Année Universitaire
1996-1997

N° d'Ordre : 249 / 97

THESE

présentée pour obtenir le grade

de

DOCTEUR D'ETAT

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

par

Philippe Kodjo AYEGNON

FILTRATIONS APPROXIMABLES PAR DES PUISSANCES D'IDEAUX PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DEVIATIONS ASYMPTOTIQUES

Soutenue le 17 Avril 1997

Président :	Saliou TOURE	Université de Cocody, Côte d'Ivoire
Examinateurs :	Edmond FEDIDA	Université de Cocody, Côte d'Ivoire
	Akry KOULIBALY	Université de Ouagadougou, Burkina Faso
	Pierre NEZIT	Université de Cocody, Côte d'Ivoire
	Daouda SANGARE	IUFM de Lyon, France
	Hamet SEYDI	Université de Dakar, Sénégal
	Henri DICHI	Université de Clermont-Ferrand, France

Seigneur, je rendrai grâce de tout mon cœur,
je redirai toutes tes merveilles.
Tu me fais danser de joie, et je chante ton nom,
Dieu Très-Haut.
Ps 9. 2,3.

A L'Eternel Dieu le Père Tout - Puissant,

Qui, dans sa miséricorde, dans sa bonté m'a sauvé la vie, celle de mon épouse et de nos enfants le 13-08-95.

Tu es digne Seigneur que nous Te dédiions cette Thèse.

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur Daouda SANGARÉ, je ne saurai comment vous remercier. Je laisse le soin au seigneur Dieu le Tout-Puissant de vous bénir. De tout mon coeur, je vous dis merci.

Avec l'équipe d'Algèbre Commutative de l'Université de Cocody que vous avez formée durant les séminaires qui se déroulent les mercredis, vous avez fait de moi aujourd'hui un algébriste. Ce n'est pas sans difficultés, sans efforts que vous m'avez formé mais vous m'avez donné le sens de la recherche, de chercher avec patience et de trouver dans la joie. Mille et une fois vous m'avez prodigué des conseils, des éternels recommencements pour parfaire car vous êtes de la trempe de ceux qui aiment le travail minutieux, fin. Cher Professeur une fois encore je vous dis merci, vous qui avez veillé à passer des heures et des heures à examiner mes travaux négligeant ainsi peut être vos temps de loisirs et de recherches. Je reconnais cher Professeur votre valeur, votre qualité de mathématicien et vous avez déteint sur moi vos empreintes. Je vous renouvelle ma gratitude.

Je tiens à remercier Monsieur Henri DICHI de l'Université de Clermont-Ferrand pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail et pour tous les conseils qu'il m'a donnés pour améliorer bon nombre de résultats.

Toute ma gratitude va aussi aux Professeurs Edmond FEDIDA et Pierre NEZIT pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Tous mes remerciements vont au Professeur Akry KOULIBALY de l'Université de Burkina Faso et au Professeur Hamet SEYDI de l'Université de Dakar pour leur contribution à la formation des Algébristes de l'Université de Cocody depuis deux décennies et pour leur présence au sein de ce jury.

Toute ma reconnaissance va au Professeur Saliou TOURE qui m'a acueilli à l'Université de Cocody et qui m'est toujours venu en aide pour la résolution de mes problèmes sociaux et professionnels. Je le remercie pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.

Je remercie également tous les amis et les membres de la Société Mathématiques de Côte d'Ivoire (SMCI) pour leurs conseils et leurs soutiens.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Adou N'CHO qui a assuré la dactylographie de cette thèse sur MACINTOSH du Centre de Calcul de L'IRMA.

Et enfin à Georgette ma complice angélique de toujours qui tenait à cette thèse, je lui dis merci, elle a gagné le pari.

TABLES DES MATIERES

INTRODUCTION

Les lettres I et J désigneront des idéaux de l'anneau commutatif unitaire A. Les nombres suivants ont été introduits par P. Samuel [16].

$$v_I(J) = \sup\{r \in \mathbb{N} \ ; J \subseteq I^r\}$$

$$w_I(J) = \sup\{r \in \mathbb{N} \ ; J \supseteq I^r\}$$

$$\overline{v}_I(J) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} v_I(J^n)$$

$$\overline{w}_I(J) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} w_I(J^n).$$

$\overline{v}_I(J)$ et $\overline{w}_I(J)$ sont appelés les nombres de Samuel de I et J. Samuel a prouvé que ces nombres existent sous les conditions suivantes : A est nœthérien, I et J sont non-nilpotents, $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ et $\bigcap_n I^n = (0) = \bigcap_n J^n$.

D. Rees [14] en a déduit les pseudo-valuations homogènes $x \longmapsto \overline{v}_I(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} v_I(x^n)$ en posant pour tout x élément de A, $v_I(x) = v_I(xA)$ et $\overline{v}_I(x) = \overline{v}_I(xA)$.

Ces pseudo-valuations ont fait l'objet d'une littérature abondante (Nagata [12], Petro [13], S. Mc Adam [10] et [11] etc...). Les nombres de Samuel $\overline{v}_I(J)$ et $\overline{w}_I(J)$ ont des applications en Géométrie analytique complexe (Lejeune Tersier [9]) et en théorie asymptotique des idéaux (D. Sangaré [17]). Leur généralisation aux filtrations $f = (I_n)$ sous la forme $x \longmapsto \overline{v}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} v_f(x^n)$, où $v_f(x) = \sup\{n \in \mathbb{N} \ , x \in I_n\}$, a été étudiée par Petro [13] et D. Sangaré [17].

Dans [1] nous avons généralisé la définition des nombres $v_I(J)$, $\overline{v}_I(J)$, $w_I(J)$, $\overline{w}_I(J)$ aux filtrations comme suit : si $f = (I_n)$ est une filtration de A, nous posons pour tout idéal J de A, $v_f(J) = \sup\{r \in \mathbb{N} \ ; J \subseteq I_r\}$, $w_f(J) = \sup\{r \in \mathbb{N} \ ; J \supseteq I_r\}$ et $w_f(J) = \infty$ si l'ensemble $\{r \in \mathbb{N} \ ; J \supseteq I_r\}$ est vide. Si $g = (J_n)$ est une autre filtration de A, on appelle les nombres de Samuel généralisés de f et g les nombres $\overline{v}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} v_f(J_n)$ et $\overline{w}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} w_f(J_n)$ à conditions que ces limites existent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. En particulier si I et J sont des idéaux de A et si f_I (resp. f_J) est la filtration I-adique (resp. J-adique) de A, nous avons :

$$v_{f_I}(J) = v_I(J)\ ,\ \ \overline{v}_{f_I}(f_J) = \overline{v}_I(J)\ \ ,\ w_{f_I}(f_J) = w_I(J)\ \text{ et }\ \overline{w}_{f_I}(f_J) = \overline{w}_I(J)\ .$$

Dans [2], on a étendu aux filtrations un résultat dû à D. Rees [14] en prouvant que si A est nœthérien, g est une AP filration et f est fortement AP, alors g est entière sur f si et seulement si $\overline{v}_f(g) \geq 1$. Plus récemment, avec l'équipe d'Algèbre Commutative de l'Université d'Abidjan, nous avons publié deux autres articles [3] et [4] sur l'étude des nombres de Samuel; nous avons montré en particulier dans [3] que: $\overline{v}_f(g+h) = \inf(\overline{v}_f(h)\ ,\ \overline{v}_f(g))$ où f, g et h sont des filtrations de l'anneau A, telles que f et g soient des AP filtrations. Cette formule généralise un resultat de P. Samuel [16].

Il a été montré dans ([2], 2.9) que l'on ne pouvait définir $\overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_f(g)$ pour toutes filtrations f et g de l'anneau A. Plus précisément $\overline{v}_f(g)$ existe si g est une AP filtration (proposition 2.6, [2]) et $\overline{w}_f(g)$ est défini pour toute AP filtration f de l'anneau A (proposition II.1.3). On aimerait définir pour toutes filtrations de l'anneau A deux réels appartenant à $\overline{\mathbb{R}}_+$ et coïncidant avec les nombres de Samuel généralisés $\overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_f(g)$ quand ceux-ci existent. Pour ce faire nous généralisons la définition d'une filtration, en considérant un ensemble X non vide et $F = (F_n)$ une suite décroissante de sous-ensembles non vides de X avec $F_0 = X$. F est appelée filtration de l'ensemble X. Si $G = (G_n)$ est une autre filtration de l'ensemble X, $F \leq G$ signifie que $F_n \subseteq G_n$ pour tout entier n. Si $r \in \mathbb{N}^*$, $F^{(r)} = (F_{nr})$ est une filtration de l'ensemble de X .

On pose alors :

- $a_F(G) = \sup\{r \in \mathbb{N}^*\ ;\ G \leq F^{(r)}\}$ si $\{r \in \mathbb{N}^*\ ;\ G \leq F^{(r)}\}$ est non vide et

$a_F(G) = 0$ sinon

• $b_F(G) = \inf\{r \in \mathbb{N}^* \,;\, F^{(r)} \leq G\}$ si $\{r \in \mathbb{N}^* \,;\, F^{(r)} \leq G\}$ est non vide et $b_F(G) = \infty$ sinon.

Nous avons alors montré que les nombres

$\bar{a}_F(G) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, a_F(G^{(n)})$ et $\bar{b}_F(G) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, b_F(G^{(n)})$ existent dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. Nous faisons ensuite remarquer que si f et g sont des filtrations de l'anneau A et le nombre de Samuel généralisé $\bar{v}_f(g)$ (resp. le nombre de Samuel généralisé $\bar{w}_f(g)$) existe dans dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ alors $\bar{a}_f(g) = \bar{v}_f(g)$ (resp. $\bar{b}_f(g) = \bar{w}_f(g)$).

Nous étendons aussi l'étude des nombres de Samuel généralisés $\bar{v}_\varphi(\theta)$ et $\bar{w}_\varphi(\theta)$ aux filtrations φ et θ d'un A-module M.

Pour deux filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ de l'anneau A.

Nous posons :

$$e_f(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}(n\bar{a}_f(g) - a_f(g^{(n)}),$$

$$E_f(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}(b_f(g^{(n)}) - n\bar{b}_f(g))$$

Les nombres $e_f(g)$ et $E_f(g)$ sont appelés des déviations asymptotiques de f et g.

Dans [16]. P. Samuel avait posé la question de savoir si ces déviations asymptotiques appartiennent à $\mathbb{R}_+$. Nagata [12] et Mc Adam [11] ont répondu à cette question lorsque $f = f_I$ et $g = f_J$.

Nous avons abordé l'étude de ces nombres dans le cas des filtrations qui ne sont pas nécessairement adiques.

Nous avons montré que si $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ sont des filtrations fortement AP respectivement de rangs k et s appartenant à $\underline{\mathbf{B}}$ telles que $I_k \in U(J_s)$. Alors $e_f(g) \in \mathbb{R}_+$ et $E_f(g) \in \mathbb{R}_+$.

Parmi nos principaux résultats figurent les théorèmes suivants :

Théorème I.1.4

Soient $F = (F_n)$, $G = (G_n)$ des filtrations de l'ensemble X. Alors les suites $(\frac{1}{n} a_F(G^{(n)}))$ et $(\frac{1}{n} b_F(G^{(n)}))$ sont convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. En plus si $\overline{a}_F(G) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_F(G^{(n)})$ et $\overline{b}_F(G) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} b_F(G^{(n)}))$ on a :

(i) $\overline{a}_F(G) = \liminf \frac{1}{n} v_F(G_n)$.

(ii) $\overline{b}_F(G) = \limsup \frac{1}{n} w_F(G_n)$.

Théorème II.2.6

Soient f, g et h des filtrations de l'anneau A. Alors on a :

(i) $\overline{a}_f(g + h) = \min (\overline{a}_f(g), \overline{a}_f(h))$.

(ii) $\overline{b}_{g + h}(f) = \sup (\overline{b}_g(f), \overline{b}_h(f))$.

Théorème III.2.9.

$E(g) \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si g vérifie la condition IN_2.

Théorème III.2.11

Soit $g \in F(A)$ une filtration fortement nœthérienne telle que la filtration $\overline{g}$ soit nœthérienne .

Alors : $e(g) \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si g vérifie la condition IN_1.

Théorème IV.3.7 (Inégalités asymptotiques).

Soient f et g des AP filtrations de l'anneau nœthérien A, φ et θ des filtrations séparées et non nilpotentes du A-module de type fini M telles que φ soit faiblement f-bonne et θ faiblement g-bonne, avec $\dim f = 0$ et $\operatorname{alt} f = s$.

Si $\sqrt{f} = \sqrt{g}$ alors on a :

$$(\overline{v}_f(g))^s e(\varphi,s) \le (\overline{v}_\varphi(\theta))^s e(\varphi,s) \le e(\theta,s) \le (\overline{w}_\varphi(\theta))^s e(\varphi,s) \le (\overline{w}_f(g))^s e(\varphi,s).$$

Théorème V.2.13

Si b est un élément régulier de A alors pour toute filtration f de A, on a :

$\overline{\beta}_f(b) = \overline{\alpha}_{b\mathcal{R}(f)}(u\mathcal{R}(f))$.

Le théorème I.1.4 nous permet d'avoir une relation entre $\overline{a}_F(G)$ et $\overline{b}_F(G)$ et les nombres généralisés de Samuel

Le théorème II.2.6 est une généralisation du théorème 2 de [16].

Le théorème III.2.9 et le théorème III.2.11 sont les analogues pour les filtrations du théorème 1.2 [11].

Le Théorème IV.3.7 est une généralisation du théorème III.2.2 [1] aux filtrations sur un A-module.

Notre travail se divise en 5 chapitres.

Dans le chapitre I, nous étudions $\overline{a}_F(G)$ et $\overline{b}_F(G)$ dans le cas des filtrations d'un ensemble et nous obtenons les théorèmes I.1.4 et I.2.3.

Le chapitre II concerne l'étude de $\overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_f(g)$. Nous y établissons le théorème II.2.6 et nous donnons une condition nécessaire et suffisante portant sur $\overline{v}_f(g)$ pour que $g \leq \overline{f}$.

Au chapitre III nous nous intéressons aux déviations asymptotiques dans le cas des filtrations sur un anneau et nous démontrons ensuite les théorèmes III.2.9 et III.2.11.

Le chapitre IV nous permet d'étudier les nombres de Samuel généralisés $\overline{v}_\varphi(\theta)$ et $\overline{w}_\varphi(\theta)$ sur un module et nous obtenons le théorème IV.3.2 concernant l'existence de $\overline{v}_\varphi(\theta)$ et $\overline{w}_\varphi(\theta)$.

Enfin au chapitre V, nous abordons l'étude de deux fonctions $\overline{\alpha}_f(g)$ et $\overline{\beta}_f(g)$ où f et g sont des filtrations de l'anneau A. Ces fonctions ont été étudiées par Mac Adam dans [10] quand f et g sont des filtrations adiques.

CHAPITRE I

ETUDE DES NOMBRES $\bar{a}_F(G)$ et $\bar{b}_F(G)$.
FILTRATIONS D'UN ENSEMBLE

§.1 GÉNÉRALITÉS

I.1.1 Définitions.

(1) Soient X un ensemble non vide et $F = (F_n)$ une suite décroissante de sous-ensembles non vides de X avec $F_0 = X$. F est appelée une filtration de X. Pour tout réel $\lambda>0$, on note $F^{(\lambda)}$ la filtration $(F_{\lceil \lambda n \rceil})$ de X où si β est un réel $\lceil \beta \rceil$ est le plus petit entier $\geq \beta$ et $\lfloor \beta \rfloor$ est la partie entière de β

(2) Soient $G = (G_n)$ et $F = (F_n)$ des filtrations de X. $F \leq G$ signifie $F_n \subseteq G_n$ pour tout entier n.

(3) Soient $G = (G_n)$ et $F = (F_n)$ des filtrations de X et U un sous ensemble non vide de X. On pose :

(i) $v_F(U) = \sup\{n \in \mathbb{N}\ ,\ U \subseteq F_n\}$

(ii) $w_F(U) = \inf\{n \in \mathbb{N}\ ,\ F_n \subseteq U\}$ et $w_F(U) = \infty$ si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, F_n \subseteq U\}$ est vide.

(iii) $a_F(G) = \sup\{r \in \mathbb{N}^*, G \leq F^{(r)}\}$ si $\{r \in \mathbb{N}^*, G \leq F^{(r)}\}$ est non vide et $a_F(G) = 0$ sinon ;

(iv) $b_F(G) = \inf\{r \in \mathbb{N}^*, F^{(r)} \leq G\}$ si $\{r \in \mathbb{N}^*, F^{(r)} \leq G\}$ est non vide et $b_F(G) = \infty$ sinon.

I.1.2 Exemples.

Considérons l'ensemble $X = \mathbb{N}$ et posons $G_n = 3^{n+1}\mathbb{N}$, $F_n = 3^{\lceil n/2 \rceil +1}\mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_0 = G_0 = X$. $F = (F_n)$ et $G = (G_n)$ sont des filtrations de l'ensemble X. On a alors : $w_F(G_n) = 2n - 1$ et $v_F(G_n) = 2n$ pour tout entier $n \geq 1$. $\bar{b}_F(G) = 2 = \bar{a}_F(G)$.

Considérons toujours l'ensemble $X = \mathbb{N}$ et posons $H_1 = 2\mathbb{N}$ et $H_n = \{0\}$ pour tout entier $n \geq 2$; $K_n = 2\mathbb{N}$ pour tout entier $n \geq 1$; $K_0 = H_0 = X$. $H = (H_n)$ et $K = (K_n)$ sont des filtrations de X. On a alors $v_H(K_n) = 1$, $w_H(K_n) = 1$, $\forall\, n \geq 1$ $b_H(K) = 1$ et $a_H(K) = 0$.

I.1.3 Proposition.

Soient $F = (F_n)$, $G = (G_n)$ et $H = (H_n)$ des filtrations de X et U un sous ensemble non vide de X. Alors on a :

(i) $v_F(U) = \inf_{x \in U} v_F(\{x\})$

(ii) $w_F(U) \leq \inf_{x \in U} w_F(\{x\})$

(iii) $a_F(G) = \inf_n \left\lfloor \frac{v_F(G_n)}{n} \right\rfloor$

(iv) $b_F(G) = \sup_n \left\lceil \frac{w_F(G_n)}{n} \right\rceil$

(v) Si $G \leq H$ on a : $a_F(G) \geq a_F(H)$ et $b_F(G) \geq b_F(H)$.

(vi) Pour tout entier $k \geq 1$, on a $ka_F(G) \leq a_F(G^{(k)})$ et $b_F(G)^{(k)}) \leq kb_F(G)$.

Preuve.

(i) Si $x \in U$ alors $v_F(\{x\}) \geq v_F(U)$. Si $m = \inf_{x \in U} v_F(\{x\}) < \infty$, on a $U \subseteq F_m$ et $v_F(U) \geq m$. Maintenant si $m = \infty$, alors $U \subset F_n$ pour tout n et $v_F(U) = \infty$.

(ii) Si $m = \inf_{x \in U} w_F(\{x\}) < \infty$, il existe $x \in U$ tel que $w_F(\{x\}) = m$ et $F_m \subset \{x\} \subset U$ d'où $w_F(U) \leq \inf_{x \in U} w_F(\{x\})$.

(iii) $a_F(G) = \sup\{r \in \mathbb{N}^* ; G \leq F^{(r)}\} = \sup\{r \in \mathbb{N}^* ; \forall n , G_n \subset F_{nr}\}$

$= \sup\{r \in \mathbb{N}^* ; \forall n, v_F(G_n)/n \geq r\} = \inf_n \left\lfloor \frac{v_F(G_n)}{n} \right\rfloor$

(iv) est semblable au (iii).

(v) et (vi) résultent immédiatement des définitions.

I.1.4 Théorème

Soient $F = (F_n)$, $G = (G_n)$ des filtrations de l'ensemble X. Alors les suites $(\frac{1}{n} a_F(G^{(n)}))$ et $(\frac{1}{n} b_F(G^{(n)}))$ sont convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. En plus si $\overline{a}_F(G) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_F(G^{(n)})$ et $\overline{b}_F(G) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} b_F(G^{(n)}))$ on a :

(i) $\overline{a}_F(G) = \liminf \frac{1}{n} v_F(G_n)$.

(ii) $\overline{b}_F(G) = \limsup \frac{1}{n} w_F(G_n)$.

Preuve.

(i) Comme $\frac{1}{n} a_F(G^{(n)}) = \inf\limits_k \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{v_F(G_{kn})}{k} \right\rfloor$, (voir proposition I.1.3), nous avons à étudier l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_k \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{v_F(G_{kn})}{k} \right\rfloor = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_k \frac{v_F(G_{kn})}{k}$. Nous avons à prouver que cette dernière limite existe et que $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_k \frac{v_F(G_{kn})}{nk} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf \frac{v_F(G_n)}{n}$. Posons $v_n = v_F(G_{kn})$. Alors on a $\inf\limits_k \frac{v_{kn}}{kn} \geq \inf\limits_{k\geq n} \frac{v_k}{k}$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(\inf\limits_k \frac{v_{kn}}{kn}) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \frac{v_n}{n}$. Réciproquement si n et m sont entiers et si $q_n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$, alors on a $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \frac{v_n}{n} \geq \lim\limits_m \sup(\inf\limits_{n\geq m} \frac{v_{mq_n}}{mq_n + m})$

$= \lim\limits_m \sup(\inf\limits_{n\geq m} \frac{v_{mq_n}}{mq_n}) = \lim\limits_m \sup(\inf\limits_k \frac{v_{mk}}{mk}) \geq \lim\limits_m \inf(\inf\limits_k \frac{v_{mk}}{mk})$.

On déduit alors la convergence de la suite $(\frac{1}{n} a_F(G^{(n)}))$ et on a (i).

(ii) Nous savons que $\frac{1}{n} b_F(G^{(n)}) = \sup\limits_k \frac{1}{n} \lceil w_F(G_{kn}) \rceil$. Ainsi on a à étudier l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup\limits_k \left\lceil \frac{w_F(G_{kn})}{k} \right\rceil = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_k \frac{w_F(G_{kn})}{nk}$. Nous allons prouver que cette dernière limite existe et qu'on a :

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_k \frac{w_F(G_{kn})}{kn} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{w_F(G_n)}{n}.$$

Posons $w_n = w_F(G_n)$. Alors on a $\sup_k \frac{w_{kn}}{kn} \leq \sup_{k\geq n} w_F/k$, ainsi $\lim_{n\to\infty} \sup(\sup_k \frac{w_{kn}}{kn} \leq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{w_n}{n}$. Réciproquement si n et m sont des entiers et si $q_n = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$, alors on a : $\lim_{n\to\infty} \sup \frac{w_n}{n} \leq \lim_m \inf(\sup_{n\geq m} \frac{w_{mq_n+m}}{mq_n}) =$ $\lim_m \inf(\sup_{n\geq m} \frac{w_{mq_n}}{mq_n}) = \lim_m \inf (\sup_k \frac{w_{mk}}{mk}) \leq \lim_m \sup(\sup_k \frac{w_{mk}}{mk})$. Ainsi on a la convergence de la suite $(\frac{1}{n} b_F(G^{(n)}))$ et on a (ii).

I.1.5 Proposition.

Soient F et G des filtrations de l'ensemble X. Pour tout réel $\beta > 0$, on a :

(i) $\bar{a}_F(G) = \beta\, \bar{a}_{F(\beta)}(G) = \frac{1}{\beta}\, \bar{a}_F(G^{(\beta)})$

(ii) $\bar{b}_F(G) = \beta\, \bar{b}_{F(\beta)}(G) = \frac{1}{\beta}\, \bar{b}_F(G^{(\beta)})$.

Preuve.

Remarquons d'abord que pour tout $\beta > 0$; on a $\lfloor\beta\rfloor \leq \beta \leq \lceil\beta\rceil$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a $n\lfloor\beta\rfloor \leq \lceil n\beta\rceil \leq \lceil\beta\rceil n$.

(i) Montrons tout d'abord que $\bar{a}_F(G^{(\beta)}) = \beta\, \bar{a}_F(G)$. Pour tout entier $n>\beta$, on note $q_n = \lfloor \frac{n}{\beta} \rfloor \geq 1$, alors $\beta q_n \leq n < \beta(q_n+1)$, d'où $G^{(\beta q_n)} \geq G^{(n)} \geq G^{(\beta(q_n+1)}$ et $a_F(G^{(\beta q_n)}) \leq a_F(G^{(n)}) \leq a_F(G^{(\beta(q_n+1))})$. On obtient alors les inégalités suivantes : $\frac{q_n}{n} \frac{a_F(G^{(\beta q_n)})}{q_n} \leq \frac{a_F(G^{(n)})}{n} \leq \frac{a_F(G^{(\beta(q_n+1))})}{q_n+1} \frac{q_n+1}{n}$ et en prenant la limite quand $n\to\infty$, on obtient $\frac{1}{\beta}\, \bar{a}_F(G^{(\beta)}) = \bar{a}_F(G)$.

