UNIVERSITÉ DE OUAGADOUGOU

Faculté des Sciences et Techniques

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences et Techniques
pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT D'ETAT

(*Spécialité* : **Algèbre**)

ALGÈBRES DE LA GÉNÉTIQUE DES POPULATIONS

par

Moussa OUATTARA

Soutenue le 12 décembre 1991 devant le Jury composé de :

MM.	Artibano	MICALI	Rapporteur et Président	(Université de Montpellier II)
	Philip	HOLGATE	Rapporteur	(University of London)
	Saliou	TOURE	Examinateur	(Université d'Abidjan)
	Daouda	SANGARE	Rapporteur	(Université d'Abidjan)
	Akry	KOULIBALY	Rapporteur	(Université de Ouagadougou)
	Albert	OUEDRAOGO	Examinateur	(Université de Ouagadougou)

« C'est une grande et rare vertu que la patience,
que de savoir attendre et mûrir,
que se corriger, se reprendre et ...
tendre à la perfection .»
(GIDE)

Je remercie le Professeur Artibano MICALI et le Professeur Akry KOULIBALY d'avoir accepté de diriger mes travaux. Quelle patience il leur a fallu !

Je remercie Monsieur Philip HOLGATE, Professeur au Birkbeck College de l'Université de Londres, Monsieur Saliou TOURE et Monsieur Daouda SANGARE tous deux Professeur à l'Université d'Abidjan, Monsieur Artibano MICALI, Professeur à l'Université de Montpellier II, Monsieur Albert OUEDRAOGO et Monsieur Akry KOULIBALY, de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs et membres de Jury.

Je remercie mes amis et collègues, en particulier, ceux du département de Mathématiques.

Je me dois de signaler que le support partiel du Programme CAMPUS 'Mathématiques et Génétique' a été d'une aide précieuse à la conduite de ces recherches et à la réalisation technique de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Hormis le texte "Algèbre mendélienne" de V. Glivenko(*), on peut dire que c'est en 1939 que les algèbres génétiques ont pris naissance avec les écrits de I. M. H. Etherington ([6], [7], [8], [9]). Il introduisait déjà les notions d'algèbre pondérée, de T- algèbre (en anglais : "train algebra") et de T- algèbre spéciale. Il a montré que plusieurs algèbres, provenant des modèles mathématiques de la Génétique des populations sont des T- algèbres spéciales.

En 1947, R. D. Schafer définissait, au moyen de l'algèbre associative des transformations, les objets appelés maintenant algèbres génétiques au sens de Schafer ([20]). En 1960, H. Gonshor montrait l'existence d'une base canonique dans toute T- algèbre spéciale. Une généralisation de cette notion l'a conduit à la définition des algèbres génétiques au sens de Gonshor ([10]). Cette définition est, de fait, liée aux constantes de structure de l'algèbre.

Bien avant Etherington, S. Bernstein (en 1923) posait le problème de la classification des opérateurs d'évolution satisfaisant au principe de stationarité. Autrement dit, la classification de tous les opérateurs quadratiques idempotents agissant sur l'ensemble des n-uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Le principe de stationarité est, en Génétique, une généralisation des lois de Mendel et du théorème de Hardy-Weinberg. Bernstein a lui-même donné une solution du problème en dimension trois. Un demi-siècle plus tard, Ju.I. Ljubich ([17]) donnait une forme canonique des opérateurs d'évolution idempotents et appelait les algèbres correspondantes des B-algèbres. En fait, si A est un espace vectoriel sur

(*) Comptes rendus (Doklady) de l'Acad. des Sci. de l'URRSS 4 (13) (1936) 21–31 un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et si V est un tel opérateur quadratique, il définit une structure d'algèbre commutative sur A au moyen de l'application bilinéaire qui, à tout couple de vecteurs (x, y), associe le vecteur $xy = \frac{1}{2}\big(V(x+y) - V(x) - V(y)\big)$.

En 1975, Ph. Holgate ([14]) a traduit le problème de Bernstein en terme purement algébrique et définit ainsi les algèbres de Bernstein. Dans [1], V.M. Abraham suggère une généralisation de la définition des algèbres de Bernstein par celle des algèbres de Bernstein dordre n, où n est un entier positif. Dans ce contexte, les algèbres de Bernstein ne sont autres que celles d'ordre 1, tandis que les algèbres de Bernstein d'ordre zéro, appelées aussi algèbres de Bernstein élémentaires, s'identifient, à isomorphisme près, aux S-algèbres commutatives ([18]), notion introduite par I. Kaplansky ([16]).

Une autre notion qui retiendra notre attention est celle du processus de duplication. I.M.H. Etherington a introduit cette notion après avoir observé que les algèbres zygotiques sont obtenues à partir des algèbres gamétiques par ce processus.

Ce mémoire est un ensemble de travaux portant sur toutes ces notions. Nous aurions voulu l'intituler "Algèbres génétiques", au sens d'Etherington. Mais puisque l'expression algèbre génétique a aujourd'hui un sens mathématique précis, et compte tenu de l'origine de ces objets, nous avons préféré le titre

Algèbres de la Génétique des populations.

Rappelons brièvement quelques définitions et propriétés des notions ci-dessus citées. Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre commutative. On dira que (A, ω) est *une algèbre pondérée* si $\omega : A \to K$ est un morphisme non nul d'algèbres. L'application ω est alors appelée *pondération* ou fonction poids de A. Si A est une K-algèbre de dimension finie, on dira que A est *une algèbre génétique (au sens de Gonshor)* s'il existe une base $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ de A sur K

telle que si $e_ie_j = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{ijk}e_k$, pour $i,j = 0,1,\ldots,n$, est la table de multiplication de A relativement à cette base, alors $\gamma_{000} = 1, \gamma_{0jk} = 0$ si $k < j$ et $\gamma_{ijk} = 0$ si $k \leq \max(i,j)$ pour $i,j \geq 1$. Les constantes de structures γ_{0ii}, $i = 0,1,\ldots,n$, sont appelées les T- *racines* de A.

Les algèbres génétiques sont des algèbres pondérées. En effet, il suffit pour cela, de poser $\omega(e_0) = 1$ et $\omega(e_i) = 0$ pour $i = 1,\ldots,n$.

Soit A une K-algèbre commutative de dimension finie sur K. Notons $T(A)$ la K-algèbre associative à élément unité des transformations de A. Tout élément de $T(A)$ s'écrit sous la forme $\lambda id_A + f(R_{x_1},\ldots,R_{x_p})$ où R_{x_i} est la multiplication de A définie par x_i, f est un polynôme et λ est dans K. On dira qu'une K-algèbre commutative pondérée de dimension finie (A,ω) est *une algèbre génétique (au sens de Schafer)* si, pour tout $t = \lambda id_A + f(R_{x_1},\ldots,R_{x_p})$, $P_t(X) = \det(T - Xid_A)$ ne dépend des x_i qu'à travers leurs poids $\omega(x_i)$.

La proposition suivante est bien connue (cf. [20]).

Proposition 0.1. *Si K est un corps commutatif, toute K-algèbre génétique au sens de Gonshor est génétique au sens de Schafer.*

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie, i.e., il existe des algèbres génétiques au sens de Schafer qui ne sont pas génétiques au sens de Gonshor. Néanmoins, on a la propositon suivante (cf. [11]).

Proposition 0.2. *Si K est un corps commutatif algébriquement clos et si (A,ω) est une K-algèbre pondérée, alors (A,ω) est une algèbre génétique au sens de Gonshor si et seulement si (A,ω) est génétique au sens de Schafer.*

Soit (A,ω) une K-algèbre pondérée. On dira que (A,ω) est une T- algèbre s'il existe un entier positif r et des scalaires $\gamma_1,\ldots,\gamma_{r-1}$ tels que

$$x^r + \gamma_1\omega(x)x^{r-1} + \cdots + \gamma_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$$

pour tout x dans A ; le plus petit entier r ayant cette propriété est alors appelé *le rang* de A.

Proposition 0.3. *Soient K un corps commutatif et (A,ω) une K-algèbre génétique au sens de Schafer. Alors (A,ω) est une T- algèbre.*

Soit (A,ω) une K-algèbre pondérée. Alors A admet la décomposition suivante $A = Ke \oplus N$, somme directe de K-espaces vectoriels, où e est un élément de poids 1, i.e., $\omega(e) = 1$, Ke est le sous K-espace vectoriel des multiples de e et $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est le noyau de la pondération.

La proposition suivante est aussi connue.

Proposition 0.4. *Soient K un corps commutatif et (A,ω) une K-algèbre pondérée. Si (A,ω) est une T- algèbre (resp. une algèbre génétique) alors l'idéal $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est nil (resp. nilpotent).*

La réciproque de cette proposition n'est pas toujours vraie.

En effet, Ph. Holgate (cf. [15]) a construit un exemple d'une T- algèbre non génétique, dont le noyau est nilpotent. Il est facile de construire une algèbre pondérée dont le noyau est nil et qui n'est pas une T- algèbre.

On dira qu'une K-algèbre pondérée (A,ω) est une T- ***algèbre spéciale*** si $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est nilpotent et ses puissances principales $N^k, (k \geq 1)$ sont des idéaux de A. On sait alors que toute T- algèbre spéciale est une algèbre génétique. On sait aussi (cf. [20]) qu'il existe des algèbres génétiques qui ne sont pas des T- algèbres spéciales. Néanmoins, la proposition suivante est dûe à V.M. Abraham (cf. [1]).

Proposition 0.5. *Sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2, toute T- algèbre de rang ≤ 3 est une T- algèbre spéciale.*

Ce résultat est le meilleur possible, car l'algèbre de Ph. Holgate est une T-algèbre de rang 4 qui n'est pas une T- algèbre spéciale.

de type $(1+r,s)$ et x est de poids 1. Comme on sait (cf.[21]) qu'une algèbre de Bernstein est une algèbre génétique si et seulement si le noyau est nilpotent, on a ainsi complété la réciproque de la proposition 0.4. dans le cas des algèbres de Bernstein.

Dans le troisième chapitre, nous développons une théorie de Frattini pour les algèbres de Bernstein. Puisque la ***sous-algèbre de Frattini*** d'une K-algèbre A, notée $F(A)$, est l'intersection des sous-algèbres maximales de A, c'est le lieu pour nous de revoir les algèbres de Bernstein du point de vue structure. Nous donnons une caractérisation des idéaux, des sous-algèbres et des algèbres de Bernstein qui sont à puissances associatives. Nous montrons, en caractéristique différente de 2, que si l'idéal noyau d'une algèbre de Bernstein est nil de nil indexe borné, cette algèbre est une T-algèbre. Les algèbres de Bernstein statiques sont aussi étudiées.

Le quatrième chapitre est en fait une révision de la structure des algèbres de Bernstein. En effet, nous avons repris un certain nombre de résultats en vue de leur donner une formulation à la fois correcte et définitive. C'est ainsi que nous avons introduit les notions d'orthogonalité et d'orthogonalité relative à un idempotent. Les algèbres de Bernstein orthogonales et les algèbres de Bernstein-Jordan ont été caractérisées. nous avons fait une étude approfondie de la nilpotence du noyau d'une algèbre de Bernstein de type fini. Nous avons mis en évidence le rôle joué par l'idéal L dans l'étude de la structure des algèbres de Bernstein.

Le cinquième chapitre concerne les algèbres de Bernstein d'ordre n. Nous caractérisons l'ensemble des idempotents généralisés et les algèbres de Bernstein d'ordre 2 qui sont de Jordan ou à puissances associatives. On montre aussi que toute algèbre de Bernstein d'ordre 2 et à puissances associatives est une T- algèbre de rang ≤ 5. Rappelons que un idempotent généralisé d'ordre k est un élément e vérifiant $e = e^{[k+1]}$ pour un entier $k \geq 2$.

Le but du chapitre six est de réviser la structure de la dupliquée d'une algèbre en liaison avec le théorème d'Etherington. Nous montrons que, sur un corps commutatif K, si la sous K-algèbre A^2 d'une K-algèbre A est une algèbre

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre commutative. Pour x dans A et pour tout entier $k \geq 1$, on définit inductivement la puissance pleine $x^{[k]}$ de x par $x^{[1]} = x$ et $x^{[k+1]} = x^{[k]}x^{[k]}$. Notons que, pour tout x dans A, pour tout α dans K et pour tout entier $k \geq 1$, on a $(\alpha x)^{[k]} = \alpha^{2^{k-1}} x^{[k]}$.

On dira qu'une K-algèbre commutative pondérée (A, ω) est *une algèbre de Bernstein d'ordre* n si pour tout x dans A on a $x^{[n+2]} = \big(\omega(x)\big)^{2^n} x^{[n+1]}$, où n est un entier positif.

Cette définition généralise celle des algèbres de Bernstein, disons celle des algèbres de Bernstein d'ordre 1, ou encore celles vérifiant $x^{[3]} = (x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$.

On rencontre dans la littérature de nombreux travaux sur les algèbres de Bernstein. En ce qui concerne les algèbres de Bernstein d'ordre n $(n \geq 2)$ il n'existe, à notre connaissance, que les trois articles [13], [18] et [19]. Pour les deux derniers, je remercie les Professeurs A. Micali et C. Mallol pour leur collaboration.

Cette thèse concerne les algèbres génétiques, au sens premier d'Etherington, vues comme une branche des algèbres non associatives. C'est le fruit de trois années de recherches sous la direction conjointe du Professeur A. Micali et du Professeur A. Koulibaly. Qu'ils en soient profondément remerciés. Les neuf chapitres ne sont autres que des travaux indépendants dont certains ont déjà fait l'objet de publication.

Le premier chapitre étudie les T- algèbres qui sont aussi des algèbres de Jordan, i.e., vérifiant $x^2(yx) = (x^2y)x$. Nous montrons qu'une telle algèbre, en caractéristique différente de 2, est une algèbre génétique. En particulier, pour les T- algèbres de rang 3, être de Jordan équivaut à être à puissances associatives, où une algèbre est dite à puissances associatives si toute sous-algèbre monogène est associative. La caractérisation des T-algèbres de rang 3, qui sont des algèbres de Jordan, conduit à deux classes d'algèbres dont l'étude est approfondie.

Dans le deuxième chapitre, nous montrons, en caractéristique différente de 2, que si le noyau d'une algèbre de Bernstein A est nil, alors A est une T- algèbre, l'équation rang étant de la forme $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^t = 0$ avec $t \leq r$, si A est pondérée, une T- algèbre ou une algèbre génétique, alors sa dupliquée $D(A)$ est respectivement, une algèbre pondérée, une T- algèbre ou une algèbre génétique. Une application de ce résultat aux algèbres de Bernstein (voir chapitre 4) montre que, en caractéristique différente de 2, la dupliquée de toute algèbre de Bernstein, de type fini, a son noyau nilpotent. De plus, sur un anneau commutatif K à élément unité, si A est une K-algèbre telle que le K-module A^2 soit projectif et si $A^2 = A$, alors les algèbres de Lie des dérivations (resp. les groupes des automorphismes) de A et de $D(A)$ sont isomorphes.

Dans le chapitre sept, nous continuons l'étude de la dupliquée d'une algèbre. Cependant, on identifie ici la dupliquée d'une K-algèbre A, à isomorphisme près, au produit semi-direct $A^2 \underset{s.d}{\times} N$ où on a supposé que A^2 est un K-module projectif et N désigne le noyau du morphisme d'Etherington. Le calcul des automorphismes de la dupliquée conduit à un groupe apparemment "plus gros" que celui des automorphismes de l'algèbre initiale et ce, bien que $A^2 = A$. Il fallait donc éliminer de ceux-ci les automorphismes produisant des produits semi-directs ou plutôt des extensions équivalentes. D'autre part, l'étude de la nilpotence et du radical d'Albert de la dupliquée nous conduit au fait que la dupliquée d'une algèbre n'est jamais semi-simple, à moins que l'algèbre coïncide avec le corps de base. Finalement nous donnons quelques résultats concernant l'associativité généralisée de Boers pour la dupliquée.

Le chapitre suivant répond entièrement aux questions posées par Boers (cf. [5]). En particulier, en caractéristique différente de 2, nous caractérisons les algèbres dont la dupliquée est une algèbre à puissances associatives, de Jordan ou alternative. L'étude révèle la présence des S-algèbres commutatives définies par I. Kaplansky (cf. [16]).

Le dernier chapitre traite de la dupliquée liée au sexe, une notion introduite par Ph. Holgate. Le calcul des dérivations, des automorphismes et des idempotents, nous a conduit souvent à supposer que l'algèbre vérifie la relation $A = A^2$. D'ailleurs, si A est l'algèbre génétique d'une population, l'hypothèse $A = A^2$

traduirait la conservation globale, de génération en génération, du patrimoine génétique de cette population. Aussi, les résultats mentionnés dans ce chapitre et ceux analogues du chapitre six proviendraient du caractère naturel du processus de la duplication.

Bibliographie générale

[1] V.M. Abraham, A note on train algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **20** (1976), 53–58.

[2] S. Bernstein, Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel, *C. R. A. S. Paris* **177** (1923), 528–531.

[3] S. Bernstein, Principe de Stationarité et généralisation de la loi de Mendel, *C. R. A. S. Paris* **177** (1923), 581–584.

[4] S. Bernstein, Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity, *Annales Scientifiques de l'Ukraine* **1** (1924), 83–114 (en russe); Traduction anglaise : *Ann. of Math. Statistics* **13** (1942), 53–61.

[5] A.H. Boers, Duplication of algebras II, *Proc. Kon. Ned. Ak. v. wet A 91, Indagationes Math.* **3** (1988), 235–244.

[6] I.M.H. Etherington, Genetic algebras, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **59** (1939), 242–258.

[7] I.M.H. Etherington, Duplication of linear algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **6** (1941), 222–230.

[8] I.M.H. Etherington, Special train algebras, *Quart J. Math. Oxford*, Ser. (2) **12** (1941), 1–8.

[9] I.M.H. Etherington, Commutative train algebras of rank 2 and 3, *J. London Math. Soc.* **15** (1940), 136–149. Corrigendum ibid **20** (1945) 238.

[10] H. Gonshor, Special train algebras arising in Genetics, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **12** (1960), 41–53.

[11] H. Gonshor, Contributions to genetic algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **17** (1971) 289–298.

[12] A.N. Grishkov, On the genetic property of Bernstein algebras, *Soviet Math. Dokl.*, **35**, n°3, 489–492 (1987).

[13] I.R. Hentzel, Ph. Holgate and L. A. Peresi, kth Order Bernstein algebras and stability at the k+1 generation in polyploids, *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.* (Oxford), to appear.

[14] Ph. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc.* (2), **9** (1975), 613–623.

[15] Ph. Holgate, A train algebra that is not special triangular, *Arch. Math.*, Vol. **50**, 122–124 (1988).

[16] I. Kaplansky, Algebras with many derivations, in *Aspects of Mathematics and its Applications*, J. A. Barroso editor, Elsevier Science Publishers B.V. (1986), 431–438.

[17] Ju.I. Ljubich, Basic concepts and theorems of Evolution Genetics of free populations, *Uspehi Mat. Nauk* **26** (1971),N°5, 51–116 (en russe) ; Traduction anglaise : *Russian Math. Surveys* **26** (1971) N°5, 51–123.

[18] C. Mallol, A. Micali et M. Ouattara, Sur les algèbres de Bernstein IV, *Linear Algebra and its Applications*, **158**, 1-26 (1991).

[19] M. Ouattara, Sur les algèbres de Bernstein d'ordre 2, *Linear Algebra and its Applications* **144** (1991) 29–38.

[20] R.D. Schafer, Structure of genetic algebras, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 121–135.

[21] S. Walcher, Bernstein algebras which are Jordan algebras, *Arch. Math.* Vol. **50**, 218–222 (1988).

1

Sur les T-algèbres de Jordan (*)

Abstract. We give here some results about train algebras which are Jordan. In particular we show that for train algebras of rank 3, to be Jordan is equivalent to be power associative. This is not true for train algebras of rank > 3.

Dans cet article on étudie, en caractéristique différente de 2, l'aspect algèbre de Jordan des T- algèbres. On montre que, pour les T- algèbres de rang 3, être une algèbre de Jordan équivaut à être à puissances associatives et leur équation rang est de deux formes. Dans certains cas on détermine l'ensemble des idempotents. On montre enfin que toute T- algèbre à puissances associatives de dimension 5 est une algèbre de Gonshor et 5 en est la meilleure dimension possible.

0. Introduction.

Les algèbres génétiques ont été introduites par I.M.H. Etherington ([3], [4], [5]). En 1949, R.D. Schafer ([17]) mentionnait déjà la présence, parmi elles, d'algèbres de Jordan. L'aspect Jordan a fait l'objet d'un article de Ph. Holgate ([11]) et très récemment d'autres auteurs s'y sont intéressés ([15], [16], [18], [20]).

Rappelons tout d'abord quelques définitions. Dans la suite, K sera un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2 et toute algèbre A sera commutative de dimension finie sur K. On dira que A est une K- *algèbre pondérée* s'il existe un morphisme non nul d'algèbres $\omega : A \to K$. Une K- algèbre pondérée

(*) Ce chapitre a fait l'objet d'une publication parue à *Linear Algebra and its Applications*, **144** : 11–21 (1991)

(A,ω) est une *T- algèbre* (en anglais "train algebra") s'il existe des constantes $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}$ dans K telles que

$$x^r + \gamma_1\omega(x)x^{r-1} + \cdots + \gamma_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0 \text{ pour } \quad \text{tout } x \text{ dans } A.$$

Le plus petit entier r ayant cette propriété est appelé *le rang* de A ([3]). Une K- algèbre pondérée (A,ω) est une *T- algèbre spéciale* si l'idéal $N = \text{Ker}(\omega)$ est nilpotent et toutes ses puissances principales N^k sont des idéaux de A ([5]). On dira qu'une algèbre A est une *algèbre de Gonshor* si elle admet une base $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ sur K avec la table de multiplication

$$a_0^2 = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{00k}a_k, \quad a_0a_j = \sum_{k=j}^{n} \lambda_{0jk}a_k \text{ et } a_ia_j = \sum_{k=max(i,j)+1}^{n} \lambda_{ijk}a_k$$

pour $i, j \geq 1$.

Une telle base est dite canonique ([9]). Une K- algèbre pondérée (A,ω) est une algèbre de Schafer si pour toute transformation K- linéaire $T = \alpha I + f(R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots)$ avec α dans K et les x_i dans A, où I est l'application identité et f est un polynôme en indéterminées associatives non commutatives, le polynôme caractéristique de T ne dépend des x_i qu'à travers leurs poids $\omega(x_i)$ ([17]). On a noté R_x la multiplication par x.

Une algèbre A est *une algèbre de Jordan* si $x^2(yx) = (x^2y)x$ quels que soient x, y dans A ([13]). Toute algèbre pondérée (A,ω) admet la décomposition $A = Ke \oplus N$ où e est un élément quelconque dans A de poids unité, i.e., $\omega(e) = 1$. Si de plus A est une algèbre de Jordan, on prendra pour e un idempotent de A (toute algèbre de Jordan non nil contient un idempotent). Soit $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ la décomposition de Peirce de A relativement à l'idempotent e, où $A_\mu = \{x \mid x \in A, ex = \mu x\}$ avec $\mu = 1$, $\frac{1}{2}$ ou 0. On a $A_1^2 \subseteq A_1$, $A_0^2 \subseteq A_0$, $A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_1 + A_0$, $A_0A_1 = 0$ et $A_{\frac{1}{2}}(A_0 + A_1) \subseteq A_{\frac{1}{2}}$ ([13, chapitre III]). Puisque A est pondérée, alors $A_{\frac{1}{2}} + A_0 \subseteq N$ et $Ke \subseteq A_1$. Soit $\overline{A}_1$ un sous-K- espace vectoriel suplémentaire de Ke dans A_1. Alors $A = Ke \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0 \oplus \overline{A}_1$ avec $\overline{A}_1^2 \subseteq \bar{A}_1$, $A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_0 + \overline{A}_1$, $A_{\frac{1}{2}}(A_0 + \overline{A}_1) \subseteq A_{\frac{1}{2}}$ et $A_0\overline{A}_1 = 0$. Ces notations seront conservées par la suite.

1. Théorèmes de structure.

Théorème 1.1. *Soit (A,ω) une K- algèbre pondérée. Si A est une algèbre de Jordan, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est une algèbre de Gonshor ;

(ii) A est une algèbre de Schafer ;

(iii) A est une T- algèbre.

Les implications $(i) \Rightarrow (ii)$ (cf. [17, théorème 2]), $(ii) \Rightarrow (iii)$ (cf. [17, théorème 1]) sont vraies sans supposer que l'algèbre A soit de Jordan. Il reste alors à établir que $(iii) \Rightarrow (i)$. Soit donc A une algèbre de Jordan qui est une T- algèbre. Alors N est le nil-idéal maximal de A. D'après un théorème dû à Albert, tout nil-idéal d'une algèbre de Jordan est nilpotent. Donc N est nilpotent. On choisit une base $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ dans la décomposition de Peirce de A relative à l'idempotent a_0. Il est clair que $\omega(a_0) = 1$ et $\omega(a_i) = 0$, pour $i \geq 1$. Soient $R_{a_0}, \ldots, R_{a_n}$ les multiplications à droite par les éléments de la base. Soit G le semi-groupe multiplicatif de $T(A)$, l'algèbre associative des transformations de A, engendré par les éléments $R_{a_0}^k R_{a_i}, i = 1, \ldots, n, k = 0, 1, \ldots$ Chaque élément de G contient au moins un facteur de la forme R_{a_i}. Puisque N est nilpotent, la sous-algèbre H de $T(A)$, engendrée par G, est nilpotente. On note par $N_1 = N, N_{k+1} = HN_k$ avec $k = 1, 2, \ldots$ Puisque N_1 est un idéal de A, les sous-algèbres $N_1, N_2, \ldots$ forment une suite décroissante et comme H est nilpotente alors cette suite est stationnaire à partir d'un certain rang $r+1$, i.e., $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_{r+1} = 0$. Considérons maintenant les espaces vectoriels quotients $N_j/N_{j+1}, j = 1, \ldots, r$. Comme $R_{a_i} \in H$, on a $R_{a_i}N_j \subseteq HN_j = N_{j+1}$, donc l'application K- linéaire $R_{a_i}^{(j)}$ induite par R_{a_i} sur N_j/N_{j+1}, est nulle $(j = 1, 2, \ldots, r; i = 1, \ldots, n)$. De la relation $R_{a_0}H \subseteq H$ il vient que $R_{a_0}N_j \subseteq N_j$. Donc R_{a_0} induit une application $R_{a_0}^{(j)}$ sur $N_j/N_{j+1}(j = 1, 2, \ldots, r)$. Mais puisque les sous-espaces vectoriels N_j sont stables sous R_{a_0}, alors $N_j = (N_j)_{\frac{1}{2}} \oplus (N_j)_0 \oplus (N_j)_1$ où $(N_j)_\mu = N_j \cap A_\mu$, pour $\mu = 1, \frac{1}{2}, 0$. On peut donc choisir une base $c_1^{(j)} + N_{j+1}, \ldots, c_{k_j}^{(j)} + N_{j+1}$ de N_j/N_{j+1} sur K telle que $R_{a_0}^{(j)}$ ait une matrice diagonale. Le reste de la démonstration se fait comme celle du théorème 3.13 de [19].

Remarques 1.2. Dans [9, théorème 2.1] et [19, théorème 3.13], les auteurs démontrent l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ sur une extension convenable du corps de base. Ph. Holgate ([12]) construit un exemple judicieux d'une T- algèbre dont le nil-idéal N est nilpotent mais qui n'est pas une algèbre de Schafer. Ici, l'hypothèse être de Jordan suffit pour démontrer le théorème.

Toute algèbre de Jordan vérifiant une quelconque des assertions du théorème sera dite ***algèbre de Jordan génétique.***

Lemme 1.3. *Soit A une algèbre de Jordan génétique. Si N^2 est un idéal de A alors, pour tout entier $k \geq 3$, N^k est un idéal de A.*

Soient A une algèbre de Jordan génétique et $e \neq 0$ un idempotent de A. On sait que tout idéal de A est stable sous R_e et que tout sous-K- espace vectoriel M de A stable sous R_e s'écrit $M = M_{\frac{1}{2}} \oplus M_0 \oplus M_1$ où $M_\mu = M \cap A_\mu$. Supposons que N^2 soit un idéal de A. Alors $N^2 = (N^2)_{\frac{1}{2}} \oplus (N^2)_0 \oplus (N^2)_1$ avec $(N^2)_{\frac{1}{2}} = A_{\frac{1}{2}}(A_0 + \overline{A}_1)$, $(N^2)_0 = (A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}})_0 + A_0^2$, $(N^2)_1 = (A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}})_1 + \bar{A}_1^2$ où $A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}} = (A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}})_0 \oplus (A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}})_1$. Par récurrence sur k, supposons que N^k soit un idéal de A. On a $N^k = (N^k)_{\frac{1}{2}} \oplus (N^k)_0 \oplus (N^k)_1$ et $N^{k+1} = N^kN = N^k(A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0 \oplus \overline{A}_1) = (N^k)_{\frac{1}{2}}(A_0 + \overline{A}_1) + A_{\frac{1}{2}}\big((N^k)_0 + (N^k)_1\big) + A_{\frac{1}{2}}(N^k)_{\frac{1}{2}} + A_0(N^k)_0 + \overline{A}_1(N^k)_1 = (N^{k+1})_{\frac{1}{2}} \oplus (N^{k+1})_0 \oplus (N^{k+1})_1$ avec $(N^{k+1})_{\frac{1}{2}} = (N^k)_{\frac{1}{2}}(A_0 + \overline{A}_1) + A_{\frac{1}{2}}\big((N^k)_0 + (N^k)_1\big)$, $(N^{k+1})_0 = A_0(N^k)_0 + \big(A_{\frac{1}{2}}(N^k)_{\frac{1}{2}}\big)_0$ et $(N^{k+1})_1 = \overline{A}_1(N^k)_1 + \big(A_{\frac{1}{2}}(N^k)_{\frac{1}{2}}\big)_1$. Ceci, du fait qu'en plus des relations sur les composantes de Peirce, on a $A_{\frac{1}{2}}(N^k)_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}}^2 = (A_{\frac{1}{2}}^2)_0 \oplus (A_{\frac{1}{2}}^2)_1$. Ainsi N^{k+1} est stable sous R_e et $NN^{k+1} = N^{k+2} \subseteq N^{k+1}$ nous dit que N^{k+1} est un idéal de A.

Théorème 1.4. *Soit A une algèbre de Jordan génétique. Alors, A est une T-algèbre spéciale si et seulement si N^2 est un idéal de A.*

Par définition, la condition est nécessaire et la réciproque est donnée par le lemme 1.3.

Il existe des algèbres de Jordan génétiques qui ne sont pas des T- algèbres spéciales.

Exemple 1.5. Soit A la $\mathbf{R}$-algèbre de dimension 4 dont la table de multiplication dans une base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ est donnée par $e_0^2 = e_0$, $e_0 e_1 = \frac{1}{2} e_1$, $e_0 e_2 = e_2$, $e_1^2 = e_2 + e_3$, les autres produits étant nuls. On voit que A est une algèbre de Jordan génétique. Mais $N^2 =< e_2 + e_3 >$ n'est pas un idéal de A puisque $R_e(N^2) =< e_2 > \not\subset N^2$.

Corollaire 1.6. *Soient A une algèbre de Jordan génétique et $A = Ke \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0 \oplus \overline{A}_1$ sa décomposition de Peirce relative à l'idempotent e. Si $\overline{A}_1 = 0$ ou $A_0 = 0$ alors, A est une T- algèbre spéciale.*

Il suffit de voir que dans ces conditions N^2 est nécessairement un idéal de A.

2. Sur les T- algèbres de rang ≤ 3.

Soit A une T- algèbre de rang ≤ 3. Si A est de rang 2 alors A est une algèbre de Jordan (cf. [4], page 138) ; plus précisément A est une algèbre de Jordan spéciale (cf. [17], page 133). Supposons alors que A soit une T- algèbre de rang 3. L'équation principale de A est de la forme $x^3 - (1 + \lambda)\omega(x)x^2 + \lambda\omega(x)^2 x = 0$ tandis que l'équation aux puissances pleines s'écrit $x^{[3]} - (1+2\lambda)\omega(x)^2 x^{[2]} + 2\lambda\omega(x)^3 x^{[1]} = 0$, où λ est dans K et où les puissances pleines d'un élément x de A sont définies par $x^{[1]} = x$, $x^{[k]} = x^{[k-1]} x^{[k-1]}$ pour $k \geq 2$. L'équation précédente peut aussi s'écrire $(x^2)^2 - (1 + 2\lambda)\omega(x)^2 x^2 + 2\lambda\omega(x)^3 x = 0$.

Théorème 2.1. *Soit A une T- algèbre de rang 3. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est une algèbre de Jordan ;

(ii) A est une algèbre à puissances associatives ;

(iii) l'équation principale de A est soit

$$x^3 - \omega(x)x^2 = 0, \quad \text{soit} \quad x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2 x = 0.$$

On sait déjà que $(i) \Rightarrow (ii)$. Montrons que $(ii) \Rightarrow (iii)$. L'algèbre A étant à puissances associatives, on a $x^i x^j = x^{i+j}$ quels que soient les entiers $i, j \geq 1$ et, en particulier, $x^2x^2 = x^4$ pour tout x dans A. Multiplions l'équation principale par x. Il vient que $x^4-(1+\lambda)\omega(x)x^3+\lambda\omega(x)^2x^2 = 0$. Or, l'équation aux puissances pleines s'écrit $x^4-(1+2\lambda)\omega(x)^2x^2+2\lambda\omega(x)^3x = 0$ et la différence entre ces deux équations donne $(1+\lambda)\omega(x)x^3-(1+3\lambda)\omega(x)^2x^2+2\lambda\omega(x)^3x = 0$. Si l'on suppose $\omega(x) \neq 0$, on a $(1+\lambda)x^3-(1+3\lambda)\omega(x)x^2+2\lambda\omega(x)^2x = 0$ et si l'on fait à nouveau la différence avec l'équation principale, on a $\lambda(x^3-2\omega(x)x^2+\omega(x)^2x) = 0$, pour tout x dans A tel que $\omega(x) \neq 0$. Pour $\lambda = 0$, l'équation principale se réduit à $x^3-\omega(x)x^2 = 0$ et si $\lambda \neq 0$ alors $x^3-2\omega(x)x^2+\omega(x)^2x = 0$, pour tout x dans A tel que $\omega(x) \neq 0$. Mais K étant un corps infini, l'ensemble de ces x est dense (au sens de Zariski) dans A, d'où (iii). Il reste à montrer que $(iii) \Rightarrow (i)$. Si $x^3-\omega(x)x^2 = 0$, pour tout x dans A, alors A est une algèbre de Jordan (cf. [15], théorème 5.1 ou [18], 2). Supposons maintenant que $x^3-2\omega(x)x^2+\omega(x)^2x = 0$, pour tout x dans A. La linéarisation de cette équation donne $2x(xy)+x^2y-4\omega(x)xy-2\omega(y)x^2+2\omega(xy)x+\omega(x)^2y = 0$. En la multipliant par x d'une part, et en y remplaçant y par xy d'autre part, on obtient respectivement

$$2x(x(xy)) + x(x^2y) - 4\omega(x)x(xy) - 2\omega(y)x^3 + 2\omega(xy)x^2 + \omega(x)^2xy = 0$$

et

$$2x(x(xy) + x^2(yx) - 4\omega(x)x(xy) - 2\omega(xy)x^2 + 2\omega(x)^2\omega(y)x + \omega(x)^2xy = 0.$$

La différence de ces deux équations donne $x^2(yx)-(x^2y)x+2\omega(y)(x^3-2\omega(x)x^2+\omega(x)^2x) = 0$, soit $x^2(yx)-(x^2y)x = 0$, donc A est de Jordan.

Exemple 2.2. Soit A la $\mathbf{R}$-algèbre commutative de dimension 4 dont une base est $\{e, e_1, e_2, e_3\}$ avec la table de multiplication $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, $ee_2 = e_2$, $e_1e_2 = e_3$, les autres produits étant nuls. On vérifie que pour tout x dans A, on a $x^4 = x^2x^2$. D'après un résultat dû à Albert, ceci entraîne que l'algèbre A est à puissances associatives. Les composantes de Peirce de A relative à e sont $A_1 =< e, e_2 >$,

$A_{\frac{1}{2}} =< e_1 >$ et $A_0 =< e_3 >$. Comme $A_1 A_{\frac{1}{2}} = A_{\frac{1}{2}} + A_0$ alors A n'est pas de Jordan. L'équation principale de A est $x^4 - 2\omega(x)x^3 + \omega(x)^2 x^2 = 0$, donc A est une T- algèbre de rang 4.

Pour ce qui est de la structure de ces deux classes de T- algèbres de Jordan, on a le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Soit (A, ω) une algèbre pondérée. Alors A vérifie l'équation $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2 x = 0$ (resp. $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) pour tout idempotent e de A, $A = Ke \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus \overline{A}_1$ (resp. $A = Ke \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$) est la décomposition de Peirce de A ;

(2) pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$, $x^3 = 0$;

(3) $A_{\frac{1}{2}} A_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{A}_1$, $A_{\frac{1}{2}} \overline{A}_1 \subseteq A_{\frac{1}{2}}$, $\overline{A}_1^2 = 0$ (resp. $A_{\frac{1}{2}} A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_0$, $A_{\frac{1}{2}} A_0 \subseteq A_{\frac{1}{2}}$, $A_0^2 = 0$).

Dans le cas où A vérifie l'équation $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$, le résultat est déjà connu (cf. [20], théorème 3 ou [15]). Supposons alors que A vérifie l'équation $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2 x = 0$ et soit $A = Ke \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0 \oplus \overline{A}_1$ sa décomposition de Peirce relative à un idempotent e. La linéarisation de cette équation donne

$$x(yz)+(xy)z+(zx)y-2\omega(x)yz-2\omega(y)xz-2\omega(z)xy+\omega(xy)z+\omega(xz)y+\omega(yz)x = 0.$$

En y faisant $x = z = e$ et en prenant y dans $\mathrm{Ker}(\omega) \cap A_\mu$ il vient que $2e(ey) + ey - 4ey + y = 0$, soit $(2\mu^2 - 3\mu + 1)y = 0$, d'où $\mu = 1$ ou $\mu = \frac{1}{2}$, sinon on aurait $y = 0$. Ceci nous dit que $A_0 = 0$, d'où la condition (1). La condition (2) est évidente. Pour la condition (3), il reste à établir que $\overline{A}_1^2 = 0$. En faisant $x = e$ et pour y et z dans $\overline{A}_1$, l'équation ci-dessus devient $e(yz) + (ey)z + (ez)y - 2yz = 0$. Or $\overline{A}_1^2 \subseteq \overline{A}_1$, par conséquent $yz = 0$, quels que soient y et z dans $\overline{A}_1$, i.e., $\overline{A}_1^2 = 0$. Réciproquement, si une algèbre A satisfait les conditions (1) à (3), de (2) et (3) on établit les identités $(x_{\frac{1}{2}})^3 = 0$, $x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}} x_1) = 0$ et $x_1(x_1 x_{\frac{1}{2}}) = 0$ où $x_{\frac{1}{2}}$ est dans $A_{\frac{1}{2}}$ et x_1 est dans $\overline{A}_1$. Pour $x = \omega(x)e + x_{\frac{1}{2}} + x_1$ un élément quelconque de A, on vérifie que l'on a bien $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2 x = 0$.

3. Sur l'ensemble des idempotents.

Soient A une algèbre de Jordan génétique et $A = Ke \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0 \oplus \overline{A}_1$ sa décomposition de Peirce relative à l'idempotent e. On dira que l'idempotent e est ***principal*** s'il n'existe aucun idempotent dans la sous-algèbre A_0 et e sera dit ***primitif*** si e est l'unique idempotent de $A_1 = Ke \oplus \overline{A}_1$.

Lemme 3.1. *Dans une algèbre de Jordan génétique, tout idempotent est principal et primitif.*

Soit x dans A_0 un idempotent. Alors $x = x^2 = x^k$ pour tout entier $k \geq 3$ et comme x est nilpotent, pour k suffisamment grand $x^k = 0$, donc $x = 0$. Supposons maintenant que $x = \alpha e + x_1$ soit un idempotent de A_1, avec x_1 dans $\overline{A}_1$. De $x^2 = x$ il vient que $\omega(x)^2 = \omega(x)$, soit $\omega(x) = 0$ ou $\omega(x) = 1$, i.e., $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Si $\alpha = 0$ alors $x_1 = x_1^2 = x_1^k$, pour tout $k \geq 3$, entraîne que $x_1 = 0$. Si $\alpha = 1$ alors $x^2 = e + 2x_1 + x_1^2$ et l'égalité $x^2 = x$ entraîne que $x_1 = -x_1^2$. Par récurrence, il vient que $x_1 = (-1)^{k-1}x_1^k$ pour tout entier $k \geq 1$. Puisque x_1 est nilpotent alors $x_1 = 0$, donc $x = e$.

On note $I_p(A)$ l'ensemble des idempotents de A.

Théorème 3.2.

(1) Si $A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}} = 0$ alors $I_p(A) = \{e + x \mid x \in A_{\frac{1}{2}}\}$.

(2) Si $A_{\frac{1}{2}}(A_0 + \overline{A}_1) = 0$ alors $I_p(A) = \{e + x + (x^2)_0 - (x^2)_1 \mid x \in A_{\frac{1}{2}}\}$ où $(x^2)_i$ est la composante de x^2 dans A_i , $i = 0, 1$.

(3) Si $A_0 = 0$ alors $I_p(A) = \{e + x - x^2 \mid x \in A_{\frac{1}{2}}\}$.

(4) Si $\overline{A}_1 = 0$ alors $I_p(A) = \{e + x + x^2 \mid x \in A_{\frac{1}{2}}\}$.

