\|_{C([0,T],H^4(0,1))}^2 + \|w_t\|_{L^2(0,T;H^4(0,1))}^2 \right. \\
&\left. + \|w_{tt}\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2 \right).
\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme de Gronwall (Lemme 1.30 du Chapitre 1) à la dernière inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}
E(t, e_h) &\leq C \left(E(0, e_h(0)) + h^4 \left(\|w\|_{C([0,T],H^4(0,1))}^2 \right. \right. \\
&\left. \left. + \|w_t\|_{L^2(0,T;H^4(0,1))}^2 + \|w_{tt}\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))}^2 \right) \right).
\end{aligned}$$

Enfin, grâce à l'inégalité triangulaire, nous obtenons (4.75). De (4.75) avec $e_h(0) = 0$,

on déduit (4.76). □

Remarque 4.18. *L'ordre de convergence pour le schéma semi-discrétisé en espace est de 2.*

4.3.2 Schéma totalement discrétisé

Dans cette sous-section, pour obtenir un schéma totalement discrétisé, nous effectuerons une discrétisation dans le temps du système déjà semi-discrétisé (4.61) de telle sorte que la condition de dissipativité de l'énergie soit préservée. Pour ce faire, le système (4.61) a été d'abord écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. Ensuite, le schéma de Crank-Nicolson est utilisé pour démontrer la dissipativité du schéma numérique. Enfin, des estimations d'erreur a priori sont obtenues.

4.3.2.1 Schéma de Crank-Nicolson

Soit L un entier strictement positif. Ici l'intervalle $[0, T]$ est discrétisé en L sous-intervalles équidistants. Notons $k = \frac{T}{L}$ le pas de temps et $t_n = nk$, $n = 0, 1, \dots, L$ représentent les nœuds de la discrétisation. Dans le but de réécrire le schéma semi-discrétisé (4.61) comme une équation différentielle ordinaire du premier ordre, introduisons l'élément $v_h = (w_h)_t$. De plus, $V = W_t = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_N]^T$ sa représentation vectorielle dans la base $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ de l'espace des polynômes cubiques d'Hermite. Notons que la solution w_h du schéma semi-discrétisé (4.61) devient pour le schéma entièrement discrétisé un vecteur de la forme $y_h = [w_h \ v_h]^T$. En outre, de manière analogue à (4.12), la norme naturelle de $y_h = y_h(t)$ est définie par

$$\|y_h\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 [(w_h)_{xx}^2 + v_h^2] dx + \frac{\beta}{2} ((w_h)_x(1))^2.$$

Soit maintenant $y^n = [w^n \ v^n]$ la solution approchée de y_h au temps $t = t_n$. Posons $W^n = W(x, t_n)$ et $V^n = V(x, t_n)$ les représentations vectorielles dans la base $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ respectivement de w^n et de v^n .

Pour la discrétisation dans le temps de (4.61), le schéma de Crank-Nicolson

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{k} = \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \tag{4.83}$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

est utilisé. On a alors :

$$\int_0^1 \frac{v^{n+1} - v^n}{k} \phi_h \, dx + \int_0^1 \frac{w_{xx}^{n+1} + w_{xx}^n}{2} (\phi_h)_{xx} \, dx + \beta \frac{w_x^{n+1}(1) + w_x^n(1)}{2} (\phi_h)_x(1) + \alpha \frac{v_x^{n+1}(1) + v_x^n(1)}{2} (\phi_h)_x(1) = 0 \quad (4.84)$$

pour tout $\phi_h \in V_h$.

De plus, l'équation vectorielle (4.61) devient :

$$\frac{MV^{n+1} - MV^n}{k} + \frac{SV^{n+1} + SV^n}{2} + \frac{KW^{n+1} + KW^n}{2} = 0 \quad (4.85)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\left(\frac{M}{k} + \frac{S}{2} \right) V^{n+1} + \frac{K}{2} W^{n+1} = -\frac{K}{2} W^n + \left(\frac{M}{k} - \frac{S}{2} \right) V^n. \quad (4.86)$$

Les expressions (4.83)-(4.86) nous donnent le système d'équations suivant :

$$PY^{n+1} = QY^n$$

où P et Q sont les matrices par blocs définies par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{I}{k} & -\frac{I}{2} \\ \frac{K}{2} & -\frac{M}{k} + \frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{I}{k} & \frac{I}{2} \\ -\frac{K}{2} & \frac{M}{k} - \frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

et le vecteur Y^n est défini par

$$Y^n = [W^n \ V^n].$$

4.3.2.2 Dissipativité du schéma numérique

Dans le théorème suivant, il est montré que le schéma totalement discrétisé (4.83) et (4.86) dissipe la norme (l'énergie) dans le temps.

Théorème 4.19. *Soient L et k des entiers strictement positifs. Pour tout $n = 0, 1, \dots, L$, on a :*

$$\|y^{n+1}\|^2 - \|y^n\|^2 = -\alpha \frac{(w_x^{n+1}(1) - w_x^n(1))^2}{k} \leq 0. \quad (4.87)$$

Démonstration. Soit $n = 0, 1, \dots, L$ avec L un entier.

Voici l'expression des normes $\|y^{n+1}\|^2$ et $\|y^n\|^2$:

$$\|y^{n+1}\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 [(w_{xx}^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2] dx + \frac{\beta}{2} (w_x^{n+1}(1))^2.$$

$$\|y^n\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 [(w_{xx}^n)^2 + (v^n)^2] dx + \frac{\beta}{2} (w_x^n(1))^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} \|y^{n+1}\|^2 - \|y^n\|^2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{xx}^{n+1})^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{xx}^n)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (v^{n+1})^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 (v^n)^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x^{n+1}(1))^2 - \frac{\beta}{2} (w_x^n(1))^2. \end{aligned}$$

Multiplions (4.83) par $v^{n+1} - v^n$ et intégrons sur $[0, 1]$. On obtient :

$$\int_0^1 \frac{w^{n+1} - w^n}{k} (v^{n+1} - v^n) dx = \int_0^1 \frac{(v^{n+1})^2 - (v^n)^2}{2} dx. \quad (4.88)$$

Prenons $\phi_h = w^{n+1} \in V^h$ dans (4.84). On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{xx}^{n+1})^2 dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx}^{n+1} w_{xx}^n dx - \int_0^1 \frac{v^{n+1} - v^n}{k} w^{n+1} dx \\ &\quad - \beta \frac{w_x^{n+1}(1) + w_x^n(1)}{2} w_x^{n+1}(1) \\ &\quad - \alpha \frac{v_x^{n+1}(1) + v_x^n(1)}{2} w_x^{n+1}(1). \end{aligned} \quad (4.89)$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Prenons maintenant $\phi_h = w^n \in V^h$ dans (4.84). On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{xx}^n)^2 dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx}^{n+1} w_{xx}^n dx - \int_0^1 \frac{v^{n+1} - v^n}{k} w^n dx \\ &\quad - \beta \frac{w_x^{n+1}(1) + w_x^n(1)}{2} w_x^n(1) - \alpha \frac{v_x^{n+1}(1) + v_x^n(1)}{2} w_x^n(1). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Alors en utilisant (4.88)-(4.90) et à nouveau (4.83), on a :

$$\|y^{n+1}\|^2 - \|y^n\|^2 = -\alpha \frac{(w_x^{n+1}(1) + w_x^n(1))^2}{k} \leq 0$$

car α et k sont positifs. □

Remarque 4.20. *La norme décroît dans le temps telle qu'on ait l'inégalité suivante :*

$$\|y^{n+1}\|^2 \leq \|y^n\|^2.$$

Cette décroissance de la norme lorsque k tend vers 0 est conforme à celle de la norme définie en (4.14) dans le cas continu et à celle de la norme définie en (4.63) dans le cas semi-discret. Toutefois, lorsque $\alpha = \beta = 0$, on a $\|y^{n+1}\| = \|y^n\|$. Ainsi, la suite des normes $\|y^n\|$ est constante pour tout $n = 0, 1, \dots, L$ où L un entier strictement positif. En outre, notons que le schéma de Crank-Nicolson (4.83) et (4.85) et la propriété de dissipativité de la norme du Théorème 4.19 ont été écrits indépendamment de la base ϕ_i . Par conséquent, la propriété de dissipativité du Théorème 4.19 s'applique à tout choix du sous-espace V_h de l'espace fonctionnel V .

4.3.2.3 Estimations d'erreur a priori

Dans cette partie, les estimations d'erreur a priori pour le schéma totalement discrétisé sont obtenues.

Supposons que $w \in H^4(0, T; V)$. Soit $\bar{w} \in V^h$ la projection de la solution faible w sur V_h telle que $a_1(\bar{w}(t), \phi_h) = a_1(w(t), \phi_h)$ pour tout $\phi_h \in V^h$, pour tout $t \in [0, T]$. Alors on a aussi $\bar{w} \in H^4([0, T]; V)$ puisque \bar{w} est borné dans V .

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

De plus, soit $w^e := w - \bar{w}$ désignant l'erreur de projection. Supposons aussi que :

$$\begin{aligned} w &\in H^2([0, T]; G), \\ w_t &\in L^2([0, T]; G), \\ w_{tt} &\in H^2([0, T]; V). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Ensuite, grâce à [55], nous avons les estimations suivantes :

$$\|w - \bar{w}\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w\|_{H^4(0,1)}, \quad (4.92)$$

$$\|w_t - \bar{w}_t\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w_t\|_{H^4(0,1)}, \quad (4.93)$$

$$\|w_{tt} - \bar{w}_{tt}\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w_{tt}\|_{H^4(0,1)}. \quad (4.94)$$

Soit $y(t_n) = [w(t_n) \quad w_t(t_n)]^T$ la solution faible de l'approximation de Galerkin (4.57) au temps $t = t_n$. Son approximation est définie par $y^n = [w^n \quad v^n]^T$, la n -ième itération du schéma totalement discret de Crank-Nicolson. Ainsi, l'erreur d'approximation est définie par

$$y_e^n = [e_1^n \quad e_2^n]^T$$

avec

$$e_1^n = w^n - \bar{w}(t_n),$$

$$e_2^n = v^n - \bar{w}_t(t_n)$$

pour tout $n = 0, 1, \dots, L$.

L'estimation d'erreur de second ordre c'est-à-dire d'un coté en espace et de l'autre côté en temps du schéma totalement discret est obtenue dans le théorème suivant :

Théorème 4.21. *Supposons que $w \in H^2([0, T]; G) \cap H^4([0, T]; V)$. Aussi, soit $n = 1, \dots, L$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} \|y^n - y(t_n)\| &\leq M \left[\|y_e^0\| + h^2 \|w\|_{H^2([0, T]; H^4(0,1))} \right. \\ &\quad \left. + k^2 \left(\|w_{tt}\|_{L^2([0, T]; H^4(0,1))} + \|w_{tt}\|_{H^2([0, T]; H^2(0,1))} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.95)$$

où M est une constante positive.

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Démonstration. Prenons arbitrairement $n = 0, 1, \dots, L$ avec L un entier strictement positif.

En utilisant le Théorème de Taylor avec reste intégral et par un calcul direct, on obtient pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{w}(t_{n+1}, x) - \bar{w}(t_n, x)}{k} &= \bar{w}_t(t_{n+1/2}, x) + \delta_n \bar{w}_{tt}(t_{n+1/2}, x) \\ &+ \frac{1}{k} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - t)^2}{2} \bar{w}_{ttt}(x, t) dt \\ &+ \frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{(t_n - t)^2}{2} \bar{w}_{ttt}(x, t) dt, \end{aligned}$$

avec $\delta_n = \frac{t_{n+1} + t_n}{2}$.

D'une manière similaire, on a

$$\begin{aligned} \frac{\bar{w}_t(t_{n+1}, x) + \bar{w}_t(t_n, x)}{2} &= \bar{w}_t(t_{n+1/2}, x) + \delta_n \bar{w}_{tt}(t_{n+1/2}, x) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) \bar{w}_{ttt}(x, t) dt \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n - t) \bar{w}_{ttt}(x, t) dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\frac{\bar{w}(t_{n+1}, x) - \bar{w}(t_n, x)}{k} = \frac{\bar{w}_t(t_{n+1}, x) + \bar{w}_t(t_n, x)}{2} + kQ_1^n(x), \quad (4.96)$$

où

$$\begin{aligned} Q_1^n(x) &= \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{\bar{w}_{ttt}(x, t)}{k^2} (t_{n+1} - t)^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{\bar{w}_{ttt}(x, t)}{k^2} (t_n - t)^2 dt \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{\bar{w}_{ttt}(x, t)}{k} (t_{n+1} - t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{\bar{w}_{ttt}(x, t)}{k} (t_n - t) dt. \end{aligned}$$

Nous avons par l'équation (4.83) :

$$\begin{aligned} \frac{e_1^{n+1} - e_1^n}{k} &= \frac{w^{n+1} - \bar{w}(t_{n+1}, x) - w^n + \bar{w}(t_n, x)}{k} \\ &= \frac{v^{n+1} + v^n}{2} - \frac{\bar{w}(t_{n+1}, x) - \bar{w}(t_n, x)}{k}. \end{aligned}$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

En utilisant (4.96), on obtient :

$$\frac{e_1^{n+1} - e_1^n}{k} = \frac{e_2^{n+1} + e_2^n}{2} - kQ_1^n(x). \quad (4.97)$$

En multipliant (4.97) par $(e_2^{n+1} - e_2^n)$ et en intégrant sur $[0, 1]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e_1^{n+1} - e_1^n}{k} (e_2^{n+1} - e_2^n) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (e_2^{n+1})^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (e_1^{n+1})^2 dx \\ &\quad - k \int_0^1 (e_2^{n+1} - e_2^n) Q_1^n(x) dx. \end{aligned} \quad (4.98)$$

En outre, dans le but de réécrire la formulation faible (4.15), nous obtenons par le Théorème de Taylor avec reste intégral les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{w_t(t_{n+1}, x) - w_t(t_n, x)}{k} &= w_{tt}(t_{n+1/2}, x) + \delta_n w_{ttt}(t_{n+1/2}, x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - t)^2}{k} w_{tttt}(x, t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{(t_n - t)^2}{k} w_{tttt}(x, t) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{xx}(t_{n+1}, x) + w_{xx}(t_n, x)}{2} &= w_{xx}(t_{n+1/2}, x) + \delta_n w_{ttx}(t_{n+1/2}, x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) w_{ttxx}(x, t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n - t) w_{ttxx}(x, t) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{tx}(t_{n+1}, x) + w_{tx}(t_n, x)}{2} &= w_{tx}(t_{n+1/2}, x) + \delta_n w_{ttx}(t_{n+1/2}, x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) w_{tttx}(x, t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n - t) w_{tttx}(x, t) dt, \end{aligned}$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

et

$$\begin{aligned} \frac{w_x(t_{n+1}, x) + w_x(t_n, x)}{2} &= w_x(t_{n+1/2}, x) + \delta_n w_{tx}(t_{n+1/2}, x) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) w_{ttx}(x, t) dt \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n - t) w_{ttx}(x, t) dt. \end{aligned}$$

En prenant $t_{n+1/2} = t$ et en appliquant les expressions précédentes de la formulation faible (4.15), nous obtenons après simplifications :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\frac{w_t(t_{n+1}, x) - w_t(t_n, x)}{k} \right) \phi dx \\ &+ \int_0^1 \left(\frac{w_{xx}(t_{n+1}, x) + w_{xx}(t_n, x)}{2} \right) \phi_{xx} dx \\ &+ \alpha \left(\frac{w_{tx}(t_{n+1}, 1) + w_{tx}(t_n, 1)}{2} \right) \phi_x(1) \\ &+ \beta \left(\frac{w_x(t_{n+1}, 1) + w_x(t_n, 1)}{2} \right) \phi_x(1) \\ &= kQ_2^n(\phi). \end{aligned} \tag{4.99}$$

où la fonctionnelle $Q_2^n : V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} Q_2^n(\phi) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{tttt}(t, x)}{k^2} (t_{n+1} - t)^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{tttt}(t, x)}{k^2} (t_n - t)^2 dt \right) \phi dx \\ &+ \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{tttx}(t, x)}{k} (t_{n+1} - t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{tttx}(t, x)}{k} (t_n - t) dt \right) \phi_{xx} dx \\ &+ \beta \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{ttt}(t, 1)}{k} (t_{n+1} - t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{ttt}(t, 1)}{k} (t_n - t) dt \right) \phi_x(1) \\ &+ \alpha \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{tttx}(t, 1)}{k} (t_{n+1} - t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{tttx}(t, 1)}{k} (t_n - t) dt \right) \phi_x(1). \end{aligned}$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Aussi, en utilisant (4.99) et (4.84), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e_2^{n+1} - e_2^n}{k} \phi_h \, dx &+ \int_0^1 \frac{e_{1xx}^{n+1} + e_{1xx}^n}{2} (\phi_h)_{xx} \\
&+ \alpha \frac{e_{2x}^{n+1}(1) + e_{2x}^n(1)}{2} (\phi_h)_x(1) \\
&+ \beta \frac{e_{1x}^{n+1}(1) + e_{1x}^n(1)}{2} (\phi_h)_x(1) \, dx \\
&= -kQ_2^n(\phi_h) + Q_3^n(\phi_h)
\end{aligned} \tag{4.100}$$

où

$$Q_3^n(\phi_h) = \int_0^1 \frac{w_t^e(t_{n+1}, x) - \bar{w}_t^e(t_n, x)}{k} \phi_h \, dx + \alpha \frac{w_{tx}^e(t_{n+1}, 1) - \bar{w}_{tx}^e(t_n, 1)}{2} (\phi_h)_x(1).$$

En utilisant (4.97) et en prenant aussi $\phi_h = k \frac{e_2^{n+1} + e_2^n}{2} \in V^h$ dans (4.100), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|y_e^{n+1}\|^2 - \|y_e^n\|^2 &= -k^2 \int_0^1 \frac{e_{1xx}^{n+1} + e_{1xx}^n}{2} (Q_1^n)_{xx} \, dx - \beta k^2 \frac{e_{1x}^{n+1}(1) + e_{1x}^n(1)}{2} (Q_1^n)_x(1) \\
&- \frac{k^2}{2} Q_2^n(e_2^{n+1} + e_2^n) + \frac{k}{2} Q_3^n(e_2^{n+1} + e_2^n).
\end{aligned}$$

Nous avons l'estimation suivante :

$$\|Q_1^n\|_{H^2} \leq Mk \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|w_{ttt}(t)\|_{H^2}^2 \, dt.$$

Dans le but d'obtenir une estimation de Q_2^n , nous avons besoin de réécrire le second terme de $Q_2^n(e_2^n)$. En intégrant deux fois par parties sur $[0, 1]$ et en supposant que $e_2^n(0) = e_{2x}^n(0) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{ttxx}(t, x)}{k} (t_{n+1} - t) \, dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{ttxx}(t, x)}{k} (t_n - t) \, dt \right) e_{2xx}^n \, dx \\
&= \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{1}{2k} (t_{n+1} - t) \left(w_{ttxx}(t, 1) e_{2x}^n(1) - w_{ttxx}(t, 1) e_2^n(1) + \int_0^1 w_{ttxxx}(t, x) e_2^n \, dx \right) dt \\
&- \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{1}{2k} (t_n - t) \left(w_{ttxx}(t, 1) e_{2x}^n(1) - w_{ttxx}(t, 1) e_2^n(1) + \int_0^1 w_{ttxxx}(t, x) e_2^n \, dx \right) dt.
\end{aligned}$$

4.3. MÉTHODE NUMÉRIQUE DISSIPATIVE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Alors,

$$Q_2^n(e_2^{n+1} + e_2^n) \leq M \left(k \int_{t_n}^{t_{n+1}} [\|w_{ttt}(t)\|_{H^2}^2 + \|w_{ttt}(t)\|_{H^2}^2 + \|w_{tt}(t)\|_{H^4}^2] dt \right. \\ \left. + |e_2^{n+1}(1) + e_2^n(1)|^2 + \|e_2^{n+1} + e_2^n\|_{L^2}^2 + |e_{2x}^{n+1}(1) + e_{2x}^n(1)|^2 \right).$$

De plus, nous avons :

$$|Q_3^n(e_2^{n+1} + e_2^n)| \leq M \left(\frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|w_{tt}^e(t)\|_{L^2}^2 dt + \|w_t^e\|_{C([t_n, t_{n+1}], H^2)}^2 \right. \\ \left. + \|e_2^{n+1} + e_2^n\|_{L^2}^2 + |e_{2x}^{n+1}(1) + e_{2x}^n(1)|^2 \right).$$

On déduit que :

$$\|y_e^{n+1}\|^2 - \|y_e^n\|^2 \leq M \left(k (\|y_e^{n+1}\|^2 + \|y_e^n\|^2 + \|w_t^e\|_{C([t_n, t_{n+1}], H^2)}^2) \right. \\ \left. + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|w_{tt}^e(t)\|_{L^2}^2 dt \right. \\ \left. + k^4 \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\|w_{tt}(t)\|_{H^4}^2 + \|w_{ttt}(t)\|_{H^2}^2 + \|w_{ttt}(t)\|_{H^2}^2) dt \right).$$

Soit maintenant $m = 1, \dots, L$. En sommant sur $n = 0, \dots, m$, en prenant $k \leq \frac{1}{2M}$, nous obtenons finalement grâce à l'inégalité de Gronwall et aux estimations (4.92)-(4.94) :

$$\|y_e^{m+1}\|^2 \leq M \left[\|y_e^0\|^2 + h^4 (\|w_t\|_{C([0, T], H^4)}^2 + \|w_{tt}\|_{L^2([0, T], H^4)}^2) \right. \\ \left. + k^4 (\|w_{tt}(t)\|_{L^2([0, T], H^4)}^2 + \|w_{ttt}(t)\|_{L^2([0, T], H^2)}^2) \right. \\ \left. + \|w_{ttt}(t)\|_{L^2([0, T], H^2)}^2 \right]. \quad (4.101)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons (4.95). □

Remarque 4.22. *L'ordre de convergence tant en temps qu'en espace pour le schéma totalement discrétisé est de 2.*

Chapitre 5

Simulations numériques

5.1 Introduction

Soit le système évolutif suivant :

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (5.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

$$u_x(1, t) = -\beta u_t(1, t), \quad t > 0, \quad (5.3)$$

où u est une fonction scalaire des variables x et t , β est une constante positive non nulle.

Ce modèle simplifié peut être celui d'un câble fixé à une extrémité et soumis à l'autre à un contrôle force en vitesse. Le câble est supposé flexible et de longueur constante. Plusieurs auteurs ont étudié le système (5.1)-(5.3) (voir par exemple [23]) et ont montré qu'il est exponentiellement stable pour $\beta \neq 1$. En outre, ils ont prouvé qu'il vérifie la propriété de la base de Riesz et ont obtenu par une formule explicite le lieu géométrique du spectre. L'idée d'ajouter un contrôle force en position à celui déjà existant a préoccupé les mathématiciens et les ingénieurs.

Le système ainsi obtenu peut être décrit comme suit :

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (5.4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.5)$$

$$u_x(1, t) = -\beta u_t(1, t) - \alpha u(1, t), \quad t > 0. \quad (5.6)$$

D'un point de vue mathématique, on cherche alors à vérifier si les propriétés du système perturbé demeurent intactes. A cette question, plusieurs auteurs ont donné une réponse positive.

Le système (5.4)-(5.6) obtenu par perturbation du premier, à savoir (5.1)-(5.3) est encore exponentiellement stable (voir Ö. Morgül [48]) et vérifie la propriété de la base de Riesz ([60]).

D'un point de vue pratique, outre la propriété de la base de Riesz et la stabilité exponentielle, on cherche à savoir si l'on améliore le taux optimal de décroissance de l'énergie élastique. A cette préoccupation pratique qui tire son importance du fait du coût de la réalisation des modèles ainsi obtenus théoriquement, il convient d'apporter une réponse satisfaisante. L'étude théorique d'un tel problème, même pour un modèle simple comme celui décrit par le système (5.1)-(5.3) n'est pas chose aisée. Ainsi dans [17], les auteurs ont prouvé que le rajout d'un contrôle force en position au contrôle en vitesse, bien que préservant la propriété de la base de Riesz et la stabilité exponentielle a un effet négatif sur le taux optimal de décroissance de l'énergie élastique.

L'idée d'aborder d'un point de vue numérique le problème (5.4)-(5.6) a ainsi préoccupé plusieurs auteurs. Ainsi dans [45], à l'aide de la méthode des différences finies ([19, 51]) et de la méthode QZ ([32, 47]) permettant de décrire géométriquement le spectre, les auteurs ont obtenu le même résultat. L'idée d'utiliser ainsi les méthodes numériques pour étudier l'impact du rajout d'un contrôle à un contrôle déjà existant se présente alors comme une alternative crédible aux méthodes théoriques.

Ce chapitre est consacré à l'étude numérique du système (4.1)-(4.4) du Chapitre 4 que nous rappelons :

$$w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$w_{xxx}(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$w_{xx}(1, t) = -\alpha w_{xt}(1, t) - \beta w_x(1, t), \quad t > 0$$

où α et β sont deux constantes positives données, $w(x, t)$ désigne le déplacement latéral à l'instant t d'un point de la poutre d'abscisse x . La longueur de la poutre, la masse linéique ainsi que la rigidité en flexion sont supposées égales à un.

Dans ce chapitre, nous illustrons par la méthode des éléments finis d'Hermite la réponse aux deux questions suivantes concernant les systèmes dissipatifs :

1- Quelle est l'influence des paramètres figurant dans le contrôle moment sur le spectre ? Le paramètre β améliore-t-il le taux optimal de décroissance de l'énergie ?

2- Peut-on développer une méthode numérique pour un problème original (initial) qui préserve la stabilité et la décroissance de l'énergie, propriétés obtenues dans le cas continu ? Si oui, quel est l'ordre de convergence de cette méthode ?

Rappelons que le système (4.1)-(4.4) a été discrétisé déjà en espace par la méthode des éléments finis et discrétisé en temps par la méthode de Crank-Nicolson dans la section 4.3 du Chapitre 4. Nous rappelons aussi que la dissipativité de l'énergie discrète du système reproduit fidèlement la décroissance de l'énergie obtenue dans le cas continu.

Le plan de notre travail est le suivant : D'abord, nous étudierons numériquement le spectre du système en observant l'influence des paramètres α et β sur la vitesse de convergence de l'énergie associée au système discrétisé. Ensuite, les schémas numériques développés dans la section 4.3 du Chapitre 4 sont implémentés et les résultats de simulations sont présentés. L'ordre de convergence des méthodes numériques est vérifié.

5.2 Étude numérique du spectre du système

Nous rappelons une définition utile :

Définition 5.1. *Un maillage de $]a, b[$ est de la forme*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

avec le pas de discrétisation $h = x_{i+1} - x_i$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

On supposera par la suite un maillage uniforme si bien que pour tout $i = 0, 1, \dots, n+1$, on a $x_i = ih$ avec $h = \frac{b-a}{n+1}$.

Dans le cadre de ce problème, on subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en N intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur h . A chaque nœud x_i , les inconnues sont w_i et $(w_t)_i$ qui représentent respectivement les valeurs approchées de w et de sa dérivée au point x_i . Comme décrit dans le chapitre précédent, nous utiliserons les fonctions d'interpolation

cubiques d'Hermite.

Nous rappelons l'approximation de Galerkin (4.57)-(4.59) :

Trouver $w_h \in C^2([0, \infty[, V_h)$ c'est-à-dire $\widehat{w}_h = ((w_h), (w_h)_x, w) \in C^2([0, \infty[, X)$ avec

$$\int_0^1 (w_h)_{tt} \phi_j \, dx + \int_0^1 (w_h)_{xx} (\phi_j)_{xx} \, dx + \beta (w_h)_x(1) (\phi_j)_x(1) + \alpha (w_h)_{tx}(1) (\phi_j)_x(1) = 0$$

pour tout $j = 1, \dots, N$ et $t > 0$,

avec les conditions initiales

$$w_h(\cdot, 0) = w_{h,0} \in V^h$$

$$(w_h)_t(\cdot, 0) = v_{h,0} \in V^h$$

dont l'équation (4.57) est donc équivalente à l'équation vectorielle suivante :

$$MW_{tt} + SW_t + KW = 0.$$

Cette dernière équation est un système de $N = 2P$ équations à $N = 2P$ inconnues où le vecteur

$$W(t) = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_P \quad (w_t)_1 \quad (w_t)_2 \quad \dots \quad (w_t)_P]^T.$$

Notons que M et K sont des matrices tridiagonales par blocs tandis que S est diagonal. Le calcul des éléments de S est trivial parce que tous les éléments de S sont nuls excepté un élément non nul $S_{N,N} = \alpha$ avec $N = 2P$.

On a donc à résoudre l'équation différentielle dans \mathbb{R}^N dont l'inconnue est $W(t)$. En posant $V = W_t$ et $X = [W \quad W_t]^T$, l'équation (4.61) s'écrit :

$$X_t(t) = LX(t) \tag{5.7}$$

où

$$L = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathbb{R}^N} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}S \end{pmatrix}$$

est la matrice du spectre.

5.2.1 Calcul des approximations des intégrales pour les matrices de masse et de rigidité

Pour $i = 1, \dots, N$, on a :

$$\begin{aligned}
 M_{2i-3,2i-3} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_1^{2i-3})^2 dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [N_3(\theta_{i-1})]^2 dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[N_3\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) \right]^2 dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2 \left(3 - 2\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)\right) \right]^2 dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} 9\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^4 - 12\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^5 + 4\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^6 dx \\
 &= \left[9\frac{h}{5}\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^5 - 12\frac{h}{6}\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^6 + 4\frac{h}{7}\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^7 \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\
 &= h - \frac{22}{35}h \\
 M_{2i-3,2i-3} &= \frac{13}{35}h,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i-2,2i-2} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_2^{2i-2})^2 dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-hN_4(\theta_{i-1})]^2 dx \\
 &= h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[N_4\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) \right]^2 dx \\
 &= h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2 \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} - 1\right) \right]^2 dx \\
 &= h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^6 - 2\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^5 + \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^4 dx \\
 &= h^2 \left[\frac{h}{7}\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^7 - 2\frac{h}{6}\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^6 + \frac{h}{5}\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^5 \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\
 &= h^2 \left(\frac{h}{7} - 2\frac{h}{6} + \frac{h}{5} \right) \\
 M_{2i-2,2i-2} &= \frac{1}{105}h^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i-1,2i-1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})^2 dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [N_1(\theta_i)]^2 dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[N_1\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right]^2 dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right)^2 \left(2\frac{x-x_i}{h} + 1\right) \right]^2 dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} 4\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^6 - 12\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^5 + 9\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^4 + 4\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3 \\
 &\quad - 6\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 + 1 dx \\
 &= \left[4\frac{h}{7}\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^7 - 12\frac{h}{6}\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^6 + 9\frac{h}{5}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^5 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &\quad + \left[4\frac{h}{4}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^4 - 6\frac{h}{3}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^5 + x \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &= 4\frac{h}{7} - 2h + 9\frac{h}{5} + h - 2h + h \\
 M_{2i-1,2i-1} &= \frac{13}{35}h,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_2^{2i})^2 dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [-hN_2(\theta_i)]^2 dx \\
 &= h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[N_2\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right]^2 dx \\
 &= h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right)^2 \right]^2 dx \\
 &= h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^6 - 4\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^5 + 6\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^4 - 4\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3 + \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 dx \\
 &= h^2 \left(\frac{h}{7} - 4\frac{h}{6} + 6\frac{h}{5} - 4\frac{h}{4} + \frac{h}{3} \right) \\
 M_{2i,2i} &= \frac{1}{105}h^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i-1,2i-3} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})(\phi_1^{2i-3}) \, dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1(\theta_i) N_3(\theta_i) \, dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1\left(\frac{x-x_i}{h}\right) N_3\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \, dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right)^2 \left(2\frac{x-x_i}{h} + 1\right) \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 \left(3 - 2\frac{x-x_i}{h}\right) \, dx \\
 &= \left[-4\frac{h}{7} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^7 + 12\frac{h}{6} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^6 - 9\frac{h}{5} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^5 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &\quad + \left[-2\frac{h}{4} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^4 + 3\frac{h}{3} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &= -4\frac{h}{7} + 2h - 9\frac{h}{5} - \frac{h}{2} + h \\
 M_{2i-1,2i-3} &= \frac{9}{70}h,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i-3,2i-2} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_1^{2i-3})(\phi_2^{2i-2}) \, dx \\
 &= -h \int_{x_{i-1}}^{x_i} N_3(\theta_{i-1}) N_4(\theta_{i-1}) \, dx \\
 &= -h \int_{x_{i-1}}^{x_i} N_3\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) N_4\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) \, dx \\
 &= -h \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2 \left(3 - 2\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2 \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} - 1\right) \, dx \\
 &= -h \left[-2\frac{h}{7} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^7 + 5\frac{h}{6} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^6 - 3\frac{h}{5} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^5 \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\
 &= -h \left(-2\frac{h}{7} + 5\frac{h}{6} - 3\frac{h}{5} \right) \\
 M_{2i-3,2i-2} &= \frac{11}{210}h^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i-1,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})(\phi_2^{2i}) dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1(\theta_i) N_2(\theta_i) dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1\left(\frac{x-x_i}{h}\right) N_2\left(\frac{x-x_i}{h}\right) dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right)^2 \left(2\frac{x-x_i}{h} + 1\right) \left(\frac{x-x_i}{h}\right) \left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right)^2 dx \\
 &= -h \left[2\frac{h}{7} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^7 - 7\frac{h}{6} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^6 + 8\frac{h}{5} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^5 - 2\frac{h}{4} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^4 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &\quad - h \left[-2\frac{h}{3} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3 + \frac{h}{2} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &= -h \left(2\frac{h}{7} - 7\frac{h}{6} + 8\frac{h}{5} - 2\frac{h}{3} \right) \\
 M_{2i-1,2i} &= -\frac{11}{210}h^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i-1,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})(\phi_2^{2i-2}) dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1(\theta_i) N_4(\theta_i) dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1\left(\frac{x-x_i}{h}\right) N_4\left(\frac{x-x_i}{h}\right) dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right)^2 \left(2\frac{x-x_i}{h} + 1\right) \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 \left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right) dx \\
 &= -h \left[2\frac{h}{7} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^7 - 5\frac{h}{6} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^6 + 3\frac{h}{5} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^5 + \frac{h}{4} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^4 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &\quad - h \left[-\frac{h}{3} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &= -h \left(2\frac{h}{7} - 5\frac{h}{6} + 3\frac{h}{5} + \frac{h}{4} - \frac{h}{3} \right) \\
 M_{2i-1,2i-2} &= \frac{13}{420}h^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i-3,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-3})(\phi_2^{2i}) \, dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_3(\theta_i) N_2(\theta_i) \, dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_3\left(\frac{x-x_i}{h}\right) N_2\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \, dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 \left(3 - 2\frac{x-x_i}{h}\right) \left(\frac{x-x_i}{h}\right) \left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right)^2 \, dx \\
 &= -h \left[-2\frac{h}{7} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^7 + 7\frac{h}{6} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^6 - 8\frac{h}{5} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^5 + 3\frac{h}{4} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^4 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &= -h \left(-2\frac{h}{7} + 7\frac{h}{6} - 8\frac{h}{5} + 3\frac{h}{4} \right) \\
 M_{2i-1,2i-2} &= -\frac{13}{420} h^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_2^{2i})(\phi_2^{2i-2}) \, dx \\
 &= h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2(\theta_i) N_4(\theta_i) \, dx \\
 &= h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2\left(\frac{x-x_i}{h}\right) N_4\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \, dx \\
 &= h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x-x_i}{h}\right) \left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right)^2 \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 \left(\frac{x-x_i}{h} - 1\right) \, dx \\
 &= h^2 \left[\frac{h}{7} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^7 - 3\frac{h}{6} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^6 + 3\frac{h}{5} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^5 - \frac{h}{4} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^4 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &= h^2 \left(\frac{h}{7} - 3\frac{h}{6} + 3\frac{h}{5} - \frac{h}{4} \right) \\
 M_{2i,2i-2} &= -\frac{1}{140} h^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_1^{2i-3} &= N_3(\theta_{i-1}) \\
 &= \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 \left(3 - 2 \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right) \right) \\
 (\phi_1^{2i-3})' &= \frac{2}{h} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right) \left(3 - 2 \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right) \right) - \frac{2}{h} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 \\
 (\phi_1^{2i-3})'' &= \frac{6}{h^2} - \frac{12}{h^2} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right) \\
 \left((\phi_1^{2i-3})'' \right)^2 &= \frac{36}{h^4} - \frac{144}{h^4} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right) + \frac{144}{h^4} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 K_{2i-3,2i-3} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left((\phi_1^{2i-3})'' \right)^2 dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{36}{h^4} - \frac{144}{h^4} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right) + \frac{144}{h^4} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 dx \\
 &= \frac{36}{h^4} x_i - \frac{72}{h^3} + \frac{48}{h^3} - \frac{36}{h^4} x_{i-1} \\
 &= \frac{36}{h^3} - \frac{72}{h^3} + \frac{48}{h^3} \\
 K_{2i-3,2i-3} &= \frac{12}{h^3}.
 \end{aligned}$$