Montrons maintenant que $\beta\bar{a}_{F(\beta)}(G) = \bar{a}_F(G)$. Pour cela, remarquons que $a_F(G) = \infty$ si et seulement si $a_{F(\beta)}(G) = \infty$. En effet si $a_{F(\beta)}(G) = \infty$, $G \leq F^{(\beta n)}$

pour tout entier $n \geq 1$ et comme $F^{(\beta n)} \leq F^{(\lfloor \beta n \rfloor)}$, on a $a_F(G) \geq \lfloor \beta n \rfloor$ d'où $a_F(G) = \infty$. Inversement si $a_F(G) = \infty$, $a_F(G) \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, en particulier $a_F(G) \geq \lfloor \beta n \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ donc $G \leq F^{(\lceil \beta n \rceil)} \leq F^{(\beta n)}$ car $\beta n \leq \lceil n\beta \rceil$. On a donc $a_{F(\beta)}(G) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire $a_{F(\beta)}(G) = \infty$. Pour montrer que $\beta \bar{a}_{F(\beta)}(G) = \bar{a}_F(G)$, on peut donc supposer que $a_F(G^{(n)}) < \infty$ pour tout entier $n \geq 1$. Notons $r_n = a_{F(\beta)}(G^{(n)})$; alors $G^{(n)} \leq F^{(\beta r_n)}$ et $G^{(n)}$ n'est pas inférieure à $F^{(\beta(r_n+1))}$. Comme $\beta(r_n+1) \leq \lceil \beta(r_n+1) \rceil$ et $\lfloor \beta r_n \rfloor \leq \beta r_n$, on a $F^{(\lceil \beta(r_n+1) \rceil)} \leq F^{(\beta(r_n+1))}$ et $F^{(\beta r_n)} \leq F^{(\lfloor \beta r_n \rfloor)}$. Ainsi $G^{(n)} \leq F^{(\lfloor \beta r_n \rfloor)}$ et $G^{(n)}$ n'est pas inférieure à $F^{(\lceil \beta(r_n+1) \rceil)}$ c'est-à-dire que $\lfloor \beta r_n \rfloor \leq a_F(G^{(n)}) < \lceil \beta(r_n+1) \rceil$; en particulier on a $\frac{\beta r_n + 1}{n} \leq \frac{a_F(G^{(n)})}{n} \leq \frac{\beta(r_n+1)+1}{n}$, et en prenant la limite quand $n \to \infty$ obtient $\beta \bar{a}_{F(\beta)}(G) = \bar{a}_F(G)$.

(ii) Montrons que $\bar{b}_{F(\beta)}(G) = \frac{1}{\beta}\, \bar{b}_F(G)$. Pour celà remarquons que $b_F(G) = \infty$ si et seulement si $b_{F(\beta)}(G) = \infty$. En effet, si $b_{F(\beta)}(G) = \infty$, il n'existe aucun entier $r \geq 1$ tel que $F^{(\beta r)} \leq G$. Soit m un entier tel que $1 \leq m\beta$, alors $F^{(m\beta)} \leq F$ et si $b_F(G) = r \in \mathbb{N}$, on a $F^{(mr\beta)} \leq F^{(r)} \leq G$ ce qui est absurde, donc $b_F(G) = \infty$. Inversement si $b_F(G) = \infty$, il n'existe pas d'entier $r \geq 1$ tel que $F^{(r)} \leq G$. Comme $F^{(n\lceil \beta \rceil)} \leq F^{(n\beta)}$ pour tout entier $n \geq 1$, on a $b_{F(\beta)}(G) = \infty$. Pour montrer que $\bar{b}_{F(\beta)}(G) = \frac{1}{\beta}\, \bar{b}_F(G)$, on peut donc supposer que $b_F(G^{(n)}) < \infty$ pour tout $n \geq 1$. Posons $b_n = b_{F(\beta)}(G^{(n)})$ pour $n \geq 1$. La suite (b_n) étant croissante, on va distinguer deux cas. Si $b_n = 1$, $\forall n \geq 1$ on a $\bar{b}_{F(\beta)}(G) = 0$ et pour tout $n \geq 1$, on a $F^{(\lceil \beta \rceil)} \leq F^{(\beta)} \leq G^{(n)}$, donc $b_F(G^{(n)}) \leq \lceil \beta \rceil$ et $\bar{b}_F(G) = 0$. Sinon, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $b_n \geq 2$. Alors $F^{(\beta b_n)} \leq G^{(n)}$ et $F^{(\beta(b_n-1))}$ n'est pas inférieur à $G^{(n)}$. De plus on a $F^{(\lceil \beta b_n \rceil)} \leq F^{(\beta b_n)} \leq G^{(n)}$ et $F^{(\beta(b_n-1))} \leq F^{(\lfloor \beta(b_n-1) \rfloor)}$ donc $F^{(\lfloor \beta(b_n-1) \rfloor)}$ n'est pas inférieure à $G^{(n)}$. On a alors la suite d'inégalités suivantes :

$$\frac{\beta(b_n-1)-1}{n} \le \frac{\lfloor\beta(b_n-1)\rfloor}{n} \le \frac{b_F(G^{(n)})}{n} \le \frac{\lceil\beta b_n\rceil}{n} \le \frac{\beta b_n+1}{n}$$

et en prenant la limite quand $n\to\infty$, on obtient $\beta\bar{b}_{F^{(\beta)}}(G) = \bar{b}_F(G)$. Montrons maintenant que $\bar{b}_F(G^{(\beta)}) = \beta\bar{b}_F(G)$. Pour tout entier $n>\beta$ on note $q_n = \lfloor \frac{n}{\beta} \rfloor \ge 1$, alors $\beta q_n \le n \le \beta(q_n+1)$ d'où $G^{(\beta q_n)} \ge G^{(n)} \ge G^{(\beta(q_n+1))}$ et

$b_F(G^{(\beta q_n)}) \le b_F(G^{(n)}) \le b_F(G^{(\beta(q_n+1))})$. On obtient alors les inégalités suivantes :

$$\frac{q_n}{n}\frac{b_F(G^{(\beta q_n)})}{q_n} \le \frac{b_F(G^{(n)})}{n} \le \frac{b_F(G^{(\beta(q_n+1))})}{q_n+1}\,\frac{q_n+1}{n}$$

et en prenant la limite quand $n\to\infty$, on obtient : $\frac{1}{\beta}\ \bar{b}_F(G^{(\beta)}) = \bar{b}_F(G)$.

Remarquons d'abord que si F est une filtration de l'ensemble X, alors $\bar{a}_F(F) \ge 1$

I.1.6 Proposition

Soient F, E et G des filtrations de l'ensemble X. Si $\bar{a}_F(F) = 1$ alors $\bar{b}_F(G) \ge \bar{a}_F(G)$.

Preuve.

La condition $\bar{a}_F(F) = 1$ implique que $a_F(F^{(n)})$ est un entier pour tout $n\ge1$. De plus on peut supposer que pour tout $n\ge 1$, $b_F(G^{(n)})$ est un entier. Posons $v_n = b_F(G^{(n)})$; alors la relation $F^{(v_n)} \le G^{(n)}$ et la proposition I.1.3, (v) nous donnent l'inégalité $v_n\bar{a}_F(F) \ge n\bar{a}_F(G)$. Alors $\frac{v_n}{n} \ge \bar{a}_F(G)$, d'où $\bar{b}_F(G) \ge \bar{a}_F(G)$.

I.1.7 Lemme.

Soit F une filtration de l'ensemble X. On a les assertions suivantes :

(i) $\bar{a}_F(F) = 1$ ou ∞

(ii) $\bar{b}_F(F) = 0$ ou 1

(iii) Si $\bar{a}_F(F) = 1$ alors $\bar{b}_F(F) = 1$.

Preuve.

(i) Supposons que $\bar{a}_F(F) < \infty$, alors comme $a_F(F^{(n)}) \geq n$ on a $\bar{a}_F(F) \geq 1$. Faisons $u_n = a_F(F^{(n)})$, alors $F^{(n)} = F^{(u_n)}$ et on a $\bar{a}_F(F^{(n)}) = n\bar{a}_F(F) = \bar{a}_F(F^{(u_n)}) = u_n\bar{a}_F(F)$ d'où $u_n = n$ et $\bar{a}_F(F) = 1$.

(ii) Notons $v_n = b_F(F^{(n)})$; alors $v_n \leq n$ d'où $\bar{b}_F(F) \leq 1$ et $F^{(n)} = F^{(v_n)}$. On a alors $\bar{b}_F(F^{(n)}) = n\bar{b}_F(F) = \bar{b}_F(F^{(v_n)}) = v_n\bar{b}_F(F)$. Donc si $\bar{b}_F(F) \neq 0$, on obtient $v_n = n$ et on $\bar{b}_F(F) = 1$.

(iii) résulte de la proposition I.1.6 et de (ii).

I.1.8 Proposition.

Soient F et G des filtrations de l'ensemble X. Alors on a : $\bar{b}_F(G) = \dfrac{1}{\bar{a}_G(F)}$.

Preuve

Posons $a_n = a_G(F^{(n)})$ et $b_n = b_F(G^{(n)})$. Si $a_n < \infty$ et si $b_n < \infty$ alors $a_{b_n} \geq n$, $b_{a_n} \leq n$ et nous obtenons (*) $\dfrac{a_{b_n}}{b_n} \cdot \dfrac{b_n}{n} \geq 1$ et (**) $\dfrac{b_{a_n}}{a_n} \cdot \dfrac{a_n}{n} \leq 1$. Donc si $\bar{a}_G(F) < \infty$ et si $\bar{b}_F(G) < \infty$, alors $a_n \to \infty$ et $b_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et il vient de (*) et (**) que $\bar{b}_F(G).\bar{a}_G(F) = 1$. Supposons que $\bar{a}_G(F) = \infty$, alors $a_n \to \infty$ si $n \to \infty$. Si $a_n = \infty$ pour n assez grand, alors $F^{(n)} \leq G^{(p)}$ pour tout entier p et on a $b_F(G^{(p)}) \leq n$ et $\bar{b}_F(G) = 0$ d'où $\bar{b}_F(G) = \dfrac{1}{\bar{a}_G(F)}$.

Maintenant si $a_n < \infty$ pour tout n, alors $F^{(n)} \leq G^{(a_n)}$ et $b_{a_n} \leq n$, donc $b_n \leq \infty$ pour tout n. Il vient de (**) que $\bar{b}_F(G) = 0$ et la relation $\bar{b}_F(G) = \dfrac{1}{\bar{a}_G(F)}$ est vraie. De la même façon, si $\bar{a}_G(F) < \infty$ et $\bar{b}_F(G) = \infty$, alors $b_n \to \infty$ si $n \to \infty$. Si $b_n = \infty$, on a $\bar{a}_G(F) = 0$ et si $b_n < \infty$, il vient de (*) que $a_n \to \infty$ si $n \to \infty$ et de (**) que $\bar{a}_G(F) = 0$. Donc dans tous les cas on a :

$$\bar{b}_F(G) = \frac{1}{\bar{a}_G(F)}.$$

DEVIATIONS ASYMPTOTIQUES

Soient $F = (F_n)$ et $G = (G_n)$ des filtrations de l'ensemble X. Nous allons étudier les nombres $e_F(G) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (n\bar{a}_F(G) - a_F(G^{(n)}))$ et

$E_F(G) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (b_F(G^{(n)}) - n\bar{b}_F(G))$ appelés déviations asymptotiques de F et G

I.1.9 <u>Lemme</u>. $e_F(G) \geq 0$ et $E_F(G) \geq 0$.

<u>Preuve</u>.

Comme $na_F(G) \leq a_F(G^{(n)})$ et $nb_F(G) \geq b_F(G^{(n)})$, (proposition I.1.3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\bar{a}_F(G) \geq a_F(G)$ et $\bar{b}_F(G) \leq b_F(G)$ d'où $n\bar{a}_F(G) \geq a_F(G^{(n)})$ et $n\bar{b}_F(G) \leq b_F(G^{(n)})$, (proposition I.1.5). On déduit alors $e_F(G) \geq 0$ et $E_F(G) \geq 0$.

§2 RÉDUCTIONS VALUATIVES SUR LES ENSEMBLES

1.2.1 <u>Définitions</u>

1) Soient $\varphi = (M_n)$ une filtration de l'ensemble X et $a \in \mathbb{N}$, posons $t_a\varphi = (M'_n)$ où $M'_0 = M$ et $M'_n = M_{a+n}$ si $n \geq 1$. $t_a\varphi$ est une filtration de X appelée filtration tronquée de φ.

2) Soient $\varphi = (M_n)$ et $\theta = (U_n)$ des filtrations de l'ensemble X. Pour tout $x \in X$, posons $v_\varphi(x) = \sup\{n \in \mathbb{N} \ , \ x \in M_n\}$ On dit que la filtration φ est une réduction valuative de la filtration θ s'il existe une constante $a \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$ on a : $0 \leq v_\theta(x) - v_\varphi(x) \leq a$. avec $v_\varphi(x) = +\infty$ si et seulement si $v_\theta(x) = +\infty$. Cette notion de réduction valuative a été introduite par D. Rees dans [15].

1.2.2 <u>Lemme</u>

Soient $\varphi = (M_n)$ une filtration de l'ensemble X et E un sous-ensemble non vide de X. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $v_\varphi(E) = +\infty$

(ii) $\forall a \in \mathbb{N}$, $v_{t_a\varphi}(E) = +\infty$

(iii) $\exists a \in \mathbb{N}$ tel que $v_{t_a\varphi}(E) = +\infty$.

Preuve

a) Montrons que (i) implique (ii).

Si $v_\varphi(E) = +\infty$ alors $E \subseteq M_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$, donc pour $a \in \mathbb{N}$, $E \subseteq M_{a+q}$, $\forall q \in \mathbb{N}$ d'où $v_{t_a\varphi}(E) = +\infty$.

b) (ii) implique (iii): évident.

c) Montrons que (iii) implique (i). Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $v_{t_a\varphi}(E) = +\infty$ alors $E \subseteq M_{a+q}$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$ et on a $E \subseteq M_p$, $\forall p > a$ et on déduit que $E \subseteq M_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$ donc $v_\varphi(E) = +\infty$.

1.2.3 Théorème

Soient $\varphi = (M_n)$ et $\theta = (U_n)$ des filtrations de l'ensemble X. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) φ est une réduction valuative de θ.

(ii) Il existe un entier $b \geq 0$ tel que l'on ait $t_b\theta \leq \varphi \leq \theta$.

Preuve

a) Montrons que (i) implique (ii).

Supposons que (i) est vraie, alors il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq v_\theta(x) - v_\varphi(x) \leq a$, $\forall x \in X$. On a $v_\varphi(x) \geq v_\theta(x) - a$. Si $n \geq a$ alors : $x \in U_n$ implique $v_\theta(x) \geq n$ donc $v_\varphi(x) \geq n - a$, d'où $x \in M_{n-a}$, par conséquent $U_n \subseteq M_{n-a}$ pour $n \geq a$. Comme $v_\varphi(x) \leq v_\theta(x)$ alors $M_n \subseteq U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq a$ on a $M_n \subseteq U_n \subseteq M_{n-a} \subseteq U_{n-a}$. Posons $n = p+a$ alors on a $U_{p+a} \subseteq M_p \subseteq U_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$, d'où $t_a\theta \leq \varphi \leq \theta$ et on déduit que (i) implique (ii).

b) Montrons maintenant que (ii) implique (i). Supposons (ii) vraie, alors il existe $b \in \mathbb{N}$, tel que $t_b\theta \leq \varphi \leq \theta$. D'où on a

$v_{t_a\theta}(x) \leq v_\varphi(x) \leq v_\theta(x)$ pour tout $x \in M$, (1).

Si $v_\varphi(x) = +\infty$ alors $v_\theta(x) = +\infty$, (voir (1)).

Si $v_\theta(x) = +\infty$ alors $v_{t_b\theta}(x) = +\infty$ (Lemme 1.2.2)

(1) implique alors $v_\varphi(x) = +\infty$ par conséquent, on a : $v_\varphi(x) = +\infty$ si et seulement si $v_\theta(x) = +\infty$. On déduit alors que

$v_\varphi(x) \in \mathbb{N}$ si et seulement si $v_\theta(x) \in \mathbb{N}$; (2).

Si $v_\theta(x) \in \mathbb{N}$ montrons que $v_\theta(x) \leq v_{t_b\theta}(x) + 1 + b$.

Posons $v_{t_b\theta}(x) = r \in \mathbb{N}$.

1) si $r \neq 0$ on a $x \in U_{b+r}$ et $x \notin U_{b+r+1}$ on a

$$v_{t_b\theta}(x) + b \leq v_\theta(x) < v_{t_b\theta}(x) + 1 + b \ , \quad (*)$$

2) Si $r = 0$ alors $x \in U_0 = X$ et $x \notin U_{b+1}$ on a : $0 = v_{t_b\theta}(x) \leq v_\theta(x)$ $< v_{t_b\theta}(x) + 1 + b$, (**)

(*) et (**) impliquent $v_\theta(x) < v_{t_b\theta}(x) + 1 + b$; (3)

(1) et (3) impliquent $0 \leq v_\theta(x) - v_\varphi(x) \leq v_\theta(x) - v_{t_b\theta}(x) < 1 + b$ donc on a $0 \leq v_\theta(x) - v_\varphi(x) \leq v_{t_b\theta}(x) - v_\theta(x) \leq b$, (4).

(4) implique que φ est une réduction valuative de θ et on a le résultat.

1.2.4 <u>Lemme</u>

Soient $\varphi = (M_n)$ une filtration de l'ensemble X et E un sous-ensemble non vide de X. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $v_\varphi(E) = +\infty$

(ii) $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $v_{\varphi(k)}(E) = +\infty$

(iii) $\exists\, k \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_{\varphi(k)}(E) = +\infty$.

<u>Preuve</u>

a) Montrons que (i) implique (ii)

Si $v_\varphi(E) = +\infty$ alors $E \subseteq M_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ d'où pour $k \in \mathbb{N}^*$, $E \subseteq M_{kn}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ donc $v_{\varphi(k)}(E) = +\infty$

b) (ii) implique (iii): évident.

c) Montrons que (iii) implique (i). S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_{\varphi(k)}(E) = +\infty$ alors $E \subseteq M_{kn}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_\varphi(E) \geq kn$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ d'où $v_\varphi(E) = +\infty$

1.2.5 Lemme

Soient $\varphi = (M_n)$ une filtration de l'ensemble X et E un sous -ensemble non vide de X. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $w_\varphi(E) = +\infty$

(ii) $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $w_{\varphi(k)}(E) = +\infty$

(iii) $\exists\, k \in \mathbb{N}^*$ tel que $w_{\varphi(k)}(E) = +\infty$.

Preuve

a) Montrons que (i) implique (ii)

Si $w_\varphi(E) = +\infty$ alors il n'existe pas d'entier n tel que M_n soit inclus dans E. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{kn} \not\subset E$ alors $w_{\varphi(k)}(E) = +\infty$.

b) (ii) implique (iii): évident.

c) Montrons que (iii) implique (i).

Sil existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $w_{\varphi(k)}(E) = +\infty$ alors $M_{kn} \not\subset E$ pour tout entier n et on déduit $M_n \not\subset E$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ donc $w_\varphi(E) = +\infty$.

CHAPITRE II

FILTRATIONS DANS UN ANNEAU . NOMBRES DE SAMUEL

La plupart des résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec H. Dichi et D. Sangaré et ont été publiés dans [3] et [4].

§.1 RELATION ENTRE LES NOMBRES DE SAMUEL GÉNÉRALISÉS $\overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_f(g)$

II.1.1 <u>Définitions</u>.

Soit A un anneau commutatif unitaire.

(1) Une <u>filtration</u> de l'anneau A est une suite $f = (I_n)$ d'idéaux de A telle que $I_0 = A, I_{n+1} \subset I_n$ et $I_nI_m \subset I_{n+m}$ pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout entier $m \geq 0$.

Soit I un idéal de l'anneau A, la filtration $f = f_I = (I^n)$ est appelée filtration I-adique.

Une filtration f de l'anneau est dite triviale si $f = f_{\{0\}}$ ou si $f = f_A$

L'ensemble des filtrations de l'anneau A est noté F(A) et est ordonné par la relation $\leq$ où si $f = (I_n)$, $g = (J_n) \in F(A)$, $f \leq g$ signifie que $I_n \subset J_n$ pour tout $n \geq 0$. La somme des filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ est la filtration $f+g = \left(\sum_{p=0}^{n} I_pJ_{n-p}\right)$, le produit de f et de g est la filtration $fg = (I_n J_n)$ de A.

(2) Une filtration $f = (I_n)$ est dite de <u>type fini</u> s'il existe une suite croissante d'entiers naturels (k_n) tendant vers ∞ quand $n \to \infty$ et telle que les idéaux I_{k_n} soient de type fini.

(3) La racine de la filtration $f = (I_n)$ est l'idéal $\sqrt{f} = \sqrt{I_n}$ pour tout $n \geq 1$. La filtration f est dite séparée si $\bigcap_{n\geq 1} I_n = \{0\}$ et f est dite non nilpotente si $I_n \neq \{0\}$ pour tout $n \geq 1$.

(4) La filtration $f = (I_n)$ est appelée une <u>AP filtration</u> s'il existe une suite

(k_n) d'entiers ≥ 0 telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 1$ et si $I_{k_n m} \subset I_n^m$ quels que soient les entiers n,m. La filtration f est dite <u>fortement AP</u> de rang $r \geq 1$ si $f^{(r)} = (I_{nr})$ est la filtration I_r-adique c'est-à-dire si $f^{(r)} = (I_r^n)$. On vérifie facilement que toute filtration fortement AP est AP.

f est dite nœthérienne si l'anneau de Rees $\mathcal{R}(A,f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n X^n$ est nœthérien.

f est dite fortement nœthérienne si A est nœthérien et s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $I_m . I_n = I_{m+n}$ pour tout entier $m \geq k$ et pour tout entier $n \geq k$.

(5) Soient $f = (I_n) \in F(A)$ et $\overline{v}_f$ la pseudo-valuation homogène associée à f. Pour tout $x \in A$, $\overline{v}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{v_f(x^n)}{n} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ où $v_f(x) = \sup\{r \in \mathbb{N} \,;\, x \in I_r\}$. On note $\overline{I_n} = \{x \in A \,;\, \overline{v}_f(x) \geq n\}$. $\overline{I_n}$ est un idéal de A, et $\overline{f} = (\overline{I_n})$ est une filtration de A appelée la <u>clôture asymptotique</u> de f.

(6) Les nombres de Samuel généralisés $\overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_f(g)$ associés aux filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ de A sont définis de la manière suivante :
$\overline{v}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{v_f(J_n)}{n}$ et $\overline{w}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{w_f(J_n)}{n}$ lorsque ces limites existent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ où $v_f(J_n) = \sup\{r \in \mathbb{N} \,;\, J_n \subset I_r\}$ et $w_f(J_n) = \inf\{r \in \mathbb{N} \,;\, I_r \subset J_n\}$ ou ∞ si cet ensemble est vide.

(7) L'existence de $\overline{v}_f(g)$ a été établie pour toute AP filtration g de l'anneau A et celle de $\overline{w}_f(g)$ quand f et g sont deux AP filtrations de l'anneau nœthérien A dans [2]. De plus, on a les relations suivantes :

(i) si $g \leq g'$, alors $\overline{w}_f(g) \geq \overline{w}_f(g')$

(ii) si $f \leq f'$, alors $\overline{w}_f(g) \leq \overline{w}_{f'}(g)$

(iii) pour tout entier $k \geq 1$, $\overline{w}_f(g) = k\, \overline{w}_{f^{(k)}}(g) = \frac{1}{k} \overline{w}_f(g^{(k)})$

(iv) pour tout entier $k \geq 1$, $\overline{v}_f(g) = k\, \overline{v}_{f^{(k)}}(g) = \frac{1}{k} \overline{v}_f(g^{(k)})$ où $f, f', g, g' \in F(A)$.

(8) Lorsque $f_I = (I^n)$ est la filtration I-adique où I est un idéal de A, on note $v_{f_I}(J) = v_I(J)$, $\overline{v}_{f_I}(g) = \overline{v}_I(g)$, $w_{f_I}(J) = w_I(J)$, $\overline{w}_{f_I}(g) = \overline{w}_I(g)$.

De même, si $g = (J^n)$ est la filtration J-adique de A où J est un idéal de A, nous noterons $\overline{v}_f(f_J) = \overline{v}_f(J)$ et $\overline{w}_f(f_J) = \overline{w}_f(J)$.

II.1.2 Proposition.

Soient f et g des filtrations de l'anneau A. Alors le nombre de Samuel généralisé $\overline{w}_f(g)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ pour toute AP filtration f.

Preuve : Posons $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$. Nous pouvons supposer que $\liminf \frac{w_f(J_n)}{n} = a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et comme la suite $(w_f(J_n))$ est croissante, que $w_f(J_n)$ tend vers ∞ quand n tend vers ∞. f étant une AP filtration, il existe une suite d'entiers $(k_j) \geq 0$ telle que $I_{k_j n} \subset I_j^n$ pour tous j,n et $\frac{k_j}{j}$ tend vers 1 quand $j \to \infty$. Si s,n sont deux entiers ≥ 1; la suite d'inclusions $I_{nk_{w_f(J_s)}} \subset I^n_{w_f(J_s)} \subset J_s^n \subset J_{ns}$ nous donne l'inégalité $w_f(J_{ns}) \leq nk_{w_f(J_s)}$ (*).

Prenons deux entiers $n > m \geq 1$ et notons q_n le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{n}{m}$. On a alors d'après (*)

$w_f(J_n) \leq w_f(J_{q_n m}) \leq q_n k_{w_f(J_m)}$. On a donc $\frac{w_f(J_n)}{n} \leq \frac{q_n}{q_n - 1} \cdot \frac{k_{w_f(J_m)}}{m}$ d'où

$\limsup \frac{w_f(J_n)}{n} \leq \frac{k_{w_f(J_m)}}{m}$ et comme $\frac{k_{w_f(J_m)}}{m} = \frac{w_f(J_m)}{m} \cdot \frac{k_{w_f(J_m)}}{w_f(J_m)}$, on obtient

$\limsup \frac{w_f(J_n)}{n} \leq \inf_m \frac{k_{w_f(J_m)}}{m} \leq \liminf_m \frac{w_f(J_m)}{m}$ et la suite

$(\frac{w_f(J_n)}{n})$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

II.1.3 Proposition

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ des filtrations de l'anneau A telles que f soit une AP filtration. Alors les suites $(\frac{\overline{w}_f(J_n)}{n})$ et $(n\,\overline{w}_{I_n}(g))$ convergent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a :

(i) $\overline{w}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{w}_f(J_n)}{n} = \inf_n \frac{\overline{w}_f(J_n)}{n}$

(ii) $\overline{w}_f(g) = \lim_{n\to\infty} n\,\overline{w}_{I_n}(g)$

Preuve.

Soit f une AP filtration et (k_n) une suite d'entiers ≥ 0 telle que $I_{k_n m} \subset I_n^m$ pour tous n,m avec $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 1$.