L'assertion (1) est immédiate. Supposons que $A_{\frac{1}{2}}(A_0 + \overline{A}_1) = 0$. Puisque $A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_0 + \overline{A}_1$ alors $A_{\frac{1}{2}}^3 = A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}}^2 = 0$. Pour toute algèbre à puissances associatives, donc aussi pour toute algèbre de Jordan, on a $2R_x^3 - 3R_x^2R_x + R_{x^3} = 0$. Pour $x = x_{\frac{1}{2}} + x_0 + x_1$, on a $(2R_x^3 - 3R_x^2R_x + R_x^3)(e) = (x_{\frac{1}{2}})^2x_0 - (x_{\frac{1}{2}})^2x_1 =$

0, donc $(x_{\frac{1}{2}})^2x_0 = (x_{\frac{1}{2}})^2x_1 = 0$, quels que soient $x_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$ et $x_1 \in \overline{A}_1$ (puisque $(x_{\frac{1}{2}})^2x_i$ est dans A_i, $i = 0$ ou 1). Par conséquent $(A_{\frac{1}{2}})^2A_0 = 0$ et $(A_{\frac{1}{2}})^2\overline{A}_1 = 0$. Soit maintenant $x = e + x_{\frac{1}{2}} + x_0 + x_1$ un idempotent de A. On a $x^2 = e + x_{\frac{1}{2}} + 2x_1 + (x_{\frac{1}{2}})^2 + x_0^2 + x_1^2$ et l'égalité $x^2 = x$ entraîne que $x_0 + x_1 = (x_{\frac{1}{2}})^2 + x_0^2 + x_1^2$. On a $(x_0 - x_1)^2 = (x_0 + x_1)^2 = x_0^2 + x_1^2 = x_0^4 + x_1^4$. Alors $x_0^2 = (x_0^2)^2$ et $x_1^2 = (x_1^2)^2$ nous disent que $x_0^2 = 0$ et $x_1^2 = 0$ (cf. lemme 3.1). Ainsi $x_0 - x_1 = (x_{\frac{1}{2}})^2$ et si l'on écrit $x_{\frac{1}{2}}^2 = (x_{\frac{1}{2}}^2)_0 + (x_{\frac{1}{2}}^2)_1$ alors, par identification, il vient que $x_0 = (x_{\frac{1}{2}}^2)_0$ et $x_1 = -(x_{\frac{1}{2}}^2)_1$, d'où (2). Supposons que $A_0 = 0$, donc $(A_{\frac{1}{2}})^2 \subseteq \overline{A}_1$. Pour $y = e$ et $x = x_{\frac{1}{2}}$, l'identité de Jordan $x^2(yx) = (x^2y)x$ entraîne que $(x_{\frac{1}{2}})^3 = 0$. Pour $x = x_{\frac{1}{2}} + x_1$, l'équation $(2R_x^3 - 3R_x^2R_x + R_x^3)(e) = 0$ entraîne que $(x_{\frac{1}{2}})^2x_1 = 2x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}x_1)$ et $x_{\frac{1}{2}}(x_1)^2 = 2x_1(x_1x_{\frac{1}{2}})$, quels que soient $x_{\frac{1}{2}}$ dans $A_{\frac{1}{2}}$ et x_1 dans $\overline{A}_1$. Soit $x = e + x_{\frac{1}{2}} + x_1$ un idempotent de A, on a $x^2 = e + x_{\frac{1}{2}} + (x_{\frac{1}{2}})^2 + 2x_{\frac{1}{2}}x_1 + 2x_1 + x_1^2$ et l'équation $x^2 = x$ entraîne que $x_{\frac{1}{2}}x_1 = 0$ et $x_1 = -(x_{\frac{1}{2}})^2 - (x_1)^2$. Pour $x_1 = -(x_{\frac{1}{2}})^2 - (x_1)^2$, on a $x_{\frac{1}{2}}x_1 = -x_{\frac{1}{2}}(x_1)^2 = -2x_1(x_1x_{\frac{1}{2}}) = -2R_{x_1}^2(x_{\frac{1}{2}})$. Par récurrence sur k, on établit que $x_{\frac{1}{2}}x_1 = (-2)^{k-1}R_{x1}^k(x_{\frac{1}{2}})$. Puisque l'application R_{x_1} est nilpotente, pour k suffisamment grand, on a $R_{x_1}^k = 0$, donc $x_{\frac{1}{2}}x_1 = 0$. Puisque $(x_{\frac{1}{2}})^2x_1^2 = 4x_{\frac{1}{2}}\big(x_1(x_1x_{\frac{1}{2}})\big) = 0$ et $(x_{\frac{1}{2}})^4 = 0$ alors $x_1^2 = (x_{\frac{1}{2}})^4 + 2(x_{\frac{1}{2}})^2(x_1)^2 + (x_1)^4 = (x_1)^4$, i.e., x_1^2 est un idempotent de $\overline{A}_1$. D'après le lemme 3.1 on a $x_1^2 = 0$, donc $x_1 = -(x_{\frac{1}{2}})^2$ et $x = e + x_{\frac{1}{2}} - (x_{\frac{1}{2}})^2$, d'où (3). La preuve de (4) est analogue à celle de (3).

Notons que les formules (3) et (4) donnent l'ensemble des idempotents des T- algèbres de Jordan de rang 3, données par le théorème 2.1.

4. T- algèbres à puissances associatives.

Soit (A, ω) une T- algèbre à puissances associatives. Alors l'idéal $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est nil. On sait (cf. [6] et [14, chapitre VI]) qu'en dimension inférieure à 4, toute nil algèbre commutative à puissances associatives est nilpotente. Alors, par une démonstration analogue à celle du théorème 1.1 ($(iii) \Rightarrow (i)$), on peut établir le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Toute T- algèbre à puissances associatives, de dimension* $n \leq 5$ *est une algèbre de Gonshor.*

Remarque 4.2. Pour $n > 5$ le théorème n'est plus vrai. En effet, V.M. Abraham (cf. [1], page 57) a utilisé le contre-exemple de Suttles pour construire une T-algèbre à puissances associatives, de dimension 6 et de rang 5, qui n'est pas une algèbre de Gonshor.

Bibliographie

[1] V.M. Abraham, A note on train algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **20** (1976), 53–58.

[2] M. Bertrand, Algèbres non associatives et algèbres génétiques, *Mémorial des Sciences Mahématiques* **162**, Gauthiers Villars, Paris 1966.

[3] I.M.H. Etherington, Genetic algebras, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **59** (1939), 242–258.

[4] I.M.H. Etherington, Commutative train algebras of ranks 2 and 3, *J. London Math. Soc.* **15** (1940), 136–149. Corrigendum ibid. **20** (1945) 238.

[5] I.M.H. Etherington, Special train algebras, *Quart. J. Math.* Oxford, Ser. (2) **12** (1941), 1–8.

[6] M. Gerstenhaber and H.C. Myung, On commutative power associative nil-algebras of low dimension, *Proc. Amer. Math. Soc.* **48** n°1 (1975), 29–32.

[7] H. GONSHOR, Special train algebras arising in genetics, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **12** (1960), 41–53.

[8] H. Gonshor, Special train algebras arising in genetics II, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **14** (1965), 333–338.

[9] H. Gonshor, Contributions to genetic algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **17** (1971), 289–298.

[10] H. Gonshor, Contributions to genetic algebras II, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **18** (1973), 273–279.

[11] Ph. Holgate, Jordan algebras arising in population genetics, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **15** (1967), 291–294.

[12] Ph. Holgate, A train algebra that is not special triangular, *Arch. Math. vol.* **50** (1988), 122–124.

[13] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, A.M.S. Colloq. Publ. vol. **39**, Providence, Rhode Island, 1968.

[14] R.L. Kruse and D.T. Price, *Nilpotent rings*, Gordon and Breach, New York, 1969.

[15] A. Micali et M. Ouattara, Algèbres de Jordan génétiques, *Annales de l'Université de Clermont II* (à paraitre).

[16] M. Ouattara, *Algèbres de Jordan et algèbres génétiques*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, 1988.

[17] R.D. Schafer, Structure of genetic algebras, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 121–135.

[18] S. Walcher, Bernstein algebras wich are Jordan algebras, *Arch. Math.* vol. **50** (1988), 218–222.

[19] A. Wörz-Busekros, *Algebras in genetics*, Lecture Notes in Biomathematics 36, Berlin-Heidlberg-New York, 1980.

[20] A. Wörz-Busekros, Bernstein algebras, *Arch. Math.* vol. **48** (1987), 388–398.

2

Sur les algèbres de Bernstein qui sont des T-algèbres (*)

Abstract. In this note we show that for finite-dimensional Bernstein algebras over a field of characteristic different from 2, the principal nilpotency of an element implies its strong nilpotency of the same degre. If Ker(ω) is a nil algebra then A is a train-algebra. We also show that every train algebra of dimension $n \leq 5$ is special train algebra and that is a best possible result.

Les algèbres de Bernstein sont des objects nés des travaux de S. Bernstein (cf.[2], [3]) concernant le principe de stationarité en Génétique. Ph. Holgate était le premier à traduire le problème en termes d'algèbres non-associatives (cf.[6]). Depuis , ces algèbres ont fait l'objet de plusieurs études.

Le but de cet article est de donner une caractérisation des algèbres de Bernstein qui sont des T- algèbres sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

(*) Ce chapitre a fait l'objet d'une publication parue à *Linear Algebra and its Applications*, **148** : 171–178 (1991)

1. Préliminaires.

Dans toute la suite K est un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2 et toute K- algèbre est commutative non nécessairement associative ni ayant un élément unité, de dimension finie. S'il existe un morphisme non nul de K- algèbres $\omega : A \to K$, le couple (A,ω) est appelé *algèbre pondérée.* Alors $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est un idéal de A de codimension 1.

Une K- algèbre pondérée (A,ω) est une *algèbre de Bernstein* si

$$(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 \tag{1.1}$$

pour tout x dans A (cf.[6]). La linéarisation partielle de (1.1) donne les identités

$$2x^2(xy) = \omega(xy)x^2 + \omega(x)^2 xy \tag{1.2}$$

et

$$4(xy)(xz) + 2x^2(yz) = \omega(yz)x^2 + 2\omega(xy)xz + 2\omega(xz)xy + \omega(x)^2 yz \tag{1.3}$$

quels que soient x, y et z dans A. En faisant $y = x^2$ dans (1.2) on obtient $2x^2x^3 = \omega(x^3)x^2 + \omega(x^2)x^3$. Par l'identité (1.3) il est facile d'établir par récurrence sur i, $j \geq 2$ l'identité suivante

$$2x^i x^j = \omega(x^i)x^j + \omega(x^j)x^i \tag{1.4}$$

pour tout x dans A, $i, j \geq 2$.

Rappelons brièvement quelques résultats sur les algèbres de Bernstein : Toute algèbre de Bernstein admet une pondération et toute algèbre de Bernstein possède au moins un idempotent e, i.e., $0 \neq e \in A$ et $e^2 = e$. Soit e un idempotent d'une algèbre de Bernstein A. Alors A admet la décomposition

$$A = Ke \oplus U \oplus V \tag{1.5}$$

somme directe de sous K-espaces vectoriels, où $U = \{x \mid x \in A, ex = \frac{1}{2}x\}$, $V = \{x \mid x \in A, ex = 0\}$ vérifient les relations suivantes :

$$U^2 \subseteq V, \quad UV \subseteq U, \quad V^2 \subseteq U \quad \text{et} \quad UV^2 = 0\,. \tag{1.6}$$

Si $x = \alpha e + u + v$ est un élément quelconque de $Ke \oplus U \oplus V$ alors $\omega(x) = \alpha$. Par conséquent

$$N = \mathrm{Ker}(\omega) = U \oplus V. \tag{1.7}$$

De plus les équations suivantes sont satisfaites :

$$u^3 = 0, \ \ u_1^2 u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0; \tag{1.8}$$

$$u(uv) = 0, \ \ u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0; \tag{1.9}$$

$$uv^2 = 0, \ \ u(v_1v_2) = 0, \ \ (v_1v_2)^2 = 0, \ \ v_1^2v_2^2 = 0; \tag{1.10}$$

$$u^2(ux) = 0, \ \ v^2(vx) = 0; \tag{1.11}$$

$$(uv)^2 = 0, \ \ (u_1v)(u_2v) = 0, \ \ (uv_1)(uv_2) = 0; \tag{1.12}$$

$$u^2v^2 = 0, \ \ (u_1u_2)v^2 = 0, \ \ u^2(v_1v_2) = 0; \tag{1.13}$$

quels que soient u, u_i dans U, v et v_i dans V et x dans N.

Par (1.9) et (1.10), (1.9) et (1.12), (1.9), (1.10) et (1.12), on peut établir, respectivement et par récurrence sur $k \geq 2$, les identités suivantes :

$$uv^k = 0, \tag{1.14}$$

$$uR_v^{k-1}(u) = 0, \tag{1.15}$$

$$uR_v^{k-1}(u^2) = 0, \tag{1.16}$$

où R_v est la multiplication à droite par v. Pour tout élément x dans A, on définit les puissances principales x^k par $x^1 = x$, $x^k = x^{k-1}x$ et les puissances pleines $x^{[k]}$ par $x^{[1]} = x$, $x^{[k]} = x^{[k-1]}x^{[k-1]}$.

Dans une algèbre non associative, à puissances non nécessairement associatives, la notion d'élément nilpotent a plusieurs variantes.

On dira qu'une algèbre A (ou un élément x) est s-nilpotente s'il existe un entier s, non associatif, tel que tout produit d'éléments de A (ou produit des x), associés selon l'entier s, est nul. Si s est un entier principal, on dira que A (ou x) est *principalement nilpotente* de degré s. Si tout produit de d facteurs de A (ou de d facteurs x), associés dans un ordre quelconque, est nul on dira que A (ou x) est ***fortement nilpotente*** de degré d. Notons que pour toute algèbre, la nilpotence principale de degré d entraîne la nilpotence forte de degré 2^{d-1} (cf.[4]).

Revenons au cas des algèbres de Bernstein. Par (1.4) il vient que $x^i x^j = 0$, $i,\ j \geq 2$, pour tout x dans N. Ceci nous dit que si $x^t = 0$ pour $t \leq 4$ alors x est nilpotent. De plus, tout produit ayant plus de 5 facteurs égaux dans N, de degré non principal, contient un groupement de facteurs de la forme $x^2(xy)$ ou $x^i x^j$ $(i,j \geq 2)$, donc s'annule au moyen des identités (1.2) et (1.4). Autrement dit, pour $s \geq 5$, seul le produit principal x^s peut être non nul. Ainsi, dans toute algèbre de Bernstein, la nilpotence principale d'un élément entraîne sa nilpotence forte de même degré.

2. T- algèbres.

Une K- algèbre pondérée (A, ω) est appelée "train-algebra" ou T- algèbre s'il existe des constantes $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ dans K telles que

$$x^r + \beta_1 \omega(x) x^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1} \omega(x)^{r-1} x = 0 \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad x \quad \text{dans} \quad A.$$

Le plus petit entier r est alors appelé *le rang* de A. Par conséquent, pour tout x dans N, on a $x^r = 0$.

Contrairement à une considération de Ljubich (cf.[7], page 522), l'idéal N d'une algèbre de Bernstein A n'est pas toujours nil.

Exemple 2.1. Soit A une $\mathbf{R}$-algèbre de dimension 3 dont la multiplication dans une base $\{e, e_1, e_2\}$ est donnée par $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, $e_1 e_2 = \frac{1}{2}e_1$, les autres produits étant nuls. Pour $x = \alpha e + x_1 e_1 + x_2 e_2$ un élément quelconque de A, on a $x^2 = \alpha^2 e + (\alpha x_1 + x_1 x_2) e_1$ et $(x^2)^2 = \alpha^4 e + \alpha^2(\alpha x_1 + x_1 x_2) e_1 = \alpha^2 x^2 = \omega(x)^2 x^2$, donc A est une algèbre de Bernstein. Soit $y = e_1 + e_2$. On a $y^{k+2} = (\frac{1}{2})^k e_1$ $(k \geq 1)$ et $N^\ell = N^2 = \mathbf{R}e_1$ $(\ell \geq 2)$, donc y et N ne sont pas principalement nilpotents. Cependant on a $N^{[3]} = 0$ et $y^{[3]} = 0$, i.e. N et y sont s-nilpotents avec $s = 2 + 2$.

Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de la K- algèbre de Bernstein relativement à l'idempotent e. Les entiers $r = \dim_K U$, $s = \dim_K V$ étant indépendants du choix de l'idempotent e, le couple $(1+r, s)$ est appelé le type de l'algèbre de Bernstein A. On a $\dim_K A = 1+r+s$. Pour x dans A, on notera R_x^* la restriction de la multiplication par x à l'idéal N. Par (1.6), il vient que R_u^* applique U sur V et V sur U, tandis que R_v^* envoie N sur U. On a alors

$$R_u^* = \begin{bmatrix} 0 & R_u^{*(1)} \\ R_u^{*(2)} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_v^* = \begin{bmatrix} R_v^{*(2)} & R_v^{*(1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où, si A est de type $(1+r, s)$ alors $R_u^{*(1)}$, $R_u^{*(2)}$, $R_v^{*(1)}$ et $R_v^{*(2)}$ sont respectivement des matrices $r \times s$, $s \times r$, $r \times s$ et $r \times r$. Comme on peut le voir par (1.9) on a $R_u^{*3} = 0$, tandis que

$$\text{(2.2)} \qquad R_v^{*k} = \begin{bmatrix} \left(R_v^{*(2)}\right)^k & \left(R_v^{*(2)}\right)^{k-1} R_v^{*(1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \geq 2.$$

Lemme 2.3. *Soit A une K- algèbre de Bernstein. Si, pour tout choix de l'idempotent e et pour tout v dans V, l'application K- linéaire R_v^* est nilpotente, alors l'idéal N est nil.*

Soient e un idempotent de A et $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de A relative à e. Soit $x = u+v$ un élément arbitraire de N. On a $x^2 = u^2 + 2uv + v^2$, $x^3 = u^2v + 2(uv)v + v^3$ et plus généralement, les identités (1.14) et (1.16) permettent d'établir que $x^{k+2} = R_v^{*k}(u^2 + 2uv + v^2)$, $k \geq 1$. Donc, si R_v^* est nilpotente d'index t alors $x^{t+2} = 0$.

Remarque 2.4. En caractéristique nulle, la réciproque du lemme est vraie. En effet, un résultat de Gerstenhaber nous dit que si N est un nil-idéal de nilindex t alors $R_x^{*2T-3} = 0$, pour tout x dans N, et en particulier, R_v^* est nilpotente, pour tout v dans V.

Lemme 2.5. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition d'une K- algèbre de Bernstein de type $(1+r, s)$. Si pour tout v dans V, l'application R_v^* est nilpotente alors A*

est une T- algèbre satisfaisant l'équation $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^r = 0$, pour tout x de poids 1.

Soit $x = e + u + v$ un élément quelconque de $A = Ke \oplus U \oplus V$ de poids 1. On a $x^2 = e + u + u^2 + 2uv + v^2$ et $x^3 = e + u + 2uv + u^2 + \frac{1}{2}v^2 + 2(uv)v + u^2v + v^3$. Alors $x^3 - x^2 = -\frac{1}{2}v^2 + 2(uv)v + u^2v + v^3$, $(x^3 - x^2)x = \frac{1}{2}(x^3 - x^2) + R_v^*(-\frac{1}{2}v^2 + 2(uv)v + u^2v + v^3)$, donc $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2}) = R_v^*(-\frac{1}{2}v^2 + 2(uv)v + u^2v + v^3)$. Plus généralement, par les identités (1.14) et (1.16), on a

$$(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^k = R_v^{*k}[-\frac{1}{2}v^2 + 2(uv)v + u^2v + v^3]. \tag{2.6}$$

Donc, si R_v^* est nilpotente, il existe un entier t, indépendant de v, tel que $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^t = 0$. Ainsi A est une T- algèbre. Maintenant, la formule (2.2) nous dit que R_v^* est nilpotente si et seulement si $R_v^{*(2)}$ est nilpotente. Dans l'équation (2.6) le crochet appartient à U. Alors $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^k = \left(R_v^{*(2)}\right)^k[-\frac{1}{2}v^2 + 2(uv)v + u^2v + v^3]$. Puisque $\dim_K U = r$ et que $R_v^{*(2)}$ est nilpotente, alors $\left(R_v^{*(2)}\right)^r = 0$ et par conséquent $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^r = 0$, pour tout x de poids 1.

En fait on vient d'établir le résultat suivant :

Théorème 2.7. *Soit A une algèbre de Bernstein. Si N est une nil-algèbre, alors A est une T- algèbre.*

La R-algèbre de l'exemple 2.1 n'est pas une T- algèbre parce que N n'est pas nil.

Exemple 2.8. Soit A la K- algèbre de Bernstein de type (2,1), dont la table de multiplication dans la base $\{e, c_1, c_2\}$ est donnée par $e^2 = e$, $ec_1 = \frac{1}{2}c_1$, $c_1c_2 = \beta c_1$, $c_2 = \gamma c_1$, les autres produits étant nuls, avec $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$. Soit $x = e + x_1c_1 + x_2c_2$ un élément de poids 1. On a $x^2 = e + (x_1 + 2\beta x_1x_2 + \gamma x_2^2)c_1$, $x^3 - x^2 = (-\frac{1}{2}\gamma x_2^2 + 2\beta^2x_1x_2^2 + \beta\gamma x_2^3)c_1 = yc_1$, $(x^3 - x^2)x = (\frac{1}{2}y + \beta x_2y)c_1 = (\frac{1}{2} + \beta x_2)yc_1$, $(x^3 - x^2)(x - (\frac{1}{2} + \beta x_2)) = 0$. Donc, si $\beta \neq 0$, A n'est pas une T- algèbre mais si $\beta = 0$, A est une T- algèbre de rang 4.

3. T- algèbres spéciales.

Une K- algèbre pondérée (A, ω) est une T- algèbre spéciale si N est (principalement) nilpotent et ses puissances principales N^k sont des idéaux dans A (cf.[4]). Une algèbre de Bernstein est une T- algèbre spéciale si et seulement si N est nilpotent.

Théorème 3.1. *Toute T- algèbre de Bernstein de dimension ≤ 5 est une T- algèbre spéciale.*

En général, toute T- algèbre de dimension ≤ 4 est une T- algèbre spéciale (cf.[1]). Supposons alors que A est une algèbre de Bernstein de dimension 5 qui soit une T- algèbre. Alors $\dim_K N = 4$ et $x^5 = 0$ pour tout x dans N. Si le nilindex de N est 5, il existe un x non nul dans N tel que $\{x, x^2, x^3, x^4\}$ soit une base de N. Par l'identité (1.4) la table de multiplication de N se complète par $x^i x^j = 0$ pour $i, j \geq 2$. On a $N^2 =< x^2, x^3, x^4 >$, $N^3 =< x^3, x^4 >$, $N^4 =< x^4 >$ et $N^5 =< 0 >$. Donc A est une T- algèbre spéciale. En fait, A est de type (4,1). Maintenant, si le nilindex de N est inférieur à 4, l'identité (1.4) nous dit que la sous-algèbre N est à puissances associatives. Or, toute nil-algèbre commutative, à puissances associatives, de dimension 4 est nilpotente (cf.[5]). Par conséquent N est nilpotent et A est une T- algèbre.

Dans la littérature, comme algèbre de Bernstein qui sont des T- algèbres spéciales, on peut citer :

(i) l'algèbre élémentaire ou de Bernstein unité, définie par $x^2 = \omega(x)x$;

(ii) les algèbres de Bernstein normales ou régulières, définies par $x^2 y = \omega(x)xy$ (cf.[7]) ;

(iii) les algèbres de Bernstein qui sont aussi des algèbres de Jordan (i.e. elles vérifient $x^2(yx) = (x^2 y)x$). Elles sont identifiées à celles vérifiant $x^3 = \omega(x)x^2$;

(iv) les algèbres de Bernstein nucléaires, i.e., $A^2 = A$. Elles vérifient l'équation $x^4 - \frac{3}{2}\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}\omega(x)^2 x^2 = 0$.

Cependant, ni toute T- algèbre de Bernstein est spéciale.

4. Un contre-exemple.

Soit A l'algèbre de dimension 6 dont la table de multiplication dans une base $\{e, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ est donnée par : $e^2 = e$, $ec_i = 0$ pour $i = 1, 2$, $ec_k = \frac{1}{2}c_k$ pour $k = 3, 4, 5$, $c_1c_2 = c_2c_4 = -c_1c_5 = c_3$, $c_1c_3 = c_4$, $c_2c_3 = c_5$, les autres produits étant nuls. En fait $N =< c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 >$ est la nil-algèbre commutative, à puissances associatives, non nilpotente, du contre-exemple de Suttles (cf.[9]).

Soit $x = \alpha e + \sum_{i=1}^{5} x_i c_i$ un élément quelconque de A. On a $x^2 = \alpha^2 e + (\alpha x_3 + 2x_1x_2 - 2x_1x_5)c_3 + (\alpha x_4 + 2x_1x_3)c_4 + (\alpha x_5 + 2x_2x_3)c_5 = \alpha^2 e + y$, $(x^2)^2 = \alpha^4 e + \alpha^2 y = \alpha^2(\alpha^2 e + y) = \alpha^2 x^2 = \omega(x)^2 x^2$, puisque $\omega(x) = \alpha$ et $y^2 = 0$. Donc A est une algèbre de Bernstein de type (4,2) avec $U =< c_3, c_4, c_5 >$, $V =< c_1, c_2 >$. Soit $v = \alpha c_1 + \beta c_2$ un élément arbitraire de V. On a

$$R_v^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & \beta & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_v^{*(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\left(R_v^{*(2)}\right)^3 = 0$ et $R_v^{*4} = 0$. Le lemme 2.5 nous dit alors que A est une T- algèbre vérifiant $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^3 = 0$, pour tout x de poids 1. En fait A est de rang 5 ayant pour équation rang $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^2 = 0$, pour tout x dans A de poids 1. Le produit dans A n'étant pas associatif, cette notation, souvent employée, est abusive. On devrait l'écrire $x^5 - 2x^4 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 = 0$. Puisque $N^3 = N^2 =< c_3, c_4, c_5 >$ alors A n'est pas une T- algèbre spéciale.

Compte tenue de la remarque 2.4., on peut conclure en disant que, pour toute algèbre de Bernstein de dimension finie sur un corps commutatif de caractéristique nulle :

1. la nilpotence principale d'un élément entraîne sa nilpotance forte de même degré ;
2. être une T- algèbre équivaut à dire que N est un nil-idéal ;

3. toute T- algèbre de dimension ≤ 5 est spéciale et 5 en est la meilleure dimension possible.

Bibliographie

[1] V.M. Abraham, A note on train algebras. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **20** (1976),53–58.

[2] S. Bernstein, Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel. *C.R.A.S. Paris* **177** (1923), 581–584.

[3] S. Bernstein, Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredty. *Ann. Math. Statist. 13* (1942), 53–61.

[4] I.M.H. Etherington, Special train algebras. *Quart. J. Math. Oxford*, Ser.(2) **12** (1941), 1–8.

[5] M. Gerstenhaber and H.C. Myung, On commutative power associative nilalgebras of low dimension. *Proc. Amer. Math. Soc.* **48**, n^0 1 (1975), 29–32.

[6] Ph. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's sationarity principle. *J. London Math. Soc.* (2) **9** (1975), 613-623.

[7] Ju. Ljubich, Bernstein algebras. *Uspeki Mat. Nauk* (6) **32** (198), 261–262 (1977) (en russe).

[8] A. Micali, M.T. Alcalde, C. Burgueño et A. Labra, Sur les algèbres de Bernstein. *Proc. London Math. Soc.* (3) **58** (1989), 51–68.

[9] D. Suttles, A conter example to a conjecture of Albert. *Notice Amer. Marh. Soc.* **19** (5), (1972), A. 566.

3

Structure et théorie de Frattini d'une algèbre de Bernstein (*)

Abstract. The aim of this paper is to revise the structure of Bernstein algebras. We characterize the ideals and subalgebras of a Bernstein algebra. We also develop a Frattini theory for Bernstein algebras.

Through this paper, K is a commutative infinite field of characteristic different from 2.

0.– Introduction.

Le but de cet article est de revoir les algèbres de Bernstein du point de vue structure. Nous développons une théorie de Frattini pour les algèbres de Bernstein. Nous donnons une caractérisation des algèbres de Bernstein-Jordan et des algèbres de Bernstein qui sont des T- algèbres. Les algèbres de Bernstein statiques sont aussi étudiées.

1.– Préliminaires.

Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A une K-algèbre commutative non-associative. S'il existe un morphisme non nul $\omega : A \to K$ on dira que (A, ω) est une algèbre pondérée et ω est une pondération de A. Une K- algèbre pondérée (A, ω) est *une algèbre de Bernstein* si

(*) Ce chapitre a fait l'objet d'une publication en collaboration à *Algebras, Groups and Geometries*, vol **8** (1991)

(1) $$(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 \quad \text{pour tout } x \text{ dans } A.$$

Si K est un corps infini, une linéarisation partielle de (1) donne

(2) $$4(xy)(xz) + 2x^2(yz) = \omega(yz)x^2 + 2\omega(xy)xz + 2\omega(xz)xy + \omega(x)^2 yz$$

En y faisant $y = x$ et $z = x^2$, il vient que $2x^2x^3 = \omega(x)^3x^2 + \omega(x)^2x^3$. Par suite, nous obtenons par récurrence la relation

(3) $$2x^ix^j = \omega(x)^ix^j + \omega(x)^jx^i \quad \text{pour } i, j \geq 2.$$

Toute algèbre de Bernstein a une pondération unique et toute algèbre de Bernstein admet un idempotent non nul. Soit e un idempotent non nul d'une algèbre de Bernstein A. Alors A admet, relativement à cet idempotent e, la décomposition

(4) $$A = Ke \oplus U \oplus V$$

où $U = \{x \mid x \in A, ex = \frac{1}{2}x\}$ et $V = \{x \mid x \in A, ex = 0\}$ vérifient les relations

(5) $$U^2 \subseteq V, \quad UV \subseteq U, \quad V^2 \subseteq U, \quad UV^2 = 0 \quad \text{et} \quad U^2V^2 = 0.$$

De plus

(6) $$u^3 = 0, \quad (6') \quad u(uv) = 0 \quad \text{pour tout } u \in U \text{ et } v \in V.$$

On dira qu'une algèbre de Bernstein A est *nucléaire* si $A = A^2$. Ce qui équivaut à dire que $V = U^2$ dans la décomposition de A.

2.– Idéaux et sous-algèbres.

Proposition 2.1. *Soient A une K- algèbre de Bernstein et I un idéal de A. Il existe alors un idempotent non nul e de A tel que $A = Ke \oplus U \oplus V$ et l'une des assertions suivantes est vraie :*

1) $I = U' \oplus V'$ où $U' = U \cap I$ et $V' = V \cap I$;

2) $I = Ke \oplus U \oplus V'$ *où* $V' = V \cap I$.

En effet, soient I un idéal de A et $I_p(A)$ l'ensemble des idempotents non nuls de A. Si $I_p(A) \cap I = \emptyset$, alors $I \subseteq N = \mathrm{Ker}(\omega)$. Comme $I_p(A)$ est non vide, il existe un idempotent non nul e dans A et $A = Ke \oplus U \oplus V$ relativement à cet idempotent. Par suite $I \subseteq U \oplus V$. Pour tout élément x de I, $x = u_0 + v_0$ où $u_0 \in U$ et $v_0 \in V$, on a $ex = \frac{1}{2}u_0 \in I$. D'où $u_0 \in I$ et $v_0 = x - u_0 \in I$. Ainsi on a $I = (U \cap I) \oplus (V \cap I)$. Si $e \in I$, alors $U \subseteq I$ et par suite $A^2 \subseteq I$. Comme $I = Ke \oplus \mathrm{Ker}(\omega/I)$, il vient que $I = Ke \oplus U \oplus (V \cap I)$.

Note 2.2. Si A est une K- algèbre de Bernstein nucléaire, alors $I = U' \oplus V'$ ou $I = A^2 = A$.

Proposition 2.3. *Soient A une K- algèbre de Bernstein et B une sous-algèbre de A. Alors l'une des assertions suivantes est vraie :*

1) B est une sous-algèbre de N ;

2) il existe un idempotent non nul e dans B tel que $B = Ke \oplus U' \oplus V'$ où $U' = U \cap B, V' = V \cap B$ et $U' \oplus V'$ est une sous-algèbre de N.

Exemple 2.4. Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ où $U = <e_1>, V = <e_2>$ une K- algèbre de Bernstein de dimension 3 dont la table de multiplication est donnée par : $e^2 = e, ee_1 = \frac{1}{2}e_1, ee_2 = 0, e_1^2 = 0, e_1e_2 = e_1, e_2^2 = e_1$. Soit $e' = e + u_0 + u_0^2$, où $u_0 \in U$, un autre idempotent non nul de A. On a $u_0 = \alpha e_1$ avec $\alpha \in K$; par suite $I_p(A) = \{e + \alpha e_1 \mid \alpha \in K\}$. Si B est une sous-algèbre de A et $I_p(A) \cap B = \emptyset$, il vient trivialement que B est une sous-algèbre de $N = U \oplus < e_2 - 2\alpha e_1 >$. Si $I_p(A) \cap B \neq \emptyset$, alors il existe un α unique dans K tel que $e + \alpha e_1 \in B$. Relativement à cet idempotent on a $A = K(e + \alpha e_1) \oplus U \oplus V'$ où $V' = <e_2 - 2\alpha e_1>$ et $B = K(e + \alpha e_1)$ ou $B = K(e + \alpha e_1) \oplus U$.

Remarque 2.5. Si B est une sous-algèbre maximale de A ne contenant aucun idempotent non nul, alors $B = N$.
S'il existe un idempotent non nul e dans B et $U \subseteq B$, alors $B = Ke \oplus U \oplus V'$ est un idéal de A.

Si B est une sous-algèbre maximale de A et $I_p(A) \cap B \neq \emptyset$, alors $M = U' \oplus V'$ est une sous-algèbre maximale de N.

3.– Algèbres de Bernstein-Jordan.

Dans ce paragraphe, on ne suppose pas l'algèbre de Bernstein de dimension finie.

Lemme 3.1. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une algèbre de Bernstein. Alors, le sous-espace vectoriel $L = \{u \in U \mid uU = 0\}$ est un idéal de A vérifiant :*

$$(a)\ L^2 = 0,\ \ (b)\ V^2 \subseteq L,\ \ (c)\ U^2 L = 0 \text{ et } (d)\ (uv)v \in L$$

pour tout u dans U et v dans V.

Compte tenu de la démonstration du lemme de [6] il reste à montrer que $U^2 L = 0$. Or l'équation (6) entraîne que $u_1(u_2u_3) + u_3(u_1u_2) + u_2(u_3u_1) = 0$ pour tout u_i dans U. Si $u_1 \in L$, cette équation se réduit à $u_1(u_2u_3) = 0$ soit $U^2 L = o$.

Théorème 3.2. *Soit A une K- algèbre de Bernstein en caractéristique zéro. Si l'idéal $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est nil de nil-indexe borné, alors A est une T- algèbre vérifiant $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^t = 0$ pour tout x dans A de poids 1 et pour un entier positif t.*

En effet, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein. Soit $x = e + u + v$ un élément de poids 1. On a $x^2 = e + u + 2uv + u^2 + v^2$, $x^3 = e + u + u^2 + 2uv + \frac{1}{2}v^2 + 2(uv)v + u^2v + v^3$ et $x^3 - x^2 = -\frac{1}{2}v^2 + 2(uv)v + u^2v + v^3$. On observe que $v^2, (uv)v$ et u^2v sont dans L et comme L est un idéal, v^3 est aussi dans L. Autrement dit $x^3 - x^2 = -\frac{1}{2}v^2 + 2(uv)v + u^2v + v^3 \in L \subseteq U$. Donc $(x^3 - x^2)x = \frac{1}{2}(x^3 - x^2) + v(x^3 - x^2)$ soit $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2}) = v(x^3 - x^2)$. Par récurrence, il vient que $(x^3 - x^2)(x - \frac{1}{2})^k = R_v^k(x^3 - x^2)$. Si N est nil de nil-indexe borné r, un résultat bien connu de Gerstenhaber nous dit que $R_x^{2r-3} = 0$ pour tout x dans N et où R_x est dans ce cas la multiplication par x dans N. Par conséquent, pour $t = 2r - 3$, l'expression ci-dessus s'annule ; d'où le théorème.

Théorème 3.3. *Soit (A,ω) une K- algèbre pondérée. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est une algèbre de Bernstein-Jordan ;

(ii) Pour tout x dans $A, x^3 = \omega(x)x^2$;

(iii) A est une algèbre de Bernstein à puissances associatives.

En effet, d'après [10], théorème du paragraphe 2, on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Il reste à montrer que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Soit A une algèbre de Bernstein à puissances associatives. L'équation (1) prenant la forme $x^4 - \omega(x)^2x^2 = 0$, A est une T- algèbre de rang au plus 4. Comme de l'équation (3), on a en particulier $x^5 - \frac{1}{2}\omega(x)^2x^3 - \frac{1}{2}\omega(x)^3x^2 = 0$, on multiplie $x^4 - \omega(x)^2x^2 = 0$ par x et on fait la différence. Il vient alors que $\frac{1}{2}\omega(x)^2x^3 - \frac{1}{2}\omega(x)^3x^2 = \frac{1}{2}\omega(x)^2(x^3 - \omega(x)x^2) = 0$. Le reste de la démonstration se termine comme dans [10].

Proposition 3.4. *Soient A une algèbre de Bernstein et I un idéal de A contenu dans N. Si pour tout choix de l'idempotent e, $V^2 \subseteq I$, alors la K- algèbre pondérée $(A/I,\omega*)$, où $\omega*(\bar{x}) = \omega(x)$ pour tout x dans A, est une algèbre de Bernstein-Jordan.*

En effet, soit x un élément de A ; $x = \lambda e + u_0 + v_0$ où $\lambda \in K, u_0 \in U, v_0 \in V$. Alors $x^3 - \omega(x)x^2 = -\dfrac{\lambda}{2}v_0^2 + v_0(u_0v_0) + v_0^3 + v_0u_0^2$. Comme $e' = e + u_0 + u_0^2$ est un idempotent de A, alors relativement à cet idempotent on a $A = Ke' \oplus U' \oplus V'$ où $U' = \{u + 2u_0u \mid u \in U\}$ et $V' = \{v - 2v(u_0 + u_0^2) \mid v \in V\}$ (cf. [3], Proposition 2.1.1.). Par suite $v_0' = v_0 - 2v_0(u_0 + u_0^2)$ est un élément de V' et $v_0'^2 = v_0^2 - 4v_0(u_0v_0) - 4v_0(u_0^2v_0)$. Si pour tout choix de l'idempotent e on a $V^2 \subseteq I$, alors $v_0(u_0v_0) \in I$. Par suite, en désignant par π la surjection canonique de A sur A/I, on a $0 = \bar{x}^3 - \omega*(\bar{x})\bar{x}^2$ où $\bar{x} = \pi(x)$ pour tout x dans A.

4.– Radical d'une algèbre de Bernstein.

Soit A une K- algèbre de Bernstein. On pose $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = A^2$, $A^{(i+1)} = A^{(i)}A^{(i)}, \ldots$ On définit ainsi une suite décroissante de sous-algèbres de A

appelée suite dérivée de A. On dit que A est ***résoluble*** s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^{(k)} = 0$.

Lemme 4.1. *Si (A,ω) est une K- algèbre de Bernstein nucléaire de type fini, alors $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est un idéal nilpotent de A.*

Cf. [7], pour la démonstration.

Proposition 4.2. *Si (A,ω) est une K- algèbre de Bernstein de type fini, alors $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est résoluble.*

Cf. [6], pour la démonstration.

Corollaire 4.3. *Si (A,ω) est une K- algèbre de Bernstein de dimension finie, alors $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est le radical résoluble de A.*

En effet, comme N est de codimension 1, alors N est l'unique idéal maximal de A.

Définition 4.4. Soient A une K- algèbre de Bernstein de dimension finie et R un idéal de A. On dit que R est le nilradical de A si

i) R est un nil-idéal de A,

ii) la K- algèbre de Bernstein quotient A/R ne contient aucun élément nilpotent.

De la définition ci-dessus, il est évident que R ne contient aucun idempotent non nul de A.

Théorème 4.5. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition d'une K- algèbre de Bernstein de dimension finie relativement à un idempotent non nul e et R un idéal de A. Si R est le nilradical de A, alors R est le radical résoluble N de A.*

En effet, comme $U \oplus U^2$ est nilpotent d'après le lemme 4.1. et R est un nilradical de A, alors $U \oplus U^2 \subseteq R \subseteq N$. Si R est de codimension $p > 1$, désignons par $S = \{\bar{e}, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{p-1}\}$ une base de la K- algèbre de Bernstein quotient A/R.

Comme $U \subseteq R$, alors pour tout $i = 1, \dots, p-1$ on a $\bar{v}_i \in V/R$. La relation $V^2 \subseteq U$ nous dit alors que $\bar{v}_i\bar{v}_j = \bar{0}$ pour tout $i \leq j$. Il en résulte que A/R contient des éléments nilpotents. Ceci est absurde. Il s'ensuit que R est de codimension 1 ; d'où $R = N$.

Dans la suite, A désignera une algèbre de dimension finie sur K.

5.– Algèbre de Bernstein statique.

Définition 5.1. Soit A une algèbre commutative sur un corps commutatif K. On dit que A est une algèbre *statique* si pour tous x, y, z, w dans A on a

$$\big((xy)z\big)w + \big((xy)w\big)z + \big((zw)x\big)y + \big((zw)y\big)x = 2(xy)(zw) + (xz)(yw) + (yz)(xw).$$

Lemme 5.2. *Soit A une K- algèbre commutative. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) A est une K- algèbre statique ;

ii) quels que soient x, y dans A on a $x^2y^2 + (xy)^2 = x(xy^2) + y(yx^2)$.