Aussi, on a :

$$\begin{aligned}
 \phi_1^{2i-1} &= N_1(\theta_i) \\
 &= \left(\frac{x - x_i}{h} - 1 \right)^2 \left(2 \left(\frac{x - x_i}{h} + 1 \right) \right) \\
 (\phi_1^{2i-1})' &= \frac{2}{h} \left(\frac{x - x_i}{h} - 1 \right) \left(2 \left(\frac{x - x_i}{h} + 1 \right) + 1 \right) + \frac{2}{h} \left(\frac{x - x_i}{h} - 1 \right)^2 \\
 (\phi_1^{2i-1})'' &= \frac{2}{h^2} \left(2 \left(\frac{x - x_i}{h} + 1 \right) \right) + \frac{8}{h^2} \left(\frac{x - x_i}{h} - 1 \right) \\
 \left((\phi_1^{2i-1})'' \right)^2 &= \frac{4}{h^4} \left(2 \left(\frac{x - x_i}{h} + 1 \right) \right)^2 + \frac{64}{h^4} \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 - \frac{32}{h^4} \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \\
 &\quad - \frac{32}{h^4} + \frac{64}{h^4} \left(\frac{x - x_i}{h} - 1 \right)^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{2i-1,2i-1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_1^{2i-1})'')^2 dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{4}{h^4} \left(2 \left(\frac{x-x_i}{h} + 1 \right) \right)^2 + \frac{64}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{32}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) dx \\
 &\quad - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{32}{h^4} + \frac{64}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} - 1 \right)^2 dx \\
 &= \frac{18}{h^3} + \frac{64}{3h^3} - \frac{16}{h^3} - \frac{32}{h^4} x_{i+1} - \frac{2}{3h^3} + \frac{64}{3h^3} + \frac{32}{h^4} x_i \\
 &= \frac{2}{h^3} + \frac{126}{3h^3} - \frac{32}{h^3} \\
 K_{2i-1,2i-1} &= \frac{12}{h^3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2^{2i-2} &= -hN_4(\theta_{i-1}) \\
 &= -h \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right)^2 \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} - 1 \right) \\
 (\phi_2^{2i-2})' &= -h \left(\frac{2}{h} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} - 1 \right) + \frac{1}{h} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right)^2 \right) \\
 (\phi_2^{2i-2})'' &= -h \left(\frac{6}{h^2} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) - \frac{2}{h^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2^{2i} &= -hN_2(\theta_i) \\
 &= -h \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \left(\frac{x-x_i}{h} - 1 \right)^2 \\
 (\phi_2^{2i})' &= -h \left(\frac{1}{h} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right)^2 + \frac{2}{h} \left(\frac{x-x_i}{h} - 1 \right) \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \right) \\
 (\phi_2^{2i})'' &= -h \left(\frac{6}{h^2} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) - \frac{4}{h^2} \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 K_{2i-2,2i-2} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} ((\phi_2^{2i-2})'')^2 dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[-h \left(\frac{6}{h^2} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) - \frac{2}{h^2} \right) \right]^2 dx \\
 &= h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{36}{h^4} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right)^2 - \frac{24}{h^4} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) + \frac{4}{h^4} dx \\
 &= h^2 \left(\frac{12}{h^3} - \frac{12}{h^3} + \frac{4}{h^4} x_i - \frac{4}{h^4} x_{i-1} \right) \\
 &= h^2 \left(\frac{4}{h^3} \right) \\
 K_{2i-2,2i-2} &= \frac{4}{h},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{2i,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_2^{2i})'')^2 dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[-h \left(\frac{6}{h^2} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) - \frac{4}{h^2} \right) \right]^2 dx \\
 &= h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{36}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{48}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) + \frac{16}{h^4} dx \\
 &= h^2 \left(\frac{12}{h^3} - \frac{24}{h^3} + \frac{16}{h^4} x_{i+1} - \frac{16}{h^4} x_i \right) \\
 &= h^2 \left(\frac{4}{h^3} \right) \\
 K_{2i,2i} &= \frac{4}{h}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\phi_1^{2i-1})''(\phi_1^{2i-3})'' &= \left[\frac{2}{h^2} \left(2 \frac{x-x_i}{h} + 1 \right) + \frac{8}{h^2} \left(\frac{x-x_i}{h} - 1 \right) \right] \left[\frac{6}{h^2} - \frac{12}{h^2} \left(\frac{x-x_i}{h} - 1 \right) \right] \\
 &= \frac{144}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{144}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) + \frac{36}{h^4}
 \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
 K_{2i-1,2i-3} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})'' (\phi_1^{2i-3})'' dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{144}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{144}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) - \frac{36}{h^4} dx \\
 &= \frac{72}{h^3} - \frac{48}{h^3} - \frac{36}{h^4} x_{i+1} + \frac{36}{h^4} x_i \\
 K_{2i-1,2i-3} &= -\frac{12}{h^3}.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 K_{2i-3,2i-2} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_1^{2i-3})'' (\phi_2^{2i-2})'' dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} -h \left(\frac{6}{h^2} - \frac{12}{h^2} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) \right) \left(\frac{6}{h^2} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} - \frac{2}{h^2} \right) \right) dx \\
 &= -h \left(-\frac{24}{h^3} + \frac{30}{h^3} - \frac{12}{h^4} x_i + \frac{12}{h^4} x_{i-1} \right) \\
 K_{2i-3,2i-2} &= \frac{6}{h^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{2i-1,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})'' (\phi_2^{2i})'' dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{72}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{84}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) + \frac{24}{h^4} dx \\
 &= -h \left(\frac{24}{h^3} - \frac{42}{h^3} + \frac{24}{h^4} x_{i+1} - \frac{24}{h^4} x_i \right) \\
 &= -h \left(-\frac{18}{h^3} + \frac{24}{h^3} \right) \\
 &= -\frac{6}{h^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{2i-3,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-3})'' (\phi_2^{2i})'' dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{84}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) - \frac{72}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{24}{h^4} dx \\
 &= -h \left(\frac{42}{h^3} - \frac{24}{h^3} - \frac{24}{h^4} x_{i+1} + \frac{24}{h^4} x_i \right) \\
 &= -h \left(\frac{42}{h^3} - \frac{24}{h^3} - \frac{24}{h^3} \right) \\
 K_{2i-3,2i} &= \frac{6}{h^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{2i-1,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})'' (\phi_2^{2i-2})'' dx \\
 &= -h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{72}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{60}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) + \frac{12}{h^4} dx \\
 &= -h \left(\frac{24}{h^3} - \frac{30}{h^3} + \frac{12}{h^4} x_{i+1} - \frac{12}{h^4} x_i \right) \\
 &= -h \left(\frac{24}{h^3} - \frac{30}{h^3} + \frac{12}{h^3} \right) \\
 K_{2i-1,2i-2} &= -\frac{6}{h^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{2i,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_2^{2i})'' (\phi_2^{2i-2})'' dx \\
 &= h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{36}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{36}{h^4} \left(\frac{x-x_i}{h} \right) + \frac{8}{h^4} dx \\
 &= h^2 \left(\frac{12}{h^3} - \frac{18}{h^3} + \frac{8}{h^4} x_{i+1} - \frac{8}{h^4} x_i \right) \\
 &= -h \left(\frac{12}{h^3} - \frac{18}{h^3} + \frac{8}{h^3} \right) \\
 K_{2i,2i-2} &= \frac{2}{h}.
 \end{aligned}$$

5.2.2 Tests numériques

A présent, en implémentant la matrice du spectre L , nous représentons le spectre associé au système (4.1)-(4.4) pour $N = 75$, $\alpha = 5$ et $\beta = 1$. Sur la figure 5.1, l'on a représenté une distribution de $4N = 300$ valeurs propres.

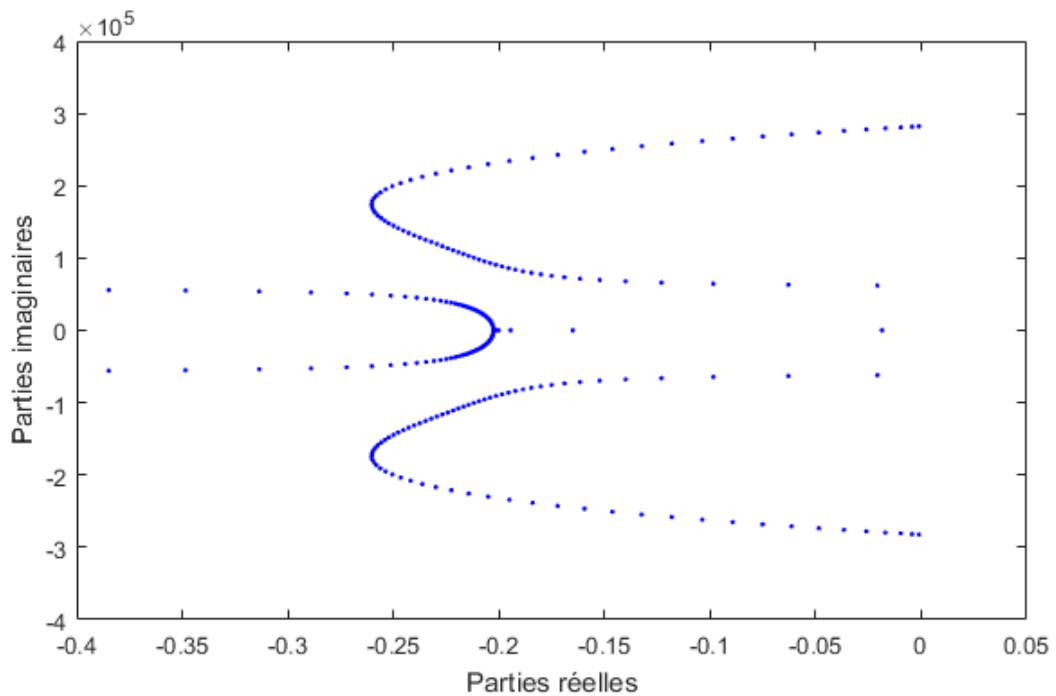


FIGURE 5.1 – Représentation du spectre

On remarque une famille de spectre dont la partie réelle est négative. Ce qui rend le système exponentiellement stable tant que $\alpha > 0$.

5.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE DU SPECTRE DU SYSTÈME

On observe le comportement du système quand on a les valeurs $\alpha = 0$ et $\beta = 10$.

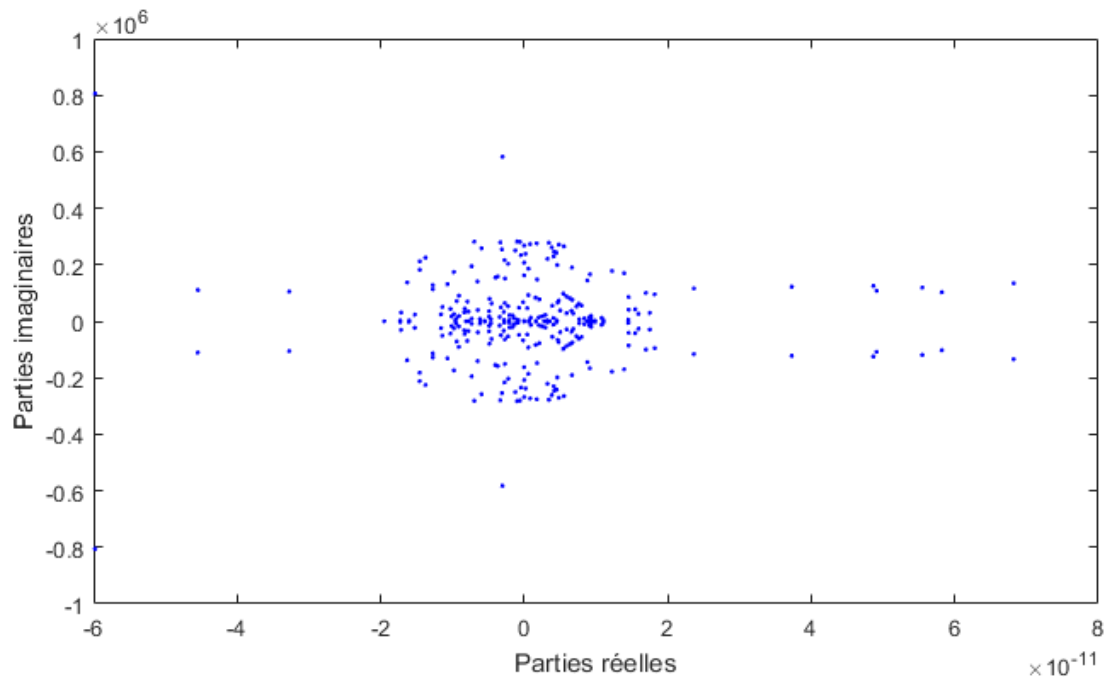


FIGURE 5.2 – Représentation du spectre lorsque $\alpha = 0$

On observe un spectre éparpillé de part et d'autre de l'axe imaginaire. Ce qui amène à croire que le système n'est pas uniformément stable lorsque $\alpha = 0$.

5.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE DU SPECTRE DU SYSTÈME

Nous étudions l'influence des paramètres α et β sur la vitesse de convergence de l'énergie.

Dans la figure ci-dessous, on fixe la valeur de $\beta = 1$ et on fait varier α .

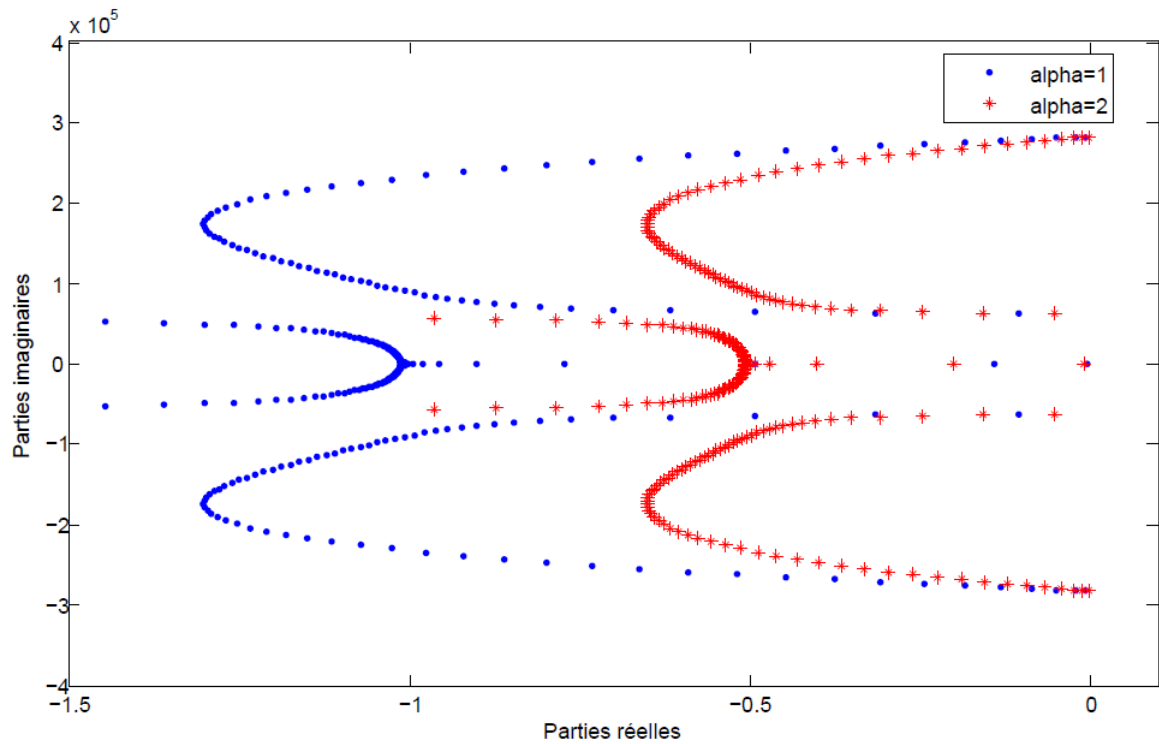


FIGURE 5.3 – Influence de la variation du paramètre α sur le spectre

On remarque à travers cette figure que, plus on augmente la valeur de α plus le spectre se déplace vers la droite en fonction de la croissance de α .

5.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE DU SPECTRE DU SYSTÈME

Ensuite, on fixe la valeur de $\alpha = 1$ et on fait varier β .

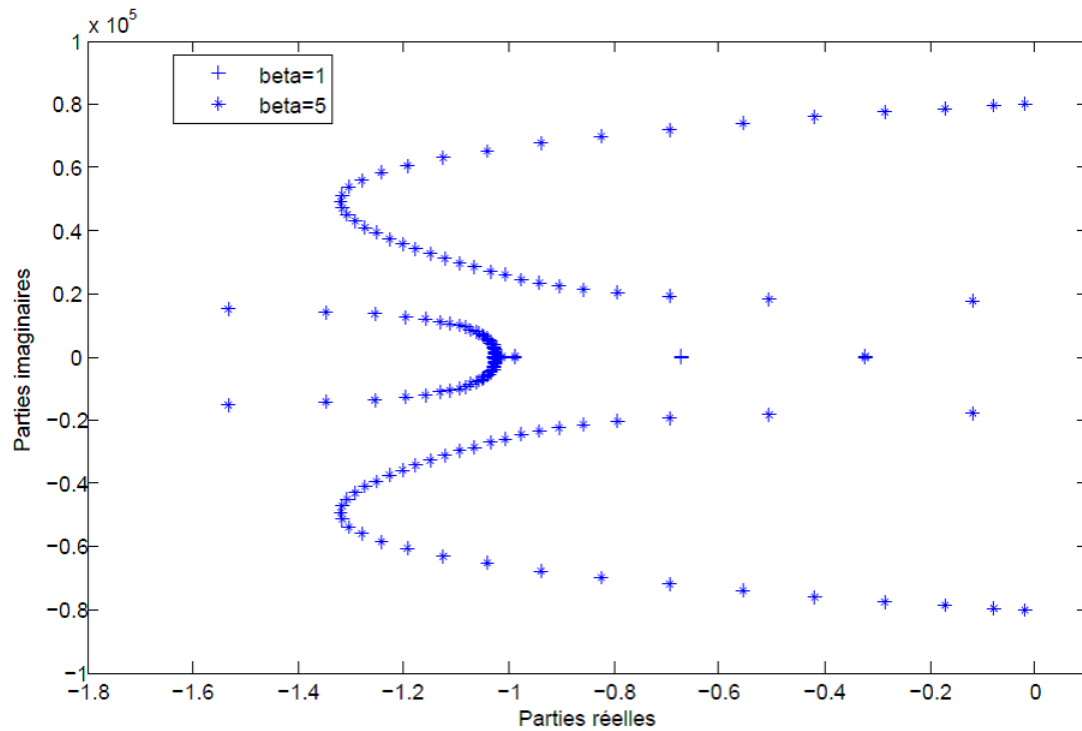


FIGURE 5.4 – Influence de la variation du paramètre β sur le spectre

On remarque alors que la variation de β n'entraîne aucune perturbation du spectre. Le spectre est donc stable. Ainsi donc, l'influence du contrôle de vitesse de rotation α est numériquement dominante. Ce qui est normal car quand $\alpha = 0$, le système n'est pas uniformément stable.

5.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE DU SPECTRE DU SYSTÈME

Nous illustrons aussi l'asymptote connue et obtenue dans [58] :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \lambda_n = -\frac{1}{\alpha}.$$

Sur les figures suivantes, on représente le spectre par rapport à l'asymptote $-\frac{1}{\alpha}$. En premier lieu, nous représentons le spectre pour $\alpha = 0.75$. On observe aussi l'asymptote en l'abscisse spectrale -1.33 . On constate également des valeurs à droite de l'asymptote.

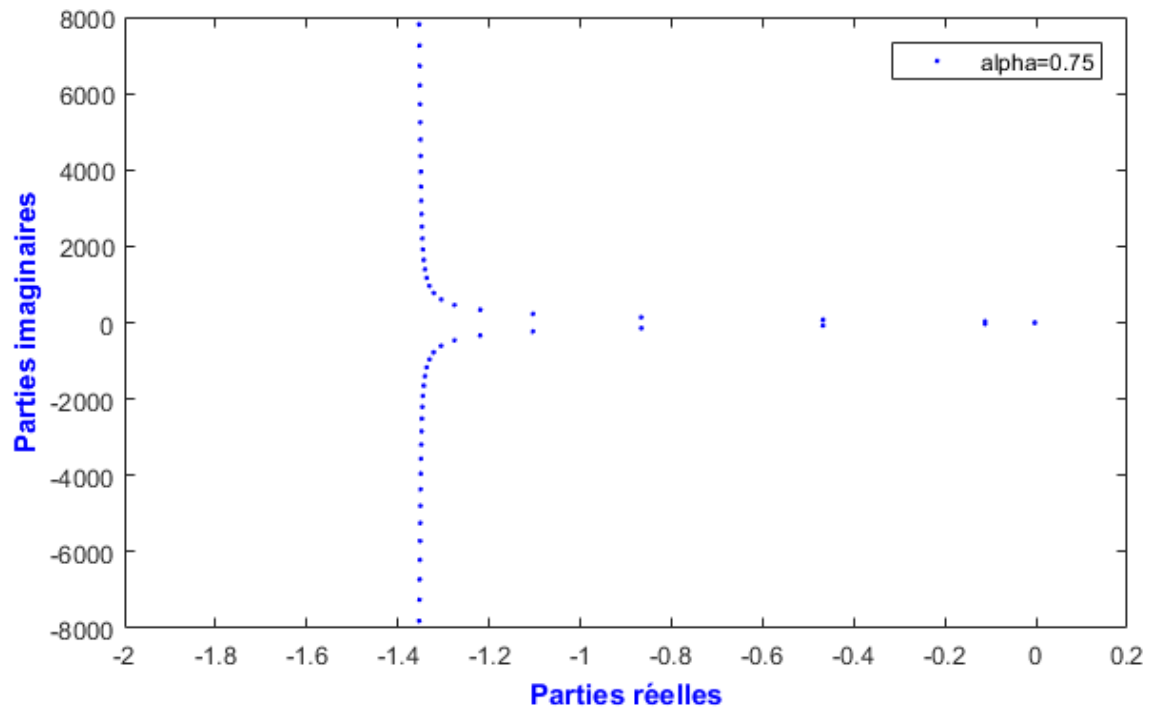


FIGURE 5.5 – Asymptote du spectre pour $\alpha = 0.75$

5.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE DU SPECTRE DU SYSTÈME

Voici la représentation du spectre pour $\alpha = 2$ par rapport à l'asymptote qu'on observe en l'abscisse spectrale -0.5 . On constate des valeurs à droite de l'asymptote mais moins que dans le premier cas.

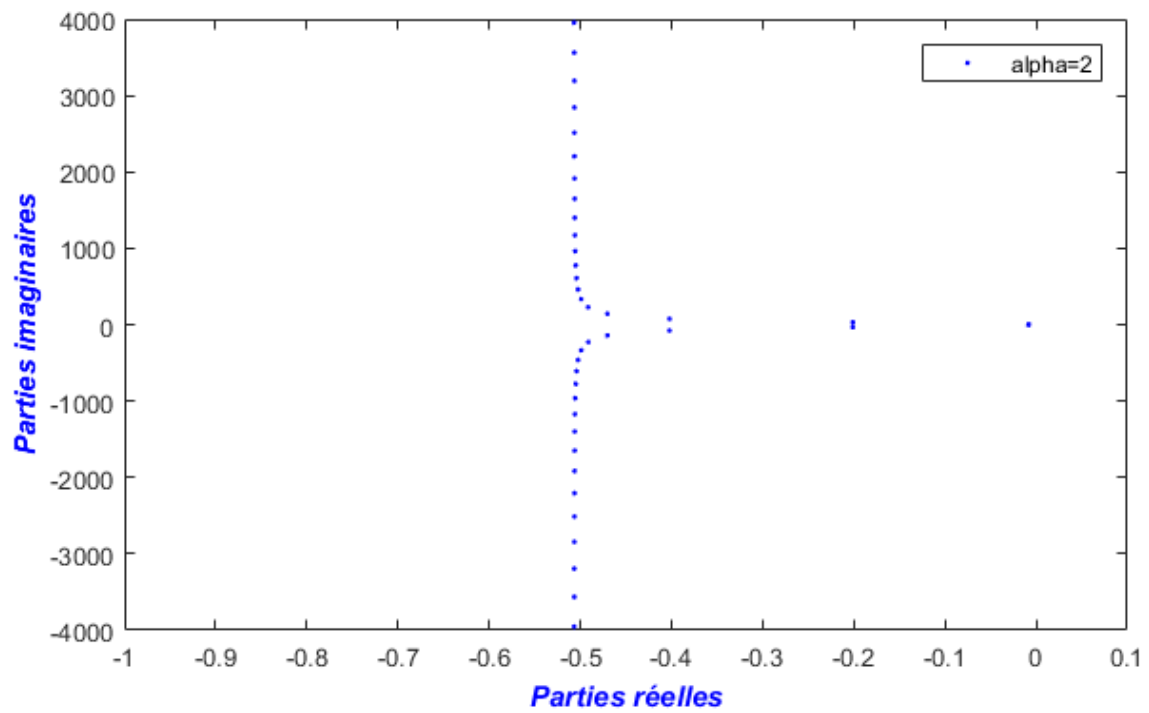


FIGURE 5.6 – Asymptote du spectre pour $\alpha = 2$

5.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE DU SPECTRE DU SYSTÈME

Voici la représentation du spectre pour $\alpha = 5$ par rapport à l'asymptote qu'on observe en l'abscisse spectrale -0.25 . On constate des valeurs à droite de l'asymptote mais moins que dans les cas précédents.

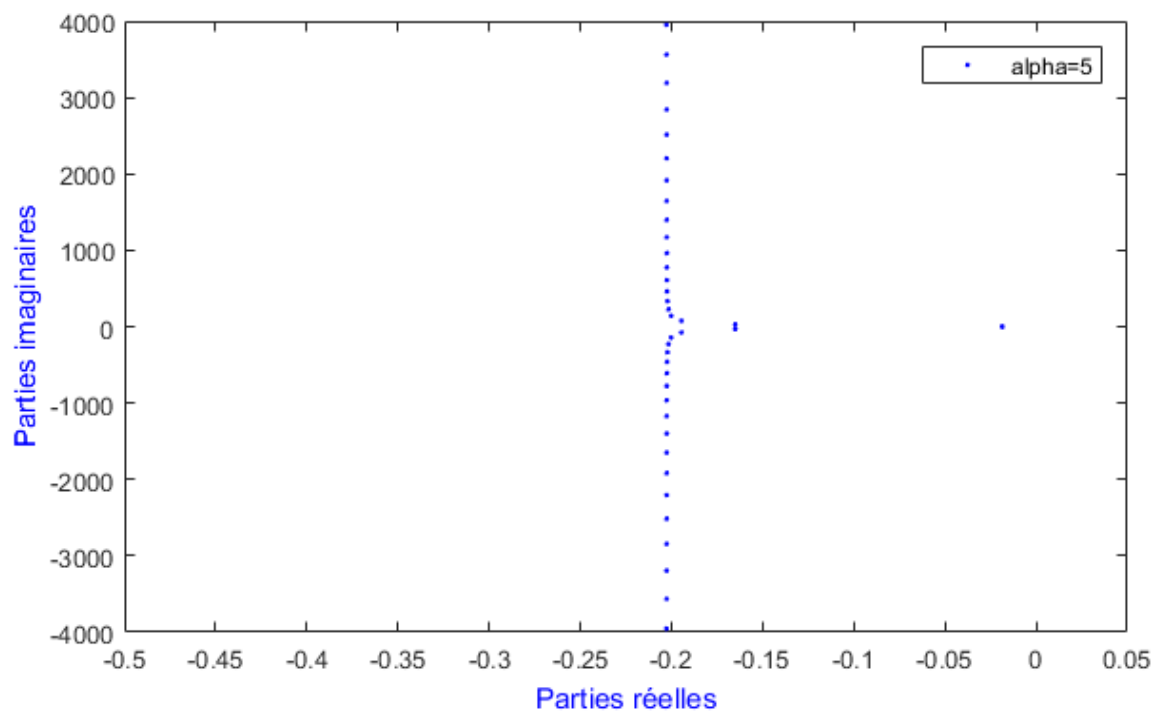


FIGURE 5.7 – Asymptote du spectre pour $\alpha = 5$

5.2. ÉTUDE NUMÉRIQUE DU SPECTRE DU SYSTÈME

Enfin, on représente le spectre pour $\alpha = 10$ par rapport à l'asymptote qu'on observe en l'abscisse spectrale -0.1 . On constate des valeurs à droite de l'asymptote mais moins que dans les cas précédents.

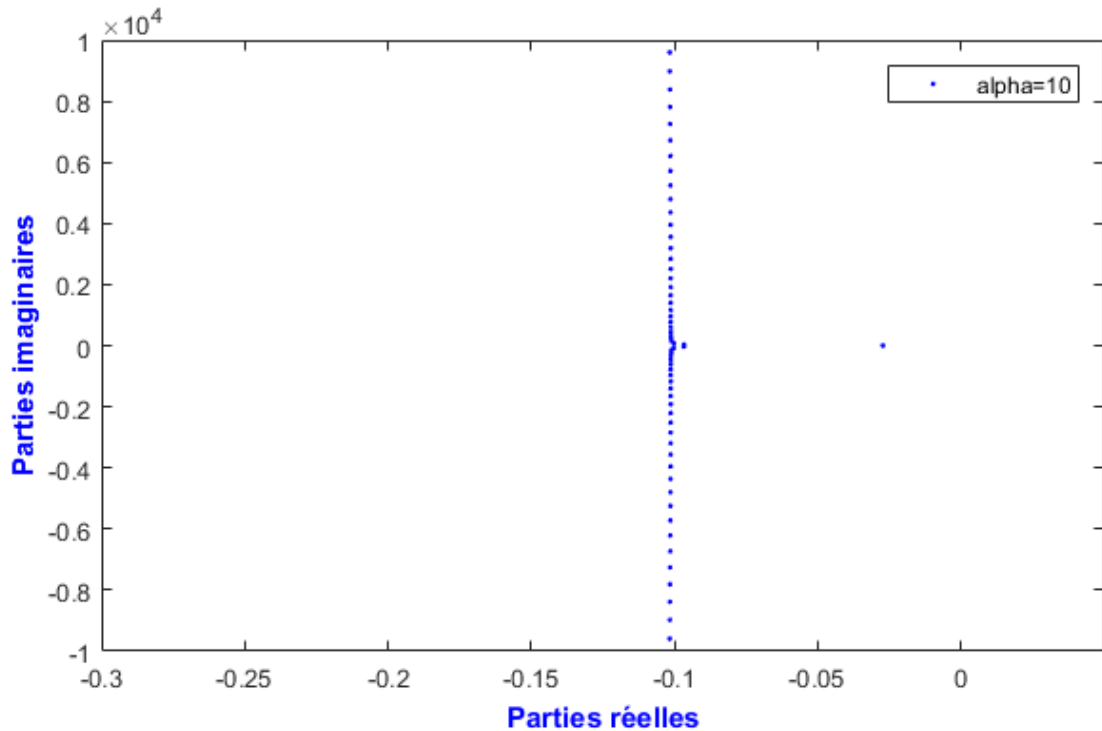


FIGURE 5.8 – Asymptote du spectre pour $\alpha = 10$

En conclusion, le taux optimal de décroissance de l'énergie est en général déterminé par les valeurs propres de basse fréquence, celles qui sont à droite de l'asymptote.

5.2.3 Conclusion

De toutes les observations précédentes, nous affirmons que la variation du contrôle sur le déplacement angulaire (rotation) β n'entraîne aucune perturbation sur le spectre du système. Toutefois le contrôle de vitesse de rotation α est d'influence dominante. Il améliore le taux de décroissance de l'énergie du système. Car nous constatons que plus nous augmentons la valeur de α , plus le spectre se déplace vers la gauche en fonction de la croissance de α . Dans [52], l'auteur a prouvé théoriquement que le contrôle en

vitesse de rotation suffisait pour établir la stabilité exponentielle du système. Ce qui est conforme à nos résultats numériques. De plus, nous avons illustré l'asymptote obtenu dans [58] et nous avons constaté que le taux optimal de décroissance de l'énergie est en général déterminé par les valeurs propres de basse fréquence, celles qui sont à droite de l'asymptote. Ainsi, la méthode numérique mise en œuvre, à travers sa finesse, nous a permis d'apprécier l'impact du contrôle de rotation sur le taux de décroissance de l'énergie du système étudié. Ce qui n'est pas pratiquement visible au plan théorique.

5.3 Convergence de la méthode numérique

Nous construisons maintenant les simulations numériques qui valident le Théorème 4.21.