(i) On sait que $\overline{w}_f(J_n)$ est défini pour tout entier $n \geq 0$. De plus, comme la suite $(\overline{w}_f(J_n))$ est croissante, on peut supposer que $\overline{w}_f(J_n) < \infty$ pour tout entier n. Comme $\overline{w}_f(J) \leq k_{v_f(J)}$ pour tout idéal J de A, on obtient

$\limsup \frac{\overline{w}_f(J_n)}{n} \leq \overline{w}_f(g)$. D'autre part, on a pour tout entier n et tout entier m,

$J_n^m \subset J_{nm}$ d'où $\frac{w_{f_n}(J_n^m)}{nm} \geq \frac{w_{f_n}(J_{nm})}{nm}$. Quand $m\to\infty$, on obtient $\frac{\overline{w}_f(J_n)}{n} \geq \overline{w}_f(g)$ pour tout n. Il en résulte que la suite $\left(\frac{\overline{w}_f(J_n)}{n}\right)$ converge vers $\overline{w}_f(g)$. De plus, $\overline{w}_f(g) = \inf \frac{\overline{w}_f(J_n)}{n}$.

(ii) Montrons tout d'abord que $\overline{w}_f(g) = \liminf n\overline{w}_{I_n}(g)$. On peut supposer que $k_n \geq n$ pour tout $n \geq 1$. Alors si $g = (J_n)$, la suite d'inégalités $f_{I_{k_n}} \leq f^{(k_n)} \leq f_{I_n}$ nous donne $\overline{w}_{I_{k_n}}(g) \leq \overline{w}_{f(k_n)}(g) = \frac{1}{k_n}\overline{w}_f(g) \leq \overline{w}_{I_n}(g)$ (*).

Alors en multipliant les termes de (*) par k_n et en prenant la limite inférieure, on obtient : $\liminf k_n \overline{w}_{I_n}(g) \leq \overline{w}_f(g) \leq \liminf n\,\overline{w}_{I_n}(g)$

et $\liminf n\,\overline{w}_{I_n}(g) \leq \liminf k_n \overline{w}_{I_{k_n}}(g)$ car $k_n \geq n$ pour tout n. On a ainsi montré que $\overline{w}_f(g) = \liminf n\,\overline{w}_{I_n}(g)$.

Montrons maintenant que $\limsup n\,\overline{w}_{I_n}(g) \leq \overline{w}_f(g)$. Supposons que $\overline{w}_f(g) \in \mathbb{R}_+$ et prenons deux entiers $p \geq 1$ et $q \geq 1$ tels que $\overline{w}_f(g) < \frac{p}{q}$; alors $\overline{w}_f(g^{(q)}) < p$ et il existe alors un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $m \geq N$, on ait $w_f(J_{mq}) \leq mp$. Par conséquent, pour tout entier $m \geq N$, on a $I_{mp} \subset J_{mq}$. Soit n un entier ≥ 1 et q_m la partie entière de $\frac{m}{n}$. On a alors la suite d'inclusions $I_n^{(q_m+1)p} \subset I_{n(q_m+1)p} \subset I_{mp} \subset J_{mq}$ d'où l'inégalité

$\frac{w_{I_n}(J_{mq})}{mq} \leq \frac{p(q_m+1)}{mq}$. En prenant la limite quand $m\to\infty$, on obtient

$\overline{w}_{I_n}(g) \le \frac{1}{n}\frac{p}{q}$, c'est-à-dire que $\limsup n\,\overline{w}_{I_n}(g) \le \frac{p}{q}$ d'où $\limsup n\,\overline{w}_{I_n}(g) \le \overline{w}_f(g)$.

II.1.4 Corollaire.

Soient f, g et h des filtrations de l'anneau A telles que f soit une AP filtration. On a alors : $\overline{w}_f(gh) \le \overline{w}_f(g) + \overline{w}_f(h)$.

Preuve. Il suffit de remarquer que si I, J, K sont des idéaux de A, on a $w_I(JK) \le w_I(J) + w_I(K)$ et d'appliquer la proposition II.1.3.

II.1.5 Corollaire.

Soient f, g et h des filtrations de l'anneau A telles que f et g soient des AP filtrations. On a alors : $\frac{1}{\overline{w}_{fg}(h)} \ge \frac{1}{\overline{w}_f(h)} + \frac{1}{\overline{w}_g(h)}$.

Preuve. D'après la proposition II.1.3 (ii), il suffit de montrer que si, I, J, sont des idéaux de A et si $h \in F(A)$, on a la relation $\frac{1}{\overline{w}_{IJ}(h)} \ge \frac{1}{\overline{w}_I(h)} + \frac{1}{\overline{w}_J(h)}$. Comme $\overline{w}_{IJ}(h) \le \inf(\overline{w}_I(h), \overline{w}_J(h))$, on peut supposer que $\alpha = \overline{w}_I(h)$ et $\beta = \overline{w}_J(h)$ sont des réels > 0. Posons $h = (H_n)$ et prenons des entiers $p, p', q, q' \ge 1$ tels que $\alpha < \frac{p}{q} = r$ et $\beta < \frac{p'}{q'} = r'$. Alors $\overline{w}_I(h^{(q)}) < p$ et $\overline{w}_J(h^{(q')}) < p'$. Il existe alors un entier m tel que pour tout $n \ge m$, on ait $w_I(H_{nq}) < np$ et $w_J(H_{nq'}) < np'$, c'est-à-dire que $I^{np} \subset H_{nq}$ et $J^{np'} \subset H_{nq'}$. En particulier, $I^{npp'} \subset H_{nq}^{p'} \subset H_{nqp'}$ et $J^{npp'} \subset H_{nq'p}$ d'où $(IJ)^{npp'} \subset H_{n(p'q+pq')}$. Ainsi $w_{IJ}(H_{n(p'q+pq')}) \le npp'$; en divisant par $n(p'q+pq')$ et en prenant la limite quand $n \to \infty$, on obtient $\overline{w}_{IJ}(h) \le \frac{rr'}{r+r'}$. Ainsi $\overline{w}_{IJ}(h) \le \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ et on obtient

$$\frac{1}{\overline{w}_{IJ}(h)} \ge \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\overline{w}_I(h)} + \frac{1}{\overline{w}_J(h)}.$$

II.1.6 Proposition.

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ deux filtrations de l'anneau A telles que $\overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_f(g)$ existent. Alors $\overline{w}_f(g) < \overline{v}_f(g)$ si et seulement si il existe un idéal I de A et un entier naturel m tels que pour tout $n \ge m$ on ait $I_n = J_n = I$.

Preuve. S'il existe un entier m et un idéal I tels que $I_n = J_n = I$ pour tout $n \geq m$, alors $\overline{w}_f(g) = 0 < \overline{v}_f(g) = \infty$. Inversement, supposons que $\overline{w}_f(g) < \overline{v}_f(g)$ et distinguons deux cas. Si $v_f(J_n) < \infty$ pour tout n, comme

$$\overline{w}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{w_f(J_{n+1})}{n} < \overline{v}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{v_f(J_n)}{n},$$ il existe un entier N tel que

$w_f(J_{n+1}) < v_f(J_n)$ pour tout $n \geq N$; en particulier $w_f(J_n) < v_f(J_n)$. Notons $v_n = v_f(J_n)$ et $w_n = v_f(J_n)$. On a alors $I_{v_n} \subset I_{w_n} \subset J_n \subset I_{v_n}$, d'où $I_{v_n} = I_{w_n} = J_n$. En particulier $I_k = J_n$ pour tout entier k vérifiant $w_n \leq k \leq v_n$.

Comme $v_{n+1} < v_n \leq v_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$ et en prenant $m = \max(N, w_N)$ et $I = J_N$, on obtient $I_n = J_n = I$ pour tout $n \geq m$. S'il existe un entier N tel que $v_f(J_N) = \infty$, on a $I_{w_N} \subset J_N \subset I_n$ pour tout entier n ; en particulier, $I_{w_N} = J_N = I_n$ pour tout $n \geq w_N$. Comme la suite (v_n) est croissante, on a aussi $v_k = \infty$ pour tout $k \geq N$, d'où $I_n = J_k$ pour tout $n \geq w_k$. Il suffit alors de prendre $m = \max(N, w_N)$ et $I = J_N$.

II.1.7 Conséquences.

(i) Si f et g sont des AP filtrations de A telles que f soit séparée et non nilpotente, on a $\overline{w}_f(g) \geq \overline{v}_f(g)$.

(ii) Si f, g sont des filtrations sur un anneau de Dedekind A telles que f soit fortement AP et non triviale, on a $\overline{w}_f(g) \geq \overline{v}_f(g)$.

Preuve. Notons $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$. (i) résulte de la proposition I.1.6 puisque f étant séparée non nilpotente, s'il existe un idéal I tel que $I_n = I$ pour $n \geq 0$, on aurait $I = \bigcap_{n\geq 0} I_n = \{0\}$ ce qui est absurde car f est non nilpotente.

(ii) résulte de ([7], proposition 4.2) et des propositions II.1.2 et II.1.6.

§.2 L'ÉGALITÉ ASYMPTOTIQUE $\overline{a}_f(g+h) = \min(\overline{a}_f(g), \overline{a}_f(h))$.

Les nombres de Samuel généralisés $\overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_f(g)$ ont permis d'étendre aux filtrations les nombres rationnels $\ell_I(I)$ et $L_I(J)$ définis par P. Samuel pour des idéaux I et J d'un anneau nœthérien A [16].

Il a été montré dans ([2], 2.9) que l'on ne pouvait définir $\overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_f(g)$ pour toutes filtrations f et g de l'anneau A ; plus précisément $\overline{v}_f(g)$ existe si g est une AP filtration ([2], proposition 2.6) et $\overline{w}_f(g)$ est défini pour toute AP filtration f de l'anneau A d'après la proposition II.1.2.

Il résulte de la proposition I.1.4, que $\overline{a}_f(g)$ et $\overline{b}_f(g)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, et que si $\overline{v}_f(g)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ on a $\overline{v}_f(g) = \overline{a}_f(g)$ et si $\overline{w}_f(g)$ et existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ on a $\overline{w}_f(g) = \overline{b}_f(g)$.

Notations

On notera pour des idéaux I, J de A, f_I étant la filtration I-adique, $a_{f_I}(g) = a_I(g)$, $b_{f_I}(g) = b_I(g)$, $a_f(f_J) = a_f(J)$ et $b_f(f_J) = b_f(J)$. De même, nous adoptons les notations $\overline{a}_I(g)$, $\overline{b}_I(g)$, $\overline{a}_f(J)$, $\overline{b}_f(J)$

II.2.1 Remarques

Il résulte des définitions I.1.1 que si $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ sont des filtrations de l'anneau A et I, J des idéaux, alors on a les relations suivantes :

(i) Pour tout entier $k \geq 1$, on a $v_f(J_k) \geq k\, a_f(g)$ et $w_f(J_k) \leq k\, b_f(g)$.

(ii) $a_f(J) = v_f(J)$ et $b_I(g) = w_I(J_1)$.

II.2.2 Proposition

Soient f et g des filtrations de l'anneau A. Alors $\overline{a}_f(g) \geq 1 \Rightarrow g \leq \overline{f}$.

Preuve

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$; comme $f_{J_n} \leq g^{(n)}$, on a $\overline{a}_f(J_n) \geq \overline{a}_f(g^{(n)}) \geq n$ pour tout entier $n > 1$ d'après l'hypothèse $\overline{a}_f(g) \geq 1$ et la proposition I.1.5. Comme $a_f(J_n^k) = v_f(J_n^k)$ d'après la remarque II.2.1 (ii), on obtient

$$\overline{a}_f(J_n) = \lim_{k\to\infty} \frac{a_f(J_n^k)}{k} = \overline{v}_f(J_n)$$ donc $\overline{v}_f(J_n) \geq n$ c'est-à-dire que l'on a $J_n \subset \overline{I_n}$; ainsi $g \leq \overline{f}$.

II.2.3 Remarque

La réciproque de la proposition II.2.2 est fausse comme le montre l'exemple suivant. Considérons l'anneau $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $f = f_{|0|}$ et

$g = \overline{f} = (\overline{I_n})$; alors pour tout $n \geq 1$, on a $\overline{I_n} = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et

$$\bar{a}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_f(g^{(n)})}{n} = 0 \text{ puisque } \{r \geq 1 \; ; g^{(n)} \leq f^{(r)}\} = \emptyset .$$

II.2.4 Lemme

Soient f et g des filtrations de l'anneau A telles que g soit une AP filtration de type fini. On a alors $\bar{a}_f(g) = \bar{a}_{\bar{f}}(g) = \bar{v}_f(g) = \bar{v}_{\bar{f}}(g)$.

Preuve

Posons $g = (J_n)$. Montrons d'abord que $\bar{v}_f(g) = \bar{v}_{\bar{f}}(g)$. Soit (k_n) une suite croissante d'entiers telle que $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$ et telle que chaque idéal J_{k_n} soit de type fini. Comme $v_{\bar{f}}$ est la partie entière de $\bar{v}_f$, on a pour tout $x \in A$, $\bar{v}_f(x) \leq v_{\bar{f}}(x) + 1 \leq \bar{v}_f(x) + 1$; de plus, $\bar{v}_f(J_{k_n}) = \inf_{x\in J_{k_n}} \bar{v}_f(x)$ et $v_{\bar{f}}(J_{k_n}) = \inf_{x\in J_{k_n}} v_{\bar{f}}(x)$. Par conséquent, on a $\bar{v}_f(g) = \bar{v}_{\bar{f}}(g)$ puisque d'après la proposition 4.7 de [2]

$\bar{v}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{v}_f(J_{k_n})}{k_n}$. Comme $\bar{a}_f(g) = \bar{v}_f(g)$ et $\bar{a}_{\bar{f}}(g) = \bar{v}_{\bar{f}}(g)$. On a

$\bar{a}_f(g) = \bar{a}_{\bar{f}}(g) = \bar{v}_f(g) = \bar{v}_{\bar{f}}(g)$.

II.2.5 Théorème

Soient f et g des filtrations de l'anneau A telles que g soit une AP filtration de type fini. Alors $\bar{v}_f(g) \geq 1 \Leftrightarrow g \leq \bar{f}$.

Preuve

Supposons tout d'abord que $\bar{v}_f(g) \geq 1$; alors $\bar{a}_f(g) \geq 1$ et d'après la proposition II.2.2 on a $g \leq \bar{f}$. Inversement si $g \leq \bar{f}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $g^{(n)} \leq \bar{f}^{(n)}$ d'où $\bar{a}_{\bar{f}}(g) \geq 1$ et $\bar{v}_f(g) = \bar{a}_{\bar{f}}(g) \geq 1$, d'après le lemme II.2.4.

II.2.6 Théorème

Soient f, g et h des filtrations de l'anneau A. Alors on a :

(i) $\bar{a}_f(g+h) = \min(\bar{a}_f(g), \bar{a}_f(h))$.

(ii) $\bar{b}_{g+h}(f) = \sup(\bar{b}_g(f), \bar{b}_h(f))$.

Preuve

(i) a) Montrons d'abord que $\bar{a}_f(g+h) \leq \min(\bar{a}_f(g), \bar{a}_f(h))$. Comme $g \leq g+h$ implique $\bar{a}_f(g+h) \leq \bar{a}_f(g)$ et $h \leq g+h$ implique $\bar{a}_f(g+h) \leq \bar{a}_f(h)$ d'après la proposition I.1.3, (v), on a $\bar{a}_f(g+h) \leq \min(\bar{a}_f(g), \bar{a}_f(h))$.

b) Montrons que $\overline{a}_f(g+h) \geq \lambda = \min(\overline{a}_f(g), \overline{a}_f(h))$ où $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Posons $g = (J_n)$, $h = (H_n)$ et $K_n = \sum_{p=0}^{n} J_n H_{n-p}$. Supposons $\lambda > 0$ et prenons un réel $\alpha > 0$ tel que $\lambda > \alpha$. On sait d'après la proposition I.1.4, que $\overline{a}_f(g) = \liminf \frac{v_f(J_n)}{n}$ et $\overline{a}_f(h) = \liminf \frac{v_f(H_n)}{n}$; il existe donc un entier $m \geq 1$ tel que $\forall\, n \geq m$, $v_f(J_n) \geq n\alpha$ et $v_f(H_n) \geq n\alpha$. Or $v_f(K_n) \geq \min(v_f(J_p) + v_f(H_{n-p}))$. Donc si $n > 2m$, on peut distinguer trois cas ; si $p < m$, on a $v_f(J_p) + v_f(H_{n-p}) \geq (n-p)\alpha$; si $p \geq m$ et $p \leq n-m$, on a $v_f(J_p) + v_f(H_{n-p}) \geq n\alpha$ enfin si $p > n-m$, $v_f(J_n) + v_f(H_n) \geq p\alpha$. Dans tous les cas, on a : $v_f(J_p) + v_f(H_{n-p}) \geq (n-m)\alpha$, d'où $v_f(K_n) \geq (n-m)\alpha$, et comme $\overline{a}_f(g+h) = \liminf \frac{v_f(K_n)}{n} \geq \liminf \frac{(n-m)\alpha}{n} = \alpha$ on a $\overline{a}_f(g+h) \geq \lambda$.

(ii) Comme $\overline{a}_f(g) = \frac{1}{\overline{b}_g(f)}$ (proposition I.1.8) et en utilisant (i) on a (ii).

§.3 ETUDE DE LA CLOTURE ASYMPTOTIQUE $\overline{f}$.

Le théorème suivant a été établi par le Professeur D. Sangaré [17] .

II.3.1 Théorème

Soient f, g et h des filtrations de l'anneau A. On a

(i) $f \leq \overline{f}$

(ii) $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$

(iii) Si $f \leq g$ alors $\overline{f} \leq \overline{g}$

(iv) $\overline{f}\ \overline{g} \leq \overline{fg}$

(v) Si $\overline{fh} \leq \overline{gh}$ et $f \leq \sqrt{h}$ alors $\overline{f} \leq \overline{g}$. (Loi de simplification pour la clôture asymptotique).

Preuve

Ces propriétés se démontrent sans difficulté. Quant à la loi de simplification, la relation $\overline{fg} \leq \overline{gh}$ implique $\overline{f^2h} \leq \overline{fgh} \leq \overline{g^2h}$ et par récurrence $\overline{f^nh} \leq \overline{g^nh} \leq \overline{g^n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $n\overline{v}_{f^nh}(x) \leq n.\overline{v}_{g^n}(x) = \overline{v}_g(x)$ pour tout $x \in A$ car $\overline{v}_{g^n}(x) = \frac{1}{n}\overline{v}_g(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(Remarque 2.5 [2]). Si $f \leq \sqrt{h}$ alors $\overline{v}_f(x) = \lim_{n \to \infty} \overline{v}_{f^n h}(x) \leq \overline{v}_g(x)$, pour tout $x \in A$. (Corollaire 3.4 [2]) : donc $\overline{f} \leq \overline{g}$.

II.3.2 Lemme

Soient f, g des filtrations de l'anneau A. Alors on a :

(i) $\overline{f}^{(r)} \leq \overline{f^{(r)}}$ et $\overline{\overline{f}^{(r)}} = \overline{f^{(r)}}$ pour tout réel r >0.

(ii) $\overline{f}^{(r)} = \overline{f^{(r)}} = \overline{\overline{f}^{(r)}}$, pour tout entier r>0

(iii) $\overline{\overline{f}g} = \overline{\overline{f}\,\overline{g}} = \overline{fg}$.

Preuve

(i) Soit $f = (I_n)$ alors $\overline{f} = (\overline{I_n}) = (J_n)$ et $\overline{f}^{(r)} = (J_{\lceil rn \rceil}) = (\overline{I}_{\lceil rn \rceil})$ avec $\overline{I}_{\lceil rn \rceil} = \{x \in A \ ; \overline{v}_f(x) \geq \lceil rn \rceil\}$. Si $\overline{f^{(r)}} = (K_n)$, $K_n = \{x \in A \ ; \overline{v}_{f^{(r)}}(x) \geq n\} = \{x \in A \ ; \overline{v}_f(x) \geq rn\}$. $\overline{f}^{(r)} \leq \overline{f^{(r)}}$ et comme $f^{(r)} \leq \overline{f}^{(r)} \leq \overline{f^{(r)}}$ on a $\overline{\overline{f}^{(r)}} = \overline{f^{(r)}}$

(ii) Comme r est un entier > 0 alors $\overline{f} = (\overline{I_n}) = (J_n)$ et $\overline{f}^{(r)} = (J_{rn})$ avec $\overline{I}_{rn} = \{x \in A \ ; \overline{v}_f(x) \geq rn\}$. Si $\overline{f^{(r)}} = (K_n)$, $K_n = \{x \in A \ ; \overline{v}_{f^{(r)}}(x) \geq n\} = \{x \in A \ ; \overline{v}_f(x) \geq rn\} = \overline{I}_{rn}$ d'où $\overline{f}^{(r)} = \overline{f^{(r)}}$ et on déduit $\overline{f}^{(r)} = \overline{f^{(r)}} = \overline{\overline{f}^{(r)}}$, pour tout entier r>0.

(iii) de $fg \leq \overline{f}g \leq \overline{f}\,\overline{g} \leq \overline{fg}$ (théorème II.3.1) on a $\overline{\overline{f}g} = \overline{\overline{f}\,\overline{g}} = \overline{fg}$

II.3.3 Proposition

Pour toute filtration f de A et pour tout nombre réel s >0 et pour tout réel t >0 on a :

(i) $\overline{f^{(s+t)}} = \overline{f^{(s)} f^{(t)}}$.

(ii) $\overline{(\overline{f^{(s)}})^{(t)}} = \overline{f^{(st)}}$

Preuve. Montrons que $\overline{f^{(s+t)}} \leq \overline{f^{(s)} f^{(t)}}$.

$$\frac{1}{\overline{v}_{f^{(s)}f^{(t)}}(x)} \leq \frac{1}{\overline{v}_{f^{(s)}}(x)} + \frac{1}{\overline{v}_{f^{(t)}}(x)} \quad ; \quad \forall\, x \in A \ \text{(remarque 3.1 [2])}$$

$$\frac{1}{\overline{v}_{f^{(s)}f^{(t)}}(x)} \leq \frac{1}{\frac{1}{s}\,\overline{v}_f(x)} + \frac{1}{\frac{1}{t}\,\overline{v}_f(x)} = \frac{(s+t)}{\overline{v}_f(x)} \quad \text{d'où}$$

$\overline{v}_{f^{(s)}f^{(t)}}(x) \geq \frac{1}{s+t}\,\overline{v}_f(x) = \overline{v}_{f^{(s+t)}}(x)$ donc on a :

$\overline{f^{(s+t)}} \leq \overline{f^{(s)}\, f^{(t)}}$. (1)

Comme $f^{(s)}f^{(t)} \leq f^{(s+t)}$

alors $\overline{f^{(s)}\, f^{(t)}} \leq \overline{f^{(s+t)}}$ (2).

De (1) et (2) on déduit $\overline{f^{(s+t)}} = \overline{f^{(s)}\, f^{(t)}}$.

(iii) Comme pour tous réels t et s>0, $\overline{v}_{f^{(st)}}(x) = \frac{1}{st}\overline{v}_f(x) = \frac{1}{t}\overline{v}_{f^{(s)}}(x)$

$= \overline{v}_{(f^{(s)})^{(t)}}(x)$ alors on a $(f^{(s)})^{(t)} = f^{(st)}$.

II.3.4 Définition

Deux filtrations f et g de l'anneau A sont dites projectivement équivalentes s'il existe un rationnel r>0 tel que $\overline{v}_f(x) = r\overline{v}_g(x)$, $\forall\, x \in A$.

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence sur F(A)

II.3.5 Remarque

Si deux filtrations f et g de l'anneau A sont projectivement équivalentes alors il existe un rationnel s>0 tel que $\overline{f} = \overline{g^{(s)}}$.

En effet il suffit de remarquer que $\overline{v}_{g^{(s)}}(x) = \frac{1}{s}\,\overline{v}_g(x)$.

Notons par **B** l'ensemble des AP-filtratons séparées, non nilpotentes de l'anneau nœthérien A.

II.3.6 Proposition

Soient f et g des éléments de **B** . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\overline{f} = \overline{g}$

(ii) $\overline{a}_f(g) = \overline{b}_f(g) = 1$

Preuve. Montrons que (i) implique (ii) : $\overline{f} = \overline{g}$ implique $\overline{a}_g(g) = \overline{a}_{\overline{g}}(g)$ $= \overline{a}_{\overline{f}}(g) = \overline{a}_f(g)$ (Lemme II.2.4) et comme $1 = \overline{a}_g(g)$ (corollaire 4.7, [2]) alors $\overline{a}_f(g) = 1$. On déduit que $\overline{a}_g(f) = 1$. De $\overline{b}_f(g) = \frac{1}{\overline{a}_g(f)}$, (proposition I.1.8) on a $\overline{b}_f(g) = 1$. Montrons maintenant que (ii) implique (i) :

$\overline{a}_f(g) = 1$ implique $\overline{g} \leq \overline{f}$ (proposition II.2.2). De $\overline{b}_f(g) = 1$ on a $\overline{a}_g(f) = 1$ car $\overline{b}_f(g) = \frac{1}{\overline{a}_g(f)}$ d'où $\overline{f} \leq \overline{g}$ et par conséquent $\overline{f} = \overline{g}$.

CHAPITRE III

FILTRATIONS DANS UN ANNEAU
DEVIATIONS ASYMPTOTIQUES

§.1 DÉVIATIONS ASYMPTOTIQUES ET FILTRATIONS FORTEMENT AP.

Soient f et g des filtrations de l'anneau A. Dans le chapitre I, §1, nous avons défini les déviations asymptotiques $e_f(g)$, $E_f(g)$. Soit $g = (J_n)$, nous introduisons les nombres $d_f(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}(n\,\bar{a}_f(g) - v_f(J_n))$ et $D_f(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}(w_f(J_n) - n\,\bar{b}_f(g))$, pour l'étude des déviations asymptotiques $e_f(g)$ et $E_f(g)$. Soient I et J des idéaux de l'anneau A. Si $g = f_J$ la filtration J-adique on note $d_f(g) = d_f(J)$, $D_f(J) = D_f(g)$, $e_f(g) = e_f(J)$, $E_f(g) = E_f(J)$ et si $f = f_I$ on note $d_f(g) = d_I(g)$, $D_f(g) = D_I(g)$, $e_f(g) = e_I(g)$ et $E_f(g) = E_I(g)$.