Cf. [1], théorème 3 pour la démonstration.

Remarque 5.3. Selon [1], toute algèbre statique sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2 est à puissances associatives.

Lemme 5.4. *Soit A une K- algèbre statique sur un corps de caractéristique différente de 2 et 3. Si A est résoluble, A est nilpotente.*

Cf. [1], corollaire du théorème 4.

Théorème 5.5. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une algèbre de Bernstein relativement à l'idempotent e. Alors A est une algèbre statique si et seulement si $U^2 = 0, V^2 = 0$ et $(UV)V = 0$.*

En effet, si A est une algèbre de Bernstein statique, alors A est à puissances associatives. Par suite, d'après le théorème 3.3., A est de Bernstein-Jordan ; d'où

$V^2 = 0$ et $(uv)v = 0$ pour tous u dans U et v dans V. D'après [1], théorème 6, U est un idéal de A et une zéro-algèbre ; c'est à dire $U^2 = 0$ et $AU \subseteq U$. Pour tous v, v' dans V, u' dans U, on a, d'après le lemme 5.2., $(e+v)^2(u'+v')^2 + \big((e+v)(u'+v')\big)^2 = (e+v)\big((e+v)(u'+v')^2\big) + (u'+v')\big((u'+v')(e+v)^2\big)$, c'est à dire $v(u'v') = 0$ pour tous u' dans U, v, v' dans V. D'où $(UV)V = 0$.

Réciproquement, si A est une K- algèbre de Bernstein telle que $U^2 = 0, V^2 = 0$ et $(UV)V = 0$, on vérifie alors sans peine qu'on a $x^2y^2 + (xy)^2 = x(xy^2) + y(yx^2)$ pour tous x, y dans A. Ainsi, d'après le lemme 5.2., A est statique.

Proposition 5.6. *Soit (A,ω) une algèbre de Bernstein sur un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2 et 3. Si $N = ker(\omega)$ est une sous-algèbre statique de A, alors A est génétique.*

En effet, si N est statique, alors d'après la proposition 4.2. et le lemme 5.4. N est nilpotent. Ce qui suffit pour que l'algèbre de Bernstein A soit génétique.

Exemple 5.7. Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition d'une algèbre de Bernstein relativement à un idempotent e. Si A est normale, c'est à dire, si $UV = 0$ et $V^2 = 0$, alors $N = U \oplus V$ est une sous-algèbre statique de A.

6.– Sous-algèbres de Frattini d'une algèbre de Bernstein.

Définition 6.1. La sous-algèbre de Frattini d'une K- algèbre A, notée $F(A)$, est l'intersection des sous-algèbres maximales de A.

Définition 6.2. L'idéal de Frattini d'une K- algèbre A, noté $\varphi(A)$, est le plus grand idéal de A contenu dans $F(A)$.

Lemme 6.3. *Si (A,ω) est une algèbre de Bernstein, alors $F(A) = F(N)$ où $N = \mathrm{Ker}(\omega)$*

En effet, soit Γ l'ensemble des sous-algèbres maximales de N. Alors, d'après la proposition 2.3. et la remarque 2.5., pour tout idempotent non nul e de A, on a $F(A) = N \cap \big(\bigcap_{M\in\Gamma} (Ke \oplus M)\big) = \bigcap_{M\in\Gamma} M = F(N)$

Théorème 6.4. *Soit (A,ω) une K- algèbre de Bernstein. Alors $F(A)$ est une sous-algèbre nilpotente de N.*

En effet, si $A = Ke \oplus U \oplus V$ est la décomposition de A relativement à un idempotent non nul e, alors $N^2 = (UV \oplus V^2) \oplus U^2$. Ainsi, d'après [8] il vient que $F(A) \subseteq N^2 = (UV \oplus V^2) \oplus U^2$. Comme $N^2 \subseteq U \oplus U^2$, on a $F(A) \subseteq U \oplus U^2$. Mais $U \oplus U^2$ étant le noyau de l'algèbre de Bernstein nucléaire A^2, alors $F(A)$ est nilpotente d'après le lemme 4.1.

Proposition 6.5. *Soit I un idéal d'une K- algèbre de Bernstein non nucléaire (A,ω). Si $A^2 \cap I = \{0\}$, alors I est un idéal abélien de A et il existe une sous-algèbre H de A telle que $A = H \oplus I$.*

En effet, si $A^2 \cap I = \{0\}$, alors $I \subseteq V - U^2$. Par suite $I^2 \subseteq U$ et il en résulte que $I^2 = 0$. De plus on a $\varphi(A) \cap I = \{0\}$. Ainsi d'après le lemme 7.2. de [8], il existe une sous-algèbre H de A telle que $A = H \oplus I$.

Théorème 6.6. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition d'une algèbre de Bernstein relativement à l'idempotent non nul e. Si toute sous-algèbre maximale de A est un idéal de A, alors $U = UV + V^2$.*

En effet, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ un contre exemple de dimension minimale. Si $UV + V^2 \subset U$, désignons par s sa codimension. Comme pour $s \geq 2, B = Ke \oplus (UV + V^2) \oplus V$ est une sous-algèbre de A qui n'est pas maximale car contenue dans la sous-algèbre $Ke \oplus (UV + V^2) \oplus < u_0 > \oplus V$ où $u_0 \in U - (UV + V^2)$ et $< u_0 >$ est le sous-espace de U engendré par u_0. B est donc contenu dans une sous-algèbre maximale M. Comme M est un idéal de A et $e \in M$, alors $U = eU \subseteq M$. Par suite $M = A$; ce qui est absurde. D'où $U = UV + V^2$.

Remarque 6.7. La condition $U = UV + V^2$ n'est pas suffisante pour que toute sous-algèbre maximale d'une algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ soit un idéal. En effet, considérons la K- algèbre de Bernstein dont la table de multiplication relativement à une base $\{e, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ s'écrit : $e^2 = e, ee_1 =$

$\frac{1}{2}e_1, e_1e_2 = e_2e_1 = e_1$, tous les autres produits étant nuls. On vérifie aisément que $U = Ke_1, V = Ke_2 + Ke_3 + Ke_4$ et $U = UV + V^2$. Cependant la sous-algèbre maximale engendrée par $\{e, e_2, e_3, e_4\}$ n'est pas un idéal de A.

Définition 6.8. Soit (A, ω) une K- algèbre de Bernstein. On appelle *radical de Jacobson* de A et on note $Rad(A)$ l'intersection des idéaux maximaux de A.

Théorème 6.9. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition d'une algèbre de Bernstein non nucléaire relativement à un idempotent e. Si toute sous-algèbre maximale de A est un idéal, alors $F(A) = U \oplus U^2$.*

En effet, si Γ désigne l'ensemble des idéaux maximaux de A contenant A^2, on a $Rad(A) = N \cap \left(\bigcap_{M \in \Gamma} (Ke \oplus U \oplus (V \cap M)\right) = U \oplus V'$ où $V' = \bigcap_{M \in \Gamma} (V \cap M)$ et $N = U \oplus V$. Comme toute sous-algèbre maximale est un idéal, et que les éléments de Γ contiennent A^2, alors $U \oplus U^2 \subseteq Rad(A) = F(A) = F(N) \subseteq U \oplus U^2$; d'où le résultat.

Exemple 6.10. Soit A une K- algèbre de Bernstein dont la table de multiplication relativement à une base $\{e, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ s'écrit $e^2 = e, ee_1 = e_1e = \frac{1}{2}e_1, e_2^2 = e_1$, tous les autres produits étant nuls. A est trivialement non nucléaire et toute sous-algèbre de A est un idéal. On vérifie que $F(A) = U \oplus U^2 = Ke_1$.

Théorème 6.11. *Soit (A, ω) une K- algèbre de Bernstein nucléaire. Alors $F(A) = (U \oplus U^2)^2$.*

En effet, si A est une algèbre de Bernstein nucléaire, on a $A = Ke \oplus U \oplus U^2$ avec $N = U \oplus U^2$. Comme $F(A) = F(N)$ d'après le lemme 6.3. et N est nilpotent d'après la proposition 4.2., il vient que $F(A) = F(N) = N^2$ (cf. [9] théorème 6). Par suite $F(A) = (U \oplus U^2)^2$.

Corollaire 6.12. *Soient (A, ω) une K- algèbre de Bernstein nucléaire et I un idéal propre de A. Alors $F(I) \subseteq F(A)$.*

En effet, A étant nucléaire et I un idéal propre de A, I ne peut contenir $A^2 = A$; par suite $I \subseteq N$. Comme I est nilpotent car N l'est, alors $F(I) = I^2 \subseteq N^2 = F(A)$.

Exemple 6.13. Soit A une K- algèbre de Bernstein dont la table de multiplication relativement à une base $\{e, e_1, e_2, e_3\}$ s'écrit $e^2 = e$, $ee_1 = e_1 e = \frac{1}{2}e_1$, $ee_2 = e_2 e = \frac{1}{2}e_2$, $e_1^2 = e_3$, $e_2^2 = e_3$, tous les autres produits étant nuls. A est une algèbre de Bernstein nucléaire. On vérifie que $F(A) = (U \oplus U^2)^2 = Ke_3$.

Bibliographie

[1] A.A. Albert, Power associative rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 551–593.

[2] M.T. Alcalde, C. Burgueño, A. Labra et A. Micali, Sur les algèbres de Bernstein, *Proc. London Math. Soc.* (3), **58** (1989), 51–68.

[3] Z. Fouad, Sur les algèbres de Bernstein, thèse de 3ᵉ cycle, Montpellier, 1987.

[4] M. Gerstenhaber, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices II, *Duke Math. J.* **27** (1960), 21–31.

[5] Ph. Holgate, Communication orale.

[6] I.R. Hentzel and L.A. Peresi, Semi-prime Bernstein algebras, *Arch. Math.* vol. **52** (1989), 539–543.

[7] L.A. Peresi, Nilpotency in Bernstein algebras, *Arch. Math.* vol. 54 (1990), to appear.

[8] D.A. Towers, A Frattini theory for algebras, *Proc. London Math. Soc.* (3), **27** (1973), 440–462.

[9] D.A. Towers, On the generators of a nilpotent non associative algebra, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **22** (1971), 545–550.

[10] S. Walcher, Bernstein algebras which are Jordan algebras, *Arch. Math.* vol. **50** (1988), 218–222.

4

Structure des algèbres de Bernstein

Abstract. In this paper, the theory of Bernstein's algebras is revisited. Many results concerning the structure of Bernstein algebras (ideals, d.c. and a.c. conditions for ideals, nilpotency and so on) are stated. On the other hand, our formulation of orthogonality doesn't depend of Peirce decomposition of the algebra that is to say, it's a good notion. About Bernstein-Jordan algebras, we give a definitive formulation of the theorem which characterise them. Finaly, we emphasize the importance of the invariant L (this ideal doesn't depend of Peirce decomposition of the algebra) in the study of the structure of Bernstein's algebras.

Cet article, s'il était écrit en anglais, aurait pu s'intituler "Bernstein's algebras revisited". En effet, nous avons repris un certain nombre de résultats concernant les algèbres de Bernstein à la fois pour leur donner une formulation correcte (c'est le cas de l'orthogonalité) ainsi que pour donner une formulation définitive (caractérisation des algèbres de Bernstein-Jordan). Par ailleurs, nous avons donné un certain nombre de résultats qui concernent directement la structure d'une algèbre de Bernstein (idéaux, conditions de chaîne pour les idéaux, nilpotence, etc). Finalement nous avons mis en évidence le rôle joué par l'idéal L dans l'étude des algèbres de Bernstein.

1.– Préliminaires.

Tout au long de ce papier, K désignera un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Une K- algèbre ***pondérée*** est un couple (A,ω) formé d'une K-algèbre commutative et non associative A et d'un morphisme non nul $\omega : A \to K$ de K- algèbres appelé ***fonction poids*** ou ***pondération*** de l'algèbre. Une algèbre pondérée (A,ω) est appelée une ***algèbre de Bernstein*** si pour tout x dans A on a $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$. Toute algèbre de Bernstein admet une unique pondération et toute algèbre de Bernstein possède au moins un idempotent non nul. Si $e \neq 0$ est un idempotent d'une algèbre de Bernstein A, alors A admet la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U = \{x | x \in A, ex = \frac{1}{2}x\}$ et $V = \{x | x \in A, ex = 0\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$U^2 \subseteq V,\ UV \subseteq U,\ V^2 \subseteq U \quad \text{et} \quad UV^2 = 0. \tag{1.1}$$

Quels que soient les éléments x, x_1, x_2, x_3 dans U et y, y_1, y_2, y_3 dans V, on a :

$$x^3 = 0 \quad \text{et} \quad (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2 = 0 \quad \text{(identité de Jacobi)}; \tag{1.2}$$

$$x(xy) = 0 \quad \text{et} \quad x_1(x_2y) + x_2(x_1y) = 0; \tag{1.3}$$

$$(xy)^2 = 0,\ (x_1y)(x_2y) = 0 \quad \text{et} \quad (xy_1)(xy_2) = 0. \tag{1.4}$$

2.– Idéaux dans une algèbre de Bernstein.

On se donne donc une algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ dans sa décomposition de Peirce relative à un idempotent $e \neq 0$ de A et notons $N = \text{Ker}(\omega) = U \oplus V$. On remarque que pour tout idéal I de A on a $NI \subseteq I$ donc $N(NI) \subseteq NI$. Montrons, de plus, que $e(NI) \subseteq NI$ donc que NI est un idéal de A. Or, la formule $e(xy) = \frac{1}{2}xy + \omega(x)ey - 2(ex)(ey)$ pour x parcourant I et y parcourant N nous donne l'inclusion $e(NI) \subseteq NI$. Ainsi, pour tout idéal I d'une algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus N$, les espaces vectoriels produits NI sont des idéaux de A. En particulier, les puissances N^k sont des idéaux de A pour tout entier $k \geq 1$.

Par la suite nous allons considérer les sous-K-espaces vectoriels de A définis par $L = \{x | x \in U, xU = 0\}$ (cf. [3]) et $U^* = \{x | x \in U, x(U \oplus U^2) = 0\}$ (cf. [4]). Le lemme 3.1. de [5] nous dit que $L^2 = 0$, $V^2 \subseteq L$, $U^2 L = 0$ et $(xy)y \in L$ pour tout x dans U et pour tout y dans V. De plus, L est un idéal de A. Montrons que $L = U^*$. En effet, on a immédiatement que $U^* \subseteq L$ et la condition $U^2 L = 0$ entraîne que $L \subseteq U^*$ d'où l'égalité.

Lemme 2.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que un sous-K- espace vectoriel I de A soit un idéal de A contenant un idempotent (e par exemple) non nul est que $A^2 \subseteq I \subseteq A$, inclusions en tant que sous-espaces vectoriels. En particulier, le produit de deux tels idéaux est un idéal.*

En effet, si I est un idéal de A contenant e alors $I \supseteq U$ donc $I \supseteq U^2$ et ceci nous dit que $A^2 \subseteq I \subseteq A$. Réciproquement, si I est un sous-espace vectoriel de A vérifiant $A^2 \subseteq I \subseteq A$ alors $xy \in I$ quels que soient x, y dans A donc, en particulier, $xy \in I$ pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in A$. Ce qui nous montre que I est un idéal de A contenant e. Si maintenant I et J sont deux idéaux de A contenant e alors $IJ \supseteq (A^2)^2 = A^2$ donc $A^2 \subseteq IJ \subseteq A$, ce qui montre que IJ est un idéal de A contenant e.

Lemme 2.2. *Le produit de deux idéaux dans une algèbre de Bernstein, sur un corps de caractéristique différente de 2, dont l'un au moins n'est pas contenu dans N est un idéal.*

En effet, soient I et J deux idéaux d'une algèbre de Bernstein A et supposons que $e \in I$ et que $J \subseteq N$ (le cas où $I \not\subseteq N$ et $J \not\subseteq N$ est donné dans le lemme 2.1.). Pour x dans I et y dans J on a $e(xy) = \frac{1}{2}xy + \omega(x)ey - 2(ex)(ey)$ donc $e(xy) \in IJ$. D'autre part, $IJ \subseteq I$ et $IJ \subseteq J$ donc $N(IJ) \subseteq N(I \cap J)$ et montrons que $N(I \cap J) \subseteq IJ$. Si $x \in N$ et $y \in I \cap J$, l'équation $xy = 2e(xy) + 4(ex)(ey)$ nous dit que $xy \in IJ$, d'où notre assertion. Ainsi, $N(IJ) \subseteq IJ$ ce qui nous montre que IJ est un idéal de A.

Par contre, le produit de deux idéaux de A, contenus dans N, n'est pas nécessairement un idéal.

Exemple 2.3. Considérons l'algèbre de Bernstein A de dimension 7 dont la table de multiplication relative à une base $\{e, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ s'écrit $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $u_3^2 = v_3$, $v_1^2 = u_2$, $u_1v_1 = u_1$, $u_1v_2 = u_2$, tous les autres produits étant nuls. On voit que l'idéal L s'écrit $L = < u_1, u_2 >$ et considérons l'idéal $I = < u_1, u_2, v_1 >$; on a $I \supseteq L$ et $IL = < u_1 >$ donc $N(IL) = L$ ce qui nous montre que $N(IL) \not\subseteq IL$, c'est à dire, IL n'est pas un idéal de A. De plus, L est un idéal minimal de A.

Remarquons, néanmoins, que le produit de deux idéaux contenus dans N peut être un idéal car on sait que pour tout idéal I de A, NI est un idéal de A.

Pour d'autres résultats concernant les idéaux dans une algèbre de Bernstein, on renvoie à [5], paragraphe 2.

3.– Orthogonalité des algèbres de Bernstein.

La notion d'orthogonalité dans les algèbres de Bernstein a été introduite dans [4]. Par la suite, d'autres travaux sur cette notion ont été réalisés (cf. [1]). Si nous reprenons ici cette étude c'est essentiellement parce que la notion d'orthogonalité de [4] n'est pas une notion intrinsèque à l'algèbre mais elle dépend du choix de l'idempotent dans la décomposition de Peirce de l'algèbre de Bernstein. Or, une notion qui n'est pas intrinsèque à l'objet considéré peut être gênante pour un développement ultérieur de la théorie.

En suivant Ph. Holgate (cf. [4]), on dira qu'une algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2 est *orthogonale relativement à l'idempotent* e si $U^3 = \{0\}$.

Nous reprenons ici l'exemple donné dans [4] pour montrer que cette notion dépend du choix de l'idempotent e.

Exemple 3.1. Considérons l'algèbre de Bernstein A de dimension 7 dont la table de multiplication relative à une base $\{e, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ s'écrit $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $(i = 1,2,3)$, $u_1^2 = \alpha v_1$, $u_2^2 = \beta v_2$, $u_1u_2 = \gamma v_3$, $v_1v_2 = \lambda u_3$ et $v_3^2 = \mu u_3$ avec $\alpha\beta\lambda + 2\gamma^2\mu = 0$, tous les autres produits étant nuls. Cette condition sur les coefficients nous assure que A est effectivement une algèbre de Bernstein. Cette algèbre est, de plus, de Bernstein orthogonale relativement à l'idempotent e (cf. [4]). Posons $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 1$ et $\mu = -\frac{1}{2}$ et considérons le changement de base donné par $e' = e + u_1 + u_1^2$, $u_i' = u_i + 2u_1u_i$ $(i = 1,2,3)$ et $v_i' = v_i - 2(u_1 + u_1^2)v_i$ $(i = 1,2,3)$. Ceci peut encore s'écrire $u_1' = u_1 + 2v_1$, $u_2' = u_2 + 2v_3$, $u_3' = u_3$, $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2 - 2u_3$ et $v_3' = v_3$. Il s'ensuit que $e'^2 = e'$, $e'u_i' = \frac{1}{2}u_i'$ $(i = 1,2,3)$, $u_1'^2 = v_1'$, $u_2'^2 = v_2'$, $u_1'u_2' = v_3'$, $u_1'v_2' = 2u_3'$, $u_2'v_3' = -u_3'$, $v_3'^2 = -\frac{1}{2}u_3'$ et $v_1'v_2' = u_3'$, tous les autres produits étant nuls. On a $U' =< u_1', u_2', u_3' >$, $U'^2 =< v_1', v_2', v_3' >$ et $U'^3 =< u_3' >\neq \{0\}$. Donc l'algèbre A est une algèbre de Bernstein non orthogonale relativement à l'idempotent e'. Cet exemple nous montre que cette notion d'orthogonalité est relative à la décomposition de Peirce de l'algèbre. Ceci nous conduit à la définition suivante :

On dira qu'une algèbre de Bernstein A est *orthogonale* si pour toute décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ on a $U^3 = 0$. Donc, la notion d'orthogonalité dans notre sens est exactement celle de [4] pour tout idempotent e de A.

Théorème 3.2. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et $A = Ke \oplus U \oplus V$ une algèbre de Bernstein sur K. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit orthogonale est que $U^3 = \{0\}$ et $(U^2)^2 = \{0\}$.*

En effet, soit $e' = e+u_0+u_0^2$ un autre idempotent de A et soit $A = Ke'\oplus U'\oplus V'$ la décomposition de Peirce de A relative à l'idempotent e'. On sait (cf. [7]) que les éléments de U' et V' sont respectivement de la forme $u + 2u_0u$ avec

u parcourant U et $v - (u_0 + u_0^2)v$ avec v parcourant V. Choisissons donc des éléments $u'_i = u_i + 2u_0u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ de U'. On a $u'_1u'_2 = u_1u_2 - 2(u_0 + u_0^2)(u_1u_2)$ et $(u'_1u'_2)u'_3 = (u_1u_2)u_3 + 2(u_0 + u_0^2)((u_1u_2)u_3) + 2(u_0u_3)(u_1u_2)$. Ainsi, si A est orthogonale, $U^3 = 0$ et $U'^3 = 0$ et l'équation ci-dessus nous donne $(u_0u_3)(u_1u_2) = 0$ quels que soient u_0, u_1, u_2, u_3 dans U, i.e., $(U^2)^2 = 0$. Réciproquement, si $U^3 = 0$ et $(U^2)^2 = 0$ pour tout idempotent $e' = e + u_0 + u_0^2$, la même équation ci-dessus nous donne $(u'_1u'_2)u'_3 = 0$ quels que soient u'_1, u'_2, u'_3 dans U', d'où le théorème.

Le corollaire suivant est connu (cf. [4], proposition 5) :

Corollaire 3.3. *Si A est une algèbre de Bernstein orthogonale, pour tout idempotent e, l'idéal $U \oplus U^2$ est nilpotent d'indice 3.*

On dira qu'une algèbre de Bernstein (A, ω) est *conservative* si $x^2y = \omega(x)xy$ quels que soient x, y dans A. On voit immédiatement que toute algèbre de Bernstein conservative est une algèbre de Jordan et on sait que une algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$, sur un corps de caractéristique différente de 2, est conservative si et seulement si $UV = 0$ et $V^2 = 0$ pour toute décomposition de Peirce de A (cf. [10], proposition 5.2.6).

Corollaire 3.4. *Une condition nécessaire et suffisante pour que une algèbre de Bernstein A, sur un corps de caractéristique différente de 2, soit orthogonale est que la sous-algèbre A^2 soit conservative.*

Théorème 3.5. *Sur un corps de caractéristique différente de 2, toute algèbre de Bernstein de type $(1 + r, s)$ avec $r \leq 2$ ou $s \leq 1$ est orthogonale.*

En effet, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une algèbre de Bernstein sur un corps de caractéristique différente de 2 et de type $(1 + r, s)$. Si $s = 0$ on voit immédiatement que l'algèbre $A = Ke \oplus U$ est orthogonale et si $s = 1$ la condition $U^2 \subseteq V$ nous dit que, ou bien $U^2 = 0$ et l'algèbre A est encore orthogonale, ou bien $U^2 = V$ et alors l'algèbre A est de type $(1+r,1)$. Cette algèbre étant conservative, c'est à dire, $UV=0$ et $V^2=0$, il s'ensuit immédiatement qu'elle est orthogonale. On regarde maintenant r. On observe d'abord que si $U^2=0$, l'algèbre A est orthogonale et si $\dim_K(U^2)=1$, l'algèbre dérivée $A^2=Ke\oplus U\oplus U^2$ est de type $(1+r,1)$, donc conservative et par conséquent A est orthogonale et ceci pour tout r. Si $r=1$ on a $\dim_K(U^2)\leq 1$ et ou bien $U^2=0$ et l'algèbre A est orthogonale, ou bien $\dim_K(U^2)=1$ et A est encore orthogonale.

Si $r=2$ on a $\dim_K(U^2)\leq 3$ et dans les cas où cette dimension est 0 ou 1, l'algèbre A est orthogonale et on va examiner, par la suite, via des calculs, les cas manquants.

Cas où $r=2$ et $\dim_K(U^2)=2$. Si $\{u_1,u_2\}$ est une base de U, l'ensemble $\{u_1^2,u_1u_2,u_2^2\}$ forme un système de générateurs de U^2, donc parmi ces trois éléments, deux d'entre eux forment une base de U^2. Supposons, tout d'abord, que $\{u_1^2,u_1u_2\}$ soit une base de U^2 sur K et montrons que $U^3=0$ et pour ce faire, il faut calculer les produits $u_1u_1^2=0$, $u_1(u_1u_2)=-\frac{1}{2}u_1^2u_2$, $u_2(u_1u_2)=-\frac{1}{2}u_1u_2^2$. Or, si l'on pose $u_1^2u_2=\alpha u_1+\beta u_2$ avec α, β dans K et en multipliant par u_1 on a $\alpha u_1^2+\beta u_1u_2=u_1(u_1^2u_2)=-u_1^3u_2=0$, d'où $\alpha=\beta=0$ et en posant maintenant $u_2^2=\gamma u_1^2+\delta u_1u_2$ avec γ, δ dans K on a $u_1u_2^2=\delta u_1(u_1u_2)=-\frac{1}{2}\delta u_1^2u_2=0$. Si la base choisie pour U^2 est $\{u_1^2,u_2^2\}$, on écrit $u_1u_2=au_1^2+bu_2^2$ avec a,b dans K et, en multipliant cette relation par u_1 et par u_2, on a $(1-4ab)u_1^2u_2=0$ et si l'on pose $u_1^2u_2=\alpha u_1+\beta u_2$ avec α, β dans K, alors $0=u_1(u_1^2u_2)=\alpha u_1^2+\beta u_1u_2=(\alpha+\beta a)u_1^2+\beta bu_2^2$ d'où $\alpha+\beta a=0$ et $\beta b=0$. Si $b=0$ on a $u_1^2u_2=0$ et sinon $\beta=0$ donc $\alpha=0$ et, à nouveau, $u_1^2u_2=0$. De même, $u_1u_2^2=0$ donc $U^3=0$. Comme cette algèbre de Bernstein est de Jordan (cf. Corollaire 5.4.), $V^2=0$ donc $(U^2)^2=0$.

Cas où $r=2$ et $\dim_K(U^2)=3$. Ce cas découle de la situation plus générale suivante : si $A=Ke\oplus U\oplus V$ est une algèbre de Bernstein de type $(1+r,s)$ avec $\dim_K(U^2)=\frac{1}{2}r(r+1)$, alors l'algèbre $A^2=Ke\oplus U\oplus U^2$ est de Bernstein conservative, donc A est de Bernstein orthogonale.

Note 3.6. La négation du théorème 3.4 nous dit immédiatement que si $A = Ke \oplus U \oplus V$ est une algèbre de Bernstein de type $(1+r, s)$ non orthogonale, alors $r \geq 3$ et $s \geq 2$.

4.– Algèbres de Bernstein noethérienne et artinienne.

Soient K un anneau commutatif à élément unité et (A, ω) une K- algèbre de Bernstein. On dira que (A, ω) est une algèbre de Bernstein *noethérienne* si elle vérifie l'une des trois conditions (équivalentes) suivantes :

N_1) Toute suite croissante $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ d'idéaux de (A, ω) est stationnaire, c'est- à-dire, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $I_k = I_n$ pour tout entier $k \geq n$ (condition de chaîne ascendante).

N_2) Tout ensemble non vide S d'idéaux de (A, ω) admet un élément maximal dans l'ordre par inclusion sur S, c'est- à-dire, il existe un idéal I dans S tel que si J est dans S et si $J \supseteq I$ alors $J = I$.

N_3) Tout idéal de (A, ω) est de type fini, c'est- à-dire, si I est un idéal de (A, ω), il existe un nombre fini d'éléments de A qui engendrent I en tant qu'idéal.

L'équivalence de ces trois conditions est un fait bien connu et se démontre comme dans le cas des modules (cf. [14], chapitre III, paragraphe 10, théorèmes 15 et 17). De même, on dira que (A, ω) est une algèbre de Bernstein *artinienne* si elle vérifie l'une des deux conditions (équivalentes) suivantes :

A_1) Toute suite décroissante $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ d'idéaux de (A, ω) est stationnaire, c'est- à-dire, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $I_k = I_n$ pour tout entier $k \geq n$ (condition de chaîne descendante).

A_2) Tout ensemble non vide S d'idéaux de (A, ω) admet un idéal minimal dans l'ordre par inclusion sur S, c'est- à-dire, il existe un idéal I dans S tel que si J est dans S et si $J \subseteq I$ alors $J = I$.

Théorème 4.1. *Toute algèbre de Bernstein artinienne (A, ω) dont le noyau $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est nilpotent est noethérienne et, en particulier, A est une K- algèbre de type fini. De plus, A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux.*

Néanmoins, il existe des algèbres de Bernstein de type fini qui ne vérifient pas la condition de chaîne descendante donc, en particulier, qui ne sont pas artiniennes.

Exemple 4.2. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A,ω) une K- algèbre de Bernstein telle que $N = \mathrm{Ker}(\omega) =< x >$ soit engendré, en tant qu'idéal, par un seul élément x vérifiant les conditions $x^i x^j = 0$ quels que soient les entiers $i \geq 2$ et $j \geq 2$. On posera $ex^i = \frac{1}{2}x^i$ pour tout $i \geq 2$ et $ex = 0$ où e est un idempotent non nul de A. Ainsi (A,ω) admet la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U =< x^2, x^3, \dots >$ et $V = Kx$. Il s'ensuit que $U^2 = \{0\}$ donc, en particulier, $L = U$ et $N^2 =< x^2, x^3, \dots >= U$ d'où $N^3 = (U \oplus V)U = UV \oplus U^2 = UV =< x^3, x^4, \dots >$. Par récurrence, $N^k =< x^k, x^{k+1}, \dots >$ pour tout entier $k \geq 1$ et, par suite, la suite descendante d'idéaux de (A,ω), $N \supset N^2 \supset N^3 \supset \cdots$ n'est pas stationnaire. La chaîne de sous-espaces vectoriels de L, $< x^2 > \subset < x^2, x^3 > \subset < x^2, x^3, x^4 > \subset \cdots$ est une chaîne strictement croissante d'idéaux de L donc L, en tant que K- algèbre, n'est pas noethérienne.

5.– Algèbres de Bernstein-Jordan.

Dans ce paragraphe nous reprenons en vue de lui donner une forme définitive le théorème fondamental qui caractérise les algèbres de Bernstein-Jordan, à savoir :

Théorème 5.1. *Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et A une K- algèbre de Bernstein. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit une algèbre de Jordan est que pour toute décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ de A relative à un idempotent $e \neq 0$ de A on ait $V^2 = 0$.*

En effet, si A est une algèbre de Jordan et si l'on considère la décomposition de Peirce de A relative à un idempotent $e \neq 0$ de A, à savoir, $A = Ke \oplus U \oplus V$, compte tenu des relations très connues dans une algèbre de Bernstein-Jordan, on a $V^2 = 0$. Réciproquement, on se donne une décomposition de Peirce de A relative à un idempotent $e \neq 0$ de A, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ telle que $V^2 = 0$

et soit $x = \alpha e + u_0 + v_0$ un élément de A avec $\alpha \in K$, $u_0 \in U$, $v_0 \in V$. On a $x^3 - \omega(x)x^2 = -\frac{1}{2}\alpha v_0^2 + (u_0v_0)v_0 + v_0^3 + u_0^2v_0 = (u_0v_0)v_0$. Si l'on considère l'idempotent $e' = e+u_0+u_0^2$, on a la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U = \{u + 2u_0u | u \in U\}$ et $V' = \{v - 2(u_0 + u_0^2)v_0 | v \in V\}$ avec $V'^2 = 0$. L'élément $v_0' = v_0 - 2(u_0 + u_0^2)v_0$ est dans V' donc $v_0'^2 = v_0^2 - 4(u_0v_0)v_0 - 4(u_0^2v_0)v_0$ soit $(u_0v_0)v_0 = 0$. Ceci nous montre que $x^3 = \omega(x)x^2$ pour tout x dans A, c'est- à-dire, A est une algèbre de Jordan.

Corollaire 5.2. *Soient (A,ω) une algèbre de Bernstein et I un idéal de A contenu dans* Ker(ω). *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre de Bernstein quotient A/I soit de Jordan est que pour toute décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ de A on ait $V^2 \subseteq I$.*

Corollaire 5.3. *Pour toute algèbre de Bernstein (A,ω), l'algèbre de Bernstein quotient A/L est de Jordan.*

En effet, on sait que l'idéal L ne dépend pas de la décomposition de Peirce considérée (invariance de L) et, d'autre part, pour toute décomposition de Peirce de A, à savoir, $A = Ke \oplus U \oplus V$, on a $V^2 \subseteq L$ d'où le corollaire.

Corollaire 5.4. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein de type $(1 + r, s)$ et $\delta = \dim_K(U^2)$. Si $\delta > \frac{1}{2}r(r-1)$ alors A est une algèbre de Jordan.*

En effet, soit U' un supplémentaire de L dans U, c'est- à-dire, $U = L \oplus U'$. Compte tenu de la définition de L on a $U^2 = U'^2$ et si $L \neq 0$, $\dim_K(U') = r - \dim_K(L) \leq r - 1$ d'où $\dim_K(U^2) = \dim_K(U'^2) \leq \frac{1}{2}r(r-1)$. Par conséquent, si $\dim_K(U^2) > \frac{1}{2}r(r-1)$, nécessairement $L = 0$ donc $A = A/L$ est une algèbre de Jordan.

6.– Nilpotence.

Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein donnée sous la forme d'une décomposition de Peirce relative à un idempotent $e \neq 0$ de A. Comme $V^2 \subseteq L$ et L est un idéal de A alors $V^k \subseteq L$ pour tout $k \geq 2$ donc $UV^k \subseteq UL = 0$ soit $UV^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. La condition $U^2L = 0$ entraîne aussi $U^2V^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. On déduit facilement que $U^{2k+1} \subseteq U$ et $U^{2k} \subseteq U^2$ pour tout $k \geq 1$ donc $U^m \subset U \oplus U^2$ pour tout entier $m \geq 1$. Il s'ensuit que $U^mV^k = 0$ quels que soient les entiers $m \geq 1$, $k \geq 2$.

Notons $R(V)$ l'ensemble des multiplications par des éléments de V et $E(V)$ l'algèbre enveloppante de $R(V)$. On sait que $E(V)$ est une algèbre associative sans élément unité.

Lemme 6.1. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein de type fini. Si l'algèbre $E(V)$ est nilpotente alors l'idéal $N = U \oplus V$ est aussi nilpotent.*

Soit donc $A = Ke \oplus U \oplus V$ une algèbre de Bernstein de type fini sur K, c'est- à-dire, engendrée en tant qu'algèbre par un nombre fini d'éléments. On sait que l'algèbre de Jordan N/L (où $N = U \oplus V$) est résoluble (cf. [3], théorème 3) et puisque toute algèbre de Jordan résoluble et de type fini est nilpotente (théorème de Zhevlakov ; cf. [13], chapitre 4, paragraphe 3, théorème 2, page 90), alors N/L est nilpotente. Il existe ainsi un entier $r \geq 1$ tel que $N^r \subseteq L$ donc $N^{r+k} = V(V(\cdots V(VN^r)\cdots))$ (où l'espace V apparait ici k fois) pour tout entier k. Si l'algèbre $E(V)$ est nilpotente, il existe un entier $s \geq 1$ tel que $V(V(\cdots V(VN^r)\cdots)) = 0$ (l'espace V figure ici s fois) donc $N^{r+s} = 0$ d'où le lemme.

Proposition 6.2. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein. Si $UV = 0$, alors l'idéal N est nilpotent.*

En effet, soit $N = U \oplus V$. On a $N^2 = U^2 \oplus V^2$ donc $N^3 = U^2V$ et finalement, $N^4 = 0$. Notons que si l'on suppose que l'algèbre A soit de type fini, alors la proposition 6.2. est une conséquence immédiate du lemme 6.1. car $V(VA) = V(UV + V^2) \subset VV^2 \subset VU = 0$ ce qui nous montre que l'algèbre $E(V)$ est nilpotente.

Lemme 6.3. *Soit A une algèbre de Bernstein de type fini. Si I est un sous-espace vectoriel de A tel que $NI = I$ alors $I \subset L$ et I est un idéal de A.*

Il est clair que la condition $NI = I$ entraîne que $I \subseteq N$ et soit $p : A \to A/L$ la surjection canonique. Les conditions $I = NI = N(NI) = \cdots$ entraînent que $I \subset N^k$ pour tout entier $k \geq 2$. Or, on sait que $p(N)$ est un idéal nilpotent de l'algèbre de Jordan A/L (cf. démonstration du lemme 6.1.) donc il existe un entier $k \geq 2$ tel que $p(N)^k = 0$ ce qui entraîne que $p(I) = 0$ d'où $I \subset L$. De $I \subset L \subset U$ on a $eI = I$ qui, assortie de la condition $NI = I$, nous dit que I est idéal de A.

Lemme 6.4. *Soient $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein de type fini et I un sous-K- espace vectoriel de A. Alors $NI = I$ si et seulement si $VI = I$.*

En effet, d'après le lemme 6.3., si $NI = I$ alors I est un idéal de A contenu dans L donc $I = NI = (U \oplus V)I = VI$.

Réciproquement, supposons que $VI = I$. On a $I \subseteq N$ et les relations 1.1. entraînent que $I \subseteq U$. Comme A est de type fini, il existe un entier $r \geq 1$ tel que $N^r \subset L$ donc $I = V(V(\cdots V(VI)\cdots)) \subset N^r \subset L$ (où l'espace V figure $r-1$ fois) soit $I \subset L$. Il en résulte que $NI = (U \oplus V)I = VI = I$.

Corollaire 6.5. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein de type fini. Si $UV = U$ alors $U^2 = 0$.*

En effet, d'après le lemme 6.4., $VU = U$ si et seulement si $NU = U$ et d'après le lemme 6.3., cette dernière condition entraîne que $U \subset L \subset U$ d'où $U = L$, soit $U^2 = L^2 = 0$.

Théorème 6.6. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein de type fini et supposons que A vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) l'idéal $N = U \oplus V$ est nilpotent ; (ii) la K- algèbre associative $E(V)$ est nilpotente ; (iii) $I = \{0\}$ est l'unique sous-K-espace vectoriel de A vérifiant $VI = I$.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. L'algèbre $E(V)$ peut être considérée comme sous-algèbre de l'algèbre $E(N)$ et nous savons (cf. [12], chapitre II, théorème 2.4.) que la nilpotente de N équivaut à celle de $E(N)$. Donc l'algèbre $E(V)$ est nilpotente.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Soit I un sous-espace vectoriel de A vérifiant $VI = I$. Alors $I = V(V(\cdots V(VI)\cdots))$ (où l'espace V figure ici k fois, $k \geq 1$ étant un nombre entier) et comme l'algèbre $E(V)$ est nilpotente, en prenant k suffisamment grand on a $I = \{0\}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. On sait que les puissances principales N^k de N sont des idéaux de A et considérons la chaîne décroissante d'idéaux $N \supset N^2 \supset N^3 \supset \cdots$ L'hypothèse du théorème nous dit qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $N^r = N^{r+1}$ et le lemme 6.4. montre que $VN^r = N^r$ soit $N^r = \{0\}$.

Note 6.7. Les résultats précédents nous permettent de plonger une algèbre non nilpotente comme noyau d'une algèbre de Bernstein. Plus précisément, si K est un corps de caractéristique différente de 2 et B une K- algèbre vérifiant $B^3 = B^2$ et $(B^2)^2 = \{0\}$, il suffit de prendre $U = B^2$, V un supplémentaire de B^2 dans B (i.e., $B = B^2 \oplus V$) et de poser, pour un idempotent $e \neq 0$, $e \notin B$, $eu = \frac{1}{2}u$ pour tout $u \in U$ et $ev = 0$ pour tout $v \in V$. L'algèbre $A = Ke \oplus B$ est de Bernstein et admet B comme noyau.

Ci-dessous nous donnons un exemple.

Exemple 6.8. Soit $N = < c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 >$ la nil-algèbre du contre-exemple de Suttles. La table de multiplication est donnée par $c_1c_2 = c_2c_4 = -c_1c_5 = c_3$, $c_1c_3 = c_4$, $c_2c_3 = c_5$, les autres produits étant nuls. On a $N^3 = N^2 = < c_3, c_4, c_5 >$. Puisque $NN^2 = N^2$, si N est noyau d'une algèbre de Bernstein, on doit avoir $(N^2)^2 = 0$ (ce qui est vérifié) et $N^2 \subseteq L \subseteq U$. En prenant $U = N^2$ et

$V = < c_1, c_2 >$, on voit maintenant que $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $ec_i = \frac{1}{2}c_i$ pour $i = 3,4,5$, $ec_j = 0$ pour $j = 1,2$, est une algèbre de Bernstein.

Les résultats précédents permettent de donner une autre démonstration de la conjecture de Grishkov (cf. [2] ; voir [11] pour une autre solution de cette conjecture).