Dans le but de vérifier l'ordre de convergence, des simulations sont faites à chaque pas de discrétisation de l'espace ainsi qu'à chaque pas de la discrétisation du temps. Les conditions initiales sont choisies comme suit :

$$w_0(x) = -0.6x^2 + 0.4x^3 \quad (5.8)$$

$$v_0 \equiv 0 \quad (5.9)$$

De plus, nous prenons

$$\alpha = \beta = 5 * 10^{-3}.$$

Dans les tables suivantes, les normes de l'erreur l^2 de y_e sont listées. Pour commencer, sur un intervalle d'espace $[0, 1]$, les solutions numériques sont calculées sur un pas uniforme $h = \frac{1}{2^n}$ pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et 8. Pour le premier tableau, le calcul est fait avec un pas de temps uniforme $k = 10^{-3}$. L'ordre de convergence (*o.d.c*) est donné dans le tableau suivant en utilisant successivement le rapport d'erreur $\log_2 \frac{e_i}{e_{i-1}}$.

Dans le second tableau, dans le but d'obtenir les résultats de l'*o.d.c* pour l'intervalle de temps $[0, T]$ avec $T = 4.1 * 10^{-4}$, nous fixons $h = \frac{1}{50}$ et nous prenons le pas de temps $k = \frac{T}{t_s}$ pour $t_s = 64, 128, 256, 512, 1024$ et 2048.

5.3. CONVERGENCE DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE

k	h	$\ y_e\ _{l^2}$	$o.d.c$	h	k	$\ y_e\ _{l^2}$	$o.d.c$
10^{-3}	$\frac{1}{4}$	$3.12 * 10^{-2}$	—	$\frac{1}{50}$	$6.4 * 10^{-6}$	$2.13 * 10^{-4}$	—
10^{-3}	$\frac{1}{8}$	$8.59 * 10^{-3}$	1.86	$\frac{1}{50}$	$3.2 * 10^{-6}$	$5.73 * 10^{-5}$	1.89
10^{-3}	$\frac{1}{16}$	$2.25 * 10^{-3}$	1.93	$\frac{1}{50}$	$1.6 * 10^{-6}$	$1.48 * 10^{-5}$	1.95
10^{-3}	$\frac{1}{32}$	$5.74 * 10^{-4}$	1.97	$\frac{1}{50}$	$8 * 10^{-7}$	$3.73 * 10^{-6}$	1.99
10^{-3}	$\frac{1}{64}$	$1.45 * 10^{-4}$	1.98	$\frac{1}{50}$	$4 * 10^{-7}$	$0.92 * 10^{-6}$	2.02
10^{-3}	$\frac{1}{128}$	$3.64 * 10^{-5}$	1.99	$\frac{1}{50}$	$2 * 10^{-7}$	$2.15 * 10^{-7}$	2.10

Ces tableaux ci-dessus nous indiquent le comportement de l'erreur de $\mathcal{O}(h^2)$ pour la norme l^2 qui est en accord avec le Théorème 4.21.

Conclusion générale et perspectives

Pour terminer cette thèse, nous rappelons les résultats essentiels atteints dans les différents chapitres. Ensuite, nous décrivons brièvement quelques extensions de nos travaux de recherches qui sont des questions ouvertes.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude des poutres d'Euler-Bernoulli flexibles qui sont fixées à une extrémité et où à l'extrémité libre, l'on applique un contrôle moment combinaison linéaire d'une vitesse de rotation et de l'angle de rotation. En premier lieu, dans les chapitres **2** et **3** de ce mémoire, il a été démontré la propriété de la base de Riesz ainsi que la stabilité exponentielle de ce système dans deux situations : quand il est à coefficients variables et quand celui-ci est amorti. En second lieu, nous avons aussi développé dans le Chapitre **4**, une méthode numérique dissipative, stable et convergente pour ces problèmes à coefficients constants, laquelle méthode conserve fidèlement les propriétés établies dans le cas continu. Enfin, dans le Chapitre **5**, des résultats théoriques sont validés par des simulations numériques.

L'étude de la stabilité des problèmes à coefficients non constants donc variables et/ou avec un amortisseur visqueux est beaucoup plus compliquée. Mais ce type de problèmes revêt un intérêt particulier de nos jours en raison de l'utilisation fréquente des matériaux non homogènes, en particulier les matériaux intelligents utilisés en ingénierie afin de satisfaire les besoins utiles de la population [35]. Pour l'examen de la stabilité exponentielle de ces problèmes dans cette thèse, nous avons utilisé la théorie de Wang basée sur les travaux de recherche de Birkhoff (voir [6, 7]), Naimark (voir [44]), Shkalikov (voir [53]), Tretter (voir [61]) sur les équations différentielles ordinaires pour étudier de manière unifiée un certain nombre de problèmes d'évolution tels que : la corde vibrante ou les problèmes d'ondes, les poutres etc.

Des simulations numériques portant sur le spectre, nous affirmons que la variation du contrôle rétroactif en position de rotation β n'entraîne aucune perturbation sur le spectre du système. Toutefois le contrôle rétroactif en vitesse de rotation α est d'influence dominante. Il améliore le taux de décroissance de l'énergie du système. Car nous constatons que plus nous augmentons la valeur de α , plus le spectre se déplace vers la gauche en fonction de la croissance de α . Dans [52], l'auteur a prouvé théoriquement que le contrôle en vitesse de rotation suffisait pour établir la stabilité exponentielle du système. Ce qui est conforme à nos résultats numériques. De plus, nous avons illustré l'asymptote obtenu dans [58] et nous avons constaté que le taux optimal de décroissance de l'énergie est en général déterminé par les valeurs propres de basse fréquence, celles qui sont à droite de l'asymptote. Ainsi, la méthode numérique mise en œuvre, à travers sa finesse, nous a permis d'apprécier l'impact du contrôle position en rotation sur le taux de décroissance de l'énergie du système étudié.

Par ailleurs, il a été montré qu'appliquer la méthode des éléments finis pour la discrétisation de l'espace et la méthode de Crank-Nicolson pour la discrétisation totale mènent à une méthode numérique stable et convergente. Nous avons utilisé l'espace des fonctions d'interpolation cubiques d'Hermite comme espace des éléments finis. Mais il faudrait remarquer que la propriété de dissipativité numérique est indépendante du choix de l'espace des éléments finis. La méthode a été validée par des simulations.

Perspectives

Pour terminer l'étude de la stabilité asymptotique ou exponentielle des systèmes de poutres faite dans les chapitres **2** et **3**, il serait intéressant d'étendre nos résultats aux systèmes avec un contrôle dynamique non linéaire à la frontière. En effet, étant donné que la demande sur des performances de haute précision pour ces systèmes augmente continuellement, il a été toujours intéressant d'obtenir des résultats de stabilité dans les cas du contrôle dynamique linéaire et non linéaire. Mais puisque l'analyse existante pour le contrôle dynamique aux limites linéaires de l'équation de poutres d'Euler-Bernoulli est totalement explorée, il faudrait développer une nouvelle stratégie pour étendre les résultats de stabilité au cas non linéaire.

Un autre sujet de recherche qui s'avèrera intéressant est de développer une méthode numérique dissipative, stable et convergente semblable à celle du Chapitre **4** avec un choix d'espace approprié pour le problème d'équation de poutres présenté au Chapitre

3 c'est-à-dire une équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables avec un amortisseur visqueux.

Annexe A

Pour la première partie

Dans le but de garder l'intégrité de cette thèse, les résultats importants utilisés et qui n'ont pas été justifiés au sein des chapitres ont été prouvés ici dans cette annexe.

Pour commencer, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème A.1. *La formulation faible de (2.14)-(2.16) définie comme suit*

$$\int_0^1 mw\bar{\varphi} dx + \int_0^1 EIw_{xx}(x)\bar{\varphi}_{xx} dx + (\alpha + \beta)w_x(1)\overline{\varphi_x(1)} = \int_0^1 (g+f)m\bar{\varphi} dx + \alpha f_x(1)\overline{\varphi_x(1)}.$$

admet une unique solution $w \in H_E^2(0, 1)$.

Démonstration. Posons

$$a(w, \varphi) = \int_0^1 mw\bar{\varphi} dx + \int_0^1 EIw_{xx}(x)\bar{\varphi}_{xx} dx + (\alpha + \beta)w_x(1)\overline{\varphi_x(1)}$$

et

$$l(\varphi) = \int_0^1 (g + f)m\bar{\varphi} dx + \alpha f_x(1)\overline{\varphi_x(1)}.$$

Montrons que a est une forme bilinéaire continue et coercive.

Soient $w, \varphi \in H_E^2(0, 1)$ et $x \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned}
|a(w, \varphi)| &\leq \int_0^1 m(x)|w||\overline{\varphi}| \, dx + \int_0^1 EI(x)|w_{xx}||\overline{\varphi_{xx}}| \, dx + (\alpha + \beta)|w_x(1)||\overline{\varphi_x(1)}| \\
&\leq \|m\|_\infty \int_0^1 |w||\overline{\varphi}| \, dx + \|EI\|_\infty \int_0^1 |w_{xx}||\overline{\varphi_{xx}}| \, dx + (\alpha + \beta)|w_x(1)||\overline{\varphi_x(1)}| \\
&\leq \|m\|_\infty \int_0^1 |w||\varphi| \, dx + \|EI\|_\infty \int_0^1 |w_{xx}||\varphi_{xx}| \, dx + (\alpha + \beta)|w_x(1)||\varphi_x(1)| \\
&\leq \|m\|_\infty \|w\|_{L^2(0,1)} \|\varphi\|_{L^2(0,1)} + \|EI\|_\infty \|w_{xx}\|_{L^2(0,1)} \|\varphi_{xx}\|_{L^2(0,1)} \\
&\quad + (\alpha + \beta) \|w_x\|_\infty \|\varphi_x\|_\infty \\
&\leq (\|m\|_\infty + \|EI\|_\infty) \|w\|_{H_E^2(0,1)} \|\varphi\|_{H_E^2(0,1)} + (\alpha + \beta)M \|w\|_{H_E^2(0,1)} \|\varphi\|_{H_E^2(0,1)} \\
|a(w, \varphi)| &\leq (\|m\|_\infty + \|EI\|_\infty + (\alpha + \beta)M) \|w\|_{H_E^2(0,1)} \|\varphi\|_{H_E^2(0,1)},
\end{aligned}$$

M étant une constante positive.

D'où a est continue sur $H_E^2(0, 1) \times H_E^2(0, 1)$.

Soient $w \in H_E^2(0, 1)$ et $x \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned}
a(w, w) &= \int_0^1 m|w|^2 \, dx + \int_0^1 EI|w_{xx}|^2 \, dx + (\alpha + \beta)|w_x(1)|^2 \\
&= \int_0^1 m|w|^2 \, dx + \int_0^1 EI|w_{xx}|^2 \, dx + \beta|w_x(1)|^2 + \alpha|w_x(1)|^2 \\
&= \|w\|_{\mathcal{H}} + \alpha|w_x(1)|^2 \\
&\geq \|w\|_{\mathcal{H}} = \|w\|_{H_E^2(0,1)} + \|w\|_{L^2(0,1)} \\
a(w, w) &\geq \|w\|_{H_E^2(0,1)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, a est coercive sur $H_E^2(0, 1) \times H_E^2(0, 1)$.

Montrons que l est continue sur $H_E^2(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
l(\varphi) &= \int_0^1 (g + f)m\overline{\varphi} \, dx + \alpha f_x(1)\overline{\varphi_x(1)} \\
|l(\varphi)| &\leq \int_0^1 (|g| + |f|)m|\overline{\varphi}| \, dx + \alpha|f_x(1)||\overline{\varphi_x(1)}| \\
&\leq \|m\|_\infty (\|g\|_{L^2(0,1)} + \|f\|_{L^2(0,1)}) \|\varphi\|_{L^2(0,1)} + \alpha\|f_x\|_\infty \|\varphi_x\|_\infty \\
|l(\varphi)| &\leq C\|\varphi\|_{H_E^2(0,1)} \quad \text{où } C \text{ est une constante positive.}
\end{aligned}$$

Ainsi, le Théorème de Lax Milgram permet de conclure.

Soit $\varphi \in D(0, 1)$. Par deux intégrations par parties, on obtient

$$\int_0^1 mw\overline{\varphi(x)} dx + \int_0^1 (EIw_{xx})_{xx}\overline{\varphi(x)} dx = \int_0^1 l\overline{\varphi} dx \text{ avec } l = m(g + f) .$$

Ce qui équivaut à

$$\int_0^1 (mw + (EIw_{xx})_{xx} - l)\overline{\varphi} dx = 0.$$

Ce qui implique que

$$(mw + (EIw_{xx})_{xx} - l)\overline{\varphi} = 0; \quad \forall \varphi \in D(0, 1).$$

D'où

$$mw + (EIw_{xx})_{xx} = l \in D'(0, 1).$$

En utilisant en particulier φ dans $H_E^2(0, 1)$, nous retrouvons les conditions aux bords. \square

Nous avons aussi le théorème suivant pour une fonction d'amortissement $\gamma(\cdot)$. Il a été utilisé dans les théorèmes 2.1 et 3.1 respectivement dans les chapitres **2** et **3**. Nous le démontrons pour une fonction $\gamma(\cdot)$ quelconque, qu'elle soit nulle ou non.

Théorème A.2. *Le système d'équations d'inconnue (f_1, f_2) vérifiant*

$$f_2(x) = g_1(x), \quad g_1 \in H_E^2(0, 1) \quad (\text{A.1})$$

$$(EI(x)f_1''(x))'' = -m(x)g_2(x) - \gamma(x)f_2(x), \quad g_2 \in L^2(0, 1) \quad (\text{A.2})$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$(EI(\cdot)f_1''(\cdot))'(1) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$-EI(1)f_1''(1) = \alpha f_2'(1) + \beta f_1'(1) = \alpha g_1'(1) + \beta f_1'(1). \quad (\text{A.5})$$

admet comme solution unique

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2(x) = g_1(x) \\ f_1(x) = - \int_0^x \int_0^s \left[\frac{\beta f_1'(1) + \alpha g_1'(1)}{EI(\xi)} + \frac{1}{EI(\xi)} \int_\eta^1 \int_\xi^1 m(r)g_2(r) + \gamma(r)g_1(r) dr d\eta \right] d\xi ds. \end{array} \right.$$

De plus, on a

$$f_1'(1) = -\frac{\int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta d\xi + \alpha g_1'(1) \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi}{1 + \beta \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi}.$$

Démonstration. D'après l'équation (A.2), nous avons

$$(EI(x) f_1''(x))'' = -m(x) g_2(x) - \gamma(x) g_1(x)$$

Par une intégration, nous obtenons pour tout $0 \leq x < 1$:

$$\int_x^1 (EI(r) f_1''(r))'' dr = -\int_x^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr;$$

Ce qui donne :

$$(EI(\cdot) f_1''(\cdot))'(1) - (EI(x) f_1''(x))' = -\int_x^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr.$$

En utilisant la condition au bord (A.4), nous avons :

$$-(EI(x) f_1''(x))' = -\int_x^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr;$$

Par une autre intégration, on obtient pour tout $0 \leq x < 1$:

$$-\int_x^1 (EI(\eta) f_1''(\eta))' d\eta = -\int_x^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta$$

Ce qui implique que

$$-EI(1) f_1''(1) + EI(x) f_1''(x) = -\int_x^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta.$$

En utilisant la condition au bord (A.5), nous avons :

$$\alpha g_1'(1) + \beta f_1'(1) + EI(x) f_1''(x) = -\int_x^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta$$

Ou encore

$$\frac{\beta}{EI(x)} f_1'(1) + f_1''(x) = -\frac{1}{EI(x)} \int_x^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta - \frac{\alpha}{EI(x)} g_1'(1).$$

Par une nouvelle intégration

$$\begin{aligned} \int_0^x f_1''(\xi) d\xi + \beta f_1'(1) \int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} d\xi &= -\alpha g_1'(1) \int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} d\xi \\ &\quad - \int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta d\xi \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} f_1'(x) + \beta f_1'(1) \int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} d\xi &= \int_0^x -\frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta d\xi \\ &\quad - \alpha g_1'(1) \int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Par une dernière intégration, on a

$$\begin{aligned} \int_0^x f_1'(s) ds + \beta f_1'(1) \int_0^x \int_0^s \frac{1}{EI(\xi)} d\xi ds \\ &= - \int_0^x \int_0^s \frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta d\xi ds \\ &\quad - \alpha g_1'(1) \int_0^x \int_0^s \frac{1}{EI(\xi)} d\xi ds. \end{aligned}$$

En utilisant la condition au bord (A.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} f_1(x) + \beta f_1'(1) \int_0^x \int_0^s \frac{1}{EI(\xi)} d\xi ds \\ &= - \int_0^x \int_0^s \frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r) dr d\eta d\xi ds \\ &\quad - \alpha g_1'(1) \int_0^x \int_0^s \frac{1}{EI(\xi)} d\xi ds. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f_1(x) = - \int_0^x \int_0^s \left[\frac{\beta f_1'(1) + \alpha g_1'(1)}{EI(\xi)} + \frac{1}{EI(\xi)} \int_\eta^1 \int_\xi^1 m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r) dr d\eta \right] d\xi ds.$$

Il reste à déterminer $f'(1)$. En remplaçant x par 1 dans (A.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} f_1'(1) + \beta f_1'(1) \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi &= \int_0^1 -\frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta d\xi \\ &\quad - \alpha g_1'(1) \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$f_1'(1) \left(1 + \beta \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi \right) = \int_0^1 -\frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta d\xi - \alpha g_1'(1) \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi.$$

D'où on a :

$$f_1'(1) = -\frac{\int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 [m(r) g_2(r) + \gamma(r) g_1(r)] dr d\eta d\xi + \alpha g_1'(1) \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi}{1 + \beta \int_0^1 \frac{1}{EI(\xi)} d\xi}.$$

□

Méthode d'obtention des coefficients $a(z)$, $b(z)$ et $c(z)$ du système (2.15).

Posons

$$f(z) = \phi(z)$$

où

$$z = z(x) = \frac{1}{h} \int_0^x \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta \quad \text{et} \quad h = \int_0^1 \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta.$$

On a donc

$$z_x = z_x(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Dans le but de transformer le système (2.20), on calcule les dérivées successives suivantes :

$$\phi'(x) = z' \times f'(z) = z_x f'(z).$$

$$\phi''(x) = z'' \times f'(z) + z'^2 \times f''(z) = z_{xx} f'(z) + z_x^2 f''(z).$$

$$\phi'''(x) = z_{xxx} f'(z) + 3z_{xx} z_x f''(z) + z_x^3 f'''(z).$$

$$\phi^{(4)}(x) = z_{xxxx} f'(z) + 4z_{xxx} z_x f''(z) + 3z_{xx}^2 f'''(z) + 3z_{xx} z_x^2 f'''(z) + 6z_x^2 z_{xx} f''(z) + z_x^4 f^{(4)}(z).$$

En remplaçant les dérivées précédentes dans la première équation de (2.20), en rangeant par ordre décroissant les dérivées de f et en divisant toute l'équation par z_x^4 , on

obtient les coefficients $a(z)$, $b(z)$ et $c(z)$ du système (2.15) donnés comme suit :

$$a(z) = \frac{6z_{xx}}{z_x^2} + \frac{2EI'(x)}{z_x EI(x)}$$

$$b(z) = \frac{3z_{xx}^2}{z_x^4} + \frac{6z_{xx}EI'(x)}{z_x^3 EI(x)} + \frac{EI''(x)}{z_x^2 EI(x)} + \frac{4z_{xxx}}{z_x^3}$$

$$c(z) = \frac{z_{xxxx}}{z_x^4} + \frac{2z_{xxx}EI'(x)}{z_x^4 EI(x)} + \frac{z_{xx}EI''(x)}{z_x^4 EI(x)}$$

Méthode d'obtention des coefficients $b_1(z)$, $c_1(z)$, $d_1(z)$, b_{11} , b_{12} , b_{21} , b_{22} et b_{23} du système (2.28).

Dans le but de supprimer le terme de la dérivée troisième à savoir $a(z) f'''(z)$ de (2.22), une nouvelle transformation d'espace inversible est introduite :

$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) f(z), \quad 0 < z < 1.$$

Ce qui implique que

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) g(z), \quad 0 < z < 1.$$

On dérive successivement $f(z)$.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(-\frac{1}{4}a(z)g(z) + g'(z)\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) \\ f''(z) &= \left(-\frac{1}{4}a'(z)g(z) - \frac{1}{2}a(z)g'(z) + \frac{1}{16}a^2(z)g(z) + g''(z)\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) \\ f'''(z) &= \left(-\frac{1}{4}a''(z)g(z) - \frac{3}{4}a'(z)g'(z) - \frac{3}{4}a(z)g''(z) + \frac{3}{16}a'(z)a(z)g(z)\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) \\ &\quad + \left(\frac{3}{16}a^2(z)g'(z) - \frac{1}{64}a^3(z)g(z) + g'''(z)\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) \\ f^{(4)}(z) &= \left(-\frac{1}{4}a'''(z)g(z) - a''(z)g'(z) - \frac{3}{2}a'(z)g''(z) - a(z)g'''(z)\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}a''(z)a(z)g(z) + \frac{3}{16}a'^2(z)g(z) + \frac{3}{4}a'(z)a(z)g'(z)\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) \\ &\quad + \left(\frac{3}{8}a^2(z)g''(z) - \frac{3}{32}a^2(z)a'(z)g(z)\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{16}a^3(z)g'(z) + \frac{1}{256}a^4(z)g(z) + g^{(4)}(z)\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) \end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées précédentes dans le système (2.22), on obtient les coefficients $b_1(z)$, $c_1(z)$, $d_1(z)$, b_{11} , b_{12} , b_{21} , b_{22} et b_{23} du système (2.28) définie par (2.29)-(2.36).

Annexe B

Pour la deuxième partie

Lemme B.1. Soit $V = \{w \in H^2(0, 1) \mid w(0) = w_x(0) = 0\}$.

Alors il existe une suite de fonctions $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ telle que

$\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ soit une base orthogonale de V

et

$\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ soit une base orthonormale de $L^2(0, 1)$.

Démonstration. Considérons L un opérateur différentiel d'ordre 4 défini par :

$$Lw = w_{xxxx}.$$

Considérons le problème aux limites suivant :

$$Lw(x) = f(x), \quad x \in (0, 1) \tag{B.1}$$

$$w(0) = 0, \tag{B.2}$$

$$w_x(0) = 0, \tag{B.3}$$

$$w_{xx}(1) = 0, \tag{B.4}$$

$$w_{xxx}(1) = 0. \tag{B.5}$$

Supposons aussi que $f \in L^2(0, 1)$.

Soit $\phi \in V$. En multipliant (B.1) par ϕ , en intégrant deux fois par parties et en tenant compte des conditions aux bords (B.2)-(B.5), on obtient :

$$\int_0^1 w_{xx} \phi_{xx} \, dx = \int_0^1 f \phi \, dx$$

pour tout $\phi \in V$.

Le fait que $f \in L^2(0, 1)$ assure la continuité de la forme linéaire.

La forme bilinéaire symétrique

$$a(w, \phi) = \int_0^1 w_{xx} \phi_{xx} \, dx$$

est continue et coercive sur V . En effet,

$$\begin{aligned} |a(w, \phi)| &\leq \int_0^1 |w_{xx} \phi_{xx}| \, dx \\ &\leq \|w_{xx}\|_{L^2(0,1)} \|\phi_{xx}\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \|w\|_{H^2(0,1)} \|\phi\|_{H^2(0,1)} \\ &\leq \|w\|_V \|\phi\|_V. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la continuité de a . De plus, on a :

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \|w_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\geq \|w\|_{L^2(0,1)}^2 \\ a(w, w) &\geq \frac{1}{9} \|w\|_V^2. \end{aligned}$$

Ainsi, le Théorème de Lax-Milgram nous permet de montrer que la formulation faible admet une unique solution $w \in V$.

De ce qui précède, il existe une unique solution faible dans V définie par

$$w = L^{-1}(f)$$

avec

$$L^{-1} : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1).$$

On remarque que L^{-1} est un opérateur linéaire et continue.

De plus,

$$\|w\|_{H^2(0,1)} \leq C \|f\|_{L^2(0,1)}$$

et grâce à l'injection compacte de V dans $L^2(0, 1)$ alors L^{-1} est compact.

Il reste à montrer que l'opérateur L^{-1} est symétrique.

Soient $f, g \in L^2(0, 1)$ et posons

$$w = L^{-1}(f)$$

et

$$v = L^{-1}(g).$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle L^{-1}f, g \rangle_{L^2(0,1)} &= \langle w, g \rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \int_0^1 w g \, dx \\ &= \int_0^1 w Lv \, dx \\ \langle L^{-1}f, g \rangle_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 wv_{xxxx} \, dx. \end{aligned}$$

Par deux intégrations par parties, on obtient finalement :

$$\langle L^{-1}f, g \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 v_{xx}w_{xx} \, dx = a(v, w). \quad (\text{B.6})$$

De la même manière, on obtient :

$$\langle f, L^{-1}g \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 w_{xx}v_{xx} \, dx = a(w, v). \quad (\text{B.7})$$

Puisque a est symétrique, on a :

$$\langle L^{-1}f, g \rangle_{L^2(0,1)} = \langle f, L^{-1}g \rangle_{L^2(0,1)}.$$

D'où L^{-1} est symétrique.

Au regard des propriétés de compacité et de symétrie de l'opérateur linéaire continue L^{-1} , il existe une base orthonormale $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $L^2(0, 1)$ constituée de vecteurs propres de L^{-1} .

De plus, ces vecteurs propres sont des fonctions de V selon la définition de l'opérateur L^{-1} . Aussi par la formulation faible, on remarque que la base $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ est bien une base orthogonale de V muni du produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$. \square

Annexe C

Les trois (3) articles publiés dans
deux (2) journaux spécialisés

A study of exponential stability for a flexible Euler-Bernoulli beam with variable coefficients under a force control in rotation and velocity rotation

Bomisso G. Jean Marc

*Université Nangui Abrogoua d'Abobo-Adjamé and
UFR Sciences Fondamentales et Appliquées,
BP 801 Abidjan 02, Côte d'Ivoire.
E-mail: bogojm@yahoo.fr*

Touré K. Augustin

*Institut National Polytechnique
Houphouët-Boigny de Yamoussoukro,
BP 2444 Yamoussoukro, Côte d'Ivoire.
E-mail: latoureci@gmail.com*

Yoro Gozo

*Université Nangui Abrogoua d'Abobo-Adjamé and
UFR Sciences Fondamentales et Appliquées,
BP 801 Abidjan 02, Côte d'Ivoire.
E-mail: yorocarol@yahoo.fr*

Abstract

In this article, we examine the exponential stability for a flexible Euler-Bernoulli beam with variable coefficients clamped at one end and is free at the other. In order to stabilize the system, we apply a linear boundary control force in rotation and velocity rotation. By adopting the Riesz basis approach, it is shown that the closed-loop system is a Riesz spectral system. Consequently, the spectrum-determined growth condition and the exponential stability are obtained.

AMS subject classification: 35B35, 35P20, 93D15.

Keywords: Beam equation, boundary feedback control, exponential stability, semi-group theory, Riesz basis.

1. Introduction

In this paper, we study the Riesz basis property and the exponential stability for a flexible Euler-Bernoulli beams with variable coefficients under a force control in rotation and velocity rotation. The equations of motion of the system are described as follows

$$m(x)w_{tt}(x, t) + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

$$(EI(\cdot)w_{xx})_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$-EI(1)w_{xx}(1, t) = \alpha w_{xt}(1, t) + \beta w_x(1, t), \quad t > 0, \quad (1.4)$$

where α and β are two given positive constants, $w(x, t)$ stands for the transverse displacement of the beam at the position x and time t . The subscripts t and x denote derivatives with respect to the time t and the position x respectively. Without loss of generality, the length of the beam is chosen to be unity. $EI(x)$ is the flexural rigidity function and $m(x)$ is the mass density function of the beam. $-(EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx}$ is the total lateral force acting on a slice of the beam of length dx , located at the position x and the time t . $(EI(\cdot)w_{xx})_x(1, t)$ and $-EI(1)w_{xx}(1, t)$ are the force and the torque acting on the rigid body from the beam at the time t . Throughout the paper, we always assume that:

$$m(x), EI(x) \in C^4(0, 1), \quad m(x), EI(x) > 0$$

for any $x \in [0, 1]$. Likewise, the coefficients are supposed to be variable because it is common, in engineering, to adopt problems with nonhomogeneous materials such as smart materials ([9]).

Exponential stability is the most desirable kind of stability. More precisely, the problem (1.1)-(1.4) is the nonuniform version to ([15], case $\beta \neq 0$) and ([13], case $\beta = 0$). In their papers, the authors have proved that the uniform closed-loop system is well-posed in the sense of C_0 -semigroup of contractions theory. From Shkalikov's method [14], a spectral analysis of the operator and the property of the Riesz basis were studied to derive the exponential stability of the system. Moreover, there are two steps usually found in the study of linear systems with variable coefficients (see e.g. [6]): the first is to transform the dominant term of the system under study into a uniform dominant equation by space scaling and state transformation where no variable coefficient is involved any longer, while the second is to approximate the eigenfunctions of the system by those of the uniform dominant equation. This fundamental idea comes essentially from Birkhoff's works [2] and from [11]. This approach was used to study the Euler-Bernoulli equations with variable coefficients (see [6], [7], [17], [18]). Also, another method which is used for the verification of the Riesz basis is the Bari's Theorem. In our case, we use a result due to Wang et al. (see e.g. [17]) in order to study the problem with eigenvalues related to problem (1.1)-(1.4) in the form of an ordinary differential equation $L(f) = \lambda f$ with λ -polynomials boundary conditions (see [14]; [16]). We establish conditions on the two feedbacks parameters at the boundary α and β in order to obtain the property of the Riesz basis and the exponential stability of the system (1.1)-(1.4).

The rest of the paper is organized as follows. In section 2, the system (1.1)-(1.4) is formulated as an evolution problem and studied in semigroup framework. In order to examine if the system is exponentially stable, in section 3, the spectrum of the system operator is analyzed and it is demonstrated that the generalized eigenvalues of the operator form an Riesz basis in the corresponding state space.

2. Semigroup formulation

The semigroups generated by the system operator of an abstract Cauchy problem, can be used to completely characterize the well-posedness and the stability of its solution. Hence, the following formulation provides an efficient tool for the discussion on asymptotic and exponential stability. In the following, the notation $v = w_t$ (velocity of the beam) is used. Let us introduce the following spaces:

$$H_E^2(0, 1) = \{w \in H^2(0, 1) \mid w(0) = w_x(0) = 0\}. \tag{2.1}$$

The Hilbert space is defined by:

$$\mathbb{H} = H_E^2(0, 1) \times L^2(0, 1), \tag{2.2}$$

with the inner product

$$\langle w, v \rangle_{\mathbb{H}} = \int_0^1 \left(m(x) f_2(x) \overline{g_2(x)} + EI(x) f_1''(x) \overline{g_1''(x)} \right) dx + \beta f_1'(1) \overline{g_1'(1)}, \tag{2.3}$$

where $w = (f_1, f_2)^T \in \mathbb{H}$, $v = (g_1, g_2)^T \in \mathbb{H}$ and we denote by $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ the corresponding norm. The superscript T stands for the transpose and the spaces $L^2(0, 1)$ and $H^k(0, 1)$ are defined as

$$L^2(0, 1) = \left\{ w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^1 |w|^2 dx < \infty \right\} \tag{2.4}$$

$$H^k(0, 1) = \left\{ w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)} \in L^2(0, 1) \right\}. \tag{2.5}$$

Let $A : D(A) \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ an unbounded linear operator with the domain

$$D(A) = \left\{ (f, g)^T \in (H^4(0, 1) \cap H_E^2(0, 1)) \times H_E^2(0, 1) \mid (EI(\cdot) f''(\cdot))'(1) = 0, \right. \\ \left. -EI(1) f''(1) = \alpha g_x(1) + \beta f_x(1) \right\} \tag{2.6}$$

defined by

$$A(f, g)^T = \left(g(x), -\frac{1}{m(x)} (EI(x) f''(x))'' \right)^T. \tag{2.7}$$

Now (1.1)–(1.4) can be written formally as a first order evolution problem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{H}, \end{cases} \tag{2.8}$$

where $y(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T$, $y(0) = (w_0, v_0)^T$ for all $t > 0$.

We demonstrate now the following fundamental well-posedness result for the system (1.1)–(1.4).

Theorem 2.1. The operator A defined by (2.6) and (2.7) is a closed, densely defined, dissipative operator with compact resolvents. Furthermore, A is invertible with A^{-1} being compact and A generates a C_0 -semigroup of contractions on \mathbb{H} denoted by $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Proof. When the functions $\mu = EI = 1$, this result is obtained in [15]. We will use again here the well known Lumer-Phillips theorem (see, e.g., [12]). First, we will show that the operator A is dissipative. For any $w = (f, g)^T \in D(A)$,

$$\langle Aw, w \rangle = \left\langle \left(g(x), -\frac{1}{\mu(x)}(EI(x)f''(x))'' \right)^T, (f, g)^T \right\rangle$$

$$\langle Aw, w \rangle = - \int_0^1 (EI(x)f''(x))'' \overline{g(x)} dx + \int_0^1 EI(x)g''(x) \overline{f''(x)} dx + \beta g'(1) \overline{f'(1)}$$

Integrating twice by parts and using the boundary conditions (1.2)–(1.4), we have

$$\begin{aligned} \langle Aw, w \rangle = & - \int_0^1 EI(x)[g''(x) \overline{f''(x)} - f''(x) \overline{g''(x)}] dx \\ & + \beta(g'(1) \overline{f'(1)} - f'(1) \overline{g'(1)}) - \alpha |g'(1)|^2. \end{aligned}$$

Taking real parts, we obtain $Re \langle Aw, w \rangle = -\alpha |g'(1)|^2 < 0$. Thus, A is a dissipative operator.

Next, the domain $D(A)$ is clearly dense in \mathbb{H} and the operator is closed. Finally, we prove that A^{-1} exists. For any $\Psi = (g_1, g_2)^T \in \mathbb{H}$, we need to find a unique $\Phi = (f_1, f_2)^T \in D(A)$ such that $A\Phi = \Psi$ which yields

$$\begin{aligned} f_2(x) &= g_1(x), \quad g_1 \in H_E^2(0, 1) \\ ((EI(x)f_1''(x))'' &= -m(x)g_2(x), \quad g_2 \in L^2(0, 1) \\ f_1(0) &= f_1'(0) = (EI(\cdot)f_1''(\cdot))'(1) = 0 \\ -EI(1)f_1''(1) &= \alpha f_2'(1) + \beta f_1'(1) = \alpha g_1'(1) + \beta f_1'(1). \end{aligned}$$

A direct computation shows that the above solution is given by

$$\begin{cases} f_2(x) = g_1(x) \\ f_1(x) = - \int_0^x \int_0^s \left[\frac{\beta f_1'(1) + \alpha g_1'(1)}{EI(\xi)} + \frac{1}{EI(\xi)} \int_\eta^1 \int_x^1 m(r) g_2(r) dr d\eta \right] d\xi ds. \end{cases}$$

Thus, A^{-1} exists and is bounded on \mathbb{H} . Furthermore, the Sobolev embedding Theorem implies that A^{-1} is compact on \mathbb{H} . Now according to Lumer-Phillips Theorem, the statement of the Theorem follows. ■

3. Riesz basis and Exponential stability

3.1. Spectral Analysis of operator A

In this subsection, we study the eigenvalue problem of A . Our work shall make use of the following result from [18], which deals with the eigenvalue problem of beams in the form of an ordinary differential equation $L(f) = \lambda f$ with λ -polynomial boundary conditions (see [14]; [16]). To begin, we recall some notations and definitions. Let $L(f)$ be an ordinary differential operator of order $n = 2m \in \mathbb{N}$,

$$L(f) = f^{(n)}(x) + \sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x) f^{(n-\nu)}(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3.1}$$

and let the boundary conditions defined at the two points $x = 0$, and $x = 1$ be

$$B_j(f) = \sum_{\nu=0}^{k_j} \left(\alpha_{j\nu} f^{(k_j-\nu)}(0) + \beta_{j\nu} f^{(k_j-\nu)}(1) \right), \quad 1 \leq j \leq n, \tag{3.2}$$

where $k_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k_j \leq n - 1$ and $\alpha_{j\nu}, \beta_{j\nu} \in \mathbb{C}$, $|\alpha_{j0}| + |\beta_{j0}| > 0$. Suppose that the coefficient functions $f_{\nu}(x)$ ($1 \leq \nu \leq n$) in (3.1) are sufficiently smooth in $(0, 1)$, and that the boundary conditions are normalized in the sense that $\kappa = \sum_{j=1}^n k_j$ is minimal with respect to all equivalent boundary conditions (see M. A. Naimark [11]).