III.1.1. Proposition

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ des filtrations de l'anneau A. Si f est une filtration fortement AP de rang k alors on a :

(i) $d_{I_k}(g)\in\mathbb{R}$ si et seulement si $d_f(g)\in\mathbb{R}$.

(ii) $D_{I_k}(g)\in\mathbb{R}$ si et seulement si $D_f(g)\in\mathbb{R}$.

Preuve (i) Démontrons que $\lambda v_{f(\lambda)}(J_n) \le v_f(J_n) \le \lambda(v_{f(\lambda)}(J_n)+1)+1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, \lambda\in\mathbb{R}^*_+$.

a) Montrons d'abord que $v_f(J_n) = \infty$ si et seulement si $v_{f(\lambda)}(J_n) = \infty$.

En effet si $v_{f(\lambda)}(J_n) = \infty$ alors $J_n \subset I_{\lceil \lambda r\rceil}$, $\forall\, r\in\mathbb{N}$ donc $v_f(J_n) \ge \lceil \lambda r\rceil \ge \lambda r$ d'où $v_f(J_n) = \infty$. Si $v_f(J_n) = \infty$ alors $v_f(J_n) \ge p$, $\forall\, p\in\mathbb{N}$ et $J_n \subseteq I_p$, $\forall\, p\in\mathbb{N}$ d'où $J_n \subseteq I_{\lceil \lambda r\rceil}$, $\forall\, r\in\mathbb{N}^*$ et $\forall\, \lambda\in\mathbb{R}^*_+$ et $v_{f(\lambda)}(J_n) \ge r$, $\forall\, r\in\mathbb{N}^*$ donc $v_{f(\lambda)}(J_n) = \infty$. On déduit que $v_f(J_n) = \infty$ si et seulement si $v_{f(\lambda)}(J_n) = \infty$ et si l'une des assertions équivalentes est vérifiée on a :

$\lambda\, v_{f(\lambda)}(J_n) \le v_f(J_n) \le \lambda\,(v_{f(\lambda)}(J_n)+1)+1,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*_+$.

b) Supposons que $r = v_{f(\lambda)}(J_n) \in \mathbb{N}$. $J_n \subset I_{\ulcorner \lambda r \urcorner}$ et $J_n \not\subset I_{\ulcorner \lambda(r+1) \urcorner}$ d'où

$\lambda r \le \ulcorner \lambda r \urcorner \le v_f(J_n) \le \ulcorner \lambda\,(r+1) \urcorner \le \lambda(r+1)+1,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*_+$ on a $\lambda\, v_{f(\lambda)}(J_n)$

$\le v_f(J_n) \le \lambda\,(v_{f(\lambda)}(J_n)+1)+1,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*_+$.

c) Montrons maintenant que : $d_{I_k}(g) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $d_f(g) \in \mathbb{R}$. Comme f est fortement AP de rang k, $f^{(k)} = f_{I_k}$ alors

$k\, v_{I_k}(J_n) \le v_f(J_n) \le k\,(v_{I_k}(J_n)+1)+1$, et on a

$kv_{I_k}(J_n) - \bar{a}_f(g) \le v_f(J_n) - \bar{a}_f(g) \le k(v_{I_k}(J_n)+1) - \bar{a}_f(g) + 1$, d'où

$kv_{I_k}(J_n) - k\bar{a}_{I_k}(g) \le v_f(J_n) - \bar{a}_f(g) \le k(v_{I_k}(J_n)+1) - k\bar{a}_{I_k}(g) + 1$, car

$k\bar{a}_{I_k}(g) = k\bar{a}_{f(k)}(g) = \bar{a}_f(g)$, (proposition I.1.5) et on a :

$k(v_{I_k}(J_n) - n\,\bar{a}_{I_k}(g)) \le v_f(J_n) - n\bar{a}_f(g) \le k(v_{I_k}(J_n) - n\bar{a}_{I_k}(g)) + k + 1$

$\le v_f(J_n) - n\bar{a}_f(g) + k+1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ d'où $kd_{I_k}(g) - k - 1 \le d_f(g)$

$\le kd_{I_k}(g)$ et par conséquent $kd_{I_k}(g) \le d_f(g) \le kd_{I_k}(g) + k + 1 \le d_f(g) + k + 1$ car

$d_{I_k}(g) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (n\bar{a}_{I_k}(g) - v_{I_k}(J_n))$ et $d_f(g) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (n\bar{a}_f(g) - v_f(J_n))$.

On déduit alors que : $d_{I_k}(g) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $d_f(g) \in \mathbb{R}$.

(ii) Pour démontrer (ii) nous allons établir que

$\lambda\, w_{f(\lambda)}(J_n) - \lambda \le w_f(J_n) \le \lambda\, w_{f(\lambda)}(J_n) + 1,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*_+$.

a) Montrons d'abord que $w_f(J_n) = \infty$ si et seulement si $w_{f(\lambda)}(J_n) = \infty$. En effet si $w_{f(\lambda)}(J_n) = \infty$ alors $\beta = \{r\ ;\ I_{\ulcorner \lambda r \urcorner} \subset J_n\} = \emptyset$, supposons $w_f(J_n) = p \in \mathbb{N}$ alors il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda s \ge p$ d'où $\ulcorner \lambda s \urcorner \ge p$, $I_{\ulcorner \lambda s \urcorner} \subset I_p \subset J_n$ alors $\beta \ne \emptyset$ absurde donc $w_f(J_n) = \infty$. Si $s = w_{f(\lambda)}(J_n) < \infty$ alors $I_{\ulcorner \lambda s \urcorner} \subset J_n$ et $w_f(J_n) \le [\,\lambda s\,] < \infty$. Donc $w_f(J_n) = \infty$ si et seulement si $w_{f(\lambda)}(J_n) < \infty$ et si l'une des assertions équivalentes est vérifiée on a :

$\lambda w_{f(\lambda)}(J_n) - \lambda \le w_f(J_n) \le \lambda\, w_{f(\lambda)}(J_n) + 1,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*_+$. On déduit que $w_f(J_n) \in \mathbb{N}$ si et seulement si $w_{f(\lambda)}(J_n) \in \mathbb{N}$.

b) Supposons que $r = w_{f(\lambda)}(J_n) \in \mathbb{N}$. $I_{\lceil \lambda r \rceil} \subset J_n$ et $I_{\lceil \lambda (r+1) \rceil} \not\subset J_n$ d'où

$\lambda(r-1) \leq \lceil \lambda (r-1) \rceil \leq w_f(J_n) \leq \lceil \lambda r \rceil \leq \lambda r + 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*_+$ on a :

$\lambda\, w_{f(\lambda)}(J_n) - \lambda \leq w_f(J_n) \leq \lambda\, w_{f(\lambda)}(J_n) + 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*_+$

c) Montrons maintenant que : $D_{I_k}(g) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $D_f(g) \in \mathbb{R}$.

Comme f est fortement AP de rang k, $f^{(k)} = f_{I_k}$

alors $kw_{I_k}(J_n) - k \leq w_f(J_n) \leq kw_{I_k}(J_n) + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et on a

$kw_{I_k}(J_n) - n\bar{b}_f(g) - k \leq w_f(J_n) - n\bar{b}_f(g) \leq k\, w_{I_k}(J_n) - n\bar{b}_f(g) + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$kw_{I_k}(J_n) - kn\bar{b}_{I_k}(g) - k \leq w_f(J_n) - n\bar{b}_f(g) \leq k\, w_{I_k}(J_n) - kn\bar{b}_{I_k}(g) + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

car $k\bar{b}_{I_k}(g) = k\bar{b}_{f(k)}(g) = \bar{b}_f(g)$, (proposition I.1.5) et on a :

$k(w_{I_k}(J_n) - n\bar{b}_{I_k}(g)) - k \leq w_f(J_n) - n\bar{b}_f(g) \leq k(w_{I_k}(J_n) - n\bar{b}_{I_k}(g)) + 1$

$\leq w_f(J_n) - n\bar{b}_f(g) + k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ comme

$D_f(g) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (w_f(J_n) - n\bar{b}_f(g))$, et $D_{I_k}(g) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (w_{I_k}(J_n) - n\bar{b}_{I_k}(g))$,

$kD_{I_k}(g) - k \leq D_f(g) \leq kD_{I_k}(g) + 1 \leq D_f(g) + k + 1$. On déduit alors que

$D_{I_k}(g) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $D_f(g) \in \mathbb{R}$.

Soient I et J des idéaux de l'anneau A. Si la filtration adique f_I est projectivement équivalente à f_J, nous dirons que I est projectivement équivalente à J. L'idéal I est dit séparé si la filtration adique f_I est séparée. L'idéal I est dit régulier s'il existe $a \in I$ tel que a ne soit pas un diviseur de zéro dans A. Soit I un idéal, séparé, régulier de l'anneau nœthérien A, notons U(I) l'ensemble des idéaux séparés, réguliers de l'anneau A, projectivement équivalents à I.

Nagata a montré dans ([12], théorème 8), que les déviations asymptotiques $e_I(J)$ et $E_I(J)$ sont des réels positifs si $I \in U(J)$.

Dans cette partie nous allons étudier l'existence de $e_f(g)$ et $E_f(g)$ dans $\mathbb{R}_+$.

III.1.2. <u>Lemme</u>

Soient J un idéal de l'anneau nœthérien A, $f = (I_n)$ une filtration fortement AP de rang k de l'anneau A telle que $I_k \in U(J)$. Alors :

(i) $e_f(J) \in \mathbb{R}_+$

(ii) $E_f(J) \in \mathbb{R}_+$.

Preuve.

Remarquons que comme $v_f(J) = a_f(J)$ et $w_{I_k}(J) = b_{I_k}(J_n)$, (remarques II.2.1) alors $e_f(J) = d_f(J)$ et $D_{I_k}(J) = E_{I_k}(J)$.

(i) Montrons d'abord que $e_f(J) \in \mathbb{R}_+$. Comme $d_{I_k}(J) = e_{I_k}(J) \in \mathbb{R}_+$ (théorème 8, [12]).

Et comme $d_{I_k}(J) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $d_f(J) \in \mathbb{R}$ (proposition III.1.1). On déduit que $e_f(J) \in \mathbb{R}_+$ car $e_f(J) = d_f(J)$.

(ii) Montrons maintenant que $E_f(J) \in \mathbb{R}_+$. Pour deux filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$, nous allons établir que $D_f(g) \leq E_f(g) \leq E_f(g) \leq |D_f(g)| + 1$.

a) Montrons d'abord que $D_f(g) \leq E_f(g)$. Comme $w_f(J_n) \leq b_f(g^{(n)})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (proposition I.1.3, (iv)) ; $w_f(J_n) - n\bar{b}_f(g) \leq b_f(g^{(n)}) - n\bar{b}_f(g)$, on a alors $D_f(g) \leq E_f(g)$.

Montrons ensuite que $E_f(g) \leq |D_f(g)| + 1$. Posons $\beta = |D_f(g)|$ alors $w_f(J_n) - n\bar{b}_f(g) \leq \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_f(J_{kn}) \leq kn\bar{b}_f(g) + \beta$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\frac{1}{n} w_F(J_{kn}) \leq k\bar{b}_f(g) + \frac{\beta}{n} \leq k\bar{b}_f(g) + \beta$ d'où $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \lceil w_f(J_{kn})/n \rceil - 1 \leq \frac{1}{n} w_F(J_{kn}) \leq k\bar{b}_f(g) + \beta$. Comme $b_f(g^{(k)}) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \lceil w_f(J_{kn})/n \rceil$, (proposition I.1.3 (iv)) on a : $b_f(g^{(k)}) - 1 \leq k\bar{b}_f(g) + \beta$ d'où $E_f(g) \leq |D_f(g)| + 1$. D'où si $g = f_J$ on a $D_f(J) \leq E_f(J) \leq |D_f(J)| + 1$

Comme $E_{I_k}(J) \in \mathbb{R}_+$ (théorème 8 [12]). Et comme $D_{I_k}(J) = E_{I_k}(J) \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $D_f(J) \in \mathbb{R}$ (proposition III.1.1). On déduit que $E_f(J) \in \mathbb{R}$ car si $D_f(J) \in \mathbb{R}$ et comme $D_f(J) \leq E_f(J) \leq |D_f(J)| + 1$, on a $E_f(J) \in \mathbb{R}$.

III.1.3. Théorème

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ des filtrations fortement AP respectivement de rang k et s appartenant à $\underline{B}$ telle que $I_k \in U(J_s)$. Alors

(i) $e_f(g) \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $E_f(g) \in \mathbb{R}_+$.

Preuve (i) a) Nous allons établir que : $d_f(g) \leq e_f(g) \leq |d_f(g)| + 1$, (*).

Montrons d'abord que $d_f(g) \leq e_f(g)$. Comme $v_f(J_n) \geq a_f(g^{(n)})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (proposition I.1.3), (iii) ; on a $n\bar{a}_f(g) - v_f(J_n) \leq n\bar{a}_f(g) - a_f(g^{(n)})$.

On déduit alors $d_f(g) \leq e_f(g)$ car $d_f(g) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (n\,\bar{a}_f(g) - v_f(J_n))$ et $e_f(g) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (n\bar{a}_f(g) - a_f(g^{(n)}))$.

Montrons ensuite que $e_f(g) \leq |d_f(g)| + 1$. Posons $\beta = |d_f(g)|$ alors $n\bar{a}_f(g) - v_f(J_n) \leq \beta$ pour tout entier $n \geq 1$, d'où $v_F(J_{kn}) \geq kn\bar{a}_f(g) - \beta$ pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout entier $n \geq 1$. On a $\frac{1}{n} v_f(J_{kn}) \geq k\bar{a}_f(g) - \frac{\beta}{n} \geq k\bar{a}_f(g) - \beta$ donc $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \lfloor \frac{1}{n} v_f(J_{kn}) \rfloor + 1 \geq \inf_{n \in \mathbb{N}^*} (\frac{1}{n} v_f(J_{kn})) \geq k\bar{a}_f(g) - \beta$. Comme $a_f(J^{(k)}) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \lfloor \frac{1}{n} v_f(J_{kn}) \rfloor$, (proposition I.1.3) ; on obtient $a_f(J^{(k)}) + 1 \geq k\bar{a}_f(g) - \beta$ donc $e_f(g) \leq |d_f(g)| + 1$ et on déduit $d_f(g) \leq e_f(g) \leq |d_f(g)| + 1$

b) Prouvons que : $d_f(g) \leq 0$ implique $0 \leq e_f(g) \leq 1$, (**).

Pour cela posons : $A_f(g) = \sup \{r \in \mathbb{R}^*_+ , g \leq f^{(r)}\}$ ou 0 si cet ensemble est vide.

Remarquons que $a_f(g) = \lfloor A_f(g) \rfloor$. Par conséquent on a $\bar{a}_f(g) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} A_f(g)^{(n)})$ Comme $kA_f(g) \leq A_f(g^{(k)})$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$; on déduit $a_f(g) \leq A_f(g) \leq \bar{a}_f(g)$

1) Montrons d'abord que $d_f(g) \leq 0 \Rightarrow \bar{a}_f(g) = A_f(g)$.

Soit $d_f(g) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (n\bar{a}_f(g) - v_f(J_n)) \leq 0$. Si $\bar{a}_f(g) = 0$ on a $\bar{a}_f(g) = A_f(g)$ car $A_f(g) \leq \bar{a}_f(g)$. Si $\bar{a}_f(g) = \infty$, $d_f(g) \leq 0$ implique $n\bar{a}_f(g) \leq v_f(J_n) = \infty$ donc $J_n \subseteq f_p$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ et on a $g \leq f^{(r)}$, $\forall r \in \mathbb{R}^*_+$ d'où $A_f(g) = \infty$. Si $\bar{a}_f(g) = r \in \mathbb{R}^*$, $d_f(g) \leq 0$ implique $\lceil n\bar{a}_f(g) \rceil \leq v_f(J_n)$ alors $J_n \subseteq I_{\lceil n\bar{a}_f(g) \rceil}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ d'où $g \leq f^{(r)}$ et on a $\bar{a}_f(g) \leq A_f(g)$ et comme $A_f(g) \leq \bar{a}_f(g)$; on a $A_f(g) = \bar{a}_f(g)$.

2) Remarquons que $\bar{a}_f(g) = A_f(g)$ implique $\bar{a}_f(g^{(k)}) = A_f(g^{(k)})$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$. En effet comme $A_f(g) \leq \bar{a}_f(g)$, alors $A_f(g^{(k)}) \leq \bar{a}_f(g^{(k)})$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $k\bar{a}_f(g) = kA_f(g) \leq A_f(g^{(k)}) \leq \bar{a}_f(g^{(k)}) = k\bar{a}_f(g)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ donc $\bar{a}_f(g^{(k)}) = A_f(g^{(k)})$.

3) Montrons ensuite que $d_f(g) \leq 0$ implique $0 \leq e_f(g) \leq 1$. En effet $d_f(g) \leq 0$ implique $A_f(g) = \bar{a}_f(g)$ et comme $a_f(g^{(k)}) \leq A_f(g^{(k)}) < a_f(g^{(k)}) + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ alors $0 \leq k\bar{a}_f(g) - a_f(g^{(k)}) \leq 1$ donc si $d_f(g) \leq 0$ alors $e_f(g) \leq 1$ car $e_f(g) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*}(n\bar{a}_f(g) - a_f(g^{(n)}))$.

c) Montrons maintenant que $e_f(g) \in \mathbb{R}_+$. Comme g est une filtration fortement AP de rang s de l'anneau A alors pour tout entier $n \geq 1$ il existe un entier q_n tel que $sq_n \leq n \leq s(q_n + 1)$, (***)

et on a $J_{s(q_n+1)} \subseteq J_n \subseteq J_{sq_n}$ d'où $v_f(J_{sq_n}) \leq v_f(J_n) \leq v_f(J_{s(q_n+1)})$ et on a

$n\bar{a}_f(g) - v_f(J_s^{q_n+1}) \leq n\bar{a}_f(g) - v_f(J_n) \leq n\bar{a}_f(g) - v_f(J_s^{q_n})$ car $J_{s\ell} = J_s^{\ell}$,

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$. On déduit $n\bar{a}_f(g) - v_f(J_n) \leq \frac{n}{s}\bar{a}_f(g^{(s)}) - v_f(J_s^{q_n})$ car $\bar{a}_f(g^{(s)}) = s\bar{a}_f(g)$

et comme $g = (J_n)$ est une filtration fortement AP de rang s alors $\bar{a}_f(g^{(s)}) = \bar{a}_f(J_s)$ et (***) implique $n\bar{a}_f(g) - v_f(J_n) \leq (q_n+1)\,\bar{a}_f(J_s) - v_f(J_s^{q_n})$ et

$n\bar{a}_f(g) = v_f(J_n) \leq q_n\,\bar{a}_f(J_s) - v_f(J_s^{q_n}) + \bar{a}_f(J_s)$; (1).

$I_k \in U(J_s)$ implique que $\bar{a}_f(J_s) \in \mathbb{R}_+$; (lemme II.3.6).

Si $q_n = 0$ alors $q_n\,\bar{a}_f(J_s) - v_f(J_s^{q_n}) + \bar{a}_f(J_s) = r \in \mathbb{R}_+$, (2).

De (1) on a $n\,\bar{a}_f(g) - v_f(J_n) \leq d_f(J_s) + \bar{a}_f(J_s) \in \mathbb{R}_+$ car $d_f(J_s) = e_f(J_s) \in \mathbb{R}_+$, (3)

Lemme III.1.2). De (2) et de (3) on déduit que

$n\,\bar{a}_f(g) - v_f(J_n) \leq \sup(d_f(J_s) + \bar{a}_f(J_s)\,;\, r)$.

D'où $d_f(g) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*}(n\,\bar{a}_f(g) - v_f(J_n)) \neq +\infty$. (****)

(*); (**) et (****) impliquent que $e_f(g) \in \mathbb{R}_+$.

(ii) a) Nous allons d'abord établir que : $D_f(g) \leq 0$ implique $0 \leq E_f(g) \leq 1$.

Pour cela posons :

$B_f(g) = \sup\{r \in \mathbb{R}^*_+ \,,\, f^{(r)} \leq g\}$ ou ∞ si cet ensemble est vide.

Remarquons que $b_f(g) = \lceil B_f(g) \rceil$.

Par conséquent on a $\overline{b}_f(g) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} B_f(g)^{(n)})$ .Comme pour tout $r \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(f^{(r)})^{(k)} = f^{(rk)}$ on a $B_f(g^{(k)}) \le kB_f(g)$,$\forall k \in \mathbb{N}^*$ et on déduit $\overline{b}_f(g) \le B_f(g) \le b_f(g)$.

1) Montrons que $D_f(g) \le 0$ implique $\overline{b}_f(g) = B_f(g)$.

Si $\overline{b}_f(g) = \infty$ alors $\overline{b}_f(g) = B_f(g)$ car $\overline{b}_f(g) \le B_f(g)$. Si $\overline{b}_f(g) \neq \infty$, $D_f(g) \le 0$ implique $w_f(J_n) \le n\overline{b}_f(g)$, $\forall n \ge 1$ donc $I_{\lceil n\overline{b}_f(g)\rceil} \subset I_{w_f(J_n)} \subset J_n$, $\forall n \ge 1$ d'où $f(\overline{b}_f(g)) \le g$ donc $B_f(g) \le \overline{b}_f(g)$ et comme $\overline{b}_f(g) \le B_f(g)$ on a $\overline{b}_f(g) = B_f(g)$.

2) Montrons ensuite que $D_f(g) \le 0$ implique $0 \le E_f(g) \le 1$. En effet $D_f(g) \le 0$ implique $\overline{b}_f(g) = B_f(g)$ et comme $b_f(g^{(k)}) < B_f(g^{(k)}) \le b_f(g^{(k)}) + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \le b_f(g^{(k)}) - k\overline{b}_f(g^{(k)}) \le 1$ car $k\overline{b}_f(g) = \overline{b}_f(g^{(k)}) = B_f(g^{(k)})$.

Comme $E_f(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} (b_f(g^{(n)}) - n\overline{b}_f(g))$, on a : $D_f(g) \le 0$ implique $0 \le E_f(g) \le 1$.

b) Montrons maintenant que $E_f(g) \in \mathbb{R}_+$. Soit $g = (J_n)$ une filtration fortement AP de rang s de l'anneau A alors pour tout entier $n \ge 1$ il existe un entier q_n tel que $sq_n \le n \le s(q_n+1)$, (*) .

On a $J_{s(q_n+1)} \subseteq J_n \subseteq J_{sq_n}$ d'où $w_f(J_{sq_n}) \le w_f(J_n) \le w_f(J_{s(q_n+1)})$ et on a $w_f(J_s^{q_n}) - n\,\overline{b}_f(g) \le w_f(J_n) - n\,\overline{b}_f(g) \le w_f(J_s^{q_n+1}) - n\,\overline{b}_f(g)$ car $J_{s\ell} = J_s^{\ell}$.

On déduit : $w_f(J_n) - n\,\overline{b}_f(g) \le w_f(J_s^{q_n+1}) - n\,\overline{b}_f(g)$ et $w_f(J_n) - n\,\overline{b}_f(g) \le w_f(J_s^{q_n+1}) - (n/s)\,\overline{b}_f(g^{(s)})$ car $\overline{b}_f(g^{(s)}) = s\,\overline{b}_f(g)$ et comme $g = (J_n)$ est une filtration fortement AP d'ordre s alors $\overline{b}_f(g^{(s)}) = \overline{b}_f(J_s)$ et (*) implique $w_f(J_n) - n\,\overline{b}_f(g) \le w_f(J_s^{q_n+1}) - (q_n)\ \overline{b}_f(J_s)$ et on a : $w_f(J_n) - n\,\overline{b}_f(g) \le w_f(J_s^{q_n+1}) - (q_n+1)\ \overline{b}_f(J_s) + \overline{b}_f(J_s)$ et $w_f(J_n) - n\,\overline{b}_f(g) \le D_f(J_s) + \overline{b}_f(J_s)$; d'où $D_f(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}(w_f(J_n) - n\cdot\overline{b}_f(g)) \le D_f(J_s) + \overline{b}_f(J_s)$. $E_{I_k}(J_s) = D_{I_k}(J_s) \in \mathbb{R}_+$ et $D_f(J_s) \in \mathbb{R}$ (voir lemme III.1.2 et la proposition III.1.1). On a aussi $\overline{b}_f(J_s) \in \mathbb{R}_+$ (lemme II.3.6). Par conséquent $D_f(g) \neq +\infty$.

Comme $D_f(g) \leq E_f(g) \leq |D_f(g)| + 1$ et $D_f(g) \leq 0$ implique $0 \leq E_f(g) \leq 1$,

on déduit que $E_f(g) \in \mathbb{R}_+$.

§.2 FILTRATIONS DANS UN ANNEAU ET DÉVIATIONS ASYMPTOTIQUES BORNÉES

Rappelons que $\underline{\mathbf{B}}$ est l'ensemble des AP filtrations séparées, non nilpotentes de l'anneau nœthérien A.

Soit g une filtration fortement AP de rang k séparée, non nilpotentes de l'anneau nœthérien A. Notons par $Q_k(g)$ l'ensemble des filtrations fortement AP de rang k, séparées, non nilpotentes de l'anneau nœthérien A projectivement équivalentes à g.

Dans toute cette partie nous ne considérons que des filtrations qui appartiennent à $\underline{\mathbf{B}}$. Supposons g fortement nœthérienne et notons $S(g)$ le sous-ensemble de $Q_k(g)$ formé des filtrations fortement nœthériennes de l'anneau nœthérien A. Donc tous les éléments de $S(g)$ sont projectivement équivalents à g. Posons : $e(g) = \sup\{e_f(g), f \in S(g)\}$ et $E(g) = \sup\{E_f(g), f \in S(g)\}$.