Théorème 6.9. *(Conjecture de Grishkov). Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein de type fini. Si $U^2 = V$ alors $N = U \oplus V$ est un idéal nilpotent de A.*

Supposons donc que $U^2 = V$ et que I soit un sous-K- espace vectoriel de A vérifiant $VI = I$. Le lemme 6.4. nous dit que $NI = I$ et le lemme 6.3., que I est un idéal de A vérifiant $I \subset L$. Comme $L = \mathrm{Ann}(N)$, alors $I = VI \subseteq NL = \{0\}$ soit $I = \{0\}$ et d'après le théorème 6.6., l'idéal N est nilpotent.

Notons que la conjecture de Grishkov est en défaut si la condition $U^2 = V$ n'est pas vérifiée même si l'algèbre est de type fini. En effet, dans l'exemple 4.2., l'algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus < x >$ est de type fini mais comme ici $U^2 = \{0\}$ et $V = Kx$ on a l'inclusion stricte $U^2 \subset V$ et l'idéal $N = < x >$ n'est pas nilpotent.

Note 6.10. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein de type $(1 + r, s)$ vérifiant la condition $L = 0$. En particulier, A est une algèbre de Jordan (cf. corollaire 5.3.), ce qui entraîne $V^2 = 0$. Soient $v_0 \in V$ un élément non nul et $L_0 : U \to U$ l'application K- linéaire définie par $u \mapsto uv_0$. Puisque $L_0^2(u) = (uv_0)v_0 = 0$ pour tout u dans U on a $L_0^2 = 0$, il existe une base $\{u_1, \ldots u_r\}$ de U sur K telle que la matrice de L_0 en cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec p blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $p = \dim_K(L_0(U))$. Ceci signifie que $u_1 v_0 = u_2, \ldots, u_{2p-1} v_0 = u_{2p}$ et $u_2 v_0 = 0, \ldots, u_{2p} v_0 = 0$ et, par suite, $L_0(U) =< u_2, \ldots, u_{2p} >$. De plus, on déduit immédiatement que $u_{2k} u_{2l} = 0$ $(k, l = 1, \ldots, p)$, $u_{2k-1} u_{2k} = 0$ $(k = 1, \ldots, p)$ et $u_{2k} u_{2l-1} = -u_{2k-1} u_{2l}$ $(k, l = 1, \ldots p)$.

Nous allons appliquer cette construction dans la démonstration du théorème qui suit.

Théorème 6.11. *Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K- algèbre de Bernstein de type $(1 + r, s)$ avec $r \leq 3$. Si $L = 0$ alors l'algèbre A est conservative.*

En effet, soit $x = u_0 v_0$ dans UV et supposons que $r = 3$ (démonstration analogue pour $r = 1$, et $r = 2$). Il existe une base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de U sur K telle que $u_1 v_0 = u_2, u_2 v_0 = 0, u_1 u_2 = 0, u_2 u_3 = 0, u_2^2 = 0$. Puisque $x \in L_0(U)$, ceci nous dit que $xU = 0$ donc $x \in L = 0$ soit $x = 0$. Les conditions $V^2 = 0$ (car A est une algèbre de Jordan) et $UV = 0$ nous disent précisément que l'algèbre A est conservative.

Le théorème 6.11. n'est pas vrai pour $r = 4$.

Exemple 6.12. Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la K- algèbre de Bernstein de type (5, 5) dont la table de multiplication relative à une base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, \ldots, v_5\}$ s'écrit $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2} u_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$, $u_1^2 = v_1$, $u_1 u_3 = v_2$, $u_1 u_4 = v_3$, $u_3^2 = v_4$, $u_2 u_3 = -v_3$, $u_1 v_5 = u_2$, $u_3 v_5 = u_4$, tous les autres produits étant nuls. On voit que A est une algèbre de Bernstein qui vérifie $L = 0$ et $UV =< u_2, u_4 > \neq 0$. Donc A est une algèbre de Jordan non conservative.

La réciproque du théorème 6.11. n'est pas vraie, c'est- à-dire, il existe des algèbres conservatives vérifiant $L \neq \{0\}$.

Exemple 6.13. Les algèbres $A_{T,\omega}$. Soient K un corps de caractéristique différente de 2, A un K- espace vectoriel, $T : A \to A$ un opérateur K- linéaire et $\omega : A \to K$ une forme K- linéaire telle que $\omega \circ T = \omega$. On notera $A_{T,\omega}$ la K- algèbre commutative dont le K- espace vectoriel sous-jacent est A et dont la multiplication est définie par $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)T(y) + \omega(y)T(x))$ pour x et y parcourant A. Il en résulte que $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$ quels que soient x, y dans A donc $\omega : A \to K$ est une pondération de A. On sait (cf. [9], théorème 3.1.) que $A_{T,\omega}$ est une K- algèbre conservative si et seulement si $T^2 = T$ et ceci est vérifié si et seulement si $A_{T,\omega}$ est de Bernstein. Dans ce cas, $L = U$, un supplémentaire de Ke dans $\mathrm{Im}(T)$, $V = \mathrm{Ker}(T)$ et $N^2 = \{0\}$, où e est un idempotent non nul de $A_{T,\omega}$.

7.– Dupliquée d'une algèbre de Bernstein. Soient K un corps commutatif, A une K- algèbre commutative et notons $D(A)$ la seconde puissance symétrique de A. Le K- espace vectoriel $D(A)$ est linéairement engendré par les vecteurs $x \cdot y$ (produit symétrique de x par y) pour x et y parcourant A et on définit sur $D(A)$ une structure de K- algèbre commutative donnée par $(x \cdot y)(x' \cdot y') = xy \cdot x'y'$ pour x, y, x', y' parcourant A. Cette nouvelle algèbre $D(A)$ est appelée *la dupliquée commutative* ou simplement *dupliquée* de A. L'application K- linéaire $\mu : D(A) \to A$ définie par $x \cdot y \mapsto xy$ est un morphisme surjectif de K- algèbres et si $N(A) = \mathrm{Ker}(\mu)$, alors $D(A)N(A) = \{0\}$. De plus, si $\omega : A^2 \to K$ est une pondération de A, le morphisme composée $\omega_d = \omega \circ \mu : D(A) \to K$ est une pondération de $D(A)$ et soit $N_d = \mathrm{Ker}(\omega_d)$. On voit que $N_d \supset N(A)$, inclusion en tant qu'idéaux de $D(A)$.

Théorème 7.1. *Soient A une algèbre de Bernstein et $D(A)$ sa dupliquée. Si A^2 est de type fini alors l'idéal N_d est nilpotent.*

On écrit $A^2 = Ke \oplus N$ avec $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ et l'isomorphisme de K- algèbres $D(A)/N(A) \simeq A^2$ entraîne l'isomorphisme d'iéaux $N_d/N(A) \simeq N$. Comme A^2 est de type fini et $(A^2)^2 = A^2$ nécessairement N est nilpotent (cf. théorème 6.7.), c'est- à-dire, il existe un entier $r \geq 1$ tel que $N^r = \{0\}$ soit $N_d^r \subseteq N(A)$ donc $N_d^{r+1} = N_d N_d^r \subseteq D(A)N(A) = \{0\}$ soit $N_d^{r+1} = \{0\}$.

La réciproque du théorème 7.1. n'est pas vraie, c'est-à-dire, le fait que l'idéal N_d soit nilpotent n'entraîne pas nécessairement que l'algèbre A^2 soit de type fini.

Exemple 7.2. (cf. [3]). Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et C une K- algèbre commutative. Sur le K- espace vectoriel $A = K \times C \times C$ on définit une structure de K- algèbre de Bernstein par

$$(\alpha, x, y)(\beta, x', y') = (\alpha\beta, \frac{1}{2}\alpha x' + \frac{1}{2}\beta x + xy' + x'y + yy', 0)$$

pour α, β parcourant K et x, y, x', y' parcourant C. La pondération de A est l'application K- linéaire $\omega : A \to K$ définie par $(\alpha, x, y) \mapsto \alpha$ et on a, par rapport à l'idempotent $e = (1, 0, 0)$, la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U = (0, C, 0)$ et $V = (0, 0, C)$. De plus, $A^2 = Ke \oplus U$ et l'idéal $N = U \oplus V$ est nilpotent si et seulement si la K- algèbre C est nilpotente. Si $D(A) = Ke\cdot e \oplus N_d$ est la dupliquée de A, comme $U^2 = \{0\}$, la démonstration du théorème 7.1. nous dit que $N_d^3 = \{0\}$ même si C, et par conséquent N, n'est pas nilpotent. En particulier, U étant isomorphe, en tant que K- espace vectoriel, à une copie de C, l'algèbre A^2 n'est pas nécessairement de type fini.

Si (A, ω) est une K- algèbre pondérée, la restriction de ω à A^2 définit sur A^2 une structure de K- algèbre pondérée. Inversement, la donnée d'une pondération $\omega : A^2 \to K$ sur A^2 ne nous permet pas toujours d'étendre ω en une pondération de A.

Exemple 7.3. Si (A, ω) est une K- algèbre commutative pondérée où K est un corps de caractéristique différente de 2, on définit sur le K- espace vectoriel $D(A) \oplus A$ la structure d'algèbre donnée par (cf. [8])

$$(x \cdot y + z)(x' \cdot y' + z') = \frac{1}{2}(xy \cdot z' + x'y' \cdot z + \omega(z')xy + \omega(z)x'y')$$

pour x, y, z, x', y', z' parcourant A. En particulier, $(x \cdot y)(x' \cdot y') = 0$ et $zz' = 0$, quels que soient x, y, x', y' et z, z' dans A et, par suite, si on suppose qu'il existe un morphisme de K- algèbres $\Omega : D(A) \oplus A \to K$, en appliquant Ω à $(x \cdot y)^2 = 0$ et à $z^2 = 0$ on a $\Omega = 0$. Ceci nous dit que la K- algèbre $D(A) \oplus A$ *n'est pas pondérée*. Par contre, le sous-K- espace vectoriel B de $D(A) \oplus A$ engendré par des éléments de la forme $x \cdot y + z$ avec $\omega(x)\omega(y) = \omega(z)$ est une sous-K- algèbre de $D(A) \oplus A$ et B est munie de la pondération naturelle $\omega' : B \to K$ définie par $x \cdot y + z \mapsto \omega(z)$. Comme B contient $(D(A) \oplus A)^2$ en tant que sous-algèbre, la restriction de ω' définit sur $(D(A) \oplus A)^2$ une structure de K- algèbre pondérée.

Bibliographie

[1] M.T. Alcalde, R. Baeza et C. Burgueño, Autour des algèbres de Bernstein, *Arch. Math.* **53** (1989), 134-140.

[2] A.N. Grishkov, On the genetic property of Bernstein algebras, *Soviet Math. Dokl.* **35** (1987), 489-492.

[3] I.R. Hentzel and L.A. Peresi, Semi-prime Bernstein algebras, *Arch. Math.* **52** (1989), 539-543.

[4] Ph. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc.* **9** (1975), 613-623.

[5] A. Koulibaly et M. Ouattara, Structure et théorie de Frattini d'une algèbre de Bernstein, *Algebras, Groups and Geometries* (1991), à paraître.

[6] A. Micali et M. Ouattara, Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington, *Linear Algebra and its Applications*, **153** 193–207 (1991).

[7] A. Micali et F. Zitan, Automorphismes d'une algèbre de Bernstein, *Cahiers Mathématiques Montpellier* **38** (1989), 109-116.

[8] A. Micali et M. Ouattara, Sur la dupliquée d'une algèbre II, *Bull. Soc. Math. Belgique*, **43**, serie A, 113–125 (1991).

[9] A. Micali et M. Ouattara, Sur les algèbres de Jordan génétiques, *Annales de l'Université de Clermont II*, à paraître.

[10] M. Ouattara, Algèbres de Jordan et Algèbres génétiques, *Cahiers Mathématiques Montpellier* **37** (1988).

[11] L.A. Peresi, Nilpotency in Bernstein algebras, *Arch. Math.* **54** (1990).

[12] R.D. Schafer, *An introduction to non associative algebras*, Academic Press, N. Y. 1966.

[13] K.A. Zhevlakov and al., *Rings that are nearly associative*, Academic Press, N. Y. 1982.

[14] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, vol. II, Springer Verlag, Berlin 1960.

5

Sur les algèbres de Bernstein d'ordre 2 (*)

Abstract. In this paper we show that the duplicate of an nth order Bernstein algebra is a Bernstein algebra of order $n+1$, and we characterize the set of generalised idempotents in such an algebra. We also characterize those Bernstein algebras of order 2 which are Jordan or are power associative. The results are quite different from what is true for Bernstein algebras of order 1.

Nous obtenons dans ce papier quelques propriétés sur les algèbres de Bernstein d'ordre n. Ainsi la dupliquée d'une algèbre de Bernstein d'ordre n est une algèbre de Bernstein d'ordre $n+1$. Nous caractériserons l'ensemble des idempotents généralisés et les algèbres de Bernstein d'ordre 2 qui sont de Jordan ou à puissances associatives.

1- Préliminaires. Soient K un corps commutatif et A une K- algèbre commutative non associative de dimension finie sur K. Pour tout x dans A et pour tout entier $m \geq 1$, la puissance pleine $x^{[m]}$ de x est définie par $x^{[1]} = x$, et $x^{[m]} = x^{[m-1]}x^{[m-1]} = (x^{[m-1]})^2$ si $m \geq 2$. Pour tout entier k, le nombre 2^k sera noté $2 * k$. Ainsi pour tout x dans A et pour tout α dans K on a $(\alpha x)^{[m]} = \alpha^{2*(m-1)}x^{[m]}$.

Soit (A,ω) une K- algèbre pondérée, c'est à dire que $\omega : A \to K$ est un morphisme surjectif de K- algèbres. Si $n \geq 0$ est un entier, on dira que (A,ω) est une *algèbre de Bernstein d'ordre n* (cf.[1]) si pour tout élément x dans A on a

$$x^{[n+2]} = \omega(x)^{2*n}x^{[n+1]}. \tag{1.1}$$

(*) Ce chapitre a fait l'objet d'une publication parue à *Linear Algebra and its Applications*, **144** : 29–38 (1991)

Pour désigner une algèbre de Bernstein d'ordre 1, on dira simplement algèbre de Bernstein.

Rappelons brièvement quelques propriétés des algèbres de Bernstein d'ordre n (cf. [3]).

Soit (A, ω) une algèbre de Bernstein d'ordre n. Alors ω est l'unique pondération de A et l'ensemble des idempotents non nuls de A est donné par $\{y^{[n+1]} \mid y \in A,\ \omega(y) = 1\}$. Comme ω est surjectif, cet ensemble est non vide.

On suppose la caractéristique de K différente de 2 et soit e un idempotent non nul de A. Pour tout entier $k \geq 0$, considérons les endomorphismes e_k de $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ définis inductivement par $e_0 = id_N$, $e_{k+1} = L_e \circ e_k$ où $L_e(x) = ex$ pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$. On pose $V_k = \{x \mid x \in N, e_k(x) = 0\}$ pour tout $k \geq 0$. On a la suite de sous-espaces vectoriels $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{n-1} \subseteq V_n$. De plus N se décompose sous la forme $N = U \oplus V_n$ où $U = \{x \mid x \in N, ex = \frac{1}{2}x\}$ et $V_n = \{x \mid x \in N, e_n(x) = 0\}$. Soit m le plus grand entier tel que $V_{m-1} \neq V_m$, alors $V_m = V_n$. Pour tout k, $1 \leq k \leq m$, Il existe un sous-espace vectoriel C_k tel que $V_k = V_{k-1} \oplus C_k$. Alors $V_k = \bigoplus\limits_{1 \leq i \leq k} C_i$. Puisque $V_m = V_n$, A admet la décomposition suivante

$$(1.2) \qquad A = Ke \oplus N = Ke \oplus U \oplus V_m = Ke \oplus U \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_m,$$

relativement à l'idempotent e et les composantes vérifient les relations suivantes (cf.[3], proposition 5.7) :

$$(1.3) \quad U^2 \subseteq V_m, \quad (\mathrm{Ker}(\omega))C_1 \subseteq U + V_m \quad \text{si} \quad m < n \quad \text{et}$$
$$(\mathrm{Ker}(\omega))C_1 \subseteq U + V_{m-1} \quad \text{si} \quad m = n.$$

Par exemple, si A est une algèbre de Bernstein (d'ordre 1), $m = n = 1$,

$$(1.4) \qquad V_0 = \{0\}, \quad C_1 = V_1, \quad U^2 \subseteq V_1, \quad (\mathrm{Ker}(\omega))V_1 \subseteq U.$$

Dans le cas des algèbres de Bernstein d'ordre 2, une linéarisation partielle de l'équation (1.1) permet d'obtenir :

$$(1.5) \qquad 2e((ex)x^2) + 8\big(e(ex)\big)(ex)^2 + 4\big(e(ex)\big)(ex^2) = (ex)x^2$$

$$(1.6) \quad 2ex^{[3]} + 32\big(e(ex)\big)\big((ex)x^2\big) + 16(ex)^{[3]} + 16(ex^2)(ex)^2 + 4(ex^2)^2 = x^{[3]}$$

pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$.

Pour plus de détails et dans le cas général nous renvoyons le lecteur à [3].

2- Dupliquée d'une algèbre de Bernstein d'ordre n

On définit sur le K- espace vectoriel $S_K^2(A)$, seconde puissance symétrique du K- espace vectoriel A, une nouvelle structure d'algèbre par $(x.x')(y.y') = xx'.yy'$ où on a noté par $x.x'$ le produit symétrique de x et x'. La nouvelle algèbre , notée $D(A)$, est appelée la dupliquée commutative de A.

L'application K- linéaire $\mu : D(A) \to A^2$, $x.y \mapsto xy$ est un morphisme surjectif d'algèbres et si $\omega : A^2 \to K$ est une pondération pour l'algèbre dérivée A^2, le morphisme composé $\omega_d = \omega \circ \mu : D(A) \to K$ est une pondération pour $D(A)$.

Théorème 2.1. *Soit A une K- algèbre de Bernstein d'ordre n, $n \geq 0$ entier. Alors, sa dupliquée $D(A)$ est une algèbre de Bernstein d'ordre $n+1$.*

En effet, pour tout $x.y$ dans $D(A)$, on a : $(x.y)^2 = xy.xy$, $(x.y)^{[3]} = (xy)^{[2]}.(xy)^{[2]}$ et $(x.y)^{[k]} = (xy)^{[k-1]}.(xy)^{[k-1]}$ pour tout entier $k \geq 2$. Si A est une algèbre de Bernstein d'ordre n, on a en particulier $(x.y)^{[n+3]} = (xy)^{[n+2]}.(xy)^{[n+2]} = \left(\omega(xy)^{2*n}\right)^2(xy)^{[n+1]}.(xy)^{[n+1]} =$
$\omega(xy)^{2*(n+1)}(xy)^{[n+1]}.(xy)^{[n+1]} = \omega_d(x.y)^{2*(n+1)}(x.y)^{[n+2]}$. Ainsi $D(A)$ est une algèbre de Berntein d'ordre $n+1$; d'où le théorème.

Remarque 2.2. La démonstration du théorème révèle que l'hypothèse peut être rendue minimale. Autrement dit, si l'algèbre dérivée A^2 de A est de Bernstein d'ordre n, $D(A)$ est de Bernstein d'ordre $n+1$.

3- Exemple des algèbres de Bernstein (d'ordre 1).

Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, et soit $A = Ke \oplus U \oplus V_1$ la décomposition d'une algèbre de Bernstein relative à l'idempotent e. On va déterminer la décomposition $D(A) = Ke.e \oplus U_d \oplus V_d = Ke.e \oplus U_d \oplus C_1 \oplus C_2$ de l'algèbre de Bernstein d'ordre 2, $D(A)$. Soit x dans U_d. Alors $(e.e)x = e.\mu(x) = \frac{1}{2}x$ et en y appliquant μ, il vient que $e\mu(x) = \frac{1}{2}\mu(x)$ donc $\mu(x)$ est dans U et

$x = 2e.\mu(x)$. Si un élément x de $D(A)$ est tel que $\mu(x)$ est dans U, $e.\mu(x)$ est dans U_d. Comme μ est surjectif $U_d = Ke.U = \{\alpha e.u \mid u \in U, \alpha \in K\}$. Maintenant soit x dans V_d. Alors $(e.e)\big((e.e)x\big) = e.(e\mu(x)) = 0$, soit $e\mu(x) = 0$ et $\mu(x)$ est dans V_1. Si x est dans $D(A)$ tel que $\mu(x)$ soit dans V_1, $(e.e)\big((e.e)x\big) = 0$ et x est dans V_d, donc $V_d = \{x \in D(A) \mid e\mu(x) = 0\}$. Il est facile de voir que $C_1 = \mathrm{Ker}(\mu)$ et par définition C_2 est un supplémentaire de C_1 dans V_d. Comme $A^2 = Ke \oplus U \oplus U^2$ en vertu des relations (1.4), l'isomorphisme d'algèbres $D(A)/C_1 \simeq A^2$ nous dit que $\dim C_2 = \dim U^2$. Par le théorème 2 de [2], on a $D(A)C_1 = 0$ tandis que la relation (1.3) donne $U_d^2 \subseteq V_d$.

Exemple 3.1 Soit $Z(2,2)$ l'algèbre zygotique d'une population diploïde à 2 allèles. Dans la base canonique (e, e_1, e_2), la table de multiplication est donnée par $e^2 = e$, $ee_1 = e_1e = \frac{1}{2}e_1$, $e_1^2 = \frac{1}{4}e_2$, les autres produits étant nuls. La table de multiplication de l'algèbre des couples $D(Z(2,2))$ dans la base $\{e.e, e.e_1, e_1.e_1, e.e_2, e_1.e_2, e_2.e_2\}$ est donnée par $(e.e)^2 = e.e$, $(e.e)(e.e_1) = \frac{1}{2}e.e_1$, $(e.e)(e_1.e_1) = \frac{1}{4}e.e_2$, $(e.e_1)^2 = \frac{1}{4}e_1.e_1$, $(e.e_1)(e_1.e_1) = \frac{1}{8}e_1.e_2$, $(e_1.e_1)^2 = \frac{1}{16}e_2.e_2$, les autres produits étant nuls. On a $U_d = Ke.e_1$, $C_1 =< e.e_2, e_1.e_2, e_2.e_2 >$ et $C_2 = Ke_1.e_1$.

Théorème 3.2. *Soient A une K- algèbre de Bernstein et $A = Ke \oplus U \oplus V$ sa décomposition relative à l'idempotent e. Conditions équivalentes :*

(i) $D(A)$ est une algèbre de Bernstein ;

(ii) $U^2 = 0$.

De plus si l'une de ces conditions est satisfaite, $D(A)$ est une algèbre de Jordan spéciale.

En effet, supposons que $D(A)$ soit une algèbre de Bernstein. Alors, relativement à l'idempotent $e.e$, où $e \neq 0$ est un idempotent de A, la relation (1.2) nous dit que $V_d = C_1$ et $C_2 = 0$. Comme $\dim C_2 = \dim U^2$, alors $U^2 = 0$.
Réciproquement, il est clair que si $U^2 = 0$, $C_2 = 0$, $V_d = C_1$ et alors, $U_dV_d = 0$ et $V_d^2 = 0$. Ceci nous dit que $D(A)$ est une algèbre de Bernstein normale (cf.[8]

paragraphe 9). La dernière assertion du théorème est donnée par le théorème 5.3.4 de [4], en remarquant que $D(A)$ est, dans ce cas, isomorphe à la dupliquée $D(B)$ de l'algèbre de Bernstein triviale B de même type que A (il n'est pas nécessaire que A et B soient isomorphes). Rappelons que si $A = Ke \oplus U \oplus V_1$ est la décomposition de l'algèbre de Bernstein A avec $\dim U = r$ et $\dim V_1 = s$, le couple $(1+r, s)$ est appelé le type de A et A est dite triviale si le noyau de sa pondération est une zéro algèbre.

Dans un autre contexte, Lyubich dit qu'une algèbre de Bernstein est exceptionnelle si $U^2 = 0$.

4- Algèbres de Bernstein d'ordre 2 qui sont des algèbres de Jordan.

Soient K un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2. Une K- algèbre commutative A est une algèbre de Jordan si $x^2(yx) = (x^2y)x$ et une K- algèbre A est dite à puissances associatives si $x^ix^j = x^{i+j}$ pour tous $i, j \geq 1$ entiers.

Lemme 4.1. *Soit (A,ω) une K- algèbre de Bernstein d'ordre 2. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est une algèbre de Jordan ;

(ii) Pour toute décomposition $A = Ke \oplus U \oplus V_2$, on a $U^2 \subseteq V_2$, $UV_2 \subseteq U$, $V_2^2 \subseteq V_2$ et les identités suivantes sont vérifiées :

$$u^3 = 0,\ \ 2u(uv) = u^2v,\ \ 2v(vu) = v^2u,$$
$$u(u^2v) = u^2(uv) = 0,\ \ u(u^2u') = u^2(uu') = 0,$$
$$u^2v^2 + 4(uv)^2 = 2v(u^2v),\ \ v(v^2u) = v^2(vu),$$
$$v^2(vv') = v(v^2v') = 0 \quad \text{et} \quad v^4 = 0,$$

quels que soient u et u' dans U, v et v' dans V_2.

$(i) \Rightarrow (ii)$: En effet si $A = Ke \oplus U \oplus V_2$ est la décomposition de A relative à e, cette décomposition coïncide avec celle de Peirce et alors, on a $U^2 \subseteq V_2$, $UV_2 \subseteq U$

et $V_2^2 \subseteq V_2$. Pour $y = e$ et $x = u$ dans $x^2(yx) = (x^2y)x$, il vient que $\frac{1}{2}u^3 = 0$ soit $u^3 = 0$. La linéarisation de l'identité de Jordan donne

$$(4.2) \qquad (xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz) = (x(yz))t + (x(zt))y + (x(yt))z.$$

En faisant d'une part $x = y = u$, $z = v$ et $t = e$ et d'autre part $x = y = v$, $z = u$ et $t = e$, il vient respectivement que $2u(uv) = u^2v$ et $2v(vu) = v^2u$. En faisant $x = y = u$ et $z = t = v$ dans (4.2) on obtient $u^2v^2 + 2(uv)^2 = 2v(u(vu)) + u(uv^2) = v(u^2v) + \frac{1}{2}u^2v^2$ soit $u^2v^2 + 4(uv)^2 = 2v(u^2v)$. Maintenant $u^3 = 0$ pour tout u dans U entraîne que $u^2u' + 2u(uu') = 0$, quels que soient u et u' dans U. Alors, pour $u' = uv$ on a $0 = u^2(uv) + 2u(u(uv)) = u^2(uv) + u(u^2v) = 2u^2(uv)$, soit $u^2(uv) = u(u^2v) = 0$. Par ailleurs, comme uu' est dans V_2, on a $u^2(uu') = u(u^2u') = -2u(u(uu')) = -u^2(uu')$, ainsi $u^2(uu') = u(u^2u') = 0$. Enfin, en faisant $x = v$ dans (1.6), il vient que $v^4 = (v^2)^2 = 0$ ce qui entraîne que $v^2(vv') = 0$ soit $v(v^2v') = v^2(vv') = 0$. On a donc établit la condition (ii).

Réciproquement : Soient $x = \alpha e + u + v$ et $y = \beta e + u' + v'$ deux éléments quelconques de A. En utilisant les identités de (ii) et après simplification il vient que $x^2(yx) - (x^2y)x = [u^2(u'v) + 2(uv)(uu') - v(u^2u') - 2u(u'(uv))] + [u^2(vv') - v(u^2v') + 2(uv)(uv') - 2u(v'(uv))] + [(uu')v^2 - u(u'v^2) + 2(uv)(u'v) - 2v(u'(uv))] + [(uv')v^2 - u(v^2v') + 2(uv)(vv') - 2v(v'(uv))]$. Chaque crochet s'annule au moyen des équations :

(a) $u^2(u'v) + 2(uv)(uu') = v(u^2u') + 2u(u'(uv))$,

(b) $u^2(vv') - v(u^2v') + 2(uv)(uv') - 2u(v'(uv)) = 0$,

(c) $(uu')v^2 - u(u'v^2) + 2(uv)(u'v) - 2v(u'(uv)) = 0$,

(d) $(uv')v^2 - u(v^2v') + 2(uv)(vv') - 2v(v'(uv)) = 0$, qui s'établissent comme conséquence des identités de (ii). On a par exemple $2(uv)(uu') = 2u(v(uu')) - 2v(u(uu')) = 2u(u(u'v)) + 2u(u'(uv)) - 2v(u(uu')) = -u^2(u'v) + 2u(u'(uv)) + v(u^2u')$, donc $u^2(u'v) + 2(uv)(uu') = v(u^2u') + 2u(u'(uv))$ d'où l'équation (a). Ainsi $x^2(yx) - (x^2y)x = 0$ et A est une algèbre de Jordan, d'où le lemme.

Théorème 4.3. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et 3 et (A, ω) une K- algèbre de Bernstein d'ordre 2. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est une algèbre de Jordan ;

(ii) A est une algèbre à puissances associatives vérifiant $v(v^2v') = 0$ quels que soient v, v' dans V_2, où $A = Ke \oplus U \oplus V_2$.

En effet, puisque toute algèbre de Jordan est à puissances associatives, le lemme 4.1 nous dit que (i) entraîne (ii). Réciproquement : supposons que $A = Ke \oplus U \oplus V_2$ est à puissances associatives et que $v(v^2v') = 0$. Avec l'argument de la décomposition de Peirce, on a $U^2 \subseteq V_2$, $UV_2 \subseteq U$ et $V_2^2 \subseteq V_2$. Comme u^3 est dans U, pour $x = u$, l'identité (1.5) nous donne $e(u^3) + \frac{1}{2}u^3 = \frac{1}{2}u^3$, soit $u^3 = 0$. La linéarisation partielle de l'identité $x^2x^2 = x^4$ donne

$$(4.4) \quad 4x^2(yz) + 8(xy)(xz) = 2x(x(yz)) + 2x(y(xz)) + 2x(z(xy)) + 2y(x(xz)) \\ +2z(x(xy)) + (x^2z)y + (x^2y)z.$$

En faisant $x = u$, $y = v$ et $z = e$, il vient que $4u(uv) = 2u(uv) + u^2v$, soit $2u(uv) = u^2v$. En y faisant $x = v$, $y = u$ et $z = e$, on obtient $2uv^2 = 3v(vu) + \frac{1}{2}uv^2$ soit $3(uv^2 - 2v(vu)) = 0$ et si $car(K) \neq 3$ on a $uv^2 = 2v(vu)$. Puisque $u^3 = 0$ entraîne que $u^2u' + 2u(uu') = 0$, alors pour $u' = uv$ il vient que $u^2(uv) = -2u(u(uv)) = -u(u^2v)$. Mais $2v(vu) = uv^2$ entraîne que $u(vv') = (uv)v' + (uv')v$. Alors $u(u^2v) = u^3v + (uv)u^2 = u^2(uv)$. Ainsi, de ce qui précède, il vient que $u^2(uv) = u(u^2v) = 0$. L'identité $2u(uv) = u^2v$ entraîne que $v(uu') = (vu)u' + (vu')u$. Donc $u(u^2u') = u^2(uu') - u'u^3 = 2u(u(uu')) = -u(u^2u')$, soit $u(u^2u') = u^2(uu') = 0$. On a $v^2(vu) = 2v(v(vu)) = v(v^2u)$. Maintenant, en faisant $x = u$, $y = z = v$ dans (4.4) il vient que $4u^2v^2 + 8(uv)^2 = 2u(uv^2) + 4u(v(uv)) + 4v(u(uv)) + 2(u^2v)v$ soit $4u^2v^2 + 8(uv)^2 = u^2v^2 + 4u(v(uv)) + 4v(u^2v)$. Mais $4u(v(uv)) = 2u(uv^2) = u^2v^2$. Par conséquent $u^2v^2 + 4(uv)^2 = 2v(u^2v)$. Pour $x = v$, l'identité (1.6) nous dit que $v^2v^2 = v^4 = 0$. Mais $v^2v^2 = 0$ pour tout v entraîne que $v^2(vv') = 0$ quels que soient v et v'. Enfin, puisque par hypothèse $v(v^2v') = 0$ quels que soient v et v', le lemme 4.1 nous dit alors que A est une algèbre de Jordan ; d'où le théorème.

Pour les définitions de T- algèbre (en anglais "train algebra") et T- algèbre spéciale voir par exemple [8].

Théorème 4.5. *Soit A une K- algèbre de Bernstein d'ordre 2. Supposons que A est à puissances associatives. Alors A est une T- algèbre vérifiant $x^5 - \omega(x)x^4 = 0$.*

En effet, soit $x = \alpha e + u + v$ un élément quelconque de A. On a $x^2 = \alpha^2 e + \alpha u + u^2 + 2uv + v^2$, $x^2 - \alpha x = u^2 + 2uv + v^2 - \alpha v$, $x^3 - \alpha x^2 = \alpha uv + 2u(uv) + uv^2 - \alpha uv + u^2 v + 2(uv)v + v^3 - \alpha v^2 = 2u^2 v + 2uv^2 + v^3 - \alpha v^2$, $x^4 - \alpha x^3 = \alpha uv^2 + 2u(u^2 v) + 2u(uv^2) + uv^3 - \alpha uv^2 + 2(u^2 v)v + 2(uv^2)v - \alpha v^3 = u^2 v^2 + uv^3 + 2(u^2 v)v + 2(uv^2)v - \alpha v^3 = 2u^2 v^2 + 4(uv)^2 + 2uv^3 - \alpha v^3$ et $x^5 - \alpha x^4 = 4u(uv)^2 + 2u(uv^3) + 2(u^2 v^2)v + 4(uv)^2 v + 2v(uv^3)$. Mais on a : $4u(uv)^2 = -8(u(uv))(uv) = -4(u^2 v)(uv) = -4u^2 v(vu)) = -2u^2(uv^2) = 0$, $2v(uv^3) = 4v(v^2(uv)) = 4v^2(v(uv)) = 2v^2(v^2 u) = u(v^2)^2 = 0$, $4v(uv)^2 = 8(v(vu))(uv) = 4(uv^2)(uv) = 4v^2(u(uv)) - 4u(v^2(uv)) = 2v^2(u^2 v) - 2u(uv^3) = -2u(uv^3)$, et $2v(v^2 u^2) = 4v(u(uv^2)) = 4(uv)(uv^2) + 4u(v(uv^2)) = -u^2 v^3 + u^2 v^3 = 0$. Ainsi $x^5 - \alpha x^4 = 0$ ou encore $x^5 - \omega(x)x^4 = 0$ puisque $\omega(x) = \alpha$; d'où le théorème.

Théorème 4.6. *Soit A une K- algèbre de Bernstein d'ordre 2 qui est aussi une algèbre de Jordan. Alors, A est une T- algèbre spéciale.*

En effet, d'après le théorème 4.5, A est une T- algèbre. Mais le théorème 1.4 de [5] nous dit qu'une T- algèbre de Jordan est une T- algèbre spéciale si et seulement si N^2 est un idéal de A, où $N = \mathrm{Ker}(\omega)$. Il suffira alors de montrer que N^2 est un idéal. Soit donc $A = Ke \oplus U \oplus V_2$ la décomposition de A relativement à un idempotent e. On a $N = U \oplus V_2$, $N^2 = UV_2 \oplus (U^2 + V_2^2)$, $N^3 = ((UV_2)V_2 + UU^2 + UV_2^2) \oplus (U(UV_2) + U^2 V_2 + V_2 V_2^2) \subseteq N^2$ parce que $(UV_2)V_2 + UU^2 + UV_2^2 \subseteq UV_2$ et $U(UV_2) + U^2 V_2 + V_2 V_2^2 \subseteq U^2 + V_2^2$ au moyen des relations $U^2 \subseteq V_2$, $UV_2 \subseteq U$ et $V_2^2 \subseteq V_2$. De plus $eN^2 = UV_2 \subseteq N^2$, par suite $AN^2 \subseteq N^2$ et N^2 est un idéal de A ; d'où le résultat voulu.

Théorème 4.7. *Soit A une K- algèbre de Bernstein d'ordre 2 qui est à puissances associatives. Les idempotents non nuls de A sont de la forme $e + u + u^2$, où e est un idempotent de A.*

En effet, soit $x = \alpha e + u + v$ un idempotent non nul de A. D'après le lemme 1.2. de [3], on a $\omega(x) = \alpha = 1$. Aussi $x^2 = e + u + 2uv + u^2 + v^2 = x$ entraîne que $2uv = 0$ et $u^2 + v^2 = v$. Donc $v^2 = (u^2+v^2)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = 0$ car $u^4 = v^4 = 0$ et $2u^2v^2 = 4u(uv^2) = 8u((uv)v) = 0$. Par suite $v = u^2$ et $x = e + u + u^2$ d'où le théorème.

Note 4.8. Il est facile de construire une K- algèbre de Bernstein d'ordre 2, à puissances associatives. En effet, soit N une nil-algèbre commutative, à puissances associatives, de nil indice 4. L'algèbre $A = Ke \oplus N$, somme directe d'algèbres, est de Bernstein d'ordre 2 avec $V_2 = N$ et $\omega : A \to K$, $\alpha e + y \mapsto \alpha$, où e est un idempotent non nul. Pour $x = \omega(x)e + y$ dans A avec y dans N, on a $x^2 = \omega(x)^2 e + y^2$, $x^{[3]} = \omega(x)^4 e + y^{[3]} = \omega(x)^4 e$ et $x^{[4]} = \omega(x)^8 e = \omega(x)^4 x^{[3]}$. En particulier, si N est la nil-algèbre commutative à puissances associatives du contre-exemple de Suttles, l'algèbre A ci-dessus construite est une algèbre de Bernstein d'ordre 2, à puissances associatives qui n'est pas une algèbre de Jordan.

Note 4.9. La réciproque du théorème 4.5 n'est pas vraie. En effet, soit $A = Z(n,2)$ l'algèbre zygotique diploïde à n allèles et soit $D(A)$ sa dupliquée. Pour tout x dans A, on $x^3 = \omega(x)x^2$ et $y^4 = \omega_d(y)y^3$ pour tout y dans $D(A)$, soit aussi $y^5 = \omega_d(y)y^4$. Cependant, il est bien connu que $D(A)$ n'est pas à puissances associatives.

5.- Idempotents généralisés.

Soient K un corps commutatif quelconque et A une K- algèbre commutative. On appelle *idempotent généralisé* de A tout élément e vérifiant $e = e^{[k+1]}$ pour un entier $k \geq 2$ (cf. [7]). On notera $I_K^k(A)$ l'ensemble des idempotents généralisés d'ordre k.

On remarque que $(x^{[p]})^{[q+1]} = x^{[p+q]}$ pour tout x dans A et pour tous p et q entiers.

Théorème 5.1. *Soient K un corps commutatif et (A,ω) une K- algèbre de Bernstein d'ordre n. Alors $I_K^k(A) = \{e \mid e \in A, e^2 = \omega(e)e, \omega(e)^{2*k-1} = 1\} \cup \{0\}$.*

En effet, soit e un idempotent généralisé d'ordre k d'une algèbre de Bernstein d'ordre n. On a $e = e^{[k+1]} = (e^{[k+1]})^{[k+1]} = e^{[2k+1]}$ et par récurrence on établit que $e = e^{[pk+p-1]}$ pour tout entier $p \geq 1$. D'autre part $\omega(e) = \omega(e)^{2*k}$ soit $\omega(e)(1-\omega(e)^{2*k-1}) = 0$, donc $\omega(e) = 0$ ou $\omega(e)^{2*k-1} = 1$. Si $\omega(e) = 0$, $e^{[n+2]} = 0$. Il existe alors un entier $p \geq (n+3)/(k+1)$. Alors $e = e^{[p(k+1)-1]} = (e^{[n+2]})^{[m]} = 0$ où m est l'entier vérifiant $m+n+1 = p(k+1)-1$, donc $e = 0$. Supposons maintenant que $\omega(e)^{2*k-1} = 1$. Prenons d'abord $\omega(e) = 1$. D'après le lemme 1.2 de [3], $u = e^{[n+1]}$ est un idempotent de A. Pour tout entier $p \geq (n+3)/(k+1)$, on a $e = e^{[p(k+1)-1]} = (e^{[n+1]})^{[m+1]} = u^{[m+1]} = u$, où m est comme ci-dessus ; donc e est un idempotent. Enfin, si $\omega(e)$ est aussi différent de 1, en posant $u = e/\omega(e)$ on a $\omega(u) = 1$ et $u^{[k+1]} = e^{[k+1]}/\omega(e)^{2*k} = e/\omega(e) = u$. Alors, de ce qui précède, il vient que u est un idempotent. Ainsi $(e/\omega(e))^2 = e/\omega(e)$, soit $e^2 = \omega(e)e$. Réciproquement, si $e^2 = \omega(e)e$ avec $\omega(e)^{2*k-1} = 1$, alors $e/\omega(e) = (e/\omega(e))^2$ entraîne que $e/\omega(e) = (e/\omega(e))^{[k+1]} = e^{[k+1]}/\omega(e)^{2*k} = e^{[k+1]}/\omega(e)$, soit $e = e^{[k+1]}$ et e est un idempotent généralisé. D'où le résultat voulu.

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 5.2. *Pour tout entier $k \geq 1$, si $K = R$, $I_K^k(A)$ est l'ensemble des idempotents de A.*

6. Commentaire.

Si A est une algèbre stochastique décrivant une population ([8]) et y est un élément de A représentant une distribution de fréquence dans la génération initiale (dans ce cas $\omega(y) = 1$), l'élément $y^{[k]}$ représente la distribution de fréquence dans la

$k^{ième}$ génération . Dans le cas d'une algèbre de Bernstein d'ordre n, $y^{[n+2]} = y^{[n+1]}$ signifie que la population est en équilibre après $n + 1$ générations. Si A décrit une population gamétique, $D(A)$ décrit la population de type zygotique et le théorème 2.1 nous dit que $D(A)$ atteint l'équilibre à la génération suivante. Si un élément e de A est un idempotent généralisé, disons que $e = e^{[k+1]}$, alors les éléments $e^{[1]}, e^{[2]}, \ldots, e^{[k]}$ sont continuellement répétés, c'est à dire que la suite des puissances oscillent autour des k puissances de e. Puisque dans un contexte biologique $K = R$, le corollaire 5.2 nous dit que dans une population décrite par une algèbre de Bernstein d'ordre n, les oscillations coïncident avec les états d'équilibres, qui eux, sont des idempotents de l'algèbre.