Let $f_k(x, \rho)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) be the fundamental solutions for the equation:

$$L(f) + \rho^n f + \rho^m \mu(x) f(x) = 0, \quad \rho \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

where $\mu(x)$ being continuous in $[0, 1]$, and let ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) be the n -th roots of $\omega^n + 1 = 0$. If we denote by $\Delta(\rho)$ the characteristic determinant of (3.3) with respect to (3.2)

$$\Delta(\rho) = \det \left[B_j(f_k(\cdot, \rho)) \right]_{j,k=1,2,\dots,n},$$

then $\Delta(\rho)$ can be expressed asymptotically in the form for $(r \geq 1)$

$$\Delta(\rho) = \rho^{\kappa} \sum_{\mathbb{k}_k} e^{\rho \mu_{\mathbb{k}_k}} \left[F^{\mathbb{k}_k} \right]_r, \tag{3.4}$$

whenever ρ is large enough (see A. A. Shkalikov [14] and M. A. Naimark [11]). Here, \mathbb{k}_k is a k -elements subset of $\{1, 2, \dots, n\}$, $\mu_{\mathbb{k}_k} = \sum_{j \in \mathbb{k}_k} \omega_j$,

$$\left[F^{\mathbb{k}_k} \right]_r = F_0^{\mathbb{k}_k} + \rho^{-1} F_1^{\mathbb{k}_k} + \dots + \rho^{-r+1} F_{r-1}^{\mathbb{k}_k} + \mathcal{O}(\rho^{-r}),$$

and the sum runs over all possible selections of \mathbb{k}_k . Here and henceforth, $\mathcal{O}(\rho^{-r})$ means that $|\rho^r \times \mathcal{O}(\rho^{-r})|$ is bounded as $|\rho| \rightarrow \infty$.

Definition 3.1. ([18] p. 461) The boundary problem (3.3) with (3.2) is said to be regular if the coefficients $F_0^{\mathbb{k}_k}$ in (3.4) are nonzero. Furthermore, the regular boundary problem (3.3) with (3.2) is said to be strongly regular if the zeros of $\Delta(\rho)$ are asymptotically simple and isolated one from another.

Let $W_2^m(0, 1)$ be the usual Sobolev space of order m and let

$$V_E^m(0, 1) = \{f(x) \in W_2^m(0, 1) \mid B_j(f) = 0, \quad k_j < m\}.$$

Define a Hilbert space

$$H = V_E^m(0, 1) \times L^2(0, 1),$$

with the norm

$$\|(f, g)\|_H^2 = \|f\|_{W_2^m}^2 + \|g\|_2^2$$

and define the operator \mathbb{A} in H by

$$\begin{cases} \mathbb{A}(f, g) = (g, -L(f) - \mu(x)g) \\ D(\mathbb{A}) = \{(f, g) \in H \mid \mathbb{A}(f, g) \in H, B_j(f) = 0, k_j \geq m\}. \end{cases} \quad (3.5)$$

The following result used in [18] was presented in [19]. The reader can be also referred to ([17], chapter 3).

Theorem 3.2. ([18] p. 461) If the ordinary differential system with parameter $\lambda = \rho^m$

$$\begin{cases} L(f, \lambda) = L(f) + \lambda^2 f + \lambda \mu(x) f \\ B_j(f) = 0, \quad 1 \leq j \leq 2m \end{cases} \quad (3.6)$$

has strongly regular boundary conditions, then the generalized eigenfunction system of \mathbb{A} form a Riesz basis in the Hilbert space H .

According to Theorem 2.1, A has a compact resolvent then $\sigma(A)$, the spectrum of A consists only of isolated eigenvalues, which distribute in conjugate pairs on the complex plane.

Let $\lambda \in \sigma(A)$ and $\Phi = (\phi, \Psi)$ be an eigenfunction of A corresponding to λ . Then we have $\Psi = \lambda\phi$ and ϕ satisfies the following equations:

$$\begin{cases} \lambda^2 m(x)\phi(x) + (EI(x)\phi''(x))'' = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot)\phi''(\cdot))'(1) = 0 \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \quad (3.7)$$

In order to solve (3.7), spatial transformations as introduced in [6] are performed, which convert the first equation of (3.7) into a more convenient form. For this reason, (3.7) is

firstly rewritten as:

$$\begin{cases} \phi^{(4)}(x) + \frac{2EI'(x)}{EI(x)}\phi'''(x) + \frac{EI''(x)}{EI(x)}\phi''(x) + \frac{\lambda^2 m(x)}{EI(x)}\phi(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot)\phi''(\cdot))'(1) = 0 \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \quad (3.8)$$

In order to transform the coefficient function appearing with ϕ in the first expression of (3.8) into a constant, a space transformation is introduced. Let

$$f(z) = \phi(x), \quad z = z(x) = \frac{1}{h} \int_0^x \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta \quad (3.9)$$

where

$$h = \int_0^1 \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta.$$

Thus, (3.8) can be transformed using again its boundary conditions

$$\begin{cases} f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \lambda^2 h^4 f(z) = 0, & 0 < z < 1, \\ f(0) = f'(0) = 0, \\ EI(1)z_x^3(1)f'''(1) + [EI'(1)z_x^2(1) + 3EI(1)z_{xx}(1)z_x(1)]f''(1) \\ + [EI(1)z_{xxx}(1) + EI'(1)z_{xx}(1)]f'(1) = 0, \\ f''(1) + \left[\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha\lambda + \beta}{EI(1)z_x(1)} \right]f'(1) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

with

$$a(z) = \frac{6z_{xx}}{z_x^2} + \frac{2EI'(x)}{z_x EI(x)} \quad (3.11)$$

$$b(z) = \frac{3z_{xx}^2}{z_x^4} + \frac{6z_{xx}EI'(x)}{z_x^3 EI(x)} + \frac{EI''(x)}{z_x^2 EI(x)} + \frac{4z_{xxx}}{z_x^3} \quad (3.12)$$

$$c(z) = \frac{z_{xxxx}}{z_x^4} + \frac{2z_{xxx}EI'(x)}{z_x^4 EI(x)} + \frac{z_{xx}EI''(x)}{z_x^4 EI(x)} \quad (3.13)$$

$$z_x = \frac{1}{h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad z_x^4 = \frac{1}{h^4} \frac{m(x)}{EI(x)} \quad (3.14)$$

and

$$z_{xx} = \frac{1}{4h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{d}{dx} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.15)$$

In order to solve (3.10), the strategy as in Chapter 2, Section 4 of [11] is used. Hence, in order to eliminate the third derivative term $a(z) f'''(z)$ in (3.10), a new invertible space transformation is introduced:

$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) f(z), \quad 0 < z < 1.$$

Boundary value problem (3.10) can be written as:

$$\begin{cases} g^{(4)}(z) + b_1(z) g''(z) + c_1(z) g'(z) + d_1(z) g(z) + \lambda^2 h^4 g(z) = 0, & 0 < z < 1, \\ g(0) = g'(0) = 0 \\ g''(1) + b_{11} g'(1) + b_{12} g(1) = 0 \\ g'''(1) + b_{21} g''(1) + b_{22} g'(1) + b_{23} g(1) = 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

where

$$b_1(z) = -\frac{3}{2} a'(z) - \frac{3}{8} a^2(z) + b(z) \quad (3.17)$$

$$c_1(z) = \frac{1}{8} a^3(z) - \frac{1}{2} a(z) b(z) - a''(z) + c(z) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} d_1(z) = & \frac{3}{16} a^2(z) - \frac{1}{4} a'''(z) + \frac{3}{32} a'(z) a^2(z) - \frac{3}{256} a^4(z) \\ & + b(z) \left(\frac{1}{16} a^2(z) - \frac{1}{4} a'(z) \right) - \frac{a(z) c(z)}{4} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$b_{11} = -\frac{1}{2} a(1) + \frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha \lambda}{EI(1)z_x(1)} + \frac{\beta}{EI(1)z_x(1)} \quad (3.20)$$

$$b_{12} = -\frac{1}{4} a'(1) + \frac{1}{16} a^2(1) - \frac{1}{4} a(1) \left(\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha \lambda}{EI(1)z_x(1)} + \frac{\beta}{EI(1)z_x(1)} \right) \quad (3.21)$$

$$b_{21} = -\frac{3}{4} a(1) + \frac{3z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{EI'(1)}{EI(1)z_x(1)} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} b_{22} = & -\frac{3}{4} a'(1) + \frac{3}{16} a^2(1) - \frac{EI'(1)a(1)}{2EI(1)z_x(1)} - \frac{3z_{xx}(1)a(1)}{2z_x^2(1)} + \frac{z_{xxx}(1)}{z_x^3(1)} \\ & + \frac{EI'(1)z_{xx}(1)}{EI(1)z_x^3(1)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} b_{23} = & -\frac{1}{4} a''(1) + \frac{3}{16} a'(1)a(1) - \frac{1}{64} a^3(1) - \frac{a'(1)EI'(1)}{4EI(1)z_x(1)} \\ & - \frac{3a'(1)z_{xx}(1)}{4z_x^2(1)} + \frac{EI'(1)a^2(1)}{16EI(1)z_x(1)} + \frac{3z_{xx}(1)a^2(1)}{16z_x^2(1)} \\ & - \frac{a(1)z_{xxx}(1)}{4z_x^3(1)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Due to the invertibility of the above transformations, the obtained problem (3.16) is equivalent to the original problem (3.7).

To further solve the eigenvalue problem (3.16), we follow the procedure in G. D. Birkhoff [2], [3] and M. A. Naimark [11] and divide the complex plane into eight distinct sectors,

$$S_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{k\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{(k+1)\pi}{4} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7 \quad (3.25)$$

and let $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ be the roots of equation $\theta^4 + 1 = 0$ that are arranged so that

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_3) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_4), \quad \forall \rho \in S_k. \quad (3.26)$$

Obviously, in sector S_1 , we name the roots of -1 as

$$\omega_1 = \exp\left(i\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_2 = \exp\left(i\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_3 = \exp\left(i\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_4 = \exp\left(i\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

which satisfy the inequalities in (3.26) and choices can also be made for other sectors. In the rest of this section, we shall derive the asymptotic behavior of the eigenvalue of the sectors S_1 and S_2 because the same will hold for the other sectors with similar proofs.

Set $\lambda = \frac{\rho^2}{h^2}$, in each sector S_k . In order to analyse the asymptotic fundamental solutions of system (3.16), we need the following result(see [11] and [18]):

Lemma 3.3. For $\rho \in S_k$ with ρ large enough, the equation:

$$g^{(4)}(z) + b_1(z)g''(z) + c_1(z)g'(z) + d_1(z)g(z) + \rho^4g(z) = 0, \quad 0 < z < 1,$$

has four linearly independent asymptotic fundamental solutions,

$$\Phi_s(z, \rho) = e^{\rho\omega_s z} \left(1 + \frac{\Phi_{s,1}(z)}{\rho} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \right), \quad s = 1, 2, 3, 4$$

and hence their derivatives for $s = 1, 2, 3, 4$ and $j = 1, 2, 3$ are given by

$$\frac{d^j}{dz^j} \Phi_s(z, \rho) = (\rho\omega_s)^j e^{\rho\omega_s z} \left(1 + \frac{\Phi_{s,1}(z)}{\rho} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \right)$$

where

$$\Phi_{s,1}(z) = -\frac{1}{4\omega_s} \int_0^z b_1(\zeta) d\zeta.$$

Hence, for $s = 1, 2, 3, 4$,

$$\Phi_{s,1}(0) = 0, \quad \Phi_{s,1}(1) = -\frac{1}{4\omega_s} \int_0^1 b_1(\zeta) d\zeta = \frac{\mu_1}{\omega_s}, \quad \text{with } \mu_1 = -\frac{1}{4} \int_0^1 b_1(\zeta) d\zeta.$$

For convenience, we introduce the notation $[a]_2 = a + \mathcal{O}(\rho^{-2})$.

Lemma 3.4. For $\rho \in S_1$, if we set $\delta = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, then we have following inequalities

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq -|\rho|\delta, \quad \operatorname{Re}(\rho\omega_4) \geq |\rho|\delta \quad \text{and} \quad e^{\rho\omega_1} = \mathcal{O}(\rho^{-2}) \quad \text{when } |\rho| \rightarrow \infty.$$

Using Lemma 3.3, we obtain asymptotic expressions for the boundary conditions for large enough $|\rho|$, for $s = 1, 2, 3, 4$,

$$U_4(\Phi_s, \rho) = \Phi_s(0, \rho) = 1 + \mathcal{O}(\rho^{-2}) = [1]_2,$$

$$U_3(\Phi_s, \rho) = \Phi'_s(0, \rho) = \rho\omega_s(1 + \mathcal{O}(\rho^{-2})) = \rho\omega_s[1]_2,$$

$$U_2(\Phi_s, \rho) = \Phi''_s(1, \rho) + b_{11}\Phi'_s(1, \rho) + b_{12}\Phi_s(1, \rho),$$

$$U_2(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^2 e^{\rho\omega_s} (1 + \gamma\omega_s^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_s^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_s^{-3} + \mathcal{O}(\rho^{-2}))$$

where

$$\gamma = -\frac{\alpha a(1)}{4EI(1)z_x(1)h^2}.$$

Then,

$$U_2(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^2 e^{\rho\omega_s} [1 + \gamma\omega_s^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_s^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_s^{-3}]_2.$$

Similarly,

$$U_1(\Phi_s, \rho) = \Phi'''_s(1, \rho) + b_{21}\Phi''_s(1, \rho) + b_{22}\Phi'_s(1, \rho) + b_{23}\Phi_s(1, \rho)$$

$$U_1(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^3 e^{\rho\omega_s} (1 + (\mu_1 + b_{21})\rho^{-1}\omega_s^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2}))$$

$$U_1(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^3 e^{\rho\omega_s} [1 + (\mu_1 + b_{21})\rho^{-1}\omega_s^{-1}]_2.$$

Note that $\lambda = \frac{\rho^2}{h^2} \neq 0$ is the eigenvalue of (3.16) if and only if ρ satisfies the characteristic equation

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} U_4(\Phi_1, \rho) & U_4(\Phi_2, \rho) & U_4(\Phi_3, \rho) & U_4(\Phi_4, \rho) \\ U_3(\Phi_1, \rho) & U_3(\Phi_2, \rho) & U_3(\Phi_3, \rho) & U_3(\Phi_4, \rho) \\ U_2(\Phi_1, \rho) & U_2(\Phi_2, \rho) & U_2(\Phi_3, \rho) & U_2(\Phi_4, \rho) \\ U_1(\Phi_1, \rho) & U_1(\Phi_2, \rho) & U_1(\Phi_3, \rho) & U_1(\Phi_4, \rho) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.27)$$

By substitution, we obtain

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} [1]_2 & & & [1]_2 \\ \rho\omega_1 [1]_2 & & & \rho\omega_2 [1]_2 \\ 0 & (\rho\omega_2)^2 e^{\rho\omega_2} \left[1 + \gamma\omega_2^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_2^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_2^{-3} \right]_2 & & \\ 0 & (\rho\omega_2)^3 e^{\rho\omega_2} \left[1 + (\mu_1 + b_{21})\rho^{-1}\omega_2^{-1} \right]_2 & & \\ & & [1]_2 & \\ & & \rho\omega_3 [1]_2 & \\ (\rho\omega_3)^2 e^{\rho\omega_3} \left[1 + \gamma\omega_3^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_3^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_3^{-3} \right]_2 & & & \\ (\rho\omega_3)^3 e^{\rho\omega_3} \left[1 + (\mu_1 + b_{21})\rho^{-1}\omega_3^{-1} \right]_2 & & & \\ & & 0 & \\ & & 0 & \\ (\rho\omega_4)^2 e^{\rho\omega_4} \left[1 + \gamma\omega_4^{-2} + \mu_1\rho^{-1}\omega_4^{-1} + \gamma\mu_1\rho^{-1}\omega_4^{-3} \right]_2 & & & \\ (\rho\omega_4)^3 e^{\rho\omega_4} \left[1 + (\mu_1 + b_{21})\rho^{-1}\omega_4^{-1} \right]_2 & & & \end{vmatrix}.$$

Expanding the above determinant, we obtain the following expression:

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) = \rho^6 e^{\rho\omega_4} \{ & (-1)(\omega_3 - \omega_1) [(\omega_2^{-2} - \omega_4^{-2})\gamma + (\mu_1 + b_{21})(\omega_4^{-1} - \omega_2^{-1})\rho^{-1} \\ & + \gamma(\mu_1 + b_{21})(\omega_2^{-2}\omega_4^{-1} - \omega_4^{-2}\omega_2^{-1})\rho^{-1} \\ & + \mu_1(\omega_2^{-1} - \omega_4^{-1})\rho^{-1} + \gamma\mu_1(\omega_2^{-3} - \omega_4^{-3})\rho^{-1}] e^{\rho\omega_2} \\ & + (\omega_2 - \omega_1) [(\omega_3^{-2} - \omega_4^{-2})\gamma + (\mu_1 + b_{21})(\omega_4^{-1} - \omega_3^{-1})\rho^{-1} \\ & + \gamma(\mu_1 + b_{21})(\omega_3^{-2}\omega_4^{-1} - \omega_4^{-2}\omega_3^{-1})\rho^{-1} \\ & + \mu_1(\omega_3^{-1} - \omega_4^{-1})\rho^{-1} + \gamma\mu_1(\omega_3^{-3} - \omega_4^{-3})\rho^{-1}] e^{-\rho\omega_2} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \}. \end{aligned}$$

In sector S_1 , the choices are such that:

$$\omega_1^2 = -i, \quad \omega_2^2 = i, \quad \omega_3^2 = i, \quad \omega_4^2 = -i, \quad \omega_3^{-1}\omega_4 = i, \quad \omega_2^{-1}\omega_4 = -i, \quad \omega_3 = -\omega_2,$$

$$\omega_4 - \omega_3 = \sqrt{2}, \quad \omega_1 - \omega_3 = \sqrt{2}i, \quad \omega_2 - \omega_1 = \sqrt{2}, \quad \omega_4 - \omega_2 = -i\sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} \omega_2^{-2} - \omega_4^{-2} &= -2i, \quad \omega_3^{-2} - \omega_4^{-2} = -2i, \quad \omega_3^2\omega_4^2 = 1, \quad \omega_2^2\omega_4^2 = 1, \\ \omega_2^{-3} - \omega_4^{-3} &= -(1+i)\omega_2, \quad \omega_3^{-3} - \omega_4^{-3} = (1-i)\omega_2. \end{aligned}$$

Putting them into $\Delta(\rho)$, we obtain:

$$\Delta(\rho) = 2\sqrt{2}\gamma\rho^6 e^{\rho\omega_4} \{ e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + [\mu_2 e^{\rho\omega_2} + \mu_3 e^{-\rho\omega_2}] \rho^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) \}, \quad (3.28)$$

where

$$\begin{cases} \mu_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2\mu_1 + b_{21} - \frac{b_{21}}{\gamma} \right] \\ \mu_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2\mu_1 + b_{21} + \frac{b_{21}}{\gamma} \right] \end{cases} \quad (3.29)$$

Theorem 3.5. If $\gamma \neq 0$, the boundary eigenvalue problem (3.16) is strongly regular.

Proof. Since

$$\Theta_{-1,0} = -2\sqrt{2}i\gamma \quad \Theta_{1,0} = 2\sqrt{2}\gamma \quad \Theta_{0,0} = 0$$

so the eigenvalue problem (3.16) is strongly regular. ■

For the definition of *strongly regular* boundary problem, the reader is referred to (pp. 43 Definition 3.2.5 in [17]).

Now, we compute the asymptotic behavior of λ_n . The equation $\Delta(\rho) = 0$ and (3.28) imply that

$$e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + \mu_2 \rho^{-1} e^{\rho\omega_2} + \mu_3 \rho^{-1} e^{-\rho\omega_2} + \mathcal{O}(\rho^{-2}) = 0 \quad (3.30)$$

which can be rewritten as

$$e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + \mathcal{O}(\rho^{-1}) = 0. \quad (3.31)$$

Ignoring the higher order terms, the following equation

$$e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} = 0$$

has solutions

$$\rho_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Let $\tilde{\rho}_n$ be the solutions of (3.31). So by Rouché's theorem (see M. A. Naimark, p.70 in [11]) to (3.31), we get the following expression:

$$\tilde{\rho}_n = \rho_n + \alpha_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} + \alpha_n, \quad \alpha_n = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n = N, N+1, \dots, \quad (3.33)$$

where N is a large positive integer. Substituting $\tilde{\rho}_n$ into (3.30), and using the fact that $e^{\rho\omega_2} = i e^{-\rho\omega_2}$, we obtain

$$e^{\alpha_n\omega_2} - e^{-\alpha_n\omega_2} + \mu_2 \tilde{\rho}_n^{-1} e^{\alpha_n\omega_2} - i \mu_3 \tilde{\rho}_n^{-1} e^{-\alpha_n\omega_2} + \mathcal{O}(\tilde{\rho}_n^{-2}) = 0.$$

Expanding the exponential function according to its Taylor series, we get

$$\alpha_n = -\frac{\mu_2}{2\omega_2\rho_n} + \frac{\mu_3}{2\omega_2\rho_n} i + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n = N, N+1, \dots$$

Therefore, we have

$$\tilde{\rho}_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} + \frac{\mu_2}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} i + \frac{\mu_3}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n = N, N+1, \dots$$

Note that $\lambda_n = \frac{\tilde{\rho}_n^2}{h^2} \neq 0$, $\omega_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ and $\omega_2^2 = i$. So we have

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2} (\mu_3 - \mu_2) + \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\mu_3 + \mu_2) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (3.34)$$

where $n = N, N + 1, \dots$ with N large enough.

The same proof can be applied to sector S_2 because the eigenvalues of the problem (3.16) can be obtained by a similar calculation with the choices

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \exp\left(i\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ \omega_2 &= \exp\left(i\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ \omega_3 &= \exp\left(i\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ \omega_4 &= \exp\left(i\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \end{aligned}$$

so that they satisfy the inequality

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_3) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_4), \quad \forall \rho \in S_2.$$

Then, in sector S_2 , the characteristic determinant $\Delta(\rho)$ of (3.7) :

$$\Delta(\rho) = 2\sqrt{2}\gamma\rho^6 e^{\rho\omega_4} \{e^{\rho\omega_2} + i e^{-\rho\omega_2} - [\mu_2 e^{\rho\omega_2} + \mu_3 e^{-\rho\omega_2}]\rho^{-1} + \mathcal{O}(\rho^{-2})\}.$$

By a direct calculation, we have

$$\tilde{\rho}_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} - \frac{\mu_2}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} i + \frac{\mu_3}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n = N, N + 1, \dots \quad (3.35)$$

with N large enough. Again, using $\lambda_n = \frac{\rho_n^2}{h^2} \neq 0$, $\omega_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ and $\omega_2^2 = -i$.

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2} (\mu_3 - \mu_2) - \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\mu_3 + \mu_2) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (3.36)$$

where $n = N, N + 1, \dots$ with N large enough.

Here we should point out that the eigenvalues generated from the other sectors S_k coincide with those from S_1 and S_2 . The detailed argument can be found in M. A.

Naimark [11]. Combining with (3.34) and (3.36), we obtain the following result on the eigenvalues.

Theorem 3.6. Let A be defined by (2.6) and (2.7). If $\gamma \neq 0$, then an asymptotic expression of the eigenvalues of the problem (3.16) is given by

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2} (\mu_3 - \mu_2) \pm \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\mu_3 + \mu_2) + \left(\frac{1}{4} - n \right)^2 \pi^2 \right] i + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (3.37)$$

where $n = N, N + 1, \dots$ with N large enough, and

$$\mu_3 - \mu_2 = \frac{\sqrt{2}b_{21}}{\gamma} = -\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{2}h(m(1))^{\frac{1}{4}}(EI(1))^{\frac{3}{4}} \right) \quad (3.38)$$

$$\mu_3 + \mu_2 = \sqrt{2}(2\mu_1 + b_{21}). \quad (3.39)$$

Moreover, λ_n ($n = N, N + 1, \dots$) with sufficiently large modulus are simple and distinct except for finitely many of them, and satisfy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}\lambda_n = -\frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}}(EI(1))^{\frac{3}{4}} \right). \quad (3.40)$$

Notice that in the uniform case with $m(x) = EI(x) = 1$, we find the following result which was obtained in [15]:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}\lambda_n = -\frac{1}{\alpha}.$$

3.2. Riesz basis property of eigenfunctions of A

In this subsection, we discuss the Riesz basis property of the eigenfunctions of operator A of the system (2.8). We follow an idea due to Wang (see [18] pp. 473–475). We begin with showing that the generalized eigenfunctions of A form an unconditional basis in Hilbert state space H .

For this task, we introduce a transformation \mathcal{L} via

$$\mathcal{L}(f, g) = (\phi, \psi)$$

where

$$\phi(x) = f(z), \quad \psi(x) = g(z), \quad z = \frac{1}{h} \int_0^x \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta, \quad (3.41)$$

with

$$h = \int_0^1 \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta. \quad (3.42)$$

It is easily seen that \mathcal{L} is a bounded invertible operator on \mathbb{H} . Next define the following ordinary differential operator:

$$\begin{cases} L(f) = f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z), \\ B_1(f) = f(0) = 0, \quad B_2(f) = f'(0) = 0, \\ B_3(f) = f''(1) + \left[\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{(\alpha\lambda + \beta)}{EI(1)z_x(1)} \right] f'(1) = 0 \\ B_4(f) = EI(1)z_x^3(1)f'''(1) + [EI'(1)z_x^2 + 3EI(1)z_{xx}(1)z_x(1)]f''(1) \\ \quad + [EI(1)z_{xxx}(1) + EI'(1)z_{xx}(1)]f'(1) = 0, \end{cases} \tag{3.43}$$

where the coefficients are given by (3.11)-(3.15). Let \mathbb{A} be defined as in (2.7), $\eta \in \sigma(\mathbb{A})$ be an eigenvalue of \mathbb{A} and (f, g) be an eigenfunction corresponding to η , then we have $g = \eta f$ and f will satisfy the following equation:

$$f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \eta^2 f(z) = 0,$$

with boundary conditions $B_j(f) = 0, j = 1, 2, 3, 4$. Now by taking $\lambda = \frac{\eta}{h^2}$ and

$$\mathcal{L}(f, g) = (\phi(x), \psi(x))$$

we see that $\psi = \lambda\phi$ and ϕ satisfies the equation

$$\begin{cases} \phi^{(4)}(x) + \frac{2EI'(x)}{EI(x)}\phi'''(x) + \frac{EI''(x)}{EI(x)}\phi''(x) + \frac{\lambda^2 m(x)}{EI(x)}\phi(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot)\phi'')'(1) = 0 \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \tag{3.44}$$

Hence we have the following result:

$$\eta \in \sigma(\mathbb{A}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A).$$

Theorem 3.7. Let operator A of the system (2.8). Then the eigenvalues of operator A are all simple except for finitely many of them, and the generalized eigenfunctions of operator A form a Riesz basis for the Hilbert state space \mathbb{H} .

Proof. According to Theorem 3.5, the boundary problem (3.16) is strongly regular. Therefore the eigenvalues are separated and simple except for finitely many of them. Also, the strongly regular boundary conditions ensure that the generalized eigenfunction sequence $F_n = (f_n, \eta_n f_n)$ of operator \mathbb{A} forms a Riesz basis for \mathbb{H} . Since \mathcal{L} is bounded and invertible on \mathbb{H} , it follows that $\Psi_n = (\phi_n, \lambda_n \phi_n) = \mathcal{L}F_n$ also forms a Riesz basis on \mathbb{H} . ■

We are now in a position to investigate the exponential stability of system (2.8). Since the Riesz basis property implies the spectrum-determined growth condition (see

Curtain and Zwart [5] and (3.40) describes the asymptote of $\sigma(A)$, for any small $\varepsilon > 0$ there are only finitely many eigenvalues of A in the following half-plane:

$$\Sigma : \operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right) + \varepsilon. \quad (3.45)$$

3.3. Exponential stability

The Theorem 3.7 is one of the fundamental properties of the evolutive system (1.1)–(1.4). Many other important properties of this system can be concluded from Theorem 3.7. The exponential stability stated below is one of such important property.

Theorem 3.8. System (1.1)–(1.4) is exponential stable for any $\beta > 0$ and $\alpha > 0$. That is, there are nonnegative constants M, ω such that the energy $E(t)$ of system (1.1)–(1.4) satisfies

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 m w_t^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x(1, t))^2 \leq ME(0) e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

for any initial condition $(w(x, 0), w_t(x, 0)) \in \mathbb{H}$.

Proof. According to Theorem 2.1, A is dissipative and e^{At} is contraction semigroup on \mathbb{H} . If we can show that there is no eigenvalue on the imaginary axis, then the exponential stability holds. Let $\lambda = ir$ with $r \in \mathbb{R}$ be an eigenvalue of operator A on the imaginary axis and $\Psi = (\phi, \psi)^T$ be the corresponding eigenfunction, then $\psi = \lambda\phi$. Then we have

$$\operatorname{Re}(\langle A\Psi, \Psi \rangle_{\mathbb{H}}) = -\alpha |\psi'(1)|^2$$

$$0 = \|\Psi\|_{\mathbb{H}}^2 \operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\langle A\Psi, \Psi \rangle_{\mathbb{H}}) = -\alpha |\psi'(1)|^2,$$

since $\alpha > 0$, we get

$$\psi'(1) = 0.$$

Then $\phi'(1) = 0$. $\phi(x)$ has to obey the uniqueness theorem of the differential equation:

$$\begin{cases} \lambda^2 m(x)\phi(x) + (EI(x)\phi''(x))'' = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = \phi''(1) = \phi'''(1) = 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

The above equation has a zero solution only (see [8]). However, $\Psi = 0$ contradicts Ψ being an eigenfunction and so there is no eigenvalue on the imaginary axis. Therefore, we get $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

From Theorem 3.7 and the spectrum-determined growth condition, the system is exponentially stable. ■

References

- [1] Adams. R. A, *Sobolev spaces*, vol. 65 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York-London, (1975).
- [2] G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter*, Trans. Amer. Math. Soc., **9**, (1908), pp. 219–231.
- [3] G. D. Birkhoff. *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations*. Trans. Amer. Math, **9**, (1908) pp. 373–395.
- [4] H. Brezis, *Fonctional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, (2011).
- [5] R. F. Curtain and H. J. Zwart. *An Introduction to Infinite Dimensional Linear System Theory*. New York: Springer Verlag, (1995).
- [6] B. Z. Guo, *Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler-Bernoulli beam equations with variable coefficients*, SIAM Journal on Control and Optimization **40** (2002), 1905–1923.
- [7] B. Z. Guo and J. M. Wang, *Riesz basis generation of abstract second order partial equation systems with general non-separated boundary conditions*, Numerical Functional Analysis and Optimisation, **27** (2006), pp. 291–328.
- [8] B.Z. Guo, *On the Boundary Control of a Hybrid System with Variable Coefficients*. Journal of optimization Theory and Applications 114 (2002), N^o. 2, 373–395.
- [9] S. W. R. Lee and H. L. Li, *Development and characterization of a rotary motor driven by anisotropic piezoelectric composite*. Smart Materials Structures **7** (1998), 327–336.
- [10] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et Applications*, Volume 1, Dunod, (1968).
- [11] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators*, Vol. I Ungar; New York, 1967.
- [12] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and applications to Partial Differential Equations*, Vol. 44 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [13] F. Saouri *Stabilisation de quelques systèmes élastiques. Analyse spectrale et comportement asymptotique*, Thèse de Doctorat, Université Henry Poincaré I, (2000).
- [14] A. Shkalikov, *Boundary problem for ordinary differential operators with parameter in boundary conditions*, J. Soviet Math. **33** (1986), 1311–1342.
- [15] A. Touré, B. J. C. Koua and F. N. Diop, *Riesz basis property and exponential stability of a flexible Euler-Bernoulli beams with a force control in rotation and velocity Rotation*, Far East J. Appl. Math. **99** (1) (2016), 33–60.
- [16] C. Tretter. *On λ -Nonlinear Boundary Eigenvalue Problem*, Mathematical Research, Vol. 71. Berlin: Akademie, (1993).

- [17] J.M. Wang, *Riesz basis property of some infinite-dimensional control problems and its applications*. Ph.D Thesis, The University of Hong Kong (2004).
- [18] J.M. Wang, G. Q. Xu and S.P. Yung, *Riesz basis property, exponential stability of variable coefficient Euler-Bernoulli beams with indefinite damping*. IMA J. Appl. Math, **70**, (2005), pp. 459–477.
- [19] J. M. Wang (2003). Spectral operators generated by partial differential equations of one dimensional spacial variable. Proc. Chinese. Control Conf. (Yichang), pp. 400–404.

Dissipative Numerical Method for a Flexible Euler-Bernoulli Beam with a Force Control in Rotation and Velocity Rotation

Bomisso G. Jean Marc¹, Touré K. Augustin² & Yoro Gozo¹

¹ Université Nangui Abrogoua d'Abobo-Adjamé and UFR Sciences Fondamentales et Appliquées, Côte d'Ivoire

² Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire

Correspondence: Bomisso G. Jean Marc, Université Nangui Abrogoua d'Abobo-Adjamé and UFR Sciences Fondamentales et Appliquées, BP 801 Abidjan 02, Côte d'Ivoire. E-mail: bogojm@yahoo.fr

Received: May 8, 2017 Accepted: June 5, 2017 Online Published: July 3, 2017

doi:10.5539/jmr.v9n4p30 URL: <https://doi.org/10.5539/jmr.v9n4p30>

Abstract

In this paper, we study a flexible Euler-Bernoulli beam clamped at one end and subjected to a force control in rotation and velocity rotation. We develop a finite element method, stable and convergent which preserves the property of time decay of energy in the continuous case. We prove firstly the existence and uniqueness of the weak solution. Then, we discretize the system in two steps: in the first step, a semi-discrete scheme is obtained for discretization in space and, in the second step, a fully-discrete scheme is obtained for discretization in time by the Crank-Nicolson scheme. At each step of the discretization, the a-priori error estimates are obtained.