Dans cette partie nous allons étudier $e(g)$ et $E(g)$. $e(g) \geq 0$ et $E(g) \geq 0$ car $e_f(g) \geq 0$ et $E_f(g) \geq 0$.

III.2.1.<u>Définition</u>. (voir définition 4.1 [8]).

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ des filtrations de l'anneau A avec $f \leq g$. f est appelée une réduction de g s'il existe des entiers $r \geq 1$ et $s \geq 0$ tels que $J_{n+r} = J_r I_n$ pour tout entier $n \geq s$.

III.2.2. <u>Lemme</u>

Soit f est une réduction de g alors :

(i) il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout $n \geq k$; $g^{(n+k)} = g^{(k)} f^{(n)}$.

(ii) $\overline{f} = \overline{g}$.

Preuve. (i) Si $f = (I_n)$ est une réduction de $g = (J_n)$ il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout entier $m \geq 1$ et pour $n \geq k$, $J_{m(k+n)} = J_{mk} I_{mn}$ et on a

$g^{(n+k)} = g^{(k)} f^{(n)}$, (voir 1°) de la preuve du théorème 4.6., [8]).

(ii) $g^{(n+k)} = g^{(k)} f^{(n)} \leq f^{(n)}$ implique $\overline{v}_{g^{(n+k)}}(x) \leq \overline{v}_{f^{(n)}}(x)$; $\forall x \in A$, on a :

$(n/n+k)\ \overline{v}_g(x) \leq \overline{v}_f(x)$; si $n \to \infty$ alors : $\overline{v}_g(x) \leq \overline{v}_f(x)$ et comme $f \leq g$, on déduit

$\overline{v}_g(x) = \overline{v}_f(x)$, $\forall x \in A$ d'où $\overline{f} = \overline{g}$.

III.2.3. Définition

(voir [6]). Soit $f = (I_n)$ une filtration de l'anneau A. Un élément $x \in A$ est dit entier sur f si x vérifie une équation de la forme :
$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ où $a_i \in I_i$ pour $i = 1, \dots, n$. L'ensemble des éléments entiers sur $f^{(k)}$ est un idéal noté $P_k(f)$. La filtration $f^* = (P_n(f))$ est appelée la clôture pruférienne de f.

III.2.4. Lemme

Soient f et g deux filtrations de l'anneau nœthérien A avec $f \leq g$ telles que f soit fortement nœthérienne et g nœthérienne. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une réduction de g.

(ii) $\overline{f} = \overline{g}$.

Preuve. On a $f^* = \overline{f}$ et $g^* = \overline{g}$ car f et g sont fortement AP, (voir [6], proposition 4.7) et comme $P(f) = P(g)$ si et seulement si f est une réduction de g (théorème 4.6.[8]), on achève la démonstration.

Considérons les deux conditions suivantes qui nous permettrons d'étudier e(g) et E(g).

Condition IN_1. Etant donnée une filtration $g \in F(A)$, il existe un entier $r = r(g)$ tel que pour tout entier $m > 0$ et toute filtration f réduction de

$\overline{g^{(m)}}$; on. ait $g^{(m(n+r))} \leq f^{(n)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Condition $\mathbb{N}_2$. Etant donnée une filtration $g \in F(A)$, il existe un entier $s = s(g)$ tel que pour tout entier $m>0$ et tout entier $n>0$, $\overline{g^{(m)}}^{(n+s)} \leq g^{(mn)}$.

III.2.5. **Proposition**

(i) Si $e(g) \in \mathbb{R}_+$ alors g vérifie la condition $\mathbb{N}_1$.

(ii) Si $E(g) \in \mathbb{R}_+$ alors g vérifie la condition $\mathbb{N}_2$.

Preuve.

(i) Supposons que $e(g) \in \mathbb{R}_+$. Soit f une réduction de $g^{(m)}$ alors $\overline{f} = \overline{g^{(m)}}$. (Lemme III.2.2), d'où $\overline{a}_f(g) = 1/m$, (lemme II.3.6). Pour tout entier $n \geq 1$ on a : $r = \lceil e(g) \rceil \geq (1/m)(mn + mr) - a_f(g^{(mn+mr)})$ et on a $a_f(g^{(mn+mr)}) \geq n$ c'est-à-dire $g^{(mn+mr)} = g^{(m(n+r))} \leq f^{(n)}$ donc g vérifie la condition $\mathbb{N}_1$.

(ii) Supposons que $E(g) \in \mathbb{R}_+$ nous montrerons que g satisfait à la condition $\mathbb{N}_2$ avec $s = s(g) = \lceil E(g) \rceil$; soit un entier $m>0$ et $h = \overline{g^{(m)}}$ on a $\overline{b}_h(g) = 1/m$ (lemme II.3.6). $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $(g^{(m)})^{(n)} = g^{(mn)}$ d'où $b_h((g^{(m)})^{(n)}) = b_h(g^{(mn)})$ et $s \geq b_h((g^{(m)})^{(n)}) - n\overline{b}_h(g^{(m)}) = b_h(g^{(mn)}) - mn\overline{b}_h(g^{(m)}) = b_h(g^{(mn)}) - n$, on a : $n+s \geq b_h(g^{(mn)})$ d'où $(\overline{g^{(m)}})^{(n+s)} = h^{(n+s)} \leq h^{(b_h(g^{(mn)}))} \leq g^{(mn)}$ et g satisfait à la condition $\mathbb{N}_2$.

III.2.6. **Remarques**

(i) Si $e_f(\overline{g}) \in \mathbb{R}_+$ alors $e_f(g) \in \mathbb{R}_+$ et $e_f(\overline{g}) \geq e_f(g)$.

(ii) Si $E_f(g) \in \mathbb{R}_+$ alors $E_f(\overline{g}) \in \mathbb{R}_+$ et $E_f(g) \geq E_f(\overline{g})$.

En effet (i) Pour $f \in S(g)$, pour tout entier $n \geq 1$; $a_f(\overline{g}^{(n)}) \leq a_f(g)^{(n)})$ car $g \leq \overline{g}$ et comme $\overline{a}_f(\overline{g}) = \overline{a}_f(g)$, (lemme II.3.6) on a $n\overline{a}_f(\overline{g}) - a_f(\overline{g}^{(n)}) \geq n\overline{a}_f(g) - a_f(g)^{(n)})$ et on déduit que si $e_f(\overline{g}) \in \mathbb{R}_+$ alors $e_f(g) \in \mathbb{R}_+$ et $e_f(\overline{g}) \geq e_f(g)$.

Le (ii) se montre de la même façon.

III.2.7. Remarques. Soit g un élément de $\underline{B}$.

(i) Si $e(g)\in\mathbb{R}_+$ alors $e(g^{(s)})\in\mathbb{R}_+$, $\forall\, s\in\mathbb{N}^*$ et $e(g) \geq e(g^{(s)})$.

(ii) Si $E(g)\in\mathbb{R}_+$ alors $E(g^{(s)})\in\mathbb{R}_+$, $\forall\, s\in\mathbb{N}^*$ et $E(g) \geq E(g^{(s)})$.

En effet (i) Soit $f\in S(g)$, pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout entier $s\geq 1$;
$n\bar{a}_f(g^{(s)}) - a_f((g^{(s)})^{(n)}) = sn\bar{a}_f(g) - a_f(g^{(sn)}) \leq e(g)$ et on a : $e(g^{(s)}) \leq e(g)$ car pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $s\geq 1$; $(g^{(s)})^{(n)} = g^{(sn)}$ par conséquent si $e(g)\in\mathbb{R}_+$ alors $e(g^{(s)}) \in\mathbb{R}_+$, $\forall\, s\in\mathbb{N}^*$ et $e(g) \geq e(g^{(s)})$.

Le (ii) se montre de la même façon.

III.2.8. Lemme.

il existe un entier $d = d(g) > 0$, tel que pour tout $f\in Q_k(g)$, $\overline{f^{(d)}}= \overline{g^{(m)}}$, pour un entier $m>0$.

Preuve

Soit $f\in Q_k(g)$ il existe des entiers s et $r>0$ tel que $s\bar{v}_f(x) = r\bar{v}_g(x)$ $\forall\, x\in A$. Comme f et g sont fortement AP de rang k alors on a :
$f^{(k)} = f_{I_k}$, $g^{(k)} = f_{J_k}$ et on obtient $sk\bar{v}_f(x) = rk\bar{v}_g(x)$, $\forall\, x\in A$; d'où $s\bar{v}_{f(k)}(x) = r\bar{v}_{g(k)}(x)$, $\forall\, x\in A$. Par conséquent $s\bar{v}_{I_k}(x) = r\bar{v}_{J_k}(x)$, $\forall\, x\in A$ car $\bar{v}_{f(k)}(x) = \bar{v}_{I_k}(x)$. On déduit que $I_k\in U(J_k)$ .Soit $(I)_a$ la clôture intégrale de l'idéal I. Comme il existe un entier $d = d(J_k) > 0$, tel que pour tout $I_k\in U(J_k)$, $(I_k{}^d)_a= (J_k{}^m)_a$ pour un entier $m>0$, (lemme 1.1 [11]), on a $(1/d)\bar{v}_{I_k}(x) = (1/m)\bar{v}_{J_k}(x)$ $\forall\, x\in A$. D'où $(1/d)\bar{v}_{f(k)}(x) = (1/m)\bar{v}_{g(k)}(x)$, $\forall\, x\in A$ et on déduit $\bar{v}_{f(d)}(x) = \bar{v}_{g(m)}(x)$, $\forall\, x\in A$ donc il existe un entier $d = d(g)$, tel que pour tout $f\in Q_k(g)$, $\overline{f^{(d)}}= \overline{g^{(m)}}$.

III.2.9. Théorème.

$E(g) \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si g vérifie la condition $\mathbb{N}_2$.

Preuve.

En utilisant la proposition III.2.5. Il suffit de montrer que si g vérifie la condition $\mathbb{N}_2$, alors $E(g) \in \mathbb{R}_+$. Supposons que g vérifie la condition $\mathbb{N}_2$ avec $s = s(g)$. Soit $f \in Q_k(g)$ on a, $\overline{f^{(d)}} = \overline{g^{(m)}}$. d étant l'entier du lemme III.2.8 pour un entier $m>0$. $\bar{b}_f(g) = d/m$ (lemme II.3.6). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que $mq \leq n < m(q+1)$; $(f^{(d)})^{(q+s+1)} = f^{(d(q+s+1))} \leq \overline{f^{(d)}}^{(q+s+1)} = \overline{g^{(m)}}^{(q+s+1)} \leq g^{(m(q+1))} \leq g^{(n)}$ d'où $b_f(g^{(n)}) \leq d(q+s+1)$ donc $b_f(g^{(n)}) - n\bar{b}_f(g) \leq d(q+s+1) - nd/m \leq d(q+s+1) - dq = d(s+1)$ et on a : $E(g) \leq d(s+1)$ donc $E(g) \in \mathbb{R}_+$.

III.2.10. Proposition.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E(g) \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $\exists\, h \in \mathbb{N}^*$ tel que $E(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$

(iii) $\forall\, h \in \mathbb{N}^*$, $E(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$

Preuve. Montrons que (i) implique (iii) comme $E(g) \geq E(g^{(h)})$ pour tout $h \in \mathbb{N}^*$ (voir preuve des remarques III.2.7) alors si $E(g) \in \mathbb{R}_+$ on déduit que $E(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $h \in \mathbb{N}^*$.

(iii) implique (ii), c'est évident.

Montrons maintenant que : (ii) implique (i).

Supposons qu'il existe $h \in \mathbb{N}^*$ tel que $E(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$ alors $g^{(h)}$ vérifie la condition $\mathbb{N}_2$, (théorème III.2.9). Soit $s = s(g^{(h)})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier q tel que $qh \leq n < h(q+1)$ et comme $\overline{g^{(m)}} = \bar{g}^{\,m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, (lemme II.3.2) alors: $\overline{g^{(m)}}^{(n+h(s+1))} = \bar{g}^{(m(n+h(s+1)))} \leq \bar{g}^{(m(qh+h(s+1)))} = \bar{g}^{(h(m(q+(s+1)))} = (\bar{g}^{(hm)})^{(q+s+1)} = \overline{(g^{(h)})^{(m)}}^{(q+(s+1))} \leq g^{(hm(q+1))} = g^{(m(h(q+1)))} \leq g^{(mn)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ donc g vérifie la condition $\mathbb{N}_2$, $s(g) = h(s+1)$ donc $E(g) \in \mathbb{R}_+$, (théorème III.2.9).

III.2.11. Théorème.

Soit $g\in F(A)$ une filtration fortement nœthérienne telle que la filtration $\overline{g}$ soit nœthérienne.

Alors : $e(g)\in\mathbb{R}_+$ si et seulement si g vérifie la condition IN_1.

Preuve

Si $\overline{g}$ est une filtration nœthérienne alors $\overline{g^{(m)}}$ est nœthérienne pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ car $\overline{g^{(m)}}=\overline{g}^{\,m}$ pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ (lemme II.3.2). Montrons que si g vérifie la condition N_1, alors $e(g)\in\mathbb{R}_+$. Supposons que g vérifie la condition N_1. Soit $f\in S(g)$ on a : $\overline{f^{(d)}}=\overline{g^{(m)}}$. d étant l'entier du lemme III.2.8, $f^{(d)}$ est une réduction de $\overline{g^{(m)}}$, (voir lemme III.2.4) et $\overline{a}_f(g)=d/m$, (lemme II.3.6). Pour tout entier $n\geq m(r+1)$ où $r=r(g)$ dans la condition N_1, on peut trouver un entier $q\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$m(q+r)\leq n<m(q+r+1)$ on a : $g^{(n)}\leq g^{(m(q+r))}\leq (f^{(d)})^{(q)}=f^{(dq)}$ alors $a_f(g^{(n)})\geq dq$ d'où $n\overline{a}_f(g)-a_f(g^{(n)})\leq (nd/m)-dq\leq (m(q+r+1)d/m)-dq\leq d(r+1)$, pour tout entier $n\geq m(r+1)$ on a :

$$n\overline{a}_f(g)-a_f(g^{(n)})\leq d(r+1),\ (1).$$

Pour tout entier $n<m(r+1)$, $n\overline{a}_f(g)-a_f(g^{(n)})\leq n\overline{a}_f(g)<m(r+1)d/m=d(r+1)$, (2).

De (1) et de (2) on déduit alors que pour tout entier $n\geq1$;

$n\overline{a}_f(g)-a_f(g^{(n)})\leq d(r+1)$ et comme r et d dépendent seulement de g,

$n\overline{a}_f(g)-a_f(g^{(n)})\in\mathbb{R}_+$ d'où $e(g)\in\mathbb{R}_+$..

III.2.12. Proposition.

Soit g une filtration fortement nœthérienne de A telle $\overline{g}$ soit nœthérienne alors :

(i) : $e(g)\in\mathbb{R}_+$ si et seulement si $e(\overline{g})\in\mathbb{R}_+$.

(ii) : $E(g)\in\mathbb{R}_+$ si et seulement si $E(\overline{g})\in\mathbb{R}_+$.

Preuve.

(i) Comme $e_f(\overline{g}) \geq e_f(g)$, (remarques III.2.6) alors $e(\overline{g}) \geq e(g)$, on déduit que si $e(\overline{g}) \in \mathbb{R}_+$ alors $e(g) \in \mathbb{R}_+$.

Nous allons montrer maintenant que si $e(g) \in \mathbb{R}_+$ alors $e(\overline{g}) \in \mathbb{R}_+$. Il suffit de montrer que si g vérifie la condition IN_1 alors $\overline{g}$ en fait de même, (théorème III.2.11). Supposons que g vérifie la condition IN_1 avec $r = r(g)$. Comme g est une réduction de $\overline{g}$ alors il existe $u \in IN^*$ tel que $g^{(n)}.\overline{g}^{(u)} = \overline{g}^{(u+n)}$, $\forall n \geq u$ (voir remarque III.2.2 et lemme III.2.4) d'où $\overline{g}^{(u+n)} \leq g^{(n)}$, $\forall n \geq u$. Soit f une réduction de $g^{(m)}$ pour un entier m>0. Comme $\overline{g^{(m)}} = \overline{g}^{(m)}$ pour un entier m>0, alors pour tout $n \in IN^*$,

$$(g^{(m)})^{(n+r+u)} = (\overline{g}^{(m)})^{(n+r+u)} = \overline{g}^{(m(n+r+u))} \leq g^{(m(n+r+u)-u)} \leq g^{(m(n+r))} \leq f^{(n)}$$

la dernière inégalité provient de la condition IN_1 appliquée à g. On déduit que $\overline{g}$ satisfait à la condition IN_1 avec $r(\overline{g}) = r+u$.

(ii) Comme $E_f(g) \geq E_f(\overline{g})$ on a : $E(g) \geq E(\overline{g})$ (remarque III.2.6 et on déduit que si $E(g) \in \mathbb{R}_+$ alors $E(\overline{g}) \in \mathbb{R}_+$.

Montrons maintenant que : $E'(\overline{g}) \in \mathbb{R}_+$ implique $E(g) \in \mathbb{R}_+$. Supposons que $E(\overline{g}) \in \mathbb{R}_+$ alors $\overline{g}$ remplit la condition IN_2, soit u utilisé en haut et $s = s(\overline{g})$ tel que pour tout entier m>0,

$$\overline{g^{(m)}}^{(n+u+s)} = \overline{\overline{g}^{(m)}}^{(n+u+s)} \leq \overline{g}^{(m(n+u))} \leq g^{(m(n+u)-u)} \leq g^{(mn)} \quad \forall n \in IN^*$$ donc g vérifie la condition IN_2, avec $s(g) = s+u$ et le théorème III.2.9 implique que $E(g) \in \mathbb{R}_+$.

III.2.13. **Proposition.**

Soit g une filtration fortement nœthérienne de A telle que $\overline{g}$ soit nœthérienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $e(g) \in \mathbb{R}_+$

(ii) $\exists\, h \in IN^*$ tel que $e(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$

(iii) $\forall\, h \in IN^*$, $e(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$

Preuve. Montrons que (i) implique (iii) $e(g) \geq e(g^{(h)})$ pour tout $h \in \mathbb{N}^*$ (voir preuve des remarques III.2.7) et on déduit que $e(g) \in \mathbb{R}_+$ implique $e(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $h \in \mathbb{N}^*$.

(iii) implique (ii), c'est évident.

Montrons maintenant que (ii) implique (i). S'il existe $h \in \mathbb{N}^*$ tel que $e(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$ alors $g^{(h)}$ satisfait à la condition $\mathbb{N}_1$ avec $r = r(g^{(h)})$, (proposition III.2.11). Soit f une réduction de $\overline{g^{(m)}}$. Comme $\overline{g^{(m)}} = \overline{g}^{(m)}$ (lemme II.3.2) alors $f^{(h)}$ est une réduction de $\overline{g^{(hm)}}$ (théorème 4.6 [8])et

$((g^{(h)})^{(m)})^{(n+r)} = (g^{(hm)})^{(n+r)} \leq (f^{(h)})^{(n)} = f^{(hn)}$; (1)

car $g^{(h)}$ satisfait à la condition $\mathbb{N}_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier q tel que $qh \leq n < h(q+1)$, en utilisant la relation (1) on a :

$g^{(m(n+h(r+1)))} \leq g^{(m(qh+h(r+1)))} \leq (g^{(h)})^{(m)(q+(r+1))} \leq f^{(h(q+1))} \leq f^{(n)}$

donc g satisfait à la condition $\mathbb{N}_1$ avec $r(g) = h(r+1)$, en utilisant le théorème III.2.11 on a : $e(g) \in \mathbb{R}_+$.

III.2.14. Théorème.

Soit g une filtration fortement nœthérienne de A telle que $\overline{g}$ soit nœthérienne. Alors :

(i) $e(g) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow e(f) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in S(g)$

(ii) $E(g) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow E(f) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in S(g)$.

Preuve.

(i) Soit $f \in S(g)$ il existe un entier $d = d(g) > 0$, tel que $\overline{f^{(d)}} = \overline{g^{(m)}}$, pour un entier $m>0$, (lemme III.2.8). Si $e(g) \in \mathbb{R}_+$, de la proposition III.2.13 on déduit que $e(g^{(m)}) \in \mathbb{R}_+$ et en utilisant la proposition III.2.12 on a: $e(\overline{g^{(m)}}) = e(\overline{f^{(d)}}) \in \mathbb{R}_+$ et $e(f) \in \mathbb{R}_+$, (proposition III.2.13).

(ii) Soit $f \in S(g) \subset Q_k(g)$, il existe un entier $d = d(g) > 0$ tel que $\overline{f^{(d)}} = \overline{g^{(m)}}$, pour un entier $m>0$. Si $E(g) \in \mathbb{R}_+$ on déduit que $E(g^{(m)}) \in \mathbb{R}_+$ (proposition III.2.10). En utilisant la proposition III.2.12 on a : $E(\overline{g^{(m)}}) = E(\overline{f^{(d)}}) \in \mathbb{R}_+$ et $E(f) \in \mathbb{R}_+$, (proposition III.2.10)

III.2.15 Théorème.

Soit A un anneau de Nagata intègre et g une filtration fortement nœthérienne de A. On a alors :

(i) $e(g) \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $e(\overline{g}) \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $e(g) \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{N}^* / \, e(g) \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \forall\, h \in \mathbb{N}^*,\ e(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$.

(iii) Si $e(g) \in \mathbb{R}_+$ alors $e(f) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in S(g)$.

(iv) $E(g) \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{N}^* / \, E(g) \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \forall\, h \in \mathbb{N}^*,\ E(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$.

(v) $\forall h \in \mathbb{N}^*$, $E(g) \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si $E(g^{(h)}) \in \mathbb{R}_+$.

(vi) Si $E(g) \in \mathbb{R}_+$ alors $E(f) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in S(g)$.

Preuve.

On a $\overline{g} = g^*$ car g est fortement AP, (voir [6] proposition 4.7). Comme la filtration g est fortement nœthérienne alors g est nœthérienne et comme A est un anneau de Nagata, intègre et $g \le \overline{g}$ alors $\overline{g}$ est nœthérienne (proposition 4.9. [6]. En utilisant les propositions III.2.10, III.2.12 ; III.2.13 et les théorèmes III.2.11 et III.2.14, on a (i), (ii), (iii), (iv), (v) et (vi)

CHAPITRE IV

NOMBRES DE SAMUEL GENERALISES $\overline{v}_{\varphi}(\theta)$ et $\overline{w}_{\varphi}(\theta)$ SUR UN MODULE

§.1 ETUDE DE $\overline{v}_{fM}(gM)$ ET DE $\overline{w}_{fM}(gM)$

IV.1.1 Définition

Soit A un anneau commutatif. Une filtration du A-module M est une suite décroissante $\varphi = (M_n)$ de sous A-modules de M telle que $M_0 = M$.

Nous notons F(M) l'ensemble de toutes les filtrations du A-module M. Si $f = (I_n)$ est une filtration de l'anneau A on note $fM = (I_nM) \in F(M)$.

Dans [2] les nombres de Samuel généralisés $\overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_f(g)$ ont été définis pour deux filtrations f et g de l'anneau A. Dans cette partie nous étendons cette notion aux nombres de Samuel généralisés $\overline{v}_{\varphi}(\theta)$ et $\overline{w}_{\varphi}(\theta)$ où $\varphi = (M_n)$ et $\theta = (F_n)$ sont des filtrations du A-module M en posant :

$$\overline{v}_{\varphi}(\theta) = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{\varphi}(F_n)}{n}, \quad \overline{w}_{\varphi}(\theta) = \lim_{n\to+\infty} \frac{w_{\varphi}(F_n)}{n}$$ si ces limites existent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

(voir définitions I.1.1). En utilisant la proposition I.1.4, on montre que si $\overline{v}_{\varphi}(\theta)$ (resp. $\overline{w}_{\varphi}(\theta)$) existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ alors $\overline{a}_{\varphi}(\theta) = \overline{v}_{\varphi}(\theta)$, (resp. $\overline{b}_{\varphi}(\theta) = \overline{w}_{\varphi}(\theta)$).

IV.1.2 Proposition

Soient $f = (I_n)$ une filtration de l'anneau A, J un idéal de A et M un A-module. Alors la suite $(u_n) = \left(\frac{v_{fM}(J^nM)}{n}\right)$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On note sa limite $\overline{v}_{fM}(JM)$

Preuve

1) Remarquons d'abord que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ $\quad v_{fM}(J^n M) \geq n\, v_{fM}(JM)$. En effet,

a) Si $v_{fM}(JM) = +\infty$ alors : $n \neq 0$ implique $J^n I' \subseteq JM \subseteq I_p M$ $\forall\, p\in\mathbb{N}$ d'où $v_{fM}(J^n M) = +\infty$ et on a le résultat.

b) Si $v_{fM}(JM) \in\mathbb{N}^*$ alors on déduit que $J^n M \subseteq \left[I_{v_{fM}(JM)}\right]^n M$ d'où $J^n M \subseteq I_{nv_{fM}(JM)} M$ par conséquent $v_{fM}(J^n M) \geq n v_{fM}(JM)$.

2) Montrons maintenant que la suite $(u_n) = \left(\frac{v_{fM}(J^n M)}{n}\right)$ est convergente. Soit $\overline{u}$ (resp $\underline{u}$) la limite supérieure (resp inférieure) de la suite u_n. Il s'agit de montrer que $\underline{u} = \overline{u}$. Si $\underline{u} = +\infty$ ou $\overline{u} = 0$ c'est clair. Nous supposons donc $\underline{u}$ fini et $\overline{u} > 0$. Par définition.

$*\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, i\in\mathbb{N}\,,\ \exists\, j \geq i\ ;\ u_j \leq \underline{u} + \varepsilon.$

$**\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, i\in\mathbb{N}\,,\ \exists\, j \geq i\ ;\ u_j \geq \overline{u} - \varepsilon \quad (\text{si } \overline{u} < +\infty)$

$***\quad \forall\, N\in\mathbb{N}\,,\ \forall\, i\in\mathbb{N}\ \exists\, j \geq i\ ;\ u_j \geq N \quad (\text{si } \overline{u} = +\infty).$

Fixons un $\varepsilon > 0$ (et si $\overline{u} = +\infty$ un N) et choisissons un indice i assez grand pour que $\frac{1}{i} < \frac{\varepsilon}{\overline{u}-\varepsilon}$ (resp $\frac{\varepsilon}{N}$).