Bibliographie

[1] V.M. Abraham, Linearising quadratic transformations in genetic algebra, *Proc. London Math. Soc.* (3) **40** (1980), 364–384.

[2] I.M.H. Etherington, Duplication of linear algebras, *Proc. Edimb. Math. Soc.* (2) **6** (1941), 222–230.

[3] C. Mallol, A. Micali et M. Ouattara, Sur les algèbres de Bernstein IV, *Linear Algebra and its Applications*, **158** 1–26 (1991).

[4] M. Ouattara, Algèbres de Jordan et Algèbres génétiques, *Cahiers Mathématiques* **37**, Montpellier 1988.

[5] M. Ouattara, Sur les T- algèbres de Jordan, *Linear Algebra and its Applications*, **148** (1991) 171–178.

[6] R.D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1966.

[7] M.K. Singh, Generalised idempotents in a Gonshor genetic algebra, *J. Math. Biol.* 1989.

[8] A. Wörz-Busekros, *Algebras in Genetics*, Lecture Notes in Biomathematics **36**, Springer-Verlag, New York, 1980.

6

Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington *

Abstract. Le but de cet article est d'expliciter la structure de la dupliquée d'une algèbre. On montre que, sur un corps commutatif K, si la sous-algèbre A^2 d'une K- algèbre A est une algèbre pondérée, une T- algèbre ou une algèbre génétique, alors la dupliquée $D(A)$ de l'algèbre A est respectivement, une algèbre pondérée, une T- algèbre ou une algèbre génétique. Une application de ce résultat montre que, en caractéristique différente de 2, la dupliquée de toute algèbre de Bernstein est une algèbre génétique. Enfin, sur un anneau commutatif K à élément unité, si A est une K- algèbre telle que le K- module A^2 soit projectif et si $A = A^2$ alors les algèbres de Lie des dérivations (resp. les groupes d'automorphismes) de A et de $D(A)$ sont isomorphes.

This paper concerns the duplication of an algebra in connexion with Etherington's theorem.

* Ce chapitre a fait l'objet d'une publication en collaboration à *Linear Algebra and its Applications*, **153** : 193–207 (1991)

1. Dupliquée d'une algèbre.

Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K- algèbre commutative non nécessairement associative ni ayant un élément unité et $S^2_K(A)$ la seconde puissance symétrique du K- module A (cf.[4]). Considérons la surjection K- linéaire canonique $A \otimes_K A \to S^2_K(A)$, $x \otimes y \mapsto x \cdot y$ où $x \cdot y$ désigne le produit symétrique de x par y, avec x, y dans A. La multiplication $(x \cdot y)(x' \cdot y') = xy \cdot x'y'$ (resp. $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y'$) avec x, y, x', y' parcourant A, définit sur $S^2_K(A)$ (resp. $A \otimes_K A$) une structure de K- algèbre commutative (resp. non commutative) appelée *la dupliquée commutative* (resp. *non commutative*) de A. La dupliquée de A, commutative ou non commutative, est notée $D(A)$. Toutefois, si une assertion n'est vraie que pour l'une de ces dupliquées, ceci sera précisé. Il existe bien sûr, des propriétés vraies pour la dupliquée non commutative qui ne le sont pas pour la dupliquée commutative (cf. paragraphe 8).

L'application K- linéaire $\mu : D(A) \to A^2$ définie par $x \cdot y \mapsto xy$ est un morphisme surjectif de K- algèbres et si $N(A)$ désigne son noyau, on a un isomorphisme de K- algèbres $D(A)/N(A) \simeq A^2$. De plus, $D(A)N(A) = N(A)D(A) = 0$. Si A^2 est un K- module projectif, la suite exacte de K- modules

$0 \to N(A) \to D(A) \xrightarrow{\mu} A^2 \to 0$ est scindée, c'est à dire, il existe une application K- linéaire $\eta : D(A) \leftarrow A^2$ telle que $\mu \circ \eta = id_{A^2}$. On a ainsi une application K- bilinéaire $\varphi : A^2 \times A^2 \to N(A)$ définie par $(x, y) \mapsto \eta(x)\eta(y) - \eta(xy)$ qui, jointe à la condition $D(A)N(A) = N(A)D(A) = 0$, nous permet de définir sur le produit $D(A) = A^2 \underset{s.d.}{\times} N(A)$ (s.d. pour semi-direct) une structure d'algèbre donnée par $(x, x')(y, y') = (xy, \varphi(x, y))$ pour x, y parcourant A^2 et x', y' parcourant $N(A)$. Autrement dit, $D(A)$ est une extension de l'algèbre A^2 par le A^2-bimodule trivial $N(A)$ et φ en est son "factor set" (cf.[6]).

Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant (cf.[7]) :

Théorème 1.1. *(Théorème d'Etherington). Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K- algèbre telle que l'idéal A^2 de A soit un K- module projectif. Alors $D(A) \simeq A^2 \underset{s.d.}{\times} N(A)$ est un produit semi-direct d'algèbres.*

Nous montrerons ici que les propriétés de l'algèbre $D(A)$ sont induites par celles de A^2 plutôt que de l'algèbre A comme cela apparaissait jusqu'alors dans la littérature.

Dans les paragraphes 2 et 3, K sera un corps commutatif et toute algèbre sera commutative de dimension finie sur K. D'autre part, les théorèmes 5.4 et 6.1, énoncés dans le cas de la dupliquée commutative, s'étendent au cas de la dupliquée non commutative.

2. Algèbres génétiques.

Soit A une K- algèbre. On note, pour a dans A, $R_a : A \to A$, $x \mapsto xa$, la multiplication à droite par a et $R(A)$ l'ensemble de toutes les multiplications à droite. L'algèbre enveloppante de l'ensemble $I \cup R(A)$, où I est l'application identité, est appelée l'algèbre des transformations de A et est notée $T(A)$. Chaque élément T de $T(A)$ peut s'écrire sous la forme $T = \alpha I + f(R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots)$ avec α dans K, les x_i dans A, où f est un polynôme.

On dira qu'une K- algèbre A est pondérée s'il existe un morphisme non nul d'algèbres $\omega : A \to K$. On définit les puissances principales x^k d'un élément x de A par $x^1 = x$ et $x^k = x^{k-1}x$, $k = 2, 3, \ldots$ Une K- algèbre pondérée (A, ω) est dite T- *algèbre* si les coefficients de son équation rang ne dépendent de x qu'à travers son poids $\omega(x)$, c'est à dire, qu'il existe des constantes $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ dans K telles que $x^r + \beta_1\omega(x)x^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$, pour tout x dans A. Le plus petit entier r sera appelé *le rang* de A. Une K- algèbre pondérée (A, ω) est une algèbre génétique (au sens de Schafer) si les coefficients de la fonction caractéristique $|\lambda I - T|$ de $T = \alpha I + f(R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots)$ ne dépendent des x_i qu'à travers leurs poids $\omega(x_i)$ (cf.[14]).

Lemme 2.1. *Soient A une K- algèbre et $D(A)$ sa dupliquée. Si la sous-K- algèbre A^2 est pondérée alors $D(A)$ est pondérée.*

Soit $\omega : A^2 \to K$ une pondération de A^2. Le morphisme composé ω' : $D(A) \xrightarrow{\mu} A^2 \xrightarrow{\omega} K$, nécessairement non nul, est une pondération de $D(A)$.

Théorème 2.2. *Soit A une K-algèbre telle que A^2 soit une T- algèbre de rang r. Alors $D(A)$ est une T- algèbre de rang au plus $r+1$.*

Comme A^2 est une T- algèbre de rang r, il existe des scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ dans K tels que $x^r + \beta_1\omega(x)x^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$, pour tout x dans A^2. Soit y dans $D(A)$. Puisque $\mu(y)$ est dans A^2 alors $(\mu(y))^r + \beta_1\omega(\mu(y))(\mu(y))^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1}\omega(\mu(y))^{r-1}\mu(y) = 0$. Mais μ étant un morphisme d'algèbres, on a $\mu[y^r + \beta_1\omega'(y)y^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1}\omega'(y)^{r-1}y] = 0$, i.e., le crochet est dans $N(A)$ et comme $D(A)N(A) = 0$ alors $y^{r+1} + \beta_1\omega'(y)y^r + \cdots + \beta_{r-1}\omega'(y)^{r-1}y^2 = 0$, pour tout y dans $D(A)$. Ainsi $D(A)$ est une T- algèbre de rang $\leq r+1$.

Théorème 2.3. *Soit A une K- algèbre. Si A^2 est une algèbre génétique alors $D(A)$ est une algèbre génétique.*

Soit A une K- algèbre de dimension n. On a $\dim_K D(A) = \frac{1}{2}n(n+1)$ et si $\dim_K N(A) = m$ alors $\dim_K A^2 = \frac{1}{2}n(n+1) - m = p$. Soit $y = x + u$ dans $D(A)$, avec x dans A^2 et u dans $N(A)$. On note R_y^* la multiplication à droite par y dans $D(A)$. On a $R_y^*(z+v) = (z+v)(x+u) = zx + \varphi(z,x) = (R_x^\circ + g_x)(z)$, où R_x° est la multiplication à droite par x dans A^2 et $g_x : A^2 \to N(A), z \mapsto \varphi(z,x)$ est une application K- linéaire. Par conséquent, dans une base de $D(A) = A^2 \oplus N(A)$ la matrice de R_y^* est de la forme

$$R_y^* = \begin{pmatrix} R_x^\circ & 0 \\ g_x & 0 \end{pmatrix},$$

où R_x° et g_x sont des matrices $p \times p$ et $m \times p$ respectivement. Alors, pour tout polynôme f, on a

$$f(R_{y_1}^*, R_{y_2}^*, \ldots) = \begin{pmatrix} f(R_{x_1}^\circ, R_{x_2}^\circ, \ldots) & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

quels que soient $y_i = x_i + u_i$ avec x_i dans A^2 et u_i dans $N(A)$. Soit $T^* = \alpha I^* + f(R_{y_1}^*, R_{y_2}^*, \ldots)$ un élément de $T(D(A))$. De ce qui précède, il vient que $|\lambda I^* - T^*| = (\lambda - \alpha)^m \left|(\lambda - \alpha)I - f(R_{x_1}^\circ, R_{x_2}^\circ, \ldots)\right| = (\lambda - \alpha)^m |\lambda I - T^\circ|$ où

$T^\circ = \alpha I + f(R^\circ_{x_1}, R^\circ_{x_2}, \ldots)$ est dans $T(A^2)$ et I est la matrice identité de A^2. Ainsi, du fait que l'algèbre A^2 est génétique, la fonction caractéristique de T^* ne dépend des y_i qu'à travers leurs poids $\omega'(y_i) = \omega(\mu(y_i)) = \omega(x_i)$. Donc $D(A)$ est une algèbre génétique.

En fait, cette démonstration est due à Schafer (cf.[14, théorème 3]), mais dans son théorème il avait supposé que A est une algèbre génétique.

Une K- algèbre pondérée (A, ω) est une T- ***algèbre spéciale*** si $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est nilpotent et les sous-algèbres N^k, définies inductivement par $N^1 = N$, $N^k = NN^{k-1}$ pour $k \geq 2$, sont des idéaux de A.

Toute T- algèbre spéciale est une algèbre génétique (cf. [14, théorème 2]).

3. Algèbres de Bernstein.

Une K- algèbre commutative pondérée (A, ω) est une algèbre de Bernstein si $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$, pour tout x dans A (cf. [8]). En caractéristique différente de 2, toute algèbre de Bernstein A admet la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$, où e est un idempotent non nul de A, $U = \{x \mid x \in A, ex = \frac{1}{2}x\}$, $V = \{x \mid x \in A, ex = 0\}$ et les composantes U et V sont reliées par les relations $U^2 \subseteq V$, $UV \subseteq U$, $V^2 \subseteq U$, $UV^2 = 0$ (cf. [12], [16] ou [17]).

Une algèbre de Bernstein A est dite nucléaire si $A^2 = A$, ce qui équivaut à $V = U^2$, pour tout choix de l'idempotent e dans A. Pour toute algèbre de Bernstein A, la sous-algèbre A^2 est une algèbre de Bernstein nucléaire. Dans [11], les auteurs ont démontré que pour toute algèbre de Bernstein nucléaire A, l'annulateur de $N = \mathrm{Ker}(\omega)$, $\mathrm{Ann}(N)$, est un idéal de A avec $V^2 \subseteq \mathrm{Ann}(N)$ et $(uv_1)v_2 + (uv_2)v_1$ est dans $\mathrm{Ann}(N)$, quels que soient u dans U et v_1, v_2 dans V. Si (A, ω) est une algèbre de Bernstein, B une K- algèbre quelconque et $f : A \to B$ un morphisme non nul d'algèbres, alors $(f(A), \omega')$ est une algèbre de Bernstein avec $\omega'(f(x)) = \omega(x)$, pour tout x dans A et $\overline{N} = \mathrm{Ker}(\omega') = f(N)$.

Théorème 3.1. *Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Toute K- algèbre de Bernstein nucléaire est une T- algèbre spéciale satisfaisant* *l'équation* $x^4 - \frac{3}{2}\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^2 = 0$.

Soit A une K- algèbre de Bernstein nucléaire. Considérons l'algèbre de Bernstein quotient $B = A/\text{Ann}(N)$. Alors, pour tout $\overline{x}$ dans B, on a $\overline{x}^3 - \omega'(\overline{x}))\overline{x}^2 = 0$, où $\omega' : B \to K$ est une pondération de B, i.e., si $\pi : A \to B$ désigne le morphisme canonique de K- algèbres de Bernstein alors $\omega'(\pi(x)) = \omega(x)$, pour tout x dans A (cf. [11, théorème 3.1]). D'après un résultat dû à Abraham (cf. [1]), toute T- algèbre de rang ≤ 3 est une T- algèbre spéciale. Par conséquent B est une T- algèbre spéciale, donc $\overline{N} = \pi(N)$ est nilpotent, i.e., il existe un entier $k \geq 2$ tel que $\overline{N}^k = 0$. Comme π est un morphisme d'algèbres, on a $(\pi(N))^k = \pi(N^k) = 0$ donc $N^k \subseteq \text{Ker}(\pi) = \text{Ann}(N)$ soit $N^{k+1} = 0$. Puisque N est nilpotent, A est une T- algèbre spéciale (cf. [16, 3, proposition 1]). Soit maintenant x dans A. On a $(\pi(x))^3 - \omega'(\pi(x))\pi(x)^2 = \pi(x^3 - \omega(x)x^2) = 0$, donc $x^3 - \omega(x)x^2 \in \text{Ann}(N)$, pour tout x dans A. Soient $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce de A relative à un idempotent e et $x = \omega(x)e + u + v$ un élément de A. On a $x^3 - \omega(x)x^2 = -\frac{1}{2}\omega(x)v^2 + u^2v + 2(uv)v$ dans U et $(x^3 - \omega(x)x^2)x = \omega(x)e(x^3 - \omega(x)x^2) + (u+v)(x^3 - \omega(x)x^2) = \omega(x)e(x^3 - \omega(x)x^2) = \frac{1}{2}\omega(x)(x^3 - \omega(x)x^2)$, donc $x^4 - \frac{3}{2}\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^2 = 0$, pour tout x dans A.

La première assertion du théorème 3.1 est due à Odoni et Stratton (cf. [11]). Le théorème lui-même généralise le théorème 1 de [8].

Théorème 3.2. *Si K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A, ω) une K- algèbre de Bernstein, la dupliquée de A est une algèbre génétique vérifiant l'équation* $x^5 - \frac{3}{2}\omega(x)x^4 + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^3 = 0$.

Si (A, ω) est une algèbre de Bernstein, la sous-algèbre A^2 est de Bernstein nucléaire. D'après le théorème 3.1, l'algèbre A^2 est une T- algèbre spéciale donc une algèbre génétique. Le théorème 2.3 nous dit alors que $D(A)$ est une algèbre génétique. La dernière assertion du théorème découle du théorème 2.2.

On peut se demander si le théorème 3.2 peut être amélioré. La remarque qui suit nous laisse peu d'espoir. En effet, l'algèbre zygotique $Z(n+1, 2)$ de l'héritage mendélien simple est une algèbre de Bernstein satisfaisant l'équation $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Sa dupliquée, l'algèbre des couples (en anglais : "copular algebra") n'est ni une algèbre de Bernstein, ni une T- algèbre spéciale.

4. Duplication et extension d'algèbres.

Il se pose ici le problème suivant : si $\mathcal{C}$ désigne une classe d'algèbres et si A est une algèbre quelconque, à quelles conditions la dupliquée de A appartiendra-t- elle à $\mathcal{C}$?

On a vu (cf. [1]) que $D(A)$ est une extension de l'algèbre A^2 par le A^2-bimodule trivial $N(A)$ et que l'application bilinéaire $\varphi : A^2 \times A^2 \to N(A)$, $(x,y) \mapsto \eta(x)\eta(y) - \eta(xy)$ est le "factor set" de l'extension.

Lemme 4.1. *Soient $\mathcal{C}$ une classe d'algèbres et A une K- algèbre où K est un anneau commutatif à élément unité. L'algèbre $D(A)$ est dans $\mathcal{C}$ si et seulement si (1) l'algèbre A^2 est dans $\mathcal{C}$ et (2) φ est un 2-cocycle de A^2 à coefficients dans $N(A)$ (cf. [6]).*

Examinons ceci sur quelques classes d'algèbres.

(i) *Algèbres associatives.* Une algèbre est dite associative si elle vérifie $x(yz) = (xy)z$. La condition de 2-cocycle est donnée par $xh(y,z) + h(x,yz) - h(x,y)z - h(xy,z) = 0$. Donc, pour une algèbre A, l'algèbre $D(A)$ est associative si et seulement si A^2 est une algèbre associative et $\varphi(x,yz) = \varphi(xy,z)$, quels que soient x, y, z dans A^2.

Théorème 4.2. *Soient K un corps commutatif, A une K- algèbre de dimension finie et $D(A)$ sa dupliquée. Si $\dim_K A^2 = 1$ alors $D(A)$ est associative.*

L'hypothèse $\dim_K A^2 = 1$ entraîne que la sous-algèbre A^2 est associative. De plus, de la bilinéarité de φ, il vient que $\varphi(x,yz) = \varphi(xy,z)$, quels que soient x, y, z dans A^2.

(ii) *Algèbres de Jordan.* Une K- algèbre est dite de Jordan si elle vérifie $xy = yx$ et $x^2(yx) = (x^2y)x$. La condition de 2-cocycle est donnée par $h(x,y) = h(y,x)$

et $(h(x,x)y)x + h(x^2,y)x + h(x^2y,x) - x^2h(y,x) - h(x,x)(yx) - h(x^2,yx) = 0$. Donc, pour une algèbre commutative A, la dupliquée commutative $D(A)$ est de Jordan si et seulement si la sous-algèbre A^2 est de Jordan, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ et $\varphi(x^2y,x) = \varphi(x^2,yx)$, quels que soient x, y dans A^2.

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Une K- algèbre de Bernstein (A,ω) est dite triviale si $N^2 = 0$, où $N = \mathrm{Ker}(\omega)$. Si $A = Ke \oplus U \oplus V$ est la décomposition de Peirce de A relative à un idempotent e, la table de multiplication de A s'écrit $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$ pour tout u dans U, les autres produits étant nuls. L'algèbre $A^2 = Ke \oplus U$ est une algèbre élémentaire, i.e., elle vérifie $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x)$ quels que soient x, y dans A^2. Soient x et y dans A^2. On a $x^2 = \omega(x)x$ et $x^2(yx) = (x^2y)x$, donc A^2 est de Jordan. De même $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ et $\varphi(x^2y,x) = \varphi(x^2,yx)$, quels que soient x, y dans A^2, d'où la proposition suivante :

Proposition 4.3. *La dupliquée commutative de toute algèbre de Bernstein triviale est une algèbre de Jordan.*

Il existe des algèbres de Jordan dont la dupliquée n'est pas de Jordan (exemple : l'algèbre zygotique $Z(n+1,2)$). Il existe aussi des algèbres qui ne sont pas de Jordan mais dont la dupliquée est de Jordan.

Exemple 4.4. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et $A = Ke \oplus U \oplus V$ une algèbre de Bernstein vérifiant $U^2 = 0$ et $V^2 \neq 0$. Alors A n'est pas de Jordan, sinon on aurait $V^2 = 0$ (cf. [12, lemme 6.2.3]). La sous-algèbre $A^2 = Ke \oplus U$ est une algèbre élémentaire, donc aussi de Jordan. De $x^2 = \omega(x)x$, pour tout x dans A^2 et du fait que φ est bilinéaire symétrique, il vient que $\varphi(x^2y,x) = \varphi(x^2,yx)$, quels que soient x, y dans A^2. Donc $D(A)$ est une algèbre de Jordan.

5. Dérivations.

Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K- algèbre commutative et $D(A)$ sa dupliquée commutative. On sait que, pour tout morphisme $K \to L$

d'anneaux commutatifs à élément unité, il existe un isomorphisme de L-algèbres $D(A) \otimes_K L \simeq D(A \otimes_K L)$ et, en particulier, pour tout idéal premier $\wp$ de K, un isomorphisme de $K_\wp$-algèbres $D(A)_\wp \simeq D(A_\wp)$. De même, on a un isomorphisme de L-algèbres $A^2 \otimes_K L \simeq (A \otimes_K L)^2$ et pour tout idéal premier $\wp$ de K, un isomorphisme de $K_\wp$-algèbres $(A^2)_\wp \simeq (A_\wp)^2$. La suite exacte de K- modules

$0 \to N(A) \to D(A) \to A^2 \to 0$ nous fournit une suite exacte de $K_\wp$-modules

$0 \to N(A_\wp) \to D(A_\wp) \to (A_\wp)^2 \to 0$ pour tout idéal premier $\wp$ de K. En particulier, si A^2 est K- projectif, le scindage $D(A) \simeq A^2 \underset{s.d.}{\times} N(A)$ nous fournit un scindage $D(A_\wp) \simeq (A_\wp)^2 \underset{s.d.}{\times} N(A_\wp)$ pour tout idéal premier $\wp$ de K. Comme la dupliquée d'une zéro-algèbre est une zéro-algèbre on supposera, par la suite, que l'on a toujours $A^2 \neq 0$.

Lemme 5.1. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K- algèbre commutative telle que A^2 soit un K- module projectif. Alors* $\mathrm{Ann}(D(A)) = N(A)$ *et pour toute K- dérivation d de $D(A)$, $d(N(A)) \subseteq N(A)$.*

En effet, la condition $D(A)N(A) = 0$ entraîne, sans autre hypothèse, que $N(A) \subseteq \mathrm{Ann}(D(A))$. Réciproquement, supposons que A^2 soit un K- module projectif donc, par localisation, que A^2 soit libre et soit (e_i) une base de A^2 sur K. Si $x \cdot y$ est dans $\mathrm{Ann}(D(A))$ alors $xy = \sum_i \alpha_i e_i$ (somme finie) où les α_i sont dans K. Or, on sait que pour tout élément $x' \cdot y'$ dans $D(A)$ on a $(x \cdot y)(x' \cdot y') = xy \cdot x'y' = 0$ donc pour tout indice j, $xy \cdot e_j = \sum_i \alpha_i e_i . e_j = 0$ ce qui entraîne que $\alpha_i = 0$ pour tout i. Ceci nous montre que $x \cdot y$ est dans $N(A)$ d'où l'inclusion $\mathrm{Ann}(D(A)) \subseteq N(A)$. Finalement, si $x \cdot y$ est dans $N(A)$, pour tout élément $x' \cdot y'$ dans $D(A)$ et pour toute K- dérivation d de $D(A)$ on a $0 = d((x \cdot y)(x' \cdot y')) = d(x \cdot y)(x' \cdot y') + (x \cdot y)d(x' \cdot y') = d(x \cdot y)(x' \cdot y')$ donc $d(x \cdot y)$ est dans $\mathrm{Ann}(D(A)) = N(A)$. Le lemme est démontré.

Pour toute K- dérivation d de A, on note $\widetilde{d} : D(A) \to D(A)$ l'application K-linéaire définie par $x \cdot y \mapsto d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$. Il est clair que $\widetilde{d}$ est une K- dérivation de $D(A)$ et que l'application K- linéaire $\psi : Der_K(A) \to Der_K(D(A))$ définie par $d \mapsto \widetilde{d}$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Lemme 5.2. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K- algèbre commutative telle que A^2 soit un K- module projectif. Alors :*

(i) pour toute K- dérivation d de $D(A)$ l'application K- linéaire composée $\pi(d) = \mu \circ d \circ \eta : A^2 \to A^2$ est une K- dérivation de A^2. De plus, l'application K- linéaire $\pi : Der_K(D(A)) \to Der_K(A^2)$ est un morphisme surjectif d'algèbres de Lie.

(ii) Pour toute K- dérivation d de A, on a $\pi(\widetilde{d}) = d_{|A^2}$.

En effet, quels que soient les éléments x, y dans A^2 on a $\pi(d)(xy) = \mu(d(\eta(xy))) = \mu(d(\eta(xy) - \eta(x)\eta(y))) + \mu(d(\eta(x)\eta(y))) = \mu(d(\eta(x))\eta(y) + \eta(x)d(\eta(y))) = \pi(d)(x)y + x\pi(d)(y)$. Pour montrer que π est un morphisme d'algèbres de Lie il suffit de montrer que quelles que soient les dérivations d, d' de $D(A)$ on a $\pi(d) \circ \pi(d') = \pi(d \circ d')$. Or, pour tout $x = \sum\limits_i x_i' x_i''$ dans A^2 on peut prendre $\eta(x) = \sum\limits_i x_i' \cdot x_i''$ donc $\pi(d)(\pi(d')(x)) = \pi(d)\big(\mu(d'(\sum\limits_i x_i' \cdot x_i''))\big)$ et si l'on pose $d'(\sum\limits_i x_i' \cdot x_i'') = \sum\limits_j y_j' \cdot y_j''$ alors $\pi(d) \circ \pi(d')(x) = \pi(d)(\sum\limits_j y_j' y_j'') = \mu \circ d(\eta(\sum\limits_j y_j' y_j'')) = \mu \circ d(\sum\limits_j y_j' \cdot y_j'') = \mu \circ d \circ d'(\sum\limits_i x_i' . x_i'') = \mu \circ d \circ d' \circ \eta(x) = \pi(d \circ d')(x)$. La surjectivité de π découle de [10, lemme 6.1.5]. Pour ce qui est de (ii), notons que pour toute K- dérivation d de A et pour tout élément $x = \sum\limits_i x_i' x_i''$ dans A^2 on a $\pi(\widetilde{d}) = \mu \circ \widetilde{d}(\eta(x)) = \mu \circ \widetilde{d}(\sum\limits_i x_i' \cdot x_i'') = \sum\limits_i \mu(d(x_i') \cdot x_i'' + x_i' \cdot d(x_i'')) = \sum\limits_i (d(x_i')x_i'' + x_i' d(x_i'')) = d(\sum\limits_i x_i' x_i'') = d(x)$.

Corollaire 5.3. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K- algèbre commutative telle que le K- module A^2 soit projectif. Si $A = A^2$ le morphisme d'algèbres de Lie $\psi : Der_K(A) \to Der_K(D(A))$ est injectif.*

Ceci est une conséquence immédiate de la condition (ii) du lemme 5.2.

Théorème 5.4. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K-algèbre commutative telle que le K- module A^2 soit projectif. Si $A = A^2$, le morphisme d'algèbres de Lie $\psi : Der_K(A) \to Der_K(D(A))$ est un isomorphisme.*

En effet, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} Der_K(A) & \longrightarrow & Der_K(A^2) \\ \psi \downarrow & & \downarrow id \\ Der_K(D(A)) & \xrightarrow{\pi} & Der_K(A^2) \end{array}$$

où $Der_K(A) \to Der_K(A^2)$, $d \mapsto d_{|A^2}$ est le morphisme de restriction. Si $A = A^2$ on a $\pi \circ \psi = id$ et montrons que l'on a aussi $\psi \circ \pi = id$. En effet, pour toute K- dérivation d de $D(A)$ et quels que soient les éléments $x = \sum_i x'_i x''_i$ et $y = \sum_j y'_j y''_j$ dans $A^2 = A$ on a

$$\begin{aligned} \psi \circ \pi(d)(x \cdot y) &= x.\pi(d)(y) + \pi(d)(x).y \\ &= (\sum_i x'_i x''_i).\mu(d(\sum_j y'_j \cdot y''_j)) + \mu(d(\sum_i x'_i \cdot x''_i)) \cdot (\sum_j y'_j y''_j) \\ &= (\sum_i xi' \cdot xi'')d(\sum_j y'_j \cdot y''_j) + d(\sum_i x'_i \cdot x''_i)(\sum_j y'_j \cdot y''_j) \\ &= d((\sum_i x'_i \cdot x''_i)(\sum_j y'_j \cdot y''_j)) = d((\sum_i x'_i x''_i) \cdot (\sum_j y'_j y''_j)) \\ &= d(x \cdot y) \end{aligned}$$

Remarques 5.5. (i) Le théorème 5.4 est démontré dans la littérature sous différentes hypothèses. Dans [5], l'Auteur le démontre pour une algèbre commutative sur un corps de caractéristique différente de 2 et dans [9, théorème 2.1.1], les Auteurs le démontrent en supposant que l'algèbre soit un module plat sur un anneau commutatif à élément unité dans lequel l'homothétie définie par 2 est injective. Plus récemment, dans [13, proposition], l'Auteur montre que sur

un anneau commutatif K à élément unité, si A est une K- algèbre vérifiant la condition $A^2 = A$, l'application K- linéaire $Der_K(A) \to Der_K(D(A))$, $d \mapsto \widetilde{d}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie si et seulement si, pour toute dérivation d de $D(A)$, on a $d(N(A)) \subseteq N(A)$. Or, le théorème 5.4., nous dit que, pour cela, il suffit que le K- module A^2 soit projectif ce qui est toujours le cas si K est un corps. Par conséquent l'hypothèse que A a un idempotent est superflue dans [13, corollaire]. Nous avions déjà obtenu l'essentiel des résultats du paragraphe 5 dans [10, théorème 6.1.6] par une méthode différente de celle suivie ici.
(ii) Disons enfin que le théorème 4.2 est la version, en dimension quelconque, du théorème 2 de [2]. En effet, si A est une algèbre non nécessairement commutative de dimension 2 sur un corps K avec la table de multiplication dans une base $\{u_1, u_2\}$ donnée par $u_iu_j = \alpha_{ij1}u_1 + \alpha_{ij2}u_2$ avec $\alpha_{ij1} + \alpha_{ij2} = 0$ alors $u_iu_j = \alpha_{ij1}(u_1 - u_2)$, i.e., la sous-$K$- algèbre A^2 est de dimension ≤ 1. Donc $D(A)$ est associative.

L'exemple suivant nous montre que la condition $A^2 = A$ est essentielle.

Exemple 5.6. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A, ω) une K- algèbre de Bernstein triviale de type $(1 + r, s)$. On sait que $Der_K(A) \simeq K^r \underset{s.d.}{\times} M_r(K) \times M_s(K)$ où $M_t(K)$ est l'algèbre de Lie des matrices $t \times t$ à coefficients dans K. On suppose que $s \geq 1$ sinon on aurait $A = G(n, 2)$, l'algèbre élémentaire de dimension $n = 1 + r + s$ sur K et $A^2 = A$. On a $A^2 = G(1 + r, 2)$ et $Der_K(A^2) \simeq K^r \underset{s.d.}{\times} M_r(K)$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de A sur K avec $e_1^2 = e_1$, $e_1e_i = \frac{1}{2}e_i$, $i = 2, \ldots, r+1$, les autres produits étant nuls, la base correspondante dans $D(A)$ est $\{e_1, \ldots, e_{r+1}, e_{1r+2}, \ldots, e_{1n}, e_{22}, \ldots, e_{ij}, \ldots, e_{nn}\}$ $(2 \leq i \leq j \leq n)$, avec pour table de multiplication $e_1^2 = e_1$, $e_1e_i = \frac{1}{2}e_i$, $e_ie_j = e_je_i = \frac{1}{4}e_{ij}$, $2 \leq i \leq j \leq r+1$, les autres produits étant nuls. Les e_{1k} $(r + 2 \leq k \leq n)$ et e_{ij} $(2 \leq i \leq j \leq n)$ forment une base de $N(A)$. Par conséquent $\dim_K N(A) = s + \frac{n(n-1)}{2}$ et φ a pour valeurs, $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) = \frac{1}{4}e_{ij}$ $(2 \leq i \leq j \leq r+1)$ et $\varphi(e_k, e_l) = 0$ pour tout autre couple d'entiers (k, l). Les calculs nous montrent que les K- dérivations de $D(A)$ sont les applications K- linéaires $d : D(A) \to D(A)$ définies par

$$d(e_1) = \sum_{k=2}^{r+1} \alpha_k e_k,\ d(e_i) = \sum_{k=2}^{r+1} (\beta_{ki} e_k + \frac{1}{2}\alpha_k e_{ik}),$$

$$d(e_{ij}) = \sum_{k=2}^{r+1} (\beta_{ki} e_{kj} + \beta_{kj} e_{ki}), \text{ pour } 2 \leq i \leq j \leq r+1 \text{ et}$$

$$d(e_{pq}) = \sum_{2 \leq k \leq l \leq n} \gamma_{kl,pq} e_{kl} + \sum_{r+1 \leq k \leq n} \mu_{pq,k} e_{1k} \quad \text{pour tout autre couple}$$

d'entiers (p,q), où les paramètres α_k, β_{ki}, $\gamma_{kl,pq}$ et $\mu_{pq,k}$ sont dans K. Donc l'algèbre de Lie $Der_K(D(A))$ est de dimension $r(r+1)(\frac{n(n-1)}{2} + s)(\frac{n(n-1)}{2} + s - \frac{r(r+1)}{2})$. En particulier, pour $n = 3$, $r = s = 1$, on a les isomorphismes de K- espaces vectoriels $Der_K(D(A)) \simeq K^{24}$, $Der_K(A) \simeq K^3$ et $Der_K(A^2) \simeq K^2$.

6. Note sur les automorphismes.

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent concernant les dérivations restent encore vrais, mutatis mutandis, pour les automorphismes. Ainsi, à titre d'exemple, nous allons donner, pour les automorphismes, le correspondant du théorème 5.4.

Théorème 6.1. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K-algèbre commutative telle que le K- module A^2 soit projectif. Si $A = A^2$ le morphisme de groupes $Aut_K(A) \to Aut_K(D(A))$, $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ où $\tilde{\sigma}(x \cdot y) = \sigma(x).\sigma(y)$ quels que soient x, y dans A, est un isomorphisme.*

7. Note sur le foncteur D.

Soient K un anneau commutatif à élément unité et A et B deux K- algèbres. Il est clair que si $D(A)$ est isomorphe à $D(B)$, les sous-algèbres A^2 et B^2 sont isomorphes mais A et B peuvent ne pas l'être. En effet, soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, A et B deux K- algèbres de Bernstein dont les tables de multiplication dans une base $\{e, e_1, e_2\}$ sont données respectivement par $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, les autres produits étant nuls et $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, $e_2^2 = e_1$, les autres produits étant nuls. On voit aisément que les sous-algèbres A^2 et B^2 sont isomorphes. Les tables de multiplication de $D(A)$ et $D(B)$, dans la base $\{e.e, e.e_1, e.e_2, e_1.e_1, e_1.e_2, e_2.e_2\}$, sont données respectivement par $(e.e)^2 = e.e$, $(e.e)(e.e_1) = \frac{1}{2}e.e_1$, $(e.e_1)^2 = \frac{1}{4}e_1.e_1$, les autres produits étant nuls et $(e.e)^2 = e.e$, $(e.e)(e.e_1) = \frac{1}{2}e.e_1$, $(e.e)(e_2.e_2) = e.e_1$, $(e.e_1)^2 = \frac{1}{4}e_1.e_1$, $(e.e_1)(e_2.e_2) = \frac{1}{2}e_1.e_1$, $(e_2.e_2)^2 = e_1.e_1$, les autres produits étant nuls. Si l'on remplace (changement de base) dans la base de $D(B)$ le vecteur $e_2.e_2$ par $e_2.e_2 - 2e.e_1$ on voit immédiatement que les dupliquées $D(A)$ et $D(B)$ sont isomorphes. Néanmoins, les algèbres A et B ne le sont pas. En effet, la K- algèbre A est de Jordan tandis que la K- algèbre B ne l'est pas, car sinon on aurait $V^2 = 0$ où $V = Ke_2$ (cf. [12]), donc A et B ne sont pas isomorphes. Ceci nous montre, en particulier, que **le foncteur duplication D n'est pas pleinement fidèle.**

On a aussi un exemple d'une algèbre, en occurrence B, qui n'est pas de Jordan mais dont la dupliquée $D(B)$ est de Jordan (cf. proposition 4.3).

8. Note sur la dupliquée.

Comme nous l'a bien fait remarquer le Referee, il existe des résultats valables pour la dupliquée non commutative qui ne le sont pas pour la dupliquée commutative. Par exemple, il existe un isomorphisme de K- algèbres, où K est un anneau commutatif à élément unité, entre la dupliquée non commutative du produit tensoriel de deux K- algèbres A et B et le produit tensoriel des dupliquées non commutatives $D(A)$ et $D(B)$ de A et B respectivement, i.e., $D(A \otimes_K B) \simeq D(A) \otimes_K D(B)$, isomorphisme de K- algèbres. Or, cet isomorphisme n'est pas, en général, vrai pour la dupliquée commutative. Nous montrerons, par la suite, que pour la dupliquée commutative, il existe un morphisme surjectif de K- algèbres $D(A \otimes_K B) \to D(A) \otimes_K D(B)$ et nous donnerons une description du noyau de ce morphisme.

On rappelle, tout d'abord, que si A et B sont deux K- algèbres, le K-module $A \otimes_K B$ est muni d'une structure naturelle de K- algèbre, l'algèbre produit tensoriel, à savoir, $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$, quels que soient x, x' dans A et y, y' dans B. La seconde puissance symétrique $S_K^2(A)$ est ici munie de sa structure d'algèbre dupliquée commutative de la K- algèbre A, pour toute K- algèbre A.

L'application $(A\times B)\times(A\times B) \to S^2_K(A)\otimes_K S^2_K(B)$ définie par $((x,y),(x',y'))$ $\mapsto (x.x')\otimes(y.y')$ est K- linéaire en chaque variable donc elle induit une application K- bilinéaire symétrique $(A\otimes_K B)\times(A\otimes_K B) \to S^2_K(A)\otimes_K S^2_K(B)$ définie par $(x\otimes y, x'\otimes y') \mapsto (x.x')\otimes(y.y')$ et , par suite, une application K- linéaire unique $\varphi : S^2_K(A\otimes_K B) \to S^2_K(A)\otimes_K S^2_K(B)$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
(A\otimes_K B)\times(A\otimes_K B) & \longrightarrow & S^2_K(A)\otimes_K S^2_K(B) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\
S^2_K(A\otimes_K B) & \xrightarrow{\varphi} & S^2_K(A)\otimes_K S^2_K(B)
\end{array}$$

De plus, φ est une application K- linéaire surjective car elle vérifie $\varphi((x\otimes y).(x'\otimes y')) = (x.x')\otimes(y.y')$, quels que soient x, x' dans A et y, y' dans B. Finalement, φ est un morphisme de K- algèbres pour les structures d'algèbre dupliquée sur $S^2_K(A\otimes_K B)$ et d'algèbre produit tensoriel de $S^2_K(A)\otimes_K S^2_K(B)$. Il s'en suit (cf. [4], chapitre II, paragraphe 3, n° 6, corollaire 1 de la proposition 6) que Ker(φ) est l'idéal de $S^2_K(A\otimes_K B)$ engendré par les éléments de la forme $(x\otimes y).(x'\otimes y') - (x\otimes y').(x'\otimes y)$ pour x, x' parcourant A et y, y' parcourant B et ce noyau n'est pas, en général, nul. Supposons, par exemple, que A et B soient des K- algèbres libres de bases $\{e_1,\ldots,e_m\}$ et $\{f_1,\ldots,f_n\}$ respectivement. Une base de $S^2_K(A\otimes_K B)$ est formée par les vecteurs $(e_i\otimes f_k).(e_j\otimes f_l)$ avec $1\le i<j\le m$ et quels que soient les indices k, l dans l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ plus les vecteurs $(e_i\otimes f_k).(e_i\otimes f_l)$ pour $i=1,\ldots,m$ et $1\le k\le l\le n$ et le noyau de φ est l'idéal de $S^2_K(A\otimes_K B)$ engendré par les vecteurs $(e_i\otimes f_k).(e_j\otimes f_l) - (e_i\otimes f_l).(e_j\otimes f_k)$ pour $1\le i<j\le m$ et $1\le k<l\le n$, c'est à dire, au total $\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$ générateurs libres. Dans ce cas, il existe un isomorphisme de K- modules libres $S^2_K(A\otimes_K B)\simeq (S^2_K(A)\otimes_K S^2_K(B))\oplus$Ker($\varphi$) et, en général, Ker($\varphi$) $\neq 0$. Par exemple, si $m=n=2$, Ker(φ) est engendré par le vecteur $(e_1\otimes f_1).(e_2\otimes f_2) - (e_1\otimes f_2).(e_2\otimes f_1)$.

Bibliographie

[1] V.M. Abraham, A note on train algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **20** (1976), 53–58.

[2] A.H. Boers, Duplication of algebras, *Indagationes Math.* **44** (1982), 121–125.