Keywords: beam equation, Galerkin method, finite element methods, a priori estimates

1. Introduction

In this work, we study a dissipative numerical property by the finite element method for a flexible Euler-Bernoulli beams with a force control in rotation and velocity rotation. The dynamic system that models the mechanical phenomenon that changes over time is described as follows:

$$w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (1)$$

$$w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$w_{xxx}(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$w_{xx}(1, t) = -\alpha w_{xt}(1, t) - \beta w_x(1, t), \quad t > 0. \quad (4)$$

$w(x, t)$ stands for the transverse displacement of the beam at the position x and time t . The subscripts t and x denote derivatives with respect to time t and position x respectively. Moreover, $-w_{xxxx}(x, t) dx$ is the total lateral force acting on a slice of the beam of length dx , located at position x and time t and $w_{xx}(1, t)$ is the force in rotation acting on the rigid body from the beam at the time t . The nonnegative constants α and β are the feedback gains that can be tuned in practice. For simplicity sake, the flexural rigidity function, the mass density function of the beam and the length of the beam are assumed to be unity. Moreover, the following notation $v = w_t$ (velocity of the beam) will be used in the sequel.

In (Touré, Koua & Diop, 2016), it has been proved that the system (1)-(4) is well posed in the sense of C_0 -semigroup of contractions. In order to perform the stability analysis of this system, the authors formulate the problem as an evolution problem first. Also, from Shkalikov's method (Shkalikov, 1986), a spectral analysis of the operator and the property of the Riesz basis were studied to derive the exponential stability of the system.

Furthermore, it should be noted that for all t , in our case, the total mechanical energy $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ of the system (1)-(4) is given by

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 v^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x(1, t))^2 \quad (5)$$

which decreases over time. Indeed, the time derivative of the energy functional $\varepsilon(t)$ along the classical solutions of (1)-(4) read as follows:

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = -\alpha [v_x(1, t)]^2 \leq 0 \quad (6)$$

because $\alpha \geq 0$. The right hand side of (6) serves as a motivation in the design of the control $\alpha w_{xt}(1, t) + \beta w_x(1, t)$, ensures the energy decay of the system in time. Moreover, according to Theorem 3.5 of (Touré, Koua & Diop, 2016) whose proof is based on an idea of (Guo, 2002), the system (1)-(4) is exponentially stable for any $\beta > 0$ and $\alpha \geq 0$.

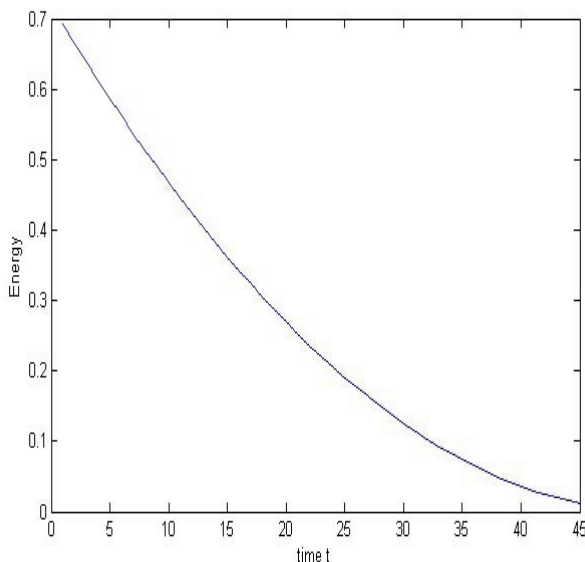


Figure 1. Energy decay

Our main contribution is to develop a convergent numerical method which faithfully reproduces some properties of this problem such as stability and energy decay.

The rest of the paper is organized as follows. In section 2, from the weak formulation, we show the existence, uniqueness and higher regularity of the weak solution. In section 3 and in section 4, we develop by finite element method, a numerical method for the system (1)-(4) which conserves the dissipativity property.

2. Existence, Uniqueness and Higher Regularity of the Weak Solution

2.1 Formulation as a Dissipative Evolution Equation

Let us introduce the following spaces:

$$H^m(0, 1) = \left\{ w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid w, w^{(1)} = \frac{\partial w}{\partial t}, \dots, w^{(m)} = \frac{\partial^m w}{\partial t^m} \in L^2(0, 1) \right\}$$

where

$$L^2(0, 1) = \left\{ w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^1 |w|^2 dx < \infty \right\}.$$

Then, we also introduce the following functional space:

$$V = \{ w \in H^2(0, 1) \mid w(0) = w_x(0) = 0 \} \tag{7}$$

and for energy space, the following hilbert space :

$$\chi = \{ y = (w, v)^T : w \in V, v \in L^2(0, 1) \} = V \times L^2(0, 1), \tag{8}$$

where the superscript T stands for the transpose. In the space χ , we define the inner-product:

$$\langle y, \widehat{y} \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 [w_{xx} \widehat{w}_{xx} + v \widehat{v}] dx + \frac{\beta}{2} w_x(1) \widehat{w}_x(1) \tag{9}$$

where $y = (w, v)^T \in \chi$ and $\widehat{y} = (\widehat{w}, \widehat{v})^T \in \chi$. We denote by $\| \cdot \|_{\chi}$ the associated norm. Next, we define an unbounded linear operator $A : D(A) \subset \chi \rightarrow \chi$ as follows:

$$A(w, v) = (v, -w_{xxxx}) \tag{10}$$

where $D(A)$, the domain of operator A is as follows

$$D(A) = \left\{ (w, v) \in \chi : w \in (H^4(0, 1) \cap V), v \in V, w_{xxx}(1) = 0, w_{xx}(1) = -\alpha v_x(1) - \beta w_x(1) \right\}. \tag{11}$$

Now we can write our problem as a first order evolution problem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathcal{X}, \end{cases} \tag{12}$$

where $y(t) = (w(\cdot, t), v(\cdot, t))^T$, $y(0) = (w_0, v_0)^T$ for all $t > 0$.

We recall here the following fundamental well-posedness result obtained in Theorem 2.1 pp. 36 of (Touré, Koua & Diop, 2016).

Theorem 1 *The operator A, defined by (10) and (11), generates a C_0 -semigroup of contractions on \mathcal{X} denoted by $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.*

Next results follow directly from Theorem 1:

Theorem 2 *(12) has a unique mild solution $y(t) = S(t)y_0 \in C([0, \infty); \mathcal{X})$ for all $y_0 \in \mathcal{X}$.*

Notice that the contractivity of the semigroup also implies that $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ is a good candidate for the Lyapunov functional for (12). Let the functional $\ell : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ defined as follows

$$\ell(y) = \|y\|_{\mathcal{X}}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 v^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x(1, t))^2. \tag{13}$$

Analogously as in (6), for all classical solutions y it follows that:

$$\frac{d}{dt}\ell(y) = \frac{d}{dt}\|y\|_{\mathcal{X}}^2 = -\alpha w_{tx}^2(1) \leq 0, \tag{14}$$

hence time evolution of the Lyapunov functional along the classical solutions is non-increasing. Furthermore, from Theorem 1, the decay of energy along the classical solutions can be extended to mild solutions :

Theorem 3 *Assume that $y(t)$ is the mild solution of (12) for all $y_0 \in \mathcal{X}$. Then $y(t) \rightarrow 0$ in \mathcal{X} when $t \rightarrow \infty$.*

Remark 1 The right hand side of (14) is formed by a control variable. Thus, $\frac{d}{dt}\|y\|_{\mathcal{X}}^2 = 0$ does not imply $y = 0$ through (12).

Now write the system of equations (1)-(4) in the weak form.

2.2 Weak Formulation

Let $\phi \in V$. Multiplying (1) by ϕ , integrating over $[0, 1]$ and taking into account the given boundary conditions (2)-(4), we have

$$\int_0^1 w_{tt}\phi dx + \int_0^1 w_{xx}\phi_{xx} dx + [\beta w_x(1, t) + \alpha w_{tx}(1, t)] \phi_x(1) = 0 \tag{15}$$

$\forall \phi \in V, t > 0$.

It seeks to define a weak solution of (1)-(4). But first, make an appropriate choice of spaces. We follow an idea used in (Banks & Rosen, 1987). Let the Hilbert space $Y = \mathbb{R}^2 \times L^2(0, 1)$ with the following inner product:

$$\langle \eta, \xi \rangle = \langle \eta_{(1)}, \xi_{(1)} \rangle_{L^2} + \eta_{(2)}\xi_{(2)} + \eta_{(3)}\xi_{(3)}, \tag{16}$$

for all $\eta = (\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \eta_{(3)})$, $\xi = (\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)}) \in Y$. We also define the following Hilbert space $X = \mathbb{R}^2 \times V = \{y = (w(1), w_x(1), w); w \in V\}$ with the inner product

$$\langle y_1, y_2 \rangle_X = \langle (w_1)_{xx}, (w_2)_{xx} \rangle_{L^2}. \tag{17}$$

It can easily be shown that X is densely embedded in Y and suppose that the canonical injection of X into Y is continuous. Therefore, taking Y as a pivot space we obtain a Gelfand triple :

$$X \subset Y \subset X'$$

where X' is the dual of X . Consider the following bilinear forms:

$$a_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (y_1, y_2) \mapsto a_1(y_1, y_2) = \langle y_1, y_2 \rangle_X + \beta(w_1)_x(1)(w_2)_x(1)$$

$$a_2 : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R} \quad (\eta, \xi) \mapsto \alpha \eta_{(2)}\xi_{(2)}.$$

In the following definition, the bilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X, X'}$ is the duality pairing between X and X' , which is a natural extension of the inner product in Y .

Definition 4 Let $T > 0$ be fixed. We say that $\widehat{w} = (w(1), w_x(1), w)$ is a weak solution of problem (1)-(4) on $[0, 1]$ if $\widehat{w} \in L^2(0, T; X) \cap H^1(0, T; Y) \cap H^2(0, T; X')$ and satisfies

$$\langle \widehat{w}_t, \widehat{\phi} \rangle_{X, X'} + a_1(\widehat{w}, \widehat{\phi}) + a_2(\widehat{w}_t, \widehat{\phi}) = 0 \tag{18}$$

for almost everywhere on $t \in (0, T)$ and for all $\widehat{\phi} \in X$, with the following initial conditions

$$\widehat{w}(0) = \widehat{w}_0 = (w_0(1), (w_0)_x(1), w_0) \in X \tag{19}$$

$$\widehat{w}_t(0) = \widehat{v}_0 = (v_0(1), (v_0)_x(1), v_0) \in Y. \tag{20}$$

Remark 2 The formulation (18) is equivalent to equality (15) if $w \in H^2(0, T, X)$. Furthermore, in the expression (19), the first two components of the right hand side are the boundary traces of $w_0 \in V$. But for $(v_0)(1)$ and $(v_0)_x(1)$ in (20), they are given in addition to the function v_0 and not as its trace. Here, the term $u_{tx}(1)$ also need to be considered. Then, the bilinear form $a_2(\cdot, \cdot)$ with the first order boundary term in t requires a slight generalization of the standard theory (as presented for example in chapter 3 section 8 of (Lions & Magenes, 1968) or again in section 7.2 of (Evans, 1998)).

Recall the following Lemmas provided in Theorems 3.1 pp. 23 and 6.2 pp. 34 of (Lions & Magenes, 1968) where the definition of the intermediate spaces is given and which will be useful in proving theorem of existence of weak solution.

Notice that, in the following, $[X, Y]_\theta$, with $0 \leq \theta \leq 1$ is the intermediate space defined as in chapter 1 pp. 11 – 13 of (Lions & Magenes, 1968), for X and Y Hilbert spaces, $X \subset Y$, X dense in Y with continuous injection by means of domains of positive self-adjoint operators. Remark also that for $\theta = 0$, $[X, Y]_0 = X$ and for $\theta = 1$, $[X, Y]_1 = Y$.

Lemma 5 Let X and Y be two Hilbert spaces, such that X is dense and continuously embedded in Y . Assume that $w \in L^2(0, T; X)$ and $v \in L^2(0, T; Y)$. Then $w \in C([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}})$, after, possibly, a modification on a set of measure zero.

Since $X \subset [X, Y]_\theta \subset Y$, each space being dense in the following, we have by duality (without any identification between space and its dual) for $\theta \in]0, 1[$:

$$Y' \subset [X, Y]'_\theta \subset X',$$

each space being dense in the following. We have the following duality theorem:

Lemma 6 Let X and Y be two Hilbert spaces, such that X is dense and continuously embedded in Y . For all $\theta \in]0, 1[$, $[X, Y]'_\theta = [Y', X']_{1-\theta}$ holds.

We will also use the following result:

Theorem 7 Let V be a subspace of $H^2(0, 1)$. Then there exists a infinite sequence of functions $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ such that

$$\{\phi_i\}_{i=1}^\infty \text{ is an orthogonal basis of } V$$

and

$$\{\phi_i\}_{i=1}^\infty \text{ is an orthonormal basis of } L^2(0, 1).$$

Proof. Let the operator $B : V \rightarrow L^2(0, 1)$ defined as

$$\forall w \in V, \quad Bw = w_{xxxx}. \tag{21}$$

Consider the following boundary value problem :

$$\begin{cases} Bw(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ w(0) = w_x(0) = w_{xx}(1) = w_{xxx}(1) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Assume that $f \in L^2(0, 1)$. Let $\phi \in V$. Multiplying by ϕ , integrating twice by parts and taking into account the given boundary conditions yields:

$$\int_0^1 w_{xx}\phi_{xx} dx = \int_0^1 f\phi dx, \quad \forall \phi \in V. \tag{23}$$

The fact that $f \in L^2(0, 1)$ ensures the continuity of the linear form. Set

$$a_3(w, \phi) = \int_0^1 w_{xx}\phi_{xx} dx.$$

Then a_3 is symmetric bilinear form, bounded and coercive on V . The Lax-Milgram theorem allows us to conclude the existence and uniqueness of the solution w of (21). Then, there exists a unique weak solution w in V such that $w = B^{-1}(f)$ with $B^{-1} : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$. We remark that B^{-1} is obviously linear and bounded. Furthermore, there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|w\|_{H^2(0,1)} \leq C\|f\|_{L^2(0,1)}$$

and since V is compactly embedded in $L^2(0, 1)$ then B^{-1} is compact. It remains to show that it's symmetric. Let $f, g \in L^2(0, 1)$ and denote $w = B^{-1}(f)$ and $v = B^{-1}(g)$. By straightforward calculation and integration by parts, we finally obtain

$$\langle B^{-1}f, g \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 v_{xx}w_{xx} dx = a_3(v, w).$$

Analogously, we get

$$\langle f, B^{-1}g \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 w_{xx}v_{xx} dx = a_3(w, v).$$

Thus, a_3 is symmetric and we have

$$\langle B^{-1}f, g \rangle_{L^2(0,1)} = \langle f, B^{-1}g \rangle_{L^2(0,1)}.$$

Hence B^{-1} is symmetric. In view of compactness and symmetry properties of the bounded linear operator B^{-1} , there exists a countable orthonormal basis $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ of $L^2(0, 1)$ constituted of eigenvectors B^{-1} . Furthermore, these eigenvectors are functions of V according to definition of B^{-1} . Moreover, from the weak formulation, one can see that the basis $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ is an orthogonal basis of V with respect to the inner product $a_3(\cdot, \cdot)$. \square

2.3 Existence of the Weak Solution

Theorem 8 *There exists a weak solution \widehat{w} of the equivalent weak formulation (18) such that :*

$$\widehat{w} \in L^\infty(0, T; X), \widehat{w}_t \in L^\infty(0, T; Y), \tag{24}$$

$$\widehat{w} \in C([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}}), \tag{25}$$

$$\widehat{w}_t \in C([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}}). \tag{26}$$

Proof. This proof is based on the Faedo-Galerkin's method and is an adaption of the proof of Theorem 8.1 pp. 287-290 in (Lions & Magenes, 1968). According to Theorem 7, there exists by extension an infinite sequence of functions $\{\widehat{\phi}_i\}_{i=1}^\infty$ that is an orthogonal basis for X and an orthonormal basis for Y . Consider such a sequence. Introduce the following finite dimensional spaces spanned by $\{\widehat{\phi}_i\}_{i=1}^m$ defined as:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \widehat{V}_m := span\{\widehat{\phi}_1, \dots, \widehat{\phi}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j \widehat{\phi}_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\}. \tag{27}$$

Step 1 (Construction of approximate solutions): We seek $\widehat{w} = \widehat{w}_m(t) \in \widehat{V}_m$ the approximate solution of the problem. Then \widehat{w} is in the form:

$$\widehat{w}_m = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \widehat{\phi}_i,$$

where $g_{im}(t) \in \mathbb{R} (0 \leq t \leq T, i = 1, \dots, m)$ are solutions of the formulation (18) on \widehat{V}_m . For a fixed $m \in \mathbb{N}$, we have:

$$\langle (\widehat{w}_m)_t, \widehat{\phi} \rangle_Y + a_1(\widehat{w}_m, \widehat{\phi}) + a_2((\widehat{w}_m)_t, \widehat{\phi}) = 0 \quad \forall \widehat{\phi} \in \widehat{V}_m. \tag{28}$$

The approximate differentials equations system (28) is completed with the initial conditions:

$$\widehat{w}_m(0) = \widehat{w}_{m0}, \quad \widehat{w}_{m0} = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} \widehat{\phi}_i \rightarrow \widehat{w}_0 \text{ in } X \text{ when } m \rightarrow \infty \tag{29}$$

$$\widehat{v}_m(0) = \widehat{v}_{m0}, \quad \widehat{v}_{m0} = \sum_{i=1}^m \beta_{im} \widehat{\phi}_i \rightarrow \widehat{v}_0 \text{ in } Y \text{ when } m \rightarrow \infty, \tag{30}$$

with $\alpha_{im} = g_{im}(0)$ and $\beta_{im} = (g_{im})_t(0)$. According to standard existence theory for ordinary differential equations, we are insured of the existence of solution $\widehat{w}_m \in C^2([0, T]; X)$ of (28)-(30) for $0 \leq t \leq T$.

Step 2 (A-priori estimates on approximate solutions): Let $E : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ be the analogue of the Lyapunov functional as defined by (13):

$$E(t, \widehat{w}) = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \widehat{w}_t^2 dx + \int_0^1 \widehat{w}_{xx}^2 dx + \beta \widehat{w}_{(2)}^2(t) \right] \tag{31}$$

$$E(t, \widehat{w}) = \frac{1}{2} \|\widehat{w}_t(t)\|_Y^2 + \frac{1}{2} \|\widehat{w}(t)\|_X^2 + \frac{\beta}{2} (\widehat{w}_{(2)}(t))^2. \tag{32}$$

$$E(t, \widehat{w}) = \|(w, v)\|_X. \tag{33}$$

Assuming that there exists a solution $\widehat{w}_m \in C^2([0, \tau]; \widehat{V}_m)$ to (28) on some interval $[0, \tau]$ and taking $\widehat{\phi} = (\widehat{w}_m)_t$ in (28), a straightforward calculation yields

$$\frac{d}{dt} E(t, \widehat{w}_m) = -\alpha \left[\{(\widehat{w}_m)_{(2)}\}_t(t) \right]^2 \leq 0,$$

for all $t \in [0, \tau]$. Dissipation of the functional E corresponds to the decay in (14) for the classical solution. This implies uniform boundedness of the solution on $[0, \tau]$:

$$E(t, \widehat{w}_m) \leq E(0, \widehat{w}_{m0}), \quad t \geq 0$$

which implies that

$$\{\widehat{w}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ is bounded in } C([0, T]; X), \tag{34}$$

$$\{(\widehat{w}_m)_t\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ is bounded in } C([0, T]; Y). \tag{35}$$

It remains to find set in which $(\widehat{w}_m)_{tt}$ is bounded. Considering the results (34)-(35), it is shown that for all $\widehat{\phi} \in X$:

$$|a_1(\widehat{w}_m(t), \widehat{\phi}) + a_2((\widehat{w}_m)_t(t), \widehat{\phi})| \leq M \|\widehat{\phi}\|_X, \quad \forall t \in [0, T] \tag{36}$$

where M is a positive constant which does not depend on m . Now, let $m \in \mathbb{N}$ be fixed. Furthermore, let $\widehat{\phi} \in X$ and $\widehat{\phi} = \widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2$ such that $\widehat{\varphi}_1 \in \widehat{V}_m$ and $\widehat{\varphi}_2$ orthogonal to \widehat{V}_m in Y . Then, we get $\langle (\widehat{w}_m)_{tt}, \widehat{\phi} \rangle_Y = \langle (\widehat{w}_m)_{tt}, \widehat{\varphi}_1 \rangle_Y$. From (28) and (36), we have:

$$\langle (\widehat{w}_m)_{tt}, \widehat{\phi} \rangle_Y = -a_1(\widehat{w}_m(t), \widehat{\varphi}_1) - a_2((\widehat{w}_m)_t(t), \widehat{\varphi}_1) \leq M \|\widehat{\varphi}_1\|_X \leq M \|\widehat{\phi}\|_X \tag{37}$$

This implies that

$$(\widehat{w}_m)_{tt} \text{ is bounded in } C([0, T]; X'). \tag{38}$$

Step 3 (Passage to the limit): According to the Eberlein-Šmulian Theorem (see Brezis, 2011, e.g.), we can extract weakly convergent subsequences $\{\widehat{w}_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$, $\{(\widehat{w}_{m_l})_t\}_{l \in \mathbb{N}}$ and $\{(\widehat{w}_{m_l})_{tt}\}_{l \in \mathbb{N}}$ with $\widehat{w} \in L^2(0, T; X)$, $\widehat{w}_t \in L^2(0, T; Y)$ and $\widehat{w}_{tt} \in L^2(0, T; X')$ such that:

$$\{\widehat{w}_{m_l}\} \rightharpoonup \widehat{w} \text{ in } L^2(0, T; X), \tag{39}$$

$$\{(\widehat{w}_{m_l})_t\} \rightharpoonup \widehat{w}_t \text{ in } L^2(0, T; Y), \tag{40}$$

$$\{(\widehat{w}_{m_l})_{tt}\} \rightharpoonup \widehat{w}_{tt} \text{ in } L^2(0, T; X'). \tag{41}$$

Furthermore, (40) yields

$$\{(\widehat{w}_{(2)m_l})_t\} \rightharpoonup \widehat{w}_{(2)t} \text{ in } L^2(0, T; \mathbb{R}). \tag{42}$$

Let $m_0 \in \mathbb{N}$. For all functions $\widehat{\varphi} \in L^2(0, T; \widehat{V}_{m_0})$ of the form

$$\widehat{\varphi}(t, x) = \sum_{j=1}^{m_0} \mu_j(t) \phi_j(x) \tag{43}$$

where $\mu_j \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ and for all $m_l \geq m_0$, the formulation (28) becomes:

$$\int_0^T \langle (\widehat{w}_{m_l})_{tt}, \widehat{\varphi} \rangle_Y + a_1(\widehat{w}_{m_l}, \widehat{\varphi}) + a_2((\widehat{w}_{m_l})_t, \widehat{\varphi}) dt = 0. \tag{44}$$

Therefore, passing on to the limit in (44) for $m = m_l$, when $l \rightarrow \infty$ and using the convergence results (39)-(41), one obtains:

$$\int_0^T \langle \widehat{w}_{tt}, \widehat{\varphi} \rangle_{X, X'} + a_1(\widehat{w}, \widehat{\varphi}) + a_2(\widehat{w}_t, \widehat{\varphi}) dt = 0. \tag{45}$$

Then, one obtains $\langle \widehat{w}_t, \widehat{\varphi} \rangle_{X, X'} + a_1(\widehat{w}, \widehat{\varphi}) + a_2(\widehat{w}_t, \widehat{\varphi}) = 0$ a.e on $[0, T]$ for all $\widehat{\varphi} \in L^2(0, T; X)$. Since the functions $\widehat{\varphi}$ of the form (43) are dense in $L^2(0, T; X)$, \widehat{w} is therefore the solution of the weak formulation. For the additional regularity, from the construction of the weak solution and due to (34)-(35), \widehat{w} satisfies (24). Furthermore \widehat{w} satisfies (25) using the Lemma 5, after, possibly a modification on a set of measure zero, and the regularity (26) follows from Lemma 5 and Lemma 6. \square

2.4 Uniqueness of the Weak Solution

Theorem 9 *The solution \widehat{w} of the weak formulation (18) with the initial conditions (19)-(20) is unique.*

Proof. This proof of uniqueness is an adaption of the proof of Theorem 8.1 pp. 290-291 in (Lions & Magenes, 1968). Before showing uniqueness, we prove that the solution \widehat{w} satisfies the initial conditions (19)-(20). Let $\widehat{\phi} \in C^2([0, T]; X)$ such that $\widehat{\phi}(T) = 0$ and $\widehat{\phi}_t(T) = 0$. Integrating the equation (18) over $[0, T]$, we get:

$$\int_0^T [\langle \widehat{w}_t, \widehat{\phi} \rangle_{X, X'} + a_1(\widehat{w}, \widehat{\phi}) + a_2(\widehat{w}_t, \widehat{\phi})] d\tau = 0. \tag{46}$$

By integrating twice by parts over $[0, T]$ under the duality pairing, we have:

$$\int_0^T [\langle \widehat{w}, \widehat{\phi}_t \rangle_Y + a_1(\widehat{w}, \widehat{\phi}) + a_2(\widehat{w}_t, \widehat{\phi})] d\tau = \langle \widehat{w}_t(0), \widehat{\phi}(0) \rangle_{X, X'} - \langle \widehat{w}(0), \widehat{\phi}_t(0) \rangle_Y. \tag{47}$$

Let m be fixed. We obtain analogously by integrating twice by parts expression(28) :

$$\int_0^T [\langle \widehat{w}_m, \widehat{\phi}_t \rangle_Y + a_1(\widehat{w}_m, \widehat{\phi}) + a_2((\widehat{w}_m)_t, \widehat{\phi})] d\tau = \langle \widehat{v}_{m0}, \widehat{\phi}(0) \rangle_Y - \langle \widehat{w}_{m0}, \widehat{\phi}(0) \rangle_Y. \tag{48}$$

Passing to the limit in (48) along the convergent subsequence, using (29)-(30) and (39)-(41), we obtain:

$$\int_0^T [\langle \widehat{w}, \widehat{\phi}_t \rangle_Y + a_1(\widehat{w}, \widehat{\phi}) + a_2((\widehat{w})_t, \widehat{\phi})] d\tau = \langle \widehat{v}_0, \widehat{\phi}(0) \rangle_Y - \langle \widehat{w}_0, \widehat{\phi}_t(0) \rangle_Y. \tag{49}$$

Comparing expressions (47) with (49), we can deduce that $\widehat{w}_0 = \widehat{w}(0)$ and $\widehat{w}_t(0) = \widehat{v}(0)$. Thus the initial conditions (19)-(20) are satisfied.

Now it suffices to show that the only weak solution of (18) is $\widehat{w} \equiv 0$. To verify this, fix $0 \leq s \leq T$ and introduce an auxiliary function: $\widehat{\psi} :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$\widehat{\psi}(t) = \begin{cases} \int_t^s \widehat{w}(\tau) d\tau & 0 < t < s \\ 0 & t \geq s. \end{cases}$$

Integrating (18) over $[0, T[$ and then using one integration by parts with $\widehat{\psi}(t) = \widehat{\phi}(t)$ in (18), we obtain:

$$\int_0^s [\langle \widehat{w}_t(\tau), \widehat{w}(\tau) \rangle_Y - a_1(\widehat{\psi}_t(\tau), \widehat{\psi}(\tau)) + a_2(\widehat{w}(\tau), \widehat{w}(\tau))] d\tau = 0. \tag{50}$$

$$\int_0^s \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|\widehat{w}(\tau)\|_Y^2 - \frac{1}{2} a_1(\widehat{\psi}(\tau), \widehat{\psi}(\tau)) \right] d\tau = - \int_0^s a_2(\widehat{w}(\tau), \widehat{w}(\tau)) d\tau. \tag{51}$$

This is equivalent to $\left[\frac{1}{2} \|\widehat{w}(\tau)\|_X^2 - \frac{1}{2} a_1(\widehat{\psi}(\tau), \widehat{\psi}(\tau)) \right]_0^s = - \int_0^s a_2(\widehat{w}(\tau), \widehat{w}(\tau)) d\tau$. Thus we get $\frac{1}{2} \|\widehat{w}(s)\|_X^2 + \frac{1}{2} a_1(\widehat{\psi}(0), \widehat{\psi}(0)) \leq 0$.

Since the bilinear form $a_1(\cdot, \cdot)$ is coercive, $\widehat{w}(s) \equiv 0$ and $\widehat{\psi}(0) = 0$. Also, since $s \in]0, T[$ was arbitrary then $\widehat{w} \equiv 0$. \square

2.5 Higher Regularity Results

Before stating the theorem of the stronger continuity of the weak solution, recall the lemma 8.1 of chapter 3 pp. 297 of (Lions & Magenes, 1968) which will be used in the proof of this theorem.

Lemma 10 *Let X and Y two Banach spaces, $X \subset Y$ with continuous injection, the space X being reflexive. We set:*

$$C_w([0, T]; Y) = \{w \in L^\infty(0, T; Y) : t \mapsto \langle f, w(t) \rangle \text{ is continuous on } [0, T], \forall f \in Y'\}$$

which denotes the space of weakly continuous functions with values in Y . Thus we get

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_w([0, T]; Y) = C_w([0, T]; X).$$

Proof. For the proof, the reader is referred to chapter 3 pp. 297–298 in (Lions & Magenes, 1968). □

Theorem 11 *The weak solution \widehat{w} of (18)-(20) satisfies*

$$\widehat{w} \in C([0, T]; X), \tag{52}$$

$$\widehat{w}_t \in C([0, T]; Y), \tag{53}$$

after possibly a modification on a set of measure zero.

Proof. This proof is an adaption of standard strategies in section 8.4 of (Lions & Magenes, 1968) pp. 297-301 and in section 2.4 of (Temam, 1988). Using Lemma 10, it results from (26)-(27) that $\widehat{w} \in C_w([0, T]; X)$. Furthermore, (24) and (26) imply $\widehat{w}_t \in C_w([0, T]; Y)$.

Now, we use a common technique in functional analysis, specifically in distribution theory, to move from a problem of generalized functions to a restriction of regular functions easier to handle. Let a scalar cutoff function $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ be fixed such that $\xi(x) = 1$ if $x \in J \subset\subset [0, T]$ and $\xi(x) = 0$ else. The function $\xi\widehat{w}$ is then compactly supported. Let η^ε be a standard mollifier in time. For example, the function η^ε may be given by $\eta^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ where

$$\eta(t) = \begin{cases} C \exp[-1/(1 - |t|^2)], & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

belongs to $C_c^\infty(\mathbb{R})$ for any C . We choose C such that $\int_{\mathbb{R}} \eta dx = 1$. Introduce the notation $\widehat{w}^\varepsilon = \eta^\varepsilon * \xi\widehat{w} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, X)$. In addition, \widehat{w}^ε converges to \widehat{w} in X and $(\widehat{w}^\varepsilon)_t$ converges to \widehat{w}_t a.e in H for all element on J . Hence, $\widehat{E}(t, \widehat{w}^\varepsilon)$ converges to $\widehat{E}(t, \widehat{w})$ a.e on J . Since \widehat{w}^ε is smooth, a straightforward calculation on J gives:

$$\frac{d}{dt} E(t, \widehat{w}^\varepsilon) = -\alpha \left[((\widehat{w}^\varepsilon)_t)_{(2)}(t) \right]^2.$$

Passing to the limit, one obtains when $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{d}{dt} E(t, \widehat{w}) = -\alpha \left[(\widehat{w}_t)_{(2)}(t) \right]^2 \tag{54}$$

in the sense of distributions on J . Since J was arbitrary, (54) holds on all compact subintervals of $[0, T]$. Then, let $t \in [0, \infty[$ be fixed, and let $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. Let the sequence v_n be defined by

$$v_n = \frac{1}{2} \|\widehat{w}(t) - \widehat{w}(t_n)\|_X^2 + \frac{1}{2} \|\widehat{w}_t(t) - \widehat{w}_t(t_n)\|_Y^2 + \frac{\beta}{2} (\widehat{w}_{(2)}(t) - \widehat{w}_{(2)}(t_n))^2. \tag{55}$$

Thus, we have:

$$v_n = \widehat{E}(t, \widehat{w}) + \widehat{E}(t_n, \widehat{w}) - \langle \widehat{w}(t), \widehat{w}(t_n) \rangle_X - \langle \widehat{w}_t(t), \widehat{w}_t(t_n) \rangle_Y - \beta \widehat{w}_{(2)}(t) \widehat{w}_{(2)}(t_n). \tag{56}$$

Since $\widehat{w}, \widehat{w}_t$ are weakly continuous and \widehat{E} is continuous in t , we have, passing to the limit in (56) :

$$v_n \rightarrow 0, \text{ when } n \rightarrow \infty.$$

Therefore, this implies that

$$\|\widehat{w}(t) - \widehat{w}(t_n)\|_X^2 \rightarrow 0 \text{ when } n \rightarrow \infty \tag{57}$$

and

$$\|\widehat{w}_t(t) - \widehat{w}_t(t_n)\|_Y^2 \rightarrow 0 \text{ when } n \rightarrow \infty. \tag{58}$$

Thus we get $\widehat{w} \in C([0, T]; X)$ and $\widehat{w}_t \in C([0, T]; Y)$. □

In the next sections, the goal is to develop a numerical method for (1)-(4) in such a way that the decay of the Lyapunov function is preserved. The first step of this method is the discretization of the system in space to obtain the semi-discrete scheme, and then in time, in order to get the fully-discrete scheme.

3. Semi-discrete Scheme

3.1 Piecewise Cubic Hermite Polynomials

Our numerical work consist to construct an appropriate piecewise space of C^1 -functions on $Z = [0, 1]$. Assume that Z is subdivided into P intervals of the form $Z_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, P - 1$ ie $Z = \cup_{i=0}^P Z_i$. In particular, if the subdivision is

uniform, let us denote the step length by $h = 1/P$ and $Z_i = [ih, (i + 1)h]$.