D'après $**$ (resp $***$) il existe $j \geq i$ tel que $u_j \geq \overline{u} - \varepsilon$ (resp N) et d'après $*$ il existe $k \geq ij$ tel que $u_k \leq \underline{u} + \varepsilon$. Divisons k par j ; $k = j\ell + q$ où $q < j$ on a alors :

$$\underline{u} + \varepsilon \geq \frac{v_{fM}(J^{\ell j+q} M)}{j\ell+q} \geq \frac{v_{fM}(J^{\ell j} M)}{j\ell+q} \geq \frac{\ell\, v_{fM}(J^{j} M)}{j\ell+q} = \left(\frac{v_{fM}(J^{j} M)}{j}\right)\frac{\ell j}{k}$$

$$= \left(\frac{v_{fM}(J^{j} M)}{j}\right)\frac{k-q}{k} \quad \text{or} \quad \left.\begin{array}{c} q < j \\ \text{et} \\ \frac{1}{k} \leq \frac{1}{ji} \end{array}\right\} \text{ implique } \frac{q}{k} < \frac{1}{i} \text{ et on a : } 1 - \frac{q}{k} > 1 - \frac{1}{i}$$

d'où $\underline{u} + \varepsilon \geq (\overline{u} - \varepsilon)\left(1 - \frac{1}{i}\right) = \overline{u} - \varepsilon - \left(\frac{\overline{u} - \varepsilon}{i}\right) \geq \overline{u} - 2\varepsilon$

(resp. $N\left(1 - \frac{1}{i}\right) \geq N - \varepsilon$). Par conséquent on a $\underline{u} + \varepsilon \geq \overline{u} - 2\varepsilon$

(resp. $\underline{u} + \varepsilon \geq N - \varepsilon$) donc $\underline{u} = \overline{u}$.

IV.1.3 Proposition

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ deux filtrations de l'anneau A et soit M un A-module. Alors :

(i) La suite $\left(\frac{\bar{v}_{fM}(J_nM)}{n}\right)$ converge. . dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a

$$\limsup \frac{\bar{v}_{fM}(J_nM)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{v}_{fM}(J_nM)}{n}.$$

(ii) Si g est une AP filtration alors $\bar{v}_{fM}(gM)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a

$$\bar{v}_{fM}(gM) = \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{v}_{fM}(J_nM)}{n}.$$

Preuve

Voir la preuve de la proposition 2.6 [2].

IV.1.4 Remarques

Soient $\varphi, \theta, \varphi'$ et θ' des filtrations du A-module M telles que $\bar{w}_\varphi(\theta)$, $\bar{w}_\varphi(\theta')$, $\bar{w}_\varphi(\theta)$ et $\bar{w}_{\varphi'}(\theta)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a alors :

(i) $\theta \leq \theta' \Rightarrow \bar{w}_\varphi(\theta) \geq \bar{w}_\varphi(\theta')$

(ii) $\varphi \leq \varphi' \Rightarrow \bar{w}_\varphi(\theta) \leq \bar{w}_{\varphi'}(\theta)$.

IV.1.5 Propriétés

Soient φ et θ des filtrations du A-module M et $\lambda > 0$ un nombre réel. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\bar{w}_\varphi(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(ii) $\bar{w}_{\varphi(\lambda)}(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(iii) $\bar{w}_\varphi(\theta^{(\lambda)})$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

De plus sous ces conditions on a : $\bar{w}_\varphi(\theta) = \lambda \bar{w}_{\varphi(\lambda)}(\theta) = \frac{1}{\lambda} \bar{w}_\varphi(\theta^{(\lambda)})$.

Preuve

Il suffit d'utiliser la méthode de la démonstration de la proposition 2.3 [2].

IV.1.6 **Proposition**.

Soient f et g deux filtrations de l'anneau A et M un A-moddule. Alors le nombre de Samuel généralisé $\overline{w}_{fM}(gM)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ pour toute AP filtration f.

Preuve :

Posons $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$. Nous pouvons supposer que $\liminf \frac{w_{fM}(J_nM)}{n} = a \in \mathbb{R}_+$ et comme la suite $(w_{fM}(J_nM))$ est croissante, que $w_{fM}(J_nM)$ tend vers ∞ quand n tend vers ∞. f étant une AP filtration, il existe une suite d'entiers $(k_j) \geq 0$ telle que $I_{k_jn} \subset I_j^n$ pour tous j,n et $\frac{k_j}{j}$ tend vers 1 quand $j \to \infty$. Si s,n sont deux entiers ≥ 1; la suite d'inclusions

$I_{nk_{w_{fM}(J_sM)}}.M \subset I^n_{w_{fM}(J_sM)}.M \subset J_s^nM \subset J_{ns}M$ nous donne l'inégalité

$w_{fM}(J_{ns}M) \leq nk_{w_{fM}(J_sM)}$ (*). Prenons deux entiers $n > m \geq 1$ et notons q_n le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{n}{m}$. On a alors d'après (*)

$w_{fM}(J_nM) \leq w_{fM}(J_{q_nm}M) \leq q_nk_{w_{fM}(J_mM)}$. On a donc

$$\frac{w_{fM}(J_nM)}{n} \leq \frac{q_n}{q_n-1} \cdot \frac{k_{w_{fM}(J_mM)}}{m} \quad \text{d'où} \quad \limsup \frac{w_{fM}(J_nM)}{n} \leq \frac{k_{w_{fM}(J_mM)}}{m} \quad \text{et}$$

comme $\frac{k_{w_{fM}(J_mM)}}{m} = \frac{w_{fM}(J_mM)}{m} \cdot \frac{k_{w_{fM}(J_mM)}}{w_{fM}(J_mM)}$,

on obtient $\limsup \frac{w_{fM}(J_nM)}{n} \leq \inf_m \frac{k_{w_{fM}(J_mM)}}{m} \leq \liminf_m \frac{w_{fM}(J_mM)}{m}$ et la suite $\left(\frac{w_{fM}(J_nM)}{n}\right)$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

IV.1.7 Proposition.

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ deux filtrations de l'anneau A telles que f soit une AP filtration. Alors les suites $\left(\frac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n}\right)$ et $(n\overline{w}_{I_nM}(gM))$ convergent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a :

(i) $\overline{w}_{fM}(gM) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n} = \inf\limits_{n} \dfrac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n}$

(ii) $\overline{w}_{fM}(gM) = \lim\limits_{n\to\infty} n\overline{w}_{I_nM}(gM)$

Preuve.

Soit f une AP filtration et (k_n) une suite d'entiers ≥ 0 telle que $I_{k_nm} \subset I_n^m$ pour tous n, m avec $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 1$

(i) On sait que $\overline{w}_{fM}(J_nM)$ est défini pour tout entier $n \geq 0$. De plus, comme la suite $(\overline{w}_{fM}(J_nM))$ est croissante, on peut supposer que $\overline{w}_{fM}(J_nM) < \infty$ pour tout entier n. Comme $\overline{w}_{fM}(JM) \leq k_{w_{fM}(JM)}$ pour tout idéal J de A, on obtient $\limsup \dfrac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n} \leq \overline{w}_{fM}(gM)$. D'autre part, on a pour tout entier n et tout entier m, $J_n^mM \subset J_{nm}M$ d'où $\dfrac{w_{fM}(J_n^mM)}{nm} \geq \dfrac{w_{fM}(J_{nm}M)}{nm}$. Quand $m\to\infty$, on obtient $\dfrac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n} \geq \overline{w}_{fM}(gM)$ pour tout n. Il en résulte que la suite $\left(\dfrac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n}\right)$ converge vers $\overline{w}_{fM}(gM)$. De plus, $\overline{w}_{fM}(gM) = \inf \dfrac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n}$.

(ii) Montrons tout d'abord que $\overline{w}_{fM}(gM) = \liminf n\overline{w}_{I_nM}(gM)$. On peut supposer que $k_n \geq n$ pour tout $n \geq 1$. Alors si $g = (J_n)$, la suite d'inégalités $f_{I_{k_n}} \leq f^{(k_n)} \leq f_{I_n}$ nous donne

$\overline{w}_{I_{k_n}M}(gM) \leq \overline{w}_{f(k_n)_M}(gM) = \frac{1}{k_n}\overline{w}_{fM}(gM) \leq \overline{w}_{I_n}(gM)$ (*). Alors en multipliant les termes de (*) par k_n et en prenant la limite inférieure, on obtient :

$\liminf k_n \overline{w}_{I_nM}(gM) \leq \overline{w}_{fM}(gM) \leq \liminf n\, \overline{w}_{I_nM}(gM)$ et

$\liminf n\, \overline{w}_{I_nM}(gM) \leq \liminf k_n\overline{w}_{I_{k_n}M}(gM)$ car $k_n \geq n$ pour tout n. On a ainsi montré que $\overline{w}_{fM}(gM) = \liminf n\overline{w}_{I_nM}(gM)$.

Montrons maintenant que $\limsup n\overline{w}_{I_nM}(gM) \leq \overline{w}_{fM}(gM)$. Supposons que $\overline{w}_{fM}(gM) \in \mathbb{R}_+$ et prenons deux entiers $p \geq 1$ et $q \geq 1$ tels que $\overline{w}_{fM}(gM) < \frac{p}{q}$; alors $\overline{w}_{fM}(g^{(q)}M) < p$ et il existe alors un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $m \geq N$, on ait $w_{fM}(J_{mq}M) \leq mp$. Par conséquent, pour tout entier $m \geq N$, on a $I_{mp} \subset J_{mq}$. Soit n un entier ≥ 1 et q_m la partie entière de $\frac{m}{n}$. On a alors la suite d'inclusions $I_n^{(q_m+1)p}M \subset I_{n(q_m+1)p}M \subset I_{mp}M \subset J_{mq}M$ d'où l'inégalité $\frac{w_{I_nM}(J_{mq})}{mq} \leq \frac{p(q_m+1)}{mq}$. En prenant la limite quand $m\to\infty$, on obtient $\overline{w}_{I_nM}(gM) \leq \frac{1}{n}\frac{p}{q}$, c'est-à-dire que $\limsup n\overline{w}_{I_nM}(gM) \leq \frac{p}{q}$ d'où $\limsup n\overline{w}_{I_nM}(gM) \leq \overline{w}_{fM}(gM)$.

IV.1.8 <u>Remarques et exemples</u>

(i) Dans l'exemple suivant nous allons montrer que si g n'est pas une AP-filtration d'un anneau nœthérien A, l'existence de $\overline{v}_f(g)$ n'assure pas que $\overline{v}_f(g) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\overline{v}_f(J_n)}{n}$.

Soit $A = \frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2)} = \mathbb{Z}[x]$ avec $x^2 = (0)$. Considérons les filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ de A où $J_n = (2^{3n}, 2^nx)$ et $I_n = (2^n, 2^nx)$ pour $n>0$. g n'est pas une AP filtration et on a $\overline{v}_f(g) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\overline{v}_f(J_n)}{n} = 3$.

(ii) Dans l'exemple suivant nous allons montrer que si f n'est pas une AP-filtration d'un anneau nœthérien A, l'existence de $\overline{w}_f(g)$ n'assure pas que

$\overline{w}_f(g) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\overline{w}_f(J_n)}{n}$. Soit $A = \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2)} = \mathbb{Z}[x]$ avec $x^2 = |0|$, on considère les filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ telles que $J_n = (2^{3n}x)$ et $I_n = (2^n x)$ pour $n>0$. f n'est pas une AP filtration et on a $\overline{w}_f(g) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\overline{w}_f(J_n)}{n} = \infty$.

§2 NOMBRES DE SAMUEL GÉNÉRALISÉS ET RÉDUCTIONS VALUATIVES SUR LES MODULES

IV.2.1 <u>Proposition</u>

Soient $\varphi = (M_n)$, $\theta = (F_n)$ et $\mathfrak{N} = (E_n)$ des filtrations du A-module M.

Si φ est une réduction valuative de θ alors on a :

(i) $\overline{v}_{\mathfrak{N}}(\theta)$ existe si et seulement si $\overline{v}_{\mathfrak{N}}(\varphi)$ existe

(ii) $\overline{w}_{\mathfrak{N}}(\theta)$ existe si et seulement si $\overline{w}_{\mathfrak{N}}(\varphi)$ existe.

On a $\overline{v}_{\mathfrak{N}}(\theta) = \overline{v}_{\mathfrak{N}}(\varphi)$ et $\overline{w}_{\mathfrak{N}}(\theta) = \overline{w}_{\mathfrak{N}}(\varphi)$ si les termes définis existent.

<u>**Preuve**</u>.

(i) φ étant une réduction valuative de θ alors il existe $a\in\mathbb{N}$ tel que $F_{n+a} \subseteq M_n \subseteq F_n$ (théorème. I.2.3), $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ et on a :

$$F_{n+2a} \subseteq M_{n+a} \subseteq F_{n+a} \subseteq M_n \subseteq F_n.$$

a) $$\frac{n+2a}{n}\,\frac{v_{\mathfrak{N}}(F_{n+2a})}{n+2a} \geq \frac{n+a}{n}\,\frac{v_{\mathfrak{N}}(M_{n+a})}{n+a} \geq \frac{n+a}{n}\,\frac{v_{\mathfrak{N}}(F_{n+a})}{n+a} \geq \frac{v_{\mathfrak{N}}(M_n)}{n}$$

si $n\to+\infty$ on a (i) et si $\overline{v}_{\mathfrak{N}}(\theta)$ ou $\overline{v}_{\mathfrak{N}}(\varphi)$ existe on a $\overline{v}_{\mathfrak{N}}(\theta) = \overline{v}_{\mathfrak{N}}(\varphi)$.

b) Pour avoir (ii) il suffit de remplacer $v_{\mathfrak{N}}$ par $w_{\mathfrak{N}}$ dans a).

IV.2.2 <u>Lemme</u>

Soient $\varphi = (M_n)$ et $\theta = (F_n)$ des filtrations du A-module M. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\overline{v}_{\varphi}(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(ii) $\forall\, a\in\mathbb{N}$, $\overline{v}_{t_a\varphi}(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(iii) $\exists\, a \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{v}_{t_a\varphi}(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Si l'une des assertions équivalentes est vérifiée alors pour tout $a \in \mathbb{N}$ on a $\overline{v}_\varphi(\theta) = \overline{v}_{t_a\varphi}(\theta)$

Preuve.

a) Montrons que (i) implique (ii).

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_\varphi(F_n) = +\infty$ alors $v_\varphi(F_k) = +\infty$, $\forall\, k \geq n$ d'où pour $a \in \mathbb{N}$, $\forall\, k \geq n$ on a : $\overline{v}_{t_a\varphi}(F_n) = +\infty$ (Lemme I.2.2) et on déduit que (i) implique (ii).

Supposons que $v_\varphi(F_n) \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors pour $a \in \mathbb{N}$, $v_{t_a\varphi}(F_n) \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. (Lemme I.2.2). Posons $v_{t_a\varphi}(F_n) = r \in \mathbb{N}$.

1) si $r \neq 0$ on a $F_n \subseteq M_{a+r}$ et $F_n \not\subseteq M_{a+r+1}$ donc $a + v_{t_a\varphi}(F_n) \leq v_\varphi(F_n) < v_{t_a\varphi}(F_n) + 1 + a$ (*)

2) Si $r = 0$ alors $F_n \subseteq M_0 = M$ et $F_n \not\subseteq M_{a+1}$

On a $0 = v_{t_a\varphi}(F_n) \leq v_\varphi(F_n) \leq v_{t_a\varphi}(F_n) + 1 + a$ (**)

(*) et (**) impliquent pour tout $r \in \mathbb{N}$.

$v_\varphi(F_n)/n \leq (v_{t_a\varphi}(F_n) + 1 + a)/n \leq (v_\varphi(F_n) + 1 + a)/n$ si $n \to +\infty$ on déduit l'existence de $v_{t_a\varphi}(\theta)$ et on a $\overline{v}_\varphi(\theta) = \overline{v}_{t_a\varphi}(\theta)$.

b) (ii) implique (iii) évident

c) Montrons que (iii) implique (i)

Soit $a \in \mathbb{N}$ si $v_{t_a\varphi}(F_n) = +\infty$ alors $v_\varphi(F_n) = +\infty$ (Lemme I.2.2) et on déduit comme dans a) que (iii) implique (i).

Supposons que $v_{t_a\varphi}(F_n) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ en utilisant les relations (*) et (**) de a) on a :

$$v_{t_a\varphi}(F_n)/n \leq v_\varphi(F_n)/n \leq (v_{t_a\varphi}(F_n) + 1 + a)/n.$$

Si $v_{t_a\varphi}(\theta)$ existe et si $n \to +\infty$ on déduit que $\overline{v}_\varphi(\theta)$ existe et que

$\overline{v}_{t_a\varphi}(\theta) = \overline{v}_\varphi(\theta)$.

IV.2.3 Lemme

Soient $\varphi = (M_n)$ et $\theta = (F_n)$ des filtrations du A-module M. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\overline{w}_\varphi(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(ii) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\overline{w}_{t_a\varphi}(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(iii) $\exists a \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{w}_{t_a\varphi}(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Si l'une des assertions équivalentes est vérifiée alors pour tout $a \in \mathbb{N}$ on a $\overline{w}_\varphi(\theta) = \overline{w}_{t_a\varphi}(\theta)$.

Preuve.

a) Montrons que (i) implique (ii).

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_\varphi(F_n) = +\infty$, alors $w_\varphi(F_k) = +\infty$, $\forall k \geq n$ d'où pour tout $a \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq n$ on a $w_{t_a\varphi}(F_k) = +\infty$.

(Lemme I.2.5) et on déduit que (i) implique (ii). Supposons que $w_\varphi(F_n) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors pour tout $a \in \mathbb{N}$, $w_{t_a\varphi}(F_n)$, (Lemme I.2.5). Posons $w_{t_a\varphi}(F_n) = r \in \mathbb{N}$.

1) si $r \neq 0$ on a $M_{a+r} \subset F_n$ et $M_{a+r-1} \not\subset F_n$ donc

$$w_{t_a\varphi}(F_n) - 1 \leq a + w_{t_a\varphi}(F_n) - 1 \leq w_\varphi(F_n) \leq a + w_{t_a\varphi}(F_n), \quad (*)$$

2°) Si $r = 0$ alors $M_0 \subset F_n$ d'où $w_\varphi(F_n) = 0 = w_{t_a\varphi}(F_{nn})$ donc

$$0 = w_{t_a\varphi}(F_n) \leq w_\varphi(F_n) \leq w_{t_a\varphi}(F_n) + a, \quad (**)$$

(*) et (**) impliquent pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\frac{w_\varphi(F_n)-1}{n} \le \frac{a + w_{t_a\varphi}(F_k)-1}{n} \le \frac{a + w_\varphi(F_n)}{n}$$

si $n \to +\infty$ on déduit l'existence de $\overline{w}_{t_a\varphi}(\theta)$ et on a $\overline{w}_\varphi(\theta) = \overline{w}_{t_a\varphi}(\theta)$.

b) (ii) impliquent (iii): évident

c) Montrons que (iii) implique (i).

Soit $a \in \mathbb{N}$. Si $w_{t_a\varphi}(F_n) = +\infty$ alors $w_\varphi(F_n) = +\infty$ (Lemme I.2.5) et on déduit comme dans a) que (iii) implique (i).

Supposons que $w_{t_a\varphi}(F_n) \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ en utilisant les relations (*) et (**) de a) on a

$$\frac{w_{t_a\varphi}(F_n)-1}{n} \le \frac{w_\varphi(F_n)}{n} \le \frac{a + w_{t_a\varphi}(F_n)}{n}$$

Si $\overline{w}_{t_a\varphi}(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et si $n \to +\infty$ on déduit que $w_\varphi(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ que $\overline{w}_{t_a\varphi}(\theta) = \overline{w}_\varphi(\theta)$.

IV.2.4 <u>Proposition</u>

Soient φ, θ et $\mathfrak{N}$ des filtrations du A-module M. Si φ est une réduction valuative de θ alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\overline{v}_\theta(\mathfrak{N})$; (resp. $\overline{w}_\theta(\mathfrak{N})$) existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(ii) $\overline{v}_\varphi(\mathfrak{N})$; (resp. $\overline{w}_\varphi(\mathfrak{N})$) existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Si l'une des assertions équivalentes est vérifiée on a :

$$\overline{v}_\varphi(\mathfrak{N}) = \overline{v}_\theta(\mathfrak{N}),\ (\text{resp. } \overline{w}_\varphi(\mathfrak{N}) = \overline{w}_\theta(\mathfrak{N})).$$

<u>Preuve</u>.

a) Montrons que (i) implique (ii). Posons $\mathfrak{N} = (E_n)$

Si φ est une réduction valuative de θ alors il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $t_a\theta \le \varphi \le \theta$ d'où $v_{t_a\theta}(E_n)/n \le v_\varphi(E_n)/n \le v_\theta(E_n)/n$.

Si $\overline{v}_\theta(\mathfrak{N})$ existe et si $n \to +\infty$ on a

$$\overline{v}_\theta(\mathfrak{N}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{t_a\theta}(E_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_\varphi(E_n)}{n}$$

(Lemme IV.2.5) on déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_\varphi(E_n)}{n}$ existe et on a

$\overline{v}_\varphi(\mathfrak{N}) = \overline{v}_\theta(\mathfrak{N})$.

b) Montrons que (ii) implique (i). Comme φ est une réduction valuative de θ alors il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $t_a\theta \le \varphi \le \theta$ d'où $t_a\varphi \le t_a\theta \le \varphi$ et comme dans a) on montre que si $\overline{v}_\varphi(\mathfrak{N})$ existe alors $\overline{v}_\theta(\mathfrak{N})$ existe (Lemme IV.2.2) et on a $\overline{v}_\varphi(\mathfrak{N}) = \overline{v}_\theta(\mathfrak{N})$.

c) En remplaçant v par w dans a) et b) et en utilisant le lemme IV.2.3 on a le reste de la proposition.

§.3 FILTRATIONS FAIBLEMENT BONNES ET AP FILTRATIONS

IV.3.1 <u>Définition</u>

Soient A un anneau commutatif unitaire et $f = (I_n)$ une filtration de A. La filtration $\varphi = (M_n)$ du A-module M est appelée une filtration faiblement f-bonne si $I_p M_q \subseteq M_{p+q}$ pour tous p, q et s'il existe un entier $m \ge 1$ tel que $M_n = \sum_{p=0}^{m} I_{n-p} M_p$, pour tout $n > m$.

IV.3.2 <u>Théorème</u>

Soient φ, θ et $\mathfrak{N}$ des filtrations du A-module M et f, g, h des filtrations de A avec $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$.

(i) Si φ est faiblement f-bonne, si θ est faiblement g-bonne et si g est une AP filtration alors $\overline{v}_\varphi(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a

$$\overline{v}_\varphi(\theta) = \overline{v}_{fM}(gM) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{v}_{fM}(J_nM)}{n}.$$

(ii) Si φ est faiblement f-bonne, si θ est faiblement g-bonne et si f est une AP filtration alors $\overline{w}_\varphi(\theta)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a

$$\overline{w}_\varphi(\theta) = \overline{w}_{fM}(gM) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n} = \inf_n \frac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n} = \lim_{n\to\infty} n\,\overline{w}_{I_nM}(gM).$$

Preuve

Montrons d'abord que si $\varphi = (M_n)$ est faiblement $f = (I_n)$-bonne alors fM est une réduction valuative de φ. Comme φ est faiblement f-bonne alors on a $I_p\ M_q \subseteq M_{q+p}$ pour tous p, q et il existe un entier $m \geq 1$ tel que $M_n = \sum_{p=0}^{m} I_{n-p} M_p$ pour tout $n > m$ et on déduit $M_n \subseteq I_{n-m} M$, $\forall\, n > m$ donc $M_{n+m} \subseteq I_n M \subset M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $t_m\varphi \leq fM \leq \varphi$ par conséquent fM est une réduction valuative de φ, (théorème I.2.3).

(i) Si g est une AP filtration alors $\overline{v}_{fM}(gM)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (proposition IV.1.3) et on a $\overline{v}_{fM}(gM) = \overline{v}_\varphi(gM)$, (proposition IV.2.1) et en utilisant la proposition IV.2.8, $\overline{v}_{fM}(gM) = \overline{v}_\varphi(gM) = \overline{v}_\varphi(\theta)$; d'où l'existence de $\overline{v}_\varphi(\theta)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a $\overline{v}_\varphi(\theta) = \overline{v}_{fM}(gM) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{v}_{fM}(J_nM)}{n}$, (proposition IV.1.3).

(ii) Comme dans i) si φ est faiblement $f = (I_n)$-bonne, si θ est faiblement $g = (J_n)$-bonne et si f est une AP filtration et en utilisant les propositions IV.1.7 ; IV.2.1 et IV.2.3 on a

$$\overline{w}_\varphi(\theta) = \overline{w}_{fM}(gM) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n} = \inf_n \frac{\overline{w}_{fM}(J_nM)}{n} = \lim_{n\to\infty} n\,\overline{w}_{I_nM}(gM).$$

IV.3.3 **Définitions**

(i) Soient une filtration $\varphi = (M_n) \in F(M)$ et un entier $s > 0$. $\ell_A(\frac{M}{M_n})$ est la longueur du A-module $\frac{M}{M_n}$. Nous supposons que $\ell_A(\frac{M}{M_n}) \in \mathbb{R}$. Le nombre

$e(\varphi, s) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{s!}{n^s} \ell_A(\frac{M}{M_n})$ si cette limite existe dans $\mathbb{R}_+$, est appelé la multiplicité de φ d'ordre s .