[3] A.H. Boers, Duplication of algebras II, *Indagationes Math.* **50** (1988), 235–244.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre* I, chapitres 1 à 3, Hermann, Paris 1970.

[5] R. Costa, On the derivation algebra of zygotic algebras for polyploidy with multiple alleles, *Bol. Soc. Bras. Mat.* (1) **14** (1983), 63–80.

[6] S. Eilenberg, Extensions of general algebras, *Ann. Soc. Pol. Math.* **21** (1948), 125–134.

[7] I.M.H. Etherington, Duplication of linear algebras, *Proc. Edinburg Math. Soc.* (2) **6** (1941), 222–230.

[8] Ph. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc.* (2) **9** (1975), 613–623.

[9] A. Micali et al., Dérivations dans les algèbres gamétiques III, *Linear Algebra and its Applications*, **113** (1989), 79–99.

[10] A. Micali et M. Ouattara, Algèbres de Jordan génétiques, *Annales de l'Université de Clermont II*, **43**, serie A, 113–125 (1991).

[11] R.W.K. Odoni and A.E. Stratton, Structure of Bernstein algebras, in *Algèbres Génétiques*, Cahiers Mathématiques **38**, Montpellier 1989, 117–125.

[12] M. Ouattara, Algèbres de Jordan et algèbres génétiques, *Cahiers Mathématiques* **37**, Montpellier 1988.

[13] L.A. Peresi, A note on duplication of algebras, *Linear Algebra and its Applications* **104** (1988), 65–69.

[14] R.D. Schafer, Structure of genetic algebras, *Amer. J. Math.* **71** (1949),121–135.

[15] R.D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1966.

[16] S. Walcher, Bernstein algebras which are Jordan algebras, *Arch. Math.* **50** (1988), 218–222.

[17] A. Wörz-Busekros, Bernstein algebras, *Arch. Math.* **48** (1987), 338–398.

7

Sur la dupliquée d'une algèbre (*)

Abstract. In this paper we revisit duplication of algebras and Etherington's theorems that we call here Etherington's morphisms. As a consequence of this construction, we show how to construct derivations and automorphisms of the duplicate if we know these objects for the original algebra. The study of nilpotency and Albert's radical of the duplicate shows a very curious result : the duplicate of an algebra is never semisimple unless the algebra coincides with the ground field. Finaly, we give some results about Boers' generalized associativity for the duplicate.

Sommaire. Dans ce papier, nous reprenons l'étude de la dupliquée d'une algèbre en liaison avec le théorème de Etherington. Comme conséquence, nous montrons comment calculer les dérivations et automorphismes de la dupliquée d'une algèbre quand on connait ces mêmes objets sur l'algèbre de départ. L'étude de la nilpotence et du radical d'Albert de la dupliquée nous entraîne vers un bien curieux résultat, à savoir que, la dupliquée d'une algèbre n'est jamais semi-simple, à moins que l'algèbre coïncide avec le corps de base. Finalement, nous donnons quelques résultats concernant l'associativité généralisée de Boers pour la dupliquée.

(*) Ce chapitre a fait l'objet d'une publication en collaboration soumise à *Bulletin de Société Mathématique de Belgique*,

1. La dupliquée d'une algèbre.

1.1. Propriété universelle. Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K- algèbre. On dira qu'une algèbre D est une dupliquée de A s'il existe une application quadratique $f : A \to D$ telle que si $b_f : A \times A \to D$ est l'application K- bilinéaire symétrique associée à f définie par $(x,y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$, alors $b_f(x,y)b_f(x',y') = b_f(xy, x'y')$ quels que soient x, y, x', y' dans A. De plus, pour toute application quadratique $g : A \to B$, où B est une K- algèbre, dont l'application K- bilinéaire symétrique associée $b_g : A \times A \to B$ vérifie $b_g(x,y)b_g(x',y') = b_g(xy, x'y')$ quels que soient x, y, x', y' dans A, il existe un morphisme unique de K- algèbres $\overline{g} : D \to B$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, equal] \\ D \arrow[r, "\overline{g}"'] & B \end{tikzcd}$$

Il est clair que si un tel objet existe, il est unique à isomorphisme près ou encore, si (D,f) et (D',f') sont deux dupliquées de la même K- algèbre A, alors D et D' sont isomorphes en tant que K- algèbres.

1.2. Existence de la dupliquée. Supposons que K soit un anneau commutatif à élément unité dans lequel 2 est inversible et considérons le K- module $S_K^2(A)$ des éléments homogènes de degré 2 de l'algèbre symétrique $S_K(A)$. On note $x \cdot y$ l'image d'un élément $x \otimes y$ par l'application canonique $A \otimes_K A \to S_K^2(A)$ et on sait que les symboles $x \cdot y$ engendrent $S_K^2(A)$ pour x et y parcourant A. L'application $f : A \to S_K^2(A)$ définie par $x \mapsto \frac{1}{2} x \cdot x$ est quadratique et son application K-bilinéaire associée $b_f(x,y) = x \cdot y$ quels que soient x et y dans A. Si l'on définit la multiplication dans $S_K^2(A)$ par $(x \cdot y)(x' \cdot y') = xy \cdot x'y'$ pour x, y, x', y' dans A, alors l'objet $(S_K^2(A), f)$ est la dupliquée de la K- algèbre A et on le note $D_K(A)$. En fait, il s'agit de *la dupliquée commutative* car l'algèbre $A \otimes_K A$ dont la multiplication s'écrit $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y'$ pour x, y, x', y' parcourant A est aussi une dupliquée de A, mais il s'agit de ***la dupliquée non commutative.*** De plus, l'application K- linéaire canonique $A \otimes_K A \to D_K(A)$ devient un morphisme de K- algèbres pour les structures de dupliquées.

1.3. Les morphismes d'Etherington. Soient K un anneau commutatif à élément unité dans lequel 2 est inversible, A une K- algèbre et $D_K(A)$ la dupliquée commutative de A. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $\mu : D_K(A) \to A^2$ définie par $x \cdot y \mapsto xy$ soit bien définie est que l'algèbre A soit commutative et, dans ce cas, $\mu : D_K(A) \to A^2$ est un morphisme surjectif de K- algèbres. Par contre, l'application K- linéaire $\mu : A \otimes_K A \to A^2$ définie par $x \otimes y \mapsto xy$ est toujours bien définie et c'est un morphisme surjectif pour les structures de K- algèbres. Les morphismes μ, dans les deux cas, sont appelés ***morphismes d'Etherington.*** Il est à noter que la dupliquée commutative d'une algèbre existe même si l'algèbre n'est pas commutative ; ce qui n'existe pas, dans ce cas, est le morphisme d'Etherington. Finalement, si $N_K(A)$ est le noyau du morphisme d'Etherington $D_K(A) \to A^2$ dans le cas où l'algèbre A est commutative (resp. $A \otimes_K A \to A^2$, dans le cas général, commutative ou non), il existe un isomorphisme de K- algèbres $D_K(A)/N_K(A) \xrightarrow{\sim} A^2$ et $D_K(A)N_K(A) = 0$ (resp. $(A \otimes_K A)/N_K(A) \xrightarrow{\sim} A^2$ et $(A \otimes_K A)N_K(A) = N_K(A)(A \otimes_K A) = 0$).

Considérons la suite exacte de K- modules

$$0 \to N_K(A) \to D_K(A) \xrightarrow{\mu} A^2 \to 0 .$$

Pour toute application K- bilinéaire $\varphi : A^2 \times A^2 \to N_K(A)$, on définit sur le produit direct $A^2 \times N_K(A)$ une structure de K- algèbre en posant $(x, x')(y, y') = (xy, \varphi(x, y))$ quels que soient x, y dans A^2 et x', y' dans $N_K(A)$. En particulier, la table de multiplication de cette algèbre, que nous noterons $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$, est donnée par

$$(x, 0)(y, 0) = (xy, \varphi(x, y)),$$
$$(x, 0)(0, y') = 0,$$
$$(0, x')(0, y') = 0,$$

quels que soient x, y dans A^2 et x', y' dans $N_K(A)$.

On dira que deux applications K- bilinéaires φ, $\varphi' : A^2 \times A^2 \to N_K(A)$ sont *équivalentes* et on note $\varphi \sim \varphi'$ s'il existe une application K- linéaire $h : A^2 \to N_K(A)$ telle que $\varphi' = \varphi + \delta h$ où $\delta h : A^2 \times A^2 \to N_K(A)$ est l'application K-bilinéaire définie par $(\delta h)(x,y) = h(x)y + xh(y) - h(xy)$ pour x, y parcourant A^2. Compte tenu de la structure d'algèbre de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$, on a $(\delta h)(x,y) = -h(xy)$ ou encore, $\varphi'(x,y) = \varphi(x,y) - h(xy)$, quels que soient x, y dans A^2. Il s'en suit que, canoniquement, $\varphi \sim \varphi'$ si et seulement si $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) \simeq A^2 \underset{\varphi'}{\times} N_K(A)$, isomorphisme de K- algèbres. Notons simplement que l'isomorphisme mentionné s'écrit $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) \tilde{\to} A^2 \underset{\varphi'}{\times} N_K(A)$, $(x,x') \mapsto (x, x' - h(x))$.

Supposons désormais que A^2 soit un K- module projectif. Il existe alors une application K- linéaire $\eta : A^2 \to D_K(A)$ telle que $\mu \circ \eta = id_{A^2}$ et considérons l'application K- bilinéaire $\varphi : A^2 \times A^2 \to N_K(A)$ définie par $(x,y) \mapsto \eta(x)\eta(y) - \eta(xy)$. Si $\eta' : A^2 \to D_K(A)$ est une autre application K-linéaire vérifiant $\mu \circ \eta' = id_{A^2}$ et si l'on pose $h = \eta' - \eta$ alors $h : A^2 \to N_K(A)$ est une application K- linéaire vérifiant $\varphi' = \varphi + \delta h$, c'est à dire, $\varphi \sim \varphi'$ donc $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) \simeq A^2 \underset{\varphi'}{\times} N_K(A)$, isomorphisme de K- algèbres. Ainsi, à isomorphisme près, la structure d'algèbre de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$ ne dépend pas du choix de η donc non plus de celui de φ. On note alors cette algèbre $A^2 \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$ (s.d. pour semi-direct) et on a un isomorphisme naturel de K- algèbres $D_K(A) \simeq A^2 \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$.

Par la suite, chaque fois que nous ferons intervenir la dupliquée d'une K-algèbre A sous la forme d'un produit semi-direct c'est que, préalablement, on aurait supposé que la K- algèbre A^2 soit un K- module projectif.

Le lemme suivant (cf. [8], lemme 5.1) nous sera utile par la suite :

Lemme 1.4. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K- algèbre telle que A^2 soit un K- module projectif. Alors* $\mathrm{Ann}(D_K(A)) = N_K(A)$ *et pour toute K- dérivation d (resp. pour tout K- automorphisme σ) de $D_K(A)$ on a $d(N_K(A)) \subseteq N_K(A)$ (resp. $\sigma(N_K(A)) = N_K(A)$).*

Note 1.5. Dans le cas où 2 n'est pas inversible dans l'anneau de base, les dupliquées commutative et non commutative de A peuvent toujours se définir mais ces dupliquées ne vérifient plus une propriété universelle comme celle définie ci-dessus.

2. Dérivations et duplication.

Théorème 2.1. *Soient A une K- algèbre commutative telle que A^2 soit un K-module projectif, et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application K- linéaire $d : D_K(A) \to D_K(A)$ soit une K-dérivation de $D_K(A)$ est que les conditions suivantes soient vérifiées : (i) pour tout x dans $N = N_K(A)$, $d(x) = g_d(x)$ où l'application $g : Der_K(D_K(A)) \to End_K(N)$ définie par $d \mapsto g_d$ est un morphisme d'algèbres de Lie ; (ii) pour tout x dans A^2, $d(x) = f_d(x) + h_d(x)$, où l'application $f : Der_K(D_K(A)) \to Der_K(A^2)$, $d \mapsto f_d$ est un morphisme d'algèbres de Lie, l'application $h : Der_K(D_K(A)) \to Hom_K(A^2, N)$, $d \mapsto h_d$ est K- linéaire et vérifie $h_{[d,d']} = h_d \circ f_d + g_d \circ h_{d'} - g_{d'} \circ h_d$, quels que soient d et d' des K- dérivations de $D_K(A)$; (iii) $h_d(xy) + g_d(\varphi(x,y)) = \varphi(x, f_d(y)) + \varphi(y, f_d(x))$, quels que soient x et y dans A^2.*

En effet, soit d une K- dérivation de $D_K(A) = A^2 \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$. D'après le lemme 1.4 on a $d(N) \subseteq N$ et pour tout vecteur x de N, si l'on pose $g_d(x) = d(x)$, alors l'application $g_d : N \to N$ est K- linéaire. De même, il existe $f_d : A^2 \to A^2$ et $h_d : A^2 \to N$ deux applications K- linéaires telles que, pour tout x dans A^2, $d(x) = f_d(x) + h_d(x)$. Soient, maintenant x et y dans A^2 et x', y' dans N. On a $d((x + x')(y + y')) = d(xy + \varphi(x,y)) = f_d(xy) + h_d(xy) + g_d(\varphi(x,y))$ et $(x + x')d(y + y') + (y + y')d(x + x') = (x + x')(f_d(y) + h_d(y) + g_d(y')) + (y + y')(f_d(x) + h_d(x) + g_d(x')) = xf_d(y) + \varphi(x, f_d(y)) + yf_d(x) + \varphi(y, f_d(x))$. De l'égalité $d((x + x')(y + y')) = (x + x')d(y + y') + (y + y')d(x + x')$, il vient que $f_d(xy) = xf_d(y) + yf_d(x)$ et $h_d(xy) + g_d(\varphi(x,y)) = \varphi(x, f_d(y)) + \varphi(y, f_d(x))$, quels que soient x et y dans A^2, d'où (iii) et f_d est dans $Der_K(A^2)$, quel que soit d dans $Der_K(D_K(A))$. Si d et d' sont deux K- dérivations de $D_K(A)$, on a $(d \circ d')(x + x') =$

$d(f_{d'}(x) + h_{d'}(x) + g_{d'}(x')) = f_d(f_{d'}(x)) + h_d(f_{d'}(x)) + g_d(h_{d'}(x)) + g_d(g_{d'}(x'))$ et $[d, d'](x+x') = (d \circ d')(x+x') - (d' \circ d)(x+x') = (f_d \circ f_{d'} - f_{d'} \circ f_d)(x) + (h_d \circ f_{d'} - h_{d'} \circ f_d + g_d \circ h_{d'} - g_{d'} \circ h_d)(x) + (g_d \circ g_{d'} - g_{d'} \circ g_d)(x') = f_{[d,d']}(x) + h_{[d,d']}(x) + g_{[d,d']}(x')$.
On en déduit que

$$f_{[d,d']} = [f_d, f_{d'}],$$

$$g_{[d,d']} = [g_d, g_{d'}] \text{ et}$$

$$h_{[d,d']} = h_d \circ f_{d'} - h_{d'} \circ f_d + g_d \circ h_{d'} - g_{d'} \circ h_d.$$

On vérifie facilement que les applications $f : Der_K(D_K(A)) \to Der_K(A^2)$, $d \mapsto f_d$, $g : Der_K(D_K(A)) \to End_K(N)$, $d \mapsto g_d$ et $h : Der_K(D_K(A)) \to Hom_K(A^2, N)$, $d \mapsto h_d$ sont K-linéaires et les deux premières égalités ci-dessus nous disent alors que f et g sont des morphismes d'algèbres de Lie.
Réciproquement, soit $d : D_K(A) \to D_K(A)$ une application K- linéaire vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii). Pour x et y dans A^2, on a

$$\begin{aligned} d((x,0)(y,0)) &= d(xy + \varphi(x,y)) = f_d(xy) + h_d(xy) + g_d(\varphi(x,y)) \\ &= x f_d(y) + y f_d(x) + \varphi(x, f_d(y)) + \varphi(y, f_d(x)) \\ &= (x,0)(f_d(y),0) + (y,0)(f_d(x),0) \\ &= (x,0)(f_d(y) + h_d(y)) + (y,0)(f_d(x) + h_d(x)) \\ &= (x,0)d(y) + (y,0)d(x), \end{aligned}$$

car $A^2 N = 0$. Comme $D_K(A)N = 0$, les autres cas sont trivialement vérifiés, donc d est une K- dérivation de $D_K(A)$.

L'algèbre de Lie $L_K(U,V)$. Soient K un anneau commutatif à élément unité et U et V deux K- modules. On définit sur le K- module $L_K(U,V) = End_K(U) \times End_K(V) \times Hom_K(U,V)$ une structure d'algèbre de Lie en posant $[(f,g,h),(f',g',h')] = ([f,f'],[g,g'], h \circ f' - h' \circ f + g \circ h' - g' \circ h)$ et soit $L_K(A)$ la sous-K- algèbre de Lie de $L_K(A^2, N)$ formée des triplets (f,g,h) avec f dans $Der_K(A^2)$, g dans $End_K(N)$ et h dans $Hom_K(A^2, N)$ vérifiant $h(xy) + g(\varphi(x,y)) = \varphi(x, f(y)) + \varphi(y, f(x))$, quels que soient x et y dans A^2.

Lemme 2.2. *Soient A une K- algèbre commutative et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $Der_K(D_K(A)) \tilde{\rightarrow} L_K(A)$.*

D'après le théorème 2.1, l'application $Der_K(D_K(A)) \rightarrow L_K(A)$ définie par $d \mapsto (f_d, g_d, h_d)$ est l'isomorphisme cherché. Les considérations du paragraphe 1.3. nous permettent de déduire le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Soient A une K- algèbre commutative et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Si $A^2 = A$ alors $\{\varphi(x,y)\}_{x,y\in A}$ engendre N en tant que K- module.*

Lemme 2.4. *Le morphisme d'algèbres de Lie $\psi : L_K(A) \rightarrow Der_K(A^2)$, défini par $(f,g,h) \mapsto f$ est surjectif. Si, de plus, $A^2 = A$, alors c'est un isomorphisme.*

Il est clair que ψ est un morphisme d'algèbres de Lie. Montrons que ψ est surjectif. En effet, si f est une K- dérivation de A^2, on pose $h(xy) = \varphi(x, f(y)) + \varphi(y, f(x))$ pour x et y dans A^2 tels que $\varphi(x,y) = 0$ et $h(z) = 0$ pour tout autre élément z de A^2. De même, on pose $g(\varphi(x,y)) = \varphi(x, f(y)) + \varphi(y, f(x)) - h(xy)$, quels que soient x et y dans A^2 et $g(z) = 0$ pour tout autre élément z dans N. On vérifie que (f,g,h) est dans $L_K(A)$. Supposons maintenant $A^2 = A$ et soit (f,g,h) dans $L_K(A)$ tel que $\psi(f,g,h) = 0$, c'est à dire, $f = 0$ d'où $h(xy) + g(\varphi(x,y)) = 0$, quels que soient x et y dans A^2. Pour x et y dans A^2 tels que $\varphi(x,y) = 0$ on a $h(xy) = 0$. Comme $A^2 = A$, les produits xy tels que $\varphi(x,y) = 0$, x et y parcourant A, engendrent A^2 et on déduit que $h = 0$, donc $g(\varphi(x,y)) = 0$, quels que soient x et y dans $A^2 = A$. Le lemme 2.3. permet d'achever la démonstration.

Théorème 2.5. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K- algèbre commutative et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Si $A^2 = A$ alors $Der_K(D_K(A)) \tilde{\rightarrow} Der_K(A)$, isomorphisme d'algèbres de Lie. En fait, l'application K- linéaire $Der_K(A) \rightarrow Der_K(D_K(A))$, $d \mapsto d^*$ telle que $d^*(x\cdot y) = x\cdot d(y) + d(x)\cdot y$, quels que soient x, y dans A, est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

En vue des lemme 2.2 et lemme 2.4 on a $Der_K(A) \simeq Der_K(D_K(A))$. Soit $D : Der_K(A) \to Der_K(D_K(A))$ l'application définie par $d \mapsto d^*$. Pour toute dérivation d de A, on a $d^*((x \cdot x')(y \cdot y')) = d^*(xx' \cdot yy') = xx' \cdot d(yy') + d(xx') \cdot yy' = xx' \cdot (d(y)y' + yd(y')) + (d(x)x' + xd(x')) \cdot yy' = (x \cdot x')(d(y) \cdot y' + y \cdot d(y')) + (d(x) \cdot x' + x \cdot d(x'))(y \cdot y') = (x \cdot x')d^*(y \cdot y') + d^*(x \cdot x')(y \cdot y')$, quels que soient $x \cdot x'$ et $y.y'$ dans $D_K(A)$, donc d^* est une dérivation de $D_K(A)$. Soient d_1, d_2 deux dérivations de A. On a $[d_1^*, d_2^*](x \cdot y) = d_1^*(x \cdot d_2(y) + d_2(x) \cdot y) - d_2^*(x \cdot d_1(y) + d_1(x) \cdot y) = d_1(x) \cdot d_2(y) + x \cdot d_1 \circ d_2(y) + d_1 \circ d_2(x) \cdot y + d_2(x) \cdot d_1(y) - (d_2(x) \cdot d_1(y) + x.d_2 \circ d_1(x) \cdot y + d_1(x)d_2(y)) = x \cdot (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(y) + (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(x) \cdot y = x \cdot [d_1, d_2](y) + [d_1, d_2](x) \cdot y = [d_1, d_2]^*(x \cdot y)$, pour tout $x \cdot y$ dans $D_K(A)$, donc l'application D est un morphisme d'algèbres de Lie. Dans [7], l'Auteur a montré que, *pour toute algèbre commutative A, l'application $D : Der_K(A) \to Der_K(D_K(A))$, $d \mapsto d^*$ est un morphisme injectif d'algèbres de Lie.* Avec l'hypothèse $A^2 = A$, le lemme 2.4 nous dit que D est surjectif.

Soient maintenant K un anneau commutatif à élément unité muni d'une structure de $\mathbf{Q}$-algèbre, P un K- module projectif, $d : P \to K$ une application K- linéaire surjective qui se prolonge en une K- dérivation de degré -1 de l'algèbre symétrique $S_K(P)$, $m \geq 1$ un nombre entier et $S_K^m(P, d)$ l'algèbre gamétique $2m$-ploïde du K- module (P, d) (cf. [6]). On sait que cette algèbre $A = S_K^m(P, d)$ vérifie la condition $A^2 = A$. De plus, si $P = K^{n+1}$ est le K- module libre de rang $n + 1$, alors $S_K^m(P, d) = G(n + 1, 2m)$ et notons $Z(n + 1, 2m)$ sa dupliquée commutative.

Corollaire 2.6. *Soient K un anneau commutatif à élément unité muni d'une structure de $\mathbf{Q}$-algèbre, $S_K^m(P, d)$ la K- algèbre gamétique $2m$-ploïde du K- module (P, d) où $m \geq 1$ est un entier. Il existe alors un isomorphisme de K- algèbres de Lie $Der_K(S_K^m(P, d) \tilde{\to} Der_K(D_K(S_K^m(P, d)))$.*

Dans le cas de l'algèbre gamétique $G(n + 1, 2)$, il suffit que 2 soit inversible dans l'anneau de base, plus précisément on a le résultat suivant :

Corollaire 2.7. *Soient K un anneau commutatif à élément unité dans lequel 2 est inversible et $G(n+1,2)$ la K- algèbre gamétique diploïde.*
Alors $Der_K(G(n+1,2)) \tilde{\rightarrow} Der_K(Z(n+1,2))$.

Notons que si $A^2 \neq A$ alors $\dim_K Der_K(D_K(A))$ est strictement supérieure à $\dim_K Der_K(A)$, où K est un corps commutatif (cf. [8], exemple 5.6).

3. Automorphismes et duplication.

Lemme 3.1. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K- algèbre commutative, $D_K(A)$ sa dupliquée commutative, $N = N_K(A)$ le noyau de la multiplication $\mu : D_K(A) \to A^2$ et $\varphi : A^2 \times A^2 \to N_K(A)$ une application K- bilinéaire symétrique. Une condition nécessaire et suffisante pour que une application K- linéaire bijective $\sigma : A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) \tilde{\rightarrow} A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$ soit un K- automorphisme d'algèbres est que les conditions suivantes soient vérifiées : (i) pour tout x dans $N_K(A)$, $\sigma(x) = g_\sigma(x)$ où l'application $g : Aut_K(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)) \to GL_K(N)$ définie par $\sigma \mapsto g_\sigma$ est un morphisme de groupes; (ii) pour tout x dans A^2, $\sigma(x) = f_\sigma(x) + h_\sigma(x)$ où l'application $f : Aut_K(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)) \to Aut_K(A^2)$ définie par $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un morphisme de groupes et l'application $h : Aut_K(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)) \to Hom_K(A^2, N_K(A))$ définie par $\sigma \mapsto h_\sigma$ vérifie $h_{\sigma\sigma'} = h_\sigma \circ f'_\sigma + g_\sigma \circ h_{\sigma'}$ quels que soient σ et σ' dans $Aut_K(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A))$; (iii) $h_\sigma(xy) + g_\sigma(\varphi(x,y)) = \varphi(f_\sigma(x), f_\sigma(y))$, quels que soient x, y dans A^2 et pour tout σ dans $Aut_K(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A))$.*

Soit $\sigma : A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) \to A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$ un K- automorphisme. D'après le lemme 1.4, pour tout vecteur z de N si l'on pose $g_\sigma(z) = \sigma(z)$ alors g_σ est dans $GL_K(N)$. De même, pour tout x dans A^2, on écrit $\sigma(x) = f_\sigma(x) + h_\sigma(x)$ avec f_σ dans $End_K(A^2)$ et h_σ dans $Hom_K(A^2, N)$. Il est clair que pour tout σ dans $Aut_K(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A))$, f_σ est une application bijective. Soient maintenant x, y dans A^2, x', y' dans N. L'égalité $\sigma((x+x')(y+y')) = \sigma(x+x')\sigma(y+y')$ se traduisant par $f_\sigma(xy) + h_\sigma(xy) + g_\sigma(\varphi(x,y)) = f_\sigma(x)f_\sigma(y) + \varphi(f_\sigma(x), f_\sigma(y))$, il vient que

$f_\sigma(xy) = f_\sigma(x)f_\sigma(y)$ et $h_\sigma(xy) + g_\sigma(\varphi(x,y)) = \varphi(f_\sigma(x), f_\sigma(y))$, d'où la condition (iii). De plus, si σ et σ' sont deux automorphismes de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$, alors $(\sigma o \sigma')(x + x') = \sigma(f_{\sigma'}(x) + h_{\sigma'}(x')) = f_\sigma(f_{\sigma'}(x)) + h_\sigma(f_{\sigma'}(x)) + g_\sigma(h_{\sigma'}(x)) + g_\sigma(g_{\sigma'}(x'))$ et $(\sigma \circ \sigma')(x + x') = f_{\sigma\sigma'}(x) + h_{\sigma\sigma'}(x) + g_{\sigma\sigma'}(x')$ quels que soient x dans A^2 et x' dans N. Par conséquent $f_{\sigma\sigma'} = f_\sigma \circ f_{\sigma'}$, $g_{\sigma\sigma'} = g_\sigma \circ g_{\sigma'}$ et $h_{\sigma\sigma'} = h_\sigma \circ f_{\sigma'} + g_\sigma \circ h_{\sigma'}$. Réciproquement, soit $\sigma : A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) \to A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$ une application K-linéaire bijective vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii). Pour x et y dans A^2 on a $\sigma((x,0)(y,0)) = \sigma(xy + \varphi(x,y)) = f_\sigma(xy) + h_\sigma(xy) + g_\sigma(\varphi(x,y)) = f_\sigma(x)f_\sigma(y) + \varphi(f_\sigma(x), f_\sigma(y)) = (f_\sigma(x) + h_\sigma(x))(f_\sigma(y) + h_\sigma(y)) = \sigma(x,0)\sigma(y,0)$ car $A^2N = 0$. Comme $(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A))N = 0$, les autres cas se vérifient trivialement. Donc σ est un automorphisme d'algèbres de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$.

Note 3.2. Le lemme 3.1. ainsi que sa démonstration sont valables, mutatis mutandis, au cas de la dupliquée non commutative.

Le groupe $G_K(U,V)$. Soient K un anneau commutatif à élément unité, U et V deux K- modules, $GL_K(U)$ et $GL_K(V)$ les groupes linéaires de U et V respectivement et $Hom_K(U,V)$ le K- module des applications K- linéaires de U dans V. On définit sur l'ensemble $G_K(U,V) = GL_K(U) \times GL_K(V) \times Hom_K(U,V)$ une structure de groupe par la loi de composition interne $(f,g,h) * (f',g',h') = (f \circ f', g \circ g', h \circ f' + g \circ h')$. On voit que $(id_U, id_V, 0)$ en est élément neutre, tandis que $(f,g,h)^{-1} = (f^{-1}, g^{-1}, -g^{-1} \circ h \circ f^{-1})$. Notons $G_K(A^2,\varphi)$ le sous-ensemble de $G_K(A^2,N)$ formé des triplets (f,g,h) avec f dans $Aut_K(A^2)$, g dans $GL_K(N)$ et h dans $Hom_K(A^2,N)$ vérifiant $h(xy) + g(\varphi(x,y)) = \varphi(f(x), f(y))$, quels que soient x et y dans A^2. On vérifie facilement que $G_K(A^2,\varphi)$ est un sous-groupe de $G_K(A^2,N)$ puisque $(f,g,h)^{-1} = (f^{-1}, g^{-1}, -g^{-1} \circ h \circ f^{-1})$ avec $-g^{-1} o h o f^{-1}(xy) = -g^{-1} o h(f^{-1}(x)f^{-1}(y)) = -g^{-1}(\varphi(x,y)) + \varphi(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$, quels que soient x, y dans A^2.

Notons que, d'après le lemme 3.1., on a aussi un isomorphisme de groupes $G_K(A^2,\varphi) \simeq Aut_K(A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A))$ et regardons comment les automorphismes σ de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$ sont modifiés par des isomorphismes $F : A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) \xrightarrow{\sim} A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$

définis par $(x,x') \mapsto (x, x' - k(x))$ avec k dans $Hom_K(A^2, N)$. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) & \xrightarrow[F]{\sim} & A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) \\
\sigma \downarrow & & \downarrow \sigma' \\
A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) & \xrightarrow[F']{\sim} & A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)
\end{array}$$

et les faits que $F'(x,x') = (x, x' - k'(x))$, $\sigma(x,x') = (f_\sigma(x), g_\sigma(x') + h_\sigma(x))$ et $\sigma'(x,x') = (f_{\sigma'}(x), g_{\sigma'}(x') + h_{\sigma'}(x))$ quels que soient x dans A^2 et x' dans N entraînent que $f_\sigma = f_{\sigma'}$, $g_\sigma = g_{\sigma'}$ et $h_{\sigma'} - h_\sigma = g_\sigma \circ k - k' \circ f_\sigma$. Réciproquement, ces équations entraînent la commutativité du diagramme ci-dessus. En fait, ce qui nous intéresse est de savoir comment un isomorphisme $F : A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A) \tilde{\to} A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$, $(x,x') \mapsto (x, x' - k(x))$, avec k dans $Hom_K(A^2, N)$ modifie les automorphismes de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$. Pour un automorphisme donné σ de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$, l'automorphisme de $A^2 \underset{\varphi}{\times} N_K(A)$ modifié par F s'écrit $\sigma' = F \circ \sigma \circ F^{-1}$ et ceci équivaut à dire que $f_\sigma = f_{\sigma'}$, $g_\sigma = g_{\sigma'}$ et $h_{\sigma'} - h_\sigma = g_\sigma \circ k - k \circ f_\sigma$. Or, quand on considère la dupliquée d'une algèbre comme un produit semi-direct, on procède par la même occasion à l'identification des automorphismes σ et $F \circ \sigma \circ F^{-1}$ pour tout automorphisme F. Donc, en vue de comparer $Aut_K(D_K(A))$ et $G_K(A^2, \varphi)$ où A^2 est un K- module projectif et $\varphi : A^2 \times A^2 \to N$ est une application K-bilinéaire symétrique déduite de cette projectivité (cf. Lemme 3.3.), nous avons besoin de rendre le groupe $G_K(A^2, \varphi)$ plus petit. Pour ce faire, nous dirons que deux triplets (f, g, h) et (f', g', h') dans $G_K(A^2, \varphi)$ sont *équivalents* et on note $(f, g, h) \sim (f', g', h')$ si et seulement si $f = f'$, $g = g'$ et il existe un élément k dans $Hom_K(A^2, N)$ tel que $h' - h = g \circ k - k \circ f$. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence sur $G_K(A^2, \varphi)$ compatible avec sa structure de groupe et on peut donc considérer le groupe quotient $\widetilde{G}_K(A^2, \varphi) = G_K(A^2, \varphi)/\sim$. Etant donné que pour deux triplets (f, g, h) et (f', g', h') on a $h(xy) + g(\varphi(x, y)) = \varphi(f(x), f(y))$ et

$h'(xy)+g'(\varphi(x,y)) = \varphi(f'(x), f'(y))$, quels que soient x, y dans A^2, les conditions $f = f'$ et $g = g'$ entraînent que $h(xy) = h'(xy)$, quels que soient x, y dans A^2, donc $h = h'$ et $k = 0$ si $(A^2)^2 = A^2$. Dans ce cas, il existe un isomorphisme de groupes $G_K(A^2,\varphi) \tilde{\rightarrow} \widetilde{G}_K(A^2,\varphi)$. Sinon, c'est à dire, si $(A^2)^2 \subset A^2$, il existe un morphisme surjectif de groupes $G_K(A^2,\varphi) \rightarrow \widetilde{G}_K(A^2,\varphi)$ qui n'est pas, en général, un isomorphisme.

Les considérations précédentes et le lemme 3.1. nous fournissent le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K- algèbre commutative telle que A^2 soit un K- module projectif et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. L'application naturelle $Aut_K(D_K(A)) \tilde{\rightarrow} \widetilde{G}K(A^2,\varphi)$ composée du morphisme de goupes $Aut_K(D_K(A)) \rightarrow GK(A^2,\varphi)$ défini par $\sigma \mapsto (f_\sigma, g_\sigma, h_\sigma)$ et de la surjection canonique $G_K(A^2,\varphi) \rightarrow \widetilde{G}_K(A^2,\varphi)$ est un isomorphisme de groupes. En particulier, le morphisme $Aut_K(D_K(A)) \rightarrow G_K(A^2,\varphi)$ est toujours injectif. Si de plus on a $(A^2)^2 = A^2$, alors le morphisme $Aut_K(D_K(A)) \tilde{\rightarrow} G_K(A^2,\varphi)$ est un isomorphisme de groupes.*

Lemme 3.4. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K- algèbre commutative telle que A^2 soit un K- module projectif. Si $(A^2)^2 = A^2$, le morphisme de groupes $\psi : G_K(A^2,\varphi) \rightarrow Aut_K(A^2)$ défini par $(f,g,h) \mapsto f$ est surjectif. Si de plus $A^2 = A$, le morphisme ψ est un isomorphisme.*

Il est clair, d'après le lemme 3.1., que ψ est un morphisme de groupes. De plus, ce morphisme est surjectif car si l'on se donne f dans $Aut_K(A^2)$ et si l'on prend g arbitraire dans $GL_K(N)$, on doit construire h dans $Hom_K(A^2, N)$ vérifiant $h(xy)+g(\varphi(x,y)) = \varphi(f(x), f(y))$, quels que soient x, y dans A^2. Or, cette formule nous définit une application K- linéaire $h : (A^2)^2 \rightarrow N$ et d'après la condition $(A^2)^2 = A^2$ on déduit que effectivement h est dans $Hom_K(A^2, N)$ et, par suite, (f,g,h) appartient à $G_K(A^2,\varphi)$. Supposons, de plus, que $A^2 = A$ et soit (f,g,h)

dans $G_K(A^2, \varphi)$ tel que $f = id_A$. La condition $h(xy) + g(\varphi(x, y)) = \varphi(x, y)$ jointe au fait que N est engendré par les éléments de la forme $x \cdot y$ avec x, y dans A et $xy = 0$ nous dit que $g = id_N$ (cf. Lemme 2.5.) et, par conséquent, $h = 0$. Le lemme est démontré.

Théorème 3.5. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K-algèbre commutative telle que A^2 soit un K- module projectif et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Si $A^2 = A$, il existe un isomorphisme de groupes $Aut_K(D_K(A)) \tilde{\rightarrow} Aut_K(A)$ dont l'isomorphisme réciproque est défini par $\sigma \mapsto \sigma.\sigma$ avec $(\sigma.\sigma)(x \cdot y) = \sigma(x).\sigma(y)$, quels que soient x, y dans A.*

Pour ce qui est de la première assertion, il suffit d'appliquer les lemmes 3.3. et 3.4. et de considérer l'isomorphisme composé

$$Aut_K(D_K(A)) \tilde{\rightarrow} G_K(A, \varphi) \tilde{\rightarrow} Aut_K(A).$$

La description de l'isomorphisme réciproque est alors immédiate.

Corollaire 3.6. *Soient K un anneau commutatif à élément unité muni d'une structure de $\mathbf{Q}$-algèbre, $m \geq 1$ un nombre entier et $S_K^m(P, d)$ l'algèbre gamétique $2m$-ploïde du K- module (P, d). Il existe alors un isomorphisme de groupes $Aut_K(S_K^m(P, d)) \tilde{\rightarrow} Aut_K\big(D_K(S_K^m(P, d))\big)$.*

Corollaire 3.7. *Soient K un anneau commutatif à élément unité dans lequel 2 est inversible et $n \geq 1$ un nombre entier. Il existe un isomorphisme de groupes $Aut_K(G(n+1, 2)) \tilde{\rightarrow} Aut_K(Z(n+1, 2))$.*

Note 3.8. Il apparait dans la littérature que ce processus de duplication peut être répété. Pour une K- algèbre commutative A, on pose $D_K^0(A) = A$ et $D_K^k(A) = D_K(D_K^{k-1}(A))$, pour tout entier $k \geq 1$. Avec l'hypothèse $A^2 = A$, les théorèmes 2.5. et 3.4. nous disent que $Der_K(A) \simeq Der_K(D_K^k(A))$, isomorphisme d'algèbres de Lie, et $Aut_K(A) \simeq Aut_K(D_K^k(A))$, isomorphisme de groupes ($k = 1, 2, \ldots$). Il suffit, pour cela, de voir que $(D_K(A))^2 = D_K(A)$ (conséquence du lemme 2.3.).

Exemple 3.9. Cet exemple concerne le cas d'une algèbre A vérifiant $(A^2)^2 = A^2$. En effet, soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A la K- algèbre de Bernstein triviale de type $(1 + r, s)$. Cela veut dire que si $A = Ke \oplus U \oplus V$ est la décomposition de Peirce de A relative à un idempotent e, alors $(U \oplus V)^2 = 0$ donc $U^2 = 0$, ce qui nous permet d'écrire $A^2 = Ke \oplus U$. On note que, en fait, A^2 est l'algèbre gamétique $G(1 + r, 2)$, donc $(A^2)^2 = A^2$ et $Aut_K(A^2) \simeq Aff_K(U)$, isomorphisme de groupes, où $Aff_K(U)$ est le groupe affine de U. Comme $N_K(A^2) = \mathrm{Ker}(D_K(A^2) \to (A^2)^2 = A^2) = \{\varphi(x, y)/x, y \in A^2 \quad et \quad xy = 0\}$, alors $\dim_K(N_K(A^2)) = \frac{1}{2}(1+r)(2+r)-(1+r) = \frac{1}{2}r(r + 1)$ et si l'on écrit $N_K(A) = N_K(A^2) \oplus N'$, on voit que $t = \dim_K(N') = \dim_K(N_K(A)) - \dim_K(N_K(A^2)) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - (r + 1) - \frac{1}{2}r(r + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - \frac{1}{2}(r + 1)(r + 2)$, où $n = r + s$. Il en résulte immédiatement que $Aut_K(D_K(A)) \simeq Aff_K(K^r) \times GL_K(K^t)$, isomorphisme de groupes, où l'on a posé $U = K^r$. Si $t = 0$ on a $N' = 0$ et $N_K(A) = N_K(A^2)$ donc $V = 0$ et, dans ce cas, $Aut_K(D_K(A)) \simeq Aff_K(U)$, isomorphisme de groupes. L'algèbre de Bernstein A est alors, dès le départ, l'algèbre gamétique $G(1 + r, 2)$, et dans ce cas on a $A = A^2$.

Exemple 3.10. Il s'agit ici d'un cas particulier de l'exemple 3.9. dans lequel $r = s = 1$. On se donne alors une base $\{e, u, v\}$ de l'algèbre de Bernstein A avec $\{u\}$ base de U et $\{v\}$ base de V et la table de multiplication de A relativement à cette base s'écrit $e^2 = e$, $eu = ue = \frac{1}{2}u$, tous les autres produits étant nuls. On voit que $A^2 = Ke \oplus U$ donc $Aut_K(A^2) = K^+ \underset{s.d.}{\times} K^*$, le groupe affine de K. On voit que $Aut_K(D_K(A)) \simeq Aff_K(K) \times GL_K(K^3)$ car $t = 3$ et on va déterminer explicitement les automorphismes de $D_K(A)$. Or, la table de multiplication de $D_K(A)$ relativement à la base $\{e \cdot e, e \cdot u, u \cdot u, e \cdot v, u \cdot v, v \cdot v\}$ s'écrit $(e \cdot e)^2 = e \cdot e$, $(e \cdot e)(e \cdot u) = (e \cdot u)(e \cdot e) = \frac{1}{2}e \cdot u$ et $(e \cdot u)^2 = \frac{1}{4}u \cdot u$, tous les autres produits étant nuls. Si σ est un automorphisme de $D_K(A)$, on sait que

$\sigma(e\cdot e) = e\cdot e + \alpha e\cdot u + \frac{1}{4}\alpha^2 u\cdot u$ avec α dans K et compte tenu de l'équation $\sigma(e\cdot e)\sigma(e\cdot u) = \frac{1}{2}\sigma(e\cdot u)$, nécessairement $\sigma(e\cdot u) = \beta e\cdot u + \frac{1}{2}\alpha\beta u\cdot u$ avec β dans K. Puisque $\sigma(e\cdot u)\sigma(e\cdot u) = \frac{1}{4}\sigma(u\cdot u)$ alors $\sigma(u\cdot u) = \beta^2 u\cdot u$. Par ailleurs, les automorphismes de A^2 s'écrivent sous la forme $f_\sigma(e) = e + \gamma u$ et $f_\sigma(u) = \lambda u$ avec γ, λ dans K et $\lambda \neq 0$. On a : $\sigma(e\cdot e) = f_\sigma(e)\cdot f_\sigma(e) = e\cdot e + 2\gamma e\cdot u + \gamma^2 u\cdot u$ et il suffit de prendre $\gamma = \frac{1}{2}\alpha$; $\sigma(e\cdot u) = f_\sigma(e)\cdot f_\sigma(u) = \lambda e\cdot u + \gamma\lambda u\cdot u$ et il suffit de prendre $\lambda = \beta$; $\sigma(u.u) = f_\sigma(u)\cdot f_\sigma(u) = \lambda^2 u\cdot u = \beta^2 u\cdot u$. Ceci nous permet de calculer les automorphismes de $Aut_K(D_K(A))$ connaissant ceux de $Aut_K(A^2)$ modulo le groupe $GL_K(K^3)$.