Let us find cubic polynomial functions N_j^i , $i = 0, 1, \dots, P - 1$ and $j = 1, 2, 3, 4$ that satisfy the following conditions :

$$\begin{cases} N_1^i(x_i) = 1, & N_{1x}^i(x_i) = N_1^i(x_{i+1}) = N_{1x}^i(x_{i+1}) = 0, \\ N_{2x}^i(x_i) = 1, & N_2^i(x_i) = N_2^i(x_{i+1}) = N_{2x}^i(x_{i+1}) = 0, \\ N_3^i(x_{i+1}) = 1, & N_3^i(x_i) = N_3^i(x_i) = N_{3x}^i(x_{i+1}) = 0, \\ N_{4x}^i(x_{i+1}) = 1, & N_4^i(x_i) = N_{4x}^i(x_i) = N_4^i(x_{i+1}) = 0, \forall x \in Z_i. \end{cases} \tag{59}$$

Let us use the following affine transformation:

$$\theta_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}],$$

allowing us to manipulate all operations on $[0, 1]$. The intermediate variables θ_i are called *local coordinates*. Then under these coordinates, the unknown functions $\tilde{N}_j(\theta)$ must satisfy the following boundary conditions:

$$\begin{cases} \tilde{N}_1(0) = 1, & \tilde{N}_{1\theta}(0) = \tilde{N}_1(1) = \tilde{N}_{1\theta}(1) = 0 \\ \tilde{N}_{2\theta}(0) = 1, & \tilde{N}_2(0) = \tilde{N}_2(1) = \tilde{N}_{2\theta}(1) = 0 \\ \tilde{N}_3(1) = 1, & \tilde{N}_3(0) = \tilde{N}_{3\theta}(0) = \tilde{N}_{3\theta}(1) = 0 \\ \tilde{N}_{4\theta}(1) = 1, & \tilde{N}_4(0) = \tilde{N}_{4\theta}(0) = \tilde{N}_4(1) = 0. \end{cases} \tag{60}$$

Let us find explicit expressions of the functions $\tilde{N}_j(\theta)$. For all $\theta \in [0, 1]$, for all $j = 1, 2, 3, 4$, the functions $\tilde{N}_j(\theta)$ are polynomials of degree 3, therefore of the form $\tilde{N}_j(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d$. We remark that 1 is a double root of N_1 . Then $\tilde{N}_1(\theta) = (\theta - 1)^2(a\theta + b)$. Using the two remaining conditions, we find $a = 2$ and $b = 1$. Hence we get

$$\tilde{N}_1(\theta) = (\theta - 1)^2(2\theta + 1).$$

Analogously, we find

$$\tilde{N}_2(\theta) = \theta(\theta - 1)^2, \quad \tilde{N}_3(\theta) = \theta^2(3 - 2\theta), \quad \tilde{N}_4(\theta) = \theta^2(\theta - 1), \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

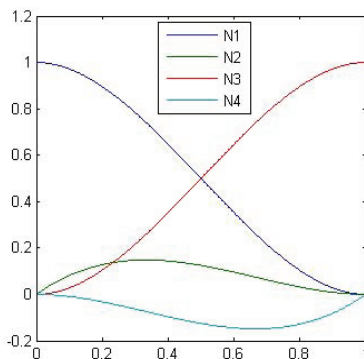


Figure 2. Hermitian Polynomial functions

By extension by 0 on $Z - Z_i$, for all $i = 0, \dots, P - 1$, we define the *Hermitian functions* on Z :

$$\begin{cases} N_j^i(x) = N_j(\theta_i) \Big|_{\theta_i = \frac{x - x_i}{h}}, j = 1, 3 \\ N_j^i(x) = hN_j(\theta_i) \Big|_{\theta_i = \frac{x - x_i}{h}}, j = 2, 4 \\ N_j^i = 0 \Big|_{Z - Z_i}, i = 0, \dots, P - 1, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \tag{61}$$

By concatenating the Hermitian functions obtained above, we can obtain the basic functions on the different supports as follows:

with the support Z_0 , $\phi_1^0(x) = N_1^0(x)$, $\phi_2^0(x) = N_2^0(x)$;

with the support Z_{i-1} , $\phi_1^i(x) = N_3^{i-1}(x)$, $\phi_2^i(x) = N_4^{i-1}(x)$;

with the support Z_i , $\phi_1^i(x) = N_1^i(x)$, $\phi_2^i(x) = N_2^i(x)$

and with the support Z_P , $\phi_1^P(x) = N_3^{P-1}(x)$, $\phi_2^P(x) = N_4^{P-1}(x)$.

The set $\bar{B} = \{\phi_l^k, k = 0, \dots, P, l = 1, 2\}$ forms a basis that generates a subspace of V of dimension $2P + 2$ denoted by \bar{V}^h .

With the separation of variables, the approximate solution $w_h \in \bar{V}^h$ which we seek can be written as follows:

$$w_h(x, t) = \sum_{j=0}^N [w_h^j(t)\phi_1^j(x) + \bar{w}_h^j(t)\phi_2^j(x)].$$

Thus, since $w_h^0 = \bar{w}_h^0 = 0$, the N -dimensional space is as follows:

$$V^h = \text{Span}\{\phi_1^1, \phi_2^1, \dots, \phi_1^P, \phi_2^P\}.$$

3.2 Semi-discrete Scheme: Space Discretization

Since rounding errors are cumulative because of the high partial derivative terms (the spatial derivatives being of order 4) in the equation of the beam (1), we propose a finite element scheme semi-discretized in space. In fact, a variational approach allows us to reduce the degree of the derivatives by the integration by parts.

Let $\phi_j, j = 1, \dots, N$ be fixed basis for V^h . The semi-discrete solution $w_h \in C^2([0, \infty[, V^h)$ is defined as the solution of the finite element method:

$$\int_0^1 (w_h)_{tt} \phi_j \, dx + \int_0^1 (w_h)_{xx} (\phi_j)_{xx} \, dx + \beta (w_h)_x(1) (\phi_j)_x(1) + \alpha (w_h)_{tx}(1) (\phi_j)_x(1) = 0 \tag{62}$$

for all $j = 1, \dots, N$ and $t > 0$, which solves the initial conditions

$$w_h(., 0) = w_{h,0} \in V^h \tag{63}$$

$$(w_h)_t(., 0) = v_{h,0} \in V^h. \tag{64}$$

Equation (62) is a second order ODE-system in time. By separation of variables, its solution can be written in the following form:

$$(w_h)(x, t) = \sum_{i=1}^N W_i(t) \phi_i(x) \tag{65}$$

where W is a vector representation of the function w_h defined as follows:

$$W(t) = [W_1(t) \ W_2(t) \ \dots \ W_P(t) \ W_{1x}(t) \ \dots \ W_{Px}(t)]^T.$$

Equation (62) is equivalent to the following equation:

$$MW_{tt} + S W_t + K W = 0. \tag{66}$$

M is the mass matrix and K is the rigidity matrix. The corresponding matrices M, S and K are given by:

$$M_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j \, dx, \quad S_{ij} = \alpha (\phi_i)_x(1) (\phi_j)_x(1) \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

$$K_{ij} = \int_0^1 (\phi_i)_{xx} (\phi_j)_{xx} \, dx + \beta (\phi_i)_x(1) (\phi_j)_x(1) \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

The matrix K is symmetric, defined and positive because $\beta > 0$ and therefore K is invertible. Since the matrix M is also symmetric, defined and positive, this implies the existence and the uniqueness of the solution of problem (62)-(64). Note that M and K are tridiagonal matrices by blocks while S is diagonal. The calculation of elements of S is trivial because all the elements of S are zero except one nonzero element $S_{N,N} = \alpha$ with $N = 2P$.

Values of elements of matrices M and K

For $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}
 M_{2i-3,2i-3} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_1^{2i-3})^2 dx = \frac{13}{35}h, \\
 M_{2i-2,2i-2} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_2^{2i-2})^2 dx = \frac{1}{105}h^3, \\
 M_{2i-1,2i-1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})^2 dx = \frac{13}{35}h, \\
 M_{2i,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_2^{2i})^2 dx = \frac{1}{105}h^3, \\
 M_{2i-1,2i-3} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})(\phi_1^{2i-3}) dx = \frac{9}{70}h, \\
 M_{2i-3,2i-2} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_1^{2i-3})(\phi_2^{2i-2}) dx = \frac{11}{210}h^2, \\
 M_{2i-1,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})(\phi_2^{2i}) dx = -\frac{11}{210}h^2, \\
 M_{2i-3,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-3})(\phi_2^{2i}) dx = -\frac{13}{420}h^2, \\
 M_{2i-1,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})(\phi_2^{2i-2}) dx = \frac{13}{420}h^2, \\
 M_{2i-1,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})(\phi_2^{2i-2}) dx = \frac{13}{420}h^2, \\
 M_{2i,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_2^{2i})(\phi_2^{2i-2}) dx = \frac{1}{140}h^3. \\
 K_{2i-3,2i-3} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} ((\phi_1^{2i-3})'')^2 dx = \frac{12}{h^3}, \\
 K_{2i-2,2i-2} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} ((\phi_2^{2i-2})'')^2 dx = \frac{4}{h}, \\
 K_{2i-1,2i-1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_1^{2i-1})'')^2 dx = \frac{12}{h^3}, \\
 K_{2i,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_2^{2i})'')^2 dx = \frac{4}{h}, \\
 K_{2i-1,2i-3} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})''(\phi_1^{2i-3})'' dx = -\frac{12}{h^3}, \\
 K_{2i-3,2i-2} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_1^{2i-3})''(\phi_2^{2i-2})'' dx = \frac{6}{h^2}, \\
 K_{2i-1,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})''(\phi_2^{2i})'' dx = -\frac{6}{h^2}, \\
 K_{2i-3,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-3})''(\phi_2^{2i})'' dx = \frac{6}{h^2}, \\
 K_{2i-1,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_1^{2i-1})''(\phi_2^{2i-2})'' dx = -\frac{6}{h^2}, \\
 K_{2i,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_2^{2i})''(\phi_2^{2i-2})'' dx = \frac{2}{h}.
 \end{aligned}$$

3.3 Dissipativity of the Semi-discrete Scheme

In order to show that the scheme given by (62)-(64) is dissipative, first a time dependent energy functional E for a trajectory $w \in C^2([0, \infty[, V)$ is defined as analogous of the Lyapunov functional (13).

Theorem 12 Let $w_h \in C([0, \infty[; V^h)$ solution of (62)-(64). Then we get:

$$\forall t > 0, \frac{d}{dt}E(t, w_h) = -\alpha [(w_h)_{tx}(1)]^2 \leq 0. \tag{67}$$

Proof. Derive for all $t > 0, E(t, w_h)$. We have:

$$\forall t > 0, \frac{d}{dt}E(t, w_h) = \int_0^1 (w_h)_{xxt}(w_h)_{xx} dx + \int_0^1 (w_h)_{tt}(w_h)_t dx + \beta(w_h)_{tx}(1)(w_h)_x(1). \tag{68}$$

Using (62) with the test function $\phi_h = (w_h)_t$, we obtain:

$$\forall t > 0, \int_0^1 (w_h)_{tt}(w_h)_t dx + \int_0^1 (w_h)_{xx}((w_h)_{xxt}) dx + \beta(w_h)_x(1)((w_h)_{tx}(1) + \alpha(w_h)_{tx}(1)(w_h)_{tx}(1)) = 0. \tag{69}$$

Then, we get the result (67). □

Remark 3 Note that the property of dissipativity theorem of the norm was written independently of the basis $\phi_j, j = 1, \dots, N$ and can be applied to any choice of the subspace $V^h \subset V$.

3.4 A-priori Error Estimates

In this subsection, the a-priori error estimates for the semi-discrete solution approximation (62) are obtained. We will use a common method used in (Choo, Chung & Kannan, 2002) to obtain error estimates. Of course, we will adapt the method used in this article to our problem. The projection of weak solution w to V^h on $H^2(0, 1)$ denoted by \bar{w} is defined as follows:

$$\forall x \in (0, 1), \forall t > 0, \bar{w}(x, t) = \sum_{j=1}^N w(t, x_j)\phi_1^j(x) + \sum_{j=1}^N w_x(t, x_j)\phi_2^j(x).$$

We set $G = \{w \in H^4(0, 1), w(0) = w_x(0) = 0\}$. Assume for later that:

$$w \in C([0, T]; G), \tag{70}$$

$$w_t \in L^2([0, T]; G), \tag{71}$$

$$w_{tt} \in L^2([0, T]; V). \tag{72}$$

Then, from the lemma 2.1 of (Choo, Chung & Kannan, 2002), we have the following estimations almost every in t :

$$\|w - \bar{w}\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w\|_{H^4(0,1)}, \tag{73}$$

$$\|w_t - \bar{w}_t\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w_t\|_{H^4(0,1)}, \tag{74}$$

$$\|w_{tt} - \bar{w}_{tt}\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w_{tt}\|_{H^2(0,1)}. \tag{75}$$

Now, we give an important result for the convergence of the semi-discrete scheme:

Theorem 13 Let V^h the space of cubic Hermite polynomials. Assume the expressions (70)-(72). The following error estimate holds for $w_h \in C^2([0, T], V^h)$ solving (62) is given by:

$$\forall t \in [0, T], [E(t, w_h - w)]^{1/2} \leq C \left(E(0, w_h(0) - w(0))^{1/2} + h^2 (\|w\|_{C([0,T],H^4(0,1))}^2 + \|w_t\|_{L^2([0,T],H^4(0,1))}^2 + \|w_{tt}\|_{L^2([0,T],H^2(0,1))}^2) \right). \tag{76}$$

Furthermore, if w_{h0} and v_{h0} are respectively Hermite interpolations of w_0 and of v_0 , then there exists a positive constant C such that:

$$[E(t, w_h - w)]^{1/2} \leq Ch^2 (\|w\|_{C([0,T],H^4(0,1))} + \|w_t\|_{L^2([0,T],H^4(0,1))} + \|w_{tt}\|_{L^2([0,T],H^2(0,1))}). \tag{77}$$

Proof. The error of semi-discrete solution w_h is defined as $e_h = w_h - \bar{w}$. We remark that e_h is an element of V^h . Then, substituting $w_h = e_h + \bar{w}$ in (62), we get:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (e_h)_t \phi \, dx + \int_0^1 (e_h)_{xx} \phi_{xx} \, dx + \beta(e_h)_x(1) \phi_x(1) + \alpha(e_h)_{tx}(1) \phi_x(1) \\ &= - \int_0^1 (\bar{w})_t \phi \, dx - \int_0^1 (\bar{w})_{xx} \phi_{xx} \, dx - \beta(\bar{w})_x(1) \phi_x(1) - \alpha(\bar{w})_{tx}(1) \phi_x(1) \end{aligned}$$

for all $\phi \in V^h$. Furthermore, \bar{w} is the projection of weak solution w on discret espace V^h . Therefore using again (62), we have the following equation:

$$\int_0^1 (e_h)_t \phi \, dx + \int_0^1 (e_h)_{xx} \phi_{xx} \, dx + \beta(e_h)_x(1) \phi_x(1) + \alpha(e_h)_{tx}(1) \phi_x(1) = \int_0^1 (w - \bar{w})_t \, dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx} \phi_{xx} \, dx \quad (78)$$

for all $\phi \in V^h$. Taking now $\phi = (e_h)_t \in V^h$. Thereby, (78) becomes :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (e_h)_t (e_h)_t \, dx + \int_0^1 (e_h)_{xx} (e_h)_{txx} \, dx + \beta(e_h)_x(1) (e_h)_{tx}(1) + \alpha(e_h)_{tx}(1) (e_h)_{tx}(1) \\ &= \int_0^1 (w - \bar{w})_t (e_h)_t \, dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx} (e_h)_{txx} \, dx, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

For all $t \in [0, T]$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^1 (e_h)_t^2 \, dx + \int_0^1 (e_h)_{xx}^2 \, dx + \beta((e_h)_x(1))^2 \right] = \int_0^1 (w - \bar{w})_t (e_h)_t \, dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx} (e_h)_{txx} \, dx - \alpha(e_h)_{tx}(1) (e_h)_{tx}(1). \quad (79)$$

Thus we get:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t, e_h) = \int_0^1 (w - \bar{w})_t (e_h)_t \, dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx} (e_h)_{txx} \, dx - \alpha(e_h)_{tx}(1) (e_h)_{tx}(1), \quad \forall t \in [0, T].$$

This implies that:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t, e_h) \leq \int_0^1 (w - \bar{w})_t (e_h)_t \, dx + \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx} (e_h)_{txx} \, dx, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (80)$$

Or again :

$$\frac{d}{dt} E(t, e_h) \leq 2 \int_0^1 (w - \bar{w})_t (e_h)_t \, dx + 2 \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx} (e_h)_{txx} \, dx, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (81)$$

By integrating (81) in the time direction ie on $t \in [0, T]$, one obtains:

$$E(t, e_h) \leq E(0, e_h(0)) + 2 \int_0^t \int_0^1 (w - \bar{w})_t (e_h)_t \, dx \, d\tau + 2 \int_0^t \int_0^1 (w - \bar{w})_{xx} (e_h)_{txx} \, dx \, d\tau. \quad (82)$$

By one integration by parts $\int_0^t (w - \bar{w})_{xx} (e_h)_{txx} \, d\tau$, (82) becomes finally:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \quad E(t, e_h) &\leq E(0, e_h(0)) + 2 \int_0^t \int_0^1 (w_{tt}(\tau, x) - \bar{w}_{tt}(\tau, x))(e_h)_t(\tau, x) \, dx \, d\tau \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_0^1 (w_{txx}(\tau, x) - \bar{w}_{txx}(\tau, x))(e_h)_{xx}(\tau, x) \, dx \, d\tau \\ &\quad + 2 \int_0^1 (w_{xx}(t, x) - \bar{w}_{xx}(t, x))(e_h)_{xx}(t, x) \, dx \\ &\quad + 2 \int_0^1 (w_{xx}(0, x) - \bar{w}_{xx}(0, x))(e_h)_{xx}(0, x) \, dx. \end{aligned} \quad (83)$$

Using Cauchy Schwarz's inequality to (83) yields

$$\begin{aligned} E(t, e_h) &\leq E(0, e_h(0)) + C_1 \left[\|w_{tt} - \bar{w}_{tt}\|_{L^2([0,T],L^2(0,1))}^2 + \int_0^t \|(e_h)_t(\tau, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 \, d\tau \right] \\ &\quad + C_2 [\|w_{txx}(t, \cdot) - \bar{w}_{txx}(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|(e_h)_{xx}(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2] \\ &\quad + C_3 [\|w_{xx}(0, \cdot) - \bar{w}_{xx}(0, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|(e_h)_{xx}(0, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2] \\ &\quad + C_4 \left[\|w_t - \bar{w}_t\|_{L^2([0,T],H^2(0,1))}^2 + \int_0^t \|(e_h)_{xx}(\tau, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 \, d\tau \right], \end{aligned}$$

where C_1, C_2, C_3 and C_4 are positive constants.

Using estimations (73)-(75) and Gronwall’s inequality, we obtain (76). Finally, using the triangle inequality, we get the result (77). □

Remark 4 The order of convergence for the discretized scheme in space is 2.

4. Fully-discrete Scheme

In this section, in order to obtain a fully discretized scheme, we discretize in time of semi-discretized system (62) in such a way that the dissipation of energy is preserved. To achieve this goal, the system (62) is written as a system of ordinary differential equations of first order. Then, the Crank-Nicolson scheme obtained is used to demonstrate dissipativity of the numerical scheme. Finally, the a-priori estimates are obtained.

4.1 Crank-Nicolson Scheme

Let L be positive integer. Here, the interval $[0, T]$ is discretized into L equidistant subintervals. Let $k = T/L$ denotes the size of time discretization and $t_n = nk$ where $n = 0, 1, \dots, L$ represent the nodes of the discretization. In order to rewrite the semi-discretized scheme (62) as a differential equation of the first order, introduce the element $v_h = (w_h)_t$. Furthermore, let $V = W_t = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_N]^T$ be its vector representation in the basis $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ of Hermitian cubic polynomial space. Note that the solution w_h of semi-discretized scheme (62) becomes for the full discrete scheme a vector of the form $y_h = [w_h \ v_h]^T$. Furthermore, similar to (13), the natural norm of $y_h = y_h(t)$ is defined as follows:

$$\|y_h\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 [(w_h)_{xx}^2 + v_h^2] dx + \frac{\beta}{2} ((w_h)_x(1))^2.$$

Let now $y^n = [w^n \ v^n]$ be the approximate solution of y_h in time $t = t_n$. Let again $W^n = W(x, t_n)$ and $V^n = V(x, t_n)$ the vector representations in basis $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ respectively of w^n and v^n .

For the time discretization of (62), the Crank-Nicolson scheme

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{k} = \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \tag{84}$$

is used. Then we get:

$$\int_0^1 \frac{v^{n+1} - v^n}{k} \phi_h dx + \int_0^1 \frac{w_x^{n+1} + w_x^n}{2} (\phi_h)_{xx} dx + \beta \frac{w_x^{n+1}(1) + w_x^n(1)}{2} (\phi_h)_x(1) + \alpha \frac{v_x^{n+1}(1) + v_x^n(1)}{2} (\phi_h)_x(1) = 0 \tag{85}$$

for all $\phi_h \in V^h$.

Furthermore, the vector equation (66) becomes:

$$\frac{MV^{n+1} - MV^n}{k} + \frac{SV^{n+1} + SV^n}{2} + \frac{KW^{n+1} + KW^n}{2} = 0 \tag{86}$$

which is equivalent to:

$$\left(\frac{M}{k} + \frac{S}{2}\right) V^{n+1} + \frac{K}{2} W^{n+1} = -\frac{K}{2} W^n + \left(\frac{M}{k} - \frac{S}{2}\right) V^n. \tag{87}$$

(84) and (87) give us the following system of equation: $PY^{n+1} = QY^n$ where P and Q are block matrices defined as follows:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{I}{k} & -\frac{I}{2} \\ \frac{K}{2} & -\frac{M}{k} + \frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{I}{k} & \frac{I}{2} \\ -\frac{K}{2} & \frac{M}{k} - \frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

and the vector $Y^n = [W^n \ V^n]$.

4.2 Dissipativity of Numerical Scheme

Now, we show that the fully discrete scheme (84) and (86) dissipates the norm (energy) in time.

Theorem 14 For all $n = 0, 1, \dots, L$, L and k the positive integers, we get

$$\|y^{n+1}\|^2 - \|y^n\|^2 = -\alpha \frac{(w_x^{n+1}(1) - w_x^n(1))^2}{k} \leq 0. \tag{88}$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} \|y^{n+1}\|^2 - \|y^n\|^2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{xx}^{n+1})^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{xx}^n)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (v^{n+1})^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 (v^n)^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x^{n+1}(1))^2 - \frac{\beta}{2} (w_x^n(1))^2. \end{aligned}$$

Multiplying (84) by $v^{n+1} - v^n$ and integrating over $[0, 1]$, we obtain:

$$\int_0^1 \frac{w^{n+1} - w^n}{k} (v^{n+1} - v^n) dx = \int_0^1 \frac{(v^{n+1})^2 - (v^n)^2}{2} dx. \tag{89}$$

Taking $\phi_h = w^{n+1} \in V^h$ in (85) yields:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{xx}^{n+1})^2 dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx}^{n+1} w_{xx}^n dx - \int_0^1 \frac{v^{n+1} - v^n}{k} w^{n+1} dx \\ &\quad - \beta \frac{w_x^{n+1}(1) + w_x^n(1)}{2} w_x^{n+1}(1) - \alpha \frac{v_x^{n+1}(1) + v_x^n(1)}{2} w_x^{n+1}(1). \end{aligned} \tag{90}$$

Taking now $\phi_h = w^n \in V^h$ in (85). Hence we get:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{xx}^n)^2 dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 w_{xx}^{n+1} w_{xx}^n dx - \int_0^1 \frac{v^{n+1} - v^n}{k} w^n dx \\ &\quad - \beta \frac{w_x^{n+1}(1) + w_x^n(1)}{2} w_x^n(1) - \alpha \frac{v_x^{n+1}(1) + v_x^n(1)}{2} w_x^n(1). \end{aligned} \tag{91}$$

Thus, using (89)-(91) and again (84), we obtain the result (88). □

Remark 5 The norm dissipates in time : $\|y^{n+1}\|^2 \leq \|y^n\|^2$. This decay of the norm when $k \rightarrow 0$ corresponds to the decay of the norm (14) in the continuous case and with the norm (67) in the semi-discrete case. However, if the beam is not controlled ie when $\alpha = \beta = 0$ then $\|y^{n+1}\| = \|y^n\|$, therefore the norm $\|y^n\|$ is constant for all $n = 0, 1, \dots, L$ where L is a positive integer. Also, notice that the Crank Nicolson scheme (84), the expression(86) and the norm dissipation property from Theorem 14 of the norm were written independently of the basis $\{\phi_j\}$. Therefore, this property of dissipativity can be applied to any choice of the subspace $V^h \subset V$.

4.3 A-priori Error Estimates

Assume that $w \in H^4(0, T; V)$.

Let $\bar{w} \in V^h$ be defined as the projection of the weak solution w on V^h such that $a_1(\bar{w}(t), \phi_h) = a_1(w(t), \phi_h)$ for all $\phi_h \in V^h$, for all $t \in [0, T]$. If $w \in H^4([0, T]; V)$ then $\bar{w} \in H^4([0, T]; V)$ since \bar{w} is bounded in V . Moreover, let $w^e := w - \bar{w}$ denote the error of the projection. Assume also that:

$$w \in H^2([0, T]; G), \quad w_t \in L^2([0, T]; G), \quad w_{tt} \in H^2([0, T]; V). \tag{92}$$

Then due to (Strang & Fix, 1973), we have the following estimations:

$$\|w - \bar{w}\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w\|_{H^4(0,1)}, \tag{93}$$

$$\|w_t - \bar{w}_t\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w_t\|_{H^4(0,1)}, \tag{94}$$

$$\|w_{tt} - \bar{w}_{tt}\|_{H^2(0,1)} \leq Ch^2 \|w_{tt}\|_{H^4(0,1)}. \tag{95}$$

Let $y(t_n) = [w(t_n) \quad w_t(t_n)]^T$ denotes the weak solution of (18) at time $t = t_n$. This approximation is defined by $y^n = [w^n \quad v^n]^T$, the n -th iteration of the fully-discrete scheme of Crank Nicolson. Thus, the approximation error is defined by $y_e^n = [e_1^n \quad e_2^n]^T$ with $e_1^n = w^n - \bar{w}(t_n)$, $e_2^n = v^n - \bar{w}_t(t_n)$ for all $n = 0, 1, \dots, L$.

Therefore, the second order error estimate both in space and time of the fully discrete scheme is obtained in the following Theorem.

Theorem 15 Assume $w \in H^2([0, T]; G) \cap H^4([0, T]; V)$. Also, take $n = 1, \dots, L$. Then the estimate is translated as follows:

$$\|y^n - y(t_n)\| \leq M \left[\|y_e^0\| + h^2 \|w\|_{H^2([0, T]; H^4(0, 1))} + k^2 \left(\|w_{tt}\|_{L^2([0, T]; H^4(0, 1))} + \|w_{tt}\|_{H^2([0, T]; H^2(0, 1))} \right) \right] \tag{96}$$

where M is a positive constant.

Proof. Take arbitrary $n = 0, 1, \dots, L$ with $L > 0$. Using Taylor's theorem, by straightforward calculation, we obtain for all $x \in [0, 1]$:

$$\frac{\bar{w}(t_{n+1}, x) - \bar{w}(t_n, x)}{k} = \bar{w}_t(t_{n+1/2}, x) + \delta_n \bar{w}_{tt}(t_{n+1/2}, x) + \frac{1}{k} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - t)^2}{2} \bar{w}_{ttt}(x, t) dt + \frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{(t_n - t)^2}{2} \bar{w}_{ttt}(x, t) dt,$$

with $\delta_n = \frac{t_{n+1} + t_n}{2}$.

Similary, we have

$$\frac{\bar{w}_t(t_{n+1}, x) + \bar{w}_t(t_n, x)}{2} = \bar{w}_t(t_{n+1/2}, x) + \delta_n \bar{w}_{tt}(t_{n+1/2}, x) + \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) \bar{w}_{ttt}(x, t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n - t) \bar{w}_{ttt}(x, t) dt.$$

Therefore, we get

$$\frac{\bar{w}(t_{n+1}, x) - \bar{w}(t_n, x)}{k} = \frac{\bar{w}_t(t_{n+1}, x) + \bar{w}_t(t_n, x)}{2} + kQ_1^n(x), \tag{97}$$

where

$$Q_1^n(x) = \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{\bar{w}_{ttt}(x, t)}{k^2} (t_{n+1} - t)^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{\bar{w}_{ttt}(x, t)}{k^2} (t_n - t)^2 dt - \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{\bar{w}_{ttt}(x, t)}{k} (t_{n+1} - t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{\bar{w}_{ttt}(x, t)}{k} (t_n - t) dt.$$

We have from (84):

$$\frac{e_1^{n+1} - e_1^n}{k} = \frac{w^{n+1} - \bar{w}(t_{n+1}, x) - w^n + \bar{w}(t_n, x)}{k} = \frac{v^{n+1} + v^n}{2} - \frac{\bar{w}(t_{n+1}, x) - \bar{w}(t_n, x)}{k}.$$

Using (97), one obtains:

$$\frac{e_1^{n+1} - e_1^n}{k} = \frac{e_2^{n+1} + e_2^n}{2} - kQ_1^n(x). \tag{98}$$

Multiplying (98) by $(e_2^{n+1} - e_2^n)$ and integrating over $[0, 1]$, we get:

$$\int_0^1 \frac{e_1^{n+1} - e_1^n}{k} (e_2^{n+1} - e_2^n) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (e_2^{n+1})^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (e_2^n)^2 dx - k \int_0^1 (e_2^{n+1} - e_2^n) Q_1^n(x) dx. \tag{99}$$

Furthermore, in order to rewrite the weak formulation (15), we have from Taylor's Theorem the following expressions :

$$\frac{w_t(t_{n+1}, x) - w_t(t_n, x)}{k} = w_{tt}(t_{n+1/2}, x) + \delta_n w_{ttt}(t_{n+1/2}, x) + \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - t)^2}{k} w_{tttt}(x, t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{(t_n - t)^2}{k} w_{tttt}(x, t) dt,$$

$$\frac{w_{xx}(t_{n+1}, x) + w_{xx}(t_n, x)}{2} = w_{xx}(t_{n+1/2}, x) + \delta_n w_{txx}(t_{n+1/2}, x) + \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) w_{ttxx}(x, t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n - t) w_{ttxx}(x, t) dt,$$

$$\frac{w_{tx}(t_{n+1}, x) + w_{tx}(t_n, x)}{2} = w_{tx}(t_{n+1/2}, x) + \delta_n w_{ttx}(t_{n+1/2}, x) + \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) w_{tttx}(x, t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n - t) w_{tttx}(x, t) dt,$$

and

$$\frac{w_x(t_{n+1}, x) + w_x(t_n, x)}{2} = w_x(t_{n+1/2}, x) + \delta_n w_{tx}(t_{n+1/2}, x) + \frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) w_{ttx}(x, t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} (t_n - t) w_{ttx}(x, t) dt.$$

Taking $t_{n+1/2} = t$ and applying the previous expressions to the weak formulation (15), we obtain after simplifications:

$$\int_0^1 \left(\frac{w_t(t_{n+1}, x) - w_t(t_n, x)}{k} \right) \phi \, dx + \int_0^1 \left(\frac{w_{xx}(t_{n+1}, x) + w_{xx}(t_n, x)}{2} \right) \phi_{xx} \, dx + \alpha \left(\frac{w_{tx}(t_{n+1}, 1) + w_{tx}(t_n, 1)}{2} \right) \phi_x(1) + \beta \left(\frac{w_x(t_{n+1}, 1) + w_x(t_n, 1)}{2} \right) \phi_x(1) = k Q_2^n(\phi). \tag{100}$$

where the functional $Q_2^n : V \rightarrow \mathbb{R}$ is defined as follows:

$$Q_2^n(\phi) =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{ttt}(t, x)}{k^2} (t_{n+1} - t)^2 \, dt + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{ttt}(t, x)}{k^2} (t_n - t)^2 \, dt \right) \phi \, dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{ttxx}(t, x)}{k} (t_{n+1} - t) \, dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{ttxx}(t, x)}{k} (t_n - t) \, dt \right) \phi_{xx} \, dx + \beta \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{tx}(t, 1)}{k} (t_{n+1} - t) \, dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{tx}(t, 1)}{k} (t_n - t) \, dt \right) \phi_x(1) + \alpha \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{tx}(t, 1)}{k} (t_{n+1} - t) \, dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{tx}(t, 1)}{k} (t_n - t) \, dt \right) \phi_x(1). \tag{101}$$

Furthermore, using (100) and (85), one obtains:

$$\int_0^1 \frac{e_2^{n+1} - e_2^n}{k} \phi_h \, dx + \int_0^1 \frac{e_{1xx}^{n+1} + e_{1xx}^n}{2} (\phi_h)_{xx} + \alpha \frac{e_{2x}^{n+1}(1) + e_{2x}^n(1)}{2} (\phi_h)_x(1) + \beta \frac{e_{1x}^{n+1}(1) + e_{1x}^n(1)}{2} (\phi_h)_x(1) \, dx = -k Q_2^n(\phi_h) + Q_3^n(\phi_h) \tag{102}$$

where

$$Q_3^n(\phi_h) = \int_0^1 \frac{w_t^e(t_{n+1}, x) - \bar{w}_t^e(t_n, x)}{k} \phi_h \, dx + \alpha \frac{w_{tx}^e(t_{n+1}, 1) - \bar{w}_{tx}^e(t_n, 1)}{2} (\phi_h)_x(1).$$

Using (98) and taking also $\phi_h = k \frac{e_2^{n+1} + e_2^n}{2} \in V^h$ in (102), we obtain:

$$\|y_e^{n+1}\|^2 - \|y_e^n\|^2 = -k^2 \int_0^1 \frac{e_{1xx}^{n+1} + e_{1xx}^n}{2} (Q_1^n)_{xx} \, dx - \beta k^2 \frac{e_{1x}^{n+1}(1) + e_{1x}^n(1)}{2} (Q_1^n)_x(1) - \frac{k^2}{2} Q_2^n(e_2^{n+1} + e_2^n) + \frac{k}{2} Q_3^n(e_2^{n+1} + e_2^n).$$

We have the following estimate:

$$\|Q_1^n\|_{H^2} \leq M k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|w_{ttt}(t)\|_{H^2}^2 \, dt.$$

In order to obtain the estimate of Q_2^n , we need to rewrite the second term of $Q_2^n(e_2^n)$. Integrating twice by parts over $[0, 1]$ and assuming that $e_2^n(0) = e_{2x}^n(0) = 0$, we have:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{w_{ttxx}(t, x)}{k} (t_{n+1} - t) \, dt - \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{w_{ttxx}(t, x)}{k} (t_n - t) \, dt \right) e_{2xx}^n \, dx = \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \frac{1}{2k} (t_{n+1} - t) \left(w_{ttxx}(t, 1) e_{2x}^n(1) - w_{ttxx}(t, 1) e_2^n(1) + \int_0^1 w_{ttxxx}(t, x) e_2^n \, dx \right) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \frac{1}{2k} (t_n - t) \left(w_{ttxx}(t, 1) e_{2x}^n(1) - w_{ttxx}(t, 1) e_2^n(1) + \int_0^1 w_{ttxxx}(t, x) e_2^n \, dx \right) dt.$$

Then,

$$|Q_2^n(e_2^{n+1} + e_2^n)| \leq M \left(k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|w_{ttt}(t)\|_{H^2}^2 + \|w_{tt}(t)\|_{H^2}^2 + \|w_{tt}(t)\|_{H^2}^2 \, dt + \|e_2^{n+1} + e_2^n\|_{L^2}^2 + |e_{2x}^{n+1}(1) + e_{2x}^n(1)|^2 \right).$$

Moreover, we have

$$|Q_3^n(e_2^{n+1} + e_2^n)| \leq M \left(\frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|w_{tt}^e(t)\|_{L^2}^2 \, dt + \|w_t^e\|_{C([t_n, t_{n+1}], H^2)}^2 + \|e_2^{n+1} + e_2^n\|_{L^2}^2 + |e_{2x}^{n+1}(1) + e_{2x}^n(1)|^2 \right).$$

We deduce that

$$\|y_e^{n+1}\|^2 - \|y_e^n\|^2 \leq M \left(k(\|y_e^{n+1}\|^2 + \|y_e^n\|^2 + \|w_t^e\|_{C([t_n, t_{n+1}], H^2)}^2) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|w_{tt}^e(t)\|_{L^2}^2 dt + k^4 \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\|w_{tt}(t)\|_{H^4}^2 + \|w_{ttt}(t)\|_{H^2}^2 + \|w_{tttt}(t)\|_{H^2}^2) dt \right).$$

Let now $m = 1, \dots, L$. Summing on $n = 0, \dots, m$, taking $k \leq \frac{1}{2M}$, we obtain finally using Gronwall's inequality and the estimates (93)-(95), we get:

$$\|y_e^{m+1}\|^2 \leq M \left[\|y_e^0\|^2 + h^4 (\|w_t\|_{C([0, T], H^4)}^2 + \|w_{tt}\|_{L^2([0, T], H^4)}^2) + k^4 (\|w_{tt}(t)\|_{L^2([0, T], H^4)}^2 + \|w_{ttt}(t)\|_{L^2([0, T], H^2)}^2 + \|w_{tttt}(t)\|_{L^2([0, T], H^2)}^2) \right]. \quad (103)$$

Using the triangle inequality, we obtain (96). □

Remark 6 The order of convergence both in time and space for the fully discrete scheme is 2.