(ii) La filtration f de l'anneau A est dite non triviale si $\sqrt{f} \neq A$ et si $\sqrt{f} \neq |0|$. La dimension de f, notée dimf est la dimension de krull de l'anneau $A/\sqrt{f}$.

L'altitude de f notée altf est égale à sup{htp. $P \supset \sqrt{f}$ avec P idéal premier de A minimal sur $\sqrt{f}$ }. Si $f = (I_n)$ est une filtration de l'anneau nœthérien A avec dimf = 0 et altf = s et si M est un A-module de type alors la multiplicité $e(fM, s)$ sera notée $e(f, M)$.

IV.3.4 Lemme

Soient $\varphi = (M_n)$ et $\theta = (F_n)$ deux filtrations du A-module M. Si φ est une réduction valuative de θ alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $e(\varphi, s)$ existe

(ii) $e(\theta, s)$ existe.

Si l'une des assertions équivalentes est vérifiée on a $e(\varphi, s) = e(\theta, s)$.

Preuve

Si $\varphi = (M_n)$ est une réduction de $\theta = (F_n)$ alors il existe un entier $a \geq 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_{n+a} \subseteq M_n \subseteq F_n \quad \text{et on a}$$

$F_{n+2a} \subseteq M_{n+a} \subseteq F_{n+a} \subseteq M_n \subseteq F_n$ d'où

$$\frac{s!}{n^s} \ell_A(\frac{M}{F_n}) \leq \frac{s!}{n^s} \ell_A(\frac{M}{M_n}) \leq \frac{s!}{(n+a)^s} \ell_A(\frac{M}{F_{n+a}}) \leq \frac{(n+a)^s}{n^s} \leq \frac{s!}{(n+a)^s} \ell_A(\frac{M}{M_{n+a}})$$

$$\frac{(n+a)^s}{n^s} \leq \frac{s!}{(n+a)^s} \ell_A(\frac{M}{F_{n+2a}}) \frac{(n+2a)^s}{n^s}$$

Si $n \to \infty$ on déduit que $e(\varphi, s)$ existe si et seulement si $e(\theta, s)$ et $e(\varphi, s) = e(\theta, s)$.

IV.3.5 Proposition

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ des filtrations de l'anneau A, $\varphi = (M_n)$ et $\theta = (F_n)$ des filtrations du A-module M telles que φ soit faiblement f-bonne et φ faiblement g-bonne.

(i) Si φ est séparée et θ est non nilpotente alors $v_\varphi(F_n) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} w_\theta(M_n) = \infty$.

(ii) Si A est nœthérien et g est AP avec $\sqrt{g} \subset \sqrt{f}$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} v_\varphi(F_n) = \infty$.

(iii) Si A est nœthérien et si f est AP avec $\sqrt{g} \subset \sqrt{f}$ alors $w_\varphi(F_n) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve

i) a) Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $v_\varphi(F_n) = +\infty$ alors $F_n \subseteq M_p$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $F_n \subseteq \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}} M_p = \{0\}$ car φ est séparée d'où $F_n = \{0\}$, absurde car θ est non nilpotente et on déduit que $v_\varphi(F_n) \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) 1) Comme la suite $w_n = w_\theta(M_n)$ est croissante, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n = +\infty$ alors : $\forall p \geq n$ $w_p = +\infty$ et on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \infty$.

2) Supposons que $w_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et que la suite $w_n = w_\theta(M_n)$ soit majorée. Alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_\varphi(F_n) \leq \ell$.

Donc $F_\ell \subseteq M_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; d'où $F_\ell \subseteq \cap M_n = \{0\}$ or $F_\ell \neq \{0\}$ absurde et on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} w_\theta(M_n) = \infty$.

(ii) Soit $j \in \mathbb{N}^*$ il existe $k_j \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_{k_j n} \subseteq J_j^n$ car g est AP. Comme $\sqrt{g} \subset \sqrt{f}$ et A est nœthérien, il existe $u \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_j^u \subseteq I_1$ car $J_j^u \subseteq \sqrt{J_j}^{\,u} \subseteq \sqrt{I_1}^{\,u} \subseteq I_1$. Comme θ est faiblement g-bonne alors il existe un entier $r \geq 1$ tel que $F_n \subseteq J_{n-r} M$ pour tout $n > r$. Soit $n > r$ tel que $n-r \geq k_j u$ alors $n-r = k_j u\, t + \ell$ avec $0 \leq \ell \leq k_j u$, d'où : $J_{n-r} \subseteq J_{k_j ut} \subseteq J_j^{ut} \subseteq I_1^t \subseteq I_t$. Par conséquent $F_n \subseteq J_{n-r} M \subseteq I_t M \subseteq M_t$ donc $v_\varphi(F_n) \geq t$. Pour $r \in \mathbb{N}$ fixé, $n \to +\infty$ implique $n-r \to +\infty$ et $t \to +\infty$ et on a $\lim\limits_{n \to \infty} v_\varphi(F_n) = \infty$.

(iii) On déduit comme précédemment : $\forall\ j \in \mathbb{N}^*$ il existe $k_j \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_{k_j u} \subseteq I_j^u \subseteq J_1$. Soit $r \geq 1$ tel que $M_n \subseteq I_{n-r} M_s$, $\forall\ n > r$. En posant $n = k_j u\,(r+t) + r$ on a :

$$M_n \subseteq I_{k_j u\,(r+t)}\, M \subseteq J_1^{r+t}\, M \subseteq J_{r+t}\, M \subseteq F_{r+t}\,,\ \forall\ t \in \mathbb{N}.$$ On déduit que $w_\varphi(F_{r+t}) \in \mathbb{N}$, $\forall\ t \in \mathbb{N}$. En particulier il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $M_\ell \subseteq F_r \subseteq F_{r-1} \subseteq \ldots \subseteq F_0$ d'où $w_\varphi(F_n) \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

IV.3.6 <u>Lemme</u>

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ des filtrations de l'anneau A et M un A-module. Alors on a :

(i) $\overline{v}_{f_M}(gM) \geq \overline{v}_f(g)$

(ii) $\overline{w}_{f_M}(gM) \leq \overline{w}_f(g)$

à condition que les termes qui y sont définis existent.

<u>Preuve</u> :

C'est évident car $J \subseteq I_r$ implique $JM \subseteq I_r M$ et $I_r \subseteq J$ implique $I_r M \subseteq JM$

IV.3.7 <u>Théorème</u> (Inégalités asymptotiques).

Soient f et g des AP filtrations de l'anneau nœthérien A, φ et θ des filtrations séparées et non nilpotentes du A-module de type fini M telles que φ soit faiblement f-bonne et θ faiblement g-bonne, avec $\dim f = 0$ et $\operatorname{alt} f = s$. Si $\sqrt{f} = \sqrt{g}$ alors on a :

$$(\overline{v}_f(g))^s\, e(\varphi,s) \leq (\overline{v}_\varphi(\theta))^s\, e(\varphi,s) \leq e(\theta,s) \leq (\overline{w}_\varphi(\theta))^s\, e(\varphi,s) \leq (\overline{w}_f(g))^s e(\varphi,s).$$

<u>Preuve</u>

Posons $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$, $\varphi = (M_n)$ et $\theta = (F_n)$. $v_n = v_\varphi(F_n)$, $w_n = w_\varphi(F_n)$. Alors pour tour $n \geq 0$, $v_n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in \mathbb{N}^*$ (d'après la remarque IV.3.4) et on a $M_{w_n} \subseteq F_n \subseteq M_{v_n}$ (*). Comme $\sqrt{f} = \sqrt{g}$ alors $\dim f = \dim g = 0$ et $\operatorname{alt} f = \operatorname{alt} g = s$.

(*) implique

$$\left(\frac{v_n}{n}\right)^s \text{sl} \frac{L_A\left(\frac{M}{M_{v_n}}\right)}{v_n} \leq \frac{1}{n^s} \text{sl}\, L_A\left(\frac{M}{F_n}\right) \leq \left(\frac{w_n}{n}\right)^s \text{sl} \frac{L_A\left(\frac{M}{M_{w_n}}\right)}{v_n} \quad , \quad (**).$$

$e(f, M)$ et $e(g, M)$ existent car f et g sont AP (voir [5]) et en utilisant le lemme IV.3.4 on a l'existence de $e(\varphi, s)$ et de $e(\theta, s)$. Dans (**) en faisant tendre n vers ∞ on a :

$$(\overline{v}_\varphi(\theta))^s\, e(\varphi,s) \leq e(\theta,s) \leq (\overline{w}_\varphi(\theta))^s\, e(\varphi,s).$$

Comme $\overline{v}_\varphi(\theta) = \overline{v}_{fM}(gM) \geq \overline{v}_f(g)$ et $\overline{w}_\varphi(\theta) = \overline{w}_{fM}(gM) \leq \overline{w}_f(g)$ on a

$$(\overline{v}_f(g))^s e(\varphi,s) \leq (\overline{v}_\varphi(\theta))^s e(\varphi,s) \leq e(\theta,s) \leq (\overline{w}_\varphi(\theta))^s e(\varphi,s) \leq (\overline{w}_f(g))^s e(\varphi,s).$$

CHAPITRE V

FILTRATIONS SUR F(A). DEUX FONCTIONS $\overline{\alpha}_f(J)$ et $\overline{\beta}_f(J)$ de Mc ADAM

§.1 FILTRATIONS SUR F(A) ASSOCIÉES À a_f ET À $\overline{a}_f$.

V.1.1 Définition

Soient A un anneau commutatif et F(A) l'ensemble des filtrations de A.

Soit f une filtration de A, posons :

$F_n(f) = \{g \in F(A) ; a_f(g) \geq n\}$ et $\overline{F}_n(f) = \{g \in F(A) ; \overline{a}_f(g) \geq n\}$.

V.1.2 Remarques

(i) $F(f) = (F_n(f))$ et $\overline{F}(f) = (\overline{F}_n(f))$ sont des filtrations de l'ensemble F(A).

$F_n(f) \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a : $F(f) \leq \overline{F}(f) \leq F(\overline{f})$

(ii) Si $g \in \overline{F}_n(f)$. et $h \in \overline{F}_n(f)$. alors $g+h \in \overline{F}_n(f)$., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Si $g \in \overline{F}_p(f)$ et $h \in \overline{F}_q(f)$ alors $gh \in \overline{F}_{p+q}(f)$ pour tous entiers p et q.

Si $g \in F_p(f)$ et $h \in F_q(f)$ alors $gh \in F_{p+q}(f)$ pour tous entiers p et q.

Preuve.

(i) $F_n(f) \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $f^{(n)} \in F_n(f)$ pour entier $n \geq$. et $F_0(f) = F(A)$.

Montrons que : $F(f) \leq \overline{F}(f) \leq F(\overline{f})$.
En effet $g \in F_n(f)$ équivaut à $a_f(g) \geq n$. Si $g \in F_n(f)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ alors

$a_f(g^{(p)}) \geq p\, a_f(g)$ et $\dfrac{a_f(g^{(p)})}{p} \geq n$ d'où $\overline{a}_f(g) \geq n$ par conséquent
$g \in \overline{F}_n(f)$ et on a $F(f) \leq \overline{F}(f)$

D'après la proposition II.2.2 , $\overline{a}_f(g) \geq 1 \Rightarrow g \leq \overline{f}$ donc

$\overline{a}_f(g) \geq n \Rightarrow g \leq f^{(n)} = \overline{f}^{(n)}$ (Lemme II.3.2) d'où $\overline{F}(f) \leq F(\overline{f})$ et on déduit :

$F(f) \leq \overline{F}(f) \leq F(\overline{f})$

(ii) Comme $\overline{a}_f(g+f) = \inf(\overline{a}_f(g), \overline{a}_f(h))$, (théorème II.2.6) alors

$\overline{a}_f(g) \geq n$ et $\overline{a}_f(h) \geq n$ impliquent $\overline{a}_f(g+h) \geq n$ et on déduit que :

g et $h \in \overline{F}_n(f)$ impliquent $g+h \in \overline{F}_n(f)$.

(iii) Il suffit de remarquer que $\overline{a}_f(gh) \geq \overline{a}_f(g) + \overline{a}_f(h)$ et $a_f(gh) \geq a_f(g) + a_f(h)$.

V.1.3 Remarques

Soient f, h et g des filtrations de l'anneau A. Alors on a :

(i) $v_{F(f)}(gh) \geq v_{F(f)}(g) + v_{F(f)}(h)$;

(ii) $v_{F(f)}(g + h) \geq \inf(v_{F(f)}(g), v_{F(f)}(h))$.

(iii) $v_{\overline{F}(f)}(g + h) = \inf(v_{\overline{F}(f)}(g), v_{\overline{F}(f)}(h))$.

Preuve Remarquons d'abord que : si $F(f) = (F_n(f))$ alors
$v_{F(f)}(g) = \sup\{r \in \mathbb{N}; g \in F_r(f)\}$.

(i) et (ii) sont évidentes. Montrons maintenant
(iii). Supposons $r = \inf(v_{\overline{F}(f)}(g), v\, v_{\overline{F}(f)}(h)) = v_{F(\overline{f})}(g)$ alors $r \leq \overline{a}_f(g) < r+1$,
on déduit que $\overline{a}_f(g + h) = \overline{a}_f(g)$ car $\overline{a}_f(g + h) = \inf(\overline{a}_f(g, \overline{a}_f(h))$ et on a
$r = v_{\overline{F}(f)}(g + h) = \inf(v_{\overline{F}(f)}(g), v_{\overline{F}(f)}(h))$.

V.1.4 Lemme

Soient f et g des filtrations de l'anneau A. Alors

$$\overline{v}_{F(f)}(g) = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{F(f)}(g^{(n)})}{n} \quad \text{et} \quad \overline{v}_{\overline{F}(f)}(g) = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{\overline{F}(f)}(g^{(n)})}{n}$$

existent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a $\overline{v}_{F(f)}(g) = \overline{v}_{\overline{F}(f)}(g) = \overline{a}_f(g)$.

Preuve.

(i) Montrons d'abord que $v_{F(f)}(g) = a_f(g)$.

En effet, $v_{F(f)}(g) = \sup\{r \in \mathbb{N} ; g \in F_r(f)\}$

$= \sup\{r \in \mathbb{N} ; a_f(g) \geq r\}$

$= \sup\{r \in \mathbb{N} ; g \leq f^{(r)}\} = a_f(g)$.

Donc : $\overline{v}_{F(f)}(g) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{F(f)}(g^{(n)})}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_f(g^{(n)})}{n} = \overline{a}_f(g)$

(ii) Montrons que $\overline{v}_{\overline{F}(f)}(g) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{\overline{F}(f)}(g^{(n)})}{n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

S'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $v_{\overline{F}(f)}(g^{(n)}) = +\infty$ alors $\overline{a}_f(g^{(n)}) = n\overline{a}_f(g) = +\infty$ et $\overline{a}_f(g) = +\infty$. Comme la suite $(v_{\overline{F}(f)}(g^{(n)}))$ est croissante, $\overline{v}_{\overline{F}(f)}(g) = +\infty$ et on a : $\overline{v}_{\overline{F}(f)}(g) = \overline{a}_f(g) = +\infty$.

Supposons que $v_{\overline{F}(f)}(g^{(n)}) = r\in\mathbb{N}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$v_{\overline{F}(f)}(g^{(n)}) \le \overline{a}_f(g^{(n)}) \le v_{\overline{F}(f)}(g^{(n)}) + 1 \le \overline{a}_f(g^{(n)}) + 1$.

Comme $\overline{a}_f(g^{(n)}) = n\overline{a}_f(g)$ on déduit que $\overline{v}_{\overline{F}(f)}(g)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $\overline{v}_{\overline{F}(f)}(g) = \overline{a}_f(g)$.

V.1.5 <u>Proposition</u>

Soient g une filtration de l'anneau A et F une filtration de F(A) telle que $\overline{v}_F(g) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} v_F(g^{(n)})$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, alors $\overline{v}_F(F(g)) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} v_F(F_n(g))$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a $\overline{v}_F(F(g)) = \overline{v}_F(g)$.

<u>**Preuve**</u> $v_F(F_n(g) = \inf\limits_{h\in F_n(g)}(v_F(h))$, (proposition I.1.3). Pour tout $h\in F_n(g)$ on a $h \le g^{(n)}$ car $a_g(h) \ge n$ d'où $v_F(h) \ge v_F(g^{(n)})$ et comme $a_g(g^{(n)}) \ge n\, a_g(g) \ge n$ alors $g^{(n)}\in F_n(g)$ et $v_F(h) \ge v_F(g^{(n)})$, on déduit que $v_F(F_n(g)) = v_F(g^{(n)})$.

D'où $\dfrac{v_F(F_n(g))}{n} = \dfrac{v_F(g^{(n)})}{n}$, par conséquent si $n\to+\infty$ on a $v_F(F(g)) = \overline{v}_F(g)$.

V.1.6 Corollaire

Soient f et g des filtrations de l'anneau A, alors

$$\overline{v}_{F(f)}(F(g)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} v_{F(f)}(F_n(g))$$

et $\overline{v}_{\overline{F}(f)}(F(g)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} v_{\overline{F}(f)}(F_n(g))$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a :

$$\overline{v}_{F(f)}(F(g)) = \overline{v}_{\overline{F}(f)}(F(g)) = \overline{a}_f(g).$$

Preuve. Il suffit d'utiliser le lemme V.I.4 et la proposition V.I.5.

V.1.7 Définition

Soient $F = (F_n)$ une filtration de $F(A)$ et $g \in F(A)$, on dit que g est entière sur F s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_i \in F_i$ pour $i = 1, \dots, n$ tel que :
$g^{(n)} = f_1 g^{(n-1)} + f_2 g^{(n-2)} + \dots + f_n$.

On dit que g est entière d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ sur F si g est entière sur $F^{(k)} = (F_{nk})$.

Posons $P_k(F) = \{g \in F(A)$ telle que g est entière d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ sur $F\}$
$F^* = (P_k(F))$ est une filtration de $F(A)$. F^* est appelée la clôture prüférienne de F.

Comme pour toute filtration $f \in F(A)$, $f^{(i)} = f_i \in F_i(f)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, f est entier sur $F(f)$ et on déduit que $P_k(F(f)) \neq \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

V.1.8 Proposition

Soient f et g des filtrations de l'anneau A. Si f est une réduction de g alors g est entière sur $F(f)$.

Preuve.

Si f est une réduction de g, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geq k$, $g^{(p+k)} = f^{(p)} g^{(k)}$, (voir lemme III.2.2). En posant $n = p+k$, on obtient $g^{(n)} = f^{(p)} g^{(n-p)}$ donc g est entière sur $F(f)$.

V.1.9 Proposition

Soient f et g des filtrations de l'anneau A. Si g est entière sur F(f) alors $\bar{a}_f(g) \geq 1$.

Preuve

(i) Si $\bar{a}_f(g) = \infty$ alors $\bar{a}_f(g) \geq 1$

(ii) Supposons $\bar{a}_f(g) < \infty$. Comme g est entière sur F(f) alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_i \in F_i(f)$ pour $i=1,\dots,n$ tel que :

$$g^{(n)} = f_1 g^{(n-1)} + f_2 g^{(n-2)} + \dots + f_n \text{ et comme}$$

$\bar{a}_f(g+h) = \inf(\bar{a}_f(g), \bar{a}_f(h))$ et $\bar{a}_f(gh) \geq \bar{a}_f(g) + \bar{a}_f(h)$ pour toute filtration h de l'anneau A (Théorème II.2.6) on a :

$$\bar{a}_f(g^{(n)}) = \bar{a}_f(f_1 g^{(n-1)} + f_2 g^{(n-2)} + \dots + f_n)$$

$$= \inf_i (\bar{a}_f(f_i g^{(n-i)}))$$

$$\geq \inf_i (\bar{a}_f(f_i) + \bar{a}_f(g^{(n-i)}))$$

$$n\bar{a}_f(g) \geq \inf_i (\bar{a}_f(f_i) + (n-i)\,\bar{a}_f(g))$$

$$0 \geq \inf_i (\bar{a}_f(f_i) + (-i)\,\bar{a}_f(g)) = q$$

$$0 \geq q = \bar{a}_f(f_s) + (-s)\,\bar{a}_f(g) \text{ pour un certain } s \geq 1$$

donc $\bar{a}_f(g) \geq \dfrac{\bar{a}_f(f_s)}{s} \geq \dfrac{a_f(f_s)}{s} \geq 1$ d'où $\bar{a}_f(g) \geq 1$.

V.1.10 Lemme

Soit f une filtration de l'anneau A. Alors on a $(F(f))^* \leq \bar{F}(f) \leq F(\bar{f})$

Preuve.

$(F(f))^* \leq \bar{F}(f) \leq F(\bar{f})$ vient de la proposition V.I.9 et de la définition V.I.1

V.1.11 <u>Corollaire</u>

Soient f et g des filtrations de l'anneau nœthérien A avec $f \leq g$.
Si f est fortement nœthérienne et g nœthérienne, alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) g est entière sur $F(f)$

(ii) g est entière sur f

Preuve : Montrons que i) implique ii)
Si g est entière sur $F(f)$, alors $\bar{a}_f(g) \geq 1$ donc $g \leq \bar{f}$, (proposition V.1.9) d'où $\bar{f} = \bar{g}$ et on déduit que g est entière sur f, (voir proposition 4.7 [6] .

Réciproquement g est entière sur f implique $\bar{a}_f(g) \geq 1$ et on a $\bar{f} = \bar{g}$ et f est une réduction de g, (Lemme III.2.4) et en la proposition V.1.8 on déduit que g est entière sur f.

Soit **B'** l'ensemble des AP filtrations de l'anneau nœthérien A. Si $f \in \mathbf{B'}$. nous posons $G_n(f) = F_n(f) \cap \mathbf{B'}$ et $\bar{G}_n(f) = \bar{F}_n(f) \cap \mathbf{B'}$. $G_n(f)$ et $\bar{G}_n(f)$ sont non vides car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si f est une AP filtration $f^{(n)}$ est aussi une AP filtration et $f^{(n)} \in G_n(f) \subset \bar{G}_n(f)$. $G(f) = (G_n(f))$ et $\bar{G}(f) = (\bar{G}_n(f))$ sont des filtrations de l'ensemble **B'**.

V.1.12 <u>Proposition</u>

Si $h \in \mathbf{B'}$ alors $\bar{v}_{G(f)}(h)$ et $\bar{v}_{\bar{G}(f)}(h)$ existent dans $\mathbb{R}_+$ et on a :
$\bar{v}_{G(f)}(h) = \bar{v}_{\bar{G}(f)}(h) = \bar{a}_f(h)$.

Preuve :
(i)Montrons d'abord que $v_{G(f)}(h) = a_f(h)$.

En effet, $v_{G(f)}(h) = \sup \{r \in \mathbb{N} \,;\, h \in G_r(f)\}$

$$= \sup \{r \in \mathbb{N} \,;\, a_f(h) \geq r\}$$

$$= \sup \{r \in \mathbb{N} \,;\, h \leq f^{(r)}\} = a_f(h).$$

Donc : $\overline{v}_{G(f)}(h) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{G(f)}(h^{(n)})}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_f(h^{(n)})}{n} = \overline{a}_f(h)$

(ii) Montrons que $\overline{v}_{\overline{G}(f)}(h) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{\overline{G}(f)}(h^{(n)})}{n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_{\overline{G}(f)}(h^{(n)}) = +\infty$ alors $\overline{a}_f(h^{(n)}) = n\overline{a}_f(h) = +\infty$ et $\overline{a}_f(g) = +\infty$. Comme la suite $(v_{\overline{G}(f)}(h^{(n)}))$ est croissante, $\overline{v}_{\overline{G}(f)}(h) = +\infty$ et on a : $\overline{v}_{\overline{G}(f)}(h) = \overline{a}_f(h) = +\infty$.

Supposons que $v_{\overline{G}(f)}(h^{(n)}) = r \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$v_{\overline{G}(f)}(h^{(n)}) \leq \overline{a}_f(h^{(n)}) \leq v_{\overline{G}(f)}(h^{(n)}) + 1 \leq \overline{a}_f(h^{(n)}) + 1$.

Comme $\overline{a}_f(h^{(n)}) = n\overline{a}_f(h)$ on déduit que $\overline{v}_{\overline{G}(f)}(h)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $\overline{v}_{\overline{G}(f)}(h) = \overline{a}_f(h)$.

V.1.13 <u>**Proposition**</u>

Soient f et g des AP filtrations de l'anneau nœthérien A. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\overline{G}(g) \leq \overline{G}(f)$.

(ii) $\overline{g} \leq \overline{f}$.

<u>**Preuve**</u> :

Montrons que (i) implique (ii).

$\overline{G}(g) \leq \overline{G}(f)$ implique $\overline{a}_g(g) = \overline{v}_{\overline{G}(g)}(g) \leq \overline{v}_{\overline{G}(f)}(g) = \overline{a}_f(g)$ (proposition V.I.12) ; comme $\overline{a}_g(g) \geq 1$ alors $\overline{a}_f(g) \geq 1$ d'où $\overline{g} \leq \overline{f}$, (proposition II.2.2).

Montrons maintenant que (ii) implique (i).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $h \in \overline{G}_n(g)$ on a $\overline{a}_g(h) \geq n$. Comme $\overline{a}_{\overline{g}}(h) = \overline{a}_g(h)$ (Lemme II.2.4) ; alors si $\overline{g} \leq \overline{f}$, on a : $\overline{a}_g(h) \leq \overline{a}_f(h)$ d'où $\overline{a}_f(h) \geq n$ et $h \in \overline{G}_n(f)$.

Donc $\overline{g} \leq \overline{f}$ implique $\overline{G}(g) \leq \overline{G}(f)$.

V.1.14 Théorème

Soient f,g et h des AP-filtrations de l'anneau nœthérien A. Si $\overline{G}(gh) \le \overline{G}(fh)$ et si $g \le \sqrt{h}$ alors $\overline{G}(g) \le \overline{G}(f)$

Preuve

Si $\overline{G}(gh) \le \overline{G}(fh)$ alors $\overline{gh} \le \overline{fh}$ (proposition V.I.13) et comme $g \le \sqrt{h}$ alors $\overline{g} \le \overline{f}$ (Théorème II.3.1) et $\overline{G}(g) \le \overline{G}(f)$ (proposition V.I.13)

V.1.15 Théorème

Soit f une AP filtration de l'anneau nœthérien A. $\overline{G}(f) = G(\overline{f})$.