Exemple 3.11. Si $A = Ke \oplus V$ est l'algèbre de Bernstein constante avec $V^2 = 0$, alors $A^2 = Ke$ et $Aut_K(A^2) = \{id_{A^2}\}$ alors que $D_K(A) = Ke.e \oplus N_K(A)$ est aussi une algèbre de Bernstein constante, c'est à dire, $N_K(A)^2 = 0$ mais $Aut_K(D_K(A)) \simeq GL_K(N_K(A))$, isomorphisme de groupes. Le fait que $Aut_K(D_K(A))$ et $Aut_K(A^2)$ ne soient pas isomorphes (cf. théorème 3.5.) tient au fait que $A^2 \subset A$.

Les résultats précédents, concernant les automorphismes et les dérivations, s'étendent au cas de la dupliquée non commutative. Pour plus de renseignements nous renvoyons à [7].

4. Les idempotents de la dupliquée.

On montre ici l'existence d'une bijection d'ensembles entre l'ensemble des idempotents de la K- algèbre A et celui des idempotents de sa dupliquée commutative $D_K(A)$.

Lemme 4.1. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, U_1 et U_2 deux K- algèbres et $h : U_1 \to U_2$ un morphisme d'algèbres. Si* $\mathrm{Ker}(h) \subseteq \mathrm{Ann}(U_1)$ *et* $\mathrm{Im}(h) \supseteq U_2^2$ *alors, il existe une bijection d'ensembles $Ip(U_1)\tilde{\to} Ip(U_2)$, où $Ip(U_i)$ est l'ensemble des éléments idempotents de U_i $(i = 1,2)$.*

Soit y dans U_2 vérifiant $y^2 = y$, alors y est dans $U_2^2 \subseteq \mathrm{Im}(h)$ et il existe x dans U_1 tel que $y = h(x)$. On a $h(x^2) = (h(x))^2 = y^2 = y = h(x)$, par conséquent,

$z = x^2 - x$ est dans $\mathrm{Ker}(h) \subseteq \mathrm{Ann}(U_1)$ et $(x+z)^2 = x^2 = x + z$, donc $x + z$ est dans $Ip(U_1)$ avec $h(x+z) = y$. Soient maintenant x_1 et x_2 deux idempotents de U_1 tels que $h(x_1) = h(x_2)$. On a $x_1 - x_2 = z \in \mathrm{Ann}(U_1)$ et $x_1^2 = (x_2 + z)^2 = x_2^2$ entraîne que $x_1 = x_2$. L'application $h_{|Ip(U_1)}$ est la bijection cherchée.

Comme conséquence de ce lemme on a le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K-algèbre commutative et $D_K(A)$ sa dupliquée commutative. Le morphisme de K- algèbres $\mu : D_K(A) \to A$ induit une bijection d'ensembles $Ip(D_K(A)) \tilde{\to} Ip(A)$.*

Il suffit de voir que $A^2 \subseteq \mathrm{Im}(\mu)$ et $\mathrm{Ann}(D_K(A)) \supseteq N$.

Le théorème 4.2. est encore vrai dans le cas de la dupliquée non commutative, i.e., $Ip(A \otimes A) \tilde{\to} Ip(A)$, bijection d'ensembles.

5. Nilpotence et radical.

Dans tout ce paragraphe, K sera un corps commutatif et les algèbres sur K et leurs dupliquées seront non nécessairement commutatives.

Soient A une K- algèbre et s un entier non associatif. On dira que l'algèbre A (ou l'élément x) est ***s-nilpotent*** si tout produit d'éléments de A (ou produit des x), associés selon l'entier s, est nul. Si l'entier s est principal, on dira que A (ou x) est ***principalement nilpotent*** d'indice s. Si tout produit de d facteurs d'éléments de A (ou de d facteurs x) est nul, quelle que soit la façon de les associer, on dira alors que A (ou x) est ***fortement nilpotent*** d'indice d.

Dans la suite nous employerons le mot nilpotent pour principalement nilpotent.

Dans [5], théorème VI, l'Auteur disait : "si une K- algèbre A est nilpotente d'indice $2d-1$ ou $2d$, alors l'algèbre dupliquée $D_K(A)$ est nilpotente d'indice $2d-1$". L'exemple suivant en est un contre-exemple.

Exemple 5.1. Soit A la $\mathbf{R}$-algèbre commutative de dimension 5 dont la table de multiplication dans une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ est donnée par $e_1 e_i = e_{i+1}$

$(i = 1, \ldots, 4)$, les autres produits étant nuls. L'algèbre A est nilpotente d'indice 6, tandis que la sous-algèbre A^2, engendrée par $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$, est une zéro-algèbre, i.e., nilpotente d'indice 2. Quels que soient $x_i \otimes y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ dans $D_K(A)$ on a $(x_1 \otimes y_1)((x_2 \otimes y_2)(x_3 \otimes y_3)) = (x_1 \otimes y_1)(x_2y_2 \otimes x_3y_3) = x_1y_1 \otimes (x_2y_2)(x_3y_3) = 0$, puisque $(x_2y_2)(x_3y_3) \in A^2A^2 = 0$. Donc $D_K(A)$ est nilpotente d'indice 3. D'après le théorème ci-dessus cité, on devrait avoir 5 comme indice de nilpotence de $D_K(A)$.

Théorème 5.2. *Soit A une K- algèbre. Si la sous-algèbre A^2 est nilpotente (resp. résoluble) d'indice k, alors l'algèbre $D_K(A)$ est nilpotente (resp. résoluble) d'indice $k+1$.*

En effet, sous les hypothèses du théorème, on a $\mu(D_K(A)^k) = (\mu(D_K(A))^k = (A^2)^k = 0$, i.e., $(D_K(A))^k \subseteq N_K(A)$ et par conséquent $D_K(A)^{k+1} = 0$. De même, on a $\mu(D_K(A)^{(k)}) = \mu(D_K(A))^{(k)} = (A^2)^{(k)} = 0$, soit $D_K(A)^{(k)} \subseteq N_K(A)$ et par suite $D_K(A)^{(k+1)} = 0$, d'où le théorème.

Lemme 5.3. *Soit A une K- algèbre. Si I est un idéal de la sous-algèbre A^2, alors $I \oplus N_K(A)$ est un idéal de $D_K(A)$. De plus, si I est nilpotent (resp. résoluble) alors $I \oplus N_K(A)$ est nilpotent (resp. résoluble).*

On va démontrer le lemme en identifiant $D_K(A)$ à $A^2 \oplus N_K(A)$. Supposons alors que I soit un idéal de A^2. On a $(A^2+N_K(A))(I+N_K(A)) = A^2I+\varphi(A^2, I) \subseteq I + N_K(A)$ et $(I + N_K(A))(A^2 + N_K(A)) = IA^2 + \varphi(I, A^2) \subseteq I + N_K(A)$, donc $I + N_K(A)$ est bien un idéal de $D_K(A)$. Des égalités $(I + N_K(A))^{k+1} = I^{k+1} + \varphi(I^k, I)$ et $(I + N_K(A))^{(k+1)} = I^{(k+1)} + \varphi(I^{(k)}, I^{(k)})$, il vient que si I est nilpotent, $I + N_K(A)$ l'est aussi et si I est résoluble, il en est de même de $I + N_K(A)$.

Remarque 5.4. Si une K- algèbre A est fortement nilpotente d'indice $2s$ (resp. résoluble d'indice $s+1$) alors la sous-algèbre A^2 est fortement nilpotente d'indice au plus s (resp. résoluble d'indice s).

Théorème 5.5. *(d'Etherington). Soit A une K- algèbre fortement nilpotente d'indice $2s-1$ ou $2s$ (resp. résoluble d'indice $s+1$). Alors, l'algèbre $D_K(A)$ est fortement nilpotente d'indice au plus $s+1$ (resp. résoluble d'indice $s+1$).*

Le théorème est immédiat, compte tenu de la remarque 5.4. et du théorème 5.2.

Une K- algèbre A est dite *simple* si les seuls idéaux bilatères de A sont A et $\{0\}$ et si A n'est pas une zéro-algèbre. Une K- algèbre A est dite *semi-simple* si elle est somme directe d'algèbres simples. Le plus petit idéal $R(A)$ de A, tel que l'algèbre quotient $A/R(A)$ soit semi-simple, est appelé *le radical* de A.

Lemme 5.6. *Soient A une K- algèbre et $R(A)$ le radical de A. Alors $R(A)$ contient tous les idéaux résolubles de A (cf.[2]).*

Théorème 5.7. *Soient A une K- algèbre et $R(A^2)$ le radical de la sous-algèbre A^2. Alors, le radical de $D_K(A)$ est isomorphe à $R(A^2)\oplus N_K(A)$, i.e., $R(D_K(A)) \simeq R(A^2) \oplus N_K(A)$.*

On va démontrer le théorème en identifiant $D_K(A)$ à $A^2 \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$.

En effet, le lemme 5.3. nous dit que $R(A^2) \oplus N_K(A)$ est un idéal de $D_K(A)$. Les isomorphismes

$$\begin{aligned}(A^2/R(A^2)) &\simeq (D_K(A)/N_K(A))/((R(A^2) \oplus N_K(A))/N_K(A)) \\ &\simeq D_K(A)/(R(A^2) \oplus N_K(A))\end{aligned}$$

nous disent que $D_K(A)/(R(A^2) \oplus N_K(A))$ est semi-simple. Par conséquent, on a $R(D_K(A)) \subseteq R(A^2) \oplus N_K(A)$. Mais comme l'idéal $N_K(A)$ est résoluble, en tant que zéro-algèbre, d'après le lemme 5.6. on a $N_K(A) \subseteq R(D_K(A))$. Alors

$$\begin{aligned}D_K(A)/R(D_K(A)) &\simeq \big(D_K(A)/N_K(A)\big)/\big(R(D_K(A))/N_K(A)\big) \\ &\simeq A^2/\big(R(D_K(A))/N_K(A)\big)\end{aligned}$$

est semi-simple. Ceci nous dit que $R(A^2) \subseteq R(D_K(A))/N_K(A)$, où encore $R(A^2) \oplus N_K(A) \subseteq R(D_K(A))$. Ainsi on a $R(D_K(A)) = R(A^2) \oplus N_K(A)$, d'où le théorème.

Remarque 5.8. La dupliquée $D_K(A)$ d'une K- algèbre A ne peut être semi-simple sauf si elle coïncide avec K. En effet, supposons que pour une K- algèbre A, sa dupliquée $D_K(A)$ soit semi-simple. Alors $R(D_K(A)) = \{0\}$ entraîne que $R(A^2) = \{0\}$ et $N_K(A) = \{0\}$. Donc l'algèbre $D_K(A)$ est isomorphe à A^2, ou encore $A \otimes A \simeq A^2$ isomorphisme de K- espaces vectoriels, par conséquent $A = A^2 \simeq K$.

6. Dupliquée et n-associateur.

Un anneau A est dit *n-associatif*, pour un entier $n \geq 3$, si le n-associateur $\{a_1, \ldots, a_n\}$ s'annule pour tout a_i dans A, où

$$\{a_1, \ldots, a_n\} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \{a_1, \ldots, a_k a_{k+1}, \ldots, a_n\} \quad (n \geq 4)$$

et $\{a_1, a_2, a_3\} = (a_1 a_2) a_3 - a_1 (a_2 a_3)$.

Un anneau A est dit *strictement n-associatif* si A est n-associatif et il existe un $(n-1)$-associateur non nul (cf. [4]).

Par la suite, K sera un corps commutatif.

Lemme 6.1. *Soit A une K- algèbre. L'algèbre $D_K(A)$ est associative si et seulement si la sous-algèbre A^2 est associative et $\varphi(x_1 x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2 x_3)$ quels que soient x_1, x_2, x_3 dans A^2.*

En effet, identifions $D_K(A)$ à $A^2 \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$ et soient $y_i = x_i + x'_i$ dans $D_K(A)$ avec x_i dans A^2 et x'_i dans $N_K(A)$ $(i = 1, 2, 3)$. On a $\{y_1, y_2, y_3\} = \{x_1, x_2, x_3\} + \varphi(x_1 x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2 x_3)$. Par conséquent $\{y_1, y_2, y_3\} = 0$ équivaut à $\{x_1, x_2, x_3\} = 0$ et $\varphi(x_1 x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2 x_3)$.

Théorème 6.2. *Soit A une K- algèbre. Si la sous -algèbre A^2 est résoluble d'indice 2, l'algèbre $D_K(A)$ est associative et fortement nilpotente d'indice au plus 3.*

Il suffira ici de montrer que $D_K(A)$ est fortement nilpotente d'indice au plus 3. Supposons alors que A^2 soit une zéro-algèbre et soient $x_i \otimes y_i$ dans $D_K(A)$ $(i = 1, 2, 3)$. On a $(x_1 \otimes y_1)((x_2 \otimes y_2)(x_3 \otimes y_3)) = (x_1 \otimes y_1)(x_2y_2 \otimes x_3y_3) = x_1y_1 \otimes \big((x_2y_2)(x_3y_3)\big) = 0$.

Exemple 6.3. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que l'algèbre A soit associative. En effet, soit A la $\mathbf{R}$-algèbre commutative de dimension 5, du contre-exemple de Suttles (cf. [9]). La table de multiplication de A dans la base $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ est donnée par $c_1c_2 = -c_1c_5 = c_2c_4 = c_3$, $c_1c_3 = c_4$, $c_2c_3 = c_5$, les autres produits étant nuls. On a $A^2 =< c_3, c_4, c_5 >$ et $A^3 = A^2$, donc A n'est pas nilpotente. De plus A n'est pas associative puisque $\{c_1, c_2, c_3\} = c_3$. Cependant $A^2A^2 = 0$, i.e., A^2 est résoluble d'indice 2. Le théorème 6.2. nous dit alors que l'algèbre $D_K(A)$, de dimension 25, est associative et fortement nilpotente d'indice 3.

Théorème 6.4. *Soit A une K- algèbre non nécessairement associative telle que $\dim_K A^2 = 1$. Alors $D_K(A)$ est associative.*

En effet, toute algèbre de dimension 1 étant trivialement associative, l'algèbre A^2 l'est aussi. De plus, de la bilinéarité triviale de φ, il vient que $\varphi(xy, z) = \varphi(x, yz)$, quels que soient x, y, z dans A^2. Le lemme 6.1. nous dit alors que $D_K(A)$ est associative.

Lemme 6.5. *Soit A une K- algèbre. Si la sous-algèbre A^2 est associative, alors tout 3-associateur de $D_K(A)$ est dans $N_K(A)$.*

En effet, soient $x_i \otimes y_i$ dans $D_K(A)$, $i = 1, 2, 3$. On a $\{x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2, x_3 \otimes y_3\} = ((x_1y_1)(x_2y_2)) \otimes x_3y_3 - (x_1y_1) \otimes ((x_2y_2)(x_3y_3))$ et $\mu(\{x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2, x_3 \otimes y_3\}) = ((x_1y_1)(x_2y_2))(x_3y_3) - (x_1y_1)((x_2y_2)(x_3y_3)) = 0$. Donc $\{x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2, x_3 \otimes y_3\}$ est dans $N_K(A)$, d'où le lemme.

Théorème 6.6. *Soit A une K- algèbre. Si la sous-algèbre A^2 est associative, alors $D_K(A)$ est 4-associative.*

En effet, puisqu'on a en général

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = x_1\{x_2, x_3, x_4\} + \{x_1, x_2, x_3\}x_4$$

quels que soient les x_i dans $D_K(A)$ (cf. [4]), les égalités $D_K(A)N_K(A) = 0$, $N_K(A)D_K(A) = 0$ et le lemme 6.5 nous dit que $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = 0$, d'où le théorème.

Rappelons que toute K- algèbre associative, non nil-algèbre contient un idempotent non nul e, i.e., $e^2 = e$. Alors A admet la décomposition de Peirce relative à l'idempotent e, $A = A_{11} \oplus A_{10} \oplus A_{01} \oplus A_{00}$ avec $A_{ij} = \{x \mid x \in A, ex = ix, xe = jx\}$, $i, j = 0, 1$.

Théorème 6.7. *Soit A une K- algèbre. Si la sous-algèbre A^2 est associative de dimension n ($n \geq 2$), non nil-algèbre, alors $D_K(A)$ est strictement 4-associative.*

En effet, supposons que $B = A^2$ soit une algèbre associative non nil-algèbre. Soient e un idempotent de B et $B = B_{11} \oplus B_{10} \oplus B_{01} \oplus B_{00}$ la décomposition de Peirce de B relativement à e. Comme $\dim_K B \geq 2$, il existe dans B un élément x non nul et non colinéaire à e. Soit $x = x_{11} + x_{10} + x_{01} + x_{00}$ avec $x_{ij} \in B_{ij}$. On a $ex = x_{11} + x_{10}$ et $xe = x_{11} + x_{01}$. Considérons deux cas : (i) $ex \neq 0$ (ou $xe \neq 0$). On a $\{e \otimes e, e \otimes x, e \otimes e\} = x_{11} \otimes e + x_{10} \otimes e - e \otimes x_{11}$. Si $x_{11} = 0$, $x_{10} \neq 0$, $x_{10} \otimes e \neq 0$ et si $x_{10} = 0$, $x_{11} \neq 0$ et $x_{11} \otimes e - e \otimes x_{11} \neq 0$, puisque ces deux vecteurs sont nécessairement indépendants. Donc $D_K(A)$ n'est pas associative et le théorème 6.6. nous dit que $D_K(A)$ est 4-associative. Ainsi $D_K(A)$ est strictement 4-associative. (ii) $ex = xe = 0$. Alors x est dans B_{00}. Puisque x est dans A^2, $x = \sum_i x_i' x_i''$ (somme finie) avec x_i' et x_i'' dans A. On a $\{e \otimes e, e \otimes e, \sum_i x_i' \otimes x_i''\} = e \otimes x - (e \otimes e)(e \otimes x) = e \otimes x \neq 0$. Donc $D_K(A)$ n'est pas associative et par suite $D_K(A)$ est strictement 4-associative, d'où le théorème.

Exemple 6.8. Soit A la $\mathbf{R}$-algèbre non associative de dimension 3 dont la table de multiplication dans une base $\{e, e_1, e_2\}$ est donnée par $e^2 = e$, $ee_1 = e_1e = e_2$, les autres produits étant nuls. On a $A^2 =< e, e_2 >$ et A^2 est associative. Cependant, $\{e \otimes e, e \otimes e, e \otimes e_1\} = e \otimes e_2$ est non nul, donc $D_K(A)$ est strictement 4-associative.

Corollaire 6.9. *Soit A une K- algèbre associative de dimension $n \geq 2$. Si $A^2 = A$ alors $D_K(A)$ est strictement 4-associative.*

Il suffit de voir que la condition $A^2 = A$ entraîne que A n'est pas une nil-algèbre.

Si A est une K- algèbre non associative, l'idéal $V_K(A)$, engendré par tous les associateurs, est appelé l'idéal associateur de A. L'algèbre quotient $A/V_K(A)$ est alors associative.

D'après le lemme 6.5. on a $V_K(D_K(A)) \subseteq N_K(A)$ dès que la sous-algèbre A^2 est associative.

Théorème 6.10. *Soit A une K- algèbre. Deux quelconques des conditions suivantes entraînent la troisième : (1) $A = A^2$; (2) $V_K(D_K(A)) = N_K(A)$; (3) $A \simeq D_K(A)/V_K(D_K(A))$, isomorphisme d'algèbres.*

En effet, si $A \simeq D_K(A)/V_K(D_K(A))$ alors A est associative donc il en est de même de la sous-algèbre A^2 ce qui nous montre que $V_K(D_K(A)) \subseteq N_K(A)$. La suite exacte de K- espaces vectoriels
$0 \to N_K(A)/V_K(D_K(A)) \longrightarrow D_K(A)/VK(D_K(A)) \longrightarrow D_K(A)/N_K(A) \to 0$ nous montre que $A \simeq A^2$, isomorphisme d'algèbres, équivaut à $N_K(A) = V_K(D_K(A))$. Le reste de la démonstration suit facilement.

Corollaire 6.11. *Soit A une K- algèbre associative à élément unité à gauche ou à droite. Alors $A \simeq D_K(A)/V_K(D_K(A))$ (cf. [4], théorème 4.3).*

En effet, puisqu'il est clair que $A^2 = A$, d'après le théorème 6.10, il reste à établir que $V_K(D_K(A)) = N_K(A)$ et pour ce faire, il suffira de montrer que $N_K(A) \subseteq V_K(D_K(A))$ car on a déjà $V_K(D_K(A)) \subseteq N_K(A)$. Soit e l'élément unité à gauche de A et soit $x \otimes y$ dans $N_K(A)$. Alors $xy = 0$ et $\{e \otimes e, e \otimes x, e \otimes y\} = (e \otimes x)(e \otimes y) - (e \otimes e)(x \otimes y) = x \otimes y$, donc $x \otimes y$ est dans $V_K(D_K(A))$. Par conséquent $V_K(D_K(A)) = N_K(A)$.

Note 6.12. En termes de dimension, le théorème 6.4. généralise le théorème 2 de [3]. Dans le corollaire 6.9., si l'on suppose que l'algèbre A admet une unité à gauche ou à droite, $A^2 = A$ et on obtient le lemme 4.1. de [4]. Plusieurs exemples contenus dans [4] sont maintenant immédiats. Notons enfin que l'identification de $D_K(A)$ avec le produit semi-direct $A^2 \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$ révèle que les propriétés de la dupliquée d'une algèbre A sont induites par celles de la sous-algèbre A^2 plutôt que par celles de A. Pour d'autres résultats dans le cas des algèbres génétiques, nous renvoyons à [8].

Bibliographie

[1] A.A. Albert, The radical of a non associative algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942), 891–897.

[2] A.A. Albert, On Jordan algebras of lineartransformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* :bf 59 (1946), 524–555.

[3] A.H. Boers, Duplication of algebras. *Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. A 85, Indagationes Math.* **44** (1982), 121–125.

[4] A.H. Boers, Duplication of algebras II. *Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. A 91, Indagationes Math.* **3** (1988), 235–244.

[5] I.M.H. Etherington, Duplication of linear algebras. *Proc. Edinb. Math. Soc.* **6** (1941), 222–230.

[6] A. Micali et P. Revoy, Sur les algèbres gamétiques. *Proc. Edinb. Math. Soc.* **29** (1986), 187–197.

[7] M. Ouattara, Algèbres de Jordan et algèbres génétiques. *Cahiers Mathématiques* **37**, Montpellier 1988.

[8] M. Ouattara et A. Micali, Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington. *Linear Algebra and its Applications*, **153**, 193–207 (1991).

[9] D. Suttles, A counterexample to a conjecture of Albert. *Notices Amer. Math. Soc.* **19** (5), (1972), A. 566.

8

Autour de la dupliquée (*)

Cet article concerne la dupliquée D(A) d'une algèbre A. Dans [1] et [2], Boers traite du problème de la caractérisation des algèbres A dont la dupliquée $D(A)$ est associative ou strictement 4-associative. De plus, si V est l'idéal associateur de $D(A)$, il examine les conditions pour avoir l'isomorphisme $D(A)/V \simeq A$. Nous répondons ici à toutes ces questions. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que la dupliquée $D(A)$ d'une algèbre non associative A soit à puissances associatives, alternative ou de Jordan. De plus, nous montrons que $D(A)/V$ est isomorphe à A si et seulement si $A^2 = A$ est une algèbre associative et $V = \mathrm{Ker}(\mu)$, le noyau du morphisme d'Etherington ([4]).

0. Introduction. Soient K un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, A une K-algèbre commutative (resp. non nécessairement commutative) non nécessairement associative ni ayant un élément unité et $S_K^2(A)$ la seconde puissance symétrique du K-espace vectoriel A. La multiplication $(x.y)(x'.y') = xy.x'y'$ (resp. $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xy \otimes x'y'$) avec x, y, x', y' parcourant A, où $x.y$ désigne le produit symétrique de x par y, définit sur $S_K^2(A)$ (resp. $A \otimes_K A$) une structure de K-algèbre commutative (resp. non commutative) appelée *la dupliquée commutative* (resp. *non commutative*) de A. La dupliquée sera notée $D(A)$.

(*) Ce chapitre a fait l'objet d'une publication parue à *Indagationes Mathematicae* **2**(1), 99–104 (1991)

L'application K-linéaire $\mu : D(A) \to A^2$ définie par $x.y \mapsto xy$ (resp. $x \otimes y \mapsto xy$) est un morphisme surjectif de K-algèbres. On a $D(A)\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Ker}(\mu)D(A) = 0$ et $D(A) = A^2 \underset{s.d.}{\times} \mathrm{Ker}(\mu)$ (s.d. pour semi-direct) isomorphisme d'algèbres, où le produit semi-direct est donné par $(x, x')(y, y') = (xy, \varphi(x, y))$ pour x, y parcourant A^2 et x', y' parcourant $\mathrm{Ker}(\mu)$ et où $\varphi : A^2 \times A^2 \to \mathrm{Ker}(\mu)$ est une application K-bilinéaire.

Lemme 0.1. *Soient C une classe d'algèbres et A une K-algèbre. L'algèbre $D(A)$ est dans C si et seulement si (1) l'algèbre A^2 est dans C et (2) φ est un 2-cocycle de A^2 à coefficients dans* $\mathrm{Ker}(\mu)$ *([4]).*

Une K-algèbre A est dite *alternative* si $x^2y = x(xy)$ et $yx^2 = (yx)x$ pour tous x et y dans A. Une K-algèbre commutative A est dite *de Jordan* si $x^2(yx) = (x^2y)x$ pour tous x et y dans A. Ces deux classes d'algèbres sont à puissances associatives. Une K-algèbre A est une *S-algèbre* si tout sous-K-espace vectoriel est une sous-algèbre ([3]).

Lemme 0.2. *Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Si B est une S-algèbre commutative, alors $B^2 = 0$ ou $B = Ke \oplus B_{1/2}$ avec $e^2 = e$, $B_{1/2} = \{b \in B \mid eb = \frac{1}{2}b\}$ et $B_{1/2}^2 = 0$.*

En effet, si B est une S-algèbre on a en particulier $x^2 \in Kx$ pour tout x dans B. On écrit $x^2 = F(x)x$ avec $F(x)$ dans K. On montre que F est une forme linéaire. Pour ce faire, on a $F(x + \lambda y)(x + \lambda y) = (x + \lambda y)^2 = F(x)x + \lambda^2 F(y)y + 2\lambda xy$. Donc, il existe a et b dans K tels que $xy = ax + by$. Si x et y sont linéairement indépendants, on a $F(x + \lambda y) = F(x) + 2\lambda a$ et $\lambda F(x + \lambda y) = \lambda^2 F(y) + 2\lambda b$, i.e., $F(x) - 2b = \lambda(F(y) - 2a)$. Par conséquent $F(x) = 2b$ et $F(y) = 2a$, d'où $xy = \dfrac{1}{2}(F(y)x + F(x)y)$. De plus $F(x + y)(x + \lambda y) = (F(x) + \lambda F(y))(x + \lambda y)$ entraine que $F(x + \lambda y) = F(x) + \lambda F(y)$. Ainsi F est linéaire. Si $F = 0$ alors $x^2 = 0$ et par suite $B^2 = 0$. Sinon, il existe un y dans B tel que $F(y) \neq 0$. Alors, pour

$e = \dfrac{y}{F(y)}$, on a $F(e) = 1$ et $B = Ke \oplus B'$ où $B' = \mathrm{Ker}(F)$. Maintenant $e^2 = e$, et comme $xy = \frac{1}{2}F(x)y + \frac{1}{2}F(y)x$, on a $ey = \frac{1}{2}y$ pour tout y dans B' et $yz = 0$ quels que soient y et z dans B', i.e., $B' = B_{1/2}$ avec $B'^2 = 0$; d'où le lemme.

1. Associativité des puissances.

Théorème 1.1. *Soient A une K-algèbre commutative et $D(A)$ sa dupliquée commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $D(A)$ est à puissances associatives ; (ii) $D(A)$ est une algèbre de Jordan ; (iii) $B = A^2$ est une S-algèbre commutative.*

$(i) \Rightarrow (iii)$. On remarque que le produit dans $D(A)$ est donné par $zw = \mu(z).\mu(w)$ pour z, w dans $D(A)$. Soit $x \in B = A^2$ et z dans $D(A)$ tel que $\mu(z) = x$. De $(z^2z)z = z^2z^2$ il vient que $(x^2x).x = x^2.x^2$. Si F est une forme linéaire quelconque sur A, $a.b \mapsto F(a)F(b)$ définit une forme linéaire sur $D(A)$ et on a $F(x^2x)F(x) = F(x^2)F(x^2)$. Si $F(x) = 0$, $F(x^2)F(x^2) = 0$, i.e., $F(x) = 0$ entraine que $F(x^2) = 0$. Par conséquent $x^2 \in Kx$ et le lemme 0.2 nous dit que B est une S-algèbre commutative.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Si $B = A^2$ avec $B^2 = 0$, $D(A)$ est une algèbre associative. Si $B = Ke \oplus B_{1/2}$ avec $B_{1/2}^2 = 0$ alors, par le lemme 0.1, il suffira de voir que $B = A^2$ est une algèbre de Jordan et que $\varphi(x^2, yx) = \varphi(x^2y, x)$ pour tous x et y dans B. Or on a $x^2y = F(x)xy$, $x^2(yx) = F(x)x(yx) = (F(x)xy)x = (x^2y)x$ et $\varphi(x^2, yx) = F(x)\varphi(x, yx) = \varphi(x^2y, x)$ car φ est K-bilinéaire symétrique.

$(ii) \Rightarrow (i)$ est évident.

Corollaire 1. *Soit A une K-algèbre à puissances associatives non nil. Alors $D(A)$ est à puissances associatives si et seulement si $A = Ke \oplus A_{1/2} \oplus A_0$, dans sa décomposition de Peirce, où A_0 et $A_{1/2}$ sont des zéro-algèbres et $A_0A_{1/2} \subseteq A_{1/2}$.*

En effet, si $D(A)$ est à puissances associatives, alors $A^2 = Ke \oplus A_{1/2}$ avec $A_{1/2}^2 = 0$ où $A = A_1 \oplus A_{1/2} \oplus A_0$. Comme $A_1 \subseteq A^2$ et que A_1 et A_0 sont des sous-algèbres de A, alors $A_1 = Ke$ et $A_0^2 = 0$. La relation $A_0A_{1/2} \subseteq A_{1/2}$ découle des propriétés de la décomposition de Peirce. La réciproque est immédiate.

Remarque. Une K-algèbre A est dite *de Bernstein* si $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$ où $\omega : A \to K$ est un morphisme, non nul, d'algèbres. On sait ([6], chapitre 9) que A se décompose en $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U^2 \subseteq V$, $UV \subseteq U$, $V^2 \subseteq U$ où e est un idempotent de A, $U = A_{1/2}$ et $V = A_0$. Alors, compte tenu du lemme 0.2, le théorème 1.1 nous dit que la dupliquée d'une algèbre de Bernstein est à puissances associatives si et seulement si $U^2 = 0$. De plus, puisqu'il est bien connu qu'une algèbre de Bernstein est de Jordan si et seulement si $V^2 = 0$ et $v(vu) = 0$ pour tous $v \in V$ et $u \in U$, il est alors facile de voir que l'algèbre A du corollaire 1 est une algèbre de Bernstein-Jordan.

Corollaire 2. *Soit A une K-algèbre commutative non nil de dimension $n > 1$. Si $D(A)$ est à puissances associatives alors $D(A) \simeq D(B)$ où B est l'algèbre de Bernstein triviale de type $(r, n-r)$ et $r = \dim A^2$.*

En effet, si $D(A)$ est à puissances associatives, $A^2 = Ke \oplus A_{1/2}$ où e est un idempotent de A. Soit $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de A^2 avec $e_1 = e$. On la complète en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de A. On a alors : $e_1^2 = e_1$, $e_1e_i = \frac{1}{2}e_i$ pour $i = 2, \dots, r$, $e_ie_j = 0$ pour $i, j = 2, \dots, r$, $e_ie_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ijk}e_k$ dès que $i > r$ ou $j > r$. La famille $(e_i.e_j)_{1 \le i \le j \le n}$ est une base de $D(A)$. Faisons le changement de base suivant : On pose $c_{ij} = e_i.e_j - \alpha_{ij1}e_1.e_1 - 2\sum_{k=2}^{r} \alpha_{ijk}e_1.e_k$ pour $i \le j$ et $j > r$, le reste est inchangé. On a $\mu(c_{ij}) = 0$, donc $c_{ij} \in \mathrm{Ker}(\mu)$. Dans la nouvelle base, la table de multiplication de $D(A)$ devient $(e_1.e_1)^2 = e_1.e_1$, $(e_1.e_1)(e_1.e_i) = \frac{1}{2}e_1.e_i$ pour $i = 2, \dots, r$, $(e_1.e_i)(e_1.e_j) = \frac{1}{4}e_i.e_j$ pour $2 \le i \le j \le r$, les autres produits sont nuls. Soit B l'algèbre de Bernstein triviale de type $(r, n-r)$ dont la table de multiplication dans la base canonique $\{c_1, \dots, c_n\}$ s'écrit : $c_1^2 = c_1$, $c_1c_i = \frac{1}{2}c_i$ pour $i = 2, \dots, r$, les autres produits étant nuls ([6]). La table de multiplication de $D(B)$ dans la base $(c_{ij})_{1 \le i \le j \le n}$, où on a posé $c_{ij} = c_i.c_j$, est donnée par $c_{11}^2 = c_{11}$, $c_{11}c_{1i} = \frac{1}{2}c_{1i}$, pour $i = 2,\ldots,r$, $c_{1i}c_{1j} = \frac{1}{4}c_{ij}$ pour $2 \leq i \leq j \leq r$, les autres produits sont nuls. On voit maintenant que l'application K-linéaire $\sigma : D(A) \to D(B)$, définie par $\sigma(e_i.e_j) = c_{ij}$, pour $1 \leq i \leq j \leq r$ et $\sigma(c_{ij}) = c_{ij}$ pour les autres couples d'indices, est un isomorphisme d'algèbres ; donc $D(A) \simeq D(B)$.

Pour toute algèbre A on note par A^+ l'algèbre commutative dont la multiplication est définie par $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ avec x, y dans A.

Théorème 1.2. *Soient A une K-algèbre et $D(A) = A \otimes A$ sa dupliquée non commutative. Alors :*

(i) $D(A)$ est à puissances associatives si et seulement si B^+ est une S-algèbre commutative où $B = A^2$;

(ii) $D(A)$ est une algèbre alternative si et seulement si $B = A^2$ vérifie $B^2 = 0$ ou $\dim B = 1$.

En effet, supposons que $D(A)$ soit à puissances associatives. Pour x dans B et z dans $D(A)$ tel que $\mu(z) = x$, l'égalité $(z^2z)z = z^2z^2$ entraîne que $(x^2x) \otimes x = x^2 \otimes x^2$. Ceci implique que $(x^2x).x = x^2.x^2$ et par suite $x^2 \in Kx$ pour tout x dans B. Puisque $x^2 = \frac{1}{2}(xx + xx)$, le lemme 0.2 s'applique alors à B^+.
On suppose maintenant que $D(A)$ est alternative. Pour x et y dans B, z et w dans $D(A)$ tels que $\mu(z) = x$ et $\mu(w) = y$, les égalités $z^2w = z(zw)$ et $wz^2 = (wz)z$ se traduisent respectivement par $x^2 \otimes y = x \otimes xy$ et $y \otimes x^2 = yx \otimes x$. Mais comme $D(A)$ est aussi à puissances associatives, l'assertion (i) nous dit que $x^2 = F(x)x$ et les égalités ci-dessus entrainent que $xy = F(x)y = yx$. Par conséquent B est commutative et le lemme 0.2 donne $B^2 = 0$ ou $B = Ke \oplus B_{1/2}$. Mais dans ce dernier cas, $ey = y$ pour tout y dans B ; donc $B_{1/2} = 0$ et $\dim B = 1$.
Les réciproques sont facilement vérifiées. En effet, si par exemple B^+ est une S-algèbre, alors $x^2 = F(x)x$ et en général $x^i = F(x)^{i-1}x$, pour tout entier $i \geq 1$, dans B et B^+. Dans ce cas, pour tout z dans $D(A)$ et pour deux entiers positifs i et j non nuls, si l'on pose $x = \mu(z)$, on a $z^iz^j = x^i \otimes x^j = F(x)^{i+j-2}x \otimes x$ et

$z^{i+j} = x \otimes x^{i+j-1} = F(x)^{i+j-2}x \otimes x$. Donc $z^i z^j = z^{i+j}$ et $D(A)$ est à puissances associatives ; d'où l'assertion (i).

Corollaire 3. *Soit A une K-algèbre alternative non nil. Alors $D(A)$ est alternative si et seulement si $A = Ke \oplus A_{00}$ où $A_{00}^2 = 0$ dans sa décomposition de Peirce.*

La preuve s'obtient de façon analogue à celle du corollaire 1.

Notons que l'algèbre $A = Ke \oplus A_{00}$ avec $A_{00}^2 = 0$ est associative et que si $B = A^2$ vérifie $B^2 = 0$ l'algèbre $D(A)$ est nilpotente d'indice 3. De plus, de par le lemme 0.1, il est facile de voir que si $\dim B = 1$, $D(A)$ est associative. En somme, on peut remplacer, dans le corollaire 3, alternative par associative.

2. La n-associativité.

Une K-algèbre A est dite *n-associative* si le n-associateur $\{x_1, \ldots, x_n\}$ s'annule pour tout x_i dans A, où

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \sum_{k=1}^{n-1} (1)^{k-1} \{x_1, \ldots, x_k x_{k+1}, \ldots, x_n\}$$

pour $n \geq 4$ et $\{x_1, x_2, x_3\} = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$.

Une K-algèbre A est dite *strictement n-associative* si elle est n-associative et il existe un $(n-1)$-associateur non nul ([1]).

On sait ([2]) que si A^2 est une algèbre associative, $D(A)$ est 4-associative.

Théorème 2.1. *Soit A une K-algèbre telle que A^2 soit associative. $D(A)$ est strictement 4-associative si et seulement si A^2 n'est pas une zéro-algèbre et $\dim A^2 \geq 2$.*

En effet, puisque A^2 est associative, $D(A)$ est 4-associative. L'équivalence des deux conditions est assurée par le théorème 1.2.

Le théorème 2.1 répond à la seconde question de Boers.

3. Sur l'idéal-associateur.

Toute K-algèbre non-associative A admet un idéal V engendré par tous les associateurs et appelé ***idéal-associateur.*** V est l'ensemble de toutes les sommes finies d'associateurs et des éléments de la forme $\{x_1, x_2, x_3\}x_4$ où les x_i sont dans A ([2]). Si A est associative, V est nul. Sinon, la K-algèbre quotient A/V est associative.

Théorème 3.1. *Soient A une K-algèbre et $D(A) = A \otimes A$ sa dupliquée non commutative. Si $\dim A = n \geq 2$ et V désigne l'idéal associateur de $D(A)$, alors $D(A)/V \simeq A$ si et seulement si $A = A^2$ et $V = \mathrm{Ker}(\mu)$.*

En effet, notons d'abord que $V \subset (A \otimes A)^2 = B \otimes B$ où $B = A^2$. L'isomorphisme $(A \otimes A)/V \simeq A$ induit les isomorphismes $(B \otimes B)/V = (A \otimes A)^2/V \simeq A^2 = B$. Si $\dim B = m$, on a $\dim V = n^2 - n = m^2 - m$. Puisque $n \geq 2$, nécessairement $m = n$ et $B = A$. Comme $(A \otimes A)/\mathrm{Ker}(\mu) \simeq B = A \simeq (A \otimes A)/V$ est associative, il vient que $V = \mathrm{Ker}(\mu)$. La réciproque est immédiate.

Remarques. (a) Si la K-algèbre A a un élément unité à gauche (ou à droite) alors $\varphi(e, x) = 0$ (resp. $\varphi(x, e) = 0$) pour tout x dans A. En effet, puisque dans ce cas $A^2 = A$, on identifie A à un sous-espace vectoriel de $D(A)$ au moyen de l'application injective $A \to D(A)$, $x \mapsto e \otimes x$. On a alors $(e \otimes x)(e \otimes y) = x \otimes y = e \otimes xy + (x \otimes y - e \otimes xy)$ et $\mu(x \otimes y - e \otimes xy) = 0$ nous disent que $\varphi(x, y) = x \otimes y - e \otimes xy$ quels que soient x et y dans A. En particulier, $\varphi(e, x) = 0$ pour tout x dans A.