Acknowledgements

We are grateful to the anonymous referees whose suggestions helped us to improve the quality of the paper.

References

- Adams, R. A. (1975). Sobolev spaces. *Pure and Applied Mathematics, Academic Press*, 65, New York-London.
- Banks, H. T., & Rosen, I. G. (1985). A Galerkin method for the estimation of parameters in hybrid systems governing the vibration of flexible beams with tip bodies. *National Aeronautics and Space Administration Langley Research Center, Institute for Computer Applications in Science and Engineering*. NASA Document ID: 19850011424; NASA Report/Patent No: NASA-CR-172537, ICASE Report No: 85-7.
- Banks, H. T., & Rosen, I. G. (1987). Computational methods for the identification of spatially varying stiffness and damping in beams. *Control, theory and advanced technology*, 3(1), 1-32.
- Brenner, S. C., & Scott, L. R. (2008). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Third ed. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0>
- Brezis, H. (2011). *Fonctional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York.
- Choo, S. M., Chung, S. K., & Kannan, R. (2002). Finite element Galerkin solutions for the strongly damped extensible beam equations. *Korean Journal of Computational and Applied Mathematics*. 9(1), 27-43.
- Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society. Providence.
- Guo, B. Z. (2002). Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler-Bernoulli beam equations with variable coefficients. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40, 1905-1923. <https://doi.org/10.1137/S0363012900372519>
- Johnson, C. (1987). *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press.
- Li, X. (2009). *Observation et Commande de Quelques Systèmes à Paramètres Distribués*, Automatique/Robotique, Université Claude Bernard-Lyon I.
- Lions, J. L., & Magenes, E. (1968). *Problèmes aux limites non homogènes et Applications. I*, Dunod.
- Miletic, M. (2015). *Stability analysis and a dissipative FEM for an Euler-Bernoulli beam with tip body and passivity-based boundary control*, Ph.D. Thesis, Vienna University of Technology.
- Quarteroni, A., Saleri, F., & Gervasio, P. (2010). *Calcul scientifique, Cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave*. Deuxième édition, Springer.
- Shkalikov, A. (1986). Boundary problem for ordinary differential operators with parameter in boundary conditions. *Journal of Soviet Mathematics*. 33, 1311-1342. <https://doi.org/10.1007/BF01084754>
- Strang, G., Fix, G. (1973). *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Temam, R. (1988). Infinite-dimensional Dynamical Systems In Mechanics And Physics. *Applied Mathematical Sciences*, 68. Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0313-8>
- Touré, K. A., Koua, B. J. C., & Diop, F. N. (2016) Riesz basis property and exponential stability of a flexible Euler-Bernoulli beams with a force control in rotation and velocity Rotation. *Far East J. Appl. Math.*, 99(1), 33-60.

Copyrights

Copyright for this article is retained by the author(s), with first publication rights granted to the journal.

This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Stabilization of Variable Coefficients Euler-Bernoulli Beam with Viscous Damping under a Force Control in Rotation and Velocity Rotation

Bomisso G. Jean Marc¹, Touré K. Augustin² & Yoro Gozo¹

¹ Université Nangui Abrogoua d'Abobo-Adjamé and UFR Sciences Fondamentales et Appliquées, Côte d'Ivoire

² Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire

Correspondence: Bomisso G. Jean Marc, Université Nangui Abrogoua d'Abobo-Adjamé and UFR Sciences Fondamentales et Appliquées, BP 801 Abidjan 02, Côte d'Ivoire. E-mail: bogojm@yahoo.fr.

Received: August 30, 2017 Accepted: September 14, 2017 Online Published: October 2, 2017

doi:10.5539/jmr.v9n6p1 URL: <https://doi.org/10.5539/jmr.v9n6p1>

Abstract

This paper investigates the problem of exponential stability for a damped Euler-Bernoulli beam with variable coefficients clamped at one end and subjected to a force control in rotation and velocity rotation. We adopt the Riesz basis approach for show that the closed-loop system is a Riesz spectral system. Therefore, the exponential stability and the spectrum-determined growth condition are obtained.

Keywords: Beam equation, boundary feedback control, exponential stability, semigroup theory, Riesz basis

Mathematics Subject Classification 2010. 35B35, 35P20, 93D15.

1. Introduction

In this paper, we study the exponential stability property of a damped Euler-Bernoulli beams with variable coefficients under a force feedback in rotation and velocity rotation. The equations of motion of the system are described as follows

$$m(x)w_{tt}(x, t) + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} + \gamma(x)w_t(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (1)$$

$$w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$(EI(\cdot)w_{xx})_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$-EI(1)w_{xx}(1, t) = \alpha w_{xt}(1, t) + \beta w_x(1, t), \quad t > 0, \quad (4)$$

where the subscripts t and x denote derivatives with respect to the time t and the position x respectively. $w(x, t)$ stands for the transverse displacement of the beam at the position x and time t . The feedbacks α and β are two given positive constants. We assume that the length of the beam is equal to unity. $EI(x)$ and $m(x)$ are, respectively, the flexural rigidity function and the mass density function of the beam along the spatial variable x satisfying the following condition

$$m(x), EI(x) \in C^4(0, 1), \quad m(x), EI(x) > 0 \quad (5)$$

for all $x \in [0, 1]$. Non-homogeneous materials, in particular smart materials used in engineering, are typical examples of the importance of assuming coefficients as variables (Lee & Li, 1998). Moreover, $\gamma(x)$ is a continuous coefficient function of feedback damping that is assumed to satisfy the condition

$$\int_0^1 \left(\frac{\gamma(x)}{m(x)} \right) \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{1/4} dx > 0. \quad (6)$$

Notice that the condition (6) will allow γ to be indefinite in the interval $[0, 1]$.

In the theory of dynamic systems, stability is a matter of great interest to mathematicians and engineers. More particularly, exponential stability is the most desirable stability, especially for damped systems. The study of the case ($\gamma \equiv 0$) was done in (Bomisso, Touré & Yoro, 2017) where the authors have obtained a result according to the authors Wang et al (see e.g. Wang, 2004) to show the exponential stability of system (1)-(4). In (Wang, 2004), a question has been raised and is valid for our system (1)-(4): Due to the nonuniform physical thickness and/or density of the Euler-Bernoulli beam with the variable coefficient damping $\gamma(x)$ in equation (1), what conditions are needed to put onto the damping term to guarantee exponential stability? Here it is very hard to have the exact precise location of the eigenvalues because equation

(1) contains variable coefficients and subject to the boundary conditions (2)-(4). This question is treated when (1) is associated to hinged boundary conditions (see Wang, 2004), and when the equation (1) is subjected to the force control in position and velocity (see Touré, Coulibaly & Kouassi, 2015). Moreover, in order to study the eigenvalues of systems with variable coefficients, we will use the two steps provided by Birkhoff's works (Birkhoff, 1908) and Naimark's works (Naimark, 1967). This approach was used by many authors for study the Euler-Bernoulli beams equations with variable coefficients (see e.g. Guo, 2002; Guo & Wang, 2006; Wang, 2004; Wang, Xu & Yung, 2005). In our case, we rely on idea of Wang et al (see e.g. Wang, 2004; Wang, Xu & Yung, 2005) in order to study the problem with eigenvalues related to problem (1)-(4) in the form of an ordinary differential equation $L(f) = \lambda f$ with boundary conditions λ -polynomials. We establish conditions on the two feedbacks parameters at the boundary α and β to obtain the property of the Riesz basis and the exponential stability of the system (1)-(4).

Our main contribution is to prove the exponential stability of the perturbed system (1)-(4).

The rest of the paper is organized as follows. In section 2, the system (1)-(4) is formulated as an evolution problem and studied in semigroup framework. In section 3, a spectral analysis is made and next, we prove that the system operator has Riesz basis property in the corresponding state space. Consequently, in section 4, we give conditions that ensure the exponential stability of our perturbed system.

2. Semigroup Formulation

We define the following functional spaces:

$$H_E^2(0, 1) = \{w \in H^2(0, 1) \mid w(0) = w_x(0) = 0\} \tag{7}$$

and

$$\mathbb{H} = H_E^2(0, 1) \times L^2(0, 1), \tag{8}$$

with the inner product

$$\langle w, v \rangle_{\mathbb{H}} = \int_0^1 m(x)f_2(x)\overline{g_2(x)} dx + \int_0^1 EI(x)f_1''(x)\overline{g_1''(x)} dx + \beta f_1'(1)\overline{g_1'(1)}, \tag{9}$$

where $w = (f_1, f_2)^T \in \mathbb{H}$, $v = (g_1, g_2)^T \in \mathbb{H}$ and $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ denotes the corresponding norm. We recall also the definitions of the following spaces :

$$L^2(0, 1) = \left\{ w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^1 |w|^2 dx < \infty \right\} \tag{10}$$

$$H^k(0, 1) = \{w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)} \in L^2(0, 1)\}. \tag{11}$$

Let $A_\gamma : D(A_\gamma) \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ an unbounded linear operator with the domain

$$D(A_\gamma) = \left\{ (f, g)^T \in (H^4(0, 1) \cap H_E^2(0, 1)) \times H_E^2(0, 1) \mid (EI(\cdot)f''(\cdot))'(1) = 0, -EI(1)f''(1) = \alpha g_x(1) + \beta f_x(1) \right\} \tag{12}$$

defined as

$$A_\gamma(f, g)^T = \left(g(x), -\frac{1}{m(x)}[(EI(x)f''(x))'' + \gamma(x)g(x)] \right)^T. \tag{13}$$

So, we can write (1)-(4) as a first order evolution problem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = A_\gamma z(t) \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{H}, \end{cases} \tag{14}$$

where $z(t) = (w, w_t)^T$, $z(0) = (w_0, v_0)^T$.

Furthermore, notice that

$$\Gamma_\gamma(f, g) = A_\gamma - A_0 = \left(0, -\frac{\gamma(x)g(x)}{m(x)} \right)$$

is a linear operator and bounded on \mathbb{H} with A_0 denotes the operator in the undamped case $\gamma(x) \equiv 0$.

Two results are immediate and the first one is a consequence of the perturbation theory of semigroups (see e.g. Pazy, 1983).

Theorem 1 Let operators A_γ and A_0 be defined as before. Thus A_0 is a dissipative operator and generates a C_0 -semigroup of contractions on \mathbb{H} denoted by $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ and therefore A_γ is a generator of the contraction semi-group $e^{A_\gamma t}$ on \mathbb{H} denoted by $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Proof. The first assertion has been proved in (Bomisso, Touré & Yoro, 2017). The authors have used the Lumer-Phillips Theorem (see, e.g., Pazy, 1983, pp.14) and Hille-Yosida-Phillips Theorem in order to show that the dissipative operator A_0 generates a C_0 -semigroup $S(t) = e^{A_0 t}$ on H , such that

$$\|S(t)\| \leq Ce^{\omega t}.$$

Hence, the perturbation theory (see Theorem 1.1 of Pazy, 1983) allows us to deduce that $A_\gamma = \Gamma_\gamma + A_0$ generates a C_0 -semigroup $T(t) = e^{A_\gamma t}$ such that $\|T(t)\| \leq Ce^{(\omega+C\|\Gamma_\gamma\|)t}$. ■

Theorem 2 The operator A_γ has compact resolvents and $0 \in \rho(A_\gamma)$.

Proof. The first assertion is trivial. It remains only to show that $0 \in \rho(A_\gamma)$. We prove that A_γ^{-1} exists. For any $\Psi = (g_1, g_2)^T \in \mathbb{H}$, it is enough to find a unique $\Phi = (f_1, f_2)^T \in D(A)$ such that $A\Phi = \Psi$ which yields

$$\begin{cases} f_2(x) = g_1(x), & g_1 \in H_E^2(0, 1) \\ (EI(x)f_1''(x))'' = -m(x)g_2(x) - \gamma(x)f_2(x), & g_2 \in L^2(0, 1) \\ f_1(0) = f_1'(0) = (EI(\cdot)f_1''(\cdot))'(1) = 0 \\ -EI(1)f_1''(1) = \alpha f_2'(1) + \beta f_1'(1) = \alpha g_1'(1) + \beta f_1'(1). \end{cases}$$

The solution of above system is obtained straightforward after computation:

$$\begin{cases} f_2(x) = g_1(x) \\ f_1(x) = - \int_0^x \int_0^s \left[\frac{\beta f_1'(1) + \alpha g_1'(1)}{EI(\xi)} + \frac{1}{EI(\xi)} \int_\eta^1 \int_x^1 m(r)g_2(r) + \gamma(r)g_1(r) dr d\eta \right] d\xi ds. \end{cases}$$

Therefore, $0 \in \rho(A_\gamma)$. Moreover, using Sobolev's Embedding Theorem, we deduce that A_γ^{-1} is a compact operator on the Hilbert space \mathbb{H} . ■

3. Spectral Analysis of Operator and Riesz Basis Property

3.1 Spectral Analysis of Operator A_γ

Spectral analysis is one of the methods used today to determine the behavior of eigenvalues of operators of dynamic systems. In what follows, we will rely on idea of Wang et al (Wang, Xu & Yung, 2005) in order to study the eigenvalues problem associated to system (1)-(4).

But first, we recall the following definitions and notations useful in the sequel.

Let $L(f)$ be an ordinary differential operator of order $n = 2m \in \mathbb{N}$ defined as

$$L(f) = f^{(n)}(x) + \sum_{\nu=1}^n f_\nu(x) f^{(n-\nu)}(x), \quad 0 < x < 1, \tag{15}$$

under the following boundary conditions

$$B_j(f) = \sum_{\nu=0}^{k_j} (\alpha_{j\nu} f^{(k_j-\nu)}(0) + \beta_{j\nu} f^{(k_j-\nu)}(1)), \quad 1 \leq j \leq n, \tag{16}$$

where $k_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq k_j \leq n - 1$ and $\alpha_{j\nu}, \beta_{j\nu} \in \mathbb{C}$, $|\alpha_{j0}| + |\beta_{j0}| > 0$. Assume that the coefficient functions $f_\nu(x)$ ($1 \leq \nu \leq n$) in (15) are sufficiently smooth in $(0, 1)$, and that the boundary conditions are normalized in the sense that $K = \sum_{j=1}^n k_j$ is minimal with respect to all equivalent boundary conditions (see Naimark, 1967).

Let $f_k(x, \rho)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) be the fundamental solutions for the equation:

$$L(f) + \rho^n f + \rho^m \mu(x) f(x) = 0, \quad \rho \in \mathbb{C} \tag{17}$$

where $\mu(x)$ being continuous in $[0, 1]$. We denote the n -th roots of $\omega^n + 1 = 0$ by ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) and the characteristic determinant of (17) under the boundary conditions (16) by $\Delta(\rho)$ defined as follows

$$\Delta(\rho) = \det \left[B_j(f_k(\cdot, \rho)) \right]_{j,k=1,2,\dots,n}$$

Moreover, asymptotically, $\Delta(\rho)$ can be rewritten in the following form for ($r \geq 1$)

$$\Delta(\rho) = \rho^k \sum_{\mathbb{k}_k} e^{\rho \mu_{\mathbb{k}_k}} \left[F^{\mathbb{k}_k} \right]_r, \tag{18}$$

whenever ρ is large enough (see Shkalikov, 1986; Naimark, 1967). Here, \mathbb{k}_k is a k -elements subset of $\{1, 2, \dots, n\}$, $\mu_{\mathbb{k}_k} = \sum_{j \in \mathbb{k}_k} \omega_j$,

$$\left[F^{\mathbb{k}_k} \right]_r = F_0^{\mathbb{k}_k} + \rho^{-1} F_1^{\mathbb{k}_k} + \dots + \rho^{-r+1} F_{r-1}^{\mathbb{k}_k} + O(\rho^{-r}),$$

and the sum runs over all possible selections of \mathbb{k}_k . Here and henceforth, $O(\rho^{-r})$ means that $|\rho^r \times O(\rho^{-r})|$ is bounded as $|\rho| \rightarrow \infty$.

The following definition is in (Wang, Xu & Yung, 2005, pp.461).

Definition 3 The boundary problem (17) with (16) is said to be regular if the coefficients $F_0^{\mathbb{k}_k}$ in (18) are nonzero. Furthermore, the regular boundary problem (17) with (16) is said to be strongly regular if the zeros of $\Delta(\rho)$ are asymptotically simple and isolated one from another.

Let $W_2^m(0, 1)$ be the usual Sobolev space of order m and let

$$V_E^m(0, 1) = \{f(x) \in W_2^m(0, 1) \mid B_j(f) = 0, \quad k_j < m\}.$$

Let H be a Hilbert space defined as

$$H = V_E^m(0, 1) \times L^2(0, 1),$$

with

$$\|(f, g)\|_H^2 = \|f\|_{W_2^m}^2 + \|g\|_2^2$$

which denotes its corresponding norm and let \mathbb{A} be an operator in H defined by

$$\begin{cases} \mathbb{A}(f, g) = (g, -L(f) - \mu(x)g) \\ D(\mathbb{A}) = \{(f, g) \in H \mid \mathbb{A}(f, g) \in H, B_j(f) = 0, k_j \geq m\}. \end{cases} \tag{19}$$

The Theorem 4 used in (Wang, Xu & Yung, 2005) was presented in (Wang, 2003). The reader may also refer to chapter 3 of (Wang, 2004).

Theorem 4 If the ordinary differential system with parameter $\lambda = \rho^m$

$$\begin{cases} L(f, \lambda) = L(f) + \lambda^2 f + \lambda \mu(x) f \\ B_j(f) = 0, \quad 1 \leq j \leq 2m \end{cases} \tag{20}$$

has strongly regular boundary conditions, then the generalized eigenfunction system of \mathbb{A} form a Riesz basis in the Hilbert space H .

According to Theorem 2, A_γ has a compact resolvent. Thus, the spectrum of A denoted by $\sigma(A_\gamma)$, consists only of isolated eigenvalues, which distribute in conjugate pairs on the complex plane.

Now, the eigenvalue problem of operator A_γ can be investigated. Let λ be an eigenvalue of the spectrum $\sigma(A_\gamma)$ and $\Phi = (\phi, \Psi)$ denoting its corresponding eigenfunction. Thus, $\Psi = \lambda \phi$ with ϕ satisfies the following equations:

$$\begin{cases} \lambda^2 m(x) \phi(x) + (EI(x) \phi''(x))'' + \lambda \gamma(x) \phi(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot) \phi''(\cdot))'(1) = 0 \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)} (\alpha \lambda + \beta) \phi'(1). \end{cases} \tag{21}$$

In order to solve (21), spatial transformations as introduced in (Guo, 2002) are performed, which convert the first equation of (21) into a more convenient form. For this purpose, for $0 < x < 1$, the system (21) is firstly rewritten as :

$$\begin{cases} \phi^{(4)}(x) + \frac{2EI'(x)}{EI(x)}\phi'''(x) + \frac{EI''(x)}{EI(x)}\phi''(x) + \frac{\lambda^2 m(x)}{EI(x)}\phi(x) + \frac{\lambda\gamma(x)}{EI(x)}\phi(x) = 0, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot)\phi''(\cdot))'(1) = 0, \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \tag{22}$$

Moreover, introduce the following space transformation in order to transform the coefficient function appearing with ϕ in the first expression of (22) into a constant. Let

$$f(z) = \phi(x), \quad z = z(x) = \frac{1}{h} \int_0^x \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta \tag{23}$$

with

$$h = \int_0^1 \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta. \tag{24}$$

Thus, using again its boundary conditions, the system (22) can be transformed as

$$\begin{cases} f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \lambda^2 h^4 f(z) + \lambda h^4 d(z)f(z) = 0, 0 < z < 1, \\ f(0) = f'(0) = 0, \\ EI(1)z_x^3(1)f'''(1) + [EI'(1)z_x^2(1) + 3EI(1)z_{xx}(1)z_x(1)]f''(1) + [EI(1)z_{xxx}(1) + EI'(1)z_{xx}(1)]f'(1) = 0, \\ f''(1) + \left[\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha\lambda + \beta}{EI(1)z_x(1)} \right]f'(1) = 0, \end{cases} \tag{25}$$

with

$$a(z) = \frac{6z_{xx}}{z_x^2} + \frac{2EI'(x)}{z_x EI(x)} \tag{26}$$

$$b(z) = \frac{3z_{xx}^2}{z_x^4} + \frac{6z_{xx}EI'(x)}{z_x^3 EI(x)} + \frac{EI''(x)}{z_x^2 EI(x)} + \frac{4z_{xxx}}{z_x^3} \tag{27}$$

$$c(z) = \frac{z_{xxxx}}{z_x^4} + \frac{2z_{xxx}EI'(x)}{z_x^4 EI(x)} + \frac{z_{xx}EI''(x)}{z_x^4 EI(x)} \tag{28}$$

$$d(z) = \frac{\gamma(x)}{m(x)} \tag{29}$$

$$z_x = \frac{1}{h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad z_x^4 = \frac{1}{h^4} \frac{m(x)}{EI(x)} \tag{30}$$

and

$$z_{xx} = \frac{1}{4h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{d}{dx} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{31}$$

Next, we use the idea of Naimark presented in Chapter 2 of (Naimark, 1967) for solve (25). Then, in order to cancel the third derivative term $a(z)f'''(z)$ in (25), we introduce a new invertible space transformation

$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{4} \int_0^z a(\zeta) d\zeta\right) f(z), \quad 0 < z < 1.$$

(25) can be written as follows, for any $0 < z < 1$:

$$\begin{cases} g^{(4)}(z) + b_1(z)g''(z) + c_1(z)g'(z) + d_1(z)g(z) + \lambda^2 h^4 g(z) + \lambda h^4 d(z)g(z) = 0, \\ g(0) = g'(0) = 0, \\ g''(1) + b_{11}g'(1) + b_{12}g(1) = 0, \\ g'''(1) + b_{21}g''(1) + b_{22}g'(1) + b_{23}g(1) = 0, \end{cases} \tag{32}$$

where

$$b_1(z) = -\frac{3}{2}a'(z) - \frac{3}{8}a^2(z) + b(z) \tag{33}$$

$$c_1(z) = \frac{1}{8}a^3(z) - \frac{1}{2}a(z)b(z) - a''(z) + c(z) \tag{34}$$

$$d_1(z) = \frac{3}{16}a^2(z) - \frac{1}{4}a'''(z) + \frac{3}{32}a'(z)a^2(z) - \frac{3}{256}a^4(z) + b(z)\left(\frac{1}{16}a^2(z) - \frac{1}{4}a'(z)\right) - \frac{a(z)c(z)}{4} \tag{35}$$

$$b_{11} = -\frac{1}{2}a(1) + \frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha\lambda}{EI(1)z_x(1)} + \frac{\beta}{EI(1)z_x(1)} \tag{36}$$

$$b_{12} = -\frac{1}{4}a'(1) + \frac{1}{16}a^2(1) - \frac{1}{4}a(1)\left(\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{\alpha\lambda}{EI(1)z_x(1)} + \frac{\beta}{EI(1)z_x(1)}\right) \tag{37}$$

$$b_{21} = -\frac{3}{4}a(1) + \frac{3z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{EI'(1)}{EI(1)z_x(1)} \tag{38}$$

$$b_{22} = -\frac{3}{4}a'(1) + \frac{3}{16}a^2(1) - \frac{EI'(1)a(1)}{2EI(1)z_x(1)} - \frac{3z_{xx}(1)a(1)}{2z_x^2(1)} + \frac{z_{xxx}(1)}{z_x^3(1)} + \frac{EI'(1)z_{xx}(1)}{EI(1)z_x^3(1)} \tag{39}$$

$$b_{23} = -\frac{1}{4}a''(1) + \frac{3}{16}a'(1)a(1) - \frac{1}{64}a^3(1) - \frac{a'(1)EI'(1)}{4EI(1)z_x(1)} - \frac{3a'(1)z_{xx}(1)}{4z_x^2(1)} + \frac{EI'(1)a^2(1)}{16EI(1)z_x(1)} + \frac{3z_{xx}(1)a^2(1)}{16z_x^2(1)} - \frac{a(1)z_{xxx}(1)}{4z_x^3(1)}. \tag{40}$$

Since the above transformations are invertible, the obtained system (32) is equivalent to the original problem (21).

To further solve the eigenvalue problem (32), the complex plane is divided into eight distinct sectors:

$$S_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{n\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{(n+1)\pi}{4} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 7. \tag{41}$$

Moreover, we denote the roots of equation $\theta^4 + 1 = 0$ by $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ such that inequalities holds

$$\text{Re}(\rho\omega_1) \leq \text{Re}(\rho\omega_2) \leq \text{Re}(\rho\omega_3) \leq \text{Re}(\rho\omega_4), \quad \forall \rho \in S_n. \tag{42}$$

Clearly, the choices in the sector S_1 satisfying (42) are given as follows

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \exp\left(i\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, & \omega_2 &= \exp\left(i\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ \omega_3 &= \exp\left(i\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, & \omega_4 &= \exp\left(i\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i. \end{aligned}$$

Notice that, similary, the choices can be obtained for other sectors. In the following, we study the asymptotic behavior of the eigenvalues only for the sectors S_1 and S_2 because the work done in these two sectors is valid in the other sectors.

Set $\lambda = \frac{\rho^2}{h^2}$, in each sector S_n . In order to analyse the asymptotic fundamental solutions of system (32), we will use the following Lemma (see Naimark, 1967; Wang, Xu & Yung, 2005) :

Lemma 5 For $\rho \in S_n$ with ρ large enough, the equation:

$$g^{(4)}(z) + b_1(z)g''(z) + c_1(z)g'(z) + d_1(z)g(z) + \rho^4g(z) + \rho^2h^2d(z)g(z) = 0, \quad 0 < z < 1,$$

has four linearly independent asymptotic fundamental solutions,

$$\Phi_s(z, \rho) = e^{\rho\omega_s z} \left(1 + \frac{\Phi_{s,1}(z)}{\rho} + O(\rho^{-2}) \right), \quad s = 1, 2, 3, 4$$

and hence their derivatives for $s = 1, 2, 3, 4$ and $j = 1, 2, 3$ are given by

$$\frac{d^j}{dz^j} \Phi_s(z, \rho) = (\rho\omega_s)^j e^{\rho\omega_s z} \left(1 + \frac{\Phi_{s,1}(z)}{\rho} + O(\rho^{-2}) \right)$$

where

$$\Phi_{s,1}(z) = -\frac{1}{4\omega_s} \int_0^z b_1(\zeta) d\zeta - \frac{h^2}{4\omega_s^3} \int_0^z d(\zeta) d\zeta.$$

Hence, for $s = 1, 2, 3, 4$,

$$\Phi_{s,1}(0) = 0, \quad \Phi_{s,1}(1) = -\frac{1}{4\omega_s} \int_0^1 b_1(\zeta) d\zeta = \frac{\omega_s^2 \mu_1 + \mu_2}{\omega_s^3}, \quad \text{with } \mu_1 = -\frac{1}{4} \int_0^1 b_1(\zeta) d\zeta \text{ and } \mu_2 = -\frac{h^2}{4} \int_0^1 d(\zeta) d\zeta.$$

Proof. For the proof, the reader can refer to (Touré, Coulibaly & H. Kouassi, 2015). ■

In the following, we will use the notation:

$$[a]_2 = a + O(\rho^{-2}).$$

We also need the following Lemma:

Lemma 6 For $\rho \in S_1$, if we set $\delta = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, then the inequalities holds

$$Re(\rho\omega_1) \leq -|\rho|\delta, \quad Re(\rho\omega_4) \geq |\rho|\delta \text{ and } e^{\rho\omega_1} = O(\rho^{-2}) \text{ when } |\rho| \rightarrow \infty.$$

Set $\kappa = -\frac{\alpha a(1)}{4EI(1)z_x(1)h}$. Using Lemma 5, the asymptotic expressions for the boundary conditions for large enough $|\rho|$, are obtained for $s = 1, 2, 3, 4$,

$$U_4(\Phi_s, \rho) = \Phi_s(0, \rho) = 1 + O(\rho^{-2}) = [1]_2,$$

$$U_3(\Phi_s, \rho) = \Phi'_s(0, \rho) = \rho\omega_s(1 + O(\rho^{-2})) = \rho\omega_s [1]_2,$$

$$U_2(\Phi_s, \rho) = \Phi''_s(1, \rho) + b_{11}\Phi'_s(1, \rho) + b_{12}\Phi_s(1, \rho),$$

$$U_2(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^2 e^{\rho\omega_s} \left[1 + \kappa\omega_s^{-2} + (\mu_1\omega_s^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_s^{-3} + \kappa(\omega_s^2\mu_1 + \mu_2)\omega_s^{-4}\rho^{-1} + O(\rho^{-2}) \right],$$

$$U_2(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^2 e^{\rho\omega_s} \left[1 + \kappa\omega_s^{-2} + (\mu_1\omega_s^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_s^{-3} + \kappa(\omega_s^2\mu_1 + \mu_2)\omega_s^{-4}\rho^{-1} \right]_2,$$

$$U_1(\Phi_s, \rho) = \Phi'''_s(1, \rho) + b_{21}\Phi''_s(1, \rho) + b_{22}\Phi'_s(1, \rho) + b_{23}\Phi_s(1, \rho),$$

$$U_1(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^3 e^{\rho\omega_s} \left[1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_s^{-2})\rho^{-1}\omega_s^{-1} + O(\rho^{-2}) \right],$$

$$U_1(\Phi_s, \rho) = (\rho\omega_s)^3 e^{\rho\omega_s} \left[1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_s^{-2})\rho^{-1}\omega_s^{-1} \right]_2.$$

Notice that $\lambda \neq 0$ is the eigenvalue of (32) if and only if ρ satisfies the characteristic equation

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} U_4(\Phi_1, \rho) & U_4(\Phi_2, \rho) & U_4(\Phi_3, \rho) & U_4(\Phi_4, \rho) \\ U_3(\Phi_1, \rho) & U_3(\Phi_2, \rho) & U_3(\Phi_3, \rho) & U_3(\Phi_4, \rho) \\ U_2(\Phi_1, \rho) & U_2(\Phi_2, \rho) & U_2(\Phi_3, \rho) & U_2(\Phi_4, \rho) \\ U_1(\Phi_1, \rho) & U_1(\Phi_2, \rho) & U_1(\Phi_3, \rho) & U_1(\Phi_4, \rho) \end{vmatrix} = 0. \tag{43}$$

By substitution, the following expression is obtained

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ \rho\omega_1 [1]_2 & \rho\omega_2 [1]_2 \\ 0 & (\rho\omega_2)^2 e^{\rho\omega_2} \left[1 + \kappa\omega_2^{-2} + (\mu_1\omega_2^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_2^{-3} + \kappa(\omega_2^2\mu_1 + \mu_2)\omega_2^{-4}\rho^{-1} \right] \\ 0 & (\rho\omega_2)^3 e^{\rho\omega_2} \left[1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_2^{-2})\rho^{-1}\omega_2^{-1} \right]_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ \rho\omega_3 [1]_2 & \rho\omega_3 [1]_2 \\ (\rho\omega_3)^2 e^{\rho\omega_3} \left[1 + \kappa\omega_3^{-2} + (\mu_1\omega_3^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_3^{-3} + \kappa(\omega_3^2\mu_1 + \mu_2)\omega_3^{-4}\rho^{-1} \right] \\ (\rho\omega_3)^3 e^{\rho\omega_3} \left[1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_3^{-2})\rho^{-1}\omega_3^{-1} \right]_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ (\rho\omega_4)^2 e^{\rho\omega_4} \left[1 + \kappa\omega_4^{-2} + (\mu_1\omega_4^2 + \mu_2)\rho^{-1}\omega_4^{-3} + \kappa(\omega_4^2\mu_1 + \mu_2)\omega_4^{-4}\rho^{-1} \right]_2 & & & & \\ (\rho\omega_4)^3 e^{\rho\omega_4} \left[1 + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_4^{-2})\rho^{-1}\omega_4^{-1} \right]_2 & & & & \end{vmatrix}.$$

Developing the determinant, we obtain:

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) = \rho^6 e^{\rho\omega_4} \{ & (-1)(\omega_3 - \omega_1)[\kappa(\omega_2^{-2} - \omega_4^{-2}) + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_4^{-2})(\omega_4^{-1} - \omega_2^{-1})\rho^{-1} + \kappa(\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_2^{-2})(\omega_2^{-2}\omega_4^{-1} - \omega_4^{-2}\omega_2^{-1})\rho^{-1} \\ & + (\mu_1 + \mu_2\omega_4^{-2})(\omega_2^{-1} - \omega_4^{-1})\rho^{-1} + \kappa(\mu_1 + \mu_2\omega_2^{-2})(\omega_2^{-3} - \omega_4^{-3})\rho^{-1}]e^{\rho\omega_2} \\ & + (\omega_2 - \omega_1)[\kappa(\omega_3^{-2} - \omega_4^{-2}) + (\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_4^{-2})(\omega_4^{-1} - \omega_3^{-1})\rho^{-1} + \kappa(\mu_1 + b_{21} + \mu_2\omega_3^{-2})(\omega_3^{-2}\omega_4^{-1} - \omega_4^{-2}\omega_3^{-1})\rho^{-1} \\ & + (\mu_1 + \mu_2\omega_4^{-2})(\omega_3^{-1} - \omega_4^{-1})\rho^{-1} + \kappa(\mu_1 + \mu_2\omega_3^{-2})(\omega_3^{-3} - \omega_4^{-3})\rho^{-1}]e^{-\rho\omega_2} + O(\rho^{-2}) \}. \end{aligned}$$

We have the following choices in S_1 :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = -i, \quad \omega_2^2 = i, \quad \omega_3^2 = i, \quad \omega_4^2 = -i, \quad \omega_3^{-1}\omega_4 = i, \quad \omega_2^{-1}\omega_4 = -i, \quad \omega_3 = -\omega_2, \quad \omega_4 - \omega_3 = \sqrt{2}, \quad \omega_1 - \omega_3 = \sqrt{2}i, \\ \omega_2 - \omega_1 = \sqrt{2}, \quad \omega_4 - \omega_2 = -i\sqrt{2}, \quad \omega_2^{-2} - \omega_4^{-2} = -2i, \quad \omega_3^{-2} - \omega_4^{-2} = -2i, \quad \omega_3^2\omega_4^2 = 1, \quad \omega_2^2\omega_4^2 = 1, \quad \omega_2^{-3} - \omega_4^{-3} = -(1+i)\omega_2, \\ \omega_3^{-3} - \omega_4^{-3} = (1-i)\omega_2. \end{aligned}$$

Substituting the previous values into $\Delta(\rho)$, we get:

$$\Delta(\rho) = 2\sqrt{2}\kappa\rho^6 e^{\rho\omega_4} \left\{ e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + [\mu_3 e^{\rho\omega_2} + \mu_4 e^{-\rho\omega_2}] \rho^{-1} + O(\rho^{-2}) \right\}, \tag{44}$$

where

$$\begin{cases} \mu_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2\mu_1 + 2\mu_2 + b_{21} - \frac{b_{21}}{\gamma} \right] \\ \mu_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2\mu_1 - 2\mu_2 + b_{21} + \frac{b_{21}}{\gamma} \right] \end{cases} \tag{45}$$

Theorem 7 If $\kappa \neq 0$, the boundary eigenvalue problem (32) is strongly regular.