Preuve

$h \in \overline{G}_n(f)$ équivaut à $\overline{a}_f(h) \ge n$ et $\overline{a}_f(h) \ge n$ équivaut à $h \le \overline{f^{(n)}}$, (théorème II.2.5) car h est une AP filtration. Comme $\overline{f^{(n)}} = \overline{f}^{(n)}$; (Lemme II.3.2) ; $h \le \overline{f^{(n)}} = \overline{f}^{(n)}$ équivaut à $a_{\overline{f}}(h) \ge n$. Par conséquent $a_{\overline{f}}(h) \ge n$ équivaut à $h \in \overline{G}_n(f)$, d'où $\overline{G}_n(f) = G_n(\overline{f})$ et on a $\overline{G}(f) = G(\overline{f})$.

§.2 DEUX FONCTIONS ASYMPTOTIQUES DE MC ADAM

FONCTION $\overline{\alpha}_f(g)$

V.2.1 Définition

Soient $f = (I_n)$ une filtration de l'anneau nœthérien A et J un idéal de A la suite $F = (F_n)$ où $F_n = (J : I_n)$ est une suite croissante donc stationnaire car A est nœthérien. Posons $\alpha_f(J) = \inf\{r \,;\, (J : I_r) = (J : I_{r+n}),\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$; $\alpha_f(J) \in \mathbb{N}$.

Si $w_f(J) \in \mathbb{N}$ alors $w_f(J) = \alpha_f(J)$ car $(J : I_{w_f}(J)) = A$. Si $f = f_I$ on écrit $\alpha_{f_I}(J) = \alpha_I(J)$

V.2.2 Lemme (voir [10] Proposition 6.8).

Soit $J = bA$ un idéal régulier et I un idéal de A.

$$\overline{\alpha}_I(J) = \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_I(J^n)}{n} \quad \text{existe dans } \overline{\mathbb{R}}^*_+$$

Nous allons étudier l'existence de $\overline{\alpha}_f(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_f(J_n)}{n}$ où $g = (J_n)$ est une filtration de A.

V.2.3 <u>Proposition</u>

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ des filtrations de l'anneau nœthérien A. Soit un réel $\lambda>0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\overline{\alpha}_f(g)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}^*{}_+$

(ii) $\overline{\alpha}_{f(\lambda)}(g)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}^*{}_+$

Si l'une des assertions équivalentes est vérifiée, on a
$\overline{\alpha}_f(g) = \lambda\overline{\alpha}_{f(\lambda)}(g)$.

<u>Preuve</u>.

Soit $\alpha_{f(\lambda)}(J_n) = r$, alors on a $(J_n : I_{\ulcorner\lambda r\urcorner}) = (J_n : I_{\ulcorner\lambda(r+q)\urcorner})$ pour tout $q\in\mathbb{N}$; (1). Pour tout $s\in\mathbb{N}$ il existe un entier $p\geq s/\lambda$ tel que

$(J_n : I_{\ulcorner\lambda r\urcorner}) \subseteq (J_n : I_{\ulcorner\lambda r+1)\urcorner}) \subseteq ... \subseteq (J_n : I_{\ulcorner\lambda r+s\urcorner}) \subseteq (J_n : I_{\ulcorner\lambda(r+p)\urcorner})$.

(1) implique que $(J_n : I_{\ulcorner\lambda r\urcorner}) = ... = (J_n : I_{\ulcorner\lambda r+s\urcorner})$ pour tout entier s.

Comme $\lambda r \leq \{\lambda r\} \leq \lambda r + 1$ alors : $\forall s'\in\mathbb{N}$ on a

$\ulcorner\lambda r\urcorner + s' = \lambda(\ulcorner\lambda r\urcorner/\lambda + s'/\lambda) \leq \lambda((\lambda r + 1 + s')/\lambda) \leq \lambda(r + (1 + s')/\lambda)$ d'où

$\ulcorner\lambda r\urcorner \leq \ulcorner\lambda r\urcorner + s' \leq \ulcorner\lambda(r + q)\urcorner$ avec $q > (1 + s'/\lambda$ donc

$(J_n : I_{\ulcorner\lambda r\urcorner}) = ... = (J_n : I_{\ulcorner\lambda r\urcorner+s'}) = (J_n : I_{\ulcorner\lambda(r+q)\urcorner})$ $\forall s'\in\mathbb{N}$; (2).

(1) et (2) impliquent $\lambda(r-1) \leq \ulcorner\lambda(r-1)\urcorner \leq \alpha_f(J_n) \leq \ulcorner\lambda r\urcorner \leq \lambda r+1$; on déduit

$(\alpha_f(J_n) - \lambda)/n \leq (\lambda\alpha_{f(\lambda)}(J_n) - \lambda + 1)/n \leq (\alpha_f(J_n) + 1)/n \leq (\lambda\alpha_{f(\lambda)}(J_n) + 2)/n$

Si $n\to\infty$ on a le résultat.

V.2.4 <u>Proposition</u>

Soit $f = (I_n)$ une filtration fortement AP et $J = bA$ un idéal régulier de l'anneau A. Alors $\overline{\alpha}_f J) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_f(J^n)}{n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}^*{}_+$ et il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\overline{\alpha}_f(g) = k\overline{\alpha}_{f(k)}(g)$.

Preuve. Comme f est fortement AP il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k)} = f_{I_k}$, or $\bar{\alpha}_{I_k}(J) = \bar{\alpha}_{\bar{I}_{I_k}}(J)$; le lemme V.2.2 et la proposition V.2.3 impliquent l'existence de $\bar{\alpha}_f(J)$ et on a $\bar{\alpha}_f(J) = k\bar{\alpha}_{f(k)}(J)$.

V.2.5 Lemme

Soient $h = (U_n)$ et $g = (J_n)$ des AP-filtrations de l'anneau A et I un idéal de l'anneau A. Si $h \leq g$ et $\sqrt{h} = \sqrt{g}$ alors $\alpha_h(I) \leq \alpha_g(I)$.

Preuve.

Comme $\sqrt{h} = \sqrt{g}$ alors il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que

$J_1^s \subseteq \sqrt{J_1}^s \subseteq \sqrt{U_1}^s \subseteq U_1$ car A est nœthérien. Comme g est une AP-filtration alors il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_{k_1 . p} \subset J_1^p$ $\forall p \in \mathbb{N}$. Alors on a

$J_{k_1 . s . p} \subseteq J_1^{ps} \subseteq U_1^p \subseteq U_p$ d'où $J_{k_1 . s . p} \subseteq U_p$. Soit $\alpha_g(I) = r$ alors comme $h \leq g$ on a pour $p \geq r$ $(I : J_r) \subseteq (I : U_r) \subseteq \ldots \subseteq (I : U_p) \subseteq (I : J_{k_1 . s . p})$. Comme pour tout $p \geq r$ on a $(I : J_r) = (I : J_{k_1 . s . p})$ on déduit que $(I : U_r) = (I : U_p)$ pour tout $p \geq r$. Par conséquent $\alpha_h(I) \leq r = \alpha_g(I)$ et on a le résultat.

V.2.6 Lemme

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ des filtrations de l'anneau A. Alors pour tout réel $\lambda > 0$ on a :

(i) $\limsup \dfrac{\alpha_f(J_n)}{n} = \lambda \limsup \dfrac{\alpha_{f(\lambda)}(J_n)}{n}$.

(ii) $\liminf \dfrac{\alpha_f(J_n)}{n} = \lambda \liminf \dfrac{\alpha_{f(\lambda)}(J_n)}{n}$.

Preuve

En utilisant la démonstration de la proposition V.2.3 on a :

$$\frac{(\alpha_f(J_n)\ -\lambda)}{n} \le \frac{(\lambda\alpha_{f(\lambda)}(J_n)-\lambda+1)}{n} \le \frac{(\alpha_f(J_n)+1)}{n} \le \frac{(\lambda\alpha_{f(\lambda)}(J_n)+2)}{n}.$$

Comme la limite supérieure du deuxième et du dernier terme est $\lambda \limsup \frac{\alpha_{f(\lambda)}(J_n)}{n}$ on déduit (i). Le (ii) se démontre de la même façon.

V.2.7 Proposition

Soit $f = (I_n)$ une filtration de A et $J = bA$ un idéal régulier de A. Alors on a:

(i) la suite $n\bar{\alpha}_{I_n}(J)$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}^*_+$.

(ii) Si f est une AP filtration alors : $\bar{\alpha}_f(J) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_f(J^n)}{n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}^*_+$ et $\bar{\alpha}_f(J) = \lim_{n\to\infty} n\,\bar{\alpha}_{I_n}(J)$.

Preuve

(i) $f_{I_k} = (I_k^n) = (J_n)$ et $(f_{I_k})^{(k)} = (J_{nk}) = (I_k^{kn}) = (I_k^k)^n = f_{(I_k)^k}$ d'où

$f_{(I_{k+1})}^{(k+1)} \le f_{(I_k)}^{(k)}$ car $(I_{k+1})^{k+1} \subseteq (I_{k+1})^k \subseteq (I_k)^k$ donc

$f_{(I_{k+1})}^{(k+1)} \le f_{(I_k)}^{(k)}$ et $\sqrt{f_{(I_{k+1})}^{(k+1)}} = \sqrt{f_{(I_k)}^{(k)}} = \sqrt{I_k}$ impliquent que

$\alpha_{f_{I_{k+1}}(k+1)}(J) \le \alpha_{f_{I_k}(k)}(J)$, (lemme V.2.5) et on a :

$(k+1)\,\bar{\alpha}_{I_{k+1}}(J) \le \bar{\alpha}_{f_{I_k}(k)}(J) = k\bar{\alpha}_{I_k}(J)$. On déduit que la suite $n\bar{\alpha}_{I_n}(J)$ est décroissante donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}^*_+$.

(ii) Montrons d'abord que $\bar{\alpha}_f(J) = \lim_m n\bar{\alpha}_{I_n}(J)$. f étant une AP-filtration, il existe une suite (k_n) d'entiers positifs telle que $I_{k_n \cdot m} \subseteq I_n^m$ pour tous entiers m et n avec $\lim_{n\to 1} \frac{k_n}{n} = 1$. De plus, on peut supposer que $k_n \ge n$ pour tout $n \ge 1$. Alors la suite d'inégalités $f_{I_{k_n} \cdot m} \le f^{(k_n)} \le f_{I_n}$ nous donne

$$\frac{\alpha_{I_{k_n}}(J^q)}{q} \le \frac{\alpha_f(k_n)(J^q)}{q} \le \frac{\alpha_{I_n}(J^q)}{q} \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{\overline{\alpha}_{I_{k_n}}(J)}{q} \le \liminf_q \frac{\alpha_{f(k_n)}(J^q)}{q} \le \limsup_q \frac{\alpha_{f(k_n)}(J^q)}{q} \le \overline{\alpha}_{I_n}(J)$$

on a $(n/k_n)k_n\,\overline{\alpha}_{I_{k_n}}(J) \le (n/k_n)\liminf_q \frac{\alpha_f(J^q)}{q} \le (n/k_n)\limsup_q \frac{\alpha_f(J^q)}{q} \le n\overline{\alpha}_{I_n}(J)$

on obtient $\lim_n k_n\,\overline{\alpha}_{I_{k_n}}(J) \le \liminf_q \frac{\alpha_f(J^q)}{q} \le \limsup_q \frac{\alpha_f(J^q)}{q} \le \lim_n n\overline{\alpha}_{I_n}(J)$

et $\liminf_n n\overline{\alpha}_{I_n}(J) \le \liminf_n k_n\,\overline{\alpha}_{I_{k_n}}(J)$ car $k_n \ge n$.

Ainsi $\overline{\alpha}_f(J) = \liminf_n n\overline{\alpha}_{I_n}(J)$, (1).

Montrons maintenant que $\limsup n\overline{\alpha}_{I_n}(J) \le \overline{\alpha}_f(J)$. On peut supposer que $\overline{\alpha}_f(J) \in \mathbb{R}_+$. Prenons deux entiers $p \ge 1$ et $q \ge 1$ tels que $\overline{\alpha}_f(J) < \frac{p}{q}$ alors $\overline{\alpha}_f(J^q) < p$ et il existe alors un entier $n \ge 1$ tel que pour tout $m \ge N$ on ait $\alpha_f(J^{mq}) \le mp$. Par conséquent, pour tout entier $m \ge N$, on a $(J^{mq} : I_{mp}) = (J^{mq} : I_{mp+1}) = \cdots$

Prenons un entier $n \ge 1$ et effectuons la division euclidienne de m par n ; $m = nq_m + r_m$ où $0 \le r_m < n$. On a donc la suite d'inclusions pour tout $r \in \mathbb{N}$

$$I_{k_n((q_m+1)p+r)} \subseteq I_n^{(q_m+1)p+r} \subseteq I_n^{(q_m+1)} \subseteq I_{n(q_m+1)p} \subseteq I_{mp}$$

$(J^{mq} : I_{k_n((q_m+1)p+r)}) = (J^{mq} : I_n^{(q_m+1)p+r}) = \cdots = (J^{mq} : I_{mp})$ alors on déduit

$\frac{\alpha_{I_n}(J^{mq})}{mq} \le \frac{p(q_m+1)}{mq}$ si $m \to +\infty$ on obtient $\overline{\alpha}_{I_n}(J) \le \frac{1}{n}\,\frac{p}{q}$,

i.e $\limsup n\overline{\alpha}_{I_n}(J) \le \frac{p}{q}$ d'où $\limsup n\overline{\alpha}_{I_n}(J) \le \overline{\alpha}_f(J)$, (2).

(1) et (2) impliquent $\lim_{n\to+\infty} n\overline{\alpha}_{I_n}(J) = \overline{\alpha}_f(J)$.

FONCTION $\overline{\beta}_f(g)$

V.2.8 Définition

Soient $f = (I_n)$ une AP-filtration et J un idéal de A. Posons

$\beta_f(J) = \inf\{h ; (I_{h+r} : J) \subseteq I_r , \forall r \geq 1\}$ et si $\{h ; (I_{h+r} : J) \subseteq I_r , \forall r \geq 1\}$ est vide, $\beta_f(J) = +\infty$.

V.2.9 Proposition

Soient $f = (I_n)$ une filtration de l'anneau nœthérien A et J un idéal régulier de A. Si f est une filtration nœthérienne de A, alors $\forall n \geq 1$, $\beta_f(J^n) \in \mathbb{N}$.

Preuve

Notons $F_n = (I_n : \langle J \rangle) = \bigcup\limits_p (I_n : J^p)$ La suite $F = (F_n)$ est une filtration de A. En effet comme $I_{n+1} \subset I_n$ alors $(I_{n+1} : J^p) \subset (I_n : J^p)$ donc la suite F est décroissante. Il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = (J_n : J^t)$ d'où $J^t\ F_n \subseteq I_r$. Il existe aussi $r \in \mathbb{N}$ tel que $I^r F_p \subseteq I_p$ d'où $J^{r+t} F_p . F_n \subseteq I_{n+p} \Rightarrow F_p . F_n \subseteq (I_{n+p} : J^{r+t})$ et on a $F_p F_n \subseteq \bigcup\limits_u (I_{n+p} : J^u) = F_{p+n}$.

Notons $\mathcal{R}(f, J)$ l'anneau de Rees généralisé de F.

Posons $\mathcal{R}(f, J)_n = \cdots + At^{-2} + At^{-1} + A + (I_1 : J^n)t^1 + (I_2 : J^n)t^2 + \cdots$,

$\mathcal{R}(f, J)_n$ est $\mathcal{R}(f)$-module. C'est un sous module de $\mathcal{R}(f)$-module $\mathcal{R}(f, J)$.

$J^n\ \mathcal{R}(f, J)_n \subseteq + R(f)$. Soit x un élément régulier de J, alors on a

$\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{R}(f, J)_n \subseteq \mathcal{R}(f)\ x^{-n}$, $\mathcal{R}(f)$ étant nœthérien et $\mathcal{R}(f)\ x^{-n}$ étant un $\mathcal{R}(f)$ module de type fini alors $\mathcal{R}(f)\ x^{-n}$ est un module nœthérien et on déduit que $\mathcal{R}(f, J)_n$ est un $\mathcal{R}(f)$ module de type fini car c'est un sous module de $\mathcal{R}(f)\ x^{-n}$. Comme $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{R}_n = \mathcal{R}(f, J)_n \subseteq A[u, t] \subseteq \mathcal{R}(f)[t] = \mathcal{R}(f)[u^{-1}]$ où $t = u^{-1}$.

Il existe un entier $h \geq 0$ tel que $u^h\ \mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R}(f)$ où $u^h\ \mathcal{R}_n = \sum\limits_{r \in \mathbb{Z}} (I_{r+h} : J^n)t^r$

donc $(I_{r+h} : J^n) \subseteq I_r\ \ \forall r$. On déduit alors que $\beta_f(J^n) \in \mathbb{N}\ \ \forall n$.

V.2.10 Proposition

Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ deux filtrations de l'anneau A, la limite
$\overline{\beta}_f(g) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\beta_f(J_n)}{n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Preuve Posons $\beta(n) = \beta_f(J_n)$.

(i) Soit un entier tel que $\beta_f(J_n) = +\infty$ comme
$(I_{h+r} : J_n) \subseteq (I_{h+r} : J_{n+1}) \Rightarrow \beta(n) \leq \beta(n+1)$ si $\beta_f(J_{n+1}) \in \mathbb{N}$ alors
$\beta_f(J_n) \in \mathbb{N}$ absurde on alors $\beta_f(J_{n+1}) = +\infty$ et $\beta_f(g) = +\infty$

(ii) Supposons que $\beta_f(J^n) \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

De (i) on déduit que la suite $\beta_f(J_n)$ est croissante.

Montrons que $\beta(n+m) \leq \beta(n) + \beta(m)$. Comme $(I_{\beta(n)+r} : J_n) \subseteq I_r$ et
$(I_{\beta(m)+r} : J_m) \subseteq I_r$, $\forall\, r \geq 1$, $(I_{\beta(n)+\beta(m)+r} : J_{n+m}) \subseteq (I_{\beta(n)+\beta(m)+r} : J_n.J_m)$
$= ((I_{\beta(n)+\beta(m)+r} : J_n) : J_m) \subseteq (I_{\beta(m)+r} : J_m) \subseteq I_r$ car
$(I_{\beta(n)+q} : I_n) \subseteq I_q = I_{\beta(m)+r}$ si $q = \beta(m) + r$ d'où $\beta(m+n) \leq \beta(m) + \beta(n)$.

Soit $\underline{\beta} = \liminf \dfrac{\beta_f(J_n)}{n}$. $\forall\, \varepsilon > 0$, pour n assez grand on a
$\dfrac{\beta(m)}{m} \leq \underline{\beta} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Fixons m. Pour tout $n \geq 1$ écrivons $n = qm + r$ avec q et r étant des entiers naturels et $r < m$. Alors on a

$$\beta(n) = \beta(qm+r) \leq q\,\beta(m) + r\,\beta(1) < qm\,(\underline{\beta} + \frac{\varepsilon}{2}) + m\,\beta(1) \text{ d'où}$$

$\dfrac{\beta(n)}{n} \leq \dfrac{qn}{m}\,(\underline{\beta} + \dfrac{\varepsilon}{2}) + \dfrac{m}{n}\,\beta(1) \leq (\underline{\beta} + \dfrac{\varepsilon}{2}) + \dfrac{\beta(1)}{q}$ si $n\to+\infty$ alors $q \to +\infty$ donc pour n assez grand on a $\dfrac{\beta(1)}{q} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\dfrac{\beta(n)}{n} \leq \beta + \varepsilon$ on déduit alors $\underline{\beta} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\beta(n)}{n}$

V.2.11 Proposition

Pour toutes filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ de A, on a
$\bar{\beta}_f(J_n) = \beta_{u\mathcal{R}(f)}(J_n\mathcal{R}(f))$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Preuve. Il suffit de montrer que $\beta_f(J_n) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \beta_{u\mathcal{R}(f)}(J_n\mathcal{R}(f)) \in \mathbb{N}$

Posons $K = (u^m\mathcal{R}(f) : J_n\mathcal{R}(f))$ et $F = \sum_{s\in\mathbb{Z}} [(I_{m+s} : J_n) \cap I_s]t^s$.

Soit $xt^s \in K$ avec $x \in I_s$ alors $x J_m t^s \subseteq I_{m+s}t^s$ d'où $x J_n \subset I_{m+s}$ et $x \in (I_{m+s} : J_n) \cap I_s$ donc $K \subset F$. soit $xt^s \in F \Rightarrow x \in I_s$ et $xJ_n t^s \subset I_{m+s}t^s = I_{m+s}t^{s+m}u^m \Rightarrow x \in K$ d'où $K = F$.

Supposons $\beta_f(J_n) \in \mathbb{N}$. Soient $r \geq 1$ et $m = \beta_f(J_n) + r$

Alors $(u^{\beta_f(J_n)+r}\mathcal{R}(f) : J_n\mathcal{R}(f)) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} [(I_{\beta_f(J_n)+r+s} : J_n) \cap I_s]t^s$.

Comme $(I_{\beta_f(J_n)+r+s} : J_n) \subseteq I_{r+s}$ alors on a

$(u^{\beta_f(J_n)+r}\mathcal{R}(f) : J_n\mathcal{R}(f) \subseteq \Sigma I_{r+s} t^s u^r \mathcal{R}(f)$ donc

$\beta_{uR(f)}(J_n \mathcal{R}(f)) \leq \beta_f(J_n)$, (1)

Réciproquement supposons que $\beta_{uR(f)}(J_n\mathcal{R}(f)) \in \mathbb{N}$.

On a $(u^{\beta_{uR(f)}(J_n \mathcal{R}(f))+r} R(F) : J_n\mathcal{R}(f) \subseteq u^r\mathcal{R}(f) \quad \forall r \geq 1$.

On a $(I_{\beta_{uR(f)}(J_n\mathcal{R}(f)+r} : J_n) \subseteq I_r$ d'où

$\beta_f(J_n) \leq \beta_{uR(f)}(J_n \mathcal{R}(f))$, (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \beta_f(J_n) = \beta_{u\mathcal{R}(f)}(J_n \mathcal{R}(f))$,

V.2.12 <u>Lemme</u> (Lemme 6.19 [10])

Si b et c sont des éléments réguliers de l'anneau A, alors $\alpha_{cA}(b^nA) = \beta_{bA}(c^nA)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

V.2.13 <u>Théorème</u>

Si b est un élément régulier de A alors pour toute filtration f de A, on a $\overline{\beta}_f(b) = \overline{\alpha}_{b\mathcal{R}(f)}(u\mathcal{R}(f))$.

<u>Preuve</u>

Comme $\beta_f(b^nA) = \beta_{u\mathcal{R}(f)}(b^n\mathcal{R}(f))$, (proposition V.2.11) et $\beta_{u\mathcal{R}(f)}(b^n\mathcal{R}(f)) = \alpha_{b\mathcal{R}(f)}(u^n\mathcal{R}(f))$, (lemme V.2.12), on a $\overline{\beta}_f(b) = \overline{\alpha}_{b\mathcal{R}(f)}(u\mathcal{R}(f))$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Ayégnon, Propriétés asymptotiques des filtrations approximables par des puissances d'id'éaux.
Thèse 3e cycle Université d'Abidjan, Juin 1988.

[2] P. Ayégnon and D. Sangaré, Generalized Samuel numbers and AP filtrations , J. Pure Appl, Algebra 65 (1990) 1-13.

[3] P. Ayégnon et H. Dichi, Extensions aux filtrations des nombres de Samuel associés aux idéaux. Comm. in Algebra, 22 (9), 3249-3263 (1994).

[4] P. Ayégnon, H. Dichi and D. Sangaré, Asymptotic Properties of filtrations on a module Comm. in Algebra, 22 (7), 2607-2619 (1994).

[5] W. Bishop, A theory of multiplicity for multiplicative filtrations, J. Reine Angew Math. 277 : 8-26, (1975).

[6] H. Dichi, Integral dependence over a filtration, J. Pure Appl. Algebra 58 : 7-18, (1989).

[7] H. Dichi, Strongly AP filtrations, integral dependence and prüferian equivalence in Dedekind domains, J. Pure Appl. Algebra, (1993).

[8] H. Dichi, D. Sangaré, M. Soumaré filtrations, Integral dependence, reduction, f-good filtrations, Comm. in Algebra, 20(8). 2393 - 2418 (1992).

[9] M. Lejeune, B. Teissier, Séminaire de Mathématique, Clôture intégrale des idéaux et équisingularité. Ecole Polytechnique, (1974).

[10] S. Mc Adam, Primes Associated to an ideal, Contemporary Mathematics 102. (1989).

[11] S. Mc Adam, Bounded Deviations, J. Algebra, 137, 388-399 (1991).

[12] M. Nagata, Note on a paper of Samuel concerning asymptotic properties of ideals, Memoirs coll. Sci. Univ. of Kyoto, Serie A Vol. XXX, Mathematics n°2, (1957).

[13] J. W. Petro, Some results in the theory of pseudo-valuations, Ph. D. dissertation. State University of Lowa, Lowa City, 1961.

[14] D. Rees Valuation associatied with a local ring (1) Proc. London Math. Soc. (3) 5 (1955) 107-128.

[15] D. Rees, Lectures on the asymptotic theory of ideals London Mathematical Society Lecture Note series 113. (1988.)

[16] P. Samuel, Some asymptotic properties of powers of ideals Ann. of Math. 56 (1952), 11-21.

[17] D. Sangaré, Sur diverses généralisations de la formule $\overline{v}_{I^n} = \frac{1}{n}\overline{v}_I$ aux pseudo-valuations associées à une filtration, Département de Mathématiques, Université d'Abidjan, Côte d'ivoire.(1984).

[18] D. Sangaré, Some aspects of the asymptotic theory of ideals, Generalization to filtration. Département de Mathématiques, Université d'Abidjan, Côte d'ivoire .(1993)