(b) Si $A^2 = A$ alors $\mathrm{Ker}(\mu) = \{\varphi(x, y) \mid x \quad \text{et} \quad y \in A^2\}$.

Corollaire ([2]). *Soit A une K-algèbre à élément unité à gauche (où à droite). Alors $D(A)/V \simeq A$ si et seulement si A est associative.*

En effet, supposons que A soit associative et soit e un élément unité à gauche. On a $A^2 = A$ et $\{e + x', y + y', z + z'\} = \varphi(ey, z) - \varphi(e, yz) = \varphi(y, z)$, en vertu de la remarque (a). On voit alors que V est engendré par les $\varphi(y, z)$, y et z parcourant

A^2 et la remarque (b) nous dit que $V = \mathrm{Ker}(\mu)$ et par suite $D(A)/V \simeq A$. Puisque $D(A)/V$ est associative, la réciproque est immédiate.

Bibliographie

[1] A.H. Boers. Duplication of algebras, *Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. A 85, Indagationes Math.* **44** (1982), 121–125.

[2] A.H. Boers. Duplication of algebras II, *Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. A 91, Indagationes Math.* **3** (1988), 235–244.

[3] I. Kaplansky. Algebras with many derivations, in *Aspects of Mathematics and its applications*, J. A. BARROSO editor, 431–438,1986.

[4] A. Micali et M. Ouattara. Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington, *Linear Algebra and its Applications*, **153**, 193–207 (1991).

[5] R.D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1966.

[6] A. Wörz-Busekros. *Algebras in Genetics*, Lecture Notes in Biomathematics **36**, Springer-Verlag, Berlin,1980.

9

Sur la dupliquée d'une algèbre II *

Abstract. We can define duplication of algebra connected with sex-linkage. We give here the general theory of this kind of duplication and show how to compute derivations, automorphisms and idempotents of the duplicate

Ce papier concerne la dupliquée d'algèbres liée au sexe, notion introduite par Ph. Holgate. En suivant les traces d'un papier précédent nous avons calculé les dérivations, automorphismes et idempotents de la dupliquée d'une algèbre. Pour une algèbre A, la condition $A^2 = A$ s'avère souvent indispensable. Si A est l'algèbre génétique d'une population, l'hypothèse $A^2 = A$ traduirait la conservation globale, de génération en génération, du patrimoine génétique de cette population. Aussi, les résultats mentionnés dans ce texte proviendraient du caractère naturel du processus de duplication.

1. Préliminaires.

Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K-algèbre commutative. On définit sur $S_K^2(A)$, la seconde puissance symétrique du K-module A, une multiplication par $(x \cdot x')(y \cdot y') = xx' \cdot yy'$, quels que soient x, x', y, y' dans A, où le symbole $x \cdot x'$ désigne le produit symétrique de x par x'. L'algèbre ainsi définie est notée $D_K(A)$ et est appelée *la dupliquée commutative* de A. L'application $\mu : D(A) \to A^2$, $x \cdot y \mapsto xy$ est un morphisme surjectif de K-algèbres et si $N_K(A)$ désigne son noyau alors $D_K(A)N_K(A) = 0$ (cf. [7]). Une K-algèbre A est dite *pondérée* s'il existe un morphisme surjectif de K-algèbres $\omega : A \to K$. Si ω est

* Ce chapitre a fait l'objet d'une publication en collaboration à *Bulletin de Société Mathématique de Belgique* **43**, *série A, 113–125 (1991)*

une pondération pour A, le morphisme composé $\omega_D = \omega \circ \mu$ est une pondération pour $D_K(A)$. De plus, ω_D est l'unique pondération de $D_K(A)$ si ω est l'unique pondération de A et si A^2 est un K-module projectif.

En effet, soit $\omega' : D_K(A) \to K$ une autre pondération de $D_K(A)$. On sait qu'il existe un vecteur e' dans $D_K(A)$ tel que $\omega'(e') = 1$ et $D_K(A) = Ke' \oplus \mathrm{Ker}(\omega')$, somme directe de K-modules. Comme $e'y = 0$ pour tout y dans $N_K(A)$, alors $N_K(A) \subseteq \mathrm{Ker}(\omega')$. D'autre part, étant donné que $\omega_D(z) = \omega(\mu(z))$ pour tout z dans $D_K(A)$, on a aussi $N_K(A) \subseteq \mathrm{Ker}(\omega_D)$. Or, l'algèbre A^2 étant un K-module projectif, on peut écrire $D_K(A) = A^2 \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$ (cf. [7]) donc pour tout $z = x + y$ dans $D_K(A)$ avec x dans A^2 et y dans $N_K(A)$ on a $\omega_D(z) = \omega_D(x)$ et $\omega'(z) = \omega'(x)$. Comme A possède une pondération unique $\omega : A \to K$, alors $\omega_D(x) = \omega'(x) = \omega(x)$ pour tout x dans A^2 d'où $\omega' = \omega_D$.

On suppose désormais que 2 soit inversible dans K. Sur le K-module $D_K(A) \oplus A$, somme directe, on définit une multiplication par

$$(x \cdot y + z)(x' \cdot y' + z') = \frac{1}{2}(xy \cdot z' + \omega(z')xy) + \frac{1}{2}(x'y' \cdot z + \omega(z)x'y').$$

On notera $D_{K,s}(A)$ la nouvelle algèbre, appelée *la s-dupliquée* de A (s pour l'initiale du mot sexe). Pour l'interprétation de cette algèbre, on renvoie à [4], [6] ou [10]. Si l'on identifie $x \cdot y$ avec $(x \cdot y, 0)$ et z avec $(0, z)$ alors, on a $(x \cdot y)(x' \cdot y') = 0$, $zz' = 0$, et $(x \cdot y)z = \frac{1}{2}(xy \cdot z + \omega(z)xy)$, quels que soient x, y, x', y', z, z' dans A. On voit alors que la K-algèbre $D_{K,s}(A)$ n'est pas pondérée. Cependant, si $\mathcal{B}$ est le sous-K-module de $D_{K,s}(A)$, engendré par les éléments $x \cdot y + z$ avec $\omega_D(x \cdot y) = \omega(z)$, x, y et z parcourant A, alors $\mathcal{B}$ est un idéal de $D_{K,s}(A)$ contenant $D_{K,s}(A)^2$. De plus, l'application $\omega_s : \mathcal{B} \to K$ définie par $x \cdot y + z \mapsto \omega_D(x \cdot y) = \omega(z)$, est une pondération de $\mathcal{B}$.

Dans le cas où K est un corps et (A, ω) une K-algèbre pondérée de dimension n sur K, on a $\dim_K(D_K(A)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dim_K(D_{K,s}(A)) = \dfrac{n(n+3)}{2}$, $\mathrm{Ker}(\omega_D) = A \cdot \mathrm{Ker}(w)$, $\mathcal{B}$ est un idéal de $D_{K,s}(A)$ de codimension 1 et $\mathrm{Ker}(\omega_s) = \mathrm{Ker}(\omega_D) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

On sait qu'il existe une bijection d'ensembles $I_p(A) \tilde{\to} I_p(D_K(A))$ où $I_p(A)$

désigne l'ensemble des idempotents de A et que si $A^2 = A$, il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $Der_K(A) \tilde{\to} Der_K(D_K(A))$ et un isomorphisme de groupes $Aut_K(A) \tilde{\to} Aut_K(D_K(A))$ (cf. [7]).

On se propose ici de calculer les dérivations, automorphismes et idempotents de l'algèbre dans $D_{K,s}(A)$ connaissant ces mêmes objets dans l'algèbre A. Les résultats sont très différents de ceux ci-dessus cités.

2. Le critère fondamental.

Soient K un corps et (A,ω) une K-algèbre pondérée. On dira que (A,ω) est *uniquement pondérée* si ω est l'unique pondération de A et si pour toute extension $K \to L$ de K, où L est un corps commutatif, la L-algèbre $A \otimes_K L$ est aussi munie d'une pondération unique. On dira qu'une K-algèbre pondérée (A,ω) satisfait la condition $(\mathcal{C})$ si pour toute dérivation d de A on a $\omega \circ d = 0$. Les résultats suivants nous montrent que la classe de telles algèbres n'est pas vide :

Lemme 2.1. *Soit (A,ω) une algèbre réelle pondérée. Si ω est l'unique pondération de A alors, pour toute dérivation d de A, on a $\omega \circ d = 0$ (cf.[3], théorème1).*

Lemme 2.2. *Soient K un corps de caractéristique zéro et (A,ω) une K-algèbre uniquement pondérée. Pour toute dérivation d de A, on a $\omega \circ d = 0$ (cf.[1], théorème 3.3).*

Lemme 2.3. *Soient K un corps et (A,ω) une K-algèbre génétique. Supposons que A a un idempotent non nul et que toutes les T-racines de A sont différentes de 1. Alors, pour toute dérivation d de A, on a $\omega \circ d = 0$ (cf.[5], théorème1).*

Soient A une K-algèbre et I un idéal de A. On dira que I est un *idéal caractéristique* de A si pour toute dérivation d de A on a $d(I) \subseteq I$ (cf.[9], page 21).

Lemme 2.4. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et (A, ω) une K-algèbre pondérée. L'algèbre (A, ω) satisfait la condition $(\mathcal{C})$ si et seulement si l'idéal* $\mathrm{Ker}(\omega)$ *est caractéristique.*

En effet, soit d une dérivation de A. L'identité $\omega \circ d = 0$ équivaut à dire que $d(A) \subseteq \mathrm{Ker}(w)$ et en particulier cela entraîne que $\mathrm{Ker}(\omega)$ est invariant sous d, donc $\mathrm{Ker}(\omega)$ est un idéal caractéristique. Réciproquement, supposons que l'idéal $\mathrm{Ker}(\omega)$ soit caractéristique. Puisque, pour tout élément e de A vérifiant $\omega(e) = 1$ on a $A = Ke \oplus \mathrm{Ker}(\omega)$, somme directe de sous-$K$-modules, pour avoir la condition $(\mathcal{C})$ il suffira de montrer que $\omega(d(e)) = 0$ pour toute dérivation d de A. On a $e^2 = e + x$ avec $\omega(x) = 0$. Soit d une dérivation de A. Alors $d(e^2) = 2ed(e) = d(e) + d(x)$ entraîne que $\omega(d(e^2)) = 2\omega(d(e)) = \omega(d(e)) + \omega(d(x)) = \omega(d(e))$, donc $\omega \circ d(e) = 0$, d'où le lemme.

En caractéristique $p \neq 0$, le lemme 2.2 est en défaut comme nous le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.5. Soient K un corps de caractéristique $p \neq 0$ et A_p la K-algèbre associative et commutative de dimension p dont la table de multiplication dans la base $\{e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}\}$ est donnée par $e_i e_k = e_{i+k}$ si $i + k \leq p - 1$ et $e_i e_k = 0$ sinon. L'application $\omega : A_p \to K$ définie par $\omega(e_0) = 1$ et $\omega(e_i) = 0$ pour $i \neq 0$ est l'unique pondération de A_p. De plus (A_p, ω) est uniquement pondérée. Soit $d : A_p \to A_p$ l'application K-linéaire définie par $d(e_i) = ie_{i-1}$ si $i \neq 0$ et $d(e_0) = 0$. Cette application est une dérivation de A_p avec $\omega(d(e_1)) = 1$, donc $\omega \circ d \neq 0$. Cet exemple justifie l'hypothèse du lemme 2.3 car A_p est une algèbre génétique et toutes ses T-racines valent 1. En particulier l'algèbre A_2 est celle de [1, exemple 4.3].

3. Dérivation et dupliquée. Soient K un anneau commutatif à élément unité dans lequel 2 est inversible, (A, ω) une K-algèbre pondérée et $\mathcal{B}$ la sous K-algèbre de $D_{K,s}(A)$ définie dans le paragraphe 1.

Lemme 3.1. *Soit d une K-dérivation de A. Alors, l'application K-linéaire d_s : $D_{K,s}(A) \to D_{K,s}(A)$ définie par $d_s(x \cdot y + z) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y) + d(z)$ est une K-dérivation de $D_{K,s}(A)$ si et seulement si $\omega \circ d = 0$.*

En effet, on a $d_s((x \cdot y)z) = \frac{1}{2} d_s(xy \cdot z + \omega(z)xy) = \frac{1}{2}(d(xy) \cdot z + xy \cdot d(z) + \omega(z)d(xy))$ et $(x \cdot y)d_s(z) + d_s(x \cdot y)z = \frac{1}{2}\big(xy \cdot d(z) + \omega(d(z))xy + (d(x)y + xd(y)) \cdot z + \omega(z)(d(x)y + xd(y))\big) = \frac{1}{2}\big(xy \cdot d(z) + d(xy) \cdot z + \omega(z)d(xy) + \omega(d(z))xy\big)$. De l'égalité de ces deux équations, il vient que $\omega(d(z))xy = 0$, quels que soient x, y, z dans A donc $\omega(d(z)) = 0$ pour tout z dans A.

Soit $L_K(A)$ le sous-K-module de $Der_K(A)$ formé des dérivations d de A telles que $\omega \circ d = 0$. Si d, d' sont dans $L_K(A)$, alors $d(A)$ et $d'(A)$ sont contenus dans $\mathrm{Ker}(\omega)$. Donc $[d, d'](A)$ est aussi contenu dans $\mathrm{Ker}(\omega)$, i.e., $L_K(A)$ est stable sous le crochet de Lie. Ainsi $L_K(A)$ est une sous-algèbre de Lie de $Der_K(A)$.

Lemme 3.2. *Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. L'application K-linéaire $L_K(A) \to Der_K(D_{K,s}(A))$, $d \mapsto d_s$ est un morphisme injectif d'algèbres de Lie.*

Il est clair que cette application est injective et soient d, d' dans $L_K(A)$. Pour x, y, z parcourant A on a $d_s \circ d'_s(x \cdot y + z) = d_s(d'(x) \cdot y + x \cdot d'(y) + d'(z)) = d \circ d'(x) \cdot y + d'(x) \cdot d(y) + d(x) \cdot d'(y) + x \cdot d \circ d'(y) + d \circ d'(z)$ et, par symétrie, $d'_s \circ d_s(x \cdot y + z) = d' \circ d(x) \cdot y + d(x) \cdot d'(y) + d'(x) \cdot d(y) + x \cdot d' \circ d(z)$, quels que soient x, y, z dans A. Il vient alors que $[d_s, d'_s](x \cdot y + z) = [d, d'](x) \cdot y + x \cdot [d, d'](y) + [d, d'](z) = [d, d']_s(x \cdot y + z)$, d'où le lemme.

Théorème 3.3. *Soient K un anneau commutatif intègre à élément unité dans lequel 2 est inversible et (A, ω) une K-algèbre pondérée telle que $A^2 = A$ et supposons que A soit un K-module projectif. Une condition nécessaire et suffisante pour que un K-endomorphisme linéaire D de $D_{K,s}(A)$ soit une K-dérivation est qu'il existe un couple unique (g_D, u_D), où g_D est une K-dérivation de A vérifiant $\omega \circ g_D = 0$ et u_D est un élément de $N_K(A)$, tel que $D(x \cdot y + z) = g_D(x) \cdot y + x \cdot g_D(y) + g_D(z) + (\omega(z) - \omega(xy))u_D$, quels que soient x, y, z dans A.*

En effet, supposons que l'endomorphisme K-linéaire $D : D_{K,s}(A) \to D_{K,s}(A)$ soit une K-dérivation de $D_{K,s}(A)$ et pour tout x dans $D_{K,s}(A)$, écrivons $D(x) = f_D(x) + g_D(x)$ où $f_D : D_{K,s}(A) \to D_K(A)$ et $g_D : D_{K,s}(A) \to A$ sont des applications K-linéaires qui dépendent de D. Or, quels que soient x, y dans $D_K(A)$ on a $xy = 0$ donc, en y appliquant D on a $g_D(x)y + xg_D(y) = 0$ et, par suite, les équations :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \omega(g_D(x))\mu(y) + \omega(g_D(y))\mu(x) &= 0 \\ \mu(x) \cdot g_D(y) + \mu(y) \cdot g_D(x) &= 0 \end{aligned}$$

De même, quels que soient x, y dans A on a $xy = 0$ et si l'on applique D on a $f_D(x)y + xf_D(y) = 0$, d'où les équations :

$$(2) \qquad \begin{aligned} \omega(y)\mu(f_D(x)) + \omega(x)\mu(f_D(y)) &= 0 \\ \mu(f_D(x)) \cdot y + \mu(f_D(y)) \cdot x &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout x dans $D_K(A)$ et pour tout y dans A on a $f_D(xy)+g_D(xy) = f_D(x)y + xg_D(y)$ et d'après la table de multiplication de $D_{K,s}(A)$, on déduit les équations :

$$(3) \qquad \begin{aligned} f_D(xy) &= \tfrac{1}{2}(\mu(f_D(x)) \cdot y + \mu(x)g_D(y)) \\ g_D(xy) &= \tfrac{1}{2}\omega(g_D(y))\mu(x) + \omega(y)\mu(f_D(x)). \end{aligned}$$

La seconde des équations (1) nous dit que $\mu(x) \cdot g_D(x) = 0$ pour tout x dans $D_K(A)$ et comme (A, ω) est une K-algèbre pondérée alors $A^2 \neq 0$ donc, il existe un élément x dans $D_K(A)$ tel que $\mu(x) \neq 0$. Le lemme 3.4. nous dit alors que la relation $\mu(x) \cdot g_D(x) = 0$ dans $S^2_K(A)$ entraîne, puisque A est un K-module projectif, que $g_D(x) = 0$. La seconde des relations (1) nous dit encore que $\mu(x) \cdot g_D(y) = 0$ donc $g_D(y) = 0$ pour tout y dans $D_K(A)$. Ainsi, $g_D : A \to A$ est un endomorphisme K-linéaire de A. D'autre part, la première des relations (2) nous dit que pour tout x dans A on a $\omega(x)\mu(f_D(x)) = 0$ et comme il existe un élément e dans A tel que $\omega(e) = 1$ alors $\mu(f_D(e)) = 0$. De la première des relations (2) on déduit encore, en posant $y = e$, que $\mu(f_D(x)) = 0$ pour tout x dans A. Finalement, pour tout x dans $D_K(A)$ et pour tout y dans A, on a $xy = \dfrac{1}{2}(\mu(x) \cdot y + \omega(y)\mu(x))$ donc $f_D(xy) = \frac{1}{2}(f_D(\mu(x) \cdot y) + \omega(y)f_D(\mu(x)))$ et si l'on compare cette équation avec la première des équations (3), on a

$$(4) \qquad f_D(\mu(x) \cdot y) + \omega(y)(f_D(\mu(x)) = \mu(f_D(x)) \cdot y + \mu(x) \cdot g_D(y)$$

pour tout x dans $D_K(A)$ et pour tout y dans A. De même, si l'on applique g_D au produit xy avec x dans $D_K(A)$ et y dans A, on a $g_D(xy) = \frac{1}{2}(g_D(\mu(x)\cdot y) + \omega(y)g_D(\mu(x))) = \frac{1}{2}\omega(y)g_D(\mu(x))$ et si l'on compare cette équation avec la seconde des équations (3), on a

$$\omega(y)g_D(\mu(x)) = \omega(g_D(y))\mu(x) + \omega(y)\mu(f_D(x)) \tag{5}$$

pour tout x dans $D_K(A)$ et tout y dans A. Si l'on prend $y = e$ avec $\omega(e) = 1$, on a $g_D(\mu(x)) = \omega(f_D(e))\mu(x) + \mu(f_D(x))$ et si l'on y remplace x dans $D_K(A)$ par $\mu(x)\cdot y$, avec x dans $D_K(A)$ et y dans A, on a $g_D(\mu(x)\cdot y) = \omega(g_D(e))\mu(x)y + \mu(f_D(\mu(x)\cdot y))$. Cette équation est à comparer à l'équation que l'on obtient en appliquant μ à l'équation (4), à savoir,

$$\mu(f_D(\mu(x)\cdot y) = \mu(f_D(x))y + \mu(x)g_D(y)$$

ou encore, si l'on y remplace $\mu(f_D(x))$ par son expression donnée ci-dessus, avec l'équation $\mu(f_D(\mu(x)\cdot y)) = g_D(\mu(x))y - \omega(g_D(e))\mu(x)y + \mu(x)g_D(y)$. D'autre part, $\mu(f_D(\mu(x)\cdot y)) = g_D(\mu(x)y) - \omega(g_D(e))\mu(x)y$ donc $g_D(\mu(x)y) = g_D(\mu(x))y + \mu(x)g_D(y)$ pour tout x dans $D_K(A)$ et pour tout y dans A. En particulier, ceci nous montre que g_D est une K-dérivation de A^2 et l'application K-linéaire g : $Der_K(D_{K,s}(A)) \to Der_K(A^2)$, $D \mapsto g_D$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Dans l'équation (5), si l'on prend $y = e$ avec $\omega(e) = 1$, on a $g_D(\mu(x)) = \omega(g_D(e))\mu(x) + \mu(f_D(x))$, donc aussi $\omega(y)g_D(\mu(x)) = \omega(y)\omega(g_D(e))\mu(x) + \omega(y)\mu(f_D(x))$ pour tout x dans $D_K(A)$ et pour tout y dans A. En comparant cette équation avec l'équation (5), on a $\big(\omega(g_D(y)) - \omega(y)\omega(g_D(e))\big)\mu(x) = 0$, pour tout x dans $D_K(A)$ et pour tout y dans A. Mais comme $A^2 \neq 0$, il existe un x dans $D_K(A)$ tel que $\mu(x) \neq 0$ et par suite $\omega(g_D(y)) = \omega(y)\omega(g_D(e))$, pour tout y dans A. Puisque g_D est une K-dérivation de A^2, $g_D((e^2)^2) = 2e^2 g_D(e^2)$ entraîne que $\omega(g_D((e^2)^2) = \omega(g_D(e^2)) = \omega(g_D(e)) = 0$, donc $\omega(g_D(y)) = 0$ pour tout y dans A. Maintenant, remplaçons $\mu(f_D(x)) = g_D(\mu(x))$ dans l'équation (4). On a $f_D(\mu(x)\cdot y) + \omega(y)f_D(\mu(x)) = g_D(\mu(x))\cdot y + \mu(x)\cdot g_D(y)$ ou encore, $f_D(x\cdot y) = g_D(x)\cdot y + x\cdot g_D(y) - \omega(y)f_D(x)$ pour tout x dans A^2 et pour tout y dans A. Si

l'on se restreint au sous-module A^2 on a $f_D(yx) = g_D(y)\cdot x + y\cdot g_D(x) - \omega(x)f_D(y)$ donc $\omega(x)f_D(y) = \omega(y)f_D(x)$, quels que soient x, y dans A^2. En particulier, si l'on prend $y = e^2$ avec e dans A vérifiant $\omega(e) = 1$, alors $f_D(x) = \omega(x)f_D(e^2)$ et si l'on pose $u_D = f_D(e^2)$ alors $f_D(x) = \omega(x)u_D$ pour tout x dans A^2.
Supposons maintenant que $A^2 = A$. Pour x, y, z parcourant A on a alors

$$\begin{aligned} D(x\cdot y + z) &= f_D(x\cdot y + z) + g_D(x\cdot y + z) \\ &= g_D(x)\cdot y + x\cdot g_D(y) + g_D(z) + (\omega(z) - \omega(xy))u_D. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit D un endomorphisme K-linéaire de $D_{K,s}(A)$ tel que, pour x, y, z dans A, on ait $D(x\cdot y+z) = g_D(x)\cdot y+x\cdot g_D(y)+g_D(z)+(\omega(z)-\omega(xy))u_D$. Pour x, y, z dans A on a $D((x\cdot y)z) = \frac{1}{2}D(xy\cdot z+\omega(z)xy) = \frac{1}{2}(g_D(xy)\cdot z+xy\cdot g_D(z) - \omega(xy)\omega(z)u_D+\omega(z)(g_D(xy)+\omega(xy)u_D)) = \frac{1}{2}(g_D(xy)\cdot z+xy\cdot g_D(z)+\omega(z)g_D(xy))$ et, d'autre part, $(x\cdot y)D(z) + D(x\cdot y)z = (x\cdot y)(g_D(z)+\omega(z)u_D) + (g_D(x)\cdot y + x\cdot g_D(y) - \omega(xy)u_D)z = \frac{1}{2}(xy\cdot g_D(z) + \omega(g_D(z))xy + g_D(x)y\cdot z + \omega(z)g_D(x)y + xg_D(y)\cdot z + \omega(z)xg_D(y)) = \frac{1}{2}(g_D(xy)\cdot z + xy\cdot g_D(z) + \omega(z)g_D(xy))$. On voit alors que $D((x\cdot y)z) = D(x\cdot y)z + (x\cdot y)D(z)$, quels que soient x, y, z dans A. L'unicité du couple (g_D, u_D) étant facile à établir, le lemme suivant achève la démonstration du théorème :

Lemme 3.4. *Soient K un anneau commutatif intègre à élément unité et P un K-module projectif. si x, y sont dans P et si $x\cdot y = 0$ dans $S^2_K(P)$ alors $x = 0$ ou $y = 0$.*

Ce lemme est, dans une certaine mesure, un cas particulier du résultat suivant :

Lemme 3.5. *Soient K un anneau commutatif intègre à élément unité et P, Q deux K-modules projectifs. Si x est dans P et y dans Q et si $x\otimes y = 0$ dans $P\otimes_K Q$ alors $x = 0$ ou $y = 0$.*

En effet, le lemme est vrai si P et Q sont des K-modules libres (cf.[2], chapitre II, 3, N^{0}7, corollaire 4 de la proposition 7). Supposons donc que P et Q soient des

K-modules projectifs. Pour tout idéal premier $\wp$ de K, notons $x_\wp$ l'image de x dans P, par la flèche canonique $P \to P_\wp$. On a donc $x_\wp \otimes y_\wp = 0$ dans $P_\wp \otimes_{K_\wp} Q_\wp$ pour tout idéal premier $\wp$ de K, si l'on suppose que $x \otimes y = 0$ dans $P \otimes_K Q$. Notons $I = \{\wp \mid \wp \in Spec(K), x_\wp = 0\}$ et $J = \{\wp \mid \wp \in Spec(K), y_\wp = 0\}$; ce sont deux ouverts de $Spec(K)$ tels que $I \cup J = Spec(K)$ et comme K est intègre, nécessairement $I = Spec(K)$ ou $J = Spec(K)$. On conclut que $x_\wp = 0$ pour tout $\wp$ dans $Spec(K)$ ou $y_\wp = 0$ pour tout $\wp$ dans $Spec(K)$ et le lemme de globalisation nous dit alors que ou bien $x = 0$ ou bien $y = 0$.

Corollaire 3.6. *Soient K un anneau commutatif intègre à élément unité dans lequel 2 est inversible et (A, ω) une K-algèbre pondérée telle que $A = A^2$ et A soit un K-module projectif. Alors $Der_K(D_{K,s}(A)) \tilde{\to} L_K(A) \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$, isomorphisme d'algèbres de Lie, où le produit semi-direct dans $L_K(A) \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$ est donné par $[(d,u),(d',u')] = ([d,d'], d_s(u') - d'_s(u))$.*

En effet, considérons l'application K-linéaire $Der_K(D_{K,s}(A)) \to L_K(A) \underset{s.d.}{\times} N_K(A)$, $D \mapsto (g_D, u_D)$ où $D(x \cdot y + z) = g_D(x) \cdot y + x \cdot g_D(y) + g_D(z) + (\omega(z) - \omega(xy))u_D$, pour tout x, y, z parcourant A. Soient D et D' deux dérivations de $D_{K,s}(A)$. On a $D \circ D'(x \cdot y + z) = D(g_{D'}(x) \cdot y + x \cdot g_{D'}(y) + g_{D'}(z) + (\omega(z) - \omega(xy))u_{D'}) = g_D \circ g_{D'}(x) \cdot y + g_{D'}(x) \cdot g_D(y) + g_D(x) \cdot g_{D'}(y) + x \cdot g_D \circ g_{D'}(y) + g_D \circ g_{D'}(z) + (\omega(z) - \omega(xy))D(u_{D'})$ et par suite $[D, D'](x \cdot y + z) = [g_D, g_{D'}](x) \cdot y + x \cdot [g_D, g_{D'}](y) + [g_D, g_{D'}](z) + (\omega(z) - \omega(xy))(D(u_{D'}) - D'(u_D))$, quels que soient x, y, z dans A. Ceci nous dit que l'application ci-dessus est un morphisme d'algèbres de Lie. En fait, comme $u_{D'}$ est dans $N_K(A) \subseteq D_K(A)$, $D(u_{D'}) = (g_D)_s(u_{D'})$. Le théorème 3.3 achève alors la démonstration du corollaire.

Corollaire 3.7. *Soient K un anneau commutatif intègre à élément unité dans lequel 2 est inversible et (A, ω) une K-algèbre pondérée telle que $A = A^2$ et A soit un K-module projectif. L'application K-linéaire $L_K(A) \to Der_K(\mathcal{B})$, $d \mapsto d_s$ est alors un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

D'après le théorème 3.3, pour toute dérivation D de $D_K(A)$, il existe une unique dérivation d dans $L_K(A)$ telle que $D_{|\mathcal{B}} = d_s$. Puisque l'on voit aussi, par le théorème 3.3, que toute K-dérivation de $\mathcal{B}$ se prolonge en une dérivation de $D_{K,s}(A)$, le lemme 3.2 achève la démonstration.

Notons que si l'algèbre A satisfait la condition $(\mathcal{C})$, $L_K(A) = Der_K(A)$, sinon $L_K(A) \subset Der_K(A)$. Les exemples suivants illustrent ces deux cas :

Exemple 3.8. Soient K un corps commutatif de caractéristique 3 et A_3 la K-algèbre pondérée de dimension 3 de l'exemple 2.5 . On pose $e_{ik} = e_i \cdot e_k = e_k \cdot e_i = e_{ki}$ pour $i \leq k$. Alors $\{e_{00}, e_{01}, e_{02}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_0, e_1, e_2\}$ est une base de $D_{K,s}(A_3)$ et $\{e_0 + e_{00}, e_{01}, e_{02}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_1, e_2\}$ est une base de $\mathcal{B}$ avec la table de multiplication donnée par : $(e_0 + e_{00})e_{0k} = \frac{1}{2}(e_{0k} + e_k)$, $(e_0 + e_{00})e_k = \frac{1}{2}e_{0k}$, $e_{0i}e_k = \frac{1}{2}e_{ik}$ pour i et k non nuls, $(e_0+e_{00})e_{11} = \frac{1}{2}(e_{02}+e_2)$, $e_{11}e_1 = \frac{1}{2}e_{12}$, $e_{11}e_2 = \frac{1}{2}e_{22}$, les autres produits étant nuls. Les dérivations d de A_3 sont définies par $d(e_0) = 0$, $d(e_1) = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$, $d(e_2) = 2\alpha e_1 + 2\beta e_2$ pour α, β et γ parcourant K. Autrement dit $Der_K(A_3)$ est de dimension 3, engendré par d_0, d_1 et d_2 avec $d_i(e_0) = 0$ pour $i = 0, 1, 2$, $d_0(e_1) = e_0$, $d_0(e_2) = 2e_1$, $d_1(e_1) = e_1$, $d_1(e_2) = 2e_2$, $d_2(e_1) = e_2$ et $d_2(e_2) = 0$. Les calculs nous montrent que les dérivations d de $\mathcal{B}$ sont données par : $d(e_0+e_{00}) = 0$, $d(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2$, $d(e_2) = 2\alpha e_2$, $d(e_{01}) = \alpha e_{01} + \beta e_{02}$, $d(e_{02}) = 2\alpha e_{02}$, $d(e_{12}) = \beta e_{22}$, $d(e_{11}) = 2\alpha e_{11} + 2\beta e_{12}$, $d(e_{22}) = \alpha e_{22}$ pour α et β dans K. On voit que $L_K(A_3)$ est l'algèbre de Lie non-abélienne de dimension 2, engendrée par d_1 et d_2. Conformément au corollaire 3.7, on vérifie que $Der_K(\mathcal{B})$, engendrée par d_{1s} et d_{2s}, est isomorphe à $L_K(A_3)$. Cependant, l'application K-linéaire d_{0s} n'est pas une dérivation de $D_{K,s}(A_3)$ (car $\omega(d_0(e_1)) = 1$). Finalement, $N_K(A_3) =< e_{12}, e_{22}, e_{02} - e_{11} >$ et $Der_K(D_{K,s}(A_3)) \tilde{\rightarrow} K^6$, isomorphisme de K-espaces vectoriels.

Exemple 3.9. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et $A = G(n+1, 2)$ la K-algèbre gamétique d'une population dipoïde avec $n+1$ allèles. Dans la base naturelle $\{a_0, \dots, a_n\}$ la table de multiplication est donnée par $a_i a_k = \frac{1}{2}(a_i + a_k)$, i, $k = 0, \dots, n$. Une base canonique est définie en posant

$c_0 = a_0$, $c_i = a_0 - a_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, avec la table de multiplication $c_0^2 = c_0$, $c_0 c_i = \frac{1}{2} c_i$, $c_i c_k = 0$ $(i,\, k \geq 1)$. La dupliquée commutative de A, notée $Z(n+1,2)$, est l'algèbre zygotique de la même population. Sa base canonique induite par celle de $G(n+1,2)$ est $\{c_{ik}\}_{i \leq k}$ où l'on a posé $c_{ik} = c_i \cdot c_k = c_k \cdot c_i$. Dans la base $\{c_0, \ldots, c_n, c_{00}, \ldots, c_{0n}, \ldots, c_{nn}\}$ de $D_{K,s}(A)$, la table de multiplication est donnée par $c_i c_k = 0 = c_{ij} c_{kl}$, pour tous i, j, k, l et

	c_{00}	c_{oj}	c_{jk}
c_0	$\frac{1}{2}(c_0 + c_{00})$	$\frac{1}{4}(c_j + c_{0j})$	0
c_i	$\frac{1}{2} c_{0i}$	$\frac{1}{4} c_{ij}$	0

avec i, j, $k \neq 0$. Une base de $N_K(A)$ est $\{c_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$. On sait (cf.[8]) que les éléments d_k, d_{ij} $(k = 1, \ldots, n\,;\ 1 \leq i \leq j \leq n)$, définis par $d_k(c_0) = c_k$, $d_k(c_1) = 0$, pour $i \neq 0$; $d_{ij}(c_j) = c_i$, $d_{ij}(c_\ell) = 0$ pour $\ell \neq j$, forment une base de $Der_K(A)$. Alors une base de $Der_K(D_{K,s}(A))$ est $\{d_{k,s}, d_{ij,s}, \ell_{pq}\}$ $(i,\, j,\, k = 1, \ldots, n\,;\ 1 \leq p \leq q \leq n)$ avec $d_{k,s}(c_0) = c_k$, $d_{k,s}(c_{00}) = 2c_{0k}$, $d_{k,s}(c_{0i}) = c_{ki}$ $(i \neq 0)$; $d_{ij,s}(c_j) = c_i$, $d_{ij,s}(c_{0j}) = c_{0i}$, $d_{ij,s}(c_{jj}) = 2c_{ii}$, $d_{ij,s}(c_{j\ell}) = c_{i\ell}$ $(\ell \neq j)$; $\ell_{pq}(c_0) = c_{pq}$, $\ell_{pq}(c_{00}) = -c_{pq}$ où les images non écrites sont nulles. Enfin $\{c_0 + c_{00}, c_1, \ldots, c_n, c_{01}, \ldots, c_{nn}\}$ est une base de $\mathcal{B} = D_{K,s}(A)^2$, $Der_K(\mathcal{B}) = < d_{k,s}, d_{ij,s} >$ $(i,\, j,\, k = 1, \ldots, n)$ et $Der_K(\mathcal{B}) \tilde{\rightarrow} Der_K(G(n+1,2))$, isomorphisme d'algèbres de Lie.

4. Automorphisme et dupliquée.

Soit K un anneau commutatif à élément unité. Un *morphisme d'algèbres pondérées* $f : (A,\omega) \rightarrow (A',\omega')$ est un morphisme de K-algèbres $f : A \rightarrow A'$ vérifiant $\omega' \circ f = \omega$. Si (A,ω) est une K-algèbre pondérée, tout morphisme de K-algèbres $f : A \rightarrow A'$, produit un morphisme d'algèbres pondérées $f : (A,\omega) \rightarrow (f(A),\overline{\omega})$ avec $\overline{\omega}(f(x)) = \omega(x)$ pour tout x dans A. Soient A une K-algèbre et $D_K(A)$ sa dupliquée. Pour tout automorphisme σ de A, l'application

$\sigma^* : D_K(A) \to D_K(A)$, $x \cdot y \mapsto \sigma(x) \cdot \sigma(y)$ est un automorphisme de $D_K(A)$ et si ω est l'unique pondération de A, on a $\omega \circ \sigma = \omega$ et $\omega_D \circ \sigma^* = \omega_D$. Il est facile de voir que l'isomorphisme de K-modules $\sigma_s : D_{K,s}(A) \to D_{K,s}(A)$ défini par $\sigma_s(x \cdot y + z) = \sigma(x) \cdot \sigma(y) + \sigma(z)$ est un automorphisme de $D_{K,s}(A)$ si et seulement si $\omega \circ \sigma = \omega$, où on a supposé que 2 est inversible dans K.

Ces considérations étant faites, les résultats obtenus dans le paragraphe 3 concernant les dérivations restent encore vrais, mutatis mutandis, pour les automorphismes. A titre d'exemple, nous allons donner, pour les automorphismes, le correspondant du théorème 3.3.

Théorème 4.1. *Soient K un anneau commutatif intègre à élément unité dans lequel 2 est inversible et (A,ω) une K-algèbre pondérée telle que $A = A^2$ et supposons que A soit un K-module projectif. Une condition nécessaire et suffisante pour que une application K-linéaire bijective $\tau : D_{K,s}(A) \to D_{K,s}(A)$ soit un automorphisme est qu'il existe un unique couple (σ, u_τ) où σ est un automorphisme de A vérifiant $\omega \circ \sigma = \omega$ et u_τ est un élément de $N_K(A)$ tel que*

$$\tau(x \cdot y + z) = \sigma(x) \cdot \sigma(y) + \sigma(z) + (\omega(z) - \omega(xy))u_\tau,$$

quels que soient x, y, z dans A.

Note 4.2. Dans [10], l'Auteur généralise le concept de la s-dupliquée de la façon suivante : soient K un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, (A,ω) une K-algèbre pondérée, $D_K(A)$ sa dupliquée et $\rho : A \to A$ une application K-linéaire vérifiant $\omega(\rho(x)) = \frac{1}{2}\omega(x)$. Sur le K-espace vectoriel $D_K(A) \oplus A$ on définit une multiplication par

$$(x \cdot y + z)(x' \cdot y' + z') = xy \cdot \rho(z') + \frac{1}{2}\omega(z')xy + x'y' \cdot \rho(z) + \frac{1}{2}\omega(z)x'y'.$$

On note $D_{K,s,\rho}(A)$ l'algèbre ainsi obtenue. Dans ce cas, il conviendrait de supposer dans le lemme 3.1 une condition de compatibilité, i.e., si d est une K-dérivation de A, alors d_s est une K-dérivation de $D_{K,s,\rho}(A)$ si et seulement si $\omega \circ d = 0$ et $d \circ \rho = \rho \circ d$. De même, si σ est un K-automorphisme de A, alors σ_s est un K-automorphisme de $D_{K,s,\rho}(A)$ si et seulement si $\omega \circ \sigma = \omega$ et $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$.

5. Les idempotents de l'algèbre $\mathcal{B}$.

Théorème 5.1. *Soient K un anneau commutatif à élément unité dans lequel 2 est inversible et (A,ω) une K-algèbre pondérée. Il existe alors une bijection d'ensembles $I_p(A) \tilde{\rightarrow} I_p(\mathcal{B})$ définie par $e \mapsto e \cdot e + e$.*

Soit $e = e_1 + e_2$ un idempotent de $\mathcal{B}$, avec e_1 dans $D_K(A)$ et e_2 dans A. On sait alors que $\omega_s(e) = \omega_D(e_1) = \omega(e_2) = 1$. L'égalité $e^2 = e$ donne $\mu(e_1) \cdot e_2 + \omega(e_2)\mu(e_1) = e_1 + e_2$, soit, par identification, $e_2 = \mu(e_1)$ et $e_1 = \mu(e_1) \cdot e_2 = e_2 \cdot e_2$. En y appliquant μ il vient que $e_2 = \mu(e_1)^2 = e_2^2$, donc e_2 est un idempotent de A et $e = e_2 \cdot e_2 + e_2$. La réciproque est immédiate.

Bibliographie

[1] M.T. Alcalde, C. Burgueño, A. Labra et A. Micali, Sur les algèbres de Bernstein, *Proc. London Math. Soc.* (3) **58** (1989) 51–68.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre* 1, chapitres 1 à 3, Hermann, Paris 1970.

[3] R. Costa, On the derivation algebra of zygotic algebras for polyploidy with multiple alleles, *Bol. Soc. Bras. Mat.* vol. **14** n^0 1 (1983), 63–80.

[4] I.M.H. Etherington, Non associative algebra and the symbolism of genetics, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* sect. B, **61** (1941), 24–42.

[5] H. Gonshor, Derivations in genetic algebras, *Communications in Algebra* **16** (8) (1988), 1525–1542.

[6] Ph. Holgate, Genetic algebras associated with sex-linkage, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **17** (1970), 113–120.

[7] A. Micali et M. Ouattara, Dupliquée d'une algèbre et le théorème d'Etherington, *Linear Algebra and its Applications*, **153**, 193–207 (1991).

[8] A. Micali et M. Ouattara, Algèbres de Jordan génétiques II, in *Cahiers Mathématiques 38*, Montpellier (1989), 77–107.

[9] R.D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1966.

[10] A. Wörz- Busekros, The zygotic algebra for sex-linkage, *J. Math. Biol.* **2** (1975), 359–371.