Proof. We have

$$\Theta_{-1,0} = -2\sqrt{2}i\kappa \quad \Theta_{1,0} = 2\sqrt{2}\kappa \quad \Theta_{0,0} = 0.$$

Therefore, using the Definition 3, the eigenvalue problem (32) is strongly regular. ■

Next, we study the asymptotic behavior of λ_n . The equation $\Delta(\rho) = 0$ implies that

$$e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + \mu_3\rho^{-1}e^{\rho\omega_2} + \mu_4\rho^{-1}e^{-\rho\omega_2} + O(\rho^{-2}) = 0. \tag{46}$$

(46) can be rewritten as follows

$$e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} + O(\rho^{-1}) = 0. \tag{47}$$

Remark that the solutions of equation

$$e^{\rho\omega_2} - i e^{-\rho\omega_2} = 0$$

are in the form

$$\rho_n = \left(\frac{1}{4} - n \right) \frac{\pi i}{\omega_2}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{48}$$

Let $\tilde{\rho}_n$ be the solutions of (47). Using Rouché's Theorem (see e.g. Krantz, 2008), we obtain:

$$\tilde{\rho}_n = \rho_n + \alpha_n = \left(\frac{1}{4} - n \right) \frac{\pi i}{\omega_2} + \alpha_n, \quad \alpha_n = O(n^{-1}), \quad n = N, N + 1, \dots, \tag{49}$$

where N is a large positive integer. Putting $\tilde{\rho}_n$ into (46) and using this equality $e^{\rho\omega_2} = i e^{-\rho\omega_2}$, we get

$$e^{\alpha_n\omega_2} - e^{-\alpha_n\omega_2} + \mu_3\tilde{\rho}_n^{-1}e^{\alpha_n\omega_2} - i\mu_4\tilde{\rho}_n^{-1}e^{-\alpha_n\omega_2} + O(\tilde{\rho}_n^{-2}) = 0.$$

Moreover, expanding the exponential function according to its Taylor series, we get

$$\alpha_n = -\frac{\mu_3}{2\omega_2\rho_n} + \frac{\mu_4}{2\omega_2\rho_n}i + O(n^{-2}), \quad n = N, N + 1, \dots$$

Therefore, we have

$$\tilde{\rho}_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} + \frac{\mu_3}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi}i + \frac{\mu_4}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} + O(n^{-2}), \quad n = N, N + 1, \dots$$

Note that $\lambda_n = \frac{\tilde{\rho}_n^2}{h^2} \neq 0$, $\omega_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ and $\omega_2^2 = i$. So we have

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2}(\mu_4 - \mu_3) + \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu_4 + \mu_3) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + O(n^{-1}), \tag{50}$$

where $n = N, N + 1, \dots$ with N large enough.

We make the same work for the sector S_2 because the eigenvalues of system (32) can be got by a similar computation with the following choices

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \exp(i\frac{1}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, & \omega_2 &= \exp(i\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ \omega_3 &= \exp(i\frac{7}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, & \omega_4 &= \exp(i\frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \end{aligned}$$

such that the inequality (42) is satisfied

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_3) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_4), \quad \forall \rho \in S_2.$$

Hence, in sector S_2 , the characteristic determinant $\Delta(\rho)$ of (21) :

$$\Delta(\rho) = 2\sqrt{2}\gamma\rho^6 e^{\rho\omega_4} \left\{ e^{\rho\omega_2} + i e^{-\rho\omega_2} - [\mu_2 e^{\rho\omega_3} + \mu_4 e^{-\rho\omega_2}] \rho^{-1} + O(\rho^{-2}) \right\}.$$

After computation, we have

$$\tilde{\rho}_n = \left(\frac{1}{4} - n\right) \frac{\pi i}{\omega_2} - \frac{\mu_3}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi}i + \frac{\mu_4}{2\left(\frac{1}{4} - n\right)\pi} + O(n^{-2}), \quad n = N, N + 1, \dots \tag{51}$$

with N large enough. Again, using $\lambda_n = \frac{\tilde{\rho}_n^2}{h^2} \neq 0$, $\omega_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ and $\omega_2^2 = -i$, we obtain as follows the conjugate eigenvalues of the problem (32)

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2}(\mu_4 - \mu_3) - \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu_4 + \mu_3) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + O(n^{-1}), \tag{52}$$

where $n = N, N + 1, \dots$ with N large enough.

The expressions (50) and (52) give, in the following Theorem, the asymptotic expression on the eigenvalues:

Theorem 8 *Let A be the operator defined by (12) and (13). If $\kappa \neq 0$, then an asymptotic expression of the eigenvalues of the problem (32) is given by*

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{2}}{2h^2}(\mu_4 - \mu_3) \pm \frac{1}{h^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu_4 + \mu_3) + \left(\frac{1}{4} - n\right)^2 \pi^2 \right] i + O(n^{-1}), \tag{53}$$

where $n = N, N + 1, \dots$ with N large enough, and

$$\mu_4 - \mu_3 = \sqrt{2}(-2\mu_2 + \frac{b_{21}}{\gamma}) = -2\sqrt{2}\mu_2 - \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{2}h(m(1))^{\frac{1}{4}}(EI(1))^{\frac{3}{4}} \right) \tag{54}$$

where

$$\begin{aligned} \mu_2 &= -\frac{h^2}{4} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \frac{1}{h} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx \\ &= -\frac{h}{4} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx, \end{aligned} \tag{55}$$

and

$$\mu_4 + \mu_3 = \sqrt{2}(2\mu_1 + b_{21}). \tag{56}$$

Furthermore, λ_n ($n = N, N + 1, \dots$) with sufficiently large modulus are simple and distinct except for finitely many of them, and satisfy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Re\lambda_n = \frac{1}{2h} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx - \frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right). \tag{57}$$

Remark 1 This Theorem is a bit of surprise because although the beam is nonuniform, we obtain an asymptotic uniform rate of decay in terms of the viscous damping function and thus the important question asked in introduction is answered.

Moreover, with reference to (Naimark, 1967), we can say that the eigenvalues generated by the other sectors S_n coincide with those determined in the sectors S_1 and S_2 .

3.2 Riesz Basis Property of the Generalized Eigenfunctions of A_γ

In what follows, we follow an idea of Wang in (Wang, Xu & Yung, 2005) in order to discuss the Riesz basis property of the eigenfunctions of operator A_γ of system (14). To begin, we prove that the generalized eigenfunctions of A form an unconditional basis in the Hilbert space H . Thus let us choose a transformation \mathcal{L} such that

$$\mathcal{L}(f, g) = (\phi, \psi)$$

with

$$\phi(x) = f(z), \psi(x) = g(z), z = \frac{1}{h} \int_0^x \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta, \tag{58}$$

and

$$h = \int_0^1 \left(\frac{m(\zeta)}{EI(\zeta)} \right)^{\frac{1}{4}} d\zeta. \tag{59}$$

Notice that \mathcal{L} is invertible and is a bounded operator on \mathbb{H} . Also, we define the following ordinary differential operator:

$$\begin{cases} L(f) = f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z), \\ \mu(z) = h^2d(z), \\ B_1(f) = f(0) = 0, \quad B_2(f) = f'(0) = 0, \\ B_3(f) = f''(1) + \left[\frac{z_{xx}(1)}{z_x^2(1)} + \frac{(\alpha\lambda + \beta)}{EI(1)z_x(1)} \right] f'(1) = 0, \\ B_4(f) = EI(1)z_x^3(1)f'''(1) + [EI'(1)z_x^2(1) + 3EI(1)z_{xx}(1)z_x(1)]f''(1) + [EI(1)z_{xxx}(1) + EI'(1)z_{xx}(1)]f'(1) = 0, \end{cases} \tag{60}$$

where the coefficients are defined by (25)-(29). Let \mathbb{A} be defined as in (19), $\eta \in \sigma(\mathbb{A})$ be an eigenvalue of \mathbb{A} and (f, g) be an eigenfunction corresponding to η , then we obtain $g = \eta f$ and f satisfies the following equation:

$$f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \eta\mu(z)f(z) + \eta^2f(z) = 0,$$

with boundary conditions $B_j(f) = 0, j = 1, 2, 3, 4$. Now, when we take $\lambda = \frac{\eta}{h^2}$ and

$$\mathcal{L}(f, g) = (\phi(x), \psi(x))$$

we obtain that $\psi = \lambda\phi$ and ϕ satisfies

$$\begin{cases} \phi^{(4)}(x) + \frac{2EI'(x)}{EI(x)}\phi'''(x) + \frac{EI''(x)}{EI(x)}\phi''(x) + \lambda \frac{\gamma(x)}{EI(x)}\phi(x) + \frac{\lambda^2 m(x)}{EI(x)}\phi(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = (EI(\cdot)\phi'')'(1) = 0, \\ \phi''(1) = -\frac{1}{EI(1)}(\alpha\lambda + \beta)\phi'(1). \end{cases} \tag{61}$$

Thus, the following result is obtained: $\eta \in \sigma(\mathbb{A}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A_\gamma)$.

Theorem 9 Let A_γ be defined by (12) and (13). Thus, A_γ has the eigenvalues which are all simple except for finitely many of them, and the generalized eigenfunctions of operator A_γ form on \mathbb{H} a Riesz basis.

Proof. The Theorem 7 underlines that the boundary problem (32) is strongly regular. Then, the first statement follows. Moreover, using Theorem 4, we obtain that the generalized eigenfunction sequence $F_n = (f_n, \eta_n f_n)$ of operator \mathbb{A} forms a Riesz basis for \mathbb{H} . Also, \mathcal{L} being an invertible and bounded operator on \mathbb{H} , we can deduce that $\Psi_n = (\phi_n, \lambda_n \phi_n) = \mathcal{L}F_n$ forms on \mathbb{H} a Riesz basis.

Now, we are moving on to the study of the exponential stability of system (14). Referring to (Curtain & Zwart, 1995), we note that the Riesz basis property implies the spectrum-determined growth condition and (57) describes the asymptote of $\sigma(A_\gamma)$, for any small $\varepsilon > 0$ there are only finitely many eigenvalues of A in the following half-plane:

$$\Sigma : \text{Re}\lambda > \frac{1}{2h} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx - \frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right) + \varepsilon. \tag{62}$$

4. Exponential Stability

According to idea of Theorem 2.4 of (Guo, 2002), all the properties of operator A_γ obtained previously allow us to say that for the semigroup $e^{A_\gamma t}$ generated by A_γ , the spectrum-determined growth condition is satisfied:

$$\omega(A_\gamma) = s(A_\gamma),$$

with

$$\omega(A_\gamma) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \|e^{A_\gamma t}\|_H$$

which is called the growth order of $e^{A_\gamma t}$ and

$$s(A_\gamma) = \sup \{ \text{Re}\lambda | \lambda \in \sigma(A_\gamma) \}$$

which is called the spectral bound of A_γ .

We will use the Theorem 9 which is fundamental property to conclude the exponential stability of the system (1)–(4).

Theorem 10 If $\gamma(x) > 0$, the system (1)–(4) is exponential stable for all $\beta > 0$ and $\alpha > 0$. Thus, there exists the constants $M > 0$ and $\omega > 0$ such that the energy $E(t)$ of system (1)–(4) satisfies

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 m w_t^2 dx + \frac{\beta}{2} (w_x(1, t))^2 \leq ME(0) e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

for all initial condition $(w(x, 0), w_t(x, 0)) \in \mathbb{H}$.

Proof. To begin, A_γ is a dissipative operator. Indeed, for all $w = (f, g)^T \in D(A)$,

$$\langle A_\gamma w, w \rangle = \left\langle \left(g(x), -\frac{1}{m(x)} (EI(x)f''(x))'' + \gamma(x)g(x) \right), (f, g) \right\rangle$$

$$\langle A_\gamma w, w \rangle = - \int_0^1 \left[(EI(x)f''(x))'' \overline{g(x)} + \gamma(x)|g(x)|^2 \right] dx + \int_0^1 EI(x)g''(x)\overline{f''(x)} dx + \beta g'(1)\overline{f'(1)}.$$

Integrating by parts, we obtain

$$\langle A_\gamma w, w \rangle = - \int_0^1 EI(x)[g''(x)\overline{f''(x)} - f''(x)\overline{g''(x)}] dx + \beta(g'(1)\overline{f'(1)} - f'(1)\overline{g'(1)}) - \alpha|g'(1)|^2 - \int_0^1 \gamma(x)|g(x)|^2 dx.$$

Taking real parts, we obtain $\text{Re} \langle A_\gamma w, w \rangle = -\alpha|g'(1)|^2 - \int_0^1 \gamma(x)|g(x)|^2 dx < 0$. Thus, A_γ is a dissipative operator and $e^{A_\gamma t}$ is a semigroup of contraction on \mathbb{H} . Furthermore, there exists an asymptote

$$\text{Re}\lambda \sim \frac{1}{2h} \int_0^1 \frac{\gamma(x)}{m(x)} \left(\frac{m(x)}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} dx - \frac{1}{\alpha h} \left((m(1))^{\frac{1}{4}} (EI(1))^{\frac{3}{4}} \right).$$

for the spectrum of A_γ . In order to conclude the exponential stability, it remains to show that there is no eigenvalue on the imaginary axis. Let $\lambda = i\tau$ where $\tau \in \mathbb{R}^*$ is an eigenvalue of operator A_γ on the imaginary axis. Let $\Psi = (\phi, \psi)^T$ be the corresponding eigenfunction. So, $\psi = \lambda\phi$. Then we have

$$0 = \operatorname{Re} \left(\langle A_\gamma \Psi, \Psi \rangle_{\mathbb{H}} \right) = -\alpha |\psi'(1)|^2 - \int_0^1 \gamma(x) |\psi(x)|^2 dx,$$

$$0 = \|\Psi\|_{\mathbb{H}}^2 \operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re} \left(\langle A_\gamma \Psi, \Psi \rangle_{\mathbb{H}} \right) = -\alpha |\psi'(1)|^2 - \int_0^1 \gamma(x) |\psi(x)|^2 dx,$$

since $\gamma(x) > 0$ and $\psi(x)$ are continuous with $\alpha > 0$, we get

$$\psi'(1) = 0$$

and

$$\gamma(x) |\psi(x)|^2 = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Since $\gamma > 0$, we have $\psi \equiv 0$ which implies that Ψ of A_γ is zero because $\psi = \lambda\phi$ and the following differential equation is satisfied by $\phi(x)$:

$$\begin{cases} \lambda^2 m(x) \phi(x) + (EI(x) \phi''(x))'' + \lambda \gamma(x) \phi(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = \phi''(1) = \phi'''(1) = 0. \end{cases} \tag{63}$$

The above equation has a zero solution only (see Touré, Coulibaly & Kouassi, 2015). However, if $\Psi \equiv 0$ then we have a contradiction because Ψ is an eigenfunction and thus there exists no eigenvalue on the imaginary axis. Consequently, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Due to the spectrum-determined growth condition and the Theorem 9, we can conclude the exponential stability of system (1)–(4). ■

Next, using an idea of (Wang, 2004), we study the situation where $\gamma(x)$ is continuous and indefinite in $[0, 1]$. We have the following Theorem:

Theorem 11 *Let*

$$\gamma_+(x) = \max\{\gamma(x), 0\}, \quad \gamma_-(x) = \max\{-\gamma(x), 0\},$$

and let

$$A_{\gamma_+}(f, g) = \left(g(x), -\frac{1}{m(x)} ((EI(x) f''(x))'' + \gamma_+(x) g(x)) \right)^T, \quad \forall (f, g) \in D(A_{\gamma_+}) = D(A_\gamma)$$

and

$$\Gamma_-(f, g) = \left(0, \frac{\gamma_-(x)}{m(x)} g(x) \right)^T, \quad \forall (f, g) \in H.$$

Hence A_γ can be written as $A_\gamma = A_{\gamma_+} + \Gamma_-$. Let $s(A_{\gamma_+}) = \sup\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A_{\gamma_+})\}$. If

$$\max_{x \in [0, 1]} \left\{ \frac{\gamma_-(x)}{m(x)} \right\} < |s(A_{\gamma_+})|,$$

then we obtain the exponential stability of system (14).

Proof. It is easily to see that Γ_- is self-adjoint operator and

$$\|\Gamma_-\| = \max_{x \in [0, 1]} \left\{ \frac{\gamma_-(x)}{m(x)} \right\}. \tag{64}$$

According to the Theorem 10 and definition of operator A_{γ_+} , $e^{A_{\gamma_+}t}$ is a semigroup of contraction and $s(A_{\gamma_+}) < 0$. Furthermore, due to perturbation theory of linear operators semigroup, for example in the Theorem 1.1 pp. 76 of (Pazy, 1983), we obtain $\lambda \in \rho(A_\gamma)$ whenever $\operatorname{Re} \lambda > s(A_{\gamma_+}) + \|\Gamma_-\| < 0$. We have again by the Theorem 9 the following important result

$$\omega(A_\gamma) = s(A_\gamma) \leq s(A_{\gamma_+}) + \|\Gamma_-\| < 0.$$

Thus, we can conclude the exponential stability of system (14). ■

References

- Adams, R. A. (1975). Sobolev spaces. *Pure and Applied Mathematics, Academic Press*, 65, New York-London.
- Birkhoff, G. D. (1908). On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 9, 219–231. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1908-1500810-1>.
- Birkhoff, G. D. (1908). Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 9, 373-395. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1908-1500818-6>.
- Bomisso, G. J. M., Touré, K. A., & Yoro G. (2017). A study of exponential stability for a flexible Euler-Bernoulli beam with variable coefficients under a force control in rotation and velocity rotation. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13, 6991–7008.
- Curtain, R. F., & Zwart, H. J. (1995). *An Introduction to Infinite Dimensional Linear System Theory*, New York: Springer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4224-6>.
- Guo, B. Z. (2002). Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler-Bernoulli beam equations with variable coefficients. *SIAM Journal on Control and Optimization* 40, 1905–1923. <https://doi.org/10.1137/S0363012900372519>.
- Guo, B. Z., & Wang, J. M. (2006). Riesz basis generation of abstract second order partial equation systems with general non-separated boundary conditions. *Numerical Functional Analysis and Optimisation*, 27, 291-328. <https://doi.org/10.1080/01630560600657265>.
- Krantz, S. G. (2008). *A Guide to Complex Variables*. Mathematical Association of America.
- Lee, S. W. R., & Li, H. L. (1998). Development and characterization of a rotary motor driven by anisotropic piezoelectric composite. *Smart Materials Structures* 7, 327–336. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/7/3/006>.
- Naimark, M. A. (1967). *Linear Differential Operators*, Vol. I Ungar, New York.
- Pazy, A. (1983). Semigroups of Linear Operators and applications to Partial Differential Equations. *Applied Mathematical Sciences*, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.
- Shkalikov, A. (1986). Boundary problem for ordinary differential operators with parameter in boundary conditions, *J. Soviet Math.* 33, 1311–1342. <https://doi.org/10.1007/BF01084754>.
- Touré, A., Coulibaly, A., & Kouassi, H. (2015). Riesz basis property and exponential stability of Euler-Bernoulli beams with variable coefficients and indefinite damping under a force control in position and velocity. *Electronic Journal of Differential Equations*, 54, 1–20.
- Tretter, C. (1993). On λ - Nonlinear Boundary Eigenvalue Problem, *Mathematical Research*, 71, Berlin, Akademie.
- Wang, J. M. (2003). *Spectral operators generated by partial differential equations of one dimensional spacial variable*. Proc. Chinese. Control Conf. (Yichang), 400-404.
- Wang, J. M. (2004). *Riesz basis property of some infinite-dimensional control problems and its applications*, Ph.D Thesis, The University of Hong Kong.
- Wang, J. M., Xu, G. Q., & Yung, S. P. (2004). Exponential stability of variable coefficients Rayleigh beams under boundary feedback control: a Riesz basis approach, *Syst. Control Lett.*, 51, 33-50. [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(03\)00205-6](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(03)00205-6).
- Wang, J. M., Xu, G. Q., & Yung, S. P. (2005). Riesz basis property, exponential stability of variable coefficient Euler-Bernoulli beams with indefinite damping. *IMA J. Appl. Math.*, 70, 459–477. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxh043>.

Copyrights

Copyright for this article is retained by the author(s), with first publication rights granted to the journal.

This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Bibliographie

- [1] Adams, R. A., *Sobolev spaces*, vol. 65 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York-London, (1975).
- [2] Aouragh, M. D. et Yebari, N. *Stabilisation exponentielle d'une équation des poutres de Euler-Bernoulli à coefficients variables*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, (2009).
- [3] Balakrishnan, A. V., and Taylor, L. The SCOLE design challenge. In *3rd Annual NASA-SCOLE Workshop, NASA Technical Memorandum*, Vol. 89075, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, United States, (1986), pp. 385–412.
- [4] Banks, H. T., and Rosen, I. G. *A Galerkin method for the estimation of parameters in hybrid systems governing the vibration of flexible beams with tip bodies*. Tech. Rep. 19850011424, National Aeronautics and Space Administration Langley Research Center, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, (1985).
- [5] Banks, H. T., Rosen, I. G. *Computational methods for the identification of spatially varying stiffness and damping in beams*, Control theory and advanced technology, **3**, No. 1, (1987), pp. 1–32.
- [6] Birkhoff, G. D. *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter*, Trans. Amer. Math. Soc., **9**, (1908), pp. 219–231.
- [7] Birkhoff, G. D. *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations*. Trans. Amer. Math, **9**, (1908), pp. 373–395.
- [8] Bomisso, G. J. M., Touré A. and Yoro, G. *Dissipative Numerical Method for a Flexible Euler-Bernoulli Beam with a Force Control in Rotation and Velocity Rotation*. Journal of Mathematics Research, Vol. 9, No. 4, (2017), pp. 30-48.

- [9] Bomisso, G. J. M., Touré, K. A., and Yoro G. *A study of exponential stability for a flexible Euler-Bernoulli beam with variable coefficients under a force control in rotation and velocity rotation*. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 13, (2017), 6991-7008.
- [10] Bomisso, G. J. M., Touré, K. A., and Yoro G. *Stabilization of Variable Coefficients Euler-Bernoulli Beam with Viscous Damping under a Force Control in Rotation and Velocity Rotation*. Journal of Mathematics Research, Vol. 9, No. 6, (2017), pp. 1-13.
- [11] Brenner, S. C., Scott, L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, third ed. Springer, New York, (2008).
- [12] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Masson, (1983).
- [13] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, (2011).
- [14] Chakravarthy, A., Evans, K. A., and Evers, J. *Sensitivities and functional gains for a flexible aircraft-inspired model*. In American Control Conference (ACC), (2010), IEEE, pp. 4893–4898.
- [15] Chen, G., Krantz, D.W., Wayne C.E., and West, H. H. *The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation*, Operators Methods for Optimal Control Problems, Editor : Sung J. Lee, Marcel Dekker Inc., (1988).
- [16] Chentouf, B. and Wang, J. M. *Stabilization and optimal decay rate for a non-homogeneous rotating body-beam with dynamic boundary controls*, Journal of mathematical analysis and applications, 318, 2 (2006), 667–691.
- [17] Cherkaoui, M., Conrad, F. and Yebari, N. *Optimal decay rate of energy for wave equation with boundary feedback*, Advances in Mathematical sciences and applications, 12, (2002), 549–568.
- [18] Choo, S. M., Chung, S. K. and Kannan, R. *Finite element Galerkin solutions for the strongly damped extensible beam equations*, Korean Journal of Computational and Applied Mathematics, 9, No. 1, (2002), 27–43.
- [19] Ciarlet, P. G. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Ed. Masson, (1982).
- [20] Curtain, R. F. and Zwart, H. J. *An Introduction to Infinite Dimensional Linear System Theory*, Springer-Verlag, New York, (1995).

- [21] Conrad, F., and Morgül, Ö. *On the stabilization of the flexible beam with a tip mass*. SIAM Journal on control and optimisation, 36, 6 (1998), 1962-1986.
- [22] Conrad, F., et Saouri F. Z. *Stabilisation d'une poutre. Étude du taux optimal de décroissance de l'énergie élastique*. ESAIM : Control, Optimisation and calculus of variations, 7 (2002), 567-595.
- [23] Cox, S., and Zuazua E. *The rate at which energy decays in a damping string*. Comm. Partial Differential Equations, 19 (1994), 213-243.
- [24] Datko, R. *A linear control problem in abstract Hilbert space*, J. Differential Equations, 19, (1971), pp. 346–359.
- [25] Dunford, N. and Schwartz, J. T. *Operators, Part III Spectral Operators*, Wiley-Interscience, New York, (1971).
- [26] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, (1998).
- [27] Ferreira, A.J.M. *Matlab codes for Finite Element Analysis-Solids and structures*, Solid mechanics and its applications, Springer, (2009).
- [28] Guo, B. Z. *Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler-Bernoulli beam equations with variable coefficients*, SIAM Journal on Control and Optimization 40 (2002), 1905-1923.
- [29] Guo, B. Z. and Wang, J. M. *Riesz basis generation of abstract second order partial equation systems with general non-separated boundary conditions*, Numerical Functional Analysis and Optimisation, 27 (2006), pp. 291-328.
- [30] Guo, B.Z. *On the Boundary Control of a Hybrid System with Variable Coefficients*. Journal of optimization Theory and Applications 114 (2002), NO. 2, 373-395.
- [31] Gohberg, I.C. and Krein, M. G. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operator*, Transl. Math. Monographs, Rhode Island, Vol. 18, (1969).
- [32] Golub, G.H. and Loan, C.F.V. *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, (1989).
- [33] Huang, F. *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space*, Ann. Differential Equations, 3, (1985), pp. 43-56.
- [34] Krantz, S. G. *A Guide to Complex Variables*, Mathematical Association of America, (2008).

- [35] Lee, S. W. R. and Li, H. L. *Development and characterization of a rotary motor driven by anisotropic piezoelectric composite*. Smart Materials Structures **7** (1998), 327-336.
- [36] Li, X. D., *Observation et Commande de Quelques Systèmes à Paramètres Distribués, Automatique/Robotique*, Université Claude Bernard-Lyon I, (2009).
- [37] Li, X. F., Tang, G. J., and Xi, L. Y. *Vibration of a Rayleigh cantilever beam with axial force and tip mass*. Journal of Constructional Steel Research **80**, 2 (2013), 15–22.
- [38] Lions, J.L., Magenes, E. *Problèmes aux limites non homogènes et Applications*, Volume 1, Dunod, (1968).
- [39] Littman, W., and Markus, L. *Stabilization of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping*. Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta **152** (1988), 281–330.
- [40] Liu, C. *On the stabilisation and related problems of beams*. Ph.D Thesis, The University of Hong Kong (2005).
- [41] Locker, J. *Spectral theory of non-self-adjoint two-point differential operators*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol.73, AMS, (1999).
- [42] Luo, Z. H. *Direct strain feedback control of flexible robot arms : new theoretical and experimental results*. Automatic Control, IEEE Transactions on **38**, 11, (1993), pp. 1610–1622.
- [43] Luo, Z. H, Guo, B.-Z., and Morgül, Ö. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London Ltd., London, (1999).
- [44] Naimark, M. A. *Linear Differential Operators*, Vol. I Ungar ; New York, (1967).
- [45] Mensah, E., Touré, K.A and Taha M. *Numerical approximation of the spectrum for a hyperbolic equation with boundary condition*, Far East Journal of Applied Mathematics, vol. 60, Number 1, (1994), pp. 41–53.
- [46] Miletic, M. *Stability analysis and a dissipative FEM for an Euler-Bernoulli beam with tip body and passivity-based boundary control*, Ph.D. Thesis, Vienna University of Technology, (2015).
- [47] Moler, C. B. and Stewart, G. W. *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems*, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), pp. 241-256.

- [48] Morgül, Ö. *A dynamic control law for the wave equation*, *Automatica*, vol. 30, No 11, (1994), pp. 1785-1792.
- [49] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, (1987).
- [50] Prüss, J. *On the spectrum of C_0 -semigroups*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284 (1984), pp. 847–857.
- [51] Rappaz, J. and Picasso, M. *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires, Lausanne, (1998).
- [52] Saouri, F. *Stabilisation de quelques systèmes élastiques. Analyse spectrale et comportement asymptotique*, Thèse de Doctorat, Université Henry Poincaré I, (2000).
- [53] Shkalikov, A. *Boundary problem for ordinary differential operators with parameter in boundary conditions*, *J. Soviet Math.* **33** (1986), pp. 1311–1342.
- [54] Sopasakis, P. *The Real of Linear State Space Control Systems*. <http://users.ntua.gr/chvng/en>, (2011).
- [55] Strang, G., Fix, G. *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, (1973).
- [56] Tao, L.-J., Wang, W.-P., Zhang, B., Li, W.-B., and Xu, Y.-J. *Steady vibration of the double Euler-Bernoulli beam system under a moving load with uniform velocity*. In ICETCE 12 Proceedings of the 2012 Second International Conference on Electric Technology and Civil Engineering (2012), IEEE, pp. 2623–2626.
- [57] Temam, R. *Infinite-dimensional Dynamical Systems In Mechanics And Physics*, vol. 68 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, (1988).
- [58] Touré, K. A., Koua, B. J. C. and Diop, F. N. *Riesz basis property and exponential stability of a flexible Euler-Bernoulli beams with a force control in rotation and velocity Rotation*, *Far East J. Appl. Math.* **99** (1) (2016), pp. 33–60.
- [59] Touré, A., Coulibaly, A. and Kouassi, H. *Riesz basis property and exponential stability of Euler-Bernoulli beams with variable coefficients and indefinite damping under a force control in position and velocity*. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2015**, No. 54, (2015), pp. 1–20.
- [60] Touré, A., Mensah, E. and Taha, M. *On the stabilization of a flexible cable with boundary control*. *Communications in Mathematics and Applications*, Volume 2 **2011**, Numbers 2-3, (2011), pp. 111-129.

- [61] Tretter, C. *On λ -Nonlinear Boundary Eigenvalue Problem*, Mathematical Research, Vol. 71. Berlin : Akademie, (1993).
- [62] Wang, J.M. *Riesz basis property of some infinite-dimensional control problems and its applications*. Ph.D Thesis, The University of Hong Kong (2004).
- [63] Wang, J.M, Xu G. Q. and S.P. Yung, *Riesz basis property, exponential stability of variable coefficient Euler-Bernoulli beams with indefinite damping*. IMA J. Appl. Math, **70**, (2005), pp. 459–477.
- [64] Wang, J. M. *Spectral operators generated by partial differential equations of one dimensional spacial variable*. Proc. Chinese. Control Conf. (Yichang), (2003), pp. 400–404.
- [65] Young, R. *An Introduction to Nonharmonic Fourier series*, Academic Press, New York, (1980) (revised first edition 2001).
- [66] Zabczyk, J. *A note on Co-semigroups*. Bull. Acad. Polon. Sci. Stir. Math., 13 (1975), pp. 895-898.

Résumé

Dans cette thèse, on considère une poutre flexible d'Euler-Bernoulli encastrée à une extrémité et soumise à l'autre extrémité libre à un contrôle force en rotation et en vitesse de rotation. Ce système appartient à la classe des systèmes dynamiques de dimension infinie. L'objectif poursuivi consiste à étudier le caractère bien posé au sens des C_0 -semi-groupes, le spectre, la stabilité exponentielle et la dissipativité numérique de ce système.

La première partie de cette thèse est composée de deux chapitres. Le premier est consacré à la stabilisation de cette poutre à coefficients variables. Nous montrons que le contrôle force en rotation et en vitesse de rotation stabilise exponentiellement le système. Dans le second, nous ajoutons au système étudié au premier chapitre, un amortissement dont le coefficient est une fonction qui n'est pas de signe constant. La question qui se pose naturellement est de savoir si une telle fonction pourrait avoir une mauvaise influence sur la stabilité exponentielle de ce nouveau système. Nous donnons des conditions pour qu'il soit exponentiellement stable.

La deuxième partie se décompose en deux chapitres. Le premier développe une méthode numérique qui conserve fidèlement les propriétés obtenues dans le cas continu telles que la stabilité et la dissipativité de la fonction de Lyapunov. La discrétisation du système se fait en deux étapes : une première méthode numérique semi-discrète est obtenue en utilisant la méthode des éléments finis pour la discrétisation dans l'espace, et dans la deuxième étape, un schéma numérique totalement discrétisé est obtenu en se servant du schéma de Crank-Nicolson pour la discrétisation dans le temps. Chaque schéma numérique est développé en conservant l'argumentation de dissipativité. Par ailleurs, la convergence de la méthode est montrée et des estimations d'erreur a priori sont obtenues. Le deuxième présente des simulations numériques. Par la méthode des éléments finis, nous illustrons l'influence des paramètres de contrôles rétroactifs à la frontière sur le spectre approché. En outre, l'ordre de convergence des méthodes numériques obtenu dans le premier chapitre de la deuxième partie est confirmé.

Mots clés : poutre d'Euler-Bernoulli, semi-groupe, stabilité, éléments finis d'Hermite, schéma de Crank-Nicolson, dissipativité numérique.